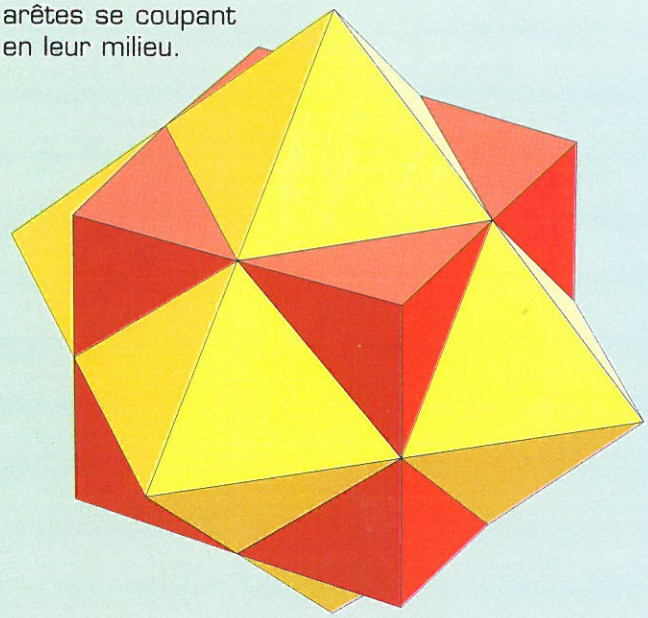
Cube et octaèdre imbriqués

Le solide d'aujourd'hui est celui qui orne le marque-page de la librairie de Tangente. Un peu compliqué, mais très décoratif, il est en fait constitué d'un assemblage de deux polyèdres : un cube et un octaèdre.

Rappelons un truc déjà indiqué dans le spécial découpage d'Hypercube : dessinez un cube, marquez les centres des faces, reliez-les entre eux, effacez le cube : vous obtenez un octaèdre.
Inversement, si vous marquez les centres (de gravité) des faces d'un octaèdre, puis que vous les reliez entre eux, vous verrez apparaître un cube inscrit dans l'octaèdre. On dit que le cube et l'octaèdre sont duals l'un de l'autre.

Chacune des deux expériences précédentes vous donne un solide inscrit dans l'autre. Doublez les dimensions du plus petit, vous obtiendrez les deux solides imbriqués qui constituent notre polyèdre, avec leurs arêtes se coupant en leur milieu.



Un patron facile !

Le patron est facile à établir en observant la nature des faces : les « coins » saillants du cube sont constitués de triangles rectangles isocèles, ceux de l'octaèdre sont constitués de triangles équilatéraux. Les arêtes entre deux faces de même type sont des plis « montagne », entre deux faces de type différent, elles devront être pliées « en vallée ».

En ce qui concerne les dimensions, appelant a le côté de l'angle droit dans les triangles rectangles isocèles, les triangles équilatéraux ont pour côté $a\sqrt{2}$, comme l'hypoténuse, le cube a pour arête $2a$, et l'octaèdre a pour diagonale $4a$.

Tout ceci est à votre portée si vous connaissez le théorème de Pythagore et les propriétés du carré.

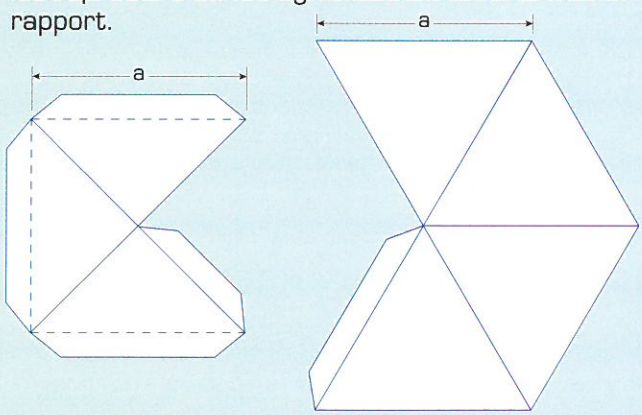
Sinon, vous pourrez toujours chercher à vérifier qu'il y a 14 sommets saillants et 12 autres aux intersections des arêtes, 24 arêtes «en vallée», 24 arêtes sur les 8 « coins » du cube, et 24 autres sur les 6 « pointes » de l'octaèdre. Enfin, 24 faces proviennent des coins du cube tandis que 24 proviennent des pointes de l'octaèdre.

Testons la formule d'Euler :
$S + F - A = 2$, ce polyèdre vérifie aussi la relation, bien qu'il ne soit pas convexe.
Sur le patron, deux des pointes d'octaèdres ont été partagées en deux morceaux. Les plis des languettes jaune pâle sont des plis vallée, ceux des autres languettes des plis montagne.

