ENSEIGNEMENT DE L' ARITHMÉTIQUE EN TERMINALE S SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES EN FRANCE : ANALYSE DE MANUEL

Roger BOSSONGO
CREAD EA 3875, ESPA de Bretagne - Université de Bretagne Occidentale

RÉSUMÉ

En se plaçant dans le cadre théorique de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1992), nous avons examiné la transposition didactique de l'arithmétique de la terminale S spécialité mathématiques dans le contexte français actuel.

Pour comprendre cette transposition didactique, nous avons mené une analyse praxéologique du manuel MATH'x terminale S spécialité mathématique, qui est l'un des manuels utilisés en France.

Nous avons identifié, à travers cette analyse, les praxéologies mathématiques présentées dans ce manuel et leurs caractéristiques pouvant causer des difficultés d'enseignement pour le professeur et d'apprentissage pour les élèves. Deux types de difficultés ont été repérés : le premier est lié a la nécessité de combiner plusieurs savoirs pour accomplir une tâche donnée ; le second est lié à l'abstraction.

MOTS CLÉS

Transposition didactique, Arithmétique, manuel scolaire, praxéologie.

INTRODUCTION

Réintroduit en l'an 2000 dans le programme scolaire en France, après une absence de plusieurs décennies, l'arithmétique occupe une place importante dans la formation en mathématiques de la terminale S spécialité mathématiques.

Dans le contexte français actuel, l'enseignement de l'arithmétique prépare les élèves de la terminale S spécialité mathématiques, d'une part à maitriser le raisonnement mathématique et à aborder des études universitaires en mathématiques et en informatique théorique, notamment en théorie des codes et en cryptologie d'autre part.

Le travail présenté dans cet article est une partie de notre thèse qui porte sur une étude comparative des pratiques d'enseignement de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématiques en Centrafrique et en France.

Nous avons commencé ce travail de recherche en septembre 2017 au sein du CREAD (Centre de Recherche sur l'Éducation, les Apprentissages et la Didactique) dans le cadre d'un partenariat France-Centrafrique entre ESPE de Bretagne (Université de Bretagne Occidentale) et l'ENS de Bangui (Université de Bangui). L'objectif de notre recherche est d'identifier les caractéristiques des pratiques des enseignants d'arithmétique de la terminale S spécialité mathématiques dans les systèmes d'enseignement français et centrafricain, qui peuvent influencer les activités des élèves.

Pour comparer les pratiques enseignantes dans ces deux pays, nous allons dans un premier temps faire une analyse comparative des ressources utilisées par un enseignant français et deux enseignants centrafricains de terminale S spécialité mathématiques pour préparer leurs cours d'arithmétique, principalement les manuels scolaires. Cette analyse, faite dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard, 1992), sera complétée par une analyse comparative des pratiques de ces enseignants par le biais d'observations de classe et d'entretiens avant et après les séances observées, avec les professeurs.

Dans cet article, nous nous centrons sur l'analyse de la transposition didactique de l'arithmétique dans le contexte français actuel. Ainsi, nous présentons d'abord le cadre théorique qui nous permet de mener une analyse praxéologique de manuels. Nous donnons ensuite des exemples issus de l'analyse d'un manuel scolaire français avant de conclure.

