

**ACTIVITÉS
SECOND CYCLE
SECONDE - PREMIÈRE - TERMINALE**

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)

N° 69

Si vous voulez savoir ce qu'est
**l'Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public**
voyez page 2.

*Si vous voulez adhérer à l'A.P.M.E.P.,
Si vous voulez commander des brochures,
écrivez à :*

Secrétariat de l'A.P.M.E.P.
26 rue Duméril
75013 PARIS

Bon de commande dans le Bulletin National.
Les brochures peuvent être envoyées
contre remboursement (frais à votre charge).

**ACTIVITÉS
SECOND CYCLE
SECONDE - PREMIÈRE - TERMINALE**

Publication de l'A.P.M.E.P.

(Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public)

N° 69

QU'EST-CE QUE L'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1909. Elle regroupe des enseignants concernés par les mathématiques de la Maternelle à l'Université.

Ces maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux (de la Maternelle à l'Université), mettent en commun leurs expériences pédagogiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique et conjuguent leurs efforts pour améliorer l'enseignement des mathématiques (contenu, méthodes, etc.).

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'Ecole Élémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres), sans oublier la formation permanente. En liaison avec les autres Associations de spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services avec les Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'A.P.M.E.P. est organisée en Régionales, par académies (certaines avec des sections départementales) qui ont leurs activités pédagogiques propres. Une collaboration souvent fructueuse s'est instaurée avec les IREM sur des objectifs communs.

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique, pédagogique et administrative, et qui rapporte la vie de l'association, ainsi qu'un Bulletin Grande Vitesse (BGV) (6 numéros par an) qui est un supplément au bulletin vert, contenant des informations... qui ne peuvent attendre. Elle édite aussi des recueils de sujets d'examens ou concours : Fin de 3^e, Baccalauréat, D.E.U.G.

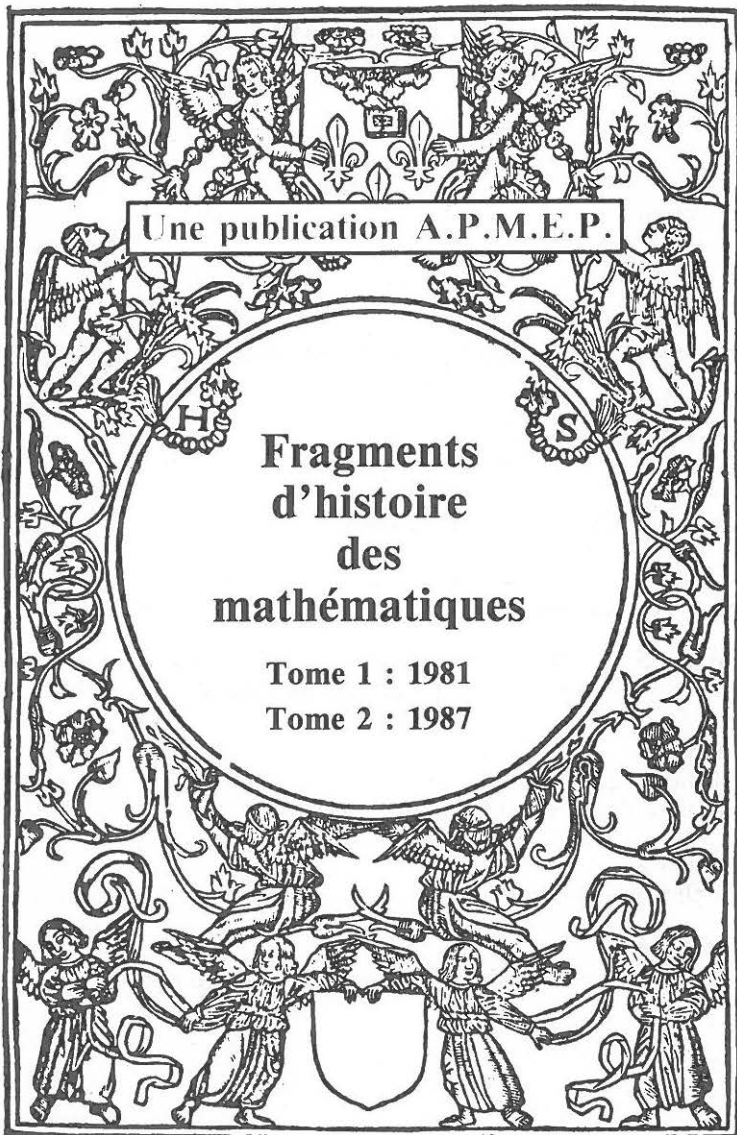
De plus, elle publie une série de brochures et d'ouvrages de documentation (vendus au prix coûtant) concernant tous les niveaux d'enseignement, et qui ne sont ni des manuels, ni des traités.

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

A.P.M.E.P.
26 rue Duménil, 75013 PARIS
(1) 43.31.34.05

Sommaire

Introduction	5
Clés et documents	6
Document 1	
Les tribulations d'un barycentre sur une droite AB	7
Document 2	
Fiches - Problèmes	11
Document 3	
Sept récipients pour un même volume	47
Document 4	
A propos du nombre d'or	55
Document 5	
Domaine d'attraction pour la méthode de Newton	77
Document 6	
Problème d'équilibre ou travail avec des "vecteurs" non géométriques	89
Document 7	
La duplication du cube	93
Document 8	
Les angles : leur utilisation dans les problèmes de géométrie ...	115



Une publication A.P.M.E.P.

Fragments
d'histoire
des
mathématiques

Tome 1 : 1981

Tome 2 : 1987

¶ Insuper mathematicū opus quadripartitū ¶ De Numeris Perfectis ¶ De
Mathematicis Rosis ¶ De Geometricis Corporibus
¶ De Geometricis Supplementis

Introduction

Cette brochure rassemble des documents de travail qui ont déjà été utilisés dans des classes du second cycle.

Il s'agit ici, soit de propositions de problèmes, soit d'études plus longues qui, après élaboration et expérience, ont été remaniées par leurs auteurs pour figurer dans cette brochure.

On trouvera à la page suivante le tableau clés et documents destiné à faciliter la sélection des documents les plus pertinents à la question que se pose le lecteur.

Chaque auteur a fait ce travail important de mise en forme en espérant qu'il pourra être utile, susciter des échanges et surtout, éveiller l'intérêt et contribuer à développer l'initiative des élèves.

Pour l'A.P.M.E.P., je remercie chacun d'entre eux, en toute amitié, très chaleureusement.

Denise HAUGAZEAU

Documents \ Quelques clés	seconde	première	terminale	géométrie	calculs de volumes	trigonométrie	nombres complexes	fonctions	suites	itérations
1	×			×				×		
2			×	×	×	×		×	×	×
3	×	×	×		×			×		
4	×		×	×		×	×		×	
5		×	×					×		×
6	×				×				×	×
7		×	×	×		×		×	×	×
8		×	×	×						

Les tribulations d'un barycentre sur une droite AB

G. Mison

Essai de mise en situation de recherche en Seconde

Nous sommes en octobre dans une classe de Seconde. En début d'heure, le problème suivant est soumis aux élèves :

Deux points A et B sont respectivement affectés des coefficients 2 et b . Suivant les valeurs de b , étudier l'existence et la position du barycentre G de (A,2) et (B,b).

1. Quelques réactions immédiates (conséquences du cours précédent)

— $b \neq -2$

— G est un point de la droite AB

— $\vec{AG} = \frac{b}{b+2} \vec{AB}$.

2. Je demande alors aux élèves, seuls ou par groupe de deux, d'écrire toutes les questions qui leur viennent à l'esprit. Après 15 minutes de recherche, on fait oralement le tour des questions que les élèves se sont posées !

On peut les classer en trois catégories :

Type 1 : un exemple "Où est G si $b > 0$?"

Type 2 : un exemple "Pour quelles valeurs de b, G est-il un point du segment [AB] ?"

Type 3 : un exemple "Que se passe-t-il lorsque b se rapproche de -2 ?"

Les questions des deux premiers types sont de loin les plus nombreuses. Un seul groupe s'est posé des questions du type 3. On s'occupe d'abord des questions 1 et 2.

3. Après discussion, il est décidé que les questions du type 1 ne sont pas très intéressantes.

Pourquoi choisir $b = 0$ plutôt que $b = 19 \dots$?

Comment savoir si l'on a fait intervenir toutes les valeurs intéressantes pour b ?

On décide alors de s'intéresser uniquement aux questions de type 2. On pourra répondre ensuite aux questions de type 1.

4. On écrit au tableau les questions dictées par les élèves.

- [1] Pour quelles valeurs de b , G est-il le milieu de $[AB]$?
- [2] Pour quelles valeurs de b , G est-il un point du segment $[AB]$?
- [3] Pour quelles valeurs de b , G est-il hors du segment $[AB]$?
- [4] Pour quelles valeurs de b , G est-il à droite de A ?
- [5] Pour quelles valeurs de b , G est-il à gauche de B ?
- [6] Pour quelles valeurs de b , G est-il en A ?
- [7] Pour quelles valeurs de b , G est-il en B ?
- [8] Pour quelles valeurs de b , G est-il le symétrique de B par rapport à A ?

Une dizaine de questions du genre de la question [8] (une position précise de G) sont posées. Elles se ressemblent toutes et on ne les écrit pas.

5. Je demande alors ce qu'il faudrait faire pour répondre à chacune des questions écrites au tableau.

Par exemple, pour [1], on écrit : résoudre l'équation $\frac{b}{2+b} = \frac{1}{2}$

Pour [2], résoudre les deux inéquations : $0 \leq \frac{b}{2+b} \leq 1$

Pour [3], on n'écrit rien, car la réponse à [2] donnera la réponse à [3]...

6. On commence alors la résolution du problème.

a) Les élèves pensent qu'il faut d'abord résoudre les équations, ce qui est plus facile que de résoudre des inéquations.

Conduisent à des équations les questions [1], [6], [7], [8].

Pour [1], les élèves trouvent $b=2$.

Pour [6], on trouve $b=0$.

Pour [7], c'est impossible.

Pour [8], on trouve $b=-1$.

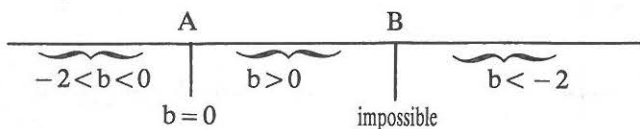
b) C'est l'occasion d'apprendre à résoudre des inéquations du type

$$\frac{b}{2+b} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{b}{2+b} < 1$$

• Etudier le signe de b , de $2+b$, de $\frac{b}{2+b}$ (tableau).

• Etudier le signe de $\frac{b}{2+b} - 1$.

A la fin de cette étude, on est conduit à la conclusion :



7. Reprenons alors les questions du type 3.

On écrit au tableau les questions dictées par les élèves :

[1] Que se passe-t-il si b devient très grand ?

[2] Que se passe-t-il si b devient très petit ?

[3] Que se passe-t-il si b est voisin de (-2) ?

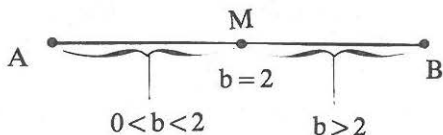
Question [1] :

On calcule $\frac{b}{b+2}$ pour $b = 10$; $b = 100$; $b = 1000$; ... ; $b = 10^6$; ...

On trouve successivement $\frac{10}{12}$; $\frac{100}{102}$; $\frac{1000}{1002}$; ... dont on donne des valeurs approchées à l'aide d'une calculatrice.

Les élèves montrent d'abord que $\frac{b}{b+2}$ est positif, que le numérateur reste inférieur au dénominateur, que lorsque b augmente, la différence 2 paraît "de plus en plus petite" par rapport à b , donc $\frac{b}{b+2}$ se "rapproche de 1" tout en restant inférieur à 1. Ainsi, sur le segment $[AB]$, G se rapproche de B , à gauche de B , sans atteindre B ...

Si b augmente de 0 à 2, G décrit $[AM]$ (M : milieu de $[AB]$) et si b décrit $[2; +\infty[$, G décrit le segment $[M, B]$... sans atteindre B .



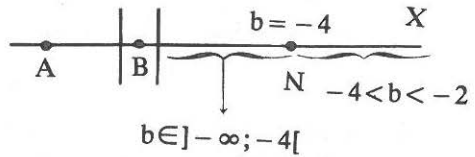
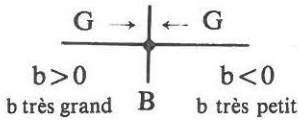
Question [2] :

On calcule $\frac{b}{b+2}$ pour $b = -10$; $b = -100$; $b = -1000$; ... ; $b = -10^6$; ... On trouve :

$$\frac{-10}{-8} ; \frac{-100}{-98} ; \frac{-1000}{-998} ; \dots$$

Ces rationnels sont encore positifs, mais le numérateur est supérieur (en valeur absolue) au dénominateur, donc $\frac{b}{b+2}$ est supérieur à 1 et "se rapproche" de 1 lorsque b devient "de plus en plus petit". Le point G se "rapproche de B " à droite de B , sans atteindre B .

On a remarqué que, pour $b = -4$, G est en N tel que $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AB}$.
 Lorsque b diminue à partir de (-4) , alors G décrit le segment $[NB[$, sans atteindre B...



Question [3] :

On remarque d'abord que, pour b , il y a "deux façons de se rapprocher" de (-2) :

"à gauche" (par valeurs inférieures) : $-3 ; -2,5 ; -2,1 ; -2,01 ; -2,001 ; \dots$

"à droite" (par valeurs supérieures) : $-1 ; -1,5 ; -1,9 ; -1,99 ; -1,999 ; \dots$

On calcule chaque fois : $\frac{b}{2+b}$.

b	-3	-2,5	-2,1	-2,01	-2,001	-2	-1,999	-1,99	-1,9	-1,5	-1
$\frac{b}{2+b}$	3	5	21	201	2001		-1999	-199	-19	-3	-1
	(I)						(II)				

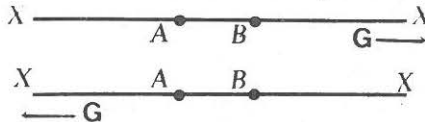
Dans la *situation I*, b et $2+b$ sont négatifs ; $\frac{b}{2+b}$ est positif.

Le numérateur (en valeur absolue) est "voisin de 2" ; quant au dénominateur il devient (en valeur absolue) de plus en plus petit.

$\frac{b}{2+b}$ est donc un rationnel de plus en plus grand.

G décrit la demi-droite BX , vers la droite... et de plus en plus vite...

Dans la *situation II*, $\frac{b}{2+b}$ est négatif et de plus en plus grand en valeur absolue. G décrit la demi-droite AX' , vers la gauche.



8. Sollicités par le professeur, les dessinateurs de la classe préparent une bande dessinée avec un point G qui se promène sur la droite AB. Ce "point G" a des jambes et court de plus en plus vite ou de plus en plus lentement, avec quelque problème de représentation lorsque "b franchira la valeur (-2) ".

Fiches - Problèmes

J. Lubczanski

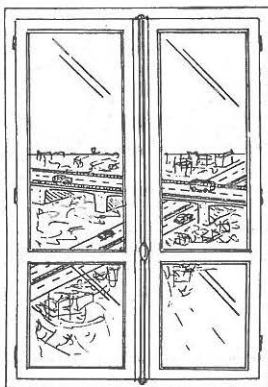
Les problèmes qui suivent sont des problèmes de “modélisation” où les mathématiques apparaissent comme un outil efficace.

Il n’y a pas de mode d’emploi particulier ; j’indique simplement la façon dont je travaille : ces problèmes sont les “devoirs à la maison”, mais on commence à les chercher en classe, en présence du professeur. La règle que j’impose est : “pas de questions pendant la première heure”, car il faut à mon avis avoir fréquenté seul un problème, au début. Passée la première heure, je suis par contre le plus disponible possible et j’interviens le plus souvent individuellement.

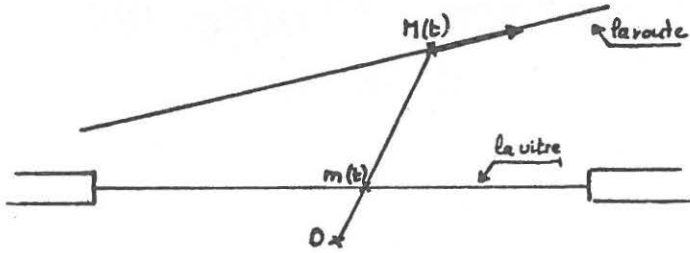
Après ces deux ou trois heures de recherche en classe, chaque élève dispose d’une semaine pour rédiger son travail. Je n’exige pas que le problème soit terminé, mais le goût de “l’ouvrage bien fait” pousse beaucoup d’élèves à essayer de terminer, ce que j’apprécie. Les copies ne sont pas notées.

J’ajouterai que le côté “concret” plait : “on voit enfin à quoi ça peut servir, les maths !”.

PAR LA FENÊTRE...



Une auto roule à vitesse constante. Vous la voyez par la fenêtre ; soit, vue de dessus :

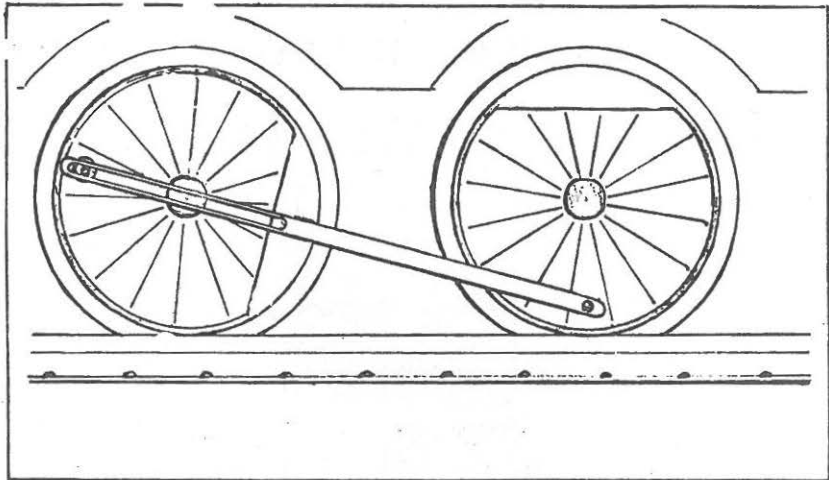


Vous êtes au point O ; $m(t)$ est la position apparente de l'auto, dont la position réelle est $M(t)$. Calculer, en fonction du temps, la vitesse apparente de l'auto, c'est-à-dire $v(t)$, la vitesse de $m(t)$. (On introduira les paramètres nécessaires sous forme littérale).

Tracer la courbe représentative de $t \rightarrow v(t)$, pour un exemple numérique.

A PROPOS DE TRAINS...

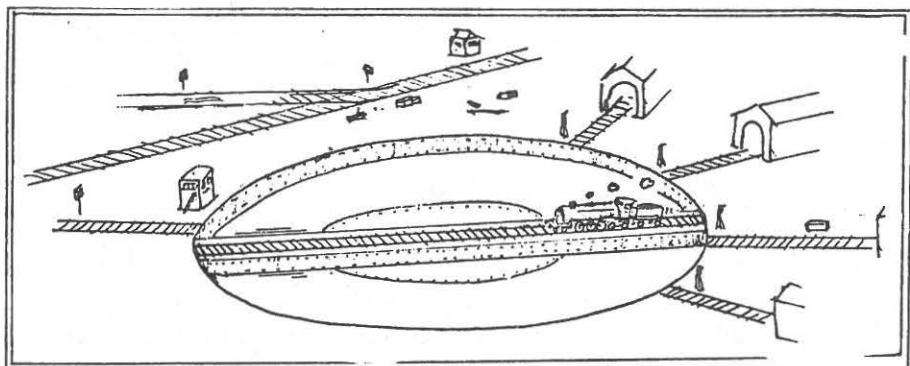
a)



Cet embiellage de locomotive peut-il fonctionner ?

b) Il n'y a rien à faire : Dédé refuse toujours d'immobiliser sa machine pendant la manœuvre du pont tournant !

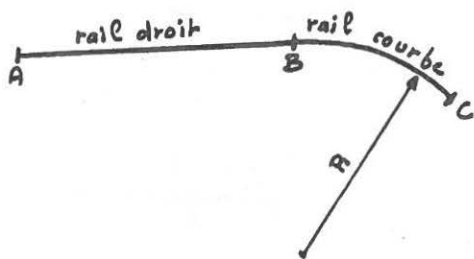
Quelle est la trajectoire de sa locomotive ?



RACCORDEMENT DE VOIES FERRÉES



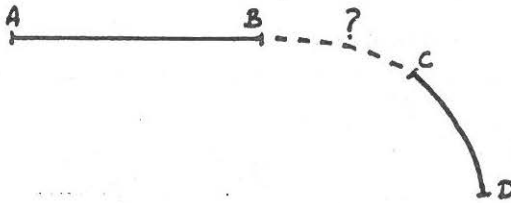
Si dans les boîtes de trains électrique miniatures, on ne dispose le plus souvent que de "rails droits" et de "rails courbes" pour construire un réseau, il n'en est pas de même pour les trains réels ; en effet, un raccordement direct comme dessiné ci-contre est impossible car un train arrivant de A à grande vitesse serait "instantanément" soumis au point B à une force centrifuge importante et dangereuse pour la stabilité du train et des voyageurs !



Pour compenser les effets de la force d'inertie centrifuge, on donne d'ailleurs à la voie un "dévers" (virage relevé), fonction du rayon de courbure.

Mais ce dévers lui non plus ne peut être instauré brutalement au point B.

Le problème est donc le suivant :



AB est une portion de voie droite.

CD est une portion de voie circulaire.

Il faut trouver une courbe joignant B et C de façon que la force centrifuge s'établisse progressivement.

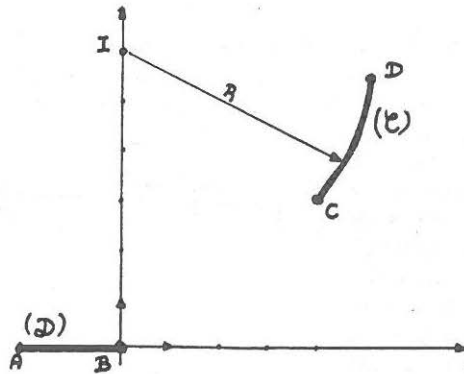
I. Première approche du problème

Dans un repère orthonormé, on donne $B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $I \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.
On note (D) la droite $y=0$ et (C) le cercle de centre I passant par C.

De combien de façons peut-on raccorder la portion rectiligne AB et la portion circulaire CD :

- par un segment de droite (Γ_1) ?
- par un segment (Γ_2) de parabole d'axe vertical ?
- par un segment (Γ_3) de cubique (avec une équation du type

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d) ?$$



Dans les cas où plusieurs courbes sont possibles, l'une d'entre elles vous semble-t-elle plus apte à répondre au problème posé ? Pourquoi ?

On donnera l'équation de chaque courbe (Γ_i) proposée et on les dessinera.

II. Notion de contact d'ordre n

Définition :

On dit que deux courbes, représentatives de deux fonctions f et g , ont un contact d'ordre n au point d'abscisse x_0 si :

- f et g sont dérivables n fois au point x_0
- on a $f(x_0) = g(x_0)$; $f'(x_0) = g'(x_0)$; ... $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$.

Remarque :

- un contact d'ordre 0 signifie un "raccordement"
- un contact d'ordre 1 signifie un raccordement avec des tangentes qui coïncident.

On se propose de calculer l'ordre des contacts des courbes (Γ_i) du paragraphe I avec (\mathcal{J}) au point B, et avec (\mathcal{C}) au point C.

Pour cela :

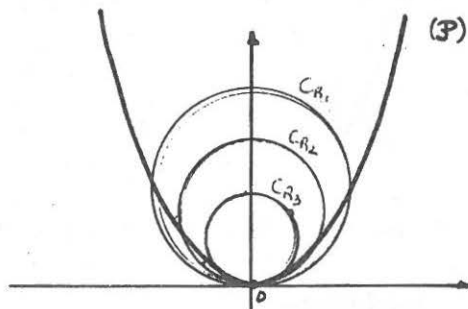
- déterminer la fonction g dont l'arc \widehat{CD} est une représentation ;
- pour chacune des courbes (Γ_i) , calculer l'ordre des contacts avec (\mathcal{J}) en B et avec (\mathcal{C}) en C ;
- dans chacun des cas b) et c) du paragraphe I, pouvait-on avoir un "meilleur" contact (c'est-à-dire avoir n plus grand) en B ? en C ? à la fois en B et en C ? Quelle courbe vous semble-t-elle à présent le mieux répondre au problème ?

III. Notion de rayon de courbure

Considérons la parabole (\mathcal{P}) d'équation : $2py = x^2$ dans un repère orthonormé $(p \in \mathbf{R})$. Son allure est représentée ci-dessous.

Il existe une infinité — disons plutôt une "famille" — $(C_R)_{R \in \mathbf{R}}$ de cercles de rayon R tangents à la parabole (\mathcal{P}) en son sommet 0 (contact d'ordre 1).

- Etablir l'équation d'un cercle C_R .
- Quelle fonction g_R est représentée par le demi-cercle inférieur de C_R ?
- Montrer qu'il existe un rayon R_0 pour lequel le contact de (\mathcal{P}) et de C_{R_0} en 0 est d'ordre 2.



Calculer R_0 en fonction de p .

R_0 s'appelle le *rayon de courbure* de (\mathcal{J}) en 0 (et C_{R_0} le *cercle osculateur* de (\mathcal{J}) en 0).

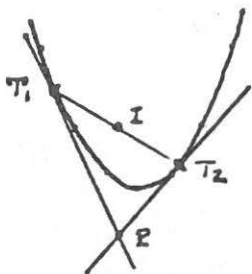
d) Revenons à notre problème de raccordement entre (\mathcal{D}) et (\mathcal{C}) : existe-t-il une parabole dont (\mathcal{C}) est le cercle osculateur, et passant par B ? Montrer que, si on accepte que le raccordement avec (\mathcal{C}) se fasse en un autre point que C, un segment de parabole peut réaliser ce raccordement avec un contact d'ordre 2 avec (\mathcal{C}) . Quel est alors l'ordre du contact avec (\mathcal{D}) en B ? (indication : toutes les paraboles ne sont pas d'axe vertical!...)

Obtient-on de nouvelles solutions à notre problème ?

IV. Une propriété géométrique de la parabole

Elargissons le problème : cherchons, géométriquement, une parabole (d'axe oblique) passant par B et C, et tangente en ces points à AB et CD : autrement dit, la question est de trouver une parabole passant par deux points donnés avec deux tangentes données.

a) Soit T_1 et T_2 deux points d'une parabole P et I le milieu de $[T_1, T_2]$. Si P est le point d'intersection des tangentes à (\mathcal{J}) en T_1 et T_2 , montrer, en utilisant un repère adapté, que PI est parallèle à l'axe de la parabole P.



b) En déduire, T_1, T_2 et (\mathcal{J}) étant donnés, la construction géométrique du foyer et de la directrice d'une parabole (\mathcal{J}) , tangente à T_1P en T_1 et à T_2P en T_2 .

c) Application à notre problème de raccordement : tracé et équation d'une parabole ayant en B et en C un contact d'ordre 1 avec AB et CD.

d) Comparer la solution obtenue avec celle(s) du III.d).

V. Conclusions

Un segment de parabole peut-il convenir ? à quelles conditions ? et un segment de cubique ?

GARDEZ VOS DISTANCES !

Lorsque deux voitures roulent l'une derrière l'autre, la sécurité exige de conserver entre elles une distance minimale, en cas de freinage brusque de la voiture de tête. Mais quelle distance ? Comment la calculer ?

Et si on observe cet écart minimal, cette "distance de sécurité", ne risque-t-on pas de ralentir le trafic ? De créer des bouchons eux aussi nuisibles à la sécurité ?

C'est à ces questions qu'on va proposer ici des réponses...

I. Etude du freinage d'une auto

La situation est la suivante :

- à l'instant $t = -5$, un véhicule roule, en ligne droite, à la vitesse uniforme v ,
- à l'instant $t = 0$, le conducteur freine,
- à l'instant $t = a$, le véhicule s'arrête et reste immobile jusqu'à l'instant $t = a + 5$.

On recherche la loi horaire du véhicule pendant le freinage, c'est-à-dire la position $x(t)$ du véhicule à l'instant t , pour $t \in [0, a]$.

Le modèle qu'on va établir sera plus près de la réalité si la position x , la vitesse x' et l'accélération x'' sont des fonctions dérivables sur l'intervalle $[-5, a + 5]$.

1. a) Combien valent x' , x'' et x''' pour $-5 < t < 0$?
pour $a < t \leq a + 5$?

b) En déduire les valeurs que doivent prendre ces fonctions en $t = 0$ et $t = a$ pour que x , x' et x'' soient dérivables sur $[-5, a + 5]$.

Le théorème fondamental :

Si f est un polynôme,

$$f(a) = 0 \iff \exists P \text{ polynôme tel que}$$

$$\forall t, f(t) = (t - a) P(t).$$

2. On va chercher une expression polynomiale pour $x(t)$ (et donc aussi pour ses dérivées).

a) Montrer, en utilisant les valeurs de x' , x'' et x''' pour $t = a$, que x' est de la forme : $x'(t) = (t - a)^3 R(t)$ où R est un polynôme.

b) Montrer, en utilisant les valeurs de x' , x'' et x''' pour $t = 0$ qu'on peut prendre pour R un polynôme du second degré dont on déterminera les coefficients en fonction de a et v .

3. a) Etablir l'expression de $x(t)$ et en déduire que la distance de freinage d vaut $\frac{va}{2}$.

b) Montrer que x'' se factorise sous la forme $x''(t) = -\frac{30v}{a^5}t^2(t-a)^2$.

On note γ la décélération maximale au cours du freinage (γ est le maximum de $-x''$ sur $[0,a]$).

Calculer γ en fonction de v et a .

4. Application numérique

a) Dresser un tableau des valeurs de d pour des valeurs de v allant de 30 à 135 km/h, de 15 en 15 km/h et pour a allant de 1 à 8 s.

b) Dresser le tableau correspondant des valeurs, en kgf, de la force maximale $m\gamma$ s'exerçant sur un passager de la voiture au cours du freinage (on prendra $m=70$ kg et $g=9,81$). Qu'observe-t-on ?

c) Quelle est la valeur minimale du "coefficient de freinage" a/v pour que cette force soit inférieure au poids du passager ?

II. Distance de freinage et distance de sécurité

On pose $C = \frac{a}{v}$ (v en m/s ; a en secondes), coefficient de freinage d'un véhicule : s'il roule à la vitesse v , il lui faut un temps a pour s'arrêter. On suppose C constant pour un véhicule donné. On utilise le modèle de la partie I.

a) *Distance de freinage* :

— exprimer la distance de freinage d en fonction de C et v ;

— calculer C pour les données $v=90$ km/h et $d=75$ m ;

— tracer la courbe $v \rightarrow d$ pour $v \in [0,50]$.

b) *Distance de sécurité* : Deux véhicules, de coefficients de freinage C_1 et C_2 , roulent à la vitesse uniforme v sur une autoroute, l'un derrière l'autre, à la distance D .

On va chercher les conditions sur D pour qu'il n'y ait pas collision au cas où le premier véhicule freine brusquement.

On prend $t=0$ au moment où le premier véhicule commence à freiner.

— Quelle est, en fonction de C_1 et v , la distance d_1 parcourue par le premier véhicule entre l'instant $t=0$ et l'instant où il s'immobilise ?

— Soit t_0 le temps de réaction du conducteur du deuxième véhicule (il commence à freiner à l'instant t_0).

Quelle est, en fonction de C_2 , v et t_0 , la distance d_2 parcourue par le second véhicule entre l'instant $t=0$ et l'instant où il s'immobilise ?

— Quelle relation doit-il y avoir entre D , C_1 , C_2 , t_0 et v pour qu'il n'y ait pas collision ? Et pour être à 3 m l'un de l'autre après immobilisation ?

— On suppose $t_0=1/3$ s. En outre les coefficients de freinage des différents véhicules en circulation sont voisins : on prendra $\|C_1 - C_2\| \leq \frac{1}{150}$.

En tenant compte de la distance de 3 m après immobilisation, donner l'expression de la distance minimale ("distance de sécurité") en fonction de v .

— Tracer la courbe $v \rightarrow D$ pour $v \in [0, 50]$.

III. Densité critique du trafic

Soit une autoroute sur laquelle tous les véhicules roulent à la vitesse v , en respectant la distance de sécurité D .

D vérifie :

$$D = 3 + \frac{v}{3} + \frac{v^2}{300}.$$

a) Quel est, en fonction de v , le temps séparant le passage de deux véhicules au même endroit ?

Calculer, en fonction de v , le débit δ (nombre de véhicules par heure) à un endroit donné.

Etudier et tracer la courbe $v \rightarrow \delta$ pour $v \in [0, 50]$.

b) Analyser et interpréter les résultats du 1) : caractériser graphiquement les situations non "embouteillées" ; y a-t-il une vitesse où le trafic est plus fluide ?

Quels conseils donneriez-vous aux automobilistes ?

Solution

I. Etude du freinage d'une auto

1. a) Valeurs de x' , x'' et x''' avant et après le freinage

Pour $-5 \leq t < 0$, le mouvement est rectiligne uniforme : $x'(t) = v$; $x''(t) = 0$. Quant à x''' , dérivée de x'' , elle est également nulle.

Pour $a < t \leq a + 5$, il en est de même, mais la vitesse aussi est nulle :

$$x'(t) = x''(t) = x'''(t) = 0.$$

b) Valeurs de x' , x'' et x''' aux bornes

En $t = 0$: x'' doit être dérivable à droite et à gauche de 0, et $x'''(0^+)$ doit être égal à $x'''(0^-)$ pour que x'' soit dérivable en 0 (en d'autres termes les demi-tangentes doivent coïncider). Or x'' est nulle et donc de dérivée nulle à gauche de 0 (c'est-à-dire pour les valeurs négatives de t).

On doit donc avoir $x'''(0) = 0$.

Le même raisonnement, appliqué à x' et à x donne : $x'(0) = v$
 $x''(0) = 0$

En $t = a$: de la même façon, on doit avoir $x'(a) = x''(a) = x'''(a) = 0$.

2. a) *Factorisation de x'*

$$x'(a) = 0 \Rightarrow \exists P \text{ polynôme tel que } x'(t) = (t-a)P(t)$$

alors
$$x''(t) = (t-a)P'(t) + P(t)$$

$$x''(a) = 0 \Rightarrow P(a) = 0 \Rightarrow \exists Q \text{ polynôme tel que } P(t) = (t-a)Q(t)$$

soit
$$x'(t) = (t-a)^2 Q(t)$$

ce qui donne :
$$x''(t) = 2(t-a)Q(t) + (t-a)^2 Q'(t)$$

et
$$x'''(t) = 2Q(t) + 2(t-a)Q'(t) + 2(t-a)Q'(t) + (t-a)^2 Q''(t)$$

$$= 2Q(t) + 4(t-a)Q'(t) + (t-a)^2 Q''(t)$$

$$x'''(a) = 0 \Rightarrow Q(a) = 0 \Rightarrow \exists R \text{ polynôme tel que } Q(t) = (t-a)R(t)$$

soit finalement :

$$x'(t) = (t-a)^3 R(t)$$

b) *Expression de x'*

Partant de $x'(t) = (t-a)^3 R(t)$ on obtient successivement :

$$x''(t) = 3(t-a)^2 R(t) + (t-a)^3 R'(t)$$

$$x'''(t) = 6(t-a)R(t) + 6(t-a)^2 R'(t) + (t-a)^3 R''(t)$$

Faisant $t=0$ dans les expressions de x' , x'' et x''' , on trouve :

$$x'(0) = v \Leftrightarrow -a^3 R(0) = v$$

$$x''(0) = 0 \Leftrightarrow 3a^2 R(0) - a^3 R'(0) = 0$$

$$x'''(0) = 0 \Leftrightarrow -6a R(0) + 6a^2 R'(0) - a^3 R''(0) = 0$$

D'où : $R(0) = -\frac{v}{a^3}$ puis $R'(0) = -\frac{3v}{a^4}$ et enfin $R''(0) = -\frac{12v}{a^5}$

On peut alors prendre pour R un polynôme du second degré :

$$R(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma \Rightarrow R(0) = \gamma ; R'(0) = \beta \text{ et } R''(0) = 2\alpha .$$

On en tire :
$$R(t) = -\frac{6v}{a^5} t^2 - \frac{3v}{a^4} t - \frac{v}{a^3}$$

ou encore :
$$R(t) = -\frac{v}{a^5} (6t^2 + 3at + a^2)$$

3. a) *Expression de x*

On va chercher la primitive de $x'(t)$ qui vaut 0 pour $t=0$.

$$x'(t) = -\frac{v}{a^5} (t-a)^3 (6t^2 + 3at + a^2)$$

$$= -\frac{v}{a^5} (t^3 - 3at^2 + 3a^2t - a^3)(6t^2 + 3at + a^2)$$

soit après développement :

$$x'(t) = -\frac{v}{a^5} (6t^5 - 15at^4 + 10a^2t^3 - a^5)$$

on en tire alors $x(t)$:

$$x(t) = \frac{v}{a^5} \left(-t^6 + 3at^5 - \frac{5}{2}a^2t^4 + a^5t \right)$$

La distance de freinage s'obtient en calculant $x(a)$:

$$d = \frac{v}{a^5} \left(-a^6 + 3a^6 - \frac{5}{2}a^6 + a^6 \right) = \frac{v}{a^5} \times \frac{a^6}{2} \quad \text{d'où} \quad d = \frac{av}{2}$$

b) *Expression factorisé de x''*

La dérivation de x' donne : $x''(t) = -\frac{v}{a^5} [(t-a)^3(6t^2 + 3at + a^2)]'$

Soit :

$$\begin{aligned} x''(t) &= -\frac{v}{a^5} [3(t-a)^2(6t^2 + 3at + a^2) + \underline{(t-a)^3(12t + 3a)}] \\ &= -\frac{v}{a^5} \cdot 3(t-a)^2 \underbrace{[6t^2 + 3at + a^2 + (t-a)(4t + a)]}_{10t^2} = -\frac{30v}{a^5} t^2(t-a)^2 \end{aligned}$$

Donc $-x''(t) = \frac{30v}{a^5} t^2(t-a)^2$ donne la décélération à l'instant t .

Les variations de cette fonction sont celles de $t \rightarrow t^2(t-a)^2$.

$$[t^2(t-a)^2]' = 2t(t-a)^2 + 2t^2(t-a) = \underbrace{2t(t-a)}_{< 0 \text{ sur }]0, a[} (2t-a) \quad \text{du signe de } a-2t$$

t	0	a/2	a
$-x'''$	0	+	0
$-x''$	0	γ	0

On en déduit que $-x''$ prend son maximum pour $t = a/2$.

Le calcul donne alors :

$$\gamma = \frac{15}{8} \cdot \frac{v}{a}$$

4. Application numérique

Voici un programme de calcul des valeurs de d :

```
10 : FOR V=30 TO 135 STEP 15
20 : FOR A=1 TO 8
30 : PRINT INT (A*V / 7.2)
40 : NEXT A
50 : NEXT V
60 : END
```

Si v est en km/h, $d = \frac{av}{2 \times 3,6}$

Ce programme remplit le tableau colonne par colonne.

Durée en s.	Vitesse en km/h							
	30	45	60	75	90	105	120	135
1	4	6	8	10	12	14	16	18
2	8	12	16	20	25	29	33	37
3	12	18	25	31	37	43	50	56
Distance de freinage	4	16	25	33	41	50	58	66
5	20	31	41	52	62	72	83	93
6	25	37	50	62	75	87	100	112
7	29	43	58	72	87	102	116	131
8	33	50	66	83	100	116	133	150

Force exercée sur le passager

$$\text{Si } v \text{ est en km/h, on aura } \gamma \text{ en m.s}^{-2} \text{ par } \gamma = \frac{15}{8} \cdot \frac{v}{3,6} \cdot \frac{1}{a} = \frac{15}{28,8} \cdot \frac{v}{a}$$

$$\text{Alors la force, en N, vaut } \frac{15}{28,8} \cdot 70 \cdot \frac{v}{a} = \frac{1050}{28,8} \cdot \frac{v}{a}$$

$$\text{et donc en kg.f : } \frac{1050}{28,8} \cdot \frac{1}{9,81} \cdot \frac{v}{a} = \frac{1050}{282,528} \cdot \frac{v}{a}$$

D'où le programme de calcul de F :

10 : K = 1050 / 282.528

20 : FOR A = 1 TO 8

30 : FOR V = 30 TO 135 STEP 15

40 : PRINT INT (K*V/A)

50 : NEXT V

60 : NEXT A

70 : END.

Ce programme remplit le
tableau ligne par ligne

Durée en s.	Vitesse en km/h								
	30	45	60	75	90	105	120	135	
Force maximale au cours du freinage pour un passager de 70 kg (en-dessous du pointillé, les valeurs supérieures au poids du passager)	1	111	167	220	278	334	390	445	501
2	55	83	111	139	167	195	222	250	
3	37	55	74	92	111	130	148	167	
4	27	41	55	69	83	97	111	125	
5	22	33	44	55	66	78	89	100	
6	18	27	37	46	55	65	74	83	
7	15	23	31	39	47	55	63	71	
8	13	20	27	34	41	48	55	62	

Observations :

Comme on pouvait s'y attendre, plus le freinage est bref, plus la force exercée est forte. Ce qui fait que même si, par exemple, une voiture pouvait passer de 90 km/h à l'arrêt en 2 secondes, la force de 167 kg.f qui en résulterait serait dangereuse pour le passager.

Dans tous les cas, une conclusion s'impose : la ceinture de sécurité peut limiter les dégâts.

c) *Coefficient de freinage minimal*

Si on impose — à titre indicatif — comme valeur maximale à la force celle du poids du passager (ce qui équivaut tout de même à une chute dans le vide... vers l'avant de la voiture), on a :

$$\gamma \leq g \Leftrightarrow \frac{15v}{8a} \leq 9,81 \Leftrightarrow \frac{a}{v} \geq \frac{15}{8 \times 9,81} \approx 0,19$$

(v en m/s)

II. Distance de freinage à distance de sécurité

1. *Distance de freinage*

a) D'après le modèle de la partie I, $d = \frac{av}{2}$.

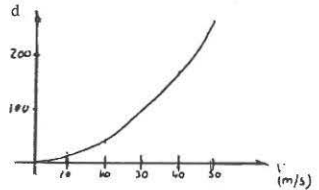
$$\text{Alors } C = \frac{a}{v} \Rightarrow a = vC \Rightarrow d = C \frac{v^2}{2}$$

b) Calcul numérique : si $d_0 = 75$ et $v_0 = 25$,

$$d_0 = C \frac{v_0^2}{2} \Rightarrow d = d_0 \left(\frac{v}{v_0} \right)^2 = 0,12 v^2$$

$$d = C \frac{v^2}{2}$$

ce qui donne $C = 0,24$.

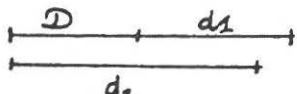


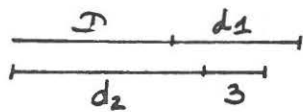
c) Courbe représentative : c'est un arc de parabole : à une vitesse double correspond une distance quadruple...

2. *Distance de sécurité*

a) On a $d_1 = C_1 \frac{v^2}{2}$.

b) Quant à d_2 , il est donné par $v \cdot t_0 + C_2 \frac{v^2}{2}$

c)  Pour qu'il n'y ait pas collision, il faut que $D + d_1 > d_2$

 Pour qu'il y ait plus de 3 m après immobilisation des véhicules, il faut que $D + d_1 > d_2 + 3$, soit

$$D > d_2 - d_1 + 3 = \frac{v^2}{2} (C_2 - C_1) + vt_0 + 3$$

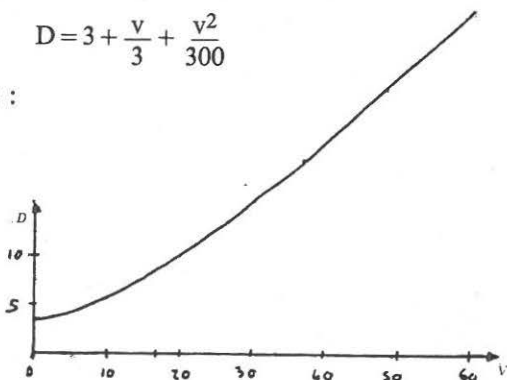
d) $t_0 = 1/3 \text{ s} \Rightarrow D > \frac{v^2}{2} (C_2 - C_1) + \frac{v}{3} + 3$

La distance minimale est donc donnée par : $D = 3 + \frac{v}{3} + \frac{v^2}{2} (C_2 - C_1)$.

Si $(C_2 - C_1) \geq \frac{1}{130}$, l'inégalité sera vérifiée dès que

$$D = 3 + \frac{v}{3} + \frac{v^2}{300}$$

e) Courbe représentative :



III. Densité critique du trafic

1. a) Temps de passage entre deux véhicules

$$t = \frac{D}{v} = \frac{3}{v} + \frac{1}{3} + \frac{v}{300}$$

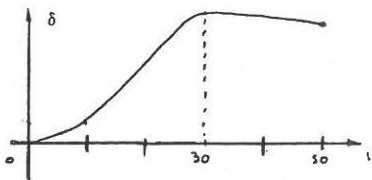
b) Débit de véhicules

$$\delta = \frac{3600}{t} = \frac{3600}{\frac{3}{v} + \frac{1}{3} + \frac{v}{300}} = \frac{1\,080\,000 v}{v^2 + 100v + 900}$$

c) Etude et tracé de $v \rightarrow \delta$: les variations de δ sont inverses de celles de t

$$\frac{dt}{dv} = -\frac{3}{v^2} + \frac{1}{300} = \frac{1}{300 v^2} (v^2 - 900)$$

v	0	30	50
t		$\frac{16}{30}$	$\frac{14}{24}$
δ	0	6750	≈ 6430



2. Interprétation

Tant que le débit est inférieur à δ , le trafic est fluide ; mais dès que, pour une vitesse donnée v du trafic, le débit est supérieur à $\delta(v)$, la distance de sécurité ne peut plus être respectée : au premier coup de frein, ça bouchonne...

UN EXEMPLE DE LA THÉORIE DES CATASTROPHES*

Le but de cette activité est de montrer comment des phénomènes discontinus ("catastrophes") peuvent provenir d'une évolution parfaitement régulière.

Pour cela, on va traiter un exemple en géologie ; on va représenter le relief en coupe d'une vallée, en tenant compte de son évolution en fonction du temps : si t désigne le temps, on supposera que la courbe (C_t) , représentative de la fonction :

$$x \rightarrow F_t(x) = tx + (x^2 - 3)^2$$

où $F_t(x)$ désigne l'altitude d'un point de la vallée en fonction de sa position x dans le plan où on trace le relief en coupe, est un modèle acceptable de la réalité physique.

I. Représentations graphiques de la vallée

On se propose dans cette partie de dessiner le relief de la vallée à des époques différentes : on va prendre comme valeurs pour t les éléments de $E = \{-15; -8; -4; 0; 4; 8; 15\}$.

a) On note F'_t la dérivée de F_t et (C'_t) la courbe représentative de F'_t et montrer que toutes les courbes (C'_t) , représentatives de F'_t , se déduisent de la courbe (C'_0) par translation.

b) Tracer (C'_0) . En déduire, pour $t \in E$, la résolution approchée de $F'_t(x) = 0$.

* Référence : La Recherche, octobre 1977.

Etablir, pour chaque t de E , le tableau des signes de $F_t(x)$ et le tableau de variation de F_t .

c) Tracer, dans sept repères différents, le relief de la vallée correspondant aux sept valeurs de t dans E .

II. Evolution d'un lac

On suppose que pour $t = -15$, un petit lac s'est formé, dont on va étudier l'évolution.

On note $a(t)$ l'abscisse du fond du lac à la période t et φ la fonction $t \rightarrow a$.

1. Dresser un tableau de valeurs approchées de $\varphi(t)$ pour $t \in E$. Dans quels intervalles varie a lorsque t décrit \mathbf{R} ?

2. Montrer que $t = -4a^3 + 12a$ et représenter cette relation par une courbe. En déduire le tracé de la courbe C' représentative de la fonction φ . Montrer que (Γ) est une partie de l'image de (C'_0) par un quart de tour de centre 0 .

3. La fonction φ est-elle continue ? dérivable ?

La fonction $t \rightarrow F_t(x)$ est-elle continue ? dérivable ?

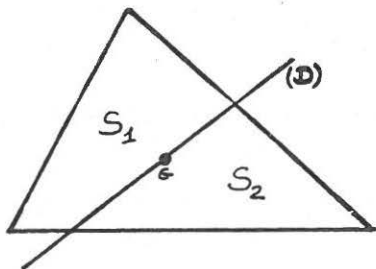
Décrire l'évolution du lac en fonction du temps. Des "catastrophes" sont-elles susceptibles d'arriver ?

Echelles conseillées pour les représentations graphiques :

- pour les x : 1 unité = 10 cm
- pour les y : 1 unité = 0,25 cm
- pour les t : 1 unité = 0,5 cm.

POUR COUPER EN DEUX UN TRIANGLE... ...IL SUFFIT DE VISER LE CENTRE !

Le but de ce problème est de montrer que, si (D) est une droite quelconque passant par le "centre de gravité" d'un triangle, les aires des deux régions S_1 et S_2 découpées par (D) sont sensiblement égales.



Définitions et notations

Si A et B sont deux points du plan, on notera [A,B] le segment d'extrémités A et B et, selon l'usage, AB désignera la longueur de ce segment.

Si A, B et C sont trois points du plan, on appellera "triangle ABC" la réunion des segments [A,B], [B,C] et [A,C] ; on notera $a(ABC)$ l'aire de l'intérieur du triangle ABC, et plus généralement $a(S)$ l'aire d'une partie S du plan.

I. Une propriété des médianes

a) Soit ABC un triangle et P un point de [B,C] ; démontrer que

$$\frac{a(ABP)}{a(ABC)} = \frac{BP}{BC}$$

b) Montrer que, dans un triangle, chaque médiane découpe l'intérieur du triangle en deux parties d'aires égales.

c) Montrer que, dans un triangle, les trois médianes découpent l'intérieur du triangle en six parties d'aires égales.

II. L'outil : un repère cartésien

Soit ABC un triangle et G son "centre de gravité" (c'est-à-dire l'isobarycentre de A, B et C). On va travailler dans le repère (G, \vec{GC}, \vec{GA}) .

On note D_t la droite de coefficient directeur t passant par G .
 P , Q et R désignent, lorsqu'ils existent, les points d'intersection de D_t avec $[B,C]$, $[A,C]$ et $[A,B]$.

a) Discuter selon les valeurs de t l'existence des points P , Q et R .

b) Calculer les coordonnées de A , B , C , P , Q et R .

c) Montrer que si L , M et N sont des points de coordonnées $\begin{pmatrix} x_L \\ y_L \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix}$, on a :

$$L, M \text{ et } N \text{ alignés} \Rightarrow \frac{LM}{LN} = \frac{x_M - x_L}{x_N - x_L} = \frac{y_M - y_L}{y_N - y_L}$$

III. Etude du rapport des aires découpées par D_t

(les notations sont celles du II)

Si S_1 et S_2 désignent les deux régions découpées par D_t à l'intérieur du triangle ABC , le rapport de leurs aires dépend de t :

on pose $r(t) = \frac{a(S_1)}{a(S_2)}$.

r est donc une fonction définie sur \mathbf{R} , qu'on va étudier dans cette partie.

a) Montrer que

$$r(t) = \frac{\frac{a(S_1)}{a(ABC)}}{1 - \frac{a(S_1)}{a(ABC)}} = \frac{1 - \frac{a(S_2)}{a(ABC)}}{\frac{a(S_2)}{a(ABC)}}$$

Il suffit donc pour connaître $r(t)$ de connaître soit $\frac{a(S_1)}{a(ABC)}$, soit $\frac{a(S_2)}{a(ABC)}$.

b) *Etude de r pour $t \in]0, 1[$:* S_1 désigne l'intérieur du triangle ARQ .

Etablir que $\frac{a(S_1)}{a(ABC)} = \frac{1}{3} \frac{a(ARG)}{a(ABG)} + \frac{1}{3} \frac{a(AGQ)}{a(AGC)}$.

Utiliser I.a) et II.c) pour en déduire l'expression de $\frac{a(S_1)}{a(ABC)}$, puis de $r(t)$, en fonction de t .

c) *Etude de r pour $t \in]1, +\infty[$:* S_2 désigne l'intérieur du triangle CPQ .

d) *Etude de r pour $t \in]-\infty, 0[$:* S_2 désigne l'intérieur du triangle BRP .

e) Etudier les variations de r , puis tracer la courbe représentative (on aura intérêt à choisir des unités différentes sur les deux axes).

IV. Vers une conclusion

- a) Montrer que, lorsque t est une valeur pour laquelle r admet un extremum, D_t est parallèle à l'un des côtés du triangle ABC.
- b) Montrer que lorsque $r(t) = 1$, D_t est une médiane du triangle ABC. Que peut-on dire de D_t lorsque $t \rightarrow +\infty$ et lorsque $t \rightarrow -\infty$?
- c) Rédiger une conclusion au problème posé initialement.

