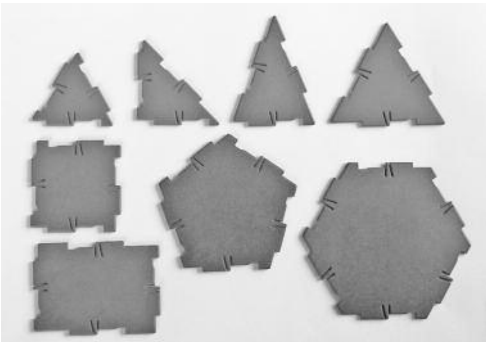
Le POLYDRON®

Jean Fromentin

Dans le numéro 12 de PLOT, je présentais une activité que j'avais découverte fortuitement en classe à la suite de l'utilisation du matériel *Polydron*. C'est ce matériel dont je voudrais présenter ici toute la richesse.

Par rapport à d'autres matériels permettant de réaliser des solides, celui-ci a la particularité de posséder, en plus des figures régulières, des triangles isocèles, des rectangles et des triangles rectangles isocèles, ce qui fait tout son intérêt.



Les côtés de toutes les pièces n'ont que deux longueurs : celle du côté du carré et celle de sa diagonale, ce qui élargit le champ d'utilisation de ce matériel au calcul sur les racines carrées et plus généralement au calcul algébrique.

En géométrie de l'espace

Les solides de Platon

Une activité que j'aimais bien mener au rétroprojecteur devant toute la classe, dès la cinquième, était de montrer, par leur fabrication, qu'il n'y a que cinq polyèdres réguliers. Pour étayer la définition d'un solide régulier, je montrais un cube : toutes les faces sont des carrés (des polygones réguliers) et il y a toujours trois faces (toujours le même nombre de faces) autour de chaque sommet.

Je commençais par les solides dont les faces sont des triangles équilatéraux. Le solide à construire a au minimum trois triangles autour d'un sommet. On assemble les trois triangles et un quatrième triangle permet d'obtenir un solide avec trois faces autour de chaque sommet. Le tétraèdre est exposé à la classe puis placé sur le bureau.

On poursuit alors avec quatre triangles autour d'un sommet et on complète pour avoir toujours quatre faces autour de chaque sommet. On obtient l'octaèdre.

De la même manière, avec cinq triangles autour de chaque sommet, on obtient l'icosaèdre.

On arrive alors à six triangles autour d'un même sommet.

Questionnement à la classe : 6 fois 60° ? Les six triangles sont dans un même plan. On ne peut pas aller plus loin. On n'obtient donc que trois solides réguliers dont les faces sont triangulaires.

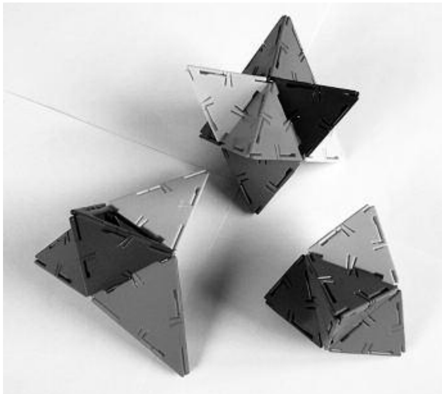
On passe alors aux faces carrées. On observe que le solide à construire ne peut avoir que trois faces carrées autour de ses sommets. On obtient un cube. Quatre carrés assemblés sont dans un même plan. On passe donc au pentagone.

Là encore, le solide à construire ne peut avoir que trois pentagones autour de ses sommets, l'assemblage de quatre pentagones dépassant les 360°. On obtient le dodécaèdre.

On passe alors à l'hexagone. Mais l'assemblage de trois hexagones est plan. On ne peut donc plus conti-nuer le processus et il n'y a que cinq solides réguliers : les cinq solides de Platon.

