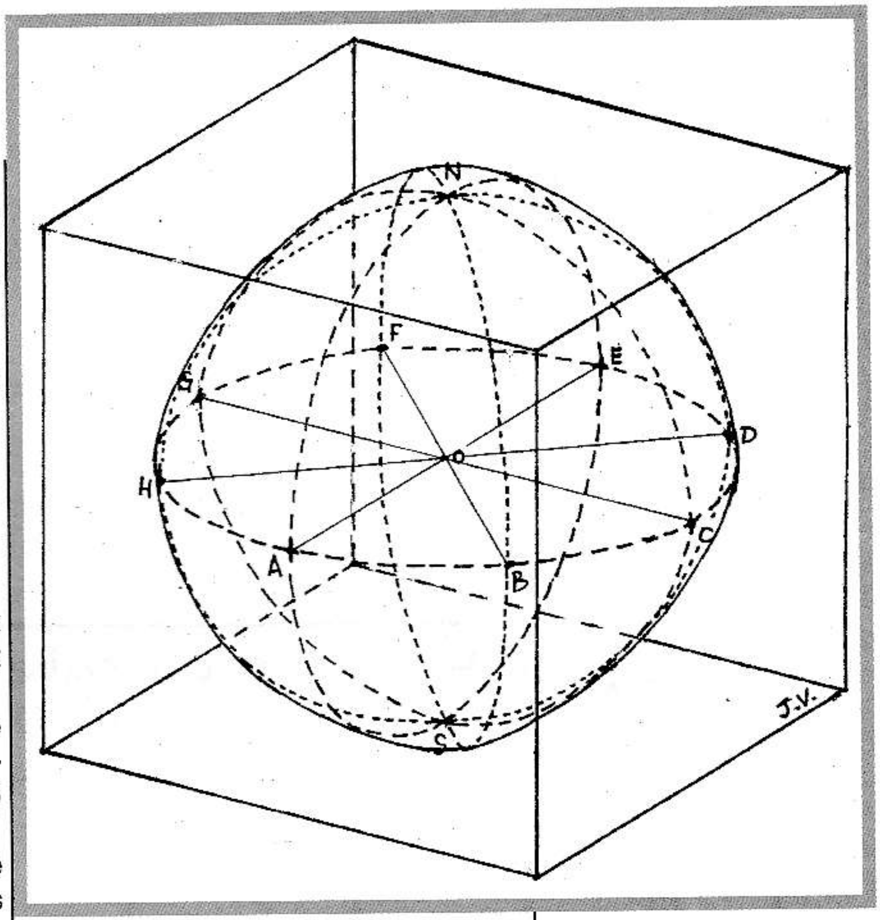
Sphère en perspective !

Jacques Verdier - Nançy



Le Petit Vert, bulletin de la régionale Apmep de Lorraine, nous apporte régulièrement de petites perles mathématiques.
En voici une étonnante :
Sauriez-vous dessiner une sphère en perspective ?

Le cube en perspective

On utilise couramment deux types de perspective qui correspondent à deux types de projection :

• L'une appelée "perspective à points de fuite", est mathématiquement une projection centrale (ou projection conique) de l'espace sur un plan.
Elle est assez proche de la vision de l'œil, mais a de gros inconvénients "pédagogiques" : elle ne conserve ni le parallélisme, ni les milieux ; son emploi en classe est donc quasiment impossible.

Voici, ci-dessous, un cube en perspective conique. On trouvera dans [Lombard], pages 59 à 104, une étude théorique assez complète.

