Qu'entendons-nous par « Démontrer que… » ?

Daniel Reisz

Daniel Reisz, professeur de mathématiques, IA-IPR dans l'académie de Dijon et ancien Président de l'APMEP est aujourd'hui retraité mais encore très actif, tant au sein de notre association que dans de nombreux autres cadres de réflexion autour de la culture scientifique.

Pour un mathématicien, faire des mathématiques est la chose la plus naturelle qui soit. Les enseigner aussi ! Mais lorsque nous nous demandons, que nous soyons mathématicien ou professeur de mathématiques, ce que nous faisons, ce que cela signifie, nous avons alors beaucoup de difficultés à répondre. Les mathématiciens et les philosophes se sont beaucoup penchés sur ce problème de la nature même des mathématiques et nous n'irons pas plus avant dans cette direction, sauf à pointer deux composantes fondamentales : la nature abstraite des objets mathématiques et leur fonctionnement hypothético-déductif sur lequel je vais me pencher un peu plus.

C'est là qu'apparaît la notion centrale de *démonstration* ou, mieux, de *démonstration rigoureuse* (ce que d'aucuns qualifieront de pléonasme). Le mathématicien, comme le professeur de mathématiques, chacun dans sa pratique, est convaincu de savoir faire la différence entre une démonstration correcte et une qui ne le serait pas. Mais il est beaucoup plus difficile, voire impossible pour la plupart d'entre nous, de dire ce qu'est une démonstration, de définir ce qu'est la rigueur. D'ailleurs le mathématicien, dans sa recherche, le professeur qui cherche à résoudre un problème un peu délicat, ont souvent quelque mal à savoir où se situe la frontière exacte entre le « rigoureux » et ce qui le serait moins.

La place de la démonstration dans les mathématiques scolaires

Si nous restreignons notre réflexion à l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée, quel est l'enjeu du « *Démontrer que…* » ?

À l'entrée du collège, les élèves ne sont pas vierges de toute mathématique. L'école élémentaire leur a non seulement appris à compter, à calculer, à reconnaître et à mesurer des figures géométriques simples, mais elle les a aussi habitués à des démarches rationnelles lors de la pratique de résolution de problèmes. Cela peut aller de simples argumentations pour emporter l'adhésion de l'autre à de véritables raisonnements. Certes tout n'est pas acquis par tous et les deux premières années du collège vont tenter de consolider tout cela. Mais on ne peut pas encore parler de *démonstration* au sens où nous l'entendons en général.

Nous avons tendance à croire, nous enseignants de mathématiques, qu'il y a un certain consensus sur *Démontrer que…* Sauf que nous avons beaucoup de difficultés à le définir, à l'expliciter et à le transmettre à nos élèves. Et que, même entre nous, quand nous sommes d'accord sur le fond, il reste des différences notables dans les exigences de forme.

Lorsque je lis, au sein d'un énoncé de problème (c'est-à-dire un texte déjà élaboré dans une logique didactique) une phrase du genre : *Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme,* je sais ce que je dois faire. Il y a là un contrat plus ou moins explicite. Je vais *rédiger un texte* où, partant des hypothèses, je vais aller, par étapes déductives successives, vers la mise en évidence d'une des propriétés caractéristiques du parallélogramme, en m'appuyant éventuellement sur des théorèmes ou sur des résultats précédemment démontrés. Et, à des détails de rédaction près, nous serons d'accord : cette démonstration est correcte (ou ne l'est pas). Cette démarche qui semble si évidente entre nous, est loin d'être naturelle.

Pour nos élèves, il y a au moins deux obstacles :

- comprendre les raisons d'être d'une telle démarche et non pas se contenter de « On voit bien que.... Il n'y a qu'à mesurer ! » ;
- produire un *texte* porteur de sens, car il ne faut pas se leurrer : *démontrer* c'est, *in fine*, produire un texte écrit ! Dans ce travail de rédaction, chacun d'entre nous sait combien il est délicat de trouver le « juste équilibre », entre un excès de détails et une insuffisance d'explicitation, équilibre qui n'est jamais qu'un consensus implicite.

Pour un élève, trouver sa place dans cette démarche de démonstration relève beaucoup plus d'une *pratique consensuelle* au sein de la classe que du résultat d'un enseignement normatif, fait de consignes précises. Et cette pratique s'acquerra d'autant plus facilement que les situations proposées feront sentir le *besoin* d'une démonstration.

