

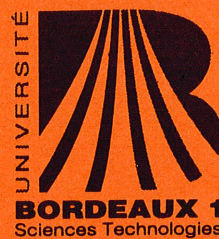
Université Bordeaux 1
Institut de Recherche
sur l'Enseignement des Mathématiques

40, rue Lamartine

33400 Talence

☎ : 05.56.84.89.74

Télécopie : 05.56.84.89.72



Angles Rotations

Groupe Géométrie
Bordeaux

Collection : Contribution à l'Enseignement de la Géométrie



IREM d'AQUITAINE

*Angles
Rotations*

Ont participé à l'élaboration de ce fascicule:

GOUTEYRON Antoine: Lycée René Cassin 64 BAYONNE

BOUSCASSE Jean-Marie: Collège Th de Viau 47 LE PASSAGE

CHAUMET Marie-Claude: Lycée Camille Julian 33 BORDEAUX

DAMEY Pierre: Université Bordeaux I 33 TALENCE

PINET Bernard: Lycée J.-B. de Baudre 47 AGEN

PUYOU Jacques: Lycée B. Palissy 47 AGEN

ROBERT Yves: Lycée René Cassin 64 BAYONNE

L'IREM de l'Université Bordeaux I a été créé par le Professeur Jean Colmez en 1969.

TABLE DES MATIERES

PARTIE A

ANGLES ET ROTATIONS (GEOMETRIE PLANE)

I. Reproduction d'une figure de \mathcal{P} par pivotement	5
1. Les données	5
2. Description de la manipulation	6
II. Angle d'un couple de vecteurs non nuls	8
1. Notion d'angle : égalité, notation	8
2. Comment concevoir l'ensemble \mathcal{A}	9
III. Rotations du plan \mathcal{P}	14
1. Etude introductive	14
2. Définition d'une rotation	15
3. Conséquences immédiates	15
IV. Somme de deux angles.	16
Composée de deux rotations de même centre	
1. Composée de deux rotations de centre O	16
2. Somme de deux angles	17
3. Relation de Chasles	19
4. Composée de deux rotations de même centre	20
V. Addition dans \mathcal{A}	22
1. Somme de trois angles	22
2. Elément neutre	22
3. Opposé d'un angle	23
4. Règles de calcul dans l'ensemble \mathcal{A} des angles	24
5. Relation de Chasles pour les "doubles d'angles"	25
6. Quelques résultats élémentaires à connaître.	25
VI. Retour sur les rotations de \mathcal{P}	28
1. Transformation réciproque d'une rotation	28
2. Composée de deux réflexions d'axes sécants	29
3. Moitiés d'un angle - Factorisations d'une rotation	31
4. Propriétés géométriques des rotations	34
VII. Effet des transformations sur les angles	37
1. Effet d'une translation	37
2. Effet d'une homothétie	37
3. Effet d'une rotation	38
4. Effet d'une réflexion	39
5. Récapitulation des résultats	39
VIII. Exercices résolus	40

ANNEXE

Transitivité de la relation: «avoir même angle».	50
--	----

PARTIE B

UTILISATION DES ANGLES ET DES DOUBLES D'ANGLE

I. Traduction angulaire de la colinéarité, de l'orthogonalité	53
1. Colinéarité	53
2. Orthogonalité	56
II. Bissectrices: caractérisation angulaire	58
1. Bissectrice de deux demi-droites de même origine	58
2. Bissectrices de deux droites sécantes	62
III. Angles d'un triangle	64
1. Somme "des angles d'un triangle"	64
2. Caractérisation angulaire d'un triangle isocèle	66
3. Caractérisation angulaire d'un triangle rectangle	67
IV. Angles et cercles	68
1. Premier théorème fondamental et corollaires	68
2. Deuxième théorème fondamental et corollaire	72
3. Métissage des deux théorèmes fondamentaux	74
4. Tableau des principaux résultats	76
V. Première batterie d'exercices résolus	77
VI. Lignes de niveaux $(A, B)_{\hat{\alpha}}$ et $(A, B)_{\hat{\alpha}+\hat{\pi}}$	101
1. Deux résultats à connaître	101
2. Lignes de niveau $(A, B)_{\hat{\alpha}}$ et $(A, B)_{\hat{\alpha}+\hat{\pi}}$	105
VII. Deuxième batterie d'exercices résolus	112
VIII. Notion de "mesures" d'un angle	121
1. Orientation du plan \mathcal{P} , du plan $\vec{\mathcal{P}}$	121
2. "Mesures" d'un angle	122
3. Mesures de la somme de deux angles	124
4. Traduction des principaux résultats acquis	125
5. Fonction cosinus, fonction sinus: définition	127
IX. Analyse "a posteriori" du contenu des deux chapitres	129
1. Sur l'introduction des angles et des rotations	129
2. Sur l'utilisation des outils "angles" et "rotations"	129
3. Sur la confusion d'écriture entre angle et ses mesures	133
4. Sur les "angles de droites"	138
Bibliographie	139



INTRODUCTION

Dans la première partie de cette publication figure:

- une présentation des notions “*angles de couples de vecteurs non nuls*” et “*rotations planes*”.
- la mise en place du groupe additif \mathcal{R} de ces angles à partir de la composition de rotations de même centre.
- l'effet des transformations usuelles sur ces angles.

La procédure utilisée ici pour introduire le groupe additif \mathcal{R} n'est pas la plus facile, ni la plus rapide. Mais elle se justifie par notre désir de vouloir détruire une idée fort répandue qui veut que, pour définir, ce type d'angles couramment appelés “*angles orientés*”, il soit nécessaire d'orienter le plan. Sa lecture n'est pas à la portée du profane et mérite patience et réflexion. Certaines démonstrations s'adressent uniquement aux enseignants.

La deuxième partie est consacrée aux modalités d'utilisation des angles. L'objectif visé est de montrer comment les concepts “angle” et “double d'angle” peuvent devenir des outils performants et facilement maniables pour résoudre, en géométrie plane, des problèmes de parallélisme et d'orthogonalité de droites, d'alignement et de cocyclicité de points.

La troisième partie a pour objet la mise en place de la notion de “*mesures d'un angle*”. Mathématiquement elle n'est pas envisageable à ce niveau. C'est pourquoi nous nous sommes limités à institutionnaliser des résultats suggérés par une étude expérimentale. L'important est de retenir la traduction en termes de “*mesures d'angles*” des principaux résultats acquis dans cette deuxième partie.

Pour clotûrer le tout figure, en fin de fascicule, une annexe destinée aux élèves des classes de 1^{ère} et de terminale scientifiques des lycées. La mise en place du groupe additif \mathcal{R} prend appui sur la notion de “mesure”. Elle est suivie d'un répertoire des principaux résultats qu'il convient de connaître pour promouvoir le bon usage des angles dans les problèmes de géométrie. Le lecteur trouvera la démonstration de ces résultats dans la partie B.

PARTIE A

ANGLES ET ROTATIONS (GEOMETRIE PLANE)

Dans tout ce chapitre :

- On désigne par \mathcal{P} un plan de l'espace. Dès lors que ce plan est muni d'un point origine O , le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ qui lui est associé est identifié au plan pointé \mathcal{P}_O .

Les images dans \mathcal{P}_O des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, sont notées U, V, W et on note \vec{u} le vecteur \overrightarrow{OU} .

- On suppose connus l'action et l'effet des réflexions de \mathcal{P} sur les figures élémentaires (droites, demi-droites, cercles, ...).

On adopte les notations suivantes :

s_Δ pour désigner la réflexion de droite Δ (ou d'axe Δ)

$s_{[AB] \leftrightarrow [AC]}$ pour désigner la réflexion qui échange les demi-droites $[AB]$ et $[AC]$

- L'unité de longueur fixée pour le plan \mathcal{P} est 2 centimètres.

I. Reproduction d'une figure de \mathcal{P} par pivotement: étude expérimentale.

1. Les données

Sur une feuille de papier matérialisant le plan \mathcal{P} -notée feuille n° 1- sont donnés :

- Trois points Ω, P et Q tels que

$$\Omega P = \Omega Q$$

- Une figure \mathcal{F} constituée d'un triangle ABC et d'un cercle \mathcal{C} centré en C .

