

RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES, GÉOMÉTRIE DE SITUATION... DE NOUVEAUX OUTILS POUR ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES À LA FIN DU XIX^E SIÈCLE

Jérôme AUVINET

Laboratoire de mathématiques Jean Leray, Université de Nantes, France
auvinet_jerome@yahoo.fr

ABSTRACT

At the end of the XIXth century, some mathematicians like Charles-Ange Laisant (1841-1920) or Édouard Lucas (1842-1891) develop new ideas about teaching mathematics using innovative tools or original visualizations. These ideas are linked to their interest for recreational games viewed through a mathematical background and other specific problems from combinatory, number theory, algorithms and the “géométrie de situation”. We propose to give some examples of these mathematical representations and these ingenious games, explicitly presented by their authors in a didactical scheme. Moreover, many of these approaches could be presented nowadays to students of secondary schools. We discuss the role of visualizations through these experimentations and we point out the connections between diagrams and symbolisms. We study the need of arousing curiosity through striking results. We also underline the goals of representing processes in certain moments of mathematical learning and the benefits of these presentations, much more than simple recreational questions.

Les différentes situations que nous présentons ici sont abordées par plusieurs mathématiciens français de la fin du XIX^e siècle qui décèlent dans leurs propres études en théorie des nombres, arithmétique ou combinatoire des opportunités pour de nouveaux outils dédiés à l’enseignement des mathématiques. Cet enseignement scientifique est alors en plein renouveau sous la Troisième République jusqu’à la réforme de 1902¹. Charles-Ange Laisant (1841-1920), Édouard Lucas (1842-1891) mais aussi Émile Fourrey (1869- ?) puis André Sainte-Laguë (1882-1950) sont autant de figures croisées au détour d’ouvrages portant sur ces récréations ou « curiosités » mathématiques. Si nos exemples sont fréquemment tirés de l’ouvrage de Laisant, *l’Initiation mathématique* (1906), il convient de souligner la proximité des approches de ces auteurs, en particulier à la suite de Lucas. Cette volonté de fournir une nouvelle base originale pour enseigner les mathématiques raisonne encore à notre époque : c’est pourquoi nous choisissons uniquement des exemples, aussi variés que possible, ayant été utilisés en classe ou qui pourraient l’être, notamment parce qu’ils apparaissent dans certains manuels actuels à destination des élèves de l’enseignement secondaire². Nous les présentons dans la diversité de leurs utilisations pédagogiques : dans un premier temps, des situations introductives interpellant et mettant en activité l’élève. Suivent les possibilités d’accompagner visuellement la mise en place progressive d’une notion, ou d’illustrer de manière globale un procédé mathématique. Enfin, les différents changements de registres entre numérique et visuel permettent de faire vivre les connaissances et les techniques dans un cours.

¹ Voir par exemple (Belhoste, 1990).

² Nous renvoyons entre autre aux *Bulletins officiels spéciaux*, n° 9 (30/09/2010), n° 8 (13/11/2011).

1 Des récréations pour susciter la curiosité

Quand il publie son *Initiation mathématique* en 1906, le mathématicien C.-A. Laisant concrétise la nouvelle orientation donnée à son œuvre (Auvinet, 2013). Après avoir été le promoteur des équipollences et des quaternions, mais également député et homme fort de la presse mathématique, ce pédagogue souhaite, grâce à ce « guide » destiné aux éducateurs, libérer les jeunes enfants d'un enseignement rigide et dogmatique, peu formateur scientifiquement et peu utile socialement (Auvinet, 2015). Soucieux de s'appuyer sur la curiosité naturelle des enfants, il y reprend entre autres plusieurs récréations mathématiques étudiées par son ami Lucas, auteur d'une *Théorie des nombres* (Lucas, 1891) et chef de file de cette communauté de mathématiciens d'horizons divers traitant de manière originale de théorie des nombres, discipline peu représentée institutionnellement en France à l'époque.

« L'éventail mystérieux »³, une des récréations présentée, se compose de cinq bandes de papier sur lesquelles sont inscrits apparemment de manière chaotique des entiers entre 1 et 31. Si une personne choisit secrètement un de ces entiers, puis signale les bandes (A, B, C ...) sur lesquelles il est inscrit, le détenteur de l'éventail est capable de retrouver immédiatement la valeur de l'entier en question. Laisant expose le principe de cet amusement en expliquant que les entiers sont considérés dans leur écriture binaire (fig. 1). Le premier carton rassemble alors les nombres se terminant par 1, le deuxième ceux dont le deuxième chiffre à partir de la droite est 1 etc. 25 = 11001 est donc inscrit sur les cartons A, D et E. Une fois ces cartons désignés, il suffit d'ajouter les nombres inscrits en tête de liste pour retrouver la valeur de départ. Ainsi, $1 + 8 + 16 = 25$ car l'opération dans une écriture binaire s'écrit $1 + 1000 + 10000 = 11001$.

