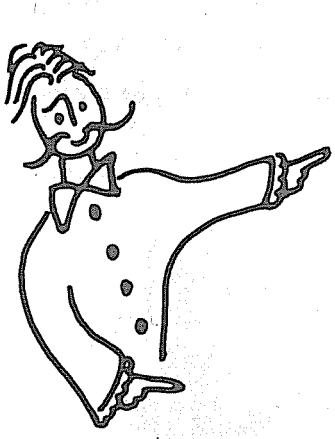
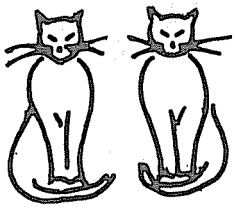
Publication de l'A.P.M.E.P.
(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

MOTS

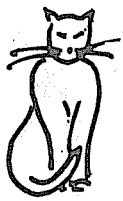
Réflexions sur quelques mots-clés à l'usage des instituteurs et des professeurs

TOME VIII

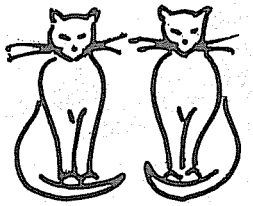




Deux chats



Un chat



Deux chats distincts

Deux chats confondus

Invariant
Image - antécédent
Translation
Homothétie

Langage vectoriel
Vecteurs de la géométrie du plan

et des MOTS FLOUS

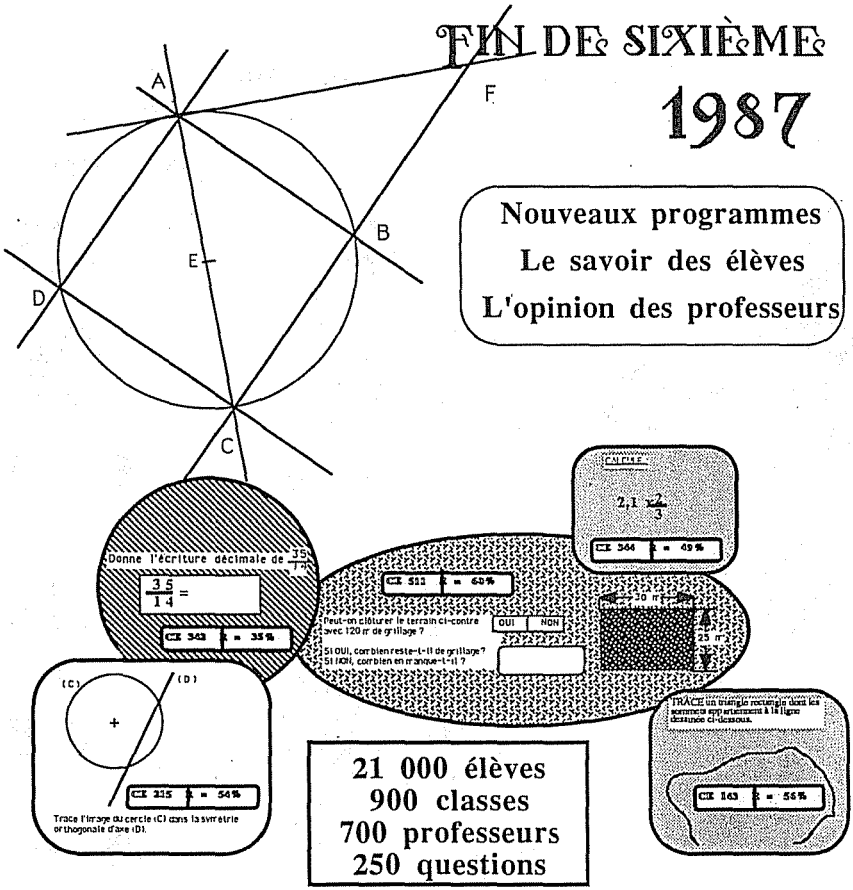
Brochure A.P.M.E.P. n° 67 - 1987

EVALUATION

DU PROGRAMME de MATHEMATIQUES

FIN DE SIXIÈME

1987



Nouveaux programmes
Le savoir des élèves
L'opinion des professeurs

21 000 élèves
900 classes
700 professeurs
250 questions

Une étude de l' **APMEP**

Association des professeurs de Mathématiques de l'enseignement public
26 rue Duméril - 75013 PARIS

Bon de commande dans les pages vertes du Bulletin

Publication de l'A.P.M.E.P.
(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

n° 67

MOTS

Réflexions sur quelques mots-clés à l'usage des instituteurs et des professeurs

TOME VIII
Brochure 1987

Invariant
Image - antécédent
Translation
Homothétie
Langage vectoriel
Vecteurs de la géométrie du plan

et des MOTS FLOUS :

(Introduction) - Calculer - Conserver - Correspondre, correspondance - Décomposer - Démontrer, prouver, établir - Deux à deux, trois à trois,... - Devenir égal à - Distincts, confondus, inégaux, égaux - Equidistant - Graduation - Quelconque - Représenter, représentant - Sécant, concourant, concourir - Simplifier, réduire - Transformé, transformer, transformation.

Pour tout renseignement concernant

l'A.P.M.E.P.
(Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public)

- inscription (cotisation, abonnement)
- publications (Bulletin de l'A.P.M.E.P., brochures, en particulier les collections **ELEM-MATH** et **MOTS**)
- fonctionnement (Régionales, Commissions,...)

s'adresser au :

Secrétariat de l'A.P.M.E.P.
26, rue Duméril
75013 PARIS
Tél. (1) 43.31.34.05

Collection MOTS

L'A.P.M.E.P. a pensé à aider les instituteurs et professeurs dans leur enseignement de la mathématique, en rédigeant les brochures MOTS.

Il ne s'agit pas à proprement parler d'un lexique. Cependant, il sera loisible à chacun de ranger les rubriques par ordre alphabétique. D'autre part, nous avons tenu compte des suggestions proposées par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P. dans son recueil de fiches **La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent.**

Il ne s'agit pas non plus d'une codification autoritaire du vocabulaire : l'A.P.M.E.P. ne peut pas et ne veut pas codifier. Comme dans le Dictionnaire de l'A.P.M.E.P., nous nous sommes néanmoins enhardis à suggérer une certaine harmonisation, à exprimer notre penchant ou notre aversion pour certains termes. Nous souhaitons ouvrir ainsi le débat avec nos lecteurs.

Enfin, il ne s'agit pas d'un ouvrage de formation, théorique ou pédagogique, des maîtres de l'école élémentaire. Nous pensons cependant qu'une réflexion sur le vocabulaire, si on la mène assez loin, débouche sur le fond même des notions mathématiques évoquées et sur leur introduction pédagogique éventuelle. Les formateurs (I.D.E.N., professeurs d'E.N., animateurs des IREM...) trouveront peut-être dans quelques-unes de ces rubriques un outil pour un travail en commun avec les collègues en formation initiale ou continue. Mais nous espérons surtout qu'elles seront lisibles et utilisables par les enseignants isolés.

*
* *

Toutes les remarques, critiques, suggestions seront accueillies avec reconnaissance.

Ecrire à :

Jacques LECOQ
16, rue du Plateau Fleuri, 14000 CAEN

Octobre 1987
La Commission "MOTS"

MOTS I contient : ÉGALITÉ ; EXEMPLE et CONTRE-EXEMPLE ; COUPLE ; RELATION BINAIRE ; NOMBRE NATUREL ; ENTIERS et RATIONNELS ; NOMBRE DÉCIMAL, NOMBRE A VIRGULE ; FRACTION ; ENSEMBLES DE NOMBRES.

MOTS II contient : REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES ; APPLICATION, FONCTION, BIJECTION ; PARTITION, ÉQUIVALENCE ; PARTAGES ; DIVISIBILITÉ ; DIVISION EUCLIDIENNE ; DIVISION.

MOTS III contient : NUMÉRATION ; OPÉRATION ; LOI DE COMPOSITION ; COMMUTATIVITÉ ; ASSOCIATIVITÉ ; DISTRIBUTIVITÉ ; ÉLÉMENTS REMARQUABLES POUR UNE LOI DE COMPOSITION ; PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS ; CONGRUENCES ; ORDRE ; PROPRIÉTÉS DES RELATIONS BINAIRES DANS UN ENSEMBLE ; PRÉORDRE ; COMPARAISON DES ORDRES USUELS DANS LE DICTIONNAIRE, DANS $\mathbb{N}$, DANS $\mathbb{D}^+$.

MOTS IV contient : APPLICATIONS LINÉAIRES ; PROPORTIONNALITÉ ; OPÉRATEURS MULTIPLICATIFS ; POURCENTAGES, ÉCHELLES... ; ÉQUATION, INÉQUATION ; ENSEMBLE ; CARDINAL ; APPROXIMATION.

MOTS V contient : SEGMENT, LONGUEUR ; SECTEUR, ANGLE ; VOCABULAIRE DE LA GÉOMÉTRIE ; SOLIDES ; PARALLÈLE ; VERTICAL, HORIZONTAL ; EXPOSANT, PUISSANCE.

MOTS VI contient une seule rubrique : GRANDEUR - MESURE. Et un index terminologique propre à cette rubrique.

MOTS VII contient : ANGLE ; SYMÉTRIE ; ORIENTATION ; PHASE ; ANGLE-DE-COUPLES ; REPÉRAGE. Et un index terminologique des mots mathématiques figurant dans les brochures I, II, III, IV, V et VII.

Les brochures de l'A.P.M.E.P.

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public veut être une grande équipe.

La vie d'une équipe, c'est la libre circulation de l'information entre ses membres, le droit qui appartient à chacun, le devoir qui incombe à tous, de rechercher et de poser des questions, de proposer des réponses, de remettre en cause...

Il était inéluctable que l'équipe ressentît le besoin d'éditer des brochures, et leur succès grandissant impose la nécessité de poursuivre l'œuvre entreprise, en appelant constamment l'attention des collègues sur la nécessité d'une collaboration permanente de tous.

Nous avons besoin de redéfinir périodiquement nos orientations fondamentales, et c'est dans les chartes ou les textes d'orientation que nous publions les mises à jour. Ces sortes de brochures seraient des bibles, sans le fait essentiel qu'elles ne prétendent pas détenir la vérité. Elles n'en doivent pas moins nourrir notre action.

Il faut aussi assurer à nos collègues une information de base sur la mathématique elle-même (vocabulaire, théories, diverses,...), sur les révolutions de notre époque (calculatrices, microprocesseurs,...) sur les sciences de l'éducation (didactique des disciplines, évaluation,...), sur les matériaux pour la classe (manuels scolaires...) et, naturellement, développer les thèmes qui s'en dégagent en tenant compte de la demande, soit pour la satisfaire, soit pour la compléter, soit pour la contester, arguments à l'appui.

Nos brochures pénètrent dans les classes (ainsi les *Aides Pédagogiques*) : elles doivent y subir les feux de l'expérimentation la plus large pour provoquer des débats ou des recherches complémentaires.

L'équipe doit aussi à ses membres la permanence de l'échange culturel. Nous avons beaucoup à travailler pour faciliter l'accès de tous les enseignants de mathématiques à une culture approfondie de la science qu'ils ont à faire aimer. Nous l'avons dit dans la Charte de Caen :"Le maître doit acquérir des connaissances qui dépassent largement celles du niveau de son enseignement".

La diversité des formations initiales ne simplifie pas le problème, et nous rejetons loin de nous l'idée de rédiger des exposés magistraux venant s'ajouter au nombre de ceux qui provoquèrent parfois des nausées à l'âge du lycée, ou même de l'Université.

Nous devons trouver ensemble le langage et la présentation qui susciteront de la part de tous une curiosité active pour l'Histoire des mathématiques, pour la beauté d'un très grand nombre de résultats ou de démar-

ches, pour les jeux ou les paradoxes. Le maître "doit avoir eu l'occasion de poser et de résoudre des problèmes" (Charte de Caen).

Quelques brochures ont déjà partiellement répondu à ces attentes. D'autres doivent suivre, puisque la demande en est parvenue, et nous attendons des idées et des collaborateurs.

La brochure A.P.M.E.P., enfin, n'est pas l'ouvrage qu'on se contente de lire, chacun pour son propre compte. Elle ne trouve sa rasion d'être que dans l'exploitation commune. Le lieu idéal pour cette tâche est le "chantier", réunion de plusieurs enseignants en groupes hétérogènes, où on cherche des problèmes tirés, soit de la pratique habituelle de la classe, soit de situations pêchées dans les brochures ou ailleurs.

De ces assemblées, qui veulent surtout ne pas être doctes, surgissent les idées pour les brochures nouvelles.

Maurice CARMAGNOLE

ERRATUM et COMPLÉMENT à MOTS VII

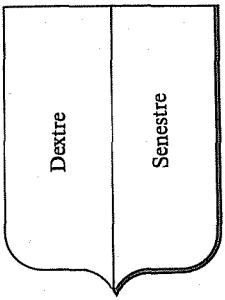
SYMÉTRIE, page 22, VII-1.1 : remplacer le début par :

"Supposons qu'un ensemble matériel admette une symétrie géométrique et que de plus deux parties quelconques géométriquement symétriques aient la même masse (ce qui se produit...".

Par ailleurs, la partie VII de la rubrique ORIENTATION a donné lieu aux remarques suivantes.

1) *Sur les appellations "droite" et "gauche"* (VII-4.1).

Les "évidentes raisons pratiques" grâce auxquelles "la position de l'observateur est connue ou imaginée d'avance" peuvent avoir varié suivant les époques. En héraldique, les appellations "dextre" et "senestre" pour les parties de l'écu sont celles qui sont indiquées ci-contre. Elles peuvent paraître paradoxales pour le lecteur moderne ou le visiteur d'un musée, qui se place en face de l'écu. Elles étaient naturelles pour l'homme médiéval, qui se plaçait derrière son écu pour se protéger.



2) *Sur les appellations "nord" et "sud"* (VII-4.2).

La petite histoire rapporte qu'une joyeuse confusion terminologique a régné à Houston en 1986 lors de la première exploitation des informations émises par Voyager 2 sur la planète Uranus. Qu'est-ce que l'axe sud-nord d'un corps planétaire ? Est-ce l'axe autour duquel le mouvement de rotation est direct, ou bien celui qui pointe vers l'hémisphère écliptique boréal ? Dans la quasi-totalité des cas les deux définitions sont équivalentes et on ne songe même pas à distinguer entre elles. Mais dans le cas d'Uranus l'axe du mouvement direct pointe vers l'hémisphère écliptique austral. Si l'on veut s'entendre, il faudra "normaliser".

PRÉFACE

La géométrie, apparue dès le tome IV de la collection MOTS, tient encore une place importante dans le présent tome VIII puisque quatre rubriques lui sont consacrées : TRANSLATION, HOMOTHÉTIE, LANGAGE VECTORIEL, VECTEURS DE LA GÉOMÉTRIE DU PLAN.

En regard de ces sujets mathématiques, un thème nouveau, intitulé MOTS FLOUS, est abordé.

*
* *

Des translations et des homothéties, aussi bien que des symétries, sont présentes dans diverses activités du Collège et même de l'Ecole. Ce n'est qu'au Lycée qu'on les considère comme des applications du plan, ou de l'espace, vers lui-même.

De là découle l'aspect assez savant des rubriques TRANSLATION et HOMOTHÉTIE ; le sujet l'exige. Certes, nous avouons volontiers avoir cédé (particulièrement dans HOMOTHÉTIE) au plaisir de la géométrie, péché de notre jeunesse, plaisir né de l'élégance des méthodes employées et de la beauté des résultats obtenus. Mais surtout, nous avons pensé qu'en présentant ces sujets de façon quelque peu technique et développée, nous pouvions rendre service à nos jeunes collègues dont les connaissances en géométrie pure sont parfois légères, vu leur éducation linéairement algébrique.

Dès à présent, nous pouvons annoncer que ROTATION paraîtra dans MOTS IX et que, parmi nos projets, figure inévitablement SIMILITUDE.

*
* *

Le langage vectoriel est introduit dès le Collège et est couramment employé au Lycée. Etant donné l'importance du sujet, deux rubriques lui sont consacrées : LANGAGE VECTORIEL et VECTEURS DE LA GÉOMÉTRIE DU PLAN. Elles intéresseront tout particulièrement les professeurs qui enseignent dans les classes de Quatrième, Troisième et Seconde.

Peut-être certains lecteurs seront-ils étonnés, voire déçus, de ne pas trouver dans ces rubriques une définition du mot *vecteur*. De même ne trouveront-ils pas ici une description de la syntaxe du langage vectoriel. Nous pensons que, aux niveaux ci-dessus évoqués tout au moins, de telles considérations sont inutiles et qu'il est bien préférable de mettre en place un langage économique et efficace et de le faire fonctionner. A cet égard, le titre de l'une des rubriques est parfaitement explicite. D'autre part, nous avons insisté sur le fait que ce langage s'enracine dans une étude géométrique préalable, faute de quoi il risquerait fort de se réduire à un formalisme vain.

Les deux rubriques citées ci-dessus seront prolongées par la rubrique VECTORIEL (à paraître dans MOTS IX).

*
* *

La nouveauté de ce tome VIII est le début de la rubrique MOTS FLOUS ; de quoi s'agit-il ?

Les mathématiques, comme les autres disciplines, utilisent un vocabulaire spécifique dont les termes sont en principe définis avec précision. L'enseignement des mathématiques, lui, ne peut se passer d'un langage moins précis mais indispensable pour établir la communication entre l'élève qui sait peu ou mal et le maître qui, normalement, sait plus et mieux.

C'est ici qu'interviennent des mots, auxiliaires didactiques, dont le sens n'est pas clairement fixé et peut changer selon le contexte et l'auteur. Que répondrions-nous si on nous demandait la signification de *démontrer,* ou de *simplifier,* ou même de *calculer* ? La comparaison de nos réponses ne serait-elle pas étonnante et instructive ?

Ces mots, aux sens divers ou incertains, sont nombreux et sont probablement à l'origine de difficultés pour les élèves. Convaincus que le sens d'un mot dépend en grande partie de son contexte, nous nous sommes contentés de cerner les sens les plus courants, de rapprocher des mots aux sens voisins, de souligner des dangers, de dénoncer certains abus.

En somme, il s'agit d'une mise en garde quant au bien-fondé du discours que nous tenons à nos élèves. Puisse-t-elle éveiller un écho chez nos lecteurs.

INVARIANT (87)

Soit A une application dans un ensemble E (c'est-à-dire une application de source E et de but E). Soit M un élément de E .

I.

M est *invariant* par A signifie M est sa propre image par A.

Exemples :

• Par la symétrie par rapport à une droite, les points de cette droite sont les seuls points invariants.

• Par une homothétie de rapport autre que 1, le centre de l'homothétie est le seul point invariant.

• Par l'application $g \begin{vmatrix} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto x^2 \end{vmatrix}$, 0 et 1 sont les seuls nombres invariants (car ce sont les solutions de l'équation dans $\mathbf{R}$: $x^2 = x$).

• Par l'application $h \begin{vmatrix} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto |x| \end{vmatrix}$, les nombres invariants sont les nombres positifs (zéro compris).

• Par l'application $k \begin{vmatrix} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \mapsto x^2 + 1 \end{vmatrix}$, aucun réel n'est invariant (du fait que l'équation dans $\mathbf{R}$: $x^2 + 1 = x$ n'a pas de solution).

II. Soit F un sous-ensemble de E .

F est *invariant* par A signifie F est sa propre image par A .

(*image*, ici, est pris au sens de II de la rubrique IMAGE-ANTÉCÉDENT).

Si chaque point de F est invariant (au sens du I), on dit que F est *invariant point par point.*

Si non, c'est-à-dire si F est invariant sans que chaque point de F soit invariant, on dit que F est *globalement invariant.*

Une autre attitude est possible : quand on vient de démontrer que F est invariant, mais qu'on ne sait pas s'il l'est point par point ou non,

certains disent alors que F est globalement invariant, l'adverbe "globalement" jouant un rôle uniquement rhétorique ; en fait, "globalement invariant" est alors synonyme d'"invariant".

Dans les deux acceptions de "globalement invariant", on utilise aussi l'expression "invariant dans son ensemble".

Reprenons les exemples de I.

• Par la symétrie par rapport à une droite D, toute droite perpendiculaire à D est globalement invariante ; D est invariante point par point.

• Par une homothétie de rapport autre que 0 et 1, toute droite passant par le centre de l'homothétie est globalement invariante.

• Par g, $]0;1[$ est invariant point par point ; il vaudrait mieux dire, quand E n'est pas un ensemble de points : "invariant élément par élément", ou ici "invariant nombre par nombre".

L'intervalle [0;1] et $\mathbf{R}^+$ sont globalement invariants ; [0;5] ne l'est pas.

• Par h, toute partie de $\mathbf{R}^+$ est invariante nombre par nombre. Aucune partie de $\mathbf{R}^-$ n'est invariante.

• Par k, aucune partie de $\mathbf{R}$ n'est globalement invariante (mais l'absence de nombres invariants ne suffit pas pour le prouver).

III. Le mot *invariant* est parfois remplacé par *fixe*. C'est ainsi que l'axe d'une symétrie est parfois dit "droite des points fixes".

Cet usage ne nous semble pas heureux, car *fixe* s'emploie valablement en cinématique (où il s'oppose à *mobile*) ; or, le vocabulaire de la géométrie et de l'algèbre n'a déjà que trop tendance à évoquer la cinématique.

IMAGE - ANTÉCÉDENT (87)

I. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de l'ensemble E vers l'ensemble F, c'est-à-dire de source E et de but F. Soit G son graphe, sous-ensemble du produit cartésien $E \times F$.

Appelons b un élément de E, c un élément de F. Les six phrases suivantes ont la même signification :

1) $(b,c) \in G$
2) $b \mathcal{R} c$

3) Par $\mathcal{R}$, *b a pour image c.*
4) Par $\mathcal{R}$, *c est image* de *b.*
5) Par $\mathcal{R}$, *c a pour antécédent b.*
6) Par $\mathcal{R}$, *b est antécédent* de *c.*

Cette formulation ne préjuge pas du nombre d'images, du nombre d'antécédents, d'un élément. Les formulations "*c* est *l'*image de *b*", "*b* est *l'*antécédent de *c*", qui signifient que *c* est la *seule* image de *b*, *b* est le *seul* antécédent de *c*, seraient, dans les définitions ci-dessus, incorrectes.

A chaque élément de E	A chaque élément de F
on peut associer :	
l'ensemble de ses images par $\mathcal{R}$ (c'est l'ensemble vide si l'élément n'a pas d'image).	l'ensemble de ses antécédents par $\mathcal{R}$ (c'est l'ensemble vide si l'élément n'a pas d'antécédent).

Exemples :

• Par la relation "est plus grand que" dans **N**,

l'ensemble des images de 3 est $\{0;1;2\}$	l'ensemble des antécédents de 3 est le complémentaire dans **N** de $\{0;1;2;3\}$

• Par la relation "est parallèle à" dans l'ensemble des droites du plan,

l'ensemble des images d'une droite est la direction de cette droite.	l'ensemble des antécédents d'une droite est la direction de cette droite.

(Plus généralement, par une relation d'équivalence, l'ensemble des images d'un élément, qui est aussi l'ensemble de ses antécédents, est sa classe d'équivalence).

II. Par extension :

Soit A une partie de E.	Soit B une partie de F.
La réunion des ensembles des images par $\mathcal{R}$ des éléments de A est l'*ensemble-image* de A par $\mathcal{R}$.	La réunion des ensembles des antécédents par $\mathcal{R}$ des éléments de B est l'*ensemble-antécédent* de B par $\mathcal{R}$.

que l'on abrège souvent en :

l'image de A *par* $\mathcal{R}$.	*l'antécédent de* B *par* $\mathcal{R}$.

Exemples :

• Par une translation,

l'image d'un cercle est un cercle.	l'antécédent d'un cercle est un cercle.

• Dans le plan, par projection orthogonale sur une droite,

l'image d'un cercle est un segment.	l'antécédent d'un segment est une bande de plan.

Dans un contexte plus élaboré, on utilise aussi les expressions suivantes, qui n'ont pas leur place au Collège :

image directe de A au lieu de *ensemble-image de* A.	*image réciproque de* B au lieu de *ensemble-antécédent de* B.

III. Le langage des fonctions et des applications présente quelques particularités.

Lorsque $\mathcal{R}$ est une fonction, la phrase 2) du paragraphe I s'écrit le plus souvent : $c = \mathcal{R}(b)$.

En outre, plus rien n'empêche ici de dire : "Par $\mathcal{R}$, c est *l'*image de b" ; on dit aussi : "A b, $\mathcal{R}$ *associe* c".

Exemple : la translation de vecteur $\vec{v}$ est l'application de l'espace vers lui-même qui à tout point M *associe* le point M' tel que

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}.$$

Par la translation de vecteur $\vec{v}$, non nul, M' est associé à M, mais M n'est pas associé à M'.

En fait, M est associé à M' par une autre translation : la translation de vecteur $-\vec{v}$.

La phrase "M et M' sont associés par translation" est sans signification. Par contre, la phrase "M et M' sont associés par symétrie" (qu'il s'agisse d'une symétrie par rapport à un point, une droite ou un plan) est correcte : par la *même* symétrie, M' est associé à M, et M est associé à M' (voir SYMÉTRIE, III-4.2).

TRANSLATION (87)

I. Mouvement de translation (en mécanique)
II. Translation (en géométrie du plan)
III. Propriétés des translations en géométrie du plan
IV. Composition des translations en géométrie du plan
V. Translation en géométrie de la droite et en géométrie de l'espace
VI. Retour à la mécanique

L'emploi du mot *translation* dans son acception mathématique présente des dangers du fait de sa proximité linguistique avec *transfert* et *transférer,* voire *transport* et *transporter,* qui, tous, évoquent l'idée d'un déplacement physique.

En mathématiques, le mot *translation* a deux sens distincts bien qu'apparentés :

- en mécanique, l'étude des *mouvements de translation* rend compte de l'approche expérimentale d'un certain type de déplacements physiques ;
- par contre, en géométrie toute idée de mouvement, de transfert ou de transport doit être scrupuleusement écartée ; le mot *translation* y désigne un certain type d'application de la droite vers elle-même, ou du plan vers lui-même, ou de l'espace vers lui-même.

I. MOUVEMENT DE TRANSLATION (EN MÉCANIQUE)

I — 1. Un escalier roulant (fig. 1) est conçu de façon que ses marches restent constamment horizontales, ce qui permet à ses usagers de s'y maintenir sans effort en position verticale, du moins en l'absence d'accélération et de freinage brusques.

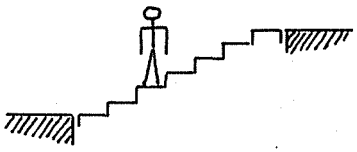


Fig. 1

Il en va de même pour une cabine de téléphérique (fig. 2) ou pour une cabine de la Grande Roue des foires (fig. 3), si de plus le mouvement d'entraînement est suffisamment lent pour que la force centrifuge soit négligeable et qu'il n'y ait pas d'oscillation.

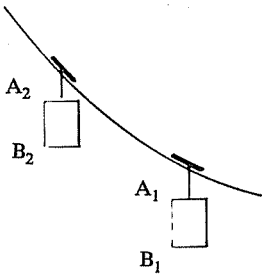


Fig. 2

En observant l'environnement, un passager de l'un de ces véhicules peut d'ailleurs vérifier qu'il reste en position verticale.

Ces moyens de transport s'opposent à d'autres : par exemple, un bateau qui vogue par gros temps. Dans ce cas, le pont oscille en permanence, de sorte que l'horizon bouge sans cesse ; et l'on sait d'expérience quels déboires physiologiques cela peut entraîner.

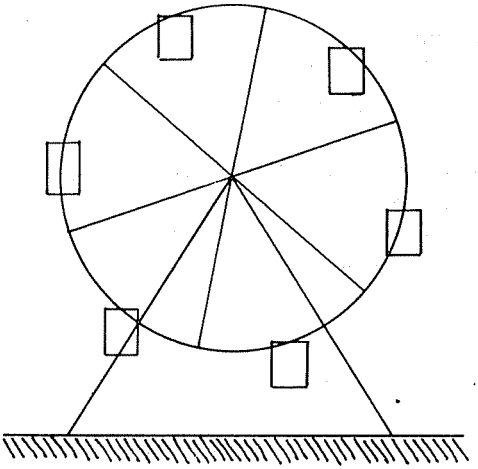


Fig. 3

I — 2. Examinons les positions successives des objets transportés au cours de leurs déplacements.

Sur la figure 2, A_1 et B_1 désignent respectivement les positions de deux coins de la cabine à un certain instant ; A_2 et B_2 désignent les positions des mêmes coins de la même cabine à un autre instant.

Dans les conditions du I-1, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_2B_2}$. Plus généralement, si A désigne le coin de la cabine qui a occupé successivement les positions A_1 et A_2 et si B désigne le coin qui a occupé les positions B_1 et B_2, le mouvement du téléphérique est conçu de façon que $\overrightarrow{AB}$ soit un vecteur constant au cours du déplacement physique. Il en est de même pour toute autre paire de points de la cabine.

La même constatation vaut pour le mouvement de n'importe quelle marche de l'escalier roulant (fig. 1) et pour le mouvement de n'importe quelle cabine de la Grande Roue (fig. 3).

Cette propriété est caractéristique des *mouvements de translation d'un solide* (*).

I — 3. Les trois mouvements de translation évoqués en I-1 se distinguent les uns des autres par la nature des trajectoires des points en mouvement. Le mot *trajectoire* désigne ici l'ensemble des positions prises par un point de l'objet au cours du mouvement.

Sauf aux extrémités de l'escalier (fig. 1), la trajectoire de chacun des points de n'importe quelle marche est un segment de droite. On exprime ce fait en parlant de *mouvement rectiligne de translation.*

Chaque point de n'importe quelle cabine de la Grande Roue (fig. 3) a pour trajectoire un cercle (**), sous réserve que la cabine ne soit soumise à aucune oscillation autour de l'axe auquel elle est suspendue. Dans ce cas, il s'agit d'un *mouvement circulaire de translation.*

En ce qui concerne le téléphérique (fig. 2), et toujours en l'absence de toute oscillation de la cabine, les trajectoires sont des courbes qui sont hors du champ des mathématiques élémentaires.

I — 4. En additionnant $\overrightarrow{B_1A_2}$ à chaque membre de l'égalité $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{A_2B_2}$ de I-2, on obtient $\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{B_1B_2}$.

Plus généralement, si M_1 et M_2 désignent les positions d'un point M de la cabine aux deux instants considérés, $\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{A_1A_2}$; ce vecteur ne dépend donc que de ces instants.

II. TRANSLATION (EN GÉOMÉTRIE DU PLAN)

II — 1. Définition

P désignant le plan, soit un vecteur $\vec{v}$;
translation de vecteur $\vec{v}$
signifie
application du plan P vers lui-même qui, à chaque point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'}=\vec{v}$.

Désignons la translation de vecteur $\vec{v}$ par $T_{\vec{v}}$. On peut utiliser les notations et le langage des applications :

$$T_{\vec{v}} \left| \begin{array}{l} P \to P \\ M \mapsto M' \end{array} \right. \qquad T_{\vec{v}}(M)=M'$$

M' est l'image de M par $T_{\vec{v}}$.

(*) En mécanique, l'expression *mouvement de translation* est indissociable. L'abréger en "translation" présente des risques, au moins pour l'utilisateur non averti.

(**) Ce cercle a le même rayon que la Grande Roue et, sauf exceptions, n'est pas centré sur l'axe de celle-ci.

II — 2. L'égalité $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ équivaut à l'égalité $\overrightarrow{M'M} = -\vec{v}$. De sorte qu'on peut considérer indifféremment M' comme l'image de M par $T_{\vec{v}}$ ou M comme l'image de M' par $T_{-\vec{v}}$.

Chaque point M' a donc un antécédent unique ; autrement dit, les translations sont des bijections de P vers P. De plus, la bijection réciproque de la translation de vecteur $\vec{v}$ est la translation de vecteur $-\vec{v}$.

III. PROPRIÉTÉS DES TRANSLATIONS EN GÉOMÉTRIE DU PLAN

III — 1. Du fait que l'égalité $\overrightarrow{MM'} = \vec{0}$ équivaut à l'égalité M = M', il résulte que :

- tout point du plan est invariant par la translation de vecteur $\vec{0}$ (*) ;
- aucun point du plan n'est invariant par une translation de vecteur autre que $\vec{0}$.

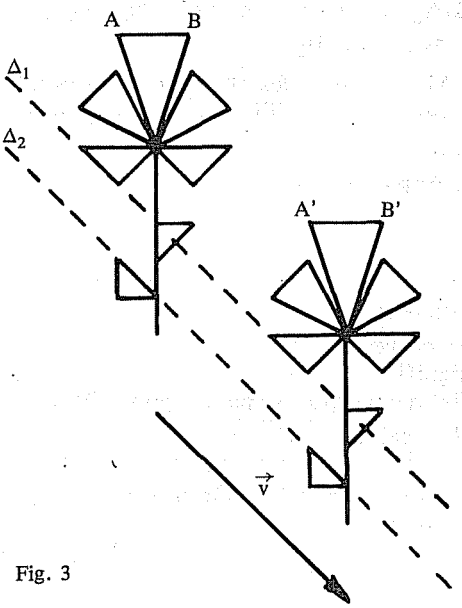


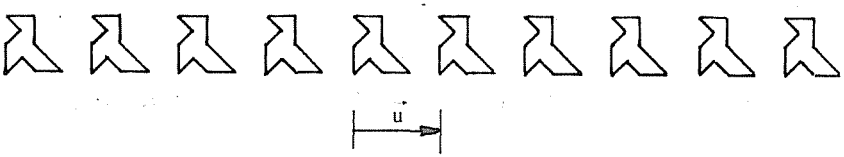
Fig. 3

Si $\vec{v}$ est un vecteur non nul,

- toute droite dont $\vec{v}$ est un vecteur directeur (par exemple, la droite Δ_1 ci-contre) est invariante par $T_{\vec{v}}$;
- naturellement, les réunions de telles droites le sont également (par exemple, la bande de frontière $\Delta_1 \cup \Delta_2$ ci-contre) ;
- aucune autre droite n'est invariante.

(*) Cette propriété justifie le fait que la translation de vecteur $\vec{0}$ soit parfois appelée *application-identité* de P vers P ou, de façon abrégée, *identité de P*. On peut la noter I_P. Ainsi : $T_{\vec{0}} = I_P$.

D'autres parties du plan sont invariantes par certaines translations ; les frises en sont les exemples les plus connus. La frise ci-dessous, qu'on imagine illimitée dans les deux sens, est invariante par la translation de vecteur $\vec{u}$.



III — 2. Considérons deux points A et B et leurs images respectives A' et B' par $T_{\vec{v}}$. Aux termes mêmes de la définition de II-1, ABB'A' est un parallélogramme. Il en résulte que, par n'importe quelle translation,

- quels que soient les points X et Y, leurs images respectives X' et Y' sont telles que $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X'Y'}$;
- toute droite D a pour image une droite parallèle à D ;
- tout segment de longueur L a pour image un segment de même longueur L ;
- toute surface d'aire $\mathcal{A}$ a pour image une surface de même aire $\mathcal{A}$.

On abrège souvent ces formulations en disant que n'importe quelle translation *conserve* chaque vecteur, chaque direction-de-droites, chaque longueur, chaque aire (voir CONSERVER).

Entre autres conséquences de ces propriétés, on trouve que, par n'importe quelle translation, le milieu de deux points a pour image le milieu de leurs images. Plus généralement, le barycentre de n points affectés de coefficients a pour image le barycentre des images de ces points respectivement affectées des mêmes coefficients.

Enfin, toute translation conserve chaque angle-de-secteurs et chaque angle-de-couples, donc aussi l'orientation.

En résumé, les translations sont des isométries positives (voir ORIENTATION).

III — 3. Propriété caractéristique des translations en tant qu'applications du plan vers lui-même

Nous avons signalé ci-dessus que n'importe quelle translation conserve chaque vecteur.

Examinons maintenant une application f de P vers P qui, quels que soient les points X et Y, leur associe respectivement des points X' et Y' tels que $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X'Y'}$.

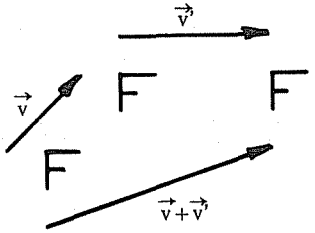
Du fait que l'égalité $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{X'Y'}$ équivaut à l'égalité $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{YY'}$, il résulte que pour tout point X, d'image X' par f, $\overrightarrow{XX'}$ est un vecteur constant. En d'autres termes, f est une translation.

En résumé, toute translation conserve chaque vecteur, et toute application de P vers P qui conserve chaque vecteur est une translation.

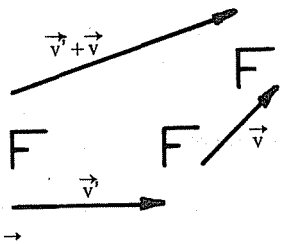
IV. COMPOSITION DES TRANSLATIONS EN GÉOMÉTRIE DU PLAN

IV — 1. Composons les translations $T_{\vec{v}}$ et $T_{\vec{v}'}$.

Considérons l'application $T_{\vec{v}}$ suivie de $T_{\vec{v}'}$, notée $T_{\vec{v}'} \circ T_{\vec{v}}$.



Considérons l'application $T_{\vec{v}'}$ suivie de $T_{\vec{v}}$, notée $T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{v}'}$.



$$\vec{v}+\vec{v}' = \vec{v}'+\vec{v}$$

Comme le suggèrent les dessins ci-dessus, pour n'importe quels vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{v}'$:

$$T_{\vec{v}'} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}+\vec{v}'} \quad \text{et} \quad T_{\vec{v}'} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{v}'}$$

De plus, $$T_{\vec{v}} \circ T_{\vec{0}} = T_{\vec{v}} \quad \text{et} \quad T_{-\vec{v}} \circ T_{\vec{v}} = T_{\vec{0}}$$

En outre, la composition des translations est associative (comme toute composition d'applications).

On résume les propriétés précédentes en disant que l'ensemble des translations du plan, muni de la composition des applications, est un groupe commutatif.

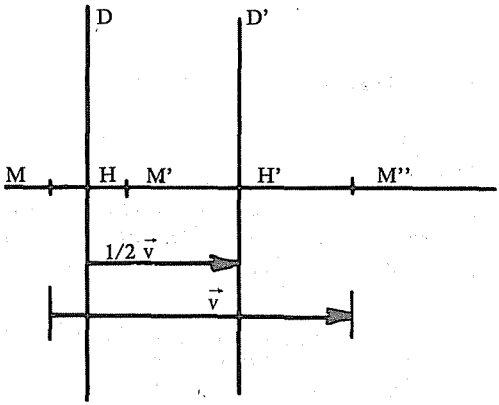
Au passage, on constate que le comportement des translations vis-à-vis de la composition des applications est calqué sur celui des vecteurs vis-à-vis de l'addition des vecteurs. En langage mathématique, on traduit ce fait en disant que le groupe des translations du plan et le groupe additif des vecteurs du plan sont *isomorphes.*

IV — 2. Comme les translations conservent la longueur et l'orientation, le groupe des translations du plan est un sous-groupe du groupe des isométries positives du plan (voir MOTS VII, ORIENTATION, VI-3).

Par ailleurs, les translations dont les vecteurs ont une direction donnée (ou, si l'on préfère, l'ensemble des translations qui conservent globalement une droite donnée) constituent un sous-groupe du groupe des translations.

IV — 3. Puisque les translations sont des isométries, on peut les décomposer en réflexions (*) (voir ORIENTATION, VI-3.4).

