

# La classe de mathématiques au jour le jour

Denis Page

*Cet article, compte rendu d'activité en classe de terminale C, a été publié en février 1988 dans le Bulletin Vert n°362.*

*1988, une époque où cohabitaient des terminales C (série scientifique avec 9 h de maths hebdomadaires) et des terminales D (section scientifique avec moins d'heures de maths mais plus d'heures en biologie) ; c'était avant la naissance des terminales S (6 heures de maths hebdomadaires) et le choix d'une spécialité maths, physique ou SVT de deux heures en terminale.*

*Denis Page, l'auteur de l'article, enseignait alors au lycée Paul Painlevé à Oyonnax. Il avait prévu une heure pour la recherche individuelle. Avec l'usage des calculatrices graphiques dès la classe de seconde, les élèves de 2012 devraient rapidement conjecturer l'existence de trois racines réelles après avoir affiché la courbe de la fonction. Quant aux valeurs approchées des trois racines, elles s'afficheront à l'écran et nous serions sûrement très étonnés si nos élèves y « voyaient » des cosinus ! Envisager un changement de variable pour résoudre l'équation ne leur est pas familier mais « rentrer » l'équation dans un logiciel de calcul formel pour rechercher ses racines est en passe d'être un réflexe... autres temps, autres mœurs !*

## A. Objectifs

### Constat

En Terminale Scientifique, dominent deux objectifs :

- donner aux élèves les meilleures chances de réussir au bac,
- donner aux élèves une bonne formation scientifique.

Les deux objectifs sont parfois contradictoires, mais ce qui m'intéresse ici, c'est un objectif intermédiaire commun : que les élèves parviennent à résoudre des questions mathématiques ne relevant pas de l'application directe de techniques connues d'eux.

Ces questions mathématiques peuvent avoir des origines diverses, des exercices ou problèmes d'examens aux problèmes issus d'autres disciplines, en passant par les questions que se posent les élèves lorsqu'ils comprennent mal une notion ; les problèmes ouverts entrent bien sûr

aussi dans ce cadre.

Or, j'ai observé que, face à une question mathématique, les élèves prenaient leur (plus beau) cahier et se mettaient à réfléchir. Bien sûr, si la question était du type « résolvez  $8x^2 - 6x - 1 = 0$  », ils écrivaient rapidement la solution. Mais, si la question ne leur était pas familière, *ils n'écrivaient rien et restaient désarmés et stériles*. Et même si la question était sans grande difficulté, ils ne la résolvaient pas.

### Remarques

À mon avis, on observerait moins cette impuissance si, dans toutes les classes, on proposait plus fréquemment aux élèves des énoncés ouverts à la place des éternels exercices techniques. Mais plusieurs obstacles s'y opposent :

- difficultés pour faire acquérir aux élèves les savoir-faire (techniques) minimum ;
- crainte de passer trop de temps dans des activités dont l'efficacité n'est pas visible à court terme ;

- conditionnement des pratiques d'enseignement par la nature des sujets d'examens.

### Objectifs

Devant ce constat, j'ai choisi comme objectif des premières séances de l'année, l'objectif suivant.

Montrer aux élèves :

- la nécessité d'une phase de recherche précédant nécessairement la phase d'écriture d'une solution d'une question mathématique ;

- les outils de cette phase de recherche : brouillon, calculatrice... et ses caractères : diversité des idées, étude de cas particuliers, bricolage, observation ; peu d'exigence au niveau de la rigueur du raisonnement, des notations, de l'écriture ;

- l'efficacité de cette phase de recherche qui, seule, permet de comprendre le problème, de cerner ses difficultés, de comparer diverses idées, diverses méthodes et d'énoncer des conjectures (lorsqu'il ne s'agit pas de questions fermées du type « prouver que... »).

### Choix de l'activité

J'avais choisi, l'an dernier : « Trouver des entiers dont la somme est 67 et le produit le plus grand possible ». Cette année, j'ai pensé que les élèves seraient plus facilement convaincus si je choisissais une activité qui leur paraîtrait moins marginale. J'ai choisi l'énoncé suivant :

« Résoudre l'équation  $8x^3 - 6x - 1 = 0$  »

Je me suis intéressé à cette équation en tentant, sans succès, d'écrire  $\cos 20^\circ$  à l'aide de radicaux ;  $\cos 20^\circ$  est l'une des solutions, les autres sont  $\cos 100^\circ$  et  $\cos 140^\circ$ . J'ai choisi cet énoncé car sa lecture ne permet pas de prévoir quelle technique

va être déterminante pour sa résolution (le calcul trigonométrique) et que, bien au contraire, c'est en « bricolant » avec leur calculatrice que les élèves vont découvrir la nécessité de cette technique.