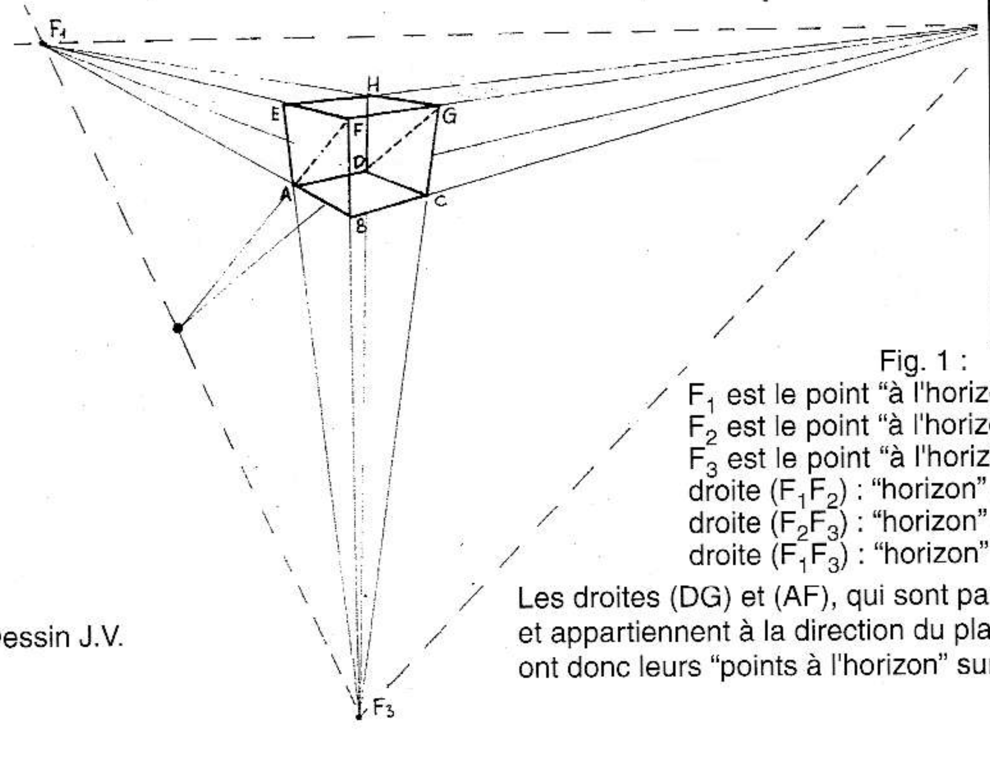


Fig. 1 :
F_1 est le point "à l'horizon" dans la direction de (BA)
F_2 est le point "à l'horizon" dans la direction de (BC)
F_3 est le point "à l'horizon" dans la direction de (BF)
droite (F_1F_2) : "horizon" de la direction de plan (BAC)
droite (F_2F_3) : "horizon" de la direction de plan (BCF)
droite (F_1F_3) : "horizon" de la direction de plan (BFA)

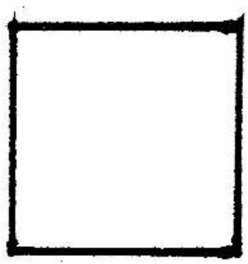
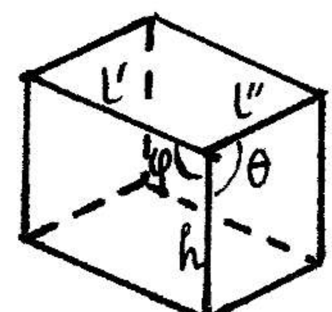
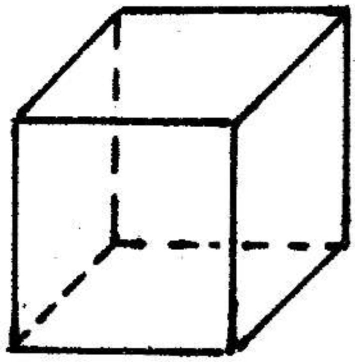
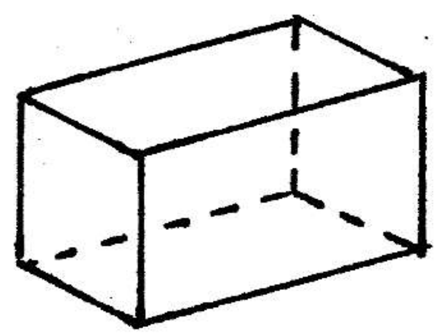
Les droites (DG) et (AF), qui sont parallèles en réalité, et appartiennent à la direction du plan (BFA), ont donc leurs "points à l'horizon" sur (F_1F_3).

Dessin J.V.