La translation de vecteur $\vec{v}$ est la composée $S_{D'} \circ S_D$ de deux réflexions par rapport à deux droites parallèles, de direction perpendiculaire à celle de $\vec{v}$, telle que D' soit l'image de D par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{v}$.



En effet :
Soit M un point quelconque, M' son image par S_D, M" l'image de M' par $S_{D'}$ et H et H' les points où la droite (MM') coupe respectivement D et D'.

$$\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{HM'}$$
$$\overrightarrow{M'M''} = 2\,\overrightarrow{M'H'}$$

Par addition : $\overrightarrow{MM''} = 2\,\overrightarrow{HH'}$, donc $\overrightarrow{MM''} = \vec{v}$.

La décomposition ainsi obtenue n'est d'ailleurs pas unique : toute droite de direction perpendiculaire à celle de $\vec{v}$ peut être l'axe de l'une des réflexions composantes.

Mais toute translation peut aussi être décomposée en deux symétries centrales (voir HOMOTHÉTIE, VI-2). Là encore, la décomposition n'est pas unique.

V. TRANSLATION EN GÉOMÉTRIE DE LA DROITE ET EN GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

La définition donnée en II-1 subsiste lorsqu'on y remplace "plan P" par "droite D" ou par "espace E".

(*) *Réflexion* est synonyme de "symétrie orthogonale par rapport à une droite" en géométrie du plan (et de "symétrie orthogonale par rapport à un plan" en géométrie de l'espace) (voir RÉFLEXION dans MOTS IX).

De même que dans le cas du plan,

- aucun point n'est invariant par une translation de vecteur autre que $\vec{0}$;
- tout point est invariant par la translation de vecteur $\vec{0}$.

Sur la droite comme dans l'espace, les translations conservent les longueurs, les vecteurs, l'orientation. Dans l'espace, elles conservent les directions de droites, les directions de plans, les aires et les volumes.

VI. RETOUR A LA MÉCANIQUE

VI — 1. D'après I-4, on peut caractériser un mouvement de translation autrement qu'en I-2.

Dire qu'un solide est animé d'un mouvement de translation (au sens de I), c'est dire que les différentes positions qu'il occupe au cours de son mouvement sont les images les unes des autres par des translations au sens de II.

Cela fait apparaître une parenté entre *mouvement de translation*, en mécanique, et *translation*, en géométrie, mais ne doit pas masquer la différence essentielle entre les deux notions : si un solide est animé d'un mouvement de translation, la connaissance de ses positions à deux dates données détermine la translation (géométrique) par laquelle une des positions est l'image de l'autre, mais ne donne aucune indication sur les positions intermédiaires que le solide occupe au cours du mouvement.

Cette parenté explique l'ambivalence du mot *translation* ; ambivalence consacrée par une tradition solidement établie dont il faut bien qu'on s'accommode, mais en ayant conscience de la difficulté réelle qu'elle recèle pour les débutants.

VI — 2. La translation (géométrique) est encore liée d'une autre façon au mouvement de translation : une fois donnée la trajectoire d'un point d'un solide animé d'un mouvement de translation (par exemple celle d'un coin A de la cabine du téléphérique du I), la trajectoire de tout autre point B de ce solide est l'image de la précédente par la translation (géométrique) de vecteur $\overrightarrow{AB}$ puisque chaque vecteur tel que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur constant.

VI — 3. Le sous-groupe des translations qui conservent une droite donnée D (extension à l'espace de IV-2) conserve les surfaces cylindriques, ou plus particulièrement prismatiques, engendrées par des droites parallèles à D. En technologie, de telles surfaces peuvent servir de guides à des mouvements rectilignes de translation : mouvement d'un tiroir dans son logement, d'un piston dans un cylindre.

HOMOTHÉTIE (87)

I. Des processus naturels de croissance
II. Des processus d'agrandissement ou de réduction
III. Une démarche inverse
IV. Homothétie en géométrie du plan
V. Propriétés des homothéties de rapport non nul en géométrie du plan
VI. Composition des homothéties et translations en géométrie du plan
VII. Homothétie en géométrie de la droite, en géométrie de l'espace
VIII. Homothétie et orientation

Cette rubrique comporte deux parties :

Les paragraphes I, II et III constituent, à partir d'objets ou de techniques empruntés au monde matériel, une approche intuitive de l'homothétie des mathématiciens.

Les paragraphes IV à VIII présentent une description de celle-ci, en géométrie élémentaire du plan et de l'espace.

I. DES PROCESSUS NATURELS DE CROISSANCE

I — 1. La croissance de la matière, vivante ou même inerte, se fait souvent par des adjonctions successives qui respectent, au moins de façon approchée, les proportions préexistantes de l'être ou de l'objet initial, et les directions qui lui sont liées.

La coupe d'un tronc d'arbre présente des cernes qui s'apparentent à des cercles concentriques (fig. 1).

On trouve une disposition analogue sur une écaille de poisson, bien que les courbes, témoins des différentes étapes de la croissance, ne soient pas assimilables à des cercles (fig. 2).

La coupe d'un cristal de tourmaline révèle une structure prismatique si régulière que le dessin de cette coupe semble extrait d'un livre de géométrie (fig. 3).

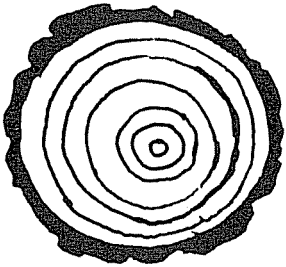


Fig. 1 (*)

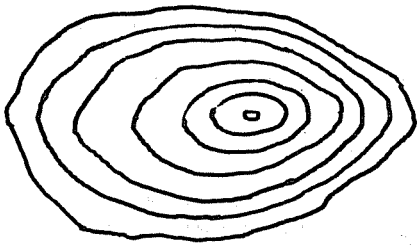


Fig. 2 (*)

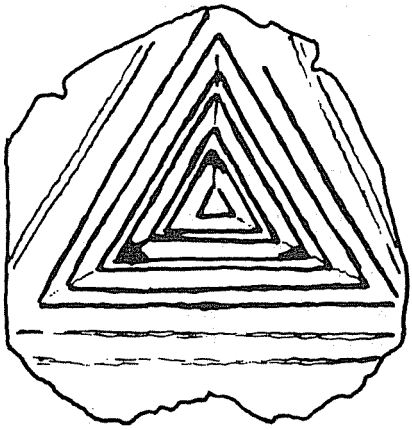


Fig. 3 (*)

On retrouve cette croissance concentrique, de façon moins rigoureuse il est vrai, dans les extensions successives de certaines villes, même sans que cela ait été prémédité ; l'histoire de Paris a laissé des traces d'une croissance de ce genre : deux grands axes routiers perpendiculaires et trois anneaux de boulevards à peu près concentriques (coïncidant souvent avec des limites actuelles d'arrondissement).

(*) La fig. 1 est extraite de Life, Le Monde des Sciences, La croissance, p. 11
La fig. 2 est extraite de Life, Le Monde Vivant, Les Poissons, p. 36
La fig. 3 est extraite de Life, Le Monde Vivant, Les Mathématiques, p. 90

Parfois, au contraire, cette structure a été voulue par l'urbaniste : c'est le cas du projet de Claude-Nicolas Ledoux (XVIIIe siècle) pour la saline d'Arc-et-Senans, malheureusement inachevée. Cette volonté se manifeste clairement dans le plan de Palmanova, Italie (1593), en dépit de certaines irrégularités dues à des contraintes de construction, aux malheurs des temps ou à l'inconstance des hommes (fig. 4, décalque d'une photo aérienne).

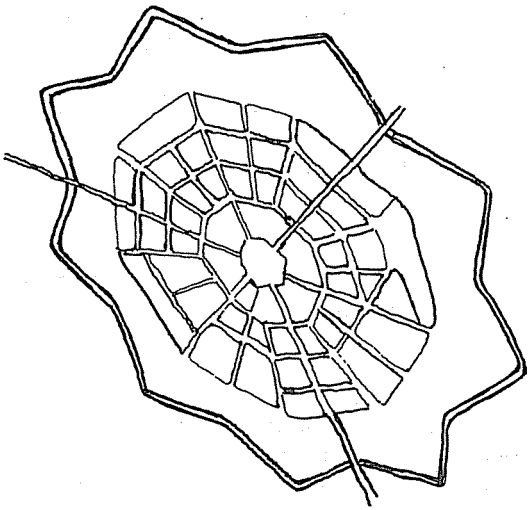


Fig. 4 (*)

Avec les Pyramides, on atteint une rigueur quasi-géométrique. Leur cas ne diffère des exemples précédents que sur deux points, qui n'ont rien d'essentiel ici : au cours de la construction, d'une part les assises successives sont allées en décroissant, d'autre part, au lieu d'être situées dans un plan, elles se sont étagées dans l'espace.

(*) La fig. 4 est extraite de Le Symbolisme des rues et des cités, de Gouvion et Van de Mert (éd. Berg), p. 241.

I — 2. Le centre de la coupe d'un tronc d'arbre, le germe du cristal, la place du Châtelet à Paris, le centre de Palmanova, le sommet de la Grande Pyramide jouent, avec plus ou moins de rigueur, le rôle d'un point, O, d'où émanent des demi-droites le long desquelles s'est faite l'évolution.

Ces objets évoluant dans le temps de façon continue, proposons-nous d'en étudier deux états en faisant abstraction, comme nous l'avons fait à propos de mouvements de translation (voir TRANSLATION, VI), des états intermédiaires et des dates auxquelles ils se situent : deux cernes de la coupe du tronc d'arbre, deux contours de la coupe du cristal, les enceintes de la ville à deux époques de son histoire, les assises de la Pyramide à deux stades de la construction.

Cela revient à considérer certaines transformations *géométriques* par lesquelles ces états apparaîtront comme images les uns des autres, et ce sont ces transformations qui vont être étudiées dans la présente rubrique.

II. DES PROCÉDÉS D'AGRANDISSEMENT OU DE RÉDUCTION

Etant donné un motif plan F, qu'on appellera ici l'*original*, supposons qu'on veuille en faire une copie, agrandie ou réduite, en s'inspirant de ce qui précède. On utilise pour cela des procédés graphiques ou optiques qui font intervenir des demi-droites issues d'un point qui jouera le rôle du point O évoqué en I-2.

II — 1. Pour agrandir un original dans le rapport 2 (on dit aussi : à l'échelle 2), choisissons un point Ω, traçons les demi-droites [ΩA), [ΩB), [ΩC), ... qui passent par des points A, B, C, ... de l'original, et construisons sur celles-ci, comme sur la fig. 5, les points A', B', C', ... tels que

$$\Omega A' = 2\,\Omega A \quad , \quad \Omega B' = 2\,\Omega B \quad , \quad \Omega C' = 2\,\Omega C \quad ...$$

Nous appellerons *images* de A, B, C, ... les points A', B', C', ...

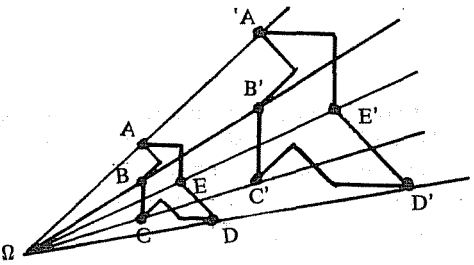


Fig. 5

On peut vérifier que, pour toute paire de points M, N de l'original, dont les images sont respectivement M' et N' :

- le segment [MN] a pour image, point par point, le segment [M'N'] ;
- la droite (MN) a pour image, point par point, la droite (M'N') et ces droites sont parallèles ; en particulier si Ω, M, N sont alignés, M, N, M' et N' sont alignés ;
- la longueur M'N' est égale à 2 MN ; cette dernière égalité est conforme à l'idée que nous nous faisons d'une copie de F agrandie dans le rapport 2 : l'ensemble F' des points A', B', C', ... est une solution du problème posé (*).

Notons qu'on peut regarder F' comme l'original ; F en est alors une copie, mais réduite dans le rapport 1/2, inverse de 2. Agrandissement et réduction relèvent donc du même procédé.

Tout nombre strictement positif h autre que 1 peut, dans ce qui précède, remplacer 2 :

$$\Omega A' = h\,\Omega A \quad , \quad \Omega B' = h\,\Omega B \quad , \quad \Omega C' = h\,\Omega C \ , \ \ldots$$

Si $h > 1$, la copie est un agrandissement ;
si $h < 1$, la copie est une réduction.

Nous avons exclu le cas où $h = 1$ parce qu'il ne donne ni agrandissement, ni réduction. Quant au cas où $h = 0$, la construction donnerait une copie F' "réduite" au point Ω ; la miniaturisation serait vraiment poussée à l'extrême, et tout espoir d'agrandissement ultérieur, en particulier de retour à F, serait perdu.

II — 2. Le nombre h étant encore le rapport $\frac{\Omega A'}{\Omega A}$, on peut adopter, par exemple pour des raisons pratiques, une construction qui ne diffère de la précédente qu'en ceci : les points A', B', C', ... sont construits sur les demi-droites opposées à [ΩA), [ΩB), [ΩC), ... Les conclusions sont les mêmes qu'en II-1.

On retrouve une telle disposition dans l'espace avec la chambre noire, ancêtre des procédés optiques de reproduction, de l'appareil photographique en particulier : un trou assez petit, percé dans une paroi de la chambre, joue le rôle du point Ω, et les rayons lumineux jouent celui des droites (AA'), (BB'), (CC'), ... Dans ce cas l'original n'est sûrement pas situé dans le plan de sa copie ; pourtant, si l'original est un motif plan F et si son plan est parallèle à celui de la copie F' (fig. 6), le rapport $\frac{\Omega A'}{\Omega A}$ est encore égal à $\frac{\Omega B'}{\Omega B}$, à $\frac{\Omega C'}{\Omega C}$, ... et on tire de là des conclusions analogues à celles de II-1.

(*) Pour employer un autre langage : les dimensions de F' sont proportionnelles à celles de F, et le rapport de proportionnalité des longueurs est 2 (voir PROPORTIONNALITÉ et GRANDEUR-MESURE, V-2).

Au contraire, si cette condition de parallélisme n'est pas respectée (voir la fig. 7 où la face perforée de la chambre noire a été légèrement relevée), on vérifie qu'il n'est plus possible de dire que F' est une copie de F au sens utilisé depuis le début de II : ainsi le cadre rectangulaire qui entoure F a pour image un cadre trapézoïdal entourant F' (*).

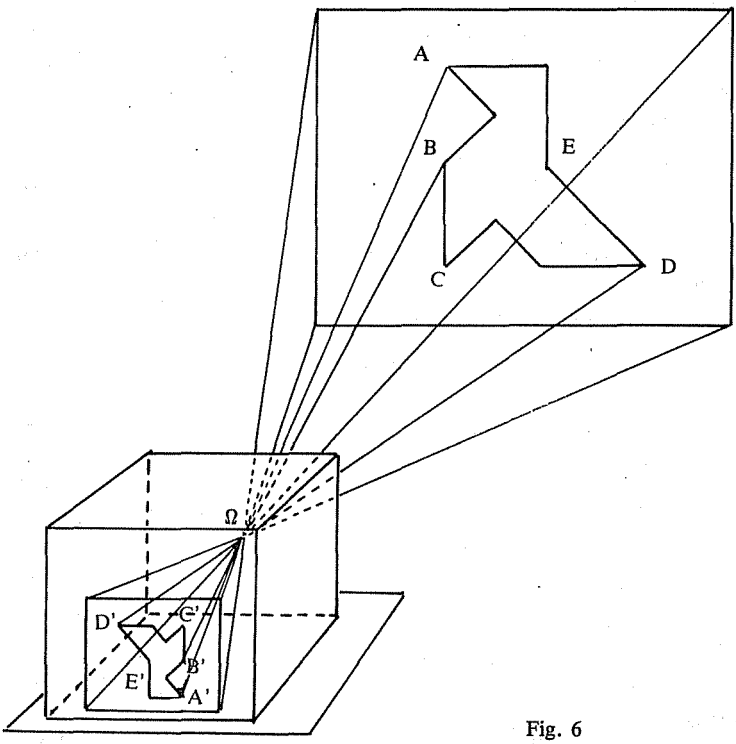


Fig. 6

(*) A cet égard, les appareils photographiques ou les appareils de projection ne diffèrent pas fondamentalement de la chambre noire (sauf emploi de systèmes optiques particuliers). La photographie d'une peinture n'est une reproduction fidèle que si, lors de la prise de vue, le plan de la pellicule et celui de la peinture sont parallèles ; une photographie aérienne ne représente sans déformation le terrain supposé horizontal que si l'axe de l'appareil photographique est vertical (ce ne fut pas le cas de la photo dont est tirée la fig. 4). Même nécessité de parallélisme pour la diapositive et l'écran sur lequel on la projette ; si on cherche, en inclinant le projecteur, à obtenir une image située plus haut sur l'écran (supposé vertical), le parallélisme est détruit et l'image est déformée.

A plus forte raison nous n'avons pas à envisager ici la chambre noire ou l'appareil photographique dans leur rôle habituel : donner d'un motif non plan (un paysage, un visage) une image plane. La condition de parallélisme serait alors dénuée de signification et les déformations sont inévitables.

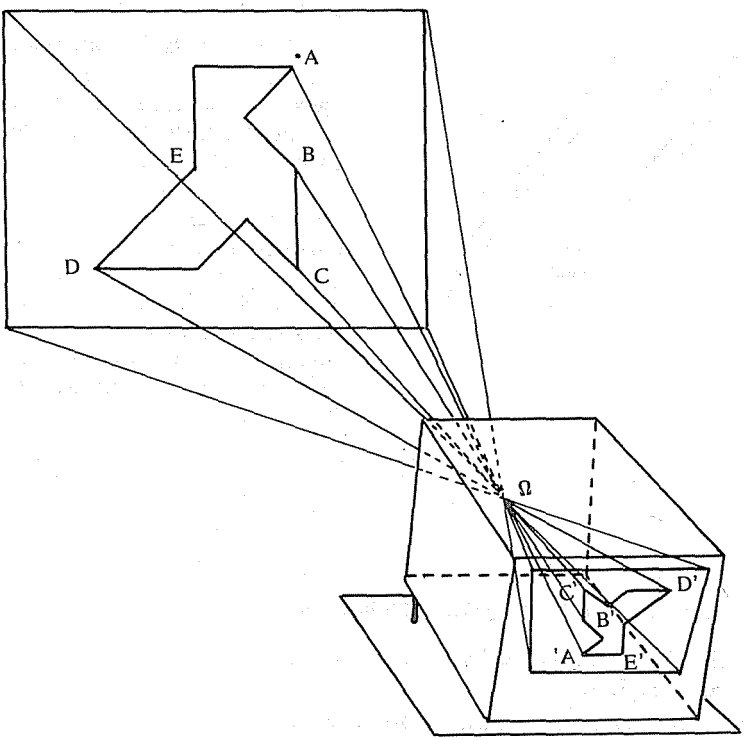


Fig. 7

II — 3. Pantographe

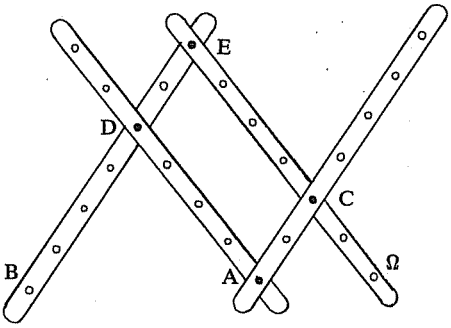


Fig. 8

Cet appareil, qu'on trouve dans les magasins d'articles de dessin, réalise mécaniquement des agrandissements ou des réductions.

.Aux détails de réalisation près, il s'agit (fig. 8) de quatre tiges comportant des trous équidistants, qu'on assemble, en A, C, D, E par exemple, à l'aide de boulons et d'écrous de façon que ACED soit un parallélogramme articulé et que le trou Ω de la barre CE, le trou B de la barre ED et le trou A soient alignés. On vérifie en effet, lors des déformations du parallélogramme, que Ω, A et B restent alignés et que le rapport $\frac{\Omega B}{\Omega A}$ reste égal à $\frac{\Omega E}{\Omega C}$.

Lorsque Ω est fixé et que A décrit un motif, on en dessine, à l'aide d'un crayon placé en B, un agrandissement dans le rapport $\frac{\Omega E}{\Omega C}$, qui est 3 sur la fig. 8. Si c'est B qui décrit un motif, A en décrit une réduction, dans le rapport 1/3.

Dans ces deux cas, on est en présence d'une construction du type de II-1. On serait en présence d'une construction du type II-2 si l'on fixait A : Ω décrivant un motif, B en décrirait un agrandissement dans le rapport $\frac{AB}{A\Omega}$, c'est-à-dire $\frac{CE}{C\Omega}$, qui est 2, à moins que, B décrivant un motif, Ω en décrive une réduction dans le rapport 1/2.

III. UNE DÉMARCHE INVERSE

Il existe de nombreux procédés permettant d'obtenir des copies d'un original plan, F, à des échelles diverses (plan d'un appartement, d'une ville, cartes de régions assez peu étendues pour être assimilées à des parties de plan, etc.).

Le géomètre peut alors se poser la question suivante : si on dispose dans le plan un original et sa copie, agrandie ou réduite dans un rapport h, existe-t-il un point Ω tel que la copie résulte de l'original par un des procédés décrits en II-1 et II-2 ?

III — 1. Il suffit évidemment qu'une droite joignant deux points de l'original ne soit pas parallèle à la droite joignant leurs images pour que cette question reçoive une réponse négative. On vérifiera, sur les fig. 9 et 10, que les droites (AA'), (BB'), (CC'),... qui joignent les points correspondants de l'original et de la copie ne sont pas concourantes. Ainsi sont exclues aussi bien des dispositions où aucune droite joignant deux points de l'original n'est parallèle à la droite joignant leurs images dans la copie (fig. 9) que des dispositions où certaines, mais pas toutes, le sont (fig. 10).

Fig. 9

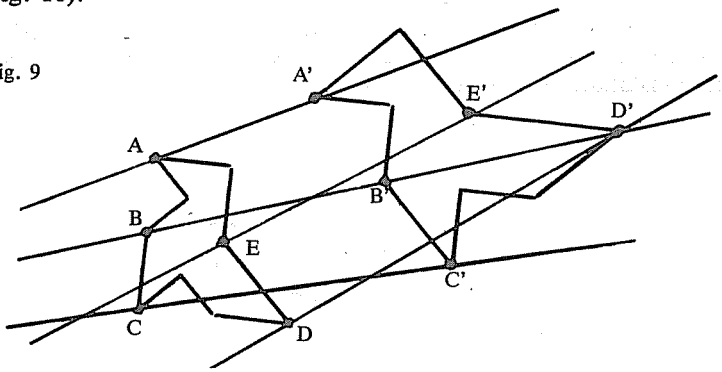
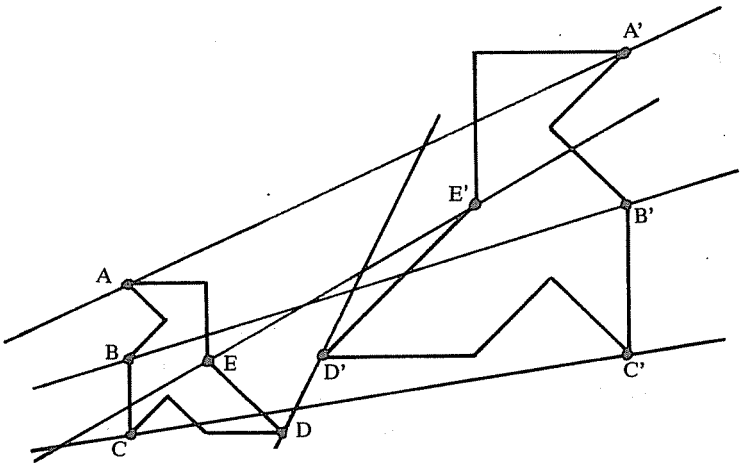


Fig. 10



III — 2. Nous nous placerons donc désormais dans l'hypothèse où toute droite joignant deux points de l'original est parallèle à la droite joignant leurs images.

III-2.1. Sur la couverture de certaines cartes routières se trouve représentée, à deux échelles différentes, une même région de la France : par exemple, la région Aurillac - St-Etienne (fig. 11).

Les bords gauches des deux rectangles qui limitent cette région sont parallèles (et bien sûr aussi les bords droits, les bords supérieurs et les bords inférieurs) ; de même les droites qui joignent deux villes, par exemple (Rodez - Le Puy) sur une carte et (RL) sur l'autre, sont parallèles.

Traçons la droite qui joint les points A et Aurillac, puis celles qui joignent les points R et Rodez, V et Valence, etc. On constate qu'elles sont concourantes, en un point Ω (*). La droite joignant les deux sommets nord-est des deux rectangles passe également par Ω ; de même pour les autres sommets.

On constate en outre que le rapport ΩTulle/Ω T est aussi le rapport Ω Rodez/Ω R, etc, ainsi que le rapport Tulle-Rodez/TR, etc. On fait ici toutes les constatations énoncées en II.

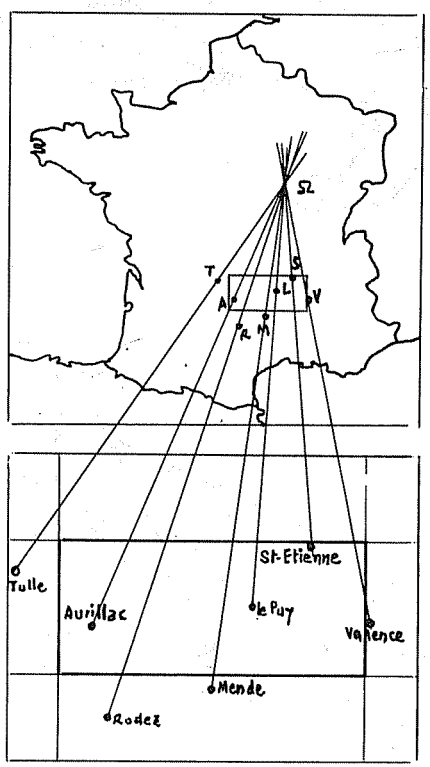


Fig. 11

(*) Ce point est situé dans le triangle Auxerre-Chaumont-Saulieu, aussi bien sur la carte à petite échelle, comme on le voit sur la fig. 11, que sur la carte à grande échelle, comme on le verrait en prolongeant suffisamment celle-ci vers le nord.

III-2.2. Considérons un pentagone régulier convexe ABCDE (fig. 12) et ses diagonales. Celles-ci font apparaître un nouveau pentagone convexe A'B'C'D'E' lui-même régulier.

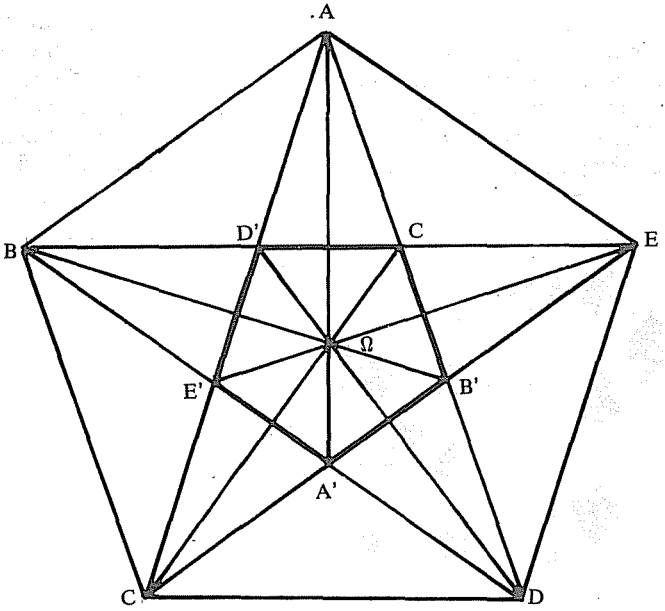


Fig. 12

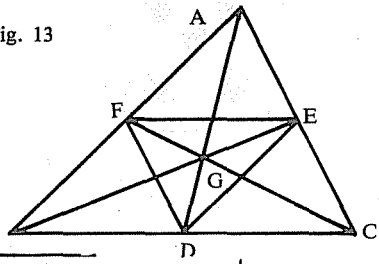
On se trouve là encore en présence d'une copie réduite de ABCDE où toute droite joignant deux points de celle-ci est parallèle à la droite joignant les originaux de ces points ; par exemple, (C'D') est parallèle à (CD).

Les droites (AA'), (BB'), (CC'), (DD') et (EE') sont concourantes en un point Ω (*).

Ici encore, on fait toutes les constatations énoncées en II.

III-2.3. Considérons un triangle ABC et les milieux D, E, F, de ses côtés (fig. 13) : chaque côté du triangle DEF est parallèle à un côté de ABC et les droites (AD), (BE) et (CF), qui sont les médianes de ABC, concourent en un point G ; DEF est une copie réduite de ABC dans le rapport 1/2 qui est aussi le rapport $\frac{GD}{GA}$.

Fig. 13



(*) Pour démontrer l'existence de Ω, on peut faire appel à l'autosymétrie d'ordre 5 que présente la figure. Le rapport de réduction des côtés est le même que le rapport $\frac{\Omega A'}{\Omega A}$; on pourra le calculer : $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$, inverse du carré du "nombre d'or".

III — 3. Un examen plus attentif de divers exemples permet de donner à la question posée au début de III une réponse plus circonstanciée.

III-3.1. Les figures 14 et 15 ont été réalisées à partir d'un "sept de pique" et d'une copie réduite de celui-ci. La figure 14, comme les cartes Aurillac - St-Etienne de III-2.1, relève du procédé décrit en II-1, de même que les tracés au pantographe (II-3) lorsque le point fixe est Ω. La figure 15, comme les exemples de III-2.2 et III-2.3, relève du procédé décrit en II-2, de même que les tracés au pantographe lorsque le point fixe est A.

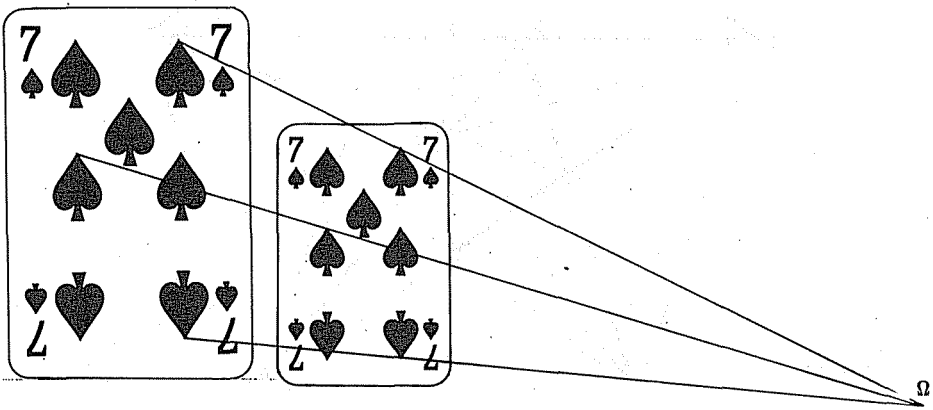


Fig. 14

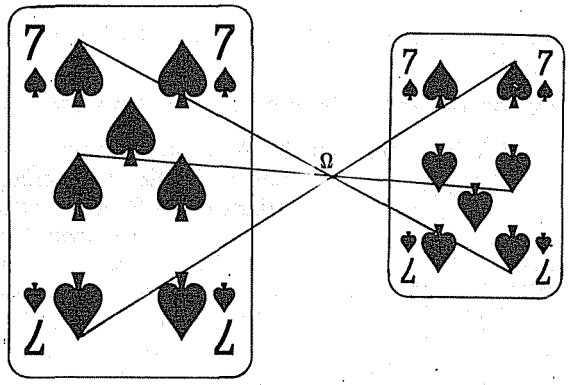


Fig. 15

III-3.2. Au cas où, comme dans les figures 16, 17 et 18, l'original admet un centre d'autosymétrie (et par conséquent aussi la copie), les constructions des types II-1 et II-2 sont simultanément possibles. On le voit immédiatement sur la figure 16 ; c'est par souci de lisibilité qu'on a dédoublé le dessin des carrés des figures 17 et 18.

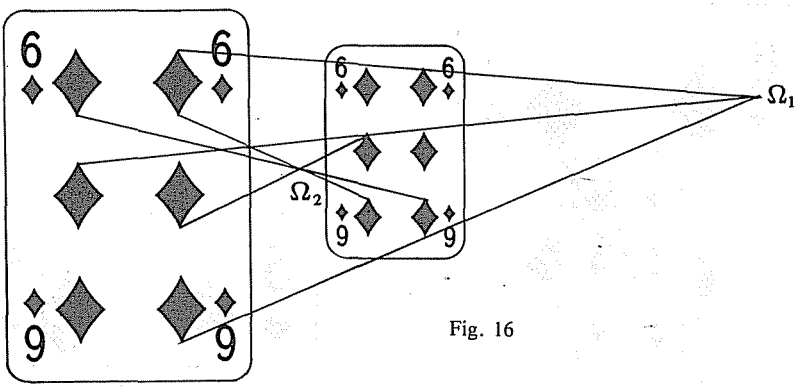


Fig. 16

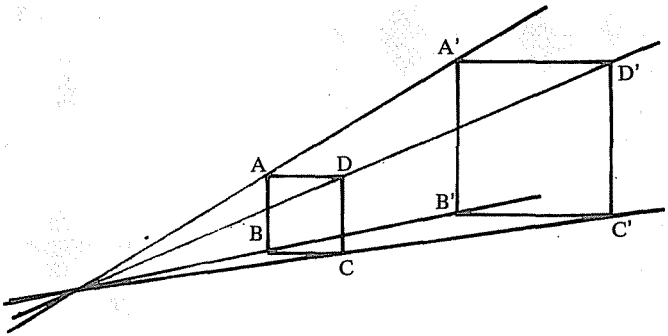


Fig. 17

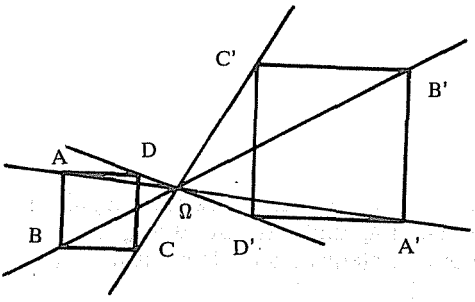


Fig. 18

Dans le cas, plus particulier encore, où l'original et sa copie ont le même centre d'autosymétrie, il n'y a plus qu'un point Ω, qui est ce centre ; toutefois les deux constructions subsistent, l'une de type II-1 (fig. 19), l'autre de type II-2 (fig. 20).

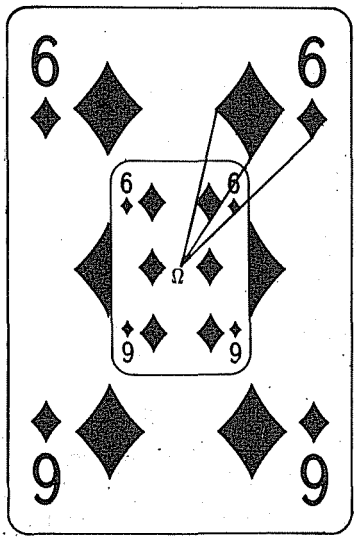


Fig. 19

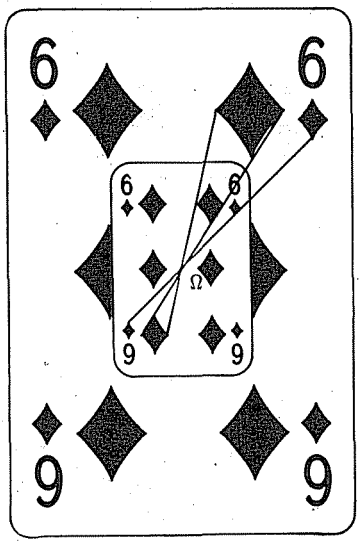


Fig. 20

III — 4. Dans tous les exemples présentés depuis le début de III, il s'agissait *effectivement* d'agrandissement ou de réduction ; autrement dit le rapport h, nombre strictement positif, présenté à la fin de II-1, était *autre que* 1.

Que se passe-t-il dans le cas où $h=1$, c'est-à-dire lorsque la copie est en vraie grandeur ?

III-4.1. Si la copie et l'original sont placés comme sur les figures 21 et 22, toutes deux du type II-2, le point Ω est le milieu de tout segment joignant un point et son image : la copie est symétrique de l'original par rapport à Ω.

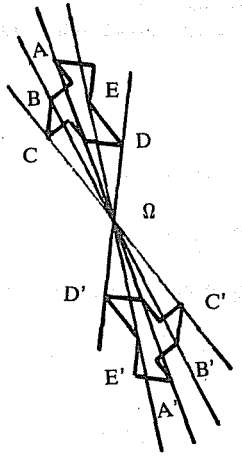


Fig. 21

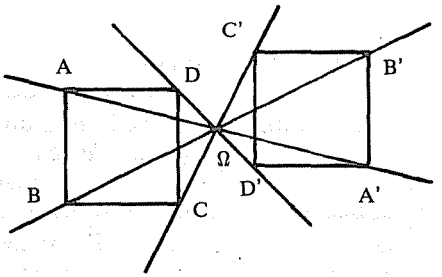


Fig. 22

III-4.2. Si la copie et l'original sont placés comme sur les figures 23 et 24, les droites qui joignent un point et son image sont parallèles, et le point Ω des dessins précédents a disparu.

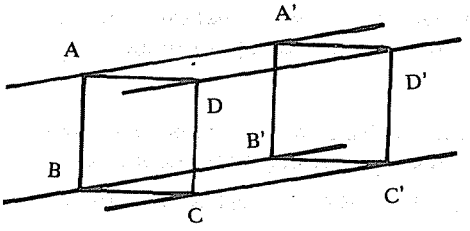


Fig. 23

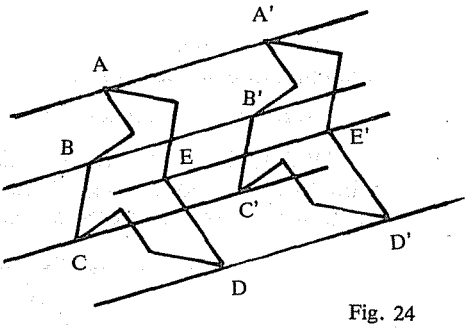


Fig. 24

La copie est l'image de l'original par une certaine translation, dont le vecteur, sur chacune des figures 23 et 24, est $\overrightarrow{AA'}$.

IV. HOMOTHÉTIE EN GÉOMÉTRIE DU PLAN

Tout ce qui précède constituait une approche intuitive de l'homothétie. La définition ci-dessous fournit un modèle valable aussi bien pour les situations de II-1 que pour celles de II-2.

IV — 1. Définition

Etant donnés un point Ω du plan P et un réel k,
homothétie de centre Ω *et de rapport* k
signifie
application du plan P vers lui-même qui, à chaque point M, associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$.

Désignons par H l'homothétie de centre Ω et de rapport k .
L'image M' de M est appelée *l'homothétique de* M *par* H.

On peut utiliser les notations et le langage des applications :

$$H \left| \begin{array}{l} P \to P \\ \\ M \mapsto M' \end{array} \right. \qquad H(M) = M'$$

Etant donnée une figure F, l'ensemble des homothétiques par H de ses points est une figure F', appelée *l'image de* F *par* H ; on dit aussi que F' est *l'homothétique de* F *par* H.

On s'autorise à dire que *deux figures sont homothétiques* lorsqu'il existe une homothétie par laquelle l'une des figures a pour image l'autre (voir IV-2.2).

IV — 2. Quel que soit le rapport k, les points Ω, M et M' appartiennent à une même droite, ce qui est conforme aux constructions de II.

Examinons les diverses éventualités selon le choix du rapport k.

