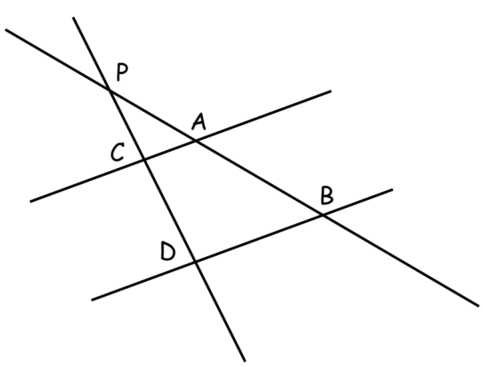
Puissance d'un point par rapport à un cercle

Henry Plane

Les programmes français d'enseignement des mathématiques ont réduit la géométrie à l'étude de quelques figures simples. De ce fait, nombre de notions, voire de mots, ne signifient plus grand-chose pour des jeunes et moins jeunes élèves et peut-être même pour des enseignants. Polaire, division harmonique, faisceaux de droites, tout cela qui était terreau pour modes de raisonnement logique, est devenu sorte de curiosité historique.
Nous proposons ici de faire revivre une de ces notions qui n'est pas des plus anciennes, d'autant qu'elle pouvait bousculer l'ordre euclidien sacré : « la puissance d'un point par rapport à un cercle ».

- Point de départ : la figure de Thalès (cette dénomination pour un vieux sujet ne date que du XX$^{\text{ème}}$ siècle).

Deux droites issues du point P sont coupées par deux parallèles.

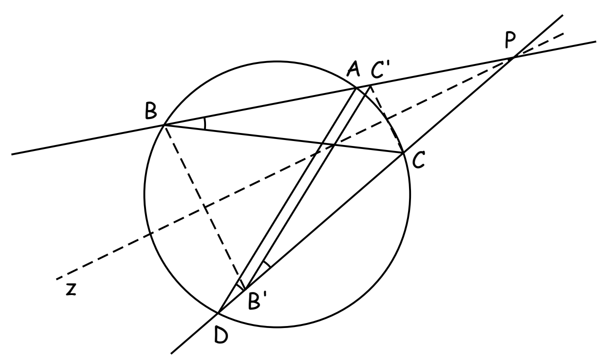


On a $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}$ et réciproquement.

La relation algébrique entre segments orientés n'est venue que tardivement. Elle évite les « cas de figure » auxquels était soumise cette étude selon la position de P par rapport aux parallèles (voir Carnot et Chasles au début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle).

- L'intersection de deux droites issues de P par un cercle est autre.

On notera d'abord que $\widehat{PBC}$ et $\widehat{ADP}$, angles inscrits interceptant le même arc $\overset{\frown}{AC}$, sont égaux.



Soient maintenant B' et C' les symétriques de B et C par rapport à [Pz), bissectrice des deux droites.

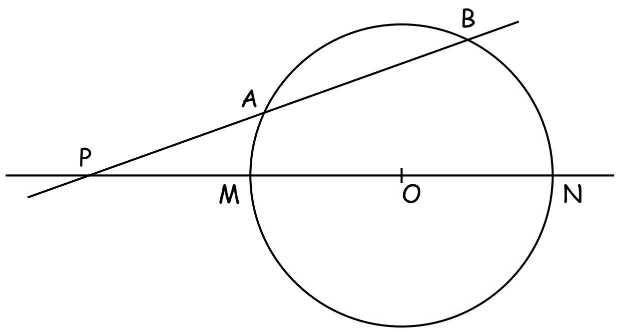
PC' = PC ; PB' = PB et

$\widehat{C'B'P} = \widehat{PBC} = \widehat{ADP}$

Par suite, les droites (B'C') et (AD) sont parallèles donc $\frac{\overline{PC'}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB'}}{\overline{PD}}$

ou $\overline{PC'}.\overline{PD} = \overline{PA}.\overline{PB'}$ et $\overline{PC}.\overline{PD} = \overline{PA}.\overline{PB}$.
Le produit est le même, quelle que soit la sécante issue de P.

Le livre III d'Euclide constate la propriété, en procédant autrement, sans en tirer conséquence. Toutefois, Fermat, au milieu du XVII^{ème} siècle, en a tiré des applications pour lier cercle et droite.



Si on considère la sécante passant par le centre O du cercle et le coupant en M et N : $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PM}.\overline{PN}$

mais $\overline{PM} = \overline{PO} + \overline{OM}$ et $\overline{PN} = \overline{PO} + \overline{ON}$.

Comme OM = ON = r, rayon du cercle, $\overline{PA}.\overline{PB}$ = (PO – r) (PO + r) = $PO^2 - r^2$.

C'est cette quantité algébrique qui a reçu le nom de « puissance du point P par rapport au cercle de centre O et de rayon r ».

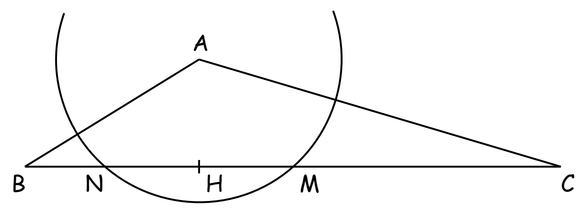
$\phi_O(P) = PO^2 - r^2$ dépend de la seule distance OP.