• Le second type correspond mathématiquement à une projection parallèle (ou projection cylindrique) de l'espace sur un plan.
Elle correspond à l'ombre d'un objet éclairé par le Soleil.
Énorme avantage : elle conserve le parallélisme et les milieux (et, par conséquent, les rapports de longueurs dans une direction donnée).

Pour représenter ce qui peut "arriver" quand on utilise une telle perspective, le plus facile est de représenter la projection d'un cube de référence (ce qui équivaut à un triplet i, j, k orthonormé) sur le plan.

Plusieurs cas sont alors à envisager (cf. [Parzysz]) :
- ou bien la direction de projection est orthogonale au plan de projection (ex : projection verticale sur le plan horizontal), ou bien elle ne l'est pas !
- d'autre part, ou bien le cube de référence a une de ses faces parallèle au plan de projection (cette face sera donc projetée "en vraie grandeur"), ou bien ça n'est pas le cas !
Ce qui nous amène à quatre possibilités, résumées dans ce tableau (D est la direction de projection, P le plan sur lequel on projette) :

CUBE	Une face du cube est parallèle à $\mathscr{P}$	Aucune face du cube n'est parallèle à $\mathscr{P}$
D orthogonal à $\mathscr{P}$	 ("vue" du dessin industriel)	 (perspective axonométrique)
D non-orthogonal à $\mathscr{P}$	 (perspective "cavalière")	 (cas général)

Dans la perspective axonométrique (D orthogonal à P), la connaissance de h et des angles f et Ω détermine entièrement l' et l" (les "formules" sont assez complexes, on les trouve dans [Audibert] pages 118 à 125 ou dans [Mosaïques mathématiques].

En classe, on utilise le plus souvent soit la perspective cavalière, soit une perspective parallèle quelconque (en s'arrangeant pour "qu'à l'œil", le cube ressemble effectivement à un cube, contrairement au schéma ci-contre).

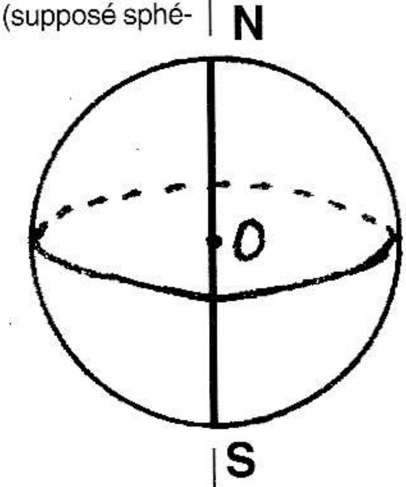
Et la sphère ?

Tout d'abord, le distinguo "faces parallèles ou non à P" n'a plus lieu d'être : il existe toujours un plan équatorial parallèle à P.
Mais restent les deux cas :
- D perpendiculaire à P ou non !

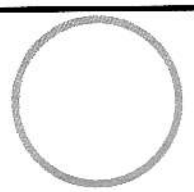
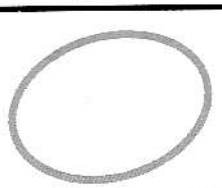
vouloir mettre ensemble un cube **et** une sphère (ou d'autres objets du même type) : voir dessin page 25.

Où placer les pôles sur le globe terrestre ?

J'en viens à une erreur fréquemment rencontrée : si on veut représenter le globe terrestre (supposé sphérique) avec ses deux pôles et son équateur, on obtient le plus souvent ceci :



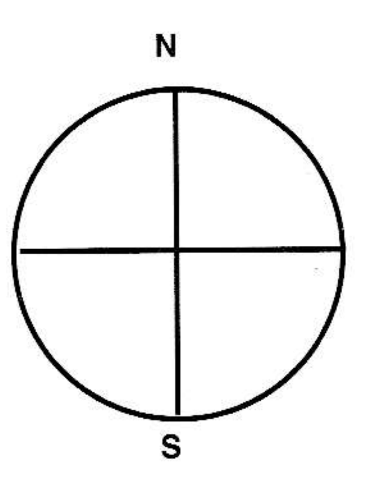
Il y a là une ... contradiction ! Trouvez-la.