MODÈLE DÉMOGRAPHIQUE A DEUX DIMENSIONS

Le but de ce problème est de donner, à travers l'étude d'un modèle simplifié, une idée des méthodes mathématiques utilisées en démographie.

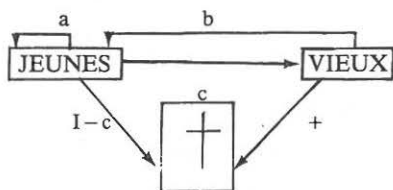
Présentation du modèle mathématique

Pour prévoir l'évolution d'une population à moyen et long terme, on utilise le modèle suivant : la population est divisée en deux classes, les "jeunes" (moins de 40 ans) et les "vieux" (entre 40 et 80 ans), et on étudie les effectifs de chaque classe à intervalles réguliers — tous les quarante ans —.

On note J_0 et V_0 les effectifs à une date initiale et J_n , V_n les effectifs après $40 \times n$ années. On ne tient pas compte de l'effectif des plus de 80 ans.

On suppose qu'en quarante ans :

- tous les "vieux" ont disparu ; une proportion c de "jeunes" a survécu, mais vieilli ;
- de nouveaux "jeunes" sont apparus, issus des anciens "jeunes" (avec un taux de natalité a), ou des anciens "vieux" (avec un taux b) .



On a donc les relations :

$$J_{n+1} = aJ_n + bV_n$$

$$V_{n+1} = cJ_n$$

a , b et c sont des nombres compris entre 0 et 1. On suppose qu'ils restent constants.

Trois études de cas

Premier cas : $a=0,5$; $b=0,3$; $c=0,8$. J_0 et V_0 sont quelconques.

1. Exploration numérique et graphique

Soit M_n le point de coordonnées (J_n, V_n) dans un repère orthonormé. La "trajectoire" d'une population dans ce repère sera la ligne brisée $M_0M_1M_2\dots M_n\dots$.

Tracer dans un même repère les trajectoires d'origine M_0 et d'extrémité M_6 dans les quatre cas suivants :

$$M_0(7;3) ; M_0(5;5) ; M_0(4;6) ; M_0(2;8) .$$

Quelles observations peut-on faire sur l'évolution de ces populations ?

2. Etude théorique

On dira qu'une suite U est "sympa" si

$$\forall n, U_{n+2} = 0,5U_{n+1} + 0,24U_n .$$

a) Montrer que les suites $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont "sympas".

b) Montrer qu'il existe deux suites géométriques G' et G'' , de premier terme 1, de raisons t' et t'' , et qui soient sympas.

c) Si x et y sont deux nombres, on considère la suite W de terme général $W_n = xt'^n + yt''^n$. Montrer que W est une suite sympa.

d) Pour quelles valeurs de x et y a-t-on $W=J$? (x et y dépendent de J_0 et V_0). En déduire l'expression de J_n en fonction de n , puis son comportement asymptotique.

e) Pour quelles valeurs de x et y a-t-on $W=V$? En déduire l'expression de V_n en fonction de n , puis son comportement asymptotique.

f) Quelle est l'évolution à long terme de la population ? Dépend-elle des effectifs initiaux ? Comment évolue la proportion de "jeunes" et celle des "vieux" ?

Deuxième cas

$$a=0,6 ; b=0,5 ; c=0,8.$$

Reprendre les questions 1 et 2 (dans ce cas, une suite U est "sympa" si $\forall n, U_{n+2} = 0,6 U_{n+1} + 0,4 U_n$).

Troisième cas

$$a=0,8 ; b=0,6 ; c=0,8.$$

Reprendre les questions 1 et 2 (dans ce cas, une suite U est "sympa" si $\forall n, U_{n+2} = 0,8 U_{n+1} + 0,48 U_n$).

(D'après une idée de A. Deledicq dans "Mathématiques buissonnières" Ed. Cedic 1973).

Solution

Première étude de cas ($a=0,5$; $b=0,3$; $c=0,8$)

1. Exploration numérique et graphique

Le calcul des coordonnées des points M_n s'obtient en programmant la calculatrice :

10 : INPUT "J=?",J	donnée de J_0
20 : INPUT "V=?",V	donnée de V_0
30 : FOR N=1 TO 6	
40 : I=J	J_{n-1} en mémoire I
50 : J=0.5*J+0.3*V	J_n en mémoire J
60 : V=0.8*I	V_n en mémoire V
70 : PRINT (INT(100*J))/100, (INT(100*V))/100	arrondit l'affichage à deux chiffres
80 : NEXT N	
90 : END	

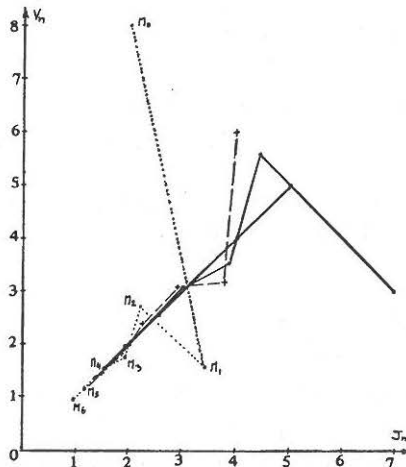
Tableau des résultats :

n	0	1	2	3	4	5	6
J_n	7	4.4	3.88	2.99	2.42	1.93	1.54
V_n	3	5.6	3.52	3.1	2.39	1.94	1.54

n	0	1	2	3	4	5	6
J_n	5	4	3.2	2.56	2.04	1.63	1.31
V_n	5	4	3.2	2.56	2.04	1.63	1.31

J_n	4	3.8	2.86	2.34	1.85	1.49	1.19
V_n	6	3.2	3.04	2.28	1.87	1.48	1.19

J_n	2	3.4	2.18	1.9	1.47	1.19	0.95
V_n	8	1.6	2.72	1.74	1.52	1.18	0.95



Observations :

Malgré des points de départ très différents (mais de même effectif total $J_0 + V_0 = 10$), les quatre trajectoires ont la même allure : elles se rapprochent de l'origine du repère, et en même temps, de la droite $J_n = V_n$.

D'ailleurs, dans les quatre cas, on a à 10^{-2} près $J_6 = V_6$. Quant à l'effectif total, il passe de 10 à une valeur beaucoup plus faible : entre 3.08 et 1.90.

D'un point de vue démographique, on a donc des populations en voie d'extinction, le nombre des "jeunes" et des "vieux" tendant à s'équilibrer.

2. Etude théorique

a) $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites sympas :

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= 0,5J_n + 0,3V_n \Rightarrow J_{n+2} = 0,5J_{n+1} + 0,3V_{n+1} \\ V_{n+1} &= 0,8J_n &= 0,5J_{n+1} + 0,3(0,8J_n) \\ & &= 0,5J_{n+1} + 0,24J_n \end{aligned}$$

$(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite sympa.

Alors

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= 0,8J_n \Rightarrow V_{n+2} = 0,8J_{n+1} = 0,8(0,5J_n + 0,24J_{n-1}) \\ &= 0,5 \times 0,8J_n + 0,24 \times 0,8J_{n-1} \\ &= 0,5 \times V_{n+1} + 0,24 \times V_n \end{aligned}$$

$(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc aussi une suite sympa.

b) Suites géométriques sympas :

Cherchons à quelles conditions une suite géométrique G de terme général $G_n = G_0 t^n$ est sympa :

$$\forall n \quad G_0 t^{n+2} = 0,5 G_0 t^{n+1} + 0,24 G_0 t^n$$

soit en supposant G_0 et t non nuls.

$$\Leftrightarrow t^2 = 0,5t + 0,24$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 0,5t - 0,24 = 0 \quad \text{c'est une équation du second degré en } t.$$

$\Delta = 0,5^2 - 4 \times (-0,24) = 1,21 = 1,1^2$ d'où deux racines $t' = 0,8$ et $t'' = -0,3$.

Les suites G' et G'' de terme général $G'_n = (0,8)^n$ et $G''_n = (-0,3)^n$ sont donc les deux suites géométriques cherchées.

c) Suite $W = xG' + yG''$:

Vérifions que W est sympa :

$$\begin{aligned} \bullet \quad W_{n+2} &= x(0,8)^{n+2} + y(-0,3)^{n+2} \\ &= x(0,8)^n \cdot (0,8)^2 + y(-0,3)^n \cdot (-0,3)^2 = 0,64(0,8)^n x + 0,09(-0,3)^n y \\ \bullet \quad 0,5W_{n+1} + 0,24W_n &= 0,5(0,8)^{n+1} x + 0,5(-0,3)^{n+1} y + 0,24(0,8)^n x + 0,24(-0,3)^n y \end{aligned}$$

$$= (-0,8)^n x [0,5 \times 0,8 + 0,24] + (-0,3)^n y [0,5 \times (-0,3) + 0,24]$$

$$= 0,64(0,8)^n x + 0,09(-0,3)^n y$$

Il y a égalité : W est bien une suite sympa.

d) Valeurs de x et y telles que $W=J$

Pour que deux suites sympas soient égales, il suffit que leurs deux premiers termes soient identiques : en effet, supposons que :

$$W_0 = J_0 \text{ alors } W_2 = 0,5W_1 + 0,24W_0 = 0,5J_1 + 0,24J_0 = J_2$$

$$W_1 = J_1 \text{ puis } W_3 = 0,5W_2 + 0,24W_1 = 0,5J_2 + 0,24J_1 = J_3$$

Or $W_n = x(0,8)^n + y(-0,3)^n$ dont $W_0 = x + y$ et $W_1 = 0,8x - 0,3y$.

D'autre part, $J_1 = 0,5J_0 + 0,3V_0$.

$$\text{On doit donc avoir : } \begin{cases} x + y = J_0 \\ 0,8x - 0,3y = 0,5J_0 + 0,3V_0 \end{cases}$$

On résout ce système de deux équations à deux inconnues, J_0 et V_0 étant supposés connus :

$$\begin{cases} x + y = J_0 \\ 8x - 3y = 5J_0 + 3V_0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 3y = 3J_0 & \Rightarrow 11x = 8J_0 + 3V_0 \\ 8x - 3y = 5J_0 + 3V_0 & \Rightarrow x = \frac{8}{11}J_0 + \frac{3}{11}V_0 \end{cases}$$

et alors :

$$y = J_0 - x = \frac{3}{11}J_0 - \frac{3}{11}V_0$$

D'où finalement :

$$J_n = \frac{1}{11}[(8J_0 + 3V_0)(0,8)^n + 3(J_0 - V_0)(-0,3)^n]$$

on a obtenu ainsi la formule de J_n en fonction de n : on peut en déduire son comportement asymptotique :

En effet, quand n tend vers l'infini, $(0,8)^n$ tend vers 0 ainsi que $(-0,3)^n$: J converge donc vers 0.

Cela ne dépend pas des valeurs initiales J_0 et V_0 .

e) Valeurs de x et y telles que $W=V$

Par le même raisonnement, $W=V \iff W_0=V_0$ et $W_1=V_1$

Or $V_1 = 0,8J_0$

$$\iff \begin{cases} x + y = V_0 \\ 8x - 3y = 8J_0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x + 3y = 3V_0 & \Rightarrow 11x = 3V_0 + 8J_0 \\ 8x - 3y = 8J_0 & \Rightarrow x = \frac{3}{11}V_0 + \frac{8}{11}J_0 \end{cases}$$

puis

$$y = V_0 - x = \frac{8}{11}V_0 - \frac{8}{11}J_0$$

d'où finalement :

$$V_n = \frac{1}{11} [(8J_0 + 3V_0)(0,8)^n - 8(J_0 - V_0)(-0,3)^n]$$

De la même façon que pour J_n , V_n converge vers 0.

f) Evolution de la population à long terme

L'effectif total est $J_n + V_n$: il converge donc vers 0 : la population est en voie d'extinction.

Cela ne dépend pas des valeurs de J_0 et V_0 , puisque cela provient des valeurs 0,8 et $-0,3$ et de l'existence (mais pas de la valeur) de x et y .

D'ailleurs, si on calcule l'effectif total $P_n = J_n + V_n$, on obtient :

$$P_n = \frac{2}{11} (8J_0 + 3V_0) \cdot (0,8)^n - \frac{5}{11} (J_0 - V_0) (-0,3)^n$$

(P_n est donc elle-même une suite géométrique de raison 0,8, lorsque $J_0 = V_0$).

Pour étudier comment évolue la proportion des "jeunes" et la proportion des "vieux", étudions le rapport $\frac{J_n}{V_n}$.

$$\begin{aligned} \frac{J_n}{V_n} &= \frac{(8J_0 + 3V_0)(0,8)^n + 3(J_0 - V_0)(-0,3)^n}{(8J_0 + 3V_0)(0,8)^n - 8(J_0 - V_0)(-0,3)^n} && \text{divisons numérateur et} \\ &&& \text{dénominateur par } (0,8)^n \\ &= \frac{8J_0 + 3V_0 + 3(J_0 - V_0)\left(-\frac{3}{8}\right)^n}{8J_0 + 3V_0 - 8(J_0 - V_0)\left(-\frac{3}{8}\right)^n} && -\frac{3}{8} \text{ est compris entre } -1 \text{ et } 1 : \\ &&& \left(-\frac{3}{8}\right)^n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\frac{J_n}{V_n}$ converge donc vers le rapport $\frac{8J_0 + 3V_0}{8J_0 + 3V_0}$ c'est-à-dire ... 1.

L'effectif des "jeunes" et celui des "vieux" tendent à s'équilibrer.

On a bien retrouvé par l'étude théorique — et prouvé ! — les observations qu'on avait pu faire à la suite de l'exploration numérique et graphique (en particulier, on peut remarquer sur l'expression de J_n et V_n en fonction de n que lorsque $J_0 = V_0$, on a $\forall n, J_n = V_n$).

Deuxième étude de cas ($a=0,6$; $b=0,5$; $c=0,8$)

1. Exploration numérique et graphique

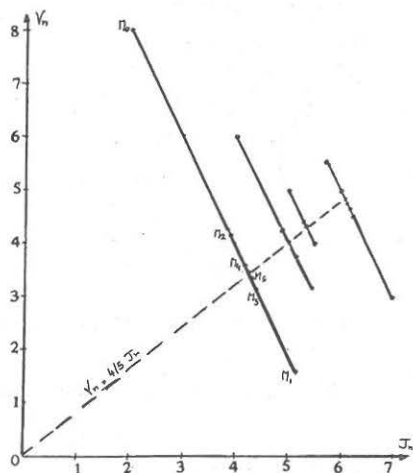
Il suffit de changer les valeurs de a et b dans le programme de calcul des coordonnées de M_n pour obtenir le tableau des résultats :

n	0	1	2	3	4	5	6
J _n	7	5.7	6.22	6.01	6.09	6.06	6.07
V _n	3	5.6	4.56	4.97	4.8	4.87	4.84

n	0	1	2	3	4	5	6
J _n	5	5.5	5.3	5.38	5.34	5.36	5.35
V _n	5	4	4.4	4.24	4.3	4.27	4.28

J _n	4	5.4	4.84	5.06	4.97	5.01	4.99
V _n	6	3.2	4.32	3.87	4.05	3.97	4

J _n	2	5.2	3.92	4.43	4.22	4.3	4.27
V _n	8	1.6	4.16	3.13	3.54	3.38	3.44



Observations :

L'allure des trajectoires est encore semblable pour les quatre points de départ, et très différente des cas précédents :

Les sept points M_n sont alignés sur une droite de pente 2.

Les quatre points M_6 sont à 10^{-2} près alignés sur la droite

$$V_n = \frac{4}{5} J_n$$

Les trajectoires se rapprochent donc de cette droite.

L'effectif total de la population oscille puis se stabilise à des valeurs allant de 8,71 à 10,91.

En termes démographiques, ces populations ont tendance à se stabiliser aussi bien en effectif qu'en proportion de "jeunes" et de "vieux".

2. Etude théorique

On ne va reprendre ici que les différences significatives avec la première étude de cas :

a) $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont encore des suites "sympas" mais cela signifie ici qu'on a :

$$\forall n, J_{n+2} = 0,6J_{n+1} + 0,4J_n \quad \text{et} \quad V_{n+2} = 0,6V_{n+1} + 0,4V_n$$

b) Suites géométriques sympas :

La raison t doit vérifier $t^{n+2} = 0,6t^{n+1} + 0,4t^n$ soit si $t \neq 0$,
 $t^2 - 0,6t - 0,4 = 0$

$\Delta = (0,6)^2 - 4(-0,4) = 0,36 + 1,6 = 1,96 = 1,4^2$ d'où deux racines $t' = 1$ et
 $t'' = -0,4$.

Les deux suites G' et G'' ont donc pour terme général $G'_n = 1$ et
 $G''_n = (-0,4)^n$. (G' est une suite stationnaire).

c) Expression de J_n en fonction de n :

$$\text{Si } W_n = x + y(-0,4)^n, \quad W = J \iff \begin{cases} x + y = J_0 \\ x - 0,4y = 0,6J_0 + 0,5V_0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + y = J_0 \\ 10x - 4y = 6J_0 + 5V_0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + 4y = 4J_0 & \Rightarrow 14x = 10J_0 + 5V_0 \\ 10x - 4y = 6J_0 + 5V_0 & \Rightarrow x = \frac{10}{14}J_0 + \frac{5}{14}V_0 \end{cases}$$

puis
$$j = J_0 - x = \frac{4}{14}J_0 - \frac{5}{14}V_0$$

d'où
$$J_n = \frac{1}{14} [5(2J_0 + V_0) + (4J_0 - 5V_0)(-0,4)^n]$$

$(0,4)^n$ converge vers 0 donc $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\frac{5}{14}(2J_0 + V_0)$

d) Comportement asymptotique de V_n :

On n'a pas besoin ici d'utiliser la suite W : en effet, $V_n = 0,8J_{n-1}$.

$(J_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite convergente de limite $\frac{5}{14}(2J_0 + V_0)$ donc

$(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente de limite

$$0,8 \times \frac{5}{14}(2J_0 + V_0) = \frac{2}{7}(2J_0 + V_0).$$

e) Evolution à long terme de la population :

• L'effectif total $P_n = J_n + V_n$ converge vers

$$\left(\frac{5}{14} + \frac{2}{7}\right)(2J_0 + V_0) = \frac{9}{14}(2J_0 + V_0)$$

soit en remplaçant $J_0 + V_0$ par l'effectif total initial P_0 : $\frac{9}{14}(P_0 + J_0)$.

Donc plus il y aura de "jeunes" au départ (c'est-à-dire plus J_0 sera grand), plus la limite sera grande ; par exemple, pour que la limite soit égale à P_0 , il faut que $J_0 = \frac{5}{9}P_0$; mais si $J_0 = 2/3P_0$, la limite sera $\frac{15}{14}P_0$. (Toutefois, la limite ne peut pas être supérieure à $\frac{9}{7}P_0$, cas extrême où il n'y aurait que des "jeunes" au départ).

- Par contre, la proportion de “jeunes” tend toujours vers 5/9 : en effet :

$$\frac{V_n}{J_n} \rightarrow 0,8 .$$

- Enfin, il reste à expliquer pourquoi les trajectoires étaient faites de points alignés : pour cela, on peut calculer le coefficient directeur de $M_n M_{n+1}$; il vaut :

$$\frac{V_{n+1} - V_n}{J_{n+1} - J_n} = \frac{0,8J_n - 0,8J_{n-1}}{(0,6J_n + 0,4J_{n-1}) - J_{n-1}} = \frac{0,8J_n - 0,8J_{n-1}}{-0,4J_n + 0,4J_{n-1}} = -2$$

Tous les segments $M_n M_{n+1}$ de la trajectoire ont le même coefficient directeur -2 : les points M_n sont donc tous alignés.

Troisième étude de cas ($a=0,8$; $b=0,6$; $c=0,8$)

1. Exploration numérique et graphique

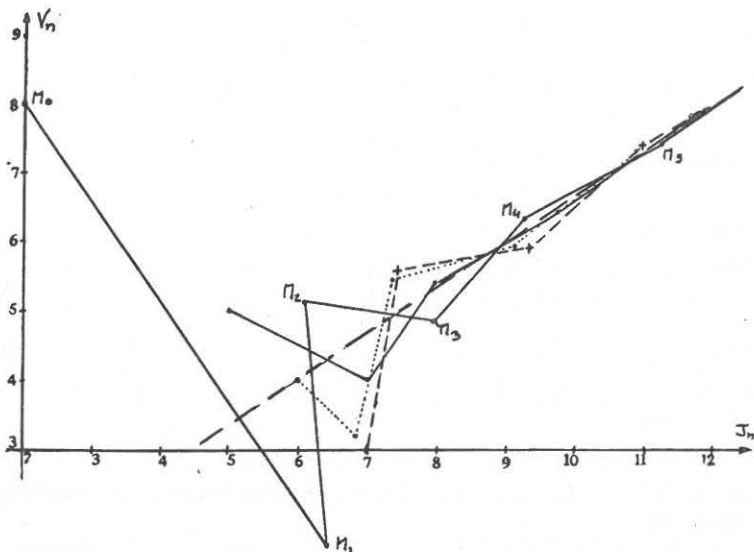
Tableau des résultats.

n	0	1	2	3	4	5	6
J_n	7	7.4	9.28	10.97	13.23	15.85	19.03
V_n	3	5.6	5.92	7.42	8.78	10.58	12.68

n	0	1	2	3	4	5	6
J_n	5	7	8	9.76	11.64	14	16.79
V_n	5	4	5.6	6.4	7.8	9.31	11.2

J_n	4	6.8	7.36	9.15	10.85	13.07	15.67
V_n	6	3.2	5.44	5.88	7.32	8.68	10.46

J_n	2	6.4	6.08	7.93	9.26	11.22	13.42
V_n	8	1.6	5.12	4.86	6.34	7.41	8.97



Observations :

Là encore les quatre trajectoires ont la même allure : elles s'en vont loin de l'origine en se rapprochant de la droite $J_n = 1,5V_n$.

L'effectif total augmente : au point M_6 , il vaut entre 22,39 et 31,71 pour une valeur initiale de 10.

Du point de vue démographique, ce sont des populations en expansion, où les jeunes ont tendance à représenter 60% de la population, indépendamment de la proportion initiale.

2. Etude théorique

a) On vérifie que $\forall n, J_{n+2} = 0,8J_{n+1} + 0,48J_n$ et $V_{n+2} = 0,8V_{n+1} + 0,48V_n$

b) Si G est une suite géométrique de raison t ($t \neq 0$), on doit avoir, pour que G soit sympa :

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad & t^{n+2} = 0,8t^{n+1} + 0,48t^n & \Delta = 0,8^2 - 4 \times (-0,48) = 2,56 = 1,6^2 \\ \Leftrightarrow \quad & t^2 - 0,8t - 0,48 = 0 & \text{d'où les racines } t' = 1,2 \text{ et } t'' = -0,4 \end{aligned}$$

Les suites G' et G'' cherchées ont donc pour terme général :

$$G'_n = (1,2)^n \quad \text{et} \quad G''_n = (-0,4)^n$$

d) Expression de J_n en fonction de n :

$$\begin{aligned} \text{Si } W_n = x(1,2)^n + y(-0,4)^n, \quad W = J & \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = J_0 \\ 1,2x - 0,4y = J_1 = 0,8J_0 + 0,6V_0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = J_0 \\ 12x - 4y = 8J_0 + 6V_0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 4J_0 & \Rightarrow 16x = 12J_0 + 6V_0 \\ 12x - 4y = 8J_0 + 6V_0 & \Rightarrow x = \frac{6}{8}J_0 + \frac{3}{8}V_0 \end{cases} \end{aligned}$$

et alors
$$y = J_0 - x = \frac{2}{8}J_0 - \frac{3}{8}V_0$$

d'où
$$J_n = \frac{1}{8} [3(2J_0 + V_0)(1,2)^n + (2J_0 - 3V_0)(-0,4)^n]$$

$(0,4)^n$ converge vers 0 mais $(1,2)^n$ diverge vers $+\infty$:

$$(J_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ diverge vers } +\infty .$$

e) Comportement asymptotique de V_n :

Puisque $\forall n, V_n = 0,8J_{n-1}$ et que $(J_{n-1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, il s'ensuit que V_n diverge aussi vers $+\infty$.

f) Evolution à long terme de la population :

L'effectif total $P_n = J_n + V_n$ diverge vers $+\infty$: la population est donc en expansion.

Si on veut être plus précis, il faut calculer l'expression de V_n en fonction de n , à l'aide de la suite W (c'est-à-dire répondre complètement à la question e) :

$$W = V \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = V_0 \\ 1,2x - 0,4y = V_1 = 0,8J_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = V_0 \\ 12x - 4y = 8J_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 4y = 4V_0 \\ 12x - 4y = 8J_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 16x = 4V_0 + 8J_0 \Rightarrow x = \frac{1}{4}V_0 + \frac{1}{2}J_0$$

et alors
$$y = V_0 - x = \frac{3}{4}V_0 - \frac{1}{2}J_0$$

d'où
$$V_n = \frac{1}{4}[(V_0 + 2J_0)(1,2)^n + (3V_0 - 2J_0)(-0,4)^n]$$

Et finalement :

$$P_n = \frac{1}{8}[5(2J_0 + V_0)(1,2)^n - (2J_0 - 3V_0)(-0,4)^n]$$

Or, très vite $(-0,4)^n$ est négligeable devant $(1,2)^n$, comme le montre ce tableau :

n	0	1	2	3	4	5	6
$1,2^n$	1	1.2	1.44	1.73	2.07	2.48	3
$(-0,4)^n$	1	-0.4	0.16	-0.06	0.02	-0.01	0,004

P_n croit donc "comme" $1,2^n$ où n mesure le temps qui s'écoule : c'est une croissance "exponentielle".

D'autre part, le rapport $\frac{J_n}{V_n}$ a lui même une limite finie quand n

$$\frac{J_n}{V_n} = \frac{3(2J_0 + V_0)(1,2)^n + (2J_0 - 3V_0)(-0,4)^n}{2(2J_0 + V_0)(1,2)^n - (2J_0 - 3V_0)(-0,4)^n} = \frac{3(2J_0 + V_0) + (2J_0 - 3V_0)(-1/3)^n}{2(2J_0 + V_0) - (2J_0 - 3V_0)(-1/3)^n}$$

(en divisant numérateur et dénominateur par $(1,2)^n$: $-0,4/1,2 = -1/3$).

D'où : $\frac{J_n}{V_n} \rightarrow \frac{3}{2}$ quand n augmente : les jeunes ont tendance à représenter 60% de la population (et les trajectoires se rapprochent de la droite $J_n = 1,5V_n$).

Commentaires

Les valeurs des taux a , b et c peuvent sembler élevées, mais il faut penser que ce ne sont pas des taux annuels, comme ceux que l'on rencontre en géographie humaine, mais ici des taux sur 40 ans ; si on calcule les taux annuels équivalents on trouve, par exemple pour $a=0,5$; $b=0,3$ et $c=0,8$:

$$\begin{aligned} \text{taux annuel de natalité des "jeunes"} : & 1 + \alpha = (1,5)^{\frac{1}{40}} \approx 1,01 \\ & \text{d'où } \alpha \approx 10 \text{ pour } 1000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{taux annuel de natalité des "vieux"} : & 1 + \beta = (1,3)^{\frac{1}{40}} \approx 1,006 \\ & \text{d'où } \beta \approx 6 \text{ pour } 1000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{taux annuel de mortalité des "jeunes"} : & 1 + \gamma = (1,2)^{\frac{1}{40}} \approx 1,004 \\ & \text{d'où } \gamma \approx 4 \text{ pour } 1000 \end{aligned}$$

On retrouve bien là des valeurs vraisemblables.

Pour être vraisemblables, ces valeurs n'en sont pas forcément réalistes : d'une part les chiffres ont été choisis pour que les phénomènes soient très visibles, dès le tracé des trajectoires, d'autre part la division de la population en seulement deux classes est sommaire : les démographes utilisent des répartitions en tranches d'âges plus fines et plus nombreuses. La méthode de traitement mathématique est la même mais exige des calculs plus importants, qu'on confie alors à un ordinateur.

Enfin, le point le plus significatif de cette étude est sans doute dans les grands effets que peuvent produire de "petites" causes : une faible variation des taux a , b et c produit un changement profond dans l'évolution de la population.

Cette sensibilité du modèle mathématique peut s'expliquer si on fait une étude théorique en conservant les taux a , b et c sous forme littérale : on démontre alors que la nature de l'évolution de la population dépend de la quantité $a + bc$:

si $a + bc < 1$: la population s'éteint

si $a + bc = 1$: la population se stabilise

si $a + bc > 1$: la population croît.

Mais cette étude théorique est d'un niveau un peu plus élevé que le travail demandé ici...

VERS L'INVENTION DE LA ROUE OU APPROCHES DE LA CYCLOÏDE

I. Approche discrète

Avant de savoir faire des roues parfaitement circulaires, l'homme a utilisé des roues plus ou moins irrégulières, de profil polygonal.

Dans cette partie, notre roue sera un polygone régulier P_n , à n côtés, inscriptible dans un cercle de rayon R .

Si S désigne un des sommets de P_n , étudier la trajectoire (Γ_n) de S lorsque P_n "roule" sur une droite (Δ) :

- tracer d'abord les cas $n=3$; $n=4$; $n=6$; $n=8$, puis le cas général ;
- dans chaque cas, montrer que (Γ_n) est la réunion d'arcs de cercles dont on donnera les centres et les rayons ; calculer la longueur de (Γ_n) qu'on notera ℓ_n ainsi que la surface S_n délimitée par (Γ_n) et (Δ) , lorsque P_n a fait un tour.

Etudier le comportement asymptotique de ℓ_n et de S_n .

II. Approche cinématique

Considérons un cercle de rayon R roulant sur une droite (Δ) ; on suppose que le mouvement est uniforme : un tour par seconde.

Si Ω désigne le centre du cercle et R_1 un repère cartésien fixe dont (Δ) est l'axe des abscisses, exprimer les coordonnées dans R_1 de Ω et du vecteur vitesse de Ω .

Si M désigne un point du cercle et R_2 un repère cartésien d'origine Ω , et dont l'axe des abscisses est parallèle à (Δ) , quelles sont les coordonnées de M dans R_2 ? (on pourra supposer que M est sur (Δ) à l'instant $t=0$).

Quelles sont les coordonnées dans R_1 du point M ? de son vecteur vitesse ? Ces coordonnées sont les *équations paramétriques* de la trajectoire (Γ) de M .

Dessiner (Γ) de façon approchée, en calculant suffisamment de points et de tangentes (on prendra $R=3$ cm).

III. Approche cartésienne

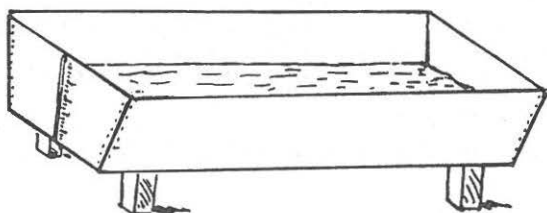
On continue l'étude du modèle précédent.

Etablir pour $t \in [0, \frac{1}{2}]$, la relation liant x et y , coordonnées de M dans le repère R_2 . Cette relation est l'*équation cartésienne* de la trajectoire (Γ) pour un demi-tour.

Montrer que x est fonction de y ; on notera f cette fonction. Etudier f : ensemble de définition, continuité, dérivabilité, tableau de variation, limites.

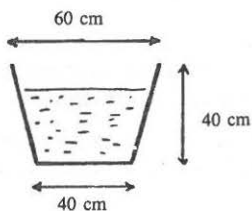
Montrer que f admet une réciproque g ; étudier et tracer g (on prendra $R = 3\text{ cm}$). Prolonger la fonction g de façon à ce que le graphe de g soit la trajectoire (Γ) pour un tour complet.

LE PROBLÈME DE L'ABREUVOIR

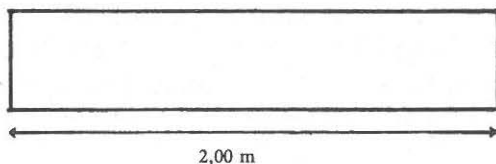


Une jauge est disposée sur la face avant de cet abreuvoir. Sauriez-vous la graduer ?

Données



vue en coupe



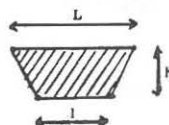
vue de côté

Des questions pour vous aider

1. Aire d'un trapèze :

Quelle est l'aire du trapèze dessiné ci-contre, en fonction de l , L et h ? Justifier votre réponse.

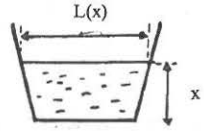
Dans toute la suite, l'abreuvoir est supposé rempli jusqu'à une hauteur x , en centimètres.



2. Largeur de la "surface de l'eau" :

On note $L(x)$ la largeur occupée par l'eau à sa surface.

A l'aide du théorème de Thalès, exprimer $L(x)$ en fonction de x .



3. Volume d'eau contenue :

Exprimer en fonction de x le volume $V(x)$ d'eau contenue dans l'abreuvoir.

4. Graphique :

Tracer sur une feuille de papier millimétré la courbe représentative de la fonction V .

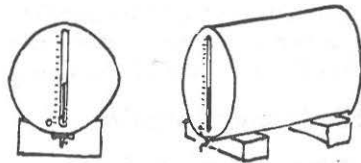
5. Conclusion :

On veut graduer l'abreuvoir de 50 l en 50 l. Utiliser la courbe précédente pour donner, en valeur approchée, la hauteur des graduations. Sauriez-vous calculer les valeurs exactes ?

LE RÉSERVOIR CYLINDRIQUE

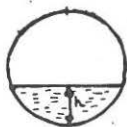


Une jauge, disposée sur la face de soutirage d'un réservoir cylindrique, indique le niveau du liquide. Sauriez-vous la graduer ?



I. Première approche

Le problème revient à connaître la surface $S(h)$ occupée par le liquide, sur la face avant, en fonction de la hauteur h du liquide.



En utilisant du papier millimétré et un cercle de rayon 10cm, établir un tableau de valeurs approchées de $S(h)$, h variant de 5mm en 5mm. Tracer la courbe.

Quelles premières observations pouvez-vous faire ?

II. Le modèle mathématique

Choix des variables : le problème ne dépend pas de la taille du réservoir. On peut poser :

$$x = \frac{h}{R} \text{ où } R \text{ est le rayon du cylindre}$$

$$t(x) = \frac{S(h)}{\pi R^2}, \text{ le taux de remplissage du réservoir.}$$

- Dans quels intervalles varient x et $t(x)$?
- Quelles valeurs particulières de la fonction t connaît-on ?
- t est-elle une fonction linéaire ?
- Montrer qu'on a $t(x) + t(2-x) = 1$.
- Que peut-on en déduire sur l'allure de la courbe représentant t ?

III. Premiers calculs

Pour $x \leq 1$, la surface $S(h)$ est la différence de la surface d'un secteur de cercle et de celle d'un triangle.



- Si α est l'angle au centre du secteur, établir une relation entre $\frac{\alpha}{2}$ et x .
- Quelle est la surface du secteur en fonction de α ? Et en fonction de x ?
- Quelle est la surface du triangle en fonction de x ?
- En déduire l'expression explicite de la fonction $t(x)$ pour $x \leq 1$. Cette expression se simplifie (un peu) en posant $X = x - 1$. On note alors $T(X)$ le taux de remplissage en fonction de X .

IV. Etude approfondie

On connaît à présent la fonction $X \rightarrow T(X)$ pour $X \in [-1, 0]$. Le but de cette partie est d'en dessiner la courbe représentative le plus précisément possible.

- Calculer la fonction dérivée $\frac{dT}{dX}(X)$, pour $X \in [-1, 0]$. Quel est son signe ? Quelles sont ses valeurs aux bornes de $[-1, 0]$?
- Calculer la fonction dérivée seconde $\frac{d^2T}{dX^2}(X)$, pour $X \in [-1, 0]$.

Quel est son signe ?

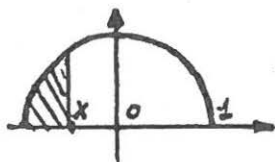
- Après avoir calculé quelques valeurs particulières de T , tracer la courbe représentative pour $X \in [-1, 0]$ (une unité = 10cm ; repère orthonormé).
- Comment compléter cette courbe pour $X \in [0, 1]$?

V. Réponse à notre problème

La courbe tracée permet d'établir la graduation de la jauge. Comment ?
A titre d'exemple, représenter sur 20cm une graduation pour un réservoir de 20 litres.

VI. Problèmes annexes

Pouvez-vous calculer avec une précision de 10^{-8} le rapport $\frac{h}{R}$ pour lequel le réservoir est rempli au quart ?



$F(X) = \frac{1}{2} \cdot T(X)$ est la surface représentée ci-contre. Pourquoi ?

Quelle est la courbe représentative, dans ce repère, de la fonction $\frac{dF}{dx}$?

Qu'observe-t-on ?

VOUS ÊTES OFFICIER DE GENDARMERIE

Vous êtes responsable du contrôle de la vitesse des automobiles sur le tronçon d'autoroute du sud situé entre l'aire de Chagny et la sortie "Chalons-Nord", 21 kilomètres plus loin.

Vous disposez des moyens suivants :

- une camionnette équipée d'une radio et d'un cinémomètre, avec deux hommes à bord ;
- deux motards, reliés par radio à la camionnette.

Où allez-vous poster vos hommes ?

Quelles instructions leur donner ?

Ce que vous devez savoir :

- l'interception d'une automobile en excès de vitesse ne peut être réalisée que par le dépassement de l'auto par les motards ;
- le temps écoulé entre la détection d'un excès de vitesse et le départ des motards, alertés par radio, est de 1 minute ;
- les motos utilisées peuvent rouler à 180 km/h ; pour atteindre cette vitesse, il leur faut 30 secondes et 1 kilomètre ;
- la portée de l'émetteur radio est de 15 km.

Sept récipients pour un même volume

R. Gauthier

A la suite de la visite de l'exposition "Horizons mathématiques" (Journées A.P.M.E.P. en 1984), nous avons imaginé des activités possibles pour des élèves du Second Cycle.

Voici sept récipients de même hauteur et de même capacité (voir des-
sin Annexe I). On peut choisir par exemple $h=1$ m.

Les volumes (2) et (3) sont composés de deux cylindres de même hauteur ; le rayon du grand est le double du rayon du petit cylindre. Pour le sablier (6) on a deux cônes de même hauteur. Chacun des récipients peut être rempli (d'eau, de Coca-Cola ou de Beaujolais...) par le haut.

Ces conventions étant faites, deux activités nous semblent possibles.

Activité I : Fournir les dessins avec les conventions ci-dessus.

Question unique : Fabriquer une jauge pour chaque récipient, sous la forme d'une règle à graduer, indiquant la quantité de liquide, en litres, contenue dans le récipient. On suppose qu'une telle jauge peut être introduite par le haut pour chaque récipient.

Sous cette forme, la question est difficile : il s'agit d'exprimer le volume, en litres, du contenu en fonction de la hauteur h (en dm).

Des problèmes vont se poser : le professeur pourra aider les élèves à trouver l'ordre dans lequel ces problèmes pourront peu à peu être résolus, en apportant des informations souhaitables ou en suggérant de chercher ces informations (encyclopédies, etc.).

Quelques-uns de ces problèmes :

- Quel est le volume commun ? (voir la sphère (7)).
- Trouver les dimensions qui manquent pour les autres.
- Trouver les bonnes formules pour calculer les volumes (tronc de cône, calotte sphérique, etc.).
- Organiser les calculs (calculatrice, ordinateur).
- Graduer les jauges.

(Voir réponses en annexe V).

Activité II

On présente les dessins de l'annexe I et les conventions. On fournit :

- les courbes donnant le volume du liquide (en litres) en fonction de la hauteur (en dm) (annexe II) ;
- les formules dans le désordre $V = f(h)$ (annexe III) ;
- six tableaux donnant les valeurs de V en fonction de h (annexe IV) (également en désordre).

Question : Qui va avec qui ?

Ces activités peuvent être proposées à une classe entière, des groupes d'élèves, un club de math.

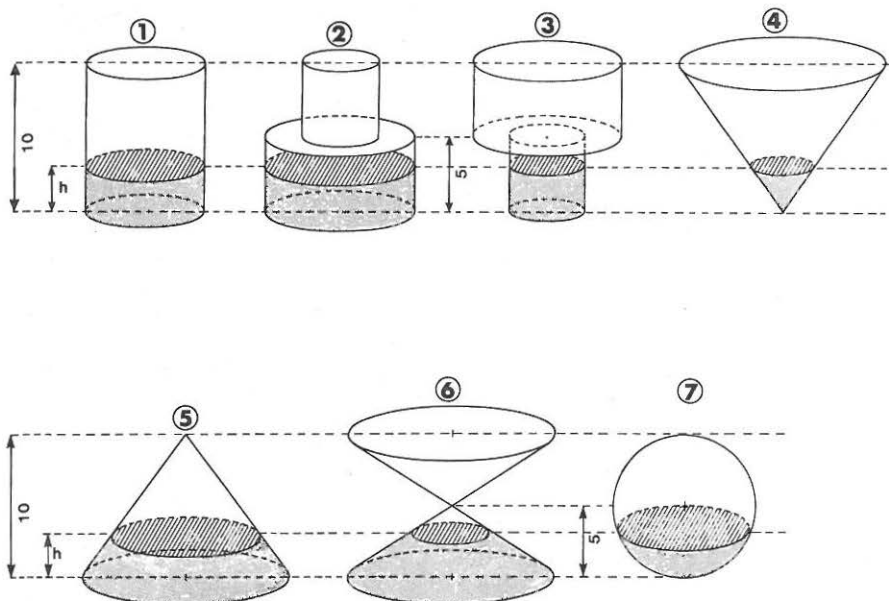
Pour l'activité II, les mêmes problèmes vont se poser sous des formes sans doute différentes.

Utilisation possible

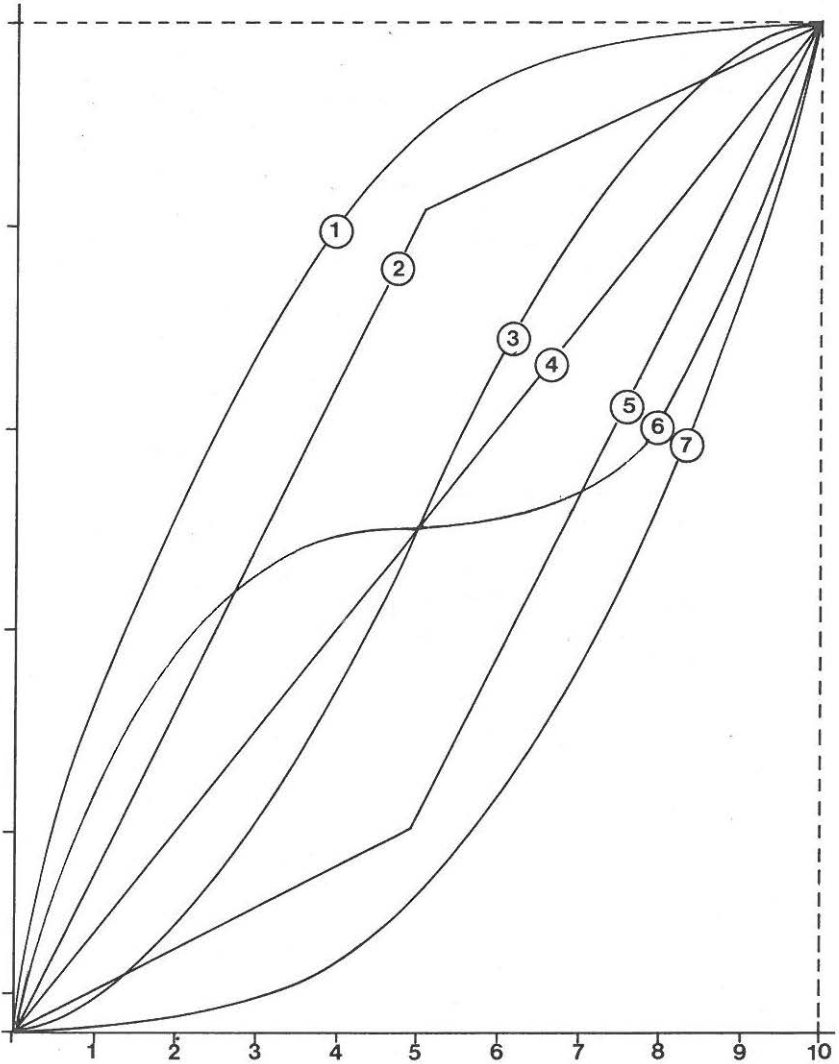
- En seconde :
 - calculs de volumes, représentations graphiques, taux de variation, résolutions d'équations avec ou sans graphiques.
- En Première ou Terminale :
 - lien entre fonction et courbe
 - rapidité de croissance
 - dérivée et tangente à la courbe
 - équation.

... Et pour la formation scientifique, divers procédés de "représentation" d'un phénomène.

ANNEXE I



ANNEXE II



ANNEXE III
Volume de liquide en fonction de la hauteur h

I	$v(h) = \frac{1}{6} \pi h^3$
II	$v(h) = 5\pi h^2 - \frac{1}{3} \pi h^3$
III	$v(h) = \frac{50}{3} \pi h$
IV	$\begin{cases} h \leq 5 & v(h) = \frac{80}{3} \pi h \\ h > 5 & v(h) = 100\pi + \frac{20}{3} \pi h \end{cases}$
V	$v(h) = \frac{\pi}{6} (h^3 - 30h^2 + 300h)$
VI	$v(h) = \frac{250}{3} \pi - \frac{2}{3} \pi (5 - h)^3$
VII	$\begin{cases} h \leq 5 & v(h) = \frac{20}{3} \pi h \\ h > 5 & v(h) = \frac{80}{3} \pi h - 100\pi \end{cases}$

ANNEXE IV
Six tableaux de valeurs (sur 7)

A

H=0	F(H)=0
H=.5	F(H)=3.79609
H=1	F(H)=14.6608
H=1.5	F(H)=31.8086
H=2	F(H)=54.4543
H=2.5	F(H)=81.8123
H=3	F(H)=113.097
H=3.5	F(H)=147.524
H=4	F(H)=184.307
H=4.5	F(H)=222.66
H=5	F(H)=261.799
H=5.5	F(H)=300.938
H=6	F(H)=339.292
H=6.5	F(H)=376.075
H=7	F(H)=410.501
H=7.5	F(H)=441.786
H=8	F(H)=469.144
H=8.5	F(H)=491.79
H=9	F(H)=508.938
H=9.5	F(H)=519.803
H=10	F(H)=523.599

B

H=0	F(H)=0
H=.5	F(H)=70.9476
H=1	F(H)=127.758
H=1.5	F(H)=172.002
H=2	F(H)=205.251
H=2.5	F(H)=229.074
H=3	F(H)=245.044
H=3.5	F(H)=254.731
H=4	F(H)=259.705
H=4.5	F(H)=261.538
H=5	F(H)=261.799
H=5.5	F(H)=262.061
H=6	F(H)=263.894
H=6.5	F(H)=286.868
H=7	F(H)=278.554
H=7.5	F(H)=284.524
H=8	F(H)=318.348
H=8.5	F(H)=351.597
H=9	F(H)=395.841
H=9.5	F(H)=452.651
H=10	F(H)=523.599

C

H=0	F(H)=0
H=.5	F(H)=.0654498
H=1	F(H)=.529599
H=1.5	F(H)=1.76715
H=2	F(H)=4.18879
H=2.5	F(H)=8.18123
H=3	F(H)=14.1372
H=3.5	F(H)=22.4493
H=4	F(H)=33.5103
H=4.5	F(H)=47.7129
H=5	F(H)=65.4498
H=5.5	F(H)=87.1137
H=6	F(H)=113.097
H=6.5	F(H)=143.793
H=7	F(H)=179.594
H=7.5	F(H)=220.893
H=8	F(H)=268.083
H=8.5	F(H)=321.555
H=9	F(H)=381.708
H=9.5	F(H)=448.92
H=10	F(H)=523.599

D

H=0	F(H)=0
H=.5	F(H)=74.6783
H=1	F(H)=141.895
H=1.5	F(H)=202.044
H=2	F(H)=255.516
H=2.5	F(H)=302.705
H=3	F(H)=344.004
H=3.5	F(H)=379.805
H=4	F(H)=410.501
H=4.5	F(H)=436.485
H=5	F(H)=458.149
H=5.5	F(H)=475.886
H=6	F(H)=490.088
H=6.5	F(H)=501.149
H=7	F(H)=509.462
H=7.5	F(H)=515.417
H=8	F(H)=519.41
H=8.5	F(H)=521.882
H=9	F(H)=523.075
H=9.5	F(H)=528.588
H=10	F(H)=523.599

E

H=0	F(H)=0
H=.5	F(H)=10.472
H=1	F(H)=20.9439
H=1.5	F(H)=31.4159
H=2	F(H)=41.8879
H=2.5	F(H)=52.3599
H=3	F(H)=62.8318
H=3.5	F(H)=73.3038
H=4	F(H)=88.7758
H=4.5	F(H)=94.2477
H=5	F(H)=104.72
H=5.5	F(H)=145.608
H=6	F(H)=188.496
H=6.5	F(H)=230.383
H=7	F(H)=272.271
H=7.5	F(H)=314.159
H=8	F(H)=356.047
H=8.5	F(H)=397.935
H=9	F(H)=439.823
H=9.5	F(H)=481.711
H=10	F(H)=523.599

F

H=0	F(H)=0
H=.5	F(H)=41.8879
H=1	F(H)=83.7758
H=1.5	F(H)=425.664
H=2	F(H)=167.552
H=2.5	F(H)=209.439
H=3	F(H)=251.327
H=3.5	F(H)=293.215
H=4	F(H)=335.103
H=4.5	F(H)=376.991
H=5	F(H)=418.879
H=5.5	F(H)=429.351
H=6	F(H)=489.823
H=6.5	F(H)=450.295
H=7	F(H)=460.767
H=7.5	F(H)=471.239
H=8	F(H)=481.711
H=8.5	F(H)=492.183
H=9	F(H)=502.655
H=9.5	F(H)=513.127
H=10	F(H)=523.599

ANNEXE V
Des réponses (H = 10 dm)

①. C'est la *sphère* qui donne le volume : $V = \frac{500\pi}{3} \ell \approx 523,6 \ell$.

②. Le *cylindre* (n° 1) : $\frac{500\pi}{3} = \pi R^2 H$ d'où $R^2 = \frac{50}{3}$; $R = \frac{5\sqrt{6}}{3}$

Volume du liquide : $h \rightarrow V(h) = \frac{50\pi}{3} h$.

③. Le *cône* (n° 4) : $\frac{500\pi}{3} = \frac{1}{3} \pi R^2 H$ d'où $R^2 = 50$ $R = 5\sqrt{2}$.

Volume du liquide : $h \rightarrow V(h) = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

avec $r = \frac{\sqrt{2}}{2} h$ on a : $V(h) = \frac{1}{6} \pi h^3$.

④. Le *cône* (n° 5) : on a encore $R = 5\sqrt{2}$.

Volume du liquide : $h \rightarrow V(h) = \frac{500\pi}{3} - \frac{1}{6} \pi (10-h)^3$ (voir 3)

d'où $V(h) = \frac{\pi}{6} (h^3 - 30h^2 + 300h)$

⑤. Le *sablier* (n° 6) : Les deux parties ont le même volume $\frac{250\pi}{3}$,

la même hauteur
5 et le même rayon $5\sqrt{2}$.

Volume du liquide :

$$\begin{cases} \text{si } h \leq 5 : V(h) = \frac{250\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} (5-h)^3 \\ \text{si } h > 5 : V(h) = \frac{250\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} (h-5)^3 \end{cases}$$

En définitive, pour tout h : $V(h) = \frac{250\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} (5-h)^3$.

⑥. Le *double cylindre* (2) : $r' = 2r$.

$$\frac{500\pi}{3} = 5\pi r'^2 + 5\pi r^2 = 25\pi r^2 \quad \text{d'où } r^2 = \frac{60}{9} ; r = \frac{2\sqrt{15}}{3} ; r' = \frac{4\sqrt{15}}{3}$$

Volume du liquide :

$$\begin{cases} \text{si } h \leq 5 : V(h) = \frac{80\pi}{3} h \\ \text{si } h > 5 : V(h) = \frac{400\pi}{3} + \frac{20\pi}{3} (h-5) = 100\pi + \frac{20\pi}{3} h \end{cases}$$

⑦. L'autre double cylindre (3) : mêmes rayons

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } h \leq 5 : V(h) = \frac{20\pi}{3} h \\ \text{si } h > 5 : V(h) = \frac{100\pi}{3} + \frac{80\pi}{3} (h - 5) = \frac{80\pi}{3} h - 100\pi . \end{array} \right.$$

⑧. La calotte sphérique : $R = 5$

$$V(h) = \frac{1}{3} \pi h^2 (15 - h) = 5\pi h^2 - \frac{1}{3} \pi h^3 .$$

Qui va avec qui ?

	Récipient	Courbe	Formule	Tableaux de valeurs
Cylindre	(1)	n° 4	(III)	à faire...
Double cylindre	(2)	n° 2	(IV)	F
Double cylindre	(3)	n° 5	(VII)	E
Cône renversé	(4)	n° 7	(I)	C
Cône	(5)	n° 1	(V)	D
Sablier	(6)	n° 6	(VI)	B
Sphère	(7)	n° 3	(II)	A

A propos du nombre d'or

G. Mison et R. Gauthier

Nous avons essayé de rassembler des activités variées, à caractère géométrique ou algébrique, se rapportant toutes au "nombre d'or".