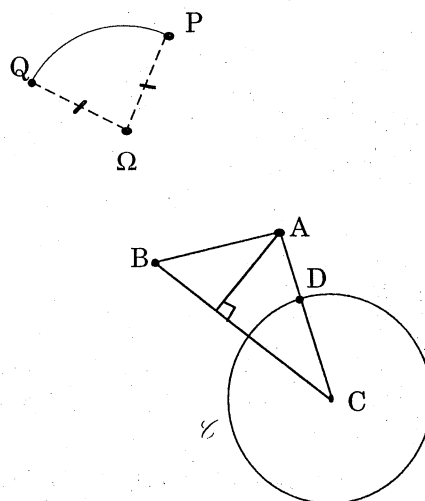


Fig. 1

2. Description de la manipulation

a) Reproduction de la figure \mathcal{F}

- Placer une feuille de papier calque -notée feuille n° 2- sur la feuille n° 1 donnée.
- Marquer sur la feuille n° 2 les points w et p qui se superposent aux points Ω et P puis décalquer la figure \mathcal{F} (on pourra se contenter de marquer sur la feuille n° 2 les points a, b, c et d qui se superposent aux points A, B, C et D).
- Faire pivoter la feuille n° 2 de façon que, le point w restant constamment au-dessus du point Ω , le point p vienne se superposer au point Q .
En perçant la feuille n° 2 à l'aide de la pointe d'un compas, marquer sur la feuille n° 1 les points A', B', C' et D' qui se trouvent alors au-dessous des points a, b, c et d .
- Tracer le triangle $A'B'C'$ ainsi que le cercle \mathcal{C}' de centre C' et passant par D' .

b) Vocabulaire

La figure \mathcal{F}' constituée par le triangle $A'B'C'$ et le cercle \mathcal{C}' est la reproduction de la figure \mathcal{F} par le pivotement autour de Ω qui amène P sur Q . On dit aussi que \mathcal{F}' est la figure transformée de \mathcal{F} par la rotation de centre Ω qui envoie P sur Q .

c) Images des vecteurs de bipoints "homologues"

- Un point origine O étant choisi dans \mathcal{P} , construire dans \mathcal{P}_O :

	les images U et U' des vecteurs $\overrightarrow{\Omega P}$ et $\overrightarrow{\Omega Q}$
	les images V et V' des vecteurs $\overrightarrow{\Omega C}$ et $\overrightarrow{\Omega C'}$
	les images W et W' des vecteurs \overrightarrow{AB} et $\overrightarrow{A'B'}$

- Vérifier en utilisant une feuille de papier calque que les secteurs angulaires $\widehat{UOU'}$, $\widehat{VOV'}$ et $\widehat{WOW'}$ sont superposables.

- Tracer l'axe \mathcal{D} (resp Δ) de la réflexion qui échange les demi-droites $[OU]$ et $[OV']$ (resp $[OU]$ et $[OW']$).
- Quelle est la transformée de la demi-droite $[OU']$ par la réflexion $s_{\mathcal{D}}$? par la réflexion s_{Δ} ?

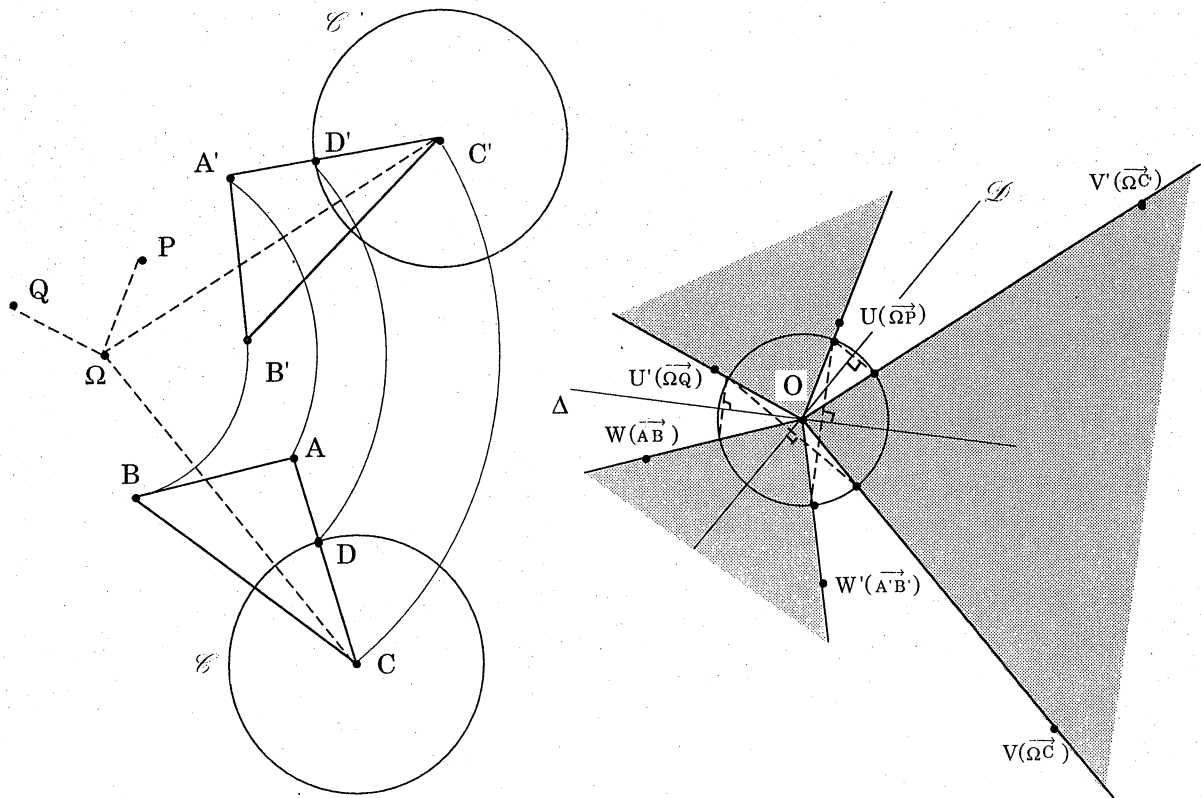


Fig. 2

Pour faciliter la lecture de ce document, nous avons réalisé les différentes constructions demandées dans la figure ci-dessus.

II. Angle d'un couple de vecteurs non nuls

1. Notion d'angle : égalité, notation

a) Définition

On dit que deux couples (\vec{u}, \vec{u}') et (\vec{v}, \vec{v}') de vecteurs non nuls de \mathcal{P} ont le même angle pour signifier que la réflexion qui échange les demi-droites $[OU)$ et $[OV')$ échange aussi les demi-droites $[OU')$ et $[OV)$.

Pour désigner l'angle d'un couple (\vec{u}, \vec{u}') , on adopte la notation $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}$. Dès lors, pour traduire que deux couples (\vec{u}, \vec{u}') et (\vec{v}, \vec{v}') ont le même angle, on écrit :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \widehat{(\vec{v}, \vec{v}')} \text{ et on lit :}$$

« angle u, u' égale angle v, v' »

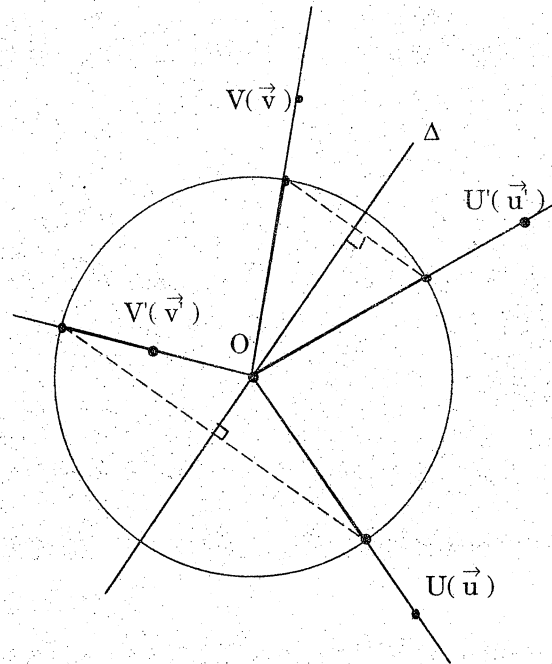


Fig. 3

b) Remarques

- Les demi-droites $[OU)$ et $[OU')$, représentant dans \mathcal{P}_O les demi-droites vectorielles $\mathbb{R}_+ \vec{u}$ et $\mathbb{R}_+ \vec{u}'$, il ressort de cette définition qu'un angle est en fait une "grandeur" associée à un couple de demi-droites vectorielles. On obtient donc un angle égal à l'angle $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')}$ en remplaçant \vec{u} (resp. \vec{u}') par un vecteur non nul de la demi-droite vectorielle $\mathbb{R}_+ \vec{u}$ (resp. $\mathbb{R}_+ \vec{u}'$).

- On obtient la totalité des angles de couples de vecteurs non nuls de \mathcal{P} en ne considérant que les angles de couples de vecteurs unitaires de ce plan.

c) L'ensemble \mathcal{A}

Dans toute la suite de ce chapitre, par "angle" nous entendrons "angle d'un couple de vecteurs non nuls de $\vec{\mathcal{P}}$ ". L'ensemble de tels angles est noté \mathcal{A} .

Commentaire (pour les enseignants).

La définition précédente n'est légitime que si, dans l'ensemble des couples de vecteurs non nuls de $\vec{\mathcal{P}}$, la relation "avoir le même angle" est une relation d'équivalence.

A l'autopsie elle s'avère banalement réflexive et symétrique. En revanche, la transitivité est plus ardue à établir. Nous proposons son étude en annexe à la fin de ce chapitre.

Bien entendu, il n'est plus de mise d'aborder ce problème devant des élèves de l'enseignement secondaire. On passera donc sous silence cette difficulté théorique sans remord ni regret.

2. Comment concevoir l'ensemble \mathcal{A}

a) Représentation de \mathcal{A}

Désignons par $\vec{\mathcal{U}}$ l'ensemble des vecteurs unitaires de $\vec{\mathcal{P}}$.

La conception de l'ensemble \mathcal{A} des angles, aussi bien graphique que mentale repose sur la conjecture suivante que nous allons valider :

« si on fixe dans $\vec{\mathcal{U}}$ un vecteur de référence \vec{n} alors \mathcal{A} est l'ensemble des angles (\vec{n}, \vec{m}) où \vec{m} est un vecteur de $\vec{\mathcal{U}}$ »

Dans le plan pointé \mathcal{P}_O , l'ensemble $\vec{\mathcal{U}}$ est représenté par le cercle Γ de centre O et de rayon 1. Donc choisir un vecteur de référence \vec{n} dans $\vec{\mathcal{U}}$ revient à choisir un point-repère N sur Γ . Le cercle Γ ainsi pourvu sera noté Γ_N .