D orthogonal à P		La sphère se projette suivant un cercle
D non-orthogonal à P		La sphère se projette suivant une ellipse (Ex : ombre du ballon au soleil)

Pédagogiquement, vu la difficulté de tracer les ellipses (sauf sur ordinateur), on sera amené à se placer le plus souvent dans le premier cas.

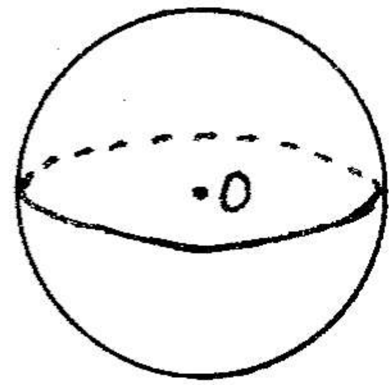
Mais on aboutit alors à **un paradoxe** : on n'utilise pas en classe le même type de perspective selon que l'on veut dessiner des corps "ronds" (sphères, cônes, œufs ...) ou des corps "droits" (pavés, tétraèdres, prismes, ...).
Le comble de la difficulté consistant à

En effet : la figure tracée étant un cercle (et non une ellipse), on est dans le cas où la projection est orthogonale.
Si l'axe (NS) est vu comme un diamètre, c'est qu'il est parallèle au plan de projection ; comme le plan de l'équateur lui est orthogonal, il est orthogonal au plan de projection.
Et on devrait avoir ceci :



Ce qui est mathématiquement exact, mais n'a absolument aucun intérêt, puisqu'on n'a plus l'impression du relief.

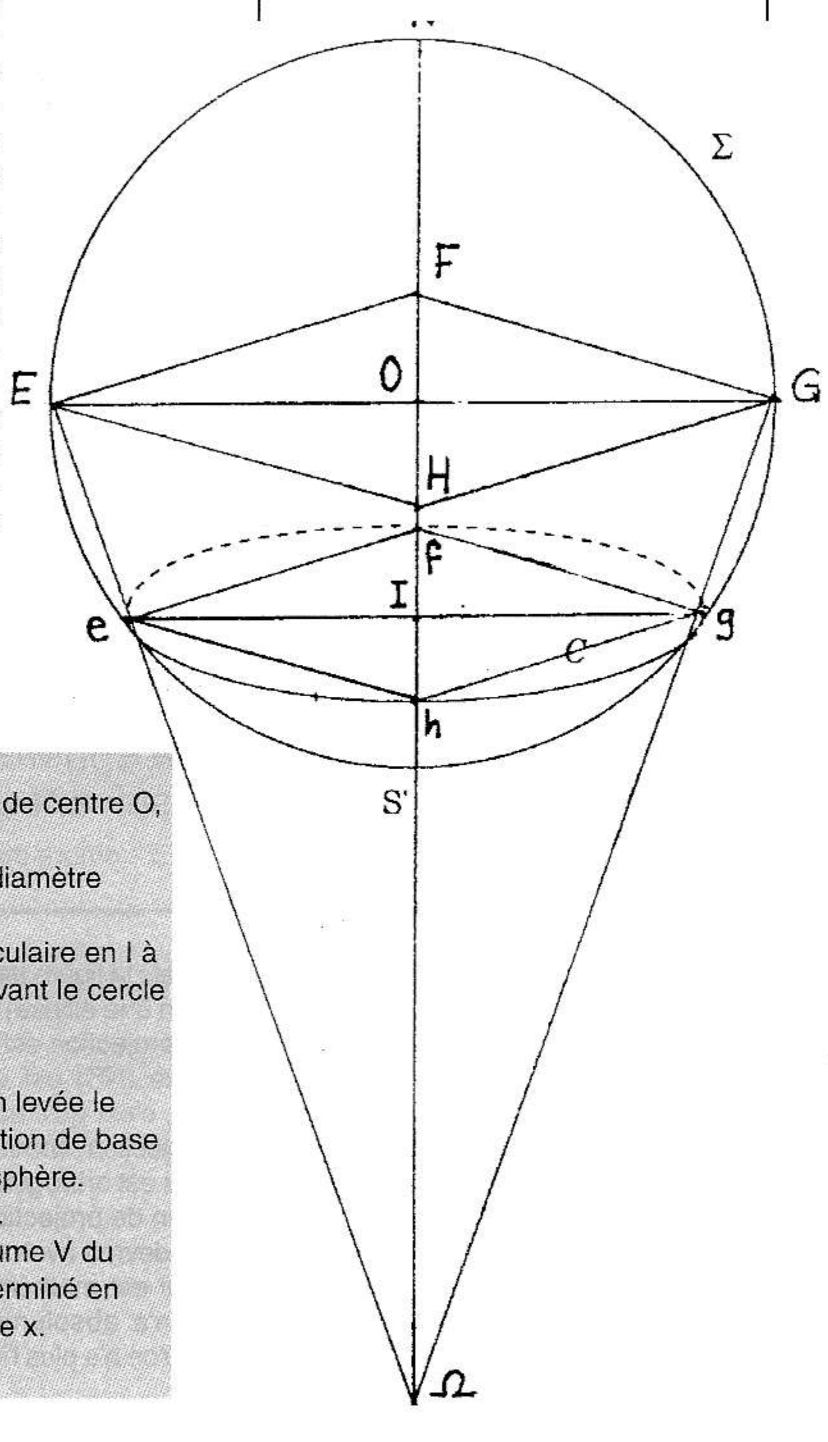
Si on veut conserver la configuration ci-contre, on ne sait plus où placer les pôles (en tout cas pas sur les bords !).



