L'escargot

Jean-François Kentzel

Jean François Kentzel enseigne au Lycée Pardailhan à Auch (32)
jkentzel@ac-toulouse.fr

Il serait trop long de décrire ici les circonstances[1] qui m'ont fait proposer le problème suivant à mes élèves (question trouvée sous forme de devinette mathématique dans une revue scientifique il y a une dizaine d'années).

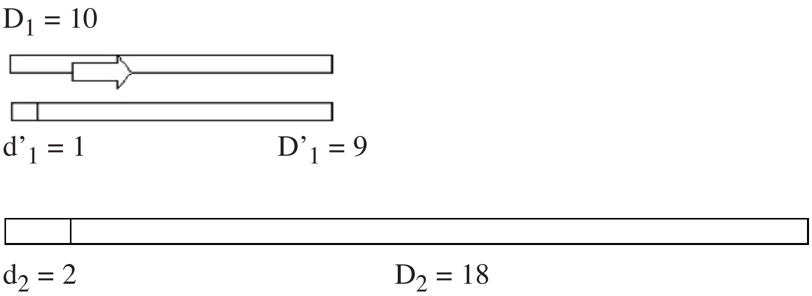
Un escargot capable de parcourir 1 mètre par jour est situé à l'extrémité d'un ruban de longueur 10 mètres. Il voudrait parvenir à l'autre extrémité de ce ruban mais chaque nuit, pendant qu'il se repose, le ruban s'étire uniformément de 10 mètres. Cet escargot (ou un de ses descendants) a-t-il des chances de parvenir à ses fins ?
Ce problème simple peut s'envisager en classe sous différents aspects : en Seconde, une approche expérimentale qui participe d'une séance de recherche et peut aller jusqu'à l'utilisation d'un tableur ; en Première, une approche théorique qui participe d'une séance d'introduction aux suites numériques ; en Terminale S, soit un prolongement avec encadrement et intervention d'intégrales, soit un TP avec utilisation du tableur. Bref, cet escargot peut prendre bien des chemins, mais arrivera-t-il un jour à bout de ce fameux ruban ?

Approche expérimentale

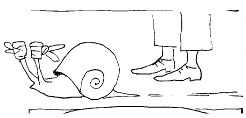
Premières questions, premiers essais
Que cherche-t-on ? Est-ce la distance parcourue ? La distance à parcourir ? Le temps mis pour arriver au bout du ruban ?

Assez rapidement se dégage l'idée que c'est la distance qui reste à parcourir qui nous intéresse. Si on trouve une formule, on arrivera sûrement à savoir si notre escargot peut parvenir à ses fins.

Les premiers essais sont figuratifs : un ruban de 10 unités de long sur lequel on va noter l'avancement de l'escargot. Premier problème dès le deuxième jour : il faut pouvoir agrandir notre ruban ! On va donc dessiner plusieurs rubans, chacun représentant un jour. Deuxième problème : quand on parle du deuxième jour, est-ce avant ou après le déplacement de l'escargot ? Est-ce avant ou après l'étirement du ruban ? D'où l'idée de dessiner un ruban du matin et un ruban du soir.



Remarque amusante : les premiers dessins montrent que le soir du 1er jour, l'escargot a 1 mètre de ruban derrière lui et que le matin du second jour, il a 2 mètres de ruban derrière lui. Il n'a pourtant pas bougé de la nuit !



Après les premiers dessins et les premières valeurs numériques de la distance restant à parcourir, on est tenté de cher-

[1] Voir la page « Documents pour les enseignants » du site du lycée de Pardailhan (Auch)

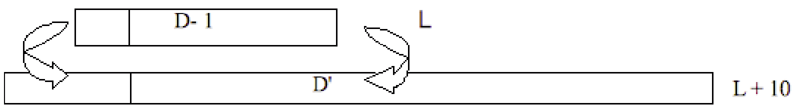
cher une formule pour pouvoir calculer les suivantes. Pourquoi ne pas utiliser une feuille de calcul ?