1. Recherches en didactique sur l'arithmétique, cadre théorique, questions de recherche

Dans la plupart des pays, les manuels scolaires font partie du paysage d'enseignement des mathématiques ; ils constituent un support d'enseignement et d'apprentissage (Douglas, Newton, & Lynn, 2007). C'est le cas en France et en Centrafrique. Ils occupent une place importante dans les pratiques des enseignants. Ils sont le résultat d'une transposition didactique (Chevallard, 1985, 1992) du savoir savant, dont une étape intermédiaire importante est constituée par les textes des programmes. En étudiant la réintroduction de l'arithmétique dans les programmes français au début des années 2000, Ravel (2003) a montré le rôle des manuels scolaires dans l'apprêtage didactique du savoir dans le processus de transposition. Elle avait également prouvé à travers une analyse écologique, le renforcement de l'habitat de cet objet de savoir (l'arithmétique de la terminale S spécialité mathématiques) dans l'écosystème des savoirs mathématiques non seulement en terminale S spécialité mathématiques, mais aussi au niveau supérieure. Assude (1996) considère un manuel comme un texte de savoir, en supposant que : « le texte du savoir est assez représentatif d'une « moyenne pondérée à plusieurs contraintes » du rapport institutionnel aux objets de savoir mathématiques présents dans les différents systèmes didactiques qui réalisent effectivement ce texte de savoir ». Ainsi dans cet article nous analysons le manuel MATH'x terminale S spécialité mathématique, qui est l'un des manuels utilisés en France. Cette analyse sera complétée dans notre travail de thèse par celle du manuel CIAM (Collection Inter Africain des Mathématiques) SM (Spécialité Mathématiques) qui est le premier manuel utilisé en Centrafrique. L'analyse comparative des deux manuels devrait permettre d'identifier le rapport institutionnel centrafricain et français à l'enseignement de l'arithmétique en Terminale S spécialité mathématiques et de relever les différences et les points communs.

La référence à la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) nous permet d'analyser le savoir mathématique en jeu, l'arithmétique de la terminale S spécialité mathématiques.

En effet, la TAD situe l'activité d'étude mathématique dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales. Elle considère qu'en dernière instance, toute activité humaine, et donc l'activité mathématique, consiste à accomplir une tâche ***t*** d'un certain type **T**, au moyen d'une technique $\boldsymbol{\tau}$, justifiée par une technologie $\boldsymbol{\theta}$, qui permet en même temps de la penser, voire de la produire, et qui à son tour est justifiable par une théorie $\boldsymbol{\Theta}$. Chevallard (2002) appelle cette modélisation de l'activité mathématique praxéologie ou organisation praxéologique et la note $[T/\tau/\theta/\Theta]$.

Le bloc $[\theta/\Theta]$ (bloc technologico-théorique) est identifié comme un savoir, alors que le bloc $[T/\tau]$ (bloc pratico-technique) constitue un savoir-faire.

Dans cet article, nous nous posons la question de la transposition didactique de l'arithmétique, dans le contexte français actuel. Ainsi les questions que nous étudions sont :

- Quelles sont les praxéologies mathématiques présentes dans le contexte de l'enseignement de l'arithmétique en Terminale S spécialité en France ?
- Quelles caractéristiques de ces praxéologies peuvent causer des difficultés : pour les élèves, et pour le professeur qui doit les enseigner ?

2. Méthodologie

L'objectif de ce travail, est d'examiner à travers l'analyse du manuel MATH'x terminale S spécialité mathématiques, la transposition didactique interne c'est-à-dire le passage des savoirs à enseigner aux savoirs enseignés, de l'arithmétique de la terminale S spécialité mathématiques dans le système d'enseignement français. Ce travail va nous permettre d'identifier les praxéologies mathématiques présentes dans ce manuel pour l'enseignement de l'arithmétique.

La méthodologie adoptée s'inscrit dans le cadre de la TAD. Il s'agit d'une analyse praxéologique.

Ce modèle proposé par Chevallard (2002) consiste à identifier les types de tâches, les techniques permettant d'accomplir ces types de tâches et les technologies justifiant les techniques utilisées, ainsi que la théorie associée, en rapport avec une organisation de savoir mathématiques.

Nous ferons précéder l'analyse praxéologique de ce manuel par un examen sommaire de sa structure.

2.1 Analyse du manuel français MATH'x

« L'enseignement de spécialité (mathématiques) prend appui sur la résolution de problèmes. Cette approche permet une introduction motivée des notions mentionnées dans le programme. » Ces deux premières phrases introduisant le programme de la spécialité mathématiques en terminale S, extrait du bulletin officiel spécial n°8 du 13 octobre 2011 du ministère français de l'éducation nationale, de la jeunesse et de la vie associative, précisent la nouvelle orientation de l'enseignement de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématiques. Les savoirs mathématiques doivent être associés à la résolution de problèmes concrets.