Ces activités permettent :

- de calculer, avec ou sans machine
- d'organiser des calculs
- d'interpréter des résultats
- de revoir des notions géométriques et trigonométriques
- d'effectuer des dessins
- de mettre en œuvre plusieurs notions du programme de seconde.

Le document complet (pages 56 à 64) a été distribué à chaque élève en cours d'année (février - mars) avec les consignes suivantes : un délai de deux ou trois mois est laissé à chaque élève pour la recherche et la rédaction. Chaque élève devra rendre individuellement un dossier-réponse ; ce dossier pourra être complété d'informations historiques éventuelles, de documents supplémentaires sur le nombre d'or et ses utilisations.

Des heures sont prévues pour répondre aux questions qui peuvent se poser (préciser une rédaction volontairement sommaire, apporter des compléments d'information mathématique, etc.).

En fin d'année scolaire, les dossiers corrigés (partiellement) ont été rendus aux élèves, accompagnés d'un corrigé complet photocopié. La remise de ce document permettait de ne pas corriger en détail toutes les fautes de calcul.

Faut-il préciser que certains travaux rendus furent remarquables (le mot n'est pas trop fort), alors que d'autres furent bien pauvres !

Dans leur grande majorité, les élèves ont effectué les calculs demandés avec une grande conscience, sans voir toujours les liens entre certains résultats.

Il est bien évident que la plupart de nos élèves n'ont pas senti l'unité profonde de ce document, en dépit de nos mises au point.

Ce travail a été fait dans deux classes de seconde au lycée Ampère et au lycée Récamier à Lyon.

Nombre d'or

Activité 1

Avec une machine, si vous tapez 5 puis $\sqrt{\quad}$, vous obtenez une approximation de $\sqrt{5}$: 2,236 068 .

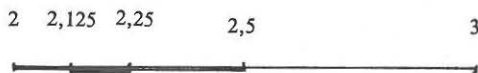
Le but de cette activité est autre : supposons que notre machine ne dispose pas de touche $\sqrt{\quad}$, et cherchons cependant des encadrements de ce réel $\sqrt{5}$.

$\sqrt{5}$ est le réel positif dont le carré est 5. Or $4 < 5 < 9$ dont $2 < \sqrt{5} < 3$. Prenez le milieu de l'intervalle $[2;3]$: c'est 2,5 .

$$(2,5)^2 = 6,25 : 4 < 5 < 6,25 \text{ donc } 2 < \sqrt{5} < 2,5 .$$

Prenez alors le milieu de l'intervalle $[2;2,5]$, soit 2,25 et poursuivez la recherche... jusqu'ou vous pourrez !

Disposez clairement vos calculs. Vous comprendrez vite pourquoi !

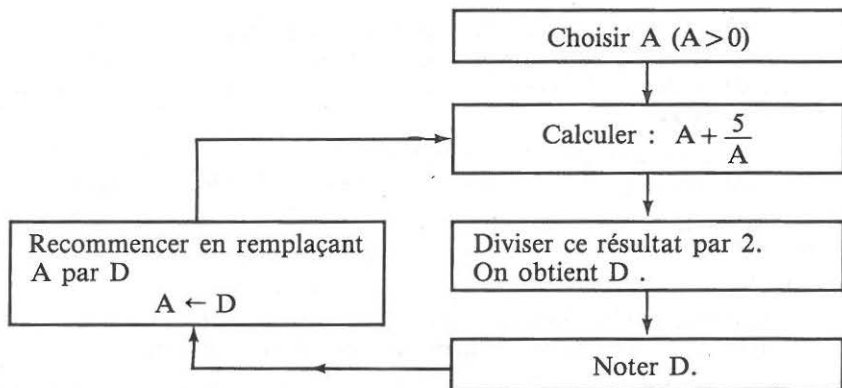


Activité 2

Voici une autre façon de retrouver des approximations de $\sqrt{5}$.

Voici un programme de calcul. C'est vous qui choisissez A au départ. Bien noter tous les résultats D et marquer sur un axe les points successifs ayant pour abscisses ces nombres D trouvés.

Que faites-vous si la machine affiche deux fois de suite le même résultat ?



Recommencer avec un autre A au départ.

Activité 3

Où il est question d'une équation dans \mathbf{R} , représentée de la façon suivante par les mathématiciens de Mésopotamie :

“J'ai retranché le côté de mon carré de la surface de ce carré : 1”.

Il s'agit dans notre “langage” de l'équation : $X^2 - X = 1$ ou encore

$$X^2 = 1 + X \quad (1)$$

1) Montrez que aucun entier naturel n'est solution de cette équation. Pour cela, vérifiez d'abord pour 0 ; 1 et 2 ...

Ensuite, démontrez que si $n > 2$, alors $n^2 > n + 1$.

2) On pose $\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Vérifiez que ce réel α est solution de cette équation (1). Démontrez ensuite que l'inverse de l'opposé de α est aussi solution de cette équation. (On admettra que α est la SEULE solution positive).

3) Donnez des valeurs décimales approchées de α et de $\frac{1}{\alpha}$ et observez bien les décimales...

Comment l'expliquez-vous ?

Activité 4

Où l'on reprend le réel α de l'activité 3 et où l'on s'intéresse à ses puissances successives.

Si l'on se souvient que α est solution de l'équation : $X^2 = 1 + X$, on a immédiatement : $\alpha^2 = 1 + \alpha$.

Cherchons α^3 : c'est le produit $\alpha^2 \times \alpha$ donc

$$\alpha^3 = (1 + \alpha)\alpha = \alpha + \alpha^2 = 1 + 2\alpha.$$

Cherchons α^4 : c'est le produit $\alpha^3 \times \alpha$ donc

$$\alpha^4 = (1 + 2\alpha)\alpha = \alpha + 2\alpha^2 = 2 + 3\alpha.$$

Continuez jusqu'à α^{10} et essayez d'imaginer une règle de “passage” de α^n à α^{n+1} .

Intéressons-nous maintenant aux puissances d'exposants négatifs de α .

On sait que

$$\alpha^{-1} = \frac{1}{\alpha} = \alpha - 1$$

De même :

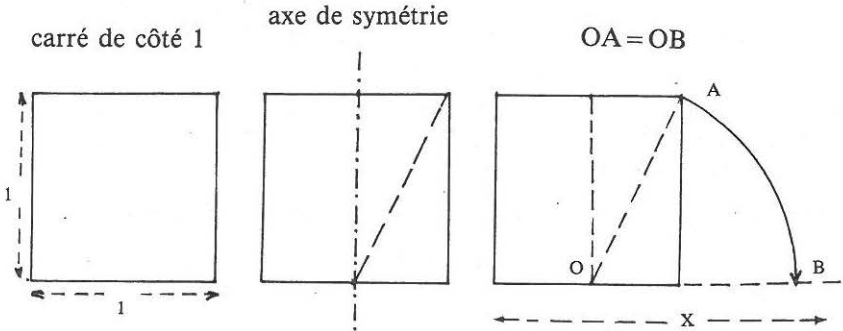
$$\alpha^{-2} = \frac{\alpha^{-1}}{\alpha} = \frac{\alpha - 1}{\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha} = 1 - \alpha + 1 = -\alpha + 2 \dots$$

Continuez jusqu'à α^{-10} et essayez d'imaginer une règle de “passage” de α^{-n} à α^{-n-1} .

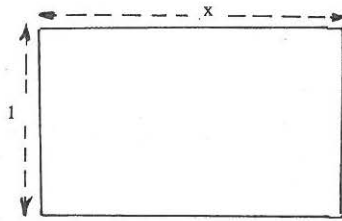
Calculez : $\alpha - \alpha^{-1}$; $\alpha^2 + \alpha^{-2}$; $\alpha^3 - \alpha^{-3}$; $\alpha^4 + \alpha^{-4}$; ...

Activité 5

Où l'on retrouve α en géométrie, comme l'avaient déjà fait les géomètres grecs, bien longtemps avant vous.



Calculez x .



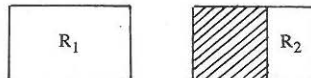
Activité 6

Déjà Euclide avait découvert ces rectangles d'or.

On part d'un rectangle de petit côté 1 et de grand côté X . On suppose X compris entre 1 et 2. C'est le rectangle R_1 .

De R_1 , on enlève le carré "hachuré" : il reste alors un rectangle R_2 . Quelles sont ses dimensions ?

Trouver X pour que le quotient $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ soit le même pour R_1 et pour R_2 .



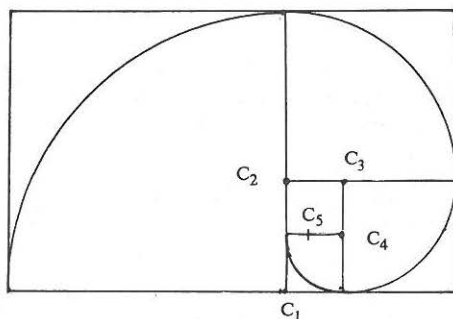
A partir de R_2 , on recommence : c'est-à-dire que l'on enlève de R_2 le carré de côté $(X-1)$. On obtient un rectangle R_3 . Quel est, pour R_3 , le quotient L/l ?

Et vous pouvez continuer...

Activité de dessin

Tracez avec précision un rectangle de dimensions 150mm × 243mm. Construisez, à l'intérieur, les rectangles R2, R3, R4... comme l'indique le dessin et, dans chaque carré, tracez un quart de cercle comme il est indiqué : vous obtenez une spirale.

Les dimensions choisies au départ l'ont-elles été au hasard ?



Activité 7

Cette activité était chère à Léonard de Pise, appelé encore Fibonacci (XII^e siècle - Italie).

Au départ, choisir deux nombres : A et B. Le troisième est la somme des deux premiers : $C = A + B$.

Le suivant est la somme des deux qui le précèdent : $B + C$ etc.

Vous obtenez ainsi une SUITE telle que chaque terme, à partir du 3^e, est égal à la somme des deux termes précédents :

$$U_1 = A ; U_2 = B ; U_3 = U_1 + U_2 \dots ; U_n = U_{n-2} + U_{n-1} \dots$$

En choisissant A et B, écrivez les dix premiers termes de la suite.

On fabrique alors une autre suite à partir de cette suite de Fibonacci : on divise chaque terme par celui qui le précède, à partir du 2^e :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 U_1 & & U_2 & & U_3 & & U_4 & & U_5 & \dots \\
 \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
 V_1 = \frac{U_2}{U_1} & & V_2 = \frac{U_3}{U_2} & & V_3 = \frac{U_4}{U_3} & & V_4 = \frac{U_5}{U_4} & & &
 \end{array}$$

Trouvez des valeurs décimales approchées des termes V_1, V_2, V_3, \dots jusqu'à V_9 , avec 7 décimales.

Comparez ces nombres au réel α (activité 3).

Placez sur un axe les points ayant pour abscisses ces réels ; examinez la différence entre deux termes consécutifs et prévoyez la position de V_{10} , V_{11} ... Calculez alors V_{10} et V_{11} .

Recommencez avec, au départ, deux autres réels A et B.

Activité 8

Où des intersections de courbes permettent de retrouver (... encore !) le réel α .

1) $f : x \mapsto x^2$ $g : x \mapsto 1 + x$.

Pour x prenant des valeurs dans l'intervalle $[-3; +3]$, tracer avec soin point par point une représentation graphique de f (c'est la parabole d'équation $y = x^2$) puis sur le même dessin celle de g (c'est la droite d'équation $y = 1 + x$).

Ces deux courbes se coupent en deux points : l'un d'abscisse positive, c'est A. Comparez $f(1)$ et $g(1)$, puis $f(2)$ et $g(2)$: en déduire un encadrement de l'abscisse du point A. Affinez cet encadrement.

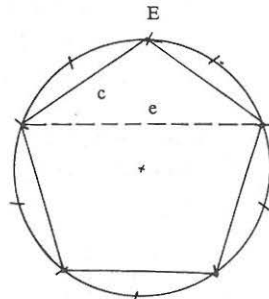
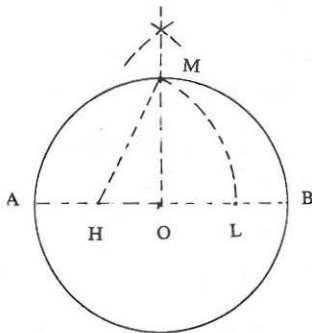
Démontrez que l'abscisse de A est le réel α (n° 3). Encadrez l'abscisse de l'autre point B ; quel est ce réel ?

2) Reprendre les activités du 1) avec les deux fonctions suivantes :

$$F : x \rightarrow 1 + \frac{1}{x} \qquad G : x \rightarrow x$$

Activité 9

Du dessin géométrique : décagones et pentagones réguliers.



Voici un programme de dessin :

- tracer un cercle de centre O ($R=1$) ;
- tracer un diamètre AB ; H est le milieu de [AO] ;
- OM est un rayon perpendiculaire à AB ;
- le cercle de centre H et de rayon HM coupe OB en L.

Démontrer que $AL = \alpha$ et que $OL = \frac{1}{\alpha}$.

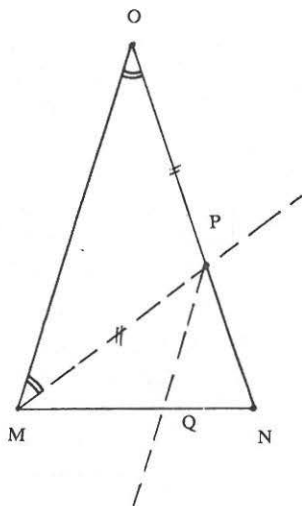
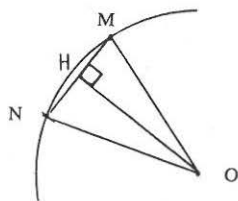
- tracer un autre cercle de même rayon et à partir d'un point E de ce cercle, porter des cordes successives de longueur $OL = 1/\alpha$;
- au bout de 10 tracés, on retombe sur le point E. On construit ainsi un *décagone* régulier convexe ;
- construire aussi un *décagone* étoilé ;
- construire ensuite un *pentagone* régulier convexe puis un *pentagone* régulier étoilé.

Vous apprendrez peut-être que, pour les pentagones, le quotient :

$$\frac{e}{c} = (\text{côté du P. étoilé}) / (\text{côté du P. convexe}) = \alpha .$$

Activité 10

Un triangle d'or... où l'on a besoin de trigonométrie.



Reprenons le décagone régulier de l'activité (9). [MN] est un côté de ce décagone : nous allons nous intéresser au triangle OMN appelé *triangle d'or*, car $OM/MN = \alpha$: démontrez-le !

- Quels sont les angles de ce triangle ?
- Tracez la hauteur [OH] : calculez OH en fonction de α .

- Quels sont les angles et les côtés du triangle OHM ?
- En déduire, en fonction de α , $\sin 18^\circ$, $\cos 18^\circ$, $\cos 72^\circ$, $\sin 72^\circ$.
- Calculez en fonction de α les autres hauteurs de OMN, ainsi que l'aire de ce triangle.

Et l'on refait encore du dessin !

- Dessinez un autre triangle d'or assez grand : prendre par exemple $OM = 20\text{cm}$ et attention aux angles.
- Tracez la bissectrice de \widehat{OMN} : elle coupe (ON) en P. Montrez que MNP est encore un triangle d'or et que $OP = PM$. Calculez alors PN en fonction de α .
- Tracez la bissectrice de \widehat{MPN} qui coupe (MN) en Q. Que dire du triangle PQN ? Démontrez que $QP = QM$. Calculez QN en fonction de α .
- ... et vous pouvez continuer avec la bissectrice de \widehat{PQN} ...
- Mettre en évidence des droites parallèles.

Et en admettant que $\cos 36^\circ = 1 - 2(\sin 18^\circ)^2$, calculez $\cos 36^\circ$ en fonction de α .

Activité 11

Avec des fractions... continues.

Simplifiez :

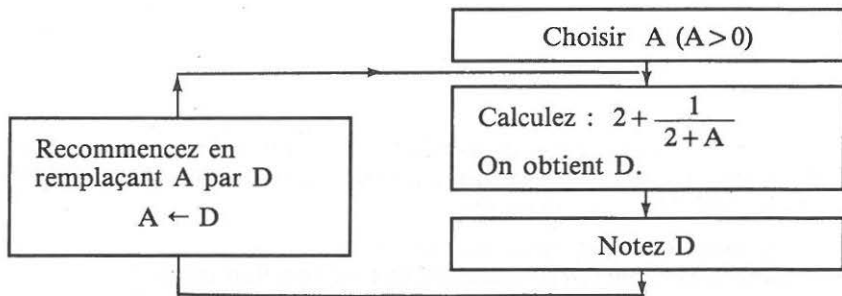
$$2 + \frac{1}{2} ; 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}} ; 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}} ; 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}}}$$

Attention au passage d'une fraction à la suivante ; écrivez ce qui viendrait après : le cinquième terme de cette SUITE.

Donnez des valeurs approchées décimales de chaque fraction.

Comparez à $\sqrt{5}$.

Faites "fonctionner" l'organigramme ci-dessous (voir activité (2)). Quel est le lien avec ce qui précède ?



Activité 12

Simplifiez :

$$1 + \frac{1}{2} ; 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} ; 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} ; 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}$$

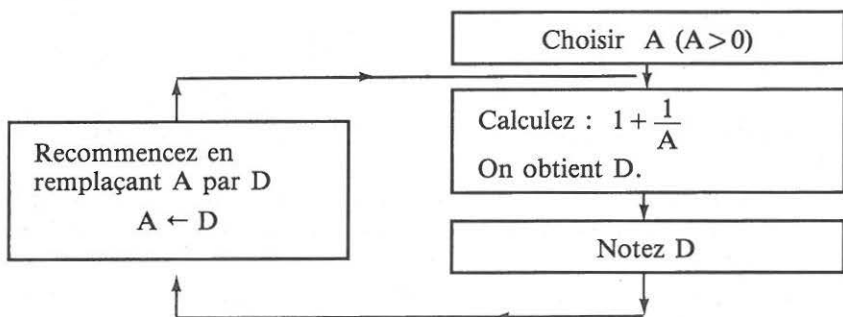
Attention au passage d'une fraction à la suivante ; écrivez ce qui viendrait après !

Donnez des valeurs décimales approchées.

Faites fonctionner l'organigramme ci-dessous.

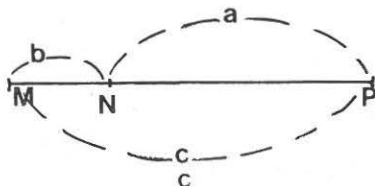
Quel est le lien avec ce qui précède ?

Comparez à α .



Activité 13

Où l'on retrouve encore une activité chère à Euclide.



[MP] est un segment de longueur c , N est un point de ce segment. a et b sont les longueurs respectives NP et NM. On suppose bien sûr que $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

- Ecrire tous les quotients X/Y (avec $X \neq Y$) X et Y étant pris dans $\{a; b; c\}$.
Vous trouverez six quotients.

- En associant ces quotients deux à deux, écrire toutes les égalités distinctes qui se présentent (il y en a 15, on peut faire un tableau).
- Remplacer chacune des 15 égalités par une relation simple entre a , b et c .
On rencontrera des cas particuliers : lesquels ?
des impossibilités : lesquelles ?
On montrera en particulier que l'égalité $c^2 = a \cdot b$ est impossible.
- En éliminant les cas particuliers et les impossibilités, il reste DEUX relations : lesquelles ?
- En posant $a = 1$ et $c = 1 + b$, remplacer chacune de ces deux égalités par une relation ne contenant que b .
On vérifiera que le nombre α est solution de l'une des équations obtenues et que $1/\alpha$ est solution de l'autre.

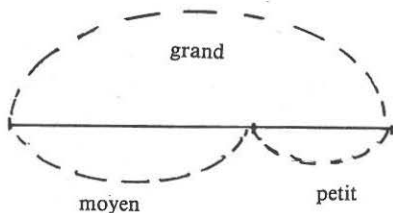
La solution α trouvée correspond à la situation :

$$\alpha = \frac{\text{grand segment}}{\text{segment moyen}} = \frac{\text{segment moyen}}{\text{petit segment}}$$

C'est ce que l'on appelle la "SECTION DORÉE". Cette étude a déjà été faite par Euclide (Livre VI) :

"Une droite est dite coupée en extrême et moyenne raison lorsque la droite entière est au plus grand segment comme le plus grand est au plus petit"...

On notera que, dans ce texte, "droite" est pris au sens de "segment de droite".

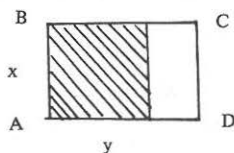


L'escargot d'or

Les activités suivantes permettent :

- en classe de seconde :
 - d'effectuer des dessins
 - de faire du calcul algébrique
 - de la géométrie
- en classe de première : — d'étudier des suites
- en terminale :
 - d'utiliser les nombres complexes
 - les similitudes.

ABCD étant un rectangle ($BC > AB$, $BC \neq 2AB$), si on découpe le carré hachuré on obtient un nouveau rectangle. On voudrait que le rapport des côtés du premier rectangle soit égal au rapport des côtés du second rectangle. En désignant par x la mesure de AB et y celle de BC, déterminer le rapport $\frac{y}{x}$ correspondant au problème.



Etude de quelques suites

Etant donné un rectangle R_n , on désigne par L_n , ℓ_n et d_n les mesures respectives de sa longueur, sa largeur et sa diagonale.

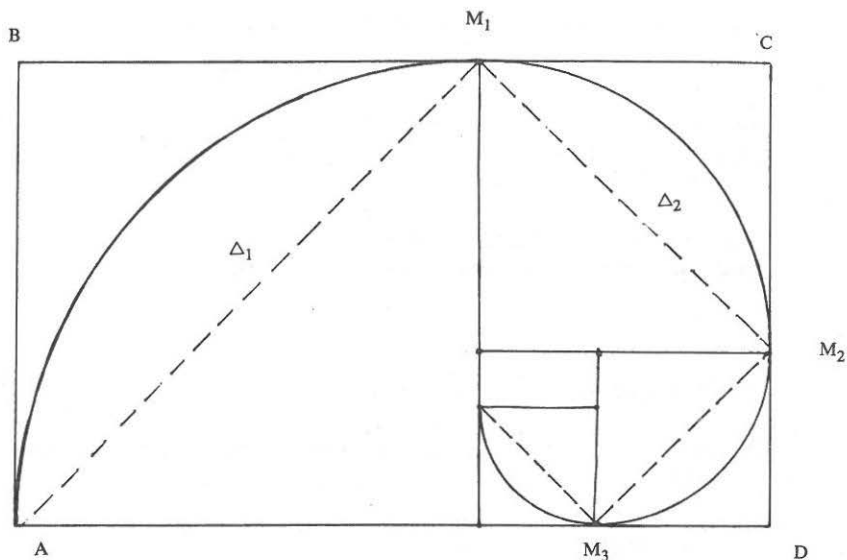
Pour R_1 , on prend $\ell_1 = 1$ et donc $L_1 = \alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Exprimer L_n et d_n en fonction de ℓ_n , puis L_{n+1} en fonction de L_n , ℓ_{n+1} en fonction de ℓ_n et d_{n+1} en fonction de d_n .

Etudier les suites (L_n) , (ℓ_n) et (d_n) .

On souhaite, désormais, déterminer la position des carrés successifs obtenus. Pour cela, on décide que si on a tracé une diagonale Δ_n du carré C_n , alors le carré C_{n+1} est construit de sorte que l'une de ses diagonales, Δ_{n+1} ait une extrémité commune avec Δ_n et soit perpendiculaire à Δ_n .

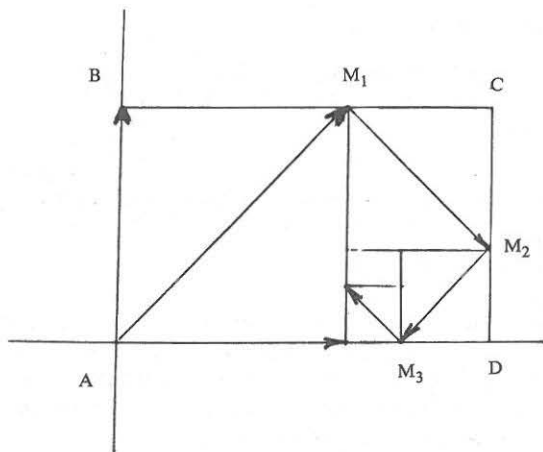
Faites la construction correspondante.



Essayons de préciser “l’enroulement” de la courbe $AM_1M_2M_3\dots$ ou encore le problème de “limite de M_n ”.

Choisissons un repère orthonormé direct (A, \vec{u}, \vec{v}) avec $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u} = \frac{1}{\alpha} \overrightarrow{AD}$.

Exprimer $M_{n+1}M_{n+2}$ en fonction de M_nM_{n+1} , puis en fonction de $M_{n-1}M_n$. Puis les vecteurs $\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}$ et $\overrightarrow{M_{n-1}M_n}$.



En désignant par z_n l’affiche de M_n , montrer que :

$$z_{n+2} - z_{n+1} = -\frac{i}{\alpha} (z_{n+1} - z_n)$$

En posant $u_n = z_{n+1} - z_n$, exprimer z_n en fonction de $u_0 = 1 + i$.

Soit Ω le point d’affiche $\omega = \frac{u_0}{1 + \frac{i}{\alpha}}$, étudier $\|\overrightarrow{\Omega M_n}\|$ et sa limite.

Conséquence pour la “suite de points” M_n ?

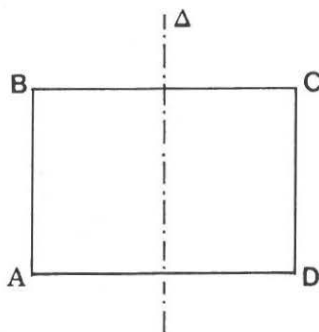
Proposez une construction géométrique simple de Ω .

Le rectangle de l’imprimeur

En imprimerie, on utilise des “formats” normalisés représentés par des rectangles R_0, R_1, \dots, R_n qui obéissent aux règles suivantes :

le quotient $\frac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est le même pour tous les rectangles.

On obtient le rectangle R_{n+1} en partageant un rectangle R_n en deux suivant la médiatrice des grands côtés.



Si a_n et b_n désignent respectivement la longueur et la largeur de R_n , on a :

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \quad \text{et} \quad a_{n+1} = b_n ; \quad b_{n+1} = \frac{1}{2} a_n$$

d'où :

$$\frac{a_n}{b_n} = \sqrt{2} .$$

On notera que si l'on prend pour R_0 un rectangle de 1 m^2 d'aire (format A_0), on trouve pour R_4 les dimensions $29,7 \times 21$ en centimètres (format A_4).

Etude de suites

Etant donné un rectangle R_n , on désigne par L_n , ℓ_n et d_n les mesures respectives de sa longueur, sa largeur et sa diagonale. Pour R_1 on prend $L_1 = \sqrt{2}$. Etudier les suites (L_n) , (ℓ_n) , (d_n) ainsi que la suite (A_n) des aires des rectangles.

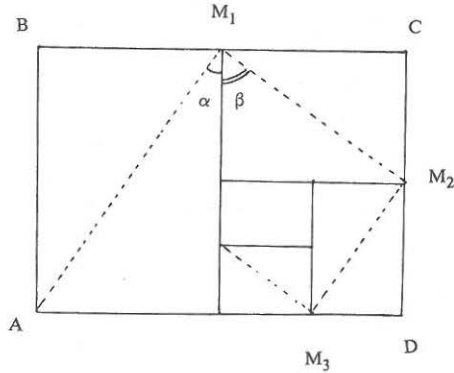
Etude de la ligne polygonale $AM_1M_2\dots$

Comme pour l'*escargot d'or* convenons, à partir du rectangle R_n , de placer, à l'intérieur, les rectangles suivants R_{n+1} , R_{n+2} comme l'indique la figure : les diagonales successives AM_1 , M_1M_2 , $M_2M_3\dots$ ont une extrémité commune et intéressons-nous à la ligne polygonale $AM_1M_2M_3\dots$

- Etudier les directions de AM_1 et M_1M_2 ; de M_nM_{n+1} et $M_{n+1}M_{n+2}$.
- Exprimer $\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}$ en fonction de $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$, en déduire en désignant par z_n l'affixe de M_n que :

$$z_{n+2} = z_{n+1} \left(1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}} z_n .$$

- Etudier alors la suite $u : u_0 = z_1 - z_0, u_n = z_{n+1} - z_n$. En déduire que la "suite de points M_n " admet un point limite de coordonnées $(\frac{2\sqrt{2}}{3}; \frac{1}{3})$ dont on précisera la position par rapport à $[BD]$ et au cercle de diamètre $[AM_1]$.



Annexe 1 : L'escargot d'or

Quelques résultats obtenus en Terminale

A. Etude des suites

$$\text{Rectangle } R_1 \quad \ell_1 = 1 \quad L_1 = \alpha \quad d_1 = \sqrt{1 + \alpha^2}$$

$$\text{Rectangle } R_{n+1} \quad L_{n+1} = \ell_n = \frac{1}{\alpha} L_n$$

$$\ell_{n+1} = L_n - \ell_n = \ell_n(\alpha - 1) = \frac{1}{\alpha} \ell_n$$

$$d_{n+1} = \frac{1}{\alpha} d_n$$

Les suites (L_n) , (ℓ_n) et (d_n) sont des suites géométriques de même raison $\frac{1}{\alpha}$, où $\frac{1}{\alpha} < 1$ donc ces suites sont convergentes avec pour limite zéro.

B. Utilisation des nombres complexes (cf. figure)

$$M_1 M_2 = \frac{1}{\alpha} AM_1 \quad \text{et plus généralement} \quad M_{n+1} M_{n+2} = \frac{1}{\alpha} M_n M_{n+1}$$

$$\text{et} \quad M_{n+1} M_{n+2} = \frac{1}{\alpha^2} M_{n-1} M_n$$

AM_1 est perpendiculaire à $M_1 M_2$, elle-même perpendiculaire à $M_2 M_3$ donc les droites AM_1 et $M_2 M_3$ sont parallèles. Plus généralement, les

droites $M_{n+1}M_{n+2}$ et $M_{n-1}M_n$ sont parallèles. Compte tenu du dessin et des conventions faites, on a donc :

$$\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}} = -\frac{1}{\alpha^2} \overrightarrow{M_{n-1}M_n}$$

Le vecteur $\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}$ est l'image de $\overrightarrow{M_{n-1}M_n}$ par l'homothétie vectorielle de rapport $(-1/\alpha^2)$. Si l'on désigne par z_n l'affixe complexe du point M_n , on a donc :

$$z_{n+2} - z_{n+1} = -\frac{1}{\alpha^2} (z_n - z_{n-1}) .$$

Or : $(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{M_1M_2}) \equiv -\pi/2 [2\pi] .$

De même : $(\overrightarrow{M_nM_{n+1}}, \overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}) \equiv -\pi/2 [2\pi] .$

Le vecteur $\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}}$ est l'image de $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$ par la similitude vectorielle de "rapport" $-\frac{i}{\alpha}$ (angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$ et rapport $\frac{1}{\alpha}$).

D'où :

$$(1) \quad z_{n+2} - z_{n+1} = -\frac{i}{\alpha} (z_{n+1} - z_n)$$

Considérons la suite (U_n) telle que $U_n = z_{n+1} - z_n$.

La relation (1) devient : $U_{n+1} = -\frac{i}{\alpha} U_n$ (2).

C'est une suite géométrique de nombres complexes, de premier terme $U_0 = z_1 - z_0 = z_1$, $U_0 = 1 + i$ (c'est l'affixe du point M_1).

La raison en est $-\frac{i}{\alpha}$.

La somme vectorielle :

$$\overrightarrow{AM_n} = \overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} + \dots + \overrightarrow{M_{n-1}M_n}$$

conduit à l'égalité :

$$z_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$$

$$\text{d'où : } z_n = U_0 \frac{1 - (-\frac{i}{\alpha})^n}{1 + \frac{i}{\alpha}} = \frac{U_0}{1 + \frac{i}{\alpha}} - \frac{U_0(-\frac{i}{\alpha})^n}{1 + \frac{i}{\alpha}}$$

$$(3) \quad z_n - \frac{U_0}{1 + \frac{i}{\alpha}} = -\frac{U_0(-\frac{i}{\alpha})^n}{1 + \frac{i}{\alpha}}$$

Si l'on désigne par Ω le point image du complexe $\frac{U_0}{1 + \frac{i}{\alpha}}$, l'égalité (3)

donne avec les modules :

$$\|\vec{\Omega M_n}\| = \left| \frac{-U_0 \left(\frac{-i}{\alpha}\right)^n}{1 + \frac{i}{\alpha}} \right| = \frac{|U_0| \times \left|\frac{i}{\alpha}\right|^n}{1 + \frac{i}{\alpha}}$$

Examinons alors la suite réelle (W_n) avec

$$W_n = \frac{|U_0| \times \left|\frac{i}{\alpha}\right|^n}{\left|1 + \frac{i}{\alpha}\right|}$$

C'est une suite géométrique réelle de raison : $q = \left|\frac{i}{\alpha}\right| = \frac{1}{\alpha}$.

Or $\frac{1}{\alpha} < 1$. Donc cette suite (W_n) converge vers zéro.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\Omega M_n) = 0$.

On a ainsi démontré que la "suite de points" M_n a un "point limite" : le point Ω , dont il reste à calculer les coordonnées.

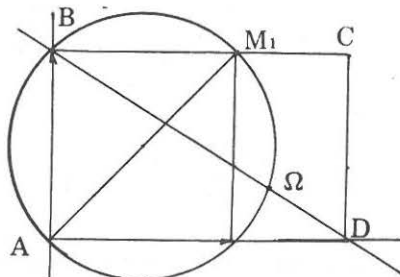
L'affixe de Ω est : $z_\Omega = \frac{U_0}{1 + \frac{i}{\alpha}} = \frac{\alpha(1+i)}{\alpha+i} = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\alpha^2+1} + i \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha^2+1}$

ou encore : $z_\Omega = \frac{2\alpha+1}{\alpha+2} + i \frac{1}{\alpha+2} = \frac{5+3\sqrt{5}}{10} + i \frac{5-\sqrt{5}}{10}$

L'escargot d'or se "referme" sur ce point $\Omega \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}; \frac{5-\sqrt{5}}{10} \right)$.

Et ce point-limite est facile à construire...

La diagonale(BD) a pour équation : $\frac{x}{\alpha} + y = 1$.



Remplaçons (x,y) par les coordonnées de Ω :

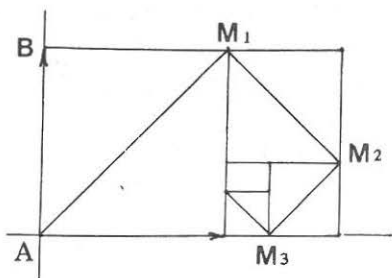
$$\frac{\alpha+1}{\alpha^2+1} + \frac{\alpha^2-\alpha}{\alpha^2+1} = 1..$$

Ce qui montre que Ω est un point de (BD) Quant au cercle de diamètre $[AM_1]$, il a pour équation : $x^2+y^2-x-y=0$.

Le lecteur vérifiera sans peine que Ω est un point de ce cercle... D'où la construction géométrique simple de Ω .

Encore des similitudes

Il existe une similitude directe unique σ qui à $(A M_1)$ associe $(M_1 M_2)$.



$$\sigma \begin{cases} A(0;0) \rightarrow M_1(1;1) \\ M_1(1;1) \rightarrow M_2(\alpha;2-\alpha) \end{cases}$$

Elle est de rapport $\frac{1}{\alpha}$ et d'angle de mesure $(-\frac{\pi}{2})$.

La fonction F associée dans C est du type : $F : z \rightarrow z' = -\frac{i}{\alpha}z + b$.

Or, l'origine a pour image M_1 d'affixe $1+i$, donc :

$$z' = -\frac{i}{\alpha}z + (1+i) .$$

Le centre de σ vérifie : $z + \frac{i}{\alpha}z = 1+i$ d'où $z = \frac{\alpha(1+i)}{\alpha+i}$.

On retrouve l'affixe de notre point Ω ci-dessus.

Ω est donc le centre de notre similitude σ .

On a : $\sigma(A) = M_1$; $\sigma(M_1) = M_2$. Vérifions que $\sigma(M_2) = M_3$.

Coordonnées de M_3 :
$$\begin{cases} x_3 = \alpha - y_2 = \alpha - (2 - \alpha) = 2\alpha - 2 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

$$F(z_2) = -\frac{i}{\alpha} (\alpha + i(2 - \alpha)) + 1 + i = 2\alpha - 3 = z_3 ,$$

donc : $\sigma(M_2) = M_3$.

De même, on démontre que, si $M_{n+1} = \sigma(M_n)$, alors $M_{n+2} = \sigma(M_{n+1})$.

En effet, $M_{n+1} = \sigma(M_n)$ signifie : $z_{n+1} = -\frac{i}{\alpha}z_n + 1 + i$

Or, d'après (1) : $z_{n+2} = z_{n+1} - \frac{i}{\alpha}z_{n+1} + \frac{i}{\alpha}z_n$

D'où l'on déduit : $z_{n+2} = -\frac{i}{\alpha}z_{n+1} + 1 + i$

Cette similitude σ de centre Ω transforme M_k en M_{k+1} , quel que soit k . Nous sommes donc capables de calculer les coordonnées d'un point M_{n+1} quelconque en fonction de celles de M_n : il suffit d'utiliser la forme analytique de σ

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{\alpha} y_n + 1 \\ y_{n+1} = -\frac{1}{\alpha} x_n + 1 \end{cases}$$

Et enfin, de la "vraie" géométrie... (voir figure)

- La similitude σ a un angle de mesure $(-\pi/2)$:

$$\sigma(A) = M_1 \text{ et } \sigma(M_1) = M_2 .$$

Le centre Ω est donc commun aux cercles de diamètres $[AM_1]$ et $[M_1M_2]$. De même tout cercle de diamètre $[M_nM_{n+1}]$ passe par ce point Ω .

- La similitude composée $\sigma \circ \sigma$ est une similitude directe de centre Ω et d'angle de mesure π : $\sigma \circ \sigma(A) = M_2$, donc la droite AM_2 passe par Ω . Il en est de même de la droite M_1M_3 , de la droite M_2M_4 ... et de toute droite M_nM_{n+2} .

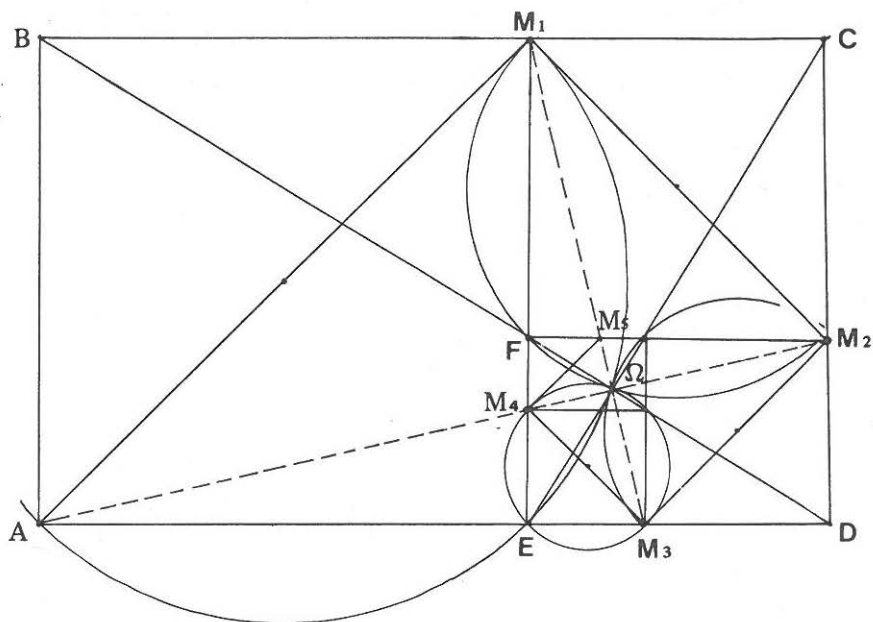
En fait, ΩM_1 est perpendiculaire à ΩM_2 ... Tous les points M_n se répartissent sur les deux segments : $[AM_2]$ pour les indices pairs et $[M_1M_3]$ pour les indices impairs.

$$\sigma(B) = C \quad \text{et} \quad \sigma(C) = D .$$

Donc ΩC est perpendiculaire à ΩB et ΩD , ce qui confirme que Ω est sur la droite BD . Mais rien n'est jamais fini... on remarquera encore que

$$\frac{M_1B}{M_1C} = \frac{1}{1-\alpha} = \alpha \quad \text{et} \quad \frac{\Omega B}{\Omega C} = \alpha \quad \text{d'où} \quad \frac{M_1B}{M_1C} = \frac{\Omega B}{\Omega C}$$

ΩM_1 est donc la bissectrice de $B\Omega C$.



Annexe 2 : Le rectangle de l'imprimeur Quelques résultats obtenus en Terminale

A. Etude des suites

Rectangle R_1 : $\ell_1 = 1$ $L_1 = \sqrt{2}$ $d_1 = \sqrt{3}$

Rectangle R_n : $\ell_n = \frac{\sqrt{2}}{2} \ell_{n-1}$ $L_n = \frac{\sqrt{2}}{2} L_{n-1}$ $d_n = \frac{\sqrt{2}}{2} d_{n-1}$

Les suites (ℓ_n) , (L_n) et (d_n) sont des suites géométriques de même raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

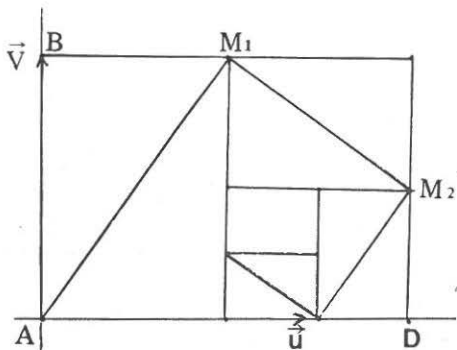
Aire des rectangles : $A_1 = \sqrt{2}$ $A_n = \frac{1}{2} A_{n-1}$

$\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan \beta = \sqrt{2}$ donc AM_1 est perpendiculaire à $M_1M_2\dots$

B. Utilisation des nombres complexes

Prenons comme repère (A, \vec{u}, \vec{v}) avec $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{AD}$.

$$M_1 M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} AM_1 \quad \text{et} \quad M_{n+1} M_{n+2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} M_n M_{n+1}$$



Par ailleurs : $(\overrightarrow{AM_1}, \overrightarrow{M_1 M_2}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

De même $(\overrightarrow{M_n M_{n+1}}, \overrightarrow{M_{n+1} M_{n+2}}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Le vecteur $\overrightarrow{M_{n+1} M_{n+2}}$ est l'image de $\overrightarrow{M_n M_{n+1}}$ par la similitude vectorielle de "rapport" (complexe) : $\frac{-i}{\sqrt{2}}$, d'où :

$$(1) \quad z_{n+2} - z_{n+1} = \frac{-i}{\sqrt{2}} (z_{n+1} - z_n).$$

ce qui équivaut à : $z_{n+2} = z_{n+1} \left(1 - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) + \frac{i}{\sqrt{2}} z_n$

La suite U telle que $U_n = z_{n+1} - z_n$ est donc une suite géométrique complexes de premier terme

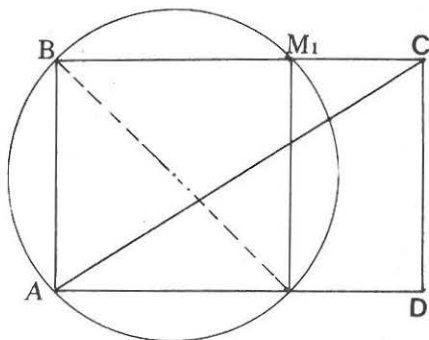
$$U_0 = z_1 - z_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \quad \text{et de raison} \quad \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right).$$

Une étude analogue à celle qui a été détaillée pour l'escargot d'or conduit à la détermination du "point limite" de la suite de points M_n . On trouvera le point K de coordonnées $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

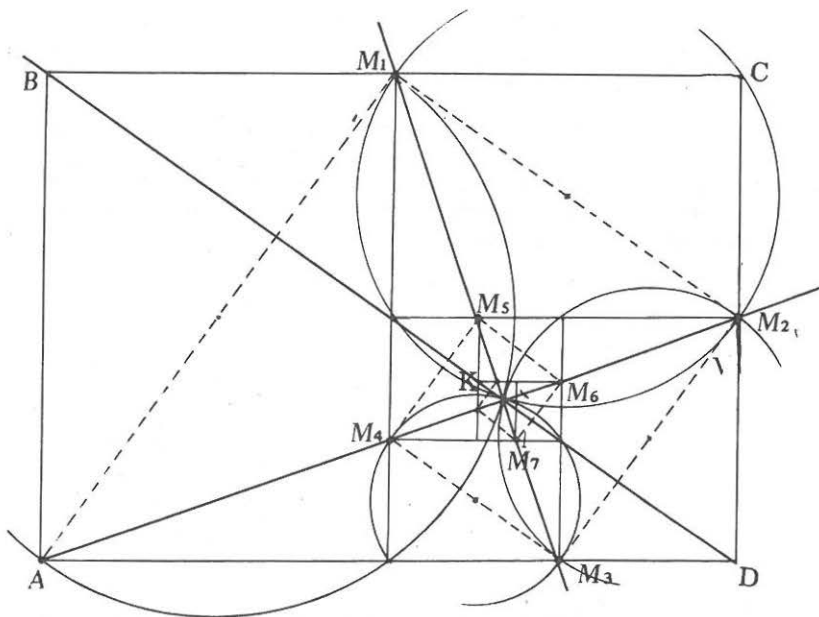
On notera que ce point K est sur la diagonale [BD] et que

$$\vec{BK} = \frac{2}{3} \vec{BD}.$$

K est également sur le cercle de diamètre [AM₁], comme pour le point limite Ω, trouvé dans l'escargot d'or.



En reprenant une méthode analogue à celle de l'escargot, on montrera que M_{n+1} est l'image de M_n par la similitude directe de centre K, de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle de mesure $(-\frac{\pi}{2})$ associée à la fonction :



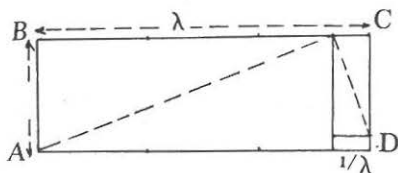
$$z \mapsto -\frac{i}{\sqrt{2}}z + \frac{\sqrt{2}+2i}{2}$$

De même, M_{n+2} est l'image de M_n par l'homothétie de centre K et de rapport $-\frac{1}{2}$.

Les points M_n se répartissent sur les deux droites perpendiculaires AM_2 et M_1M_3 .

En conclusion

Visiblement, ces deux situations ne sont que des cas particuliers d'un problème plus général.



Partant d'un rectangle R_1 de largeur 1 et de longueur λ , il s'agit de "découper" dans R_1 un rectangle R_2 tel que

$$\frac{L_2}{\ell_2} = \lambda$$

et ainsi de suite pour R_3 , à partir de R_2 , etc.

Pour le rectangle d'or : $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1}{\lambda} = \lambda - 1$ (il reste un carré).

Pour le rectangle de l'imprimeur : $\lambda = \sqrt{2}$ et $\frac{1}{\lambda} = \frac{\lambda}{2}$ (on découpe avec

la médiatrice). A chaque λ est associé un "point limite" situé sur BD ... Ce point limite L est le barycentre de B et D, de coefficients respectifs 1 et λ^2 , dans les deux situations étudiées.

Mais est-ce un résultat général ?

Domaine d'attraction pour la méthode de Newton

P.L. Hennequin

Introduction

Pendant longtemps, la méthode de Newton-Raphson (ou de la tangente) a été présentée classiquement dans les cours de mathématiques générales (cf. par exemple [1] ou [2]) comme une méthode locale de calcul d'une racine d'une équation $F(x)=0$ pour F dérivable. Cette méthode permet en effet, comme nous le rappelons ci-dessous, d'obtenir à partir d'une "bonne" approximation x_0 de la racine cherchée une "très bonne" approximation

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}.$$

L'apparition des ordinateurs, puis la généralisation de l'emploi des calculettes ont conduit naturellement à *itérer* la méthode, c'est-à-dire à construire la suite définie par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}$$

et à étudier sa convergence en fonction de la valeur initiale x_0 et ceci pour tout x_0 dans \mathbf{R} . Il est clair que si la suite $\{x_n\}$ converge vers une limite ℓ et si F/F' est continue en ℓ , $\ell = \ell - \frac{F(\ell)}{F'(\ell)}$ d'où $F(\ell)=0$ et ℓ est racine.

Inversement à toute racine α , nous pouvons associer son *domaine d'attraction* $\mathcal{D}(\alpha)$, c'est-à-dire l'ensemble des x_0 tels que $\{x_n\}$ converge vers α .

Une étude générale dépasse largement le niveau de la classe de Première, mais par contre on peut y traiter en détail un exemple particulier, qui donne pratiquement l'idée de la situation pour toute équation algébrique : il s'agit de l'équation algébrique du 3^e degré, la plus simple : $x^3 - x = 0$, qui possède trois racines réelles 0, 1 et -1, dont nous allons déterminer les domaines d'attraction.

Cette étude a sa place en classe de Première car elle associe naturellement travail sur les fonctions et travail sur les suites, car elle repose sur l'interprétation géométrique de la dérivée, sur l'étude locale des fonctions, car enfin elle conduit à des constructions graphiques et à des calculs itératifs simples à programmer.

Il se trouve que la question a fait l'objet de travaux récents (cf [3] qui contient une abondante bibliographie) eux-mêmes entraînés par le renouveau de l'étude de l'itération des polynômes, en liaison avec les "attracteurs étranges" et "les fractals" (cf [4] et [5]).

1. La méthode de Newton-Raphson

Elle a été introduite autour de 1680, sous une forme analytique par Newton (1643-1727) et sous une forme géométrique par Raphson (1648-1715) et est utilisée dès 1685 par Wallis dans son "Algèbre".

Présentation analytique (Newton)

Soit à calculer une racine α d'une équation $F(x)=0$; supposons connue une "valeur approchée" x_0 de α . Si F est dérivable en x_0 , on peut écrire :

$$F(x_0+h) = F(x_0) + hF'(x_0) + h\varphi(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0 .$$

Nous cherchons la racine α sous la forme $\alpha = x_0 + h$; on a donc

$$0 = F(\alpha) = F(x_0+h) = F(x_0) + hF'(x_0) + h\varphi(h) .$$

D'où, si l'on néglige le dernier terme, et si l'on suppose $F'(x_0) \neq 0$,

$$h \approx - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)}$$

ce qui conduit à la nouvelle valeur approchée de α :

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} .$$

Présentation géométrique (Raphson)

Soit (C) la courbe représentative de la fonction F . Il s'agit de déterminer l'abscisse du point A d'intersection de (C) et de l'axe des abscisses. Soit M_0 le point de (C), supposé voisin de A d'abscisse x_0 . Au voisinage de M_0 (donc de A), (C) est voisin de sa tangente M_0T qui coupe l'axe des abscisses en m_1 d'abscisse

$$x_1 = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} ,$$

si M_0T n'est pas parallèle à l'axe, c'est-à-dire si $F'(x_0) \neq 0$.

Etude de l'erreur

$$\text{On a} \quad x_1 - \alpha = x_0 - \frac{F(x_0)}{F'(x_0)} - (x_0 + h) = \frac{h\varphi(h)}{F'(x_0)}$$

et on ne peut guère avancer dans le cas général sans outils supplémentaires (dérivée seconde, accroissements finis, développements limités) qui sortent du programme de Première sinon des lycées. Par contre on peut achever l'étude sur un cas particulier, par exemple sur $F(x) \equiv x^3 - x = x(x^2 - 1)$, ce que nous allons faire en explicitant tous les calculs.

2. Etude de la méthode de Newton appliquée à l'équation

$$x(x^2 - 1) = 0$$

$$\text{On a } F(x) = x(x^2 - 1) \text{ d'où } F'(x) = 3x^2 - 1 \text{ et } x - \frac{F(x)}{F'(x)} = \frac{2x^3}{3x^2 - 1}$$

qui est bien définie sauf pour

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et } x = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Quelques activités

Etudier F , construire son graphe (figure 1), quelques tangentes ; étudier graphiquement l'algorithme $x_0 \rightarrow x_1$ pour divers valeurs de x_0 ; l'étudier à la calculatrice ; calculer les premiers termes de la suite

$$x_{n+1} = \frac{2x_n^3}{3x_n^2 - 1} \text{ pour différents } x_0.$$

Après ce premier débroussaillage, nous sommes conduits à distinguer plusieurs cas (de complexité croissante).