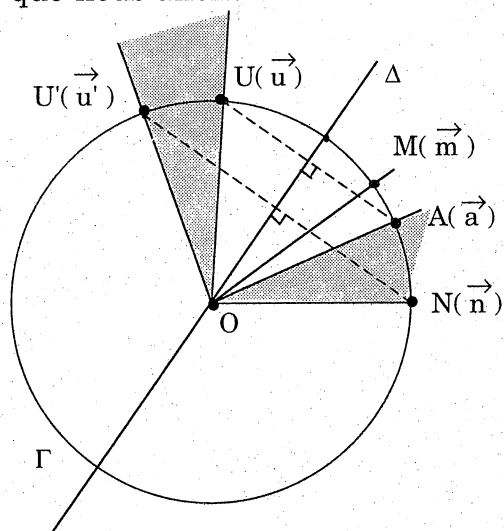


Fig. 4

Ceci dit, considérons l'application :

$$\begin{aligned} \varphi : \Gamma_N &\longrightarrow \mathcal{A} \\ M &\longmapsto (\vec{n}, \vec{m}) \end{aligned}$$

Pour tout angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$ de \mathcal{A} , l'équation $\varphi(M) = (\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$ d'inconnue M admet une solution et une seule dans Γ_N .

En effet, désignons par Δ l'axe de la réflexion qui échange $[ON)$ et $[OU')$.

$$\begin{aligned} \text{Nous avons : } \quad \varphi(M) = (\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) &\iff (\widehat{\vec{n}, \vec{m}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) \\ &\iff [OU) \xrightarrow{s_\Delta} [OM) \\ &\iff M=A \text{ où } A = s_\Delta(U) \end{aligned}$$

Le point A de Γ_N est donc l'unique solution de l'équation considérée.

Ainsi se trouve confirmé que l'application φ est "bijective".

En d'autres termes :

- A chaque point de Γ_N correspond un unique angle de \mathcal{A}
- A chaque angle de \mathcal{A} correspond un unique point de Γ_N

On peut donc **identifier** l'ensemble \mathcal{A} des angles à l'ensemble des points du cercle Γ_N .

b) Image d'un angle

Le point A , unique solution dans Γ_N de l'équation $\varphi(M) = (\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$, est appelé **image sur Γ_N** de l'angle $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$ de \mathcal{A} .

c) Notation $\hat{\alpha}$. Affichage graphique.

De l'étude précédente, il découle qu'un angle est déterminé par la donnée de **son** image sur Γ_N . Cette constatation accrédite l'idée de désigner un angle au moyen d'une seule lettre. Pour ce faire on utilise, de préférence, des lettres grecques surmontées d'un chapeau.

Par exemple, dans la figure ci-contre, les symboles $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ et $\hat{\mu}$ désignent respectivement les angles $(\widehat{\vec{n}, \vec{a}})$, $(\widehat{\vec{n}, \vec{b}})$ et $(\widehat{\vec{n}, \vec{m}})$ représentés sur Γ_N par les points A, B et M .

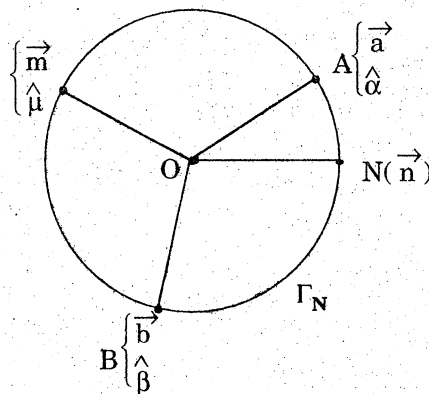


Fig. 5

Tout point du cercle Γ_N est image :

- d'un vecteur de \mathcal{U}
- d'un angle de \mathcal{A}

**d) Angle d'un couple de vecteurs de bipoints de \mathcal{P} :
affichage graphique.**

La donnée, dans le plan "ponctuel" \mathcal{P} , de points Ω , S et T avec $S \neq \Omega$ et $T \neq \Omega$ permet de prendre en considération les angles $\widehat{(\overrightarrow{\Omega S}, \overrightarrow{\Omega T})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{\Omega T}, \overrightarrow{\Omega S})}$.

Dans les trois cas suivants -qui s'excluent mutuellement- nous avons construit :

- dans le plan pointé \mathcal{P}_O , les images U et V des vecteurs $\overrightarrow{\Omega S}$ et $\overrightarrow{\Omega T}$
- sur le cercle Γ_N , les images:

$$\left\{ \begin{array}{l} U' \text{ et } V' \text{ des vecteurs unitaires des demi-droites } \mathbb{R}_+ \overrightarrow{u} \text{ et } \mathbb{R}_+ \overrightarrow{v} \\ A \text{ et } B \text{ des angles } \widehat{(\overrightarrow{\Omega S}, \overrightarrow{\Omega T})} \text{ et } \widehat{(\overrightarrow{\Omega T}, \overrightarrow{\Omega S})} \end{array} \right.$$

Les égalités $\widehat{(\overrightarrow{\Omega S}, \overrightarrow{\Omega T})} = \widehat{(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})} = \widehat{(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{a})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{\Omega T}, \overrightarrow{\Omega S})} = \widehat{(\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{u'})} = \widehat{(\overrightarrow{n}, \overrightarrow{b})}$ montrent que:

- A est le transformé de U' par la réflexion qui échange les demi-droites $[ON)$ et $[OV')$
- B est le transformé de V' par la réflexion qui échange les demi-droites $[ON)$ et $[OU')$.

1°) **Cas général** : les vecteurs $\overrightarrow{\Omega S}$ et $\overrightarrow{\Omega T}$ ne sont pas colinéaires

Sur Γ_N , les images A et B des angles $\widehat{(\overrightarrow{\Omega S}, \overrightarrow{\Omega T})}$ et $\widehat{(\overrightarrow{\Omega T}, \overrightarrow{\Omega S})}$ étant distinctes, ces angles sont des éléments distincts de \mathcal{A} .

Pour signaler sur un dessin, l'angle $\widehat{(\overrightarrow{\Omega S}, \overrightarrow{\Omega T})}$ ou l'angle $\widehat{(\overrightarrow{\Omega T}, \overrightarrow{\Omega S})}$, sans avoir à construire leurs images sur le cercle Γ_N , il est donc nécessaire de faire apparaître **l'ordre d'intervention** des vecteurs $\overrightarrow{\Omega S}$ et $\overrightarrow{\Omega T}$ dans le libellé de l'angle que l'on considère. Pour cela, on utilise un arc de cercle muni d'une flèche (ou de plusieurs flèches).

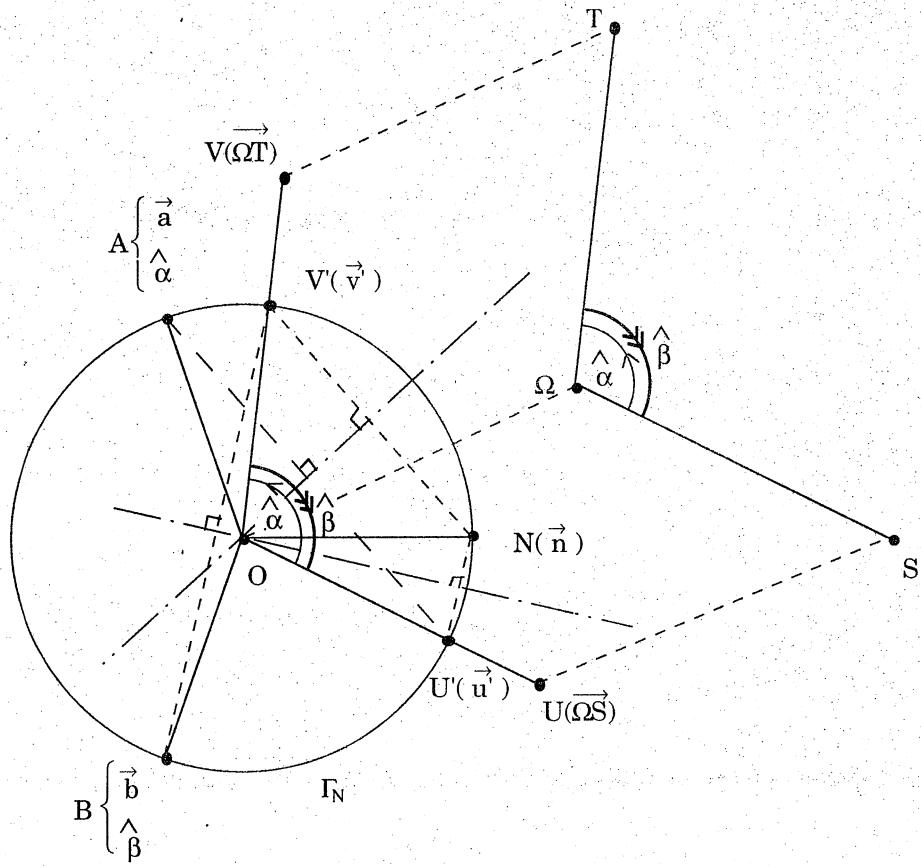


Fig. 6

Sur la figure ci-dessus:

- le symbole $\hat{\alpha}$ désigne l'angle du couple $(\overrightarrow{\Omega S}, \overrightarrow{\Omega T})$
- le symbole $\hat{\beta}$ désigne l'angle du couple $(\overrightarrow{\Omega T}, \overrightarrow{\Omega S})$

L'usage d'une double flèche pour signifier l'angle $\hat{\beta}$ a pour effet de rappeler que l'angle $\hat{\beta}$ est différent de l'angle $\hat{\alpha}$.