La démonstration déductive n'est pas la seule forme de raisonnement en mathématiques

Il faut ici insister sur un point essentiel concernant la pratique des mathématiques et en particulier des mathématiques scolaires. Il faut éviter de donner l'image d'une mathématique entièrement tournée vers la démonstration déductive. Il faut aussi mettre en valeur, conjointement à la démarche de démonstration, la pratique de la *démarche heuristique*. Prenons quelques exemples pour clarifier cette idée.

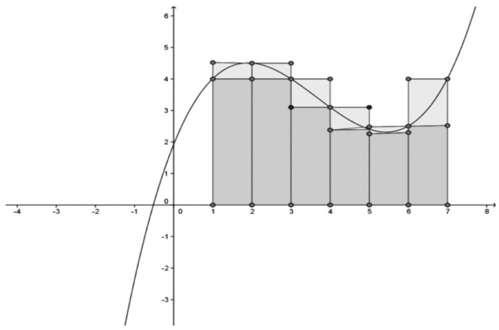
a) Lorsque je remplis une grille de sudoku, j'ai une démarche parfaitement rigoureuse, organisée, qui, étape par étape, va me conduire à la grille complète. Une telle démarche, pour rigoureuse qu'elle soit, n'est pas du même ordre qu'une démonstration.

b) Lorsque je veux payer une somme de 1937 € avec des billets et des pièces de 100 €, 50 €, 20 €, 10 €, 5 €, 2 €, 1 € en utilisant un minimum de billets et de pièces, je procède de la façon suivante : *à chaque étape je choisis le plus gros billet ou pièce X pour passer de la somme S à la somme S – X*. Ainsi, dans mon exemple, j'aboutis à 19 billets de 100 €, 1 billet de 20 €, 1 billet de 10 €, 1 billet de 5 €, 1 pièce de 2 €.

Voilà encore une démarche, un algorithme, parfaitement rigoureux, logique, dont j'ai la conviction qu'il est optimal, sans pour autant en avoir fait la démonstration.

c) On pourrait citer dans le même esprit le principe des tiroirs (ou principe du pigeonnier), si utile en arithmétique ou en combinatoire : *si on range n objets dans p tiroirs, avec n>p, alors il y aura au moins un tiroir qui contiendra plus d'un objet*.

d) La classique figure, ci-dessous, qui sert de support à la mise en place des sommes de Riemann et de l'intégrale de Riemann, est elle aussi plus une démarche heuristique qu'une démonstration *stricto sensu,* comme de façon plus générale toutes sortes de résultats que l'on obtient par des comparaisons d'aires. Certes, on peut aller vers une démonstration, *stricto sensu*, mais au prix de bien des lourdeurs et des difficultés.



Dans notre enseignement, nous ne valorisons sans doute pas assez de telles démarches.

Prenons de la hauteur

Montrer ce qu'est une démonstration, chose que tout professeur de mathématiques a essayé de faire, est à la fois d'une certaine nécessité et mission impossible : mettre de l'ordre et de la méthode dans une nébuleuse d'hypothèses, de théorèmes, de résultats disponibles, de conjectures, d'étapes intermédiaires... On pourrait dire de façon simpliste qu'une démonstration mathématique est une séquence d'étapes déductives qui mènent à la conclusion visée. Les règles qui régissent ces séquences ont fait l'objet d'une formalisation qui nous paraît intangible et, en tant que mathématiciens sûrs de notre fait, nous nous plaisons à *reconnaître* la validité, la rigueur d'une démonstration. Sauf que cette vision idyllique, qu'on pourrait qualifier de *formelle* ne résiste pas à l'observation de ce que les mathématiciens eux-mêmes proposent en guise de démonstration. Le point d'orgue de cette vision très formelle d'une démonstration fut atteint par l'école formaliste autour de D. Hilbert, au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle. Leur ambition était de réduire les mathématiques à un langage rigoureusement formalisé. Les limites d'un tel formalisme « totalitaire » se firent vite sentir, d'abord d'un point de vue théorique (théorème d'incomplétude de Gödel, impossibilité de s'assurer de la non contradiction d'une théorie aussi élémentaire que l'arithmétique...), ensuite d'un point de vue pratique (cf. les difficultés qu'un traité comme celui de Bourbaki rencontre pour mettre en place la théorie des ensembles). Et les tentatives de pseudo-formalisation parfois mises en place dans notre enseignement butent à leur niveau sur les mêmes difficultés.