Peut-on les placer correctement ?

La réponse à cette question est bien sûr OUI !!!

Je prends comme support, pour l'expliquer, une fiche de l'excellente brochure IREM que je recommande vivement à tous (aux professeurs de première pour l'utiliser en classe, aux autres pour "s'amuser" un peu après les cours à quelques exercices de perspective). Mais malheureusement, cette erreur y a été commise (sûrement involontairement !) dans la fiche n°S17 :



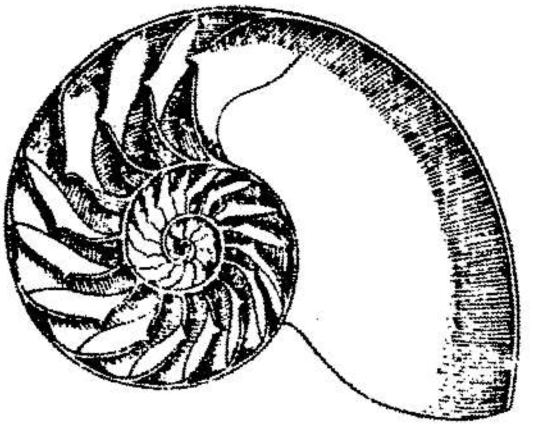
Fiche :
Σ est une sphère de centre O, de rayon R.
I est un point du diamètre [NS].
Le plan perpendiculaire en I à (NS) coupe Σ suivant le cercle C de rayon r.

