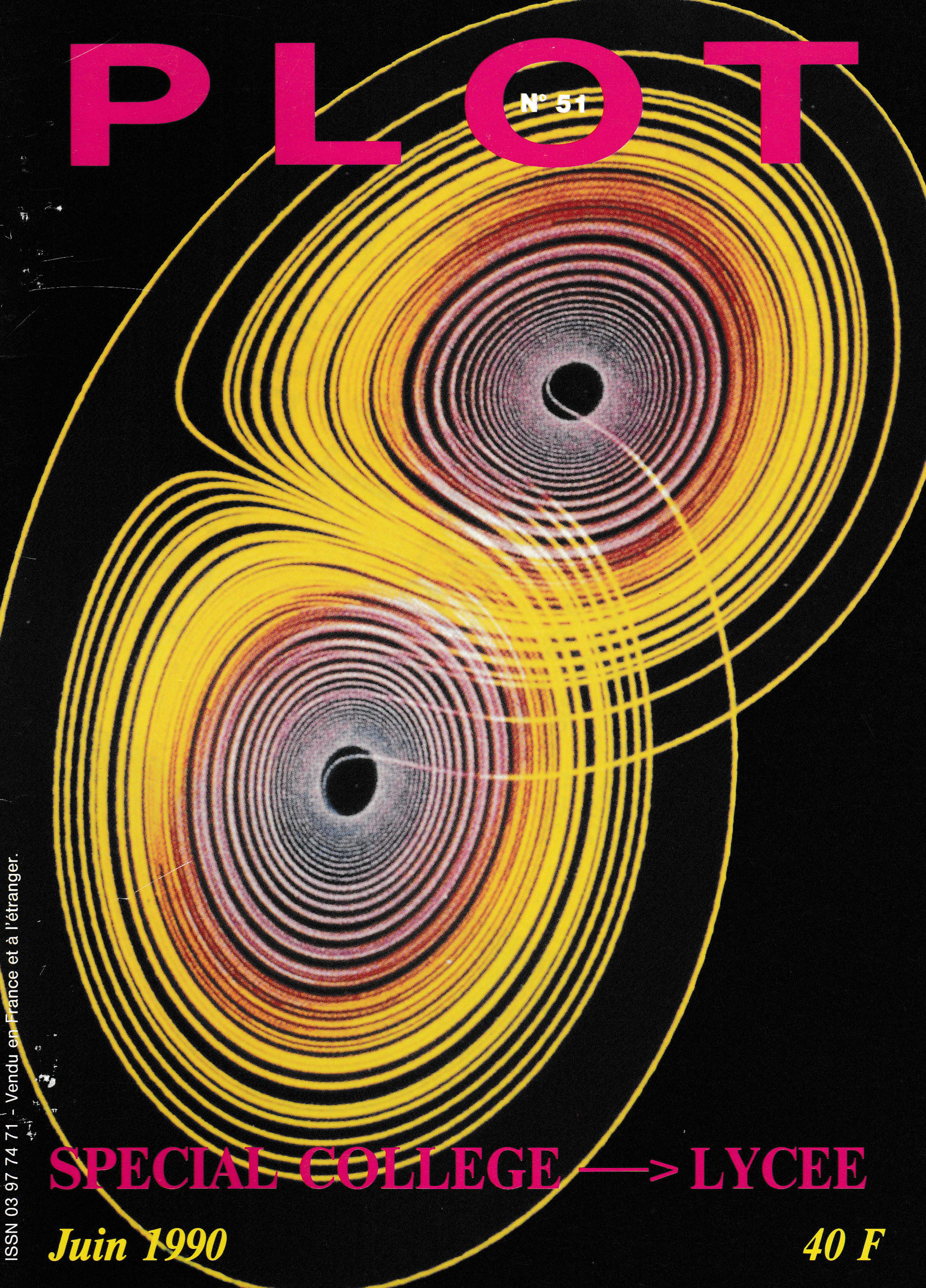
PLOT

N° 51

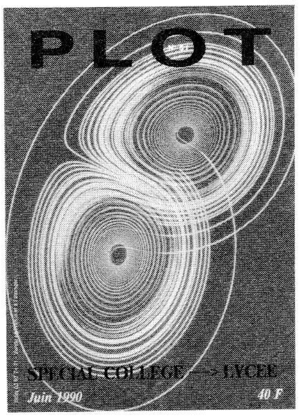


SPECIAL COLLEGE —> LYCEE

Juin 1990

40 F

ISSN 03 97 74 71 - Vendu en France et à l'étranger.



Directrice de publication
Marie-Laure Darche-Giorgi

Comité de Rédaction
Jacques Borowczyk, Daniel Boutté, Gérard Chauvat, Jacqueline Collet, Roger Crépin, Luce Dossat, René Gauthier, Georges le Nezet, Ginette Mison, Serge Parpay, Raymond Torrent, Michel Mirault, René Metregiste.

Rédaction
Michel Darche, Michel Clinard

Secrétariat
Madeleine Schlienger

Ventes
Patrick Marthe, Pierre Daudin

Publicité
Pascal Monsellier

Abonnements
PLOT APMEP
Université, BP 6759
45067 Orléans-Cédex 2

Prix d'abonnement
100 FF pour 4 numéros par an
Adhérent APMEP : 80 F.
Abonnement étranger : 120 F.

Photocomposition et maquette
Techniques Graphiques du Futur
Limoges

Photogravure et impression
Fabrègue - Limoges

Commission paritaire
63181 - ISSN 0397-7471

Editeur
Associations régionales de l'APMEP de Poitiers, Limoges, Orléans-Tours, Nantes, Rennes, Rouen, Toulouse Brest, Caen, Clermont-Ferrand et La Réunion

Diffusion
Adecum (Association pour le développement de l'enseignement et de la culture mathématique).
Publié avec le concours
du Centre National des Lettres et du Ministère de la Coopération

SOMMAIRE

EDITORIAL

Les nouveaux élèves de seconde ne savent plus calculer...
Les situations-problèmes : une nouvelle mode pédagogique...
Le rapport Dacunha-Castelle : bien mais vœux pieux...
Le rôle sélectif des maths : de toute façon ils ne savent pas lire...
Le baccalauréat : il ne vaudra plus rien...
Les projets d'établissement : de la poudre aux yeux...

Pourquoi cet immense désengagement face à des problèmes réels et aux solutions présentées ? Les lycées sont — ... encore... — à la veille de bouleversements.
Notre rôle est d'EDUQUER. Analysons la situation à travers nos conceptions certes variées. Mais ne soyons pas défaitistes. Informons nous en permanence.
Ce collègue*, qui prétend démontrer que les mathématiques ne servent à rien puisque le théorème de Pythagore ne saurait être un sujet de conversation au coin d'une rue, n'a sûrement pas lu le PLOT. Lisez le PLOT. Faites lire le PLOT et écrivez au PLOT.

** Emission Médiations sur TF1 le 28 mai 1990.*

J. Pinaud.

Info-dernières :

Le BGV de juin 90 fait un long compte-rendu sur les réflexions du Comité National au sujet des publications de l'APMEP.
Le PLOT y a fait une proposition qu'il est bon de rappeler ici : créer à partir de la fin 92, un bulletin PLOT inter-régionales de l'APMEP qui serait pris en charge, pour la partie rédactionnelle, par une régionale, une équipe, une commission de l'APMEP et qui sortirait ainsi un numéro thématique, l'équipe de fabrication restant relativement stable tout en se renouvelant périodiquement. Avantages pour tous, rédacteurs commes lecteurs : avoir une large audience pour les premiers, mieux connaître le travail qui se fait dans chaque région pour les autres. Chaque journal régional pourrait y être impliqué une fois tous les 2, 3 ans tout en gardant une autonomie régionale. On en reparlera lors de l'Université «d'été-automne» de l'APMEP à Tours.

VITESSE DE CONVERGENCE ET ACCELERATION

Yves Olivier - Blois

Pour mesurer la rapidité de convergence d'une suite on peut soit calculer le coefficient de convergence $\rho n = (U_{n+1} - L) / (U_n - L)$ (1) où L est la limite connue lorsqu'elle existe, soit calculer $V_n = (U_{n+1} - U_n) / (U_n - U_{n-1})$. Ces deux suites doivent converger vers la même valeur appelée vitesse de convergence.

Un exemple

Prenons l'exemple de la suite définie par :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} \text{ avec } u_0 = 3.$$

Elle est convergente vers 1 et sa vitesse de convergence est 1/2. On peut le prouver de différentes façons :
soit $f'(1) = 1/2$ où $f(x) = \sqrt{x}$
soit $\rho_n = 1/(\sqrt{U_n} + 1)$ qui tend vers1/2 du fait de la limite du u_h ou bien encore de $V_n = 1/(\sqrt{U_n} + \sqrt{U_{n-1}})$ qui tend aussi vers 1/2 pour la même raison.
Nous avons simplifié les expressions de ρ_n et v_n afin de lever l'indétermination et d'éviter dans les calculs des différences évanescentes (valeurs très proches de zéro) qui donneraient des erreurs dans les calculs!
Faites les essais avec les expressions initiales de ρ_n et de v_n pour n assez grand!
Vous pouvez passer également en revue l'exemple suivant :

$$U_{n+1} = \sqrt{\sqrt{Un}}$$

Sa vitesse de convergence est 1/4.
Pour le premier exemple, avec une calculatrice, on trouve :

n	u_n	ρ_n	v_n
0	3	0.4317651	0.4189097
1	1.316074	0.4828409	0.4788379
2	1.0710755	0.4957087	0.4946541
3	1.017314	0.4989271	0.4986601
4	1.0043007	0.4997318	
5	1.0010734		

Remarques :
On pourrait tout aussi bien utiliser un tableur pour avoir ces données.
Sur cet exemple tout se passe bien car on connaît la limite. De plus les indéterminations se lèvent bien.

Que dire des exemples suivants à vérifier $U_{n+1} = \sqrt{\sqrt{aU_n}}$, où a est un réel positif, converge vers ^{3} a à la vitesse de 1/4.

$u_{h+1} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{a\sqrt{a\,u}}}}\ _n$,
converge vers $\sqrt[5]{a}$ à la vitesse de 1/16

De l'intérêt de connaître les vitesses de convergence

— Dans les deux exemples précédents nous pouvons affirmer être proche de la racine cubique de a à 10^{-6} près au bout de la 11e itération car $1/4^{11} \cong 10^{-6}$ et proche de la racine cinquième de a à 10^{-8} près car $1/16^{8} \cong 10^{-8}$ au bout de la 8e itération!

— On peut **accélérer la vitesse de convergence** dans certains cas avec par exemple le :

PROCEDE DE ROMBERG-RICHARDSON

Dans le cas où la vitesse λ est connue, le procédé de Romberg (1955) (2) permet de définir une nouvelle suite convergente vers L plus vite que la précédente :
$vn = (u_{n+1} - \lambda u_n)/(1 - \lambda)$.

On peut réitérer le procédé en cherchant la nouvelle vitesse de convergence μ de cette suite v et construire la suite w définie par $w_n = (v_{n+1} - \mu v_n)/(1 - \mu)$.

Cela revient, en fait, à pouvoir écrire que : $u_n - L = \alpha\lambda^n + \beta\mu^n + \ldots$ avec $\mu < \lambda < 1$.

Tout dépend donc de l'existence du développement asymptotique de $u_n — L$.
Souvent il y a un lien entre λ et μ :
par exemple $\mu = \lambda^2$.
Ainsi supposons que l'on ait :
$u_n — L = \alpha_1\lambda^n + \alpha_2\lambda^{2n} + \alpha_3\lambda^{3n} + o(\lambda^{4n})$ alors le principe de Richardson permet de construire les suites définies par :

$u_{0,n} = u_n \qquad u_{1,n} = (u_{0,n+1} — \lambda u_{0,n}) / (1 — \lambda)$

$u_{2,n} = (u_{1,n+1} — \lambda^2 u_{1,h}) / (1 — \lambda^2)$

Chaque suite $u_{i,n}$ converge à la vitesse λ, λ^2, λ^3.

Remarque : *Il en va ainsi de la méthode de Romberg appliquée aux calculs d'intégrales approchées par la méthode des trapèzes : cela se passe dans le cas où $\lambda = 1/2$.*

On a alors le schéma associé :

$$\begin{tikzcd}
u_{0,0} \arrow[dr] & & & \\
& u_{1,0} \arrow[dr] & & \\
u_{0,1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & u_{2,0} \arrow[dr] & \\
& u_{1,1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & u_{3,0} \\
u_{0,2} \arrow[ur] \arrow[dr] & & u_{2,1} \arrow[ur] & \\
& u_{1,2} \arrow[ur] & & \\
u_{0,3} \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Par exemple, on peut appliquer cette méthode à la suite convergente vers π issue de la méthode d'Archimède (on rappelle que l'on a $S_{n+1} = (S_h) / (C_{n+1})$

où $S_0 = 2$, $c_0 = 0$ et $c_{n+1} = \sqrt{1 + C_n/2}$

On applique le procédé à la suite S et on peut montrer que $\lambda = 1/4$.

Nous obtenons l'algorithme suivant :

```
Début
 n = 0   s = 2   c = 0
  répète
   début
    n = n + 1
     afficher n
      c = √(1 + c)/2
      t + s/c
     afficher t
    u = (4*t — s)/3
   afficher u
  s = t
 fin
fin
```

Programme CASIO FX7500G

```
Ø → n : 2 →s : Ø → c :Lbl Ø: n + 1→ n ◢
√((1 + c) : 2) → c : s : c → t ◢
(4 x t — s) : 3 → u ◢
t → s : Goto Ø
```

On obtient les valeurs suivantes :

n	s	u
0	2	3,1045695
1	2,828427125	3,13914757
2	3,061467459	3,141437717
3	3,121445152	3,141582937
4	3,136548491	3,141592046
5	3,140331157	3,141592616
6	3,141277251	3,141592651
7	3,141513801	3,141592653
8	3,14157294	3,141592654
—	—	—
15	3,141592652	
16	3,141592653	
17	3,141592654	

METHODE D'AITKEN-STEFFENSEN

Elle s'utilise dans le cas d'une part **où la convergence de u est linéaire** (d'ordre 1) et d'autre part où **la vitesse** de converge λ **est non connue**.
Cette méthode, dite du Δ^2 d'Aitken, consiste à considérer la suite v définie par :

$$v_n = u_n — (u_{n+1} — u_n)^2 / (u_{n+2} — 2u_{n+1} + u_n)$$

On peut montrer que cette suite est convergente d'ordre supérieur à 1.

La **méthode de Steffensen** consiste à itérer la méthode d'Aitken. On peut montrer qu'elle est au moins quadratique (d'ordre supérieur ou égal à deux). Elle n'a de sens que si **la suite** est telle que
$u_{n+1} = g(u_n)$
où *g* est une fonction **contractante.**

En effet, puisque v_n est une meilleure approximation de l, on calcule w_n égal à $g(v_n)$ puis $g(w_n)$ et on applique l'accélération d'Aitken. On obtient ainsi une nouvelle valeur v'_n encore plus proche de l.
En fait dans la pratique on ne calcule que les premières valeurs de chaque suite pour améliorer sans arrêt la valeur initiale.

On montre que si g est d'ordre 1 alors la méthode de Steffensen est d'ordre 2. Si par contre g est d'ordre p > 1 alors la méthode de Steffensen est d'ordre 2p—1. Prenons l'exemple de la résolution de l'équation tan x = x dans] $\pi/2$, $3\pi/2$ [:

On ne peut pas utiliser la méthode itérative avec g = tan car g' (x) > 1. On considère alors l'équation $y = \pi + \arctan y$ en posant y = tan x. Dans ce cas on a $g(y) = \pi + \arctan y$ et $g'(y) = 1/(1 + y^2)$ donc g' (y) < 1. On peut donc appliquer la méthode itérative sur g et donc aussi la méthode d'AITKEN et de surcroît celle de STEFFENSEN.

On trouve :

méthode d'AITKEN :

```
Programme CASIO FX7500G

Rad : Ø → n : Ø → u : π+ tan⁻¹u → t ◢
Lbl Ø : n + 1 → n ◢
π+ tan⁻¹t → r ◢
u — (t — u)² : (r — 2t + u) → v ◢
t → u : r → t : Goto Ø
```

u, t et r sont 3 termes consécutifs de la suite
v est le terme de la suite d'Aitken obtenu à partir u, t et r

méthode de STEFFENSEN :

```
programme CASIO FX7500G

Rad : Ø → n : Ø → u : π+ tan⁻¹u → t ◢
Lbl Ø : n + 1 → n ◢
π+ tan⁻¹t → r ◢
u — (t — u)² : (r — 2t + u) → w ◢
π+ tan⁻¹w → v ◢
w → u : v → t : Goto Ø
```

au bout d'une itération v = g(w) et
r = g (g(w))
le w suivant sera le terme de la suite de Steffensen.

avec l'itération : $u_9 = 4{,}493409458$
avec le Δ^2 : $v_5 = 4{,}493409458$
avec STEFFENSEN : $w_3 = 4{,}493409458$

Pour aller plus loin

Méthodes numériques	N. Bakhvalov	Ed. Mir Moscou 84
Eléments de calcul numérique	B. Démidovitch I. Maron	Ed. Mir Moscou 87
Méthodes de calcul numérique	J.P. Nougier	Ed. Masson 87
Initiation à l'analyse numérique	R. Théodor	Ed. Masson 86
Méthodes de calcul numérique programmes en Basic et Pasca l	Cl. Nowakowski	Ed. du PSI 84
Mathématiques et informatique	D. Monasse	Ed. Vuibert 88
Calcul par l'informatique	M.J. Bertin	Ed. Hermann 83
Introduction à l'analyse numérique	J. Baranger	Ed. Hermann 77

(1) Plus généralement : soit u une suite convergente vers L. Désignons par $e_n = u_n \mid u_h — L \mid$. On dit que la suite est convergente d'ordre ρ à la vitesse λ si $L_{n+1} / (L_n)^p$ converge vers λ. Si ρ = 1 alors la convergence est dite linéaire. Si ρ = 2 alors la convergence est dite quadratique.

(2) Ce procédé était déjà énoncé en 1927 par Richardson.

QUAND LES PROFS TRONQUENT c'est Gauss qui trinque!

Y. Bouteiller, G. Chauvat - Tours

LES SYSTEMES, T'AIMES?

Les occasions de rencontrer des systèmes de ρ équations à η inconnues sont nombreuses et variées, tant en mathématiques que dans leurs domaines d'application :

• Soit ρ la fonction polynôme définie par :

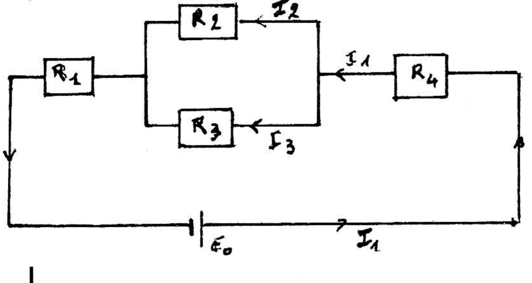
$\rho: \quad R \to R$

$\quad\quad x \to ax^2 + bx + c$

où (a, b, c) désigne un triplet de R^3.
Déterminer ce triplet pour que l'on ait :
$\rho(1) = 2$, $\rho(2) = 3$ et $\rho(3) = 1$.

• Monsieur G. Konomiz a noté lors de ses trois derniers voyages la consommation de son automobile. Au premier voyage, il a parcouru 15 km en ville, 60 km sur route, 120 km sur autoroute et a consommé 18,45 litres de super. Au second, il a parcouru 25 km en ville, 200 km sur route, 360 km sur autoroute et a consommé 55,05 litres. Au troisième, il a parcouru 40 km en ville, 250 km sur route et a consommé 22,35 litres. Quelle est la consommation de la voiture de Monsieur G. Konomiz en ville? sur route? sur autoroute?

• Déterminer les courants I1, I2, I3 qui parcourent le circuit suivant, en fonction de R1, R2, R3, R4 et E0



GAUSS ET PIVOT
(rien à voir avec Bernard!...)

Les exemples précédents conduisent à des systèmes 3 x 3. Une des méthodes, que l'on peut enseigner en lycée, pour les résoudre est connue sous le nom de « méthode du pivot de Gauss ».

Si on écrit le système (S) de ρ équations linéaires à η inconnues sous la forme (dite abréviative) :

$$(S)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1\eta} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2\eta} & b_2 \\ \Diamond & \Diamond & \Diamond & \Diamond \\ a_{\rho 1} & a_{\rho 2} & \dots a_{\rho\eta} & b\rho \end{bmatrix}\begin{array}{l}(L_1)\\(L_2)\\ \Diamond \\(L\rho)\end{array}$$

où L_i (i = 1...p) désigne la i-ème ligne du système, cette méthode repose sur les propriétés suivantes :

On ne change pas les solutions du système (S)
i) en échangeant les lignes L_i et L_j
ii) en remplaçant la ligne L_i par une « combinaison linéaire » des lignes L_i et L_j du type $kL_i + k'L_j$ où $k,k' \in R^*$.
On en déduit un algorithme élémentaire de résolution (qui peut être amélioré : voir la méthode du pivot maximum par exemple) transformant le système (S) en un système équivalent et échelonné dont la solution s'obtient facilement :

1 - Echanger les lignes de façon que la première inconnue, x_1, ait un coefficient non nul dans la première équation.

2 - Eliminer x_1 des (ρ—1) équations linéaires restant en appliquant, pour chaque i > 1, l'opération de substitution :

$$L_i \leftarrow a_{11} L_i - a_{i1} L_1$$

3 - Recommencer les deux étapes précédentes avec le sous-système de (ρ—1) équations à (η—1) inconnues obtenu en supprimant la première ligne.

GO GAUSS

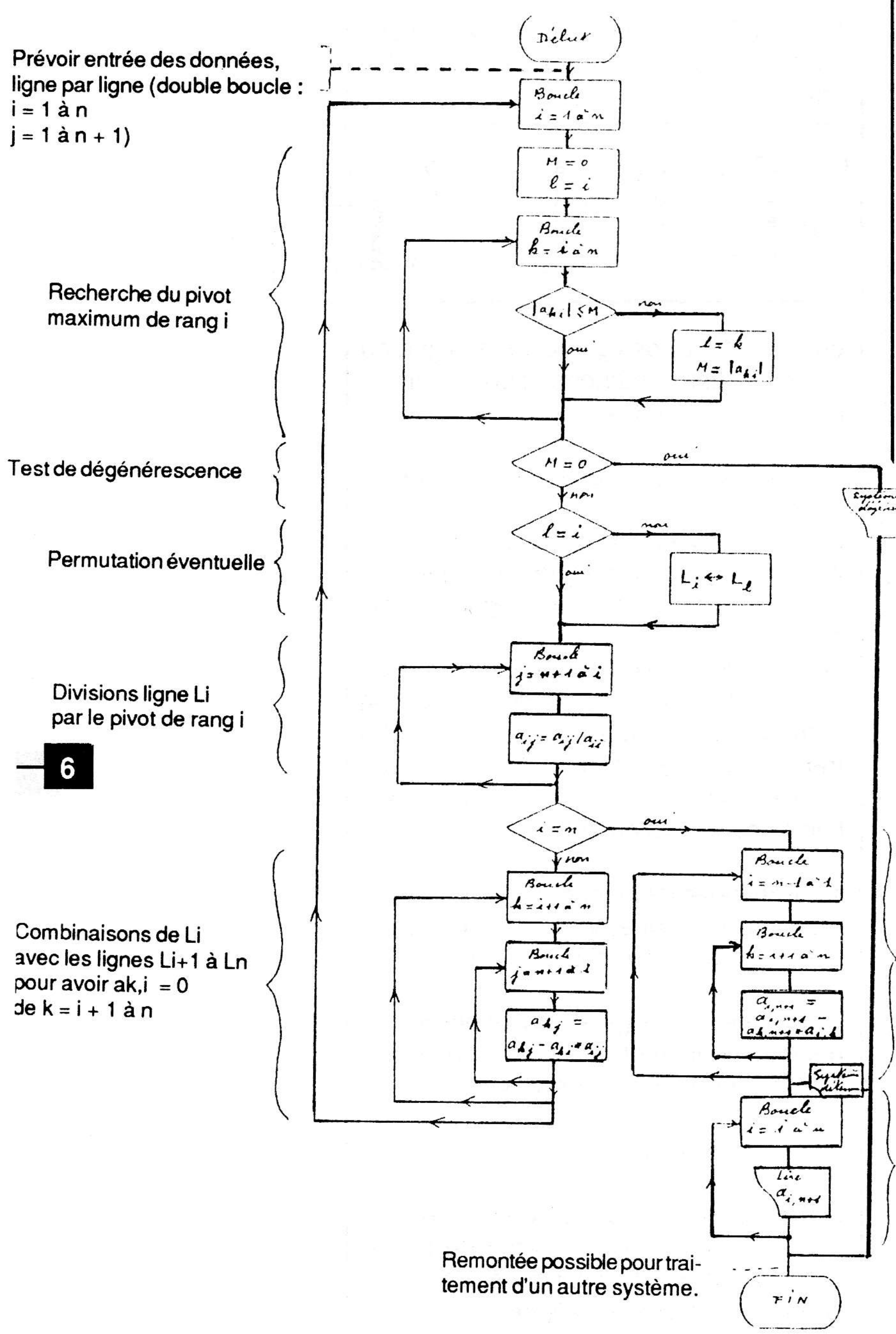
Un des gros avantages de cette méthode est sa facilité de mise en œuvre et de programmation sur calculatrice de poche (surtout si elle possède un langage acceptant la définition de tableaux à deux dimensions!).
Mais au royaume des calculatrices tout n'est pas rose et l'arithmétique discrète des micro-processeurs engendre bien des surprises et parfois Gauss cloche... normal!
On peut prendre conscience des déboires possibles avec l'exemple suivant : résolvez avec l'algorithme décrit précédemment le système suivant :

$$\begin{aligned} x + (1/2)\,y + (1/3)\,z &= 298 \\ (1/2)\,x + (1/3)\,y + (1/4)\,z &= 172 \\ (1/3)\,x + (1/4)\,y + (1/5)\,z &= 123 \end{aligned}$$

Mais pour une calculatrice qui tronquerait les réels à la deuxième décimale 1/3 vaut 0,33. Résolvez alors le système suivant par la même méthode (toujours *à la main)*

$$\begin{aligned} x + 0{,}5\,y + 0{,}33\,z &= 298 \\ 0{,}5\,x + 0{,}33\,y + 0{,}25\,z &= 172 \\ 0{,}33\,x + 0{,}25\,y + 0{,}2\,z &= 123 \end{aligned}$$

Enfin, résolvez à nouveau ce dernier système mais, cette fois-ci, en tronquant les résultats des opérations intermédiaires à l'ordre 2.