Dans la réalité quotidienne de la communauté mathématique (celle des producteurs de mathématiques), fonctionnent ce que l'on pourrait appeler des *démonstrations consensuelles*, souvent bien moins formelles et dont l'objectif, pour un mathématicien, est simplement de convaincre ses pairs de la véracité de ce qu'il avance. Il y a là quelque chose d'un peu subjectif au point que le Clay Mathematics Institute, qui offre un prix d'un million de dollars à qui démontrerait l'une des sept conjectures qu'il propose, demande un délai de deux ans avant de décerner le prix, le temps que le consensus de la communauté se fasse.

C'est dans ce sens qu'apparaît une différence entre formalisme et rigueur. Une vision simpliste pourrait accréditer l'idée que la rigueur est fonction du degré de formalisation d'une démonstration. En réalité, les mathématiciens et aussi les enseignants sont parfaitement capables de dire si telle ou telle démonstration est rigoureuse sans pour autant qu'elle soit totalement formalisée. Ou, soyons plus modestes, à une époque donnée, dans un contexte donné, nous sommes en gros d'accord sur la rigueur d'une démonstration. Encore que...! Même à une époque donnée, dans un contexte donné, nous pouvons avoir entre nous des divergences profondes. J'en veux pour preuve le débat quant au statut des « arbres » en probabilité. Certains d'entre nous estiment qu'on peut parfaitement raisonner en toute rigueur à partir d'arbres, d'autres sont beaucoup plus réticents à accepter de telles façons de faire comme valant démonstration.

Les enjeux didactiques de la démonstration

Après ces généralités, venons-en à la démonstration comme objet didactique. Qu'essayons-nous de faire faire à nos élèves lorsque nous leur demandons de *démontrer* ? Qu'essayons-nous, nous-mêmes, de faire lorsque nous leur exhibons une démonstration ? Avant d'aller plus loin, j'y vois deux grands objectifs qui ne s'excluent nullement :

- Prouver de façon logique, rationnelle, en dehors de tout argument d'autorité, de simple observation, de conviction personnelle ou d'appel au « bon sens », la validité d'une conjecture émise pour des raisons diverses (intuition, expérimentation, observation, simulation...)
- Éclairer, expliquer, asseoir, par la démarche démonstrative elle-même, la *compréhension* du résultat visé qui n'était peut-être encore qu'une idée vague au domaine d'intervention mal délimité.

En tout cas, une chose est évidente : on ne se lance pas dans une démonstration à l'aveugle, comme si par miracle on allait aboutir au résultat visé. Il en est ainsi des démonstrations mathématiques comme des observations scientifiques : ce ne sont pas des démarches aléatoires. Ce fait est pédagogiquement capital : exhiber « la » démonstration sans indiquer peu ou prou les raisons de choisir cette démarche plutôt qu'une autre risque d'accroître la sensation « magique » de la démonstration. Chacun d'entre nous se plait parfois dans ce rôle de magicien, mais sa pratique systématique ne saurait constituer une « bonne pédagogie ». C'est aussi par là que l'enseignant est indispensable : le manuel, lui, faute de place, faute du dialogue au sein de la classe va exhiber sans autre forme de procès « la » démonstration. Nous-mêmes, lorsque dans un traité de mathématiques nous sommes en présence d'une démonstration qui nous semble tomber du ciel, nous aurions souvent bien besoin d'un professeur.

Bref, il y a donc au sein d'une démonstration, une double tension entre *rigueur* (validation selon les règles de l'art mathématique) et *compréhension* (rôle plus « explicatif », plus « constructif » par la mise en évidence des tenants et des aboutissants d'un résultat). Entre ces deux objectifs qui souvent se complètent, il y a toutes sortes de situations intermédiaires dont l'appréhension est souvent affaire de pédagogie et aussi de sensibilité personnelle.

Illustration à partir de quelques exemples

Prenons un premier exemple : il est bien clair (et donc on ne sent pas, *a priori*, le besoin d'une démonstration) que dans un rectangle les diagonales sont de même longueur. Déjà plus délicate est la question réciproque : suffit-il qu'un quadrilatère ait des diagonales de même longueur pour être un rectangle ? Mais l'exhibition d'un contre-exemple suffit à justifier la réponse négative. L'utilisation d'un contre-exemple dans ce contexte simple est facilement acceptée par l'élève, comme valant démonstration. Mais l'usage du contre-exemple comme démonstration mérite notre attention de pédagogue. N'oublions pas que, dans la vie courante et dans d'autres disciplines, *il n'y a pas de règle sans exception*. Cette idée se fait aussi jour en mathématiques. D'importants mathématiciens du XIX^{ème} siècle pensaient que toute fonction continue était dérivable, alors qu'ils connaissaient parfaitement quelques contre-exemples. Ces contre-exemples étaient mis de côté, « placardisés », comme des monstres dont on n'avait que faire avant de remettre en cause la rigueur d'une démonstration ou les concepts sous-jacents.

