MESURE, MESURAGE ET INCERTITUDES : UNE PROBLEMATIQUE INTER-DIDACTIQUE MATHEMATIQUES / PHYSIQUE

Aurélie **CHESNAIS** et Valérie **MUNIER**

LIRDEF (EA 3749), Université de Montpellier et Université Paul Valéry de Montpellier

aurelie.chesnais@umontpellier.fr et valerie.munier@umontpellier.fr

Résumé

La question de la mesure est incontournable en sciences expérimentales comme en mathématiques. S'y intéresser suppose de distinguer résultat de la mesure et processus de mesurage, ainsi que de tenir compte de la problématique des incertitudes. Or, du point de vue épistémologique, ces différents éléments ne jouent pas toujours le même rôle en mathématiques et en physique, notamment lors des activités de modélisation. Penser les enjeux de l'enseignement de la mesure ne peut donc se faire sans considérer les interactions entre ces deux disciplines.

Après avoir présenté les enjeux épistémologiques et didactiques liés à la mesure et aux incertitudes en mathématiques et en physique, nous analyserons leur prise en charge par les programmes et manuels scolaires, du cycle 3 à la fin du collège. Nous ne visons pas une analyse exhaustive mais tentons de mettre en évidence, sur plusieurs sujets dont nous justifions le choix, les caractéristiques de cette prise en charge et notamment celles dont on peut supposer qu'elles sont susceptibles de générer des difficultés pour les élèves et les enseignants.

Mots clés : Mesure, grandeur, incertitude, inter-didactique mathématiques physique, géométrie, statistique, modélisation

INTRODUCTION

La question de la mesure est cruciale tant en physique qu'en mathématiques. Celle de son enseignement et de son apprentissage est problématique, de l'école primaire à l'université, comme l'illustrent les trois exemples suivants.

Premier exemple : dans le cadre d'une étude sur la transition école-collège, nous avons proposé des tests à des élèves de fin de sixième (Munier et al., 2014). L'une des tâches consistait à leur demander, dans une première question, de construire un angle de 89° ; dans une seconde, ils devaient dire si cet angle est droit et justifier leur réponse. La première tâche est très largement réussie, mais parmi les élèves réussissant cette première tâche, moins de deux tiers répondent correctement à la seconde. Plus d'un élève sur dix justifie sa réponse (qu'elle soit oui ou non) à partir de l'utilisation de l'équerre et 6% des élèves mentionnent la « règle du 1° près[1] » : « je le sais car un angle droit est de 90° et l'angle ABC est de 89°et ce n'est qu'un degré avant ».

[1] Cette « règle », communément établie dans les classes, est liée à l'usage du rapporteur (du fait de sa précision au degré), c'est-à-dire au *mesurage empirique*, nous y revenons plus loin.

Deuxième exemple : dans le cadre du même projet sur la transition école-collège, nous avons pu observer une séance de classe en cinquième en physique, lors de laquelle il s'agit de compléter « l'égalité mystère » : 1L = … dm^3. La tâche proposée aux élèves consiste à mesurer les arêtes d'une brique de lait de 1 litre et d'en calculer le volume par l'application de la formule du volume d'un pavé droit. Le résultat obtenu par les élèves est de 1,026 dm^3. L'enseignant conclut alors, sans discussion : « On est proche de 1, donc ça veut dire que le volume de la brique, il est de 1 dm^3 » (Munier et al., soumis).

Troisième exemple : dans l'article de Jacquier (1995), après que les élèves ont calculé la longueur d'un côté d'un triangle rectangle et trouvé $\sqrt{50}$, elle relève que de nombreux élèves sont gênés par ce résultat (« Il faut écrire BD=7,07 car $\sqrt{50}$, pour une longueur, ça ne veut rien dire »).

Ces trois exemples, qui relèvent de contextes variés (mathématiques et physique, différents domaines des mathématiques – grandeurs et mesures, géométrie, nombres), ont en commun le fait de mettre en évidence des difficultés liées à la mesure et à son rôle, pour les élèves comme pour les enseignants. On peut interpréter la difficulté qui se pose comme celle de traiter l'écart entre une forme de réalité (matérielle) et le modèle, entre l'empirique et le théorique, le mesurage matériel et le travail « abstrait » sur la mesure.

Nous proposons dans la première partie de cet article une étude épistémologique de la mesure et de son rôle en mathématiques et en physique, qui nous permet ensuite d'éclairer les enjeux épistémologiques et didactiques liés à la mesure et aux incertitudes dans ces deux disciplines. Dans la seconde partie, nous analysons leur prise en charge par les programmes et les manuels scolaires, du cycle 3 à la fin du collège. Nous étudions aussi, pour certains thèmes, la manière dont ils sont pris en charge par les travaux de recherche en didactiques. Nous ne visons pas une analyse exhaustive mais nous tentons de mettre en évidence, sur plusieurs sujets dont nous justifierons le choix, les caractéristiques de cette prise en charge et notamment celles dont on peut supposer qu'elles sont susceptibles de générer des difficultés pour les élèves et les enseignants.

ENJEUX EPISTEMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES LIES A LA MESURE EN MATHEMATIQUES ET EN PHYSIQUE

Etude épistémologique

La mesure en physique

D'un point de vue épistémologique, le physicien cherche à construire un dialogue entre champ empirique et champ théorique, les modèles pouvant être considérés comme des intermédiaires entre ces deux champs. D'après Walliser (1977) il existe deux points de départ possibles pour élaborer un modèle : partir d'un champ théorique et développer un modèle par mise en équation d'un système, ce modèle ayant un caractère hypothétique à confirmer ; ou prendre comme point de départ le champ empirique, domaine de l'expérimentation – dans lequel la mesure joue un rôle central – le traitement des données permettant d'établir un modèle empirique. Tous ces aspects ne sont pas sollicités dans un travail de recherche donné, mais on peut considérer que ce processus de modélisation dans son ensemble est conduit dans un mouvement spiralaire par la communauté scientifique. Nous nous centrerons dans la suite de cette communication sur l'élaboration de modèles à partir du champ empirique.

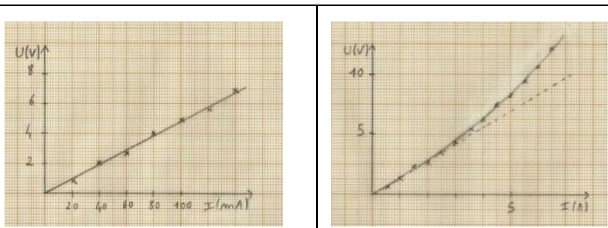
Dans ce cadre, lorsqu'on s'intéresse à la mesure en physique, on doit tenir compte du fait que le terme *mesure* est polysémique. Ainsi, sous ce terme peuvent se cacher d'une part l'opération proprement dite de *mesurage*, d'autre part le résultat de cette opération, c'est-à-dire le nombre obtenu grâce au mesurage, et ces écarts d'acception peuvent être sources de confusions. De plus, considérer un mesurage empirique nécessite de prendre en compte la dispersion et les incertitudes. Rappelons que l'incertitude est un paramètre non négatif qui caractérise la dispersion des valeurs attribuées à un mesurande. En effet, dans tout processus de mesurage on est confronté à de la dispersion, c'est-à-dire que si l'on mesure N fois la même grandeur, on n'obtient pas N résultats identiques. Les incertitudes peuvent être liées à des erreurs systématiques et/ou aléatoires, et avoir diverses origines : l'observateur, l'instrument et la grandeur même qui fait l'objet du mesurage. De ce fait, comme le dit Perdijon

> « il ne suffit donc pas d'un nombre pour exprimer la mesure, il en faut deux : l'estimation la plus probable de la grandeur et l'amplitude de l'intervalle à l'intérieur duquel elle a de grandes chances de se trouver, ce qu'on appelle un intervalle de confiance » (Perdijon, 2012).

Dans l'enseignement comme dans la pratique scientifique, les activités faisant appel à la mesure peuvent conduire, entre autres, à tester une hypothèse, déterminer des constantes physiques, établir une loi, explorer le champ de validité d'une théorie, explorer les limites d'un modèle…

La question de la modélisation, de la nature et du rôle des modèles est essentielle en physique, elle se pose aussi bien évidemment en mathématiques et cette question renvoie à la nature de ces disciplines, qu'il s'agisse des modes d'élaboration des connaissances ou de la nature même de ces connaissances. La question de la modélisation est aussi une question cruciale dans l'enseignement.

Quelles que soient les fonctions attribuées au mesurage, les valeurs obtenues doivent être traitées pour donner des informations sur le phénomène ou l'objet étudié : « le traitement de données est en fin de compte la conversion de données en conclusion sur le monde physique » (Maruani, 1996, p. 1440), ce qui nécessite de prendre en compte les incertitudes. Par exemple, si on mesure l'intensité et la tension dans un circuit résistif, on obtient des points qui ne sont pas parfaitement alignés (voir figure 1).



Cas 1 | Cas 2

Figure 1 : relation U=f(I) dans un circuit résistif

Dans le premier cas, la loi U=RI (loi d'Ohm) est en général considérée comme un modèle « raisonnable » de la relation qui relie les grandeurs intensité et tension dans ce circuit. Le second cas amène à s'interroger sur la valeur de l'intensité à partir de laquelle cette loi ne peut plus être considérée comme un bon modèle de cette relation, ce qui revient à explorer les limites du modèle. Dans les deux cas on ne peut pas conclure sans une estimation des incertitudes et de l'intervalle de confiance associé.

En outre, au-delà de l'interprétation des résultats d'une expérience, établir des lois physiques suppose de prendre en compte la question de la généralisation : les expériences doivent être répétées, notamment par d'autres équipes de recherche, et il faut explorer les limites des modèles et des lois, ce qui nécessite là encore la prise en compte des incertitudes.

La mesure en mathématiques

Une mesure de grandeurs peut être définie, en mathématiques, comme une application d'un ensemble d'objets, à valeurs dans R+, via l'ensemble des grandeurs (cf. Chevallard et Bosch, 2002, ou encore Perrin, 2011 pour une définition rigoureuse). On parle également de la « mesure de … » pour désigner l'image d'un élément (« la mesure en centimètre de ce segment est 3 », APMEP, 1982). Cependant, comme le note Perrin-Glorian (1989-90), le sens du mot a évolué encore récemment (au cours du XXème siècle). A la fois dans la noosphère et dans le cadre scolaire, les mesures étaient d'abord non dissociées des grandeurs, puis associées à des aspects pratiques, des contextes de la vie courante, avant d'être associées progressivement à des aspects théoriques. Perrin-Glorian note même que le sens du mot ne fait pas encore aujourd'hui totalement consensus. De manière connexe, les grandeurs sont également, à une époque, exclues des mathématiques, en particulier pour le travail sur les nombres, ce que note notamment Lebesgue (cité par Brousseau, 2002). Les programmes scolaires suivent cette tendance, comme le pointent Brousseau (ibid.) et Chevallard et Bosch (2001), excluant également la dimension matérielle de la mesure, ainsi que les pratiques familières associées ou celles issues d'autres sciences.