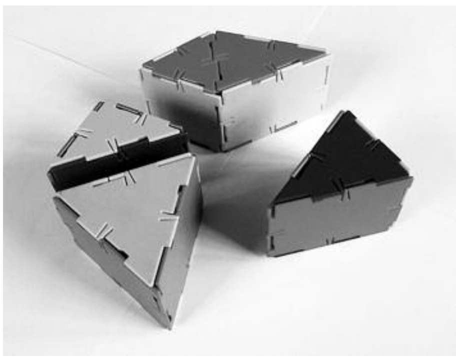
Des polyèdres convexes aux polyèdres étoilés

Partant de ces solides de Platon, il est aisé de réaliser les polyèdres étoilés correspondants en remplaçant les faces, les unes après les autres, par des pyramides.



Les solides au programme

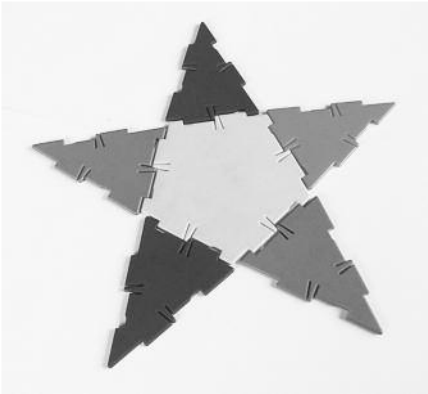
Concernant les solides étudiés dans les programmes de sixième et de cinquième, on peut réaliser bien sûr le cube, mais aussi un parallélépipède (deux faces carrées et quatre rectangulaires) et, compte tenu de l'existence de pièces non régulières, des prismes de bases variées dont les faces latérales peuvent être des rectangles. On peut assembler deux prismes de même hauteur pour réaliser un nouveau prisme dont le volume sera la somme des volumes des deux premiers



prismes pour conforter la formule générale du volume d'un prisme : Aire de base x hauteur. Avec des pièces récemment créées par la marque, on peut réaliser aussi des cylindres.

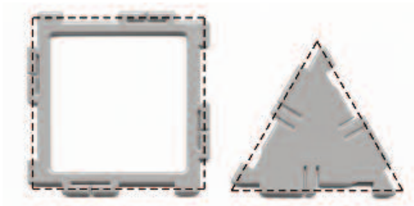
En quatrième, on peut réaliser de nombreuses pyramides, même de base rectangulaire, dont les faces latérales sont des triangles équilatéraux ou isocèles. Les triangles isocèles et rectangles isocèles permettent d'obtenir une pyramide non régulière.

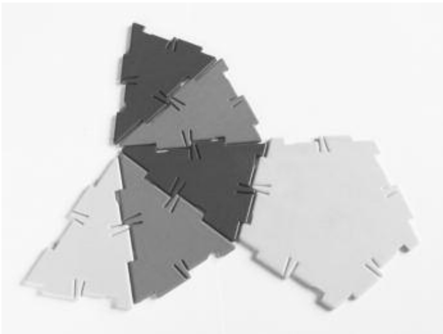
Ce matériel permet l'étude des patrons de cubes, de parallélépipèdes, de prismes et de pyramides.
Pour ce dernier solide, il est intéressant de montrer au rétroprojecteur les deux types de patrons : le patron éclaté (ou étoilé) et le patron développé qui est plus « économique » dans sa construction à la règle et au compas, tant au niveau du nombre de manipulations dans les tracés que de l'emprise dans la feuille de papier.



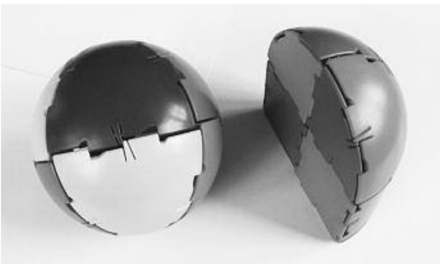
En géométrie plane

Sur les activités de géométrie plane, les bords irréguliers des pièces peuvent poser question. Quand on évoque les aires et périmètres, il faut passer mentalement de l'objet matériel Polydron avec ses encoches à l'objet mathématique. Ce saut ne me semble pas avoir posé de problème aux élèves qui font bien la différence entre le matériel et sa modélisation.



