Le problème du plus court chemin : une présentation de l'algorithme de Dijkstra

Germain Boyer

Les élèves de Terminale ES qui choisissent la spécialité maths ont 1,5 h de plus de maths par semaine soit 5,5 h au total pour un coefficient 7 au bac. Au menu de la spécialité, deux grands thèmes : les matrices et la théorie des graphes. L'esprit est la résolution de problème et l'horaire imparti suffit à boucler le programme en se faisant plaisir. Si l'algorithme de Dijsktra n'est pas un exigible, tous les manuels l'évoquent dès qu'il s'agit de trouver une chaîne avec un poids minimal. La présentation des recherches effraie les élèves dans un premier temps puis il s'avère qu'ils prennent un certain plaisir à dérouler l'algorithme... Notre collègue Germain Boyer nous propose sa propre « mise en tableau » de l'algorithme.

Germain BOYER est professeur au lycée de Revel (31).

Un voyageur de commerce doit se rendre d'une ville de départ Vd à une ville d'arrivée Va. Il doit passer par un nombre *n* de villes afin de visiter autant de clients. Il effectuera une unique visite par ville. Tous les trajets possibles entre les différentes villes sont représentés par un graphe. Par égard pour la nature et pour son budget carburant, il souhaite prendre le circuit minimisant son nombre de kilomètres.

En théorie des graphes, l'algorithme de Dijkstra permet de déterminer le plus court chemin pour se rendre d'une ville à une autre connaissant le réseau routier d'une région. Le poids des arcs pouvant être la distance (pour le trajet le plus court), le temps estimé (pour le trajet le plus rapide), le plus économique (avec la consommation de carburant et le prix des péages). Il s'applique à un graphe connexe dont le poids lié aux arêtes est un réel positif.

L'algorithme porte le nom de son inventeur, l'informaticien néerlandais Edsger Dijkstra, et a été publié en 1959.

Cet algorithme est basé sur le principe suivant : si le plus court chemin reliant le sommet E (entrée) au sommet S (sortie) passe par les sommets S_1, S_2, … , S_k alors, les différentes étapes sont aussi les plus courts chemins reliant E aux sommets successifs S_1, S_2, … , S_k.

Nous devons donc construire de proche en proche le chemin cherché en choisissant à chaque itération de l'algorithme, un sommet du graphe parmi ceux qui n'ont pas encore été traités, tel que la longueur connue provisoirement du plus court chemin allant de E à S_i soit la plus courte possible.

L'algorithme de Dijkstra est souvent présenté dans les manuels scolaires à l'aide d'un tableau dans lequel chaque étape correspond à une ligne. Le but de cet article est de proposer une autre présentation de cet algorithme.
Voici l'algorithme en langage naturel correspondant à la présentation que je propose :

Entrée
Le graphe avec le poids des arêtes
Le sommet de départ : S*d*
Le sommet d'arrivée : S*a*

Initialisation
Le trajet de départ : Sd(0)
La liste des trajets : vide
La liste des trajets minimaux : { Sd(0)}
La liste des sommets examinés : {Sd}

Traitement
Tant que tous les sommets ne sont pas examinés et que la liste des trajets n'est pas vide faire :
1. (poursuite du trajet de départ)
Ajouter à la liste des trajets, les trajets reliant le trajet de départ à un sommet non examiné (s'il n'y en a aucun alors passer à l'étape suivante).

2. (mise à jour des poids)
Dans la liste des trajets, si deux trajets se terminent par le même sommet alors éliminer celui qui a le poids maximal.

Remarque : si deux trajets se terminent par le même sommet et ont le même poids, alors ils sont conservés tous les deux. Dans ce cas, ce sommet figurera deux fois dans la liste des sommets examinés (voir exemple 4).

3. (mise à jour des listes)
   (a) (mise à jour de la liste des trajets minimaux)
   Dans la liste des trajets, marquer le trajet de poids minimal.

Remarque : dans le cas où il y a deux choix possibles, choisir un de ces deux trajets comme trajet de poids minimal et conserver l'autre dans la liste des trajets.

   (b) (mise à jour de la liste des trajets)
   Éliminer ce trajet de la liste des trajets.

   (c) (mise à jour de la liste des sommets visités)
   Marquer le dernier sommet de ce trajet comme examiné.

4. (réinitialisation du trajet de départ)
Marquer ce trajet comme trajet de départ.