IV-2.1. Si $k = 0$, l'homothétie est l'application constante qui à tout point M donne pour image Ω (fin de II-1). Les homothéties de rapport nul ne sont donc pas bijectives ; *nous les écarterons dans tout ce qui suit.*

IV-2.2. Si $k \neq 0$, l'égalité $\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}$ équivaut à l'égalité

$$\overrightarrow{\Omega M} = \frac{1}{k}\,\overrightarrow{\Omega M'}$$

On peut donc considérer indifféremment
soit M' comme l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k,
soit M comme l'image de M' par l'homothétie de centre Ω et de rapport $1/k$.

Ainsi, chaque point M' a un antécédent unique ; autrement dit, les homothéties de rapport non nul sont des bijections de P vers P.

De plus, la bijection réciproque de l'homothétie de centre Ω et de rapport k est l'homothétie de centre Ω et de rapport $1/k$ (voir encore II-1).

IV-2.3. Si k est positif et distinct de 1, la situation est celle de II-1 ; le rapport h, employé alors, est égal à k.

Lorsque $k=1$, tout point de P est sa propre image. En d'autres termes, toute homothétie de rapport 1 est *l'identité de* P. Nous avons exclu cette situation en II-1 vu son manque évident d'intérêt pratique. Nous verrons ci-dessous (VI-6) que l'identité de P joue un rôle théorique important.

IV-2.4. Si k est négatif et distinct de -1, la situation est celle de II-2 ; le rapport h, employé alors, est $-k$.

Lorsque $k=-1$, la situation est celle de III-4.1 ; l'homothétie de centre Ω et de rapport -1 est la symétrie de centre Ω.

V. PROPRIÉTÉS DES HOMOTHÉTIES (DE RAPPORT NON NUL) EN GÉOMÉTRIE DU PLAN

V — 1. Cherchons les éventuels points invariants par H.

Dire qu'un point M est invariant par H, c'est dire que $M=M'$, soit encore $\overrightarrow{\Omega M}=k\,\overrightarrow{\Omega M}$, ou aussi bien $(1-k)\,\overrightarrow{\Omega M}=\vec{0}$.

Deux éventualités se présentent :

• Si $k=1$, l'homothétie est l'identité de P, comme on l'a signalé en IV-2.3.

• Si $k\neq 1$, l'égalité ci-dessus équivaut à $\overrightarrow{\Omega M}=\vec{0}$, donc à l'égalité $M=\Omega$. Ainsi, pour toute homothétie autre que l'identité de P, le centre est le seul point invariant.

V — 2. Toute droite passant par Ω est invariante par H ; elle l'est globalement si $k\neq 1$, et point par point si $k=1$.

Si $k\neq 1$, les seules droites invariantes sont celles qui passent par Ω.

Si $k>0$, les seules demi-droites invariantes sont celles qui ont pour origine Ω. Il existe d'autres figures invariantes par H : les secteurs de sommet Ω par exemple.

Si $k<0$, aucune demi-droite n'est invariante.

V — 3. Dans toute homothétie de rapport k, quels que soient les points M et N, leurs images respectives M' et N' sont telles que $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$.

Cette propriété, particulièrement importante, sera fréquemment utilisée dans la suite.

V — 4. De cette propriété, il résulte que :

- toute droite D a pour image une droite parallèle à D ;
- tout segment de longueur L a pour image un segment de longueur $|k|$ L ;
- toute surface d'aire A a pour image une surface d'aire k^2A.

En d'autres termes, toute homothétie (de rapport non nul) conserve (voir CONSERVER) les directions de droites, les rapports de longueurs et les rapports d'aires.

Le milieu de deux points a pour image le milieu de leurs images ; plus généralement, le barycentre d'un ensemble de n points affectés de coefficients a pour image le barycentre des images de ces points respectivement affectées des mêmes coefficients.

Enfin, toute homothétie conserve chaque angle-de-secteurs et chaque angle-de-couples.

V — 5. La propriété de V-3 caractérise-t-elle les homothéties parmi les applications du plan vers lui-même ?

Considérons une application f de P vers P qui possède la propriété énoncée en V-3, à savoir : quels que soient les points M et N, leurs images respectives M' et N' sont telles que $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$, où k est un nombre non nul indépendant des points M et N.

Si $k \neq 1$, on démontre que f est une homothétie de rapport k.

Mais si $k = 1$, on reconnaît une propriété caractéristique des translations (voir TRANSLATION, III-3).

La réponse à la question est donc négative.

V — 6. Par toute homothétie ou translation, n'importe quelle droite D a pour image une droite parallèle à D. On démontre que, réciproquement, si une application de P vers P est telle que chaque droite D a pour image une droite parallèle à D, cette application est soit une translation, soit une homothétie.

L'intrusion des translations dans le monde des homothéties ne doit pas surprendre : prévisible dès l'observation de dessins en III-4.2, elle s'imposera dans le cadre de la composition des homothéties, que nous abordons maintenant.

VI. COMPOSITION DES HOMOTHÉTIES ET TRANSLATIONS EN GÉOMÉTRIE DU PLAN

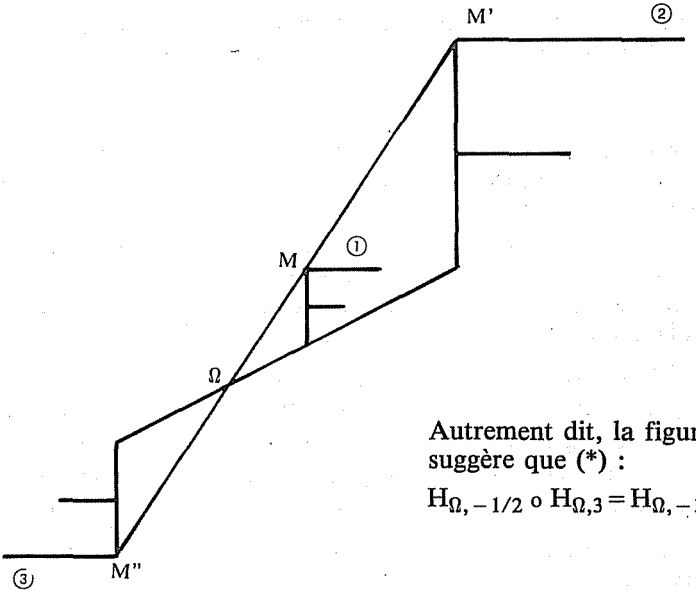
Nous aurons besoin, dans cette étude, de notations plus détaillées : l'homothétie de centre Z et de rapport r sera désignée par $H_{Z,r}$.

Comme on le verra un peu plus loin (VI-2), il n'est pas possible d'affirmer en toute généralité que la composée de deux homothéties est une homothétie. Cependant, les exemples de croissance donnés en I donnent à penser que plusieurs stades du développement d'un être ou d'un objet organisé peuvent être homothétiques les uns des autres par des homothéties de même centre ; étudions d'abord ce cas particulier.

VI — 1. Composition d'homothéties de même centre

VI-1.1. Pour fixer les idées, choisissons les homothéties $H_{\Omega,3}$ et $H_{\Omega,-1/2}$. La figure 25 suggère que, le motif ① ayant pour image par $H_{\Omega,3}$ le motif ②, puis celui-ci par $H_{\Omega,-1/2}$ le motif ③, ce dernier est l'image du motif ① par $H_{\Omega,-3/2}$.

Fig. 25



Autrement dit, la figure 25 suggère que (*) :

$H_{\Omega,-1/2} \circ H_{\Omega,3} = H_{\Omega,-3/2}$.

Il en est bien ainsi : des égalités $\overrightarrow{\Omega M'} = 3\,\overrightarrow{\Omega M}$ et $\overrightarrow{\Omega M''} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega M'}$, il résulte que, pour tout point M, $\overrightarrow{\Omega M''} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{\Omega M}$. Cette démonstration

(*) Si l'on peut composer l'application f et l'application g , l'application composée "f suivie de g" se note $g \circ f$, qui se lit "g rond f".

se généralise : la composée d'un couple d'homothéties de même centre est une homothétie qui a pour centre le centre commun des composantes et pour rapport le produit de leurs rapports :

$$H_{\Omega,k'} \circ H_{\Omega,k} = H_{\Omega,kk'}$$

ce qui d'une part entraîne la commutativité de la composition des homothéties de même centre :

$$H_{\Omega,k'} \circ H_{\Omega,k} = H_{\Omega,k} \circ H_{\Omega,k'}$$

et d'autre part englobe les deux propositions

$$H_{\Omega,k} \circ H_{\Omega,1} = H_{\Omega,k} \quad \text{et} \quad H_{\Omega,k} \circ H_{\Omega,1/k} = H_{\Omega,1} .$$

La première traduit le fait, général, que l'identité I_P du plan P (ici $H_{\Omega,1}$) est élément neutre pour la composition des applications de P vers P ; la seconde signifie que les homothéties $H_{\Omega,k}$ et $H_{\Omega,1/k}$ sont des éléments symétriques pour cette loi (voir IV-2.2).

En outre, la composition des homothéties de même centre est associative (comme toute composition d'applications).

VI-1.2. Ainsi le comportement des homothéties de même centre vis-à-vis de la composition des applications est calqué sur celui des nombres réels vis-à-vis de la multiplication.

En langage mathématique : un point Ω étant donné, l'ensemble des homothéties de centre Ω et de rapport non nul, muni de la composition des applications, est un groupe commutatif ; de plus, ce groupe est isomorphe au groupe multiplicatif des nombres réels non nuls.

Du fait de cette analogie de comportement :

- l'ensemble des homothéties de centre Ω et de rapport strictement positif est un sous-groupe du groupe des homothéties de centre Ω ;
- toute homothétie $H_{\Omega,k}$ de rapport négatif est la composée de $H_{\Omega,|k|}$ et de la symétrie de centre Ω, laquelle n'est autre que $H_{\Omega,-1}$.

VI-1.3. Voici une illustration de la composition d'homothéties de même centre.

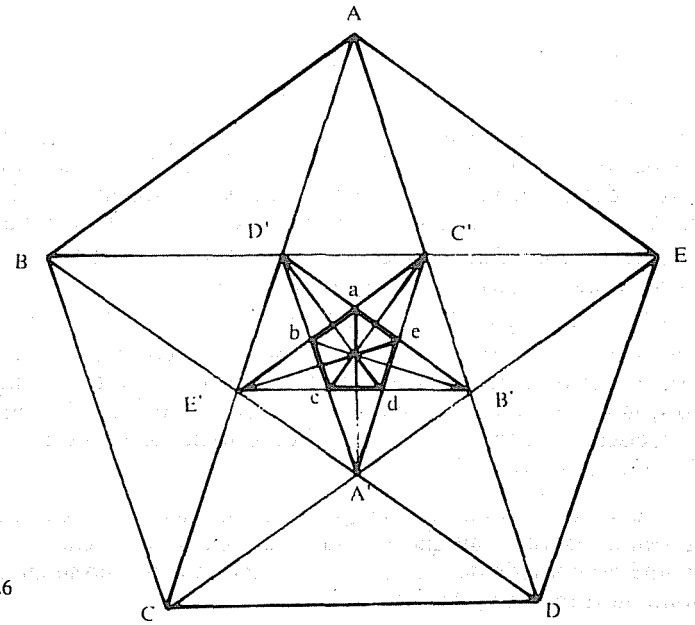


Fig. 26

Sur la figure 12, le pentagone A'B'C'D'E' est l'image du pentagone ABCDE par l'homothétie H de centre Ω et de rapport négatif $\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$ (voir la note de III-2.2). Recommençons, à partir de A'B'C'D'E', la même construction (c'est-à-dire : traçons les diagonales de ce pentagone). Le pentagone abcde obtenu (fig. 26) est l'image de A'B'C'D'E' par la même homothétie H. Il est aussi l'image de ABCDE par l'homothétie HoH qui a pour centre Ω et pour rapport $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^2$, nombre évidemment positif.

VI — 2. Un simple contre-exemple (fig. 27) suffit à établir l'impossibilité d'étendre les résultats de VI-1.1 à des homothéties de centres distincts : étant donné deux symétries centrales S_I et S_J (donc deux homothéties de centres I et J), leur composée $S_J \circ S_I$ est, non une homothétie, mais une translation. En effet, un point quelconque M du plan ayant pour image par S_I le point M', et celui-ci ayant pour image par S_J le point M",

$$\overrightarrow{MM'} = 2\,\overrightarrow{IM'}$$
$$\text{et } \overrightarrow{M'M''} = 2\,\overrightarrow{M'J}$$

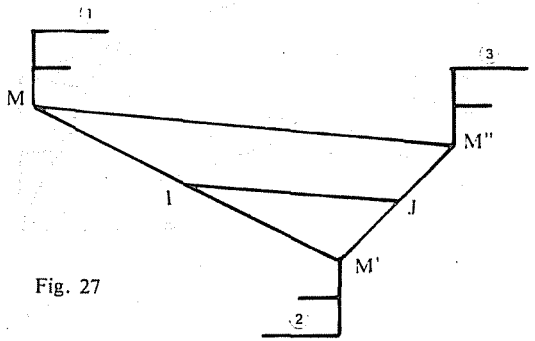


Fig. 27

Par addition : $\overrightarrow{MM''} = 2\ \vec{IJ}$; ce vecteur est indépendant de M. Donc la composée $S_J \circ S_I$ est la translation de vecteur $2\ \vec{IJ}$.

Plaçons-nous, en revanche, dans la réunion E de l'ensemble des homothéties (de rapport non nul) et de l'ensemble des translations, et considérons des éléments f et g de E. Quels que soient les points M et N du plan, M' et N' étant leurs images respectives par f, en vertu de la propriété de V-3, il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{M'N'} = k\ \overrightarrow{MN}$, *$k$ pouvant à présent être ou non égal à* 1. De même, si $g(M') = M''$ et $g(N') = N''$, on peut écrire $\overrightarrow{M''N''} = k'\overrightarrow{M'N'}$ où $k' \neq 0$. Donc, quels que soient M et N, $\overrightarrow{M''N''} = kk'\ \overrightarrow{MN}$ et $kk' \neq 0$. Or, comme on l'a vu en V-5, cette propriété caractérise l'ensemble des homothéties et translations : cette fois, la composition des applications est une loi dans E. On peut même préciser : la composée est une homothétie de rapport kk' si $kk' \neq 1$, une translation si $kk' = 1$.

Il reste à étudier les divers cas possibles. Dans cette étude, on gardera présent à l'esprit le fait que l'identité I_P peut s'interpréter à volonté comme une homothétie de rapport 1 et de centre arbitrairement choisi ou comme la translation de vecteur nul.

VI — 3. Composition de deux homothéties de centres distincts

VI-3.1. Plaçons-nous d'abord dans le cas où le produit des rapports des deux homothéties est distinct de 1. La figure 28 illustre une telle composition, schématisée par le diagramme que voici :

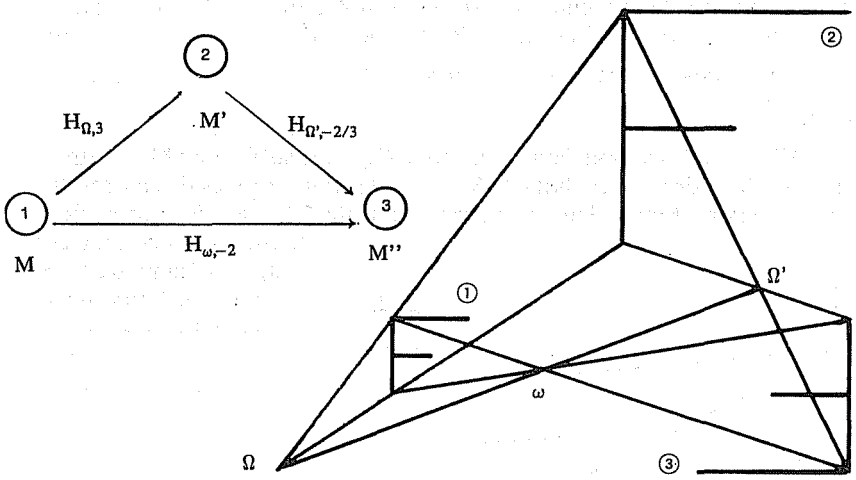


Fig. 28

On vérifie que la composée est une homothétie dont le rapport est -2, produit de 3 et $-\frac{2}{3}$.

De plus, le dessin suggère que son centre ω appartient à la droite $(\Omega\Omega')$. Un raisonnement simple permet d'établir ce fait : la droite $(\Omega\Omega')$ est invariante par chacune des deux homothéties composantes ; elle est donc invariante par l'homothétie composée et, comme celle-ci n'est pas l'identité, la droite $(\Omega\Omega')$ passe nécessairement par son centre ω.

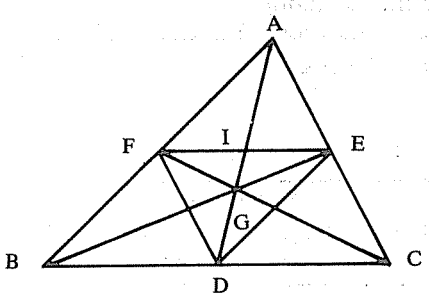
De façon générale :

Sous réserve que $kk' \neq 1$,
$H_{\Omega',k'} \circ H_{\Omega,k} = H_{\omega,kk'}$
où $\omega \in (\Omega\Omega')$.

De ce point de vue, la figure 13 est susceptible d'une autre interprétation. Appelons I le centre du parallélogramme AEDF (fig. 29) :

- par l'homothétie $H_{A,1/2}$, les points A,B,C ont respectivement pour images les points A,F,E ;
- par l'homothétie $H_{I,-1}$, les points A,F,E ont respectivement pour images les points D,E,F.

Fig. 29



Les points A,B,C ont donc respectivement pour images les points D,E,F par l'homothétie composée dont le rapport est $-\frac{1}{2}$ et dont le centre est le point G de la droite (AI) tel que $\overrightarrow{GD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$.

VI-3.2. Si les rapports des deux homothéties composantes ont pour produit 1, la composée, dans un ordre ou dans l'autre, est une translation que nous appellerons T. On le vérifie sur la figure 30 qui illustre une telle composition, schématisée par le diagramme que voici :

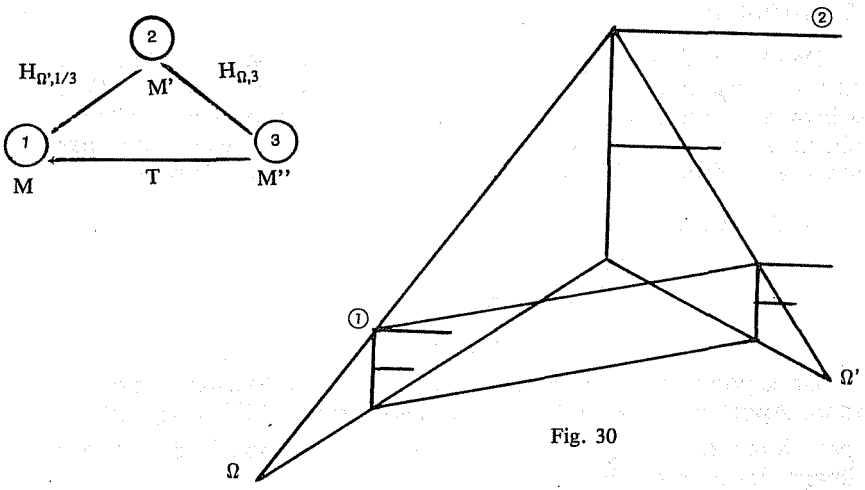


Fig. 30

De plus, le dessin suggère que le vecteur de la translation composée est un vecteur directeur de la droite (ΩΩ'). Un raisonnement analogue à celui de VI-3.1 permet d'établir ce fait : la droite (ΩΩ') est invariante par chacune des homothéties composantes, donc par la translation composée ; le vecteur de celle-ci est donc colinéaire à $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

De façon générale :

Si $kk' = 1$,
$H_{\Omega',k'} \circ H_{\Omega,k}$ est une translation
dont le vecteur est colinéaire à $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$.

VI — 4. Composition d'une translation et d'une homothétie

Dans le cas où l'homothétie est l'identité I_P , sa composée avec une translation, dans un ordre ou dans l'autre, est cette translation elle-même.

Ce cas exclu, la composée est une homothétie. Reprenons en effet les notations de VI-2 :

- du fait de la translation, $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$,
- du fait de l'homothétie, $\overrightarrow{M''N''} = k\,\overrightarrow{M'N'}$ où $k \neq 1$.

Finalement, $\overrightarrow{M''N''} = k\,\overrightarrow{MN}$ où $k \neq 1$, ce qui caractérise une homothétie de rapport k (voir V-5).

Pour illustrer ce résultat, il n'est même pas besoin d'une nouvelle figure : il suffit d'une autre lecture de la figure 30 où les motifs sont pris

à présent dans l'ordre ③, ①, ②. En effet, le motif ① est l'image de ③ par la translation $T_{\vec{U}}$, où $\vec{U}$ est l'opposé du vecteur $\vec{V}$ de VI-3.2, puis ② est l'image de ① par l'homothétie $H_{\Omega,3}$.

De façon générale :

Si $k \neq 1$,
$H_{\Omega,k} \circ T_{\vec{U}} = H_{\Omega',k}$
où $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ est colinéaire à $\vec{U}$.

On raisonnerait de façon analogue si l'homothétie précédait la translation ; il suffit cette fois-ci de prendre les motifs dans l'ordre ②, ①, ③ pour obtenir :

Si $k \neq 1$,
$T_{\vec{V}} \circ H_{\Omega,k} = H_{\Omega',k}$
où $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$ est colinéaire à $\vec{V}$.

Attention ! De ce qui précède, il ne faudrait pas conclure à la commutativité de la composition des éléments de E (ce n'est pas la même translation qui intervient). Nous conseillons au lecteur de reprendre les cas traités en VI-3 et VI-4 en inversant l'ordre des composantes : dans chaque cas, il s'assurera que la composée n'est plus la même.

VI — 5. Composition de translations

Rappelons pour mémoire (voir TRANSLATION, IV) que la composée de translations est une translation, et que la composition des translations est commutative.

VI — 6. Groupe des homothéties-translations du plan

Les résultats obtenus au cours de VI peuvent être résumés comme suit :

E désignant l'ensemble des homothéties (de rapport non nul) et translations du plan P,

- leur composition est une loi dans E ;
- cette loi est associative (comme toute composition d'applications) ;
- il existe un élément neutre dans E, à savoir l'identité du plan I_P ;
- toute translation $T_{\vec{V}}$ a un symétrique dans E, à savoir la translation réciproque $T_{-\vec{V}}$; toute homothétie $H_{\Omega,k}$ a un symétrique dans E, à savoir l'homothétie réciproque $H_{\Omega,1/k}$.

L'ensemble E, muni de la composition des applications, est donc un groupe, usuellement dit *groupe des homothéties-translations.* Ce groupe n'est pas commutatif.

Mais les sous-groupes rencontrés en VI-1 et VI-5, à savoir celui des translations et, pour chaque point Ω, le groupe des homothéties de centre Ω, sont commutatifs.

Par voie de conséquence, sont également commutatifs les sous-groupes de ces sous-groupes : groupe des translations de direction donnée, groupe des homothéties de centre donné et de rapport strictement positif, etc.

VII. HOMOTHÉTIE EN GÉOMÉTRIE DE LA DROITE ET EN GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE

VII — 1. Homothétie sur la droite

La définition donnée en IV-1 subsiste ; il suffit d'y remplacer "plan" par "droite". Les conséquences qui en découlent s'identifient avec ce qui a pu être dit, dans ce qui précède, lorsque les points de l'original appartiennent à une même droite passant par Ω (cela exclut évidemment les considérations d'angles ou d'aires).

VII — 2. Approche intuitive dans l'espace

VII-2.1. Les exemples introductifs donnés en I et II ne concernaient l'espace que dans le cas où l'original était plan, sa copie étant alors nécessairement située dans un plan parallèle à celui de l'original ;

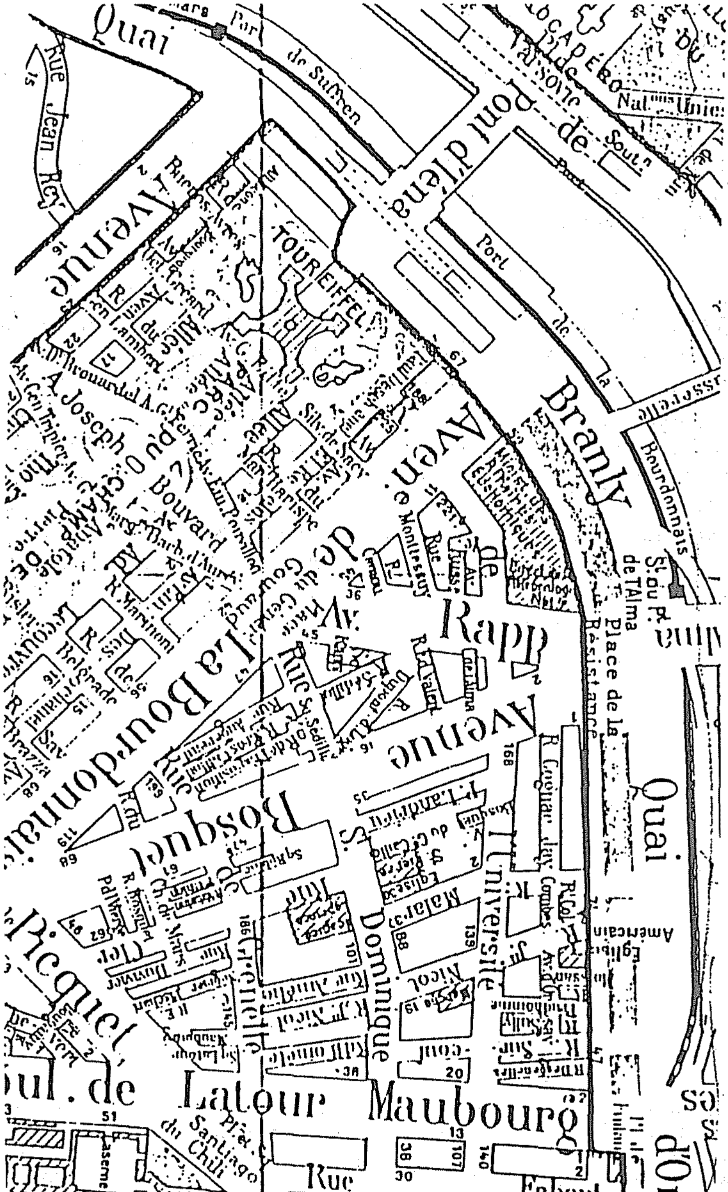
- en I-1 avec les coupes horizontales de la Pyramide, le sommet jouant le rôle de centre d'homothétie ;
- en II-2 avec la chambre noire, l'orifice de la paroi jouant le rôle de centre d'homothétie.

On peut, dans ce cas, comme en III, tenter une démarche inverse.

Supposons qu'un touriste, muni d'un plan de Paris à l'échelle de 1/10000, veuille, du haut de la Tour Eiffel, reconnaître les quartiers avoisinant le Champ de Mars (fig. 31).

Pourvu qu'il dispose sa carte horizontalement et qu'il place par exemple le dessin du pont d'Iéna dans la direction du pont lui-même et vers le pont, la carte est alors (pratiquement) homothétique du paysage au sol ; si on joint chaque point du sol à son image, on obtient des droites qui concourent en un point situé au-dessus du point de la carte qui figure l'axe de la Tour Eiffel (*) ; le rapport d'homothétie n'est autre que l'échelle de la carte.

(*) Vu que la Tour Eiffel est haute de 300 m, ce point est à environ 30 mm au-dessus de la carte.


Quai
Rue Jean Rey
Avenue
de Suffren
Pont d'Iéna
Port
TOUR EIFFEL
Branly
Bourdonnais
Aven. de
Rapp
Place de la Résistance
Quai
Avenue
La Bourdonnais
Bosquet
S. Dominique
Université
Malar
Nicot
Picquet
Église Américain
ul. de Latour Maubourg
Rue
Fabert
d'Orsay

Faire tourner la carte de 180° dans son plan serait évidemment très malcommode pour reconnaître le quartier ; mais si la carte est ainsi disposée, chaque rue rectiligne est encore parallèle à son image sur la carte, et il existe encore un centre d'homothétie, situé cette fois au-dessous de la carte.

L'analogie avec les figures 14 et 15 est évidente ; d'ailleurs ces figures, ainsi que les figures 16, 17 et 18, peuvent être "lues" dans l'espace : il suffit d'imaginer que les motifs plans et leurs images sont situés dans des plans parallèles.

VII-2.2. Dans le cas général, l'original est une partie non plane de l'espace. Les maquettes d'objets matériels nous sont familières : soit maquettes d'échelle plus petite que 1 pour une maison, un quartier urbanisé, une locomotive, le globe terrestre, soit maquettes d'échelle plus grande que 1 pour un mécanisme d'horlogerie par exemple.

Il nous est encore possible de disposer la maquette, relativement à l'objet qu'elle représente, de façon que chaque direction de droites (donc aussi chaque direction de plans) soit conservée. On disposerait de même deux masses marquées en laiton, ou en fonte, ou deux mesures de capacité en étain, à présent utilisées comme éléments décoratifs. Dans tous les cas on vérifie l'existence d'un centre d'homothétie, comme le suggère (*) la figure 32, décalque schématique de la photographie d'une masse de 1 kg et d'une masse de 1 hg.

(*) Insistons sur le mot "suggère" : à supposer que les deux masses marquées soient des troncs de pyramide hexagonaux rigoureusement homothétiques, leurs photographies ne pourraient l'être, vu les déformations signalées dans la note de II-2. Toutefois, comme on a pris soin que la droite (AA') soit parallèle au plan de la pellicule lors de la prise de vue, le rapport $\frac{\Omega A'}{\Omega A}$ tel qu'on peut l'évaluer sur la photo (environ 2,2) est effectivement le rapport de l'homothétie dans l'espace.

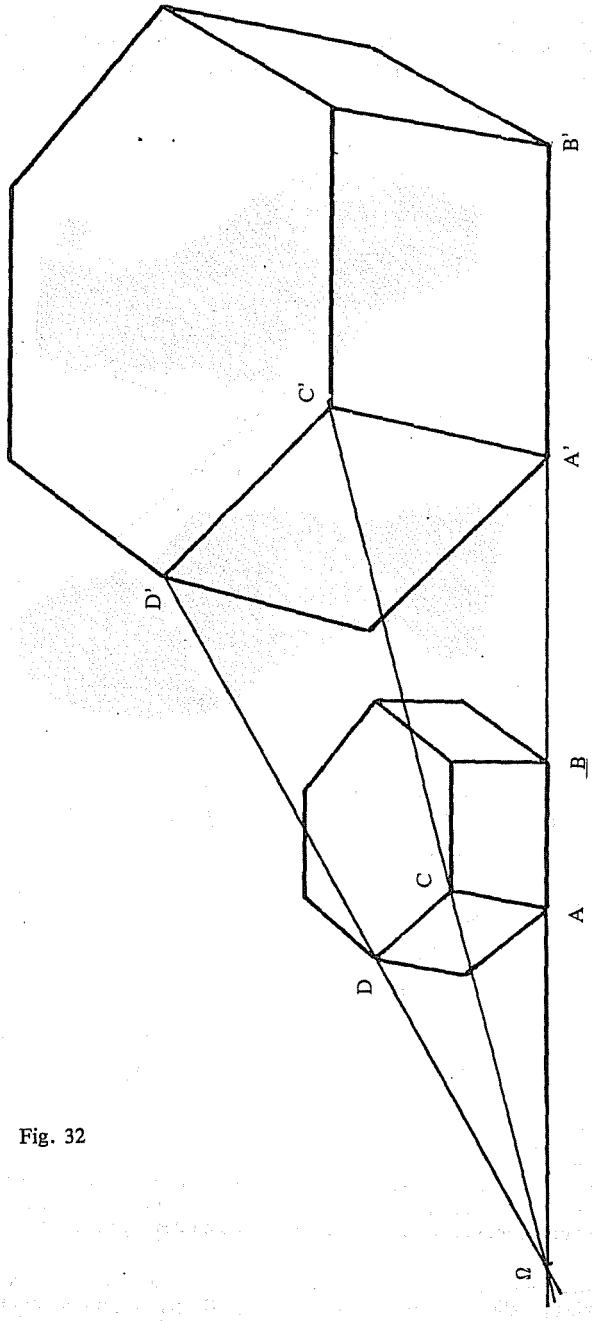


Fig. 32

On peut aussi, comme en III-4.1, donner un exemple de symétrie centrale (homothétie de rapport -1) avec les deux chaussures d'une même paire disposées comme sur la photographie de la figure 33 (*).

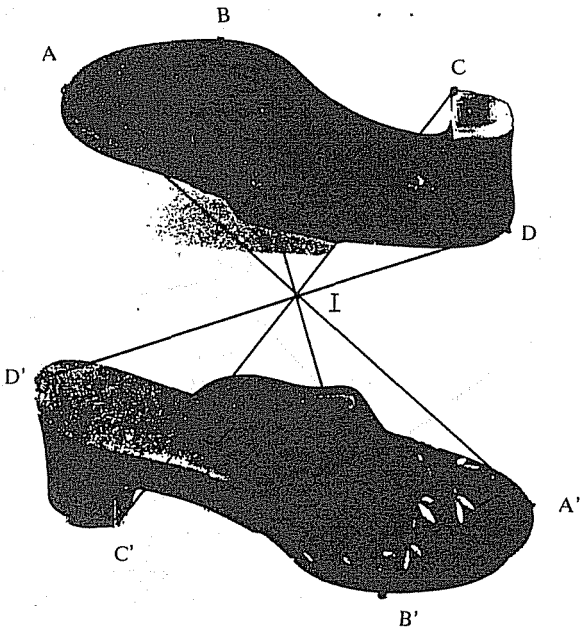


Fig. 33

Enfin, dans le cas de deux masses marquées, en fonte par exemple, de même masse, disposées comme sur la figure 34, l'homothétie disparaît pour faire place à une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ (**).

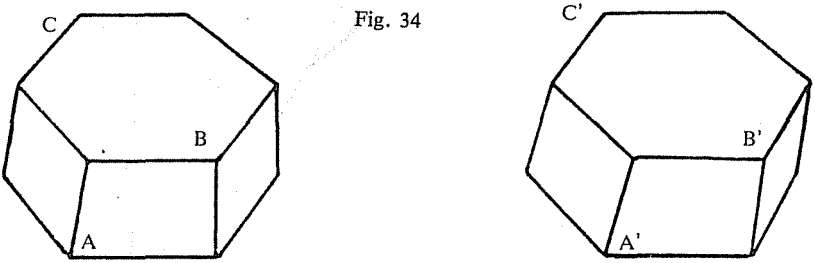


Fig. 34

(*) Comme dans la note précédente, les deux chaussures, bien que symétriques, ont des dessins plans qui ne le sont pas ; sur la figure 33, les droites (AA'), (BB'), (CC'), (DD') ont bien un point commun I, mais I n'est pas le milieu des segments [AA'], [BB'], [CC'], [DD'].

(**) Ici encore, dans l'espace, mais pas sur la photo ; sur celle-ci les droites (AA'), (BB'), (CC') sont bien parallèles, mais les segments [AA'], [BB'], [CC'] n'ont pas même longueur.

VII — 3. Définition et propriétés

La définition de l'homothétie donnée en IV-1 subsiste ; il suffit d'y remplacer "plan" par "espace". Elle fournit alors un modèle valable pour les exemples donnés en VII-2.

De cette définition résultent : d'une part toutes les propriétés énoncées, pour le plan, en IV-2 et en V (*) ; d'autre part les propriétés suivantes sous réserve que le rapport k d'homothétie soit différent de 0 :

- les plans passant par le centre d'homothétie sont invariants ; ce sont les seuls plans invariants si k est différent de 1 ;
- tout plan a pour image un plan qui lui est parallèle ; autrement dit, l'homothétie conserve les directions de plans ;
- si une application, dans l'ensemble des points de l'espace, est telle que tout plan a pour image un plan parallèle à celui-ci, cette application est soit une translation, soit une homothétie ;
- tout solide de volume V a pour image un solide de volume $|k^3|$ V (**) ; l'homothétie conserve donc les rapports de volumes.

VII — 4. Composition des homothéties et translations de l'espace

Le contenu de VI se répète sans modification pour la géométrie de l'espace (on pourrait tout au plus exclure les figures planes 26 et 29 qui poseraient des problèmes d'interprétation plus délicats).

L'essentiel reste l'existence du groupe, non commutatif, des homothéties-translations.

VIII. HOMOTHÉTIE ET ORIENTATION

On pourra se reporter aux paragraphes suivants de la rubrique ORIENTATION de MOTS VII :

- pour l'orientation d'une ligne, II-1 ;
- pour celle d'une partie du plan, III-1 ;
- pour celle d'une partie de l'espace, IV-1 ;
- pour la comparaison des orientations sur deux droites, II-3 ;
- pour la comparaison des orientations dans deux plans, III-3 ;
- pour la conservation ou l'altération de l'orientation, VI-1, ou dans le cas particulier des symétries centrales, VI-2.

(*) Naturellement, on remplace "identité du plan" par "identité de l'espace". Par ailleurs, l'extension à l'espace de la conservation des angles-de-couples de demi-droites (fin de V-4) n'a de signification que grâce à la conservation des directions de plans qui va être signalée ici-même ; en effet, deux demi-droites et leurs images sont alors parallèles à un même plan.

(**) Revenons à la figure 32 : le rapport des volumes des troncs de pyramides hexagonaux doit être celui des masses (puisque ces solides sont faits de même matière), c'est-à-dire 10 ; or, sa racine cubique, qui est le rapport d'homothétie, est 2,15 à moins de 0,01 près : l'accord est très bon avec notre évaluation graphique 2,2.

VIII — 1. Supposons que l'original soit une partie F d'une **droite** D. Son image par une homothétie est une partie F' de la droite D' image de D. Si on oriente F par un couple (A,B) de ses points, F' se trouve orientée par le couple (A',B') des images respectives de A et B.

Qu'il s'agisse d'une homothétie sur une droite D, ou dans le plan, ou dans l'espace, la droite D' est toujours parallèle à la droite D ; on peut donc comparer les orientations de F et de F'.

En vertu de la propriété V-3 (en abrégé : $\overrightarrow{M'N'} = k\,\overrightarrow{MN}$), l'orientation est conservée par les homothéties de rapport positif et altérée par les homothéties de rapport négatif.

VIII — 2. Supposons que l'original soit une partie orientée d'un **plan** P (ce qui exclut, entre autres, les parties rectilignes). Qu'il s'agisse d'une homothétie dans le plan P ou dans l'espace, l'image est toujours une partie orientée d'un plan de même direction que P : on sait donc comparer les orientations de l'original et de son image.

Par exemple, les figures 17 et 18 présentaient, dans le plan, les images d'un carré ABCD soit par une homothétie de centre Ω_1 et de rapport positif, soit par une homothétie de centre Ω_2 et de rapport négatif : dans les deux cas le quadruplet (A',B',C',D') a même orientation que (A,B,C,D).

Il en va de même lorsque le centre de l'homothétie est pris hors du plan de l'original (fig. 35), que l'homothétie soit du type "Pyramide" (centre Ω_1) ou du type "chambre noire" (centre Ω_2).

De façon générale : quel que soit le rapport (non nul) d'une homothétie, l'orientation des parties planes est conservée.