NOUVELLES FORMES D'EVALUATION EN SECONDE

Claudine Vidal - Orléans

Les caractéristiques de l'enseignement de Mathématiques en Seconde (peu de notions sont entièrement nouvelles; l'accent est mis sur l'entraînement à la réflexion et à l'initiative personnelle) nécessitent peut-être plus encore qu'à un autre niveau de clarifier le contrat avec les élèves, d'expliciter ce que l'on attend d'eux et de les aider à faire un repérage précis de leurs progrès.

La forme d'évaluation que j'ai mise en place pendant deux années successives en classe de Seconde se rapproche par bien des aspects de celle qui est décrite dans les précédents articles, sans toutefois atteindre la même précision (Plot 46 et 50).

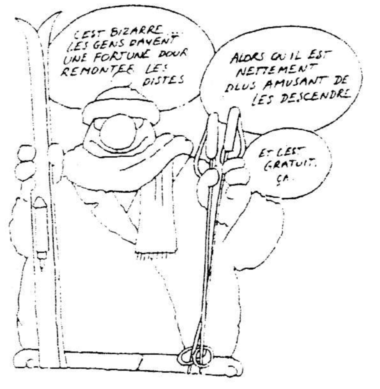
LES OUTILS

— Tout devoir est accompagné de la formulation précise de ce qui sera évalué : pour un devoir en classe, les objectifs sont annoncés à l'avance, pour un devoir à la maison, une « fiche d'évaluation » est jointe au texte du devoir.

— Les élèves tiennent, au fur et à mesure de leur travail, la « feuille de route », en indiquant, pour chaque savoir-faire rencontré, des exercices pour s'y entraîner, des situations dans lesquelles ce savoir-faire est mis en œuvre et des éléments d'auto-évaluation (objectif atteint ou non, difficultés rencontrées, erreurs à éviter...)

— Les fiches bilan (environ 3 par an) permettent de faire le constat, en fin de période d'apprentissage, des savoir-faire acquis.

Ces différents outils concrétisent la volonté de **distinguer évaluation formative et évaluation sommative** : l'évaluation formative a pour principal support la feuille de route, renseignée par l'élève lui-même (sur incitation du professeur en début d'année), à partir d'exercices autocorrectifs ou de contrôles rapides ne portant que sur des savoir-faire isolés, chacun donnant lieu à une évaluation binaire à partir d'un critère précis. D'autres éléments l'aide à l'auto-évaluation sont fournis par les renseignements figurant sur les devoirs corrigés : fiche d'évaluation pour les devoirs à la maison, repérage d'atteinte d'objectifs s'ajoutant, pour les devoirs en classe à la note établie traditionnellement.



L'EVALUATION

L'évaluation sommative se traduit par la fiche-bilan qui permet de confronter la liste des objectifs que l'élève aurait dû atteindre pendant une période à la liste des objectifs pour lesquels, au cours de cette période, le professeur a observé des indicateurs de réussite; cela se traduit par une note « bilan » entrant dans la moyenne au même titre que les notes de devoirs surveillés.

Cette note « bilan » ne correspond cependant pas à des activités du même **niveau taxonomique** que celles des devoirs surveillés; c'est pourquoi, sur le bulletin, en plus de la moyenne, figurent deux notes : la moyenne des devoirs (codées D) et la note « bilan » (codée E). « E » signifie « exercices » et renvoie au niveau taxonomique n° 1 proposé dans l'article précédent pour les lycées : les exercices d'entraînement comme les exercices figurant dans les contrôles rapides sont, en effet, des exercices d'application directe dans une situation très proche de celle de l'apprentissage; tous les objectifs figurant sur la fiche-bilan sont de ce niveau. Les devoirs, par contre, demandent toujours d'analyser une situation afin d'en découvrir les relations et les principes (niveau 4 de Bloom, proposé en niveau 2 pour les lycées). Quelques questions même atteignent les niveaux 5 et 6 de Bloom, et les fiches d'évaluation des devoirs à la maison attirent parfois l'attention sur ces ob-

jectifs plus complexes. Les niveaux 7, 8 et 9 sont mis en œuvre lors des activités en classe mais sont rarement évalués.

L'ELEVE S'EVALUE

Ces activités menées en classe doivent apparaître comme l'occasion de transférer les savoir-faire et leur donner un sens. Il est indispensable de leur donner toute leur importance auprès des élèves, faute de quoi on risquerait de transformer l'apprentissage en l'acquisition de micro-objectifs : **il ne s'agit pas de mettre en place une pédagogie par objectifs**; les objectifs ne sont qu'une façon rationnelle de réguler l'apprentissage, mais ne peuvent en aucune façon générer de méthode pédagogique.

La part prise par l'élève dans l'évaluation témoigne de la volonté de développer l'autonomie en Seconde : la feuille de route est là pour aider l'élève à choisir les points sur lesquels travailler, pour l'inciter à demander les aides à sa disposition. En fin de période d'apprentissage, le professeur ne communique son bilan qu'après s'être assuré que l'élève a fait le sien, et il y a confrontation entre les deux. Mais cette participation de l'élève à l'évaluation ne trouve tout son intérêt que s'il peut réellement agir sur les résultats, en améliorant certaines de ses performances : des occasions de « rattrapage » sont donc proposées chaque fois que possible, sur des savoir-faire répertoriés dans la fiche et pour lesquels chaque élève s'est inscrit ou non quelques jours auparavant, suivant les progrès qu'il pense avoir fait.

Cette démarche a tout naturellement trouvé son prolongement cette année dans l'utilisation des référentiels diffusés par la Direction des lycées et collègues, et il est intéressant, après 2 mois de cette nouvelle pratique d'examiner si les questions restées en suspens trouvent leur réponse, si les insatisfactions sont dépassées :

Dans la pratique d'évaluation précédemment décrite, l'évaluation formative n'est pas totalement séparée de l'évaluation sommative : la fiche-bilan donne un récapitulatif des objectifs dont l'atteinte a été constatée en cours d'apprentissage. Mais qu'en reste-t-il en fin de trimestre ou d'année? Je crains que l'utilisation des référentiels ne règle en rien ce risque de contamination du sommatif par le formatif : la liste des savoir-faire minimum à acquérir en Seconde est renseignée par l'élève, au fur et à mesure de l'apprentissage; il faudrait veiller à ce que, plusieurs semaines après, il ait l'occasion de vérifier à nouveau ses acquis. Il reste sur le bulletin une note, moyenne des devoirs. Or, chaque devoir donne lieu certes à une note, mais surtout permet de remplir une colonne de la fiche d'évaluation, dont le but est surtout formatif (renseigner l'élève sur ses points forts et ses points faibles afin de guider son travail dans la période à venir).

LES REFERENTIELS

L'utilisation des référentiels aide beaucoup par contre à différencier, avec les élèves, les différents niveaux taxonomiques. Dans ce qui a été précédemment décrit, la note E n'était pas forcément estimée différente par élèves et parents de la note D, et dans la moyenne, la pondération de ces deux notes pouvait paraître arbitraire. Dorénavant, chaque devoir comporte des questions aux différents niveaux taxonomiques, et ces niveaux sont annoncés aux élèves en même temps que le texte du devoir. La fiche d'évaluation rend compte, non pas du degré de maîtrise de chaque objectif, mais globalise, pour chaque niveau taxonomique, le niveau de satisfaction. Mais la proportion de questions correspondant à chaque niveau taxonomique reste arbitraire dans un devoir, et bien sûr, la note dépend de cette répartition : deux devoirs comportant, l'une 75 % de questions du niveau 1 et 25 % de questions du niveau 2, et l'autre 25 % de questions du niveau 1 et 75 % de questions du niveau 2 pourront avoir, pour un même élève, des notes très différentes, bien que l'évaluation pourra être pour les deux devoirs très satisfaisant au niveau 1 et insuffisant au niveau 2.

La distinction « Situations de référence » — « savoir-faire » est assez subtile pour les élèves comme pour les enseignants, mais renforce bien l'idée que faire des Maths ne consiste pas à aligner des savoir-faire isolés.

Enfin, le dernier point, rendre l'élève acteur dans sa formation, ne découle pas automatiquement de l'utilisation des référentiels; aucun outil, même le plus sophistiqué, n'amènera l'enseignant à pratiquer une pédagogie de contrat s'il n'est pas d'avance acquis à l'idée que les élèves ont un rôle à jouer dans leur propre évaluation, et que, savoir tout faire est impossible pour la plupart des élèves, mais qu'il est tout aussi important que chacun sache sur quoi il peut s'appuyer, quelles sont ses ressources, afin de les utiliser au mieux.

BILAN N° 1 : BARYCENTRE

Ce qu'il faut savoir faire	Dans quelle situation?	Activités - Exercices
Calculer une moyenne pondérée	En statistiques	in livre Dimathème 2[de]
Ecrire une relation vectorielle traduisant qu'un point est barycentre de plusieurs points pondérés	pour construire un point pour déterminer les coordonnées d'un point" pour établir une propriété géométrique	Les étudiants. Devoirs avec coefficients Le chocolat n° 10 p. 232 n° 12 p. 232 n° 19 p. 233
Interpréter une relation vectorielle en terme de barycentre	pour reconnaître qu'un point est un barycentre pour faire intervenir un barycentre partiel dans une construction de barycentre	n° 7-8-11 p. 232 n° 15 et 16 p. 233 n° 29 p. 234 Soit ABCD un rectangle Construire le barycentre de (A,1) (B,1) (C,2) (D,4) puis celui de (A,1) (B,1) (C,2) (D,8) n° 38 p. 234
Savoir que l'isobarycentre de 2 points est leur milieu que l'isobarycentre de 3 points est le centre de gravité du triangle qu'ils forment		
Savoir que le barycentre de 2 points pondérés appartient à la droite qui les joint	pour résoudre un problème d'alignement pour construire le centre d'inertie d'un corps réunion de 2 autres pour montrer que des droits sont concourrantes	(A,1), (B,—2), (C,5) ont pour barycentre G soit G¢ le barycentre de (B,—2) et (C,5) Pourquoi G appartient-il à (AG¢)? Soit D le symétrique de A par rapport à B Pourquoi G appartient-il à (CD)?

BILAN N° 2 : FONCTIONS AFFINES

	mon évaluation	évaluation prof
1 - Réaliser avec soin et exactitude un graphique à partir de données.		
2 - Tirer d'un graphique les renseignements permettant de répondre à un problème posé.		
3 - Dans une situation géométrique, exprimer une grandeur en fonction d'une autre.		
4 - Dans une situation où intervient la proportionalité, écrire l'expression mathématique d'une fonction (affine ou affine par intervalles).		
5 - Reconnaître une fonction croissante, décroissante, non monotone en observant la courbe qui la représente ou en faisant appel à son bon sens.		
6 - Reconnaître une fonction affine à partir de son expression mathématique.		
7 - Pour une fonction affine donnée par son expression mathématique, indiquer le sens de variation.		
8 - Représenter une fonction affine.		
9 - Représenter une fonction affine par intervalles.		
10 - Résoudre des équations du premier degré par le calcul et graphiquement.		

DES PROGRAMMES POUR S'EVADER DES PROGRAMMES!

Marcel Dumont - Rouen

Le texte, publié intégralement dans les Actes de la Rencontre C.I.E.A.E.M. Bruxelles 89, a pour but :
- **d'arracher l'enseignement des mathématiques à ses usages, à ses idées fixes, à ses croyances, pour le réadapter aux connaissances contemporaines;**
- **de redonner à cet enseignement un visage plus ouvert, plus tolérant, plus lucide, plus créateur... ;**
- **de redonner au rêve la place qu'il n'aurait jamais dû perdre dans l'enseignement scientifique;**
- **de susciter la recherche de programmes reflétant un humanisme ouvert sur le monde actuel.**

GENERALITES

Nous sommes peut être à l'aube d'une époque où, comme Lavoisier, il faudra proclamer haut et fort :

« RIEN N'EST VIDE,
RIEN N'EST PLEIN,
TOUT SE TRAVERSE.
(Il suffit de changer d'échelle, d'élargir ou de rétrécir le contexte!)»

Que ce soit à l'échelle de l'univers, d'une planète, de l'atome, du noyau, et même d'une «particule», qu'il s'agisse de frontières politiques, économiques, raciales, religieuses, etc., qu'il s'agisse de cloisons en tous genres, de bords qui ne bordent rien, d'interfaces sans faces, de matériaux qui n'appartiennent à aucun des trois états de la matière, quasi-cristaux qui sans être amorphes ne sont pas tout à fait des cristaux, pavages dont les «régularités» ne sont pas tout à fait «régulières», isolants qui deviennent supraconducteurs, de photons même très éloignés l'un de l'autre que la mécanique quantique nous interdit de considérer comme des «entités» séparées (1), corpuscules qui sont aussi des ondes, de fractales qui «remplissent un espace» sans être ni une ligne, ni une surface, ni un volume, etc., etc. TOUT SE TRAVERSE : y compris les limites d'un programme scolaire.
Les programmes scolaires sont le reflet des incohérences d'une culture en pleine explosion, culture qui est à redéfinir pour les démocraties de demain. Car les programmes sont une production de la société, et, comme tous les phénomènes sociaux, ils sont assujettis aux mêmes contraintes : le poids des habitudes, le poids des modes, des engouements, le poids des privilèges, d'une hiérarchie culturelle plus ou moins explicite, le poids d'une économie plus ou moins malade à l'échelle mondiale, etc.; en bref, ils sont soumis à des rapports de force beaucoup plus qu'à des rapports d'intelligence. Pourquoi est-il impossible de les confiner, comme un plasma, dans un champ clos aux bords infranchissables? Parce que tout ce qui concerne l'être humain se heurte à un caractère spécifique que les machines n'ont pas et n'auront pas avant longtemps : IL EST IMPOSSIBLE D'EMPRISONNER LA PENSEE DES AUTRES. (Elle finit toujours par se réveiller un jour ou l'autre et c'est heureux pour la démocratie!) Tout enseignement qui oublie les deux préceptes suivants, ne peut se prétendre éducatif :

— nul ne peut empêcher quelqu'un de penser quand il en a envie;

— nul ne peut obliger quelqu'un à penser quand il n'en a pas envie.

Encore faut-il préciser que «penser» ce n'est pas «répéter la pensée des autres», sinon toutes les machines à traiter l'information seraient des «penseurs».

(1) Cf. numéro spécial C.N.R.S. « Aux frontières de la Science », Ed. La Recherche.
(2) Cf. « Le Calcul et l'Imprévu », Ivar Ekeland, Ed. du Seuil, Paris.

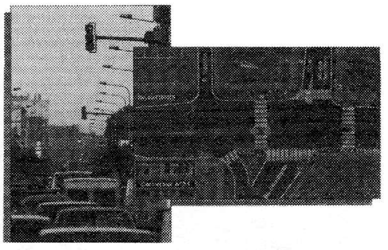
C'est bien là l'étrange paradoxe de l'enseignement des mathématiques qui se veut aussi éducatif : transmettre un savoir et un savoir-faire avec des méthodes voisines de la programmation d'une machine en oubliant que l'être humain n'est pas une machine.
C'est sans doute pour échapper à ce malaise que, depuis quelques années, les concepteurs de programmes soulignent l'importance de la «résolution de problèmes» (expression très ambiguë confondant la recherche de méthodes de résolution et l'application de méthodes de résolution éventuellement suggérées ou imposées par d'autres). Si on tient compte du prestige, du pouvoir que confère la capacité de résoudre tel ou tel type de problème, on comprend mieux pourquoi la plupart des problèmes posés à l'école sont des problèmes standards ou qui deviennent très vite standards, c'est-à-dire des problèmes pour lesquels l'autorité qui les pose, connaît d'avance une méthode au moins de résolution. A quand la liberté de se poser, soi-même, ses propres questions, ses propres problèmes et de les confronter à ceux des autres?

Les pouvoirs cachés.

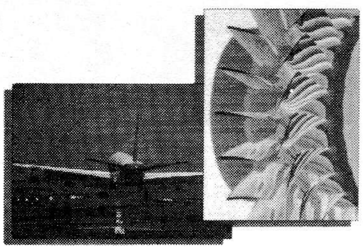
En effet, l'exercice d'un pouvoir quelconque déforme à la longue, autant ceux qui l'exercent que ceux qui le subissent. (C'est pourquoi, dans une bonne démocratie, il serait bon de permuter souvent les uns et les autres.) Mais de toutes les formes de pouvoir, le plus pernicieux — car il confond celui qui l'exerce avec celui qui le subit — c'est celui que nous portons tous au plus profond de notre être : c'est le pouvoir des usages, des habitudes, du langage, des écritures, des façons de penser, des idées fixes, des tabous, des croyances, etc. Toute l'histoire de l'humanité est jalonnée par des bouleversements d'usages ou de croyances; bouleversements qui, comme un rayon de lumière, viennent donner aux ténèbres, si usuelles qu'on les croyait claires, un aspect inattendu, en apportant le plus souvent un «progrès» respectable. Alors s'installent de longues périodes pendant lesquelles le respect des nouveaux usages ne permet que des perfectionnements, des raffinements qui conduisent à des progrès de plus en plus lents, tendant asymptotiquement vers une limite. C'est à la «fin» de ces périodes qu'il faut dépenser une énergie considérable pour obtenir des progrès insignifiants. Seule l'audace de s'évader de la prison des usages permet un nouveau bond.
L'enseignement des mathématiques, comme l'enseignement des sciences et techniques en général, se trouve donc placé devant ce dilemme :
— emprisonner la pensée dans des usages de plus en plus sophistiqués, usages que les hommes mettent parfois des siècles à découvrir, ou
— libérer l'imagination pour essayer de sauter par-dessus des limites qui paraissaient infranchissables.

Ouvrir les programmes

L'analyse de l'échec de diverses «réformes» devrait nous inciter à poser quelques questions :
— La conception de programmes peut-elle être séparée de la conception de l'évaluation, de ses critères, des examens et diplômes? Lesquels sont des objectifs? Lesquels sont des moyens pour y parvenir?
— Qu'appelle-t-on «connaissances de base» (autres que les «bases de connaissances» datant de 1,2 ou 3 siècles et parfois bien davantage)?
— La hiérarchisation du savoir ou plus précisément la hiérarchisation des moyens pour l'acquérir est-elle une nécessité ou simplement une habitude, le plus souvent protectrice de privilèges?
— Qui peut dire aujourd'hui ce que devront être les «connaissances de base» pour l'homme du troisième millénaire?
— Quelle place les programmes actuels accordent-ils : à la critique, au doute, à l'interrogation, à la curiosité, à la recherche des connaissances contemporaines, aux nouveaux usages, aux nouvelles modes , à la création, l'invention, à l'imagination, à l'originalité au «rêve»
— Pourquoi n'y a-t-il presque jamais de bibliographie dans les manuels scolaires, ni dans les programmes d'ailleurs?
— Pourquoi les programmes font-ils rarement appel à la «vulgarisation» des connaissances, c'est-à-dire une information destinée à donner envie d'en savoir plus et non à faire des spécialistes.
Le problème n'est pas de déstabiliser des institutions si bien rodées qu'elles pourraient fonctionner toutes seules, sans autres directives. Faute de connaître de «meilleurs» systèmes, de pouvoir définir



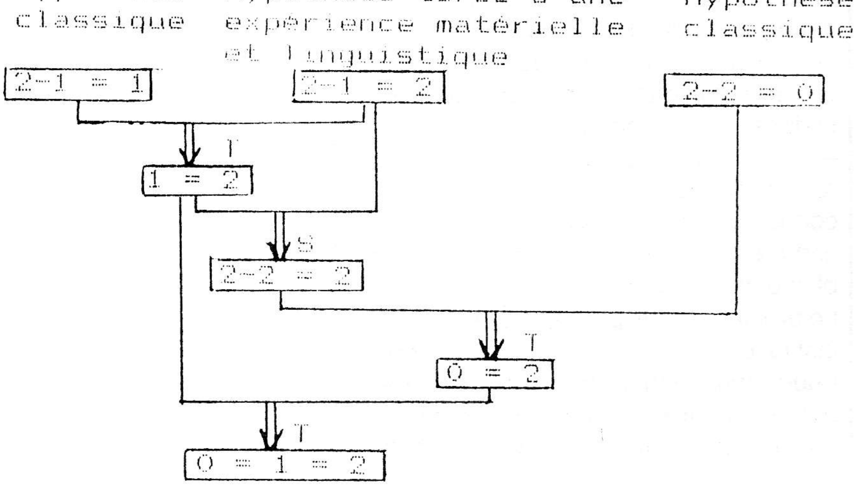
concrètement objectifs, moyens, critères d'évaluation, programmes en particulier, etc., adaptés au monde d'aujourd'hui et si possible de demain, le problème est d'ouvrir les yeux sur toutes les incohérences que dissimulent nos habitudes, les carences dues à l'absence d'informations. Ce dernier point est essentiel. En effet, pourquoi les programmes concernant les jeunes, programmes qui devraient regarder l'avenir, sont-ils presque toujours orientés vers le passé et à peine vers le présent? Pourquoi n'y a-t-il pas une meilleure communication entre la recherche et l'école? Voici quelques banalités si évidentes qu'on finit par les oublier :



Contemplation critique de la situation actuelle.

Tout d'abord, pour rire un peu, une mise en garde sur les dangers de s'évader du rationnel hypothético-déductif tout en le pratiquant; c'est-à-dire les dangers des interférences entre les ambiguïtés d'une langue naturelle et la rigueur locale d'une démonstration.

— **Caricature inspirée par un monologue de Raymond Devos :**
«*Prenez un morceau de bois, un bâton par exemple. Il a deux "bouts", c'est-à-dire deux extrémités. Coupez un bout. Le morceau qui reste, a encore deux bouts. Donc 2 — 1 = 2.*»



A l' «intérieur» des mathématiques scolaires.

Quelques détails révélateurs :
— Pourquoi juge-t-on indispensable la technique suivante (P) : «Dans une proportion, c'est-à-dire une égalité de 2 quotiens, le produit des extrêmes est égal au produit des moyens»?
ex : $5/3 = 10/6 \leftrightarrow 5 \times 6 = 3 \times 10$
Alors qu'on ne parle jamais de l'analogue dans la structure additive :
«Dans une égalité de 2 différences, la somme des extrêmes est égale à la somme des moyens?»
ex : $5 - 3 = 10 - 8 \leftrightarrow 5 + 8 = 3 + 10$
Evidemment ni l'une ni l'autre ne sont utiles si on a pris l'habitude de se servir d'opérateurs c'est-à-dire de fonctions.

Comparaison montrant la complication introduite par P :

$$\begin{tikzcd} X/3 = 10/6 \arrow[d, "P"] \\ X \times 6 = 3 \times 10 \arrow[d, ":6\quad :6"] \\ X = 5 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X/3 \arrow[d, "X\,3"'] & = & 10/6 \arrow[d, "X\,3"] \\ x & = & 5 \end{tikzcd}$$

Avec P 2 étapes sont nécessaires; alors qu'en appliquant la même fonction, $\xrightarrow{x\ 3}$ cad le même traitement à 2 nombres égaux, une seule étape suffit.
— De même produit d'une fraction par un entier : technique universelle :
«on multiplie le numération par l'entier puis on simplifie éventuellement»
ex : $(25/3) \times 6 = 150/3 = 50$ 2 opérations sont nécessaires, alors qu'en utilisant les fonctions il suffit de multiplier le numérateur par 2.

$$\begin{tikzcd} 25 \arrow[r, ":3"] & 25/3 \arrow[rr, "x\,6"] \arrow[dr, "x\,3"'] & & 50 \\ & & 25 \arrow[ur, "x\,2"'] & \end{tikzcd}$$

(à condition de savoir inverser, composer, décomposer les fonctions!)