Du point de vue historique, dans les travaux d'Euclide, la mesure est un rapport entre deux grandeurs (Dhombres, 1978), l'une étant prise pour référence. Aujourd'hui, les deux concepts peuvent être définis l'un par rapport à l'autre (Chevallard et Bosch, 2002, Perrin, ibid., …) : un point de vue est de définir une fonction mesure, puis une grandeur comme classe d'équivalence de cette fonction ; à l'inverse, on peut définir la mesure comme quantification des grandeurs et résultat d'un processus de « mesurage » (appelé aussi « procédé de mesure », « opération pratique de mensuration » (Rogalski, 1979, p. 566), « mesure pratique » (Lebesgue, 1975, p. 28) : la mesure est alors le rapport entre la grandeur mesurée et la grandeur choisie comme étalon (ou encore le nombre de reports de l'étalon nécessaire pour « couvrir » la grandeur : Chevallard et Chambris (2015) parlent ainsi de « nombrement »).

Notons que, même dans cette dernière définition, la mesure comme le mesurage restent « théoriques » : la question des aspects matériels ne relève pas des mathématiques et les aléas liés à ces aspects sont considérés comme un « bruit » (Houdement et Kuzniak, 2002), le plus souvent ignoré (on n'en trouve aucune mention dans la plupart des travaux de mathématiciens qui évoquent la question de l'enseignement de la mesure comme, Lebesgue (ibid.) Perrin (ibid.), …). Dans la brochure APMEP des années 80 (ibid.), qui a fait longtemps référence dans le monde de l'enseignement, les incertitudes sont mentionnées[2] (p. 15) mais il n'y est plus jamais fait référence dans la suite de la brochure. Rouche (2006) insiste sur la différence entre les aspects matériels et théoriques en mathématiques à l'école (par exemple pour les fractions, sur le partage des tartes), mais n'en déduit pas explicitement des spécificités pour ce qui concerne la mesure. Les conséquences sont que tout mesurage est considéré comme « tombant juste » (« en supposant […] que l'opération se fait exactement », Chevallard et Chambris, ibid.), sans incertitude, ce qui suppose une infinie précision (la possibilité de répéter infiniment des étapes[3]). Or, le fait qu'une mesure théorique n'est pas accessible par mesurage peut servir de support à de nouvelles questions théoriques en mathématiques, en particulier à propos des

[2] Il est précisé que : « l'imperfection […] des procédés physiques d'évaluation d'une grandeur fait qu'un mesurage est nécessairement approximatif : il convient donc de fournir une autre information, appelée incertitude, sur la plus ou moins bonne qualité du mesurage. »
[3] Ce qui contribue d'ailleurs à la difficulté de conceptualisation des nombres associés (Lebesgue, ibid.).

nombres : notamment celle de l'existence des nombres rationnels puis irrationnels (cf. la question de l'incommensurabilité), en lien avec la question des approximations (et le calcul infinitésimal), mais cela ne prend pas en compte les problématiques liées au caractère aléatoire de la mesure.

La mesure au croisement des mathématiques et de la physique

Ainsi, en mathématiques comme en physique, mesure et mesurage renvoient à de multiples objets. La mesure désigne parfois une fonction, un nombre, un nombre avec une unité ou encore un processus pratique ; le mesurage recouvre tantôt les aspects théoriques du procédé qui permet d'obtenir une mesure, tantôt sa mise en œuvre pratique, matérielle.

De ce fait, nous distinguons deux aspects du concept de mesure : on parlera ainsi de

- La mesure *théorique*, au sens mathématique, qui correspond à une mesure exacte de grandeur « idéale ». Celle-ci renvoie à des objets mathématiques élaborés, en lien avec la construction des nombres, jusqu'à la théorie de la mesure.
- La mesure *empirique*, qui renvoie à des pratiques matérielles, éventuellement familières, dans d'autres disciplines ou dans la classe de mathématiques. Celle-ci est en lien avec la modélisation et les mathématiques appliquées.

De la même manière, nous distinguons le mesurage théorique (qui « tombe juste », notamment) et le mesurage empirique.

Notons que cette distinction (ou des distinctions proches) a déjà été mentionnée par plusieurs auteurs, sous différentes terminologies (Capponi (1988), Tanguay et al. (2014), Rogalski (op. cité), etc.) : « mesure effectuée/mesure calculée », « procédé pratique de mensuration », « mesures déduites et mesures déterminées aux instruments ».

La question du statut de ces deux aspects et de leur articulation n'est pas la même dans les deux disciplines. En mathématiques, seule la mesure théorique est reconnue et une question didactique naît du fait que l'enseignement de la mesure théorique s'appuie sur la pratique de la mesure empirique. En physique, hormis dans le cas de la physique théorique où les questions se posent d'une autre manière, le travail sur les modèles empiriques s'appuie sur des mesures empiriques. Ainsi, la question de la précision et de la dispersion ne se pose pas de la même façon. Il s'agit là de différences épistémologiques importantes entre les disciplines, qui amènent à s'interroger sur les enjeux d'enseignement associés. Comme nous le montrons dans la suite, ces derniers relèvent à la fois de l'aspect théorique et de l'aspect empirique de la mesure, parfois séparément et parfois dans la confrontation des deux.

Synthèse de la littérature

Les travaux de didactique des mathématiques

Les enjeux de l'enseignement et de l'apprentissage en mathématiques autour de la mesure ont varié selon les époques, en lien avec l'évolution notamment de la signification de ces mots en mathématiques, comme en témoignent Perrin-Glorian (1989-90), Chambris (2008) et Brousseau (2002). D'enjeux pratiques liés à des savoirs familiers relégués en périphérie des mathématiques au travail sur la mesure comme moyen du travail sur les grandeurs, enfin au travail sur la mesure comme support du travail sur les nombres.

La XIème école d'été de didactique des mathématiques, en 2001, dont le thème est « grandeurs et mesure » correspond à l'étape intermédiaire : les travaux présentés portent essentiellement sur les grandeurs, la mesure n'étant vue qu'à propos de la mesure de grandeurs données, moyen de travail sur les grandeurs. On note toutefois une exception : l'un des cours (celui de Nota,

2002) porte sur la mesure, mais il s'agit de la mesure en physique. Le texte du cours de Brousseau (ibid.), précise également que « les questions de métrologie et d'unités sortent du domaine des mathématiques » (p. 37) et que « les connaissances correspondantes [aux domaines des grandeurs et mesures] n'ont cessé d'être de plus en plus dispersées dans des domaines de référence différents. » (p. 36) Il affirme à cette occasion la nécessité de les penser au sein de l'enseignement des mathématiques. Mais une relecture de son texte à la lumière des éléments pointés dans la première partie montre qu'il s'agit essentiellement des enjeux théoriques sur la mesure (sens de la mesure, de l'unité etc.). La CORFEM de 2011 s'inscrit également dans cette démarche, portant sur les grandeurs, mais ne mentionnant que très peu la mesure.

Les travaux plus récents, notamment Chevallard et Bosch (2001, 2002) ou plus récemment la thèse de Chambris (2008) s'intéressent à la mesure pour d'autres aspects que son rôle dans la conceptualisation des grandeurs. Il s'agit de travaux essentiellement théoriques qui s'intéressent aux aspects théoriques de la mesure, notamment en lien avec la construction des nombres.

La question de la variabilité de la mesure (empirique) et des incertitudes, considérée comme ne faisant pas partie du champ des mathématiques, n'est donc pas abordée par la didactique des mathématiques. Les seuls travaux qui la mentionnent sont ceux qui s'en servent comme support de travail sur les notions statistiques, les séries de mesures (issues de disciplines expérimentales) constituant de « bonnes » séries de nombres pour étudier divers indicateurs de position et de dispersion. Chevallard et Wozniak (2003) citent ainsi la dispersion des mesures [empiriques] comme un exemple « paradigmatique en statistique » de phénomène de variabilité.

Toutefois, la question des valeurs approchées et approximations présente a priori des relations avec les questions qui nous préoccupent dans cet article. Ce sujet relève des mathématiques et fait l'objet de quelques travaux de didactique (notamment Birebent (2001), ainsi que Bronner, 1997). Toutefois, il faut distinguer la question de l'approximation dans le calcul d'une part et dans la mesure d'autre part, or il apparaît que la seconde – celle qui nous intéresse ici – est encore plus mal prise en charge (Tanguay et al., 2014). Dans les deux cas, on parlera d' « erreurs », d'écart à une valeur exacte, mais il nous semble que la question des incertitudes de mesure et des rapports entre mesure théorique et mesure empirique (cf. supra) n'est pas réductible à la celle du rapport entre valeur approchée et valeur exacte, notamment dans l'enseignement. Par ailleurs, comme le pointe Lebesgue (1975), cette question se pose différemment selon la nature des nombres.

En effet, si l'on peut considérer qu'une mesure théorique est par définition exacte, tandis qu'une mesure empirique est nécessairement approchée, il est quasiment systématique, dans les classes, de considérer que si l'extrémité d'un segment semble tomber « sur » la graduation de la règle[4], alors la valeur obtenue est précise (exacte), alors que si l'extrémité tombe entre deux graduations, la valeur est considérée comme approchée. Il va ainsi sembler naturel, si la mesure obtenue par mesurage est un nombre entier, de considérer qu'alors elle est exacte – ou du moins de « faire comme si ». Lorsque la mesure théorique est irrationnelle (notamment la longueur d'un cercle de rayon décimal), en revanche, le résultat obtenu (après par exemple mesurage du rayon avec la règle et calcul) sera présenté comme exact s'il est donné avec Pi dans la formulation et approché si une valeur décimale est donnée. Or du point de vue mathématique, la longueur d'un segment étant un nombre réel, elle n'est par nature pas accessible par

[4] Nous mentionnons ici un exemple lié à des mesures de longueurs, mais le même exemple peut être développé à propos de la mesure des angles avec le rapporteur, voire à celle des aires avec un quadrillage.

mesurage. Il nous semble ici que les enjeux liés à la nature empirique / théorique des mesures et des objets considérés sont brouillés.

Un autre exemple de ce « brouillage » est qu'une préconisation faite aux élèves à partir du cours moyen est d'utiliser préférentiellement le compas plutôt que la mesure à la règle pour reporter des longueurs. L'argument fréquemment employé pour justifier cette exigence est celui d'une plus grande précision. Or, si l'usage du compas peut en effet faire éviter des erreurs de lecture sur la règle, il est à notre avis loin de garantir que la longueur du nouveau segment sera plus proche de celle du premier : les contraintes matérielles de manipulation du compas sont telles que son usage par les jeunes élèves est au moins aussi problématique que celui de la règle. Là encore, il s'agit selon nous d'un amalgame : l'enjeu de l'utilisation du compas pour le report de mesure n'est pas celui de la précision dans le cadre d'une manipulation matérielle, mais de traiter des grandeurs indépendamment de leur mesure. Il s'agit là d'enjeux non plus de construction mais de constructibilité, pour lesquels les mesures – quand elles sont mobilisées – sont théoriques.

Nous défendons donc ici la pertinence d'une approche des questions d'enseignement et d'apprentissage de la mesure fondée sur la distinction entre mesure théorique et mesure empirique, distinction peu identifiée en tant que telle par la didactique des mathématiques.

Les travaux de didactique de la physique

Dans les travaux de didactique de la physique, la question de la mesure en tant que telle est également peu abordée. Séré a étudié l'évolution de l'enseignement de la mesure depuis le début du 20ème siècle (Séré, 2007, 2008), évolution qui a suivi l'évolution de la métrologie. Elle montre que, durant la première moitié du vingtième siècle, le mesurage a été enseigné en tant que savoir-faire, les mesures étant peu (ou pas) utilisées, mais qu'une centration s'est faite ensuite progressivement sur le traitement des données et sur l'évaluation de la qualité de la mesure, en lien avec les théories statistiques. Elle pointe que cette évolution des pratiques et des enjeux du mesurage est liée également aux fonctions, aux buts attribués aux activités expérimentales, qui ont considérablement évolué avec le passage d'un enseignement basé sur la monstration et l'induction à un enseignement basé sur une démarche d'investigation.