| | A | B | C | D | E |
|----|----|----|----|----|---|
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | | 2 | | | |
| 3 | 3 | 3 | | | |
| 4 | | | 4 | | |
| 5 | 5 | 6 | | | |
| 6 | | | | 6 | |
| 7 | 7 | 7 | | | |
| 8 | | | | 8 | |
| 9 | 9 | 10 | | | |
| 10 | | | 10 | 10 | |
| 11 | 11 | 11 | | | |
| 12 | | | | 12 | |
| 13 | 13 | 14 | | | |
| 14 | | | 14 | 14 | |
| 15 | 15 | 15 | | | |
| 16 | | | | 16 | |
| 17 | 17 | 18 | | | |
| 18 | | | 18 | 24 | |
| 19 | 19 | 19 | | | |
| 20 | | | | 24 | |
| 21 | 21 | 22 | | | |
| 22 | | | 20 | 25 | |
| 23 | 23 | 23 | | | |
| 24 | | | | 25 | |
| 25 | 25 | 26 | | | |
| 26 | | | 21 | 26 | |
| 27 | 27 | 27 | | | |
| 28 | | | | 26 | |
| 29 | 29 | 29 | | | |
| 30 | | | | 27 | |
| 31 | 31 | 31 | | | |
| 32 | | | | 27 | |
| 33 | | | | 28 | |
| 34 | | | | 28 | |
| 35 | | | | 29 | |
| 36 | | | | 29 | |
| 37 | | | | 30 | |
| 38 | | | | 30 | |
| 39 | | | | 31 | |
| 40 | | | | 31 | |
| 41 | | | | 31 | |

Figure 1. Construction de l'éventail mystérieux.

³ (Lucas, vol. 1, 1891, p. 154) et (Laisant, 1916, p. 106). L'intérêt de Lucas pour les questions d'enseignement apparaît à maintes reprises, comme dans (Lucas, 1889 & 1895).

Si l'éventail mystérieux est utilisé par Laisant afin de consolider le calcul mental, il peut constituer une première approche de la numération binaire suscitant la curiosité des élèves voulant percer les mécanismes de ce procédé "magique". Le dispositif permet parallèlement une première pratique d'opérations simples dans ce système.

Le ressort didactique de ce procédé est bien de susciter la curiosité, voire l'étonnement et donc in fine l'intérêt. C'est aussi la démarche de Laisant lorsqu'il propose, dans la leçon 40 : « Un assez grand nombre » de son *Initiation*, de faire chercher le plus grand nombre que l'on puisse écrire avec trois chiffres 9 : soit le nombre

$$9^{99}$$

(et non 999, réponse immédiate des élèves). La surprise suscitée par le nombre conséquent de chiffres de son écriture décimale (neuvième terme de la suite de Joyce, calculé ici pour la première fois) reste une constante pour les élèves, à l'époque de l'*Initiation* comme à la nôtre. C'est pourquoi Laisant commente abondamment le temps d'écriture de ce nombre, la longueur de papier nécessaire etc.

D'autres « problèmes curieux ou amusants » sont également proposés par Émile Fourrey dans ses *Récréations Arithmétiques* (Fourrey, 1899). Comme l'explique son auteur, l'ouvrage profite d'un regain d'intérêt pour les récréations mathématiques. Cet engouement est dû à de nouvelles pratiques pédagogiques souhaitant introduire les notions mathématiques à partir d'« amusements » simples et attractifs. Fourrey constate d'ailleurs :

il existe actuellement dans l'enseignement une tendance à ne pas faire aborder aux enfants l'étude des sciences par l'exposé de la théorie pure dont l'aridité peut les rebuter. À l'aide des quelques principes strictement nécessaires, on commence cette étude par d'amusantes applications qui intéressent les jeunes esprits et leur donnent le désir d'en connaître davantage. (Fourrey, 1899, p. VII)

Il signale aussi l'essor des jeux de réflexion dans la presse populaire de l'époque. Puis il reprend pour un large public un grand nombre de récréations arithmétiques, discipline souvent sollicitée dans ces jeux d'esprit (tout en développant particulièrement la question des carrés magiques). Par exemple, le problème « Écrire 31 avec seulement 5 chiffres 3 » soit :

$$31 = 3^3 + 3 + \frac{3}{3}$$

est un exercice simple de calcul mental mobilisant des stratégies diverses par les élèves.

Le problème du « Jeu du piquet à cheval » est un autre exemple de ces activités ludiques : deux joueurs somment successivement des entiers choisis entre 1 et 11 avant que le premier atteignant 100 ne remporte la partie (Fourrey, 1899, p. 48). Cette version simplifiée du jeu de Nim peut être étudiée à l'aide d'une progression arithmétique. La conception d'une stratégie gagnante à l'aide d'une suite est une illustration pertinente de l'attrait de l'outil mathématique, une mathématique des jeux que soupçonnent peu les élèves du secondaire.⁴

⁴ (Rougetet, 2012 & 2014).

2 Suivre des yeux un trajet pour saisir une notion

Dans son article « Remarques arithmétiques sur les nombres composés » (Laisant, 1888), Laisant ne se contente pas de déterminer le nombre de décompositions d'un entier N en k facteurs. Il suggère un mode de figuration « fort simple » des entiers en précisant : « Il y aurait peut-être lieu d'en tirer parti pour l'enseignement des premiers principes élémentaires relatifs à la décomposition des nombres en facteurs premiers » (Laisant, 1888, p. 152).