— calcul usuel : $(7/3) \times 3 = 21/3 = 7$ alors qu'il n'y a aucun calcul à faire à cause des fonctions inverses ou «réciproques» : curieusement d'ailleurs on voit rarement le calcul analogue dans la structure additive

(7 — 3) + 3 = 10 — 3 = 7
Par contre on verra souvent
(7 — 3) + 3 = 4 + 3 = 7
à cause sans doute d'une identification précise de l'objet (7 — 3).

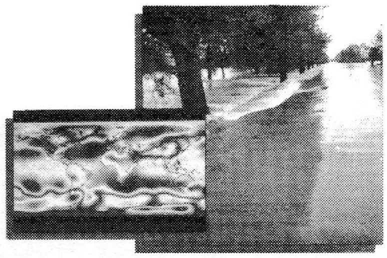
— Quelle peine y a-t-il donc à utiliser l'inversibilité des fonctions qui sont inversibles? D'ailleurs quand elles ne le sont pas, le premier effort de l'homme est d'inventer un contexte qui les rendent inversibles. Ceux qui se lancent à l'aventure sur des claviers de machine, savent bien que le premier réflexe est de trouver la touche ou la commande qui permette de revenir en arrière, d'annuler une commande antérieure lorsque la situation l'exige.

— Chacun connaît les difficultés d'introduction et d'utilisation des réels. A cause des exigences de l'analyse, les premiers calculs, dérivées, intégrales portent pourtant sur des fonctions à variable et à valeurs réelles. Alors que cette machinerie élémentaire est presque identique si on travaille sur du discret et du fini : différences finies, cumuls à propos de suites finies. Cette situation est d'autant plus ridicule que les calculateurs, qui s'introduisent lentement mais inexorablement à l'école, ne travaillent que sur du discret. Seulement voilà, il faut changer les habitudes et introduire d'autres idées, par exemple : l'importance des itérations, de la récursivité, de la propagation des erreurs de calcul, de sa «rapidité», de sa «complexité», etc.

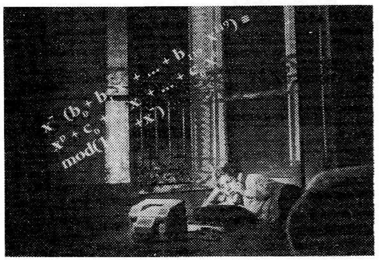
— Que dire enfin de cette vieille dame infiniment respectable, qu'on continue à appeler «géométrie» alors que son champ d'action à complètement oublié ses origines et son étymologie? Respectable pour deux raisons : l'une psychologique due au parallélisme entre l'appel à l'imagination à propos de «figures», cad de «représentations», d'images, et l'appel à la rigueur rendue nécessaire à cause des débordements de la première; l'autre utilitaire due aux services qu'elle a rendus et continue à rendre à échelle locale. Mais comment laisser croire, dans une culture qui se veut générale, qu'une vision globale de l'espace puisse encore s'appuyer uniquement sur les concepts bimillénaires de points, de lignes, de surfaces, de solides, de droites, de plans? Le choc de la découverte de symétries d'ordre 5 n'a pas ébranlé le temple!

Face aux mathématiques contemporaines

Ce n'est pas un fossé qui sépare les mathématiques scolaires et les mathématiques contemporaines, c'est un abîme qui ne cesse de se creuser si rien ne change. Dire que ce sont des «connaissances de base» par lesquelles il faut inévitablement passer n'est qu'un faux prétexte pour éluder le problème de fond. Car, en effet, il ne s'agit pas seulement de connaissances nouvelles qu'on pourrait croire cumulables. Il s'agit aussi et surtout de changements d'attitudes, de méthodes, de «visions».



Un seule exemple : la notion de «modélisation» et de «modèle»
Qu'il s'agisse de mathématiques pures ou appliquées, toute l'activité d'un mathématicien pourrait se résumer par une expression : «modélise » pour essayer de comprendre, de prévoir, de résoudre, de s'évader... (modéliser au sens large du terme, cad créer une «représentation», codes ou images, avec un système rationnel de fonctionnement et les interprétations possibles — et ceci soit à l'intérieur d'un modèle déjà existant, soit entièrement nouveau).
Or les programmes scolaires se contentent d'imposer l'utilisation de modèles plus ou moins archaïques, plus ou moins sophistiqués, sans même dire le plus souvent qu'il s'agit de modèles avec leurs «limites» plus ou moins floues de validité. Et le respect de ces modèles traditionnels est d'autant plus grand que les progrès qu'ils ont apportés lors de leur création ont été grands. Il en est ainsi de la numération c'est sans doute, avec les livres d'Euclide, un des premiers exemples de modèles. Malheureusement comme l'idée de modélisation n'a pas pénétré l'enseignement, alors l'interprétation officielle ne peut plus changer. Ex : si un nombre représente un cardinal d'ensemble, alors il sera difficile d'introduire les entiers négatifs, alors qu'en l'interprétant comme générateur unique d'un groupe, (translations discrètes à droite ou à gauche, tours de ficelle à l'endroit, à l'envers sur un bâton, etc.) les négatifs deviennent tout aussi naturels que les positifs. Idem pour toutes les extensions nécessitant des transferts d'interprétation. Encore faut-il avoir la liberté de pratiquer des transferts d'interprétations, de représentations, de créer soi-même ses pro-



vérifier leur cohérence, leur efficacité et de les comparer à d'autres, en bref avoir la liberté de penser! Tout un programme!

Dans le domaine des connaissances contemporaines

Dans le chaos des théories nouvelles, des paradoxes actuels, des interrogations et des doutes dans tous les domaines scientifiques, les programmes de mathématiques restent inébranlables, assurés de leur certitude éternelle. Exemple : On sait depuis presque un siècle que la notion d'instant est peut-être commode à une échelle donnée mais qu'elle est dénuée de sens : la relativité nous assure qu'on ne peut pas définir la simultanéité de deux événements. Pourtant on continue à croire qu'une durée peut être bien définie, même en l'absence d'un début et d'une fin précis. Dès lors, comment définir une vitesse si la notion de durée est à redéfinir? Nous n'avons toujours pas tiré les conséquences de l'introduction des intervalles ouverts.

Par analogie, comment croire à la possibilité de définir la coïncidence de deux points? Un point dans l'espace : ça n'existe pas. C'est une fiction commode à une échelle donnée, fiction tellement habituelle qu'on finit par lui donner une réalité. L'idée de remplacer les particules par des supercordes pour résoudre certains paradoxes souligne cette nécessité permanente de remettre en question les certitudes les plus ancrées.

Si les fractales commencent à pénétrer dans nos classes, elles ne semblent pas avoir modifié beaucoup la conception euclidienne de l'espace. Pourtant on sait bien maintenant que l'univers n'est pas euclidien. On continue à laisser croire qu'il a 3 dimensions alors que tous les doutes sont permis. Quelques manipulations de variétés, suffiraient à élargir nos visions d'espace; pourtant les seules expériences admises ne portent le plus souvent que sur le traditionnel. Qui peut dire ce qu'est une force? une onde? L'habitude des représentations dissimule notre ignorance. Tout ce qui fait intervenir l'idée d'itération est pratiquement ignoré, alors que c'est une des premières manifestations de curiosité de l'enfant : pas d'attracteurs, pas de chaos, pas de turbulences, pas de fronces, etc. Rien que l'euclidien, le newtonien. Sait-on, par exemple, que la seule présence d'une personne immobile à quelques mètres d'un billard, perturbe la trajectoire de la bille si on suppose que celle-ci peut se réfléchir un peu plus d'une dizaine de fois sur les bandes? que le caractère aléatoire d'un phénomène peut être dû à l'inaccessibilité d'une dimension (transformation du boulanger) (2), etc.

Bref, la seule vision que les programmes donnent de l'espace, repose entièrement sur le concept de ligne, droite de préférence, c'est-à-dire finalement sur notre concept traditionnel de numération, d'où les infinis traditionnels, etc.

Le plus grave, dans cette situation, n'est pas d'ignorer ce qui se passe à l'extérieur; c'est de ne pas laisser la liberté de regarder à l'extérieur, en ouvrant les fenêtres.

Ndlr : Avant de conclure, Marcel Dumont donne un exemple de vision fantastique avec des nombres gigantesques que nous tenons à votre disposition ou que vous pourrez lire dans les actes de la C.I.E.A.E.M. ■

Conclusion

Nous vivons actuellement une époque extraordinaire, époque qui pourrait s'appeler « NOUVELLE RENAISSANCE », qui s'étalera peut-être sur plusieurs siècles et bouleversera, une fois de plus, l'humanité. Ce qui la caractérisera, outre le traitement automatique de l'information et la robotisation de toute tâche algorithmique, ce sera peut-être, pour l'homme, l'aptitude à changer d'échelle : passer sans complexe de la femtoseconde au milliard d'années par exemple, et l'aptitude à franchir les limites, à traverser les cloisons qu'on croyait étanches, à faire varier ce qu'on croyait constant, à concevoir de nouveaux infinis, etc.

Pourtant, le comportement social de l'humanité évolue à une échelle infiniment plus lente que celle du savoir et du savoir-faite, évolution à peine perceptible sur plusieurs millénaires. Peut-être est-ce dû à cette caractéristique essentielle de la société : seul le rationnel est contrôlable, donc perfectible : or l'être humain n'est pas fait que de rationnel. Il a besoin de rêve; c'est l'aliment de la pensée et aussi de la passion. Le rationnel en est l'antiseptique indispensable. Mais on ne se nourrit pas avec des antiseptiques.

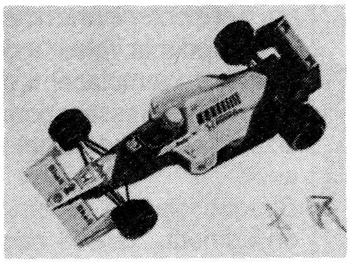
Ceci implique une transformation profonde de l'enseignement, des programmes, du rôle des enseignants, de la documentation, et des critères d'évaluation. (Exemple de mesure qui ne coûterait rien et qui pourrait transformer les mentalités : « dans tout examen ou concours, on accordera la moitié des points aux questions posées par les candidats, concernant le sujet, l'ouverture du sujet, sa transformation, quant à leur originalité, à la pertinence des critique, etc. » Malheureusement ou heureusement, aucun barème n'est possible!)

Puissent ces quelques banalités déclencher une prise de conscience de ce que sont nos connaissances dites « de base », amorcer des recherches plus rationnelles et plus imaginatives de nouveaux systèmes d'écriture et accorder à chacun, enfants et grands enfants, le droit de rêver parfois. Seules les machines restent prisonnières du rationnel!

Je plaide pour des programmes qui incitent au rêve autant qu'à la rigueur et donnent à l'humanité l'intelligence du cœur et de la raison.

APPROCHE DU NOMBRE DERIVE

S.D.E.A.C.P. - Abidjan

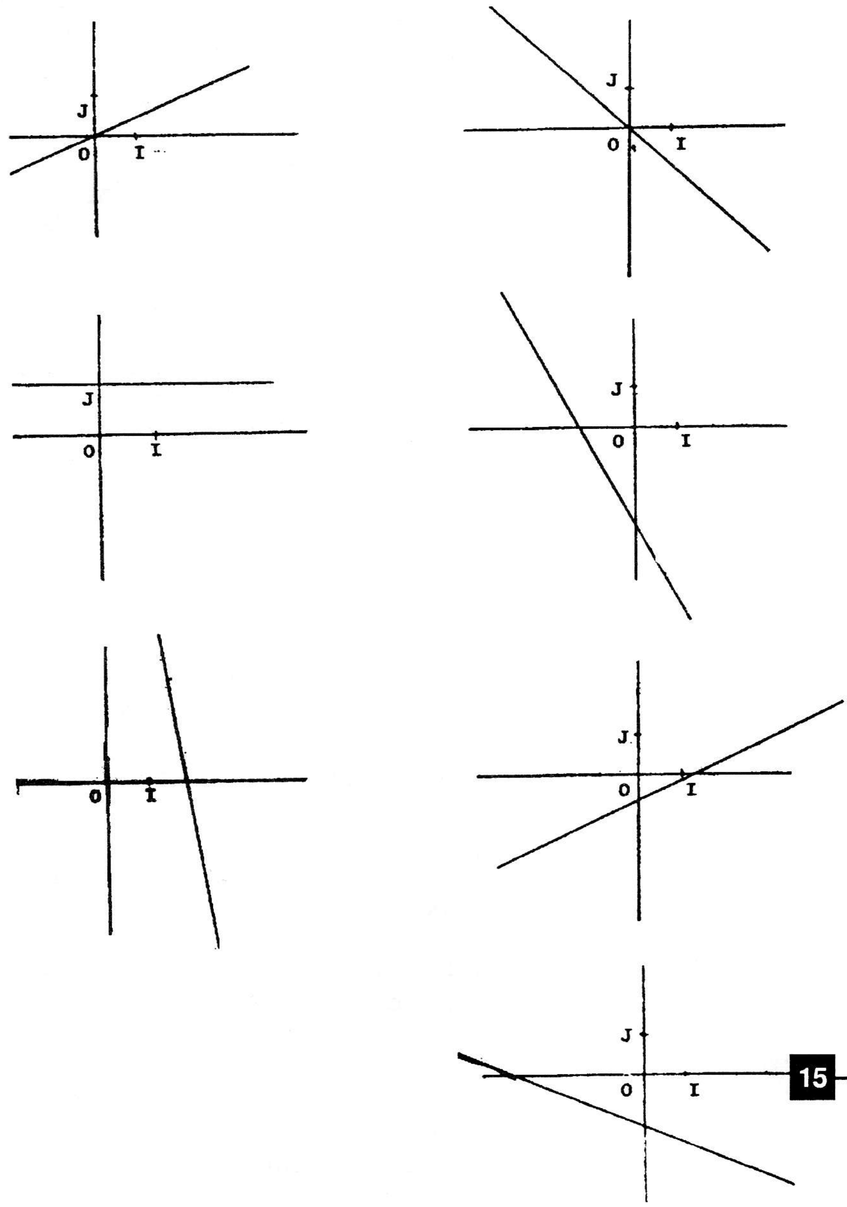


Comment approcher la notion de nombre dérivé avec des élèves de première A? Voilà un problème toujours remis sur le tapis. L'équipe pédagogique ivoirienne du S.D.E.A.C.P. propose ici un ensemble d'activités où l'outil graphique est fortement mis en avant.

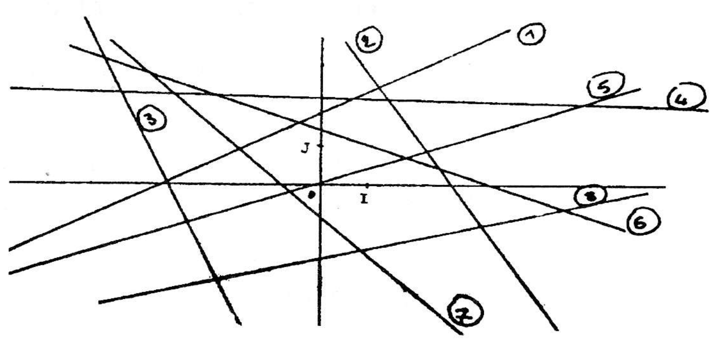
Pas d'excès de vitesse!

Un automobiliste entre dans un village. A 600 m de l'entrée de ce village un radar effectue un contrôle de vitesse (la vitesse maximum autorisée est 60 km/h).
On exprime la distance en mètres parcourue par l'automobiliste en fonction de la durée en secondes écoulée depuis son entrée dans le village. Cette fonction est représentée graphiquement sur les figures 1, 2 et 3.
Essayer de dire si l'automobiliste est en excès de vitesse à son passage devant le radar en utilisant des données numériques lues sur la figure 1, puis sur la figure 2, enfin sur la figure 3.
Quel lien peut-on réaliser entre la droite (AB) et la vitesse moyenne de l'automobiliste sur le trajet entrée du village-radar?

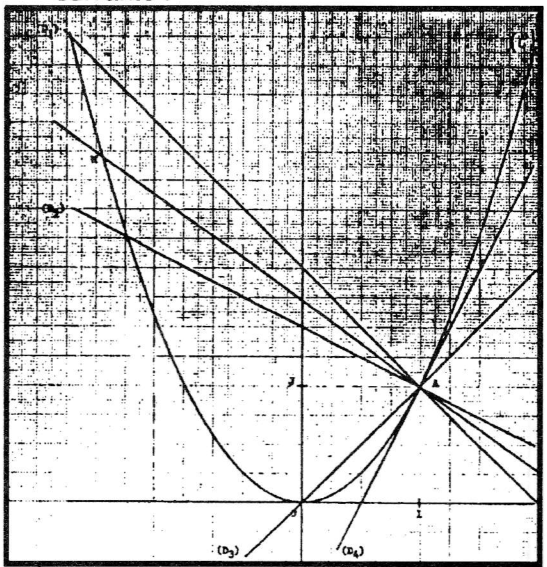
Activité 1 :
Indiquer le sens de variation de chacune des fonctions suivantes représentées par une droite dans un repère orthonormé. Trouver le coefficient directeur de la droite.



Activité 2 :
1. Indiquer les droites qui ont un coefficient directeur positif.
2. Classer les droites par ordre de coefficients directeurs croissant.



Activité 3 :
A partir de la représentation graphique suivante :



1. Indiquer à partir des équations données ci-après, quelle est l'équation qui caractérise chacune des droites (D_1), (D_2), (D_3) et (D_4).
$y = x$
$y = 2x - 1$
$y = -x + 2$
$y = -1/2\,x + 3/2$

2. On considère un nombre réel α 1 et sur la courbe un point M de coordonnées (α, α^2).
Montrer que le coefficient directeur de la droite (AM) est $\alpha + 1$.

3. Indiquer le coefficient directeur de chacune des droites du 1).

4. Que devient le coefficient directeur $\alpha + 1$ de la droite (AM) lorsque M est en A? Représente-t-il le coefficient directeur d'une des droites données?
On dira que (D_4) est la tangente en A à la courbe (ζ).
Plus généralement, si on a une courbe (τ) représentation d'une fonction f, un point A de (τ) dont les coordonnées sont $(a, f(a))$, une droite passant par A recoupe en général la courbe en un point M proche de A.
Une telle droite a pour coefficient directeur $(f(x) - f(a)) / (x - a)$.

Lorsque M s'approche de A, cette sécante aura comme position limite la tangente à la courbe en A.
Pour trouver le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point A $(a, f(a))$ on calculera le rapport $(f(x) - f(a)) : (x - a)$.
Généralement, la simplification par $x - a$ permet d'obtenir une nouvelle expression définie pour la valeur a de x.
Il suffit de remplacer x par a dans cette nouvelle expression pour obtenir le coefficient directeur de la tangente à la courbe en A.
Chaque fois que ce calcul sera réalisable on admettra que la courbe admet une tangente au point A.

Exercice :

1. On considère la courbe d'équation :
$y = -(1/3)\,x^2 + 2x - 1$.

Trouver le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point d'abscisse $(-1/2)$

Vérifier que si on donne la courbe d'équation :
$y = ax^2 + bx + c$
La tangente à cette courbe au point de coordonnées $(\alpha, a\alpha^2 + b\alpha + c)$ a pour coefficient directeur $2a\alpha + b$.

2. On donne la courbe d'équation :
$y = 1/x$.

Trouver le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point d'abscisse $(-3/2)$, puis au point d'abscisse α. élément de $\mathbb{R}^*$.

3. On donne la courbe d'équation :
$y = (x - 1)/(x - 2)$.

Trouver le coefficient directeur de la tangente à cette courbe au point d'abscisse 2/7.

Activité 4 :
Observer les courbes ci-dessous et indiquer le signe du coefficient directeur de la tangente si elle existe en chaque point de la courbe lorsque l'abscisse du point considéré augmente de -2 à 3.

Définition : *Lorsque la représentation graphique d'une fonction admet une tangente en un point de coordonnées $(\alpha, f(\alpha))$, on dit que la fonction f est dérivable en α. Le coefficient directeur de cette tangente s'appelle le nombre dérivé de f en α; on le note $f'(\alpha)$.*

Nous admettrons que les droites représentant graphiquement les fonctions constantes :
$x \longrightarrow c$ et plus généralement les fonctions affines :
$x \longrightarrow ax + b$
sont leurs propres tangentes et que ces fonctions sont donc dérivables en tout élément α de IR (on dira dérivable sur IR).

On considère la fonction $f : x \longrightarrow ax + b$.
Calculer $f'(\alpha)$
Les fonctions $x \longrightarrow ax^2 + bx + c$ sont dérivables sur IR
$x \longrightarrow (ax + b)/(cx + d)$ sont dérivables sur IR — {— d/c}

Exercices :
Soit α un nombre réel quelconque.

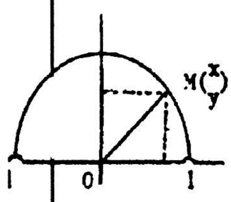
1. Donner le nombre dérivé de la fonction $f : x \longrightarrow x^2$ en α.
La fonction qui a tout nombre réel a associe $f'(\alpha)$ est appelée fonction dérivée de f et se note f ' telle que :
$f' : \alpha \longrightarrow f'(\alpha)$

2. Donner le nombre dérivé en α de $g : x \longrightarrow ax^2 + bx + c$
Trouver la fonction dérivée de g.

3. Compléter le tableau :

$f : x \longrightarrow ax + b$	$f' : x \longrightarrow$
$f : x \longrightarrow$	$f' : x \longrightarrow 0$
$f : x \longrightarrow ax^2$	$f' : x \longrightarrow$
$f : x \longrightarrow ax^2 + bx + c$	$f' : x \longrightarrow$

4.



Montrer que les coordonnées de M vérifient l'équation :
$x \in]-1,1[$, $y = 1 - x^2$
En déduire que la fonction $x \longrightarrow 1 - x^2$ est dérivable sur]—1,1[

5. On considère $f : x \longrightarrow 3x^2$
$g : x \longrightarrow -2x + 1$
$h : x \longrightarrow f(x) + g(x)$
Trouver f', g' et h'.

On remarque que $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
On admettra que si $h(x) = f(x) + g(x)$ alors $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
On notera plus simplement :

$$\boxed{(f + g)' = f' + g'}$$

b) On considère $f : x \longrightarrow 2x$
$g : x \longrightarrow 3x + 1$
$h : x \longrightarrow f(x) \cdot g(x)$
Calculer les fonctions dérivées de f, g et h.
Peut-on affirmer l'égalité entre $f'(x) \cdot g'(x)$ et $h'(x)$?
Vérifier que : $h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$.
On admettra que cette formule se généralise et on la notera :

$$\boxed{(fg)' = fg' + gf'}$$

c) On considère $f : x \longrightarrow -x + 1$
$h : x \longrightarrow 3/2x - 3/2$

Calculer les fonctions dérivées de f et h.
Vérifier que $h'(x) = -3/2 . f'(x)$.
On admettra que cette formule se généralise et on la notera :

$$\boxed{(af)' = af'}$$

d) On considère
$g : x \longrightarrow 1/(5x - 1)$

$f : x \longrightarrow 5x - 1$
Soit α élément de IR — {1/5}, calculer $g'(\alpha)$ et $f'(\alpha)$.