2°) Cas particuliers :

a) $\overrightarrow{\Omega T} = \lambda \overrightarrow{\Omega S}$ ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$)

b) $\overrightarrow{\Omega T} = \lambda \overrightarrow{\Omega S}$ ($-\lambda \in \mathbb{R}_+^*$)

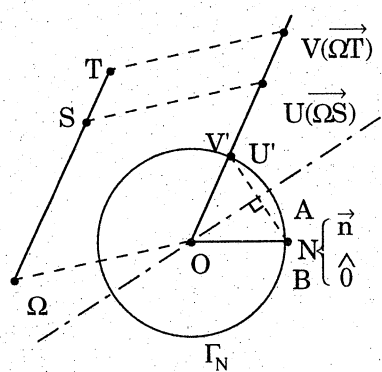


Fig. 7

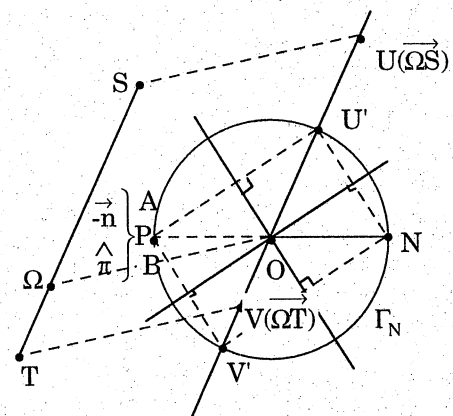


Fig. 8

• Dans le cas (2-a), on obtient : $A = B = N$.

On a donc : $\widehat{(\vec{\Omega S}, \vec{\Omega T})} = \widehat{(\vec{\Omega T}, \vec{\Omega S})} = \widehat{(\vec{n}, \vec{n})}$

Un tel angle est dit **nul**. On le note \hat{o} .

• Dans le cas (2-b), on obtient : $A = B = P$ où P est le symétrique de N par

rapport à O . On a donc : $\widehat{(\vec{\Omega S}, \vec{\Omega T})} = \widehat{(\vec{\Omega T}, \vec{\Omega S})} = \widehat{(\vec{n}, -\vec{n})}$.

Un tel angle est dit **plat**. On le note $\hat{\pi}$.

L'usage d'un arc de cercle "fléché" pour désigner l'angle $\widehat{(\vec{\Omega S}, \vec{\Omega T})}$ s'avère donc superflu dans ces deux cas particuliers.

Remarque.

Dans le dessin ci-contre les deux arcs de cercle "fléchés" désignent

le **même** angle : $\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}$.

Traditionnellement on utilise surtout celui qui est ici marqué d'une seule flèche.

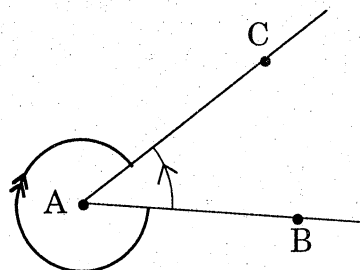


Fig. 9

III. Rotations du plan \mathcal{P}

1. Etude introductive

On se propose d'établir le résultat suivant :

Etant donné un point Ω de \mathcal{P} et un angle $\hat{\alpha}$ de \mathcal{A} alors, pour tout point M de \mathcal{P} autre que Ω , il existe un et un seul point M' de \mathcal{P} vérifiant les deux conditions : $\Omega M' = \Omega M$ et $\widehat{(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M}')} = \hat{\alpha}$.

Soit

- A l'image de $\hat{\alpha}$ sur le cercle Γ_N ,
- M un point de \mathcal{P} autre que Ω ,
- \vec{u} le vecteur $\vec{\Omega M}$
- \vec{u}' un vecteur de \mathcal{U} .

Nous avons :

$$\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \hat{\alpha} \iff \widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \widehat{(\vec{n}, \vec{a})}$$

Ce qui est équivalent à dire que :

sur Γ_N , U' est le transformé de N par la réflexion qui échange les demi-droites $[OU)$ et $[OA)$.

Il existe donc un et un seul vecteur \vec{u}' de \mathcal{U} tel que $\widehat{(\vec{u}, \vec{u}')} = \hat{\alpha}$.

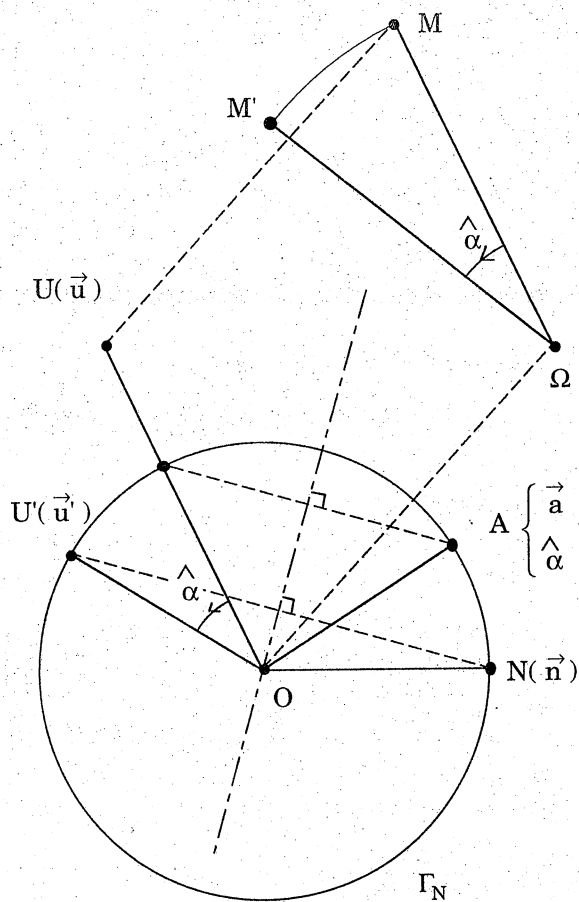


Fig. 10

c'est-à-dire par : $\vec{\Omega M'} = \|\vec{\Omega M}\| \vec{u}'$ égalité qui garantit l'existence et l'unicité du point M' .

2. Définition d'une rotation

Elle est légitimée par le résultat précédent.

Etant donné un point Ω de \mathcal{P} et un angle $\hat{\alpha}$ de \mathcal{A} , on appelle **rotation de centre Ω et d'angle $\hat{\alpha}$** l'application du plan \mathcal{P} dans lui-même, notée $r_{\Omega, \hat{\alpha}}$ qui :

- fixe le point Ω (laisse Ω invariant)
- transforme tout point M distinct de Ω en le point M' défini par

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad \widehat{(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'})} = \hat{\alpha}$$

3. Conséquences immédiates

a) Rotations particulières

On vérifie facilement que :

- La rotation de centre Ω et d'angle **nul** est l'application identique de \mathcal{P} .
- La rotation de centre Ω et d'angle **plat** est la symétrie de centre Ω .

Cette rotation est aussi appelée **demi-tour** de centre Ω .

b) Points invariants

Il est clair que toute rotation autre que l'application identique admet son centre comme unique point invariant.

c) Autre détermination d'une rotation

Soit Ω, A et B des points de \mathcal{P} tels que $A \neq \Omega, B \neq \Omega$ et $\Omega A = \Omega B$.

- S'il existe une rotation de centre Ω qui transforme A en B , son angle $\hat{\alpha}$ **ne peut être que** $\widehat{(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B})}$.

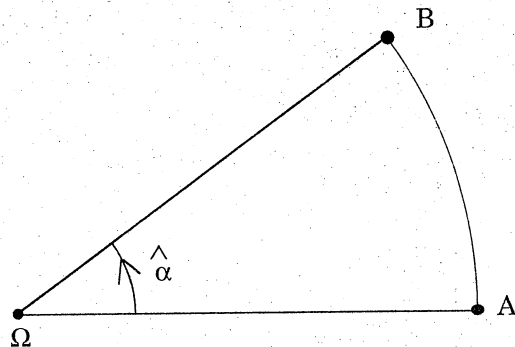


Fig. 11

- Ceci dit, il est clair que cette rotation $r_{\Omega, \hat{\alpha}}$ envoie A sur B .

Finalement, il existe une et une seule rotation de centre Ω qui envoie A sur B .

Ainsi :

Une rotation est déterminée par la donnée de son centre, d'un point et de son transformé.