1° - $x_0 > 1$ (le cas $x_0 < -1$ se traite de même par symétrie)

$$\text{Soit } y = \frac{2x^3}{3x^2 - 1}; \text{ on a}$$

$$y - 1 = \frac{2x^3 - 3x^2 + 1}{3x^2 - 1} = \frac{(x-1)^2(2x+1)}{3x^2 - 1}.$$

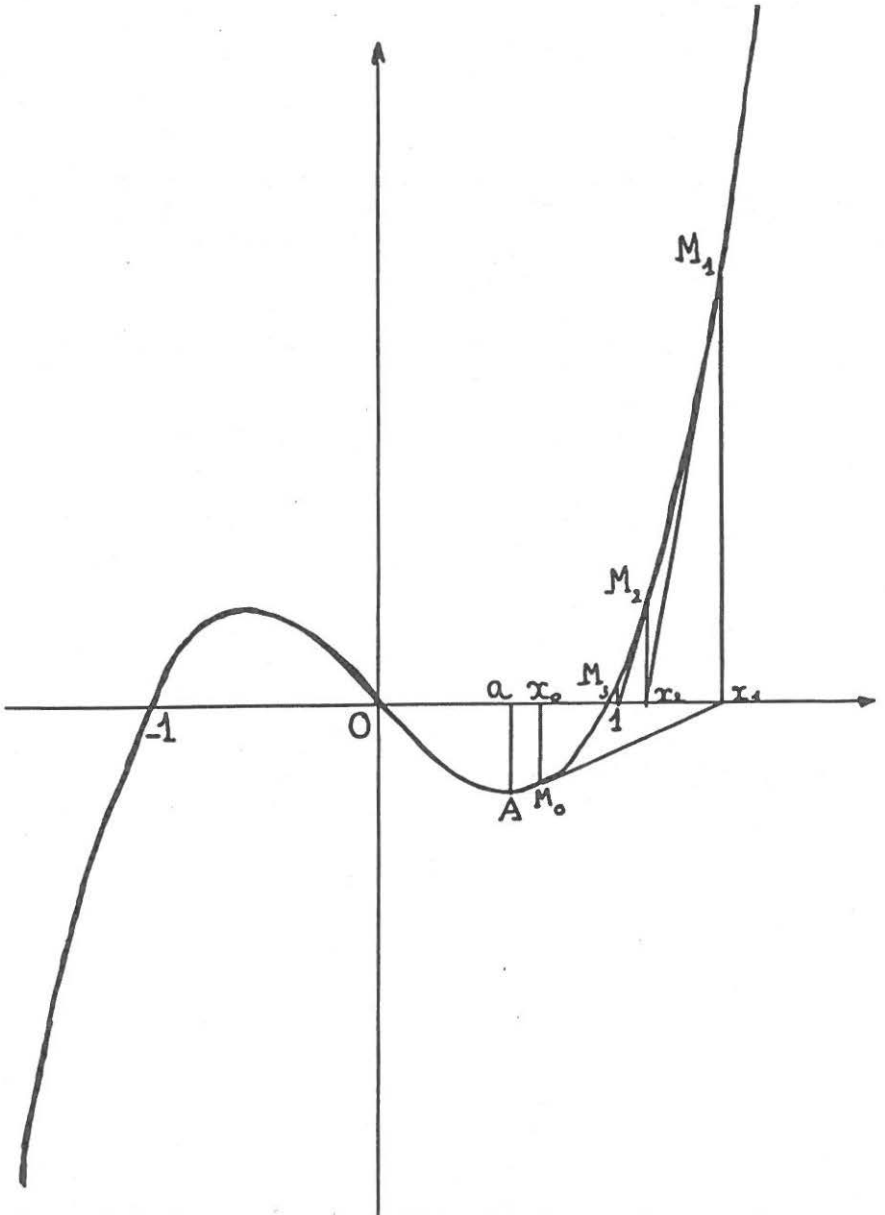
On en déduit :

$$\text{a) } x > 1 \Rightarrow y > 1$$

$$\text{b) } x > 1 \Rightarrow \frac{y-1}{x-1} = \frac{(x-1)(2x+1)}{3x^2-1} \leq \frac{(x-1)(2x+1)}{3(x^2-1)} = \frac{2x+1}{3(x+1)} \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{d'où } y-1 \leq \frac{2}{3}(x-1).$$

figure 1



On en déduit

$$0 \leq x_n - 1 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n (x_0 - 1)$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - 1) = 0 :$$

x_n tend vers 1 en décroissant.

Le domaine d'attraction $\mathcal{D}(1)$ de la racine 1 contient la demi-droite $[1, +\infty[$ mais on peut préciser : toujours pour $x \geq 1$, on a la majoration :

$$\frac{y-1}{(x-1)^2} = \frac{2x+1}{3x^2-1} \leq \frac{2x+1}{3x-1} \leq \frac{3}{2} .$$

D'où

$$y-1 \leq \frac{3}{2} (x-1)^2 .$$

Cette majoration est meilleure que la précédente si :

$$x-1 \leq \frac{4}{9} , \quad \text{donc pour } 1 \leq x \leq \frac{13}{9} .$$

Par exemple pour $0 \leq x_0 - 1 \leq 10^{-3}$, elle donne :

$$0 \leq x_1 - 1 \leq \frac{3}{2} \cdot 10^{-6} ,$$

puis

$$0 \leq x_2 - 1 \leq \frac{27}{8} \cdot 10^{-12} .$$

La méthode de Newton permet de déduire une très bonne approximation d'une bonne, une excellente d'une très bonne.

2° - x_0 "voisin" de 0

Revenons à $y = \frac{2x^3}{3x^2-1}$ mais cette fois pour x "voisin" de 0, ce qui va être précisé.

Si $3x^2 - 1 < 0$, c'est-à-dire si $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,577350269\dots$, y et x sont de signe contraire et on a :

$$\left| \frac{y}{x} \right| = \frac{2x^2}{1-3x^2} < 1 \quad \text{si et seulement si} \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,4472135955\dots$$

Choisissons x_0 tel que $|x_0| < \frac{1}{\sqrt{5}}$ alors

$$\begin{aligned} & |x_{n+1}| < |x_n| < \dots < |x_1| < |x_0| \\ \text{et} \quad & \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{2x_n^2}{1-3x_n^2} < \frac{2x_0^2}{1-3x_0^2} < 1 . \end{aligned}$$

Si l'on pose $\frac{2x_0^2}{1-3x_0^2} = \lambda < 1$, on en déduit $|x_n| \leq \lambda^n x_0$, donc

$|x_n| \rightarrow 0$: $\{x_n\}$ tend vers 0, $\{x_{2n}\}$ et $\{x_{2n+1}\}$ tendent vers 0 de façon monotone mais pas $\{x_n\}$.

Pour $|x_0| \leq \frac{1}{\sqrt{5}}$ on a :

$$|x_1| = \frac{2|x_0|^3}{1-3x_0^2} < 5|x_0|^3$$

ainsi pour $|x_0| = 0,1$ $|x_1| \leq 5 \cdot 10^{-3}$ puis $|x_2| \leq 625 \cdot 10^{-9}$ et $|x_3| \leq 1,22 \cdot 10^{-18}$.

Par contre pour $|x_0| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $x_1 = -x_0$ puis $x_{2n} = x_0$ et $x_{2n+1} = -x_0$, la suite $\{x_n\}$ diverge.

Géométriquement (cf figure 2), soit b le point de l'axe des abscisses, B le point de (C), d'abscisse $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $-b$ et $-B$ leurs symétriques par rapport

à 0. La tangente en (C) en $-B$ est $(-Bb)$, la tangente en $B(B-b)$. Partant de b , on obtient $-b$ puis b , $-b$, ... indéfiniment. Par contre, quel que soit le point de départ x_0 dans l'intervalle ouvert $] -b, b[$, la méthode converge (et même très rapidement) vers 0. Le domaine d'attraction $\mathcal{D}(0)$ de la racine 0 contient l'intervalle ouvert $] -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}[$.

3° - x_0 voisin de 1 mais inférieur à 1 (et cas symétrique)

$$\text{On a toujours } y-1 = \frac{(x-1)^2(2x+1)}{3x^2-1}$$

donc $y > 1$ si $3x^2 > 1$, c'est-à-dire si $x > \frac{1}{\sqrt{3}}$ (ce que montre aussi la construction de la tangente en M_0 d'abscisse x_0 (cf figure 1)).

Mais alors, par le 1° ci-dessus, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$; le domaine d'attraction $\mathcal{D}(1)$ contient donc la demi-droite ouverte $] \frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty[$.

Si par contre $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $F'(x) = 0$ et y n'est pas défini : la tangente en A est parallèle à l'axe des x : la méthode "diverge" (on ne peut pas à proprement parler dire que la suite $\{x_n\}$ diverge puisqu'elle n'est même pas définie).

Il reste à étudier le cas où $\frac{1}{\sqrt{5}} < x_0 < \frac{1}{\sqrt{3}}$ (et le cas symétrique).

4° - Le cas $\frac{1}{\sqrt{5}} < x_0 < \frac{1}{\sqrt{3}} = a$ (et cas symétrique)

Une *étude graphique* requiert une plus grande échelle (figure 2) et beaucoup de soin.

Si l'on part juste à gauche de A, d'abscisse a , la tangente coupe l'axe des x en un point d'abscisse négative. De façon précise, ce point a une abscisse strictement inférieure à $-a$ pour $c < x_0 < a$ où c est l'abscisse du point C de contact de la tangente à (C) issue du point de l'axe d'abscisse $-a$. Il résulte alors de l'étude faite en 1° et 3° ci-dessus que $\lim_{x \rightarrow \infty} x_n = -1$.

Ainsi le domaine d'attraction $\mathcal{D}(-1)$ de la racine -1 contient l'intervalle ouvert $]c, a[$ et, par symétrie, $\mathcal{D}(1)$ contient l'intervalle ouvert $]-a, -c[$ (*).

Par contre, si $x_0 = -c$ alors $x_1 = a$ $\left\{ \begin{array}{l} x_2 \text{ n'est pas défini,} \\ \text{l'algorithme diverge.} \end{array} \right.$
 $x_0 = c$ alors $x_1 = -a$

Ceci nous mène à construire les points $C_0, C_1, C_2 \dots C_n$ d'abscisse c_0, c_n et leurs symétriques $-C_0, -C_1, \dots -C_n$ d'abscisse $-c_0 \dots -c_n$, tels que la tangente à C_n en (C) coupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse $-c_{n+1}$.

Pour étudier analytiquement la suite $\{c_n\}$ qui est telle que :

$$-c_n = \frac{2c_{n+1}^3 + 1}{3c_{n+1}^2 - 1} \quad \text{avec } c_0 = a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

étudions l'équation : $2x^3 + 3mx^2 - m = 0$
 en fonction du paramètre m .

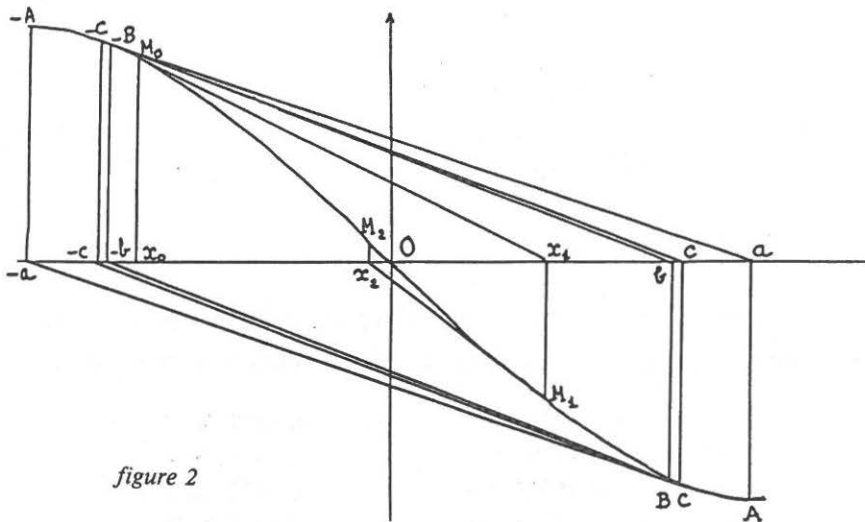


figure 2

(*) Remarquons que si $x_0 = 0,5$, $x_1 = -1$ puis $x_n = -1$ pour $n \geq 1$: la suite $\{x_n\}$ atteint sa limite, -1 dès que $n=1$.

Soit $y = 2x^3 + 3mx^2 - m$, $y' = 6x(x+m)$ s'annule pour $x=0$ et pour $x = -m$. $y(0) = -m$ et $y(-m) = m(m^2 - 1)$ sont de même signe pour $m^2 < 1$ ou $\|m\| < 1$. On en déduit que l'équation

$$2x^3 + 3mx^2 - m = 0$$

possède alors une racine unique.

Pour calculer cette racine, suivons Cardan (1501-1576) et posons

$$x = \frac{1}{u+v}$$

alors $-m(u+v)^3 + 3m(u+v) + 2 = 0$

ou $-m(u^3 + v^3) + 2 + 3m(u+v)(1-uv) = 0$

qui sera satisfaite si l'on a à la fois :

et
$$\begin{cases} m(u^3 + v^3) - 2 = 0 \\ uv - 1 = 0 \end{cases}$$

ou $u^3 + v^3 = \frac{2}{m}$ et $u^3 v^3 = 1$

u^3 et v^3 sont alors les racines de l'équation du second degré

$$X^2 - \frac{2X}{m} + 1 = 0.$$

Le discriminant réduit $\frac{1}{m^2} - 1$ de cette équation est > 0 pour $\|m\| < 1$.

On calcule alors successivement :

$$\Delta = \frac{1}{m^2} - 1$$

$$X_1 = \frac{1}{m} + \Delta$$

$$X_2 = \frac{1}{m} - \Delta$$

$$u = \sqrt[3]{X_1}, \quad v = \sqrt[3]{X_2},$$

$$x = \frac{1}{u+v}$$

Ce calcul se programme facilement sur une calculette ou un micro-ordinateur. A partir de la valeur $c_0 = a = \frac{1}{\sqrt{3}}$, on obtient successivement :

c_0	$= 0,577350269$	c_6	$= 0,447215829$
c_1	$= 0,465600621$	c_7	$= 0,447213978$
c_2	$= 0,450201478$	c_8	$= 0,447213659$
c_3	$= 0,447709506$	c_9	$= 0,447213606$
c_4	$= 0,447296190$	c_{10}	$= 0,447213597$
c_5	$= 0,447227360$	c_{11}	$= 0,447213596$

La suite $\{c_n\}$ semble bien converger vers $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Pour le démontrer, remarquons d'abord que $\frac{1}{\sqrt{5}}$ est racine de l'équation :

$$2x^3 + \frac{3x^2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.$$

Posons $x = \frac{1}{\sqrt{5}} + \epsilon$ et $m = \frac{1}{\sqrt{5}} + \eta$,

alors l'équation $2x^3 + 3mx^2 - m = 0$ s'écrit :

$$2\epsilon^3 + \frac{9\epsilon^2}{\sqrt{5}} + \frac{12\epsilon}{5} + \eta \left(3\epsilon^2 + \frac{6\epsilon}{\sqrt{5}} - \frac{2}{5} \right) = 0.$$

Comme $m = \frac{2x^3}{1-3x^2}$

$$m' = \frac{6x^2(1-x^2)}{1-3x^2} \text{ est strictement positive}$$

pour $-\frac{1}{\sqrt{3}} < x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, donc m strictement croissante,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow m(x_1) < m(x_2) \text{ et } x_2 < x_1 \Rightarrow m(x_1) > m(x_2)$$

donc $m(x_1) < m(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ et x est une fonction strictement croissante de m . Il en résulte que ϵ est une fonction strictement croissante de η . Donc $\eta > 0 \Rightarrow \epsilon > 0$.

On a alors

$$\frac{12\epsilon}{5} < \frac{12\epsilon}{5} + \frac{9\epsilon^2}{5} + 2\epsilon^3 < \eta \left(\frac{2}{5} - \frac{6\epsilon}{\sqrt{5}} - 3\epsilon^2 \right) < \frac{2\eta}{5}$$

donc $0 < \epsilon < \frac{\eta}{6}$

donc $c_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{6} \left(c_n - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \leq \frac{1}{6^n} \left(c_0 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{1}{\sqrt{5}}$. De plus $\frac{\epsilon}{\eta} \rightarrow \frac{1}{6}$ quand $n \rightarrow \infty$ (ou $\epsilon \rightarrow 0$)

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}}{c_n - \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{6}$.

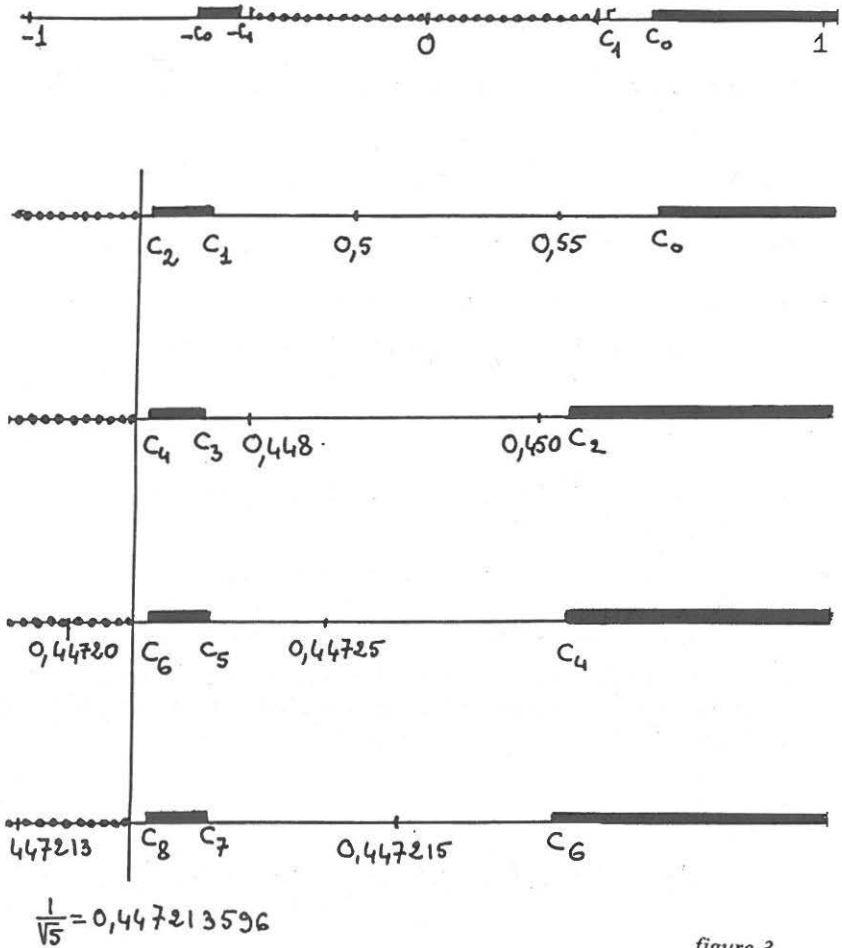


figure 3

Conclusion

Résumons les résultats de notre étude.

$\mathcal{D}(0)$ est le plus simple : c'est l'intervalle ouvert $] -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} [$.

$\mathcal{D}(1)$ est composé de la demi-droite ouverte $] \frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty [$ et de la réunion des intervalles ouverts $] -c_{2n}, -c_{2n+1} [$ et $] c_{2n-1}, c_{2n} [$;

$\mathcal{D}(-1)$ est symétrique de $\mathcal{D}(1)$ par rapport à 0.

L'ensemble des nombres de départ pour lesquels l'algorithme de Newton ne converge pas est formé des c_n et des $-c_n$ ainsi que des deux nombres $\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{5}}$. Notons que tout voisinage de l'un de ces deux nombres contient des points des trois domaines $\mathcal{D}(0)$, $\mathcal{D}(1)$, $\mathcal{D}(-1)$. Une dernière activité pourra consister à appliquer l'algorithme à des nombres très voisins de $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Pour représenter les ensembles $\mathcal{D}(0)$, $\mathcal{D}(1)$ et $\mathcal{D}(-1)$, le mieux est d'utiliser trois couleurs. Ici (figure 3) nous avons représenté $\mathcal{D}(1)$ par de gros traits noirs, $\mathcal{D}(-1)$ par des traits fins et $\mathcal{D}(0)$ par des pointillés.

Une telle représentation n'est pas lisible au voisinage des deux points $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Pour y voir plus clair, il faut agrandir l'échelle et compte tenu du fait que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}}{c_n - \frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{6},$$

il est éclairant d'utiliser des agrandissements successifs de rapport 36 et de placer $\frac{1}{\sqrt{5}}$ au même point de chaque graphique.

On voit alors que les 4 premiers grossissements ont pratiquement la même allure et il en serait ainsi indéfiniment, ce qui met en évidence le caractère "Factal" des ensembles $\mathcal{D}(1)$ et $\mathcal{D}(-1)$.

L'application répétée de l'algorithme de Newton à une équation algébrique conduit donc à une des racines (en nombre fini) pour presque tout nombre de départ.

On pourra étudier d'autres cas, par exemple : $\sin x = 0$ (il y a une infinité de domaines d'attraction imbriqués les uns dans les autres) où l'équation $F(x) = 0$ par laquelle F est ainsi définie :

$$F(x) = \sqrt{x(2-x)} \quad \text{pour } 0 \leq x \leq 2 \quad (\text{graphique} = \text{un demi-cercle})$$

F est impaire

F est périodique de période 4.

Les racines de l'équation sont les nombres $2n$, $n \in \mathbb{Z}$ mais, en chacun de ces points, $F'(x) = +\infty$. On peut convenir que si l'on part de l'un de ces points, l'algorithme de Newton conduit à y rester, mais dès qu'on part d'un point voisin on s'en éloigne (car $\frac{1}{\cos \theta} - 1 > 1 - \cos \theta$) de sorte que cette fois c'est l'ensemble des points d'attraction d'une racine qui est dénombrable : pour presque toute valeur de départ, l'algorithme diverge.

En classe Terminale, on pourra étudier le même algorithme pour la même équation $z(z^2 - 1) = 0$, mais cette fois dans le plan complexe et, si l'on dispose d'une console graphique couleur, obtenir de belles images (cf [4] et [5]).

Références

- [1] A. HENNEQUIN, Travaux pratiques de Calcul Numérique. Vuibert, 1966, p. 134.
- [2] A. HOCQUENGHEM et JAFFARD, Mathématiques. Masson, 1962, Tome 1, p. 149.
- [3] A. MARIN, Géométrie des polynômes. Coût global de la méthode de Newton (d'après M. Sherb et S. Smale). Séminaire Bourbaki, 39^e année, n° 670, novembre 1986.
- [4] A. DEWDNEY, Récréations informatiques. Pour la Science n° 96, octobre 1985, p. 87.
- [5] A. DOUADY, Itération de Polynômes complexes. Le courrier du C.N.R.S., supplément au n° 62, Images des mathématiques, p. 25.

Problème d'équilibre ou travail avec des "vecteurs" non géométriques

R. Gauthier

Cette activité a été utilisée en classe de Seconde. La "matrice" n'intervient que comme une notation commode. Aucune notion théorique n'a, bien sûr, été présentée sur le calcul matriciel.

Cet exercice conduit à :

- du calcul numérique, des études de suites
- du calcul "vectoriel", sur des couples de décimaux
- des révisions sur "équation d'une droite"
- l'étude d'alignements de points et "limite" d'une suite de points
- l'utilisation d'une calculatrice.

Voici le texte d'un document de travail distribué aux élèves, avec quelques commentaires sur ce document, conduisant à des prolongements possibles en Première et Terminale.

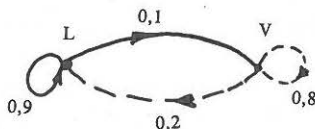
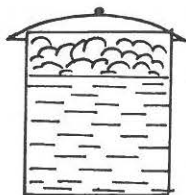
* Un récipient cylindrique contient 7 litres d'un liquide et 3 litres de sa vapeur.

Les conditions d'une expérience* sont telles que, après 24 heures,

$\frac{1}{10}$ du liquide s'est transformé en vapeur et $\frac{2}{10}$ de la vapeur

s'est transformée en liquide.

Cet échange (liquide \leftrightarrow vapeur) est représenté par le graphe ci-contre ; expliquez-le.



1. Vous allez calculer le volume du liquide et le volume de vapeur au début du *deuxième jour* : on les désigne respectivement par L_2 et V_2 .

* C'est une situation théorique... Dans la pratique, c'est plus compliqué !

- Analysez les calculs qui suivent et achevez-les :

$$L_2 = (0,9 \times 7) + (0,2 \times 3)$$

$$V_2 = (0,1 \times 7) + (0,8 \times 3)$$

- Calculez L_2 ; V_2 puis $L_2 + V_2$.

L'état (liquide-vapeur) est donné par le vecteur $E_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ au début du premier jour.

Pour représenter les calculs précédents, on écrit :

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9 \times 7 + 0,2 \times 3 \\ 0,1 \times 7 + 0,8 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

matrice vecteur E_1 vecteur E_2

2. L'expérience se poursuit du deuxième au troisième jour, dans les mêmes conditions d'échange à partir de l'état E_2 ; de même les jours suivants. Pour calculer l'état au début du troisième jour, on multipliera donc la même matrice par E_2 pour obtenir E_3 ...

Calculez les *composantes* de chacun des *vecteurs* $E_3, E_4, E_5, E_6, E_7, E_8$.

Soient (x_k, y_k) les composantes de E_k .

Ecrire les premiers termes de la suite (x_k) : 7 - 6,9 - 6,83 ...

Ecrire les premiers termes de la suite (y_k) : 3 - 3,1 - 3,17 ...

Vérifier pour $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$: $x_k + y_k = 10$.

On peut démontrer que :

Si un jour donné les composantes de E_k sont a et b , avec $a + b = 10$, alors le lendemain les composantes de E_{k+1} sont a' et b' avec $a' + b' = 10$.

3. Choisissez un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) et représentez *chaque état* E_i par un *point* M_i tel que $\overrightarrow{OM_i}$ ait pour composantes celles du vecteur E_i . Construisez les points M_1, M_2, M_3, \dots jusqu'à M_8 .

Que remarquez-vous pour ces points ?

Calculez les composantes de $\overrightarrow{M_1M_2}$ et démontrez qu'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{M_1M_2} = k(\vec{i} - \vec{j})$.

Même question pour $\overrightarrow{M_2M_3}, \dots, \overrightarrow{M_7M_8}$.

Démontrez ensuite que tous ces points sont alignés.

4. Les points marqués sont donc alignés et, sur le dessin, la *distance* entre deux points consécutifs semble diminuer. Autrement dit, il semble, que les variations de volume deviennent de plus en plus petites.

Tout se passe comme si le mélange considéré "tendait" vers un état d'équilibre, ou *état stable*, pour lequel il n'y aurait plus de variation des volumes de liquide ou de vapeur.

Nous admettons que cet état stable S existe : désignez ses composantes par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

S'il est stable on doit avoir :

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0,9 & 0,2 \\ 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{et} \\ x + y = 10 \end{array} \right.$$

Déduisez-en les volumes x et y de liquide et de vapeur correspondant à l'état stable.

Commentaire pour l'utilisateur

1. Commodité de la notation matricielle pour coder une information.
2. D'abord une activité de calcul numérique dans laquelle l'usage d'une calculatrice est bien pratique (stockage, usage de mémoires, arrondi, etc.).

Dans certaines classes de en Première ou Terminale, on peut exprimer x_{n+1} en fonction de x_n et y_{n+1} en fonction de y_n , après avoir démontré (récurrence) que pour tout n : $x_n + y_n = 10$.

On trouvera :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,7x_n + 2 \\ y_{n+1} = 0,7y_n + 1 \end{cases}$$

d'où $x_{n+1} - x_n = 0,7(x_n - x_{n-1})$. De même pour y_n .

La suite $u_n = x_{n+1} - x_n$ est une suite géométrique de premier terme $u_1 = -0,1$ et de raison $0,7$.

De même, la suite $v_n = y_{n+1} - y_n$ est une suite géométrique de premier terme $v_1 = 0,1$ et de raison $0,7$.

On pourra faire appel aux théorèmes classiques sur les variations, la convergence, etc.

3. Pour une bonne lecture du graphique, les élèves sentiront sans peine la nécessité d'une échelle adaptée au problème. ($\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 10$ en centimètres). Les x_n appartiennent à l'intervalle $[6;7]$ et les y_n à $[2;3]$.

On trouvera : $\overrightarrow{M_{n+1}M_{n+2}} = 0,7 \overrightarrow{M_nM_{n+1}}$.

La suite $W_n = \|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\|$ est une suite géométrique de raison $0,7$.

On trouvera : $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}$ etc. en fonction de $(\vec{i} - \vec{j})$ d'où l'alignement des points.

4. La convergence des suites (u_n) , (v_n) , (x_n) et (y_n) peut être établie.

Elle nous autorise à supposer un "état d'équilibre" que l'on peut déterminer.

D'où le "point limite" pour la "suite" de points (M_n) .



... ces problèmes qui font les mathématiques...

La duplication du cube :

- un problème*
- des solutions à base de géométrie (configurations, trigonométrie, coordonnées, transformations) et d'analyse (suites, fonctions,...)*

Jean Aymes

“...on a utilisé certains résultats de la théorie des idéaux pour prouver l'impossibilité de cas particuliers du dernier problème de Fermat... (Historiquement, les choses se sont passées dans l'autre sens : la théorie des idéaux s'est développée à propos d'une tentative de démonstration du dernier théorème de Fermat.)”

Philip J. DAVIS et Reuben HERSH

L'Univers Mathématique

traduit et adapté par Lucien CHAMBADAL

Les mathématiques évoluent par la résolution de problèmes. Nous présentons ici quelques façons d'en résoudre un... très vieux... : comment transformer un cube en un autre de volume double ?

Ce problème fut probablement abordé au moins dès le V^e siècle avant J.C. : connu sous le nom de “duplication du cube”, c'est l'un des plus célèbres problèmes de l'Antiquité.

Il revient à la recherche de $\sqrt[3]{2}$: aujourd'hui toute calculatrice nous en donne une bonne valeur approchée, nous ne nous rendons même plus compte des efforts faits à son propos. Le statut du problème était tout différent à l'origine : les Anciens séparaient assez radicalement l'arithmétique et la géométrie. A l'origine, la duplication du cube est un problème de géométrie... ceci ne fait qu'illustrer le principal obstacle épistémologique rencontré par les mathématiciens grecs du V^e siècle avant J.C. : l'impossibilité de concevoir sous une forme abstraite la notion de nombre réel.

Il faudra des siècles pour que le statut numérique du problème soit mis en évidence, d'abord sans doute à travers les travaux des Hindous.

Nous allons présenter quelques processus de résolution du problème : en reprenant d'abord quelques-unes des solutions historiques, puis en ayant un peu recours aux outils de l'analyse.

Le problème sera-t-il résolu ?

Un problème... solide !

L'exigence des Grecs pour des constructions à la règle et au compas imprègne l'ensemble de leur géométrie ; mais l'apparition de problèmes qu'ils n'arrivaient pas à résoudre ainsi a provoqué de fécondes recherches. Selon leur terminologie [voir PAPPUS, La Collection], ils distinguaient les problèmes "plans" que l'on peut résoudre avec règle et compas, les problèmes "solides" qui peuvent être résolus par les coniques et les problèmes "grammiques" qu'on ne peut résoudre ni par droite et cercle, ni par coniques. Quand nous parlons ici d'impossibilité, il ne s'agit ici que d'une conjecture...

$\sqrt{2}$ est constructible à la règle et au compas (c'est la duplication du carré), de même la moyenne géométrique de deux nombres a et b (x tel que $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$, c'est-à-dire $x = \sqrt{ab}$ dans la notation moderne) :

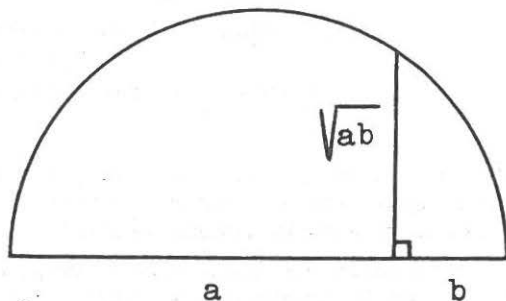


figure 1

Vers le V^e siècle avant J.C., le mathématicien pythagoricien, HIPPOCRATE de CHIO, établit que le problème de la duplication du cube se ramène à un problème d'insertion de deux "moyennes proportionnelles" entre deux longueurs données : en notation moderne il suffit de déterminer x et y tels que : $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ pour obtenir $x = a\sqrt[3]{2}$; maintenant nous dirions que a ; $a\sqrt[3]{2}$; $a(\sqrt[3]{2})^2$; $2a$ sont les premiers termes d'une suite géométrique.

Un demi siècle plus tard, MENECHME utilise ce point de vue pour donner une solution : dans le langage actuel, elle correspond à l'intersection de deux paraboles d'équations :

$$x^2 = ay \quad \text{et} \quad y^2 = 2ax$$

Ces paraboles se rencontrent en leur sommet commun O et au point d'abscisse $a\sqrt[3]{2}$.

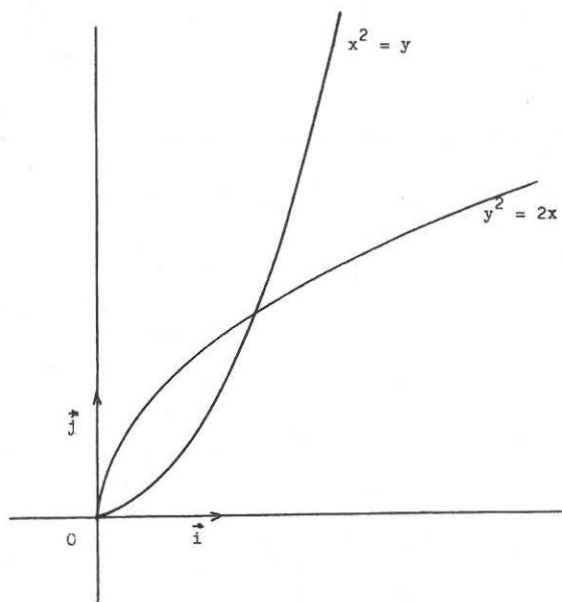


figure 2

L'intuition de la nature "solide" du problème ne fait que se renforcer, il faudra attendre 1837 pour que l'inconstructibilité de $\sqrt[3]{2}$ par règle et compas, soit prouvée par WANTZEL ; mais c'est une autre histoire... longue histoire que celle de la résolution des équations algébriques !

MORCEAUX CHOISIS D'UNE RECHERCHE DEUX FOIS MILLÉNAIRE

Nous allons commencer par présenter quelques-unes des principales réponses de divers mathématiciens au cours de l'histoire... nous exhumerons de "vieilles choses"... mais ce sont nos racines... Sans chercher à respecter la lettre des processus employés, nous avons cherché à présenter les idées sous la forme d'activités destinées à susciter un peu de recherche chez les élèves.

1. La solution de Platon

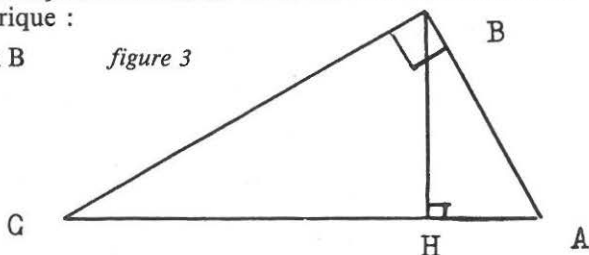
Elle repose sur une façon bien connue de déterminer trois nombres en progression géométrique :

Avec ABC rectangle en B
et H projeté de B
(figure 3)

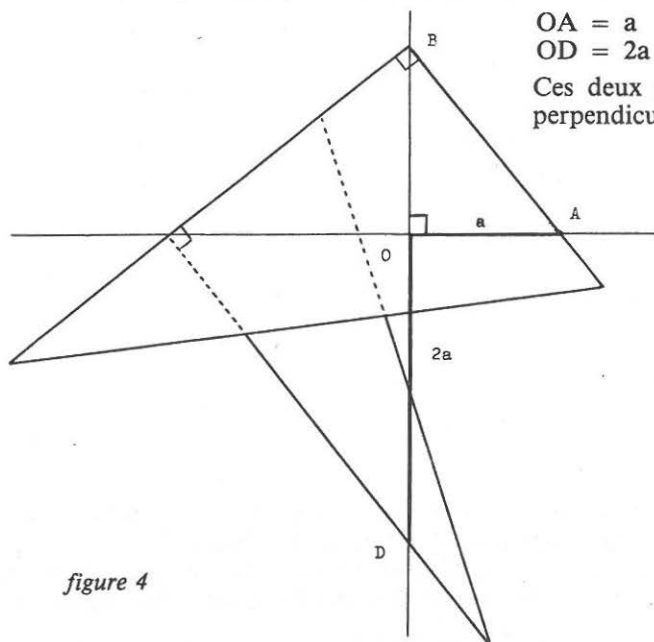
$$\frac{HB}{HA} = \frac{HC}{HB}$$

ne fait pas de doute.

figure 3



Voici alors, un peu transposée, la solution de PLATON :



$$OA = a$$

$$OD = 2a$$

Ces deux segments sont
perpendiculaires.

figure 4

Faire jouer deux équerres en papier calque pour réaliser la construction de B tel que $OB = \sqrt[3]{2}.a$.

2. Une solution due à Apollonius et Philon de Byzance

Avec $OA = a$, $OB = 2a$, ces deux segments perpendiculaires puis C de sorte que OACB soit un rectangle dont le centre est I.

APOLLONIUS considère le cercle de centre I coupant (OA) et (OB) en D et E de sorte que C,D,E soient alignés (figure 5).

Il affirme alors que BE et AD sont les moyennes proportionnelles cherchées (la méthode vaut pour l'insertion de deux moyennes).

On observera qu'il y a trois triangles rectangles ayant mêmes angles : ADC, BCE et ODE. L'égalité $ID = IE$ permet d'obtenir $\frac{BE}{AD} = \frac{OD}{OE}$.

D'où :
$$\frac{OA}{BE} = \frac{BE}{AD} = \frac{AD}{OB}$$

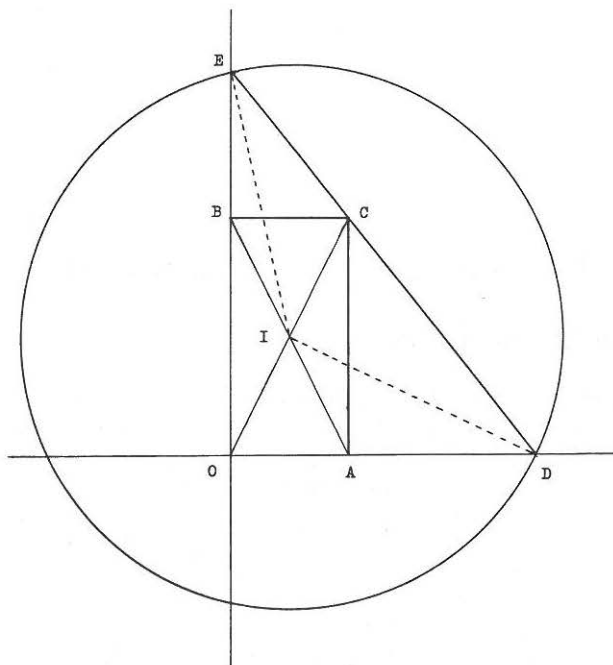


figure 5

Remarquer le lien avec la solution de PLATON en examinant la position des autres points d'intersection du cercle avec (OA) et (OB).

PHILON de BYZANCE a proposé une amélioration de la détermination des points D et E en envisageant l'intersection de la droite (DCE) avec le cercle circonscrit au rectangle (figure 6).

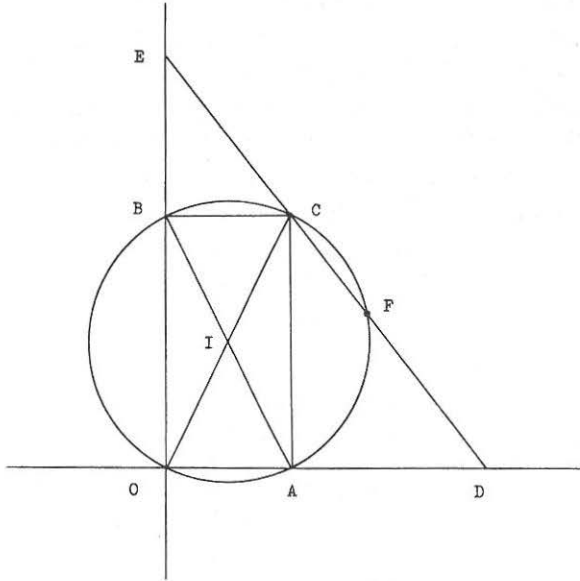


figure 6

Il suffit que la droite (DCE) soit choisie de façon que $CE = DF$.

3. La solution de Huyghens

Pour construire un cube de côté double de celui de côté $OA = a$, on trace le demi cercle de rayon OA , on prend la corde $AD = OA$, on trace (CD), on mène par A une corde AE qui coupe (CD) en F et le demi cercle en E, de telle sorte que $CE = FD$ (figure 7).

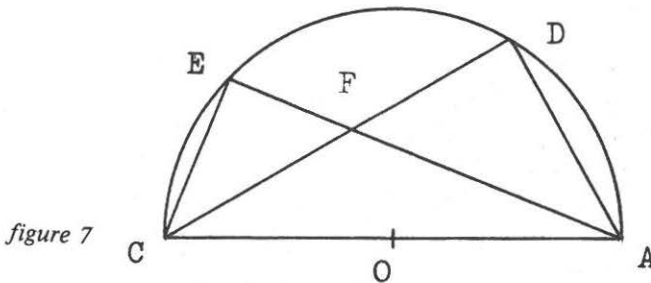


figure 7

Alors AF sera le côté du cercle cherché : $a\sqrt[3]{2}$. On peut l'établir par exemple comme suit :

- on pose $AF = x$, en convenant que $OA = 1$;
- les triangles rectangles CEF et ADF ont mêmes angles, ce qui permet d'en déterminer les côtés en fonction de x ;
- le théorème de Pythagore appliqué à ADF permet de conclure.

Remarquons au passage que l'angle \widehat{DAF} a pour cosinus

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2},$$

il s'en faut de moins de un dixième de degré que \widehat{COE} ne mesure 45° (on le voit avec la calculatrice), ce qui, comme l'avait remarqué HUYGHENS fournit un procédé d'approximation de $\sqrt[3]{2}$ dont on peut choisir de se satisfaire :

Placer D tel que \widehat{AOD} mesure 60° .
Placer E' tel que $\widehat{COE'}$ mesure 45° .
(CD) et (AE') se coupent en F' (figure 8).

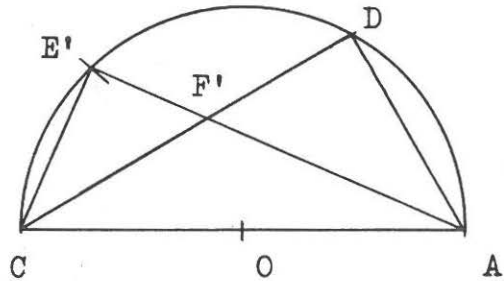


figure 8

AF' est une bonne approximation de $\sqrt[3]{2}$:

— l'angle $\widehat{DAF'}$ mesure $37,5^\circ$, c'est-à-dire $\frac{45^\circ + 30^\circ}{2}$

— on calcule $\sin^2 37,5^\circ : \frac{4 + \sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$

— en posant $x' = AF'$, dans le triangle rectangle ADF', on peut exprimer x' .

Cette construction approchée est possible à la règle et au compas ! Et pour $\sqrt[3]{2}$ il s'en faut de peu !

4. La solution de Nicomède

On commence comme pour la solution d'APOLLONIUS, OACB rectangle ; $OA = a$; $OB = 2a$.

On trace la médiatrice de [OA], on place le milieu F de [OB], puis G sur la médiatrice tel que $OG = OF$, la droite (CF) coupe la droite (OA) en H, par A on trace la parallèle à (HG).

En traçant par G une droite coupant cette parallèle en K et la droite (OA) en L, de sorte que $KL = OF (= OA)$; avec (CL) coupant (OB) en M : BM et AL sont les moyennes proportionnelles cherchées (figure 9).

Ayant convenu que $a = 1$, ce qui n'altère pas la preuve, on justifiera en observant la configuration des points L, A, H, K, G puis celle des points G, E, L :

- en posant $AL = x$, on peut exprimer GL en fonction de x ;
- l'énoncé de THALÈS pour L, A, H, K, G permet d'aboutir.

$OA = a$
 $OB = 2a$

Ces deux segments sont
 perpendiculaires.

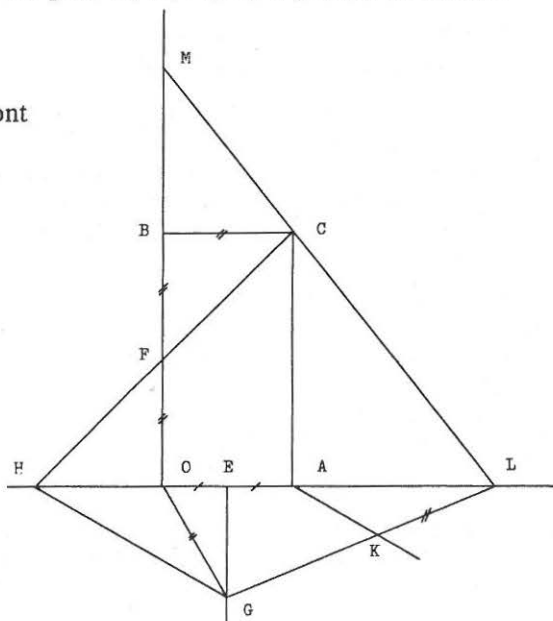


figure 9

Mais l'intérêt de cette solution ne consiste pas seulement en cela, pour tracer la droite (GKL) , NICOMÈDE propose de s'intéresser à l'ensemble des points L lorsque K décrit la droite parallèle à (GH) par A , de sorte que KL ait une valeur constante sur (GK) .

K décrit la parallèle à (GH)

$KL = OA$

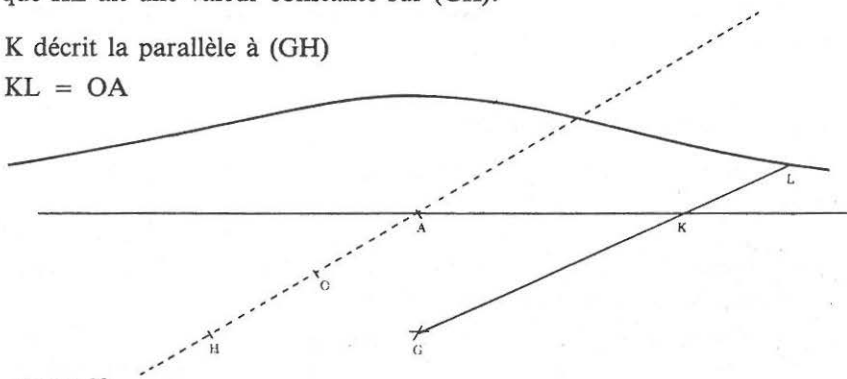


figure 10

Cet ensemble dont on peut obtenir autant de points que l'on veut par construction à la règle et au compas est appelé conchoïde de la droite (OA) (figure 10).

La duplication du cube est donc possible par intersection de conchoïde et de droite. On peut résoudre de même le problème de l'insertion de deux moyennes proportionnelles.

Elargissant un peu le champ des outils permis pour le tracé des figures de géométrie, NICOMÈDE propose un appareil traceur de sa conchoïde :

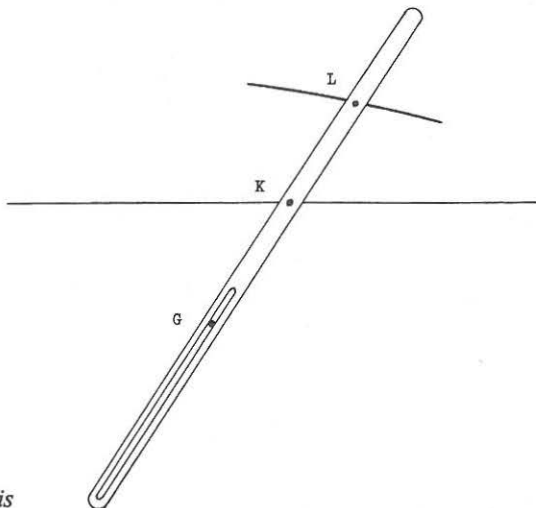


figure 10bis

Une règle munie d'une glissière pivote autour d'un pivot fixe en G. K décrit la droite, en L un traceur permet de tracer la courbe (figure 10bis) avec KL fixé.

On envisage maintenant la conchoïde comme ensemble des points L, auquel on adjoint l'ensemble des points L' symétriques de L par rapport à K (figure 10ter).

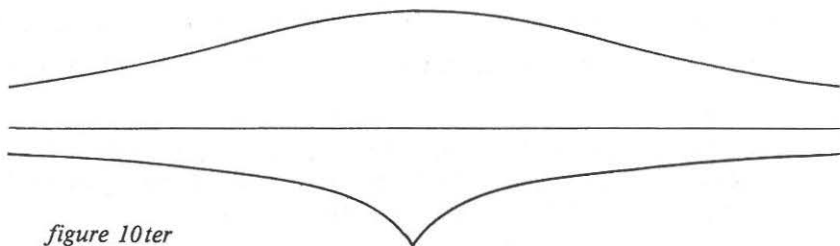


figure 10ter

L'étude de cette courbe est approfondie au XVII^e siècle : ses tangentes (Fermat, Descartes, Roberval), ses points d'inflexion (Huygens, Sluse).

5. La solution de Dioclès

On recommence avec $OA = a$, $OB = 2a$ sur deux perpendiculaires. On trace le cercle de diamètre $[OA]$ et la tangente en A à ce cercle. En plaçant une droite passant par O recoupant le cercle en N, coupant (AB) en M et la tangente en P, de sorte que $ON = MP$.

On a $AP = a\sqrt[3]{2}$ (figure 11).

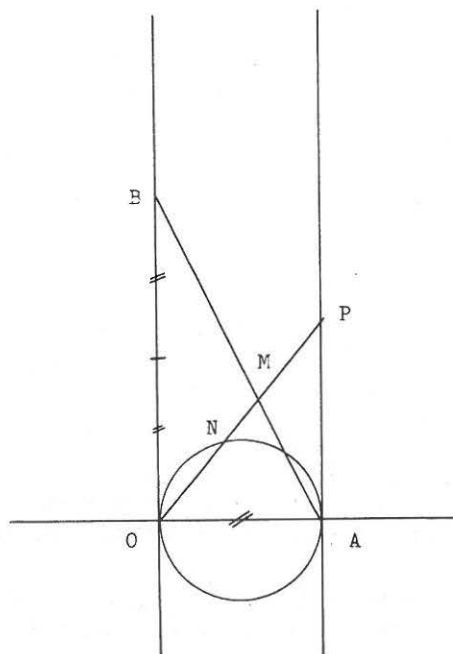


figure 11

Bien que DIOCLÈS n'ait pu le faire, on fera une preuve par la géométrie analytique... Avec le repère $(O ; \overrightarrow{OA} ; \frac{1}{2}\overrightarrow{OB})$, en posant m pour l'ordonnée de P, déterminer les coordonnées de N, M, P et terminer.

Mais comme NICOMÈDE, DIOCLÈS interprète cette solution comme l'intersection de deux courbes : la droite (AB) et l'ensemble des points N lorsque P, décrivant la tangente, $ON = MP$ est respectée.

Cette courbe est la cissoïde de DIOCLÈS dont on peut construire autant de points que l'on veut à la règle et au compas (figure 12).

On peut résoudre de même l'insertion de deux moyennes proportionnelles.

P décrit la tangente

$OM = NP$

M décrit la cissoïde.

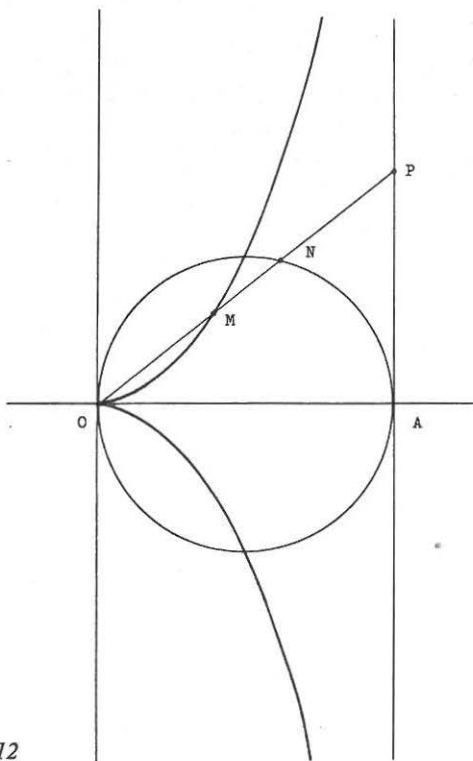


figure 12

Cette courbe est encore de celles que l'on peut tracer avec un appareil : c'est NEWTON qui en imagina un. Pour le mettre en évidence, nous allons résoudre un petit exercice de géométrie.

Reprenons la configuration de définition de la cissoïde (figure 12 bis) :

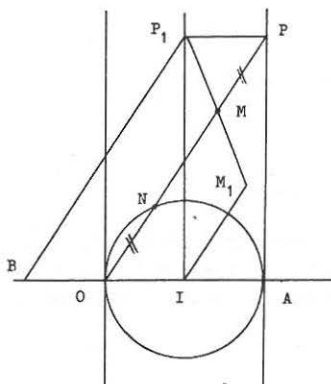


figure 12 bis

Soit P_1 le projeté de P sur la médiatrice de $[OA]$, par utilisation d'une symétrie centrale bien choisie, justifier $P_1M = NI = OI$.