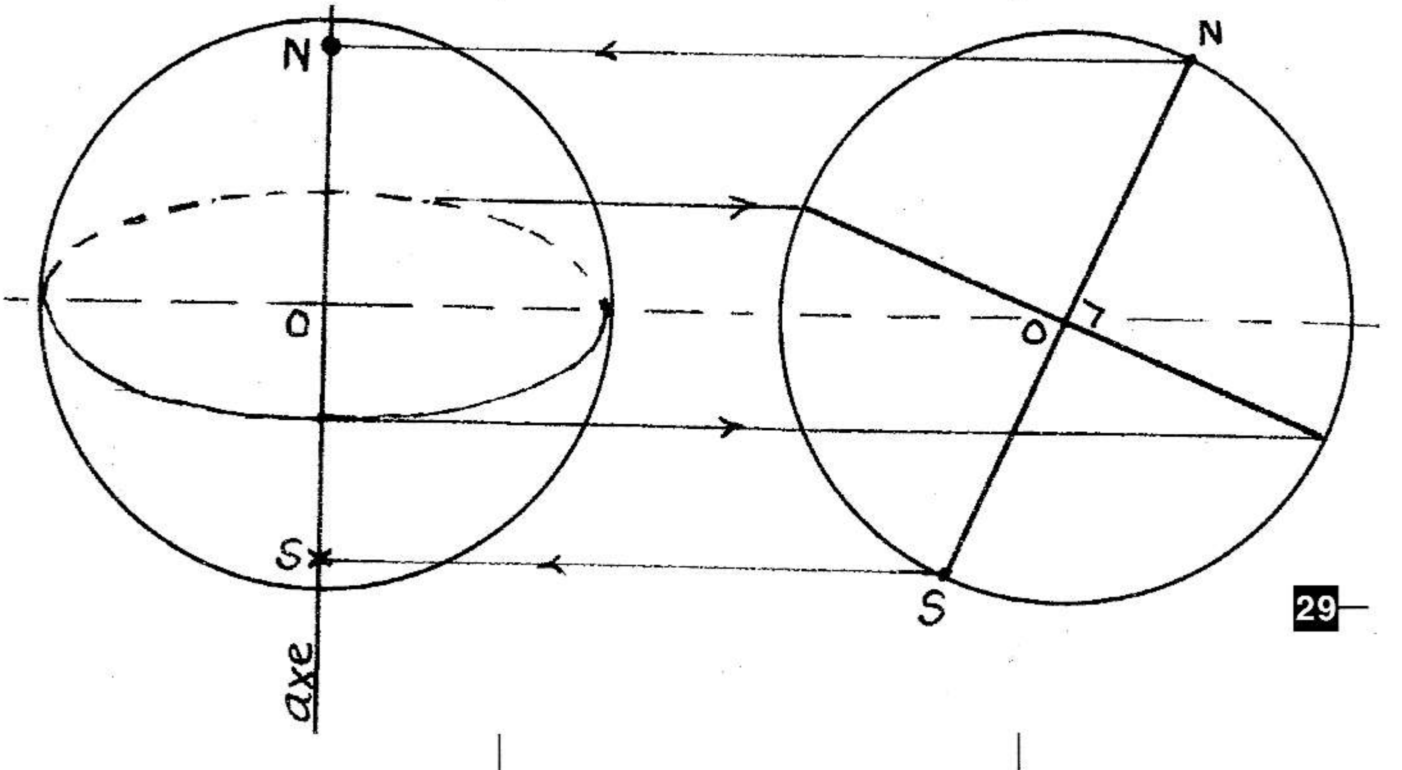
1• Dessine à main levée le cylindre de révolution de base C inscrit dans la sphère.
2• on pose OI = x.
a) Exprime le volume V du cylindre ainsi déterminé en fonction de R et de x.
etc.

Le cercle (C) tracé est un "parallèle" (en langage géographique) ; il est donc image de l'équateur dans une homothétie dont le centre Ω est situé sur l'axe des pôles.

En projection (donc sur le dessin), cette homothétie se conserve, ce qui permet de déterminer les points E, F, G et H (aux quatre "coins" de l'équateur !).

Attention : I étant le centre de l'ellipse, les extrémités **e** et **g** du grand axe ne se trouvent pas sur le contour apparent (représenté ici par le cercle Σ) : **e** et **g** sont sur le "méridien 90°" (en admettant que la sphère soit vue face au "méridien 0°").