**B. Déroulement des séances** (premières séances de l'année)

### Recherche individuelle libre (1 heure)

Après les formalités administratives, les renseignements pratiques et quelques généralités sur l'enseignement des maths en T.C., je donne, sans préambule aucun et sans indication, l'énoncé du premier exercice de l'année : « Résoudre l'équation  $8x^3 - 6x - 1 = 0$  », et je demande aux élèves de chercher individuellement. J'observe les directions prises par les élèves et je prends des notes :

- recherche de solutions évidentes ;
- recherche de solutions approximatives successives à l'aide d'une calculatrice ;
- recherches diverses de résolution algébrique, notamment, utilisation de  $a - b$ , de changement de variables,  $X = x^2$ ,  $X = 1/x...$  ;
- calcul de  $\Delta$  !
- étude des variations du polynôme ;
- représentation graphique du polynôme.

À la fin de la séance, je dis simplement qu'ils peuvent poursuivre leurs recherches à la maison.

### Débat (½ heure)

Le lendemain, certains arrivent avec des valeurs approchées des solutions, obtenues à l'aide de calculatrices programmables, mais parfois avec seulement une ou deux valeurs.

Je collecte les résultats des uns et des autres au tableau et fais le bilan :

- nous savons qu'il y a trois solutions ;
- nous avons des valeurs approchées de ces trois solutions ;
- les tentatives de résolution algébrique se sont révélées infructueuses.

Je pose la question : « le problème est-il résolu ? »

OUI pour certains, NON pour d'autres, « *on n'a pas de solutions exactes* ». Ce dernier point est d'ailleurs contesté, car des vérifications avec les calculatrices « donnent 0 » ; je ne me prononce pas. Deux niveaux de résolution apparaissent donc :

1) *Résolution approchée* : de l'avis général, elle a été réalisée de façon satisfaisante.

2) *Résolution exacte* : devant l'incapacité des élèves à me dire clairement ce que cela signifie, je leur demande des exemples d'équations dont ils connaissent les solutions exactes, et généralise en disant qu'on écrit des valeurs exactes en se servant de symboles mathématiques : fractions, radicaux... Je pose la question : « Comment obtenir des valeurs exactes des solutions ? ». Ils pensent au calcul algébrique. C'est l'occasion de leur parler de la résolution par la méthode de Cardan et de leur apprendre que là se trouve l'origine historique des nombres complexes.

Mais je veux les entraîner dans une autre direction, et leur suggère que les valeurs approchées trouvées cachent peut-être des valeurs exactes simples : 1,732 ne cache-t-il pas  $\sqrt{3}$  et 1,571,  $\frac{\pi}{2}$  ?

Un élève propose de chercher avec une calculatrice.

### Recherche individuelle (½ heure)

Plus ou moins rapidement, en cherchant au hasard avec leurs calculatrices, la plupart des élèves découvrent que les valeurs approchées des solutions correspondent à des cosinus ou des sinus d'angles simples ( $10^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $20^\circ$ , etc.) et certains — pas tous — cherchent à le prouver.

### Énoncé d'une conjecture (½ heure)

Je regroupe au tableau les résultats trouvés par la classe :  $-\sin 50^\circ$ ,  $\cos 140^\circ$ , etc.

Après l'élimination des valeurs erronées et de petits calculs trigonométriques faits au tableau, nous retenons finalement trois valeurs :  $\cos 20^\circ$ ,  $\cos 100^\circ$  et  $\cos 140^\circ$ .

Je pose à nouveau la question : « le problème est-il résolu ? »

Les avis sont partagés : pour beaucoup de tenants du OUI, c'est évident. D'autres tenants du OUI se justifient par la vérification à l'aide de leur calculatrice. Mais, suivant les calculatrices, le calcul donne 0 ou  $10^{-10}$ . « Si certaines calculatrices donnent  $10^{-10}$ , c'est qu'elles font une erreur ; les meilleures calculatrices donnent 0, donc  $\cos 20^\circ$  est une solution exacte ».

Un tenant du NON, un redoublant, explique que *toutes* les calculatrices font une erreur dès le calcul de  $\cos 20^\circ$  et *a fortiori* sur la valeur de  $8x^3 - 6x - 1$ .

Finalement, la classe se rallie à l'avis qu'il faut faire une *démonstration*. Mais tous les élèves en sont-ils convaincus ?

« DÉMONSTRATION DE QUOI ? »

C'est moi qui pose la question et qui fais énoncer clairement la *conjecture*, après avoir précisé le sens de ce mot. « *L'équation  $8x^3 - 6x - 1 = 0$  admet trois solutions réelles :  $\cos 20^\circ$ ,  $\cos 100^\circ$  et  $\cos 140^\circ$  ».*

### Écriture d'une démonstration (1 heure)

En recherche individuelle, la plupart sont bloqués et c'est moi qui dois les aiguiller

sur la relation  $3\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{3}$ . Cette indication

ne permet d'ailleurs pas à tous de démarquer ; il faut d'autres coups de pouce : idée de rechercher une formule  $\cos 3\theta = \dots$  et de l'appliquer. Même après avoir prouvé

$4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9} = \frac{1}{2}$  certains s'arrêtent,

sans chercher le rapport avec  $8x^3 - 6x - 1 = 0$ , ou sans le voir en dehors de l'application mécanique d'algorithmes de résolution (1<sup>er</sup> degré,  $\Delta$ , forme canonique), ont-ils compris la notion d'équation ? Tous finissent cependant par écrire une démonstration.