La plupart des études sur la mesure et les incertitudes se sont focalisées sur les raisonnements des élèves et étudiants (Lubben et Millar, 1996, Volkwyn et al., 2004, Maisch et al., 2008). Ces travaux ont proposé différentes catégorisations des raisonnements et montrent que les élèves ne disposent que de très peu des outils conceptuels permettant de raisonner sur la dispersion des résultats de mesure (Séré et al., 2001).

Quelques études se sont intéressées à la prise en compte de la mesure dans l'enseignement de la physique. Ces études montrent que les questions de variabilité et d'incertitudes sont peu prises en charge dans l'enseignement. Séré pointe notamment chez les enseignants *« une résistance certaine à aborder avec leurs élèves le problème des incertitudes »* (Séré et al., 1998), notamment par crainte que les élèves deviennent sceptiques vis-à-vis de l'expérience. Nous reviendrons sur cette question des réticences des enseignants à aborder ces questions dans la discussion.

Les enjeux d'apprentissage liés à la mesure

Ces analyses nous permettent de dégager les enjeux d'apprentissage majeurs liés à la mesure pour l'enseignement obligatoire. Certains de ces enjeux relèvent de la mesure théorique, d'autres de la mesure empirique, d'autres enfin des rapports entre les deux.

Les enjeux liés à la mesure théorique sont : la notion d'unité, le sens de la mesure comme report d'unité versus repérage, les notions de multiples et sous-multiples de l'unité. Les enjeux liés à la mesure empirique sont : l'usage des instruments, la connaissance des unités conventionnelles, les questions de dispersion et d'incertitudes. Quant à la distinction et à l'articulation des deux, il s'agit pour les élèves d'apprendre à distinguer les situations dans lesquelles chacune est pertinente : par exemple, savoir qu'une conjecture en géométrie peut s'appuyer sur des mesures empiriques, mais que la démonstration porte sur les mesures théoriques. L'un des enjeux est aussi de résoudre la contradiction apparente entre le fait que, lorsqu'on fixe une unité, il y a unicité de la mesure théorique, tandis que les mesures empiriques sont sujettes à dispersion.

Au-delà des concepts, nous identifions des enjeux d'ordre épistémologique plus généraux : un travail sur la dispersion des résultats de mesure peut permettre de dépasser la « résistance » et le « déni » de la variabilité du monde pointés par Chevallard et Wozniak (2003, p. 22), en développant un « regard statistique sur le monde », essentiel à l'exercice de la citoyenneté (ibid. p. 24). Il s'agit enfin selon nous également d'un levier potentiel pour travailler sur la nature de l'activité scientifique, sur la notion de modèle et notamment la distinction entre modèle et réalité.

Problématique

Notre problématique est ainsi la suivante : Comment sont pris en charge dans l'enseignement ces enjeux ? Nous nous intéressons à la fois aux enjeux liés à la mesure empirique et à la mesure théorique, ainsi qu'à la question de leur articulation. Nous étudions notamment la manière dont est pris en charge dans l'enseignement le fait que le travail sur les enjeux théoriques s'appuie sur la pratique du mesurage empirique et la façon dont est gérée dans l'enseignement la distinction entre nature empirique et théorique des mesures. L'articulation des deux sert-elle des enjeux dans d'autres domaines (géométrie, nombres) ? Quels problèmes peut poser la cohabitation des deux dans la classe ?

ETUDE EXPERIMENTALE EXPLORATOIRE

Nous proposons dans cette partie nos résultats concernant la prise en charge de ces enjeux d'enseignement. Nos recherches s'articulent sur trois axes, chacun pouvant a priori constituer une « niche écologique » (Artaud, 1997) pour les objets qui nous intéressent. Nous avons ainsi exploré tout d'abord la mesure de certaines grandeurs, en mathématiques et en physique, puis les domaines géométrie et statistique, enfin les activités de modélisation en mathématiques et en physique. Nous étudions différents types de données : travaux de recherche en didactiques, textes officiels et manuels scolaires. Ces derniers sont étudiés pour leur potentiel à donner une première approximation de ce qu'il se passe dans les classes.

Pour chaque axe, nous présentons une analyse a priori et les critères d'analyse qui en découlent puis nous justifions les objets d'étude retenus, enfin, nous exposons les résultats.

Axe 1 : l'enseignement de la mesure de certaines grandeurs

Critères d'analyse

Au-delà des enjeux d'apprentissage liés aux grandeurs elles-mêmes, nous avons recherché comment étaient pris en charge les enjeux d'apprentissage liés à la mesure cités plus haut.

D'une part les enjeux autour de la mesure théorique : le sens de la mesure (unité, linéarité, mesure comme repérage et/ou quantité d'unités (cf. Bessot et Eberhard (1983) pour des précisions concernant cette distinction, à propos des longueurs), les notions de multiples et sous-multiples de l'unité, unités arbitraires vs conventionnelles, conversions etc. D'autre part les enjeux autour de la mesure empirique : méthodes de dénombrement des unités (report) / de repérage, autour des instruments de mesure (maîtrise des instruments conventionnels, méthodes de mesurage[5]), notions de dispersion et d'incertitude, causes de dispersion, intervalle de confiance. Enfin, les enjeux liés à l'articulation des deux : articulation du sens de la mesure avec la mesure empirique, la notion de « précision » en lien avec la nature des nombres ; il s'agit notamment d'identifier la façon dont est prise en charge l'apparente contradiction entre l'unicité de la mesure (théorique) d'une grandeur, une unité étant fixée, et la dispersion des mesures (empiriques).

Objets d'étude

Ne pouvant couvrir toutes les grandeurs, en mathématiques notre choix s'est porté en priorité[6] sur la mesure des longueurs au cycle 2 – comme première[7] grandeur introduite à l'école -, la mesure des masses au cycle 2 – qui nous semblait intéressante car elle est travaillée à la fois en mathématiques et en physique – enfin la mesure des angles en sixième, parce que cette grandeur a pour particularité d'être introduite à l'école primaire mais sa mesure seulement au collège. En physique, nous avons retenu la mesure des masses et volumes en cinquième et la mesure des grandeurs électriques en quatrième.

Les travaux de didactique des mathématiques

L'évolution des préoccupations des recherches en didactique est concomitante avec l'évolution des curriculums et des savoirs eux-mêmes. Comme évoqué dans la première partie, les travaux de didactique des mathématiques s'intéressant au domaine grandeurs et mesures (notamment les travaux des années quatre-vingts, jusqu'à la XIème école d'été de didactique des mathématiques en 2001 et le colloque de la CORFEM en 2011), portent essentiellement sur la construction des grandeurs.

Les questions qui nous intéressent ici n'apparaissent jamais comme objet d'étude en tant que tel dans les travaux de recherche. Toutefois, les recherches qui portent sur la construction des grandeurs incluent une dimension expérimentale (beaucoup des travaux des années quatre-vingts proposent des ingénieries didactiques : Bessot et Eberhard 1983, Douady et Perrin-Glorian 1983, Vergnaud 1983, Brousseau et Brousseau 1991 par exemples). Or, on peut supposer que les enjeux pointés ci-dessus, notamment liés à la mesure empirique et aux incertitudes, même s'ils ne constituent pas des objets de recherche ou d'enseignement dans les ingénieries, ne peuvent manquer d'apparaître.

Si l'on étudie ainsi la prise en charge de ces enjeux dans ces travaux, il apparaît que les enjeux d'apprentissage liés à la mesure et qui sont explicitement pris en charge sont essentiellement liés à ses aspects théoriques, même lorsque, comme Bessot et Eberhard (1983), ils affichent de s'intéresser à la « mesure effectuée » et non à la « mesure calculée ». Les ingénieries proposées

[5] Nous entendons là par exemple le mesurage d'un volume par immersion, le fait de tarer une balance etc.

[6] Même s'il aurait semblé pertinent d'étudier aussi la mesure des aires (qui présente la particularité d'être la première grandeur composée, et pour laquelle il n'y a pas d'instrument permettant de trouver la mesure directement), ainsi que la mesure des volumes (pour la comparaison entre mathématiques et physique et parce qu'elle présente des spécificités (Rogalski, 1979)

[7] Nous excluons de fait la grandeur « quantité dans une collection discrète », qui est réellement la première grandeur mesurée, car cette grandeur fait figure de cas très particulier par rapport aux enjeux qui nous intéressent.

s'appuient en revanche largement sur des situations impliquant du mesurage empirique (report de bandes unités par exemple dans Bessot et Eberhard (ibid.), découpages et recollements ou pavages (en 2D ou 3D) dans les travaux de Douady et Perrin-Glorian (1983), etc.). Les questions liées à la précision et aux approximations sont utilisées comme levier pour introduire l'idée de fractionnement de l'unité ou introduire des nombres non entiers mais elles ne reposent pas sur les incertitudes de mesure. Ces dernières soit sont évacuées, soit restent un « bruit ». Ainsi, elles sont parfois « gommées », comme dans le travail de Douady et Perrin-Glorian (ibid.) qui précisent que,

> « aux erreurs de mesure près, les deux méthodes doivent donner le même résultat. Les pièces ont été choisies pour que ce soit effectivement le cas, sans être gêné par les erreurs de mesure. » (p. 45).

Parfois, elles sont considérées comme produisant des « erreurs » qui servent de levier pour valider ou invalider une procédure (notamment dans Bessot et Eberhard, ibid.).

Le travail de Brousseau et Brousseau (1991) sur la masse fait une place plus importante à ces questions : les incertitudes liées au mesurage matériel sont pointées comme inévitables et comme devant être prises en charge, mais la notion d'incertitude ou le rapport entre mesurage empirique et théorique ne constituent pas pour autant des enjeux d'apprentissage spécifiques des situations proposées.

Les textes officiels

Dans les programmes en vigueur (MEN, 2008a et 2008b), les enjeux autour de la mesure théorique sont pris en charge : il est fait mention des étapes de construction de la mesure des grandeurs, du report d'étalon etc., cependant il y a ensuite une centration rapide sur les enjeux liés aux unités conventionnelles, aux conversions et aux formules. En ce qui concerne les enjeux liés à la mesure empirique, il est fait mention pour toutes les grandeurs de la maîtrise d'instruments, en mathématiques comme en physique.

En ce qui concerne les enjeux liés à la précision et à la dispersion, ils sont affichés fortement dans le socle commun (MEN, 2006) : à l'issue de la scolarité obligatoire les élèves doivent être capables « d'effectuer des mesures à l'aide d'instruments, en prenant en compte l'incertitude liée au mesurage ». Au collège les instructions précisent que les enseignants de mathématiques et de physique doivent s'associer pour développer chez les élèves un « Mode de pensée statistique dans le regard scientifique sur le monde ». Ils doivent en particulier confronter les élèves au problème de la variabilité de la mesure :

> « De nombreuses activités doivent intégrer la notion d'incertitude dans l'acte de mesurer et développer l'analyse des séries de mesures. […] Plusieurs mesures indépendantes d'une même grandeur permettent ainsi la mise en évidence de la dispersion naturelle des mesures. » (Thème de convergence 1, MEN, 2008b).