Avec un tableur

Dans une feuille de calcul, on choisit de numéroter les jours dans la première colonne et de calculer la distance restant à parcourir au matin de ce jour dans la seconde colonne.

Pour les jours : on tape 1 dans la cellule A1, puis =A1+1 dans la cellule A2 et en recopiant cette cellule vers le bas, on obtient un compteur du nombre de jours de voyage de notre escargot.

Pour la distance restant à parcourir : on tape 10 dans la cellule B1. Et maintenant se pose la question difficile : comment calculer la distance restant à parcourir le matin du deuxième jour avec une formule qui ferait intervenir le 1er jour ? Il faut donc se pencher sur les calculs faits en premiers essais pour essayer de deviner.



La formule magique

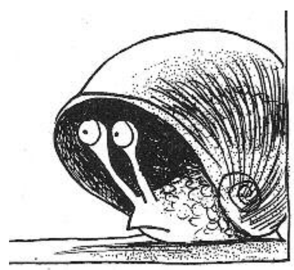
Notons L la longueur du ruban de la veille, D la distance qu'il restait à parcourir le matin précédent et D' la distance qui reste à parcourir ce matin-là. On cherche à exprimer D' en fonction de D et de L.

La veille au soir, l'escargot devait encore parcourir la distance $D-1$. Pendant la nuit, le ruban s'est étiré uniformément de 10 mètres donc sa longueur a été multipliée par $\frac{L+10}{L}=1+\frac{10}{L}$. Comme L valait 10 le premier jour et qu'elle augmente de 10 aussi tous les jours, on voit que L vaut 10 fois le nombre de jours écoulés. Si on note n le numéro du jour, la distance qui restait à parcourir a elle aussi été multipliée par $1+\frac{10}{L}=1+\frac{1}{n}$ donc $D'=(D-1)\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Il faut donc dans la cellule B2 écrire la formule =(B1-1)*(1+1/A1).

Après recopie, il n'y a plus qu'à chercher la première (éventuelle) valeur inférieure à 1 dans cette colonne B. Car alors dans cette journée, l'escargot parcourt 1 mètre sans que le ruban ne bouge et il arrive enfin au bout de ses peines.

Après l'obtention de la courbe ci-dessous (où les valeurs négatives n'ont *a priori* aucun sens pour le problème posé), on trouve le contenu 0.468 dans la cellule B12367. La réponse est : oui, le 12 368ème jour.



Approche séquentielle

L'approche expérimentale nous a permis de voir que le problème semblait avoir une solution. Comment rédiger cela sans l'aide d'un tableur ? (La numérotation des lignes du tableur est une approche des indices des suites).

Calculons les distances en jeu les premiers jours pour comprendre le mécanisme : on notera L la longueur du ruban, D la distance restant à parcourir à l'aube et D' la distance restant à parcourir à la fin de la journée.

A l'aube du premier jour, l'escargot n'a pas encore bougé et le ruban non plus. On a donc $D_1 = L_1 = 10$.

Le soir du premier jour, l'escargot a avancé d'un mètre mais le ruban n'a pas bougé. Donc $D'_1 = 9$.

À l'aube du deuxième jour, l'escargot n'a pas bougé mais le ruban s'est étiré. On a donc $L_2 = L_1 + 10$; la longueur a donc été multipliée par $k = \frac{L_1+10}{L_1} = 1 + \frac{10}{L_1}$.

L'étirement a été uniforme donc $D_2 = k \times D'_1$.

D'où :

$$D_2 = \left(1 + \frac{10}{L_1}\right) \times D'_1 = D'_1 + \frac{10}{L_1} \times D'_1$$

$$= 9 + \frac{10}{10} \times 9 = 18$$

Remarquons que

$$D_2 = (D_1 - 1) + \frac{10}{L_1} \times (D_1 - 1).$$

Donc à l'aube du deuxième jour, on a : $D_2 = 18$ et $L_2 = 20$.