Faire apparaître si possible une relation entre $g'(\alpha)$, $f(\alpha)$ et $f(\alpha)$ et $f'(\alpha)$.
On admettra et on notera :

$$\boxed{(1/f)' = -(f'/f^2)}$$

e) Trouver la fonction dérivée de la fonction f :
$f : x \longrightarrow x^4$
On admettra que :
$\forall n \in IN^*$ $f : x \longrightarrow x^n$
la fonction f a pour fonction dérivée

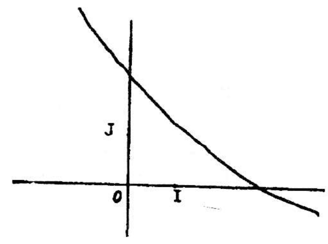
$f' : x \longrightarrow nx^{n-1}$

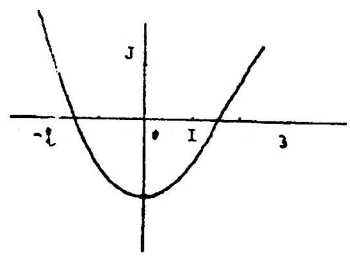
6. Trouver la fonction dérivée de la fonction f dans chacun des cas suivants :

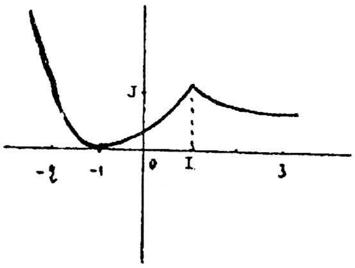
$f : x \longrightarrow (3x^4 + 1)/(x + 2)$
$f : x \longrightarrow x^7$

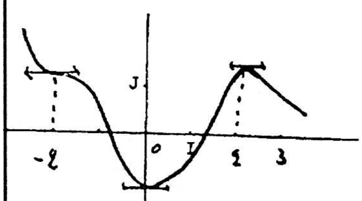
7. Soit g une fonction polynome
f une fonction polynome qui ne s'annule pas sur l'intervalle A.
A l'aide des résultats trouvés dans l'exercice 5 trouver la fonction dérivée de la fonction h :

$h : A \longrightarrow IR$
$x \longrightarrow g^{(x)} / f^{(x)}$









On admettra et on notera :

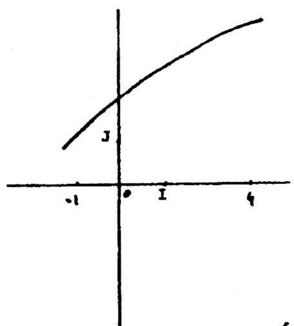
$$\boxed{(g/f)' = (f.g' - f'g)/(f^2)}$$

Tableau récapitulatif :

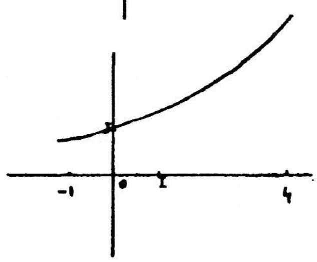
(a, b, c sont des nombres réels non nuls)

Fonctions	Fonctions dérivés
$x \longrightarrow ax + b$	$x \longrightarrow a$
$x \longrightarrow ax^2 + b + c$	$x \longrightarrow 2ax + b$
$x \longrightarrow c$	$x \longrightarrow 0$
$\forall n \in IN^*$ $x \longrightarrow x^n$	$x \longrightarrow nx^{n-1}$
f et g sont des fonctions polynomes.	
$f + g$	$f' + g'$
af	af'
$f . g$	$fg' + gf'$
On suppose que f ne s'annule pas sur son ensemble de définition	
$1/f$	$- f'/f^2$
g/f	$(g'f - f'g)/f^2$

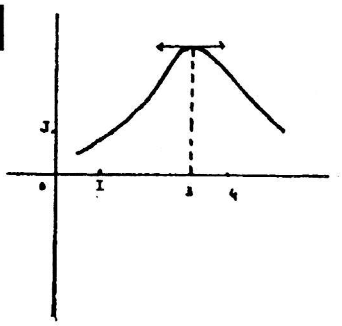
Activité 5 :
Complétez le tableau sur le modèle de la première ligne



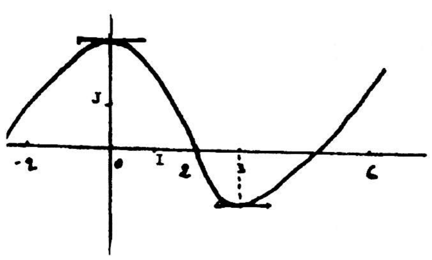
x	-1		4
f'(x)		+	
f(x)		↗	



x	-1	4
f'(x)		
f(x)		



x	1	3	4
f'(x)			
f(x)			



x	-2	0	2	3	6
f'(x)					
f(x)					

Il semble donc, que pour une fonction f dérivable sur un intervalle]a,b[,

— si f'(x) est positif sur]a,b[alors f est croissante sur]a,b[,

— si f'(x) est négatif sur]a,b[alors f est décroissante sur]a,b[,

et que si f présente un maximum ou un minimum en c alors f' (c) = 0.

Nous admettons le théorème suivant :

Théorème :

Soit une fonction numérique f dérivable sur un intervalle]a,b[, alors :

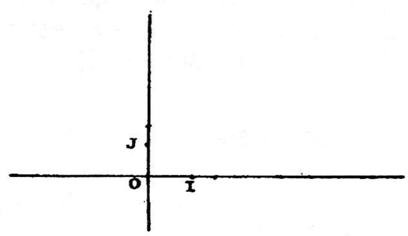
- f est croissante sur]a,b[si et seulement si f' est positive sur]a,b[,
- f est décroissante sur]a,b[si et seulement si f' est négative sur]a,b[,
- f est constante sur]a,b[si et seulement si f' est nulle en tout point de]a,b[.

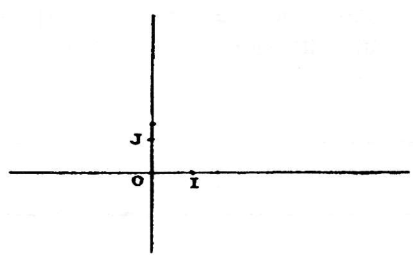
Exercices classiques sur le sens de variation de quelques fonctions.

Activité 6 :
Voici des tableaux de variation de fonctions dérivables sur les intervalles indiqués. Essayer de les compléter et de donner une représentation graphique de ces fonctions.

x	-3	-1	0	2	6
f'(x)		-2	0	$+\frac{1}{2}$	
f(x)	5 ↘		-1	↗	2

x	-3		-1		1		4
f'(x)		+	0	-	0	+	
f(x)	-3		2		0		6

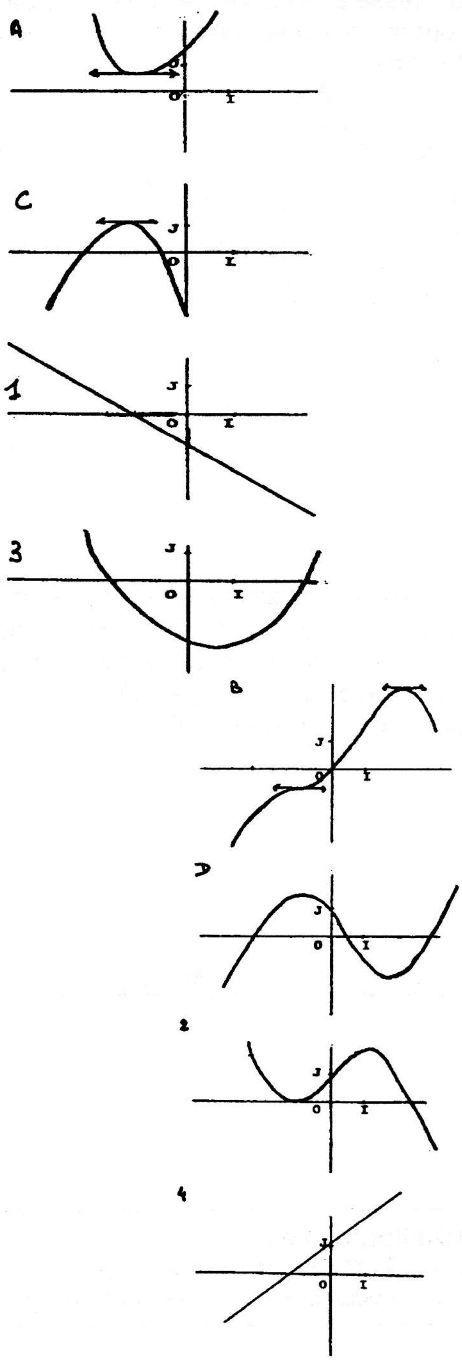




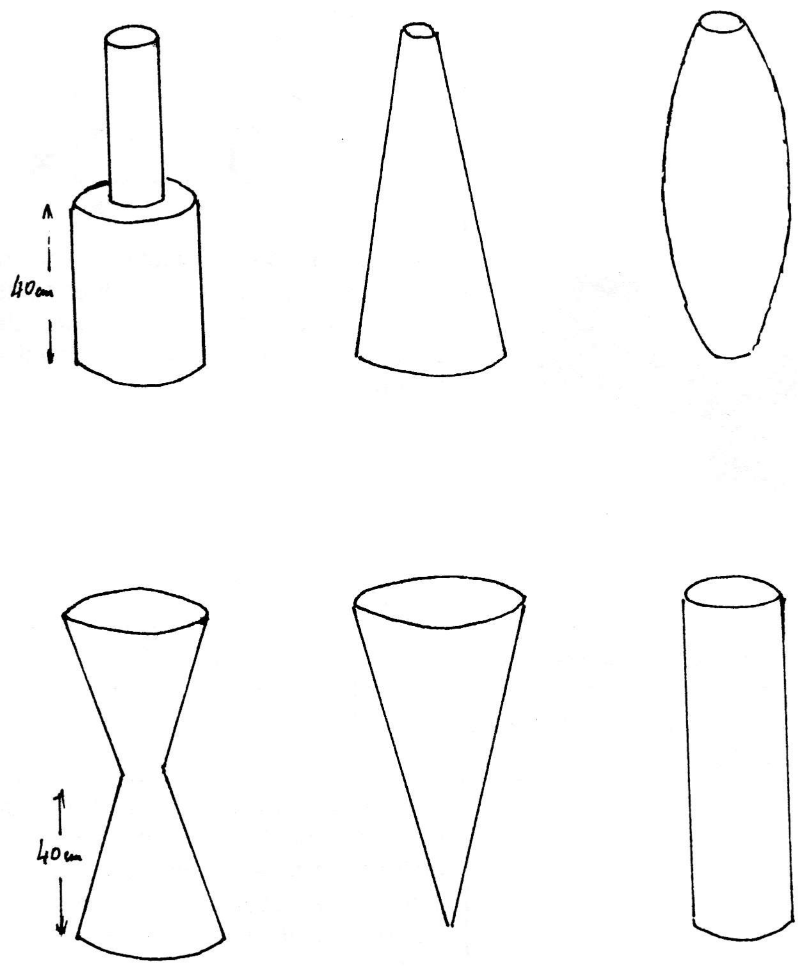
Activité 7 :
Remplir le tableau de variation correspondant à chacune des courbes suivantes :

x	
signe de f'	
variation de f	

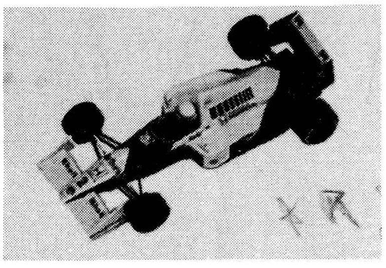
Activité de synthèse :
Voici 4 représentations graphiques de fonctions dérivables et 4 autres représentations graphiques qui sont celles des fonctions dérivées des premières.
Associez-les correctement.



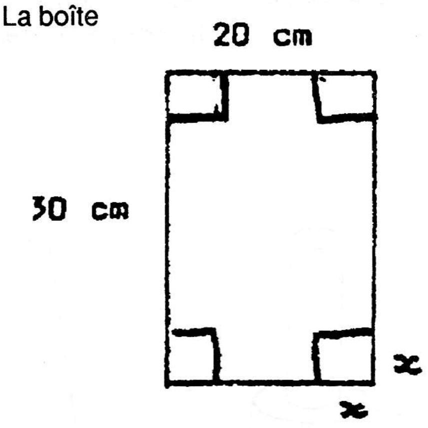
Activité 8 :
On remplit successivement les 6 récipients de même hauteur (80 cm) et de même capacité (100 l) dessinés ci-dessous :



Le robinet a un débit constant de 1 l en 4 secondes. On donne la représentation graphique du niveau de l'eau dans chacun des récipients, entre le début et la fin de remplissage.
1. Indiquer la représentation graphique qui correspond à chaque récipient.
2. Comparer les vitesses de remplissage au début, à la fin, à mi-parcourt :
   — pour chaque récipient,
   — entre les 6 récipients.



Activités de mathématisation :
La boîte



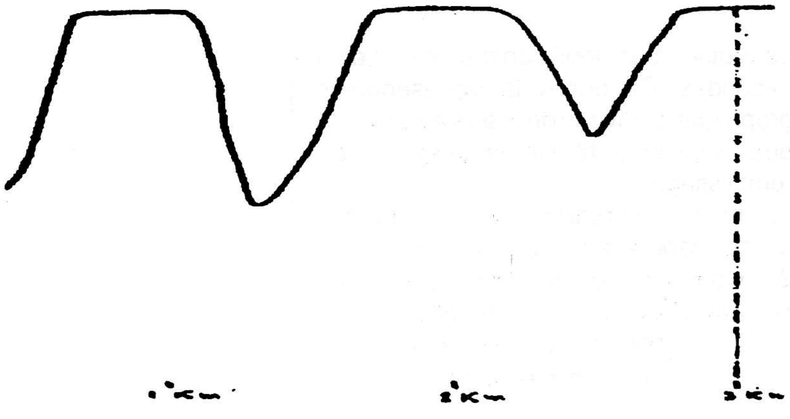
Avec cette plaque, on veut faire une boîte en découpant des carrés dans les coins et en pliant. Quelle doit être la longueur de la découpe pour obtenir une boîte de volume maximum?

Inflation :

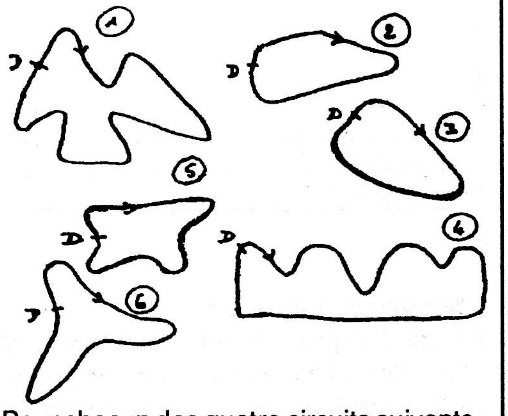
Taux d'inflation en un an	10	20	30	40	50
Pourcentages d'augmentation des prix sur 2 ans					

Trouver une formule donnant le pourcentage d'augmentation des prix sur 2 ans, y, en fonction du taux d'inflation en un an, x.
Tracer la représentation graphique.
Quel taux d'inflation fait doubler les prix en 2 ans?

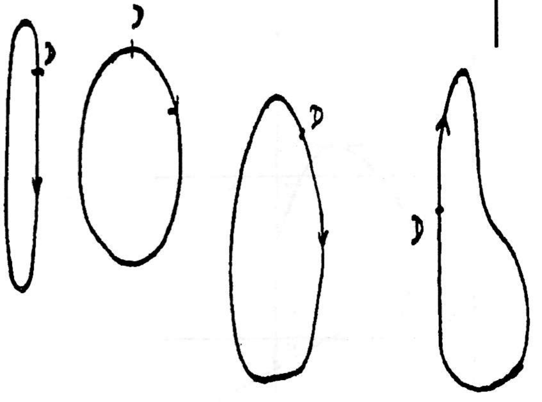
Prost - Senna, Senna - Prost
Voici une représentation graphique donnant la vitesse d'une voiture de course sur un circuit sans côte, de 3 km, lors du second tour entre deux passages de la ligne d'arrivée.



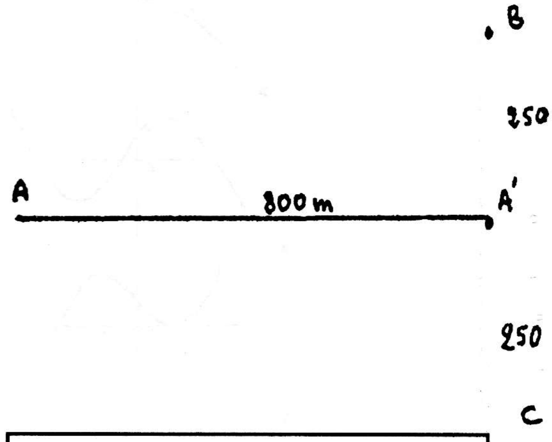
Parmi les circuits suivants, quel est le bon?



Pour chacun des quatre circuits suivants, dessinez la représentation graphique de la vitesse en fonction de la distance parcourue pour une voiture qui plafonne à 180 km/h.



Un éleveur doit alimenter en eau les trois réservoirs situés en ABC. Où doit-il creuser son puits pour avoir le minimum de canalisation à utiliser (il est sûr de trouver de l'eau sur la ligne AA')?



Bibliographie :
— *PLOT nos 13 et 14, 1980.*
— *Collection inter-irem no 3, 1983.*

DES COMPLEXES SANS COMPLEXES

E.N.S. d'Atakpamé - Togo

Un secret mal gardé

L'histoire des nombres complexes commence en Italie à la fin du XVe siècle, en même temps que celle des nombres négatifs, avec la résolution des équations du troisième degré de la forme $x^3 + px = q$ $(p, q) \in R^2$ par SCIPIONE DEL FERRO (1465-1526). Il ne la publie pas et la confie à quelques amis dont ANTONE MARIA FIOR.

En 1535, FIOR provoque TARTAGLIA à un tournoi de mathématique au cours duquel il lui propose l'équation de DEL FERRO. TARTAGLIA arrive à résoudre l'équation et l'étend à $x^3 = px + q$. Chose curieuse il en garde lui aussi le secret.

1538 : Jerôme CARDAN (médecin, mathématicien, physicien, poète, astrologue et même un peu magicien, dit-on) demande à TARTAGLIA de lui communiquer son secret en lui promettant de ne le publier qu'avec le nom de son inventeur. TARTAGLIA refuse. Cardan relance TARTAGLIA qui finit par lui livrer quelques informations lui permettant de découvrir la fameuse formule de CARDAN donnant la solution sous la forme :

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$- \sqrt{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

CARDAN n'hésite pas à utiliser la racine carrée d'un nombre négatif! Suit toute une série de « querelles de clocher » qui n'avance pas le problème.

La formule de CARDAN

Elle prouve qu'une équation du 3e degré peut avoir trois ou une racine (dans R). De nos jours un raisonnement basé sur la représentation d'une fonction de ce type et de son intersection avec l'axe des abscisses, le prouve plus simplement.

La formule dite de Cardan a cela de paradoxal qu'elle n'est applicable que dans le cas d'une racine réelle. La technique de résolution est de Scipione del Ferro. Cardan s'aperçoit du paradoxe et le signale dans l'Ars Magna paru en 1545.

Voici cette méthode :
Elle est basée sur l'identité
$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy\,(x + y)$.
Partant de l'équation $x^3 + px + q = 0$ (on peut toujours moyennant un changement de variable affine ramener une équation générale du 3e degré à une équation de ce type), on pose $x = u + v$
d'où $u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = x^3$
l'équation devient alors

$$[u^3 + v^3 + q] + (u + v)[3uv + p] = 0.$$

u et v étant généraux on annule chaque crochet! ce qui donne le système :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ \text{et} \\ uv = p/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ \text{et} \\ u^3v3 = -p^3/27 \end{cases}$$

d'où u^3 et v^3 sont les solutions d'une équation du second degré :
$U^2 + qU - p^3/27 = 0$
d'où

$$x = [(-1/2)q + (q^2/4) + (p^3/27)]^{1/3} + [(-1/2)q - (p^2/4) + (q^3/27)]^{1/3}$$

Ceci était la formule dite de Cardan. La résolution se termine par la factorisation du polynôme du 3e degré.

Cardan a eu égard pour les racines négatives, les appelant moins pures. Il appelle les racines imaginaires : racine de moins ou de moins sophistique.

En effet cette formule ne peut s'appliquer si $4p^3 + 27q^2$ est négatif (ce qui est le cas où il y a trois racines réelles!!).

La naissance de $\sqrt{-1}$

Il semble que Bombelli (Algebra, 1572) ait osé utiliser ce genre de nombres imaginaires. Signalons que l'on a retrouvé une

Ce texte, commenté et illustré par les élèves de l'E.N.S. d'Atakpamé, a déjà servi de base, à quelques mots près, à un cours-TD en terminale C à Blois pour introduire les nombres complexes. Furent ensuite proposées des démonstrations des propriétés de ces complexes. Cette présentation peu habituelle a reçu un écho, jugé favorable, auprès des élèves.

$$i^2 = -1\,!$$

ébauche de son manuscrit datant de 1556 ce qui le place en précurseur.
Il résout le paradoxe par l'introduction d'une unité imaginaire appelée piu di meno (notre i). Il en édicte les règles de calcul pour l'addition et les produits telles que
$i^2 = — 1$ ......
Il prend de nombreux exemples dont en voix deux :

** $x^3 = 51x + 104$

On se ramène à :
$x^2 — 104x + 17^3 = 0$
$\Delta' = 2704 — 4913 = —2209 = —47^2$
les racines carrées de Δ' sont :
pui di meno 47 soit 47i et meno di meno 47 soit — 47i
d'où il reste à extraire les racines cubiques de 52 + 47i et de 52 — 47i.
Ce genre d'exercices sera une obsession pour tous les algébristes du XVII^e y compris Newton (1670).
Or ici grâce au bon choix de l'exemple on trouve :
4 pui di meno 1 et 4 meno di meno 1
(4 + i) (4 — i)
Il suffit de vérifier que
$(4 + i)^3 = 52 + 47i$ et que $(4 — i)^3 = 52 — 47i$.
D'où la racine 8 puis les autres qui ont pour somme — 8 et pour produit 13 ce sont :
$— 4 + \sqrt{3}$ et $— 4 — \sqrt{3}$

** $x^3 — 15x = 4$

On obtient $\Delta = — 121$ à extraire les racines cubiques de 2 + 11i et 2 — 11i on trouve 2 + i et 2 — i d'où la solution 4 et les autres ont pour somme — 4 et pour produit 1.
Ce sont : $— 2 + \sqrt{3}$ et $— 2 — \sqrt{3}$

Au XVIIe siècle Descartes admet, sans le démontrer, que toute équation de degré n peut avoir n racines au plus. Il admet en 1637 qu'elle en a exactement n dont certaines peuvent être IMAGINAIRES. Le mot est lancé!

Complexes et trigonométrie

Viète montre que le cas irréductible des équations du troisième degré se ramène à un problème de trisection de l'angle (le cas irréductible appelé casus irreducibilis est celui où la formule de Cardan ne marche pas) :
cela découle de la relation trigonométrique :
$\cos 3x + 4 \cos^3 x — 3 \cos x$ donc si on connaît cos 3x pour trouver cos x il suffit de résoudre une équation du type :
$x^3 — 3x/4 — a/4 = 0$ où a désigne cos 3x
cette équation est de la forme étudiée
$p = — 3/4$ et $q = — a/4$ on remarquera que
$27 q^2 + 4 p^3 = 27(a—1)/16 < 0$
Réciproquement si cette quantité est négative on montre que nécessairement $p < 0$ et faisant un changement de variable n posant $x = ry$ on transforme l'équation générale en :

$y^3 + (p/r^2)\,y + q/r^3 = o$ d'où si $r = \sqrt{— (p/3)}$

et si on pose $a = 3q/p \sqrt{—3/4p}$
(on a : $—1 < a < 1$)

alors l'équation devient
$y^3 — 3y/4 — a/4 = 0$
d'où $\cos 3t = a$ soit $3t = \mathrm{Arccos}(a) + k2\pi$
soit $t = \mathrm{Arccos}(a)/3 + k2\pi/3$

d'où «trois» valeurs pour t, donc trois valeurs pour y et donc trois valeurs pour x de la forme :
$r \cos (t_1)$, $r \cos (t_1 + 2\pi/3)$ et
$r \cos (t_1 + 4\pi/3)$

dont l'interprétation à partir des formes trigonométriques des complexes est facile à envisager.
soit pour l'exemple suivant :
$x^3 — 3x + 1 = 0$ on a $\Delta' = — 3/4 < 0$ $(x = ry)$

avec $r = \sqrt{— 4p/3} = 2$
d'où $4y^3 — 3y = — 1/2$

soit avec $y = \cos t$ $\quad\cos 3t = — 1/2$

$3t = 2\pi/3 + k2\pi$ soit $t = 2\pi/9 + k2\pi/3$

ainsi :
$x_1 = 2\cos(2\pi/9)$, $x_2 = 2\cos(8\pi/9)$ et
$x_3 = 2\cos(14\pi/9)$

$$\boxed{i = \sqrt{-1}}$$

Moivre (1667-1754) en exil à Londres, ami de Newton, a prouvé une formule qui n'est pas tout à fait celle que l'on nomme actuellement formule de Moivre :
$1/2\ (\cos x + i \sin x)^{1/n} +$
$1/2\ (\cos x - i \sin x)^{1/n} = \cos x/n$

La notation i est très tardive et est due à Euler (1777) et a été reprise ensuite par Gauss. Avant c'était la notation $\sqrt{-1}$ qui était utilisée.
D'Alembert «démontre» en 1746 que tous les nombres «imaginaires» sont de la forme $a + b\sqrt{-1}$ et prouve le principe de Descartes sur les racines des équations.

La preuve est jugée correcte par ses contemporains. Elle est ensuite améliorée par François Davret de Foncenex 1734-1799, Louis Lagrange 1736-1813, Simon de Laplace 1749-1827.