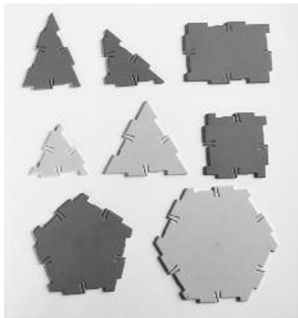


Enfin, en troisième, on peut proposer l'activité que j'ai décrite dans le PLOT n° 12 et réaliser, avec les nouvelles pièces, des sphères et des assemblages de cylindres, de cônes et de demi-sphères…



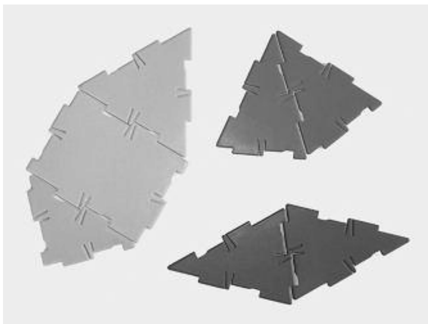
Une autre particularité du matériel *Polydron* est l'existence de pièces ajourées. Au niveau des représentations mentales, les pièces « pleines » privilégient les aires pour les polygones alors que les pièces ajourées privilégient leurs périmètres. Ainsi, pour un même solide réalisé en pièces pleines d'une part et ajourées d'autre part, le premier mettra l'accent sur les faces, le deuxième sur les arêtes.

Les symétries



Un premier travail peut consister en l'observation des différentes pièces de ce matériel et leur classement suivant qu'elles ont un, deux, trois, quatre, cinq, six ou huit axes de symétrie ; il existe en effet une pièce octogonale.

On peut réaliser des assemblages de deux, de trois, etc. pièces qui admettent un, deux etc. axes de symétrie. Par exemple, en assemblant deux triangles isocèles suivant un grand côté, on obtient un cerf-volant qui a un axe de symétrie, en les assemblant suivant leur petit côté, on obtient un losange qui, lui, a deux axes de symétrie.



On peut travailler de la même manière la symétrie centrale : par exemple, l'assemblage de deux triangles isocèles ou deux triangles rectangles isocèles tête-bêche donne un parallélogramme.

Les angles

Étant données les mesures particulières des angles des triangles équilatéraux, des triangles rectangles isocèles, des carrés et des rectangles, on peut réaliser, dès la sixième, des assemblages « plans » de pièces autour d'un même point. Il s'agit alors que la somme des angles en ce point soit égale à 360°.

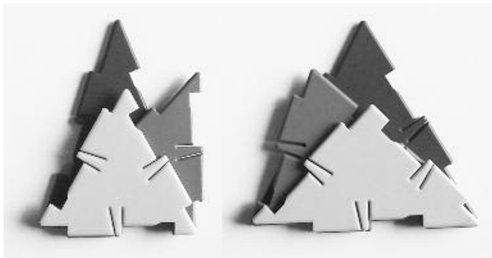
Pourquoi, par exemple, l'assemblage ci-dessous de triangles isocèles est-il plan ? Bien qu'on ne connaisse pas la mesure exacte des angles de ce triangle, la réponse peut tout de même être donnée grâce à la propriété de la somme des angles d'un triangle.

En troisième, on pourra donner une valeur approchée de la mesure des angles de ce triangle isocèle sachant que, si son petit côté est a, le grand côté est $a\sqrt{2}$.

Les aires

Une première activité, en cinquième, peut consister à comparer les aires « théoriques » des pièces triangulaires. Et cette comparaison peut se faire visuellement, par superposition des différentes pièces, tout en ayant à l'esprit la formule de l'aire du triangle (b x h)/2.

On recherche un côté commun aux deux pièces qui sera considéré comme base, et qui servira de base justement à la superposition, puis on compare les hauteurs.