La rotation de centre Ω qui envoie A sur B est notée $r_{\Omega, A \rightarrow B}$

IV. Somme de deux angles. Composée de deux rotations de même centre

1. Composée de deux rotations de centre O

Soit: • deux angles $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ de \mathcal{A}

- A et B leurs images sur le cercle Γ_N
- M un point de \mathcal{P} autre que O
- C et M' les transformés de B et M par la rotation $r_{O, \hat{\alpha}}$
- M_1 et M'' les transformés de M et M' par la rotation $r_{O, \hat{\beta}}$

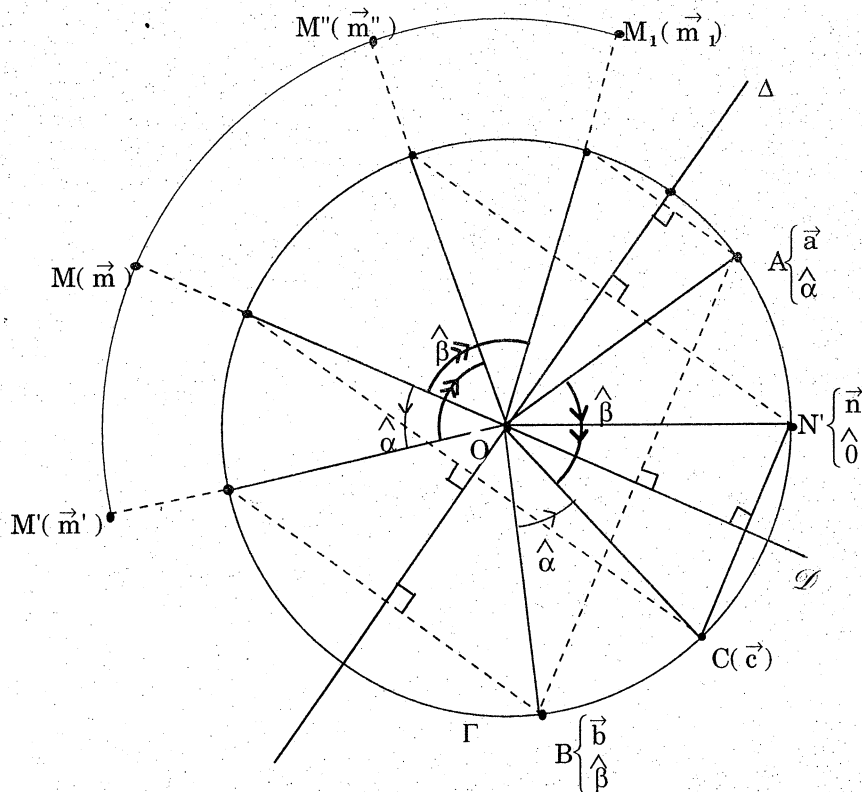


Fig. 12

▲ Nous avons d'une part

$(\widehat{\vec{b}}, \widehat{\vec{c}}) = (\widehat{\vec{n}}, \widehat{\vec{a}}) = \hat{\alpha}$ autrement dit la réflexion qui échange $[OA)$ et $[OB)$ échange aussi $[ON)$ et $[OC)$

On en déduit : $(\widehat{\vec{a}}, \widehat{\vec{c}}) = (\widehat{\vec{n}}, \widehat{\vec{b}}) = \hat{\beta}$

▲ Nous avons d'autre part (voir figure 12)

$$\begin{cases} (\widehat{\vec{b}}, \widehat{\vec{c}}) = (\widehat{\vec{m}}, \widehat{\vec{m}'}) = \hat{\alpha} & (e) \\ (\widehat{\vec{m}'}, \widehat{\vec{m}''}) = (\widehat{\vec{n}}, \widehat{\vec{b}}) = \hat{\beta} & (ee) \\ (\widehat{\vec{m}}, \widehat{\vec{m}_1}) = (\widehat{\vec{a}}, \widehat{\vec{c}}) = \hat{\beta} & (eee) \end{cases}$$

Ainsi la réflexion s_{Δ} qui échange les demi-droites $[OB)$ et $[OM')$ échange aussi :

- 1°) Les demi-droites $[OM)$ et $[OC)$ d'après l'égalité (e)
- 2°) Les demi-droites $[OM'')$ et $[ON)$ d'après l'égalité (ee)
- 3°) Les demi-droites $[OM_1)$ et $[OA)$ d'après les égalités (e) et (eee)

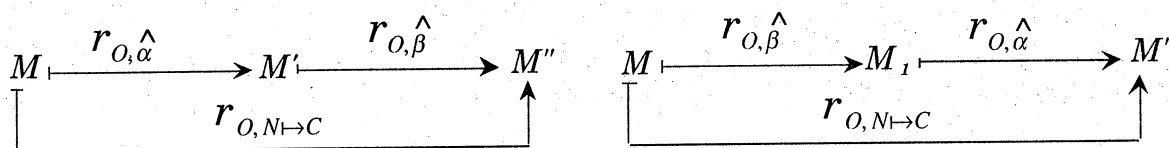
Il s'ensuit que :

$$\begin{cases} (\widehat{m, m''}) = (\widehat{n, c}) & \text{voir 1° et 2°} \\ (\widehat{m_1, m''}) = (\widehat{n, a}) = \hat{\alpha} & \text{voir 2° et 3°} \end{cases}$$

Comme par ailleurs, on a : $OM = OM' = OM'' = OM_1$, il vient :

$$M \xrightarrow{r_{O, N \rightarrow C}} M'' \quad \text{et} \quad M_1 \xrightarrow{r_{O, \hat{\alpha}}} M''$$

On peut alors résumer la situation par les schémas suivants :



qui traduisent que les composées « $r_{O, \hat{\alpha}}$ suivie de $r_{O, \hat{\beta}}$ » et « $r_{O, \hat{\beta}}$ suivie de $r_{O, \hat{\alpha}}$ » ont même action que la rotation $r_{O, N \rightarrow C}$ sur n'importe quel point M de \mathcal{P} (y compris sur le point O).

Il s'ensuit que : $r_{O, \hat{\beta}} \circ r_{O, \hat{\alpha}} = r_{O, \hat{\alpha}} \circ r_{O, \hat{\beta}} = r_{O, N \rightarrow C}$

Ainsi :

- La composée de deux rotations de centre O est une rotation de centre O
- Cette rotation composée ne dépend pas de l'ordre dans lequel on compose les rotations initiales.

2. Somme de deux angles

a) Définition de la somme de deux angles

On décide de noter :

$\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ l'angle de la rotation « $r_{O, \hat{\alpha}}$ suivie de $r_{O, \hat{\beta}}$ »

$\hat{\beta} + \hat{\alpha}$ l'angle de la rotation « $r_{O, \hat{\beta}}$ suivie de $r_{O, \hat{\alpha}}$ »

Comme « $r_{O, \hat{\alpha}}$ suivie de $r_{O, \hat{\beta}}$ » est égale à « $r_{O, \hat{\beta}}$ suivie de $r_{O, \hat{\alpha}}$ »,

on a : $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\beta} + \hat{\alpha}$.

Cela nous conduit à adopter la définition suivante :

Etant donné deux angles $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ de \mathcal{A} , l'angle de la rotation obtenue en composant -dans l'ordre que l'on veut- les rotations $r_{O,\hat{\alpha}}$ et $r_{O,\hat{\beta}}$ est appelé **somme des angles $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$** .

On le note indifféremment $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ ou $\hat{\beta} + \hat{\alpha}$.

b) Traduction sur le cercle Γ_N

Soit $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ des angles de \mathcal{A} , A, B et C leurs images sur Γ_N .

Nous avons :

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\gamma} \iff B \xrightarrow{r_{O,\hat{\alpha}}} C$$

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\gamma} \iff A \xrightarrow{r_{O,\hat{\beta}}} C$$

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\gamma} \iff N \xrightarrow{s_{[OA] \leftrightarrow [OB]}} C$$

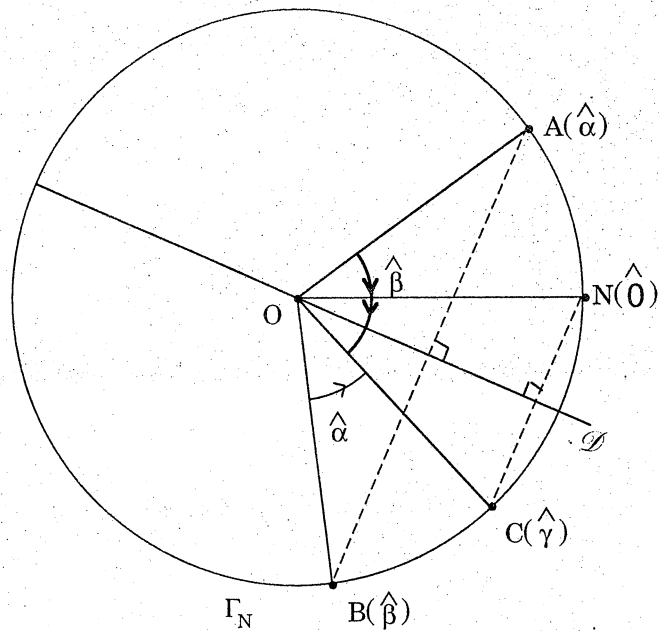


Fig. 13

$s_{[OA] \leftrightarrow [OB]}$ désigne la réflexion qui échange $[OA]$ et $[OB]$.

c) Double d'un angle : définition, notation, exemples

Pour tout angle $\hat{\alpha}$, l'angle $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}$ est appelé **double de l'angle $\hat{\alpha}$** .

On le note $2\hat{\alpha}$.