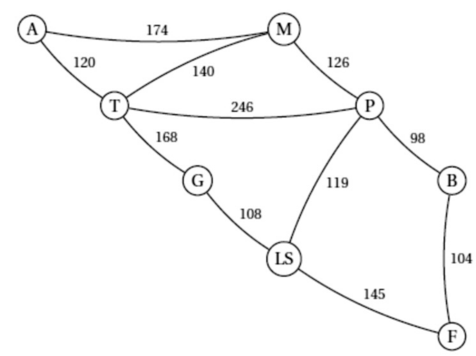
Sortie
Afficher le ou les éléments de la liste des trajets minimaux se terminant par S*a*.

Voici quatre exemples illustrant les différentes possibilités décrites dans cet algorithme.

Exemple 1 : partie A de l'exercice 4 du Bac ES de juin 2013 posé en Métropole

Un chauffeur-livreur réside en Italie dans la ville d'Aoste.
Quatre fois par mois, son employeur l'envoie livrer du matériel informatique dans la ville de Florence.
Il est établi que le trajet en camion coûte, en carburant, 0,51 euro au kilomètre. Le chauffeur dispose d'un budget mensuel de 2200 euros pour son carburant. Ce qu'il réussit à économiser lui permet de toucher une prime P équivalente en fin de mois.

Le graphe ci-contre indique les distances entre différentes villes d'Italie : Aoste, Milan, Parme, Turin, Gènes, La Spézia, Bologne et Florence. Chaque ville est désignée par son initiale.



1. Déterminer le trajet le plus court entre Aoste et Florence. (On indiquera les villes parcourues et l'ordre de parcours).

2. Déterminer le budget carburant nécessaire aux quatre voyages aller-retour du mois (le résultat sera arrondi à l'euro près). En déduire le montant de la prime P qui lui sera versée en fin de mois, à l'euro près.

Le sujet n'imposait aucune méthode. Un élève ayant trouvé le trajet le plus court sans utiliser l'algorithme de Dijsktra n'est pas pénalisé.

Entrée
Le graphe avec le poids des arêtes
Le sommet de départ : A
Le sommet d'arrivée : F

Traitement

	Liste des trajets	Trajet minimal	Sommet visité
Initialisation		A(0)	A
Étape 1	A-M (174) ~~A-T (120)~~	A-T (120)	T

À la fin de l'étape 1 : on repère le trajet minimal, on élimine ce trajet de la liste des trajets, on marque le dernier sommet de ce trajet comme examiné puis on marque ce trajet comme trajet de départ.

À l'étape 2 : on poursuit le trajet minimal repéré à la fin de l'étape 1 qui est devenu le trajet de départ de l'étape 2.

	Liste des trajets	Trajet minimal	Sommet visité
Initialisation		A(0)	A
Étape 1	A-M (174) ~~A-T (120)~~	A-T (120)	T
Étape 2	~~A-T-M (260)~~ A-T-G (288) A-T-P (366)	A-M (174)	M

Si deux trajets se terminent par le même sommet (ici A-T-M (260) et A-M (174)) alors on élimine le plus long des deux.

	Liste des trajets	Trajet minimal	Sommet visité
Initialisation		A(0)	A
Étape 1	~~A-M (174)~~ ~~A-T (120)~~	A-T (120)	T
Étape 2	~~A-T-M (260)~~ A-T-G (288) A-T-P (366)	A-M (174)	M

À la fin de l'étape 2 : on repère le trajet minimal, on élimine ce trajet de la liste des trajets, on marque le dernier sommet de ce trajet comme examiné puis on marque ce trajet comme trajet de départ.
Ensuite, on continue suivant le même principe jusqu'à ce que tous les sommets soient examinés et que la liste des trajets soit vide.

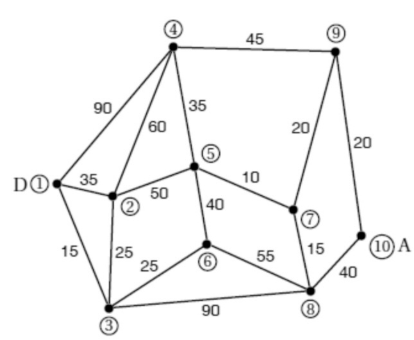
	Liste des trajets	Trajet minimal	Sommet visité
Initialisation		A(0)	A
Étape 1	~~A-M (174)~~ ~~A-T (120)~~	A-T (120)	T
Étape 2	~~A-T-M (260)~~ ~~A-T-G (288)~~ ~~A-T-P (366)~~	A-M (174)	M
Étape 3	~~A-M-P (300)~~	A-T-G (288)	G
Étape 4	~~A-T-G-LS (396)~~	A-M-P (300)	P
Étape 5	~~A-M-P-LS (419)~~ ~~A-M-P-B (398)~~	A-T-G-LS (396)	LS
Étape 6	~~A-T-G-LS-F(541)~~	A-M-P-B (398)	B
Étape 7	~~A-M-P-B-F (502)~~	A-M-P-B-F (502)	F

Sortie : A - M - P - B - F (502)
Le trajet le plus court entre Aoste et Florence est A - M - P - B - F : Aoste - Milan - Parme - Bologne - Florence. Sa longueur est 502 km.