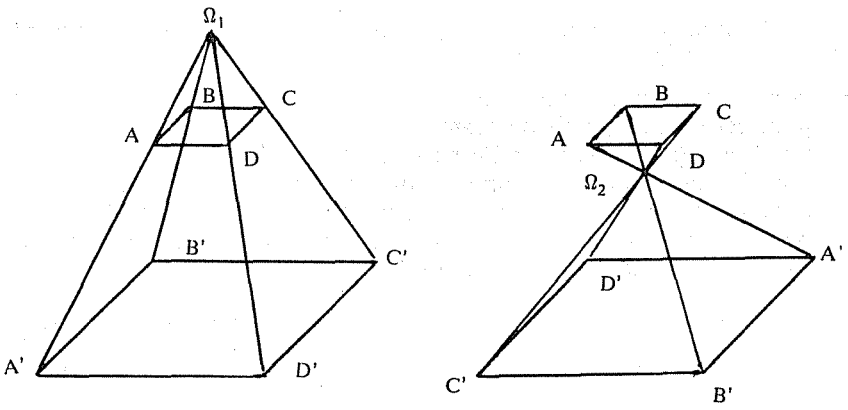


Fig. 35

VIII — 3. Supposons que l'original, et par conséquent son image, soient des parties orientées de l'**espace** (ce qui exclut, entre autres, les parties rectilignes et les parties planes).

La figure 32 nous donne l'exemple de deux troncs de pyramide hexagonaux dont l'un est image de l'autre par une homothétie de rapport positif. Les quadruplets (A,B,C,D) et (A',B',C',D') ont la même orientation.

Au contraire, les deux chaussures de la figure 33 sont d'orientations opposées (qui en douterait n'a qu'à chausser successivement au même pied les deux chaussures d'une même paire). Or, chacune des deux est image de l'autre par une homothétie de rapport -1.

Un exemple de même type, mais moins particulier et de caractère plus géométrique, est présenté par la figure 36 (*), qui est l'analogue dans l'espace de la figure 13 dans le plan. Les points A',B',C',D' sont, dans les faces du tétraèdre ABCD respectivement opposées aux sommets A,B,C,D, les points de concours des médianes. Les droites (AA'), (BB'), (CC'), (DD'), non tracées sur la figure, concourent en un point G, qui est le centre d'une homothétie de rapport $-\frac{1}{3}$ donnant respectivement des points A,B,C,D les images A',B',C',D'. On constate que les deux quadruplets (A,B,C,D) et (A',B',C',D') sont d'orientations opposées.

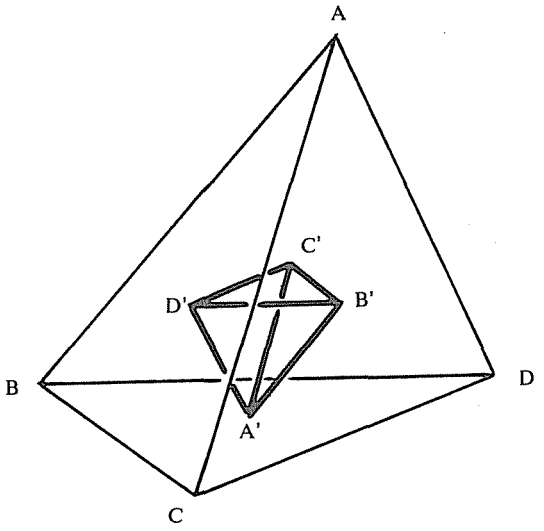


Fig. 36

(*) Sur cette figure, on suppose que les arêtes des deux tétraèdres sont matérialisées en "fil de fer" et on convient que, de deux arêtes non coplanaires, celle qui, pour le dessinateur, "passe derrière l'autre" est représentée par un trait interrompu.

De façon générale : les homothéties de rapport positif conservent l'orientation des parties orientées de l'espace, les homothéties de rapport négatif altèrent cette orientation.

VIII — 4. Ce qui précède justifie en la précisant la note du paragraphe VI-1 de la rubrique ORIENTATION, où on a qualifié de "positives" les transformations qui conservent l'orientation et de "négatives" celles qui l'altèrent.

D'une part toute homothétie de rapport strictement positif est une bijection de la droite, ou du plan, ou de l'espace, sur eux-mêmes, qui conserve leur orientation : c'est donc une "transformation positive".

En regard, les homothéties de rapport strictement négatif ne sont pas toutes des "transformations négatives" : elles le sont sur la droite et dans l'espace, dont elles altèrent l'orientation ; elles sont au contraire des "transformations positives" en géométrie du plan.

C'est dire que les locutions abrégées "homothétie positive", "homothétie négative" comportent un risque sérieux d'ambiguïté.

LANGAGE VECTORIEL (87)

I. Activités géométriques à l'Ecole
II. Initiation à la géométrie
III. Critique d'une démonstration
IV. Rôle du dessin en géométrie
V. Le langage vectoriel en géométrie du plan

I. ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES A L'ÉCOLE

A travers de nombreuses manipulations (découpages, pliages, assemblages, etc.), les enfants pratiquent dès l'Ecole des activités qui se situent à mi-chemin entre le dessin et la géométrie. L'expérience les amène, avec l'aide du maître, à dégager des faits tenus pour généraux et qui peuvent être réemployés de situation en situation.

A titre d'exemple, ils peuvent constater que l'on peut daller le plan à l'aide de triangles tous du même modèle (*) (de même qu'ils ont pu observer des dallages réalisés avec des carrés ou des hexagones).

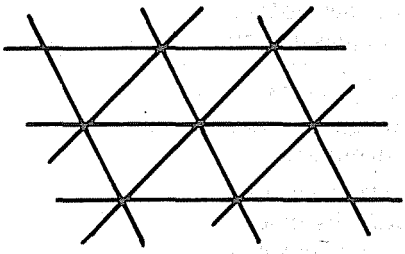


Fig. 1

Au-delà de ces manipulations, il est souhaitable d'amener progressivement les enfants à analyser leurs productions.

Ainsi, l'activité précédente peut déboucher sur la constatation qu'un triangle ACE peut se décomposer en quatre triangles superposables ABF, BCD, FDE, BDF : il suffit pour cela de joindre les milieux B, D, F des côtés du triangle ACE.

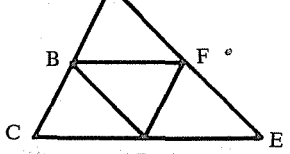


Fig. 2

(*) Voir par exemple ELEM-MATH VI, "Le triangle à l'Ecole Elémentaire" (brochure A.P.M.E.P. n° 36, page 18).

La diversité des situations aidant, il se peut même qu'un fragment de ce résultat soit employé : par exemple dans le cas d'un triangle MNP et des milieux Q et R de ses deux côtés [MN] et [MP] . L'analogie qui relie cette situation à la précédente conduit à la conviction que

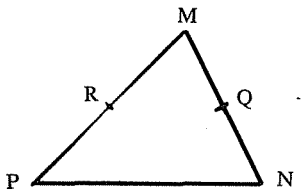


Fig. 3

$$(QR)//(NP) \text{ et } QR = \frac{1}{2}NP$$

sans qu'il soit besoin d'argumenter pour étayer cette affirmation. La mettre en doute, à ce niveau de l'enseignement, ne pourrait que perturber les enfants. Mieux vaut enrichir leur expérience.

II. INITIATION A LA GÉOMÉTRIE

A mesure que les faits d'expérience s'accumulent, naît puis se développe le besoin de les organiser de façon cohérente. C'est d'ailleurs l'une des tâches essentielles de l'enseignant que de susciter cette organisation.

Cette tâche prend une importance grandissante au Collège et elle a pour but de constituer des *îlots déductifs*, c'est-à-dire de mettre en évidence les relations logiques qu'entretiennent certains faits restés jusque-là isolés. Peu à peu, ces relations vont se traduire par des énoncés du type : "Chaque fois que tel fait se produit, tel autre fait se produit". C'est dans ce contexte qu'apparaît le souci, voire le besoin, d'argumenter, de justifier, de démontrer.

Cette initiation à la géométrie est délicate à conduire, puisqu'il s'agit, non pas de récuser des faits expérimentaux qui gardent leur signification et leur efficacité dans le contexte où on les a acquis, mais de faire évoluer les connaissances des enfants vers de nouveaux concepts qui tireront leur signification et leur efficacité dans le contexte plus dépouillé que nous sommes convenus d'appeler géométrie.

De surcroît, l'emploi du langage usuel, inévitable à ce niveau, ne facilite pas la tâche, vu la diversité des connotations que véhiculent des mots aussi courants que *droite, longueur, carré, perpendiculaire,* etc. Son évolution progressive vers un langage proprement technique ne va pas de soi.

III. CRITIQUE D'UNE DÉMONSTRATION

III — 1. Revenons au triangle MNP du paragraphe I et voyons comment, au Collège, on justifie parfois le fait que $(QR)//(NP)$ et $QR = \frac{1}{2}NP$.

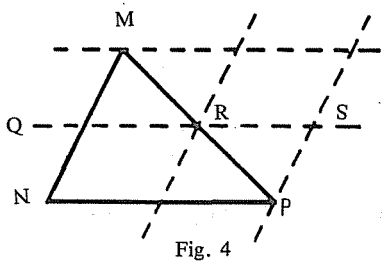


Fig. 4

Le dallage du plan évoqué en I peut servir de fil conducteur.

Soit S le symétrique de Q par rapport à R .

[MP] et [QS] ont le même milieu R ; par conséquent, le quadrilatère MSPQ est un parallélogramme. Il en résulte que (SP)//(MQ) et SP = MQ .

Comme, par hypothèse, (MQ) = (QN) et MQ = QN , nous pouvons affirmer que (SP)//(QN) et SP = QN. De ce fait, QSPN est un parallélogramme, donc (QS)//(NP) et QS = NP .

Or, par hypothèse, $QR = \frac{1}{2}QS$. Nous sommes donc conduits à conclure que (QR)//(NP) et $QR = \frac{1}{2}NP$.

Dégageons le résultat obtenu :

Chaque fois que
- M,N,P sont trois points non alignés
- et
- Q est le milieu de [MN]
- et
- R est le milieu de [MP]

alors
- (QR)//(NP)
- et
- $QR = \frac{1}{2}NP$

III — 2. Examinons la démonstration précédente. Elle serait à peu près incompréhensible en l'absence d'un dessin. Plus insidieux est le fait que le dessin est utilisé sans qu'on y fasse explicitement référence. C'est ainsi qu'on "voit" sur le dessin que c'est MSPQ qui est un parallélogramme alors que MPSQ n'en est pas un. Le recours au dessin constitue un danger dans la mesure où il peut introduire subrepticement des hypothèses supplémentaires non explicitées ou, pire, induire en erreur (voir ci-dessous IV).

III — 3. Enfin, on peut se demander si le résultat précédent vaut encore dans le cas où M,N,P sont alignés. Dans cette éventualité, la démonstration précédente ne s'applique pas car les parallélogrammes MSPQ et QSPN disparaissent. Il faut alors reprendre l'étude ; on est conduit à distinguer trois cas de figure (voir ci-dessous III-4).

1er cas

Fig. 5.1

$$\text{De } \begin{cases} MQ = \frac{1}{2}MN \\ MR = \frac{1}{2}MP \\ QR = MQ + MR \\ NP = MN + MP \end{cases}$$

il résulte que

$$QR = \frac{1}{2}MN + \frac{1}{2}MP$$

c'est-à-dire

$$QR = \frac{1}{2}NP$$

2e cas

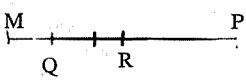


Fig. 5.2

$$\text{De } \begin{cases} MQ = \frac{1}{2}MN \\ MR = \frac{1}{2}MP \\ QR = MR - MQ \\ NP = MP - MN \end{cases}$$

il résulte que

$$QR = \frac{1}{2}MP - \frac{1}{2}MN$$

c'est-à-dire

$$QR = \frac{1}{2}NP$$

3e cas

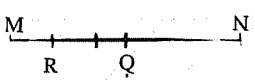


Fig. 5.3

$$\text{De } \begin{cases} MQ = \frac{1}{2}MN \\ MR = \frac{1}{2}MP \\ QR = MQ - MR \\ NP = MN - MP \end{cases}$$

il résulte que

$$QR = \frac{1}{2}MN - \frac{1}{2}MP$$

c'est-à-dire

$$QR = \frac{1}{2}NP$$

Là encore, il serait très difficile de comprendre les justifications précédentes en l'absence d'un dessin. Et même avec le support qu'offre le dessin, l'organisation des arguments réclame quelque attention.

III — 4. Nous avons commencé l'étude précédente en affirmant qu'il n'y a que trois cas de figure à prendre en considération ; pour arriver à cette affirmation, nous avons jugé non pertinents certains paramètres de la situation : la position de la droite, les longueurs MN, NP, PM ...

Cette étude préalable est subtile ; elle est difficile pour des débutants. Elle met en évidence qu'il y a trois cas de figure et trois seulement :

- M est entre N et P (1er cas de III-3) ;
- N est entre M et P (2e cas de III-3) ;
- P est entre M et N (3e cas de III-3).

IV. RÔLE DU DESSIN EN GÉOMÉTRIE

En géométrie, le dessin est nécessaire, mais suspect. En voici deux exemples célèbres.

IV — 1. Où un dessin approximatif conduit à un résultat étonnant

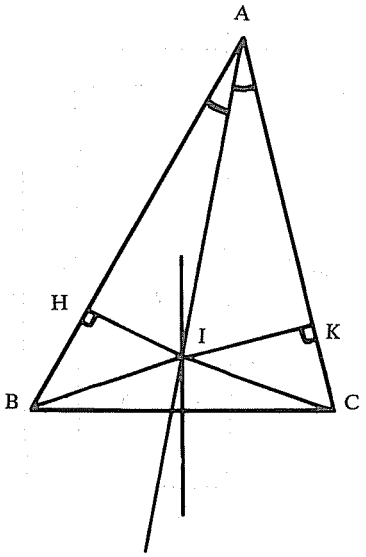


Fig. 6

On considère un triangle ABC et le point I commun à la médiatrice de [BC] et à la bissectrice du secteur saillant BAC .

H et K désignent les projetés orthogonaux respectifs de I sur (AB) et sur (AC). H et K sont symétriques par rapport à la droite (AI), donc

$$IH = IK \quad \text{et} \quad AH = AK .$$

D'autre part, $IB = IC$ puisque I est un point de la médiatrice du segment [BC]. Il en résulte que les triangles rectangles BIH et CIK sont isométriques ; d'où, en particulier, $BH = CK$.

Ainsi $AH + HB = AK + KC$
c'est-à-dire $AB = AC$.

Cèdera-t-on à la tentation d'en conclure que tout triangle est isocèle (ce qui, du même coup, entraînerait que tout triangle est équilatéral) ? Evidemment non.

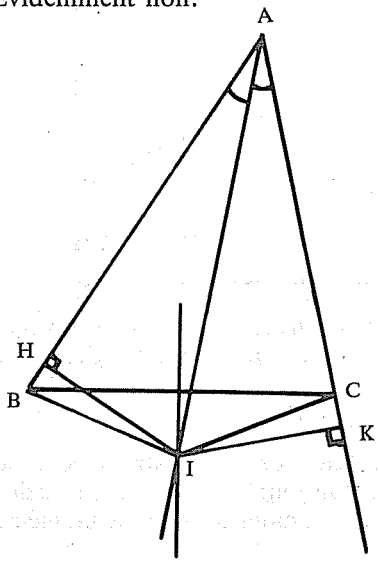


Fig. 7

Reste à débusquer l'erreur... qui doit se cacher du côté du point I . Effectivement, on démontre que I se trouve dans le demi-plan de frontière (BC) qui ne contient pas A.

Dès lors, le début du texte précédent est inchangé jusqu'à

$$BH = CK$$

sans qu'on puisse aller au-delà.

IV — 2. Où un dessin soigné conduit à un résultat étonnant

On dessine le carré ci-contre puis on le découpe en quatre pièces ①, ②, ③, ④, conformément aux cotes indiquées. L'aire de ce carré a pour mesure 21^2, soit 441.

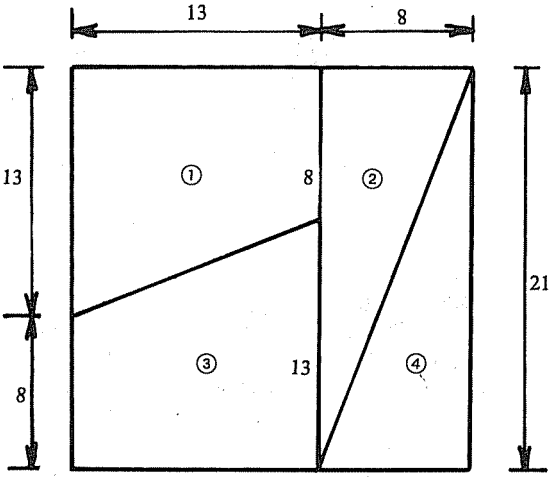
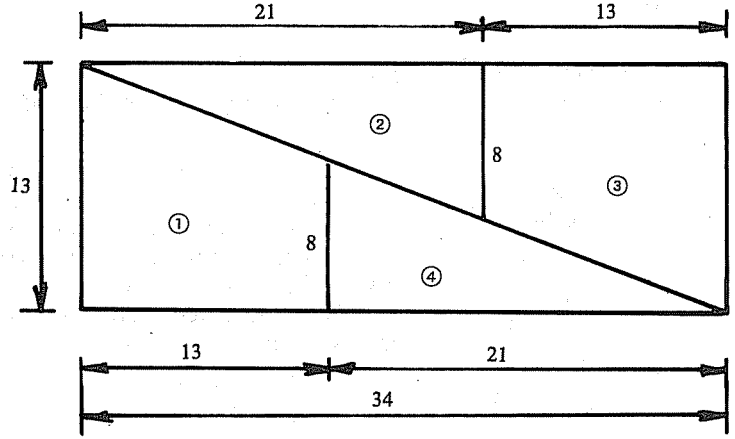


Fig. 8

On assemble maintenant les quatre pièces pour constituer le rectangle que voici :

Fig. 9



Un dessin réalisé avec soin semble confirmer que les quatre pièces forment bien un rectangle ; mais, si c'est le cas, l'aire du rectangle a pour mesure 34×13, soit 442.

Osera-t-on en conclure que $441 = 442$?

Le paradoxe apparent vient du fait que les quatre pièces ne comblent pas le rectangle, mais laissent "un jour", qui est un parallélogramme dont l'aire a pour mesure 1, ce que ne montre pas le dessin, même très soigné.

V. LE LANGAGE VECTORIEL EN GÉOMÉTRIE DU PLAN

L'emploi du langage vectoriel répond à un double souci :

- réaliser une économie de pensée qui se traduit dans des démonstrations plus brèves et plus générales ;
- remettre les dessins à leur juste place : offrir un support des hypothèses et suggérer des conjectures.

V — 1. Premier exemple

Un *parallélogramme* est, dans le contexte de la géométrie élémentaire, un quadrilatère convexe autosymétrique par rapport à un point qui est le milieu I commun à ses diagonales.

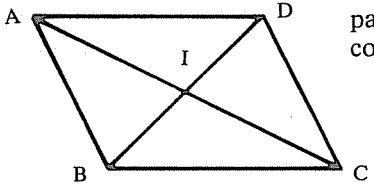


Fig. 10

Mais d'autres figures possèdent une telle autosymétrie, par exemple chacun des deux dessins suivants :

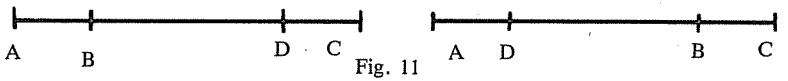


Fig. 11

Parler dans ces cas de "parallélogramme aplati" peut, à la rigueur, être commode pour la mémoire ; il n'en reste pas moins que, dans cette expression, le sens du mot *parallélogramme* est altéré dans la mesure où l'on abandonne la référence au quadrilatère. Il est fort possible qu'une telle extension de sens gêne de jeunes élèves.

Pour englober ces figures dans un discours commun, on décide que les phrases suivantes, où A,B,C,D désignent des points, sont synonymes :

- (A,C) et (B,D) ont le même milieu ;
- (A,B) et (D,C) ont le même vecteur.

Cette deuxième phrase peut se noter, de façon abrégée, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

Ce faisant, on abandonne la référence au parallélogramme perçu comme quadrilatère. Mieux : le langage vectoriel prendra toute son efficacité dès lors qu'on ne précisera même plus qu'il y a effectivement *quatre* points. C'est ainsi que $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$ renvoie à n'importe laquelle des figures suivantes (*) (entre autres) :

(*) Plus on gonfle la signification du mot *parallélogramme*, plus l'objet correspondant se ratatine.

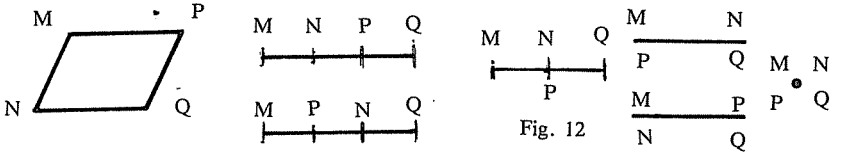


Fig. 12

En géométrie, l'expérience montre que l'abandon de la référence concrète au quadrilatère est largement compensé par l'efficacité du nouveau langage puisque tout ce qu'on pourra déduire de l'information

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$$

s'appliquera indifféremment à toutes les figures où [MQ] et [NP] ont le même milieu.

V — 2. Pour souligner l'efficacité de ce nouveau langage, reprenons l'étude de la situation qui a fait l'objet de III.

L'hypothèse $\begin{cases} Q \text{ est le milieu de } [MN] \\ \text{et} \\ R \text{ est le milieu de } [MP] \end{cases}$

se traduit en langage vectoriel par $\begin{cases} \overrightarrow{QM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM} \\ \text{et} \\ \overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{MP} \end{cases}$

d'où l'on déduit, en additionnant membre à membre :

$$\overrightarrow{QR} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NP}$$

Cette égalité fournit, à elle seule, trois conclusions : (QR)//(NP), $QR = \frac{1}{2}NP$ et, en prime, (Q,R) et (N,P) ont le même sens.

La démonstration est, cette fois, extrêmement concise et elle peut se lire en l'absence de dessin, ce qui, naturellement, n'est pas recommandé à un jeune élève. De plus et surtout, elle n'exige pas que M,N,P soient non alignés ni même qu'ils soient deux à deux distincts. Le gain est évident.

En contrepartie, cette démonstration exige qu'aient été introduites la signification du mot *vecteur*, l'addition des vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un nombre. Cette mise en place ne va pas de soi et réclame une longue familiarisation avec les figures de base décrites en langage usuel, faute de quoi le langage vectoriel ne serait qu'un formalisme vide de sens et, partant, inutilisable par des débutants. A vouloir introduire un langage perfectionné sans un long travail préparatoire, on risque de bloquer la compréhension des enfants. Nous pensons même que, pendant quelque temps, les deux langages, usuel et vectoriel, devraient être utilisés en parallèle afin de mettre en évidence leurs inconvénients et avantages respectifs.

VECTEURS DE LA GÉOMÉTRIE DU PLAN (87)

I. Introduction
II. Des phrases que l'on entend
III. Un parallèle avec l'algèbre
IV. Que recouvre "vecteur de la géométrie du plan" ?
V. Désignation des vecteurs
VI. Un fait essentiel
VII. Interprétation et mode d'emploi d'écritures vectorielles
VIII. Retour sur les phrases du II
IX. Vecteurs et figures géométriques
X. Vecteur et couple de réels
XI. Les vecteurs en physique
XII. Vers les vectoriels

I. INTRODUCTION

Le titre que nous avons donné à cette rubrique manifeste notre intention de n'y considérer d'autres "vecteurs" que ceux des programmes du Collège, où ils sont utilisés pour traduire en *langage vectoriel* (voir la rubrique qui porte ce titre) des faits concernant les points et les droites de la géométrie du plan.

Le lecteur n'oubliera pas, toutefois, que le mot *vecteur* a une acception beaucoup plus large, non seulement en géométrie, mais aussi dans bien d'autres domaines, mathématiques ou non, où peuvent n'apparaître ni les notions de point, de direction, de sens, ni les classes d'équivalence que nous allons rencontrer en III. Donc (même si dans ces domaines on fait souvent appel à des modèles géométriques pour aider l'intuition) on ne commettra pas l'erreur d'attribuer à ces notions un rôle fondamental dans le concept de vecteur ; seule est essentielle la structure de "vectoriel", les éléments d'un vectoriel (ses "vecteurs") pouvant être des polynomes, des matrices, des carrés magiques, des fonctions, des couples de réels, des triplets de rationnels, etc.

Répétons-le, notre projet est plus modeste. C'est à dessein que nous n'évoquerons cette structure que dans le dernier paragraphe de cette rubrique, car elle n'a pas à être introduite en tant que telle au Collège. Par conséquent, dans les paragraphes II à XI, le mot *vecteur* devra être pris uniquement dans l'acception "vecteur de la géométrie du plan", l'extension à la géométrie de l'espace ou à la géométrie de la droite étant d'ailleurs facile.

II. DES PHRASES QUE L'ON ENTEND

II — 1. Pour additionner deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on choisit un point A ; on dessine le vecteur d'origine A égal à $\vec{u}$; son extrémité est B ; puis on dessine le vecteur d'origine B égal à $\vec{v}$; son extrémité est C (on a mis les vecteurs bout à bout). Alors le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Ou encore : on amène les deux vecteurs à avoir la même origine D ; on obtient $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$; on construit le point G tel que DEGF soit un parallélogramme ; alors $\overrightarrow{DG}$ est la somme cherchée.

II — 2. Le vecteur $3\,\overrightarrow{AB}$ a même origine A que $\overrightarrow{AB}$, même support, même sens, et une longueur triple.

II — 3. Un vecteur est un segment orienté.

II — 4. Deux vecteurs sont égaux quand ils ont même longueur, même direction, même sens.

II — 5. Le vecteur vitesse d'un point mobile M a pour origine le point M.

III. UN PARALLÈLE AVEC L'ALGÈBRE

Dans tout ce paragraphe, a, b, c, d sont des réels non nuls (éléments de $\mathbf{R}_*$).

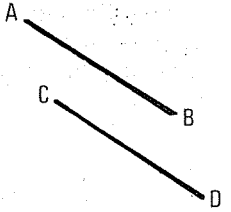
On trouve dans les vieux manuels d'algèbre des phrases du type :

"d est à c comme b est à a".

On voulait dire par là que le couple (a,b) a pour image le couple (c,d) par une relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_*$ qu'on peut formuler de diverses manières :

Dans tout ce paragraphe, A,B,C,D sont des points (éléments du plan P).

On pourrait décrire la figure ci-dessous par une phrase du type : "D est relativement à C dans la même position que B relativement à A".



On voudrait dire par là que le couple (A,B) a pour image le couple (C,D) par une relation $\mathcal{R}'$ dans P×P qu'on peut formuler de diverses manières :

(1) Le nombre h par lequel il faut multiplier c pour obtenir d est celui par lequel on multiplie a pour obtenir b .

Si $b = a$, alors $d = c$ (dans ce cas, $h = 1$).

(2) Le réel k étant choisi de sorte que l'application

$$\begin{cases} \mathbf{R}_* \to \mathbf{R}_* \\ t \mapsto kt \end{cases}$$

donne de a l'image b , cette application donne de c l'image d.

Si $b = a$ (donc $d = c$ et $k = 1$), cette application est l'identité dans $\mathbf{R}_*$.

(3) $\dfrac{d}{c} = \dfrac{b}{a}$

Dans cette égalité, qui se prête bien au calcul (numérique ou littéral), chacun des deux membres est à la fois le nombre h de (1) et le coefficient de proportionnalité k de (2).

C'est 1 pour l'identité dans $\mathbf{R}_*$.

(4) a et d d'une part, b et c d'autre part, ont même produit :

$$ad = bc$$

(5) Le quadruplet (d, c, b, a) est une proportion, c'est-à-dire que ses ~~c~~omposants satisfont à la condition

(1') Si $B \neq A$, le trajet rectiligne qui va de C à D a même direction, même sens et même longueur que le trajet rectiligne qui va de A à B ; si $B = A$, alors $D = C$.

(1'') En gommant toute référence cinématique à un "trajet" :

Si $B \neq A$, alors
- (CD) a même direction que (AB)
- (C,D) est de même sens que (A,B)
- $CD = AB$

Si $B = A$, alors $D = C$.

(2') La translation par laquelle C a pour image D est celle par laquelle A a pour image B .

Si $B = A$ (et donc $D = C$), cette translation est l'identité du plan.

(3') $\overline{CD} = \overline{AB}$

Cette égalité, qui se prête bien au calcul (vectoriel), traduit sous forme condensée les conditions énoncées en (1') ou (1'') ; chacun de ses membres est le vecteur (*) de la translation de (2') .

Le vecteur $\overline{AA}$, associé à la translation identité, est le vecteur nul.

(4') [AD] et [BC] ont même milieu.

(5') DCAB est ce qu'on appelle encore à présent un parallélogramme, à condition de prendre ce

(*) Etymologiquement, le mot *vecteur* veut dire "transporteur".

$\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$ (c'était, naguère, cette condition elle-même qu'on appelait, assez improprement, "proportion").

Cette relation $\mathcal{R}$ dans $\mathbf{R}_* \times \mathbf{R}_*$ est une relation d'équivalence. Le couple (a,b) étant donné, sa classe d'équivalence est le graphe de l'application de (2) où l'on a pris k égal à $\frac{b}{a}$.

mot au sens large (voir LANGAGE VECTORIEL, V-1).

Cette relation $\mathcal{R}'$ dans P×P est une relation d'équivalence (*). Le couple (A,B) étant donné, sa classe d'équivalence $\overline{AB}$ est le graphe de la translation de (2') .

Remarque. On peut déceler une différence entre la situation algébrique et la situation géométrique. En géométrie, la classe d'un couple (A,B) de points de P est le vecteur $\overline{AB}$, *lequel n'est pas élément de* P ; en algèbre, au contraire, la classe d'un couple (a,b) de réels non nuls peut être caractérisée par le coefficient de proportionnalité k de l'application de ②, *lequel est encore un réel non nul,* le réel $\frac{b}{a}$.

Cependant, il ne faut pas s'exagérer cette dissemblance. Quand on restreint la relation $\mathcal{R}$ à $\mathbf{Z}_* \times \mathbf{Z}_*$ (c'est-à-dire lorsqu'on astreint a,b,c,d à être des entiers non nuls dans ④), la classe d'équivalence du couple (a,b) ne peut plus, en général, être caractérisée par un élément de $\mathbf{Z}_*$: cette classe est un rationnel non nul (voir ENTIERS ET RATIONNELS, dans MOTS I), et c'est à la suite de cette construction qu'on peut donner un sens à la notation $\frac{b}{a}$, exactement comme on l'a fait ici pour la notation vectorielle $\overline{AB}$.

IV. QUE RECOUVRE "VECTEUR DE LA GÉOMÉTRIE DU PLAN" ?

A tout couple de points distincts (A,B) on peut associer le segment orienté d'origine A et d'extrémité B (voir ORIENTATION, fin de II-1). Et inversement, à tout segment orienté d'origine C et d'extrémité D on peut associer le couple de points (C,D). C'est pourquoi on pourra, dans ce paragraphe IV, considérer à volonté soit des segments orientés, soit des couples de points.

Il n'est pas indispensable de donner aux élèves du Collège une définition des vecteurs. Il est plus important de les initier au langage vectoriel.

IV — 1. Pour exprimer que des couples de points distincts (A,B), (C,D), (E,F), ... sont tels que, à la fois,

(*) $\mathcal{R}'$ est parfois appelée "équipollence".

les droites (AB), (CD), (EF), ... sont de même direction
les couples (A,B), (C,D), (E,F), ... sont de même sens
les segments [AB], [CD], [EF], ... sont de même longueur,

autrement dit qu'il existe une translation par laquelle A,C,E,... ont pour images respectives B,D,F,..., on dit que ces couples "sont de même vecteur", ou "ont le même vecteur".

Les segments orientés associés, eux aussi, "sont de même vecteur" ou "ont le même vecteur".

IV — 2. On peut dire qu'un vecteur du plan est déterminé quand on se donne simultanément une longueur, une direction et un sens pour cette direction (ou, si l'on préfère, une longueur et une direction orientée).

IV — 3. On dit indifféremment, à propos de deux droites, qu'elles sont parallèles, ou qu'elles ont la même direction, ou qu'elles sont de même direction.

Les six expressions suivantes :

droites de même direction
segments de même longueur
surfaces de même aire
secteurs de même angle
couples de points de même vecteur
segments orientés de même vecteur

bâties sur le même modèle, reflètent la présence de six relations d'équivalence avec leurs classes d'équivalence respectives.

Les directions, les longueurs, les aires, les angles, les vecteurs ne sont pas des ensembles de points ; on ne peut pas les dessiner (voir ci-dessous IX).

V. DÉSIGNATION DES VECTEURS

V — 1. Revenons au parallèle de III.

On pourrait dire que les couples d'entiers (6;8), (3;4), (21;28),... sont de même rationnel ; ce rationnel est désigné indifféremment par les écritures fractionnaires

$$\frac{6}{8}, \frac{3}{4}, \frac{21}{28}, \ldots$$

d'où des égalités comme

$$\frac{6}{8} = \frac{21}{28}$$

Supposons que les couples de points (A,B), (C,D), (E,F), ... sont de même vecteur ; ce vecteur est désigné indifféremment par

$$\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{CD}\ ,\ \overrightarrow{EF}\ , \ldots$$

d'où des égalités comme

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$$

Le vecteur nul se note souvent $\vec{0}$ (et non pas 0, du moins avec des débutants).

V — 2. Par ailleurs, de même que $\frac{b}{a}$ peut être désigné par une seule lettre, k par exemple, rien n'empêche de désigner un vecteur par une lettre, h par exemple :

$$h = \overrightarrow{AB}$$

tout comme la droite contenant les deux points A et B peut être désignée par "droite AB", ou par "(AB)", mais aussi par une lettre, z par exemple : $z = (AB)$.

Mais la tradition veut que l'on utilise, pour désigner un vecteur, non pas la lettre h toute seule, mais la notation $\vec{h}$. Du point de vue pédagogique, cette tradition résulte du souci de différencier nettement les écritures désignant des vecteurs (qu'elles comportent les noms de deux points ou une seule lettre ne désignant aucun point, elles sont surlignées d'une flèche), des écritures désignant des nombres, des points, des droites,... Certains livres, avec le même souci, remplacent $\vec{h}$ par **h** (caractère gras) et $\vec{0}$ par **0**.

VI. UN FAIT ESSENTIEL

Du paragraphe III, il résulte que :

"Etant donnés un point H et un vecteur $\vec{u}$, il existe un point K et un seul tel que $\overrightarrow{HK} = \vec{u}$ ".

Autrement dit, l'équation dans le plan d'inconnue X :

$$\overrightarrow{HX} = \vec{u}$$

a une solution et une seule : le point K . Ce point K est l'image de H par la translation de vecteur $\vec{u}$.

Voici une troisième formulation, souvent utilisée :

$\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HF}$ équivaut à $G = F$.

Cette propriété est à l'origine d'une représentation des vecteurs : voir ci-dessous IX-5.

VII. INTERPRÉTATION ET MODE D'EMPLOI D'ÉCRITURES VECTORIELLES

Rappelons, une fois de plus, que les brochures MOTS s'adressent aux maîtres, et non pas aux élèves. Nous n'abordons pas ici les diverses façons de présenter *en classe* les vecteurs :

- Faut-il parler de translation avant de parler de vecteur ou l'inverse ?
- Faut-il ou non utiliser les mots "relation d'équivalence", "classe d'équivalence", "équipollent", ... ?
- Faut-il admettre comme intuitive la notion de sens comparés de deux couples de points, ou lui donner un statut mathématique ?
- Pour l'addition vectorielle et la multiplication d'un vecteur par un réel, faut-il utiliser provisoirement des signes autres que $+$ et $.$ (ou l'absence de signe), par exemple $\oplus$ et $*$, ou encore $\oplus$ et $\odot$?
- etc.

Il nous semble cependant judicieux, au Collège, de privilégier le fonctionnement du calcul vectoriel en tant qu'outil, plutôt que l'étude de la structure de "vectoriel" en tant que telle ; de ce fait, plutôt que sur la définition proprement dite de "vecteur du plan", il vaut mieux insister sur la signification de certaines égalités vectorielles, à commencer par

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} .$$

VII — 1. L'essentiel, au Collège, est de faire comprendre que les phrases suivantes ont la même signification :

① $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

② [AD] et [BC] ont même milieu

③ Par la même translation, A a pour image B et C a pour image D

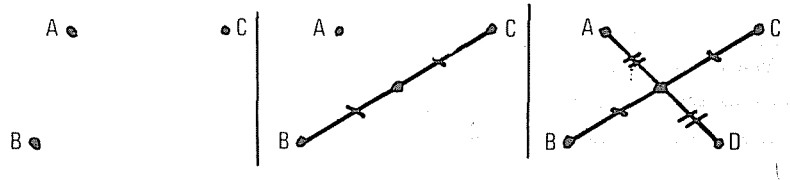
④ $\begin{cases} \text{et } A = B \\ \text{et } C = D \end{cases}$, ou sinon $\begin{cases} \text{et (AB) et (CD) ont même direction} \\ \text{et (A,B) et (C,D) ont même sens} \\ \text{et [AB] et [CD] ont même longueur} \end{cases}$

⑤ (Si A,B,C,D sont quatre points non alignés)
$\begin{cases} \text{et (AB) // (CD)} \\ \text{et (AC) // (BD)} \end{cases}$

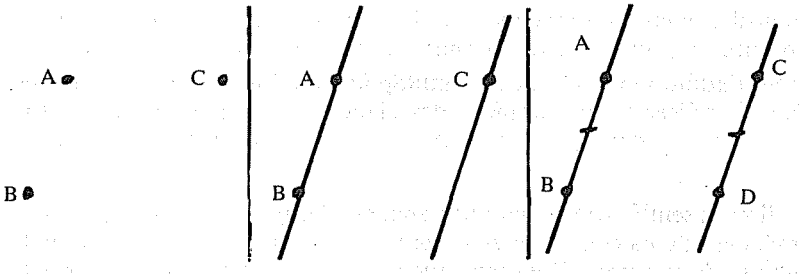
⑥ ABDC est un "parallélogramme au sens large" (voir LANGAGE VECTORIEL).

On peut conjointement comparer plusieurs programmes de construction du point D connaissant les points A,B,C :

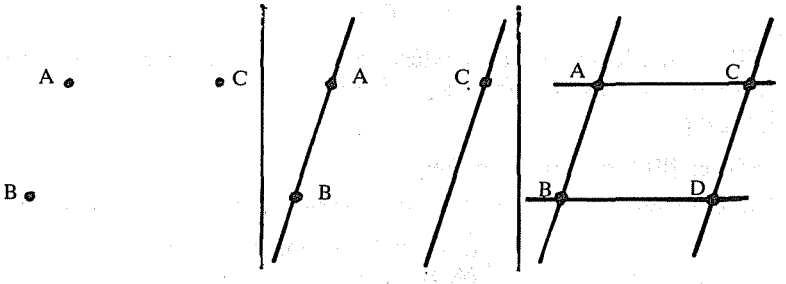
② utilise soit la règle graduée, soit la règle non graduée et le compas, et rend compte de tous les cas de figure évoqués dans LANGAGE VECTORIEL (les quatre points sont alignés ou non, ou ne sont plus que trois, ou que deux,...).



④ utilise règle et équerre, ou mieux té, et, au choix, double décimètre ou compas ; elle traduit de façon bien visible la phrase évoquée en III : "D est relativement à C dans la même position que B relativement à A" :



⑤ utilise deux fois règle et équerre, ou té :



VII — 2. L'égalité de Chasles : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ est vraie *quels que soient les points* A,B,C (*).

Elle traduit le fait que la composée de deux translations est une translation.

Elle ouvre la voie à l'addition des vecteurs et à la "règle du parallélogramme" (voir VIII), souvent utilisée en mécanique.