Déjà plus intrigant est le résultat suivant : le quadrilatère formé par les milieux des côtés d'un quadrilatère quelconque est un parallélogramme. Certes, tous les dessins le confirment, mais il y a là quelque chose d'un peu surprenant, auquel on ne s'attend pas *a priori*. La démonstration va non seulement valider le résultat, mais aussi dévoiler la cause profonde de ce qui a pu être perçu comme un peu « miraculeux ».

Enfin si, à force d'observations (un logiciel de géométrie dynamique sera ici d'un grand secours) et d'une certaine dose de conseils du professeur, se fasse jour l'idée qu'orthocentre, centre de gravité et centre du cercle circonscrit d'un triangle sont alignés, la démarche démonstrative va évidemment valider la conjecture, mais avec une mise en oeuvre d'un matériel géométrique déjà nettement plus riche (et au prix sans doute d'un guidage par étapes successives du professeur avec le risque, que l'élève ne fasse que « suivre » la démonstration : « Ah, oui ! »).

Tiens ! Mes trois exemples relèvent tous de la géométrie. Pour toutes sortes de raisons, trop longues à analyser ici, la géométrie élémentaire est un terreau privilégié pour « apprendre à démontrer ». La réduire à la portion congrue dans nos programmes risque de changer l'image même, le fonctionnement, l'objectif de l'enseignement des mathématiques. Les décideurs, évidemment conscients de leurs choix, en ont-ils bien pris la mesure ? Cela est d'autant plus surprenant que l'apparition de logiciels de géométrie dynamique très conviviaux change de façon substantielle le rôle du dessin, de l'expérimentation, de l'art de conjecturer, sans même parler de l'intérêt, en termes de formation, qui réside dans la maîtrise d'un tel outil pour un élève.

Quittons alors la géométrie.

Dans les autres secteurs des mathématiques scolaires, les démonstrations ont souvent une composante calculatoire plus ou moins forte. Une séquence de calcul correcte fait, totalement ou partiellement, office de démonstration. L'usage d'une formule n'est pas perçu tout à fait de la même façon que la rédaction d'une séquence démonstrative en géométrie. Un exemple particulièrement parlant consiste à démontrer que la série harmonique est divergente.
En effet, l'étude « expérimentale » du comportement de $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, même avec des moyens de calcul puissants amène à conjecturer la convergence de cette suite.
Évidemment, toutes les tentatives pour le démontrer échouent. La démonstration de sa divergence sert à la fois à valider le

résultat, mais aussi à « montrer », au delà des apparences, le pourquoi de cette divergence.
Ce genre de situations où l'intuition, l'expérimentation, l'observation sont insuffisantes, voire trompeuses, sont évidemment à privilégier pour convaincre les élèves de la nécessité d'une démonstration. Dans le même ordre d'idée, on peut citer l'étonnante probabilité que deux personnes aient le même jour anniversaire au sein d'un échantillon relativement réduit (une classe d'une trentaine d'élèves fait très bien l'affaire) ou plus simplement les probabilités différentes d'obtenir les sommes 5 ou 6 en lançant deux dés. Les démonstrations, là encore, valident le résultat mais ont aussi pour but de *convaincre, d'éclairer*, de battre en brèche des intuitions trop simplistes.

Plus délicate, plus profonde, est par exemple la situation liée au théorème des valeurs intermédiaires qui affirme qu'une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ prend au moins une fois toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. Ce résultat, ce théorème, est « évidemment » vrai. L'intuition, l'intuition graphique, est ici tellement forte qu'on peut penser dans un premier temps perdre son temps à démontrer une pareille « évidence ». La démonstration, dans ce cas, ouvre d'autres horizons liés au statut des nombres réels (si on se restreint aux nombres rationnels, le théorème n'est plus valide !).

Faire admettre la nécessité d'une démonstration, surtout lorsque celle-ci confirme un résultat dont on a toutes les raisons d'être convaincu, devient un véritable défi pédagogique dans notre enseignement. Avec l'arrivée de l'algorithmique dans l'enseignement secondaire, l'affaire devient encore plus délicate. Qu'est-ce que valider un algorithme ? Est-il « écrit » correctement ? Est-on sûr qu'il produit les résultats escomptés ? Très souvent les élèves (et sans doute aussi nombre d'entre nous) se contenteront de constater qu'il fonctionne bien pour les besoins de la situation, sans même être sûrs qu'il fonctionnerait toujours bien dans toutes les situations !