Cependant ces objectifs sont peu déclinés dans les détails des programmes.

En revanche ces questions sont abordées dans différents documents d'accompagnement des programmes. Ceux des programmes de l'école de 2002 (MEN, 2002) affichaient des objectifs très ambitieux

> « Une réflexion sur la précision des mesures sera menée à l'occasion de chaque activité. […] Faire prendre conscience des approximations liées à la taille des objets, à la précision des instruments et à leur utilisation. Souvent, cela se traduit par un **intervalle de confiance**, une erreur maximum. Par exemple, pour le mesurage d'un segment dont la longueur prévue

est 4,8 cm, les longueurs de 4,7 cm, 4,8 cm et 4,9 cm sont jugées acceptables. ».

Chevallard et Wozniak (ibid.) pointent par ailleurs que, dans l'ancien document d'accompagnement des programmes de mathématiques, il est pointé que « la distinction entre “ mesure exacte ” (…) et “ mesure approchée ”[8] est une question très difficile ».

En physique-chimie, les documents d'accompagnement des programmes en vigueur (MEN, 2008b) consacrent plusieurs pages au thème des erreurs et incertitudes.

Même si nous nous limitons ici à l'école élémentaire et au collège, nous ne pouvons pas ne pas mentionner le document d'accompagnement « mesure et incertitudes » paru en 2012 et destiné aux professeurs de lycée des deux disciplines. Ce long document (une quarantaine de pages) est une clarification disciplinaire et épistémologique des concepts liés à la mesure pour ces enseignants. Notons qu'il ne propose aucune piste de réflexion sur la manière d'aborder ces questions en classe.

Dans les nouveaux programmes de cycles 3 et 4, en vigueur à la rentrée 2016, si les enjeux liés à la mesure théorique sont renforcés, en revanche ceux liés à la mesure empirique, en particulier les questions de précision, sont nettement moins présents, voire quasiment inexistants.

Les manuels

Nous avons étudié 6 à 8 manuels selon les notions, parmi les plus courants.

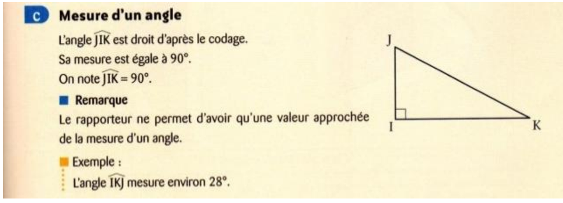
Concernant la construction du sens de la mesure en mathématiques, on constate que cet enjeu, s'il est plutôt bien pris en charge pour les longueurs, avec des activités utilisant des étalons arbitraires (report de bandes de papier etc.), est peu pris en charge pour la masse, grandeur pour laquelle le travail sur le sens de l'unité, le sens de la mesure comme report et la mesure avec étalon arbitraire sont absents de la plupart des manuels étudiés. En ce qui concerne les angles, cet enjeu est inégalement pris en charge. Deux manuels sur six proposent des activités utilisant des reports d'étalons (plus ou moins arbitraires).

En ce qui concerne la construction du sens de la mesure en physique, lors du travail sur les masses et les volumes en 5ème, on observe très peu de prise en charge (seul 1 manuel fait compter des sucres comme étalons arbitraires pour mesurer des volumes). Pour les grandeurs électriques étudiées, cela n'a pas de sens d'étudier le sens de la mesure en termes de report d'unités ou d'unité arbitraire.

Si l'on se penche sur la nature des nombres en jeu dans les activités ou exercices proposés, on constate que les mesures sont essentiellement entières. Seuls deux manuels sur les angles utilisent des valeurs décimales, à une voire deux décimales, pour des raisonnements sur les mesures théoriques, dont un qui utilise des valeurs à deux décimales dans un logiciel mais parle de « valeur atteinte exactement ».

En ce qui concerne la dispersion et les incertitudes en mathématiques, concernant les longueurs et les masses, les manuels ne les prennent pas en compte. Pour les angles, aucun manuel ne prend en charge la question de la précision du rapporteur. Quelle que soit la grandeur, aucun manuel ne prend en charge la distinction mesure empirique / théorique. Un seul manuel fait figure d'exception, le manuel Phare 2005, en identifiant explicitement qu'une mesure empirique est nécessairement approchée (cf. la remarque de la partie « leçon »).

[8] Notons qu'il s'agit de la question de l'approximation et non du rapport entre empirique et théorique, mais il nous semble qu'il y a ici un large recoupement (cf. supra).



c **Mesure d'un angle**

L'angle $\widehat{JIK}$ est droit d'après le codage.
Sa mesure est égale à 90°.
On note $\widehat{JIK} = 90°$.

Remarque

Le rapporteur ne permet d'avoir qu'une valeur approchée de la mesure d'un angle.

Exemple :
L'angle $\widehat{IKJ}$ mesure environ 28°.

Figure 2 : extrait de manuel prenant en charge le caractère approché de la mesure empirique des angles

En physique, aucun manuel ne prend en charge la question des incertitudes liées à l'instrument lors de l'introduction de la balance, de l'éprouvette graduée ou du multimètre. Le travail sur les causes de dispersion est quasi inexistant. Nous avons relevé, sur l'ensemble des manuels étudiés, un seul exercice sur la balance et deux exercices pour les grandeurs électriques qui prennent en compte ces questions. Deux manuels évoquent les incertitudes dans des « fiches méthodes » sur la mesure mais qui figurent en fin de manuel et il n'y est pas ou peu fait référence dans le reste du manuel. Les élèves ne sont jamais confrontés à N mesures de la même grandeur sauf dans deux exercices sur l'ensemble des chapitres concernés. La précision des mesures n'est abordée que lorsqu'il s'agit de choisir les calibres les mieux adaptés mais essentiellement de manière technique.

Conclusion sur la mesure de certaines grandeurs

Pour conclure en ce qui concerne la mesure de certaines grandeurs, le sens de la mesure est une question travaillée par la didactique des mathématiques, mais de manière inégale selon les manuels et les grandeurs.

En mathématiques, en ce qui concerne le rapport entre mesure empirique et mesure théorique, la distinction entre les deux n'est pas prise en charge dans les travaux de didactique des mathématiques. Elle n'est pas non plus identifiée dans les manuels (sauf dans un manuel dans le chapitre sur les angles). La question de la précision est utilisée pour travailler les sous-multiples de l'unité, mais pas en lien avec les incertitudes de mesure. On peut donc considérer que la question des incertitudes de mesure est très peu prise en charge, même en physique.

Axe 2 : le rôle de la mesure dans d'autres domaines, en classe de mathématiques

La question de la mesure entretient des rapports avec divers domaines en mathématiques. Nous avons choisi dans cet article d'étudier la manière dont les enjeux d'apprentissage identifiés dans la première partie s'insèrent dans deux de ces domaines : la géométrie et la statistique.

Mesure et géométrie[9]

S'intéresser au domaine de la géométrie nous semble pertinent dans la mesure où la géométrie « à la Euclide » (Robert, 2003), visée dans le secondaire, implique beaucoup les relations entre grandeurs qui peuvent, de fait, se traduire par des relations entre leurs mesures (grâce aux nombres réels, même si c'est parfois de manière abusive, Lebesgue, 1975). Ainsi, « la mesure apparaît en filigrane de la géométrie enseignée » (Houdement et Kuzniak, 2001).

[9] Nous ne nous intéressons pas ici à la question de la « géométrie approchée » (Houdement et Kuzniak, 2001), qui ne relève pas tout à fait des mêmes questions que celles traitées dans cet article.

Houdement et Kuzniak (2000) ont identifié que cohabitent dans l'enseignement obligatoire de la géométrie deux paradigmes : la géométrie naturelle (G1) et la géométrie axiomatique naturelle (G2)[10].

G1 et G2 se distinguent par leur rapport au réel. Les objets de G1 sont ainsi des objets concrets, physiques (les dessins, au sens de Parzysz, 1988, ou Laborde et Capponi, 1994), tandis que les objets de G2 sont des objets idéels (les figures). Les mesures des *dessins* sont par nature empiriques et, de ce fait,

> « La Géométrie 1 offre une place licite au mesurage, reconnaît les problèmes d'approximation et étudie la validité de cette approximation » (Houdement 2007, p. 82)

Les mesures des *figures* sont, elles, théoriques. Ainsi, comme le dit Houdement (2007), « La Géométrie 1 ressemble fort à une approche physique des phénomènes, alors que la Géométrie 2 exacerbe les aspects théoriques » (p. 77). Mais les mesures empiriques ne disparaissent pas dans la pratique de G2 : leur rôle change, passant d'outil de validation à outil heuristique, illégitime pour la validation.

Les objectifs de l'enseignement de la géométrie s'inscrivent pour une part dans l'un des deux paradigmes (par exemple, la maîtrise de l'équerre pour vérifier si un angle est droit relève de la géométrie 1, tandis que la capacité à utiliser le théorème de Pythagore pour montrer qu'un triangle n'est pas rectangle relève de G2), pour une autre part dans la mise en cohérence des deux paradigmes en vue d'une pratique de G2 outillée par G1. Notons qu'Houdement (2007) pointe la prise en charge insuffisante des enjeux liés à G1 dans l'enseignement obligatoire. Par ailleurs, Houdement et Kuzniak (ibid.) montrent que l'articulation des deux paradigmes n'est pas bien maîtrisée par les élèves, ni par les étudiants au CRPE. Cela nous amène à nous intéresser au travail de cette articulation, notamment l'introduction de premières tâches relevant de G2, ainsi qu'au moment de travail de l'articulation des deux paradigmes dans la pratique de G2, mais nous présentons les résultats afférents à ce deuxième volet plus loin, dans la partie concernant la modélisation, en lien avec la question de la modélisation en physique.

Les travaux de didactique sur les paradigmes reconnaissent l'importance des questions liées à la mesure : Kuzniak (2010) l'identifie ainsi comme jouant un rôle dans les diverses genèses. Mais les difficultés rencontrées dans l'apprentissage de la géométrie en lien avec la mesure sont interprétées comme le résultat d'une perturbation liée à l'approximation *du point de vue numérique* (Houdement et Kuzniak, 2003). Notre hypothèse majeure est qu'au-delà de la question du numérique, se pose un problème propre au « monde géométrique » (ibid.), lié à la différence entre mesure empirique et mesure théorique, constitutive du changement d'objets entre G1 et G2. Ce point de vue nous semble notamment éclairer les exemples cités en introduction de ce texte.

Nous étudions dans cette partie la prise en charge des enjeux concernant la mesure tout d'abord en sixième à propos de l'introduction de premières tâches relevant de G2, dans le chapitre sur les angles. Le choix de cette notion est lié au fait qu'y sont associés en sixième des enjeux relevant à la fois de G1 (savoir utiliser un rapporteur) et de G2 (ce chapitre s'inscrit dans les objectifs d'initiation au raisonnement sur les propriétés des figures).

D'après Houdement (2007), l'introduction de tâches relevant de G2 peut être motivée par un enjeu de précision qui suppose que « cette précision doit alors être demandée et aussi précisée pour les mesures de départ » (p. 77). Elle peut également être motivée par un enjeu de

[10] Le paradigme de la géométrie 3 est quasiment absent de l'enseignement secondaire (ibid.).

généralisation, du fait que la résolution dans G2 permet de traiter une classe de problèmes, mais l'économie n'apparaît pas si le problème reste « local » (ibid.).