VII — 3. L'interprétation de $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$ est un bon exercice de raisonnement. En particulier, si on sait par ailleurs que [AB] et [CD] ont la même longueur (non nulle), $\overrightarrow{AB}\neq\overrightarrow{CD}$ signifie alors : ou bien les droites (AB) et (CD) sont sécantes, ou bien elles sont parallèles et (A,B) et (C,D) sont de sens opposés.

(*) Poursuivons le parallèle du III :

Quels que soient les réels non nuls a,b,c, $\frac{b}{a}\times\frac{c}{b}=\frac{c}{a}$.

Cette égalité est l'analogue de l'égalité de Chasles pour les vecteurs.

VII — 4. La multiplication d'un vecteur par un réel peut s'introduire à l'occasion de cas simples où le réel est 2 ou $\frac{1}{2}$ (par exemple dans l'étude du segment joignant les milieux de deux côtés d'un triangle : voir LANGAGE VECTORIEL, V-2), puis 3, 1/3, -1, -2, -3,...

Plus généralement, on peut avoir à exprimer en langage vectoriel que les deux droites (AB) et (CD) sont parallèles sans que les deux droites (AC) et (BD) le soient nécessairement (ABDC est un trapèze, et non plus nécessairement un parallélogramme). L'égalité : $\overrightarrow{AB} = r\,\overrightarrow{CD}$ où r est un réel, exprime ce parallélisme et apporte d'autres informations :

A,B,C,D étant quatre points et r un réel, l'égalité $\overrightarrow{AB} = r\,\overrightarrow{CD}$ (qui impose à r d'être non nul) a la signification suivante :

$$\begin{cases} \text{les droites (AB) et (CD) sont parallèles} \\ \text{(A,B) et (C,D) sont } \begin{cases} \text{de même sens si } r>0 \\ \text{de sens opposés si } r<0 \end{cases} \\ AB = |r|\ CD \end{cases}$$

Remarque. $AB = r\ AD$ signifie que B est l'image de D par l'homothétie (voir ce mot) de centre A et de rapport r.

VII — 5. Si les droites (AB) et (CD) sont parallèles, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des vecteurs directeurs des droites (AB), (CD) et de toutes les droites de même direction qu'elles. Certains disent alors que les deux vecteurs sont "parallèles", ou "de même direction" ; il nous semble préférable d'éviter ces deux expressions, qui concernent les segments, les droites,... tous ensembles de points, alors que les vecteurs ne sont pas des ensembles de points.

Un vocable nouveau peut alors s'introduire, qui est spécifique des vecteurs (*) et qui a l'avantage de déborder le seul cas de deux vecteurs non nuls :

$\vec{u}$ est *colinéaire* à $\vec{v}$
signifie
Il existe un réel r tel que $\vec{u} = r\,\vec{v}$ (**)

(*) L'introduction du calcul vectoriel a fait disparaître une ancienne acception de *colinéaire* ; par exemple, "segments colinéaires" voulait dire "segments portés par la même droite".

(**) La définition de *colinéaire* que nous donnons ici rend la relation de lien verbal "est colinéaire à" non-symétrique et transitive.

On peut envisager une autre définition qui crée une relation symétrique (par exemple :

$\vec{u}$ est *colinéaire* à $\vec{v}$
signifie
Il existe un réel r que $\vec{u} = r\,\vec{v}$ *ou* il existe un réel s tel que $\vec{v} = s\,\vec{u}$)

mais cette relation n'est pas transitive.

• Si $\vec{v} \neq 0$, les vecteurs colinéaires à $\vec{v}$ sont :
— d'une part ($r \neq 0$) les vecteur directeurs des droites ayant $\vec{v}$ pour vecteur directeur ;
— d'autre part ($r = 0$) le vecteur 0, qui se trouve être colinéaire à tout vecteur.

On peut dès lors utiliser le mot *colinéaire* dans certains énoncés, par exemple :

A et B étant deux points, une condition nécessaire et suffisante pour que M soit un point de la droite (AB) est que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ (on trouve en particulier le point A de cette droite : $\overrightarrow{AA} = 0\ \overrightarrow{AB}$).

A étant un point et $\vec{v}$ un vecteur non nul, une condition nécessaire et suffisante pour que M soit un point de la droite contenant A et admettant $\vec{v}$ comme vecteur directeur est que $\overrightarrow{AM}$ soit colinéaire à $\vec{v}$.

• Si $\vec{v} = 0$, alors $\vec{u} = r\vec{v}$ entraîne $\vec{u} = 0$: le seul vecteur colinéaire à 0 est 0 (*).

• Si un vecteur non nul $\vec{a}$ est colinéaire à un vecteur non nul $\vec{b}$, c'est qu'il existe un réel k non nul tel que $\vec{a} = k\vec{b}$; dès lors, k a un inverse, et $\vec{b} = \frac{1}{k}\vec{a}$, donc $\vec{b}$ est colinéaire à $\vec{a}$. On peut donc parler de "deux vecteurs non nuls colinéaires".

VIII. RETOUR SUR LES PHRASES DE II

Un vecteur n'est ni un couple de points, ni un segment orienté (ce qui condamne la phrase II-3). Il n'a pas de droite-support. Il n'a ni origine, ni extrémité, ni milieu. Les phrases II-1, II-2, II-5 sont donc à proscrire, car elles confondent les notions de vecteur et de couple de points (pour II-5, voir XI). On peut les remplacer par exemple par les phrases suivantes :

• la phrase II-1 par :

"Pour additionner deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on choisit un point A ; on place le point B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, puis le point C tel que $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$; alors $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$".

Ou encore : "On choisit un point D ; on place les points É et F tels que $\overrightarrow{DE} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{DF} = \vec{v}$; on construit le point G symétrique de D par rapport au milieu de [EF]. Alors, $\overrightarrow{DG}$ est le vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$." (**)

(*) Voir note précédente.

(**) C'est la "règle du parallélogramme".

• la phrase II-2 par :

"Soit M le point tel que $\overline{AM} = 3\ \overline{AB}$: M est sur la demi-droite d'origine A contenant B et $AM = 3\ AB$."

(On remarquera qu'on a utilisé plusieurs fois la propriété du VI).

• Quant à la phrase II-4, nous renvoyons à la rubrique DISTINCTS, CONFONDUS, ÉGAUX, INÉGAUX et à l'égalité $\overline{AB} = \overline{CD}$ (voir ci-dessus VII-1).

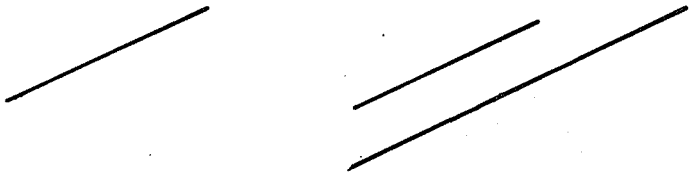
IX. VECTEURS ET FIGURES GÉOMÉTRIQUES

IX — 1. Rappelons (voir IV-3) que les vecteurs ne sont pas des figures, c'est-à-dire des ensembles de points, et donc qu'on ne peut pas les dessiner (d'où un reproche supplémentaire à adresser à la phrase II-1).

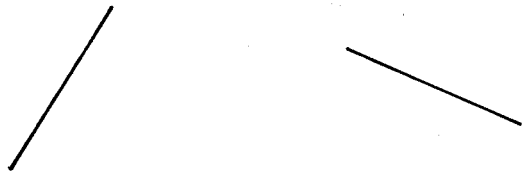
On cherche parfois à les évoquer dans les figures géométriques, tout comme on cherche à évoquer les directions, les angles, etc. On utilise pour ce faire des "représentants" (l'expression "représentant d'une classe d'équivalence" désigne tout élément de cette classe).

Ainsi, sur les figures ci-après, on a évoqué :

• une direction en dessinant trois droites qui en sont des représentants :

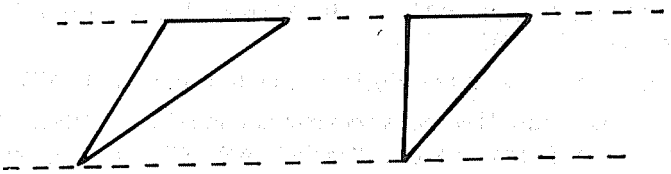


• une longueur en dessinant deux segments de cette longueur :



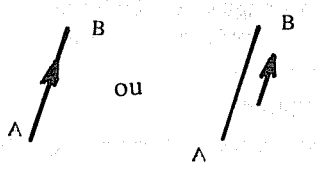
• un angle en dessinant un secteur de cet angle :

• une aire en dessinant deux surfaces ayant cette aire :

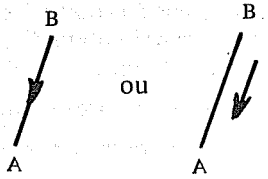


IX — 2. Pour les vecteurs, les représentants peuvent être des segments orientés ou des couples de points.

Un segment orienté se dessine en marquant une pointe de flèche sur le segment non orienté correspondant ou à côté de lui (on peut dire qu'un segment orienté indique un segment tout en apportant une information supplémentaire) :



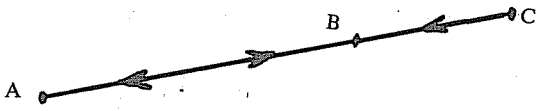
segment orienté
d'origine A et d'extrémité B



segment orienté
d'origine B et d'extrémité A

De même, un couple de points (A,B) est un ensemble de points muni d'une information supplémentaire. Il peut être évoqué en dessinant l'ensemble de points $\{A,B\}$ (c'est-à-dire en marquant les points A et B) et en traçant un trait, quelconque, muni d'une pointe de flèche "partant" de A et "arrivant" en B :

On adopte le plus souvent le trait rectiligne ; mais il n'est plus adéquat s'il s'agit de points alignés : la figure suivante

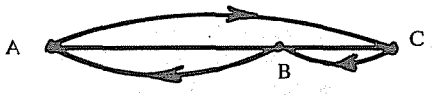


n'indique pas clairement quels sont les trois couples de points que l'on considère :

s'agit-il de (A,C) , (B,A) et (C,B)
ou bien de (A,B) , (C,A) et (C,B)
ou bien de ... ?

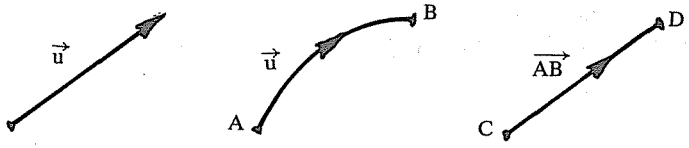
De plus, le trait rectiligne risque d'amener ou de conforter la confusion entre couple de points et segment orienté.

En revanche, la figure suivante ne comporte aucune ambiguïté.



De plus, le trait rectiligne risque d'amener ou de conforter la confusion entre couple de points et segment orienté.

IX — 3. Dès lors, un vecteur peut être évoqué de la façon suivante :



Chaque couple de points représentant du vecteur peut être accompagné de l'une des désignations du vecteur. Sur la figure précédente, le même vecteur a trois désignations : $\vec{u}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et trois représentants : (A,B), (C,D) et un couple de points dont on n'a pas désigné les termes.

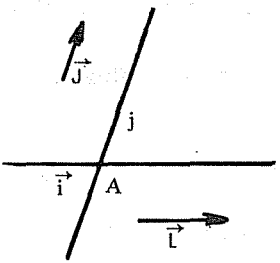
IX — 4. Il se peut que cette évocation des vecteurs soit utile au moment de l'initiation aux vecteurs. Elle risque de créer ou de conforter la confusion entre les vecteurs et les couples de points, ou entre les vecteurs et les segments orientés. Il importe donc que le maître évite soigneusement, dans son langage, tout ce qui pourrait aider à cette confusion (voir VIII), même si cet effort heurte chez lui de vieilles habitudes...

Par ailleurs, on peut conduire un calcul vectoriel sans que les vecteurs en question soient évoqués sur les figures (qui, elles, restent nécessaires !), de même que l'enfant parvient à calculer sur les naturels sans

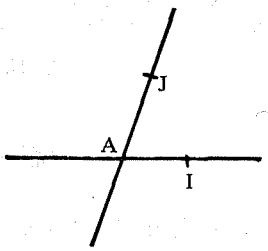
avoir besoin d'évoquer 3, par exemple, par un ensemble de trois objets concrets.

Par exemple, la figure constituée par un parallélogramme ABCD donne lieu à plusieurs égalités vectorielles ($\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$, ...) sans qu'il soit nécessaire de truffer la figure de flèches... Les figures de la rubrique LANGAGE VECTORIEL n'en comportent aucune.

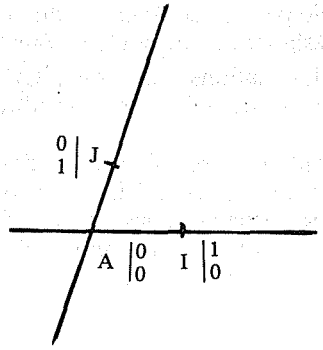
Le repère cartésien $(A,\vec{i},\vec{j})$ du plan peut être évoqué de plusieurs façons, par exemple :



ou, sans flèches, en appelant I et J les points tels que $\overrightarrow{AI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{AJ}=\vec{j}$:



Remarquons par ailleurs que, dans l'une et l'autre des figures précédentes, rien n'indique quel est le *premier* axe. Pour l'indiquer, on peut placer $\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ à côté de A, $\begin{vmatrix}1\\0\end{vmatrix}$ à côté de I, $\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix}$ à côté de J :



Finalement, ne vaudrait-il pas mieux renoncer à évoquer les vecteurs sur les figures ?

IX — 5. La propriété du paragraphe VI permet une représentation de chaque vecteur par un point du plan, et ce d'une manière unique.

On choisit un point O. Etant donné deux points A et B, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est représenté par le point U image de O par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AB}$:

$$U = t(O) \qquad \text{ou} \qquad O \xrightarrow{t} U \ .$$

Graphiquement, cela revient à construire le parallélogramme OABU.

Pour éviter aux élèves de confondre le point U et le vecteur qu'il représente, il est important de montrer d'une manière sensible que les vecteurs ne sont pas des figures ponctuelles.

On peut y parvenir en utilisant une couleur pour les dessins de figures ponctuelles et une autre couleur pour les informations concernant les vecteurs. Mais, dans un premier temps, un procédé matériel un peu plus élaboré est sans doute utile (*).

On agrafe le long d'un de leurs bords une feuille de papier blanc sur laquelle on marque un point O et une feuille de papier-calque de sorte que la feuille de papier-calque puisse se soulever et se rabattre toujours à la même place. Les figures ponctuelles sont faites sur le papier blanc, et on porte sur le calque les informations relatives aux vecteurs. Ainsi, les points et les vecteurs n'ont pas le même support matériel : papier pour les points, assemblage du papier et du papier-calque pour les vecteurs.

Les bandes dessinées des deux figures ci-après illustrent :

- la première, la représentation du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le point U, ce qu'on peut noter : $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{AB}$;
- la seconde, la construction du point F tel que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ (A,B,C,D,E étant donnés) ,

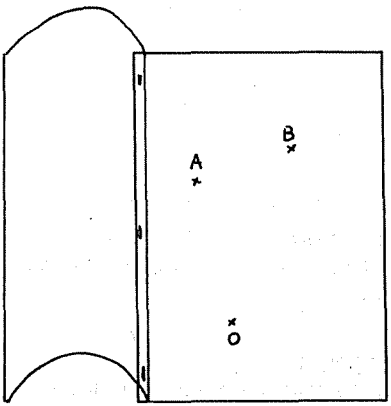
par l'intermédiaire des points U, V et W tels que $\overrightarrow{U} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{U} + \overrightarrow{V}$, en mettant en évidence la règle du parallélogramme.

Dans cette représentation, le vecteur $\vec{0}$ est représenté par le point O.

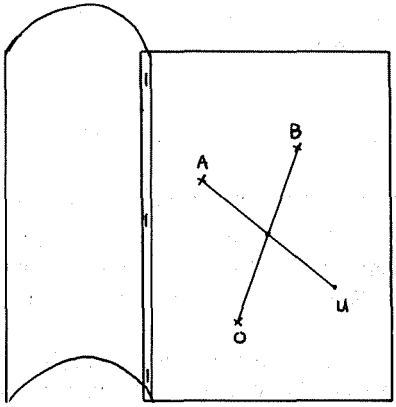
$\overrightarrow{U}$ est colinéaire à $\overrightarrow{V}$ si et seulement si le point U est sur la droite (OV).

(*) Ce procédé a été imaginé par des collègues de l'IREM de Bordeaux et utilisé dans des classes de Seconde.

Première

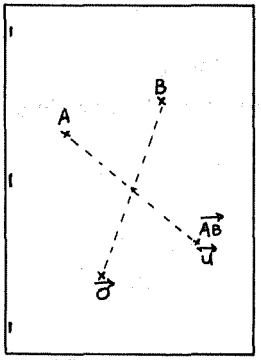


Données ponctuelles

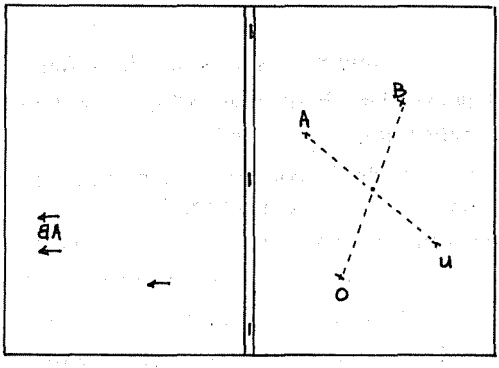


Construction du parallélogramme OABU
(le point U représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$)

En ouvrant, on retrouve :

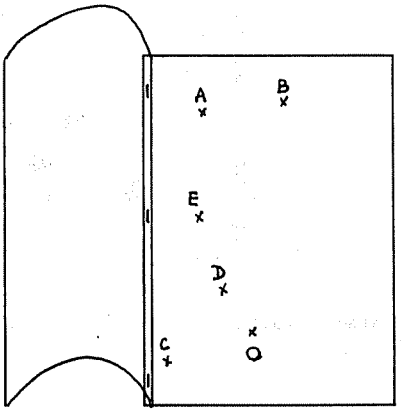


Mise en place,
sur le calque, de la légende :
information vectorielle.

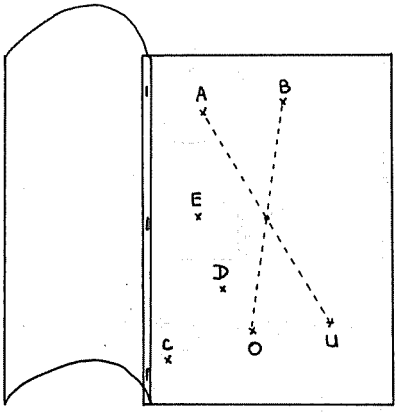


Le calque portant la légende — La figure ponctuelle

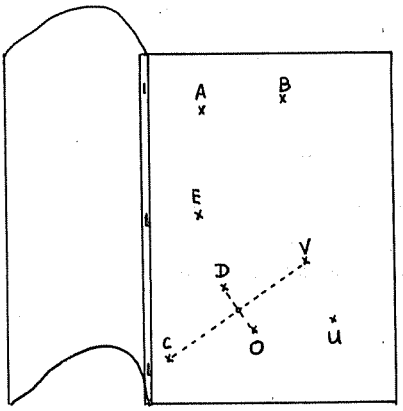
Seconde



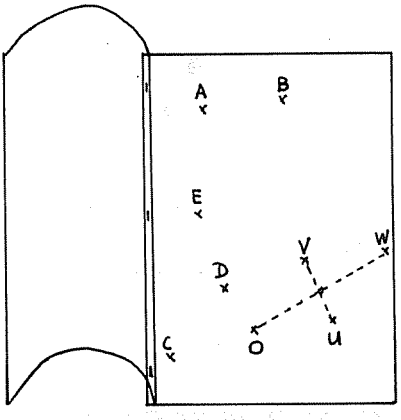
Données ponctuelles



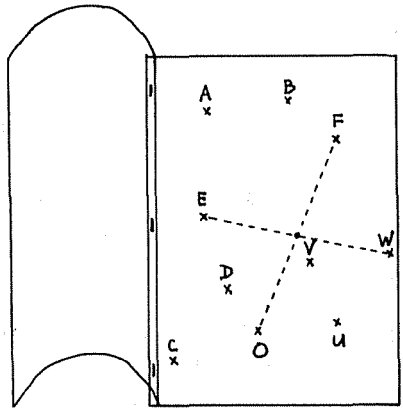
Construction du parallélogramme OABU
(U représente le vecteur $\overrightarrow{AB}$) : $\vec{U} = \overrightarrow{AB}$



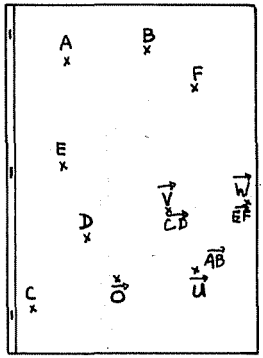
Construction du parallélogramme OCDV
(V représente le vecteur $\overrightarrow{CD}$) : $\vec{V} = \overrightarrow{CD}$



Construction du parallélogramme UOVW
$\vec{U} + \vec{V} = \vec{W}$

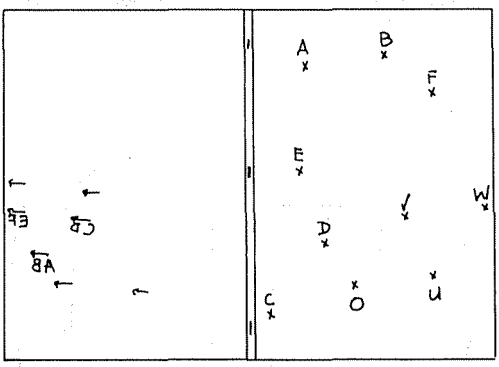


Construction du parallélogramme OEFW
$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{W}$



Mise en place sur le calque de la légende vectorielle

En ouvrant, on retrouve :



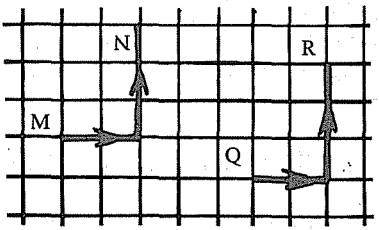
le calque portant la légende la figure ponctuelle

X. VECTEUR ET COUPLE DE RÉELS

Revenons au paragraphe III. On peut concrétiser la notion intuitive de "même position relative" en utilisant un quadrillage (orthogonal ou

non).

Pour aller du nœud M au nœud N, on peut faire 2 "pas" vers la droite puis 3 "pas" vers le haut, tout comme pour aller de Q en R.



On rencontre ce genre d'activités dès l'Ecole à propos du repérage sur un quadrillage.

Ces activités préparent à la notion de couples de points de même vecteur, et même à celle de coordonnées d'un vecteur que nous allons évoquer maintenant.

Choisissons une *base*, c'est-à-dire un couple de vecteurs non colinéaires ; appelons-la $(\vec{i},\vec{j})$.

Tout vecteur $\vec{u}$ peut se mettre, de façon unique, sous la forme :

$$p\vec{i} + q\vec{j}$$

où (p,q) est un couple de réels qui est le *couple des coordonnées* de $\vec{u}$ pour la base choisie (*).

On abrège souvent, sans grand inconvénient, "vecteur ayant (p,q) pour couple de coordonnées" en "vecteur de coordonnées (p,q)".

Mais si, par une négligence coupable à l'égard des débutants, on abrège "vecteur de coordonnées (p,q)" en "vecteur (p,q)", on conduit les élèves à confondre vecteur et couple de réels. En fait, il est plus simple et plus explicite de parler du vecteur $p\vec{i}+q\vec{j}$. Voir à ce sujet le paragraphe XII.

L'écriture $\vec{v}(p,q)$ présente le même danger.

Finalement, beaucoup d'élèves sortant du Collège ne conçoivent pas qu'on puisse parler de vecteurs sans recourir à une base. Le calcul sur les vecteurs disparaît au profit du calcul sur les réels (géométrie analytique). Ce n'est plus l'ensemble des vecteurs qu'on étudie, c'est l'ensemble des couples de réels.

(*) "Coordonnées d'un vecteur" présente le même inconvénient pédagogique que "vecteurs parallèles" (voir VII-5), puisque le mot "coordonnées" est bien implanté pour les points ; parler à la fois de coordonnées d'un point et de coordonnées d'un vecteur, c'est risquer de laisser confondre point et vecteur. Au surplus, on parle rarement d'abscisse et d'ordonnée d'un vecteur...
Le mot "composantes", qui est souvent utilisé au Collège, évite cet écueil ; on lui reproche le fait qu'en physique il désigne souvent $p\vec{i}$ et $q\vec{j}$, qui sont des vecteurs, qu'il serait logique d'appeler "(vecteurs-)composants", au masculin.

Cette disparition nous paraît contraire à l'esprit des programmes du Collège. Le calcul vectoriel est intéressant et formateur en lui-même ; il évite, justement, d'avoir à choisir une base ou un repère du plan, comme on le faisait systématiquement avant son introduction (assez récente) en mathématiques, en physique et dans l'enseignement scientifique.

XI. LES VECTEURS EN PHYSIQUE

Au Collège, il est légitime et conforme aux programmes de mathématiques de présenter les vecteurs dans le seul cadre de la géométrie.

Mais ultérieurement, à vouloir sauvegarder une trop grande pureté géométrique, on risque de se couper de la physique, et même — ce qui est plus grave — de fausser l'idée de grandeur physique.

Figurer le vecteur-vitesse d'un point mobile M par un segment orienté dont M est l'origine est une commodité dont il serait déraisonnable de se priver, du moins aussi longtemps qu'on ne s'imagine pas que l'extrémité V de ce segment est un point de l'espace où se meut M . En fait, ce "point" V n'a aucun caractère intrinsèque : le segment orienté d'origine M et d'extrémité V est une figuration *conventionnelle* qui n'a pas la dimension physique d'une longueur, mais celle du quotient d'une longueur par une durée (voir MOTS VI, III-9.2).

Le cas du vecteur-accélération du point M, celui d'une force appliquée en M, etc. sont analogues : il y aurait donc quelque tricherie à introduire de tels vecteurs par des couples de "points" tels que (M,V).

La distinction vraiment importante en physique est entre les *grandeurs vectorielles,* dans la définition desquelles interviennent la direction et le sens dans le plan (ou dans l'espace), et les *grandeurs scalaires* où ces notions ne jouent aucun rôle (voir MOTS VI, page 27). Ainsi, "50km/h" est une vitesse scalaire, tandis que "50km/h vers le nord-est" est une vitesse vectorielle. On peut associer à toute grandeur vectorielle une grandeur scalaire qui est son module, et il est alors possible de dire :

"Tous les représentants d'une grandeur vectorielle sont de même module, de même direction et de même sens".

Malheureusement, les mots *vitesse, accélération, force,* ... s'emploient parfois avec la signification de "vecteur-vitesse", "vecteur-accélération", "vecteur-force",... ce qui crée de fâcheuses confusions chez les élèves entre les grandeurs vectorielles et les grandeurs scalaires.

XII. VERS LES VECTORIELS

Conformément à ce que nous annoncions dans I, nous avons présenté les vecteurs de la géométrie sans faire état de la structure de vectoriel.

Dans le cadre des études scientifiques ultérieures, on vérifiera que l'ensemble des vecteurs de la géométrie du plan, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, est un $\mathbf{R}$-vectoriel ; que $\mathbf{R}^2$, convenablement structuré, en est un autre ; qu'il est légitime de parler de (3;5) comme d'un *vecteur de* $\mathbf{R}^2$, mais sans le confondre avec $3\vec{i}+5\vec{j}$ qui est un *vecteur de la géométrie du plan* (voir X).

MOTS FLOUS (87)

INTRODUCTION

L'équipe de MOTS a pris l'initiative de rassembler quelques rubriques de la présente brochure (et probablement des brochures qui suivront) sous l'étiquette *mots flous*, sans se dissimuler qu'elle entreprenait une sorte de mission impossible.

En fait, tous les mots sont flous dès qu'ils sont séparés d'un certain contexte : c'est bien pourquoi la rédaction d'un dictionnaire est si difficile, et la traduction automatique si décevante. Ce flou peut d'ailleurs être un élément, voire un élément essentiel, de l'éloquence ou de la poésie : que la cristallisation hexagonale du monoxyde d'hydrogène, plus connue sous le nom de neige, n'ait strictement rien à voir avec l'Héloïse ou la Jeanne d'Arc de la ballade de Villon, cela ne retire pas au refrain "Mais où sont les neiges d'antan ?" un impact poétique qui a résisté à cinq siècles.

Les logiciens et mathématiciens aimeraient bien se situer à l'autre extrême : nous aspirons tous plus ou moins consciemment à une langue non contextuelle associant sans ambiguïté le signifiant et le signifié. C'est peut-être idéalement possible, on sait bien que ce serait pratiquement irréalisable. Même si on restreignait l'usage du signe + à l'addition, de quelle addition s'agirait-il ? Dans quel ensemble numérique ? Dans quel groupe, quel anneau, quel espace vectoriel ? Si, faute de pouvoir compter sur la bienheureuse "intelligence du lecteur", nous nous acharnions à expliciter totalement notre pensée en toutes circonstances, notre écriture serait hérissée d'indices et autres signes diacritiques qui la rendraient à peu près indéchiffrable.

Evidemment, les mots très techniques échappent le plus facilement au risque d'ambiguïté. On ne risque guère de contresens avec *isomorphisme* (*), quitte à préciser éventuellement "isomorphisme de groupes", "isomorphisme d'espaces vectoriels", etc. De même, il faut des cas assez exceptionnels pour que la *variance* du calcul tensoriel vienne interférer avec celle du calcul des probabilités. Les glissements de sens entre domaines voisins sont déjà plus faciles, donc plus dangereux : nous avons dit dans MOTS VII et dans la présente brochure ce que nous pensons de mots comme *translation* ou *rotation* qui sont à cheval sur la géométrie et la cinématique. Bien entendu, le pire des glissements est celui que les mathématiciens eux-mêmes introduisent, chaque fois qu'ils élar-

(*) Attention toutefois ! Le sens de ces mots spécialisés ne peut être garanti que dans les limites d'une spécialité : le mot *isomorphe* est employé en chimie avec un sens différent du sens mathématique, mais non moins précis. On commence à lire ou entendre le mot *isomorphe* dans des circonstances où il ne sert visiblement qu'à éblouir le public. Les mathématiciens, nullement éblouis, tiennent à dégager leur responsabilité.

gissent une définition mais souhaitent pourtant pouvoir se référer à son contenu initial ; par une suave ironie, le chef-d'œuvre du flou est le mot *strict* : quand on entend parler d'un "machin strict", on peut être assuré qu'il a cessé de répondre à la définition stricte du machin (*).

Quant aux mots empruntés au langage courant, ils traînent derrière eux toutes sortes de connotations qui accentuent leur ambiguïté. Qu'est-ce qu'un angle : l'angle de la table ? l'angle de la rue ? un angle de tir ? l'angle horaire d'une étoile ? Et qu'est-ce qu'un secteur ? A l'armée j'avais un secteur postal, dans le civil j'appartiens au secteur tertiaire, j'habite un secteur tranquille et mes appareils domestiques sont branchés sur le secteur ; en tant que mathématicien, je dispose de secteurs d'espace, de secteurs sphériques, de secteurs de disque (dits circulaires, hélas !), de secteurs de plan (dits angulaires, re-hélas !). Et cependant — ô miracle de la linguistique — l'*angle-de-secteurs* nous a paru suffisamment clair pour que nous lui consacrions une étude (MOTS V). Avis donc aux fanatiques de l'analyse : ne cherchez pas trop à disséquer les locutions toutes faites. C'est comme la cuisine : il est fortement déconseillé de l'assaisonner avec du chlore ou du sodium ; en revanche le chlorure de sodium est un excellent condiment.

Une autre source de flou est l'ambiguïté de la relation entre signifiant et signifié (**) ; elle mérite une place à part, car elle n'est pas accidentelle, due à quelque négligence de notre part, mais essentielle. Certes on peut estimer nécessaire, devant des enfants qu'on doit former aux mathématiques, d'introduire une distinction entre les signifiants — noms, étiquettes, écritures, notations — et leurs signifiés, qui peuvent être des points, des nombres, des ensembles, des fonctions, etc. Mais nous ne pouvons pas nous dissimuler à nous-mêmes, et nos auditeurs finiront bien par s'apercevoir un jour, que, semblable aux frontières des diplomates, la frontière qu'on a cru tracer est une source inépuisable de violations.

(*) Au départ, l'ordre, l'inclusion, le parallélisme étaient tout naturellement "stricts" (au sens actuel) et on n'éprouvait pas le besoin de le dire. Ou plutôt, quand on disait que les rails du chemin de fer doivent être strictement parallèles, cela signifiait qu'en prenant de trop grandes libertés avec le parallélisme on risque des déraillements, et pas du tout que les rails ne doivent pas être "confondus" ! Là dessus, les mathématiciens, pour des raisons tout à fait valables, élargissent les définitions ; mais comme ils ont encore besoin de temps à autre des "vieilles" notions, ils les baptisent "strictes" pour dire qu'elles ne correspondent plus strictement aux "bonnes" définitions. C'est leur droit, car tous les métiers ont leur jargon ; mais il leur faut une belle audace pour faire la leçon aux autres et se poser en maîtres de langage.

(**) Dans la phrase "Paris est un nom propre", *Paris* est un signifiant.
Dans la phrase "Paris est la capitale de la France", *Paris* est un signifié.

Qu'est-ce que l'égalité $x=y$? Si on privilégie l'aspect "signifiant", c'est la synonymie de *deux* désignations d'un même objet ; si on privilégie l'aspect "signifié", c'est l'identité d'*un* objet avec lui-même. Qu'est-ce que $\frac{1}{2}$? Si on s'attache au signifiant, c'est une honnête fraction avec son numérateur et son dénominateur, évidemment distincte de la fraction $\frac{6}{12}$ et de l'écriture virgulaire 0,5 (ou 0,1 pour qui travaille en numération binaire) ; si on s'intéresse au signifié, c'est un rationnel, affranchi de toute considération de numérateur, de dénominateur, de virgule, de base de numération, donc apte à se prêter aux avatars précédents et même, si les circonstances l'exigent, à une infinité d'autres : $\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$, ou bien $\cos\frac{17\pi}{3}$, ou bien $\lg\sqrt{10}$, etc. Inutile de dire que les discussions sur l'égalité et les fractions sont nées de cette équivoque (*), et qu'elles n'ont aucune raison de cesser tant qu'elle subsiste.

Du fait que les objets mathématiques sont des êtres de raison, nous ne manipulons jamais que leurs signifiants. Nous astreindrons-nous pour autant, chaque fois que nous voulons évoquer le nombre 2, à employer la périphrase ; "le nombre signifié par le dessin 2" ? Non seulement ce serait fastidieux, mais surtout ce serait illusoire ; car cette périphrase, si utile qu'elle puisse être jugée au cours de l'apprentissage, n'est toujours pas le nombre lui-même : elle n'en est qu'une désignation nouvelle, plus alambiquée.

Dans la manipulation intellectuelle des notions, entre en scène un troisième larron aux multiples visages : les représentations mentales, qui peuvent varier avec le contexte et évoluent au fur et à mesure de l'enrichissement du champ conceptuel. Le discours mathématique ne prend pas en compte ce domaine propre à chacun ; mais l'enseignement des mathématiques vise en particulier à permettre à chaque élève de se construire des références correctes.

De toutes façons, les mathématiciens ne peuvent appréhender un objet de leur discipline qu'en l'*identifiant* à ses signifiants, et n'ont même pas la ressource de préférer l'un d'eux aux autres, sinon pour des motifs de commodité passagère. Le rationnel évoqué plus haut ***est*** tout à la fois $\frac{1}{2}$, et $\frac{6}{12}$, et 0,5, et $\lg\sqrt{10}$, ... sinon il n'est rien. Voir dans l'égalité $x=y$ une synonymie, c'est en faire une relation *linguistique* ; elle n'accède au statut de relation *mathématique* qu'en affirmant que l'ob-

(*) Dans chacune des deux phrases :
"La capitale de la France a cinq lettres" ; "Le rationnel moitié de 1 est la fraction $\frac{1}{2}$"
il y a confusion entre signifié et signifiant.

jet x *est* l'objet y, exactement comme l'inégalité $2<7$ affirme l'inégalité de deux nombres et non celle de deux hiéroglyphes.

Quant à prétendre que tout cela peut s'acquérir du jour au lendemain, et sans un sévère effort d'abstraction,... que les optimistes s'en chargent !

*
* *

On notera cependant que nous n'avions jamais éprouvé jusqu'ici le besoin de parler de mots flous. En effet, nous pensions, et nous espérons encore, avoir cerné pour chaque mot des précédentes brochures sinon un sens unique, du moins des sens suffisamment précis pour qu'ils puissent être qualifiés de mathématiques. Aujourd'hui au contraire nous abordons un domaine plus délicat ; pour certains des mots traités, leur emploi en mathématiques est quasi inexistant, et on nous objectera, non sans logique : alors, pourquoi en parler ?

Justement, ces mots-là soulèvent une question qui est au cœur de tout enseignement. Enseigner, c'est essayer de transformer des sujets qui savent mal ou pas du tout en sujets qui savent un peu et moins mal. Certes, bien des "langages" peuvent être utilisés pour cette transmission ; mais enfin, à moins d'un enseignement où la redécouverte spontanée (?) rendrait l'enseignant parfaitement inutile, il faut parler ; mais parler quelle langue ? Si c'est la langue de ceux qui savent, elle est, par définition, obscure pour ceux qui ne savent pas encore ; si c'est la langue de tous les jours, celle de ceux qui ne savent pas, elle transmettra aux enseignés une science déformée, qui bénéficiera de surcroît de l'autorité, réelle ou fictive, du "maître".

Naturellement, on ne peut se cantonner dans cette opposition statique. Dans un enseignement dynamique, il est normal qu'une situation soit décrite au départ en mots assez flous pour qu'ils soient compris sans initiation préalable ; mais elle doit déboucher à plus ou moins long terme sur la construction d'un concept qui s'exprimera en mots plus précis. C'est un peu comme le coffrage du maçon : on en a besoin pour maintenir en place le béton, le temps qu'il prenne ; mais, une fois qu'il a pris, on sacrifie le coffrage. Encore la situation de l'artisan est-elle simple : il sait pertinemment distinguer le mur de béton des planches du coffrage, dont il peut se débarrasser sans vergogne. Le langage est plus insidieux.

Certains mots sont dangereux, mieux vaudrait ne jamais les employer. Nous avons dit en temps opportun tout le mal que nous pensons des "angles orientés" (voir ANGLE DE COUPLES, II) ; nous n'y reviendrons pas ici, sinon pour rappeler qu'on ne pouvait rien inventer de mieux

pour ancrer dans l'esprit des élèves des idées fausses sur l'orientation. Pourquoi s'obstine-t-on à parler du "domaine de définition" d'une fonction, alors que "ensemble de définition" ou "ensemble d'existence" sont plus corrects ?

D'autres mots sont, pour ainsi dire, rhétoriques. Les uns sont empruntés au langage courant, voire un peu trivial, pour illustrer passagèrement une notion ; d'autres, en apparence plus savants, sont en fait inutiles, ils ne servent dans le feu de l'action qu'à insister sur une idée. On n'ajoute rien au concept de relation d'ordre en parlant d'ordre partiel, mais cela peut rappeler, suivant les cas, que l'ordre en cause n'est pas total ou qu'on ignore s'il l'est ou non, ou qu'on n'a pas besoin de le savoir. On trouvera, à la rubrique INVARIANT, un exemple un peu analogue avec le mot *globalement.* De tels mots, pourvu qu'ils soient en situation et qu'on n'essaie pas de les gonfler d'une importance démesurée, sont en général anodins.