À partir d'une ligne droite verticale (fig. 2)⁵, il numérote des bandes horizontales par les nombres premiers 2, 3, 5, 7... et dessine sur chaque bande un nombre de cases égal à l'exposant où apparaît le facteur premier correspondant dans la décomposition de l'entier considéré. Ce nombre est ainsi représenté par la figure obtenue ou, au choix, par le contour extérieur de celle-ci. Ainsi, « Ce mode de représentation met en relief d'une façon saisissante la formation des diviseurs. » (Laisant, 1888, p. 153) Le nombre de diviseurs est en effet égal au nombre de chemins tracés sur le quadrillage intérieur de la figure pour aller de sa base inférieure à sa base supérieure. Quand il doit rechercher de façon exhaustive le nombre de diviseurs d'un entier, l'élève peut alors substituer à l'élaboration parfois laborieuse⁶ d'un arbre tentaculaire de choix, la recherche des différents tracés intérieurs possibles.

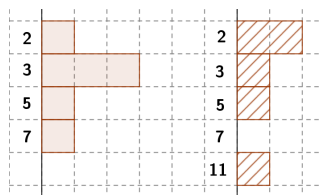


Figure 2. Représentations des entiers $N = 1890 = 2.3^3.5.7$ et $N' = 660 = 2^2.3.5.11$.

Ainsi, « Un assez grand nombre de propriétés connues peuvent avec cette figuration prendre un caractère intuitif » (Laisant, 1888, p. 154), intuitif car ici perceptible et sensible. Un nombre est multiple d'un autre lorsque le contour qui lui est associé contient le contour du second. En superposant la représentation de deux entiers sous cette forme, leur PGCD apparaît par la partie commune de leurs figurations et leur PPCM sera représenté par le contour extérieur de cette nouvelle figure (fig. 3). Deux nombres sont premiers entre eux si leurs contours respectifs n'ont aucun segment en commun.

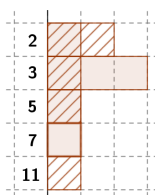


Figure 3. N et N' , leur PGCD ($D = 2.3.5 = 30$) et leur PPCM ($p = 2^2.3^3.5.7.11 = 41580$).

En utilisant différentes couleurs pour la représentation de n entiers, on obtient la possibilité de déterminer à vue le PGCD ou le PPCM de deux d'entre eux et de vérifier s'ils

⁵ Comme dans plusieurs exemples qui vont suivre, la figure peut-être tracée sur un papier quadrillé dont Laisant souligne les avantages pratiques pour de telles constructions. Voir aussi (Sainte-Laguë, 1910).

⁶ C'est cette présentation qui apparaît habituellement dans un manuel scolaire : Le Yaouancq (dir.) (2012). *Collection math'x, Terminale S spécialité*, Les éditions Didier, p. 54.

sont premiers deux à deux. Cette visualisation a également l'intérêt de mettre en lumière le fait que le PGCD soit la plus grande partie commune aux représentations de ces entiers. De même que la recherche du PPCM consiste à déterminer le plus petit contour des figurations des multiples communs à ces deux entiers. Pour les élèves qui peuvent confondre les deux notions, c'est une aide précieuse que de leur montrer cette différence essentielle, de leur proposer une image éclairant ces acronymes. Une schématisation unique est ici exploitée comme support de distinction de deux notions liées.

Suivre un trajet sur une figuration est un procédé qu'on retrouve plusieurs fois dans les travaux de Laisant, comme chez d'autres mathématiciens travaillant à l'époque sur la théorie des nombres.⁷ Sa communication « Sur la figuration graphique de quelques nombres combinatoires » (Laisant, 1894, fig. 4) a lieu au cours du congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences (AFAS) de 1893, association créée en 1872 qui organise des réunions annuelles partout sur le territoire français afin de promouvoir la Science auprès d'un large public d'amateurs. Il y propose une figuration du nombre $n!$ en dénombrant les itinéraires reliant un point a_0 à un point a_n où, sur une même droite, le point a_i est relié au point a_{i+1} par $i + 1$ segments. De manière semblable, si on se place sur un quadrillage (fig. 4), le nombre $u_{n,p}$ d'itinéraires permettant de rejoindre, à partir de l'origine et en marchant dans le sens positif dans chacune des deux directions, le point de coordonnées entières (n, p) s'exprime à partir des coefficients binomiaux qu'on retrouve dans le carré de Fermat largement étudié et généralisé par Laisant. Cette représentation permet de compléter l'approche habituelle à partir d'un arbre de choix ; elle est d'ailleurs présente dans certains manuels actuels.⁸ Comme Laisant le précise, elle relève d'une configuration classique en géométrie de situation : celle de l'étude de la marche d'une tour sur un échiquier. La figure de l'échiquier est ainsi volontairement insérée dans plusieurs manuels d'enseignement dont Laisant participe à la rédaction dans les années 1890.⁹

La combinaison des deux précédentes figures (fig. 4) permet également une généralisation à l'illustration des arrangements, nombres qu'il est alors naturel de considérer en suivant l'exposé de Laisant. La visualisation proposée soutient ici une progression graduée et naturelle dans l'introduction des notions.