Soit M_1 l'intersection de (MP_1) et de la parallèle à (OP) par I puis B l'intersection de (OA) et de la parallèle à (OP) par P_1 , mettre en évidence une des isométries transformant O, B en M, P_1 respectivement.

Etudier l'image par cette isométrie du triangle BIP_1 , en tirer une conséquence pour le triangle BM_1P_1 lorsque P varie sur la tangente.

Voici alors, l'appareil de NEWTON pour tracer la cissoïde de DIOCLÈS :

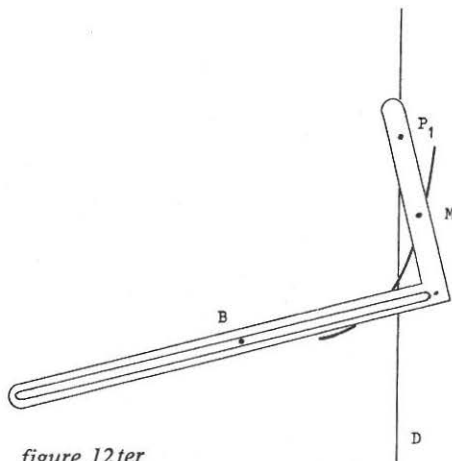


figure 12ter

Une équerre rigide dont un côté porte une glissière couissant sur un pivot fixe B , l'autre côté a son extrémité qui décrit une droite fixe D , un traceur en M , milieu du côté, décrit la courbe. On doit respecter

$$MP_1 = \frac{1}{2}d(B,D) \text{ (figure 12ter).}$$

C'est presque... un compas !

6. La géométrie de Descartes

En 1637 paraît la première édition de "La Géométrie" de René DESCARTES : reprenant les problèmes des Anciens, DESCARTES, en amorçant une classification des courbes, va fonder la géométrie analytique.

Le problème qui nous occupe y est abordé plusieurs fois.

D'abord à travers la situation servant de cadre à la classification des courbes :

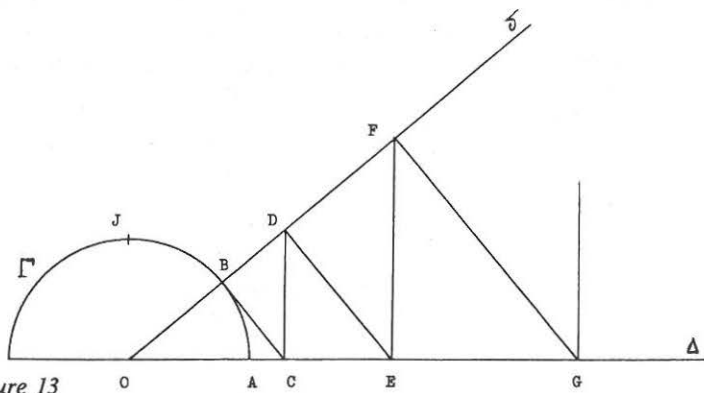


figure 13

Une droite Δ est diamètre fixe d'un cercle fixe Γ de centre O . Une droite variable δ passe par O et coupe Γ en B , la perpendiculaire en B à δ coupe Δ en C , la perpendiculaire en C à Δ coupe δ en D ... et de même pour définir E sur Δ , F sur δ , G sur Δ , ... etc.

On a aisément :

$$\frac{OB}{OC} = \frac{OC}{OD} = \frac{OD}{OE} = \frac{OE}{OF}$$

Déterminer dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ})$ une équation cartésienne (sic !) de l'ensemble des points D et proposer une fois cette courbe tracée une résolution du problème.

Remarquons :

1) qu'un jeu de trois équerres ferait un appareil résolvant le problème...

avec $OE = 2 OA$

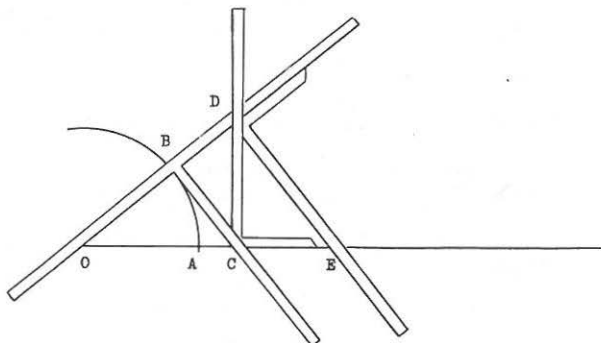
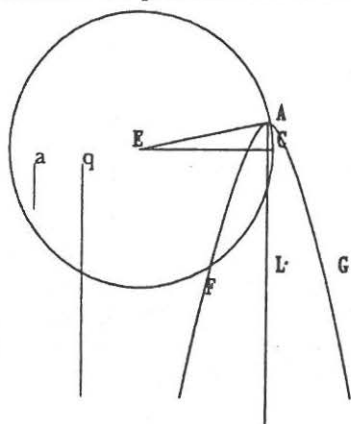


figure 14

2) qu'on peut résoudre de façon analogue le problème de l'insertion de trois, quatre, etc... moyennes proportionnelles.

Ensuite, DESCARTES résout des problèmes de constructions géométriques dans lesquels les longueurs inconnues satisfont à des équations du 3^e degré et de degré plus élevé : il s'agit d'un véritable exposé de la théorie des équations. Il montre comment résoudre toute équation de degré 3 ou 4 par l'intersection d'un cercle et d'une parabole.

Citons la résolution du problème de la duplication du cube [15] :



Si on veut donc, suivant cette règle, trouver deux moyennes proportionnelles entre a et q , chacun sait que posant z pour l'une, comme a est à z , ainsi z à $\frac{zz}{a}$, et $\frac{zz}{a}$ à $\frac{z^3}{aa}$; de façon qu'il y ait équation entre q et $\frac{z^3}{aa}$, c'est-à-dire $z^3 \propto **aaq$. Et la parabole FAG étant

L'invention de deux moyennes proportionnelles.

décrite avec la partie de son essieu AC qui est $\frac{1}{2} a$ à la moitié du côté droit ; il faut du point C élever la perpendiculaire CE égale à $\frac{1}{2} q$, et du centre E, par A décrivant le cercle AF, on trouve FL, et LA pour les deux moyennes cherchées. //

Dans les notations et le langage de l'époque :

- $z^3 \propto **aaq$ signifie $z^3 = a^2q$
- l'essieu de la parabole est son axe focal.

On pourra retrouver ainsi une parabole et un cercle résolvant le problème.

(1) La figure fait aussi partie de l'ouvrage cité.

7. Par origami*... ça vaut le détour ! Ça ne fait qu'un pli

On pourra lire dans "L'Ouvert" n° 42 [16], la belle résolution du problème par pliage due à Jacques JUSTIN.

Il y montre que toute équation du troisième degré peut être résolue par pliage...

Voici le procédé pour la duplication du cube.

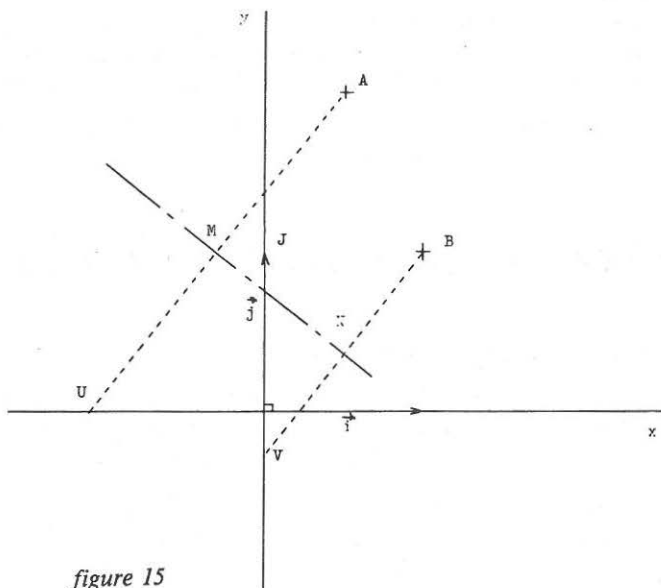


figure 15

Dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$, A et B ont pour coordonnées respectives $(1;1)$ et $(\frac{1}{2};2)$.

On plie de sorte que A vienne sur Ox en U et B sur Oy en V. Prenant t comme pente commune de (AU) et (BV), Jacques Justin montre, en imposant à (MN) d'avoir pour pente $-\frac{1}{t}$, que $t^3 = 2$. C'est-à-dire $VJ = \sqrt[3]{2}$.

Le problème de la duplication du cube fait partie de ceux qui ont joué un rôle fondamental dans l'évolution de diverses notions mathématiques :

- *statut des nombres* : si aujourd'hui on conçoit le problème presque exclusivement comme la résolution de l'équation $x^3 = 2$, il n'en fut pas de même à l'origine, on a pu le voir ;

* pliage du papier.

- *statut et étude des courbes* : la classification des Grecs (cercles et droites, coniques, autres) repose sur l'exigence de constructibilité règle et compas et repose sur la facilité avec laquelle on peut la décrire, notamment à partir d'appareils. La résolution des problèmes fait découvrir de nouvelles courbes : d'abord mises à part du fait de la nature de leur description par règle et compas, mais la mise à jour d'appareils pour les tracer introduit un doute quant à leur exclusion.

Ces courbes deviennent à leur tour sujet de nouveaux problèmes...

- *résolution des équations* : résolution des équations du troisième degré et du quatrième degré, progression de l'indépendance de l'algèbre vis-à-vis de la géométrie, caractérisation des équations résolubles au XIX^e siècle...

Nous allons aborder maintenant quelques aspects d'une réponse par approximation au moyen de suites.

BEAUCOUP DE FAÇONS DE S'EN APPROCHER

1. L'apport des graphiques

$\sqrt[3]{2}$ est l'unique réel ℓ tel que $\ell^3 = 2$; il peut être interprété comme abscisse de l'intersection de deux courbes. Ici on peut, par exemple, penser à :

$$\begin{array}{l} \text{ou à :} \\ \text{ou à :} \end{array} \quad \begin{array}{l} C_1 : y = x^3 \\ C_1 : y = x^3 - 2 \\ C_1 : y = x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} C_2 : y = 2 \\ C_2 : y = 0 \\ C_2 : y = \frac{2}{x} \end{array}$$

Rechercher au moins trois autres possibilités.

Adopter une des possibilités et représenter les courbes correspondantes à échelle convenable. En déduire un encadrement de ℓ par des décimaux d'ordre 2.

2. Méthode d'interpolation linéaire

Appliquée ici sous trois formes possibles, elle consiste à remplacer une fonction par une fonction affine dont on pense qu'elle l'estime bien.

a) *Interpolation par des cordes* (méthode des sécantes)

Représenter dans le plan de repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) (unité 1 cm) la fonction $x \rightarrow x^3 - 2$ restreinte à $[0;2]$. Noter A le point de coordonnées $(1; -1)$ et B celui de coordonnées $(2;6)$.

Quelle est l'abscisse X_1 du point d'intersection de la corde (AB) avec $x'x$?

Remplacer A par $A_1 (X_1 ; X_1^3 - 2)$ pour en déduire l'abscisse X_2 du point d'intersection de $(A_1 B)$ et $x'x$.

Plus généralement, si X est une approximation par défaut de $\sqrt[3]{2}$, en déduire, selon le processus ci-dessus, une approximation X' (donner X' en fonction de X).

Noter les approximations successives obtenues (la première étant 1 par exemple), observer le nombre d'étapes nécessaires pour constater une stabilisation sur la calculatrice.

Reprendre la même démarche pour la fonction

$$x \rightarrow \frac{2}{x^3} - 1 ;$$

comparer les résultats fournis par la calculatrice.

b) *Interpolation par des sécantes parallèles* (ajustement linéaire)

Présentée pour la courbe d'équation $y = x^3 - 2$, avec les notations du a), la corde (AB) a pour coefficient directeur 7 et coupe $x'x$, on l'a vu, au point d'abscisse $\frac{8}{7}$ notée ici Y_1 .

Avec le point $I_1 (Y_1 ; Y_1^3 - 2)$ on utilise la droite passant par I_1 de coefficient directeur 7 (qui ne varie donc pas).

Faire une représentation graphique sur l'intervalle $[1; 1,5]$, unité 10cm. Quelle est l'abscisse Y_2 de l'intersection de la sécante avec $x'x$?

Plus généralement, Y étant une valeur approchée par défaut de $\sqrt[3]{2}$, en déduire, selon cette démarche, une nouvelle valeur approchée Y' en fonction de Y.

Noter les approximations successives obtenues à la calculatrice en partant successivement de la valeur initiale 1,25, puis de la valeur initiale 1,26.

Remettre en question le choix du coefficient directeur 7 : essayer 5 et rechercher les approximations obtenues.

Essayer de proposer un meilleur choix encore.

Reprendre l'ensemble de la méthode pour la fonction

$$x \rightarrow \frac{2}{x^3} - 1$$

avec $C(1;1)$ $D(2; -\frac{3}{4})$ comme points de départ.

Observer les résultats sur calculatrice.

c) *Interpolation par des tangentes : méthode de Newton*

• Avec $x \rightarrow x^3 - 2$, pour $Z > \sqrt[3]{2}$ la tangente en $J(Z; Z^3 - 2)$ coupe $x'x$ au point d'abscisse

$$Z' = \frac{2}{3} \left(Z + \frac{1}{Z^2} \right).$$

Le démontrer.

Observer les approximations obtenues par ce processus en partant de la valeur initiale 1,26.

C'est dès le V^e siècle, chez les Hindous, que l'on voit apparaître cet algorithme sous la forme de l'amélioration de l'approximation entière de la racine cubique.

• Avec $x \rightarrow \frac{2}{x^3} - 1$, pour $Z < \sqrt[3]{2}$, on tire de façon semblable

$$Z' = \frac{4}{3} Z - \frac{Z^4}{6}.$$

Observer les approximations obtenues par ce processus en partant de la valeur initiale 1,25.

3. Pour aller un peu plus loin...

Les diverses méthodes présentées ont en commun d'itérer un réel initial déjà relativement proche de $\sqrt[3]{2}$ par une fonction adaptée ; on a vu successivement :

$$x \rightarrow \frac{4x^2 + 2x + 2}{x^2 + 4x + 2}$$

$$x \rightarrow \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 2}{2(x^2 + x + 1)}$$

$$x \rightarrow \frac{-x^3 + 7x + 2}{7}$$

$$x \rightarrow \frac{-x^3 + 5x + 2}{5}$$

$$x \rightarrow \frac{7x^4 - 4x^3 + 8}{7x^3}$$

$$x \rightarrow \frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{x^2} \right)$$

$$x \rightarrow \frac{4}{3} x - \frac{x^4}{6}$$

Dans des manuscrits anonymes du XV^e siècle et chez TARTAGLIA on trouve une façon d'améliorer l'approximation entière de la racine cubique qui contient en germe l'utilisation de :

$$x \rightarrow x + \frac{2-x^3}{3x^2+3x}$$

LÉONARD de PISE, à partir de l'interpolation linéaire entre les nombres entiers, utilise l'approximation qui correspond à

$$x \rightarrow x + \frac{2-x^3}{3x^2+3x+1}$$

Dans chaque cas, $\sqrt[3]{2}$ apparaît comme solution de $\ell = F(\ell)$ pour une fonction F adaptée : ceci élargit le cadre de la réponse à 1. et permet d'ouvrir la voie à d'autres.

4. Méthodes itératives

Les observations précédentes conduisent à une recherche d'équations équivalentes à $\ell^3 = 2$ s'écrivant sous la forme : $\ell = F(\ell)$; ce pour envisager une itération par la fonction F.

On peut, par exemple, penser à $\ell = \frac{2}{\ell^2}$, ainsi qu'à $\ell = \sqrt{\frac{2}{\ell}}$.

Expérimenter le premier cas à la calculatrice... et constater que le choix doit être plus réfléchi.

Avec le deuxième, observer les résultats obtenus à la calculatrice.

On pourra, en démontrant que $x \rightarrow \frac{2}{x^2}$ et $x \rightarrow \sqrt{\frac{2}{x}}$ (de \mathbf{R}^{+*} dans \mathbf{R}^{+*}) sont réciproques, comparer les deux processus :
pour x proche de $\sqrt[3]{2}$, $\frac{2}{x^2}$ est-il plus près de $\sqrt[3]{2}$ que x ne l'est ?

$\sqrt{\frac{2}{x}}$ est-il plus près de $\sqrt[3]{2}$ que x ne l'est ?

Il y a donc lieu de rechercher des fonctions qui réduisent au maximum les écarts autour de $\sqrt[3]{2}$: c'est-à-dire des fonctions pour lesquelles

$$\frac{F(x) - F(y)}{x - y}$$

est aussi proche de 0 que possible lorsque x et y varient distincts dans un intervalle contenant $\sqrt[3]{2}$ (pour fixer les idées [1,25 ; 1,26]), en tout cas ne sortant pas de]-1 ; 1[.

Ainsi, pour $F : x \rightarrow \sqrt{\frac{2}{x}}$: vérifier que

$$\frac{F(x) - F(y)}{x - y} = - \frac{2}{xy \left[\sqrt{\frac{2}{x}} + \sqrt{\frac{2}{y}} \right]}$$

en déduire que pour x, y choisis distincts dans $[1,25 ; 1,26]$

$$\frac{F(x) - F(y)}{x - y} \leq 0,51$$

Il en résulte que lorsque T est déjà proche de $\sqrt[3]{2}$ (c'est-à-dire, ici, au moins dans $[1,25 ; 1,26]$,

$$|F(T) - \sqrt[3]{2}| \leq 0,51 |T - \sqrt[3]{2}|$$

Combien d'itérations suffiront pour approcher $\sqrt[3]{2}$ à 10^{-10} près en partant de la valeur initiale 1,26 ?

Comment peut-on améliorer la rapidité du processus d'approximation ?

Il ne suffira pas de modifier la valeur initiale, il faut aussi pouvoir agir sur le taux : dans le cas présent, le nombre dérivé de F en $\sqrt[3]{2}$ donne une information sur les espoirs d'encadrement de ce taux ; pourquoi ?

Adoptons maintenant $F : x \rightarrow \frac{-x^3 + 5x + 2}{5}$, estimer $F'(\sqrt[3]{2})$ et majorer

$$\frac{F(x) - F(y)}{x - y} \text{ sur } [1,25 ; 1,26].$$

Combien d'itérations suffiront pour approcher $\sqrt[3]{2}$ à 10^{-10} près en partant de la valeur initiale 1,26 ?

Reprendre avec $F : x \rightarrow \frac{2}{3} \left(x + \frac{1}{x^2}\right)$.

5. Accélération d'un processus itératif

Avec $F : x \rightarrow \sqrt{\sqrt{2x}}$, vérifier que $x^3 = 2$ équivaut à $X = \sqrt{\sqrt{2x}}$ [ceci sur \mathbf{R}^+]. Déterminer $F'(\sqrt[3]{2})$.

En déduire que le processus d'itération par $x \rightarrow \sqrt{\sqrt{2x}}$ n'est pas très rapide (2).

k étant un réel, $x \rightarrow \sqrt{\sqrt{2x}}$ est équivalente à $(k+1)x = kx + \sqrt{\sqrt{2x}}$ ou encore à

$$x = \frac{k}{k+1} x + \frac{1}{k+1} \sqrt{\sqrt{2x}} = G(x).$$

Déterminer k pour que $G'(\sqrt[3]{2}) = 0$.

En déduire une fonction permettant un assez bon processus d'itération pour approximer $\sqrt[3]{2}$.

(2) On pourra interpréter ce processus à partir de la solution de MENECHME et observer que les valeurs approchées successives sont constructibles à la règle ou au compas...

Bibliographie

- [1] Pierre DREDON et Jean ITARD : *Mathématiques et Mathématiciens*. Editions Magnard.
- [2] Jean-Claude CARREGA : *Théorie des corps - la règle et le compas*. Editions Hermann.
- [3] Jean DHOMBRES : *Nombre, mesure et continu*. Editions Cedic/Nathan.
- [4] Jean ITARD : *Essais d'histoire des Mathématiques*. Librairie Albert Blanchard.
- [5] Jean-Paul COLETTE : *Histoire des Mathématiques* (2 volumes). Editions du Renouveau Pédagogique (Québec).
- [6] Revue du Palais de la Découverte : *Courbes mathématiques*. N° spécial 8, juillet 1976.
- [7] Arthur ENGEL : *Mathématiques du point de vue algorithmique* (trad. Daniel Reisz). Editions Cedic.
- [8] Jean-Louis OVAERT, Jean-Luc VERLEY : *Analyse*, volume 1. Editions Cedic/Nathan.
- [9] Revue PLOT (éditée par la Régionale d'Orléans-Tours de l'A.P.M.E.P.), Supplément n° 2 (traceurs de courbes).
- [10] Amy DAHAN-DALMEDICO, Jeanne PEIFFER : *Routes et dédales*. Editions du Seuil, 1982.
- [11] Félix KLEIN : *Famous Problems of Elementary Geometry*. New York, Editions Dover, 1956.
- [12] Bulletin inter-IREM n° 20 : *Enseignement de l'Analyse*.
- [13] IREM de Toulouse : *Equations du troisième degré* (1980). *Equations du quatrième degré* (1982).
- [14] IREM de Marseille : *Analyse I* (1978).
- [15] René DESCARTES : *La Géométrie*. Editions de l'AREFPPI.
- [16] *L'ouvert* : Journal de l'A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'IREM de Strasbourg n° 42, mars 1986.

Les angles : *leur utilisation dans les problèmes* *de géométrie*

par Antoine Gouteyron
IREM de Bordeaux

Présentation du document

1. Objectif visé

L'objectif de cet article est d'introduire la notion d'angle d'un couple de vecteurs non nuls et de montrer comment cette notion ainsi que celle de "double d'angle" interviennent dans la résolution de certains problèmes de géométrie plane.

2. Contenu

Il est constitué à partir de notes élaborées pour l'essentiel dans les années 80-81 et destinées — en principe — aux élèves de première et terminale C. Il se compose de trois parties :

Partie A : Première présentation des angles (niveau T. C)

Elle met en jeu la notion de rotation "vectorielle". Satisfaisante du point de vue théorique, elle présente l'inconvénient d'être actuellement inabordable en classe de première scientifique.

Partie B : Deuxième présentation des angles (niveau 1^{re} S)

Elle fait plus appel à l'intuition qu'à la rigueur mathématique : pour orienter a priori le plan, puis pour introduire la notion de "mesure d'un arc orienté" qui préfigure celle de "mesure d'un angle". Non satisfaisante pour le puriste, elle est de lecture plus facile que la première, parsemée d'exercices d'application immédiate, et donc directement utilisable dans les classes de premières scientifiques.

Spécifiquement à chacune de ces présentations :

- est définie l'addition des angles
- sont introduites les notions de "double" et de "moitiés" d'un angle
- sont établis — ou admis — les effets des transformations sur les angles.

Partie C : Usage des angles

Sa lecture peut être entreprise après étude de l'une ou de l'autre des

parties A et B (cela signifie que, dans un premier temps, on peut passer outre la lecture d'une de ces deux parties).

Les thèmes abordés sont les suivants :

Caractérisation en termes d'angles de la colinéarité, de l'orthogonalité de deux vecteurs.

On dispose dès lors d'un nouvel outil pour aborder, dans le plan ponctuel, les problèmes d'alignement, de parallélisme et d'orthogonalité.

Caractérisation en termes d'angles

- de la bissectrice de deux demi-droites de même origine,
- des bissectrices de deux droites sécantes.

Cela nous permettra de mettre en évidence quelques propriétés des bissectrices.

Nota : la bissectrice de deux demi-droites de même origine est ici la droite de la réflexion qui échange ces demi-droites.

Caractérisation en termes d'angles

- d'un cercle dont on connaît soit le centre et deux de ses points, soit trois de ses points,
- de la cocyclicité de quatre points,
- de la tangente en un point à un cercle (dont on connaît par ailleurs soit le centre et un autre point, soit deux autres points).

La mise en évidence de configurations fondamentales ainsi que la résolution de quelques problèmes complètent l'étude de ces trois thèmes.

Etude des lignes de niveau de l'application : $M \rightarrow (\widehat{MA}, \widehat{MB})$.

Ce paragraphe est un complément indispensable à l'ensemble. Mais l'introduction des lignes de niveau fait appel à des notions plus difficiles à manier que celles utilisées jusqu'ici, en particulier à celle de convexité. Il serait donc souhaitable, si les programmes de la classe de première nous le permettaient, de reporter l'étude de ce paragraphe en classe de terminale.

3. Notations utilisées

Notre étude est conduite dans un plan noté \mathbf{P} (plan ponctuel). On note $\widetilde{\mathbf{P}}$ l'ensemble des vecteurs de \mathbf{P} (plan vectoriel associé à \mathbf{P}).

On désigne par \mathbf{P}_0 le plan ponctuel muni d'un point origine 0. On sait alors que \mathbf{P}_0 est identifiable au "plan pointé" \mathbf{P}_0 du fait que la correspondance $\left. \begin{array}{l} \mathbf{P}_0 \rightarrow \widetilde{\mathbf{P}} \\ M \rightarrow \overrightarrow{OM} \end{array} \right\}$ est bijective.

Etant donnés des points A, B, C, ... de \mathbf{P} , nous notons $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots$ les vecteurs $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \dots$

Inversement, étant donnés des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \dots$ de $\widetilde{\mathbf{P}}$, nous dési-

gnons par les majuscules U, V, W, \dots les points de P_0 identifiés à ces vecteurs. Donc $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OV} = \vec{v}$, $\overrightarrow{OW} = \vec{w}$, ...

Dès lors, l'égalité $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ signifie que, dans P_0 , OABU est un parallélogramme et, d'après la relation de Chasles, on a :

$$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}.$$

Etant donné un vecteur non nul \vec{v} , nous notons $R.\vec{v}$ la droite vectorielle engendrée par le vecteur \vec{v} .

Les ensembles

$$R_+.\vec{v} = \{\alpha.\vec{v} \in \tilde{P} / \alpha \in R_+\}$$

$$R_-.\vec{v} = \{\alpha.\vec{v} \in \tilde{P} / \alpha \in R_-\}$$

sont appelés demi-droites vectorielles. $R_+.\vec{v}$ et $R_-.\vec{v}$ sont dites opposées.

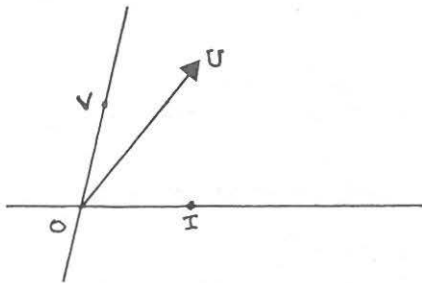
Les transformations du plan ponctuel P (réflexions, homothéties, translations^(*)) sont désignées par des lettres minuscules s, h, t, \dots Celles du plan vectoriel \tilde{P} (réflexions, rotations) sont désignées par des lettres minuscules surmontées d'un tilde : $\tilde{s}, \tilde{\sigma}, \tilde{r}, \tilde{\rho}, \dots$ \tilde{I} désigne l'application identique de \tilde{P} .

4. Représentations concrètes

Dans le plan physique matérialisant P (feuille de papier, tableau...), un vecteur est représenté

- soit par un point de P_0 , par exemple, le point I représente le vecteur \overrightarrow{OI} encore noté \vec{i} , O représente le vecteur nul noté $\vec{0}$;

- soit par une "flèche" d'origine O ^(**), par exemple, la flèche d'origine O et d'extrémité U représente le vecteur \vec{u} .



La droite vectorielle $R.\vec{v} = \{\alpha.\vec{v} \in \tilde{P} / \alpha \in R\}$ est, en conformité avec la "vision ponctuelle" d'un vecteur, représentée par la droite (OV). De même les demi-droites vectorielles $R_+.\vec{v}$ et $R_-.\vec{v}$ sont représentées par la demi-droite [OV) et par la demi-droite qui lui est opposée.

(*) Les rotations "ponctuelles" ne sont pas mentionnées dans ces pages car elles sont introduites après le chapitre sur les angles.

(**) Cette présentation traditionnelle des vecteurs, chère aux physiciens, n'est pas sans présenter quelques inconvénients. En particulier, elle ne permet pas de représenter le vecteur nul, ni de donner une représentation cohérente des droites vectorielles.

Partie A : Première présentation des angles

La lecture de cette présentation des angles nécessite quelques connaissances sur les automorphismes orthogonaux du plan vectoriel $\tilde{\mathbf{P}}$.

\vec{i} et \vec{j} étant deux vecteurs non nuls de même norme, nous notons :

$\tilde{s}_{\vec{i} \rightarrow \vec{j}}$ l'unique symétrie orthogonale qui transforme \vec{i} en \vec{j}

$\tilde{r}_{\vec{i} \rightarrow \vec{j}}$ l'unique rotation qui transforme \vec{i} en \vec{j} .

I. Angle d'une rotation de $\tilde{\mathbf{P}}$

Définition

Le graphe $\{(\vec{u}, \vec{v}) ; (\vec{w}, \vec{t}) ; (\vec{z}, \vec{x}) ; \dots\}$ d'une quelconque rotation \tilde{r} de $\tilde{\mathbf{P}}$ est appelé **angle de la rotation \tilde{r}** .

On le note : $\hat{\tilde{r}}$.

$\hat{\tilde{r}}$ se lit : "angle de $\hat{\tilde{r}}$ ".

En particulier,

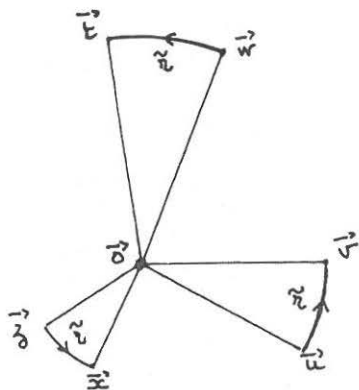
• l'angle de la rotation $\tilde{\mathbb{I}}$ est appelé **angle nul**.

On le note $\hat{\tilde{\mathbb{I}}}$ ou $\hat{0}$ (la seconde notation est plus fréquente) ;

• l'angle de la rotation $-\tilde{\mathbb{I}}$ est appelé **angle plat**.

On le note $-\hat{\tilde{\mathbb{I}}}$ ou de préférence $\hat{\Pi}$.

Nous désignerons par \mathcal{A} l'ensemble des angles des rotations de $\tilde{\mathbf{P}}$.



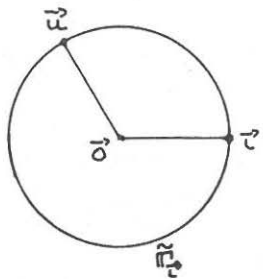
II. Représentation des angles

1. L'ensemble $\tilde{\Gamma}_{\vec{i}}$

Désignons par $\tilde{\Gamma}$ l'ensemble des vecteurs $\tilde{\mathbf{P}}$ de norme 1.

Un vecteur \vec{i} étant fixé sur $\tilde{\Gamma}$

• Pour tout vecteur \vec{u} de $\tilde{\Gamma}$, il existe une unique rotation \tilde{r} de $\tilde{\mathbf{P}}$ qui transforme \vec{i} en \vec{u} .



A chaque vecteur u , associons l'angle de la rotation $\tilde{r}_{\vec{i} \rightarrow \vec{u}}$. On définit ainsi l'application :

$\psi : \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathcal{A}$

$\vec{u} \rightarrow \hat{\tilde{r}}_{\vec{i} \rightarrow \vec{u}}$

• ψ est une application bijective car, pour tout élément $\widehat{\vec{r}}$ de \mathcal{A} , il existe un unique vecteur \vec{u} de $\widetilde{\Gamma}$ tel que $(\vec{r}, \vec{u}) \in \widehat{\widetilde{\Gamma}}$, à savoir : $\vec{u} = \widetilde{r}(\vec{r})$.

En outre, on a : $\psi(\vec{i}) = \widehat{\widetilde{r}_{\vec{i} \rightarrow \vec{i}}} = \widehat{\vec{I}} = \widehat{0}$.

D'où le

Théorème :

Un vecteur \vec{i} étant choisi sur $\widetilde{\Gamma}$ l'application

$$\begin{aligned} \psi : \widetilde{\Gamma} &\rightarrow \mathcal{A} \\ u &\rightarrow \widehat{\widetilde{r}_{\vec{i} \rightarrow u}} \end{aligned}$$

est une bijection qui associe le vecteur \vec{i} à l'angle nul $\widehat{0}$ de \mathcal{A} .

2. Identification de \mathcal{A} à $\widetilde{\Gamma}_{\vec{i}}$

Choisissons arbitrairement un vecteur \vec{i} sur $\widetilde{\Gamma}$ (noté désormais $\widetilde{\Gamma}_{\vec{i}}$). Dès lors, tout vecteur \vec{u} de $\widetilde{\Gamma}_{\vec{i}}$ est bijectivement associé, par ψ , à l'angle $\widehat{\widetilde{r}_{\vec{i} \rightarrow \vec{u}}}$.

On peut, dans ces conditions, considérer que l'ensemble \mathcal{A} des angles est identique à l'ensemble $\widetilde{\Gamma}_{\vec{i}}$. Autrement dit, \mathcal{A} est identifiable à $\widetilde{\Gamma}_{\vec{i}}$.

Notations

\vec{u} étant un élément quelconque de $\widetilde{\Gamma}_{\vec{i}}$ nous noterons :

\widehat{u} l'angle bijectivement associé à \vec{u} . Ainsi : $\widehat{u} = \widehat{\widetilde{r}_{\vec{i} \rightarrow \vec{u}}}$

$\widetilde{r}_{\widehat{u}}$ la rotation de $\widetilde{\Gamma}$ d'angle \widehat{u} . Ainsi : $\widetilde{r}_{\widehat{u}} = \widetilde{r}_{\vec{i} \rightarrow \vec{u}}$

En particulier, on obtient les équivalences

$$\text{dans } \mathcal{A} : \widehat{u} = \widehat{0} \iff \text{sur } \widetilde{\Gamma}_{\vec{i}} : \vec{u} = \vec{i}$$

$$\text{dans } \mathcal{A} : \widehat{u} = \widehat{\pi} \iff \text{sur } \widetilde{\Gamma}_{\vec{i}} : \vec{u} = -\vec{i}$$

$$\begin{aligned} \text{car :} \quad \widehat{u} = \widehat{0} &\iff \widehat{u} = \widehat{\vec{I}} \iff \vec{u} = \widetilde{I}(\vec{i}) = \vec{i} \\ \widehat{u} = \widehat{\pi} &\iff \widehat{u} = -\widehat{\vec{I}} \iff \vec{u} = -\widetilde{I}(\vec{i}) = -\vec{i} \end{aligned}$$

Remarque

Dans \mathbf{P} , le cercle de centre O et de rayon 1 sous-jacent à $\widetilde{\Gamma}$ sera noté Γ . Le point I représentant le vecteur \vec{i} sera appelé point origine de Γ . Le cercle Γ muni du point origine I sera noté Γ_I .

Il est clair que \mathcal{A} est également identifiable au cercle pointé Γ_I . Dans la suite de cet exposé, \mathcal{A} sera représenté soit par $\widetilde{\Gamma}_{\vec{i}}$, soit par Γ_I .

III. Le groupe $(\mathcal{A}, +)$

1. Addition dans \mathcal{A}

Définition

On appelle *addition* dans \mathcal{A} l'application

$$\begin{array}{c} \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \\ (\hat{r}_1, \hat{r}_2) \rightarrow \widehat{\hat{r}_2 \circ \hat{r}_1} \\ \hat{r}_1 + \hat{r}_2 = \widehat{\hat{r}_2 \circ \hat{r}_1} \end{array}$$

On écrira :

Somme de deux angles : traductions sur $\tilde{\Gamma}_1^{\rightarrow}$

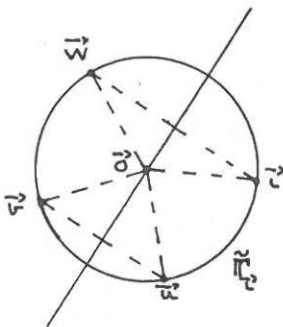
Quels que soient les angles $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ de \mathcal{A} i.e.les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\tilde{\Gamma}_1^{\rightarrow}$, nous avons

$$\begin{aligned} \hat{u} + \hat{v} = \hat{w} &\iff \tilde{r}_{\hat{w}} = \tilde{r}_{\hat{v}} \circ \tilde{r}_{\hat{u}} \\ &\iff \vec{w} = \tilde{r}_{\hat{w}}(\vec{i}) = (\tilde{r}_{\hat{v}} \circ \tilde{r}_{\hat{u}})(\vec{i}) \\ &\iff \vec{w} = \tilde{r}_{\hat{v}}(\vec{u}) \end{aligned}$$

ce qui peut se résumer dans le schéma suivant :

$$\text{dans } \mathcal{A} : \quad \hat{u} + \hat{v} = \hat{w}$$

$$\text{sur } \tilde{\Gamma}_1^{\rightarrow} : \quad \vec{u} \xrightarrow{\tilde{r}_{\hat{v}}} \vec{w}$$



Le vecteur \vec{w} associé à l'angle \hat{w} peut aussi s'obtenir par symétrie. En effet, désignons par \tilde{s} la symétrie orthogonale qui échange \vec{u} et \vec{v} .

$$\text{Nous avons : } \quad \tilde{s} \circ \tilde{r}_{\hat{v}} = (\tilde{s} \circ \tilde{r}_{\hat{v}})^{-1} \quad \text{car } \tilde{s} \circ \tilde{r}_{\hat{v}} \text{ est une symétrie} \\ = \tilde{r}_{\hat{v}}^{-1} \circ \tilde{s}$$

$$\begin{aligned} \text{Par suite : } \quad \tilde{s}(\vec{w}) &= \tilde{s}[\tilde{r}_{\hat{v}}(\vec{u})] = (\tilde{s} \circ \tilde{r}_{\hat{v}})(\vec{u}) = \tilde{r}_{\hat{v}}^{-1}[\tilde{s}(\vec{u})] \\ &= \tilde{r}_{\hat{v}}^{-1}(\vec{v}) = \vec{i} \quad \dots \text{ car } \tilde{r}_{\hat{v}}(\vec{i}) = \vec{v} \end{aligned}$$

$$\text{Autrement dit : } \quad \vec{w} = \tilde{s}(\vec{i}) \quad \dots \text{ avec } \tilde{s} = \tilde{s}_{\vec{u} \leftrightarrow \vec{v}}.$$

En conclusion, nous pouvons énoncer le

Théorème :

$$\begin{aligned} \text{Dans } \mathcal{A} : \quad \hat{u} + \hat{v} = \hat{w} &\iff \text{sur } \tilde{\Gamma}_1^{\rightarrow} : \vec{w} = \tilde{r}_{\hat{v} \rightarrow \hat{u}}(\vec{i}) \\ &\iff \text{sur } \tilde{\Gamma}_1^{\rightarrow} : \vec{w} = \tilde{s}_{\vec{u} \leftrightarrow \vec{v}}(\vec{i}) \end{aligned}$$

Remarque pratique :

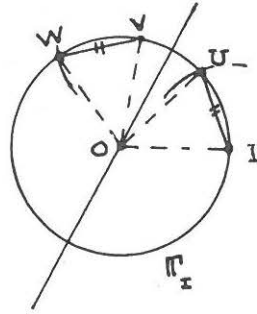
Posons encore $\tilde{s} = \tilde{s}_{\vec{u} \leftrightarrow \vec{v}}$. Nous avons :

$$\tilde{s}(\vec{iU}) = \tilde{s}(\vec{u} - \vec{i}) = \tilde{s}(\vec{u}) - \tilde{s}(\vec{i}) = \vec{v} - \vec{w} = \overline{VW}$$

On en déduit :

$\|\vec{IU}\| = \|\vec{WV}\| \dots$ car \tilde{s} conserve la norme puis, dans \mathbf{P} : $IU = VW$.

Dans le plan physique \mathbf{P} , on voit comment user du compas pour construire, sur Γ_1 , le point W lorsque les points U et V sont donnés.



2. Le groupe $(\mathcal{A}, +)$

Théorème :

L'ensemble \mathcal{A} des angles muni de la loi $+$ a une structure de groupe commutatif.

Démonstration

Rappelons que, quels que soient les éléments \widehat{r}_1 et \widehat{r}_2 de \mathcal{A} :

$$\widehat{r}_1 + \widehat{r}_2 = \widehat{r_2 o r_1}$$

Il en résulte que les propriétés de l'addition dans \mathcal{A} sont celles de la composition des rotations dans $\widetilde{\mathbf{R}}$ (ensemble des rotations de $\widetilde{\mathbf{P}}$). Donc, à l'instar de $(\widetilde{\mathbf{R}}, o)$, $(\mathcal{A}, +)$ est un groupe commutatif.

- Son élément neutre est l'angle nul $\widehat{0} \dots$ i.e. \widehat{I} car

$$\forall \widehat{r} \in \mathcal{A} : \widehat{r} + \widehat{I} = \widehat{I o r} = \widehat{r}$$

- Le symétrique d'un quelconque élément \widehat{r} de \mathcal{A} est \widehat{r}^{-1} .

En effet : $\widehat{r} + \widehat{r}^{-1} = \widehat{r^{-1} o r} = \widehat{I} = \widehat{0}$

On l'appelle *opposé* de \widehat{r} . On le note : $-\widehat{r}$.

Dès lors, nous avons : $\forall \widehat{r} \in \mathcal{A} : -\widehat{r} = \widehat{r}^{-1}$.

En particulier : $-\widehat{\Pi} = \widehat{\Pi} \dots$ car $\widehat{\Pi} + \widehat{\Pi} = -\widehat{I o -I} = \widehat{I} = \widehat{0}$.

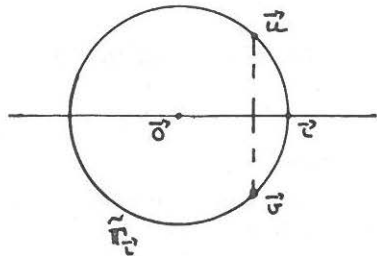
3. Angles opposés : traduction sur $\widetilde{\Gamma}_1$

Quels que soient les angles \widehat{u} et \widehat{v} de \mathcal{A} i.e. ...les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de $\widetilde{\Gamma}_1^+$, nous avons, compte tenu des résultats précédemment acquis :

$$\widehat{u} + \widehat{v} = \widehat{0} \iff \widetilde{s}_{\vec{u} \rightarrow \vec{v}}(\vec{u}) = \vec{1} \dots \text{th}(11-2)$$

$$\iff \widetilde{s}_{\vec{1} \rightarrow \vec{u}}(\vec{u}) = \vec{v}$$

Nous retiendrons donc le



Théorème :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Dans } \mathcal{A} : \widehat{u} + \widehat{v} = \widehat{0} \\ \text{i.e. : } \widehat{v} = -\widehat{u} \end{array} \right\} \iff \text{sur } \widetilde{\Gamma}_1^+ : v = \widetilde{s}_{\vec{1} \rightarrow \vec{u}}(u)$$

Conséquence : angles égaux à leurs opposés

Quel que soit l'élément \hat{u} de \mathcal{A} , nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{u} = -\hat{u} &\iff \text{sur } \tilde{\Gamma}_1^{\hat{u}} : \vec{u} = \tilde{s}_{j \rightarrow i}(\vec{u}) \\ &\iff \text{sur } \tilde{\Gamma}_1^{\hat{u}} : \vec{u} = \vec{i} \text{ ou } \vec{u} = -\vec{i} \\ &\iff \text{dans } \mathcal{A} : \hat{u} = \hat{0} \text{ ou } \hat{u} = \hat{\pi} \end{aligned}$$

Ainsi, deux angles et deux seulement sont leurs propres opposés : l'angle nul et l'angle plat.

4. Règles du calcul dans $(\mathcal{A}, +)$

Ce sont celles en vigueur dans un groupe commutatif.

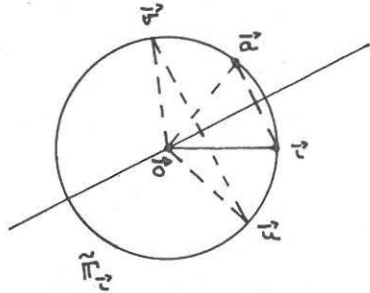
1. $\forall (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) \in \mathcal{A}^3 : \hat{u} + \hat{w} = \hat{v} + \hat{w} \Rightarrow \hat{u} = \hat{v}$
2. $\forall (\hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{A}^2 : -(\hat{u} + \hat{v}) = (-\hat{u}) + (-\hat{v})$
3. Pour tout couple (\hat{a}, \hat{b}) d'éléments donnés de \mathcal{A} , il existe un unique élément \hat{u} de \mathcal{A} tel que : $\hat{b} + \hat{u} = \hat{a}$.

Cet angle est $\hat{u} = \hat{a} + (-\hat{b})$. On l'appelle *différence de \hat{a} et \hat{b}* . On le note : $\hat{a} - \hat{b}$.

On les établit de façon classique. Toutefois pour la troisième on peut procéder comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{b} + \hat{u} = \hat{a} &\iff \tilde{s}_{\vec{b} \rightarrow \vec{u}}(\vec{u}) = \vec{a} \\ &\iff \tilde{s}_{\vec{u} \rightarrow \vec{a}}(\vec{b}) = \vec{u} \end{aligned}$$

\vec{a} et \vec{b} étant donnés sur $\tilde{\Gamma}_1^{\hat{u}}$, on est alors assuré de l'existence et de l'unicité de \vec{u} sur $\tilde{\Gamma}_1^{\hat{u}}$ (donc de \hat{u} dans \mathcal{A}).



En outre, on a :

$$-\hat{b} + (\hat{b} + \hat{u}) = -\hat{b} + \hat{a} \dots \text{ autrement dit : } \hat{u} = -\hat{b} + \hat{a} = \hat{a} + (-\hat{b}).$$

IV. Double et moitiés d'un angle

1. Le double d'un angle

Définition :

Etant donné un angle \hat{u} , l'angle $\hat{u} + \hat{u}$ est le *double de \hat{u}* . On le note $2\hat{u}$.

On retiendra le

Théorème :

Quels que soient les angles \hat{u} et \hat{v} :

- $2\hat{u} = \hat{0} \iff (\hat{u} = \hat{0} \text{ ou } \hat{u} = \hat{\pi})$
- $2\hat{u} = 2\hat{v} \iff (\hat{u} = \hat{v} \text{ ou } \hat{u} = \hat{v} + \hat{\pi})$

Démonstration :

- $2\hat{u} = \hat{0} \iff \hat{u} = -\hat{u}$
 $\iff (\hat{u} = \hat{0} \text{ ou } \hat{u} = \hat{\pi})$
- $2\hat{u} = 2\hat{v} \iff 2(\hat{u} - \hat{v}) = \hat{0}$
 $\iff (\hat{u} - \hat{v} = \hat{0} \text{ ou } \hat{u} - \hat{v} = \hat{\pi})$
 $\iff (\hat{u} = \hat{v} \text{ ou } \hat{u} = \hat{v} + \hat{\pi})$

Attention, on doit se garder des conclusions du type “ $2\hat{u} = \hat{0}$ donc $\hat{u} = \hat{0}$ ” ou encore “ $2\hat{u} = 2\hat{v}$ donc $\hat{u} = \hat{v}$ ” qui, pour être tentantes, n’en sont pas moins *fausses*.

2. Les deux moitiés d’un angle

Problème : Etant donné un élément \hat{a} de \mathcal{A} , déterminer l’ensemble des éléments \hat{u} de \mathcal{A} tels que : $2\hat{u} = \hat{a}$.

Désignons par \vec{a} et \vec{u} les deux vecteurs de $\tilde{\Gamma}_i$ bijectivement associés à \hat{a} et \hat{u} . Nous avons alors :

$$\hat{u} + \hat{u} = \hat{a} \iff \vec{s}_{\vec{u} \rightarrow \vec{u}}(\vec{i}) = \vec{a}$$

$$\iff (\vec{u} = \vec{u}_1 \text{ ou } \vec{u} = \vec{u}_2 = -\vec{u}_1)$$

u_1 et u_2 étant les deux vecteurs unitaires de la droite de la symétrie orthogonale qui échange \vec{i} et \vec{a} .

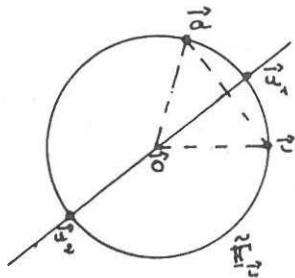
Ainsi : $\hat{a} = 2\hat{u}_1 = 2\hat{u}_2$.

En outre, sur $\tilde{\Gamma}_i$, on a :

$$\vec{u}_1 = -\vec{i}(\vec{u}_2) \text{ et } \vec{u}_2 = -\vec{i}(\vec{u}_1)$$

ce qui, dans \mathcal{A} , se traduit par :

$$\hat{u}_1 = \hat{u}_2 + \hat{\pi} \text{ et } \hat{u}_2 = \hat{u}_1 + \hat{\pi}.$$



Théorème et définition :

- Dans \mathcal{A} , l’équation : $2\hat{u} = \hat{a}$ (\hat{a} donné, \hat{u} inconnu) admet deux solutions qui diffèrent de $\hat{\pi}$.
- Ces deux angles solutions sont appelés les *deux moitiés de \hat{a}* .

En particulier, l’angle nul $\hat{0}$ a deux moitiés : $\hat{0}$ et $\hat{\pi}$ puisque $\hat{0} + \hat{0} = \hat{0}$ et $\hat{\pi} + \hat{\pi} = \hat{0}$.

3. Les deux angles droits

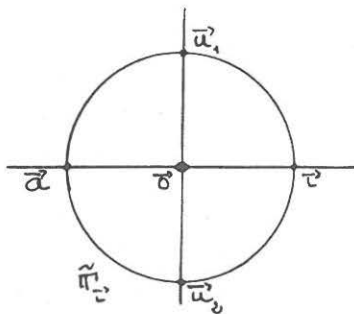
Nous allons étudier ici les deux moitiés de l'angle plat. Lorsque $\hat{a} = \hat{\pi}$, sur $\tilde{\Gamma}_1^{\vec{a}}$ on a : $\vec{a} = -\vec{i}$.

La droite de la symétrie orthogonale qui échange \vec{i} et $-\vec{i}$ est orthogonale à $\mathbf{R}.\vec{i}$.

Les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 de $\tilde{\Gamma}_1^{\vec{a}}$ associés aux deux moitiés \hat{u}_1 et \hat{u}_2 de $\hat{\pi}$ sont alors homologues dans la symétrie orthogonale de droite $\mathbf{R}.\vec{i}$.

Les angles \hat{u}_1 et \hat{u}_2 sont donc opposés (voir le théorème de la page 121).

Il s'ensuit la :



Définition :

Chacune des deux moitiés de l'angle plat est appelée angle droit. L'un de ces angles est dit direct, l'autre est dit indirect (ils sont opposés).

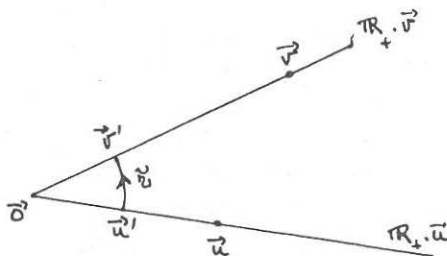
Nota : Le choix, entre les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 , pour représenter l'angle droit direct sera fait ultérieurement.

V. Angle d'un couple de vecteurs non nuls

Définition :

Etant donnés deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} de $\tilde{\mathbf{P}}$, il existe une rotation $\tilde{\mathbf{r}}$ et une seule qui transforme $\mathbf{R}_+.\vec{u}$ en $\mathbf{R}_+.\vec{v}$ à savoir :

$\tilde{\mathbf{r}}_{\vec{u}' \rightarrow \vec{v}'}$... où \vec{u}' et \vec{v}' sont respectivement les vecteurs unités de ces deux demi-droites vectorielles.



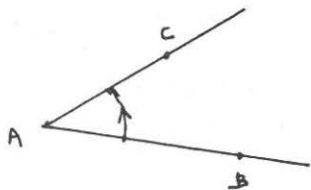
On convient alors de désigner par (\vec{u}, \vec{v}) l'angle de la rotation $\tilde{\mathbf{r}}$ qui transforme $\mathbf{R}_+.\vec{u}$ en $\mathbf{R}_+.\vec{v}$.

On dit que (\vec{u}, \vec{v}) est l'angle du couple de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) . C'est un élément de \mathcal{A} .

2. Représentation traditionnelle

Soit A, B, C trois points non alignés du plan P.

L'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est représenté comme le montre la figure ci-contre (la flèche permet de distinguer quel est le premier élément du couple $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$).



3. Convention du langage

Dans la suite de cet exposé, les éléments de l'ensemble \mathcal{A} seront simplement appelés *angles*.

VI. Relation de Chasles

1. Préliminaire

Nous allons, pour établir la relation de Chasles, utiliser le résultat suivant :

Quels que soient les vecteurs \vec{a} et \vec{b} de $\tilde{\mathbb{R}}^2$: $\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \widehat{\vec{b}} - \widehat{\vec{a}}$.

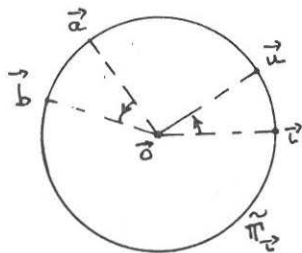
Démonstration :

Posons : $\hat{u} = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$.
 \hat{u} est donc l'angle de la rotation qui transforme \vec{a} en \vec{b} .