Je pose une troisième fois la question : « le problème est-il résolu ? »

La réponse est positive. Je fais cependant remarquer que nous n'avons pas rédigé de solution : *la rédaction* n'est pas nécessaire car nous n'avons pas l'intention de *communiquer* notre résolution à quelqu'un qui n'aurait pas participé à cette résolution. D'autre part, j'explique que, pour moi, il n'est pas résolu complètement car j'aurais bien envie d'écrire les solutions à l'aide de radicaux carrés et cubiques ; ce problème est lié à la théorie des équations résolubles par radicaux que j'ai bien oubliée et que j'avais sans doute mal assimilée. Je ne manque pas l'occasion de dire quelques mots sur la vie éphémère d'Évariste Galois.

### La morale de l'histoire (½ heure)

J'annonce, sans explication :

« Exercice suivant : résoudre l'équation  $8x^2 - 6x - 1 = 0$  ».

Les élèves résolvent cette équation du second degré grâce au sempiternel discriminant.

J'explique aux élèves *le sens de tout ce travail* :

- Le deuxième exercice était destiné à montrer, de façon caricaturale, la différence entre une question fermée (dont la solution est une application directe, mécanique, d'une technique connue) et une question ouverte (sur laquelle on n'a *a priori* aucune certitude et peu d'idées).

- La résolution d'une question de mathématiques comporte toujours, avant l'écriture d'une solution, une phase de recherche :

- quelques secondes de réflexion dans le deuxième exercice (question fermée) ;

- un travail long, laborieux, plein d'incertitudes et de surprises dans le premier exercice (question ouverte).

- Comme les questions dont on trouve une méthode de résolution en quelques secondes sont rares, il est indispensable d'être toujours prêt à chercher : avoir toujours sous la main du papier brouillon, une calculatrice..., et s'en servir, avoir une attitude active, observer. Une citation du mathématicien Stieltjes vient renforcer ce conseil et sera la conclusion de ce travail :

« À l'égard du problème que vous posez, j'avouerai que je n'ai point la prétention d'éclaircir un sujet aussi difficile par la réflexion et par l'imagination seules. Je procéderai comme les naturalistes en appelant au secours l'observation. Pour le moment donc, je fais des calculs numériques assez laborieux, en cherchant toutes les fractions convergentes pour les cas particuliers  $p = 200$  et  $p = 500$ ... C'est seulement lorsque j'aurai amassé de cette façon un grand matériel que je pourrai commencer à travailler sérieusement ».

### C. Conclusion

#### Mes objectifs initiaux

Ils étaient de convaincre les élèves de la nécessité d'une phase de recherche et de leur en montrer les outils et l'efficacité. Les ai-je convaincus ? Je n'ai rien fait pour essayer d'évaluer si j'avais atteint mes objectifs. Un bon test serait de voir s'ils ont plus souvent du papier brouillon sous la main ; la plupart en ont assez souvent ! Quant à savoir s'il y a un progrès, cela m'est impossible puisqu'avant ces séances, je ne les avais jamais vu travailler. À tort ou à raison, je n'ai pas cru que des interviews d'élèves me donneraient des informations valables.

#### Autres objectifs

Cette activité m'a paru riche, car elle a touché plusieurs autres objectifs de l'enseignement de cette classe. Cela me paraît important car il ne me semble ni possible, ni souhaitable d'organiser une activité qui ne touche qu'à un seul objectif et l'efficacité de l'enseignement dépend sans doute beaucoup de la richesse des activités organisées.

*Acquisition de techniques* : formules de trigonométrie, étude de fonctions, résolution graphique, programmation d'une suite de valeurs approchées, etc.

*Maîtrise de certaines notions* : notion d'équations, notion de valeur exacte et de valeur approchée, connaissance de la calculatrice.

*Aperçu sur l'histoire des maths* : Cardan, Galois, Stieltjes ; mise en question de l'image que les élèves ont des maths.

#### Pour terminer

- Est-ce un travail efficace dans l'optique du baccalauréat ? dans l'optique d'une formation scientifique ?
- Ce genre de travail prend du temps. Faut-il en organiser souvent en Terminale ? dans les autres classes ?

*P.S.* Cette activité et son compte rendu n'auraient jamais vu le jour sans l'équipe « *Problème ouvert* » de l'IREM de Lyon et sans Alain Bouvier dont j'ai subi l'influence à travers plusieurs stages et à travers le livre « *La mystification mathématique* » (Hermann), où j'ai trouvé la citation de Stieltjes.