2.2 Analyse de la structure du manuel

Publiée à Paris en mars 2016, la collection MATH'x terminale S spécialité mathématiques des éditions Didier, comprend deux parties. La première partie est réservée à l'arithmétique, tandis que la seconde partie est consacrée aux calculs matriciels. Nous rappelons que notre analyse est focalisée sur la partie arithmétique.

Ce manuel dispose d'un sommaire et d'un index. Le programme est rappelé au début (page 2) du livre ce qui permet de vérifier la conformité du contenu à ce programme.

La partie arithmétique du manuel est structurée en trois chapitres :

- Divisibilité, division euclidienne, congruences,
- Nombres premiers,
- PGCD, théorème de Bézout, théorème de Gauss.

Quelques soient les thèmes abordés, les chapitres présentent toujours la même structure. Ainsi, les chapitres sont tous structurés en sept sections :

résolution de problèmes (1ère section), cours (2ème section), exercices résolus (3ème section), exercices guidés (4ème section), entraînement (5ème section), travail personnel (6ème section) et approfondissement et problèmes (7ème section).

Chaque chapitre est précédé d'une section réservée aux prérequis nécessaires pour aborder le contenu qui va être présenté.

La première section résolution de problèmes introduit le chapitre par des problèmes concrets liés aux savoirs en jeu. Le cours alterne ensuite avec les exercices résolus pour étayer les savoirs développés. Cette troisième section d'exercices résolus présente les types de tâches, les techniques et les technologies liées aux objets de savoirs en jeux d'apprentissage. Ces exercices résolus sont en lien avec les principaux savoirs attendus comme connaissances à construire chez les élèves.

Les sections exercices guidés, entraînement, travail personnel et approfondissement et problèmes, offrent aux élèves un panel d'activités favorables au travail en autonomie. Ceci corrobore l'analyse de Chaachoua (2017) au sujet de l'évolution de la place accordée aux activités dans le processus d'apprentissage des mathématiques et aussi d'une évolution dans le rapport de l'élève au manuel.Dans chaque chapitre, des exercices du type algorithmique et programmation sont proposés. Ceci permet aux élèves de pratiquer de tels types de tâches afin de comprendre certaines applications de l'arithmétique, entre autres la théorie des codes et la cryptographie.

Ceci correspond également à l'enseignement transversal d'algorithmique, qui se déploie dans tous les chapitres du programme. Ainsi, du côté des TICE (Technologie de l'Information et de la Communication pour l'Enseignement), quelques logiciels sont mentionnés. Il s'agit de : GeoGebra 5, Scilab (Scilab pour les lycéens), Xcas et OpenOffice Calc ou Excel, sans oublier les calculatrices Texas Instruments (TI-83 Plus, Premium) et Casio (Casio Graph 35+).

Nous allons maintenant proposer, dans le tableau ci-dessous, une grille d'analyse praxéologique, dans laquelle nous donnons l'analyse de quelques exercices résolus de ce manuel. Nous avons pris un exercice résolu par chapitre (voir annexe pour les énoncés de ces exercices) et identifié les types de tâches, les techniques et les technologies proposées. Nous ne mentionnons pas la théorie ici, car il s'agit toujours de l'arithmétique.