Sachant que $\begin{cases} r_{O,\hat{\delta}} = \text{id}_{\mathcal{P}} & \text{application identique de } \mathcal{P} \\ r_{O,\hat{\pi}} = s_O & \text{symétrie de centre } O \end{cases}$

il vient :

$$\begin{cases} \hat{\delta} + \hat{\delta} = \hat{\delta} & \text{car } r_{O,\hat{\delta}} \circ r_{O,\hat{\delta}} = \text{id}_{\mathcal{P}} \circ \text{id}_{\mathcal{P}} = \text{id}_{\mathcal{P}} = r_{O,\hat{\delta}} \\ \hat{\pi} + \hat{\pi} = \hat{\delta} & \text{car } r_{O,\hat{\pi}} \circ r_{O,\hat{\pi}} = s_O \circ s_O = \text{id}_{\mathcal{P}} = r_{O,\hat{\delta}} \end{cases}$$

Ainsi l'angle **nul** et l'angle **plat** ont le même double : l'angle **nul**.

3. Relation de Chasles

Soit \vec{u}, \vec{v} et \vec{w} des vecteurs non nuls de $\vec{\mathcal{F}}$; U, V et W leurs images dans le plan pointé \mathcal{P}_O ; U', V' et W' des points autres que O appartenant respectivement aux demi-droites $[OU], [OV], [OW]$ et tels que $OU' = OV' = OW'$. Notons $\hat{\alpha}$ (resp $\hat{\beta}$) l'angle (\vec{u}, \vec{v}) (resp (\vec{v}, \vec{w})) .

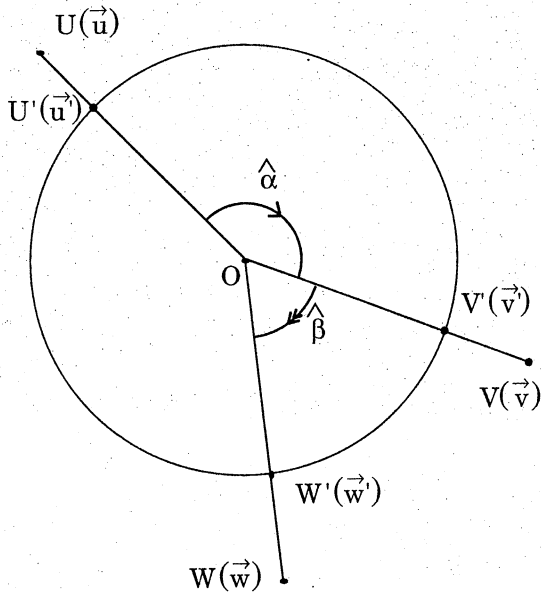


Fig. 14

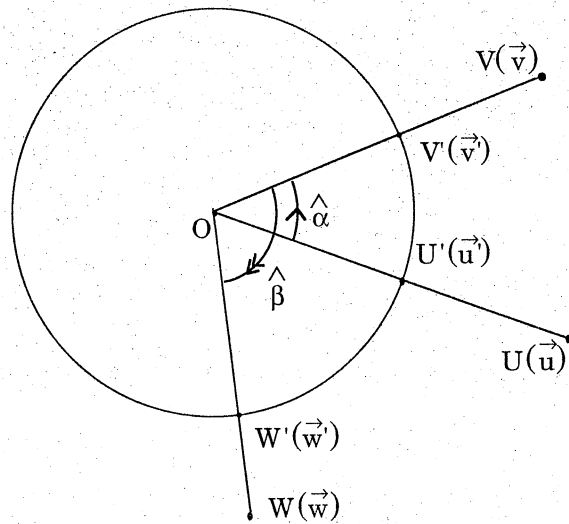
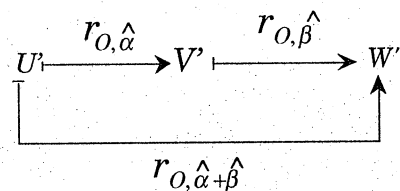


Fig. 15

Ces données peuvent se traduire par le schéma ci-contre :



Autrement dit, on a :

$$(\vec{u}, \vec{w}) = (\vec{u}', \vec{w}') = \hat{\alpha} + \hat{\beta} = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w})$$

On peut donc énoncer :

Quels que soient les vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de $\vec{\mathcal{F}}$:

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$$

Cette propriété est connue sous le nom de **relation de Chasles**

4. Composée de deux rotations de même centre

Soit :

- $r_{\Omega, \hat{\alpha}}$ et $r_{\Omega, \hat{\beta}}$ deux rotations de \mathcal{P}
- M un point de ce plan autre que Ω
- M' le transformé de M par $r_{\Omega, \hat{\alpha}}$
- M'' celui de M' par $r_{\Omega, \hat{\beta}}$

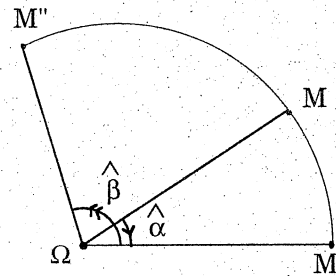


Fig. 16

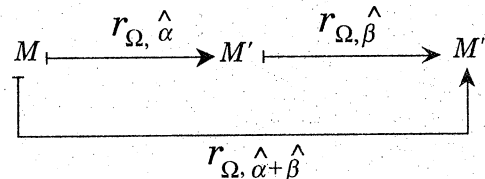
Nous avons alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega M' = \Omega M \\ \widehat{(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M}')} = \hat{\alpha} \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega M'' = \Omega M' \\ \widehat{(\vec{\Omega M}', \vec{\Omega M}'')} = \hat{\beta} \end{array} \right.$$

On en déduit : $\Omega M'' = \Omega M$

$$\widehat{(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M}'')} = \widehat{(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M}')} + \widehat{(\vec{\Omega M}', \vec{\Omega M}'')} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} \quad (\text{relation de Chasles})$$

Cette situation peut se résumer par le schéma ci-contre



qui traduit : $r_{\Omega, \hat{\alpha} + \hat{\beta}}$ a même action que la composée « $r_{\Omega, \hat{\alpha}}$ suivie de $r_{\Omega, \hat{\beta}}$ » sur n'importe quel point du plan \mathcal{P} (y compris sur le point Ω).

On a donc : $r_{\Omega, \hat{\beta}} \circ r_{\Omega, \hat{\alpha}} = r_{\Omega, \hat{\alpha} + \hat{\beta}}$

De même on tire :

$$r_{\Omega, \hat{\alpha}} \circ r_{\Omega, \hat{\beta}} = r_{\Omega, \hat{\beta} + \hat{\alpha}}$$

Comme l'angle $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$ est égal à l'angle $\hat{\beta} + \hat{\alpha}$, on peut énoncer :

Théorème 1

La composée -dans l'ordre que l'on veut- de deux rotations de même centre est une rotation ayant :

- pour centre celui des rotations initiales
- pour angle la somme des angles des rotations initiales

Ce résultat généralise celui concernant la composée de deux rotations de centre O .

Commentaire

Le lecteur averti sait que la notion d'angle d'un couple de vecteurs non nuls est, en fait, à rattacher à celle de rotation vectorielle. Cette dernière notion sera introduite dans un chapitre ultérieur destiné aux élèves de terminale scientifique. On verra alors que la rotation vectorielle d'angle $\hat{\alpha}$ peut être identifiée, dans le plan pointé \mathcal{P}_O , à la rotation ponctuelle de centre O et d'angle $\hat{\alpha}$. C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous avons **délibérément** mis en avant la composée de deux rotations de centre O pour introduire la somme des angles.

V. Addition dans \mathcal{A}

1. Somme de trois angles

a) Exposé du problème

Pour effectuer la somme des angles $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ pris dans cet ordre, on peut a priori procéder comme suit :

- Soit on détermine les angles $\hat{\delta} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}$ puis $\hat{\varepsilon} = \hat{\delta} + \hat{\gamma}$
- Soit on détermine les angles $\hat{\lambda} = \hat{\beta} + \hat{\gamma}$ puis $\hat{\mu} = \hat{\alpha} + \hat{\lambda}$

L'objet du problème est de comparer les angles $\hat{\varepsilon}$ et $\hat{\mu}$ ainsi obtenus.

b) Résolution

Désignons par A, B, \dots, M les images sur le cercle Γ_N des angles $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \dots, \hat{\mu}$ et traduisons en termes de "rotations" les égalités angulaires précédentes.

Nous obtenons : voir § IV 2 b

$$B \xrightarrow[\hat{(\alpha + \beta = \delta)}]{r_{O, \hat{\alpha}}} D \xrightarrow[\hat{(\delta + \gamma = \varepsilon)}]{r_{O, \hat{\gamma}}} E$$

$$B \xrightarrow[\hat{(\beta + \gamma = \lambda)}]{r_{O, \hat{\gamma}}} L \xrightarrow[\hat{(\alpha + \lambda = \mu)}]{r_{O, \hat{\alpha}}} M$$

Le point E -comme le point M - est le transformé de B par la composée des rotations $r_{O, \hat{\alpha}}$ et $r_{O, \hat{\gamma}}$

Sur le cercle Γ_N , on a donc :

$E = M$ égalité qui, dans \mathcal{A} ,
se traduit par : $\hat{\varepsilon} = \hat{\mu}$.