Autrement dit, on a : $\tilde{r}_{\hat{u}}(\vec{a}) = \vec{b}$
 ce qui, dans \mathcal{A} , se traduit par :

$$\hat{a} + \hat{u} = \hat{b}.$$

Ainsi : $\hat{u} = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \widehat{\vec{b}} - \widehat{\vec{a}}$.



2. Relations de Chasles (pour les angles et leurs doubles)

Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

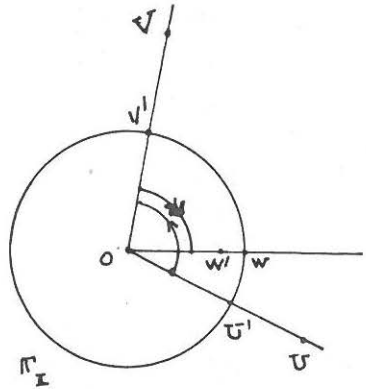
- $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{w})}$
 - $2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + 2\widehat{(\vec{v}, \vec{w})} = 2\widehat{(\vec{u}, \vec{w})}$.
- relations de Chasles

Démonstration :

Désignons par $\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'$ les vecteurs unitaires des demi-droites vectorielles $R_+ \cdot \vec{u}$, $R_+ \cdot \vec{v}$ et $R_+ \cdot \vec{w}$.

Les vecteurs $\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}'$ sont alors éléments de $\tilde{\Gamma}_1$ et, en utilisant le lemme précédent, on a :

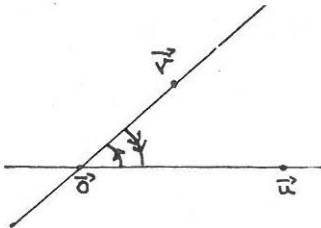
$$\begin{aligned} \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} &= \widehat{(\vec{u}', \vec{v}')} + \widehat{(\vec{v}', \vec{w}')} \\ &= (\hat{v}' - \hat{u}') + (\hat{w}' - \hat{v}') \\ &= \hat{w}' - \hat{u}' \\ &= \widehat{(\vec{u}', \vec{w}')} \\ &= \widehat{(\vec{u}, \vec{w})} \end{aligned}$$



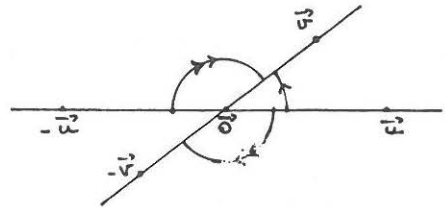
La deuxième égalité en découle de façon immédiate.

3. Premières conséquences

Quels que soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v} :

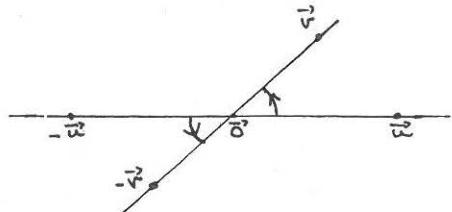


$$\widehat{(\vec{v}, \vec{u})} = -\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$$



$$\widehat{(\vec{u}, -\vec{v})} = \widehat{(-\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \pi$$

$$\widehat{(-\vec{u}, -\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$$



Démonstration :

Nous avons, en utilisant la relation de Chasles :

- $\widehat{(\vec{v}, \vec{u})} + \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{v}, \vec{v})} = \hat{0}$
- donc : $\widehat{(\vec{v}, \vec{u})} = -\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$

$$\begin{aligned} \bullet \widehat{(\vec{v}, \vec{u})} + \widehat{(\vec{u}, -\vec{v})} &= \widehat{(\vec{v}, -\vec{v})} = \widehat{\pi} \\ \widehat{(-\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{u})} &= \widehat{(-\vec{u}, \vec{u})} = \widehat{\pi} \\ \text{donc : } \widehat{(\vec{u}, -\vec{v})} &= \widehat{(-\vec{u}, \vec{v})} = \pi - \widehat{(\vec{v}, \vec{u})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{\pi} \end{aligned}$$

• En utilisant le résultat précédent, il vient :

$$\begin{aligned} \widehat{(-\vec{u}, -\vec{v})} + \widehat{(-\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{\pi} & \\ &= [\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{\pi}] + \widehat{\pi} \\ &= \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \end{aligned}$$

VII. Effet des transformations sur les angles

1. Résultats essentiels

Théorème :

Dans $\tilde{\mathcal{P}}$:

- les rotations et les homothéties conservent les angles
- les symétries orthogonales changent les angles en leurs opposés.

Démonstration :

1. Soient :

\tilde{r} une rotation vectorielle
 \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de $\tilde{\mathcal{P}}$.

Nous avons :

$$\widehat{\tilde{r}} = \widehat{(\vec{u}, \tilde{r}(\vec{u}))} = \widehat{(\vec{v}, \tilde{r}(\vec{v}))}$$

On en déduit, par échange des termes moyens :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\tilde{r}(\vec{u}), \tilde{r}(\vec{v}))}$$

ce qu'on traduit par : \tilde{r} "conserve" les angles.

2. Soient :

$\tilde{h} = \lambda \cdot \tilde{I}$ une homothétie de $\tilde{\mathcal{P}}$ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$)

1 \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de $\tilde{\mathcal{P}}$

• Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ alors

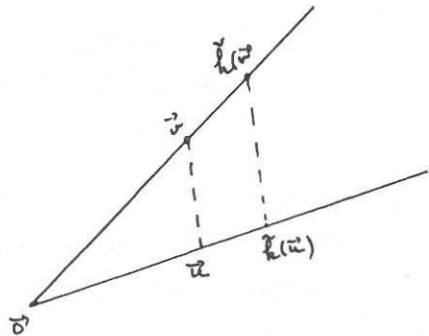
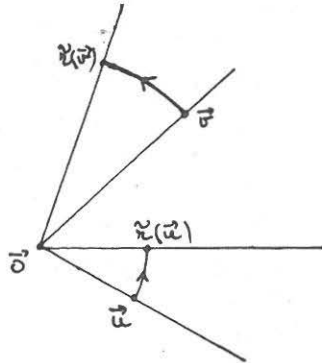
$$\tilde{h}(\vec{u}) \in \mathbb{R}_+ \cdot \vec{u}$$

$$\tilde{h}(\vec{v}) \in \mathbb{R}_+ \cdot \vec{v}$$

et on a :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\tilde{h}(\vec{u}), \tilde{h}(\vec{v}))}$$

toute homothétie positive \tilde{h} conserve donc les angles.



• Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$ alors

\tilde{h} est la composée de la rotation $(-\tilde{I})$ par l'homothétie positive $(-\lambda).\tilde{I}$.

\tilde{h} conserve donc les angles puisque, séparément, $-\tilde{I}$ et $(-\lambda).\tilde{I}$ le font.

3. Soient :

\tilde{s} une symétrie orthogonale de \tilde{P}
 \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs de \tilde{P}

Posons :

$$\vec{u}' = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} ; \quad \vec{v}' = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$$

$$\tilde{r} = \widehat{\vec{u}' \rightarrow \vec{v}'}, \text{ i.e. } \tilde{r} = \widehat{(\vec{u}', \vec{v}')}$$

Nous avons de façon évidente :

$$\widehat{(\vec{u}', \vec{v}')} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}.$$

En outre :

$$\tilde{s}(\vec{u}) = \tilde{s}(\|\vec{u}\| \cdot \vec{u}') = \|\vec{u}\| \cdot \tilde{s}(\vec{u}')$$

donc $\tilde{s}(\vec{u}) \in \mathbb{R}_+ \cdot \tilde{s}(\vec{u}')$

De même :

$$\tilde{s}(\vec{v}) \in \mathbb{R}_+ \cdot \tilde{s}(\vec{v}')$$

de sorte que :

$$\widehat{(\tilde{s}(\vec{u}), \tilde{s}(\vec{v}))} = \widehat{(\tilde{s}(\vec{u}'), \tilde{s}(\vec{v}'))}.$$

Considérons alors la symétrie $\tilde{so}\tilde{r}$.

Nous avons :

$$\tilde{so}\tilde{r} = (\tilde{so}\tilde{r})^{-1} = \tilde{r}^{-1} \circ \tilde{s}$$

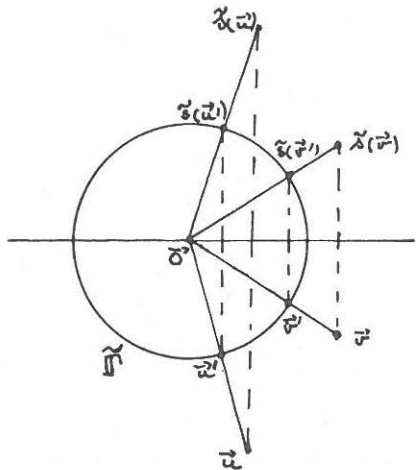
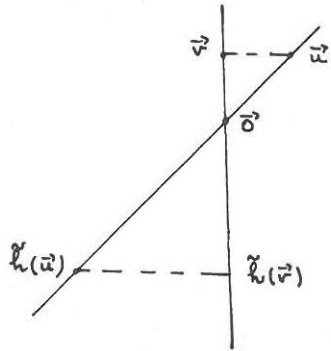
Par suite :

$$\begin{aligned} \widehat{(\tilde{s}(\vec{u}'), \tilde{s}(\vec{v}'))} &= \widehat{(\tilde{s}(\vec{u}'), \tilde{s}[\tilde{r}(\vec{u}')])} \\ &= \widehat{(\tilde{s}(\vec{u}'), \tilde{r}^{-1}[\tilde{s}(\vec{u}')])} \\ &= \tilde{r}^{-1} = -\tilde{r} \\ &= -\widehat{(\vec{u}', \vec{v}')} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\widehat{(\tilde{s}(\vec{u}), \tilde{s}(\vec{v}))} = -\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \quad (\text{c.q.f.d.})$$

Il en résulte, pour le plan P , le



Théorème :

Dans \mathbf{P} :

- les translations, les homothéties conservent les angles
- les symétries orthogonales changent les angles en leurs opposés.

Démonstration :

Soient dans \mathbf{P} :

- une translation t
- une homothétie h ... (de centre Ω)
- une symétrie orthogonale s (de droite \mathcal{D})
- trois points distincts A, B, C .

Nous avons :

$$1. \widehat{(AB, AC)} = \widehat{(\tilde{I}(AB), \tilde{I}(AC))} \\ = \widehat{(t(A)t(B), t(A)t(C))}$$

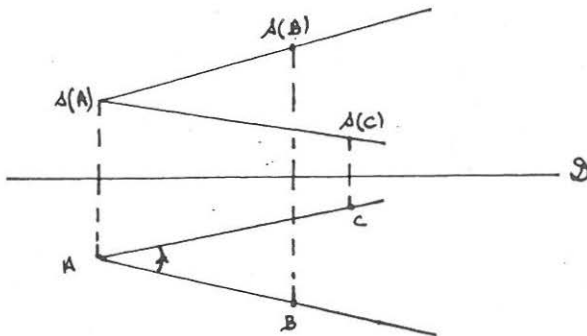
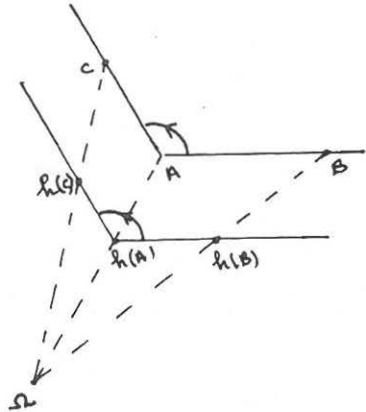
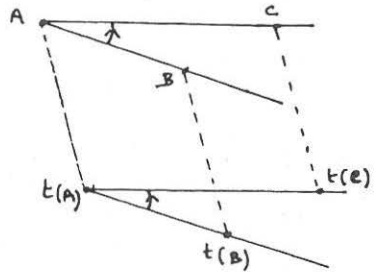
t conserve donc les angles.

$$2. \widehat{(AB, AC)} = \widehat{(h(A)h(B), h(A)h(C))} \\ = \widehat{(h(A)h(B), h(A)h(C))}$$

h conserve donc les angles.

$$3. \widehat{(AB, AC)} = -\widehat{(s(A)s(B), s(A)s(C))} \\ = -\widehat{(s(A)s(B), s(A)s(C))}$$

s change donc les angles en leurs opposés.



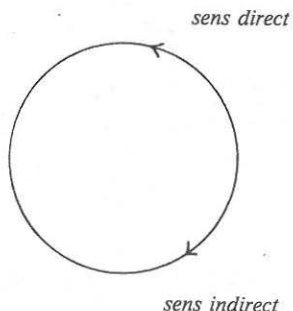
Partie B : Deuxième présentation des angles

I. Orientation du plan et mesures d'un arc orienté

1. Orientation du plan

Intuitivement, il va de soi que tout cercle d'un plan peut être parcouru dans deux sens. L'un est appelé sens *direct* ou trigonométrique, l'autre est appelé *indirect* ou rétrograde.

Orienter le plan \mathbf{P} , c'est choisir sur tous les cercles de ce plan le même sens direct (conventionnellement le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre). Lorsqu'il en est ainsi, le plan est dit *orienté*.



Dans tout ce qui suit, le plan \mathbf{P} est supposé orienté et muni d'un point origine O .

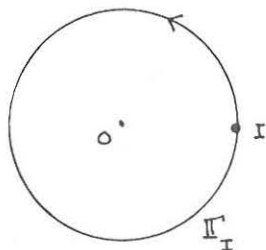
2. Le cercle Γ_I

Nous désignons par Γ_I le cercle de centre O , de rayon 1, muni d'un point origine I (figure ci-contre).

3. Repérage d'un point sur Γ_I : abscisses curvilignes

En enroulant "une droite graduée Δ " sur le cercle Γ_I , comme le suggère la figure de la page suivante, on définit une application :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\rightarrow \Gamma_I \\ \mu &\rightarrow M \end{aligned}$$



Par exemple :

au réel 0 correspond le point I

au réel $\frac{\pi}{2}$ correspond le point J

au réel π correspond le point I'

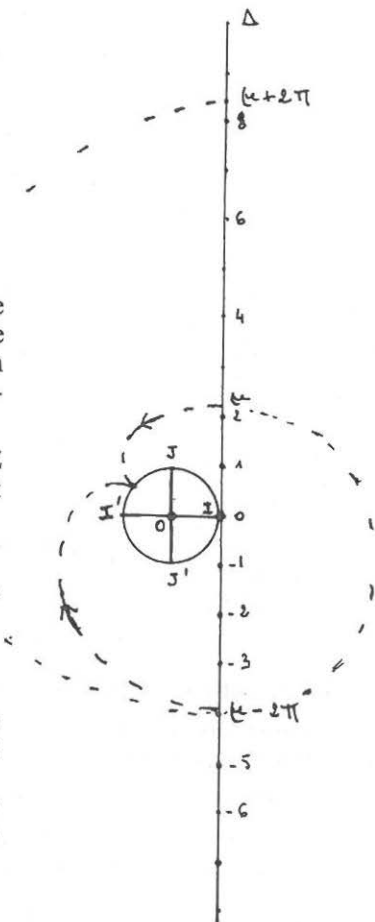
au réel $-\frac{\pi}{2}$ correspond le point J'

Plus généralement, tout point M de Γ_1 a une infinité d'antécédents dans \mathbf{R} de la forme $\mu + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbf{Z}$. Un seul de ces antécédents appartient à l'intervalle $] -\pi, \pi]$.

Les réels $\mu + k \times 2\pi$ où k décrit \mathbf{Z} sont appelés *abscisses curvilignes* du point M de Γ_1 .

Il ressort de l'étude expérimentale décrite ci-dessus que :

- les abscisses curvilignes d'un même point diffèrent d'un multiple entier de 2π ;
- pour tout point M du cercle Γ_1 , il existe une abscisse curviligne et une seule appartenant à l'intervalle $] -\pi, \pi]$.



Convention d'écriture :

Convention d'écriture :

Pour exprimer que deux réels x et y diffèrent d'un multiple de 2π , nous utilisons la notation : " $y = x[2\pi]$ " qui se lit : " y égale x modulo 2π ".

Cette notation signifie qu'il existe un entier relatif k tel que

$$y = x + k \times 2\pi .$$

Exercice 1

Vérifier que $y = x [2\pi]$ dans chacun des cas suivants :

a) $x = \frac{\pi}{2}$, $y = -\frac{7\pi}{2}$

b) $x = -\frac{7\pi}{3}$, $y = \frac{11\pi}{3}$

c) $x = \frac{3\pi}{4}$, $y = -\frac{5\pi}{4}$

d) $x = -\frac{63\pi}{6}$, $y = \frac{3\pi}{2}$

Exercice 2

Dans chacun des cas ci-dessous, x désigne une abscisse curviligne d'un point M de Γ_I .

Donner celle y qui est élément de l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

a) $x = \frac{5\pi}{4}$

b) $x = -\pi$

c) $x = -\frac{7\pi}{6}$

d) $x = \frac{63\pi}{12}$

4. Mesures d'un arc orienté

a) Arc orienté : définition

Soit (A, B) un couple de points de Γ_I . On dit que (A, B) est un bipoint de Γ_I ou, tradition oblige, un *arc orienté* de ce cercle. A la notation habituelle (A, B) , on préfère la notation \widehat{AB} apparemment plus "suggestive". A est l'origine de l'arc orienté \widehat{AB} , B en est l'extrémité.

b) Mesures d'un arc orienté

Soit un arc orienté \widehat{AB} , α et β deux des abscisses curvilignes respectives des points A et B .

On dit que le réel $\beta - \alpha$ est une mesure de l'arc orienté \widehat{AB} .

Cet arc a donc une infinité de mesures qui diffèrent d'un multiple entier de 2π . Conformément à la convention précédente, on écrit alors :

$$\text{mes } \widehat{AB} = \beta - \alpha [2\pi]$$

$\text{mes } \widehat{AB}$ se lit : "mesure de l'arc orienté \widehat{AB} " ou plus simplement "mesure de \widehat{AB} ".

Remarques :

• On a : $\text{mes } \widehat{BA} = \alpha - \beta [2\pi]$

Les arcs orientés \widehat{AB} et \widehat{BA} ont donc des mesures opposées modulo 2π .

• $\text{mes } \widehat{IA} = \alpha [2\pi]$ car 0 est une abscisse curviligne de I .

Exemple :

Dans la figure ci-dessous, la notation $M(\mu)$ signifie que $\text{mes } \widehat{IM} = \mu [2\pi]$.

On a alors :

$$\text{mes } \widehat{AB} = -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

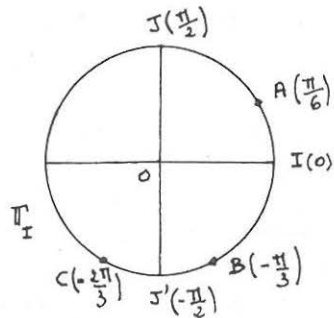
$$= -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{mes } \widehat{JC} = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$= -\frac{7\pi}{6} [2\pi]$$

ou encore

$$\text{mes } \widehat{JC} = \frac{5\pi}{6} [2\pi]$$



Exercice 3

1. Citer tous les arcs orientés de la figure ci-dessus ayant pour mesure :

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $-\frac{\pi}{6}$ d) $-\frac{4\pi}{3}$

2. Placer le point I' tel que $\text{mes } \widehat{II'} = \pi [2\pi]$.
Exprimer ensuite $\text{mes } I'A$, $\text{mes } I'B$, $\text{mes } I'C$.

c) Relation de Chasles

On montre — voir exercice 4 — que, quels que soient les points A, B, C de Γ_I , on a :

$$\text{mes } \widehat{AB} + \text{mes } \widehat{BC} = \text{mes } \widehat{AC} [2\pi]$$

Exercice 4

Soit α, β, γ des abscisses curvilignes des points A, B et C. Exprimer $\text{mes } \widehat{AB} + \text{mes } \widehat{BC} - \text{mes } \widehat{AC}$. En déduire la relation de Chasles.

Indication : On écrira :

$$\begin{aligned} \text{mes } \widehat{AB} &= \beta - \alpha + k_1 \times 2\pi & \text{avec } k_1 \in \mathbb{Z} \\ \text{mes } \widehat{BC} &= & \text{etc.} \end{aligned}$$

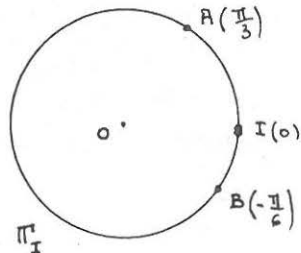
Exercice 5

1. Dans la figure ci-contre, placer les points E et F tels que :

$$\text{mes } \widehat{AE} = \pi [2\pi]$$

$$\text{et } \text{mes } \widehat{BF} = -\pi [2\pi]$$

2. Exprimer : $\text{mes } \widehat{IE}$, $\text{mes } \widehat{IF}$, $\text{mes } \widehat{EF}$
et $\text{mes } \widehat{AB}$.



II. Angle d'un couple de vecteurs non nuls

Etant donnés des vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots$ les vecteurs

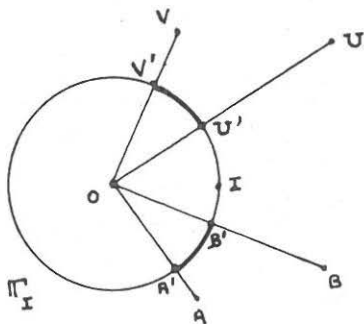
$$\vec{u}' = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \vec{u} ; \quad \vec{v}' = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} ; \quad \vec{w}' = \frac{1}{\|\vec{w}\|} \cdot \vec{w} \dots$$

seront désormais appelés vecteurs unitaires associés aux vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \dots$. Dans le plan pointé \mathbb{P}_0 , ils sont représentés par des points U', V', W' du cercle Γ_I .

1. Définition d'un angle

On appelle *angle d'un couple* (\vec{u}, \vec{v}) de vecteurs non nuls, l'ensemble de tous les couples (\vec{a}, \vec{b}) de vecteurs non nuls tels que :

$$\text{mes } \widehat{A'B'} = \text{mes } \widehat{U'V'} \quad [2\pi]$$



On note (\vec{u}, \vec{v}) l'angle d'un couple de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) . (\vec{u}, \vec{v}) se lit : "angle vecteur u , vecteur v " ou plus simplement "angle u, v ".

Il résulte de la définition et des notations adoptées que, quels que soient les vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} , on a :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}')$$

Conventions

- Dans la suite de cet exposé, nous utiliserons le mot "angle" à la place de "angle d'un couple de vecteurs non nuls". Nous désignerons éventuellement un angle par une lettre surmontée d'un "chapeau" pour rappeler la nature de l'objet qui est considéré. Par exemple $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \dots$ désignent des angles. $\widehat{\alpha}$ se lit : "angle α ".

- L'ensemble des angles sera noté \mathcal{A} .

Représentation traditionnelle

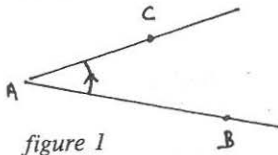


figure 1

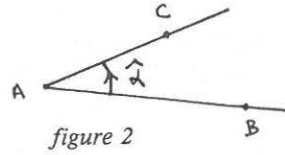


figure 2

soit A, B, C trois points non alignés du plan P.

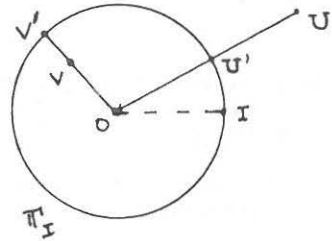
L'angle $(\widehat{AB, AC})$ est représenté comme le montre la figure 1. (La flèche permet de distinguer quel est le premier élément du couple).

Lorsqu'on désigne par $\widehat{\alpha}$ l'angle $(\widehat{AB, AC})$, on illustre cette situation comme l'indique la figure 2.

2. Mesures en radians d'un angle $(\widehat{u, v})$

On appelle mesure *en radians* de l'angle $(\widehat{u, v})$ une quelconque mesure de l'arc orienté $\widehat{U'V'}$.

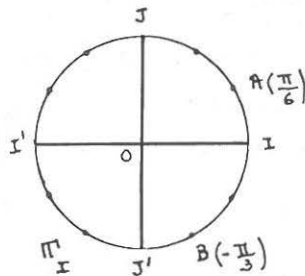
Un angle $(\widehat{u, v})$ a donc une infinité de mesures en radians. Elles diffèrent entre elles d'un multiple de 2π . On note *mes* $(\widehat{u, v})$ une quelconque mesure en radians de l'angle $(\widehat{u, v})$.



Mesure principale

Il existe une et une seule mesure de l'angle $(\widehat{u, v})$ appartenant à l'intervalle $] -\pi, \pi]$. On l'appelle *mesure principale* de $(\widehat{u, v})$.

Exercice 6



Sur la figure ci-dessous, la notation $A(\frac{\pi}{6})$ signifie que $\frac{\pi}{6}$ est une abscisse curviligne de A.

Donner les mesures principales des angles $(\widehat{OI,OA})$; $(\widehat{OB,OI'})$; $(\widehat{OA,OJ'})$; $(\widehat{OB,OJ})$; $(\widehat{OA,OB})$ et $(\widehat{OB,OA})$.

3. Egalité de deux angles

Il résulte des définitions précédentes que deux angles sont égaux si et seulement si leurs mesures sont égales modulo 2π .

$$(\widehat{a,b}) = (\widehat{u,v}) \iff \text{mes } (\widehat{a,b}) = \text{mes } (\widehat{u,v}) [2\pi]$$

4. Relation de Chasles pour les mesures d'angles

Il découle de la définition d'une mesure d'un angle ainsi que de la relation de Chasles sur les mesures d'arcs orientés que, quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

$$\text{mes } (\widehat{u,v}) + \text{mes } (\widehat{v,w}) = \text{mes } (\widehat{u,w}) [2\pi]$$

Exercice 7

Illustrer et justifier ce résultat.

III. Addition des angles

1. Définition

On appelle somme de deux angles de mesure α et β l'angle dont une mesure est $\alpha + \beta$.

La somme de deux angles $\widehat{\alpha}$ et $\widehat{\beta}$ se note $\widehat{\alpha + \beta}$.

2. Propriétés

Les propriétés de l'addition des angles sont analogues à celles de l'addition des nombres réels, à savoir :

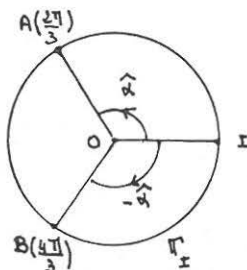
1. l'addition dans \mathcal{A} est commutative et associative,
2. elle admet un *élément neutre* : l'angle de mesure zéro. On le note $\widehat{0}$. On l'appelle l'angle nul,
3. tout élément $\widehat{\alpha}$ de \mathcal{A} admet un *opposé* noté $-\widehat{\alpha}$.

Par exemple, les angles de mesures

$\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ sont opposés car

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 2\pi \text{ et donc}$$

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 0 [2\pi].$$



Exercice 8

Déterminer la mesure principale de la somme et de la différence des angles dont les mesures respectives sont :

- a) $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$ c) $-\frac{\pi}{8}$ et $\frac{7\pi}{8}$ d) $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$

Exercice 9

Pour quelles valeurs du réel α de l'intervalle $] -\pi, \pi]$ les angles de mesure α et $\alpha + \pi$ sont-ils opposés ?

3. Angles égaux à leur opposé

Soit $\hat{\alpha}$ un angle. Désignons par α une de ses mesures. Nous avons :

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} = -\hat{\alpha} &\Leftrightarrow 2\alpha = 0 \pmod{2\pi} \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} : 2\alpha = k \times 2\pi \\ &\Leftrightarrow \text{il existe } k \in \mathbb{Z} : \alpha = k\pi \end{aligned}$$

Il existe donc deux angles égaux à leur opposé : l'angle nul et l'angle dont la mesure principale est π . Ce dernier angle est appelé *angle plat*. On le note π .

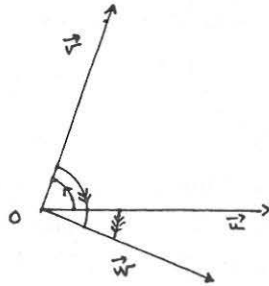


Pour tout vecteur $\vec{u} \neq \vec{0}$: $\widehat{(\vec{u}, \vec{u})} = \hat{0}$ et $\widehat{(\vec{u}, -\vec{u})} = \widehat{(-\vec{u}, \vec{u})} = \hat{\pi}$.

4. Relation de Chasles (pour les angles)

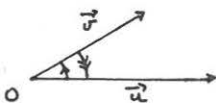
Il résulte immédiatement de la définition de la somme de deux angles et de la relation de Chasles sur les mesures d'angle qui, quels que soient les vecteurs non nuls \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , on a :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \widehat{(\vec{v}, \vec{w})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{w})}$$

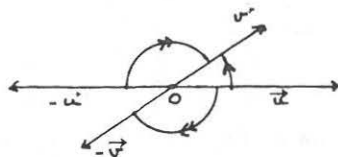


Les résultats énoncés et illustrés ci-après sont des conséquences immédiates de cette propriété.

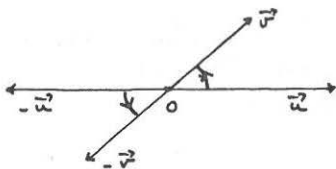
Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls. On a :



$$\widehat{(\vec{v}, \vec{u})} = -\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$$



$$\widehat{(\vec{u}, -\vec{v})} = \widehat{(-\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \hat{\pi}$$



$$\widehat{(-\vec{u}, -\vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$$

Exercices

10. - Utiliser la relation de Chasles pour établir les résultats précédents.

11. - Soit un parallélogramme (ABCD). Montrer que :

$$\widehat{(AB, AD)} + \widehat{(BC, BA)} + \widehat{(CD, CB)} + \widehat{(DA, DC)} = \hat{0}.$$

5. Double et moitiés d'un angle

a) Double d'un angle

Définition :

On appelle double de l'angle $\hat{\alpha}$ l'angle $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}$ que l'on note $2\hat{\alpha}$.

Il est clair que le double d'un angle de mesure α a pour mesure 2α .

Exercice 12

Déterminer la mesure principale du double d'un angle de mesure

- a) $\frac{\pi}{3}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $-\frac{\pi}{2}$ e) π

Théorème

Quels que soient les angles $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$, on a :

- $2\hat{\alpha} = \hat{0}$ si et seulement si $\hat{\alpha} = \hat{0}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\pi}$
- $2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta}$ si et seulement si $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ ou $\alpha = \hat{\beta} + \pi$

Démonstration :

• L'égalité $2\hat{\alpha} = \hat{0}$ équivaut à $\hat{\alpha} = -\hat{\alpha}$.
Autrement dit $\hat{\alpha}$ est égal à son opposé. Dans ce cas, on a vu que $\hat{\alpha} = \hat{0}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\pi}$.

- $2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta} \iff 2(\hat{\alpha} - \hat{\beta}) = \hat{0}$
 $\iff [\hat{\alpha} - \hat{\beta} = \hat{0} \text{ ou } \hat{\alpha} - \hat{\beta} = \hat{\pi}]$
 $\iff [\hat{\alpha} = \hat{\beta} \text{ ou } \hat{\alpha} = \hat{\beta} + \hat{\pi}]$

Relation de Chasles (pour les doubles d'angles)

(c.q.f.d)

On vérifie aisément que les doubles d'angles satisfont à la relation de

Chasles. Quels que soient les vecteurs non nuls \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} , on a :

$$2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + 2\widehat{(\vec{v}, \vec{w})} = 2\widehat{(\vec{u}, \vec{w})}.$$

Exercice 13

Déterminer les mesures principales des angles dont le double a pour mesure :

- a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{2\pi}{3}$ c) 3π d) $\frac{5\pi}{4}$

b) *Les deux moitiés d'un angle.*

Résolution de l'équation $2\widehat{\alpha} = \widehat{a}$

Soit \widehat{a} un angle. Désignons par θ sa mesure principale.

L'angle $\widehat{\beta}$ de mesure principale $\frac{\theta}{2}$ est alors tel que :

$$2\widehat{\beta} = \widehat{a}.$$

Par suite, nous avons :

$$\begin{aligned} 2\widehat{\alpha} = \widehat{a} &\Leftrightarrow 2\widehat{\alpha} = 2\widehat{\beta} \\ &\Leftrightarrow \widehat{\alpha} = \widehat{\beta} \text{ ou } \widehat{\alpha} = \widehat{\beta} + \pi \end{aligned}$$

L'équation $2\widehat{\alpha} = \widehat{a}$ a donc deux solutions $\widehat{\alpha}_1$ et $\widehat{\alpha}_2$.

Ces solutions diffèrent de l'angle plat. En effet, si $\widehat{\alpha}_1 = \widehat{\beta}$ et $\widehat{\alpha}_2 = \widehat{\beta} + \pi = \widehat{\alpha}_1 + \pi$, on a aussi : $\widehat{\alpha}_2 = \widehat{\alpha}_1 + \pi$ car $-\pi = \pi$.

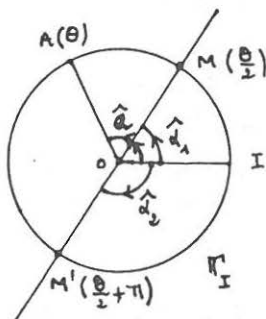
On peut donc énoncer :

Théorème et définition :

- Dans l'ensemble \mathcal{A} des angles, l'équation $2\widehat{\alpha} = \widehat{a}$ (\widehat{a} donné, $\widehat{\alpha}$ inconnu) admet deux solutions qui diffèrent de π .
- Les deux angles solutions de cette équation sont appelés les deux moitiés de l'angle \widehat{a} .

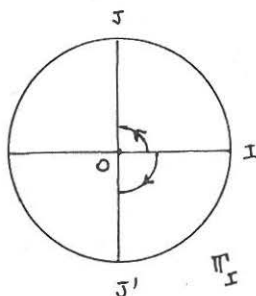
Tout angle a donc deux moitiés. Par exemple :

- l'angle nul a deux moitiés $\widehat{0}$ et π ;
- l'angle plat a deux moitiés dont les mesures principales sont respectivement $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$. Ces deux



angles sont appelés angles droits. Ils sont opposés.

En conformité avec le sens direct adopté sur le cercle Γ_1 , l'angle $(\widehat{OI, OJ})$ est appelé angle droit direct et l'angle $(\widehat{OI, OJ'})$ est appelé angle droit indirect.



Remarque :

La notation $\frac{1}{2}\hat{\alpha}$ n'a aucun sens puisqu'un angle a deux moitiés.

Il est par contre tout à fait cohérent de parler de la moitié d'une mesure d'un angle puisqu'il s'agit, dans ce cas, de la moitié d'un nombre réel.

Exercices

14. - Déterminer les mesures principales des moitiés d'un angle de mesure θ dans les cas suivants :

- a) $\theta = -\frac{\pi}{3}$ b) $\theta = \frac{\pi}{2}$ c) $\theta = \frac{4\pi}{3}$ d) $\theta = 3\pi$

15. - Montrer que l'angle plat est le seul angle dont les moitiés sont opposées.

IV. Propriétés géométriques

1. Effet des transformations

Théorème :

- Les translations, les homothéties (en particulier les symétries centrales) conservent les angles.
- Les réflexions changent les angles en leurs opposés.

Démonstration :

Désignons par A, B, C trois points distincts de \mathcal{P} .

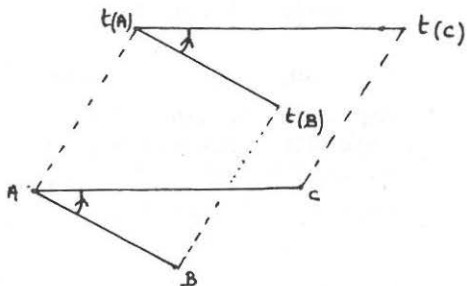
• Soit t une translation. Rappelons que l'on a :

$$t(A)t(B) = \overline{AB} \text{ et } t(A)t(C) = \overline{AC}$$

On en déduit trivialement que :

$$(t(A)t(B), t(A)t(C)) = (\overline{AB}, \overline{AC})$$

Ainsi : "t conserve les angles".



• Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport k ($k \neq 0$). Rappelons que l'on a :

$$\begin{aligned} h(\overrightarrow{A})h(\overrightarrow{B}) &= k \cdot \overrightarrow{AB} \\ \text{et } h(\overrightarrow{A})h(\overrightarrow{C}) &= k \cdot \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

De sorte que les vecteurs unitaires associés aux vecteurs \overrightarrow{AB} et $k \cdot \overrightarrow{AB}$ d'une part ; \overrightarrow{AC} et $k \cdot \overrightarrow{AC}$ d'autre part, sont

- égaux lorsque $k > 0$
- opposés lorsque $k < 0$

On en déduit alors :

$$(k \cdot \overrightarrow{AB}, k \cdot \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) .$$

Autrement dit :

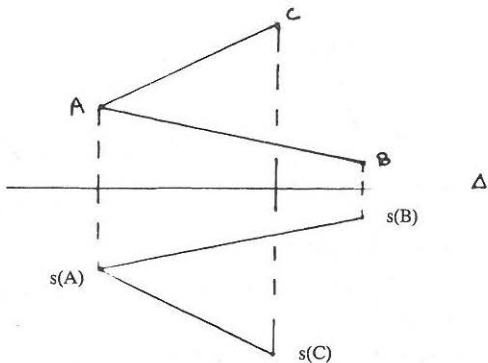
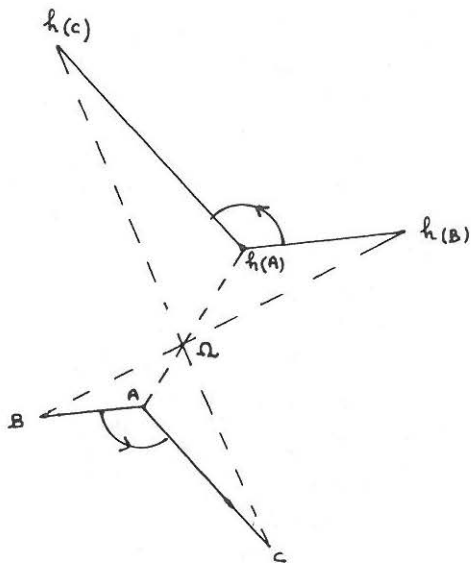
$$(h(\overrightarrow{A})h(\overrightarrow{B}), h(\overrightarrow{A})h(\overrightarrow{C})) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

Ainsi : "h conserve les angles".

• Soit s une réflexion d'axe Δ . Au vu de la figure ci-contre, on a :

$$(s(\overrightarrow{A})s(\overrightarrow{B}), s(\overrightarrow{A})s(\overrightarrow{C})) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

Nous admettrons ici que les réflexions changent les angles en leurs opposés.



Partie C : Usage des angles

I. Colinéarité, orthogonalité - Bissectrices

1. Deux exercices résolus

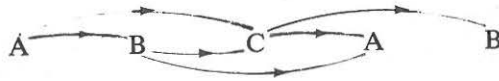
Exercice 1 : "Somme des angles d'un triangle"

Soit un triangle ABC . Calculer la somme :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

qui, par abus de langage, est souvent appelée "somme des angles du triangle ABC ".

Nota : Pour écrire ces angles on tient compte de l'ordre dans lequel sont donnés les sommets du triangle, ainsi que le montre le schéma :



Première solution :

Désignons par Ω le milieu de $[A,C]$ et posons :

$$A' = t_{\vec{BA}}(A) \text{ et } C' = t_{\vec{BA}}(C)$$

Ω est alors le milieu de $[B,C']$ car $(ABCC')$ est un parallélogramme. Nous avons alors, d'une part

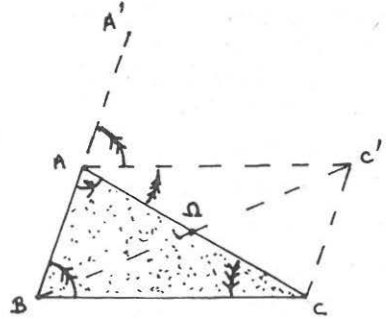
$$(\widehat{BC,BA}) = (\widehat{AC',AA'}) \dots$$

effet de la translation $t_{\vec{BA}}$

d'autre part

$$(\widehat{CA,CB}) = (\widehat{AC,AC'}) \dots$$

effet de la symétrie S_{Ω}



On en déduit :

$$\begin{aligned} (\widehat{AB,AC}) + (\widehat{BC,BA}) + (\widehat{CA,CB}) &= (\widehat{AB,AC}) + (\widehat{AC,AC'}) + (\widehat{AC',AA'}) \\ &= (\widehat{AB,AA'}) = \widehat{\pi} \end{aligned}$$

Deuxième solution :

Nous avons : $(\widehat{CA,CB}) = (-\widehat{CA}, -\widehat{CB}) = (\widehat{AC,BC}) \dots$

On en déduit :

$$(\widehat{AB,AC}) + (\widehat{BC,BA}) + (\widehat{CA,CB}) = (\widehat{AB,AC}) + (\widehat{AC,BC}) + (\widehat{BC,BA}) = (\widehat{AB,BA}) = \widehat{\pi}$$

On retiendra le résultat suivant :

*La somme des angles déterminés par un triangle est égale à l'angle plat.
La somme de leurs doubles est égale à l'angle nul.*

Exercice 2 : Caractérisation des triangles isocèle et équilatéral

Soit un triangle (ABC) . Montrer que :

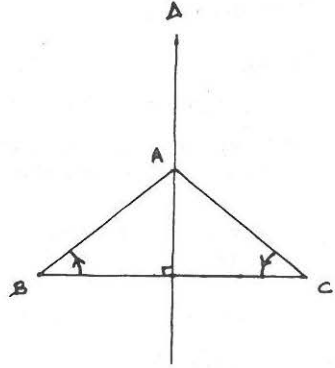
1. le triangle (ABC) est isocèle en $A \Leftrightarrow (\widehat{BC,BA}) = (\widehat{CA,CB})$
2. le triangle (ABC) est équilatéral $\Leftrightarrow (\widehat{AB,AC}) = (\widehat{BC,BA}) = (\widehat{CA,CB})$

Solution :

1. Désignons par Δ la médiatrice de $[B, C]$.

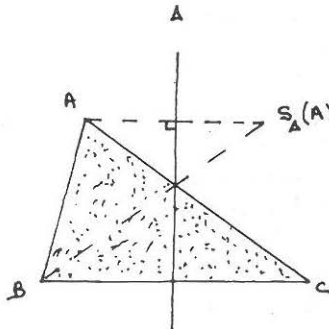
Alors : le triangle (ABC) est isocèle en $A \Rightarrow S_{\Delta}(A) = A$ et $S_{\Delta}(B) = C$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} &= -\widehat{(\vec{CB}, \vec{CA})} \\ &\quad \text{(effet de } S_{\Delta}) \\ \Rightarrow \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} &= \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} \end{aligned}$$



Réciproquement :

$$\begin{aligned} \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} = \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} &\Rightarrow \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} = -\widehat{(\vec{BS}_{\Delta}(A), \vec{BC})} \quad \text{(effet de } S_{\Delta}) \\ &\Rightarrow \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} = \widehat{(\vec{BC}, \vec{BS}_{\Delta}(A))} \\ &\Rightarrow \vec{BA} \text{ et } \vec{BS}_{\Delta}(A) \text{ colinéaires} \\ &\Rightarrow S_{\Delta}(A) = A \\ &\Rightarrow \text{le triangle } (ABC) \text{ est isocèle en } A \end{aligned}$$



2. Le triangle (ABC) est équilatéral \Leftrightarrow le triangle (ABC) est isocèle en A

\Leftrightarrow le triangle (ABC) est isocèle en B

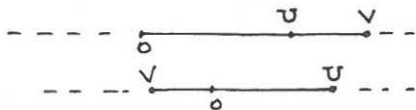
$$\Leftrightarrow \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} = \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} = \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})}$$

2. Angles et colinéarité

a) Résultats essentiels



Théorème :

Quels que soient les vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} :

- $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{0}$ si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont éléments de la même demi-droite vectorielle
- $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{\pi}$ si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont éléments de demi-droites vectorielles opposées
- $2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{0}$ si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Démonstration :

Désignons par \vec{u}' et \vec{v}' les vecteurs unitaires associés aux vecteurs \vec{u} et \vec{v} . On a alors, rappelons-le :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}', \vec{v}')}.$$

Ceci étant, il vient :

- $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{0} \iff \widehat{(\vec{u}', \vec{v}')} = \hat{0}$
 $\iff \vec{u}' = \vec{v}'$
 $\iff \vec{u}$ et \vec{v} sont éléments de la même demi-droite vectorielle

- $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{\pi} \iff \widehat{(\vec{u}', \vec{v}')} = \hat{\pi}$
 $\iff \vec{v}' = -\vec{u}'$
 $\iff \vec{u}$ et \vec{v} sont éléments de demi-droites vectorielles opposées

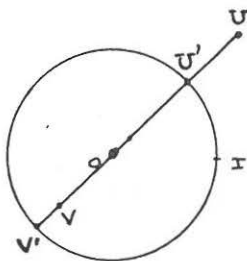
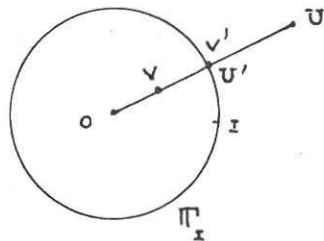
- Il s'ensuit que :
 $2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{0} \iff [\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{0} \text{ ou } \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{\pi}]$
 $\iff \vec{u}$ et \vec{v} sont colinéaires

Remarque :

Les résultats précédents montrent à l'évidence que, en termes d'angle, la notion de *double d'angle* caractérise de manière simple celle de colinéarité de deux vecteurs. Son emploi sera essentiel dans les problèmes d'alignement et de parallélisme.

Corollaire :

- Quels que soit les vecteurs non nuls \vec{u} , \vec{v} , \vec{x} :
 $2\widehat{(\vec{x}, \vec{u})} = 2\widehat{(\vec{x}, \vec{v})} \iff \vec{u}$ et \vec{v} colinéaires
 $2\widehat{(\vec{u}, \vec{x})} = 2\widehat{(\vec{v}, \vec{x})} \iff \vec{u}$ et \vec{v} colinéaires.



- Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{x}, \vec{y}$:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{x} \text{ colinéaire à } \vec{u} \\ \vec{y} \text{ colinéaire à } \vec{v} \end{array} \right\} \Rightarrow \widehat{2(\vec{x}, \vec{y})} = 2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned} \bullet \widehat{2(\vec{x}, \vec{u})} = \widehat{2(\vec{x}, \vec{v})} &\iff \widehat{2(\vec{x}, \vec{v})} - \widehat{2(\vec{x}, \vec{u})} = \widehat{0} \\ &\iff \widehat{2(\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{0} \\ &\iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \left. \begin{array}{l} \vec{x} \text{ colinéaire à } \vec{u} \\ \vec{y} \text{ colinéaire à } \vec{v} \end{array} \right\} &\Rightarrow \widehat{2(\vec{x}, \vec{u})} = \widehat{2(\vec{y}, \vec{v})} = \widehat{0} \\ &\Rightarrow \widehat{2(\vec{x}, \vec{u})} + \widehat{2(\vec{u}, \vec{y})} = \widehat{2(\vec{u}, \vec{y})} + \widehat{2(\vec{y}, \vec{v})} \\ &\Rightarrow \widehat{2(\vec{x}, \vec{y})} = \widehat{2(\vec{u}, \vec{v})} \end{aligned}$$

Commentaire :

Les résultats précédents sont souvent utilisés dans les problèmes de géométrie où interviennent les angles. Ainsi :

- 1) Pour établir que deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires, on peut choisir un "vecteur auxiliaire \vec{x} " et montrer que l'on a, par exemple :

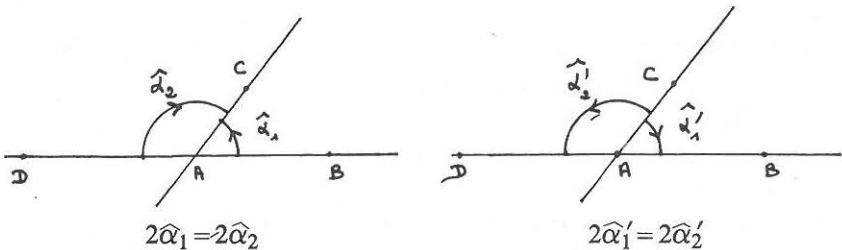
$$\widehat{2(\vec{x}, \vec{u})} = \widehat{2(\vec{x}, \vec{v})} .$$

- 2) Lorsqu'on manipule des doubles d'angles, on peut remplacer n'importe quel vecteur qui entre dans leur libellé par un vecteur non nul qui lui est colinéaire. Cette façon de procéder est, on le verra par la suite, d'une importance capitale...

b) Configuration des "angles à doubles égaux"

Première configuration :

Nous avons :



En effet :

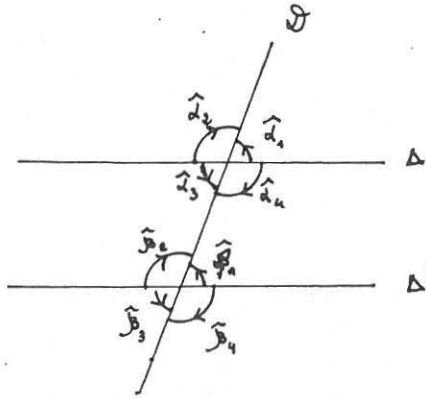
$$2\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = 2\widehat{(\vec{AD}, \vec{AC})} \quad \text{et} \quad 2\widehat{(\vec{AC}, \vec{AB})} = 2\widehat{(\vec{AC}, \vec{AD})}$$

car les vecteurs \vec{AB} et \vec{AD} sont colinéaires.

On peut, pour rendre compte de cette situation, dire de façon imagi-
née que deux angles ont des *doubles égaux* lorsqu'ils "se font face" ou
lorsqu'ils "se tournent le dos".

Deuxième configuration :

- Si les droites Δ et Δ' sont parallèles, alors tous les $\widehat{\alpha}_i$ et les $\widehat{\beta}_j$ ont des doubles égaux.



- Si l'un des $\widehat{\alpha}_i$ et l'un des $\widehat{\beta}_j$ ont des doubles égaux alors les droites Δ et Δ' sont parallèles.

3. Angles et orthogonalité

a) Résultat essentiel

Théorème :

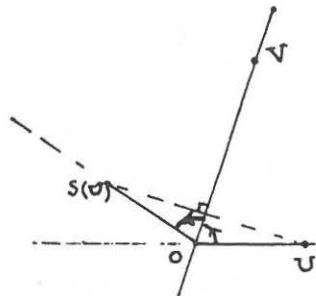
Quels que soient les vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} : \vec{u} et \vec{v} sont
orthogonaux si et seulement si $2(\widehat{u, v}) = \pi$.

Démonstration :

Soit U et V les points de P définis par
 $\overrightarrow{OU} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OV} = \vec{v}$.

Désignons par S la réflexion d'axe
(OV). Nous avons alors :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{OU}, \overrightarrow{OV}) &= -(\overrightarrow{OS(U)}, \overrightarrow{OV}) \dots \text{effet de S} \\ &= (\overrightarrow{OV}, \overrightarrow{OS(U)}) \end{aligned}$$



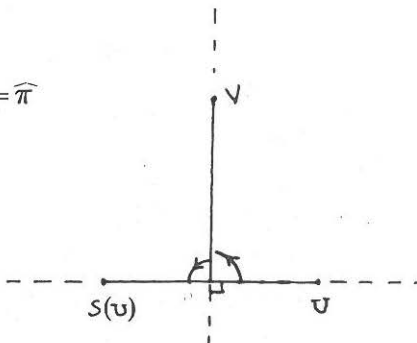
Ceci étant, il vient :

\vec{OU} et \vec{OV} orthogonaux

$$\Leftrightarrow \widehat{(\vec{OU}, \text{OS}(\vec{U}))} = \widehat{\pi}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{(\vec{OU}, \vec{OV})} + \widehat{(\vec{OV}, \text{OS}(\vec{U}))} = \widehat{\pi}$$

$$\Leftrightarrow 2\widehat{(\vec{OU}, \vec{OV})} = \widehat{\pi}$$



Nota : On voit que c'est encore la notion de double d'angle qui intervient pour caractériser l'orthogonalité de deux vecteurs.

b) Caractérisation d'un triangle rectangle

Exercice résolu

Soit un triangle (ABC). Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

— le triangle (ABC) est rectangle en A

$$— 2\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \widehat{\pi}$$

$$— \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} + \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})}$$

$$— 2\widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} + 2\widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} = \widehat{\pi}.$$

Solution

• Le triangle (ABC) est rectangle en A $\Leftrightarrow \vec{AB} \perp \vec{AC}$

$$\Leftrightarrow 2\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \widehat{\pi}$$

$$\bullet 2\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \widehat{\pi} \Leftrightarrow 2\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} + \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} + \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} + \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})}$$

$$\bullet 2\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \widehat{\pi} \Leftrightarrow \widehat{\pi} + 2\widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} + 2\widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} = \widehat{0}$$

$$\Leftrightarrow 2\widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} + 2\widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} = -\widehat{\pi} = \widehat{\pi}$$

Nota : Il peut être utile de retenir qu'un triangle est rectangle si et seulement si la somme des doubles de deux de "ses angles" est égale à l'angle plat.