Grille d'analyse praxéologique de manuel

Thème	Type de tâches	Techniques	Technologie
DIVISIBILITÉ, DIVISION EUCLIDIENNE ET CONGRUENCE DANS ℤ.	Montrer la divisibilité par 3 d'un nombre entier abstrait. Soit $a = n(n+1)(2n+1)$ *Exercice 8 (page 23)*	. Écrire la relation de divisibilité de l'entier a par 3 en utilisant les congruences modulo 3. . Écrire les différents restes possibles dans la division par 3. . Écrire des congruences modulo 3 en utilisant les facteurs de *a* et les restes écrits précédemment. . Placer ces congruences dans la première ligne d'un tableau à 4 lignes et 4 colonnes où la première ligne et la dernière colonne sont réservées à la congruence impliquant le nombre *a*. . Compléter les 3 premières colonnes du tableau avec les restes possibles en tenant compte de la première ligne. . Compléter la dernière colonne en multipliant linéairement les éléments des trois premières colonnes. . Conclure à partir des éléments de la dernière colonne qui sont les restes selon les cas de la division de *a* par 3.	. Définition d'un multiple d'un entier naturel. . Divisibilité dans ℤ. . Division euclidienne dans ℤ. . Définition des congruences dans ℤ. .Propriété : congruences et opérations.
NOMBRES PREMIERS	Décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers. Soit n cet entier. *Exercice 3 (page 55)*	. Chercher le plus petit diviseur premier de *n*. Appelons *q* le quotient. . Chercher de nouveau le plus petit diviseur premier du quotient. . Répéter l'opération jusqu'à ce que le quotient soit 1. . Écrire n comme produit de tous les diviseurs premiers.	Divisibilité dans ℤ.Théorème 3 Tout entier naturel $n \geq 2$ se décom- pose en un produit de nombres de

			nombres premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près. On écrira $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ ou $n \geq 2, p_1, p_2, \dots p_k$ sont des nombres premiers deux à deux distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_k$ sont des entiers naturels non nuls
PGCD	Trouver deux nombres entiers naturels dont leur PGCD est connu et autre hypothèse. Soit $a et b$ deux entiers tels que: $PGCD(a, b) = k$ *Exercice 7 (page 87)*	. Écrire $a et b$ comme les multiples de ki.e. $a = ka', b = kb'$ avec $a' et b'$premiers entre eux. . Remplacer $a et b$ par leurs nouvelles expressions. . Utiliser l'autre hypothèse pour conclure	Définition du PGCD Caractérisation du PGCD Propriété 7 page 86 Soit a et b deux entiers relatifs non tous les deux nuls et d un entier naturel. $d = PGCD(a; b)$ si et seulement si $a = da'$ et $b = db'$ avec a' et b' entiers premiers entre eux.

Nous identifions, après analyse de cette grille, deux types de difficultés possibles pour les élèves qui auraient à traiter ces exercices :

Le premier est lié à l'usage de plusieurs savoirs pour accomplir un type de tâche donné. C'est le cas de l'exercice 8 (page 23) où, pour montrer la divisibilité par 3 d'un nombre entier abstrait, l'élève doit faire appel à trois objets de savoirs (divisibilité, division euclidienne et congruence). Une telle praxéologie nécessite une initiative importante de la part de l'élève, qui doit maîtriser chaque savoir et être capable de les associer. De plus, pour cet exercice, deux méthodes sont proposées aux élèves pour répondre à la tâche proposée. Ceci offre aux élèves la possibilité de choisir une méthode qui leur convient lorsqu'il n'y a pas de consigne claire sur une méthode à privilégier dans un exercice.

Le second type de difficulté est lié à l'abstraction. Plusieurs exercices concernent des résultats généraux sur des entiers a et b par exemple. Ils peuvent nécessiter des raisonnements complexes, par disjonction de cas notamment.

Pour finir, nous avons dit plus haut que ce manuel contient également des tâches de type algorithmique, mais dans la grille ci-dessus ce type de tâches ne figure pas. Pourquoi ce contraste?

Un algorithme est une suite finie (séquence, ensemble, système, processus discret, instruction, description, prescription) d'actions (actions élémentaires, opérations, opérations élémentaires, instruction, étapes, règles, règles opératoires) qui sont déterministes, pouvant être écrites dans un langage compréhensible par un dispositif donné ou un opérateur donné afin de produire avec certitude une sortie (output : résultats visés, résolution d'un problème ou d'une classe de problèmes) à partir d'une entrée (input) prise dans un ensemble potentiellement infini de données en temps raisonnable dépendant des compétences de l'opérateur, du problème et du dispositif (ordinateur, données) dont on dispose (Nguyen, 2002, p.4). La notion d'algorithme n'est pas un objet d'étude dans le thème « arithmétique » de ce manuel. Il s'agit plutôt d'exercices d'algorithmique, se déroulant dans le contexte de l'arithmétique. Ainsi les types de tâches sont par exemple « compléter un algorithme » ; « lire un algorithme et comprendre le résultat qu'il produit » etc. Ils ne sont pas spécifiques de l'arithmétique, c'est pourquoi nous ne les avons pas intégrés dans nos exemples.