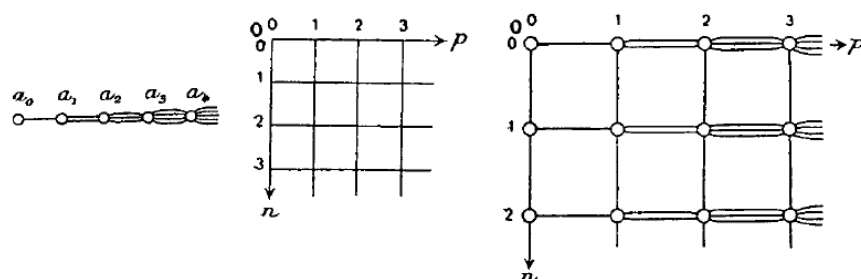


Figure 4. Figuration des nombres $n!$, C_n^p , A_n^p .

⁷ Voir par exemple (Tarry, 1886).

⁸ Le Yaouancq (dir.) (2015). *Collection math'x, Première S*. Les éditions Didier, p. 241. Une telle représentation est susceptible de mettre en lumière la relation $u_{n,p} = u_{n-1,p} + u_{n,p-1}$.

⁹ Voir par exemple l'appendice de (Laisant & Perrin, 1892) ou (Laisant, 1916, p. 99).

3 Embrasser d'un seul regard un processus mathématique

Un exercice classique du chapitre « raisonnement par récurrence » du programme de terminale scientifique consiste à déterminer la somme des nombres entiers impairs consécutifs, soit :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (2k - 1) = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2.$$

Cet exercice peut être complété par un dessin constituant une « preuve sans mot ». ¹⁰ On retrouve une telle preuve dans l'*Initiation mathématique* de Laisant à la leçon 28 sur les nombres carrés (Laisant, 1916, p. 28). Cette visualisation (fig. 5) est directement inspirée du « carré de choux » étudié par Lucas dans une communication de 1884 à l'AFAS (« Le calcul et les machines à calculer », Lucas, 1884).

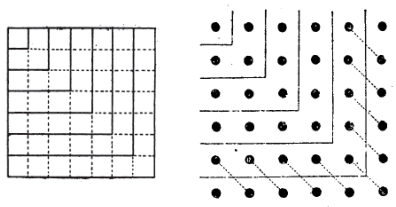


Figure 5. La représentation de la somme des impairs par Laisant, le carré de choux de Lucas.

L'exercice précédent présente en effet certaines difficultés pour les élèves. La toute première est le symbolisme du "sigma" mal maîtrisé en Terminale et qui peut freiner les élèves les plus fragiles, même si la formule "éclatée" permet de dépasser cet obstacle. Ici, le formalisme, même allégé, devient une barrière à la démonstration et à la compréhension d'une propriété qui, reformulée schématiquement, devient plus intelligible. L'intérêt de la preuve sans mot est de dépasser tout symbolisme puisque la figure est dénuée de toute écriture. L'étape d'hérédité dans la récurrence peut également être un obstacle technique gênant : l'acte technique peut alors s'appuyer sur la visualisation du « carré de choux ». La figure contient en effet en elle-même le principe de l'hérédité puisque pour passer d'un carré (de côté n) au carré plus grand (de côté $n + 1$), on ajoute le $n + 1$ ^{ième} nombre impair.

D'un point de vue didactique, la preuve sans mot complète la démonstration rédigée pour en faire comprendre les ressorts : elle en est la parfaite traduction visuelle et une aide précieuse pour l'enseignant. Elle a de plus l'avantage de s'inscrire dans la mémoire des élèves qui assurent se souvenir plus volontiers d'un dessin coloré que d'une austère preuve par récurrence. La propriété est ainsi justifiée, comprise et retenue grâce à un support visuel attrayant que l'apprenant peut s'appropriier immédiatement. Ce support suscite l'étonnement des élèves, peu habitués à cette démarche et doutant souvent du statut de preuve d'un tel

¹⁰ Le Yaouancq (dir.) (2012). *Collection math'x, Terminale S*. Les éditions Didier, p. 31. Pour d'autres preuves sans mot, on peut consulter (Delahaye, 1998) et (Alsina & Nelsen, 2010).

dessin non formel. Si la visualisation ne semble pas prouver pleinement, elle les convainc pourtant aisément.