Nous nous sommes donc attachées à trois critères :

- nous avons identifié si, dans les tâches proposées, les objectifs étaient clairement associés à la mesure empirique (comme mesurer ou construire un angle avec un rapporteur) ou à la mesure théorique (calculer des mesures d'angles en s'appuyant sur des propriétés, justifier un énoncé en s'appuyant sur un calcul etc.) ou si les objectifs étaient mélangés.
- nous avons repéré la présence ou non de tâches propres à motiver l'introduction de la mesure théorique, par exemple en montrant la limite de la mesure empirique pour certaines problématiques (généralisation, précision)
- Enfin, nous avons identifié la nature des nombres en jeu (entiers ou non) en lien avec la nature des mesures (empiriques ou théoriques), puisque le croisement avec le caractère approché ou non de ces mesures nous semble porteur potentiellement d'un brouillage (cf. supra)

En ce qui concerne les résultats, les programmes du collège pointent comme enjeu majeur de la géométrie le « passage du dessin à la figure ». Par ailleurs, le document d'accompagnement sur la géométrie (MEN, 2007) insiste sur l'enjeu de passage « d'une géométrie instrumentée à une géométrie théorique » et certains obstacles sont pointés :

> « Le premier obstacle rencontré en 6ème (et qui perdure longtemps !) est la compréhension du changement de contrat accompagnant le changement de statut des figures. Il ne suffit plus d'observer ou de mettre en évidence à l'aide des instruments des propriétés sur une figure pour qu'elles soient avérées sur le plan mathématique. »

Si l'insuffisance de la validation par les instruments dans la géométrie 2 est pointée, il n'est fait aucune mention explicite des questions liées à la mesure associées à ces changements.

Nous avons étudié six manuels de sixième. Tous réunissent dans un même chapitre les enjeux relevant de G1 (liés à la mesure empirique) et ceux relevant de G2 (liés à la mesure théorique). On trouve dans chaque manuel environ un dixième de tâches portant sur les mesures théoriques (il s'agit essentiellement de tâches où il s'agit de calculer la mesure d'un angle), sauf dans un manuel qui en contient environ un cinquième. Ces tâches sont souvent identifiées comme plus difficiles par les manuels (marquées par des * ou bien identifiées comme des « problèmes » au-delà des exercices d'entrainement). Par ailleurs, elles sont plus ou moins identifiées comme un type de tâches à part : très clairement dans un manuel, pas du tout dans un autre et partiellement dans les quatre derniers.

Du point de vue de la clarification du contrat dans les tâches proposées, nous avons relevé que certains manuels jouent sur les termes employés dans les consignes, distinguant les tâches où il s'agit de « calculer » la mesure d'un angle lorsqu'il s'agit de raisonner sur des mesures théoriques et celles où l'on demande de « donner » la mesure quand il s'agit de mesurer avec le rapporteur – voire il est parfois précisé « mesurer » ou « sans utiliser le rapporteur » etc. Toutefois, un seul manuel explicite ce contrat : « calculer n'est pas la même chose que mesurer, tu ne peux pas utiliser le rapporteur ». On trouve dans cinq manuels sur six des questions que nous qualifions d'ambiguës, du type « quelle est la nature de ... ? », pour lesquelles les auteurs attendent manifestement un calcul sur des mesures théoriques, alors que la réponse peut être obtenue empiriquement. Enfin, dans quatre manuels sur six, sont présents quelques exercices où le contrat change d'une question à l'autre (souvent une construction suivie d'un calcul) sans motivation particulière.

En ce qui concerne la motivation de G2, elle est en général caricaturale, fondée sur l'affirmation qu'un dessin aux instruments n'est « pas suffisamment précis » ou sur le fait que cela permet une économie, mais qui n'est pas motivée et apparaît comme arbitraire (via l'usage des dessins à main levée ou l'interdiction d'utiliser les instruments). Le levier est ainsi essentiellement un « dressage » (Salin, 2003) plutôt qu'une motivation intrinsèque aux mathématiques. Ainsi, l'exemple ci-dessous, qui semble indiquer que validation instrumentée et par le raisonnement sont opposées.

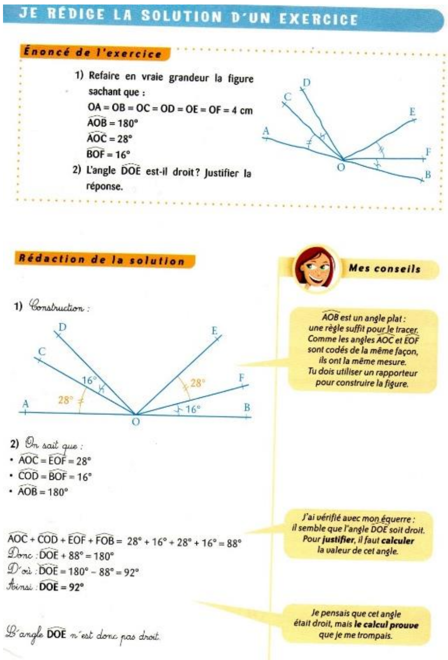


Figure 3 : Extrait de manuel illustrant l'opposition entre validation instrumentée et théorique

Quelques tâches semblent plus porteuses de motivation pour l'introduction de G2, ainsi, dans un manuel, une tâche de travail sur les mesures théoriques (non entières) obtenues en partageant un angle plat ou une tâche sur le calcul de mesures théoriques permettant d'identifier des erreurs dans une construction, mais elles restent très rares.

Certaines tâches nous semblent également potentiellement porteuses, mais sans être probablement pensées comme telles et dont l'exploitation du potentiel dépend fortement du déroulement en classe : ainsi, des tâches incluant un dessin à main levée où il s'agit de conclure par exemple sur le fait qu'un angle est droit ou non et où l'écart est de 1° : on peut penser que tous les élèves ne concluront pas de la même façon à partir d'une construction instrumentée, ce qui peut servir de support à un débat, mais tout dépend si la question est tranchée en termes d' « erreurs » ou permet d'introduire l'idée de mesure théorique. De même des tâches demandant la mesure de l'angle qu'il faudrait ajouter pour obtenir un angle droit ou plat etc. Enfin, certaines tâches partant d'un problème concret ou nécessitant d'établir des conjectures pour obtenir un résultat général nous semblent porteuses pour l'articulation de G1 et G2, mais nous y revenons plus loin.

A l'inverse, certaines tâches nous semblent problématiques, susceptibles de générer des confusions pour les élèves. Notamment des tâches où il s'agit de conclure par le calcul sur une propriété qui est déjà « évidente » sur le dessin (cf. figure 4a) ou qui contredit fortement le dessin, lorsqu'il est à main levée (cf. Figure 4b) (notons que Coppé et al. (2005) ont déjà pointé les difficultés potentielles posées par l'utilisation de ce type de dessin).

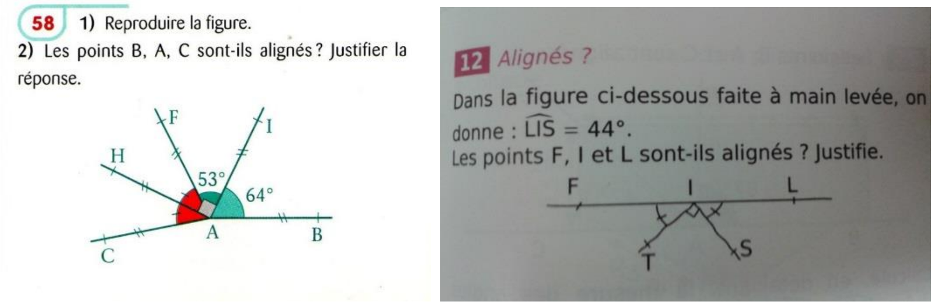


Figure 4 a et b : Exercices problématiques

Enfin, l'usage du mot « mesure » de façon indifférenciée pour désigner des mesures empiriques ou théoriques nous semble problématique, comme cela apparaît dans l'exercice ci-dessous :

2) **a** Tracer un triangle STR isocèle en T tel que :
ST = 5 cm et $\widehat{STR} = 56°$.
b Mesurer les angles $\widehat{TSR}$ et $\widehat{TRS}$.
c Quelle conjecture faire concernant les mesures de ces angles ?

Figure 5 : Exemple d'exercice illustrant le double sens du mot « mesure »

Les élèves auront obtenu deux nombres à la question b, et leur demander ensuite de *conjecturer* quelque chose sur ces deux valeurs n'a pas de sens : soit elles sont égales, soit différentes, soit éventuellement différentes mais proches, mais il s'agit d'un constat et non d'une conjecture ! En revanche, les questions prennent davantage de sens (du point de vue mathématique) si l'on remplace la question b. par « détermine les mesures *empiriques* des deux angles » et la question c. par « quelle conjecture faire concernant les mesures *théoriques* de ces angles ? ». La question de l'accessibilité pour les élèves de cette tâche reste toutefois posée. Par ailleurs, s'il s'agit là de travailler sur la propriété d'égalité des mesures des angles à la base d'un triangle isocèle, la question de la généralisation, au-delà d'un seul triangle, n'est pas prise en charge.

Enfin, si l'on se réfère à l'exemple concernant l'angle de 89° évoqué dans l'introduction de ce texte, il est même probable que dans bien d'autres tâches le contrat est opaque pour les élèves et qu'elles sont porteuses de confusion. En effet, on peut supposer que, au moins pour certains élèves, une mesure est le résultat d'un mesurage dans le milieu matériel, ce qui hypothèque largement la compréhension de certaines consignes.

Pour conclure sur la prise en charge des questions liées à la mesure en sixième en géométrie à propos de la notion d'angle dans les manuels, nous notons qu'elle reste problématique du point de vue du sens de l'activité mathématique. Il nous semble que les auteurs de manuels agissent « comme si » les notions de figure et de mesure théorique étaient construites ou transparentes, « comme si » les règles du jeu géométrique (lien entre dessin et figure) étaient transparentes, « comme si » les mesures empiriques étaient des mesures exactes et qu'il y avait coïncidence entre mesures empiriques et théoriques.

Pour conclure sur la mesure en géométrie, il nous semble que le rapport entre mesure empirique et mesure théorique est un point clé, mais une problématique peu identifiée en tant que telle, à la fois dans les travaux de didactique, les textes officiels et les manuels. Notons que ce constat rejoint celui de Tanguay et al. (2014). La distinction entre mesure empirique et mesure théorique nous semble source de malentendu entre professeur et élèves au début du collège : on fait « comme si » c'était transparent et/ou déjà construit.