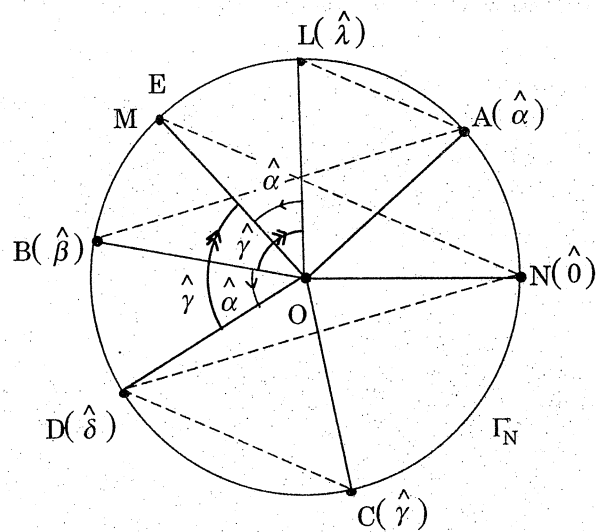


Fig. 17

On vient par conséquent d'établir que :

quels que soient les angles $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$: $(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) + \hat{\gamma} = \hat{\alpha} + (\hat{\beta} + \hat{\gamma})$

Cet angle sera noté : $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{\gamma}$ (sans parenthèses)

2. Élément neutre

Pour tout angle $\hat{\alpha}$, l'angle $\hat{\alpha} + \hat{o}$ est celui de la composée

« $r_{O, \hat{\alpha}}$ suivie de $r_{O, \hat{o}}$ »

Comme $r_{O, \hat{o}} = \text{id}_{\mathcal{A}}$ il est clair que cette composée se réduit à $r_{O, \hat{\alpha}}$. On a donc : $\hat{\alpha} + \hat{o} = \hat{\alpha}$.

On retiendra que :

$$\text{quel que soit l'angle } \hat{\alpha} \text{ de } \mathcal{A}, \text{ on a : } \hat{\alpha} + \hat{o} = \hat{o} + \hat{\alpha} = \hat{\alpha}$$

On dit alors que l'angle \hat{o} est élément neutre pour l'addition dans \mathcal{A} .

3. Opposé d'un angle

a) **Objet du problème:** étant donné un angle $\hat{\alpha}$ de \mathcal{A} , résoudre dans \mathcal{A} , l'équation $\hat{\alpha} + \hat{\mu} = \hat{o}$ d'inconnue $\hat{\mu}$.

Résolution

Soit A et M les images sur le cercle Γ_N des angles $\hat{\alpha}$ et $\hat{\mu}$.

Alors : voir § IV 2 b

$$\begin{aligned} \hat{\alpha} + \hat{\mu} = \hat{o} &\iff N \xrightarrow{s_{[OA] \leftrightarrow [OM]}} N \\ &\iff A \xrightarrow{s_{(ON)}} M \\ &\iff M = A' \text{ avec } A' = s_{(ON)}(A) \end{aligned}$$

L'équation $\hat{\alpha} + \hat{\mu} = \hat{o}$ admet donc une solution $\hat{\alpha}'$ et une seule dans \mathcal{A} : $\hat{\alpha}'$ est l'angle représenté sur Γ_N par le transformé de A par $s_{(ON)}$.

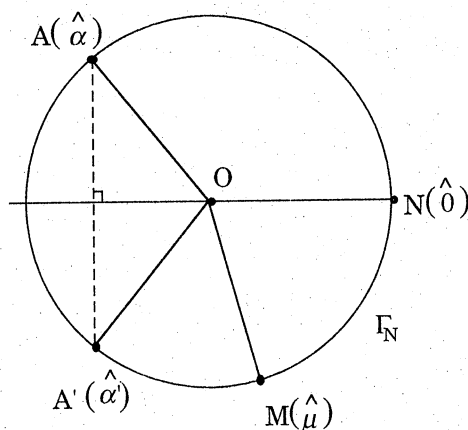


Fig. 18

On peut donc énoncer :

Pour tout angle $\hat{\alpha}$ de \mathcal{A} , il existe un et un seul angle $\hat{\alpha}'$ dans \mathcal{A} tel que : $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' = \hat{o}$

b) Définition

L'unique angle $\hat{\alpha}'$ de \mathcal{A} qui vérifie l'égalité $\hat{\alpha} + \hat{\alpha}' = \hat{o}$ est appelé **opposé** de $\hat{\alpha}$. On le note $-\hat{\alpha}$.

Pour tout angle $\hat{\alpha}$ on a donc : $\hat{\alpha} + (-\hat{\alpha}) = (-\hat{\alpha}) + \hat{\alpha} = \hat{o}$.

Ainsi l'opposé de $-\hat{\alpha}$ est $\hat{\alpha}$.

On traduit cette situation en disant que $\hat{\alpha}$ et $-\hat{\alpha}$ sont opposés.

Remarque :

Des angles sont opposés si, et seulement si, leurs images sur le cercle Γ_N sont symétriques par rapport à la droite (ON) .

Ceci dit, deux points de Γ_N et deux seulement sont invariants par la réflexion de droite (ON) , à savoir les points N et P .

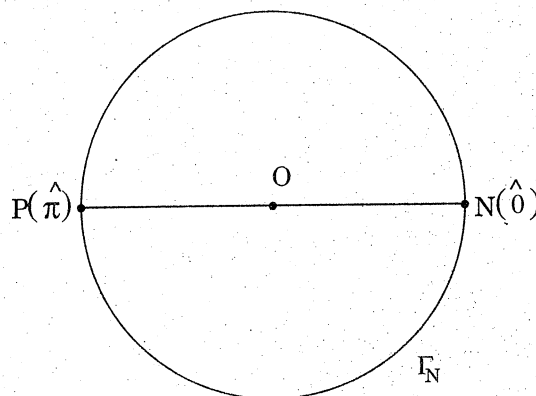


Fig. 19

En d'autres termes, il y a exactement deux angles qui sont respectivement égaux à leur opposé: l'angle **nul** et l'angle **plat**.

Par suite, on a :

$$\underline{2\hat{\alpha} = \hat{o}} \iff \hat{\alpha} + \hat{\alpha} = \hat{o} \iff \hat{\alpha} = -\hat{\alpha} \iff \begin{cases} \bullet \text{ soit } \hat{\alpha} = \hat{o} \\ \bullet \text{ soit } \hat{\alpha} = \hat{\pi} \end{cases}$$

4. Règles de calcul dans l'ensemble \mathcal{A} des angles

Le tableau ci-dessous présente "en parallèle" les propriétés de l'addition des angles et celles de l'addition des nombres.

$\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ et $\hat{\gamma}$ sont des éléments quelconques de \mathcal{A}	x, y et z sont des éléments quelconques de \mathbb{Z}, \mathbb{Q} ou \mathbb{R}
Commutativité	
$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\beta} + \hat{\alpha}$	$x + y = y + x$
Associativité	
$(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) + \hat{\gamma} = \hat{\alpha} + (\hat{\beta} + \hat{\gamma})$	$(x + y) + z = x + (y + z)$
Elément neutre	
$\hat{\alpha} + \hat{o} = \hat{o} + \hat{\alpha} = \hat{\alpha}$	$x + 0 = 0 + x = x$
Opposé	
$\hat{\alpha} + (-\hat{\alpha}) = (-\hat{\alpha}) + \hat{\alpha} = \hat{o}$	$x + (-x) = (-x) + x = 0$

L'addition des angles bénéficie donc des mêmes propriétés que l'addition des nombres. En conséquence, les règles de calcul régissant l'addition dans \mathcal{A} sont identiques à celle qu'on utilise **couramment** pour l'addition des nombres.

5. Relation de Chasles pour les "doubles d'angles"

Les doubles d'angles satisfont à la relation de Chasles.

Pour tout triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ de vecteurs non nuls de \mathcal{F}

$$2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 2(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) = 2(\widehat{\vec{u}, \vec{w}})$$

$$\begin{aligned} \text{Car } 2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + 2(\widehat{\vec{v}, \vec{w}}) &= [(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{w}})] + [(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}, \vec{w}})] \\ &= (\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) + (\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) \\ &= 2(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) \end{aligned}$$

6. Quelques résultats élémentaires à connaître

Ils sont énoncés et illustrés dans l'encadré suivant :

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls de \mathcal{F}

• $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \hat{o} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ appartiennent à la même} \\ \text{demi-droite vectorielle} \end{cases}$

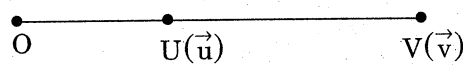


Fig. 20a

• $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \hat{\pi} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ appartiennent à deux} \\ \text{demi-droites vectorielles opposées} \end{cases}$

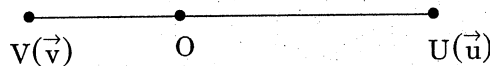


Fig. 20b

• $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = -(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

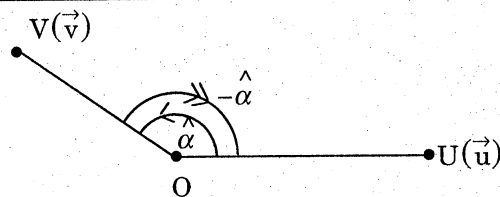


Fig. 20c

• $(\widehat{\vec{u}, -\vec{v}}) = (\widehat{-\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) + \hat{\pi}$

• $(\widehat{-\vec{u}, -\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

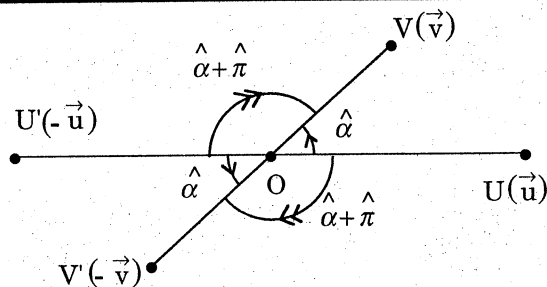


Fig. 20d

Démonstration.