Une telle représentation peut de plus être généralisée à l'espace afin de déterminer la somme des cubes des entiers, un autre avantage perçu par les élèves. C'est aussi ce que propose Lucas dans une de ses récréations mathématiques (fig. 6) :¹¹

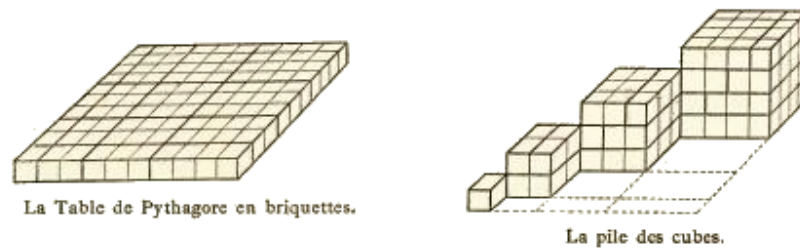


Figure 6. « la pile des cubes est le carré de la pile des nombres. » (Lucas, 1894, p. 65)

Déjà, en 1906, Laisant a conscience du potentiel didactique de telles figurations. La leçon « Le vol des grues » (fig. 7) est aussi inspirée de la même communication de Lucas à l'AFAS. Laisant y étudie les nombres triangulaires et détermine à partir d'un quadrillage la somme des n premiers entiers, formule incontournable pour les élèves de Première.¹²

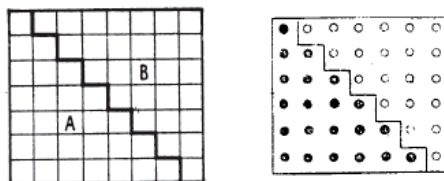


Figure 7. Le vol des grues de Laisant et de Lucas.

Il ajoute en particulier :

Voilà des formules qui paraissent bien savantes et qui cependant n'exigent pas même le moindre calcul, puisqu'on les lit sur les figures, puisqu'on les voit, puisqu'on peut les construire de ses mains avec des petits carrés de bois. (Laisant, 1916, p. 88)

Dans un article consacré à l'étude des tables de multiplication et de division modulo un entier m qu'il mène avec le mathématicien amateur Gabriel Arnoux (1831-1913), il précise le statut qu'il confère à la preuve par la figuration :

Dans beaucoup de questions, et particulièrement en mathématiques, la méthode graphique présente de grands avantages au point de vue de la clarté. Elle met en évidence la vérité qui n'apparaît que confusément sous les symboles, et quand on peut se contenter de dire : « Voyez », la démonstration approche de la perfection. On

¹¹ Exemple repris dans un manuel actuel de Terminale: Le Yaouancq (dir.) (2012). *Collection math'x, Terminale S*. Les éditions Didier, p. 28.

¹² Laisant en déduit également diverses formules sur les nombres triangulaires, comme par exemple :

$$2T_n - n = n^2 = T_n + T_{n-1}.$$

pourrait presque dire que l'art d'exposer est celui de faire des schémas. (Laisant, Arnoux, 1906, p. 36)

Laisant a conscience des applications variées de la visualisation de procédés mathématiques. En 1887 (Laisant, 1887), il répond à une question de Lucas posée dix ans plus tôt. Nous la formulons comme ceci (fig. 8) : dans un réseau (noté p_r) de points de coordonnées $(n ; a + n \times r \pmod{p})$ avec r et p premiers entre eux, à quelles conditions les parallélogrammes ainsi formés sont-ils des rectangles, des losanges ou des carrés ?

| | | | | | | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| Rang | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| Terme | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 | 33 | 36 |
| Résidu | 0 | 3 | 6 | 9 | 12 | 2 | 5 | 8 | 11 | 1 | 4 | 7 | 10 |

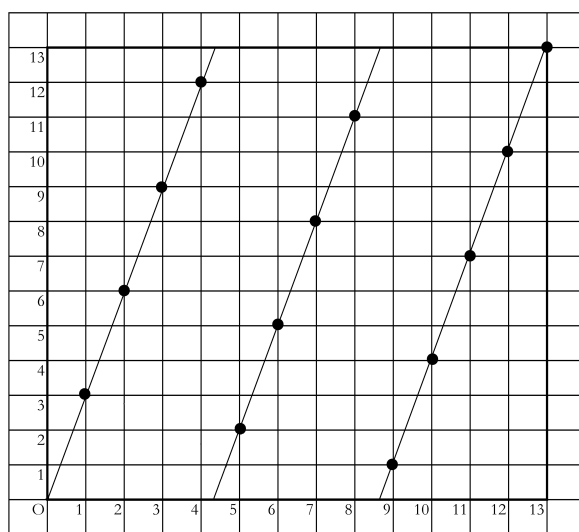


Figure 8. Figuration des résidus d'une progression arithmétique, réseau 13_3 .

Ce questionnement fait suite aux recherches de Lucas sur la géométrie des tissus, notamment en lien avec une problématique industrielle.¹³ Cette étude s'insère dans plusieurs travaux sur cette « géométrie des quinconces » impliquant Laisant, Lucas ou le mathématicien Ernest Laquière (1840- ?) pour qui elle représente « la peinture graphique de la théorie des nombres ».¹⁴

À l'aide de la méthode des équipollences, Laisant détermine les relations entre p , r , q et ρ (où $p = qr + \rho$) correspondant à chaque cas. Il souligne que « Les réseaux dont nous avons indiqué la construction peuvent être d'un grand secours dans bien des questions d'arithmétique. » (Laisant, 1888, p. 227) Outre la détermination graphique des résidus des termes $a + n \times r \pmod{p}$, un tel réseau permet de déterminer visuellement une solution particulière des équations diophantiennes de la forme $rx - pz = a$. L'équation $7x - 40z = 3$ trouve « à vue » une solution grâce au réseau 40_7 (fig. 9) : en ayant repéré le point d'ordonnée

¹³ Lucas, É. (1867). *Application de l'arithmétique à la construction de l'armure des satins réguliers*. Paris, Reteaux.