Des pistes sont proposées par certains chercheurs pour la prise en charge de l'introduction de G2, comme par exemple Houdement et Kuzniak (2003) ou Houdement (2007), qui plaident pour une place plus grande faite à G1 et une reconnaissance des deux paradigmes. Cependant, l'accent mis sur le rôle de la mesure dans cette introduction est variable. Ainsi, Arsac (1993-1994) propose une situation d'introduction de l'inégalité triangulaire qui permet une réflexion sur le rapport entre dessin et figure, mais lorsque les élèves évoquent que « ce n'est pas possible [de construire le triangle] car avec des nombres décimaux de plus de 2 chiffres après la virgule, on ne peut pas faire un triangle avec des mesures exactes. », l'auteur précise que cela permet d'engager un débat qui serait intéressant mais qui n'est pas ce qui l'intéresse ici. Or il nous semble que précisément, cela pourrait permettre de travailler sur la question du rapport entre dessin et figure. Quelques travaux identifient bien comme un obstacle majeur à l'entrée dans la démonstration la question du rapport entre mesure empirique et théorique (ainsi Reynes (1999-2000), Capponi (1988), Tanguay et Geeraerts (2012) ou Tanguay et al. (2014)). Ces derniers notamment pointent que le travail sur l'approximation des mesures permet de travailler le caractère idéal des objets de la géométrie (ibid.) et proposent de remédier à ce problème en « étudi[ant] la géométrie exactement comme on étudie la physique expérimentale » (p. 11). Notons toutefois qu'ils ne prennent pas en considération en tant que telle la question de l'articulation entre mesure empirique et mesure théorique.

Or, nous pensons que la reconnaissance de la distinction entre mesure empirique et mesure théorique est nécessaire. Et l'un des leviers pourrait être la dispersion naturelle de la première, par opposition à l'unicité de la seconde, par exemple quand tous les élèves ne trouvent pas la même réponse lorsque la question porte sur l'alignement de points et que l'angle vaut 181°. Cela permettrait en outre de contribuer à pointer et assumer la distinction entre modèle et réalité. Mais cela supposerait de reconnaître l'imprécision du dessin et la dispersion des mesures propre à G1, notamment lors du travail sur la mesure de certaines grandeurs, or ce n'est pas le cas, comme nous l'avons montré dans la partie précédente de cet article.

Mesure et statistique

Comme mentionné plus haut, la statistique est un domaine potentiellement propice à un travail sur la dispersion de mesures de grandeurs, « exemple paradigmatique » (Chevallard et Wozniak, 2003) de variabilité. D'un point de vue épistémologique, un traitement statistique de mesures doit être motivé par une question et implique une discussion sur les causes de dispersion dans le but d'une prise de décision. Il peut également inclure une réflexion sur la manière de réduire la dispersion. Cela suppose notamment une définition « correcte » de la série (de l'expérience, de la population et du caractère étudiés etc.). Or Chevallard et Wozniak (ibid.) pointent que l'enseignement de la statistique est pour une bonne part réduit à ses aspects calculatoires, ne prenant pas en considération la « variabilité réelle » du monde « extramathématique ».

Dans les textes officiels, l'un des « thèmes de convergence » des programmes concerne la « pensée statistique sur le monde ». Il est mentionné que de nombreuses activités doivent intégrer la notion d'incertitude dans l'acte de mesurer et développer l'analyse de séries de mesures. C'est dans le domaine « organisation et gestion de données, fonctions », dans le paragraphe « statistique » du programme de troisième, que l'on trouve des éléments sur ces questions : l'une des capacités mentionnées est « exprimer et exploiter les résultats de mesures d'une grandeur » et les commentaires associés précisent que

> « [l]a notion de dispersion est à relier, sur des exemples, au problème posé par la disparité des mesures d'une grandeur, lors d'une activité expérimentale, en particulier en physique

et chimie. »

Dans les nouveaux programmes, on trouve également pour le cycle 4 la préconisation : « Organiser et traiter des résultats organisés de mesures ».

Nous avons repéré, dans cinq manuels de troisième, la proportion de travail sur des séries de mesures de grandeurs et la présence de tâches portant sur la dispersion liée effectivement au mesurage empirique. Nous avons également distingué les séries de mesures de grandeurs discrètes (notamment dénombrement de collections discrètes) et les séries de mesures de grandeurs continues. Nous avons compté un item pour une série, ce qui correspond grossièrement à un exercice, compte tenu du fait que presque tous les exercices sont organisés autour de l'étude d'une série. Nous résumons les résultats dans le graphique suivant.

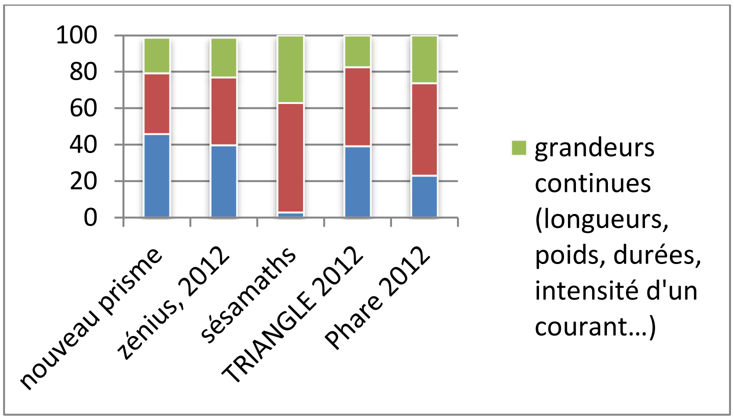
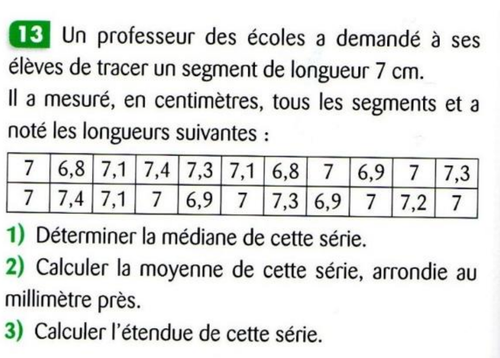


Figure 6 : Résultats de l'étude de manuels de troisième en statistique

Lorsque les grandeurs sont discrètes, la plupart des séries sont à valeurs entières, quelques-unes sont décimales, mais elles sont presque toujours considérées comme exactes. Un seul exercice sur l'ensemble des manuels part de mesures *réalisées par les élèves*. Entre 1 et 4 exercice(s) par manuel présente(nt) un potentiel à discuter des questions de précision des mesures mais, parmi eux, beaucoup semblent potentiellement problématiques. Ainsi, l'extrait suivant semble sous-tendu par l'idée que le maître, lui, obtient une valeur exacte lorsqu'il mesure et que la variabilité est le résultat d'*erreurs* liées à la maladresse des élèves : on peut supposer que cela ne contribuera pas à construire une conception épistémologiquement valide de la notion d'incertitude de mesure.



13 Un professeur des écoles a demandé à ses élèves de tracer un segment de longueur 7 cm.
Il a mesuré, en centimètres, tous les segments et a noté les longueurs suivantes :

7	6,8	7,1	7,4	7,3	7,1	6,8	7	6,9	7	7,3
7	7,4	7,1	7	6,9	7	7,3	6,9	7	7,2	7

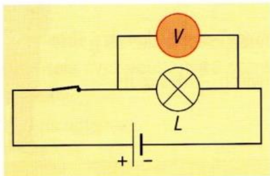
1) Déterminer la médiane de cette série.
2) Calculer la moyenne de cette série, arrondie au millimètre près.
3) Calculer l'étendue de cette série.

Figure 7 : Exercice problématique sur la notion d'incertitude

Certaines tâches proposent parfois un travail sur la prise de décision, les causes de dispersion, la pertinence d'un paramètre statistique, la notion d'intervalle, ou encore les valeurs aberrantes, mais la plupart sont « incomplètes », les conditions de l'expérience ou les caractères n'étant pas correctement définis : les causes de variation sont non contrôlées ou non explicites, l'analyse de la série n’est pas liée à une prise de décision, on ne trouve pas l’idée d’intervalle etc. Par exemple, dans l’exercice ci-dessous, on propose une réflexion dans la question 3 sur les causes d’incertitudes, mais il n’est pas clair dans l’énoncé si les élèves ont tous utilisé la même lampe ou un matériel différent.

20 SC **Physique Chimie**

Chaque élève d’une classe réalise le montage ci-dessous, puis mesure la tension (en volts) aux bornes de la lampe *L*.



Les tensions mesurées sont les suivantes :

Tension (en V)	2,49	2,50	2,51	2,52	2,53
Effectif	2	17	7	3	1

1) Quel est l’effectif total ?

2) Calculer la moyenne de cette série statistique.

3) Donner plusieurs explications au fait que tous les élèves n’ont pas trouvé le même résultat.

Figure 8 : Exercice incluant une réflexion sur les causes de dispersion des mesures

Il existe quelques rares propositions d’enseignement prenant en charge la question des incertitudes de mesure, comme Petrosino et al. (2003) en grade 4 (CM1) sur la notion d’écart-types.

Par ailleurs, Chevallard et Wozniak (2003) mentionnent la dispersion des mesures de grandeurs comme support possible pour un travail en statistique, mais pointent un obstacle : l’ignorance de la théorie probabiliste des erreurs de mesure par les enseignants du secondaire et, en grande partie, de l’enseignement supérieur.

Pour conclure à propos de la statistique, nous considérons donc que la dispersion de mesures de grandeurs est un support potentiel pour le travail sur les notions statistiques et quelques situations pertinentes existent, mais l’exploitation de cette possibilité est très limitée dans les manuels et pas toujours de façon pertinente du point de vue épistémologique.

Axe 3 : mesure et modélisation en classes de mathématiques et de physique

Nous nous intéressons ici à la modélisation au sens large, c’est-à-dire à l’étude des rapports entre monde réel et théorie. Ce choix nous amène à considérer deux aspects sensiblement différents de la modélisation : d’une part des situations d’établissement d’une loi en physique et d’un théorème ou une propriété en mathématiques, d’autre part la modélisation de situations concrètes dans lesquelles il s’agit de mathématiser la situation (dans un processus de « mathématisation horizontale », Yvain 2015), de raisonner dans le modèle puis de revenir à la situation. Nous comparons l’établissement d’une loi en physique et l’établissement d’un théorème en mathématiques. Nous cherchons à voir si les différences d’ordre épistémologique entre les deux disciplines pointées dans la première partie sont prises en charge, et si les enjeux épistémologiques associés sont travaillés. En particulier, nous étudions si les élèves sont potentiellement en situation de prise de décision, en lien avec la question des incertitudes.

Nous nous limitons, pour les mathématiques, au cas de l’élaboration de théorèmes en géométrie à partir de conjectures fondées sur des mesures (par exemple conjecturer le théorème de

Pythagore à partir de quelques mesures sur des triangles) et à l'élaboration d'une loi à partir du champ empirique en physique. Dans les deux cas l'appui sur des mesures empiriques suppose de prendre en compte les incertitudes et cette gestion n'est pas du tout évidente pour les élèves, comme en témoigne l'expérience réalisée par Capponi (1998) en géométrie avec des élèves de quatrième. En outre, en géométrie, la conjecture est « double » : il s'agit de conjecturer une relation entre les mesures théoriques à partir des mesures empiriques d'une part et conjecturer une loi générale à partir de cas particuliers d'autre part. Notons que cela rejoint les questions liées à l'articulation des paradigmes G1 et G2 (G1 devant devenir un outil au service de G2).

Critères d'analyse

Les critères retenus sont les suivants : y a-t-il appui sur des résultats de mesurage empirique ? Si oui, s'agit-il de mesures réalisées par les élèves avec des instruments et/ou par un logiciel de géométrie dynamique ? Les élèves sont-ils amenés à répéter des mesures (dans le même cas – N mesures de la même grandeur – ou dans des cas différents). Lors du traitement des mesures empiriques, quelle est la prise en charge des questions de dispersion ?