4. Angles et bissectrices

a) Caractérisation de la bissectrice de deux demi-droites de même origine

Théorème :

Soit D la bissectrice de deux demi-droites $[\Omega A)$ et $[\Omega B)$, M un point quelconque du plan P .

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

— M est un point de D autre que Ω (1)

— $\widehat{(\Omega A, \vec{\Omega M})} = \widehat{(\vec{\Omega M}, \Omega B)}$ (2)

— $2\widehat{(\Omega A, \vec{\Omega M})} = \widehat{(\Omega A, \Omega B)}$ (3)

— Quels que soient les points distincts P et Q :

$2\widehat{(\vec{PQ}, \vec{\Omega M})} = \widehat{(\vec{PQ}, \Omega A)} + \widehat{(\vec{PQ}, \Omega B)}$ (4) utilisation d'un vecteur

— Il existe deux points distincts P et Q : auxiliaire \vec{PQ}

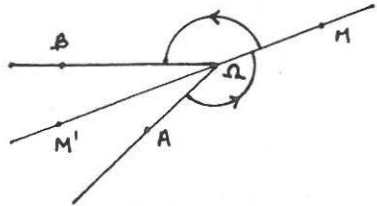
$2\widehat{(\vec{PQ}, \vec{\Omega M})} = \widehat{(\vec{PQ}, \Omega A)} + \widehat{(\vec{PQ}, \Omega B)}$ (5)

Démonstration :

Première partie :

• Supposons M élément de $D \setminus \{\Omega\}$
Alors, en désignant par s la symétrie orthogonale de droite D , on a :

$$\begin{aligned} \widehat{(\Omega A, \vec{\Omega M})} &= -\widehat{(\Omega s(A), \vec{\Omega M})} \dots \text{effet de } s \\ &= \widehat{(\vec{\Omega M}, \Omega s(A))} \\ &= \widehat{(\vec{\Omega M}, \Omega B)} \dots \text{car } s(A) \in [\Omega B) \end{aligned}$$



• Réciproquement, supposons que :

$$\widehat{(\Omega A, \vec{\Omega M})} = \widehat{(\vec{\Omega M}, \Omega B)}$$

Alors en désignant par M' un point de D autre que Ω , on a :

$$\begin{aligned} 2\widehat{(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M}')} &= \widehat{(\vec{\Omega M}, \Omega A)} + \widehat{(\Omega A, \vec{\Omega M}')} + \widehat{(\vec{\Omega M}, \Omega B)} + \widehat{(\Omega B, \vec{\Omega M}')} \\ &= [(\vec{\Omega M}, \Omega B) + \widehat{(\vec{\Omega M}, \Omega A)}] + [(\Omega A, \vec{\Omega M}') - (\vec{\Omega M}', \Omega B)] \\ &= \vec{0} + \vec{0} \end{aligned}$$

On en déduit : $\vec{\Omega M}$ et $\vec{\Omega M}'$ sont colinéaires

puis : $M \in D \setminus \{\Omega\}$

Ainsi, nous venons d'établir que :

$M \in D \setminus \{\Omega\} \iff \widehat{(\Omega A, \vec{\Omega M})} = \widehat{(\vec{\Omega M}, \Omega B)}$. Autrement dit : (1) \iff (2).

Deuxième partie :

• Nous avons : (2) \Rightarrow (3). En effet,

$$\begin{aligned} \widehat{(\Omega A, \vec{\Omega M})} = \widehat{(\vec{\Omega M}, \Omega B)} &\Rightarrow 2\widehat{(\Omega A, \vec{\Omega M})} = \widehat{(\Omega A, \vec{\Omega M})} + \widehat{(\vec{\Omega M}, \Omega B)} \\ &= \widehat{(\Omega A, \Omega B)} \end{aligned}$$

- Nous avons : (3) \Rightarrow (4). En effet, supposons que l'on ait :

$$2(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M}) = (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) .$$

Alors, quels que soient les points distincts P et Q :

$$\begin{aligned} 2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega M}) &= 2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega A}) + 2(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M}) \\ &= (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega A}) + [(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})] \\ &= (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega B}) \end{aligned}$$

- Il est manifeste que : (4) \Rightarrow (5).

- Nous avons enfin : (5) \Rightarrow (2). En effet, supposons qu'il existe deux points distincts P et Q tels que :

$$2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega M}) = (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega B})$$

Alors :

$$2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega M}) = [(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega M}) + (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A})] + [(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega M}) + (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega B})]$$

On en déduit immédiatement :

$$(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega B}) = \vec{0}$$

et donc :

$$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M}) = (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega B})$$

ce qui achève la démonstration.

b) Caractérisation des bissectrices de deux droites sécantes

Théorème :

Soit D et D' les bissectrices de deux droites (ΩA) et (ΩB) , M un point quelconque du plan P .

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :

— M est un point de $D \cup D'$ autre que Ω

$$- 2(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M}) = 2(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega B})$$

$$- 4(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M}) = 2(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$$

— Quels que soient les points distincts P et Q :

$$4(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega M}) = 2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega A}) + 2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega B})$$

— Il existe deux points distincts P et Q :

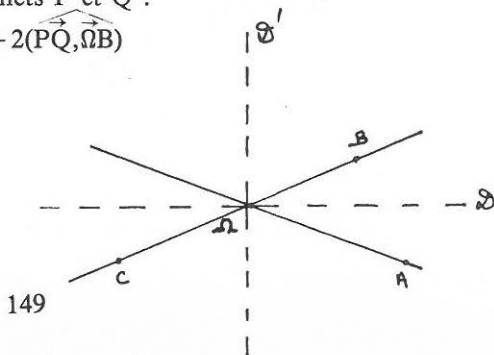
$$4(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega M}) = 2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega A}) + 2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{\Omega B})$$

utilisation d'un vecteur auxiliaire

Démonstration

Soit C un point de $(\Omega B) \setminus [\Omega B)$.

Nous avons, pour tout point M de P :



$$\begin{aligned}
M \in (\mathbf{DUD}') \setminus \{\Omega\} &\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ soit } (\Omega M) \text{ est la bissectrice de } [\Omega A] \text{ et } [\Omega B] \\ \bullet \text{ soit } (\Omega M) \text{ est bissectrice de } [\Omega A] \text{ et } [\Omega C] \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ soit } \widehat{(\Omega A, \Omega M)} = \widehat{(\Omega M, \Omega B)} \\ \bullet \text{ soit } \widehat{(\Omega A, \Omega M)} = \widehat{(\Omega M, \Omega C)} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ soit } \widehat{(\Omega A, \Omega M)} = \widehat{(\Omega M, \Omega B)} \\ \bullet \text{ soit } \widehat{(\Omega A, \Omega M)} = \widehat{(\Omega M, \Omega B)} + \widehat{\pi} \end{cases} \\
&\Leftrightarrow 2\widehat{(\Omega A, \Omega M)} = 2\widehat{(\Omega M, \Omega B)}
\end{aligned}$$

La suite de la démonstration est laissée aux bons soins du lecteur.

II. Angles et cercles

1. Caractérisation d'un cercle dont on connaît le centre et deux points.

Théorème :

Soit, dans le plan \mathbf{P} , un cercle \mathcal{C} de centre O et deux points distincts A et B de ce cercle.

Alors, pour tout point M de \mathbf{P} :

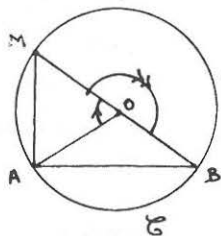
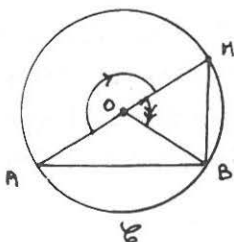
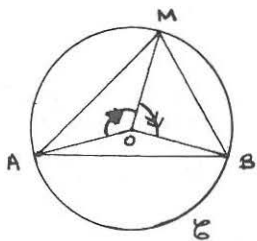
$$M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\} \Leftrightarrow 2(\vec{MA}, \vec{MB}) = (\vec{OA}, \vec{OB}) .$$

Démonstration :

1^{re} partie : Etude directe

Supposons M élément de $\mathcal{C} \setminus \{A, B\}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
(\vec{OA}, \vec{OB}) &= (\vec{OA}, \vec{OM}) + (\vec{OM}, \vec{OB}) \\
&= [\pi - 2(\vec{MO}, \vec{MA})] + [\pi - 2(\vec{MB}, \vec{MO})] (*) \\
&= 2(\vec{MA}, \vec{MO}) + 2(\vec{MO}, \vec{MB}) \\
&= 2(\vec{MA}, \vec{MB})
\end{aligned}$$

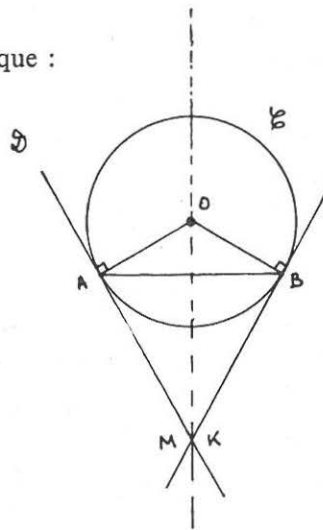


(*) Cette égalité est obtenue, dans le cas général, en utilisant le fait que les triangles OAM et OMB sont isocèles en O . Elle reste encore vraie dans les deux cas particuliers illustrés ci-dessus.

2^e partie : Etude réciproque

Soit M un point de $P \setminus \{A, B\}$ tel que :

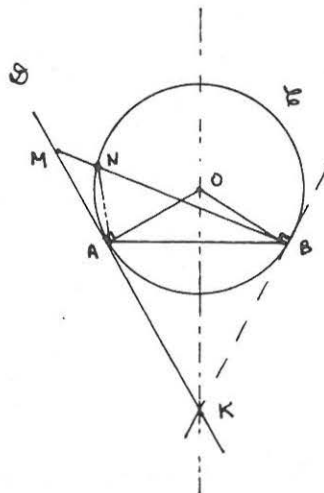
$$2(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = (\widehat{OA}, \widehat{OB}) .$$



1° - M ne peut être un point de (AB) sinon, on aurait :

$$(\widehat{OA}, \widehat{OB}) = 2(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = \widehat{0}$$

ce qui est manifestement faux.



2° - M ne peut être un point de la tangente \mathcal{D} à \mathcal{C} en A . En effet :

• pour $M=K$ (voir figure ci-dessus), on aurait :

$$2(\widehat{OA}, \widehat{OM}) + 2(\widehat{MO}, \widehat{MA}) = \widehat{\pi}$$

car le triangle OAM est rectangle en A , puis :

$$\widehat{(OA, OB)} + \widehat{(MB, MA)} = \widehat{\pi}$$

car A et B sont symétriques par rapport à (OM) et, compte tenu de l'hypothèse, on obtiendrait : $\widehat{(MA, MB)} = \widehat{\pi}$... ce qui est faux car M n'est pas un point de]A, B[.

• pour $M \in \mathcal{D} \setminus \{A, K\}$, la droite (MB) couperait C en un point N autre que A et B. On aurait, dans ce cas :

$$2\widehat{(MA, MB)} = \widehat{(OA, OB)} (*) = 2\widehat{(NA, NB)} \dots (*) \text{ voir étude directe}$$

puis : $2\widehat{(MA, MB)} = 2\widehat{(NA, MB)}$... car \overrightarrow{MB} et \overrightarrow{NB} sont colinéaires.

Par suite, \overrightarrow{MA} et \overrightarrow{NA} seraient colinéaires ce qui est manifestement faux car D et C n'ont pas de point commun en dehors du point A.

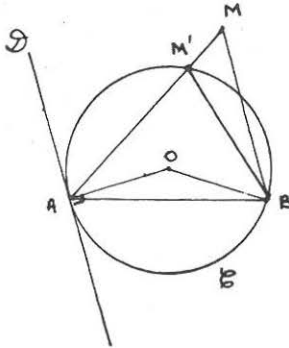
3° - On est maintenant assuré que la droite (MA) coupe C en un point M' autre que A et B. On a alors :

$$2\widehat{(MA, MB)} = \widehat{(OA, OB)} = 2\widehat{(M'A, M'B)} .$$

On en déduit : $2\widehat{(MA, MB)} = 2\widehat{(MA, M'B)}$ car les vecteurs \overrightarrow{MA} et $\overrightarrow{M'A}$ sont colinéaires.

Cette dernière égalité prouve que les vecteurs \overrightarrow{MB} et $\overrightarrow{M'B}$ sont aussi colinéaires et donc que les points M et M' sont confondus. Autrement dit, on a :

$$M \in C \setminus \{A, B\} \dots \quad (\text{c.q.f.d.})$$



2. Caractérisation d'un cercle dont on connaît trois points

Théorème :

Soit, dans le plan P, un triangle ABC et \mathcal{C} le cercle circonscrit à ce triangle.

Alors pour tout point M de P :

$$M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\} \iff 2\widehat{(MA, MB)} = 2\widehat{(CA, CB)}$$

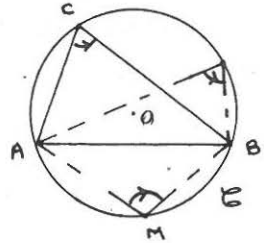
Démonstration :

Désignons par O le centre du cercle C .
Nous avons alors :

$$\widehat{(OA,OB)} = 2\widehat{(CA,CB)} .$$

Par suite :

$$\begin{aligned} M \in C \setminus \{A,B\} &\Leftrightarrow 2\widehat{(MA,MB)} = \widehat{(OA,OB)} \\ &\Leftrightarrow 2\widehat{(MA,MB)} = 2\widehat{(CA,CB)} \\ &\text{(c.q.f.d.)} \end{aligned}$$



3. Angles et cocyclicité

Théorème :

Soit A,B,C,D quatre points du plan P ; A, B et C étant non alignés.
Alors :

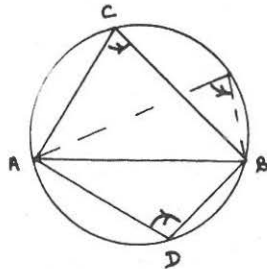
$$A,B,C,D \text{ cocycliques} \Leftrightarrow \widehat{(CA,CB)} = \widehat{(DA,DB)}$$

Démonstration :

Désignons par C' le cercle circonscrit au triangle ABC. Nous avons alors :

A,B,C,D cocycliques

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow D \in C' \setminus \{A,B\} \\ &\Leftrightarrow \widehat{(CA,CB)} = \widehat{(DA,DB)} \end{aligned}$$



4. Caractérisation de la tangente en un point à un cercle dont on connaît le centre et un autre point

Théorème :

Soit, dans le plan P, un cercle C' de centre O ; deux points A et B de ce cercle et J) sa tangente au point A.

Alors, pour tout point T de P :

$$T \in J) \setminus \{A\} \Leftrightarrow \widehat{(AT,AB)} = \widehat{(OA,OB)}$$

Démonstration :

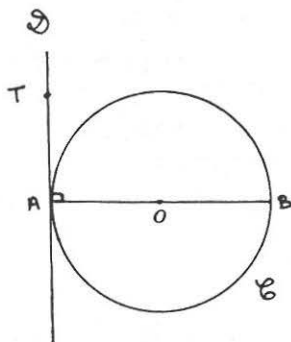
1^{re} partie : Etude directe

Nous allons distinguer deux cas :

1° - A et B sont diamétralement opposés.
Dans ce cas :

$$T \in \mathcal{D} \setminus \{A\} \Leftrightarrow \overrightarrow{AT} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow 2(\widehat{AT, AB}) = \widehat{\pi} = (\widehat{OA, OB})$$



2° - A et B ne sont pas diamétralement opposés. Dans ce cas, désignons par H le projeté orthogonal de O sur (AB). On a d'une part :

$2(\widehat{OA, OH}) + 2(\widehat{AH, AO}) = \widehat{\pi}$... car le triangle OAH est rectangle en H, ou encore, du fait que AH et AB sont colinéaires,

$$2(\widehat{OA, OH}) + 2(\widehat{AB, AO}) = \widehat{\pi} \dots (i)$$

Si $T \in \mathcal{D} \setminus \{A\}$ alors on a, d'autre part :

$$2[(\widehat{AT, AB}) + (\widehat{AB, AO})] = 2(\widehat{AT, AO}) = \widehat{\pi}$$

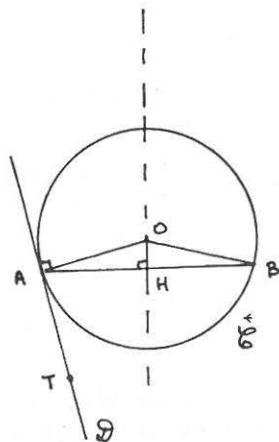
ou encore :

$$2(\widehat{AT, AB}) + 2(\widehat{AB, AO}) = \widehat{\pi} \dots (ii)$$

Des égalités (i) et (ii) on déduit :

$$2(\widehat{AT, AB}) = 2(\widehat{OA, OH}) (*) = (\widehat{OA, OB}) \dots$$

(*) car (OH) est bissectrice de [OA] et [OB]



Ainsi se trouve établie la proposition

$$\text{“Pour tout point T de } \mathcal{P}, M \in \mathcal{D} \setminus \{A\} \Rightarrow 2(\widehat{AT, AB}) = (\widehat{OA, OB})$$

2^e partie : Etude réciproque

Soit T un point de $\mathbf{P} \setminus \{A\}$ tel que : $2(\widehat{AT, AB}) = (\widehat{OA, OB})$

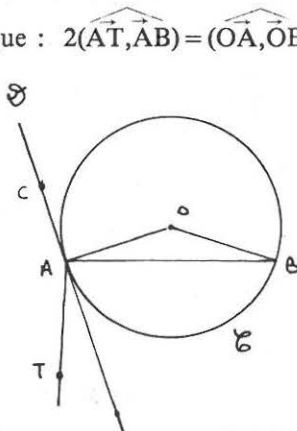
Désignons par C un point de \mathcal{D} autre que A. Nous avons alors :

$2(\widehat{AC, AB}) = (\widehat{OA, OB}) = 2(\widehat{AT, AB})$
(voir proposition ci-dessus).

L'égalité $2(\widehat{AC, AB}) = 2(\widehat{AT, AB})$ prouve que les vecteurs \vec{AC} et \vec{AT} sont colinéaires. Les points A, C et T sont donc alignés. Autrement dit :

$$T \in \mathcal{D} \setminus \{A\}$$

ce qui achève la démonstration.



5. Caractérisation de la tangente en un point à un cercle dont on connaît deux autres points

Théorème :

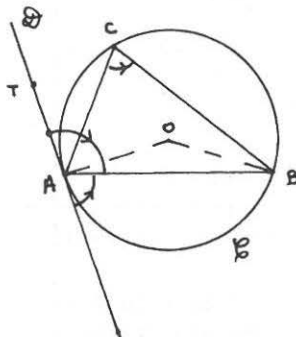
Soit, dans le plan \mathbf{P} , un triangle ABC ; \mathcal{C} son cercle circonscrit et \mathcal{D} la tangente en A à \mathcal{C} .
Alors, pour tout point T de \mathbf{P} ,

$$T \in \mathcal{D} \setminus \{A\} \iff 2(\widehat{AT, AB}) = 2(\widehat{CA, CB})$$

Démonstration :

Désignons par O le centre du cercle \mathcal{C} . Nous avons alors :

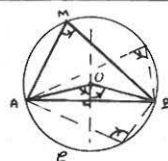
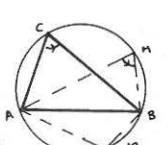
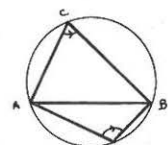
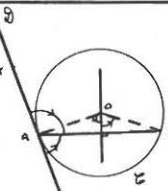
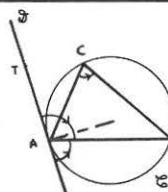
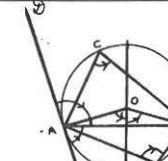
$$(\widehat{OA, OB}) = 2(\widehat{CA, CB}) .$$



Par suite :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} \setminus \{A\} &\iff 2(\widehat{AT, AB}) = (\widehat{OA, OB}) \\ &\iff 2(\widehat{AT, AB}) = 2(\widehat{CA, CB}) \dots \text{(c.q.f.d.)} \end{aligned}$$

6. Tableau des principaux résultats

<p><i>Les données :</i> Les points O, A, B ; le cercle \mathcal{C} .</p> <p><i>Le résultat :</i> $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\} \Leftrightarrow 2(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = (\widehat{OA}, \widehat{OB})$</p>	
<p><i>Les données :</i> Les points A, B, C ; le cercle \mathcal{C} .</p> <p><i>Le résultat :</i> $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\} \Leftrightarrow 2(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = 2(\widehat{CA}, \widehat{CB})$</p>	
<p><i>Les données :</i> Le quadrilatère A, B, C, D.</p> <p><i>Le résultat :</i> A, B, C, D cocycliques $\Leftrightarrow 2(\widehat{CA}, \widehat{CB}) = 2(\widehat{DA}, \widehat{DB})$</p>	
<p><i>Les données :</i> Les points O, A, B ; le cercle \mathcal{C} , la tangente \mathcal{D} en A à \mathcal{C} .</p> <p><i>Le résultat :</i> $T \in \mathcal{D} \setminus \{A\} \Leftrightarrow 2(\widehat{AT}, \widehat{AB}) = (\widehat{OA}, \widehat{OB})$</p>	
<p><i>Les données :</i> Les points A, B, C ; le cercle \mathcal{C} , la tangente \mathcal{D} en A à \mathcal{C} .</p> <p><i>Le résultat :</i> $T \in \mathcal{D} \setminus \{A\} \Leftrightarrow 2(\widehat{AT}, \widehat{AB}) = 2(\widehat{CA}, \widehat{CB})$</p>	
<p><i>Configuration des "angles à doubles égaux"</i></p> <p>Tous les angles représentés dans la figure ci-contre ont des doubles égaux.</p>	

III. Problèmes résolus

Problème 1

Montrer que les symétriques de l'orthocentre d'un triangle par rapport à chacun de ses trois côtés appartiennent au cercle circonscrit à ce triangle.

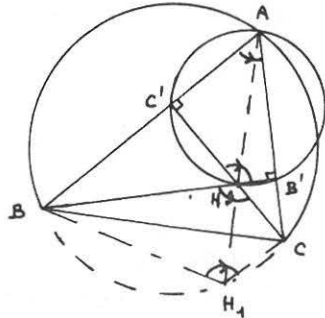
Résolution :

Soit un triangle (ABC) , H son orthocentre. A priori, aucun côté de ce triangle ne jouant un rôle particulier, il suffit d'établir que le symétrique H_1 de H par rapport à (BC) appartient au cercle circonscrit au triangle (ABC) .

1. Cas général : le triangle (ABC) est non rectangle

Dans ce cas, désignons par B' et C' les projetés orthogonaux de B et C sur (CA) et (AB) respectivement.

Il est clair que B' et C' appartiennent au cercle de diamètre $[A, H]$.



Nous avons alors :

$$\begin{aligned}
 2\overrightarrow{\widehat{H_1B, H_1C}} &= -2\overrightarrow{\widehat{HB, HC}} \dots && \text{effet de } s_{(BC)} \\
 &= 2\overrightarrow{\widehat{HC, HB}} \\
 &= 2\overrightarrow{\widehat{HC', HB'}} \dots && \text{colinéarité de } \overrightarrow{\widehat{HC}} \text{ et } \overrightarrow{\widehat{HC'}} \\
 & && \text{et } \overrightarrow{\widehat{HB}} \text{ et } \overrightarrow{\widehat{HB'}} \\
 &= 2\overrightarrow{\widehat{AC', AB'}} \dots && \text{cocyclicité de } A, H, C', B' \\
 &= 2\overrightarrow{\widehat{AB, AC}} \dots && \text{colinéarité de } \overrightarrow{\widehat{AC'}} \text{ et } \overrightarrow{\widehat{AE}} \\
 & && \text{et } \overrightarrow{\widehat{AB'}} \text{ et } \overrightarrow{\widehat{AC}}
 \end{aligned}$$

On en déduit : A, H_1, B et C sont cocycliques. Autrement dit, H_1 appartient au cercle circonscrit au triangle (ABC) .

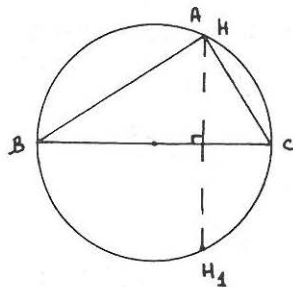
2. Cas particuliers

a) *Le triangle (ABC) est rectangle en A*

Dans ce cas, A et H sont confondus et situés sur le cercle Γ de diamètre $[B,C]$. Par suite :

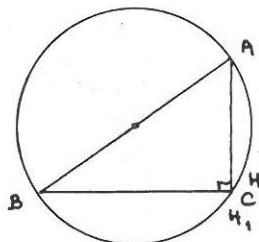
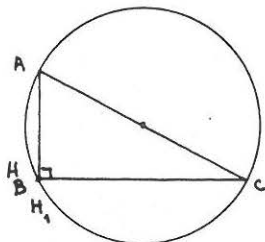
$$s_{(BC)}(H) \in \Gamma.$$

Autrement dit : H_1 appartient au cercle circonscrit au triangle (ABC).



b) *Le triangle (ABC) est rectangle en B ou en C*

Il est alors trivial que H_1 appartient au cercle circonscrit au triangle (ABC) puisque H et H_1 sont confondus avec B ou avec C.



Commentaire

L'emploi des angles dans la résolution d'un problème de géométrie plane présente souvent quelques petits inconvénients qu'il faut savoir accepter. En effet, il arrive que l'un ou l'autre des angles, qu'on fait intervenir dans cette résolution soit, lors d'une situation particulière, non défini parce qu'un des vecteurs qui entre dans son libellé est nul. C'est, par exemple, ce qui se passe dans l'exercice précédent lorsque le triangle (ABC) est rectangle en A, B ou C.

Pour être rigoureux on doit donc, en marge du cas général, traiter à part les cas particuliers dus à cette anomalie. On verra, à l'usage, que leur étude ne présente aucune difficulté.

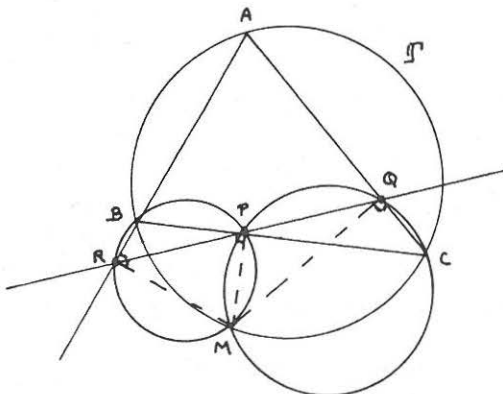
Problème 2

Soit, dans un plan P , un triangle (ABC), M étant un point quelconque du cercle Γ circonscrit à ce triangle, on désigne respectivement par P, Q, R les projetés orthogonaux de M sur (BC), (CA), (AB).

Montrer que les points P, Q, R sont alignés.

Comment chercher :

On commence par faire une figure. On trace donc un cercle Γ puis un triangle (ABC) non isocèle et non rectangle inscrit dans ce cercle. On choisit ensuite un point M sur Γ de sorte que les différents points cités dans l'énoncé soient distincts.



Etablir que P, Q, R sont alignés revient à montrer, par exemple, que les vecteurs \overrightarrow{PQ} et \overrightarrow{PR} sont colinéaires ; autrement dit, à prouver que :

$$2(\widehat{PQ, PR}) = \widehat{0}.$$

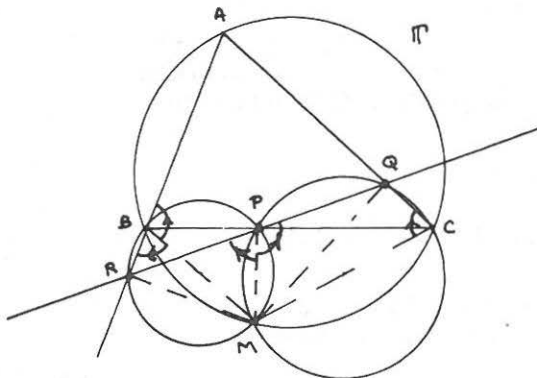
Cette dernière proposition peut encore être remplacée par :

$$2(\widehat{PM, PQ}) = 2(\widehat{PM, PR})$$

qui lui est théoriquement équivalente.

Au vu de la figure ci-dessus, il apparaît que les points

M, P, Q, C d'une part	}	sont cocycliques.
M, P, R, E d'autre part		



On a donc :

$$\bullet \widehat{2(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PQ})} = \widehat{2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CQ})} \\ = \widehat{2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA})} \dots \text{colinéarité de } \overrightarrow{CQ} \text{ et } \overrightarrow{CA}$$

$$\bullet \widehat{2(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PR})} = \widehat{2(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BR})} \\ = \widehat{2(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA})} \dots \text{colinéarité de } \overrightarrow{BR} \text{ et } \overrightarrow{BA}$$

$$\bullet \widehat{2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA})} = \widehat{2(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA})} \dots \text{cocyclicité de } C, B, A, M.$$

On en déduit alors :

$$\widehat{2(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PQ})} = \widehat{2(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PR})} \quad (\text{c.q.f.d.})$$

Reste encore à remarquer que tous les angles (ou plus précisément ces doubles d'angle) sont définis dès lors que le point M est distinct de B, C et A' ... A' étant le point de Γ diamétralement opposé à A.

On est maintenant en mesure de rédiger une solution.

Résolution (on trace la figure ci-dessus)

Désignons par A' le point de Γ diamétralement opposé à A.

1° - Cas général : $M \in \Gamma \setminus \{B, C, A'\}$

Nous avons, dans ce cas :

$$\bullet \widehat{2(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PQ})} = \widehat{2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CQ})} \dots \text{cocyclicité de } M, P, Q, C \\ = \widehat{2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA})} \dots \text{colinéarité de } \overrightarrow{CQ} \text{ et } \overrightarrow{CA}$$

$$\bullet \widehat{2(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PR})} = \widehat{2(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BR})} \dots \text{cocyclicité de } M, P, R, B \\ = \widehat{2(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA})} \dots \text{colinéarité de } \overrightarrow{BR} \text{ et } \overrightarrow{BA}$$

$$\bullet \widehat{2(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CA})} = \widehat{2(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA})} \dots \text{cocyclicité de } C, B, A, M.$$

On en déduit alors :

$$\widehat{2(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PQ})} = \widehat{2(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PR})}$$

puis :

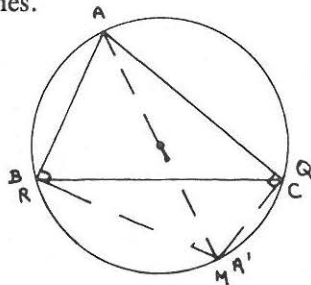
\overrightarrow{PQ} et \overrightarrow{PR} sont colinéaires.

Autrement dit : les points P, Q, R sont alignés.

2° - Cas particuliers

a) $M=B$. Dans ce cas, on a : $P=R$. Les points P, Q, R sont donc alignés.

b) $M=C$. Dans ce cas, on a : $P=Q$. Les points P, Q, R sont donc encore alignés.

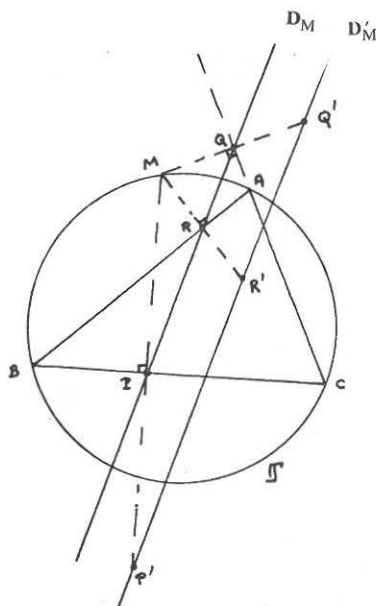


c) $M=A'$. Dans ce cas, on a : $Q=C$ et $R=B$ et $P \in (BC)$. Les points P, Q, R sont donc toujours alignés.

Nota : La droite D_M déterminée par deux des trois points P, Q, R est appelée droite de Simson du triangle (ABC) relative au point M .

Remarque :

Désignons par P', Q', R' les symétriques de M par rapport à (BC) , (CA) , (AB) .



Les points P', Q', R' sont respectivement les images des points P, Q, R par l'homothétie de centre M et de rapport 2. Par suite, lorsque M appartient au cercle Γ :

$$\left. \begin{array}{l} P, Q, R \quad \text{d'une part} \\ P', Q', R' \quad \text{d'autre part} \end{array} \right\} \text{ sont alignés}$$

La droite D'_M déterminée par deux des trois points P', Q', R' est appelée droite de Steiner du triangle (A, B, C) relative au point M . On a évidemment :

$$D_M // D'_M .$$

Problème 3

Soit un cercle \mathcal{C} , $[A,B]$ un diamètre de ce cercle ; \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites parallèles coupant la droite (AB) en A et B respectivement et M un point de $\mathcal{D} \setminus \{A,B\}$.

On désigne par I, J, K les projetés orthogonaux de M sur les droites (AB) , \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 .

Montrer que le triangle IJK est rectangle en I .

Solution :

Notons d'abord que :

- a) les points M, J, K sont alignés ;
- b) les points M, I, A, J appartiennent au cercle \mathcal{C}_1 de diamètre $[A,M]$;
- c) les points M, I, B, K appartiennent au cercle \mathcal{C}_2 de diamètre $[B,M]$.

Ceci étant :

1° - Lorsque $M \notin \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$, nous avons : figures 1 et 2

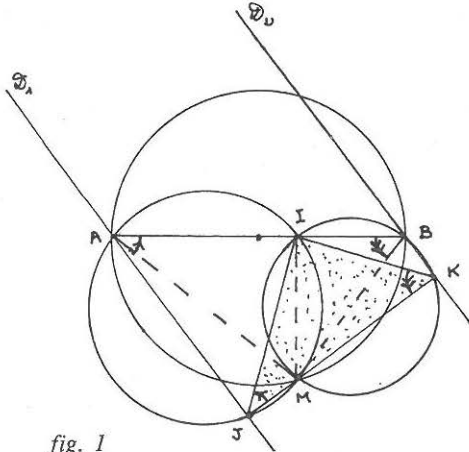


fig. 1

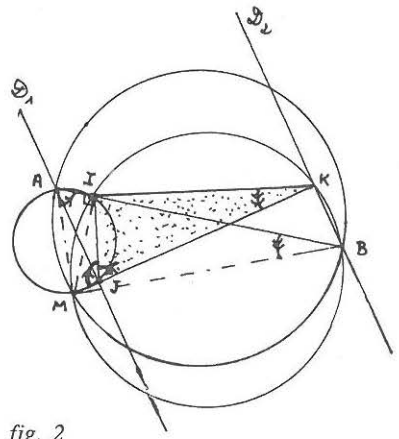


fig. 2

$$\begin{aligned}
 \bullet \widehat{(\vec{JK}, \vec{JI})} &= \widehat{(\vec{JM}, \vec{JI})} \quad \dots \text{voir (a)} \\
 &= \widehat{(\vec{AM}, \vec{AI})} \quad \dots \text{voir (b)} \\
 &= \widehat{(\vec{AM}, \vec{AB})} \quad \dots \text{car } \vec{AB} \text{ est, colinéaire à } \vec{AI} \\
 \bullet \widehat{(\vec{KI}, \vec{KJ})} &= \widehat{(\vec{KI}, \vec{KM})} \quad \dots \quad \text{voir (a)} \\
 &= \widehat{(\vec{BI}, \vec{BM})} \quad \dots \text{voir (c)} \\
 &= \widehat{(\vec{BA}, \vec{BM})} \quad \dots \text{car } \vec{BA} \text{ est colinéaire à } \vec{BI}
 \end{aligned}$$

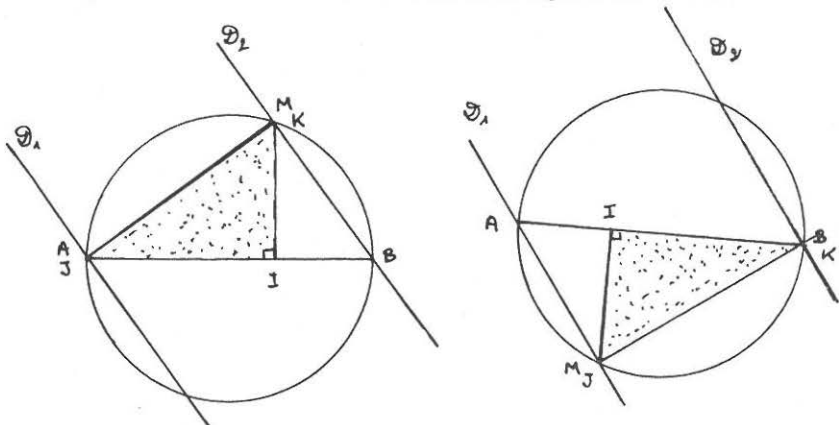
On en déduit :

$$\widehat{(\vec{JK}, \vec{JI})} + \widehat{(\vec{KI}, \vec{KJ})} = \widehat{(\vec{AM}, \vec{AB})} + \widehat{(\vec{BA}, \vec{BM})} \quad (*) = \widehat{\pi}$$

(*) car le triangle AMB est rectangle en M .

L'égalité $2(\widehat{JK,JI}) + 2(\widehat{KI,KM}) = \widehat{\pi}$ nous prouve alors que le triangle IJK est rectangle en I.

2° - Lorsque $M \in \mathcal{D}_1$ ou $M \in \mathcal{D}_2$, le triangle IJK est trivialement rectangle en I comme le montrent les deux figures suivantes.



Problème 4

Soit un triangle ABC non rectangle, H son orthocentre, A_1, B_1, C_1 les pieds des hauteurs issues des sommets A, B et C. Montrer que les droites (A_1H) , (B_1H) , (C_1H) sont des bissectrices du triangle $A_1B_1C_1$.

Solution :

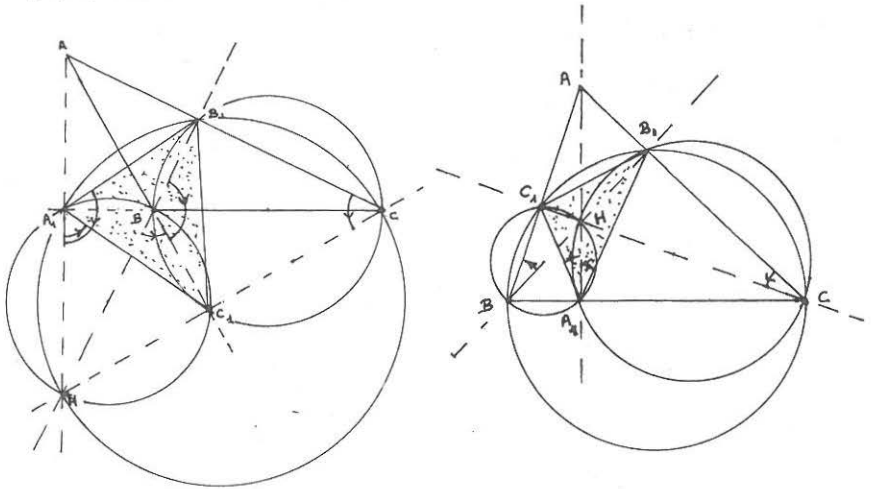
Nous avons :

$$\begin{aligned}
 2(\widehat{A_1B_1, A_1H}) &= 2(\widehat{CB_1, CH}) \quad \dots \text{ car } A_1, C, B_1, H \text{ sont cocycliques} \\
 &= 2(\widehat{CB_1, CC_1}) \quad \dots \text{ car } \overline{CC_1} \text{ est colinéaire à } \overline{CH} \\
 &= 2(\widehat{BB_1, BC_1}) \quad \dots \text{ car } C, B, B_1, C_1 \text{ sont cocycliques} \\
 &= 2(\widehat{BH, BC_1}) \quad \dots \text{ car } \overline{BH} \text{ est colinéaire à } \overline{BB_1} \\
 &= 2(\widehat{A_1H, A_1C_1}) \quad \dots \text{ car } B, B_1, H \text{ et } C_1 \text{ sont cocycliques}
 \end{aligned}$$

ce qui prouve que (A_1H) est une bissectrice du triangle $A_1B_1C_1$.

On établirait de façon analogue que (B_1H) et (C_1H) sont aussi des bissectrices de ce triangle.

Ainsi les trois hauteurs du triangle ABC sont *des* bissectrices du triangle $A_1B_1C_1$ (c.q.f.d.).



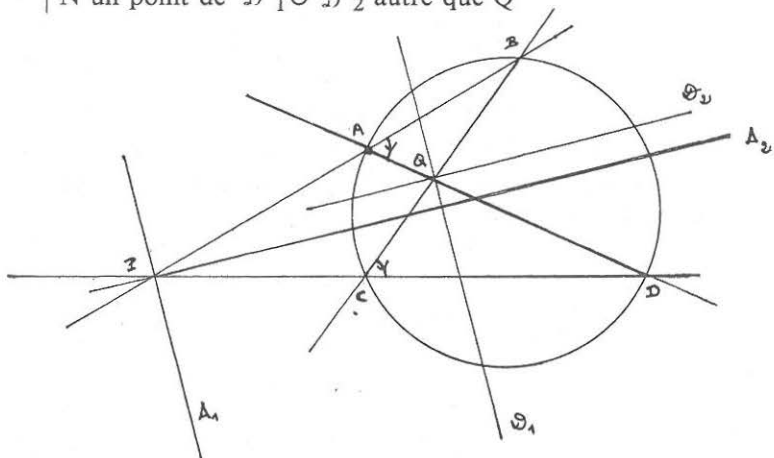
Problème 5

Soit quatre points A, B, C, D distincts, cocycliques et tels que les droites (AB) et (CD) se coupent en P ; les droites (AD) et (BC) en Q .

Montrer que les bissectrices Δ_1 et Δ_2 des droites (PA) et (PC) et celles \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 des droites (QA) et (QC) sont deux à deux parallèles ou orthogonales.

Solution :

Soit $\left\{ \begin{array}{l} M \text{ un point de } \Delta_1 \cup \Delta_2 \text{ autre que } P \\ N \text{ un point de } \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \text{ autre que } Q \end{array} \right.$



Nous avons alors :

$$\begin{aligned} 2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PA}) &= 2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QA}) + 2(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{PA}) \\ 2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PC}) &= 2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QC}) + 2(\overrightarrow{QC}, \overrightarrow{PC}) \end{aligned} \quad \text{Relation de Chasles}$$

Compte tenu de la caractérisation des bissectrices de deux droites, on obtient par addition membre à membre :

$$4(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM}) = 4(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QN}) \quad (e)$$

En effet :

$$\begin{aligned} 2(\overrightarrow{QC}, \overrightarrow{PC}) &= 2(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) \quad \dots \text{ colinéarité de } \begin{cases} \overrightarrow{QC} \text{ et } \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{PC} \text{ et } \overrightarrow{CD} \end{cases} \\ &= 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \quad \dots \text{ cocyclicité de } A, B, C, D \\ &= 2(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{QA}) \quad \dots \text{ colinéarité de } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{PA} \\ \overrightarrow{AD} \text{ et } \overrightarrow{QR} \end{cases} \\ &= -2(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{PA}) \end{aligned}$$

de sorte que : $2(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{PA}) + 2(\overrightarrow{QC}, \overrightarrow{PC}) = \hat{0}$.

De l'égalité (e) on déduit immédiatement :

$$4(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{QN}) = \hat{0}$$

puis :

$$\bullet 2(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{QN}) = \hat{0} \quad \dots \text{ ce qui montre que } (PM) // (QN)$$

ou

$$\bullet 2(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{QN}) = \hat{\pi} \quad \dots \text{ ce qui montre que } (PM) \perp (QN)$$

Ainsi les droites Δ_1 et Δ_2 d'une part, et \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 d'autre part, sont parallèles ou orthogonales (c.q.f.d.).

Problème 6

Soit \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux cercles sécants, A et B leurs points communs ; Δ et Δ' deux droites passant par A et B respectivement et distinctes de la droite (AB).

On désigne par P et Q les points d'intersection de Δ avec \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , par P' et Q' les points d'intersection de Δ' avec \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Montrer que les droites (PP') et (QQ') sont parallèles dans les cas suivants :

- 1) les points P, Q, P', Q', A et B sont distincts (cas général) ;
- 2) l'une des droites Δ ou Δ' est tangente à l'un des cercles \mathcal{C}_1 ou \mathcal{C}_2 , par exemple Δ est tangente à \mathcal{C}_1 ;
- 3) les deux droites Δ et Δ' sont l'une tangente à \mathcal{C}_1 , l'autre tangente à \mathcal{C}_2 , par exemple Δ est tangente à \mathcal{C}_1 ;
- 4) les deux droites Δ et Δ' sont tangentes au même cercle, par exemple à \mathcal{C}_1 ;

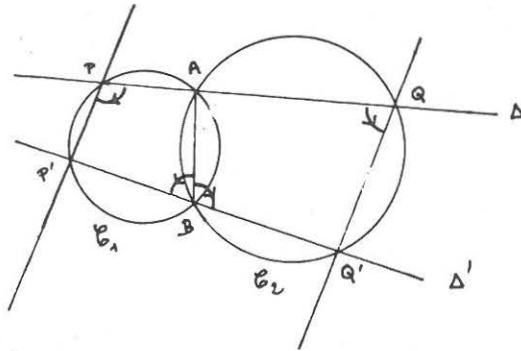
5) deux des points P et P' ou Q et Q' sont confondus, par exemple P et P'. Dans ce cas, on convient que (PP') désigne la tangente en P au cercle C₁.

Solution :

1) Nous avons dans ce cas :

$$\begin{aligned}
 2(\widehat{PQ, PP'}) &= 2(\widehat{PA, PP'}) \quad \dots \text{ car } \overrightarrow{PA} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{PQ} \\
 &= 2(\widehat{BA, BP'}) \quad \dots \text{ car } P, B, A, P' \text{ cocycliques} \\
 &= 2(\widehat{BA, BQ'}) \quad \dots \text{ car } \overrightarrow{BQ'} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{BP'} \\
 &= 2(\widehat{QA, QQ'}) \quad \dots \text{ car } B, Q, A, Q' \text{ cocycliques} \\
 &= 2(\widehat{PQ, QQ'}) \quad \dots \text{ car } \overrightarrow{PQ} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{QA}
 \end{aligned}$$

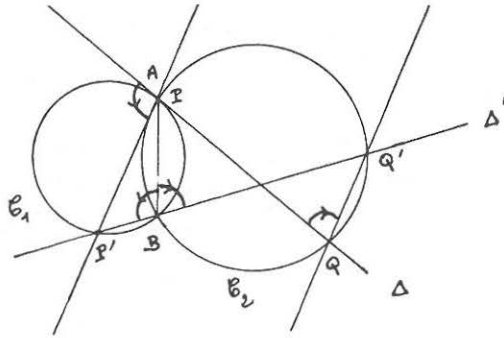
L'égalité $2(\widehat{PQ, PP'}) = 2(\widehat{PQ, QQ'})$ prouve que les vecteurs $\overrightarrow{PP'}$ et $\overrightarrow{QQ'}$ sont colinéaires et donc que les droites (PP') et (QQ') sont parallèles.



2) Nous avons dans ce cas :

$$\begin{aligned}
 2(\widehat{PQ, PP'}) &= 2(\widehat{BP, BP'}) \quad \dots \text{ car } \Delta \text{ est tangente en } P \text{ à } C_1 \\
 &= 2(\widehat{BP, BQ'}) \quad \dots \text{ car } \overrightarrow{BQ'} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{BP'} \\
 &= 2(\widehat{QP, QQ'}) \quad \dots \text{ car } B, Q, P, Q' \text{ cocycliques} \\
 &= 2(\widehat{PQ, QQ'}) \quad \dots \text{ car } \overrightarrow{PQ} \text{ colinéaire à } \overrightarrow{QP}
 \end{aligned}$$

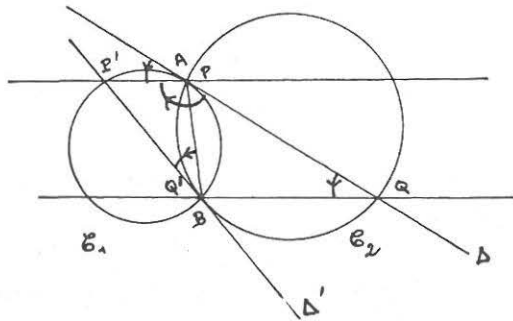
Nous obtenons la même égalité que dans le cas précédent, ce qui nous conduit à la même conclusion.



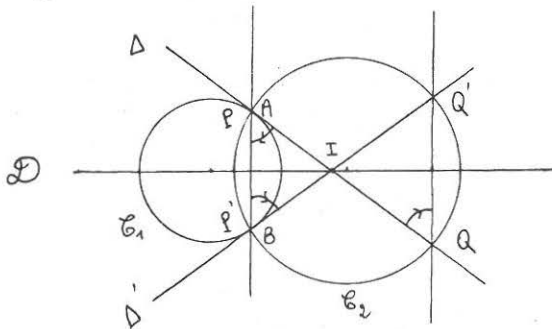
3) Nous avons dans ce cas :

$$\begin{aligned}
 2(\widehat{PQ, PP'}) &= 2(\widehat{BP, BP'}) \quad \dots \text{ car } \Delta \text{ est tangente en } P \text{ à } C_1 \\
 &= 2(\widehat{QP, QQ'}) \quad \dots \text{ car } \Delta \text{ est tangente en } Q' \text{ à } C_2 \\
 &= 2(\widehat{PQ, QQ'}) \quad \dots \text{ car } \overline{PQ} \text{ est colinéaires à } \overline{QP}
 \end{aligned}$$

ce qui montre que les droites (PP') et (QQ') sont parallèles.



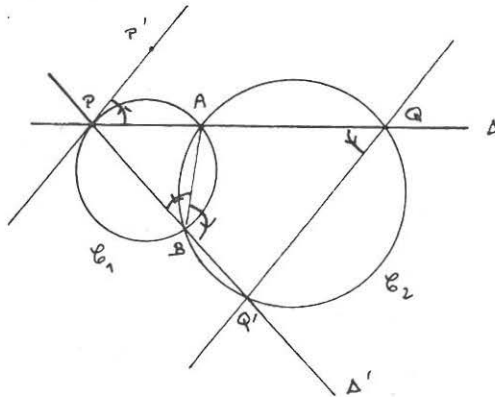
4) Dans ce cas, la médiatrice \mathcal{D} de $[A, B]$ est axe de symétrie de la figure. Les points P et P' d'une part, Q et Q' d'autre part, sont homologues dans la réflexion $S_{\mathcal{D}}$. Il s'ensuit que les droites (PP') et (QQ') sont parallèles.



5) a) Lorsque Δ' est sécante à C_2 , nous avons, en désignant par P' un point autre que P de la tangente en P à C_1 .

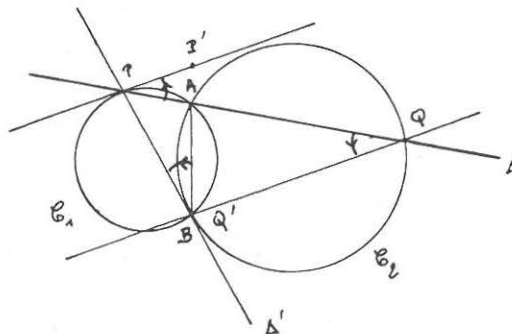
$$\begin{aligned}
 2(\widehat{PQ}, \widehat{PP'}) &= 2(\widehat{PA}, \widehat{PP'}) \\
 &= 2(\widehat{BA}, \widehat{BP}) \quad \dots \text{ car } (PP') \text{ est tangente à } C_1 \\
 &= 2(\widehat{BA}, \widehat{BQ'}) \quad \dots \text{ car } \overline{BQ'} \text{ colinéaire à } \overline{BP} \\
 &= 2(\widehat{QA}, \widehat{QQ'}) \quad \dots \text{ car } B, Q, A, Q' \text{ cocycliques} \\
 &= 2(\widehat{PQ}, \widehat{QQ'}) \quad \dots \text{ car } \overline{PQ} \text{ colinéaire à } \overline{QA}
 \end{aligned}$$

Egalité qui prouve que les droites (PP') et (QQ') sont parallèles.



b) Lorsque Δ' est tangente à C_2 , nous avons, en conservant les notations précédentes :

$$\begin{aligned}
 2(\widehat{PQ}, \widehat{PP'}) &= 2(\widehat{PA}, \widehat{PP'}) \quad \dots \text{ car } \overline{PA} \text{ colinéaire à } \overline{PQ} \\
 &= 2(\widehat{Q'A}, \widehat{BP}) \quad \dots \text{ car } (PP') \text{ est tangente en } P \text{ à } C_1 \\
 &= 2(\widehat{QA}, \widehat{QQ'}) \quad \dots \text{ car } \Delta' \text{ est tangente en } Q' \text{ à } C_2 \\
 &= 2(\widehat{PQ}, \widehat{QQ'})
 \end{aligned}$$



Egalité qui prouve que les droites (PP') et (QQ') sont parallèles.