1799 : GAUSS CARL FRIEDICH (astronome, mathématicien, physicien) flaire un cercle vicieux dans les preuves formulées jusque-là et entreprend dans sa thèse soutenue en 1799 devant l'université d'Helmsted de démontrer que les racines existent et sont de la forme : a + b — 1

Il en donne une démonstration rigoureuse (1831). Tout nombre complexe (le mot est de lui) est de la forme a + ib. Gauss fait apparaître la notion de norme de complexes et sa notation N(z). C'est K. Weierstrass qui impose la notion | z |.
La notion de module avait été apporté par Argand (1768-1822) lorsqu'il rechercha une interprétation géométrique des complexes (1806). Cauchy confirma cette interprétation dans un mémoire en 1847.

Pour aller plus loin :

Dedron et Itard : Mathématiques et mathématiciens, ch. VII, Gloires italiennes, éd. Magnard.
Itard : Matériaux pour l'histoire des nombres complexes publication de l'APMEP.
Dahan-Dalmedico : Routes et dédales, ch. VII, éd. Etudes vivantes.
N. Dimathème : tome Activités TC, ch. I, éd. Didier.
Cl. Tisseran : Histoire des complexes comme si vous y étiez, Irem de Lyon.

LA FORMATION DES OCEANS

François Fillion - Dreux

Comment les élèves utilisent leurs connaissances mathématiques dans un devoir en temps limité en sciences naturelles. Comment leur professeur (de Sc. Nat.) analyse leurs réponses et les commentent pour le PLOT. Que pensez-vous de ces différents types de réponses?

L'exercice

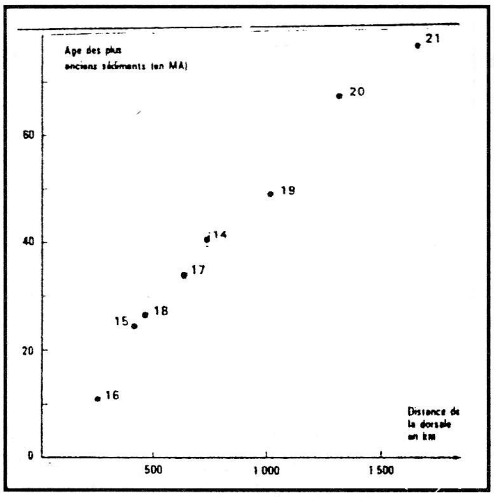


Figure 1

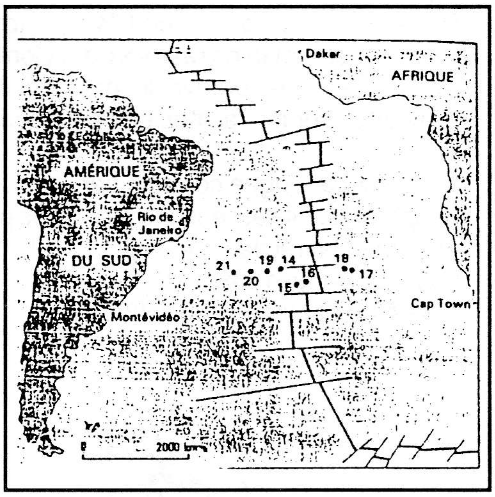


Figure 2

Au cours des expéditions menées en 1968-1969, le Glomar Challenger a réalisé des forages aux endroits numérotés 14, 15..., etc. dans l'Atlantique Sud : fig. 1. Tous ces forages ont atteint le fond basaltique de sorte qu'il a été possible de recueillir à chaque endroit les plus anciens sédiments et de les dater.
La figure 2 indique l'âge des plus anciens sédiments en fonction de la distance à la dorsale de l'Atlantique.
1. Expliquer en quoi ces données peuvent être utilisées pour étayer l'idée d'une expansion de la croûte océanique.
2. Calculer l'ordre de grandeur de la vitesse d'expansion.

Activités	Exigences
— Fournir une explication en rapport avec l'idée proposée.	1. Sédiments les plus jeunes à proximité de la dorsale et plus âgés au fur et à mesure que l'on s'écarte. On exigera la relation entre l'âge des sédiments les plus anciens et l'âge des basaltes sous-jacents, donc la conformité avec la théorie.
— Réaliser un calcul simple.	2. Ordre de grandeur : 2 cm/an. On tiendra compte de la cohérence du raisonnement.

— Exercice facile car reprenant un argument essentiel discuté en classe sur des documents différents.

— **Question I**

résultats | note I : 10/32 = 31 %
| note II : 22/32 = 69 %

Tous les élèves ont bien constaté la relation entre distance par rapport à la dorsale et âge des sédiments, symétrie par rapport à celle-ci... Par contre seulement, 10 élèves ont bien exprimé comme demandé la relation entre l'âge du basalte et l'âge du sédiment directement à son contact. La question posée est elle assez précise par rapport à cette exigence bien précise et indispensable. Ne devrait-elle pas être précédée d'une première question sur « l'âge relatif des sédiments et de la croûte sous-jacente? »

— **Question II**

La notation de cette question a été bien difficile car on obtient des résultats qui sont assez bons.

27 élèves sur 32 soit 84 % ont trouvé comme ordre de grandeur 2 cm par an et ont donc su utiliser les documents proposés. Dans les exigences on demande de tenir compte de la cohérence du raisonnement alors que la question indique simplement « calculer l'ordre de grandeur de la vitesse d'expansion ».

Les réponses sont très différentes, certaines très abruptes et purement mathématiques, d'autres utilisant l'outil mathématique pour raisonner sur un problème géologique...

Raisonnement « naturaliste » : 12/27.

Raisonnement « mathématique » : 15/27 seulement.

Exemples de réponses à cette question 2.

→ François

Prenons le point 15 :

— il se situe à ≅ 450 km de la dorsale,

— l'âge de son sédiment le plus ancien est ≅ 24 millions d'années.

Donc l'océan Atlantique a donc gagné 450 km en 24 millions d'années.

Sa vitesse d'expansion est donc de l'ordre de v = 450 × 10^5 cm /
24 x 10^6cm = 1,875 cm an^{-1}

Donc, en gros, on peut considérer que l'océan Atlantique s'agrandit environ en moyenne de 1,5 à 2 cm par an, même si ce phénomène n'est bien sûr pas régulier.

→ Mireille

Il suffit de calculer le coefficient directeur a de la droite formée par les points donc on va prendre le point 21 (1 750, 76 M) et le point 16 (250; 11M) donc a = 1 750 — 250/ (76 — 11) . 10^6 = 2,3·10^5

La vitesse est donc de 2,3 105 km/année
ou 2,3 cm/an

→ Cécile

Calculons l'ordre de grandeur de la vitesse d'expansion :

O = [(1 300 — 300) + (1 600 — 500)] / [(65 — 10) + (73 — 27)] =
20,792 km par million d'années

→ Jacques

Le graphique représentant la distance de la dorsale en fonction de l'âge des plus anciens sédiments montre que les points sont approximativement alignés. La vitesse d'expansion est donc en gros régulière.

Cette vitesse est le coefficient directeur de la droite.

Je prends les points (1 750; 76) et (250, 11)

a = (1 750 — 250) / (76 — 11) . 10^6 = 2 . 10^5

Donc la vitesse d'expansion est environ 2 cm/an.

La quatrième réponse est en fait celle d'un collègue de mathématique. Ayant corrigé mes copies j'ai voulu amorcer une discussion avec des collègues naturalistes et mathématiciens.

Pour tous, la troisième réponse était la plus mauvaise, fausse même, pour les mathématiciens et les naturalistes.

Par contre pour les rédactions I et II les propositions de notation étaient differentes.

4/4 pour le I	2/4 pour le I
2/4 pour le II	4/4 pour le II
naturalistes	mathématiciens

L'utilisation abrupte d'un raisonnement mathématique est-elle suffisante en géologie?? La discussion fut assez sévère.

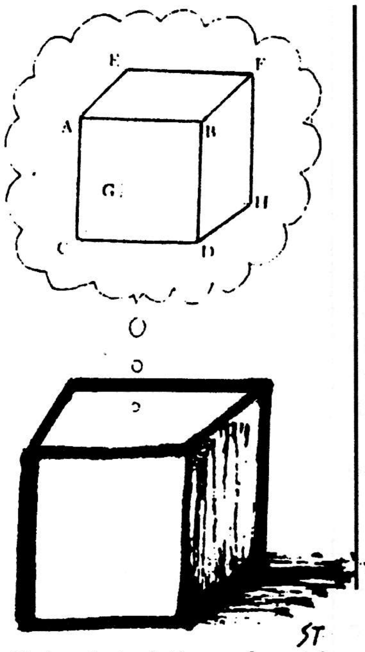
Il faut noter qu'aucun élève n'a en premier lieu parlé d'une position moyenne des courbes de point et d'autre d'une droite passant par l'origine. La valeur trouvée doit être discutée.

Cette question illustre bien la difficulté d'appréciation de notation si les exigences ne sont pas bien définies ou les questions imprécises...

■

LIAISON 3e-2e DE L'ILE DE LA REUNION

Régionale de l'Apmep



Cube de troisième rêvant à un cube de seconde.

Sur un total de 320 classes de troisième, l'équipe Apmep de la Réunion a reçu 134 fiches-réponse au questionnaire liaison troisième-seconde. Ce questionnaire était adressé aux professeurs de troisième; il a été diffusé juste après les conseils de classe de fin d'année.

Rappelons les objectifs de ce questionnaire :

— Donner quelques informations aux professeurs de seconde sur les élèves qu'ils recevront à la rentrée.

— Les informer des difficultés rencontrées par les professeurs de troisième dans leur classe, des méthodes de travail utilisées au collège, dans le but de coordonner un petit peu les pratiques en troisième et en seconde.

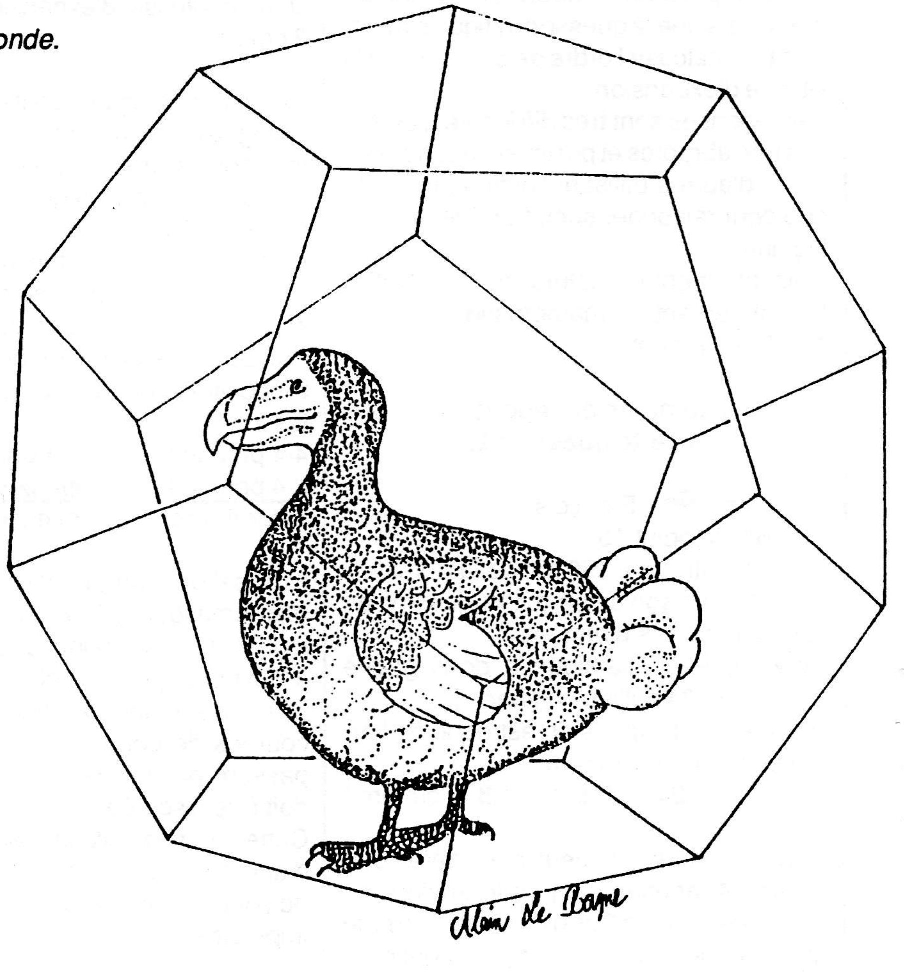
— Faire ressortir des thèmes sur lesquels un travail conjoint des professeurs de seconde et des professeurs de troisième serait utile.

L'analyse que nous vous proposons ci-dessous répond en partie à ces objectifs.

Cette première expérience pour une liaison troisième-seconde sera poursuivie et adaptée aux nouveaux programmes de troisième dès l'année prochaine.

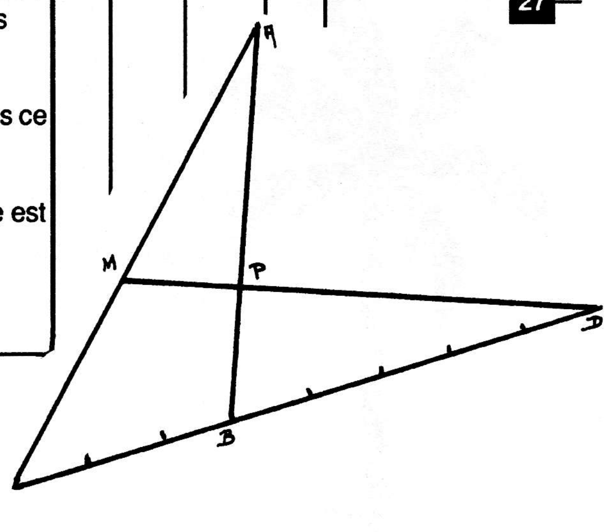
De plus nous envisageons d'approfondir cette liaison par un questionnaire dirigé cette fois-ci vers les professeurs de seconde et par des rencontres entre enseignants de collèges et de lycées.

Cet article est extrait du Dododécaèdre n° 5 de novembre 89, journal de la régionale A.P.M.E.P. de la Réunion



Votre test de l'été

VOS EXIGENCES POUR LE PASSAGE EN SECONDE (vous pouvez répondre) Indiquez les exercices dont la maîtrise vous paraît superflue (a), peu utile (b) utile (c) ou indispensable (d)	(a)	(b)	(c)	(d)
1) Ecrire sous forme de fraction irréductible : $(2 - (3/2) + (7/6)) / ((12/5) \times (15/16))$				
2) Calculer : $(-3 * 10^7)^2 * (2 * 10^{-4})^3$				
3) Démontrer que $(9 + 4\ 5)(5 - 2\ 5)2$ et $(2 - \ 6)^2 - (2\ 3 - \ 2)^2$ sont des entiers.				
4) Sachant que $t = -2/3$, calculer $3t^2 - 6t + 1$ et $(2t - 1)/(4t)$.				
5) Développer : $f(x) = (2x - 5)^2 - (x + 8)(2x - 5) + 25 - 4x^2$				
6) Factoriser f(x) du 5).				
7) Résoudre l'équation : $(2/9)(2t - 5) - (5t - 9) / 6 = 7 / 3$				
8) Résoudre dans R : $x - 2 < 5x + 7$ et $3 - 2x > 1$.				
9) Représenter dans un repère de votre choix, l'ensemble des points M dont les coordonnées (x;y) vérifient simultanément : $x < 3$, $y > 0$ et $y < x + 1$.				
10) Résoudre l'équation : $(2y - 1)(y - 1) = 1$.				
11) Une somme de 20,50 F est composée de 50 pièces de 20 centimes et de 50 centimes. Combien y a-t-il de pièces de chaque sorte?				
12) Etant donné un triangle APM tel que AM = 5 cm, placer le point E tel que : $\overrightarrow{PE} = 2\overrightarrow{MP} - 9/5\ \overrightarrow{AM}$				
13) Tracer sur du papier millimétré un repère orthonormé (unité : 1 cm sur chaque axe), dans lequel vous placerez la droite (AB) avec le maximum de précision. Les points A et B ont pour coordonnées : A(0,1; 0,01) B(101; 111).				
14) Calculer le rapport PA/PB dans la figure ci-contre où M est le milieu de [AE].				
15) Dans le plan rapporté à un repère (O,I,J) on donne A(2,1) et B(—2,3). Calculez les coordonnées du point D, symétrique de A par rapport au point B.				
16) Le nombre 5 est-il solution de l'équation : $(x - 1)^2 = 25$?				
17) Indiquer si chacun des nombres (—2,5) et 4/3 appartient à chacun des intervalles suivants :]— 5,2; 4/3];]— 2,5; + ∞ [;] — ∞ ; 1,33].				
18) ABCD est un parallélogramme, M est un point du plan, montrer que : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$.				
19) Dans un plan repéré on considère les points E, D et F tels que : E(—5/2; 5), D(7/2; 3/2), F(23/2; —3). Ces trois points sont-ils alignés ? (justifiez votre réponse)				
20) Sur du papier millimétré, tracer un repère orthogonal (O,I,J) d'unités 1 cm en abscisse et 2,5 cm en ordonnée. Placer dans ce repère les points A, B, C et D de coordonnées : A(1;1), B(2;—1), C(3,5;1,3), D(4,5;— 0,7).				
21) L'utilisation d'une calculatrice ou d'une table trigonométrique est autorisée. $BC^2 = AB^2 + AC^2$; $BA^2 = BH \cdot BC$; $AH^2 = BH.HC$ Trouver AC sachant que AB = 4 et l'angle en C = 40°.				



COMMENTAIRES

Rappelons tout d'abord la question qui avait été posée dans cette partie :
«Indiquer si, pour un élève entrant en seconde, la maîtrise de chacun des exercices suivants vous semble :superflue, peu utile, utile, indispensable. »
Nous avons classé ces exercices suivant le nombre décroissant de professeurs de troisième qui les ont jugés « utiles ou indispensables ».
Le classement obtenu ne constitue pas une surprise. Les compétences suivantes font l'unanimité (ou presque) :
— Comprendre ce qu'est un nombre solution d'une équation (16).
— Savoir utiliser des coordonnées dans le plan (15, 19, 20).
— Mettre en équation un problème (11).
— Savoir calculer avec des fractions; exécuter un programme de calcul pour une valeur fixée de la variable; développer; factoriser (4, 5, 1, 6).
— Connaître et utiliser les notations sur les intervalles (17).
Nous .remarquons d'autre part que les exercices numériques relatifs au calcul fractionnaire qui ont été proposés tiennent une bonne place dans la hiérarchie des exigences, alors que ceux relatifs aux puissances de 10 et aux racines carrées viennent bien après.
Il est intéressant de constater que l'exigence sur la construction d'une combinaison linéaire de deux vecteurs vient après celle sur les démonstrations utilisant la relation de Chasles.
L'exercice 13 a fait l'objet de commentaires sur certaines fiches-réponse. Pourtant il n'exige pas de technique particulière et est un exemple de l'utilité d'une équation de droite.
L'exercice 14 est un exercice particulièrement difficile, dans la mesure où il nécessite la construction d'un élément supplémentaire dans la figure. Des études ont montré qu'un tel exercice est difficile même pour des élèves de terminale C. Il n'est donc pas surprenant de le trouver en fin de liste.

CONCLUSION

La première observation est que 17 exercices sur 21 (80 %) apparaissent à tout le moins utiles à plus de 60 % des enseignants dans l'ordre nos 16, 15, 11, 19, 4, 5, 20, 17, 1 à plus de 80 %, 6, 2, 21, 18, 8, 7,9 entre 60 % et 80 %.
Ces résultats donnent à réfléchir! Bien sûr ils ne permettent en rien de conclure sur la nature et le niveau de difficulté des activités faites en classe mais renseignent sur la représentation des mathématiques en lycée qu'ont majoritairement les professeurs de troisième.
Un regard sur la colonne « superflue » renforce cette interprétation : les pourcentages à un seul chiffre sont plus que dominants et on ne réussit pas à trouver une majorité pour éliminer l'exercice 14 (39 % seulement).
Il serait intéressant de vérifier dans quelle mesure cette représentation coïncide avec la réalité de la classe de seconde (sans doute n'y a-t-il pas « une » classe de seconde mais peut-être un modèle de fonctionnement dominant).
Une deuxième observation est la suivante Certains des exercices proposés demandent à l'élève d'être capable de mettre en jeu, dans un contexte non stéréotypé, des outils simples de la classe de troisième (13, 21, 11, 3). On peut se demander si cette compétence est jugée prioritaire par les enseignants de troisième.
Enfin, on peut penser que le manque de relation entre enseignants de seconde et enseignants de troisième, la difficulté de certains sujets des brevets de collège, le fait de ne pas savoir ce que deviennent nos élèves de troisième que par l'information qu'on a de leurs notes... tous ces faits ont pu contribuer à faire que les enseignants de troisième augmentent leur niveau d'exigence (les désaccords observés entre les enseignants de troisième pour les exercices 3, 10 et 12 reflètent cette hypothèse).
Nous pensons que la palette d'exercices proposée a influencé les enseignants dans le choix de leur réponse; n'aurait-on pas eu une distribution analogue des résultats en proposant des exercices moins difficiles? ■

L'HETEROGENEITE EN SECONDE

François Boucher, Saint-Paul de la Réunion

INTENTIONS

• Organiser une activité permettant à chacun de faire un peu de mathématiques à son rythme, à son niveau tout en ayant la satisfaction d'avancer, de progresser ou de trouver quelque chose.

• Créer une situation permettant d'observer les comportements des élèves, leurs difficultés, leurs erreurs, leurs représentations.

Objectifs plus spécifiques

• Développer une certaines habileté calculatoire, une connaissance du vocabulaire courant de l'algèbre et des règles de calcul usuelles.

• Développer l'auto-contrôle voire l'auto-questionnement, la capacité à formuler des conjectures et à les tester.

• Faire mémoriser quelques identités remarquables (disons $(a \pm b)^2$).

L'activité proposée peut prendre une séance ou plus (classe dédoublée, période d'une heure et demi).

La séance commence par une discussion sur les identités remarquables. Occasion pour chacun d'exprimer les souvenirs parfois pénibles qu'évoque l'expression. C'est quoi, ça fonctionne comment, ça sert à quoi... bref, les trois identités classiques sont écrites au tableau. La question est alors : «en connaissez-vous d'autres?», puis : «en existe-t-il d'autres?». L'activité peut alors démarrer.

Consignes de travail

(écrites au tableau puis données oralement)

1) Seule écrite au tableau :
Trouvez une identité remarquable pour $(a + b)^3$, puis pour $(a + b)4$, puis pour $(a + b)^5$ et $(a + b)^6$.

2) Puis lorsque le travail est bien lancé et que les plus rapides ont achevé le 1) :
Trouvez sans calcul une identité remarquable pour $(a + b)^7$, puis pour $(a + b)^8$.

3) Les consignes suivantes sont personnalisées; je choisis ce qui convient de demander pour la poursuite du travail en fonction des capacités de chacun :

3.1 Essayez d'expliquer (avec des mots, des dessins ou tout moyen qui vous semble utile) la règle que vous avez trouvée.

3.2 Trouvez une identité remarquable pour $(a + b)^3$, $(a + b)^4$, $(a + b)^5$...; expliquez.

3.3 Trouvez une identité remarquable pour $(a + b)^{15}$, puis $(a + b)^n$.

Déroulement de la première séance

Pas de consignes spécifiques sur l'organisation du travail; chacun démarre le travail individuellement, les échanges s'instaurant très vite. Les difficultés, les différences de vitesse d'exécution apparaissent immédiatement. Mon rôle est :

— d'observer, si possible enregistrer :
• les comportements (découragement, enthousiasme, travail en solitaire...),
• les difficultés diverses (compréhension des consignes, problèmes de calcul...),
• le réseau de communication qui s'installe dans la classe (nature des échanges, type de questions que les élèves se posent entre eux, la façon dont ils y répondent, argumentent...),

— apporter une aide adaptée permettant aux élèves de surmonter leurs difficultés,

— apporter des informations (vocabulaire algébrique, notations, conventions, règles de calcul...),

— donner les consignes suivantes au fur et à mesure de l'avancement du travail.

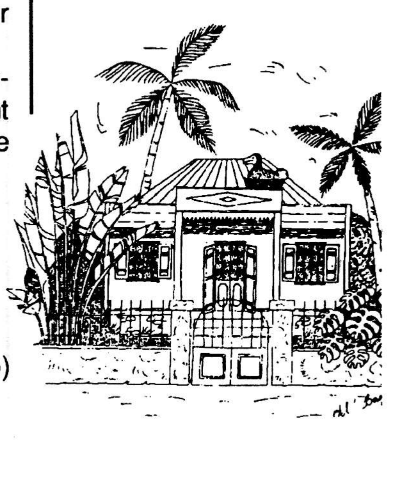
Modulo des différences de vitesse d'exécution, les trajectoires des élèves sont assez semblables. On peut en décrire une «moyenne» :

1) calcul de $(a + b)^3$:

$(a + b)^3$ $= (a + b)(a + b)(a + b)$
$= (a^2 + ba + ab + b^2)(a + b)$
= ....