En ce qui concerne l'étude de la prise en compte des incertitudes, nous regardons si la question de la dispersion des mesures empiriques est prise en charge voire utilisée comme levier. Par exemple, si une question telle que « est-ce que le fait que les mesures empiriques sont proches correspond au fait que les mesures théoriques sont égales ? »[11] est abordée ou passée sous silence. Nous étudions en outre la question de la validation, c'est-à-dire si la démonstration est abordée en géométrie et si les limites de validité des modèles sont explorées en physique.

Objets d'étude

Nous avons ciblé ici plusieurs sujets. Nous avons étudié 5 à 7 manuels par notion en mathématiques et 4 à 7 manuels par niveau en physique. En mathématiques nous avons étudié la manière dont sont établies : les propriétés de conservation de la symétrie axiale en 6ème, les propriétés de conservation de la symétrie centrale et la somme des angles d'un triangle en 5ème, l'égalité de Pythagore en 4ème, la propriété de Thalès en 4ème et l'établissement de la formule de la longueur du cercle (Pi) en cycle 3 et en 6ème. En physique nous nous sommes intéressées à la détermination des températures de changement d'état de l'eau en cycle 3 et en 5ème et à l'établissement des lois d'additivité des intensités et des tensions et de la loi d'Ohm en 4ème.

Les manuels en mathématiques

Nous distinguons les résultats concernant l'introduction des différentes propriétés d'une part et l'introduction de Pi d'autre part.

Quels que soient le niveau et la propriété considérée, les manuels choisissent très majoritairement de faire établir une conjecture à partir de mesures empiriques réalisées par les élèves : seule une collection fait d'autres choix à tous les niveaux (l'introduction s'appuie soit sur des mesures exactes données par le manuel, soit sur la résolution d'un problème).

Un peu plus de la moitié des manuels utilise un logiciel, parfois aussi un environnement papier-crayon, avec un rapport variable entre les deux : le logiciel sert notamment parfois à « renforcer » la conjecture papier-crayon. La répétition des mesures dans des cas différents n'est pas systématique, mais plus fréquente sur logiciel, toutefois elle est souvent limitée à 3 à 5 cas. Le résultat essentiel est que tous semblent supposer que les valeurs vont « tomber juste »,

[11] La formulation d'une telle question en classe serait évidemment adaptée.

y compris pour le théorème de Thalès (pour lequel la probabilité que les rapports soient égaux est faible). Ils laissent en tout cas la question de l'éventuelle non correspondance entre les mesures empiriques et théoriques à la charge du déroulement ou à la charge du logiciel (notons que Houdement (2007) avait déjà pointé que le rapport à la précision et à l'erreur de mesure n'est pas le même en environnement virtuel). Enfin, les deux niveaux de conjecture ne sont distingués dans aucun manuel.

La question de la dispersion des mesures empiriques et de la différence de nature entre mesure empirique et théorique est donc encore une fois « gommée » et ne sert pas de levier pour motiver le travail dans G2.

A propos de l'introduction de Pi en lien avec la formule du périmètre du cercle, les manuels choisissent majoritairement (quatre manuels sur sept) une entrée par des mesures empiriques réalisées sur des objets physiques par les élèves. Les mesures sont en général répétées sur plusieurs objets ou faites par les élèves séparément puis mises en commun. Dans un manuel, la mesure de la même grandeur est répétée huit fois puis les valeurs sont confrontées avec les mesures faites sur d'autres objets par d'autres élèves. La dispersion des mesures empiriques est donc largement mise en évidence, mais son traitement reste très limité, aucun manuel ne prenant réellement en charge son traitement ensuite.

Les manuels en physique

Modélisation et établissement d'une loi / Les manuels en physique

En physique pour la détermination des températures de changement d'état de l'eau, les manuels (4 en cycle 3 et 7 en 5ème) prennent appui sur des mesures empiriques réalisées par des élèves et/ou sur des mesures « soi-disant empiriques » données dans le manuel. Lorsque de telles mesures sont données, elles correspondent à la valeur théorique dans tous les manuels sauf un. Il n'y a pas de répétition des mesures prévue (même si elles peuvent apparaître lors du déroulement, si plusieurs groupes d'élèves les réalisent, comme il est habituel lors des TP), et seul un manuel (le même) prend en charge la question de la généralisation.

• Les résultats

Temps (min)	0	5	10	15	20	25	30	35
Température (°C)	−5	0	0	0	2	5	10	16
Contenu du tube	glace	eau liquide + glace			eau liquide			

À quelle température l'eau bout-elle ?

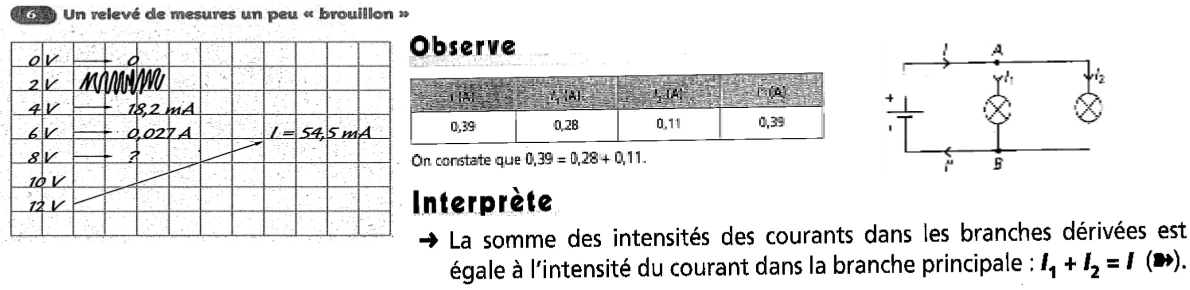
Voici les résultats obtenus au cours d'une expérience semblable à celle du doc. 7 :

0 min	2 min	4 min	6 min	8 min	10 min	12 min
17 °C	37 °C	56 °C	73 °C	88 °C	98 °C	98 °C

Figure 9 a et b : Extraits de manuel sur les températures de changement d'états de l'eau

Pour les lois des tensions et des intensités en électricité en 4ème – comme pour les températures de changement d'état – les manuels prennent appui sur des mesures empiriques réalisées par des élèves et des mesures « soi-disant empiriques » données dans le manuel. Ces mesures « tombent juste » systématiquement pour les lois d'additivité, mais « ne tombent pas juste » dans certains manuels (4/7) pour la loi d'Ohm. Lors du traitement des résultats de mesure, pour les résultats qui « tombent juste », les mesures empiriques et théoriques, la réalité et le modèle sont assimilés. Pour les autres (4 manuels, sur la loi d'Ohm), le modèle est « plaqué » très rapidement sans justification et sans réflexion sur les causes de dispersion.

Il n'y a pas de répétition des mesures prévue, sauf dans deux exercices sur l'ensemble des manuels et des chapitres étudiés, mais il peut éventuellement y avoir plusieurs mesures (réalisées par les différents groupes d'élèves s'ils manipulent – notons cependant que cela n'est pas évoqué). Dans 6 manuels sur 7, au moins une des lois est établie à partir d'*une seule* mesure. On trouve aussi dans 6 manuels sur 7 des exercices qui traitent les mesures empiriques comme des mesures théoriques.



Observe

I (A)	I_1 (A)	I_2 (A)	I' (A)
0,39	0,28	0,11	0,39

On constate que 0,39 = 0,28 + 0,11.

Interprète

→ La somme des intensités des courants dans les branches dérivées est égale à l'intensité du courant dans la branche principale : $I_1 + I_2 = I$ (➧).

Figure 10 a et b : Exercices traitant des mesures empiriques comme des mesures théoriques

Pour conclure sur la modélisation, nos analyses montrent que la dispersion des mesures n'est pas utilisée comme levier pour donner du sens à l'activité d'élaboration de loi / théorème, ni en mathématique ni en physique. Souvent les natures empirique/théorique des mesures sont confondues, et les activités proposées dans les manuels peuvent même être considérées comme sources potentielles de confusion à la fois sur les objets manipulés et sur la nature et les objectifs même de la démarche. Enfin, notons que malgré le fait que les activités soient de nature épistémologique différente entre mathématiques et physique, on observe des similarités dans la manière dont elles sont traitées.

CONCLUSION

Les différentes analyses réalisées, tant sur les recherches en didactique que sur les instructions officielles et les manuels solaires, montrent que la distinction entre mesure empirique et théorique et la question de la variabilité des mesures empiriques sont très peu prises en charge en mathématiques comme en physique.

Il ne s'agit pas ici de tirer des conclusions générales, dans la mesure où cette étude a un certain nombre de limites. D'une part nous n'avons considéré que certains domaines dans les deux disciplines et ciblé certaines notions particulières, d'autre part notre analyse des travaux de recherche ne prétend pas à l'exhaustivité, loin de là, d'autant plus que la question de la mesure renvoie à des domaines (disciplinaires et de recherche) nombreux et très variés.

Cependant il nous semble que nos travaux montrent à la fois que les enjeux liés à la mesure, notamment la distinction entre mesure empirique et théorique, sont peu pris en charge, et que cette prise en charge est nécessaire voire essentielle. Tout d'abord, il s'agit d'une problématique dans la classe : dès lors que les élèves sont amenés à pratiquer des activités de mesurage empirique, ils sont nécessairement confrontés à de la dispersion. Ensuite, cette distinction est un obstacle/levier potentiel pour l'enseignement et l'apprentissage dans différents domaines : géométrie, nombres, etc. Notamment, il nous semble que confronter les élèves aux incertitudes de mesure pourrait permettre de montrer plus facilement les limites de la géométrie 1 pour certains problèmes et ainsi justifier la nécessité d'un nouveau paradigme géométrique. De ce fait, même si nous ne l'avons abordé que rapidement, cette question est particulièrement cruciale à la transition école-collège. De plus, comme nous l'avons mis en évidence, la distinction entre mesure théorique et mesure empirique est un levier pour travailler avec les élèves des enjeux épistémologiques fondamentaux (nature de l'activité en physique et en mathématiques, distinction modèle-réalité), ce qui semble nécessaire notamment dans une perspective de mise en cohérence des disciplines. Enfin, nous considérons que l'absence de prise en charge est susceptible de générer des obstacles dans la suite de la scolarité, notamment quand les mesures deviennent subitement entachées d'incertitude – lorsque l'erreur est appréhendée comme variable aléatoire notamment.

La résistance à la variabilité pointée par Chevallard et Wozniak (ibid.), ainsi que la difficulté à appréhender mathématiquement l'approximation – et encore davantage celle liée à la mesure empirique – font partie des raisons pouvant expliquer la faible prise en charge de ces questions. Une autre raison qui semble essentielle est la maîtrise insuffisante par les enseignants de certaines compétences disciplinaires mais aussi épistémologiques et didactiques liées à ces questions (Passelaigue et Munier 2015, Séré et al. 1998, Houdement et Kuzniak, 2000). Ainsi, Séré et al. (ibid.) soulignent que la situation des enseignants n'est pas confortable « Comment faire cohabiter les théories bien établies qui […] donnent [à la physique] un air de vérité, et les expériences qui mettent en jeu les imperfections des appareils et des manipulations ? » et ils considèrent qu'à l'heure actuelle « les enseignants peuvent « dire » une attitude raisonnable, différenciée d'une situation à l'autre, et exprimer ce qu'il faudrait « faire », en se gardant cependant de le faire par manque de temps et aussi des concepts indispensables. ».