¹⁴ Laquière, E. (1879). Note sur la géométrie des quinconces. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 7, 85-92, p. 85.

$y = 3$ du réseau, on lit son abscisse $x = 29$; la valeur de z est ensuite déterminée, toujours d'un regard, en numérotant les droites parallèles à la droite d'équation $y = 7x$ qui peuvent être tracées jusqu'au point considéré.

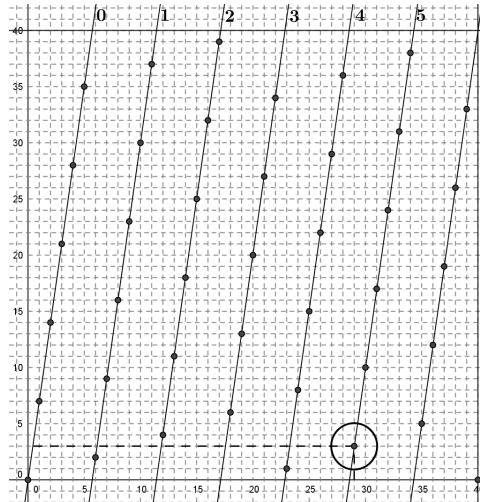


Figure 9. Réseau 40_7 utile à la résolution de l'équation $7x - 40z = 3$.

Laisant montre en s'appuyant sur ces réseaux que l'on peut résoudre les équations de la forme $rx + pz = a$ et donne de nombreuses autres applications (comme une « figuration des fractions périodiques »). Il résume : « Ce qu'il faut retenir surtout de cet emploi des échiquiers et des réseaux, c'est la figuration dans un espace limité de faits arithmétiques qui se reproduisent périodiquement dans l'étendue infinie du plan. » (Laisant, 1888, p. 228) C'est en effet un avantage d'une telle visualisation que de proposer un cadre graphique à la notion de congruence, parfois délicate pour les élèves. Elle induit un raisonnement particulier et la conscience précise de la périodicité des restes dans la division euclidienne. De telles représentations permettent de condenser dans l'espace d'une figure des processus qui s'étendent sur l'ensemble des entiers.

4 La visualisation comme variable didactique

Dans son *Initiation*, Laisant présente également une figuration des identités remarquables chères aux élèves de Collège pour lesquels la linéarité de la fonction carrée est souvent intuitivement naturelle.

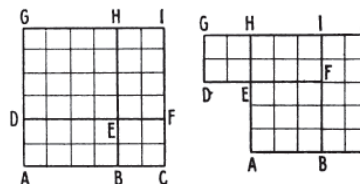


Figure 10. Figuration du développement de $(a + b)^2$ et $(a - b)^2$.¹⁵

¹⁵ Sur la première figure, $(AB + BC)^2 = DE^2 + BC^2 + AB \cdot AD + EF \cdot FI = AB^2 + 2 \cdot AB \cdot BC + BC^2$.
Sur la deuxième, $AB^2 = \text{aire}(ACJGDE) - 2 \cdot \text{aire}(BCJI) \Leftrightarrow (AC - BC)^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC$.

Ayant tracé la première partie de la figure 10, il explique que « Le carré construit sur la somme de deux lignes est équivalent au carré construit sur la première, plus le carré construit sur la seconde, plus deux fois le rectangle construit sur ces deux lignes comme côtés » puis que « Le carré de la somme de deux nombres est égal à la somme des carrés de ces deux nombres, plus deux fois leur produit » ou encore $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Il en conclut : « Voilà trois vérités dont on bourrera trois fois la mémoire des enfants non avertis, alors qu'elles n'en font qu'une seule, sautant aux yeux. Les apparences, les costumes sont distincts ; mais la personne est la même. » (Laisant, 1916, p. 82) Le même exemple est aussi traité par Fourrey dans ses *Récréations arithmétiques* (Fourrey, 1899, p. 65). Si Laisant présente le pendant géométrique d'autres identités remarquables (fig. 10), leur compréhension par les élèves est plus délicate et leur mémorisation moins évidente. Outre cette limite, il n'en demeure pas moins un support géométrique pertinent pour raisonner à partir des aires sur une figure plane et surtout une remédiation originale aux erreurs de développement grossières grâce à un changement de registre de manipulation, l'algèbre s'éclipsant devant la géométrie.

Nous proposons un dernier exemple de passage du champ algébrique au champ graphique. L'étude des graphiques représentant la distance parcourue par un véhicule en fonction du temps est classique dans beaucoup de manuels du secondaire.¹⁶ Si le contexte de proportionnalité est rapidement repéré, la description d'un tel voyage est accessible et simple. Il semble intéressant mais plus délicat de faire construire de tels graphiques aux élèves pour résoudre des problèmes de rencontre entre deux voyageurs progressant à des vitesses différentes. Ce « problème des courriers » offre un contexte d'application particulièrement adapté à une visualisation graphique. On trouve des exemples de cette démarche dans les manuels, utilisant parfois l'outil informatique.¹⁷ Il est cependant important de souligner qu'ici le cadre de résolution est fonctionnel. Le recours au "tout numérique" est aussi un réflexe des élèves dans cette situation présentée comme ouverte. La mise en équation s'y révèle d'autant plus périlleuse pour ceux qui s'engagent dans cette voie ; l'usage d'un graphique à la manière d'un abaque reste marginal bien qu'éclairant.