2) calcul de $(a + b)^4$:

$(a + b)^4$ $= (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$
$= (a^2 + ba + ab + b^2)(a^2 + ba + ab + b^2)$
= ....



ou

$(a + b)^4 = (a + b)(a + b)(a + b)(a + b)$
$= (a^2 + ba + ab + b^2)(a + b)(a + b)$
$= (a^3 + \ldots\ldots) (a + b)$

- nombreuses erreurs de calcul de toute nature,
- non-fonctionnement de règles simples (par exemple ba et ab sont conservés tels quels),
- c'est l'occasion, au coup par coup, de rappeler quelques règles de calcul, ce qu'est une règle de calcul, comment on s'en sert, du vocabulaire (terme, exposant, coefficient, développer, distributivité...),
- c'est l'occasion d'inciter :
  - à la bonne présentation des calculs,
  - à la relecture systématique de chaque ligne de calcul,
  - à l'auto-contrôle en vérifiant à l'aide de valeurs simples 1, 0, —1,
  - au contrôle de l'homogénéité pour ceux qui sont à même de comprendre l'argument,
  - à l'écriture des expressions obtenues sous une forme «régulière», «ordonnée»,

Je place en général ici une intervention pour inciter à la réflexion sur les moyens de gagner du temps, de simplifier les calculs, d'éviter de refaire des calculs déjà faits. L'écriture $(a + b)^5 = (a + b)^4(a + b)$ et son utilisation ne sont pas évidentes, pas même spontanément réinvesties en $(a + b)^6 = (a + b)^5(a + b)$.

3) calcul de
$(a + b)^5 = (a + b)^4(a + b)$
puis de
$(a + b)^6 = (a + b)^5(a + b)$

- moins d'erreurs de calcul d'origine algébrique mais beaucoup d'omissions dans le développement (des termes, des exposants), d'où nouvelle incitation à l'autocontrôle par exemple en vérifiant le nombre de termes obtenus dans un développement par l'application de la distributivité.

Ensuite, il y a en gros trois catégories d'élèves :

1. quelques rares qui trouvent tout tout de suite, ce qui ne pose pas de problème : le sujet est assez vaste pour les alimenter;

2. la majorité qui ayant réécrit les formules trouvées par calcul, découvrent assez vite la règle de formation des exposants des termes et cernent bien la difficulté restante: trouver une règle de formation des coefficients;

3. quelques rares qui ne voient rien, ont du mal à réécrire sans erreur une formule comportant tout de même 36 symboles ($(a + b)^5 = \ldots$); c'est essentiellement un problème de confiance en soi, il faut les convaincre qu'ils sont capables de trouver.

4. Dans le groupe 2, il y en a toujours pour avoir la bonne idée de ne s'occuper que des coefficients et de les réécrire sous forme de tableaux; fréquemment :

2				
3	3			
4	6	4		
5	10	10	5	
6	15	20	15	6

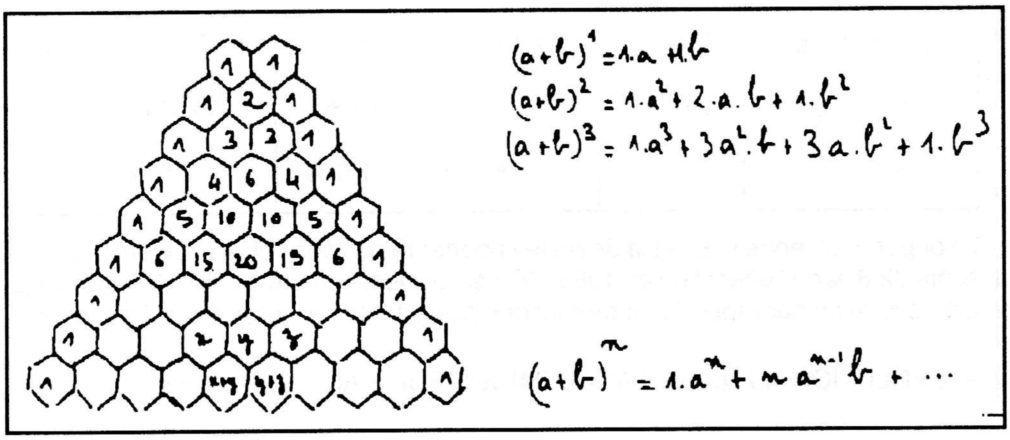
(les coefficients 1 sont souvent omis)

- je me cantonne dans une stricte non-directivité en incitant au débat entre élèves,
- les élèves conjecturent beaucoup; toutes sortes de trouvailles sont formulées, testées, rejetées,
- le prof reste la référence lorsqu'une règle semble tenir la route; le calcul de (a + b)7 aux fins de vérification n'est pas une idée spontanée,
- l'écriture en tableau comme ci-contre attire les élèves vers des règles de formation «verticales» avec la chaîne 2—>3—>4—>5—>6 perçue par tous.

Depuis quatre ans que je pratique cette activité avec des classes diverses, tous les élèves finissent par découvrir la règle classique de formation du triangle de Pascal en moins d'une heure et demi, sont capables de développer $(a + b)^7$, $(a + b)^8$; ... et ont conscience d'avoir la possibilité d'écrire autant d'identités remarquables qu'ils le souhaitent. «C'est infini», m'a dit une année une élève. Ces moments sont rares donc précieux.
Pour l'anecdote signalons aussi qu'un seul élève a trouvé une règle de formation des coefficients pour un exposant arbitraire ($C^{k+1}_n = C^k_n \times (n - k) / (k + 1)$; il est actuellement en TD avec de gros problèmes en mathématiques.

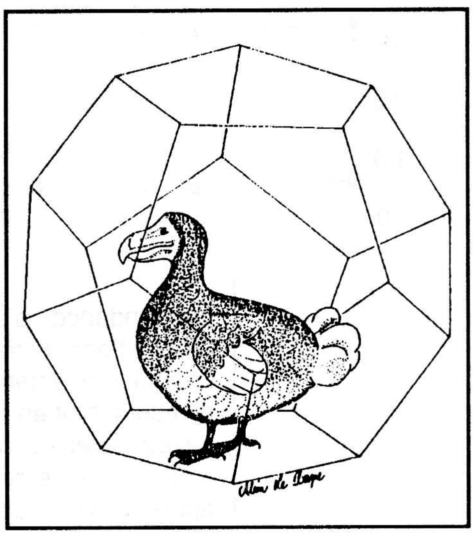
Déroulement de la deuxième séance

L'activité peut se poursuivre de façons diverses : topo historique sur le triangle de Pascal, travail sur (a — b)n; cette année j'ai préféré travailler sur la formulation de la règle trouvée. Les élèves sont en groupes de trois ou quatre. La consigne est la 3.1. Le produit fabriqué par groupes doit tenir sur un transparent pour rétroprojecteur. Au bout de 45 minutes, les productions sont projetées, critiquées, comparées. Mon rôle est d'organiser le débat. Un élève avait suffisamment de finesse d'esprit pour jouer le rôle du « bonnet d'âne » interprétant de travers toute explication prêtant à confusion. C'est l'occasion de montrer la fonction d'un vocabulaire précis, re-présenté ici comme réponse à un besoin.
La séance s'achève sur une consigne de mise en forme individuelle à la maison et sur une synthèse de ce qu'il faut retenir.
Six mois plus tard, 63 % des élèves de cette classe se souvenaient très bien de la règle et de son utilité.



Affiche réalisée par un élève

La classe a estimé que c'était joli, mais incompréhensible pour celui qui ne connaîtrait pas la règle.
Un autre élève a écrit un texte explicatif en français; le professeur d'anglais a accepté de jouer le cobaye mais n'a pas réussi à écrire $(a + b)^7$. ■



PARCOURS DES ELEVES DE LA 6ème A LA TERMINALE

Des données chiffrées commencent à être mieux connues des enseignants. Elles peuvent permettre de prévoir quels seront les prochains effectifs des classes de collège et de lycée et comment se répartiront les élèves entre cycle long et cycle court au collège, entre sections scientifiques, littéraires ou professionnelles au lycée.

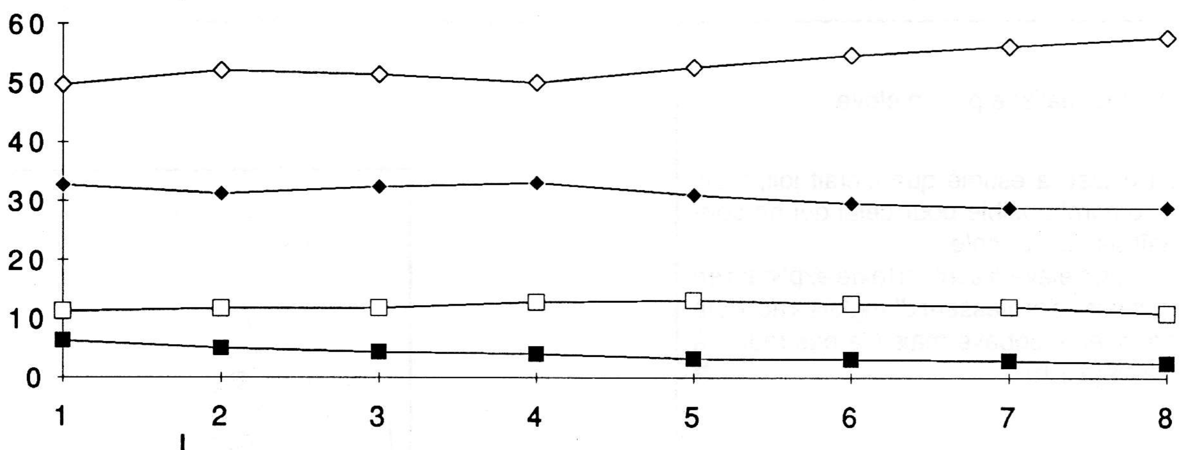
Voici quelques éléments que nous vous laissons analyser et commenter.

Flux en collège en Région Centre :

	6e → juin 85	5e → juin 86	4e → juin 87	3e juin 88
Effectifs	34 573	34 898	24 865	25 183
Passages en classe supérieure	83,3 %	63,6 %	83,9 %	57,7 % et 28,9 % en cycle court
Redoublements	12,6 %	17,3 %	14,5 %	10,9 %
Autres	4,1 %	19,1 %	1,6 %	2,5 %

La déperdition entre la 6e et la 3e reste importante puisque l'effectif 3e en 1988 représente 72,8 % de l'effectif 6e en 1985 (74,8 si l'on tient compte de la 3e technologique). L'amélioration par rapport aux promotions précédentes est cependant très nette.

— EVOLUTION AU NIVEAU ACADEMIQUE SUR 8 ANS (1981-1988)



Les tendances d'évolution se sont modifiées à partir de 1984. Après cette date, les propositions d'orientation ont augmenté de façon continue (+ 7,7 points). Parallèlement, les orientations vers le cycle court ont diminué (— 4,2 points) mais restent au niveau atteint en 1987.
Le redoublement qui avait augmenté jusqu'en 1985 est en diminution depuis cette date. La part relative des élèves qui se dirigent vers les autres voies (écoles spécialisées, apprentissage) diminue sans arrêt depuis 1981.

Effectifs en seconde en 1989-1990

Dans les lycées publics de France métropolitaine.

	88-89 Effect.	89-90 Effect.
Initiation éco et soc	342 295	353 982
TSA (seul)	16 005	12 304
TSA Productique	33 691	35 481
Sciences et techno des Laboratoires	4 903	4 820
Sciences médico-sociales	7.261	7 135
Arts appliqués	826	834
Préparation BTn F 11	455	415
BT Spécifique	2.711	2 646
Spéciale	1 940	1 369
TOTAL GENERAL	**410 147**	**418 986**

EFFECTIFS PREMIERES

	A1	A2	A3	Tot. A	B	S
82-83	14 815	23 815	2 729	40 559	34 455	83 796
83-84	13 489	23 796	3 122	40 407	39 128	77 655
84-85	13 285	24 986	3 494	41 705	42 970	83 218
85-86	14 561	25 026	3 767	43 354	45 295	88 533
86-87	14 593	26 685	4 188	45 466	49 751	94 547
87-88	16 425	28 225	4 838	49 488	55 328	105 830
88-89	18 069	30 796	5 582	54 447	58 295	123 149
89-90	21 352	33 171	6 443	60 966	64 281	131 852

E	F Ind	F ter GH	BT	TOTAL	Bac Pro
7 918	29 792	65 493	6 684	268 697	
6 719	28 414	64 689	6 595	263 607	
6 838	29 514	72 269	6 533	283 091	
6 982	30 729	76 615	7 357	298 865	1 200
7 739	32 170	78 877	6 722	315 272	6 978
8 526	33 624	84 013	6 693	343 502	14 776
9 941	35 246	87 440	6 927	375 445	22 032
11 348	37 410	89 993	6 977	402 827	30 787

EFFECTIFS TERMINALES

	A1	A2	A3	A	B	C
82-83				48 000	42 302	33 265
83-84	20 082	27 250	2 828	50 088	42 219	36 724
84-85	18 952	26 221	3 160	48 333	44 547	35 215
85-86	18 543	26 679	3 428	48 650	47 953	34 686
86-87	19 422	26 965	3 673	58 060	49 992	35 663
87-88	20 111	28 962	4 146	53 219	54 659	39 224
88-89	21 548	30 371	4 808	56 727	60 590	45 453
89-90	24 479	33 696	5 716	63 891	64 576	54 110

D	E	F Ind	F ter GH	BT	TOTAL	Bac Pro
54 956	8 251	33 305	67 367	7 620	295 866	
52 679	8 841	35 175	70 306	8 246	304 270	
44 669	7 272	31 180	66 353	8 453	286 022	
43 758	7 041	31 722	71 144	8 528	293 482	
46 464	7 023	33 178	75 596	8 723	306 697	1 228
47 858	7 604	34 402	79 234	9 270	325 430	6 423
51 154	8 394	36 000	84 672	9 213	352 211	13 431
56 708	9 475	37 583	89 917	9 563	385 823	20 856

ALORS LES M E C S?

Roger Crépin - Limoges

Mathématique et Egalité des Chances en Sciences entre filles et garçons au lycée dans les sections scientifiques, entre hommes et femmes dans les carrières scientifiques et techniques, qu'en est-il en 1990?

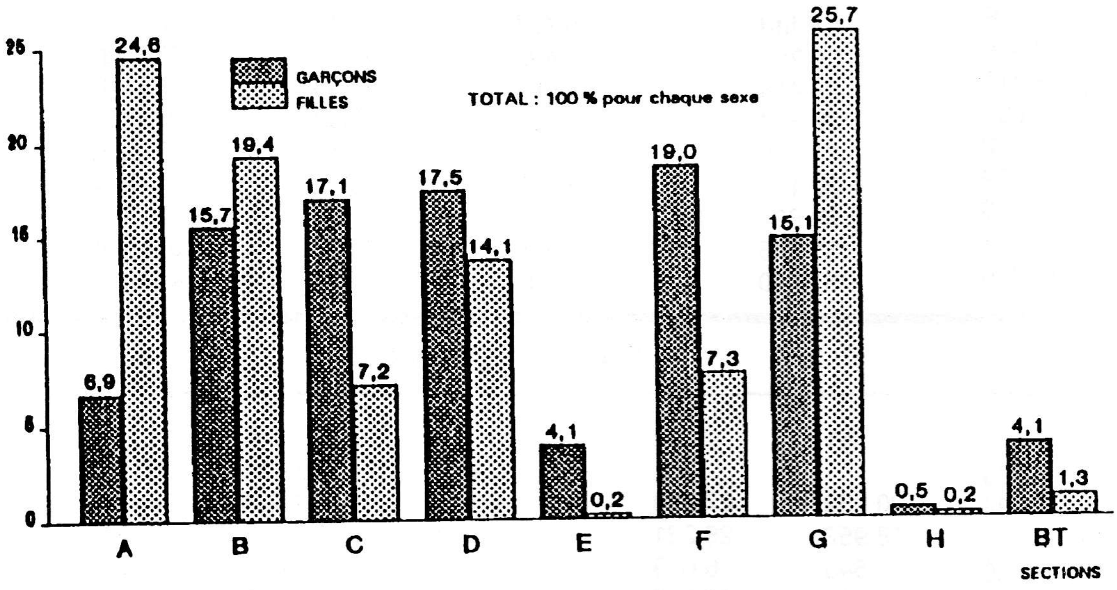
Statistiques

En ce 8 mars, journée internationale des Femmes j'ai essayé de faire un état des lieux dans quelques secteurs :

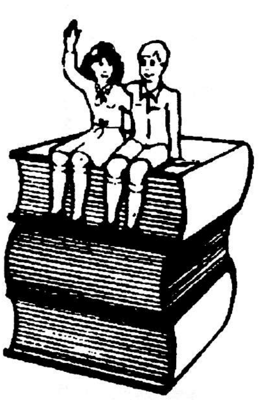
1) Au lycée

Dans les secondes, 54 % de filles (60 % dans les secondes I.E.S.-tronc commun). Les sections technologiques qui attirent les filles touchent au domaine tertiaire ou au secteur médico-social.

En terminale, le tableau suivant nous renseigne bien sur le poids relatif des différentes sections selon le sexe :



	élèves	filles	garçons	total par niveau
Seconde I.E.S.	420 000	250 000 (59 %)	170 000 (41%)	**490 000**
Première S	136 000	61 000 (45 %)	75 000 (55 %)	**430 000**
Terminale C et D	115 000	49 000 (43 %)	65 000 (57 %)	**420 000**

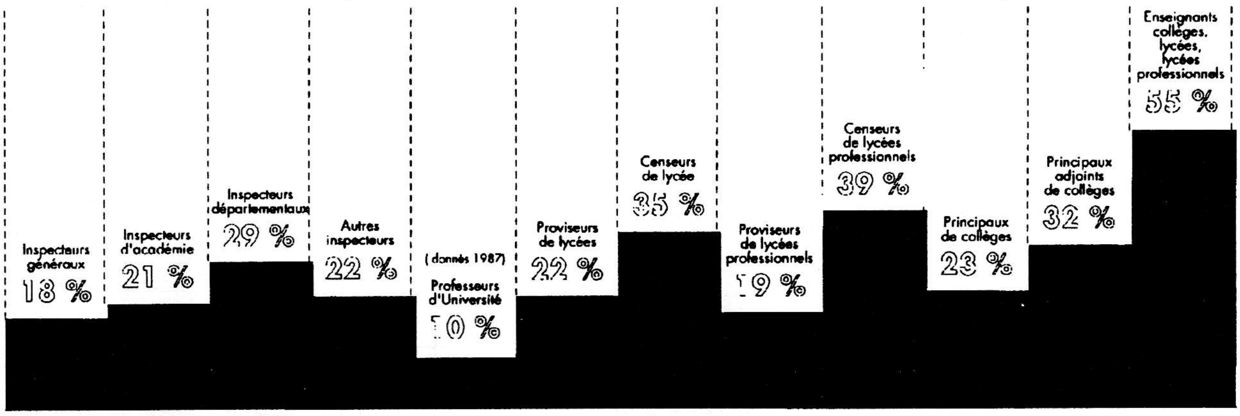


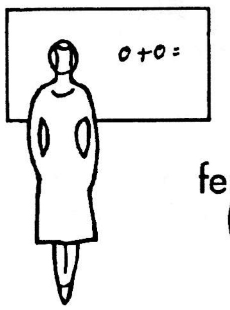
La fuite hors des mathématiques s'effectue, pour les filles, dès la seconde et d'une manière continue ensuite.

2) Après le lycée

Dans son bulletin de février, le secrétariat d'Etat chargé des Droits des Femmes fait le point dans un encart, en voici quelques extraits :

EDUCATION NATIONALE (source : Ministère de l'Education Nationale, au 1er janvier 1989)

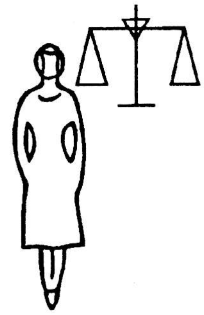


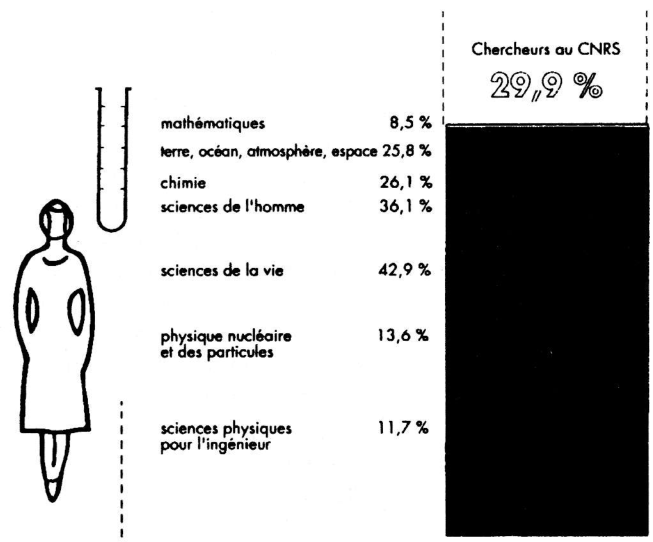


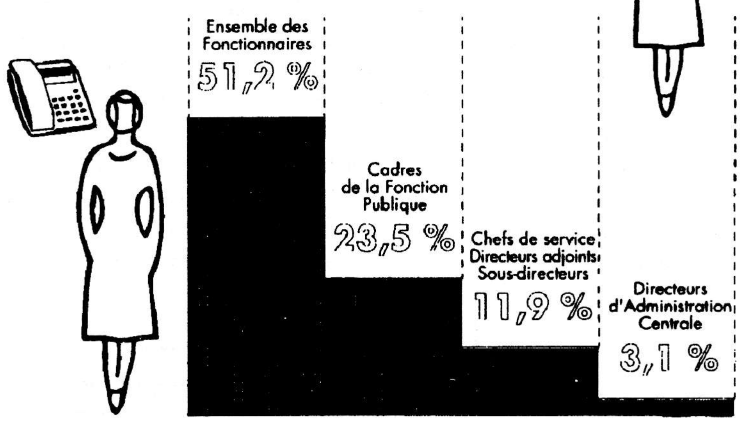
1

femme recteur (Académie de Paris)

JUSTICE
(Source : Ministère de la Justice, au 1er janvier 1990)





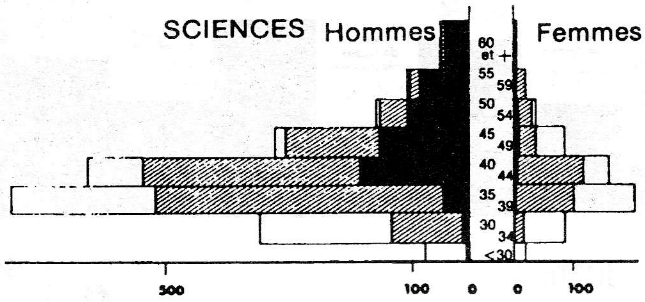


CNRS. Aucune femme ne dirige une Unité de Recherche Associée en Mathématique et parmi les chercheurs 7 % de femmes seulement.

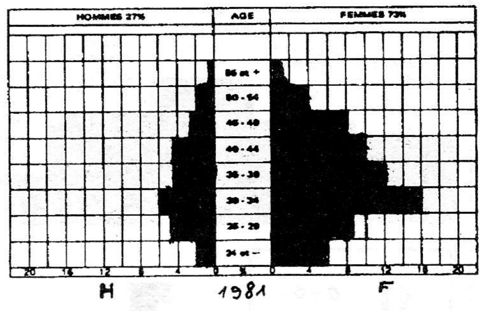
Pour la Recherche en Mathématique et Physique de base (physique théorique, atomique et moléculaire, des solides, cristallographie) 9 % des 159 directions sont assurées par des femmes et parmi les chercheurs 11 % de femmes seulement.

Ministère de l'Education Nationale.

— Deux femmes parmi les 22 Inspecteurs Généraux de mathématiques et de sciences physiques (9 %).
— 70 % d'Institutrices et 8 % de femmes Professeur d'Université en Sciences.
Comparons les histogrammes du ministère :



INSTITUTEURS



Le modèle présenté dans les statistiques précédentes est depuis longtemps stationnaire malgré la démocratisation de l'enseignement et les multiples réformes.

Avis sur la situation

— **Commission Dacunha-Castelle. 16 hommes et 4 femmes.**
«Le don, la "bosse des maths" que les filles ne doivent pas normalement posséder est une image sociale véhiculée par les parents» et... sans doute aussi par les enseignant(e)s. — Une étude anglaise réalisée en 1982 pour la CEE sur le rôle des enseignants indique que devant l'échec scolaire ils disent : «**IL** n'a rien écouté.» « **Elle** n'a rien compris.» — On fait peu pour convaincre les jeunes filles, les missions régionales spécialisées n'existent plus. Tout se passe comme si la Société prenait son parti d'une situation qui diminue dramatiquement le nombre des jeunes filles envisageant sciemment des études scientifiques. Administration, mesures imprudentes de l'Education Nationale rejoignent l'attitude de fait de nombre d'entreprises qui ne facilitent en rien la carrière des ingénieurs femmes.