Le soir du deuxième jour, l'escargot a avancé d'un mètre de plus mais, pendant cette journée, le ruban n'a pas bougé. On a donc $D'_2 = D_2 - 1 = 17$ et $L'_2 = 20$.

À l'aube du troisième jour, l'escargot n'a pas bougé mais le ruban s'est étiré.

On a donc $L_3 = L_2 + 10$; le coefficient multiplicateur devient $k' = \frac{L_2+10}{L_2} = 1 + \frac{10}{L_2}$ et $D_3 = k' \times D'_2$.

D'où $D_3 = (D_2 - 1) + \frac{10}{L_2} \times (D_2 - 1) = 25{,}5.$

Donc à l'aube du troisième jour, on a : $D_3 = 25{,}5$ et $L_3 = 30$.

On peut donc conjecturer les formules générales : $L_{n+1} = 10n$ et

$$D_{n+1} = D_n - 1 + \frac{D_n - 1}{n}$$

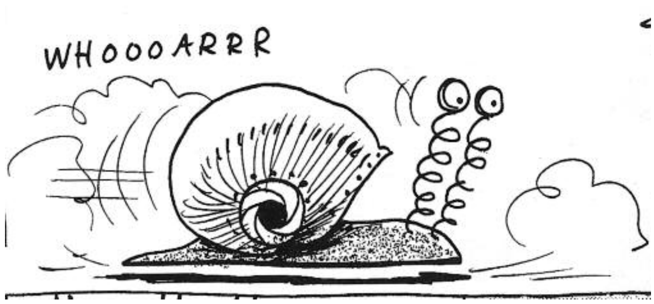
<u>Remarque</u>

Durant le n-ième jour, la longueur totale du ruban est évidemment $L_n = 10n$. La nuit suivante, cette longueur devient :

$$L_{n+1} = 10n + 10 = 10n\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= L_n\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Chaque nuit, la longueur totale est multipliée par $1 + \frac{1}{n}$ où n est le nombre de jours écoulés depuis le départ et, puisque l'étirement est uniforme, il en va de même de la longueur située derrière l'escargot et surtout de la distance restant à parcourir le soir (c'est-à-dire $D_n - 1$). On a donc : $D_{n+1} = (D_n - 1)\left(1 + \frac{1}{n}\right)$. C'est une bonne synthèse mais on n' y pense pas forcément dès le début !



[2]Texte d'interrogation donné aux élèves de Terminale S en 2006-2007.

Pour aller plus loin[2]

Que dire du comportement de la suite (D_n) ?

Dans la formule $D_{n+1} = D_n - 1 + \frac{D_n - 1}{n}$, difficile pour qui est peu familier des suites définies par récurrence, la présence du terme $\frac{D_n}{n}$ est particulièrement agaçante et on peut penser à poser $u_n = \frac{D_n}{n}$.

On obtient en effet $(n + 1)\, u_{n+1} = nu_n - 1 + u_n - \frac{1}{n} = (n + 1)\, u_n - \frac{n+1}{n}$,

c'est-à-dire $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{n}$ dont on déduit la très explicite relation :

$$u_n = u_1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

On a donc : $\frac{D_n}{n} = 10 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ et

$$D_n = n\left(10 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right).$$

On cherche le premier n entier naturel tel que $0 < D_n < 1$ $\Leftrightarrow$

$$0 < 10 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} < \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < 10 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \\ 10 - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < 0 \end{cases}$$

Ou le premier entier naturel p (qui est le suivant !) tel que :

$$D_p < 0 \Leftrightarrow 10 - \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k} < 0.$$

En Première : avec des minorations

On veut savoir à partir de quand $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ dépasse 10. On peut remarquer que, pour tout entier naturel k non nul,

$\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + ... + \frac{1}{k+k}\right) > \frac{1}{2}$ (somme de k termes tous supérieurs à $\frac{1}{2k}$). Pour être sûr de dépasser 10 (en traitant à part le premier terme), il nous faut donc écrire la somme des inverses sous la forme :

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + ...$$

(suivi de 15 autres parenthèses de ce type).