Et puis il y a des mots sournois qui, s'étant présentés au départ comme de bons auxiliaires didactiques, finissent par envahir, voire déborder, le domaine qu'ils avaient seulement mission d'investir. Le mot *orthogonal* inspirait confiance : bien formé, non dévoyé par l'usage vulgaire, directement rattaché à la notion d'angle droit, il offrait, en géométrie de l'espace, la possibilité d'une distinction commode entre "droites perpendiculaires" et "droites orthogonales" selon qu'on savait ou non si elles se coupaient. Aujourd'hui le mot *orthogonal* s'applique à des transformations, des groupes, des matrices où l'angle droit n'apparaît qu'en filigrane, ou même pas du tout. Qui peut prédire son proche avenir ?

Inhérente au phénomène social qu'est le langage, cette plasticité ne peut être condamnée sans nuances. D'ailleurs, les mathématiciens ont dans l'affaire la même part de responsabilité que les autres. Ils sont les premiers à exploiter cette plasticité pour annexer tel mot qui leur convient, sans trop s'inquiéter des besoins des autres usagers ; c'est encore beau s'ils ne se flattent pas d'interdire aux non-mathématiciens l'usage du mot ou de la tournure qu'ils viennent de confisquer !

Les exemples n'ont pas manqué, vers les années 70, où certains auraient fait volontiers violence à la langue française pour lui imposer des contorsions bien affligeantes : inciter les linguistes à une réflexion sur l'emploi des mots *et* et *ou* était sûrement un apport positif ; mais vouloir faire de ces mots des traductions exactes de la conjonction logique $\wedge$ et de la disjonction logique $\vee$ était une gageure (heureusement) vouée à l'échec.

Au rebours, il existe des enseignants, pas tous mathématiciens, et aussi des parents, qui prolongent indûment l'emploi d'un langage infantilisant sous prétexte d'être mieux compris des enfants, sans s'aviser qu'ils ont précisément pour rôle d'amener ceux-ci à l'état adulte.

C'est contre ces divers dangers, voire ces excès, que nous avons tenté de mettre en garde les lecteurs de MOTS, grâce à l'analyse de ces *mots flous* qu'à peu près tous nous utilisons ou avons utilisés, en toute innocence certes, mais peut-être pas toujours en toute innocuité pour nos élèves. Il entre dans notre démarche une part inévitable de subjectivité ; si elle éveille en écho celle du lecteur qui s'interrogera sur le bien-fondé du discours qu'il tient devant sa classe, nous n'aurons pas tout à fait échoué.

CALCULER (87)

Mot souvent employé dans l'enseignement des mathématiques, *calculer* n'en est pas moins flou !

Le *calcul numérique* est sans doute l'ensemble des techniques opératoires de l'addition, de la multiplication, etc. Il combine des calculs mentaux et des écritures. Il fait appel à des règles de calcul, à des algorithmes, et peut utiliser des tables numériques et des machines (boulier, calculatrices...).

Le *calcul littéral* (on disait jadis "calcul algébrique") est celui dans lequel figurent une ou plusieurs lettres.

I. CALCUL NUMÉRIQUE

Calculer un nombre, c'est, à partir d'une écriture plus ou moins compliquée de ce nombre, trouver celle de ses écritures qui est la plus "simple" ; encore faut-il préciser ce qu'on entend par "simple"...

I — 1. S'il s'agit d'un entier, l'écriture visée est l'écriture usuelle en base *dix* : des chiffres, éventuellement un signe "moins", pas de virgule, pas de 0 à gauche.

Par exemple, "calculer 12×47", c'est établir, par n'importe quel procédé, que 564 est l'écriture visée, *résultat* du calcul.

Mais l'expérience montre, au Collège en particulier, que pour beaucoup d'enseignants, et donc pour beaucoup d'élèves, 12×47 n'est pas une écriture d'un nombre ; ce serait plutôt un ordre, l'ordre de faire disparaître une telle incongruité pour la remplacer par 564. Par exemple, voici un dialogue vécu dans une classe de Quatrième ; on vient de trouver que 1980 est solution d'une certaine équation :

Le professeur : "Y a-t-il d'autres solutions ?"
Joëlle : "Oui : $1979+1$"
Ange : "C'est pas un nombre !".

Par exemple encore, $3 \times (5+9)$ et $(3 \times 5)+(3 \times 9)$ seraient, non plus deux écritures d'*un* nombre, mais *deux* programmes différents, et donc exécutés différemment par la machine ; alors, on ne pourrait plus écrire :

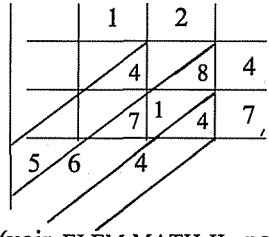
$$3 \times (5+9) = (3 \times 5)+(3 \times 9) ;$$

le signe "est égal à" s'en relèverait-il ? et avec lui le calcul, justement ??

Il est possible et souhaitable de distinguer :

• d'une part :

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 47 \\ \hline 84 \\ 48 \\ \hline 564 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 47 \\ \times 12 \\ \hline 94 \\ 47 \\ \hline 564 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 47 \\ \times 12 \\ \hline 470 \\ 94 \\ \hline 564 \end{array}$$



$$\begin{array}{rr} \cancel{47} & \cancel{12} \\ \cancel{94} & \cancel{6} \\ 188 & 3 \\ 376 & 1 \\ \hline 564 & \end{array}$$

(voir ELEM-MATH II, pages 26 et 27)

qui sont les écritures de cinq *calculs* distincts ;

• d'autre part :

$$12 \times 47 \qquad 47 \times 12 \qquad 564$$

qui sont trois écritures du *même* nombre, entre deux desquelles peut donc s'écrire le signe "est égal à", ainsi sauvegardé.

Malheureusement, une lourde tradition encourage fortement la fâcheuse tendance précédente, par des expressions comme :

"Fais la multiplication 12×47" ou pis encore :
"Compte la multiplication 12×47" (voir COMPTER dans une prochaine brochure)
qui laissent croire que 12×47 est un ordre, l'indication de "quelque chose à faire". En outre, le mot *multiplication* désigne une loi de composition (voir MOTS III) dans **N** (et il n'y a qu'une multiplication dans **N**) ; il est donc à proscrire ici. Il n'est ni plus long, ni plus compliqué — et il est bien plus clair pour l'élève — de dire :

"Calcule le produit de 12 et de 47" ou "Calcule 12×47".

Le mot *produit* a sa place à l'Ecole, tout comme le mot *somme* (or, les élèves de Sixième semblent très peu connaître ces deux mots...).

Mais beaucoup d'enseignants répugnent à de tels efforts, à de telles ruptures dans leurs habitudes : "Tout le monde parle ainsi ; pourquoi changer ?".

On peut critiquer de façon analogue des expressions comme :

"3 et 5 font 8" (pour "3 plus 5 est égal à 8") ; cette formulation est floue car 3 et 5 *font* aussi bien 15, ou 35, ou 3,5...

Dans "3 plus 5 font 8", le pluriel est révélateur : quel est donc le sujet de "font" ? Cette formulation traduit une faute de pensée.

Quant à l'expression "Fais une plus" (au lieu de "Calcule une somme"), elle bêtifie de façon inacceptable, même au Cours Préparatoire.

I — 2. S'il s'agit d'un nombre décimal, tout le monde s'accorde sur le sens de "écriture virgulaire la plus simple" : "calculer $4{,}07 + 139{,}13$" c'est fournir de ce nombre l'écriture $143{,}2$.

I — 3. Les choses se compliquent avec les **écritures fractionnaires.** Que signifient :

"Calculer $\frac{486}{729} + \frac{2261}{969}$" ?

"Calculer $\frac{486}{729} + \frac{1740}{1015}$" ?

De telles écritures sont des écritures de rationnels ; mais on ne sait pas d'emblée si le nombre en question est décimal ou non.

Pour le premier, on obtient, après simplification de chaque fraction, $\frac{2}{3} + \frac{7}{3}$; le résultat attendu est donc 3 ($\frac{9}{3}$ est aussi une écriture du même nombre ; elle ne saurait être pénalisée autant qu'une réponse fausse ; mais elle est maladroite en tant que résultat final).

Pour le second, on obtient $\frac{2}{3} + \frac{12}{7}$; ce nombre n'est pas un décimal. Qu'attend-on ? la fraction irréductible $\frac{50}{21}$? l'écriture $2 + \frac{8}{21}$ (qui a l'intérêt de mettre en évidence la partie entière) ? l'écriture illimitée périodique $2,\overline{380\ 952}$ (*) ? ou une approximation, et si oui laquelle ? (voir APPROXIMATION ; et l'article de J.P. Caroff dans le *Bulletin* de l'A.P.M.E.P. n° 304, juin 1976, page 609).

Finalement, les deux expressions "Calculer $\frac{486}{729} + \frac{2261}{969}$" et "Calculer $\frac{486}{729} + \frac{1740}{1015}$", énoncées de façon isolée, ne signifient pas grand'chose, du fait surtout qu'elles ne proviennent pas d'un problème dont le contexte les préciserait. Si on attend telle ou telle des interprétations précédentes, qu'on le dise nettement.

I — 4. Quant aux **irrationnels**, il est scandaleux que, lors de certains examens, on sanctionne la réponse $\frac{1}{\sqrt{2}}$ comme irrecevable, la seule réponse déclarée correcte étant $\frac{\sqrt{2}}{2}$! En fait, tant qu'on vise un résultat exact, les écritures $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sont aussi valables l'une que l'autre. Si on désire une évaluation fournie par une calculatrice, il en est de même. Si on cherche mentalement une évaluation et si on en connaît une pour $\sqrt{2}$, par exemple 1,4, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est plus *commode* (mais non plus exact !) que $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Et dans certaines situations, par exemple pour démontrer que l'application dans $\mathbf{R}^+$: $x \to \sqrt{x}$ est croissante, on préfère "chasser" les radi-

(*) Le surlignage indique que la tranche de chiffres 380952 se reproduit indéfiniment : 2,380952 380952 3809.....

caux du numérateur vers le dénominateur :

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

donc $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ et $a-b$ sont de même signe.

II. CALCUL LITTÉRAL

La question
"Calculer l'image de 3,2 par l'application dans **R** : $a \to 7a^2-3a+4$"
ou, si l'on préfère,
"Calculer $7a^2-3a+4$ lorsque $a=3,2$"
se ramène à un calcul numérique dès qu'on a remplacé a par 3,2.

Mais que signifient :
"Calculer $0,8a^2+a-4+6a-a^3+2a^2$" ?
"Calculer $\dfrac{b^2-1}{b^2-2b+1}$" ?

Il est probable qu'on demande ainsi, dans le premier cas, de *réduire* un polynome, éventuellement de l'*ordonner* ; dans le second cas, de *simplifier* un quotient de polynomes. Pourquoi alors ne pas employer ces trois mots, plus précis que *calculer* ?

"Calculer $(c+3)(c-4)$" : que peut-on bien vouloir dire par là ? Sans doute *développer* $(c+3)(c-4)$, c'est-à-dire écrire *le même* polynome sous forme de somme.

La question "Calculer c^2-c-12" se rencontre rarement pour demander de *factoriser* c^2-c-12 , c'est-à-dire d'écrire *le même* polynome sous forme de produit de polynomes non constants.

Mais cette différence laisse croire aux élèves que $(c+3)(c-4)$ est un ordre, l'ordre de développer, et que c^2-c-12 est un "vrai" polynome ; ce qui les enfonce un peu plus dans cette manie de développer systématiquement sans se demander d'abord si la suite des événements rend souhaitable une forme factorisée ou une forme développée...

En définitive, quand il s'agit de polynomes, *calculer* semble être un synonyme (flou !) de *développer*, probablement parce que développer un polynome ne demande que l'application directe, presque mécanique, de règles de calcul, alors que factoriser un polynome exige plus de réflexion. Ce qui conforterait certains enseignants et certains élèves dans cette idée fausse que le calcul ne serait que mécanisme.

III.

Tant que le mot *calculer* figure dans des exercices hors contexte destinés à faire acquérir ou à consolider des techniques de calcul, le maître ne peut pas être intransigeant si la réponse fournie est exacte sans être celle qu'il attendait ou s'il n'a pas suffisamment précisé ce qu'il entendait par "calculer".

Lorsque ces techniques sont utilisées dans des problèmes de géométrie, de physique,... pour calculer soit sur des nombres, soit sur des grandeurs, le contexte lève en partie les ambiguïtés du mot *calculer*.

Remarquons que, lorsqu'il s'agit de grandeurs, *calculer* s'oppose souvent à *mesurer* ; par exemple, on calcule une longueur en appliquant le théorème de Pythagore, on la mesure avec une règle graduée (la confrontation des deux résultats constitue un contrôle intéressant).

CONSERVER (87)

Ce vocable permet des énoncés très concis de certaines propriétés ; mais c'est au prix d'une difficulté qu'il vaut mieux éviter aux débutants.

Il s'emploie surtout à propos de certaines applications d'un ensemble vers un autre, en particulier des transformations géométriques.

I. EN GÉOMÉTRIE

I — 1. "Toute symétrie orthogonale conserve les longueurs" (ou parfois "conserve la longueur").

On veut dire par là que, par toute symétrie orthogonale, tout segment a pour image un segment de même longueur.

Pourrait-on dire : "Par toute symétrie orthogonale, chaque longueur est invariante" ? Cette formulation est sans doute claire ; pour la justifier, il suffit d'étendre l'emploi de *invariant* (voir ce mot).

I — 2. On peut développer des remarques analogues à propos de chacune des autres notions usuelles : aire, volume, direction, angle-de-secteurs, angle-de-couples, vecteur, orientation.

Par exemple, "L'homothétie conserve la direction" signifie que, par toute homothétie, toute droite a pour image une droite qui lui est parallèle.

I — 3. A propos de telle transformation, on dit : "Le parallélisme est conservé" pour exprimer que deux droites parallèles ont pour images deux droites parallèles entre elles (mais pas forcément parallèles aux deux premières).

Si les directions sont conservées, il en résulte la conservation du parallélisme (c'est le cas des translations, des homothéties). Mais une rotation plane par exemple (autre qu'une symétrie centrale et que l'identité) conserve le parallélisme sans conserver les directions.

I — 4. Certaines transformations possèdent la propriété suivante : "L'image du milieu de deux points est le milieu des images de ces deux points".

Ce que l'on condense parfois en :
"L'image du milieu est le milieu des images",
formulation déjà trop elliptique pour certains débutants.

Mais la formulation "Le milieu est conservé" est franchement dangereuse, car elle pourrait être interprétée de deux autres façons :

• "A et B ayant pour images respectives A' et B', le milieu de [A'B'] est aussi celui de [AB], et cela quels que soient A et B." (en fait, seule l'identité possède cette propriété) ;
• "M ayant pour image M', le milieu de [MM'] est le même quel que soit M" (ce qui est une façon de définir une symétrie centrale).

I — 5. La conservation du barycentre donne lieu à des remarques analogues, avec un sous-entendu supplémentaire : chaque point a même coefficient que son image.

I — 6. Conservation du rapport de longueurs

A,B,C,D ayant pour images respectives A', B', C', D', s'il se trouve que le rapport de longueurs $\frac{AB}{CD}$ est aussi le rapport de longueurs $\frac{A'B'}{C'D'}$, et cela quels que soient A,B,C,D. On exprime cette propriété en disant que le rapport de deux longueurs est conservé, ou que le rapport des longueurs est conservé. (L'homothétie, par exemple, possède cette propriété.)

On peut aussi parler de la conservation du rapport des aires, etc.

II. EN ALGÈBRE

"Le carré du produit de deux nombres est le produit des carrés de ces nombres".

De façon un peu elliptique : "Le carré du produit est le produit des carrés".

Mais l'usage refuse : "La fonction *carré* conserve le produit"...

CORRESPONDRE - CORRESPONDANCE (87)

I. Le mot "correspondance" est parfois employé avec la même signification que "relation binaire". Corrélativement, pour exprimer que y est image de x par une relation $\mathcal{R}$, on dit qu'à x *correspond* y par $\mathcal{R}$.

II. Dans l'expression *correspondance biunivoque*, le sens du mot *correspondance* n'est plus exactement le sens précédent, mais il en dérive directement.

II — 1. Soit B une bijection d'un ensemble E vers un ensemble F. Appelons B' la bijection réciproque de B (B' est donc une bijection de F vers E).

Quand on n'éprouve pas le besoin d'attribuer à E et F des rôles différents (une source, un but), quand on veut considérer simultanément B et B', on dit qu'elles constituent une *correspondance biunivoque entre* E *et* F (ou entre F et E). Il serait incorrect de dire que B est une bijection *entre* E et F : B est une bijection de E *vers* F.

N'ayant pas à choisir entre "x a pour image y par B" et "y a pour image x par B'", on se contente de dire : "x et y *se correspondent* (ou sont *homologues*) dans la correspondance biunivoque envisagée".

II — 2. Un codage, quand il est bien fait, est bijectif. Par exemple, une numérotation des éléments d'un ensemble E fini, voire infini mais dénombrable (*), n'est autre chose qu'une correspondance biunivoque entre E et une partie de **N** (ou **N** lui-même).

Quand E et F sont en correspondance biunivoque, on en vient parfois à utiliser les désignations des éléments de F pour désigner les éléments *correspondants* de E, ce qui permet un langage raccourci : les départements français ayant été numérotés, ceux de l'académie de Lyon sont 01, 42, 69.

Graduer une droite D (voir GRADUATION), c'est utiliser une correspondance biunivoque entre D et **R**. Par raccourci, on parlera du "point 15" de D.

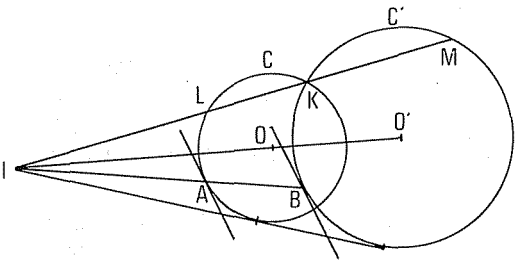
II — 3. L'enfant qui, mis en présence d'un ensemble J de jetons et d'un ensemble C de crayons, veut comparer leurs effectifs, puise simultanément un jeton dans J et un crayon dans C, écarte ces deux objets,

(*) Voir MOTS IV, CARDINAL.

puis recommence. S'il se trouve que J et C sont épuisés en même temps, c'est-à-dire s'ils ont le même effectif, il a établi ce qu'on appelle parfois une *correspondance terme à terme* (ou *correspondance un à un*) entre J et C ; c'est une correspondance biunivoque entre J et C. S'il y a 4 jetons et 4 crayons, c'est l'une des 24 correspondances biunivoques qu'on peut établir entre J et C.

II — 4. Reprenons les notations de II-1. Tant que E et F sont deux ensembles disjoints, l'abandon des bijections B et B' au profit de la correspondance biunivoque qui en est issue n'a guère d'inconvénients. Il en va autrement si E et F ne sont pas disjoints.

Par exemple, deux cercles C et C' coplanaires, de rayons inégaux, se correspondent biunivoquement par homothétie. On entend par là qu'il existe une homothétie h par laquelle C a pour image C' (sur la figure, son centre est I ; il en existe une autre, que nous ne considérerons pas ici) ; C' a pour image C par l'homothétie h' réciproque de h .



Les points A et B "se correspondent" ou "sont homologues", dans la correspondance biunivoque issue de h et h'. On énonce comme suit une propriété classique : les tangentes en deux points homologues sont parallèles.

Mais s'il se trouve que C et C' sont sécants et si l'on considère un de leurs points communs K, une ambiguïté apparaît : K correspond soit à L, soit à M selon qu'on le considère comme élément de C' ou de C : K est l'image de L par h, et l'image de M par h'.

III. Voici des emplois contestables du mot "correspondre".

III — 1. "Pour une substance homogène, les masses sont proportionnelles aux volumes ; le coefficient de proportionnalité *correspond* à la masse de l'unité de volume du corps". Dans cette phrase, qu'on trouve dans des livres de mathématiques et de physique, quelle information contient le mot "correspond" ?

On serait fort embarrassé de lui en trouver une. On retrouve ici la dérobade signalée à la fin de la rubrique REPRÉSENTER : il est indispensable de faire intervenir le quotient d'une masse par un volume.

On ne saurait introduire une notion nouvelle en se bornant à employer *correspondre* ou *représenter.*

III — 2. "Ce que tu viens d'écrire ici, $a^2+2ab+b^2$, *correspond* à ce que nous avons écrit tout à l'heure : $(a+b)^2$". Dans cette phrase, le verbe "correspond" est apparemment utilisé comme abrégé de : "Quels que soient les nombres a et b , tu peux substituer $(a+b)^2$ à $a^2+2ab+b^2$".

On entend peu après : "$9x^2+6x+1$ *correspond* à $a^2+2ab+b^2$" ou même "$9x^2+6x+1$ correspond à $(a+b)^2$". Dans ces phrases, le mot "correspond" a un tout autre sens ; en l'employant, on veut abréger la description d'une démarche intellectuelle : substituer a à $3x$ et b à 1 .

On gagnera certainement à exprimer sans ce verbe ce que l'on veut dire. Par exemple : "Dans $9x^2+6x+1$, on reconnaît (au prix d'un certain entraînement) $a^2+2ab+b^2$, c'est-à-dire $(a+b)^2$, en imaginant que a est $3x$ et que b est 1".

III — 3. De nombreux enseignants énoncent des phrases du type suivant : "120 minutes *correspondent* à 2 heures". Ils n'osent pas écrire : "120 minutes = 2 heures", ni même "120 min = 2 h", alors que c'est bien d'une égalité qu'il s'agit ici. Quel sens peuvent-ils attribuer au mot "correspondent" ? Il y a apparemment là un reste de confusion entre les mesures d'une grandeur avec deux unités distinctes et la grandeur elle-même : 120 et 2 sont deux nombres différents, alors que 120 minutes est la même durée que 2 heures.

III — 4. Des instituteurs, des professeurs, font écrire :

"120 minutes → 2 heures" .

Cette flèche n'est qu'un avatar de l'expression "correspondent à" citée en III-3. Comme celle-ci, elle n'a d'autre signification que celle du signe "=" ; écrivons donc l'égalité 120 min = 2 h .

Nous déplorons l'emploi immodéré du signe "→" que font certains professeurs, de disciplines diverses, de mathématique en particulier, lorsqu'il n'a pas une signification claire, donnée par le contexte ou mieux explicitement dite aux élèves.

DÉCOMPOSER (87)

Lorsque les enfants abordent la décomposition de nombres naturels en facteurs premiers, on voit souvent apparaître, dans leurs travaux, des signes "+", obstinés, au lieu des signes "×" que requiert le sujet.

Pourquoi ? Une des raisons se trouve peut-être dans l'interprétation du mot "décomposer".

Dans le passé de l'enfant, le mot "décomposer" a le plus souvent été employé à propos de l'addition. Quand il avait sept ans, il *décomposait* un tas de 10 jetons en un tas de 6 et un tas de 4. Pour calculer l'aire d'un polygone, on le *décompose* en triangles dont on additionne les aires.

En fait, on ne peut parler de composer deux éléments, de décomposer un élément, sans avoir indiqué la loi de composition sous-jacente.

Dans "décomposer un nombre en facteurs premiers", c'est le mot "facteurs" qui indique de quelle loi de composition il s'agit. Mais on est plus clair en disant : "Décomposer un nombre *en produit de* facteurs premiers" ; tant pis pour le pléonasme. Et mieux encore, et sans pléonasme : "en produit de nombres premiers".

Soyons nets : faire l'économie du mot "produit" et demander de "décomposer 14 en nombres premiers", c'est laisser s'introduire une ambiguïté qui conduit à devoir accepter

$$14 = 2 \times 7 \qquad \text{aussi bien que} \qquad 14 = 3 + 11$$

ou même $14 = 5 * 23$ et $14 = 11 * 17$ si $a * b$ désigne la moyenne arithmétique de a et b.

DÉMONTRER - PROUVER - ÉTABLIR (87)

DÉMONTRER

I. Ce mot est très souvent utilisé dans l'enseignement des mathématiques ; et pourtant il est difficile à définir.

"Démontrer une propriété, c'est la déduire d'autres propriétés, déjà connues", dit-on parfois.

Mais que signifient "déduire" ? "propriété" ? "propriétés connues" ? Souvent on démontre aux enfants, ou on leur demande de démontrer, des propriétés qu'ils ont déjà utilisées pour peu qu'ils aient manipulé une règle, un compas et une équerre. Ils sont d'ailleurs étonnés qu'on éprouve le besoin d'une démonstration : "Deux droites du plan perpendiculaires à une même troisième droite sont parallèles ? Mais il y a bien longtemps qu'on le sait !". Ils "connaissent" déjà la propriété à démontrer...

On est alors tenté de préciser : "connues, cela signifie posées comme axiomes ou déjà démontrées" ; mais c'est employer *démontrées* dans la définition de *démontrer*... De plus, que signifie *axiome* ?

II. Ce dernier mot est pourtant important, car, comme l'écrit Gilbert Walusinski (*) :

"... je ne peux user de démonstration que dans le cadre d'un modèle mathématique, dans une axiomatique déterminée ; dans tout autre domaine, on appelle abusivement "démonstration" ce qui n'est que tentative pour prouver par arguments divers. On attribue à Cézanne cette boutade : "Celui qui me démontre que la Joconde est un chef-d'œuvre, je lui paie un litre !". On ne peut mieux dire puisqu'il n'existe pas un modèle axiomatisé de la beauté en peinture".

Cela dit, il n'est pas nécessaire (et, à notre avis, pas souhaitable, en particulier au Collège), pour initier à la démonstration, d'introduire en classe une axiomatique, en géométrie aussi bien qu'en algèbre ; les programmes de 1979 pour la Quatrième et la Troisième y ont heureusement renoncé.

III. Même entre enseignants, le mot *démontrer* suscite des controverses :

• Les dessins des pages 52 à 54 de la brochure A.P.M.E.P. *Elem-Math VI : Le triangle à l'école élémentaire,* constituent-ils, à eux seuls, des démonstrations du théorème de Pythagore ?

(*) Dans "L'Ecole libératrice" n° 30 du 17-5-1974, page 1491.

• Un "déductogramme" (disposition schématique d'une démonstration sous forme d'arbre) a-t-il même valeur démonstrative qu'une rédaction en français ?

En fait, la notion de démonstration a un caractère à la fois social, conventionnel et historique. Elle a varié au cours des siècles. Et, à une époque donnée, on n'exige pas, pour un sujet donné, les mêmes démonstrations d'un élève du Premier Cycle et d'un candidat au professorat de mathématique...

IV. Terminons en évoquant une autre controverse dans laquelle nous prendrons parti :

Certains enseignants refusent, à tort selon nous, de considérer comme démonstrative la méthode consistant à "épuiser les cas" ; expliquons-nous sur un exemple.

Soit à démontrer que tout naturel non nul de la forme $\overline{aaa}$ est un multiple de 37. Une première démonstration, irréfutable, consiste à établir que les neuf naturels dont il est question (111, 222, ..., 999) sont multiples de 37. Ces neuf calculs peuvent suggérer une autre démonstration fondée sur les égalités :

$$37 \times 3 = 111 \qquad \text{et} \qquad \overline{aaa} = a \times 111 .$$

On peut la considérer comme plus élégante que la première. Elle a surtout le mérite de s'étendre facilement aux naturels de la forme $\overline{aaabbb}$. La démonstration "par épuisement des cas" serait fastidieuse puisque comportant 90 calculs, mais elle serait rigoureuse.

PROUVER

Quelle est la nuance, s'il en est une, entre *démontrer* et *prouver* ? Pour nous, il n'y en a pas...

La célèbre "preuve par 9" prouve (à supposer qu'elle ait été menée elle-même sans erreur de calcul) :
• ou bien que le calcul est erroné,
• ou bien que le résultat obtenu et le résultat exact ont pour différence un multiple de 9.

Elle n'est donc pas la *preuve* que le résultat obtenu est exact. Et de ce fait elle n'est qu'un "test" : on ferait mieux de l'appeler "test par 9".

ÉTABLIR

Ce mot semble synonyme de *démontrer.*

DEUX A DEUX, TROIS A TROIS ... (87)

I. On considère des relations binaires, ou ternaires, ou plus généralement n-aires (voir MOTS VII, SYMÉTRIE, note de la page 16), *symétriques,* dans un ensemble E.

I — 1. Leur symétrie autorise l'emploi du pluriel dans les liens verbaux avec lesquels on peut les décrire (voir SYMÉTRIE, VI-3.1).

Ce pluriel est parfois assorti d'expressions comme "deux à deux", "trois à trois"... Exemples :

- Ces droites sont parallèles deux à deux.
- Les nombres 5, 11 et 18 sont étrangers deux à deux (*).
- Les faces d'un tétraèdre sont concourantes-en-un-point trois à trois.

Nous allons voir que ces expressions, "deux à deux", "trois à trois"... sont employées dans des situations diverses, ce qui rend leur interprétation délicate.

Dans ce qui suit, nous n'envisagerons que des relations symétriques. La relation "est plus grand que" dans un ensemble de nombres n'est pas symétrique : on ne parle pas de "nombres plus grands" ni de "nombres plus grands deux à deux".

Parmi les relations symétriques, nous distinguerons d'une part en I-3 les relations binaires transitives, et d'autre part en I-2 toutes les autres, à savoir : les relations n-aires où $n \geqslant 3$ (pour lesquelles on ne saurait parler de transitivité), et les relations binaires non transitives.

I — 2. Cas des relations symétriques non transitives

a) Les nombres 34, 39, 49, 55 sont étrangers deux à deux, ce qui veut dire que chacune des 6 paires extraites de 34,39,49,55 est constituée de deux nombres étrangers.

Les naturels 34, 46, 50, 55 sont étrangers quatre à quatre ou, pour mieux dire, étrangers dans leur ensemble : ils n'ont aucun diviseur commun autre que 1.

Les nombres 34, 46, 50 ont un diviseur commun (à savoir : 2) ; ce contre-exemple suffit pour qu'on ne dise pas que 34, 46, 50, 55 sont étrangers trois à trois. A fortiori, ces quatre nombres ne sont pas étrangers deux à deux.

(*) "Est étranger à" est synonyme de "n'a pas de diviseur commun, autre que 1, avec". On dit encore "est premier avec".

Bien sûr, si 5 nombres sont étrangers deux à deux, ils le sont aussi trois à trois, quatre à quatre, et dans leur ensemble.

C'est la communauté de lien verbal qui permet d'envisager avec ce même mot, *étranger*, diverses relations : une relation binaire, une relation ternaire, une relation 4-aire... etc. Le simple fait qu'on dise par exemple "étrangers trois à trois" indique qu'il s'agit de la relation ternaire.

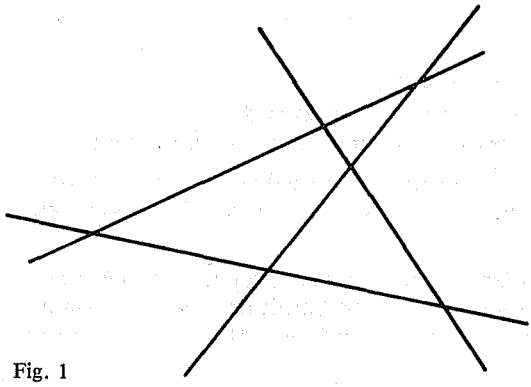


Fig. 1

b) Dans la figure 1 ci-contre, les 4 droites sont sécantes deux à deux (voir SÉCANT). Dans la figure 2, où d et d' sont parallèles, on ne peut pas dire que les droites sont "sécantes deux à deux".

c) Dans un tétraèdre, les plans des faces sont concourants-en-un-point trois à trois ; on ne peut pas dire que les arêtes soient concourantes trois à trois, car parmi les 20 trios sous-ensembles de l'ensemble des 6 arêtes, il n'y en a que 4 qui sont constitués de 3 droites concourantes (voir CONCOURANT).

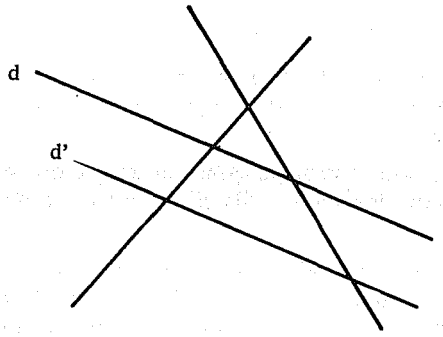


Fig. 2

d) D'une façon générale, soit $\mathcal{R}$ une relation binaire dans E. Dire que les éléments de E sont liés par $\mathcal{R}$ deux à deux, c'est dire que pour toute paire a,b incluse dans E, a et b sont liés par $\mathcal{R}$.

De même, soit $\mathcal{S}$ une relation ternaire dans E. Dire que les éléments de E sont liés par $\mathcal{S}$ trois à trois, c'est dire que pour tout trio a,b,c inclus dans E, les éléments a, b et c sont liés par $\mathcal{S}$.

Etc.

I — 3. Cas des relations binaires symétriques et transitives

Soit $\mathcal{R}$ une telle relation dans E. Dans le cas, usuel, où tout élément de E a au moins une image, $\mathcal{R}$ est aussi réflexive. Elle est alors une relation d'équivalence (voir MOTS II).

Si, dans ce cas, on employait l'expression "deux à deux" dans le sens de I-2 (à savoir : pour toute paire a, b d'éléments de E, $a \mathcal{R} b$), elle signifierait que la partition associée à la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ n'aurait qu'une classe, l'ensemble lui-même. Par exemple, si douze droites sont parallèles deux à deux, au sens du I-2, elles ont toutes la même direction ; il est aussi simple de dire qu'elles sont parallèles.

Quant aux expressions "trois à trois", "quatre à quatre", etc., elles sont incorrectes puisqu'elles ne peuvent être employées que pour des relations ternaires, 4-aires, etc, alors qu'ici $\mathcal{R}$ est binaire.

On préfère donc réserver aux expressions "deux à deux", "trois à trois"..., dans le cas présent, la signification que nous allons dire ci-dessous.

Dire que les éléments de E sont liés par $\mathcal{R}$ n à n, c'est dire que chaque classe d'équivalence contient n éléments de E. Par exemple :

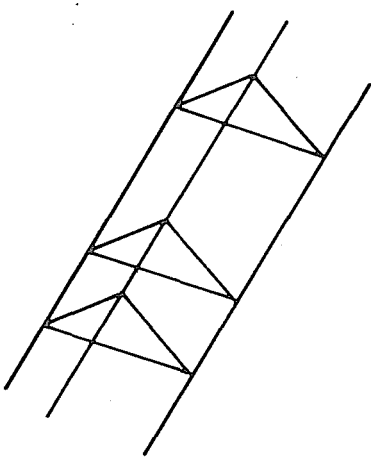


Fig. 3

a) Les côtés d'un parallélogramme sont parallèles deux à deux.

b) Les côtés d'un hexagone régulier sont parallèles deux à deux.

c) Les 12 droites de la figure 3 sont parallèles trois à trois.

d) Les arêtes d'un cube sont parallèles quatre à quatre.

La première de ces trois phrases signifie, en termes plus simples, que deux des côtés d'un parallélogramme sont parallèles (entre eux, s'il faut préciser) et les deux autres aussi. La seconde, que les six côtés d'un hexagone régulier se répartissent en trois paires de côtés parallèles. Etc.

I — 4. Il reste que, quand on emploie les expressions "deux à deux", "trois à trois"..., on n'évoque généralement pas la relation symétrique dont il s'agit ; et, si on l'évoque, on ne se demande généralement pas si elle est transitive ou non. Cela confère à ces expressions un caractère flou.

Les côtés d'un parallélogramme sont parallèles deux à deux au sens de I-3, mais ne le sont pas au sens de I-2.

II. Un enfant déclare : "Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés parallèles quatre à quatre. Le professeur, conformément au sens de I-3, corrige gentiment : "Parallèles deux à deux". Mais l'enfant répète, sûr de lui : "Non, quatre à quatre".

Probablement veut-il dire : "Dans un parallélogramme, chacun des quatre côtés est parallèle à un certain autre" ?

III. Trois droites sécantes deux à deux sont telles que chacune coupe les deux autres, c'est-à-dire que les droites de toute paire (sous-ensemble de l'ensemble des trois) sont sécantes. Ces trois droites peuvent par exemple être concourantes, c'est-à-dire avoir un point commun. Mais le mathématicien a parfois, comme tout le monde, des intentions cachées : "3 droites sécantes deux à deux" sous-entend souvent que, de plus, les trois droites ne sont pas concourantes, c'est-à-dire qu'elles forment un triangle, avec l'argumentation spécieuse que voici : si on voulait parler de 3 droites sécantes deux à deux en un même point, on dirait "3 droites concourantes".

Il vaut mieux dire "trois droites sécantes deux à deux et non concourantes" ou "trois droites déterminant un triangle".

DEVENIR ÉGAL À (87)

I. *"Quel nombre dois-tu ajouter à 7 pour qu'il devienne égal à 10 ?"*

Cette formulation est à proscrire pour l'excellente raison suivante : $7 \neq 10$. Laisser croire que 7 peut "devenir égal à" 10 ne peut que dénaturer, chez l'enfant, l'importante notion d'égalité (voir MOTS I : ÉGALITÉ).

Si dans le passé, une telle formulation a été utilisée, c'est parce qu'on réduisait le rôle du signe "=" à celui d'indicateur d'un calcul à effectuer. Ainsi $7+3$ était interprété comme un programme de calcul et le signe "=" n'avait d'autre fonction que de séparer $7+3$ du résultat, 10, à obtenir. Le langage adopté privilégiait l'aspect dynamique du calcul.

Il est facile de s'exprimer de façon simple et correcte, sans que soit dénaturée la signification du signe "=". "Quel nombre dois-tu ajouter à 7 pour obtenir 10 ?" ou "Quel nombre dois-tu ajouter à 7 pour que la somme soit 10 ?".

Dans les petites classes, cette question est parfois présentée à l'aide de l'écriture $7+\square=10$, qui n'est autre que celle d'une équation où l'inconnue est figurée par une petite boîte (ou par un "trou" : $7+\ldots=10$).

II. Dans le même ordre d'idées, la phrase *"Quel nombre faut-il ajouter aux deux termes de la fraction* $\frac{23}{40}$ *pour qu'elle devienne égale à* $\frac{3}{4}$ *?"* est si volontiers employée que bien des professeurs s'étonneraient qu'on lui reprochât quelque chose.

Or, en tant qu'écriture, la fraction $\frac{23}{40}$ n'est pas la fraction $\frac{3}{4}$; en outre, les nombres rationnels $\frac{23}{40}$ et $\frac{3}{4}$ sont distincts.

Là encore, on dispose d'un langage simple et correct : "Calcule le nombre naturel a tel que $\frac{23+a}{40+a}=\frac{3}{4}$", ou, si l'on préfère, "Résous l'équation dans N d'inconnue a : $\frac{23+a}{40+a}=\frac{3}{4}$".

DISTINCTS - CONFONDUS
INÉGAUX - ÉGAUX (87)

I. "Regardez ces *deux* chats" ; vous viendrait-il à l'idée de préciser que les deux chats sont "distincts" ? Si vous regardez *un* chat, allez-vous parler de "deux chats confondus" ?

En toute logique, le mot *distincts* est inutile et le mot *confondus* est absurde lorsque ces mots suivent *deux* ou *trois...*

Comment alors expliquer la durable fortune que connaissent ces deux vocables en mathématique ? Examinons quelques exemples.