— **Femmes et Mathématiques**. Association créée pour dénoncer la mixité des Concours aux Ecoles normales supérieures qui paradoxalement aggrave l'inégalité des chances.

— **APMEP**. Les journées nationales se sont enfin penchées sur le problème de l'Egalité des Chances. Les 160 militants présents à la réunion animée par Edwige Avice, Ministre, Catherine Valabrègue, Présidente de l'Association «Pour une éducation non sexiste», et Elisabeth Busser, Présidente de l'APMEP, en ont peut-être compris l'acuité. (Cf. le prochain PLOT n° 52.)

— **Pour une éducation non sexiste** essaie depuis 1980 de promouvoir, aussi largement que possible, une véritable égalité des chances entre filles et garçons à l'Ecole dans le domaine des sciences et technologies nouvelles. Pour y réussir pleinement, il faudrait un vrai changement des mentalités de tous et, en particulier, des enseignant(e)s et des conseiller(e)s d'orientation. Avec M. Dacunha-Castelle, beaucoup pensent qu'il faut agir au lycée et dans les études post-baccalauréat; l'association, par les expérimentations qu'elle fait dans les collèges, est persuadée qu'il est déjà trop tard, et qu'il faut agir sur la formation des enfants dès l'entrée à l'école. Le modèle de notre Institution est si prégnant pour les filles que, bien qu'elles soient souvent meilleures élèves que les garçons, elles se cantonnent par la suite dans des métiers subalternes.

Actions possibles

La **Commission Dacunha-Castelle** affirme que «le problème des contenus est important mais il est moins crucial et beaucoup moins difficile que le problème des méthodes qui nécessite un changement de mentalité chez les professeurs et les élèves.

En ce qui concerne «les nouveaux outils de calcul, il faut convaincre mathématiciens et enseignants du secondaire de modifier leur pratique. Cette mutation est assez compliquée et ne doit pas être troublée par un faux débat dans lequel certains conservatismes se réfugient... Cette transformation, acceptée, donne une chance de plus pour atteindre un enseignement mathématique plus vivant et plus authentique.»

Depuis le 6 mars, M. Dacunha-Castelle est installé Président du Conseil National des Programmes (CNP) — 14 hommes et 8 femmes —, il peut donc nous donner les moyens d'agir sur les mentalités des enseignant(e)s. C'est sans doute nécessaire. — Voici un fait : dans un devoir sur table, un professeur donne à ses élèves de troisième, 4 questions de calcul et 5 questions de géométrie à réaliser en 1 h 15 min, la quatrième question est :
résoudre :

$$(27x - \sqrt{3})/\sqrt{5} - (18x + \sqrt{5})/\sqrt{3} = 0$$

est-ce raisonnable? —

Agir sur les mentalités est-il suffisant? Les contenus ont aussi leur tort. Il n'y a plus assez de candidats valables au CAPES, or les jeunes candidats 1989 entraient au collège en 1980; on ne peut pas accuser les «maths modernes» car la COPREM avait rectifié le tir, mais a sans doute supprimé l'attrait des mathématiques. C'est le «Retour de balancier imposé par la correction de la réforme des maths modernes» qui fait revivre les méthodes et contenus des années 1950.

Actions en cours :

Dès 1980 avec l'Association « Pour une éducation non sexiste » nous sommes intervenus dans beaucoup de lieux en créant des commissions de relecture des manuels scolaires (souvent sexistes dès la maternelle), en animant des expositions, en faisant des conférences, en participant à des formations des MAFPEN sur l'orientation des filles, en agissant auprès des établissements scolaires grâce à des conventions avec le ministère de l'Education nationale et le secrétariat d'Etat aux Droits des Femmes.
Actuellement nous participons à un projet de la CEE, et dans l'Académie de Limoges nous menons une action dans 4 collèges. Les secrétariats d'Etat à l'Enseignement technique et aux Droits des Femmes ont signé une convention. Une cellule nationale de réflexion et de proposition est créé auprès de M. le Directeur des Lycées et Collèges; l'association participe à ses travaux. Un groupe de travail est en voie de création auprès de M. le Directeur des Ecoles.

Conclusion

L'APMEP trouve le rapport Dacunha-Castelle globalement positif, pourtant il vise essentiellement les années après la sortie du collège et semble considérer que tout va bien dans la scolarité obligatoire. Cependant, si les statistiques montrent que la fuite des mathématiques est au niveau des lycées, il faut bien penser que c'est **l'enseignement mathématique donné avant qui est en cause**. Mon souhait est, que malgré l'ampleur de la tâche, le CNP donne priorité à la formation initiale des enfants et à la formation initiale et continue des enseignant(e)s de la scolarité obligatoire pour que soit diffusée une mathématique authentique et attrayante au lieu de conforter les conservatismes de l'image sociale des mathématiques.
Un ami qui participe à la promotion des programmes depuis un certain temps affirme que les mathématiques sont non sexistes par essence mais... pour les filles c'est la panne avant l'arrivée! Je souhaite que le CNP trouve les moyens d'éviter ce handicap.
L'égalité des chances entre garçons et filles face aux sciences et aux technologies nouvelles est l'objet permanent de l'association, ceux et celles qui sont conscient(e)s de ce problème et qui veulent agir peuvent prendre contact à l'adresse : «Pour une éducation non sexiste», 14, rue Cassette 75006 PARIS, nous mettrons à leur disposition tous les documents que nous avons déjà créés.

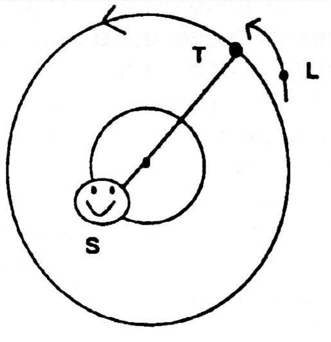
Références :
— *Verena Aebischer-PLOT 44 : Sexistes, les mathématiques?*
— *Bulletin n°366 APMEP Disciplines scientifiques et projets professionnels.*
— *Voir aussi le prochain PLOT n°52, compte rendu des ateliers des journées nationales de l'APMEP.*

LE CHAOS A LA VILLETTE

Michel Darche. Orléans

Dans la mythologie grecque, le chaos:"Vide primordial" à partir duquel tout a été engendré .
Pour l'Encyclopédie Larousse : «Etat de confusion générale, grand désordre, trouble complet»

Depuis toujours, les hommes de science essaient de mettre de l'ordre là où règne le désordre qui paraît être dû au hasard ou à la vanité des hommes.



Le Soleil, la Terre et la Lune

Un déterminisme vieux comme le monde

Deux corps en présence, un grand qui sert de repère, un petit qui tourne autour.
Depuis Newton, astronomes et mathématiciens savent parfaitement décrire ce qui va se passer au fil du temps: suivant sa position initiale et sa vitesse initiale, la petite boule va être attirée par la grosse et s'en approcher en décrivant une trajectoire elliptique ou, au contraire, s'en éloigner définitivement. C'est l'orbitogramme de la Cité.
L'avenir de ce système clos es t entièrement déterminé par les conditions initiales.
Depuis Newton, l'Univers, malgré sa complexité, paraît être un gigantesque mouvement d'horlogerie. C'est le déterminisme entièrement prévisible des systèmes linéaires et de la mécanique rationnelle.

2 corps ça va , 3 corps bonjour les dégats

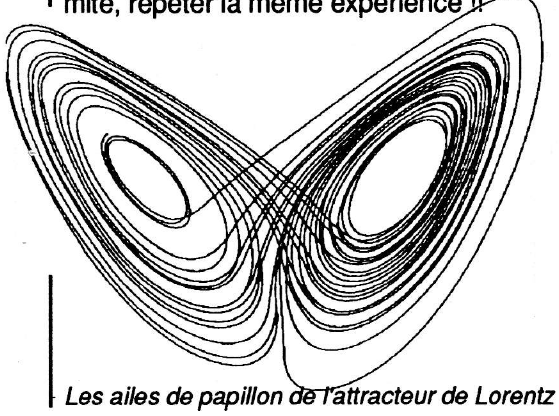
Introduisez un tiers dans ce système fermé et tout change !!!
Le désordre apparaît, c'est le chaos!! Autrement dit, l'impossibilité de prévoir ce qu'il adviendra de chacun de ces objets au cours du temps, surtout s'il est très long, bien que toutes les conditions initiales soient connues et que le système puisse être mis en équations (différentielles).
Le système est déterministe mais ... imprévisible: à deux états initiaux très voisins peuvent correspondre, à plus long terme, des comportements totalement différents, irréguliers et imprévisibles. Le système est trop sensible ... aux conditions initiales.
Ces phénomènes, déjà entrevus par Poincaré au début du siècle, sont aujourd'hui étudiés par de nombreux scientifiques comme le météorologiste Lorenz, le biologiste May, l'astrophysicien Michel Hénon, les mathématiciens ou physiciens Arnold, Bergé, Ruelle, Takens .
C'est le domaine des «systèmes dynamiques».

Le chaos à La Villette

Ces modèles chaotiques sont en effet utilisés pour étudier des phénomènes complexes dépendant d'un grand nombre de paramètres comme les prévisions météorologistes sur le court terme, l'évolution d'une épidémie ou d'une population de microbes sur un moyen terme, ou, sur un plus long terme, la circulation des planètes.
Mais on sait aussi fabriquer des situations chaotiques avec des systèmes dépendant d'un petit nombre de paramètres. C'est la Fontaine Turbulente de la Cité des Sciences: 14 degrés de liberté, 12 avec les 12 godets dans lesquelles l'eau coule à débit constant et 2 avec l'inclinason et la vitesse de rotation de la roue. Suivant les valeurs de ces 2 derniers paramètres, les mathématiciens savent prévoir que cette roue va tourner régulièrement, rester immobile ou se mettre à tourner de façon étrange: tourner dans un sens, s'arréter, se remettre à tourner dans l'autre sens, et cela de façon totalement chaotique.
A la Villette on sait prévoir l'imprévisible ou plutôt prévoir que le phénomène va devenir imprévisible !!!

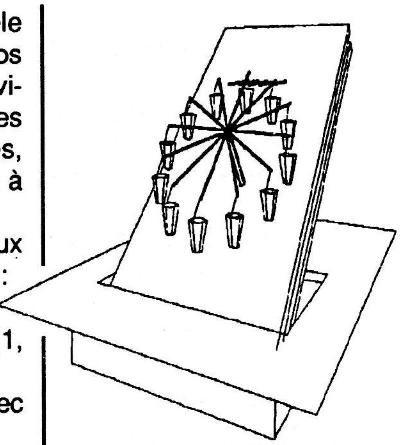
De l'aléa au chaos

Jusqu'à présent, en dehors des systèmes déterministes, il n'y avait qu'un autre type de système, les modèles aléatoires pour lesquels on utilise les méthodes statistiques ou stochastiques.
Mais comment prouver scientifiquement qu'un phénomène est aléatoire?
Il faudrait pouvoir partir de conditions initiales rigoureusement identiques. Essayez avec un simple dé ! Le lieu, le moment du lancé sont nécessairement différents, sans parler des autres conditions initiales. Avoir des conditions identiques serait, à la limite, répéter la même expérience !!



Les ailes de papillon de l'attracteur de Lorentz

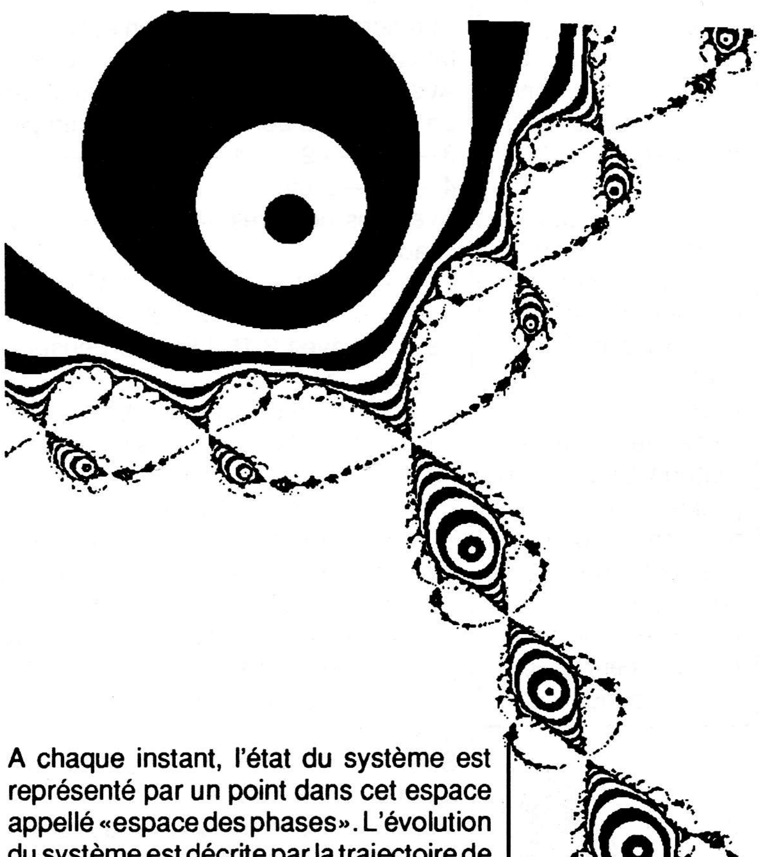
Entre le modèle déterministe et le modèle aléatoire, on trouve aujourd'hui le chaos déterministe. Chaotique parce qu'imprévisible, déterministe parce que régit par des équations qui, quoique non linéaires, dépendent uniquement des conditions à un instant donné.
Ces systèmes se révèlent sensibles aux conditions initiales de plusieurs façons :
- quasi-périodicité du phénomène,
- cascades de doublement de périodes (1, 2, 4, 8, 16, ...)
- intermittences du régime périodique avec changements de régime périodique.



Les 12 godets de la fontaine turbulente

D'étranges attracteurs

Comment sont décrits géométriquement ces phénomènes dynamiques?
Les topologistes les représentent par une trajectoire, un écoulement dans un espace dont la dimenson dépend du nombre de paramètres choisis.

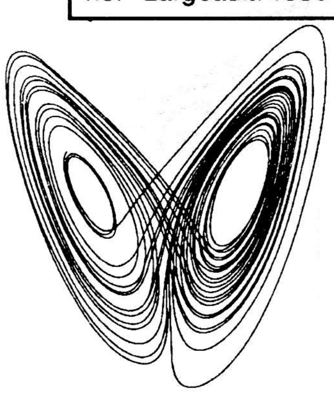


A chaque instant, l'état du système est représenté par un point dans cet espace appellé «espace des phases». L'évolution du système est décrite par la trajectoire de ce point.
Pour les systèmes les plus simples, ce point est attiré vers un point d'équilibre ou une courbe près de laquelle il repasse périodiquement. Les mathématiciens appelent ces courbes limites des attracteurs.

La Loi des corps

1- Deux corps s'attirent avec une force proportionnelle à leur masse et inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare.
2-les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil est l'un des foyers
3- le rayon qui relie planète et Soleil balaie des aires égales en des temps égaux
4- Le cube de la distance planète Terre est proportionnel au carré du temps de révolution
5- Le rythme cardiaque serait un phénomène hautement chaotique pour les jeunes coeurs. En vieillissant ce rythme s'assagirait (Scientific American. 1990)

«On n'a pas besoin de longues observations pour se convaincre que la nature a inventé les mathématiques avant l'homme. Les physiciens dégagent les mathématiques implicites dans la nature en découvrant ses symétries cachées. Les mathématiciens en font systématiquement la théorie.» Largeault. 1985



Pour les systèmes chaotiques, les attracteurs sont des courbes qui, au contraire des courbes précédentes, présentent une symétrie interne: si l'on fait un zoom avant ou arrière sur l'attracteur, on y retrouve la même forme , la même structure. Ces courbes sont des fractales rendues célèbres par von Koch et Mandelbrot. Etrange, n'est-ce pas ?
Le chaos déterministe est caractérisé par ce type d'attracteurs que les mathématiciens appellent attracteurs étranges.

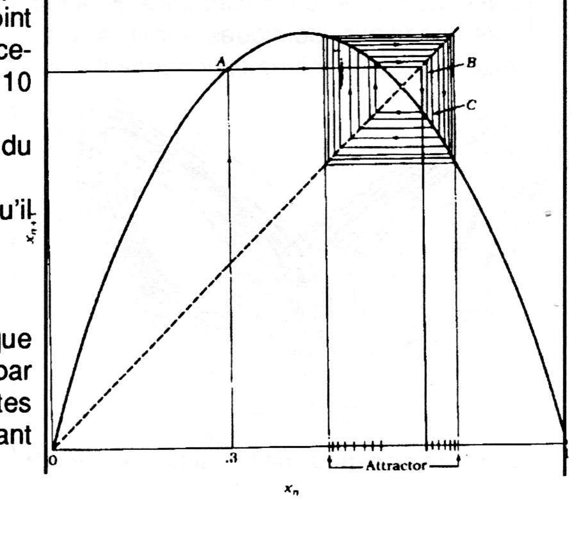
Des chiffres qui s'emballent

Pour les virtuoses de la calculette, de multiplan ou d'Excel, voici deux exemples numériques qui conduisent au chaos.

Premier exemple:
Choisissez un nombre entre 0 et 9.
Multipliez-le par 2 et gardez le chiffre des unités et la partie décimale quand elle apparaît.
Et recommencez l'opération sur ce résultat autant de fois que bon vous semblera.
Avec des nombres entiers, vous obtenez un belle suite périodique, par exemple :
3 —> 6 —> 2 —> 4 —> 8 —> 6 —> 2 —> 4 —> 8 —> etc
Avec des nombres «à virgules», c'est le chaos :
3,14 —> 6,28 —> 2,56 —> 5,12 —> 0,24 —> 0,48 —> 0,96 —> 1,92 —> etc
Essayez avec 3,15 ! Et que penser des irrationnels !!!
Exemple complètement abstrait direz-vous. Pas tout à fait si vous considérez la «transformation du boulanger» :
Une pâte à crèpe que vous étirez, puis pliez en deux, étirez à nouveau, pliez en deux, étirez, ... Imaginez quelle peut être la trajectoire d'un point de cette crêpe après toutes ces manipulations. Ce point peut être repéré par son angle de déplacement dans le disque-crêpe divisé en 10 quartiers.
Suivant la règle ci-dessus, il passe ainsi du quartier 3 aux quartiers 6, 2, 4, 8, ...
Mais si on veut être plus précis et dire qu'il est au départ en 3,14, tout change!!!

Autre exemple
La suite qui permet de calculer chaque terme x_{n+1} en fonction du précédent x_n par la formule $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n)$ où n prend toutes les valeurs entières à partir de 0, x_0 étant donné au départ, par exemple O,20.
Vous obtenez la suite : 0,64 0,922 0,289 0,822 0,586 0,970 0,116 0,406 ...
Une suite qui paraît vraiment aléatoire, un phénomène qui est en fait chaotique: essayez avec 0,21 qui est tout proche de 0,20 et vous obtiendrez une suite qui s'éloigne très vite de la précédente.
Encore une invention des mathématiciens direz-vous. Et non, cette suite et toutes celles de la famille $x_{n+1} = 4kx_n(1-x_n)$ où k est un coefficient constant sont utilisées pour prévoir, ou plutôt essayer de prévoir, la croissance d'une population d'animaux, de microbes et le développement d'épidémies.
Le biologiste Robert May a remarqué, en 1970, que lorsque le coefficient k était voisin de 4, la croissance devenait très sensible aux conditions initiales et donc imprévisible et chaotique.

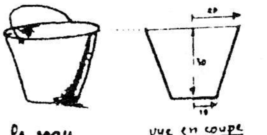
Derniers exemples pour la classe:
Des suites de calculs impossibles !!!
1- Etudiez la suite définie par
$x_{n+1} = 111 - 1130/x_n x_{n+1}$ avec
$x_0 = 11/2$ et $x_1 = 61/11$.
Programmez votre suite et constatez qu'elle semble converger vers 100. Est-ce possible ? Vérifiez-le autrement.
2- Soit à calculer la dérivée seconde f''(1) en t = 1 de la fonction :
$t \to f(t) = (4970\,t - 4923)/(4970\,t^2 - 9799\,t + 4830)$
en l'approchant par
$dh = (f(1+h) - 2f(1) + f(1-h))/h^2$
avec h voisin de zéro.
Ce calcul par différences finies, même en double précision, vous conduira à une valeur archi nulle et archi fausse!! Observez le comportement de dh: des oscillations qui augmentent, une instabilité qui devient explosive, c'est le chaos!!! ■



PROBLEMES DE RECHERCHE

Jacques Lubczanski - Ivry

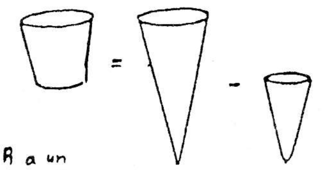
Avec un seau et une pelle, on fait des jolis chateaux de sable ...
Avec juste un seau, un bête seau, on fait des jolies mathématiques !



le seau — vue en coupe (cotes en cm)

A CAPACITE DU SEAU

1. Pour calculer sa capacité, on considère le seau comme un cône tronqué, c'est à dire un grand cône dans lequel on a découpé un petit cône.
Calculer la hauteur et le rayon (de la base) du grand cône, ainsi que du petit cône.



2. Un cône de hauteur h et de base circulaire de rayon R a un volume égal à $\frac{1}{3}\pi R^2 h$. Calculer les volumes du grand et du petit cône. En déduire la capacité, en litres, du seau.

B CALCULS DE VOLUMES

1. A mi-hauteur : en appliquant les idées du $\boxed{A}$, calculer le volume V d'eau contenu dans le seau lorsque celui ci est rempli à mi hauteur.

2. A d'autres niveaux : reprendre la question précédente pour des hauteurs d'eau de 5, 10, 20 et 25 cm

3. Réunir tous les résultats obtenus jusque là en un tableau de valeurs du volume V en fonction de la hauteur d'eau h.
- Tracer par points la courbe représentative de la fonction $h \mapsto V$ (échelle conseillée : 1cm pour 2cm de hauteur sur l'axe des x et 1cm pour 2 litres sur l'axe des y)
- Lire sur le graphique la hauteur pour laquelle le seau est à moitié rempli.

C EXPRESSION DU VOLUME

On suppose le seau rempli jusqu'à une hauteur h.

1. Calculer en fonction de h le rayon r(h) de la "surface de l'eau"

2. Calculer en fonction de h le volume V(h) contenu dans le seau.
Est-ce que la fonction $h \mapsto V(h)$ est un polynôme ? Si oui, de quel degré ?

3. Sauriez vous trouver par le calcul la hauteur x pour laquelle le seau est à moitié rempli ?

LE PROBLÈME DU SEAU...

«Voici des textes destinés à faire travailler les élèves en classe de mathématiques (recherche avec l'assistance du professeur) et aussi chez eux (rédaction d'un compte rendu). Il s'agit de véritables problèmes centrés sur une question à laquelle on cherche une réponse ou sur un objectif que l'on se fixe au départ : des problèmes dont l'élève saisit le sens, ce qui lui permet de s'approprier le travail de recherche, et d'être motivé pour un travail important en quantité : environ 4 h par élève (1h30 en classe, 2h30 à la maison).

Si les énoncés sont le fruit d'un long travail de ma part (recherche, documentation, écriture, expérimentation), ils n'en ont pas pour autant la prétention d'être parfaits : je remercie à l'avance les collègues qui voudront bien me faire part de leurs observations et de leurs critiques.

(à suivre...)

La moyenne : QUELLE ANGOISSE !...

C'est la fin du trimestre.
Bientôt le conseil de classe...

Zoé a eu 11, 16 et 12 aux trois contrôles, tandis que le pauvre Arthur n'a eu que 3, 8 et 10.

Ils aimeraient bien connaître leur moyenne, mais leur prof. ne leur a pas encore dit avec quels coefficients (voir encadré) il allait la calculer...

> **Les coefficients**
>
> C'est une façon de donner plus d'importance à certaines notes, et moins à d'autres, pour calculer la moyenne.
>
> Si on a trois notes N, P et Q, affectées des coefficients a, b et c, la moyenne m sera donnée par :
>
> $$m = \frac{a \cdot N + b \cdot P + c \cdot Q}{a+b+c}$$

ALORS, ILS FONT DES SUPPOSITIONS...

① - Si les coefficients a, b et c sont tous égaux à 1, combien vaut la moyenne x d'Arthur et celle, y, de Zoé ?
- Et si a, b et c sont tous égaux à 3 ? et à 9328 ?

② - Calculer les valeurs des moyennes x et y en supposant que a, b et c valent...

: 2, 3 et 5 ; : 2, 0 et 3 ; : 5, 3 et 2 ; : 1, 1 et -1 ; : 1, 1 et 2 ; : 1, -1 et 1 ; : 1, 2 et 1 ; : 1, -1 et -1 ; : 2, 3 et 0 ; : 2, -1 et -1

- Commentez les résultats obtenus.

③ - Dans un repère orthonormé (une unité = 1cm), construire les points A(3;11), B(8;16) et C(10;12).
- Pour chacun des calculs de moyenne précédents, construire le point de coordonnées $(x ; y)$.
Lesquels sont à l'intérieur du triangle ABC ?