Pour les exemples suivants, je laisse au lecteur le soin de faire lui-même les tableaux solutions.

Exemple 2 : question n°4 du sujet du Bac ES juin 2013 de Antilles-Guyane

Un guide de randonnée en montagne décrit les itinéraires possibles autour d'un pic rocheux.
La description des itinéraires est donnée par le graphe ci-contre.
Les sommets de ce graphe correspondent aux lieux remarquables.
Les arêtes de ce graphe représentent les sentiers possibles entre ces lieux.
On a complété ci-contre le graphe décrivant les itinéraires avec les temps de parcours en minutes pour chacun des sentiers.

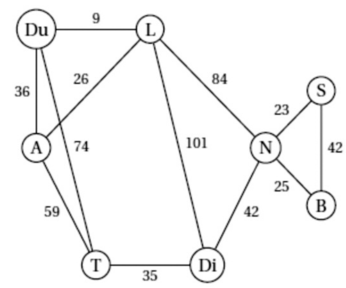


Légende : ① Départ ② Passerelle ③ Roche percée ④ Col des 3 vents ⑤ Pic rouge ⑥ Refuge ⑦ Col vert ⑧ Pont Napoléon ⑨ Cascade des anglais ⑩ Arrivée

Déterminer l'itinéraire allant de D à A le plus court en temps.
On fera apparaître la démarche en utilisant un algorithme.
Particularité de cet exemple : à l'étape 5 il y a deux choix possibles pour le trajet le plus court.

Exemple 3

Du = Dunkerque, L = Lille , S = Strasbourg, A = Amiens, N = Nancy, B = Besançon, T = Troyes et Di = Dijon.
Ce graphe pondéré indique les frais de déplacement occasionnés (péage, essence, …) pour un trajet entre deux villes.
Déterminer le trajet le moins onéreux pour aller de Dunkerque à Besançon.



Particularité de cet exemple : à l'étape 6, il n'est pas possible de développer le chemin minimal repéré à l'étape 5.

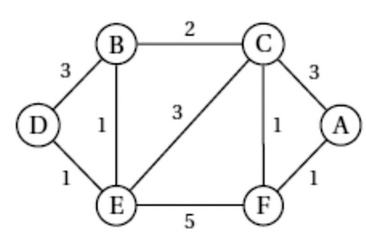
Voici le tableau solution :

	Liste des trajets	Trajet minimal	Sommet visité
Initialisation		Du(0)	Du
Étape 1	~~Du-A (36)~~ ~~Du-L (9)~~ ~~Du-T (74)~~	Du-L (9)	L
Étape 2	~~Du-L-A (35)~~ ~~Du-L-Di (110)~~ ~~Du-L-N (93)~~	Du-L-A (35)	A
Étape 3	~~Du-L-A-T (94)~~	Du-T (74)	T
Étape 4	~~Du-T-Di (109)~~	Du-L-N (93)	N
Étape 5	~~Du-L-N-S(116)~~ ~~Du-L-N-B (118)~~ ~~Du-L-N-Di (135)~~	Du-T-Di (109)	Di
Étape 6	Il faut poursuivre le chemin Du-T-Di, la seule destination est N mais elle est exclue.	Du-L-N-S (116)	S
Étape 7	~~Du-L-N-S-B (158)~~	Du-L-N-B (118)	B

Le trajet le moins onéreux est Du-L-N-B soit Dunkerque - Lille - Nancy - Besançon. Son coût est de 118 euros.

Exemple 4

Les sommets du graphe désignent des villes et les étiquettes la distance en km entre deux villes adjacentes.
Objectif : trouver le plus court chemin pour aller de D à A.
Particularité de cet exemple : les sommets C, F et A apparaissent deux fois dans la liste des sommets visités. Du coup, il y a deux solutions pour le chemin le plus court : D-E-C-F-A (6 km) et D-E-B-C-F-A (6 km).



Sources : http ://fr.wikipedia.org/wiki/Algorithme_de_Dijkstra
http ://mathematiques.daval.free.fr/spip.php? article196
Tangente (le numéro de septembre - octobre 2013)