II. Donnons-nous dans un plan deux droites D et D' (puisqu'il s'agit de *deux* droites, c'est que $D \neq D'$). Ou bien elles ont un point commun, ou bien elles n'en ont pas. Dans ce dernier cas, on dit couramment, aussi bien dans la vie quotidienne que dans certains langages professionnels (maçons, menuisiers, ...) : "D est parallèle à D'".

Dans cette situation,

- si D est parallèle à D', alors D' est parallèle à D ;
- étant donné une *troisième* droite D" (donc $D" \neq D$ et $D" \neq D'$), si D est parallèle à D' et si D' est parallèle à D", alors D est parallèle à D".

Du point de vue mathématique, la relation ainsi introduite est symétrique mais elle n'est pas transitive. En effet, si D est parallèle à D', alors D' est parallèle à D ; si cette relation était transitive, on en déduirait que D est parallèle à D, éventualité qui est exclue par le sens précédent du mot *parallèle* (Imagine-t-on un menuisier affirmant que tel montant de meuble est parallèle à lui-même ?).

En mathématiques, on accorde un intérêt particulier aux relations transitives ; en effet, éventuellement améliorées pour qu'elles soient rendues réflexives, elles conduisent aux relations d'équivalence et d'ordre (voir MOTS III, PRÉORDRE). Le parallélisme issu de l'expérience courante étant une relation symétrique, il est tout indiqué d'en modifier légèrement le sens pour engendrer une relation d'équivalence.

On est ainsi conduit à poser la définition que voici :

D_1 étant une droite, D_2 étant une droite (*)

D_1 est parallèle à D_2

signifie

$D_1 \cap D_2 = \phi$ ou $D_1 = D_2$

(*) Par cette formulation, on n'exclut pas l'éventualité $D_1 = D_2$, pour laquelle on n'est en présence que d'une droite. Vu la lourdeur de cette formulation, on écrit plus volontiers : "D_1 et D_2 étant *des* droites..." où l'article *des* n'a pas forcément valeur de pluriel.

Cette relation est réflexive, symétrique et transitive ; c'est donc une relation d'équivalence, et par conséquent elle engendre une partition de l'ensemble des droites du plan. Les classes de cette partition sont appelées *directions* ou, si besoin est, *directions-de-droites* (par opposition à directions-de-plans).

Naturellement, on souhaite parfois revenir au sens courant du mot *parallèle* ; mais pour être homme on n'en est pas moins mathématicien : en présence de deux droites coplanaires et sans point commun, on dit alors qu'elles sont *strictement parallèles.*

III. Comme à propos de toute relation symétrique, on peut introduire des formulations comportant un pluriel ; par exemple, remplacer "X est parallèle à Y" par "X et Y sont parallèles". Mais ce pluriel devient... singulier lorsque $X = Y$. La brèche étant ainsi ouverte, il n'est pas rare de lire la définition suivante :

"Deux droites d'un plan sont dites parallèles si et seulement si elles sont ou bien sans point commun, ou bien confondues".

Et si on s'autorise à parler de "deux droites confondues", pourquoi ne pas continuer avec trois droites confondues, quatre droites confondues... ? On entend même parfois : "Par deux points passent une infinité de droites confondues", ce qui pousse à l'extrême la... confusion.

Le fait que toute droite soit déclarée parallèle à elle-même ne saurait justifier l'expression, absurde en soi, "deux droites confondues". A titre de comparaison : dans l'ensemble des nombres naturels, la relation $\mathcal{R}$ de lien verbal "donne le même reste par 5 que" est, elle aussi, réflexive ; par exemple, $12 \mathcal{R} 12$; pourtant personne n'a jamais parlé de deux nombres 12 confondus...

IV.

IV — 1. Dans le plan, une droite et un cercle peuvent avoir deux points communs (on dit alors qu'ils sont sécants), ou un seul point commun (on dit alors qu'ils sont tangents), ou ne pas avoir de point commun. On peut s'en tenir là avec de jeunes élèves.

Beaucoup plus tard, lorsqu'on aura introduit la notion de contact et les points imaginaires, il sera commode de dire, de façon ramassée : "Une droite et un cercle, quels qu'ils soient, ont en commun deux points, distincts ou confondus".

IV — 2. L'équation dans **R** : $h^2 - 6h + 9 = 0$ a une seule solution (à savoir 3). Pour des raisons analogues, on dit parfois, dans un contexte plus large, qu'elle a "deux solutions confondues" ou mieux "une solution double".

Mais on dira aussi, de façon ramassée : "Toute équation du second degré à une inconnue complexe a deux solutions, distinctes ou confondues".

V. Voici un cas où c'est la présence d'un paramètre qui va inciter à employer le mot "confondu".

On considère, dans le plan rapporté à un repère cartésien, la droite D d'équation $2y=x-1$ et la droite D_m d'équation $y=mx+m-1$ (où m est un paramètre réel).

Si $m\neq\frac{1}{2}$, D et D_m sont sécantes. Par contre si $m=\frac{1}{2}$, D_m, qui s'écrit alors $D_{1/2}$, n'est autre que D . On exprime parfois l'égalité $D_{1/2}=D$ en disant : "Si $m=\frac{1}{2}$, D_m est confondue avec D" ou bien "D et $D_{1/2}$ sont confondues".

VI. "Soit quatre nombres x, y, z, t distincts".

"Soit quatre nombres x, y, z, t distincts deux à deux" (voir la rubrique DEUX A DEUX).

Chacune de ces deux phrases ne dit rien de plus que :

"Soit quatre nombres x, y, z, t " où le mot *quatre* est suffisamment clair à lui tout seul ; "distincts", "deux à deux" sont inutiles.

Dans la phrase "Soit des nombres, x, y, z, t " le mot *des* laisse la porte ouverte aux cas où on serait en présence, non plus de quatre nombres, mais de trois, ou de deux, ou d'un seul (malgré le pluriel *des*). Le plus souvent, c'est que l'on considère en fait quatre fonctions x, y, z, t d'une variable ; désignons-la par k. Il se peut alors que, pour telle valeur de k, par exemple 5, deux des fonctions, par exemple x et y , prennent la même valeur : $x(5)=y(5)$.

Si on désire exclure de telles éventualités, on pourra dire :

- "Excluons les cas où x, y, z, t ne sont pas distincts",
  ou plus correctement,
- "Excluons toute valeur de k qui ne donne pas des images distinctes",
  ou, en évitant le mot "distincts",
- "Excluons toute valeur de k qui ne donne pas quatre images".

VII. Dans tout ce qui précède, *distincts* peut être remplacé par *inégaux* (ou par *différents*).

Sur la lancée, on pourrait espérer surmonter les difficultés précédentes en remplaçant *confondus* par *égaux.* Mais *égaux*, adjectif au pluriel, n'a pas plus de signification que *confondus* ; ce qui revient à dire que, en mathématiques, l'adjectif *égal* n'a pas de pluriel.

Et pourtant, quoi de plus courant que les expressions "Ces deux nombres sont égaux", "Les côtés d'un losange ont des longueurs égales", "Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux" ? Elles sont pourtant regrettables, car elles occultent aux débutants la signification du signe "=".

"Ces deux nombres sont égaux" : on veut dire par là qu'on s'aperçoit que deux écritures précédemment introduites désignent *le même* nombre ; par exemple, l'égalité $\frac{21}{14} = 1{,}5$ signifie que le nombre désigné par l'écriture fractionnaire $\frac{21}{14}$ est aussi le nombre désigné par l'écriture virgulaire 1,5 ; il n'y a là qu'*un* nombre et non pas *deux.*

"Les côtés d'un losange ont des longueurs égales" : pourquoi ne pas dire qu'ils "ont la même longueur" puisqu'il n'y a qu'une longueur et non plusieurs ?

"Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux" : mieux vaut dire "$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$" ou "$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, c'est le même vecteur" ou "Les couples (A,B) et (C,D) ont le même vecteur", car dans cette situation il y a un *seul* vecteur et non deux.

ÉQUIDISTANT (87)

I. EMPLOIS DU MOT "ÉQUIDISTANT" ACCOMPAGNÉ DE LA PRÉPOSITION "DE"

"Le point M est équidistant des points A et B".
"Les points d'un cercle sont équidistants du centre de celui-ci".
"Le centre d'un cercle est équidistant des points de celui-ci".

Dans ces phrases, le mot *équidistant* signifie "à égale distance de".

II. EMPLOI SANS LA PRÉPOSITION "DE"

"Quand on gradue une droite, on marque sur elle des points équidistants".
"En musique, une portée, c'est cinq droites parallèles équidistantes".

Ces formulations sont un raccourci, un peu rapide, de "Chaque point est équidistant de ses deux voisins", "Chaque droite de la portée qui a deux voisines est équidistante de celles-ci". Il s'agit d'un autre emploi du mot "équidistant" : la distance entre deux points voisins, ou deux droites voisines, est indépendante du choix de ces deux points, de ces deux droites.

III. La proximité de ces deux sens explique sans doute les difficultés qu'éprouvent les enfants à employer le mot "équidistant" à bon escient.

GRADUATION (87)

Une *graduation*, c'est tantôt un point marqué sur une droite graduée, ou un trait d'une règle graduée, tantôt le nombre en regard de ce trait ; c'est parfois l'ensemble de ces points marqués, ou l'ensemble de ces traits, ou l'ensemble de ces nombres. C'est aussi une certaine bijection de l'ensemble des nombres réels vers l'ensemble des points de la droite, ou bien la bijection réciproque. Les linguistes verraient dans la graduation d'une droite l'action de la graduer.

Quand on utilise un instrument gradué, on emploie souvent des locutions qu'il est difficile d'éviter, telles que : les traits de la graduation, les nombres de la graduation, la graduation 15, cette règle est graduée en centimètres...

Les choses sont plus claires, et le langage plus aisé, si on part de cette idée simple : graduer une droite, c'est établir une certaine correspondance biunivoque entre cette droite et $\mathbf{R}$; graduer un segment, c'est établir une certaine correspondance biunivoque entre ce segment et un intervalle de $\mathbf{R}$.

Dans de nombreux cas, la graduation est *régulière* ; on entend par là que la longueur du segment [MN], M et N correspondant à deux nombres dont la différence est 1, est indépendante du choix de ces deux points.

Cette longueur s'appelle le *pas de la droite graduée,* ou *pas de la graduation.* Sur un pied-à-coulisse, le pas de la graduation de la règle est 1 millimètre et le pas de la graduation du curseur est 0,9 millimètre.

On évitera "la graduation 15" en parlant du point, ou du trait, d'abscisse 15.

De la même façon, on peut graduer un cercle, un demi-cercle (rapporteur) en utilisant un intervalle de $\mathbf{R}$.

QUELCONQUE (87)

I. Ce mot peut vouloir dire, aussi bien dans le langage courant qu'en mathématique : "dépourvu de particularités considérées comme remarquables" ; c'est dire combien il est flou...

Un "triangle quelconque", est-ce un triangle qui n'est ni rectangle ni isocèle ?

Un "quadrilatère quelconque", est-ce un quadrilatère qui n'est pas un trapèze ? un quadrilatère qui n'a pas de centre de symétrie ? pas d'axe de symétrie ? un quadrilatère non inscriptible dans un cercle ? un quadrilatère convexe dont les côtés ont des longueurs différentes ?

II. Dans la langue courante, le mot *quelconque* signifie souvent "n'importe lequel", "qu'on peut choisir à son gré". Et c'est aussi de cette façon que, souvent, les enseignants l'expliquent quand les enfants le rencontrent pour la première fois.

Dès lors, il est normal que, devant l'exercice :

"Soit f un réel quelconque ; démontre que $f^2+1=(f+1)^2-2f$"

l'élève *choisisse* un réel, par exemple 1, écrive :

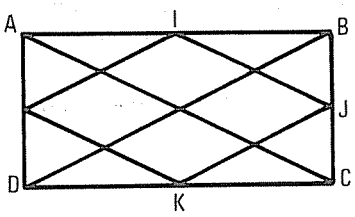
$$\text{"}1^2+1=2 \quad \text{et} \quad (1+1)^2-2\times 1=2\text{"}$$

et déclare en toute bonne conscience : "J'ai fini".

De même, lorsqu'on lui demande de dessiner un "quadrilatère quelconque", c'est en toute bonne foi qu'il fournit un rectangle ou même un carré (surtout quand il utilise du papier quadrillé). Le maître a beau insister : "J'ai dit : quelconque", le malentendu subsiste ; l'élève, à qui on a demandé un quadrilatère quelconque, pense qu'il a le choix. On n'a d'ailleurs rien à lui reprocher s'il choisit un rectangle.voire un carré.

Poursuivre dans ce sens, et faire remarquer à l'élève que son "quadrilatère est trop particulier", risque fort de n'engager qu'un dialogue de sourds puisque le maître n'explique pas plus ce qu'il entend par "particulier" qu'il n'a défini tout à l'heure le mot "quelconque".

Pour fixer les idées, imaginons que l'on se soit intéressé, en partant d'un quadrilatère *quelconque*, au quadrilatère IJKL dont les sommets sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CD], [DA] et qu'un élève ait affirmé que IJKL est un losange à partir du dessin ci-contre où ABCD est un rectangle.



Plutôt que d'insister sur le mot "quelconque", il serait plus judicieux d'attirer l'attention de l'élève sur le

fait que l'égalité IJ = JK trouve son origine dans le fait que AC = BD . Incité à observer des quadrilatères dont les diagonales n'ont pas même longueur, l'élève aurait l'occasion de dégager progressivement que le seul fait certain est : IJKL est un parallélogramme.

Si le maître le juge opportun, l'organisation des résultats obtenus permettra ensuite de mettre en évidence que les cas où IJKL est un losange, un rectangle ou un carré apparaissent lorsqu'on impose telle ou telle particularité au quadrilatère ABCD, particularité qui n'est pas contenue dans le mot *quadrilatère.*

Faire comprendre à l'élève la différence entre "constater la propriété sur son dessin", et "démontrer la propriété", c'est l'une des tâches les plus délicates du professeur ; il serait étonnant que le mot *quelconque*, à lui seul, suffît à l'accomplir.

Nous ne détenons pas de solution-miracle pour empêcher les rectangles, carrés, parallélogrammes de surgir sur les cahiers quand on parle de quadrilatère. Mais l'emploi de papier non quadrillé peut en réduire le nombre.

III. Au cours d'une démonstration, le mot *quelconque* peut apparaître avec des nuances de sens, par exemple lorsqu'il s'agit de trouver une équation d'une droite D connue :

• "Prenons un point *quelconque* A de la droite D" ; on veut dire par là que n'importe quel point de D peut faire l'affaire, qu'on peut le prendre arbitrairement et qu'on va en profiter pour le choisir de façon à faciliter le calcul ultérieur, mais qu'une fois choisi, il n'est plus question, dans la suite du calcul, de l'abandonner pour en choisir un autre.

• "Prenons un vecteur directeur *quelconque* $\vec{v}$ de la droite" : remarques analogues ; on peut choisir n'importe quel vecteur directeur de D, en particulier en choisir un qui facilite le calcul ultérieur, mais on ne peut plus revenir ensuite sur ce choix.

• "D'autre part, appelons M un point *quelconque* du plan" : *quelconque* prend ici un autre sens ; on veut parler d'un point courant, d'un point "baladeur", d'une variable-point décrivant le plan. A partir de quoi l'étude se poursuit : "Si M est un point de la droite, alors ses coordonnées vérifient telle égalité ; réciproquement, si les coordonnées d'un point P vérifient cette égalité, alors P appartient à la droite".

En fait, l'activité précédente s'appuie sur le théorème suivant :

A étant un point quelconque de D,

$\vec{v}$ étant un vecteur directeur quelconque de D,

M étant un point quelconque du plan,

"M$\in$D" équivaut à : "$\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\vec{v}$".

Dans l'énoncé de ce théorème, la nuance entre les trois emplois du mot "quelconque" ne porte que sur le référentiel. Par contre, dans l'utilisation qu'on a faite du théorème, la nuance est plus importante : on a fixé A et $\vec{v}$ (ce qu'on traduit souvent par : "A et $\vec{v}$ étant donnés") et on a laissé à M le statut de variable.

IV. Attirons l'attention sur la formulation que voici, d'un type souvent utilisé (et que nous avons adoptée en III) :

"Soit A un point quelconque du plan".

Elle doit être comprise comme suit :

1°) soit un point quelconque du plan ;

2°) nommons-le A.

Pour le débutant, l'idée contenue dans "quelconque" est vite effacée par la *désignation* A. On peut imaginer, et craindre, que nos élèves pensent à quelque chose comme : "Soit Rouen une ville quelconque de France".

On peut même craindre que l'idée contenue dans "quelconque" soit contredite, dans l'esprit du débutant, par le seul fait de *placer* un point sur la figure, que ce point soit ou non désigné par une lettre.

V. Revenons aux exemples de II.

Il serait préférable de dire :

- "Démontre que, quel que soit le réel f, $f^2+1=(f+1)^2-2f$" ;
- "Dans tout quadrilatère..." ou bien "Dans n'importe quel quadrilatère"

préparant ainsi, sans formalisme prématuré, l'introduction ultérieure du quantificateur universel.

Mais les locutions *quel que soit, tout, n'importe quel,* ne seront pas comprises d'emblée, car le passage du cas unique à la généralité est une difficulté majeure. Evitons qu'elles deviennent aussi ambiguës que *quelconque...*

REPRÉSENTER, REPRÉSENTANT (87)

I. Dans un contexte mathématique, le mot *représentant* a un sens précis : étant donné une relation d'équivalence et, pour cette relation, une classe d'équivalence (voir MOTS II : PARTITION, ÉQUIVALENCE), tout élément de cette classe est dit "représentant de cette classe".

Exemples :

a) Dans l'ensemble des droites, le parallélisme est une relation d'équivalence ; chaque classe est une direction (de droites) ; toute droite de cette direction en est un représentant.

b) L'isométrie permet de définir, dans l'ensemble des segments de droite, la relation de lien verbal "a même longueur que", qui est une relation d'équivalence ; chaque classe est une longueur ; tout segment de longueur 3 cm est un représentant de la longueur 3 cm (voir MOTS V : SEGMENT, LONGUEUR).

c) L'isométrie permet aussi de définir, dans l'ensemble des secteurs de plan, la relation de lien verbal "a même angle que", qui est une relation d'équivalence ; chaque classe est un angle-de-secteurs ; tout secteur d'angle 48° est un représentant de l'angle-de-secteurs 48° (voir MOTS V : SECTEUR, ANGLE).

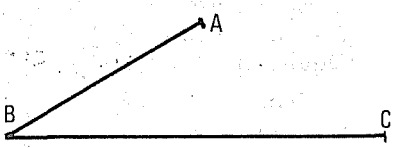
d) Dans l'ensemble des couples de points, l'équipollence ou relation de lien verbal "a même vecteur que", est une relation d'équivalence (*) ; chaque classe est un vecteur (de la géométrie du plan) ; tout couple de points appartenant à ce vecteur en est un représentant.

e) Dans l'ensemble des couples de naturels dont le second terme n'est pas 0, la relation $\mathcal{R}$ définie par :

$$(a,b)\ \mathcal{R}\ (c,d) \quad \text{si et seulement si} \quad ad = bc$$

est une relation d'équivalence ; chaque classe est un nombre rationnel positif ; tout couple de naturels élément de ce rationnel en est un représentant (voir MOTS I : ENTIERS ET RATIONNELS ; FRACTION).

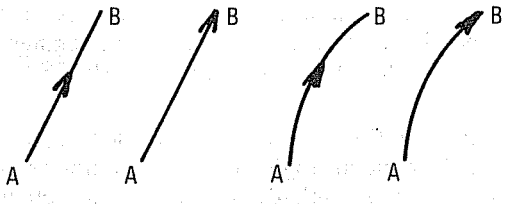
II. En somme, le mot *représentant* est un substitut du mot *élément*, mais seulement dans le contexte d'une relation d'équivalence. L'employer, c'est rappeler implicitement ce contexte.
C'est ainsi qu'on peut dire, à propos de la figure ci-contre, que le segment [AB] est un représentant de la longueur 3 cm, que le secteur $\widehat{[ABC]}$ est un représentant de l'angle-de-secteurs 30°.



(*) "(A,B) a même vecteur que (C,D)" signifie "[AD] et [BC] ont même milieu".

Mais on dit aussi bien, et plus simplement :
- le segment [AB] a pour longueur 3 cm,
- le segment [AB] est long de 3 cm,
- le secteur $[\widehat{ABC}]$ a pour angle 30°,
- le secteur $[\widehat{ABC}]$ est d'angle 30°.

III. Sur une feuille de papier, sur un tableau noir, ou sur toute autre matérialisation du plan considéré comme ensemble de points, on peut dessiner des segments, des droites, des secteurs, des couples de points (un couple (A,B) est visualisé par une courbe qui joint A et B et qui porte une flèche de A vers B ; le plus souvent cette courbe est rectiligne, ce qui n'est pas sans inconvénient : on incite ainsi à confondre segment, segment orienté, couple de points et vecteur).



Mais on ne peut pas dessiner une direction, laquelle est un ensemble infini de droites. Pour évoquer une direction, on peut dessiner une ou plusieurs de ces droites, qui en sont des représentants. On peut dire que cette direction *est représentée* par cette droite ou par ces droites.

De même, on ne peut dessiner un vecteur — lequel est un ensemble infini de couples de points. Pour évoquer un vecteur, on peut dessiner un ou plusieurs de ces couples, qui en sont des représentants. On peut dire que ce vecteur est représenté par ce couple, ou par ces couples.

Même chose pour une longueur, évoquée par le dessin de segments, pour un angle-de-secteurs évoqué par le dessin de secteurs.

IV. On vient de glisser sans trop d'inconvénients de "avoir pour représentant", qui a un sens mathématique précis, à "être représenté par". Il serait plus dangereux d'introduire le verbe d'action "représenter", de dire par exemple "Telle droite représente telle direction" : le verbe *représenter* a en effet des emplois si nombreux et divers, tant en mathématiques qu'en dehors d'elles, qu'on oublierait vite le contexte "relation d'équivalence" dont il est question dans ce qui précède.

Dans certains cas, le sens de *représenter* est précisé par un adjectif ou un adverbe :

- "Dans ce repère, la droite D *représente graphiquement* l'application de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$: $x \mapsto 3x+2$". Ou bien : "L'application de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$: $x \mapsto 3x+2$ se *représente graphiquement* par D". Ou bien, à l'aide d'un

substantif : "La *représentation graphique* de cette application est D". Si ces expressions sont claires, elles le doivent à la présence des mots *graphique, graphiquement,* qui évoquent un dessin. Mais l'absence de ces mots rend flou le mot *représenter* : cela est si vrai que, dans les situations où on considère que le langage analytique est plus parlant que le langage géométrique, on dira, intervertissant sujet et objet du verbe *représenter* : "L'application de **R** vers **R** : $x \mapsto 3x+2$ représente la droite D".

• Quand on parle de *représentation paramétrique* d'une droite, il s'agit d'une autre sorte de représentation, mais ici encore l'adjectif *paramétrique* lève toute ambiguïté.

En revanche, on voit mal pourquoi de nombreux énoncés de problèmes du Premier Cycle demandent de *représenter* la droite d'équation $y=3x+2$, alors qu'il serait plus simple et plus clair de demander de la *dessiner.*

V. Le verbe *représenter* est très souvent employé sans contenu clair, voire sans aucun contenu.

S'il peut être accepté dans des tournures telles que "L'abaissement à 24 élèves de l'effectif de toutes les classes de Seconde représente 4000 postes budgétaires", ou bien "4000 postes budgétaires représentent 1/200 du personnel de l'Education Nationale", il ne saurait l'être dans des phrases comme celles-ci :

"Représente un secteur. Mesure l'angle qu'il représente".

Dans le premier de ces deux emplois, le verbe *représenter* n'a d'autre sens que celui de *dessiner,* qui serait clair pour l'élève.

Comme on l'a dit plus haut, le second emploi peut être accepté si l'idée du locuteur (et de ses élèves) est "Mesure l'angle dont ce secteur est un représentant". Mais il est plus simple, et tout aussi correct, de dire : "Dessine un secteur et mesure son angle", de la même façon que : "Dessine un segment et mesure sa longueur".

"La masse volumique d'un corps homogène *représente* la masse de l'unité de volume de ce corps". Dans cette phrase, qu'on trouve dans divers manuels, de physique comme de mathématiques, le verbe *représente* aide-t-il à comprendre ? Quelle est sa signification ? Si elle est celle du signe "=", la phrase est incorrecte, car une masse volumique n'est pas une masse.

A la vérité, cet emploi de *représente* est une dérobade. Si l'on décide d'enseigner l'expression *masse volumique*, il faut introduire la masse volumique d'un corps homogène comme la grandeur quotient de deux grandeurs connues, masse et volume ; une masse volumique n'est donc ni une masse, ni un volume (voir MOTS VI, VI-2).

La formulation "La vitesse d'un mobile animé d'un mouvement uniforme *représente* la longueur qu'il parcourt pendant l'unité de temps" est une dérobade de même nature.

Les formulations "inversées" suivantes, qu'on trouve également dans certains manuels, sont, elles aussi, des dérobades : "La masse de l'unité de volume *représente* la masse volumique du corps ; la longueur parcourue pendant l'unité de temps *représente* la vitesse du mobile".

On voit à quel point le verbe *représenter* est flou, et son emploi dangereux, puisqu'on en vient à l'employer à la fois dans des phrases de types "*a* représente *b*" et "*b* représente *a*".

SÉCANT - CONCOURANT - CONCOURIR (87)

SÉCANT

I. Dire que deux droites sont *sécantes*, c'est dire qu'elles ont un point commun. Si ce point est appelé A, on peut préciser qu'elles sont *sécantes en* A. A est dit *point de concours* des deux droites, mais "point commun" est tout aussi clair.

En géométrie du plan, "deux droites sécantes" est synonyme de "deux droites non parallèles".

En géométrie de l'espace,

- dire que deux plans sont *sécants,* c'est dire qu'ils ont une droite commune, autrement dit qu'ils ne sont pas parallèles ; si cette droite est notée D, on dit qu'ils sont *sécants selon* D ;
- dire qu'une droite et un plan sont *sécants*, c'est dire qu'ils ont un seul point commun ; si ce point est appelé A, on dit qu'ils sont *sécants en* A.

II. Dire qu'une droite et un cercle sont *sécants en un point* A, c'est dire qu'ils ont A en commun sans que la droite soit tangente au cercle.

Dire que deux cercles sont *sécants en un point* A, c'est dire qu'ils ont A en commun sans y être tangents.

Dire qu'un plan et une sphère sont *sécants selon un cercle* C, c'est dire qu'ils ont en commun ce cercle C.

Dire que deux sphères sont *sécantes selon un cercle* C, c'est dire qu'elles ont en commun ce cercle C.

III. Plus généralement, au lieu de dire que deux courbes, ou bien une courbe et une surface, ont en commun le point A sans y être tangentes, on peut dire qu'elles sont *sécantes en* A.

Deux surfaces *sécantes selon* une courbe, ce sont deux surfaces qui ont cette courbe en commun sans être tangentes en chaque point de cette courbe.

IV. Au lieu de *être sécants*, on peut dire *se couper* (rejoignant ainsi l'étymologie de *sécant*, qui vient du latin *secare,* signifiant "couper") ou *se rencontrer* (avec le même relent cinématique que dans la phrase : "La droite D passe par le point A").

V. En particulier, à propos d'un plan et d'une droite sécants en A, on dit souvent qu'ils "se coupent" en A, ou que la droite "rencontre" ou "perce" le plan en A...

VI. Il semble donc que l'adjectif *sécant* ne s'emploie qu'à propos de *deux* courbes ou surfaces. Dès lors, l'expression "sécantes deux à deux" (voir DEUX À DEUX, TROIS À TROIS) est correcte, alors que les expressions "sécantes trois à trois", "trois droites sécantes" ne le seraient pas.

Mais l'usage est parfois moins net ; en particulier, pour trois plans ayant un point commun, on dit qu'ils sont concourants (voir ce mot) en ce point, mais ne dit-on pas aussi parfois qu'ils sont sécants en ce point ?

VII. *Sécante* est aussi employé comme substantif : une sécante à un cercle, à des droites parallèles, c'est une droite sécante à ce cercle, à ces droites. Par contre, s'agissant d'un plan, on ne dit pas "un sécant à la sphère".

VIII. On emploie parfois l'expression "deux ensembles sécants" au sens de "deux ensembles dont l'intersection n'est pas vide", autrement dit de "deux ensembles non-disjoints".

Il peut y avoir contradiction entre cette acception et celles des sept paragraphes précédents. Par exemple, deux cercles tangents ne sont pas sécants au sens du III, alors que ces cercles sont deux ensembles (de points) sécants au sens de VIII.

CONCOURANT - CONCOURIR

I. *Concourir en un point* A, c'est avoir A en commun, qu'il s'agisse de courbes ou de surfaces (y compris droites et plans) en nombre quelconque ; A est dit *point de concours.*

Si ce nombre est 2, *concourir en* A est donc synonyme de "être sécantes en A ou tangentes en A".

II. Les mots *concourir, concourant* prennent un plus grand intérêt lorsque le nombre est au moins égal à 3 (*) : trois droites concourantes, ce sont trois droites ayant un même point ; les trois médianes d'un triangle sont concourantes, les méridiens terrestres concourent aux deux pôles ; ...

III. Dire de plans (en nombre au moins égal à 3) qu'ils sont "concourants" est ambigu ; il faut préciser s'ils concourent "en un point" ou "selon une droite" ; il serait bon d'écrire "concourants-en-un-point", "concourants-selon-une-droite".

(*) Tout comme *alignés* pour des points. Mais "deux points alignés" est un truisme alors que "deux droites concourantes" n'en est pas un.

SIMPLIFIER - RÉDUIRE (87)

I. *Simplifier*, c'est rendre plus simple. Cette acception courante se rencontre aussi en mathématique ; par exemple : "On va simplifier les calculs en changeant de repère".

De façon déjà moins vague, *simplifier une écriture* signifie en mathématique "trouver, pour le même être, une écriture plus simple" ; mais la "simplicité" d'une écriture n'est pas toujours clairement définie, car elle dépend de la tâche à accomplir (voir CALCULER).

II. *Simplifier une fraction* a un sens plus précis.

II — 1. "Simplifier la fraction $\frac{270}{180}$ par 10", c'est la remplacer par $\frac{27}{18}$, qui est une écriture, en effet plus simple, du même rationnel. On peut aussi simplifier $\frac{270}{180}$ par 9, par 30... ; si on la simplifie par 90, qui est le PGCD de 270 et 180, on obtient $\frac{3}{2}$, qui ne peut plus être simplifiée au sens précédent si on tient à conserver des naturels au numérateur et au dénominateur ; on dit que $\frac{3}{2}$ est *irréductible.* Dans certains cas, on aboutit même à un naturel ; par exemple : $\frac{270}{90} = 3$.

Il serait plus logique de dire "non simplifiable" au lieu d'"irréductible", car "réduire une fraction" ne s'emploie guère à la place de "simplifier une fraction". En revanche, on dit couramment *réduire* plusieurs fractions *au même dénominateur* ; pour ce faire, on remplace chacune de ces fractions (ou certaines d'entre elles) par une fraction moins simple au sens précédent, mais mieux adaptée au problème à résoudre ; par exemple, pour réduire au même dénominateur $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{5}$, on remplace ces fractions irréductibles par des fractions ($\frac{10}{15}$ et $\frac{12}{15}$ par exemple) qui ne le sont pas ; ainsi, on en est... réduit à "réduire" des fractions "irréductibles"... (On rencontre aussi l'expression *"mettre* au même dénominateur").

II — 2. Les choses sont un peu moins... simples lorsque numérateur et dénominateur sont deux entiers de signes différents.

Alors que tout rationnel strictement positif a une écriture unique sous forme de fraction irréductible, de numérateur et dénominateur naturels, le rationnel désigné par $-\frac{14}{21}$ en a trois : $-\frac{2}{3}$, $\frac{-2}{3}$, $\frac{2}{-3}$.

II — 3. Lorsque a, b, c sont des réels, b et c étant non nuls, l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b:c}$ légitime les simplifications précédentes. Ainsi, on passe de $\frac{17\pi}{0,25}$ à 68π en multipliant numérateur et dénominateur par 4, autrement dit en les divisant par 0,25 ; on pourrait dire qu'on a simplifié par 0,25 ; que l'on passe de 68π à $\frac{17\pi}{0,25}$ en simplifiant par 4 ; et de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ à $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en simplifiant par $\sqrt{2}$.

Qu'on refuse ou non d'utiliser le mot *simplifier* dans de tels cas, le principe est valable. Par exemple, il est légitime d'écrire :

$$\frac{1,314}{7,5} = \frac{0,438}{2,5} = \frac{0,438\times 4}{2,5\times 4} = 0,1752 .$$

III. Dans **R**, on obtient une équation équivalente (*) à :

$$12(y-7) = 8(5-3y)$$

en divisant les deux membres par 4 :

$$3(y-7) = 2(5-3y) .$$

Mais les équations dans **R** :

$$(y-\tfrac{3}{2})(y-7) = (y-\tfrac{3}{2})(5-3y) \quad \text{et} \quad y-7 = 5-3y$$

ne sont pas équivalentes. Au contraire, les équations dans **N** :

$$(y-\tfrac{3}{2})(y-7) = (y-\tfrac{3}{2})(5-3y) \quad \text{et} \quad y-7 = 5-3y$$

sont équivalentes.

Il est dangereux d'utiliser le mot *simplifier* à propos des égalités et des équations (et à plus forte raison à propos des inégalités et des inéquations), car il évoque un procédé mécanique qui éloigne de la réflexion indispensable ici.

D'ailleurs, il est aussi simple et beaucoup plus sûr, dans les cas analogues aux précédents, d'écrire l'équation (ou l'inéquation) sous la forme $f(y)=0$ (ou $f(y)>0$ ou $f(y)<0$) et de factoriser le premier membre. Par exemple, les équations dans **R** suivantes sont équivalentes :

$$(y-\tfrac{3}{2})(y-7) = (y-\tfrac{3}{2})(5-3y)$$

$$(y-\tfrac{3}{2})(y-7) - (y-\tfrac{3}{2})(5-3y) = 0$$

$$(y-\tfrac{3}{2})(y-7-(5-3y)) = 0 \qquad \text{etc.}$$

(*) "Equations équivalentes" signifie "équations ayant même ensemble des solutions".

IV. L'ensemble E étant muni d'une loi de composition notée $*$,

"l'élément a de E est *régulier* pour la loi $*$"

signifie

"$a*y=a*z$, $y*a=z*a$ et $y=z$ sont équivalents"

Alors, on dit aussi qu'"on peut simplifier par a" ; mais prendre cette habitude de langage expose au danger signalé en III dans le cas où on ne s'assurerait pas que a est régulier ; ainsi, s'agissant du produit scalaire, $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{w}$ n'entraîne nullement $\vec{v}=\vec{w}$.

Dans **R** :
- pour l'addition, tous les réels sont réguliers ;
- pour la multiplication, seul 0 n'est pas régulier.

V. *Réduire un polynome* à une variable, c'est y remplacer une somme de monomes de même degré par un seul monome.

Quand on a réduit le plus possible, on aboutit à un *polynome réduit*, qui est, pour un polynôme initial donné, unique à l'ordre des termes près.

Remarque : Dans un polynome réduit, on ne laisse pas subsister $3t^2 \times 7t^4$, par exemple ; on le remplace par $21t^6$.

TRANSFORMÉ - TRANSFORMER
TRANSFORMATION (87)

Dans le langage courant, *transformer* suggère la modification d'un objet, d'une "forme", voire la substitution d'un objet à un autre : "La construction du barrage a transformé le paysage" ; "L'eau se transforme en glace" ; "On transforme une boule de pâte à modeler en un personnage".

I. On retrouve un peu ce sens courant en calcul, numérique et littéral, lorsqu'on emploie *transformer* au sens de "remplacer une écriture d'un objet mathématique (nombre, polynôme...) par une autre écriture du même objet".

On dit ainsi : "Factoriser, c'est transformer une somme en un produit" (plus correctement : "une écriture-somme en une écriture-produit") ; "Développer, c'est transformer un produit en une somme".

Les mots *factoriser, développer, simplifier, réduire, décomposer,* ne font que préciser *transformer*, qui conserve son utilité quand on vise une "transformation" autre qu'une factorisation, un développement... Par exemple, il peut être avantageux de *transformer* 1 en $\sin^2 x + \cos^2 x$, ou $\sqrt{a^2}$ en $|a|$, etc.

Oralement, le verbe *arranger* joue un peu le même rôle :

- "Tu trouves $\sqrt{\frac{72}{8}}$; c'est exact ; mais arrange ça !"
- "On peut arranger $t^3 - 7t^2 + t - 7$ en rassemblant les deux termes de coefficient -7 : $(t^3 + t) - (7t^2 + 7)$".

II. En géométrie, E étant un ensemble de points,

transformation dans E (ou *transformation de E*)
signifie
fonction de E vers E.

Le mot *image* est alors parfois remplacé par *transformé.*

Exemples :
- le transformé du point M par la symétrie de centre A est le point M' tel que A est le milieu de [MM'] ;
- le transformé d'un cercle par une translation est un cercle ;
- le transformé d'un cercle par une projection orthogonale sur une droite de son plan est un segment.

On dit de même que la symétrie transforme M en M', que toute translation transforme un cercle en un cercle, etc.

Il s'agit là d'une tradition. Mais nous préférons, même en géométrie, le vocabulaire général des relations (*fonction, image, ensemble-image*).

INDEX TERMINOLOGIQUE

commun aux brochures I (1974), II (1975), III (1976), IV (1978), V (1980), VII (1984) et VIII (1987). De plus, "GM" renvoie à Mots VI (Grandeur-Mesure) dont l'index spécifique indique la page.

Abréviations des rubriques :

A : ANGLE
AC : ANGLE-DE-COUPLES
AF : APPLICATION, FONCTION, BIJECTION
AL : APPLICATIONS LINÉAIRES
AP : APPROXIMATION
AS : ASSOCIATIVITÉ
CA : CARDINAL
CG : CONGRUENCES
CM : COMMUTATIVITÉ
CO : COUPLE
DE : DIVISION EUCLIDIENNE
DI : DIVISION
DS : DISTRIBUTIVITÉ
DT : DIVISIBILITÉ
E : ENSEMBLE
EG : ÉGALITÉ
EI : ÉQUATION, INÉQUATION
EL : ÉLÉMENTS REMARQUABLES POUR UNE LOI DE COMPOSITION
EN : ENSEMBLES DE NOMBRES
EP : EXPOSANT, PUISSANCE
ER : ENTIERS ET RATIONNELS
EX : EXEMPLE, CONTRE-EXEMPLE
F8 : MOTS FLOUS contenus dans MOTS VIII
FR : FRACTION
H : HOMOTHÉTIE
IA : IMAGE, ANTÉCÉDENT
IN : INVARIANT
LV : LANGAGE VECTORIEL
ND : NOMBRE DÉCIMAL, NOMBRE A VIRGULE
NN : NOMBRE NATUREL
NU : NUMÉRATION
OM : OPÉRATEURS MULTIPLICATIFS
OP : OPÉRATION, LOI DE COMPOSITION
OR : ORDRE
OT : ORIENTATION
OU : COMPARAISON DES ORDRES USUELS DANS LE DICTIONNAIRE, DANS N, DANS $\mathbf{D}^2$
PA : PARTAGES
PE : PARTITION, ÉQUIVALENCE
PEC : POURCENTAGES, ÉCHELLES...
PH : PHASE
PL : PARALLÈLE
PO : PROPRIÉTÉS DES OPÉRATIONS

PR : PRÉORDRE
PT : PROPORTIONNALITÉ
RB : RELATION BINAIRE
RE : PROPRIÉTÉS DES RELATIONS BINAIRES DANS UN ENSEMBLE
RG : REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES
RP : REPÉRAGE
S : SOLIDES
SA : SECTEUR, ANGLE
SL : SEGMENT, LONGUEUR
SY : SYMÉTRIE
T : TRANSLATION
V : VECTEURS DE LA GÉOMÉTRIE DU PLAN
VG : VOCABULAIRE DE LA GÉOMÉTRIE
VH : VERTICAL, HORIZONTAL

Le signe * placé à côté d'une abréviation de rubrique indique qu'on trouvera dans cette rubrique des indications plus ou moins complètes sur le sens du mot considéré.