Nous choisissons de présenter la démarche de Laisant dans son *Initiation*, qui est tout autre. Le problème des « deux marcheurs » est une application de la leçon 46 au titre évocateur : « Les graphiques ; algèbre sans calcul ». À partir d'un graphique construit uniquement sur des considérations géométriques (fig. 11), le point de rencontre (heure et distance au point de départ) est rapidement repéré. Ce premier exemple est complété par des énoncés plus complexes. D'abord, lorsqu'un troisième voyageur vient à la rencontre des deux premiers. La situation suivante relève du cas de deux voyageurs disposant d'un seul moyen de locomotion (vélo, automobile) pour arriver à destination : le premier doit délaissé son véhicule une voire deux fois à certains endroits pour que le second, parti à pied, puisse en profiter. Enfin, le problème « Le chien et les deux voyageurs » examine la distance parcourue par un chien se déplaçant alternativement d'un marcheur à l'autre tandis que ces derniers poursuivent leur progression à des allures différentes. Laisant propose une évaluation

¹⁶ Voir par exemple : Le Yaouanq (dir.) (2014), *collection Math 'x seconde*. Les éditions Didier, p. 74.

¹⁷ Malaval, J. (2014). *Hyperbole seconde*. Éditions Nathan, p. 49.

graphique des valeurs solutions, avec l'imprécision qui s'y rattache. Il souligne la multiplicité des situations concrètes pouvant amener à de tels graphiques. Il insiste également sur le potentiel de telles représentations pour donner sens immédiatement, au-delà de calculs sophistiqués ou d'un âpre symbolisme. Il écrit : « Il y a donc beaucoup de questions auxquelles s'appliquent avantageusement ces tracés, qui ont en outre l'avantage de parler à l'esprit par l'intermédiaire des yeux, de figurer les choses elles-mêmes. C'est là une qualité précieuse en matière de pédagogie. » (Laisant, 1906, p. 135)

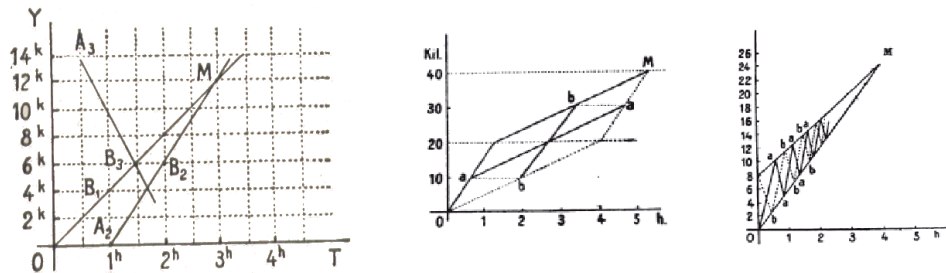


Figure 11. Le problème des courriers et ses variantes par Laisant.

Nous signalons également le problème suivant posé par Édouard Lucas (fig. 12). Sachant que chaque jour partent simultanément du Havre et de New York des bateaux en direction de l'autre port, la question est de savoir combien de bateaux va croiser un navire durant son voyage d'une semaine. L'illustration proposée par Laisant montre « la haute utilité des représentations graphiques » où se complètent le raisonnement et la perception visuelle de la situation. Il souligne les erreurs des notables scientifiques à qui la question avait été posée (probablement lors d'un congrès de l'AFAS) « raisonnant mais ne voyant pas » (Laisant, 1916, p. 141). Le rôle du regard du mathématicien prime ici de manière très appuyée.

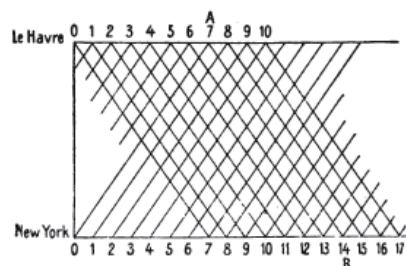


Figure 12. Le problème de Lucas.

5 Éléments de conclusion

Les quelques exemples précédents illustrent la richesse des ressources historiques pour diversifier l'activité mathématique en classe ; ce que les auteurs de la fin du XIX^e siècle avaient déjà bien saisi, les ouvrages de Laisant ou Lucas ne négligeant pas les références historiques. Leurs cadres d'applications sont multiples (approche d'une notion, justification, mémorisation, remédiation, généralisation etc.) tout autant que les possibles moments de leurs usages. Ils correspondent à plusieurs compétences à travailler chez les lycéens (chercher, représenter...) ¹⁸ et ancrent les notions abordées dans une réalité intelligible, parfois ludique.

¹⁸ Voir *Les compétences mathématiques au lycée*, MEN/DGESCO-IGEN, novembre 2013.