Par ailleurs, on peut se demander s'il existe un âge avant lequel ces considérations sont hors de portée ou déstabilisantes pour les élèves. On peut en effet considérer qu'un risque serait celui de développer chez les élèves un certain scepticisme vis-à-vis des sciences, voir un « ultra-relativisme », c'est d'ailleurs ce qu'avaient pointé Séré et al. (2001) avec des enseignants du secondaire (cf. supra). Cela souligne la nécessité, si un travail est mené sur les limites des modèles, de ne pas le penser indépendamment d'activités qui montrent aussi le pouvoir opératoire/heuristique de ces modèles. Cependant, les travaux de Munier et al. (2013) montrent qu'il est possible d'initier un travail sur les incertitudes de mesure en cycle 3, et d'aborder avec les élèves, de manière qualitative, les causes de dispersion et la notion d'intervalle de confiance.

Cela pointe la nécessité de développer des recherches pour questionner le moment propice pour travailler avec les élèves sur la précision et les incertitudes, les possibilités pour concilier la construction du sens de la mesure théorique et le caractère intrinsèque de dispersion des mesures empiriques. Il s'agirait ainsi notamment d'étayer la construction d'un curriculum cohérent sur ces questions, problématique particulièrement complexe notamment du fait que la mesure est introduite à un moment où il s'agit d'une notion « non encore formalisable » (Robert et Pouyanne, 2004).

Notre travail plaide, enfin, pour le fait d'aborder les questions liées à la mesure en croisant les regards des deux disciplines, d'autant plus au vu de la place croissante accordée à la modélisation et à l'interdisciplinarité dans les prescriptions. En effet nos résultats montrent à la fois l'intérêt et la nécessité de développer des approches inter-didactiques sur ces questions, tant pour la recherche que pour l'enseignement.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARSAC G. (1993-1994) Vérité des axiomes et des théorèmes en géométrie – Vérification et démonstration. *Petit x* 7 5-33.

ARTAUD M. (1997) Introduction à l'approche écologique du didactique - l'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In *Actes de la 9ème école d'été de didactique des mathématiques* 100-139.

ASSOCIATION DES PROFESSEURS DE MATHEMATIQUES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC (APMEP) (1982) Mots. Brochure 46. Réflexions sur quelques mots-clés à l'usage des instituteurs et des professeurs.

BESSOT A., EBERHARD M. (1983) Une Approche Didactique des Problèmes de la Mesure. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(3) 293-324.

BIREBENT A. (2001) *Articulation entre la calculatrice et l'approximation décimale dans les calculs numériques de l'enseignement secondaire français,* Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

BRONNER A. (1997) *La question du numérique : le numérique en question*. Habilitation à diriger des recherches, Université Montpellier 2.

BROUSSEAU G. (2002) Les grandeurs dans la scolarité obligatoire. In Dorier J-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (coordonné par), *Actes de la XI[e] Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Corps (Isère) du 21 au 30 août 2001*, La pensée sauvage éditions.

BROUSSEAU G., BROUSSEAU N. (1991) Le poids d'un récipient, étude des problèmes de mesurage en CM Grand N 50 65-87.

CAPPONI B. (1988) Mesure et démonstration. Un exemple d'activité en classe de quatrième. *Petit x* 17 29-48.

CHAMBRIS C. (2008) *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels. Thèse. Paris : Université Paris-Diderot (Paris 7)*

CHEVALLARD Y., BOSCH M. (2001) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée *Petit x* 55 5-32.

CHEVALLARD Y., BOSCH M. (2002) Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x,* 59, 43-76.

CHEVALLARD Y., CHAMBRIS C. (2015) *Grandeurs et nombres : quelques remarques pour un programme*. Sur le site de la CFEM (consultation le 21/04/2016) http://www.cfem.asso.fr/actualites/GrandeursetnombresYCCC.pdf.

CHEVALLARD Y., WOZNIAK F. (2003) Enseigner la statistique au secondaire. Entre genre prochain et différence spécifique. Cours donné à la XIIe école d'été de didactique des mathématiques (Corps, 20-29 août 2003). In Mercier, A. & Margolinas, C. (Eds), Balises pour la didactique des mathématiques, La Pensée sauvage, Grenoble, 195-218.

COPPE S., DORIER J-L., MOREAU V. (2005) Différents types de dessins dans les activités d'argumentation en classe de cinquième, *Petit x* 68 5-37.

DHOMBRES J. (1978) *Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire*. Publication de l'IREM de Nantes. Paris : CEDIC / Fernand Nathan. 338 p.

DOUADY R., PERRIN-GLORIAN M.J. (1983) Mesure des longueurs et des aires. Brochure, n°48, IREM, Université Paris 7,

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/publications/IPS97022.pdf.

HOUDEMENT C. (2007) A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège, *Repères IREM* 67 69-84.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2002) Approximations géométriques. *L'Ouvert* 105 19-28. IREM de Strasbourg.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2003) Quand deux droites sont « à peu près parallèles » ou le versant géométrique du « presque égal » *Petit x* 61 61-74.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2000) Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 20(1) 89-116.

HOUDEMENT C. et KUZNIAK A. (2001) Entre géométrie et mesure : le jeu de l'approximation. In *Actes de la XIème école d'été de didactique des mathématiques*. La Pensée Sauvage : Grenoble.

JACQUIER I. (1995) Quelles conceptions des nombres chez des élèves de troisième ? *Petit x* 41 27-50.

KUZNIAK A. (2010) Un essai sur la nature du travail géométrique en fin de scolarité obligatoire en France, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 15 75-91.

LABORDE C., CAPPONI B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 14/1-2 165-209.

LEBESGUE H. (1975) *La mesure des grandeurs*. Albert Blanchard. 184 p.

LUBBEN F., MILLAR R. (1996) Children's ideas about the reliability of experimental data. *International Journal of Science Education* 18(8) 955-968.

MAISCH C., NEY M. et BALACHEFF N. (2008) Quelle est l'influence du contexte sur les raisonnements d'étudiants sur la mesure en physique ? *Aster* 47 43-70.

MARUANI A. (1996) Aspects de la mesure; repères, problématiques et enjeux. *Bulletin de l'Union des Physiciens 787* 1433-1443.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (France) (2002) *Documents d'application des programmes de 2002, grandeurs et mesures à l'école élémentaire*. Paris : direction de l'enseignement scolaire.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE (France) (2006) *Socle commun de connaissances et de compétences et modifiant le code de l'éducation*. Décret du 11 juillet 2006.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE, DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE (France) (2007) Ressources pour les classes de 6è, 5è, 4è et 3è – Géométrie au collège.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (France) (2008a) *Programmes d'enseignement de l'école primaire.* Bulletin officiel hors série n°3 du 19 juin 2008.

MINISTERE DE L'EDUCATION NATIONALE (France) (2008b) *Programmes du collège*. Bulletin officiel spécial n°6 du 28 août 2008.

MUNIER V., CHESNAIS A., MOLVINGER K. (2014) Mesure et incertitudes en mathématiques et en physique à la transition école-collège : éléments d'épistémologie et difficultés des élèves, *Actes des 8èmes rencontres de l'ARDIST*, Marseille, 12-14 mars 2014, *Skholê* 18-1 451-458.

MUNIER V., MERLE H., BREHELIN D. (2013) Teaching Scientific Measurement and Uncertainty in Elementary School. International Journal of Science Education 35 2752-2783.

MUNIER V., CHESNAIS A., MOLVINGER K. La mesure en mathématiques et en physique : enjeux épistémologiques et didactiques, soumis pour l'ouvrage *Epistémologie et didactique* faisant suite aux 3èmes journées épistémologie de l'Université Montpellier 2.

NOTA M. (2002) Comment le physicien mesure-t-il ses propos? Un point de vue épistémologique sur "grandeur et mesure". In Dorier J-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (coordonné par), Actes de la XIe Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, Corps (Isère) du 21 au 30 août 2001, La pensée sauvage éditions.

PASSELAIGUE D., MUNIER V. (2015) Schoolteacher Trainees' Difficulties about the Concepts of Attribute and Measurement, à paraître dans *Educational Studies in Mathematics*.

PARZYSZ B. (1988) Voir et savoir - la représentation du "perçu" et du "su" dans les dessins de la géométrie de l'espace. *Bulletin de l'APMEP* 364 339-350.

PERDIJON J. (2012) *La mesure, histoire, sciences et technique*. Paris : Vuibert.

PERRIN D. (2011) Mathématiques d'école. *Nombres, mesures et géométrie*. Cassini 402p.

PERRIN-GLORIAN M.-J. (1989-1990) L'aire et la mesure *Petit x* 24 5-36.

PETROSINO, A J., LEHRER, R. ET SCHAUBLE, L. (2003). Structuring Error and Experimental Variation as Distribution in the Fourth Grade. *Mathematical Thinking and Learning 5(2&3)* 131-156

REYNES F. (1999-2000) la notion de mesure exacte. De l'impossibilité physique a la nécessité mathématique, les conditions d'une rupture inévitable, *Petit x* 53 69-79.

ROBERT A. (2003) Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la quatrième : L'organisation des connaissances en niveaux de conceptualisation *Petit x* 63 7-29.

ROBERT A., POUYANNE N. (2004) Formateurs d'enseig nants de mathématiques du second degré, Document pour la formation. Brochure IREM de Paris 7 5.

ROGALSKI J. (1979) Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantifications. Les cardinaux finis, les longueurs, surfaces et volumes *Bulletin de l'APMEP* 320 563-586.

ROUCHE N. (2006) *Nombres, grandeurs, proportions*. Paris : Ellipses.

SALIN M-H. (2003) Du CM2 à la sixième, quelques pistes pour une transition plus efficace (2ème partie) *APMEP - Plot* 14 2-9.

SERE M.G., JOURNEAUX R., WINTHER J. (1998) Enquête sur la pratique des enseignants de lycée dans le domaine des incertitudes. *Bulletin de l'Union des Physiciens 801* 247-254.

SERE M.-G., WINTHER J., LE MARECHAL J.F., TIBERGHIEN A. (2001) Le projet européen "Labwork in Science Education" [Les Travaux pratiques dans l'enseignement des sciences en Europe] Bilan et perspectives. *Bulletin de l'Union des Physiciens 839* 1727-1740.

SERE, M.-G. (2008). La mesure dans l'enseignement des sciences physiques. Evolution au cours du temps. *Aster 47* 25-42.

TANGUAY D., GEERAERTS L., SABOYA M., VENANT F., GUERRERO L., MORALES C. (2014) An activity entailing exactness and approximation of angle measurement in a DGS, *Proceedings CERME 8.*

TANGUAY D., GEERAERTS L. (2012) D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant *Petit x* 88 5-24.

VERGNAUD G. (1983) (coordonné par) Didactique et Acquisition du Concept de Volume. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4 (1) 9-121.

VOLKWYN T., ALLIE S., BUFFLER A., LUBBEN A., CAMPBELL B. (2004) First year physics students' understanding of the measurement in the context of laboratory practicals. In Buffler A. & Laugksch R.C. (éd.). Proceeding of the 12th Annual Conference of the South African Association for Research in Mathematics, *Science and Technology Education* 1011-1017.

WALLISER B. (1977) *Systèmes et modèles*. Paris : Éd. du Seuil.

YVAIN S. (2015) Vers une possible dévolution de la mathématisation aux élèves dans un processus de modélisation. Communication à la XVIIIème école d'été de didactique des mathématiques (Brest, 19-26 août 2015).