- $\phi_O(P) > 0$ équivaut à P extérieur au disque de centre O.
- $\phi_O(P) = 0$ équivaut à P élément du cercle de centre O.
- $\phi_O(P) < 0$ équivaut à P intérieur au disque de centre O.
- $\phi_O(P) = -r^2$, valeur minimale : P est en O.

Il semble que ce soit le grand géomètre suisse Jacob Steiner (1796–1863) qui l'ait introduite vers 1830, lors de sa collaboration au « journal de mathématiques pures et appliquées » que Crelle (1780–1855) encouragé par Abel (1802–1829) avait fondé à Berlin en 1826.

Les XIX^{ème} et XX^{ème} siècles ont vu fleurir maints prolongements de cette notion. Contentons-nous d'une application immédiate.

- Soient un triangle ABC et le cercle de centre A passant par le milieu M de [BC] et recoupant (BC) en N.



$\phi_A(B) = BA^2 - AM^2 = \overline{BM}.\overline{BN}$

$\phi_A(C) = CA^2 - AM^2 = \overline{CM}.\overline{CN}$

* Alors $BA^2 + CA^2 - 2\,AM^2 =$

$\overline{BM}\left(\overline{BN} + \overline{NC}\right)$ puisque $\overline{CM} = -\overline{BM}$.

Donc $BA^2 + CA^2 - 2AM^2 =$

$\frac{\overline{BC}}{2}.\overline{BC} = \frac{BC^2}{2}$

$$\mathbf{AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}}$$

(relation entre longueurs).

Si le triangle est rectangle en A, alors A est sur le cercle de diamètre [BC], et $AM = MB = \frac{BC}{2}$.

$\mathbf{AB^2 + AC^2} = 2\frac{BC^2}{4} + \frac{BC^2}{2} = \mathbf{BC^2.}$

* mais aussi

$CA^2 - BA^2 = \overline{CM}\left(\overline{CN} + \overline{BN}\right)$.

Introduisons H milieu de [MN]. H est le milieu d'une corde, alors [AH] est orthogonal à (BC).

$\mathbf{CA^2 - BA^2} = \overline{CM}\left(\overline{CN} + \overline{BM} + 2\overline{MH}\right) =$

$\frac{\overline{CB}}{2}\left(4\overline{MH}\right) = \mathbf{2\overline{CB}.\overline{MH}}$

Si le triangle est rectangle en B, alors B et H sont confondus,

$$\overline{MH}=\overline{MB}=\frac{\overline{CB}}{2}\cdot$$

$$\mathbf{CA^2 - BA^2} = 2\overline{CB}.\frac{\overline{CB}}{2} = \mathbf{CB^2}.$$

On constatera ici que le théorème de Pythagore n'est pas seule affaire d'aires équivalentes et que l'ordre traditionnel des théorèmes tels qu'ils sont enseignés peut être perturbé.

Si ce sujet vous intéresse et si vous voulez étudier d'autres conséquences de la puissance d'un point par rapport à un cercle, procurez-vous un livre de mathématiques de seconde de 1960, section latin-sciences ; même si l'ordre euclidien de l'exposé y est respecté, vous ne manquerez pas de pistes pour poursuivre.

Courrier des lecteurs

De Jean-Paul Guichard

J'ai lu avec intérêt l'article de Daniel Reisz paru dans le numéro 39 de PLOT. La rédaction ayant ajouté deux références bibliographiques, je me permets de vous en proposer une troisième :
« Produire et lire des textes de démonstration », Barbin & alii, Ellipses, 2001.
Je trouve dommage que cet ouvrage issu d'un colloque IREM ne soit pas plus connu.
Vous pouvez consulter le site des éditions Ellipses pour avoir une idée du contenu.

Annonces

Du site Images des Mathématiques

Le site **Images des Mathématiques** (CNRS) est heureux de vous présenter les gagnants du deuxième concours « Bulles au carré ».

38 BD ont été réalisées. Vous pouvez découvrir l'identité des participants sur la page :
http://images.math.cnrs.fr/Concours-BD-histoire-des.html

Un grand bravo aux lauréates et lauréats !

Du Ministère de l'Éducation Nationale

La seconde édition de la Semaine des mathématiques a lieu du 18 au 23 mars 2013, sur le thème Mathématiques de la planète Terre.

- mardi 12 mars 2013 : rallye mathématiques sans frontières junior (CM2-6è) ;
- jeudi 14 mars 2013 : rallye mathématiques sans frontières senior (3è-2nde) ;
- lundi 18 mars 2013 : lancement national de la 2ème édition de la semaine des mathématiques ;
- à partir du 18 mars 2013 : rallye calcul mental calcul@TICE ;
- du lundi 18 au vendredi 22 mars 2013 : rallye des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM) en académies ;
- mercredi 20 mars 2013 : olympiades académiques de mathématiques ;
- jeudi 21 mars 2013 : kangourou des mathématiques ;
- samedi 23 mars 2013 : championnat des jeux mathématiques et logiques (demi-finales régionales)