Certains mots se retrouvent dans presque toutes les rubriques : **contre-exemple, couple, définition, écriture, égalité, élément, énoncé, ensemble, exemple, naturel, nombre, notation, nul, partie, représentation, représenter, situation, sous-ensemble, zéro,...** Nous n'avons laissé dans l'index que l'indication des rubriques "à astérisque" éventuelles les concernant.

Nous avons supprimé des mots comme : **collection, construction, démontrer, dessin, figure, formule, généralisation, hypothèse, notion, objet, propriété, tableau, théorème.**

abattement PEC
aboutement OT
abrégé entier AP*
abscisse EI — RE* — GM — F8
absorbant EL* — CG — E
abus de langage FR — OM
accélération V
accolades E
addition EN — ER — OP — CM — AS — DS — EL — CG — AL — OM — EI — E — CA — SL — SA — T — F8
addition (des vecteurs) V — LV
addition modulo p CG*
additionner FR — EI — V
adjacent SL* — S
adjoindre ER
affine (application—) AL
affine (symétrie—) SY*
agrandissement H
aigu RG — SA* — VG
aimant OT
aire RG — OP — AL — PT — OM — AP — VG — EP — S — SY — OT — GM — H — T — V — F8 — LV

algèbre RG — EI — E — GM*
alignés (points) VG* — V — LV — F8
alphabétique (ordre—) PR — OU*
altitude VH
amplitude PH
analyse EI
analytique (calcul—) V
angle RG — VH — VG — A* — SY — PH — GM — H — V — F8
angle (de secteurs — de paires de demi-droites — d'une demi-droite et d'un plan) SA* — OT — AC — PH — H — T — F8
angle-de-couples OT — AC* — PH — RP — H — T — F8
angles-de-couples-de-droites AC
angle de rotations cinématiques OT — PH
angle de rotations géométriques PH
angle au sommet PL
anneau EN — F8
année de lumière EP* — SL
antécédent RB* — AF — PE — PA — EI — H — T — IA*
antipode VH
antiréflexive OR* — RE* — SY
antisymétrie (relation antisymétrique) OR* — RE* — PR — SY — OT
aplati LV
appartenance PR
application AF* — PE — DE — DT — PA — DI — PR — AL — OM — EI — SL — SA — EP — H — T — IN — IA — V — F8
application-identité RE* — H — T
approché, valeur approchée à tant près AP* — OP
approximation AF — DI — AL — AP* — SL — SA — EP — F8
arbre RG
arc VG* — PL — OT — GM
arête AL — CA — S* — SA* — VG — EP — SY — F8
arithmétique NU* — OP
arranger F8
arrivée (ensemble d'—) RB* — OM
arrondi automatique entier AP*
ascendant (vertical) VG
associativité EN* — ER — EX — AS* — PO — CG — AL — E — EP — SY — GM — H — T
associer IA*
attribut RG
autant que NN* — CA*
automatisme OP
autosymétrie, autosymétrique SY* — H — LV
axe EI — E — SA — PL — VG* — SY* — AC — PH
axe (de révolution) S*
axe de symétrie SY — F8
axe (d'un disque, d'un cercle) S* — SY
axes (d'une ellipse) S
axiome, axiomatique F8

babylonienne (numération—) NU
bande (de plan) SA — VH — T — IA

barycentre H — T — F8
base VH
base de numération EG — ND — FR — EN — NU* — CG — OU — AP — F8
base (de logarithmes) EP*
base (de cône, de cylindre, de pyramide, de prisme) S*
base (de vectoriel) V
bénéfice PEC
bijection AF* — NN — EN — AL — CA — SL — SA — EP — SY — OT — RP — H — T — F8
billion NU
binaire (nombre—, numération—) EN — AP — F8
binaire (relation—) voir "relation"
bipolaire (repérage—) RP*
bipyramide triangulaire S*
bissecteur (d'un dièdre) SA*
bissectrice SA* — VH — VG — SY — LV
biunivoque (correspondance—) F8*
bonhomme d'Ampère OT*
bord OT
borne, borné S — PH
boucle (élément—) RB* — RE*
boule VG* — S* — SL
boussole OT — RP
Briggs EP
but RB* — AF — IN — IA — F8
calcul, calculer OP* — F8*
calcul vectoriel V
Cantor CA
capable (arc) VG*
capacité S
caractéristique (propriété—) H — T
Cardan EI
cardinal AF* — NN* — EX — EN — CA* — GM
carré EG — RG — OP — AL — PT — CA — AP — VH — VG — S — LV — F8
carré (d'un nombre—) AF — AL — PT — AP — F8
carré magique V
cartésien (produit—) RB*
cartésien (repérage—) RP* — F8
cartésien (schéma—) voir "schéma cartésien"
cas de figure LV
case RP
centaine NU
centimètre SL
centre EI — VG* — VH — PL — S — SY* — H — IN — V — F8
centre de gravité S*
centre d'inertie SY
cercle PE — RG — AL — PT — EI — E — PL — VG* — SL — VH — IA — F8
cercle-point PL
cercle trigonométrique OP
chaîne OM

champ (de forces, de gravitation, de pesanteur, magnétique) SY — OT
changement (d'unités) SL* — SA*
Chasles (égalité de) AC — V*
chat RE
Chéops (pyramide de) S
chiffre, chiffrer CO — NN — FR — EN — DI — NU* — OU — EI — E — AP — VG — F8
chiffres décimaux (suite des—) OU*
chirale (molécule—) SY
cinématique IN — V — F8
circonférence VG* — PL
circonscrit RG
circulaire T
classe d'équivalence PE* — ER — PA — CG — OR — PR — OM — SL — SA — VG — AC — PH — V — F8
classement, classer OR — NN — DT
classification RG — OR
cm EG
codage, coder FR — NU — F8
coefficient AL* — PT* — OM — PEC — EI — H — T — V — F8
colinéaire RP — H — V*
colonne RB — DT — OM — VH* — SY
commutativité EN* — EX — ER — DT — CM* — DS — PO — CG — AL — E — PH — GEM — H — T
comparable, comparaison, comparer NN — OR* — OU* — PR — OM* — GM
compatibilité, compatible CG*
complément EI
complémentaire E* — SA — IA
complexe (nombre) EI
composant OP* — AS — EI — H
composants (d'un couple, d'un n-uplet) CO* — ND — AF — DE — DI — RE — OU
composantes d'un vecteur V*
composé, composition ER — OP* — CM — AS — PT — OM — SA — H — T — V
composé (naturel—) DT*
compris entre EX
compter OP — F8
comptine CA
concave (non croisé) VG
concentrique PL — VG
concourant, concourir S — F8* — H
concours (point de) S — F8*
conducteur SY
cône S* — SY
confondus F8*
congru PE* — CG* — PH
congruence EG — PE — DE — CG*
conique (point) OT
conique (surface) S* — PL
conjonction logique F8

consécutifs (sommets, côtés) VG*
conserver, conservation H — T — F8*
constance PL
constant(e) PT — S — GM — F8
constante (application—) EI — EP — H
contact, contact (point de—) VH — PL — F8
contenant ER
contexte EG — EN
continu (puissance du—) CA*
continue (fonction—) EI
contre-exemple EX* — H
contrôle (par 9...) CG*
convention AS
conversion SL* — SA*
convexe, convexité S* — SA* — VG — SY — OT — H — LV — F8
coordonnées (d'un point) AL — EI — VG — RP* — F8
coordonnées (d'un n-uplet) CO*
coordonnées (d'un vecteur) V*
coplanaire PL — F8
corde EI — VG — SL
corps EN
correction AP*
correspondre, correspondance, correspondant F8*
correspondance un-à-un, correspondance terme à terme NN* — PR — OU — CA — F8*
cosinus SA — SY — PH — GM
cote RP*
côté EG* — RG — PE — AL — PT — CA — AP — VG* — SA* — VH — S — V — LV — F8
couper F8*
couple CO* — V — F8
courant électrique SY — OT — RP — GM
courbe PL — EP — S — RP — F8
courbe représentative AF* — RG
couronne (circulaire) OT
critère (de divisibilité) DI
croisé S
croissance, croissante (application—) (strictement) PT — EI* — F8
croissant (ordre—) OU*
croix OP — E*
cube RG — AL — CA — SY —F8
cube (d'un nombre) EP* — SY
cylindre S* — SY — OT
cylindrique (surface) S* — PL — T

dallage LV
damier RG
décimal ND* — EN* — EG — FR — ER — AF — DI — OU — OM — EI — CA — AP — EP — F8
décimal (d'ordre n) DI* — AP*
décimale AL — AP
décomposer, décomposition EI — T — F8*

décrire PL — S
décroissante (application—) (strictement) EI*
décroître VH
défaut (par—) DI — AP* — EP
degré SA* — VH — PH — RP
degré (d'un polynome, d'une équation) EI* — SY — F8
demi-cercle F8
demi-droite CA — SL* — SA — PL — VG — S — OT — PH — RP — GM — H — V
demi-espace EI — S* — OT
demi-plan EI — SA* — S — OT — RP — LV
demi-somme EI
démonstration EX — LV
démonstration de type exhaustif EX*
démonstration de type déductif EX*
démontrer F8* — LV
dénombrable EN* — CA* — F8
dénombrement RG — E — CA*
dénominateur FR* — EN — PEC — F8
départ (ensemble de—) RB* — OM
déphasage PH*
descendant (vertical) VG
désignation, désigner EG — ER — OP — V — F8
dessiner F8
déterminé (nombre—) EG
déterminer, détermination RB* — AL
deux à deux, trois à trois,... F8*
développement décimal AP
développer EI — SY — F8
devenir égal à F8*
dextre OT*
dextrogyre OT*
dextrorbum OT*
diagonal (plan—) SY
diagonale RE — PR — CM — VG* — VH — SY — H — LV — F8
diagramme RG
diamètre AL — VG* — VH — RP — GM
diamétrale (droite) S
dictionnaire (ordre du—) OU*
dièdre SA* — SY
différence ER — OP* — CM — AS — AP — F8
différent EG — EN — F8*
dimension DT — AP — VG* — GM* — V
directe (orientation—) OT*
direction VG* — SA — VH — S — SY — RP — GM — H — T — IA — V — F8
direction (de plan) VG* — VH — S — SY — OT — H — T — F8
direction orientée OT* — AC — PH — V
directrice S*
discernable PA*
disjoint E — CA — F8
disjonction logique F8

disposition (d'un calcul) OP
disque AL — AP — VG* — SL — SA — S
distance PEC — EI — SL* — SA — VH — PL — VG — F8
distinct PA — OR — OU — CA — F8*
distributivité EN* — DS* — PO — CG — AL — OM — E — GM
dividende DE* — DT — DI — OP*
diviser DT — CA
diviseur DE* — DT* — DI — RB — AF — RG — OP* — OR — PR — F8
divisible, divisibilité DT* — RG — DI — DE — SY
divisif (opérateur—) OM*
division DI* — EG — ER — OP — AS — EL — PO — CG — EI — AP
division euclidienne DE* — PE — DT — DI — PA — NU — OP — CG
dizaine NU
dm EG
dodécaèdre (régulier) S*
double NN — RB — AL
double (solution—) F8
douzaine NU
droit VH
droit (angle) SA* — VH — VG
droite EG — RG — AL — OM — EI — E — CA — SL — SA — PL — VH — VG — S — H — T — IN — IA — LV — F8
droite (orientée) SA — OT* — AC — PH
droite vectorielle OT — GM
duodécimal (système—) NU*
durée GM — V

écart OP* — CM — CG — EI
écart (angulaire) SA*
échelle PEC* — EI — GM — H
écriture F8
écriture à virgule, virgulaire EN — ND — F8.
effectuer OP*
égal, égaler EG*
égalité EG* — SL — SA — GM — F8
égaux F8*
électrique (symétrie—) SY
électrode, électrolyte SY — GM
élément E*
élément remarquable (pour une loi de composition) EL*
ellipse S — RP
ellipsoïde (de révolution) S* — SY
élongation angulaire PH*
énantiomorphe SY
encadrement EI — AP* — EP
encombrement S
énergie OT — GM
engendré S
ensemble E*
ensemble des antécédents, ensemble-antécédent AF* — IA*
ensemble d'existence AF* — F8

ensemble-image IA*
ensemble quotient PE* — PR
ensemble des solutions EN* — DT — EI*
entier EN* — ER* — FR — PR — OM — EI — E — CA — AP — EP — V — F8
entière (partie) ND — OU* — F8
entraîne ND
enveloppe (convexe) S*
équateur SA — VH — RP
équation EG — FR — ER — EI* — E — EP — IN — V — F8
équidistant SA — F8*
équilatéral SA — VG — S — SY — LV
équipollence, équipollent OT — V* — F8
équipotent CA*
équivalence (relation d'—) PE* — EG — FR — ER — CG — PR — OM — SL — SA — PL — VG — IA — V — F8
équivaloir, équivalent PE* — EG — FR — ER — PT — OM — SA — F8
erreur DI — AP*
escompte PEC
espace RG — EI — SL — SA — S — OT
espace vectoriel OT
et OP — F8
établir F8*
étalon SL
étiquette EG — E
étoilé SY
étranger ER — SY — F8
être mathématique EX — FR — EN — ER
euclidien DE*
euclidienne : voir "division euclidienne"
Euler (égalité d') S*
évaluation EI — CA — AP* — EP — GM — F8
exact AP
excès CM*
excès (par—) DI — AP* — EP
exemple EX*
exinscrit (cercle—) SY
existe (il existe au moins un...) EX
existentiel (d'une fonction) AF* — OM
existentiel (énoncé—) EX*
exponentiation CM — EL
exponentielle (fonction—) EP* — GM
exposant EP*
extrémité SL* — VG — S — V

face (d'un solide) S* — SA* — SY — F8
facette S*
facteur DT — SY — F8
factorielle AF* — OU*
factoriser F8*
faire OP
faux EG — EX — RB — ER — EI
fermé (disque) VG*

fermé (secteur) SA*
fermé (segment) SL*
fermée (courbe) S
fil OR
filet, filetée (tige—) SY — OT
fin (préordre plus—) PR
fini (ensemble—) NN* — EX — EN — AF — OP — CG — EI — CA* — F8
fixe IN*
flèche AC* — OT — PH
fléché (schéma—) RB* — OR
flou (mot—) F8*
fois OP
fonction AF* — RG — OP — OM — EI — E — SL — SA — SY — V — F8
fonction (symétrique, antisymétrique) SY*
fonction (paire, impaire) SY* — PH
fonction polynomiale SY
fonction (être fonction de) AF
fonctionnelle (notation—) AF*
fonctionnelle (relation—) AF*
force OT — GM — V
force centrifuge SY
force électromotrice SY — GM
formaliser OR
forme (bi, tri—) linéaire alternée OT*
formule (de résolution) EI*
fraction, fractionnaire FR* — EN* — ER — OP — ND — PE — PT — OM — PEC — EP — GM — V — F8
Fresnel (vecteur de—) OT
frise T
frontière EI — S — SA* — VG — T — LV

Galois EI
Gauss AP
génératrice S* — SY — OT
générique (élément) OM
géométrie RG — VH — VG
géométrie (plane) SA — PL
géométrie (dans l'espace) SA — VG — S
géométrie (angle) SA*
globalement IN* — F8
grade SA*
graduée (droite) VG* — F8
graduation, graduer VG* — RP — F8*
grandeur PT — AP — SL — GM* — F8
grandeur orientée OT* — RP
grandeur scolaire, grandeur vectorielle GM — V
graphe RB* — PE — AF — OR — RE — PR — AL — OM — EI — PEC — SY — OT — IA — V
graphique (représentation—) AF — OM — EI
grecque (numération—) NU
grosse NU

groupe EN — SY* — AC — PH — H — T — F8
groupe (symétrie, alterné) SY*
harmonie (quadruplet—) SY*
hauteur RG — VG — VH — S
hélicoïdal(e) (mouvement, symétrie—) SY — OT
hexaèdre S
hexagone, hexagonal S — SY — H — LV — F8
hexagone (régulier) SA — VG — SY
histogramme AF* — RG
homogène (ensemble matériel—) SY — GM — F8
homogène (grandeur—) SY — OT — GM*
homogène (polynome—) SY
homologue F8
homothétie, homothétique H* — IN — V — F8
horizon VH*
horizontal VH* — SA — H — T
hypoténuse VG — SY
icosaèdre (régulier) S*
identifier, identification ER
identité EG — RG
identité (transformation—) SY — H — T — V
illimité S
illimité (quadrillage—) OP
illimitée (écriture—) ND* — F8
illustration EX
ilôt déductif LV
image RB* — AF — PE — CM — AL — PT — OM — PEC — EI — CA — SL — SA — S — SY — PH — AC — H — T — IN — IA* — V — F8
image directe, image réciproque IA*
imaginaire (point—) F8
impair EX — AF — S — EP
impossible EI
incertitude DI* — AP* — GM
inch SL
incidence (angle d') SA
incliné (plan) SA
inclus, inclusion EN — RG — OR* — RE — OM — EI — E* — SA — VG — S — SL — OT — F8
inconnu, inconnue EG — DT — EI* — EP — V — F8
indéterminé EI
indice SA
indice (d'un radical) EI — EP
indiscernable PA*
inégalité EX — SL — SA
inégaux F8*
inéquation EI* — CA — F8
inf OP* — DS — EL
inférieur NN* — AP
infini (ensemble—) NN* — AF — OP — OM — EI — CA* — F8
infinité EX — ER — OU — EI — E — CA*

inscriptible F8
inscrit(e) (cercle, sphère—) S — SY — GM
intensité électrique PH — RP — GM
intercaler OR — OU*
intérêts composés EP*
intérieure (région) S
interpolation linéaire EI*
intersection CO — OP — AS — DS — EL — OM — E* — CA — SA — VH — PL — S — OT
intervalle EI — AP — F8
invariance, invariant SY* — H — T — IN* — F8
invariant point par point, globalement, dans son ensemble IN*
inverse ER* — EL* — AL — PT — OM — EP
inversement proportionnel PT*
inversible EL*
irrationnel EN* — AP — F8
irréductible FR * — ER — OP — F8*
isocèle (triangle—) PE — VG — VH — S — LV — F8
isomère SY
isométrie VG — SA — SL* — SY — OT* — AC — PH — T — F8
isométrique PE* — SL* — SA* — VG* — S — LV
isomorphe, isomorphione H — T — F8
issu SL*

justifier EX*

k-aire ND*

langage RG
langage ensembliste E
langage mathématique FR — VG
langage vectoriel LV*
large (ordre—) OR* — PR
largeur AF — AP — VG*
latérale (surface, arête—) S*
latitude SA — VH — PL — RP*
lecture EG — NN
légende RG
lévogyre OT*
lien verbal RB* — PE — AF — DT — PR — PT — OM
ligne RB — DT — PT — CA — E — VG — OT
ligne (de graduation) RP*
ligne (de niveau) VH*
ligne (de pente) VH*
ligne (d'un tableau) VH* — SY
linéaire (application—, fonction—), linéarité AL* — PT — OM* — PEC — GM
littéral (calcul—) F8*
littérale (écriture—) EI
logarithme EP*
logarithme décimal AF* — OP — EP*
loi de composition EN* — ER — OP* — CM — AS — DS — EL — CG — EI — E — AC — PH — H — F8
longitude RP*
longueur EG — PE — AL — PT — OM — PEC — EI — CA — VG* — SL* — SA — PL — S — EP — SY — OT — PH — RP — GM — H — V — LV — F8

losange PE — VH — F8

machine OM
maquette H
masse AL — PT — SY — GM — F8
masse volumique, surfacique, linéique AL — SY — GM — F8
mathématisation OR
matrice SY — V — F8
mécanique T — V
mécanique (symétrie—) SY*
médian (plan—) SY*
médiane VG — S — SY — H — F8
médiateur (plan—) EI*
médiatrice EI* — SY — RP — LV
meilleure approximation entière AP*
membre SL — F8
méridien SL — RP* — F8
méridien (plan—) SY*
mesurage EG — GM*
mesure, mesurer EG — AF — OP — PR — AL — OM — EI — AP — SA* SL* — VG — EP — GM* — LV — F8
mètre SL*
milieu RG — OP — EI — SL* — S — RP — H — T — V — LV — F8
mille, million, milliard NU
minute (d'angle) SA*
mise en équations EI*
mobile PT — F8 — IN — V
Möbïus (ruban de—) OT
modèle DT — PA — OU
module, modulo PE* — CG*
module (d'une grandeur vectorielle) GM — V
module (**Z**—) PH
moins deux (base—) NU*
moins que NN* — CA
moitié RB — SL — SA — VG
moment (d'une force) OT — GM*
monoïde EN
monome F8
mot OU
moule EI
mouvement de rotation PH
mouvement de translation T*
mouvement diurne OT
mouvement uniforme PT — GM
mouvement vibratoire simple PH
moyenne arithmétique F8
multiple DT* — EX — RB — DE — DI — NU — CG — OR — OM — EI — CA — SL — F8
multiplicande, multiplicateur CM — SY
multiplicatif (opérateur—) OM*
multiplication EN — ER — DT — OP — CM — AS — DS — EL — CG — AL — PT — OM — EL — E — EP — H — F8

multiplication modulo p CG*
multiplication (d'un vecteur par un réel) V — LV

nappe S*
naturel NN* — EN* — NU* — F8
négatif ER* — ND — FR — EN — DI — EI — CA — AP — EP — OT
Neper EP
neutre (élément—) EN* — ER — EL* — PO — CG — E — SY — GM — H
neuvaine NU
n'importe quel F8*
nœud EI — RP
nom EG
nombre (d'éléments) CA*
nombre fini OU
nombre d'or H
normale PL*
normé (repère—) RP*
notation FR*
noue VH*
nul (angle, secteur) SA*
nul (segment) SL*
nulle (application—) AL*
nulle (longueur) SL* — GM
numérateur FR* — PEC — F8
numération (système de numération) EG — ND — FR — NN — NU* — CG — OU — CA — AP — EP — F8
numérique (calcul—) F8*
numérique (relation—) RB*
numérique (ensemble—) (non—) CA
numérotation F8
n-uplet CO* — AF — OU — E

oblique VH* — PL
obtus SA*
octaèdre (régulier) S*
octal EN
onde électromagnétique SY
opérateur FR — OM* — PEC — VG
opération EX — EN — ER — DE — DI — OP* — PO — CG — OM — EI — SL — SY — PH — GM
opposés (côtés, sommets—) VG* — SL* — SA* — S
opposés (diamétralement—) PL
opposés (par le sommet) SA*
or (nombre d'—) SY*
ordinal CA
ordonné (ensemble—) OR — PR — OU
ordonnée EI — RP*
ordonner PR — OU — F8
ordre CO
odre de grandeur OP — TP — AP
ordre (d'une approximation décimale) AF

ordre (relation d'—) EN — ER — OR* — PR — SL — SA — VG — PH — F8
ordre-produit OU*
ordres usuels OU*
organigramme RG
orientation, orienter OT* — H — T — F8
origine AL — OM — E — SL* — SA — VG — RP* — V
orthocentre RG* — S
orthogonal VH* — VG* — RP — F8
orthogonal (repère—) RP*
orthogonale (symétrie—) SY*
orthogonalité SY
orthonormé (repère—) SY — RP*
ou F8
ouvert (disque—) VG*
ouvert (secteur—) SA*
ouvert (segment—) SL*

pair NN — EN — RG — AF — NU — OR — EP — S
paire CO* — NU — OR — PR — SL — SA — PL — VG — AC — F8
pantographe H*
parabole PL — OT
parallèle RE — EI — CA — PL* — VG* — SA — VH — S — RP* — H — T — IA — F8
parallélépipède S* — OT — GM — F8
parallélisme PL* — SY — H — V — F8
parallélogramme PE — RG — VG — S — SY — H — T — V — LV — F8
paramètre F8
parenthèses FR — AS*
parité AP
partage PA*
partage d'un naturel PA*
particulier F8
partie E*
partie entière ND — AP*
partiel (ordre—) OR* — F8
partition PE* — PA — DT — CG — OR — PR — F8
pas SY — F8*
patate RG — E
pavé S*
pentaèdre S
pentagone (régulier) SA — S — SY — H
pente VH* — GM*
percer F8*
périmètre AL — PT — SY — GM
périodicité EI — PH — GM
permutation (paire, impaire) SY* — OT
perpendiculaire RE — EI — VH* — SA — PL — VG — S — SY — T — IN — LV — F8
périodique (écriture illimitée—) F8
perpendiculaire commune VG* — SY
pgdc OP — AS — F8

phasage, phase PH* — SY — AC — RP
phasage médian PH* — RP
phasage (plus petit—positif) PH* — RP
phrase (mathématique) EG — EX — FR — RB
pi (nombre—) AP* — SA — VG
plan PE — OP — EI — E — SL — SA — VH — PL — VG — S — T — H — IA — V — F8
plan PEC
plan vertical OT
plat (angle, secteur—) SA*
Platon S
plein (secteur—) SA*
plus grand que, plus petit que NN*
plus que NN* — CA
poids PT
point EI — E — CA — AP — SL — VH — PL — VG — S
point PEC* — GM — F8
point (représentatif) RG — OM — EI
point courant, baladeur F8
points de suspension AP
polaire (repérage—) RP*
polarisation SY — OT
pôles PL — OT — RP — F8
polyèdre S* — SA — OT
polygonal RG — VG
polygone VG — SA — S — SY — F8
polynome FR — OP — EI — SL — SY — V — F8
ponctuel OT
poser OP
positif ER* — ND — FR — EN — RG — DI — OU — EI — AP — SL — SA — EP — OT
position (numération de—) NU*
pourcent PEC*
pourcentage PEC* — GM
ppmc OP — AS — EL — OM
précédent NN*
précision AP
prédécesseur NN*
préfixes (système international d'unités) EP*
premier (naturel—) DT * — EX — EN — DI — OR* — F8
premiers entre eux ER
préordre PR*
pression PT — GM
preuve RG — CG*
preuve par 9 DE — CG* — F8
prismatique (surface) S* — T
prisme S* — SA — SY — OT
produit FR — ER — DI — OP* — CM — CG — PT — OM — PEC — EI — AP — V — F8
produit cartésien RB* — OP — OR — RE — OU — EI — E* — SY — GM — IA
programme (de calcul) F8

projection orthogonale IA — F8
projeté othogonal SA — VH — SY — PH — RP
prolonger EN* — ER*
proportion PT* — V
proportionnel, proportionnalité PT* — OM — PEC — VG — GM* — H — V — F8
proportionnellement PA
propriété F8
prouver F8*
puissance NN — ND — FR — EN — AF — DI — CG — PEC — AP — EP*
puissance (d'un ensemble) CA*
pulsation PH
pyramide (surface—) S*
pyramide S* — SY — OT
Pythagore (théorème de—) F8

quadrant SA* — SY
quadrilatère PE — RG — VG* — S — LV — F8
quadrillage OP — EI — V
quadruplet CO* — OM — E — VG — SY — OT — V
quantificateur universel F8
quatrième proportionnelle OM
quatuor NU
quelconque F8*
quel que soit EG* — ND — F8*
quotient DE* — DI* — FR — ER — AF — NU — OP — CM — AS — AL — PT — AP — EP — V — F8

raccourci (flèche—) RE
racine carrée positive OP
racine, radical (carré(e), cubique) OP — EI — AP — EP* — SY — GM — F8
radian SA* — AC — PH — GM
rangement, ranger OR — PR
rapport H — F8
rationnel EN* — ER* — PE* — EG — ND — AF — DI — OM — EI — E — AP — EP — GM — V — F8
rayon PT — EI — VG* — SA — VH — PL — F8
rebroussement PL
réciproque (couple—) PR*
réciproque (relation—) RB* — EN — AF — DT — RE — AL — PT — OM — SL — SY — OT — H — T — F8
réciproquement CO — OM
rectangle PE — VH — VG — S — LV — F8
rectangle (triangle—) PE — RG — VG — S — SY — LV — F8
rectiligne PL — SL — T — V — F8
rectiligne (d'un dièdre) SA*
rédaction F8
réduire, réduit F8*
réduction, réduire (au même dénominateur) FR — ER
réduction (d'un original) PEC — H
réel EN* — DI — PT — EI — AP — AL — EP — H — IN — V — F8
référentiel, référence (ensemble de—) EX* — OP — EI* — F8
réflexion T*

réflexivité (relation réflexive) EG* — PE — OR* — RE* — PR* — VG — SY — F8
règle de trois OM*
régulier (pour une loi) F8*
régulier (polyèdre—) S*
régulière (graduation—) F8*
relatif EN*
relation, relation binaire RB* — AF — PE — PA — DT — OR — PR — PT — CA — OM — SA — SY — IA — V — F8
relation dans un ensemble RB* — PE — SY
relation *n*-aire SY* — F8
rencontrer F8*
rentrant SA* — OT — PH
répartir, répartition PE* — PA*
repérage CO — RP*
repère (du plan) VG — SY — RP* — V — F8
répétition d'ordre *n* SY*
représentation graphique d'une fonction AF* — EP — SY — RP — F8
représentation mentale F8
représentation paramétrique F8
représenter, représentant, représentation RG* — RB* — SA — V — F8*
résoluble EI*
résolution, résoudre ER — DT — EI*
reste DE* — PE — DT — DI — NU — OP — CG — F8
restriction EN*
résultat (d'un calcul) F8*
rétrograde (orientation—) OT*
réunion RG — OP — AS — OS — EL — E* — CA — SA — VG — S — T — IA
révolution PL — SY
révolution (solide de—) S*
romaine (numération—) NU
rotation SL — SA — PL — SY — OT — AC — PH — F8

sagittal (schéma—) voir "schéma sagittal"
saillant SA* — OT — AC — PH — LV
satellite SY
satisfaire EI*
scalaire (grandeur—) GM — V
scalaire (produit—) F8
schéma EG — RG — AL
schéma cartésien RB* — AF — DT — PR — OM — SY
schéma sagittal RB* — RG — AF — PE — RE
schéma fléché RB*
sécant SA — VG — V — F8*
seconde (d'angle) SA*
secteur SA* — S — OT — PH — H — V — LV — F8
secteur circulaire SA* — F8
secteur d'espace OT
secteur polyèdre S*
segment (de droite) EG — RG — EL — CA — AP — SL* — SA — PL — VG — S — GM — H — T — IA — F8

segment orienté OT* — RP — V — F8
segment (de disque, de sphère) SL* — F8
semblables (triangles—) VG
semestre OT*
sens SL — SA — VG * — V
sens de rotation SA — PL
sexagésimale (numération—) SA
si... alors EX
signe EG — FR — ND — OP* — SL — SA
signe opératoire ER — OP*
signifiant, signifié OU — NU — F8
significatif (chiffre) EP
similitude VG
simplifier (une fraction) OP — F8*
singleton EI — SL — SA
sinistrorsum OT*
sinus SY — PH — GM
sinusoïde SY — OT
solide S* — H — T
solution ER* — EN — DT — DI — EI* — E — CA — EP — IN — V — F8
somme EN — FR — ER — OP* — CM — CG — AL — OM — EI — AP — PH — V — F8
somme des chiffres NU* — CG
sommet RG — PE — S* — SA* — VG*
source RB* — AF — PE — IN — IA — F8
sous-ensemble E*
sous-groupe H — T
sous-jacent DT — DI
sous-multiple SL
soustraction ER — OP — AS — EL — PO — OM — EI
sphère EI — VG* — VH — PL — SY — OT — GM — F8
sphérique (repérage—) RP*
spirale logarithmique SY*
spire SY
statistique PA*
strict (ordre—) OR*
strictement (positif...) EN* — ER* — VG — EP — F8
structure EN — ER — OM — V
successeur NN*
suite NN — AF — DI — OU
suite vide OU
suites proportionnelles PT* — OM
suivant NN*
sup OP* — DS — EL
superficie DI
supérieur NN* — AP
supérieur (cardinal—) EN
superposable SL — SA — VG — SY — GM — LV
support E — SL — SA — VG — V
surface PL — VG — S — OT — H — T — V — F8
symbole EG — FR — PA
symétrie EI — SL — SA — VH — VG — SY* — OT — H — T — IN — IA — F8

symétrie positive, négative SY*
symétrie (relation symétrique) RB — PE — RE* — PR — EG* — VG — SY — V — F8
symétriques (éléments—) EL* — SY — H
symétriques (points, figures—) RG — CM — SY* — H — V — LV
symétrisable EL*
symétrisé FR*
synonyme, synonymie EG — FR — ER — OU
système : voir "numération"
système (d'équations) SY

table AF* — RG — DT — OP* — CM — CG — AP
table de logarithmes EP*
table (d'une application) PT — OM
table traçante EI
tangent (plan) PL
tangent, tangente E — PL — VH — VG — F8
tangente (trigonométrique) SY — PH — GM
taux PEC — EP — GM
taux d'incertitude AP* — GM
technique (d'une opération) DI — NU — OP* — F8
temps F8
tension électrique PH — GM
terme OP*
terme (d'un couple, d'un n-uplet) CO* — RB — PT — CA — VG — F8
termes (d'une fraction) F8
terme (d'une matrice) SY
terme (d'une somme) PA — AP
ternaire ND* — SY — F8
terrestre (sphère—) RP
test EX — F8
tétraèdre S* — SA — VG — SY — OT — H — F8
théorie des ensembles E
Timée S
tire-bouchon de Maxwell OT*
tore S* — OT
total (ordre—) OR* — OU — SL — SA — OT — PH — GM — F8
tour PH
traduction EG
trait de fraction FR*
trait (de graduation) F8
trajectoire PL — T
trajet V
transformer, transformé, transformation F8*
transformation géométrique SL — SA — SY — OT — F8
transitivité (relation transitive) EG* — PE — OR* — RE* — PR* — PT — VG — GM — V — F8
translation SL — SA — SY — OT — PH — H — T* — IA — V — F8
transposition SY*
trapèze PE — V
triade NU

triangle PE — RG — VG* — SA — VH — S — SY — OT — H — V — LV — F8
triangulaire (inégalité—) SL* — S
triangulation VG
trièdre (secteur—) S* — OT — GM
trigonométrie EI — SA — VG — SY — PH
trigonométrique (fonction, rapport—) PH* — GM
trillion NU
triplet CO* — DS — E — VG — SY — OT — RP — V
tronc (de cône, de cylindre, de prisme, de pyramide) S* — H
type RE

un NN* — EN
uniforme (mouvement—) PT — F8
unitaire (prix—) AL
unité EG — NU — AL — PEC — EI — SL* — SA* — VG — EP — RP — GM* F8
universel (énoncé—) EX

valeur EX
valeur absolue AP
valeur approchée AP*
variable SY — F8
variance F8
variation (sens de—) EI
vecteur OP — E — SL — SA — OT — RP — GM — H — T — IA — V* — LV — F8
vecteur directeur E — T — V — F8
vecteur orienteur OT* — AC — PH
vecteur unitaire E
vectoriel OT — PH — GM* — V — F8
vectorielle (grandeur—) GM — V
vérifié EX — EI*
vertical VH* — SA — PL — VG — OT — H — T
vibration SY
vide (ensemble—) NN* - CO — RB — PE — PA — EI — E* — SL — SA — PL — IA — F8
virgule, nombre à virgule ND* — EN — DI — OU — OM — AP — F8
vis OT
vitesse PT — GM — V — F8
vitesse angulaire PH — GM*
volume AL — PT — S — EP — SY — OT — GM — H — T — F8
vrai, vérité EG — EX — RB — ER — EI

Watt (diagramme de—) OT

zéro NN* — NU*

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHÉMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

Secrétariat : 26, rue Duméril 75013 Paris
Tél. (1) 43.31.34.05

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'A.P.M.E.P. est une association, fondée en 1909, qui regroupe tous les enseignants concernés par l'enseignement des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université". L'A.P.M.E.P. est un lieu d'échanges, pédagogiques et scientifiques, pour tous les enseignants de mathématiques.

Les Régionales

Dans chaque académie, il existe une section régionale de l'A.P.M.E.P. avec, très souvent, des sections départementales, voire locales. En effet, à la dispersion géographique de ses adhérents, l'A.P.M.E.P. propose un remède : la constitution d'équipes de maîtres, qui enseignent des mathématiques "de la Maternelle jusqu'à l'Université", en dehors de toute hiérarchie administrative, par-dessus les barrières officielles des divers degrés d'enseignement.

Les Journées Nationales

L'A.P.M.E.P. organise chaque année des Journées Nationales qui sont, pour les membres de l'Association, l'occasion de se retrouver. Elles ont, ces dernières années, regroupé de 500 à 800 participants autour de thèmes divers.

Les Publications

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique et pédagogique, et qui rapporte la vie de l'association, tant régionale que nationale. On y trouve notamment les rubriques suivantes : études, études didactiques, dans nos classes, mathématiques et société, examens et concours, manuels scolaires, évaluation, interdisciplinarité, formation des maîtres, informatique, audio-visuel, problèmes, jeux et maths, matériaux pour une documentation, un coin de ciel...

Elle édite aussi un Supplément au Bulletin.

De plus l'A.P.M.E.P. publie toute une série de brochures. Ces brochures permettent de répondre à des demandes plus spécifiques de telle ou telle catégorie d'adhérents. La liste des brochures figure dans le Bulletin.

Le Présent

L'A.P.M.E.P., association représentative des enseignants de mathématiques, agit comme telle vis-à-vis des syndicats, des associations d'enseignants d'autres disciplines, des associations de parents d'élèves, ainsi que des Ministères de l'Education et de l'Université. Par exemple, actions à propos des programmes,... intervention de novembre 1979 auprès du Ministère de l'Education (ce qui a permis d'obtenir une heure de travaux dirigés pour toutes les Secondes "Indifférenciées" de la rentrée 1981, alors qu'aucune n'était prévue).

L'Avenir

Après avoir obtenu la création des IREM (puis lutté pour leur maintien), l'A.P.M.E.P. est à la pointe du combat pour une véritable formation permanente, dont elle a défini les principes dans son Texte d'Orientation 1978 (caractère non obligatoire ; formation intégrée dans le service des enseignants ; large indépendance vis-à-vis de la hiérarchie ;...).

Texte d'Orientation

Après les Chartes de Chambéry (avril 1968) et de Caen (mai 1972), l'A.P.M.E.P. a actualisé ses positions fondamentales par son Texte d'Orientation (1978). Les principales préoccupations des enseignants de mathématiques y sont abordées et de nombreuses propositions, à court et à long terme, sont faites, permettant une réforme en profondeur de l'enseignement des mathématiques. [On peut se le procurer gratuitement, en écrivant au Secrétariat de l'A.P.M.E.P. (adresse ci-dessus)].

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques, depuis les premières initiations jusqu'aux études supérieures, sans oublier la formation permanente des non-enseignants et des enseignants. Aussi ne pouvez-vous vous désintéresser de l'A.P.M.E.P. et des possibilités d'action qu'elle vous offre.

L'A.P.M.E.P. a besoin des forces, de l'expérience et de l'action du plus grand nombre d'enseignants de mathématiques. Son efficacité, les services qu'elle vous rend ou pourrait vous rendre, tiennent au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, faites-le donc sans tarder.

ISBN 2-902-680-42-2

Imprimerie IGR Lyon - Photocomposition : Marie-Paule COMPO - Montage : Atelier M. MICHAUD
Façonnage ALAIN