Ils modifient la perception de l'activité mathématique chez les élèves (mathématiques stratégiques ou défis historiques). Beaucoup des situations présentées s'appuient sur l'importance du regard de l'apprenant dont la vision soutient l'entendement : elles s'inscrivent donc dans une pulsation entre discursif et visuel (Barbin, 1998). Mais c'est en citant La Chalotais et son *Essai d'éducation nationale* (1763) ou Jean Macé et son *Arithmétique du Grand-Papa* (1862) que Laisant et Lucas enracinent leurs démarches dans un renouveau nécessaire de l'enseignement. Le premier distingue notamment les situations proposées dans son *Initiation* comme « moyen pédagogique » des récréations du second, renvoyant par la même à une responsabilité de « l'éducateur » et à ses choix. La principale fonction de ces mêmes approches pédagogiques demeure, à la fin du XIX^e siècle comme de nos jours, de susciter l'intérêt de l'élève, car comme l'explique Lucas : « Ainsi, vous le voyez, l'enseignement des Sciences doit être gai, vivant, amusant, récréatif et non froid, imposant, solennel. » (Lucas, 1895, p. 193)

REFERENCES

- Alsina, C., & Nelsen, B. (2010). An invitation to proofs without words. *European journal of pure and applied mathematics*, 1(3), 188-127.
- Auvinet, J. (2013). *Charles-Ange Laisant. Itinéraires et engagements d'un mathématicien de la Troisième République*. Paris : Hermann Éditeurs.
- Auvinet, J. (2015). Around a book dedicated to childhood friends: *Initiation Mathématique* by C.-A. Laisant. In É. Barbin, U. T. Jankvist, & T. H. Kjeldsen (Eds.), *History and epistemology in mathematics education. Proceedings of the seventh European summer university* (pp. 709-722). Danish Scholl of Education.
- Barbin, É. (1998). La démonstration : pulsation entre le discursif et le visuel. *Publication de l'Institut de recherche mathématique de Rennes, S4*, 39-67.
- Barbin, É. (2007). Les Récréations : des mathématiques à la marge. *Pour la science*, 30, 22-25.
- Belhoste, B. (1990). L'enseignement scientifique au tournant des XIX et XXe siècles. *Revue d'histoire des sciences*, 44(4), 371-400.
- Delahaye, J.-P. (1998). La preuve sans mot. *Pour la Sciences*, 244, 100-106.
- Fourrey, É. (1899). *Récréations arithmétiques*. Paris : Nony.
- Fourrey, É. (2001). *Curiosités géométriques. Préface d'Évelyne Barbin*. Paris : Vuibert.
- Laisant, C.-A. (1888). Remarques arithmétiques sur les nombres composés. *Bulletin de la Société mathématique de France*, 16, 150-155.
- Laisant, C.-A. (1888). Quelques applications arithmétiques de la géométrie des quinconces. *Compte-rendu du congrès de Toulouse*, 2, 218-235.
- Laisant, C.-A. (1894). Figuration graphique de quelques nombres combinatoires. *Compte-rendu du congrès de Besançon*, 2, 298-303.
- Laisant, C.-A. (1916). *Initiation Mathématique, ouvrage étranger à tout programme dédié aux amis de l'enfance. 2nd édition*. Paris : Hachette.
- Laisant, C.-A., & Perrin, É. (1892). *Premiers principes d'algèbre à l'usage des élèves de l'enseignement primaire supérieur, des écoles normales primaires et des candidats aux écoles supérieures de commerce*. Paris : Ch. Delagrave.
- Lucas, É. (1891). *Théorie des nombres. vol. 1*. Paris : Gauthier-Villars.
- Lucas, É. (1889). *Jeux scientifiques pour servir à l'histoire, à l'enseignement et à la pratique du calcul et du dessin*. Paris : Chambon & Baye.
- Lucas, É. (1891-1894). *Récréations Mathématiques. 4 vol., 2nd édition*. Paris : Gauthier-Villars.
- Lucas, É. (1884). Le calcul et les machines à calculer. *Compte-rendu du congrès de Blois*, 1, 111-141.
- Lucas, É. (1895). *L'Arithmétique amusante*. Paris : Gauthier Villars.
- Popescu-Pampu, P. (2014). L'éventail mystérieux. *Images des Mathématiques*, CNRS.
- Sainte-Laguë, A. (1910). Note sur les usages du papier quadrillé. *L'Enseignement mathématique*, 12, 5-17.
- Sainte-Laguë, A. (1990). *Avec des nombres et des lignes. Récréations mathématiques*. Paris: Vuibert.

- Rougetet, L. (2014). *Des récréations arithmétiques au corps des nombres surréels et à la victoire d'un programme aux Echecs. Une histoire de la théorie des jeux combinatoires au XX^e siècle*. Thèse de doctorat en d'histoire des sciences et épistémologie, soutenue le 22 septembre 2014, Université de Lille.
- Rougetet, L. (2012). Les multiples ancêtres du jeu de Nim. *Pour la Science*, 420, 80-85.
- Tarry G. (1886). Géométrie de situation : nombre de manières distinctes de parcourir en une seule course toutes les allées d'un labyrinthe rentrant, en ne passant qu'une seule fois par chacune des allées. *Compte-rendu du congrès de Nancy*, 2, 49-53.