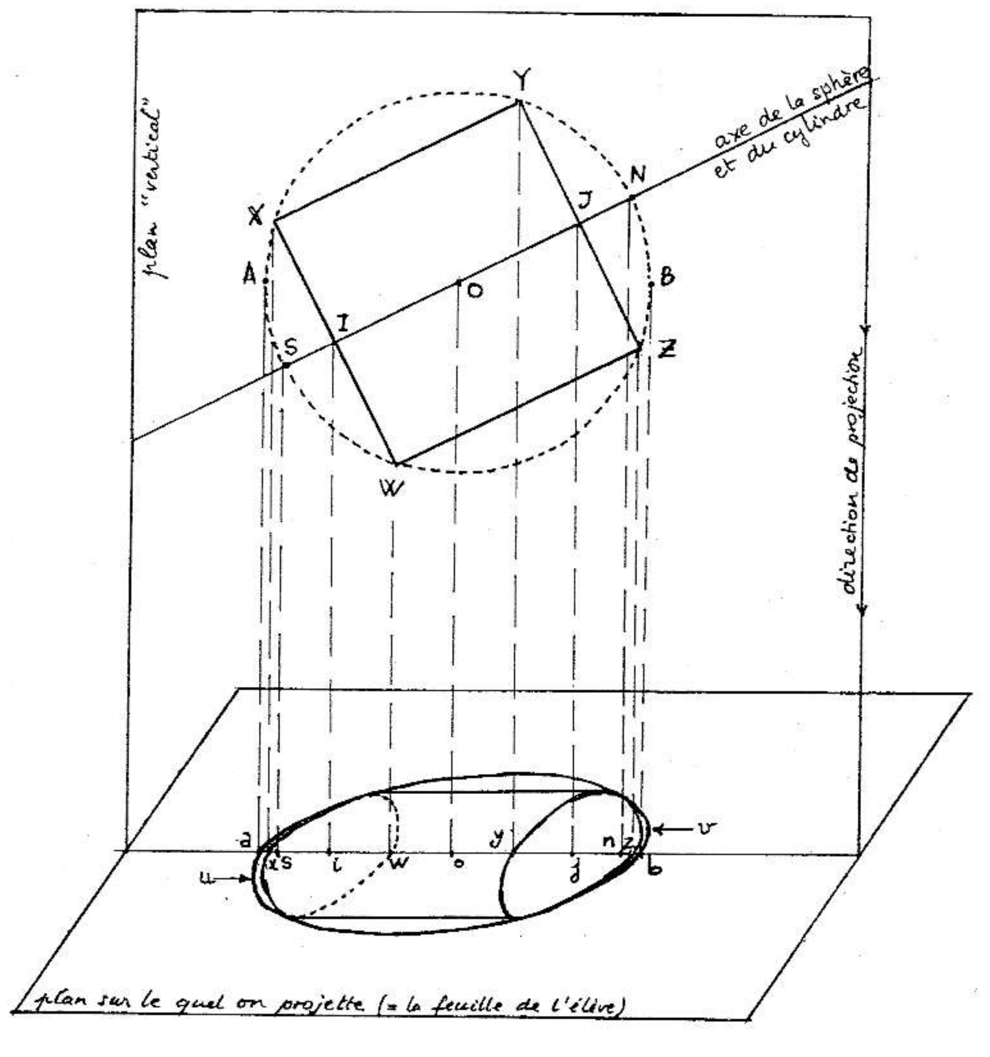
Imaginons maintenant la vue de côté de cette sphère (c'est-à-dire avec l'œil à l'infini sur (EG)).

Le pôle Nord est visible, le pôle Sud est caché. Et la partie du "méridien 90°" situé dans l'hémisphère Nord est visible, alors que sa partie située dans l'hémisphère Sud est cachée.

Sur la page suivante, j'ai essayé de représenter une vision de l'espace de l'exercice proposé sur cette fiche (on demande à l'élève de tracer le cylindre de base (C) inscrit dans la sphère (Σ)). La feuille de papier de l'élève est donc représentée en bas, horizontalement (mais vue en perspective cavalière) ; au dessus, j'ai représenté la coupe de l'en-

semble sphère/cylindre par le plan de projection contenant l'axe des pôles.
Avec la convention de notation suivante :
- majuscules pour les points de l'espace,
- minuscules pour les points du plan où on projette.
Attention : je n'ai pas représenté le solide sphère/cylindre, et le cercle en pointillés **n'est pas** le contour externe de la sphère dans l'espace (voir figure page 25).

Le problème pédagogique reste entier : que faire avec les élèves ???
Au premier cycle, comme au cours de géographie, je pense qu'il n'y pas à hésiter : utilisez cette perspective "erronée", mais si pratique !!
En première, par contre, je pense que l'on peut faire prendre conscience aux élèves de cette erreur de représentation, et les amener à la construction exacte des pôles à partir de l'équateur représenté par une ellipse.
Cet exercice constitue un "véritable" problème de géométrie dans l'espace.