La dernière se termine par $2^{18} = 262144 = n - 1$, d'où $n = 262145$, (majoration grossière mais où on est sûr que l'escargot aura fini son chemin).

En terminale

L'encadrement de $\int_1^n \frac{1}{x} dx$ par deux séries donne $\ln(n) \le \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \le \ln(n-1) + 1$ et par suite le décevant encadrement

$e^9 \approx 8104 < n < e^{10} \approx 22027.$

Mais on sait que les suites de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$

et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1)$ sont adjacentes (leur différence est $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$) et convergent vers la constante γ d'Euler (voir un exercice du Bac S de Nouvelle-Calédonie en novembre 2005). (u_n) est décroissante et nous fournit $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \gamma + \ln(n)$.

La condition $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 10$ est donc assurée dès que $\gamma + \ln(n) > 10$,

soit $\ln(n) > 10 - \gamma$.(v_n) est croissante et nous fournit une minoration de γ, ce qui est bien ce que nous cherchons (la convergence est lente, il nous faut pousser jusqu'à $n = 3000$ pour trouver le chiffre des millièmes et obtenir $\gamma > 0{,}577$). La condition $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > 10$ est donc assurée dès que $\ln(n) > 10 - 0{,}577$, soit $n > e^{10-0{,}577} \approx 12370$, ce qui est une excellente approximation de n.

$L_1 = L_{n+1} - L_n$: quelle importance ?

On peut se demander quelle est l'incidence de la coïncidence entre les deux valeurs L_1 et $L_{n+1} - L_n$. En supposant qu'on a une longueur a (L_1) au départ et une longueur b $(L_{n+1} - L_n)$ rajoutée chaque jour et avec des calculs du type précédent, on obtient : $L_n = a + (n-1)b$,

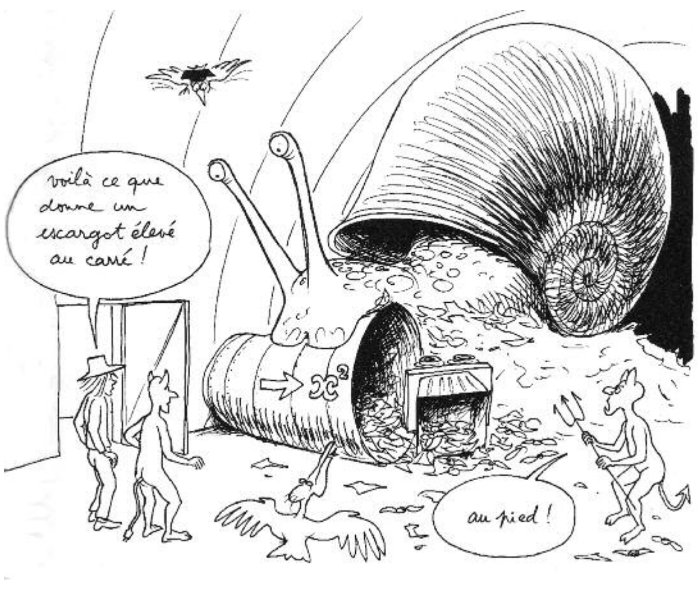
$D_{n+1} = \left(1 + \frac{b}{L_n}\right)(D_n - 1)$ et en posant

$u_n = \frac{D_n}{a+(n-1)b}$,

$$D_n = \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{a+(k-1)b}\right)(a+(n-1)b)$$

qui se comporte comme la suite (D_n) précédente (l'escargot arrivera un jour au bout de son périple).

On peut donc proposer un texte plus impressionnant (1 km de plus par jour)... en risquant rapidement d'essouffler le tableur si on veut en utiliser une seule colonne.



Avez-vous reconnu Tirésias, l'escargot des bandes dessinées d'Anselme Lanturlu ?
Merci à Jean-Pierre Petit de nous avoir autorisés à publier ces dessins.