CONCLUSION

En se plaçant dans le cadre de la Théorique Anthropologique du Didactique, ce travail préliminaire aux travaux de notre thèse, nous permet d'obtenir des résultats sur la transposition didactique de l'arithmétique dans le contexte français.

Les questions que nous avons étudiées sont les suivantes :

- (1) Quelles sont les praxéologies mathématiques présentes dans le contexte de l'enseignement de l'arithmétique en Terminale S spécialité en France ?

Notre analyse de ce manuel nous a permis d'observer différentes praxéologies. Pour le type de tâches « Étudier la divisibilité », les techniques et technologies font appel soit à la définition de la divisibilité, soit aux congruences, soit aux deux simultanément. Pour le type de tâches « décomposer un entier en produit de facteurs premiers », les techniques et technologies recourent à la définition et aux propriétés du PGCD. Enfin pour les types de tâches « trouver deux entiers naturels connaissant leur PGCD et autre hypothèse », les techniques et technologies font appel à la définition et aux propriétés du PGCD.

- (2) Quelles caractéristiques de ces praxéologies peuvent causer des difficultés : pour les élèves, et pour le professeur qui doit les enseigner ?

Nous avons identifié les difficultés suivantes pour les élèves :

- la nécessité de combiner plusieurs savoirs, ce qui demande une importante initiative de l'élève ;
- l'abstraction de certains types de tâches, ce qui demande parfois aux élèves de considérer plusieurs cas et en tout cas de raisonner sur des nombres abstraits.

Quelles sont les caractéristiques des praxéologies contenues dans le manuel centrafricain? Retrouve-t-on les mêmes praxéologies dans ce manuel? Si ce n'est pas le cas, qu'est ce qui peut expliquer ces choix transpositifs différents.

Cette analyse comparative du processus de transposition didactique de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématiques en France et en Centrafrique sera complétée dans notre travail de thèse par une étude comparative des pratiques des enseignant(e)s de ces deux pays.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ASSUDE, T. (1996). De l'écologie et de l'économie d'un système didactique : une étude de cas. *Recherche en didactique des mathématiques, 16*(1), 47-72.

CHAACHOUA, H. (2017). *Le rôle de l'analyse des manuels dans la théorie anthropologique du didactique.* Repéré à https://hal.archives-ouvertes.fr / hal-01519339.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologiques. *Recherches en didactique des mathématiques, 12*(1), 83-121.

CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude : 1. Structures et fonctions. *In* J.L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot et R. Floris (éd.), *Actes de la XIième école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-32). Grenoble : La Pensée sauvage.

DOUGLAS, P., NEWTON, et LYNN, D. (2007). Could elementary mathematics textbooks help give attention to reasons in the classroom? *Educational Studies in Mathematics, 64* (1), 69-84.

NGUYEN Chi, T. (2002). *La notion d'algorithme dans l'enseignement des mathématiques au Mathematics and technology Education, 2*(4), 505-528 *lycée Comment l'émergence des notions de boucles et de variables en informatique s'articule à des connaissances en mathématiques ?* Mémoire de DEA EIAH-D, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

RAVEL, L. (2003). *Des programme à la classe : études de la transposition didactique interne Exemple de l'arithmétique en terminale S spécialité mathématiques.* Thèse, Université Joseph Fourier – Grenoble 1. Repéré à https://tel.archives-ouvertes.fr / tel-00162790

ROBERT, A. et ROGALSKY, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignements de mathématiques : une double approche. *Canadian journal of science, Mathematics and technology Education, 2*(4), 505-528

RÉFÉRENCES DU MANUEL MATH'X

CHAREYRE, B., GASTIN, H. et LE YAOUANQ, M-H. (2016). *Math'x : Term S spécialité*. Paris : Didier

ANNEXES

Annexe 1 (Exercice résolu n°8)

Exercices résolus

6 Établir des congruences

ÉNONCÉ **1.** Démontrer que $214 \equiv 25$ (9).