Rappelons les conseils d'usage : bien marquer les plis en éraflant les plis montagne au cutter et en creusant les plis vallée à l'aide d'un stylo-bille qui n'écrit plus. Evidemment, avec 48 faces, c'est un peu fastidieux : impatients s'abstenir... Mais si le travail est soigné, le résultat présente vraiment bien !

Faites-le à plusieurs !

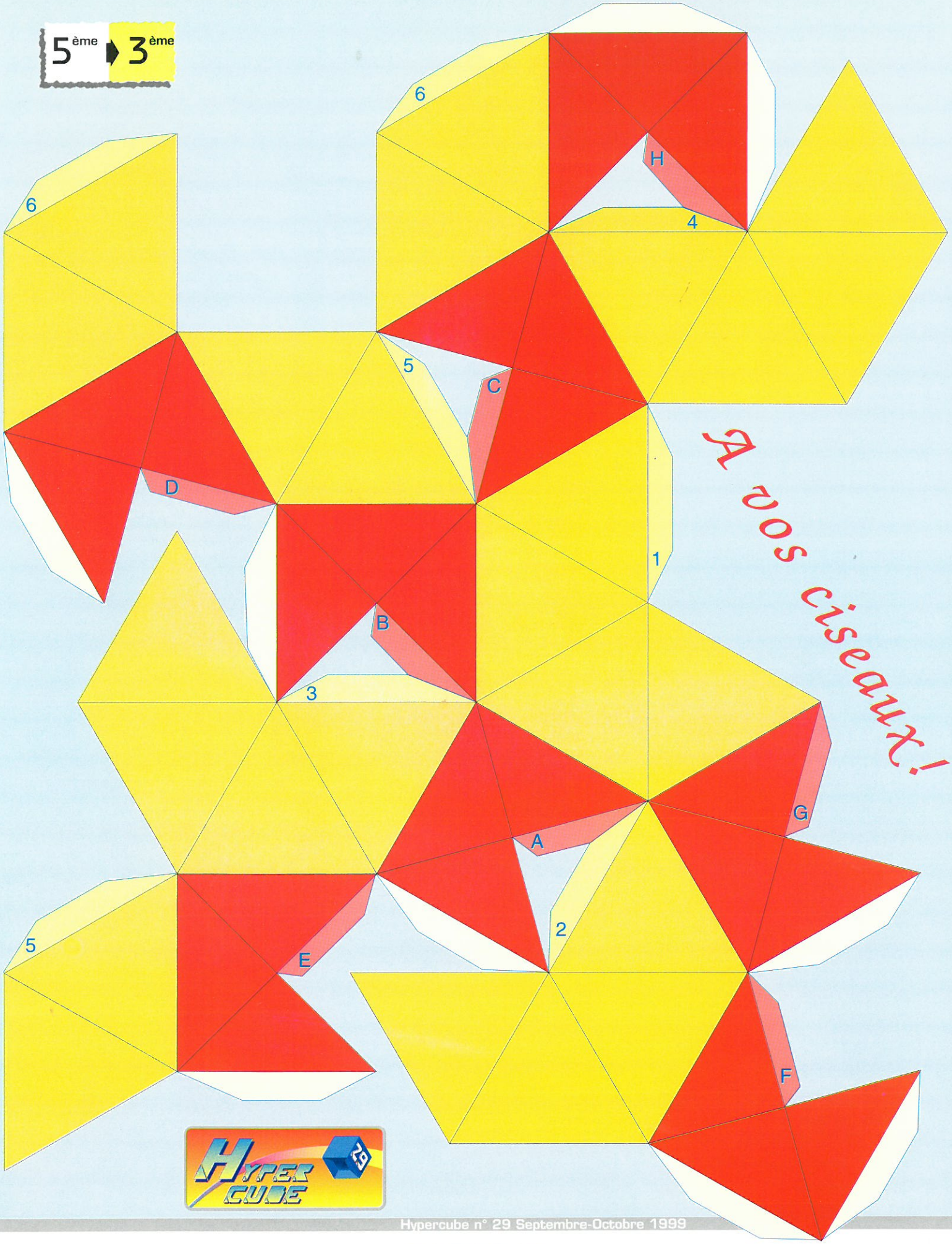
Le travail sera plus rapide si vous le partagez : avec un groupe de 14 découpeurs, chacun n'aura plus qu'à réaliser une des pointes. Voici les patrons réduits de chaque modèle : vous pouvez les reproduire en les agrandissant dans le même rapport.



Vous pourrez voir grand : si chacun dispose au mieux son travail dans une feuille de bristol A4, le polyèdre mesurera près de 40 cm de haut... Idéal pour une expo ou pour décorer la salle d'un club de maths !

Francis Dupuis

5ème ➧ 3ème



A vos ciseaux !