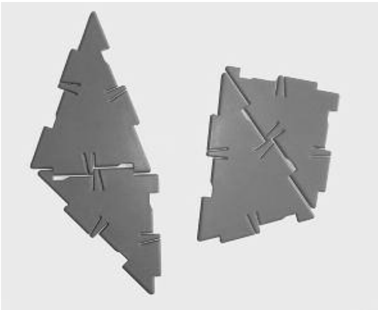


Les photos ci-dessus parlent d'elles-mêmes.

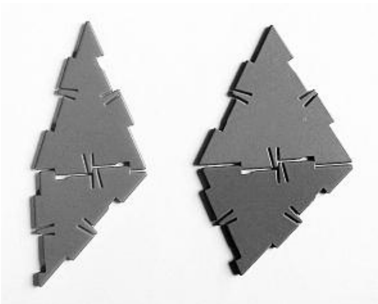
Les aires et périmètres

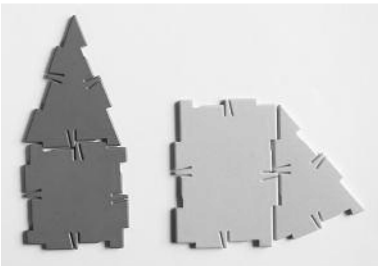
Une activité très riche, déjà rencontrée dans les brochures JEUX de l'APMEP avec le puzzle Curvica, consiste à réaliser des assemblages en faisant varier indépendamment l'un de l'autre aire et périmètre. Comme nous l'avons déjà signalé, les côtés des pièces n'ont que deux longueurs que nous noterons p et g, pour petite et grande longueur. L'expression des périmètres se fera facilement à l'aide de ces deux lettres. Le périmètre du carré est $4p$, celui du rectangle est $2p + 2g$, etc. Dans un premier temps, on peut demander aux élèves d'exprimer les périmètres de chacune des pièces qu'ils ont à leur disposition.

Dans un deuxième temps, il s'agit de proposer un assemblage dont on demande, bien sûr, d'exprimer le périmètre et de trouver un assemblage de même aire mais de périmètre plus grand ou plus petit…

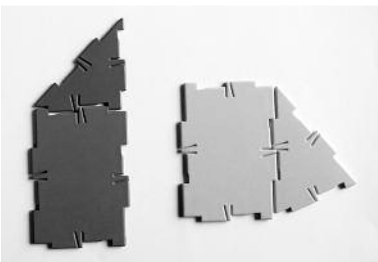


ou encore de même périmètre, mais d'aire plus grande ou plus petite.





Enfin, dans un troisième temps, à partir d'un assemblage, on peut en demander un autre d'aire plus grande ET de périmètre plus petit, ceci pour contrecarrer l'idée que le périmètre est une fonction croissante de l'aire.



Et en calcul numérique ou algébrique

Rappelons que les côtés des pièces n'ont que deux longueurs : a et $a\sqrt{2}$. De ce fait, les objets réalisés dans le plan ou dans l'espace peuvent donner lieu à des calculs purement numériques en décidant de donner une valeur numérique à a, ou à des calculs littéraux en gardant la lettre a pour désigner le petit côté.

Il y a ainsi tous les problèmes classiques de calcul de volumes des prismes et des pyramides réalisables avec les pièces du *Polydron*.
Pour les pyramides, la difficulté résidera dans le calcul de la hauteur. Pour le cylindre et le cône, le problème sera plutôt de calculer l'aire des pièces qui composent la surface latérale de ces solides. Mais il y a des problèmes plus simples. En voici un exemple : en joignant un carré et un triangle isocèle d'une part, un rectangle et un triangle équilatéral d'autre part, on obtient deux assemblages de hauteurs *a priori* égales à vue, comme le montre la photo ci-contre. D'où le problème proposé aux élèves : ces hauteurs sont-elles bien égales ?

Si ce matériel (ou un autre du même genre) vous séduit et si vous l'utilisez en classe, n'hésitez pas à nous **Transmettre** un article rendant compte de ces activités pour faire **Partager** vos expériences. Nous serons heureux de vous **Ouvrir** nos colonnes pour le donner à **Lire** à tous.