2. a. Démontrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $n^2 + 4n + 7 \equiv 3$ modulo $(n + 2)$.

b. En déduire le reste r dans la division euclidienne du nombre $n^2 + 4n + 7$ par le nombre $n + 2$.

SOLUTION

1. $214 - 25 = 189 = 9 \times 21$, qui est un multiple de 9 donc $214 \equiv 25$ (9).

2. a. $n^2 + 4n + 7 = (n+2)^2 + 3$ donc $n^2 + 4n + 7 - 3$ est un multiple de $n + 2$ et par conséquent $n^2 + 4n + 7 \equiv 3$ modulo $(n + 2)$.

b. Si $0 \leqslant 3 < n + 2$ c'est-à-dire $n > 1$, on a $r = 3$.
Si $n = 0$, $n + 2 = 2$ et $n^2 + 4n + 7 = 7$ donc $r = 1$.
Si $n = 1$, $n + 2 = 3$ et $n^2 + 4n + 7 = 12$ donc $r = 0$.

Attention !
De $a \equiv b$ (c) on ne peut déduire que b est le reste dans la division par c que si $0 \leqslant b < c$.

➡ **Pour s'entraîner :** faire les exercices 50 à 52

7 Établir des résultats sur des puissances avec des congruences

ÉNONCÉ Si n est un entier naturel, conjecturer une propriété commune aux entiers $3 \times 2^{4n+2} - 7$ et la démontrer.

SOLUTION

On fait quelques essais avec un tableur.

	A	B	C	D	E
1	n	0	1	2	3
2	3x2^{4n+2}-7	5	185	3065	49145

Il semble que tous ces entiers soient des multiples de 5.
Démontrons que $3 \times 2^{4n+2} - 7 \equiv 0$ [5]
$2^{4n+2} = 2^{4n} \times 2^2$ et $2^2 = 4$, donc $3 \times 2^{4n+2} = 12 \times 2^{4n}$.
De plus $2^{4n} = (2^4)^n$ et $2^4 = 16$, comme $16 - 1 = 15$ qui est un multiple de 5 on a $2^4 \equiv 1$ [5].
$2^4 \equiv 1$ [5] implique par élévation à la puissance n, $(2^4)^n \equiv 1^n$ [5] soit $2^{4n} \equiv 1$ [5].
On multiplie par 12 : $12 \times 2^{4n} \equiv 12$ [5].
Enfin, en soustrayant 7 : $12 \times 2^{4n} - 7 \equiv 12 - 7$ [5] soit $3 \times 2^{4n+2} - 7 \equiv 5$ [5].
Comme $5 \equiv 0$ [5] l'entier $3 \times 2^{4n+2} - 7$ est bien divisible par 5.

Rappel
a divisible par 5 se traduit par $a \equiv 0$ [5].

➡ **Pour s'entraîner :** faire les exercices 55, 56

8 Relier divisibilité, division euclidienne et congruence

ÉNONCÉ Montrer que pour tout entier relatif n, $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 3.

SOLUTION 1

Ceci revient à prouver que pour tout n de $\mathbb{Z}$, $n(n+1)(2n+1) \equiv 0$ (3).
Dans la division par 3, un entier n a pour reste 0, 1 ou 2 donc $n \equiv 0$ (3) ou $n \equiv 1$ (3) ou $n \equiv 2$ (3). On examine donc chaque cas :

$n \equiv \ldots$ (3)	$n + 1 \equiv \ldots$ (3)	$2n + 1 \equiv \ldots$ (3)	$n(n+1)(2n+1) \equiv \ldots$ (3)
0	1	1	0
1	2	3 ou 0	0
2	3 ou 0	5 ou 2	0

Dans tous les cas, $n(n+1)(2n+1)$ est un multiple de 3.