Le point de vue de l'élève

Jusque-là nous avons surtout regardé la démonstration du point de vue de l'enseignant ou encore du mathématicien, sans trop nous occuper de l'élève, de son degré de culture mathématique, de son âge, de sa scolarité. Comment voit-il les choses ? Pour lui, « entrer en mathématiques » peut se comparer un peu à « entrer en religion ». S'introduire dans les arcanes d'une « bonne démonstration » est d'une certaine manière analogue à l'appropriation d'une démarche liturgique qu'on perçoit d'abord de l'extérieur, avant d'y pénétrer. Réussir dans les mathématiques scolaires, c'est avoir une bonne maîtrise de cette « liturgie déductive ».
Il y a aussi chez l'élève, même assez avancé, une « logique de l'autorité » : ce que dit le manuel, ce que dit le professeur est valide. L'autorité fait office de démonstration. Pour nous aussi d'ailleurs : pour moi le grand théorème de Fermat est valide parce que je ne conteste pas (j'en serais bien incapable !) l'autorité scientifique d'A. Wiles et de ses collègues.

D'une façon plus générale, lorsqu'un professeur fait une démonstration, son but est de valider un résultat par la seule raison, par une démarche purement déductive, qui ne fasse intervenir ni considérations expérimentales, ni affirmations péremptoires, ni simples intuitions. Comment l'élève reçoit-il cela? S'il n'est pas encore un habitué de cette pratique de démonstration, cette façon de faire est surtout ressentie comme un argument d'autorité, plus qu'une tentative d'explicitation. Au mieux il « suit » ou, plus passivement encore, il fait « confiance » à son professeur et se dit qu'il lui suffira de retenir le résultat.

Le professeur « sait » la démonstration, mais s'il ne la savait pas d'avance, la trouverait-il ? Parfois l'élève se rebelle et demande au professeur le pourquoi de telle ou telle idée qui lui paraît tomber du ciel ou lui dit simplement qu'il n'y comprend rien. Nous nous retrouvons souvent bien démunis devant ce type de blocage ou de questionnement.

Là encore apparaît une facette de la démonstration : sa dialectique avec le processus de compréhension. On peut très bien « suivre » les étapes d'une démonstration sans pour autant comprendre le résultat et surtout ses ressorts. Durant mes études j'ai parfois vécu cela : beaux cours que je « suivais » avec admiration, pour ne rentrer dans la compréhension un peu profonde que quelques mois ou années plus tard, voire jamais. À l'opposé j'ai eu des maîtres qui m'ont fait comprendre des choses passionnantes sans que j'aie compris toutes les démonstrations. Un de ces maîtres et ami, après m'avoir fait saisir des idées très profondes, me disait avec clairvoyance et franchise : « Daniel, les démonstrations sont un peu trop compliquées pour toi ! » Mais ma « culture mathématique » avait quand même progressé !

En guise de conclusion

Mes quelques propos ne constituent en aucun cas un « cours » de didactique de la démonstration, ni même une analyse philosophique ou épistémologique un peu approfondie. Mon intention est bien plus modeste : donner quelques éclairages sur une de ces pratiques propres à notre enseignement, pratiques que nous vivons souvent comme naturelles, allant de soi, alors qu'il n'en est rien pour nos élèves. Que ce soit dans l'enseignement de notre discipline, que ce soit dans l'enseignement élémentaire, que ce soit dans celui d'autres disciplines, on rencontre une multitude d'exemples de telles situations didactiques : transmettre des pratiques, des concepts aussi, qui sont à la fois naturels, essentiels et difficiles à expliciter. Les blocages que cela entraîne parfois ne sont pas pour rien dans un certain nombre de difficultés ou d'échecs. Ai-je répondu à la question que pose le titre ? Non ! Ai-je répondu aux questions que les collègues se posent ? Sans doute pas non plus !

Bibliographie proposée par l'auteur :

[1] Arsac G., Chevallard Y., Martinant J.-L., Tiberghien A., Balacheff N., *La transposition didactique à l'épreuve,* La Pensée sauvage, Grenoble, 1994

[2] Commission inter-IREM Epistémologie et Histoire des mathématiques, *La Rigueur et Le Calcul. Documents historiques et épistémologiques* , CEDIC-Nathan, 1982

[3] P. J. Davis, R. Hersch, *L'Univers mathématique*, Gauthier-Villars, 1985

La rédaction de PLOT recommande aussi :

[4] G. Dowek, *Les métamorphoses du calcul*, Le Pommier, 2007

[5] Imre Lakatos, *Preuves et réfutations*, PUF, 1994