... ET PUIS, ILS RÊVENT...

④ - Arthur aimerait bien avoir 8 de moyenne ; Zoé, elle, serait heureuse avec 14.
Pourrez vous trouver des coefficients avec lesquels c'est possible ?
(Indication : chercher à exprimer b et c en fonction de a, puis donner une valeur convenable à a)

⑤ - Le rêve d'Arthur, ça serait 9. Montrer que si c'est le cas, la moyenne de Zoé est alors inférieure à 14
- Le rêve de Zoé, ça serait 15. Montrer qu'alors la moyenne d'Arthur est comprise entre 7 et 8,5.

⑥ - Quelle est la plus forte moyenne que peut espérer Arthur ? Avec quels coefficients cela arrive-t-il ?
Quelle est alors la moyenne de Zoé ?
- Quelle est la plus basse moyenne que peut craindre Zoé ? Avec quels coefficients ?
Quelle est alors celle d'Arthur ?

... ET MÊME, ILS DÉLIRENT !

⑦ - 12 de moyenne pour Arthur et 18 pour Zoé ?
Montrer que c'est possible avec a = 2, combien doivent valoir alors b et c ?
Quel est alors l'effet d'une bonne note aux deux derniers contrôles ? Qu'en pensez vous ?

⑧ - Ajouter au repère du ③ les points $(x ; y)$ correspondant aux moyennes calculées depuis cette question.

⑨ - Pourrez vous trouver un lien entre la position des points par rapport au triangle ABC et le signe des coefficients correspondants ?

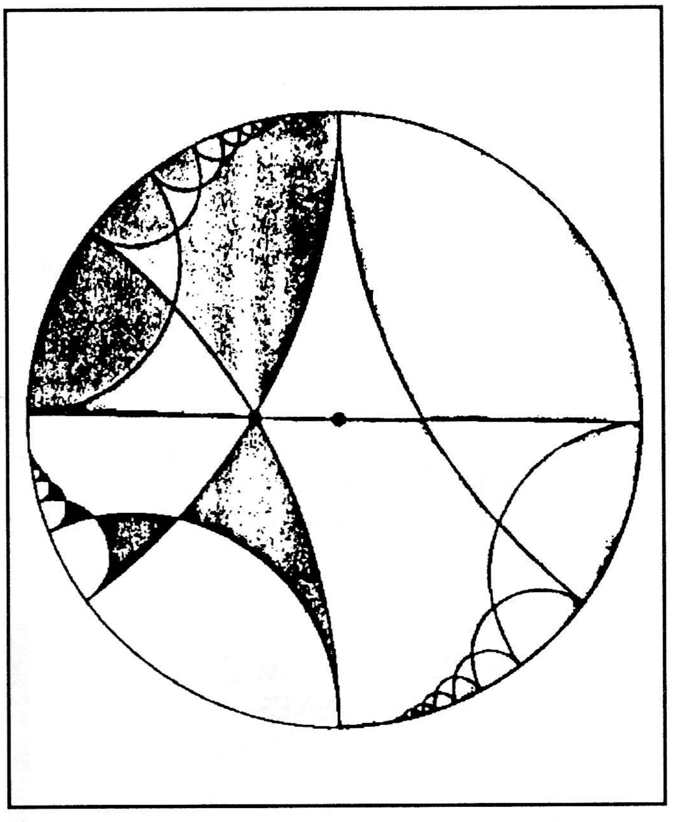
A-Plot-Strophe

MATIERE A PENSEE

Guillaume Roques, Orléans.

Une analyse faite par un élève de Terminale C pour les autres élèves de la classe à l'occasion d'un travail commun entre mathématiques, sciences naturelles et philosophie.

Les auteurs, Jean-Pierre Changeux (JPC), biologiste, et Alain Connes (AC), mathématicien, sont des scientifiques de grand renom. L'un est connu du grand public depuis son livre «l'Homme Neuronal», l'autre est plus connu des mathématiciens pour avoir obtenu, il y a peu, une médaille FIELDS.
Dans ce livre écrit comme un script de discussion, les deux auteurs définissent ou plutôt essaient de définir **les objets mathématiques** et leur statut.
Sont-ils indépendants du cerveau du mathématicien, autrement dit, les mathématiques sont-elles universelles (position soutenue par AC) ou bien les objets mathématiques sont-ils des êtres de raison qui n'existent que dans la pensée du mathématicien (position soutenue par JPC) ?



Mathématique et autre sciences

Deux pensées s'opposent sur le statut des mathématiques :
celle de **Descartes** et **Leibniz** qui pensent que les mathématiques *«unifient les sciences, qu'elles éclairent le monde» et que «tout objet se ramène aux mathématiques»*,
et celle de **Diderot** qui pense que *«les mathématiques n'ajoutent rien à l'expérience»* ou celle de **Bacon** qui va même jusqu'à penser que les mathématiques devraient être *«les servantes de la physique»*.

En fait, pour AC et JPC, elles servent de langage à la formalisation des autres sciences. Mais les mathématiques ne se réduisent pas au rôle de langage exprimant des résultats. En effet, leur caractère génératif finit par jouer un rôle crucial, en physique notamment : AC donne pour exemple le fait que l'on puisse retrouver le tableau de Mendeleev à partir de l'équation de Schrödinger et du principe d'exclusion de Pauli (l'équation de Schrödinger permet en principe le calcul des niveaux d'énergie de tous les atomes, ions ou molécules).

Mais il ne faut pas oublier comme le rappelle AC que «l'**intuition** du Physisien joue un rôle, car c'est elle qui permet de comprendre les équations que les mathématiciens ont pu donner».

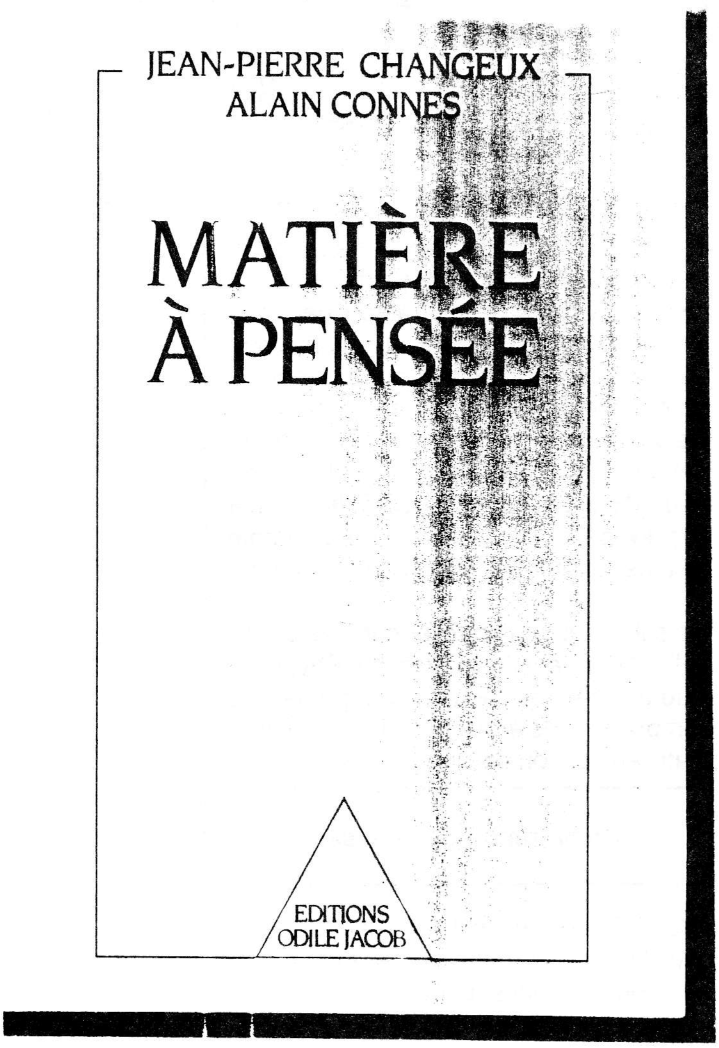
Un patrimoine universel

Pour AC donc, les mathématiques sont le seul langage universel qui, en formalisant certaines sciences, peut éviter des para-

doxes dûs à une inadéquation du langage utilisé (c'est le cas en Mécanique Quantique).
JPC n'est pas d'accord avec cette universalité des mathématiques. Il pense que les mathématiques dépendent de plusieurs processus cérébraux fondamentaux. D'où une discussion sur la nature même des objets mathématiques.

Là encore, deux pensées s'opposent : le réalisme et le constructivisme.
La première philosophie admet «l'existence d'une réalité objective» (c'est-à-dire en dehors de l'esprit). Pour la deuxième, les objets mathématiques n'existent que dans la pensée du Mathématicien. AC est bien entendu proche du premier point de vue, JPC du second.

Il faut, pour en discuter, déterminer la façon dont le cerveau analyse les objets mathématiques.
Pour JPC, il existe une logique liée à l'organisation du cerveau.
Pour AC, au contraire, le cerveau se sert d'outils. Il utilise une «imagerie cérébrale pour recevoir la réalité mathématique». Enfin, «dans sa quête, le mathématicien crée des outils de pensée» qu'il ne faut pas «confondre avec la réalité mathématique elle-même.
Pourtant, JPC et AC sont d'accord sur un point : pour explorer la réalité mathématique, le mathématicien utilise des outils qui appartiennent au patrimoine culturel.
Ils sont aussi en accord sur le fait que les objets mathématiques évoluent et donc qu'il existe une sorte de **Darwinisme mathématique.**



Ce débat existe d'ailleurs aussi chez les mathématiciens, entre les formalistes et les constructivistes qui pensent qu'un objet mathématique n'existe que si on peut le construire, l'exhiber. Le mathématicien AC pense qu'en fait la distinction entre constructivistes et formalistes est avant tout d'ordre méthodologique. Mais il n'appartient pas au non mathématicien que je suis de trancher, je vous laisse donc le choix de poser le débat en terme méthodologique ou non.

L'efficacité surprenante des mathématiques dans beaucoup de cas permet de cerner un comportement sous forme de modèle. Mais ces objets naturels ne doivent pas être identifiés aux mathématiques que les biologistes ou les physiciens utilisent pour les décrire.
La réalité mathématique «*ne se situe pas dans le monde physique*».

Il existe pourtant une relation entre eux : «*Lorsque la théorie est assez élaborée, le caractère génératif des mathématiques entre en jeu*» (exemple la relativité d'Einstein qui s'est «*transformé*» en mathématicien pour trouver des équations).
En fait, JPC et AC ne se mettrons pas réellement d'accord sur l'universalité des mathématiques, chacun campant sur ses positions.

Et le cerveau dans tout cela ?

AC et JPC discutent de son rôle en tant que générateur des mathématiques.
Ils vont d'abord définir la façon dont le cerveau du mathématicien procède pour par exemple résoudre un problème.
La création mathématique se décompose en trois phases définies par Hadamard :

«*la préparation, l'incubation et l'illumination*».
Tout en sachant qu'un problème, une fois la première phase passée ne doit pas être attaqué de front. «Il faut procéder de façon indirecte, pour ne pas épuiser rapidement les outils accumulés lors de la première phase et se décourager».

JPC et AC définissent trois niveaux d'activité du cerveau :
- le premier correspond au niveau des ordinateurs actuels, c'est-à-dire faire des calculs, «sans en connaître le mécanisme». Ils l'appellent le niveau de calculs.
- Au second niveau, il y a «interaction entre les calculs effectués et une problèmatique personnelle».
A ce niveau, les sentiments jouent un rôle important. La personne peut changer de stratégie pour faire un calcul.
- Enfin le troisième niveau correspond à la découverte : la personne peut changer non plus seulement de statégie mais aussi de fin. C'est la capacité de changer de but.

JPC en tire une étude des différents niveaux d'organisation dans le système nerveux et en arrive au problème du codage des représentations mentales qui pour AC relèvent de la Topologie et peut-être de la géométrie hyperbolique (Cf. les travaux actuels de Thurston sur l'architecture des ordinateurs neuronaux).

Une machine avec des sentiments ?

Ils en arrivent finalement aux «Machines à penser» : «la relation du cerveau avec la machine et plus généralement celle des sciences exactes (les mathématiques) avec le cerveau et son fonctionnement». Ils distinguent là encore trois approches :
- l'intelligence artificielle, la modélisation du cerveau et ses fonctions et les machines neuromimétiques (machines capables d'avoir «une conduite intelligente»).
AC pense que pour qu'une machine puisse un jour accéder au second niveau, il faudra qu'elle ait de l'affectivité, des sentiments, qu'elle connaisse le plaisir ou la souffrance car ce sont eux qui lui permettront d'avoir un début d'évaluation (possibilité par exemple pour un échiquier électronique d'avoir la volonté de vaincre et mieux encore, d'être mauvais joueur et ne pas aimer perdre).

Pour accéder au troisième niveau, il faudrait que cette machine ait une fonction d'évaluation de ses fonctions d'évaluation !!!
En fait, pour qu'une machine puisse déjà adapter une statégique à un but donné, il faudrait qu'elle s'autoévalue, ce qui pour le moment n'existe pas.

Pour finir, AC et JPC discutent de l'éthique et de ce qui nous intéresse ici de l'éthique et des mathématiques. Ce livre nous entraîne dans le monde des sciences, de la recherche du vrai et nous ouvre des horizons sur la réalité mathématique, sur son rapport aux autres sciences sans pour autant répondre à toutes les questions ou tout au moins sans apporter de réponses catégoriques. Le doute, discipline principale des scientifiques, reste permis.

Publié aux Editions Odile Jacob en 1989.

JEAN-PIERRE CHANGEUX
ALAIN CONNES

Photo Louis Monnier

Quel est le lien entre le monde physique et le cerveau ? Les objets mathématiques existent-ils indépendamment du cerveau de l'homme, ou sont-ils seulement le produit de l'activité cérébrale? L'éthique peut-elle être fondée sur des principes aussi universels que ceux des mathématiques ? Telles sont quelques-unes des questions essentielles instruites dans ce livre original et stimulant. Par la qualité de ses auteurs et la fécondité de leur réflexion, il constitue un événement exceptionnel.

Alain Connes, médaille Fields, est titulaire de la chaire d'Analyse et Géométrie au Collège de France.
Jean-Pierre Changeux, auteur de L'*homme neuronal*, est titulaire de la chaire de Communications cellulaires au Collège de France.
Tous deux sont membres de l'Académie des Sciences.

MATIÈRE À PENSÉE

EN ASSOCIATION AVEC LES ÉDITIONS DU SEUIL

9 782738 100733
ISBN 2
Imprimé

Maquette Michel Duchêne

POUR UNE RENAISSANCE DE LA GEOMETRIE AU LYCEE

IREM d'Orléans

Cette brochure IREM du groupe de recherche en géométrie est faite d'exercices judicieux, souvent originaux accompagnés de compléments et de commentaires abondants, le tout bien répertorié.

Thème

Traitement d'un problème de lieux à l'aide de transformations planes

Classification

Type : Lieux
Outils : Transformations ou angles

Classes

Seconde ou Première s : approche empirique
Terminale C : approfondissement

Place

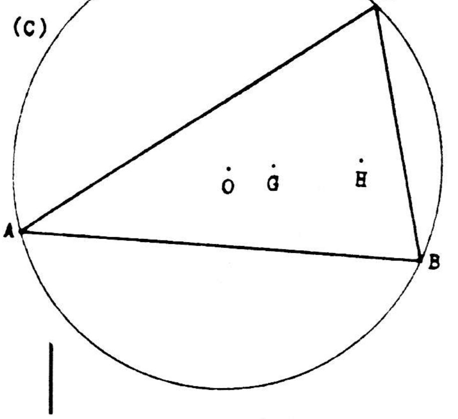
— Après translations et homothétie en Seconde.
— Après angles et transformations en T.C.

Matériel didactique utilisable

Logiciel de géométrie : Euclide.

Enoncé condensé :

Données fixes.
— (C) cercle de centre O
— A et B points de (C). A B



Données variables.
— M point de (C), M A et M B
— H orthocentre du triangle (AMB)
— G isobarycentre du triplet (A,M,B)
Questions :
Lieux de H et de G lorsque M décrit le cercle (C) en restant distinct de A et B.

Origine du thème

Texte proposé dans le manuel de Seconde.
Transmath (Nathan) : exercice n° 34, p. 225.
(C) est un cercle de diamètre est [AD] et de centre O.
B est un point fixe sur x(C), distinct de A et D. M est un point quelconque de (C). Notons H l'orthocentre du triangle AMB.
a) Démontrer que les droites (MH) et (BD) sont parallèles.
b) Démontrer que les droites (BH) et (MD) sont parallèles.
c) Quelle est la nature du quadrilatère MHBD?
d) Où sont situés les points H lorsque le point M décrit le cercle (C)?
Indication : Expliquez pourquoi $\vec{MH} = \vec{DB}$
Donc H est l'image de M par la translation de vecteur fixe DB et si M décrit (C) alors...

Pistes de solutions :

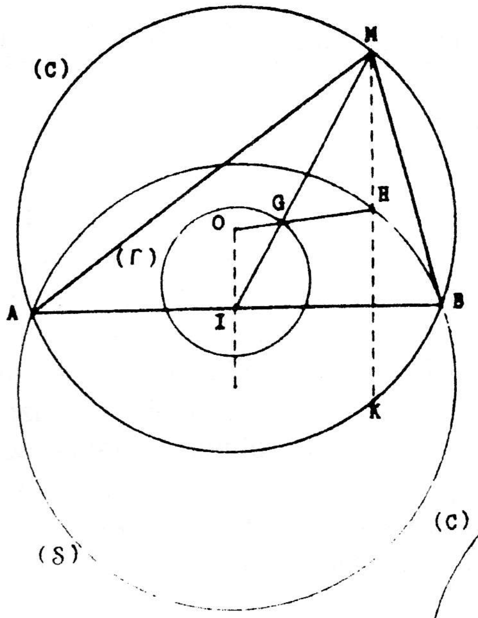
Suggestions en Seconde ou Première S.
— Construire, en utilisant éventuellement le logiciel Euclide, les points H et G pour diverses positions du point M et en particulier situer H lorsque le triangle (AMB) est rectangle en A ou B.
— Rechercher une transformation plane associant M à H ou M à G.
Intentions.
— Faire découvrir le rôle du symétrique D de A par rapport à O (ou du symétrique Q de B par rapport à O et du milieu I du bipoint (A,B).
— Faire démontrer que la translation t de vecteur PB (ou QA) transforme M en H et que l'homothétie h de centre I, de rap-

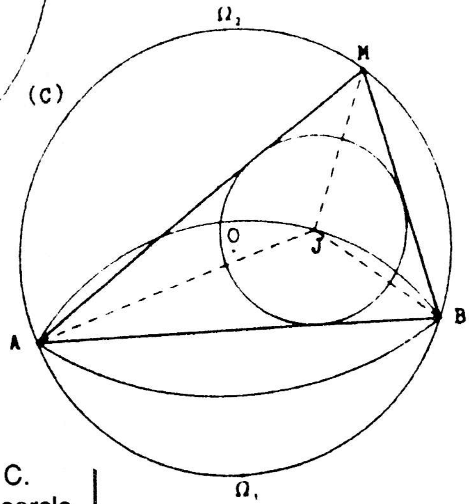
port 1/3 transforme M en G.
Suggestions en Terminale C.
— Faire démontrer à partir de considérations angulaires que le symétrique de H dans la symétrie orthogonale d'axe (AB) est un point K du cercle (C).
— En déduire le lieu (P) du point H lorsque le point M décrit le cercle (C) en restant distinct de A et B.
Autre option en Terminale C.
— Si la droite d'Euler n'est pas connue des élèves, profiter de cette recherche pour l'introduire (cf. par exemple manuel de Seconde Terracher, Hachette p. 362-363).
— Puis, ayant fait déterminer le lieu (Γ) du point G, obtenir celui de H grâce à l'homothétie f de centre O, de rapport 3. Noter alors que la composée $t=f_0h$ de l'homothétie h de centre I, de rapport 1/3 et de l'homothétie f précédente redonne la translation t qui fait passer directement de M à H d'où un retour sur la solution envisagée en classe de Seconde.

$$\begin{tikzcd} & \underset{G}{(\Gamma)} \arrow[dr, "f"] & \\ \underset{M}{(C)} \arrow[ur, "h"] \arrow[rr, "t"'] & & \underset{H}{(S)} \end{tikzcd}$$

Variante (délicate).

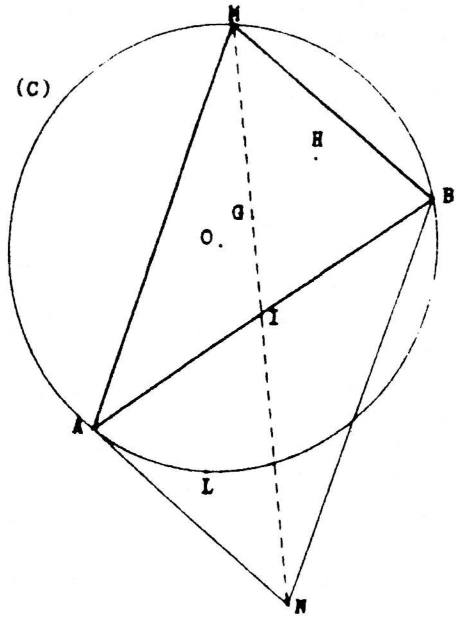
Données fixes :
— (C) cercle de centre 0 de diamètre d.
— M point de (C).
— l longueur telle que : 0 < l < d.
Données variables :
— A et B points de (C) tels que : AB = l.
— N quatrième sommet du parallélogramme (AMBN).
Questions :
— Lieux de H, de G et de N lorsque A et B décrivent (C), la corde [AB] gardant une longueur constante égale à l.
— Lieu de l'orthocentre L du triangle (BNA).





Compléments :

Exploitation possible en Terminale C. Rechercher le lieu du centre J du cercle inscrit au triangle (AMB) lorsque le point M décrit le cercle (C) en restant distinct de A et B. ■



Dans la série rallyes et tournois, voici les challenges...

DECIMALES DE PI: de nouvelles formules, à la pelle

G. Briand. Orléans

ADEMIR: c'est le sigle de «l'**As**sociation pour le **D**éveloppement dans l'**E**nseignement de la **Micro**-**I**nformatique et des **R**éseaux». Fondée en 1979, elle fédère une cinquantaine de clubs implazntés dans les établissements scolaires de tous niveaux, regroupant enseignants et élèves. Elle est affiliée à la Fédération Microtel.
Chaque année, ADEMIR patronne un «Challenge» ouvert à ses clubs et aux Clubs Microtel et organisé par le Club gagnant du Challenge précédent.

Cette année, c'est le club ADEMIR-ORLEANS qui en a la charge: préparer les questions, les corriger ... et organiser dans la région les Assemblées Générales des Fédérations ADEMIR et MICROTEL. Elles ont lieu, cette année, le 9 juin, à Nouan-le-Fuzellier. Les résultats du Challenge y sont proclamés.

Ce crû 90 du Challenge comporte 18 questions. En voici deux:

Le sémaphore.

Rédigez, en Logo, un programme de traduction en code Sémaphore: à l'appui d'une touche du clavier, un homme, tenant un drapeau dans chaque main, prend la position sémaphore correspondant à la lettre frappée.
Prévoir deux options:
- une option «gros plan»: l'homme occupe une grande partie de l'écran, la silhouette est assez détaillée, le geste est progressif...
- une option «rang d'oignon»: les bonshommes représentant les lettres du message, plus petits et plus schématisés, apparaissent côte-à-côte en 2, 3 ou 4 lignes, chacun figé dans son geste..

Pi en vers et contre tout

Vous connaissez les vers fameux:
Que j'aime à faire connaître un nombre utile aux sages
Immortel Archimède, artiste ingénieur...
qui permettent, par le comptage des lettres de chaque mot, de mémoriser les premières décimales de Pi.
On vous demande:
- de poursuivre ce travail, et de trouver 5 vers originaux, permettant de mémoriser au moins 40 décimales de Pi...
- de rédiger un programme de décodage qui, à l'introductiob du texte, en déduira les décimales qu'il représente.

Et Pi encore !

Les quatre dernières questions de ce Challenge sont peut-être les plus originales: elles ont pour but de découvrir des formules inédites de calcul des décimales de Pi.
Voici, par exemple, parmi cent autres, deux des formules trouvées: («at» signifie «arc tangente»)

$\pi/4 = 20\text{at}1/27 + 24\text{at}1/68 + 12\text{at}1/117 - 5\text{at}1/239.$

$\pi/4 = 171\text{at}1/1407 + 215\text{at}1/1607 + 493\text{at}1/2163 + 83\text{at}1/2436 + 454\text{at}1/2582 + 68\text{at}1/3318 + 227\text{at}1/4443 + 68\text{at}1/5793 + 44\text{at}1/9901 + 83\text{at}1/18543.$

Mais nous aurons l'occasion de vous en dire plus sur cette question passionnante avec plus de détails dans un de nos prochain numéros.