SOLUTION 2

$2n + 1 = (n + 2) + (n - 1)$, donc :

$$n(n+1)(2n+1) = n(n+1)(n+2) + n(n+1)(n-1).$$

Parmi trois entiers consécutifs, l'un des trois est multiple de 3, donc le produit de trois entiers consécutifs est un multiple de 3.
Par suite, $n(n+1)(n+2)$ et $(n-1)\,n(n+1)$ sont deux multiples de 3, donc leur somme $n(n+1)(2n+1)$ est aussi un multiple de 3.

MÉTHODE
Pour exprimer que a est divisible par b (a et b entiers, $b \neq 0$), on peut dire :
- il existe k entier relatif tel que $a = bk$,
- le reste dans la division euclidienne de a par b est 0,
- $a \equiv 0$ (b).

MÉTHODE
Dans une congruence modulo c ($c \in \mathbb{N}^*$), tout entier est congru à 0, 1, 2… ou $c - 1$. On peut donc penser à étudier tous ces cas.

➡ **Pour s'entraîner :** faire les exercices 53, 58, 59

Annexe 2 (Exercice résolu n°3)

Exercices résolus

3 Décomposer un entier en produit de facteurs premiers

ÉNONCÉ

Décomposer 11 400 en produit de facteurs premiers.

SOLUTION

■ **« À la main »**

On détermine le plus petit diviseur premier de 11 400, ici 2, puis celui du quotient de 11 400 par 2 soit 5 700 et ainsi de suite … jusqu'à obtenir un quotient égal à 1 :

$$11\,400 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 19 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 19.$$

Une disposition pratique des calculs

11 400	2
5 700	2
2 850	2
1 425	3
475	5
95	5
19	19
1	

■ **Avec une fonction préprogrammée d'un logiciel**

La commande *Factoriser* peut s'appliquer à des entiers sur certains logiciels ou calculatrices pour fournir leur décomposition en produit de facteurs premiers.

TI-nspire ou TI 89

factor(11400)

$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 19$

Scilab

```
-->factor(11400)
ans  =

   2.    2.    2.    3.    5.    5.    19.
```

Xcas

ifactor(11400)

$2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 19$

GeoGebra 5

▸ Calcul formel

1 Factoriser[11400]

→ $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 19$

3. Avec un programme : voir TP 1 page 58.

➡ Pour s'entraîner : faire les exercices 18 et 19

4 Étudier le nombre de diviseurs d'un carré parfait

ÉNONCÉ

1. Combien 8^2, 30^2, 225^2 ont-ils de diviseurs positifs ?

2. Démontrer qu'un carré parfait a toujours un nombre impair de diviseurs positifs.

SOLUTION

1. $8^2 = (2^3)^2 = 2^6$. Donc 8^2 admet 7 diviseurs ;
$30^2 = (2 \times 3 \times 5)^2 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$ donc 30^2 admet $3 \times 3 \times 3 = 27$ diviseurs ;
$225^2 = (25 \times 9)^2 = (5^2 \times 3^2)^2 = 5^4 \times 3^4$ donc 225^2 admet $5 \times 5 = 25$ diviseurs.

2. • Si $n = 1$, il a un unique diviseur positif.

• Si $n = m^2$ où m est un entier, $n > 1$. De $n > 1$ on déduit que $m > 1$ donc m admet une décomposition en produit de facteurs premiers $m = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ et par conséquent $n = m^2 = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_r^{2\alpha_r}$.

n admet donc $(2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1)\dots(2\alpha_r + 1)$ diviseurs.

C'est un produit de nombres impairs, donc n admet bien un nombre impair de diviseurs.

Remarque :

On peut aussi mener un raisonnement sur l'écriture en produit de deux facteurs $n = 1 \times n = \dots$, chaque produit dégageant deux diviseurs distincts sauf si les deux facteurs sont les mêmes, c'est-à-dire si n est un carré parfait. Dans ce cas le nombre de diviseurs est donc impair.