Commentaire :

Pour établir le parallélisme des droites (PP') et (QQ'), on recherche sur la figure correspondant à chaque cas étudié une suite d'angles qui, par égalités successives de leurs doubles, nous conduit à la conclusion :

$$2(\widehat{PQ, PP'}) = 2(\widehat{PQ, QQ'})$$

On peut ainsi, en représentant de tels angles, concevoir des démonstrations plus expéditives que celles rédigées ci-dessus. Ici on s'est efforcé de marquer les différentes étapes à observer pour faire un usage strict des résultats précédemment acquis. Il nous paraît souhaitable, dans un premier temps, de demander aux élèves des rédactions de ce type de façon à leur faire bien assimiler le maniement des angles à "doubles égaux".

Plus tard, on pourra envisager des solutions plus concises. En particulier, la suivante :

Désignons par $\vec{\delta}, \vec{\delta}', \vec{p}, \vec{q}$ des vecteurs directeurs des droites $\Delta, \Delta', (PP'), (QQ')$... en convenant que :

\vec{p} est un vecteur directeur de la tangente en P à \odot_1 lorsque $P = P'$

\vec{q} est un vecteur directeur de la tangente en Q à \odot_2 lorsque $Q = Q'$

On a alors, quel que soit le cas de figure envisagé :

$$2(\widehat{\vec{\delta}, \vec{p}}) = 2(\widehat{AB, \vec{\delta}'}) = 2(\widehat{\vec{\delta}, \vec{q}})$$

ce qui prouve que... etc.

Le fait que la *double d'un angle* ne change pas, quand on remplace un vecteur entrant dans son libellé par un vecteur colinéaire, permet d'attribuer un vecteur directeur *non fixé* à chaque droite intervenant dans le problème. On n'a plus alors à rendre compte de ces changements de vecteurs, ce qui allège d'autant la rédaction de la solution.

Problème 7

Soit un triangle ABC, son cercle circonscrit \odot ; M un point de autre que B et C, P un point n'appartenant pas à $\odot \cup (MB) \cup (MC)$.

On désigne par :

\odot_1 le cercle circonscrit au triangle CMP

\odot_2 le cercle circonscrit au triangle BMP

Q le point d'intersection, si possible autre que C, de (AC) et \odot_1

R le point d'intersection, si possible autre que B, de (AB) et \odot_2

A' le point d'intersection, si possible autre que M, de (MP) et \odot .

1) Montrer que les droites (PQ) et (PR) sont parallèles...

- soit à la droite (AA') lorsque $A' \neq A$
- soit à la tangente à C en A lorsque $A' = A$.

Que peut-on en déduire quant aux points P, Q, R ?

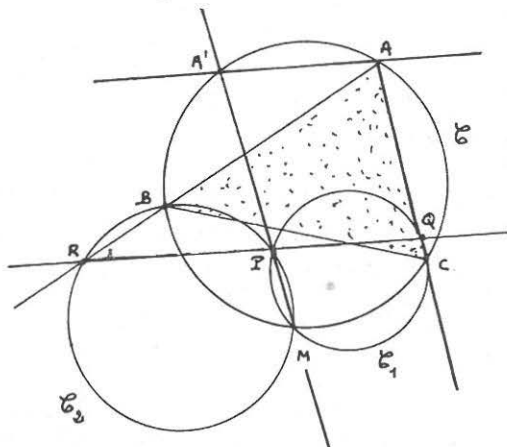
2) Examiner le cas particulier où P est le projeté orthogonal de M sur (BC). Que représente alors la droite définie par deux des trois points P, Q, R ?

3) On désigne par M_1 le point de C diamétralement opposé à M. Montrer que les droites de Simson du triangle ABC relatives aux points M et M_1 sont orthogonales.

Solution :

1) Le résultat du problème 6 appliqué

- a) aux cercles C et C_1 sécants en B et M
- b) aux cercles C et C_2 sécants en C et M



nous prouve que les droites

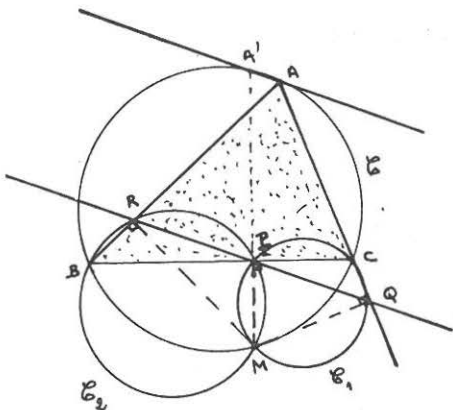
$$\left. \begin{array}{l} (PQ) \text{ et } (AA') \\ (PR) \text{ et } (AA') \end{array} \right\} \text{ sont parallèles}$$

en convenant que (AA') désigne la tangente en A au cercle C lorsque $A' = A$. Les points P, Q, R sont donc alignés.

2) Lorsque P est le projeté orthogonal de M sur (BC), le cercle C_1 a pour diamètre [M,C]. Le point Q est alors le projeté orthogonal de M sur (CA).

On montre de même que R est le projeté orthogonal de M sur (AB). La droite passant par les points P, Q, R est alors dans ce cas la droite de Simson du triangle ABC relative au point M (*).

(*) La droite de Simson d'un triangle apparaît donc comme un cas particulier de celle étudiée à la question 1.



3) Désignons par P_1 le projeté orthogonal de M_1 sur (BC) et par A_1 le point d'intersection de (M_1P_1) et C . Par la symétrie de centre O (centre de C), la droite (MP) a pour image la droite parallèle à (MP) passant par M_1 . Autrement dit, on a :

$$S_0[(MP)] = (M_1P_1) .$$

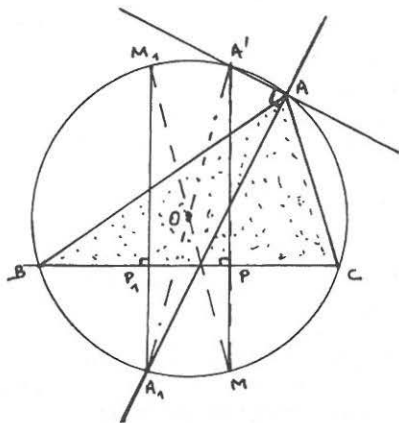
Il s'ensuit que :

$$S_0[(MP) \cap C] = S_0[(MP)] \cap S_0(C) = (M_1P_1) \cap C$$

ce qui montre que $A_1 = S_0(A')$.

Le triangle A_1AA' est donc rectangle en A . En d'autres termes, les droites (AA') et (AA_1) sont orthogonales.

Par suite, les droites de Simson du triangle ABC relatives aux points M et M_1 étant respectivement parallèles à (AA') et (AA_1) sont aussi orthogonales (c.q.f.d.).



IV. Ligne de niveau $(A,B)_{\hat{\alpha}}$

1. Définition :

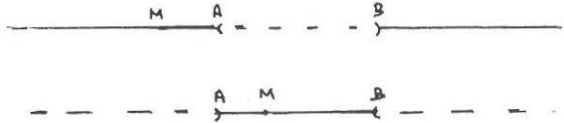
Etant donné deux points distincts A et B du plan \mathbf{P} et un angle $\hat{\alpha}$.
On appelle *ligne de niveau $\hat{\alpha}$ pour le bipoint (A,B)* l'ensemble noté $(A,B)_{\hat{\alpha}}$ des points M de $\mathbf{P} \setminus]A,B[$ tels que

$$(\widehat{MA, MB}) = \hat{\alpha}.$$

Ainsi, par exemple :

- $(A,B)_0 = (AB) \setminus]A,B[$

- $(A,B)_{\pi} =]A,B[$



2. Mise au point

Pour aborder la détermination de $(A,B)_{\hat{\alpha}}$ lorsque $\hat{\alpha}$ n'est ni nul, ni plat, il convient de préciser ce qui doit être connu concernant les demi-plans et les disques.

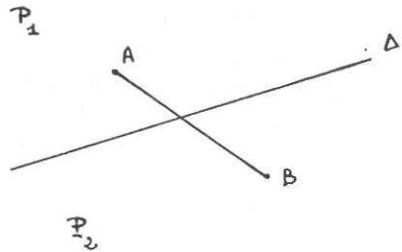
a) Sur les demi-plans

On admet que :

Toute droite Δ du plan \mathbf{P} partage celui-ci en deux parties *convexes* \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 , appelées *demi-plans ouverts de frontière Δ* , satisfaisant à :

- 1 - $\mathbf{P}_1 \cap \mathbf{P}_2 = \emptyset$
et $\mathbf{P}_1 \cup \mathbf{P}_2 = \mathbf{P} \setminus \Delta$

- 2 - Pour tout point A de \mathbf{P}_1 et tout point B de \mathbf{P}_2 , le segment $]A,B[$ et la droite Δ ont en commun un point et un seul.



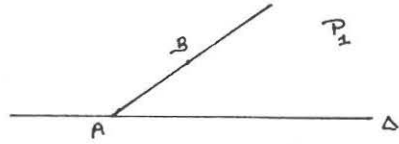
Les ensembles $\mathbf{P}_1 \cup \Delta$ et $\mathbf{P}_2 \cup \Delta$ sont appelés *demi-plans fermés*.

On considère le résultat suivant comme acquis.

Soit \mathbf{P}_1 un demi-plan ouvert (fermé) de frontière Δ et A un point de \mathbf{P}_1 . Alors l'image de \mathbf{P}_1 par une réflexion S est le demi-plan ouvert (fermé) de frontière $S(\Delta)$ contenant le point $S(A)$.

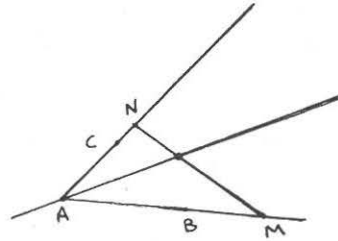
On établit alors facilement les deux propriétés suivantes :

Etant donné un demi-plan fermé P_1 de frontière Δ , toute demi-droite $[AB)$ telle que $A \in \Delta$ et $B \in P_1$ est contenue dans P_1 .



Soit M et N deux points distincts appartenant respectivement à deux demi-droites distinctes $[AB)$ et $[AC)$.

Alors le segment $]M, N[$ et la bissectrice de ces demi-droites ont en commun un point et un seul.



b) Sur les disques

Sont connues :

- la convexité du disque
- l'intersection d'une droite et d'un disque.

3. Deux résultats importants

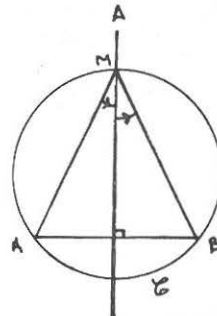
Théorème 1 :

Soit A et B deux points distincts d'un cercle (C) , Δ la médiatrice de $[A, B]$, M un point quelconque de $(C) \setminus \{A, B\}$.

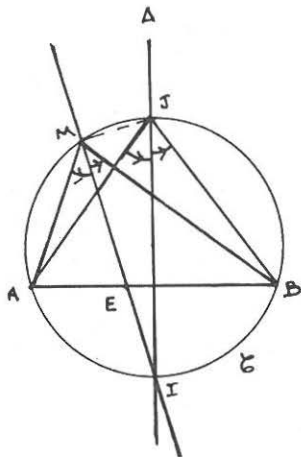
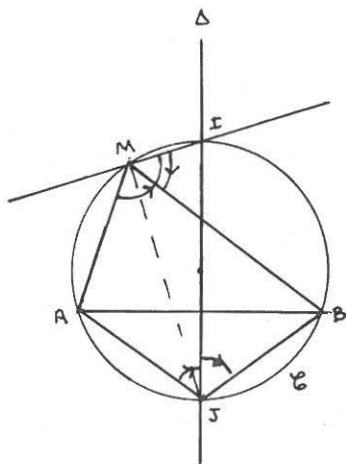
Alors la bissectrice des demi-droites $[MA)$ et $[MB)$ passe par le point de $\Delta \cap (C)$ n'appartenant pas au demi-plan de frontière (AB) dont M est élément.

Démonstration :

Observons d'abord que la propriété annoncée est trivialement vérifiée lorsque $M \in \Delta$.



Supposons maintenant que $M \notin \Delta$. Soit I et J les points communs à \mathcal{C} et Δ . Nous avons : figures 1 et 2



d'une part :

$$2(\widehat{MA, MI}) = 2(\widehat{JA, JI}) \dots \text{car } M, J, A, I \text{ sont cocycliques}$$

$$2(\widehat{MI, MB}) = 2(\widehat{JI, JB}) \dots \text{car } M, J, I, B \text{ sont cocycliques}$$

d'autre part :

$$(\widehat{JA, JI}) = (\widehat{JI, JB}) \dots \text{car } \Delta \text{ est bissectrice des demi-droites } [JA] \text{ et } [JB].$$

Il s'ensuit que :

$$2(\widehat{MA, MI}) = 2(\widehat{MI, MB}) \dots$$

ce qui montre que le point I appartient à l'une ou à l'autre des bissectrices \mathcal{B} et \mathcal{B}' des droites (MA) et (MB)..

Comme les droites (MI) et (MJ) sont orthogonales, on est assuré que le point J appartient à celle des deux bissectrices qui ne passe pas par I.

Convenons alors de désigner par \mathcal{B} la bissectrice des demi-droites [MA] et [MB] et par I le point de $\Delta \cap \mathcal{C}$ qui lui appartient. On sait que \mathcal{B} a, avec le segment [A,B], un point commun E et un seul (voir figure 2). Ce point E de [A,B] est élément du disque ouvert \mathcal{C} . Donc on a : $E \in \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ c'est-à-dire $E \in]M, I[$. Ainsi se trouve établi que le point M et le point I commun à \mathcal{B} , \mathcal{C} et Δ sont situés de part et d'autre de la droite (AB) (c.q.f.d.).

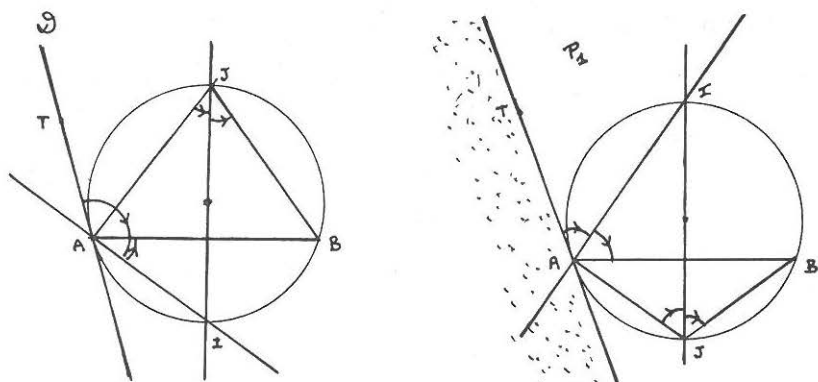
Théorème 2 :

Soit A et B deux points distincts d'un cercle \mathcal{C} , Δ la médiatrice de $[A,B]$, \mathcal{D} la tangente à \mathcal{C} au point A, T un point quelconque de $\mathcal{D} \setminus \{A\}$.

Alors la bissectrice des demi-droites $[AT)$ et $[AB)$ passe par le point de $\Delta \cap \mathcal{C}$ appartenant au demi-plan de frontière (AB) dont T est élément.

Démonstration :

Soit I et J les points communs à \mathcal{C} et Δ . Nous avons : figures 1 et 2



d'une part :

$$2(\widehat{AI, AI}) = 2(\widehat{JA, JI}) \dots \text{car } T \in \mathcal{D}$$

$$2(\widehat{AI, AB}) = 2(\widehat{JI, JB}) \dots \text{car } A, J, I, B \text{ sont cocycliques}$$

d'autre part :

$$(\widehat{JA, JI}) = (\widehat{JI, JB}) \dots \text{car } \Delta \text{ est bissectrice des demi-droites } [JA) \text{ et } [JB).$$

Il s'ensuit que :

$$2(\widehat{AT, AI}) = 2(\widehat{AI, AB}) \dots$$

ce qui montre que le point I appartient à l'une ou à l'autre des bissectrices \mathcal{B} et \mathcal{B}' des droites (AT) et (AB) .

Comme les droites (AI) et (AJ) sont orthogonales, on est assuré que le point J appartient à celle de ces deux bissectrices qui ne passe par I.

Convenons alors de désigner par \mathcal{B} la bissectrice des demi-droites $[AT)$ et $[AB)$ et par I le point de $\Delta \cap \mathcal{C}$ qui lui appartient. Désignons encore par \mathcal{P}_1 le demi-plan fermé de frontière \mathcal{D} contenant I et par S la réflexion de droite \mathcal{B} . Nous avons $S(\mathcal{D}) = (AB)$ et $S(I) = I$ de sorte que $S(\mathcal{P}_1)$ est le demi-plan fermé de frontière (AB) contenant I.

Notons maintenant que B est élément de $P_1 \dots$ sinon le segment $[I, B]$ aurait un point commun E avec la droite \mathcal{D} . Ce point E appartiendrait au disque fermé (C) et, de ce fait, la droite \mathcal{D} passant par les points distincts A et E ne serait pas tangente à (C) .

Il en résulte que : $[AB] \subset P_1$

puis : $S([AB]) \subset S(P_1)$

Autrement dit, la demi-droite $[AT]$ est incluse dans le demi-plan fermé de frontière (AB) contenant I .

Concluons : le point T et le point I commun à β , (C) et Δ appartiennent au même demi-plan de frontière (AB) (c.q.f.d.).

4. Détermination de $(A, B)_{\widehat{\alpha}}$ pour $\widehat{\alpha} \neq 0$ et $\widehat{\alpha} \neq \pi$

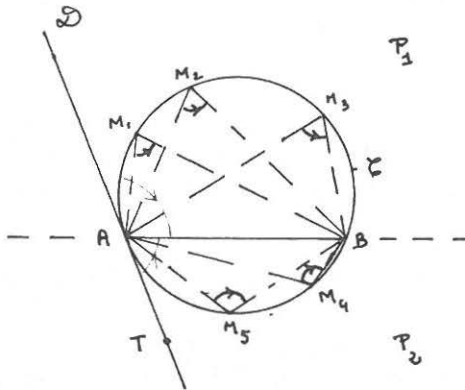
a) Pour se faire une idée, la droite \mathcal{D} étant la tangente au cercle (C) au point A , on sait que les angles représentés sur la figure ci-contre ont tous des doubles égaux.

En posant : $(\widehat{AT}, \widehat{AB}) = \widehat{\alpha}$ on a donc, pour tout point M de $(C) \setminus \{A, B\}$:

$$2(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = 2\widehat{\alpha}$$

c'est-à-dire :

$$(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = \widehat{\alpha} \quad \text{ou} \quad (\widehat{MA}, \widehat{MB}) = \widehat{\alpha} + \widehat{\pi}.$$



Désignons par P_2 celui des demi-plans ouverts de frontière (AB) qui contient T , par P_1 l'autre. Il semble plausible, au vu de la figure, que :

$$(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = \widehat{\alpha} \quad \text{lorsque } M \in (C) \cap P_1$$

$$(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = \widehat{\alpha} + \widehat{\pi} \quad \text{lorsque } M \in (C) \cap P_2$$

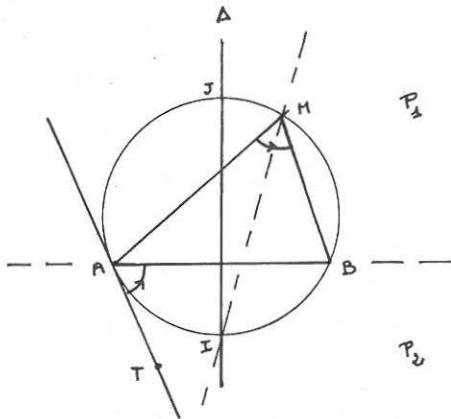
ce qui nous permet de formuler la conjecture : $(A, B)_{\widehat{\alpha}} = (C) \cap P_1$.

b) Vérification de la conjoncture précédente

Etant donnés deux points distincts A et B du plan P et un angle $\widehat{\alpha}$ autre que $\widehat{0}$ et $\widehat{\pi}$, désignons par :

- [AT] la demi-droite de P telle que $(\widehat{AT, AB}) = \widehat{\alpha}$ (*)
 - C le cercle passant par A et B et tangent à la droite (AT)
 - P₁ et P₂ les demi-plans ouverts de frontière (AB) avec T ∈ P₂
 - Δ la médiatrice du segment [A,B]
 - I et J les points de Δ ∩ C avec J ∈ P₁.
- Il s'agit de montrer que : $(A, B)_{\widehat{\alpha}} = C \cap P_1$.

Nous avons, pour tout point M de $P \setminus \{A, B\}$:



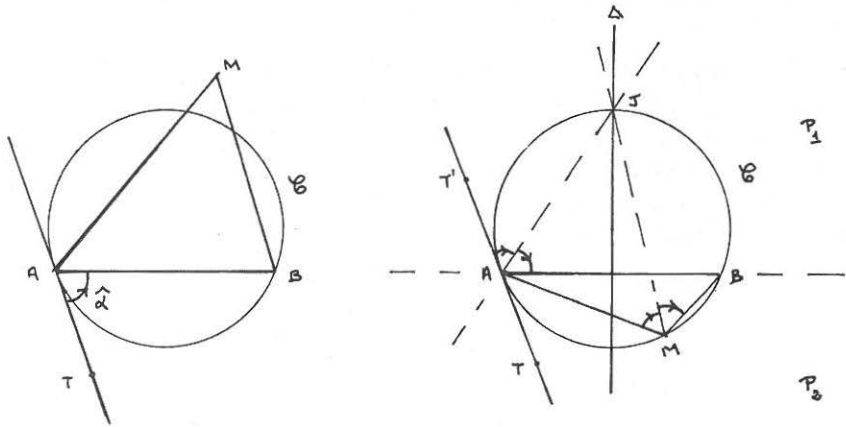
$$\begin{aligned}
 1^\circ - M \in C \cap P_1 &\Rightarrow 2(\widehat{MA, MI}) = 2(\widehat{AT, AI}) \\
 &\Rightarrow (\widehat{MA, MB}) = (\widehat{AT, AB}) = \widehat{\alpha} \dots \text{car} \\
 &\quad \left\{ \begin{array}{l} (MI) \text{ est bissectrice des demi-droites } [MA] \text{ et } [MB] \\ (AI) \text{ est bissectrice des demi-droites } [AT] \text{ et } [AB] \end{array} \right. \\
 &\Rightarrow M \in (A, B)_{\widehat{\alpha}}
 \end{aligned}$$

ce qui prouve l'inclusion :

$$C \cap P_1 \subset (A, B)_{\widehat{\alpha}} \dots (i)$$

(*) Sa construction fera l'objet d'une étude ultérieure.

- 2° - $M \notin \mathcal{C} \cap P_1 \Rightarrow$ • soit $M \notin \mathcal{C}$... figure 1
 • soit $M \in \mathcal{C} \cap P_2$... figure 2



- Dans le premier cas, nous avons : $2(\widehat{MA, MB}) \neq 2(\widehat{AT, AB})$
 c'est-à-dire : $2(\widehat{MA, MB}) \neq 2\widehat{\alpha}$

On en déduit : $(\widehat{MA, MB}) \neq \widehat{\alpha}$, autrement dit : $M \notin (A, B)_{\widehat{\alpha}}$.

- Dans le deuxième cas, T' étant le point de P_1 tel que $\vec{AT'} = -\vec{AT}$, nous avons :

$$2(\widehat{MA, MJ}) = 2(\widehat{AT', AJ})$$

On en déduit : $(\widehat{MA, MB}) = (\widehat{AT', AB})$

car $\left\{ \begin{array}{l} (MJ) \text{ est bissectrice des demi-droites } [MA] \text{ et } [MB] \\ (AJ) \text{ est bissectrice des demi-droites } [AT'] \text{ et } [AB] \end{array} \right.$

puis : $(\widehat{MA, MB}) = (\widehat{AT, AB}) + \widehat{\pi} = \widehat{\alpha} + \widehat{\pi}$

et enfin : $(\widehat{MA, MB}) \neq \widehat{\alpha}$ autrement dit : $M \notin (A, B)_{\widehat{\alpha}}$

Ainsi : $M \notin \mathcal{C} \cap P_1 \Rightarrow M \notin (A, B)_{\widehat{\alpha}}$

Il s'ensuit que : $M \in (A, B)_{\widehat{\alpha}} \Rightarrow M \in \mathcal{C} \cap P_1$

ce qui prouve l'inclusion : $(A, B)_{\widehat{\alpha}} \subset \mathcal{C} \cap P_1 \dots$ (ii).

Concluons : Il résulte de (i) et (ii) que : $(A, B)_{\widehat{\alpha}} = \mathcal{C} \cap P_1$.

On retiendra donc le résultat suivant :

Théorème :

Etant donnés deux points distincts A et B du plan P et un angle $\widehat{\alpha}$ autre que $\widehat{0}$ et $\widehat{\pi}$

l'ensemble des points M de $P \setminus \{A, B\}$ tels que $(\widehat{MA}, \widehat{MB}) = \widehat{\alpha}$

Autrement dit, la ligne de niveau $(A, B)_{\widehat{\alpha}}$ est l'arc $C \cap P_1$ où

- C est le cercle passant par A et B et tangent à la droite (AT) définie par $(\widehat{AT}, \widehat{AB}) = \widehat{\alpha}$
- P_1 est le demi-plan ouvert de frontière (AB) dont T n'est pas élément.

Remarque : La ligne de niveau $(A, B)_{\widehat{\alpha} + \widehat{\pi}}$ est l'arc $C \cap P_2$.

5. Construction de $(A, B)_{\widehat{\alpha}}$

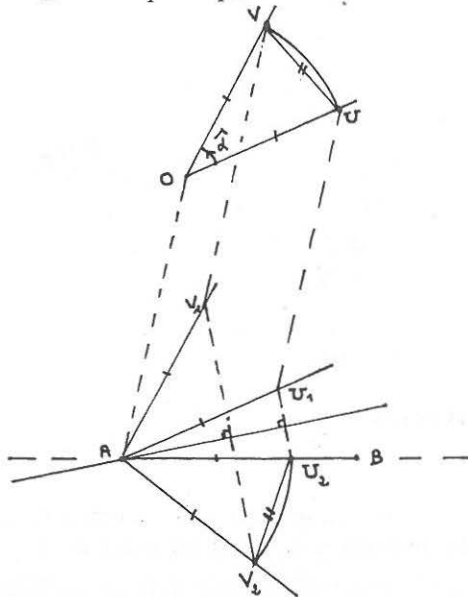
A, B et $\widehat{\alpha}$ sont donnés. $\widehat{\alpha} \neq \widehat{0}$ et $\widehat{\alpha} \neq \widehat{\pi}$.

a) Construction de la demi-droite [AT) telle que $(\widehat{AT}, \widehat{AB}) = \widehat{\alpha}$

On peut considérer, sans diminuer la généralité, que $\widehat{\alpha}$ est donné sous la forme de l'angle d'un couple de deux vecteurs non nuls \vec{OU} et \vec{OV} de même norme.

Désignons alors par :

- t la translation de vecteur \vec{OA}
- U_1 et V_1 les images de U et V par t
- s la réflexion qui échange les demi-droites [AU₁) et [AB)
- U_2 et V_2 les images de U_1 et V_1 par s.



Nous avons :

$$\widehat{(AU_1, AV_1)} = \widehat{(OU, OV)} \dots \text{effet de } t$$

puis :

$$\begin{aligned} \widehat{(AV_2, AU_2)} &= -\widehat{(AV_1, AU_1)} \dots \text{effet de } s \\ &= \widehat{(AU_1, AV_1)} = \widehat{(OU, OV)} = \widehat{\alpha} \end{aligned}$$

et enfin, en notant T un point autre que A de la demi-droite $[AV_2)$, on obtient :

$$\widehat{(AT, AB)} = \widehat{(OV_2, OU_2)}$$

c'est-à-dire :

$$\widehat{(AT, AB)} = \widehat{\alpha}$$

Remarque : Les transformations t et s étant des isométries, on a donc :

$$AU_2 = AV_2 = OU = OV \quad \text{et} \quad U_2V_2 = UV.$$

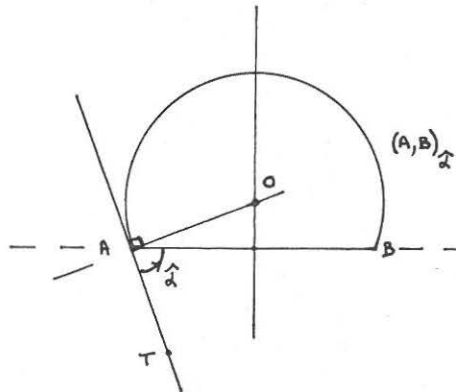
En marge de l'étude théorique précédente, on voit alors comment, en pratique, se servir du compas pour construire la demi-droite $[AT)$ telle que

$$\widehat{(AT, AB)} = \widehat{\alpha}.$$

b) *Construction de $(A, B)_\alpha$*

On trace successivement :

- la demi-droite $[AT)$ telle que $\widehat{(AT, AB)} = \widehat{\alpha} \dots$ voir (a)
 - la médiatrice de $[A, B)$ et l'orthogonale en A à la droite (AT) .
- Ces deux droites se coupent en O.
- la partie du cercle de centre O passant par A contenue dans le demi-plan de frontière (AB) dont T n'est pas élément.



V. Problèmes résolus

Problème 8

Soit un cercle C , I un de ses points ; Γ un cercle de centre I coupant en deux points distincts A et B, M un point de $C \setminus \{A, B\}$.

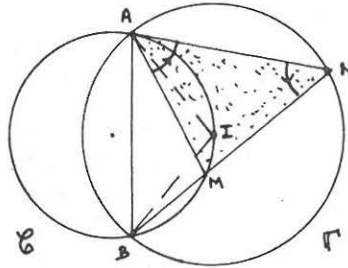
On désigne par N le point d'intersection, autre que B, de la droite (BM) et du cercle Γ . Montrer que le triangle AMN est isocèle en M.

Solution

Désignons par \odot le disque de frontière Γ . Deux éventualités sont à envisager :

1. $M \in \odot \cap \mathcal{C}$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \widehat{(NA, NM)} + \widehat{(AM, AN)} &= \widehat{\pi} - \widehat{(MN, MA)} \\ &= \widehat{(MA, MN)} + \widehat{(MN, MB)} \dots \text{car } M \in]B, N[\\ &= \widehat{(MA, MB)} \\ &= \widehat{(IA, IB)} \qquad \dots \text{car } M \in \text{arc AIB} \end{aligned}$$

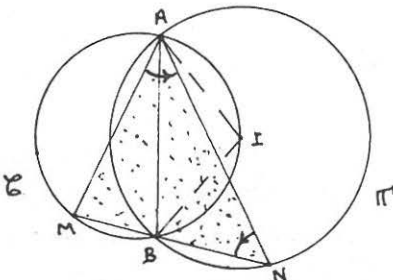


2. $M \notin \odot \cap \mathcal{C}$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \widehat{(NA, NM)} + \widehat{(AM, AN)} &= \widehat{\pi} - \widehat{(MN, MA)} \\ &= \widehat{(MA, MN)} + \widehat{\pi} \\ &= \widehat{(MA, MB)} + \widehat{\pi} \\ &= \widehat{(IA, IB)} \end{aligned}$$

... car $MN \in \mathbf{R}_+ \cdot \overrightarrow{MB}$

... car les points M et I du cercle \odot appartiennent à deux arcs distincts d'extrémités A et B.



Ceci étant, dans les deux cas, on a :

$$\begin{aligned}
 \widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NM})} + \widehat{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})} &= \widehat{(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})} \\
 &= 2\widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})} \quad \dots \text{ car } \overrightarrow{NE} \perp \overrightarrow{NB} \\
 &= 2\widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NM})} \quad \dots \text{ car } \overrightarrow{NM} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{NB}
 \end{aligned}$$

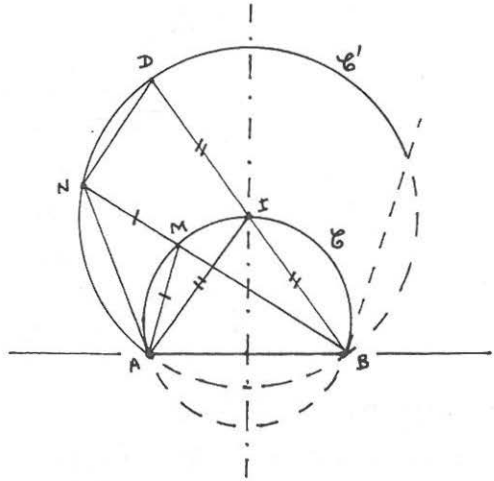
On en déduit : $\widehat{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})} = \widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NM})}$... ce qui prouve que le triangle AMN est isocèle en M (c.q.f.d.).

Problème 9

Soit M un point d'un arc \widehat{AB} porté par un cercle \mathcal{C} . Déterminer pour quelle(s) position(s) de M sur l'arc \widehat{AB} la somme $MA + MB$ est maximum.

Ecartons d'abord les cas $M=A$ et $M=B$ pour lesquels le maximum de $MA + MB$ n'est visiblement pas réalisé.

M étant maintenant un point de l'arc \widehat{AB} autre que A et B, on remplace le segment $[M, A]$ par le segment $[M, N]$ où le point N est tel que $M \in [B, N]$ et $MN = MA$.



On a alors :

$$\begin{aligned}
 2\widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})} &= 2\widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NM})} && \dots \text{ car } \overrightarrow{NB} \text{ et } \overrightarrow{NM} \text{ sont colinéaires} \\
 &= \widehat{\pi} - \widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MA})} && \dots \text{ car le triangle AMN est isocèle en M} \\
 &= \widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN})} + \widehat{\pi} \\
 &= \widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN})} + \widehat{(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MB})} \quad \dots \text{ car } M \in [B, N] \\
 &= \widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} \\
 &= \widehat{(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB})} && \dots \text{ en désignant par I le point de l'arc } \widehat{AB} \text{ équidistant de A et B.}
 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité prouve que le point N est élément du cercle \mathcal{C}' de centre I passant par A (et par B).

Cela dit, soit D le point de \mathcal{C}' diamétralement opposé à B.

Alors :

- pour tout point M de \widehat{AB} autre que A, B et I le triangle BND est rectangle en N et on a $BN < BD$, c'est-à-dire $MA + MB < IA + IB$;
- pour $M = I$, on a trivialement $MA + MB = IA + IB$.

Ainsi, lorsque M décrit l'arc \widehat{AB} , le réel $MA + MB$ est maximum pour $M = I$ et uniquement dans ce cas.

Remarque : Du fait que $AB \leq IA + IB$, on peut étendre le résultat précédent aux cas où $M = A$ et $M = B$.

Ainsi, pour tout point M de l'arc \widehat{AIB} (A et B compris), le réel $MA + MB$ est maximum lorsque $M = I$ et seulement dans ce cas.

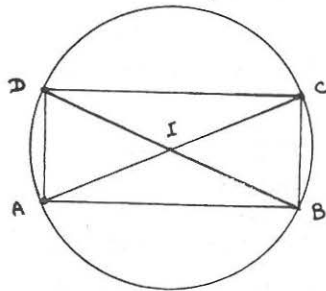
Problème 10

Montrer qu'un parallélogramme inscrit dans un cercle est un rectangle.

Solution :

Désignons par I le centre du parallélogramme ABCD inscrit dans un cercle .

Nous allons proposer pour ce problème deux solutions. La première, à l'opposé de la seconde, prend en compte le fait qu'un demi-plan est une partie convexe du plan.



1) Nous avons d'une part :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \widehat{(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})} \quad \dots \text{ effet de la symétrie de centre I}$$

d'autre part :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})} + \widehat{\pi} \quad \dots \text{ car A, B, C, D, sont cocycliques}$$

A et C ne sont pas dans le même demi-plan de frontière (BD), sinon ...

On en déduit, par addition membre à membre : $2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \widehat{\pi}$ ce qui prouve l'orthogonalité des droites (AB) et (AD). Le parallélogramme ABCD est donc un rectangle.

2) Nous avons d'une part :

$$2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})} \quad \dots \text{ effet de la symétrie de centre I}$$

d'autre part :

$$2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})} \quad \dots \text{ car A, B, C, D sont cocycliques.}$$

On en déduit, par addition membre à membre : $4\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \widehat{0}$, puis :

$$2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \widehat{0} \quad \text{ou} \quad 2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \widehat{\pi}.$$

Or, l'éventualité $2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \widehat{0}$ qui traduit que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} sont colinéaires ne peut se produire. Finalement, on a :

$$2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \widehat{\pi}$$

qui conduit à la même conclusion que précédemment.

Problème 11

Un point M décrit un arc de cercle d'extrémités A et B. A chaque point M ($M \neq A$ et $M \neq B$), on associe le point N de la droite (MA) tel que le triangle MBN soit rectangle en B. Quel est le lieu des points N ?

Solution :

Désignons par O le centre du cercle C portant l'arc \widehat{AB} , par E le lieu cherché et posons :

$$\widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} = \widehat{\alpha}.$$

On peut alors observer que A est un point de E, voir figure 1.

Ceci étant

a) supposons que N soit un point de E autre que A.

On a alors : voir figure suivante

$$2\widehat{(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NB})} = \widehat{\pi} - 2\widehat{(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MN})} \dots \text{car le triangle MBN est rectangle en B.}$$

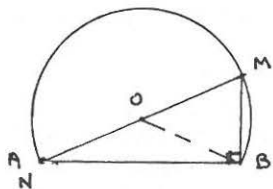
On en déduit :

$$2\widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})} = \widehat{\pi} - 2\widehat{(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})} \dots \text{car } \overrightarrow{NA} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{NM} \\ \overrightarrow{MA} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{MN}$$

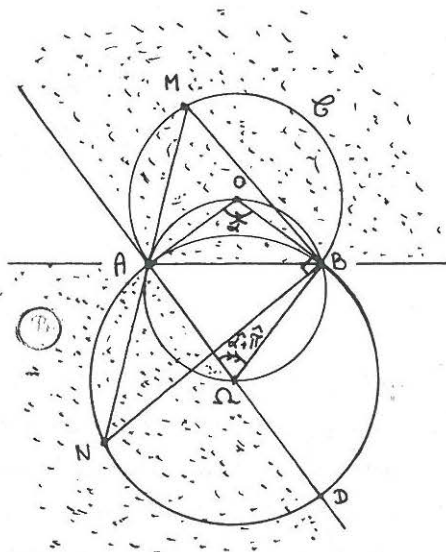
puis :

$$\begin{aligned} 2\widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})} &= \widehat{\pi} - \widehat{(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})} \\ &= \widehat{(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})} + \widehat{\pi} \\ &= \widehat{\alpha} + \widehat{\pi} \end{aligned}$$

ce qui montre que N appartient au cercle Γ de centre Ω passant par A où Ω est le point diamétralement opposé à O sur le cercle circonscrit au triangle AOB.



En outre, les points M, A et N étant alignés, N appartient aussi à la partie \mathcal{B} (en grisé sur la figure). On est ainsi assuré que N est élément de l'arc $\Gamma \cap \mathcal{B}$. Autrement dit, on a : $E \subset \Gamma \cap \mathcal{B}$.



Réciproquement, soit N un point autre que A de l'arc $\Gamma \cap \mathcal{B}$. Désignons par M le point de la droite (NA) tel que le triangle NBM soit rectangle en B.

On montre alors comme précédemment que M appartient à l'arc $\mathcal{C} \cap \mathcal{B}$ et donc N est un point du lieu. Autrement dit, on a :

$$\Gamma \cap \mathcal{B} \subset E.$$

Conclusion : Le lieu cherché est l'arc $\Gamma \cap \mathcal{B}$ — sur la figure l'arc BAD, B et D exclus.

Problème 12

Soit A et B deux points diamétralement opposés d'un cercle \mathcal{C} de centre O. Deux points D et E décrivent ce cercle de sorte que l'angle $(\widehat{OD, OE})$ reste égal à un angle $\hat{\alpha}$ donné ($\hat{\alpha} \neq \hat{0}$ et $\hat{\alpha} \neq \hat{\pi}$).

On désigne par M le point d'intersection des droites (AE) et (BD). Quel est le lieu des points M ?

Nota : On convient de remplacer (AE) — respectivement (BD) — par la tangente à \mathcal{C} en A — respectivement en B — lorsque $E=A$ ($D=B$).

Solution :

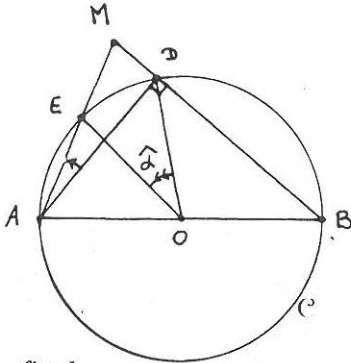


fig. 1

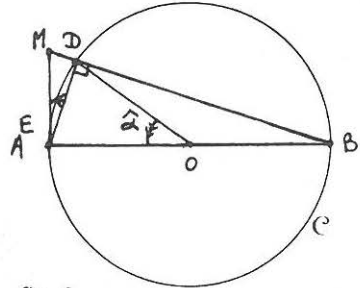


fig. 2

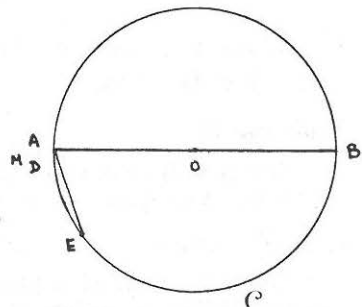
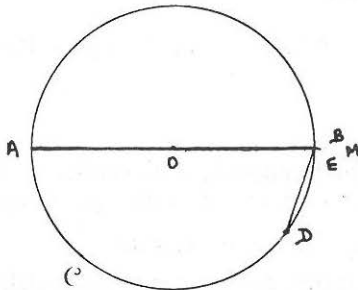
Nous avons, pour $E \neq A, E \neq B, D \neq A \dots$ (figure 1):

$$\begin{aligned}
 2(\widehat{MA, MB}) &= 2(\widehat{MA, MD}) && \dots \text{ car } \overrightarrow{MD} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{MA} \\
 &= \widehat{\pi} - 2(\widehat{AD, AM}) && \dots \text{ car le triangle MAD est rectangle en D} \\
 &= \widehat{\pi} - 2(\widehat{AD, AE}) && \dots \text{ car } \overrightarrow{AE} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AM} \\
 &= \widehat{\pi} - (\widehat{OD, OE}) && \dots \text{ car A, E, D sont éléments du cercle } C \text{ de centre O} \\
 &= \widehat{\pi} - \widehat{\alpha}
 \end{aligned}$$

La même démonstration s'applique au cas où $E=A$ (figure 2):

$$\begin{aligned}
 2(\widehat{MA, MB}) &= 2(\widehat{MA, MD}) = \widehat{\pi} - 2(\widehat{AD, AM}) \\
 &= \widehat{\pi} - (\widehat{OD, OE}) && \dots \text{ car } (AM) \text{ est tangente en A à } C.
 \end{aligned}$$

Lorsque $E=B$ ou $D=A$ on a respectivement $M=A$ ou $M=B$.



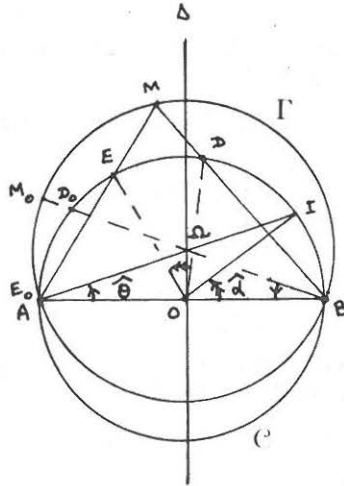
Ainsi, tout point M du lieu L cherché est un point du cercle Γ de centre Ω passant par A où Ω est le point de la médiatrice Δ de [A,B] tel que

$$\widehat{(\Omega A, \Omega B)} = \widehat{\pi} - \widehat{\alpha}.$$

Le détail de la construction du cercle Γ est donné dans la figure ci-dessous où on a visiblement :

$$\widehat{(\Omega A, \Omega B)} = \widehat{\pi} - 2\widehat{\theta} = \widehat{\pi} - \widehat{\alpha}$$

On a donc : $L \subset \Gamma$.



Réciproquement, soit M un point de Γ autre que A et B. Nous avons (figure 3) :

$$\begin{aligned} \widehat{(\Omega D, \Omega E)} &= 2\widehat{(AD, AE)} \quad \dots \text{ lorsque } M \neq M_0 \\ &= 2\widehat{(AD, AM)} \\ &= \widehat{\pi} - 2\widehat{(MA, MD)} \quad \dots \text{ car le triangle ADM est rectangle en D} \\ &= \widehat{\pi} - 2\widehat{(MA, MB)} \quad \dots \text{ car MB est colinéaire à MD} \\ &= \widehat{\pi} - \widehat{(\Omega A, \Omega B)} \quad \dots \text{ car } M \in \Gamma \\ &= \widehat{\pi} - (\widehat{\pi} - \widehat{\alpha}) \\ &= \widehat{\alpha} \end{aligned}$$

ce qui montre que M est élément du lieu L cherché. Comme A et B sont visiblement des points du lieu, on a donc : $\Gamma \subset L$.

Ainsi le lieu cherché est le cercle Γ.

V. Pour conclure

Remarque 1

On se place dans l'hypothèse où le déroulement de l'exposé est
1° partie B - 2° partie C.

Force est alors de constater qu'il est possible de résoudre des problèmes de géométrie plane à l'aide des angles sans que le plan soit préalablement orienté, ni introduite la notion de mesure d'un angle.

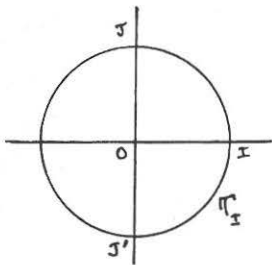
Remarque 2

On se place encore dans l'hypothèse où le déroulement de l'exposé est
1° partie A - 2° partie C.

a) On définit alors comme suit l'orientation des plans $\tilde{\mathbf{P}}$ et \mathbf{P} .

Désignons par \vec{j} et \vec{j}' les vecteurs de $\tilde{\Gamma}_1$ (respectivement par J et J' les points de Γ_1) représentant les deux angles droits (direct et indirect).

Orienter $\tilde{\mathbf{P}}$ et \mathbf{P} consiste à choisir entre les angles $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})}$ et $\widehat{(\vec{i}, \vec{j}')}$ — respectivement $\widehat{(OI, OJ)}$ et $\widehat{(OI, OJ')}$ — celui qui sera l'angle droit direct (on connaît la réponse : $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})}$ est l'angle droit direct).



b) Etant entendu qu'il est hors de propos d'introduire à ce niveau la notion de mesure d'un angle de façon convenable, on adopte la présentation faite dans la partie B, paragraphe I. On admet alors que l'application

$$\begin{aligned} \psi : \mathcal{A} &\rightarrow]-\pi, +\pi] \\ \hat{x} &\rightarrow x \end{aligned}$$

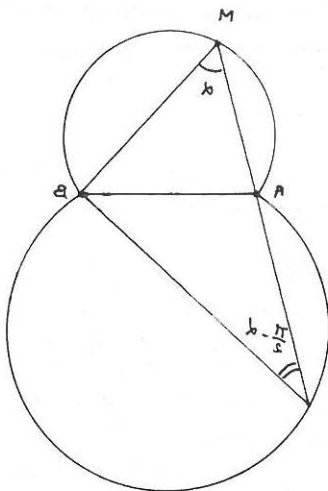
satisfait à la propriété suivante :

$$\forall (\hat{u}, \hat{v}) \in \mathcal{A}^2, \quad \psi(\hat{u} + \hat{v}) = \psi(\hat{u}) + \psi(\hat{v}) \quad [2\pi]$$

Remarque 3

Il nous semble préjudiciable de faire *prématurément* la confusion d'écriture entre un angle et une de ses mesures. Parce que, derrière le nombre qui le mesure, l'angle d'un couple de vecteurs non nuls se métamorphose souvent dans l'esprit des élèves en un angle géométrique. Ce dérapage vers une notion plus familière peut alors les amener à "établir" de faux résultats. Pour illustrer ce propos par un exemple, reprenons le problème n° 11 dont on rappelle brièvement l'énoncé :

“Un point M décrit un arc \widehat{AB} . A chaque point M, on associe le point N de la droite (MA) tel que le triangle MBN soit rectangle en M. Lieu des points M ?”.



Solution :

Posons $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$. On a alors :

$$(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Donc N appartient à la ligne de niveau $(A, B)_{\frac{\pi}{2} - \alpha}$.

Réciproquement, soit N un point de $(A, B)_{\frac{\pi}{2} - \alpha}$.

Désignons par M le point de la droite (NA) tel que le triangle NBM soit rectangle en B. On a alors :

$$(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

On en déduit : $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha$. Donc M appartient à l'arc donné \widehat{AB} .

Tout point N de $(A, B)_{\frac{\pi}{2} - \alpha}$ est ainsi un point du lieu cherché.

Conclusion : Le lieu des points N est l'arc $(A, B)_{\frac{\pi}{2} - \alpha}$.

On observera que dans la première solution de ce problème où il n'est pas fait appel aux mesures des angles, l'emploi des doubles d'angle est

nécessaire pour traduire que le triangle MBN est rectangle en B (voir caractérisation du triangle rectangle). On en déduit alors que le point N appartient à un *cercle* passant par A et B. La réciproque, en prenant N sur ce cercle, ne peut alors conduire qu'à l'appartenance du point M, non pas à l'arc donné \widehat{AB} , mais au *cercle* qui porte cet arc.

On est donc *contraint* pour atteindre l'objectif visé de restreindre le "lieu de N". On est alors en mesure de fournir une "bonne solution".

Remarque 4

L'utilisation fréquente de doubles d'angle dans la résolution de problèmes nous amène à introduire dans l'ensemble \mathcal{A} des angles la relation \mathcal{R} définie comme suit :

$$\widehat{\alpha} \mathcal{R} \widehat{\beta} \iff 2\widehat{\alpha} = 2\widehat{\beta}.$$

Cette relation est manifestement une relation d'équivalence. En outre, elle est trivialement compatible avec la loi additive de \mathcal{A} . On peut donc installer sur l'ensemble quotient \mathcal{A}/\mathcal{R} une loi quotient, notée +, qui confère à cet ensemble une structure de groupe commutatif.

Le fait que le double d'un angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ reste *invariant* lorsqu'on remplace respectivement \vec{u} et \vec{v} par des vecteurs non nuls des droites vectorielles $\mathbf{R}.\vec{u}$ et $\mathbf{R}.\vec{v}$ nous conduit à adopter la notation $\widehat{(\mathbf{R}.\vec{u}, \mathbf{R}.\vec{v})}$ pour désigner la classe de $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$ modulo \mathcal{R} .

On dit alors que $\widehat{(\mathbf{R}.\vec{u}, \mathbf{R}.\vec{v})}$ est l'angle du couple de droites $(\mathbf{R}.\vec{u}, \mathbf{R}.\vec{v})$. C'est l'ensemble de tous les couples de droites $(\mathbf{R}.\vec{x}, \mathbf{R}.\vec{y})$ tels $2\widehat{(\vec{x}, \vec{y})} = 2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.

En conséquence, un quelconque élément de l'ensemble \mathcal{A}/\mathcal{R} devrait être appelé :

- angle d'un couple de *droites vectorielles* si l'on fait référence au plan \mathbf{P} ;
- angle d'un couple de *directions de droite* si l'on fait référence au plan ponctuel \mathbf{P} .

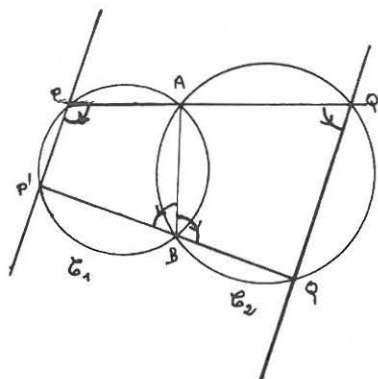
Mais il est de tradition de remplacer les directions de droite par des droites de \mathbf{P} pour désigner les éléments de \mathcal{A}/\mathcal{R} .

Par exemple, la notation $\widehat{(\Delta, \Delta')}$ qui se lit "angle Δ, Δ' " désigne l'angle du couple des directions de droite auxquelles Δ et Δ' appartiennent respectivement.

Un tel abus de langage et d'écriture est évidemment très commode. Il ne présente en outre aucun danger dès lors qu'on convient que "l'angle de deux droites parallèles" est nul.

L'emploi des "angles de droites" dans certains problèmes peut alléger la rédaction de la solution. Par exemple, celle du problème 6 peut se résumer à :

$$\begin{aligned} \widehat{(PQ, PP')} &= \widehat{(AB, P'Q')} \\ &= \widehat{(PQ, QQ')} \end{aligned}$$



en convenant que :

(PP') désigne la tangente à C_1 en P lorsque $P' = P$;

(QQ') désigne la tangente à C_2 en Q lorsque $Q' = Q$.

Par contre, il est des problèmes pour lesquels les angles de droites sont des outils inadaptés et donc d'aucun secours. Citons à titre d'exemple le problème 12.

En définitive, pour faire un bilan concernant leur utilisation, disons que hormis le fait qu'ils permettent une solution plus concise de certains problèmes, leur introduction au niveau des classes de lycée ne paraît pas être une impérieuse nécessité. Ajoutons à cela que pour bien les utiliser en situation de recherche sur une figure, il est bon d'avoir au préalable une bonne expérience du maniement des angles à doubles égaux.

2-902680-45-7

IGR Imprimerie Lyon - Photocomposition : Marie-Paule COMPO - Montage : Atelier M. MICHAUD
Façonnage ALAIN