Petite bibliographie

[Audibert], Gérard :
la perspective cavalière
Publication Apmep n° 75 (1990)

[IREM] de Lorraine :
Géométrie dans l'espace
Classes de première (76 fiches)

[Lombard], Philippe :
Géométrie élémentaire
Calcul vectoriel (tome I - 1985)
Ed : Irem de Lorraine)

[Mosaïque Mathématique]
Collectif (cf. bon de commande ci-joint)
Catalogue d'accompagnement de l'expo Maths 2ooo.

[Parzysz], Bernard : **La perspective : cavalière ou parallèle ?**
Article du Plot n° 57 (1991)

Quelques représentations dans l'espace

Les élèves ont certaines difficultés pour représenter correctement les solides de l'espace.

Leurs professeurs pensent que les élèves ne "voient" pas dans l'espace, et ne peuvent donc pas "ponctuer" les représentations.

Je pense, au contraire, que lorsque la ponctuation est mise on peut mieux se représenter un objet.

Voici (fig. 1) l'exemple d'un solide dessiné sur un cahier d'élève.

Le même dessin, ponctué d'une autre façon (fig. 2) semble être vu sous un autre angle.

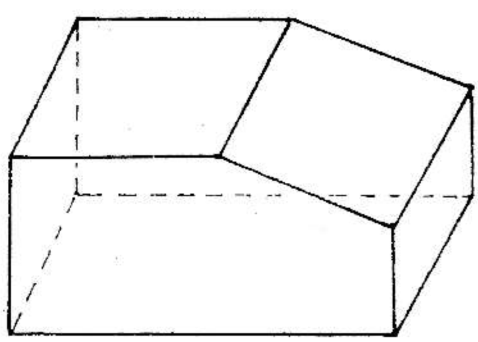


fig 1

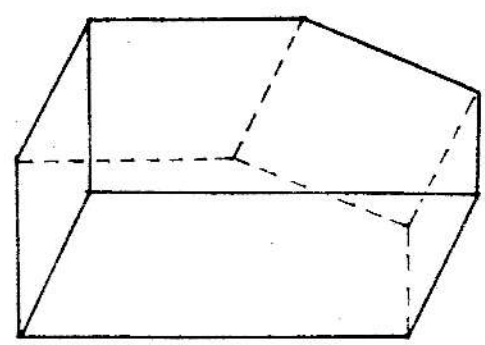


fig 2

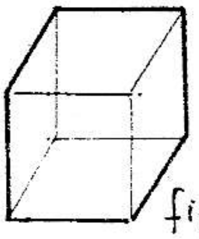


fig3

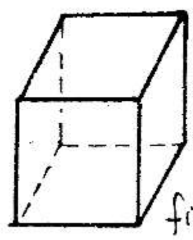


fig 4

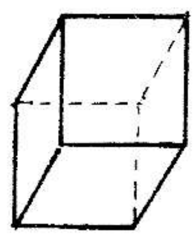
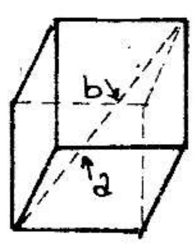


fig5



Quelques règles très simples sont applicables dans tous les cas :

- Le contour apparent est toujours vu en entier (fig. 1, 2 et 3).

- Si un sommet n'appartient pas au contour apparent, toutes les arêtes qui en partent sont soit vues, soit cachées (fig. 1, 2, 4).

- Si, sur le dessin, deux droites se coupent, mais que leur point d'intersection n'est qu'un point de concours apparent (c'est-à-dire que les droites ne sont pas sécantes dans l'espace) : si une droite est vue, l'autre est alors cachée (fig. 5, point a).

Attention : les droites peuvent être cachées toutes les deux (Fig. 5, point b).

Problème final
(Vu dans l'exposition "Maths 2ooo")

Imaginez que le dessin ci-dessous représente un cube dont toutes les faces sont en plexiglas transparent.
On ne voit et on n'a représenté que les arêtes de ce cube.

Un trou a été fait au milieu de l'une des faces de ce cube. Pouvez-vous nous dire quelle est cette face ?
Combien y a-t-il de réponse possible ?
D'autres façons de voir un cube !

Dans quelle face est le trou ?