➡ Pour s'entraîner : faire les exercices 22, 23, 30

Annexe 3 (Exercice résolu n°7)

Exercices résolus

6 Différentes déterminations du PGCD de deux entiers

ÉNONCÉ

Déterminer de différentes façon PGCD (5 400 ; 4 200).

SOLUTION

▪ On peut utiliser l'algorithme d'Euclide :
$5\,400 = 4\,200 \times 1 + 1\,200$
$4\,200 = 1\,200 \times 3 + 600$
$1\,200 = 600 \times 2 + 0$.
On en déduit que PGCD(5 400 ; 4 200) = 600.

▪ On peut aussi utiliser l'homogénéité :
$5\,400 = 200 \times 27$ et $4\,200 = 200 \times 21$ donc
PGCD(5 400 ; 4 200) = 200 × PGCD(27 ; 21) = 600 × PGCD(9 ; 7).
Comme PGCD(9 ; 7) = 1, on en déduit PGCD(5 400 ; 4 200) = 600.

▪ On peut enfin utiliser la décomposition en facteurs premiers :
$5\,400 = 54 \times 10^2 = (2 \times 3^3) \times (2^2 \times 5^2) = 2^3 \times 3^3 \times 5^2$
$4\,200 = 42 \times 10^2 = (2 \times 3 \times 7) \times 2^2 \times 5^2 = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7$
donc PGCD(5 400 ; 4 200) $= 2^3 \times 3 \times 5^2 = 600$.

MÉTHODE

Pour déterminer à la main le PGCD de deux entiers, ce n'est pas toujours la même méthode qui est la plus pertinente selon les nombres en jeu.
Pour des entiers assez grands, il peut être très difficile de factoriser, l'algorithme d'Euclide se révèle particulièrement performant.

➡ Pour s'entraîner : faire les exercices 17, 18

7 Déterminer deux entiers connaissant leur PGCD et leur somme

ÉNONCÉ

Déterminer les entiers naturels a et b tels que $a + b = 72$ et PGCD(a ; b) = 8.

SOLUTION

Par la propriété 7, PGCD(a ; b) = 8, si et seulement si il existe a' et b' entiers naturels premiers entre eux tels que $a = 8a'$ et $b = 8b'$. Alors $a + b = 72$ si et seulement si $8(a' + b') = 72$ soit $a' + b' = 9$.
Il y a 4 sommes possibles : 1 + 8, 2 + 7, 3 + 6, 4 + 5. Sachant que a' et b' sont des entiers naturels premiers entre eux, on ne retient pas 3 + 6.
On a donc (a' ; b') = (1 ; 8) ou (2 ; 7) ou (4 ; 5) ou les couples obtenus en inversant l'ordre.
Les solutions sont donc $a = 8$, $b = 64$; $a = 16$, $b = 56$; $a = 32$, $b = 40$
et celles obtenues en échangeant a et b : $a = 64$, $b = 8$; $a = 56$, $b = 16$; $a = 40$; $b = 32$.

➡ Pour s'entraîner : faire les exercices 20, 21

8 Montrer qu'une fraction est écrite sous forme irréductible

ÉNONCÉ

Montrer que, pour tout entier naturel n, la fraction $\frac{2n+5}{n+2}$ est écrite sous forme irréductible.

SOLUTION

Dire que cette fraction est irréductible signifie que son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux, autrement dit que PGCD($2n + 5$; $n + 2$) = 1 pour tout entier naturel n.
Pour n entier naturel, $2n + 5$ et $n + 2$ sont deux entiers non nuls. On peut donc appliquer la propriété de réduction :
$$\begin{aligned}\text{PGCD}(2n+5\,;\,n+2) &= \text{PGCD}(2n+5-2(n+2)\,;\,n+2)\\ &= \text{PGCD}(1\,;\,n+2) = 1.\end{aligned}$$
Donc pour tout entier naturel n, la fraction $\frac{2n+5}{n+2}$ est écrite sous forme irréductible.

➡ Pour s'entraîner : faire l'exercice 24