Pour établir les deux "équivalences" on a recours au cercle Γ_N

$$\begin{aligned} \bullet (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = \hat{o} &\iff (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = (\widehat{\vec{n}}, \widehat{\vec{n}}) \\ &\iff [ON] \xleftrightarrow{S_{[ON] \leftrightarrow [OU]}} [OV] \\ &\iff [OU] = [OV] \\ &\iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ appartiennent à la même demi-droite vectorielle} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = \hat{\pi} &\iff (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = (\widehat{\vec{n}}, \widehat{\vec{p}}) \\ &\iff [ON] \xleftrightarrow{S_{[OP] \leftrightarrow [OU]}} [OV] \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} [OU] \text{ et } [OV] \text{ sont opposées car elles sont} \\ \text{les transformées par réflexion des} \\ \text{demi-droites opposées } [ON] \text{ et } [OP] \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ appartiennent à deux} \\ \text{demi-droites vectorielles opposées} \end{cases}$$

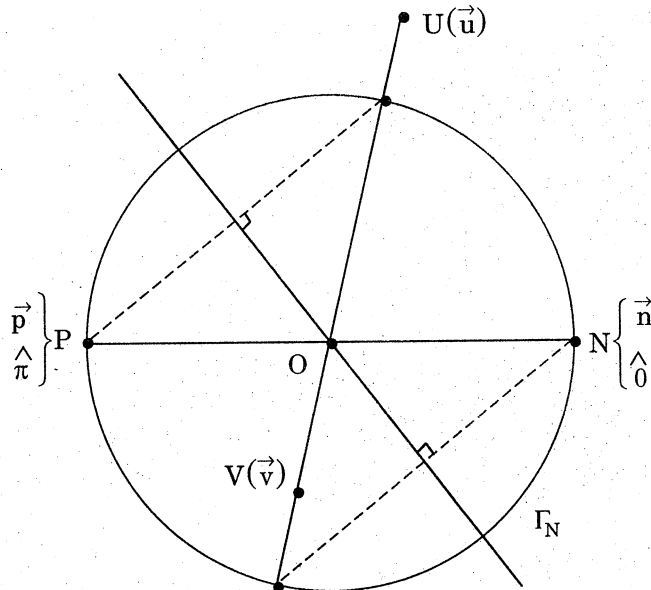


Fig. 21

Ceci fait, en utilisant la relation de Chasles, on obtient:

$$\begin{aligned} \bullet (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}}, \widehat{\vec{u}}) &= (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{u}}) = \hat{o} && \text{donc } (\widehat{\vec{v}}, \widehat{\vec{u}}) = -(\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) \\ \bullet (\widehat{\vec{u}}, \widehat{-\vec{v}}) &= (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}}, \widehat{-\vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) + \hat{\pi} \\ \bullet (\widehat{-\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) &= (\widehat{-\vec{u}}, \widehat{\vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) = \hat{\pi} + (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) \\ \bullet (\widehat{-\vec{u}}, \widehat{-\vec{v}}) &= (\widehat{-\vec{u}}, \widehat{\vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v}}, \widehat{-\vec{v}}) = \hat{\pi} + (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) + \hat{\pi} = (\widehat{\vec{u}}, \widehat{\vec{v}}) \text{ car } \hat{\pi} + \hat{\pi} = \hat{o} \end{aligned}$$

Commentaire (pour les enseignants)

Pour établir les propriétés de l'addition dans l'ensemble \mathcal{A} des angles nous avons identifié cet ensemble à l'ensemble des points du cercle Γ_N et établi, en fait,, que $(\Gamma_N, +)$ possède une structure de groupe commutatif.

Il est clair que le remplacement sur Γ_N du point de repère N par un point N' ne change rien à l'affaire vu que la rotation $r_{O, N \rightarrow N'}$ est un isomorphisme (*) du groupe $(\Gamma_N, +)$ sur le groupe $(\Gamma_{N'}, +)$.

Autrement dit, les groupes additifs Γ_N et $\Gamma_{N'}$ sont deux "images" identiques à un isomorphisme près du groupe additif \mathcal{A} .

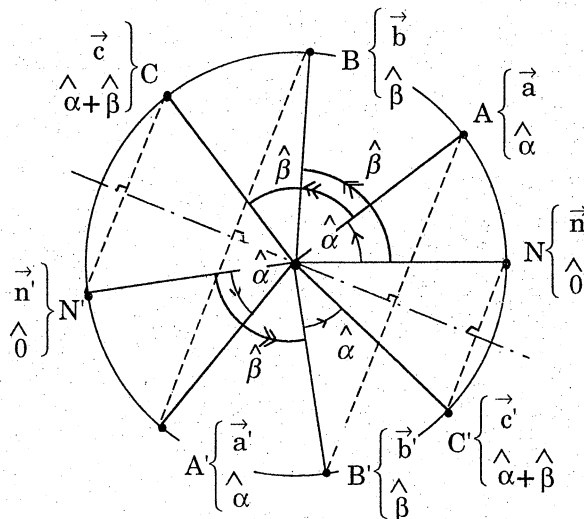


Fig. 22

(*) Soit A et B (resp. A' et B') les images sur Γ_N (resp sur $\Gamma_{N'}$) des angles $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$.

La réflexion qui échange $[OA)$ et $[ON')$ échange $[ON)$ et $[OA')$.

Donc $(\vec{a}, \vec{a}') = (\vec{n}, \vec{n}')$

La réflexion qui échange $[OB)$ et $[ON')$ échange $[ON)$ et $[OB')$.

Donc $(\vec{b}, \vec{b}') = (\vec{n}, \vec{n}')$.

Notons C (resp. C') le transformé de A (resp. B') par la rotation $r_{O, \hat{\beta}}$ (resp. $r_{O, \hat{\alpha}}$).

Alors la réflexion qui échange $[OA)$ et $[OB')$ échange C et N' (resp. C' et N).

On a donc $(\vec{c}, \vec{c}') = (\vec{n}, \vec{n}')$ de sorte que : $(A, B, C) \xrightarrow{r_{O, N \rightarrow N'}} (A', B', C')$.

La démonstration s'achève en remarquant que C sur Γ_N et C' sur $\Gamma_{N'}$ sont les images de l'angle $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$.

VI. Retour sur les rotations de \mathcal{P}

1. Transformation réciproque d'une rotation

Théorème (2)

- Toute rotation de \mathcal{P} est une bijection de ce plan sur lui-même.
- La transformation réciproque de $r_{O, \hat{\alpha}}$ est $r_{O, -\hat{\alpha}}$

Démonstration

Soit $r_{\Omega, \hat{\alpha}}$ une rotation et A un point de \mathcal{P} .

- Nous avons :

$$r_{\Omega, \hat{\alpha}}[r_{\Omega, -\hat{\alpha}}(A)] = r_{\Omega, \hat{\alpha}} \circ r_{\Omega, -\hat{\alpha}}(A) = r_{\Omega, \hat{\alpha} - \hat{\alpha}}(A) = r_{\Omega, \hat{0}}(A) = A$$

Donc, dans \mathcal{P} , l'équation :

$$\langle r_{\Omega, \hat{\alpha}}(M) = A \rangle \quad \text{d'inconnue } M$$

admet au moins une solution,

à savoir le point $r_{\Omega, -\hat{\alpha}}(A)$.

- **Réciproquement**, soit M' une solution de cette équation.

De $r_{\Omega, \hat{\alpha}}(M') = A$ on tire : $r_{\Omega, -\hat{\alpha}}[r_{\Omega, \hat{\alpha}}(M')] = r_{\Omega, -\hat{\alpha}}(A)$

c'est-à-dire : $M' = r_{\Omega, -\hat{\alpha}}(A)$.

Ainsi, dans \mathcal{P} , l'équation : $\langle r_{\Omega, \hat{\alpha}}(M) = A \rangle$ **admet une et une seule solution.**

Concluons

- la rotation $r_{\Omega, \hat{\alpha}}$ est une bijection de \mathcal{P} sur lui-même.
- Sa transformation réciproque est $r_{\Omega, -\hat{\alpha}}$... car $r_{\Omega, -\hat{\alpha}} \circ r_{\Omega, \hat{\alpha}} = r_{\Omega, \hat{0}} = id_{\mathcal{P}}$

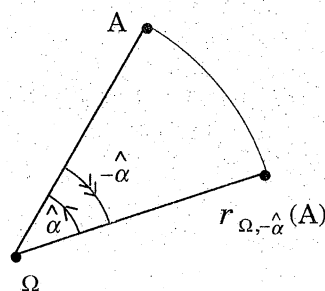


Fig. 23

2. Composée de deux réflexions d'axes sécants

Soit \mathcal{D} et \mathcal{D}' deux droites sécantes de \mathcal{P} . On se propose ici d'étudier la composée $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ des réflexions de droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' .

a) Etude graphique

Nous avons construit ci-contre la transformée \mathcal{F}' d'une figure \mathcal{F} constituée d'un triangle ABC et d'un cercle \mathcal{C} centré en C par la réflexion $s_{\mathcal{D}}$ d'axe \mathcal{D} , puis la transformée \mathcal{F}'' de la figure \mathcal{F}' par la réflexion $s_{\mathcal{D}'}$ d'axe \mathcal{D}' . Cette réalisation fait apparaître que \mathcal{F}'' est la transformée de \mathcal{F} par une rotation ayant pour centre le point de concours des droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' .

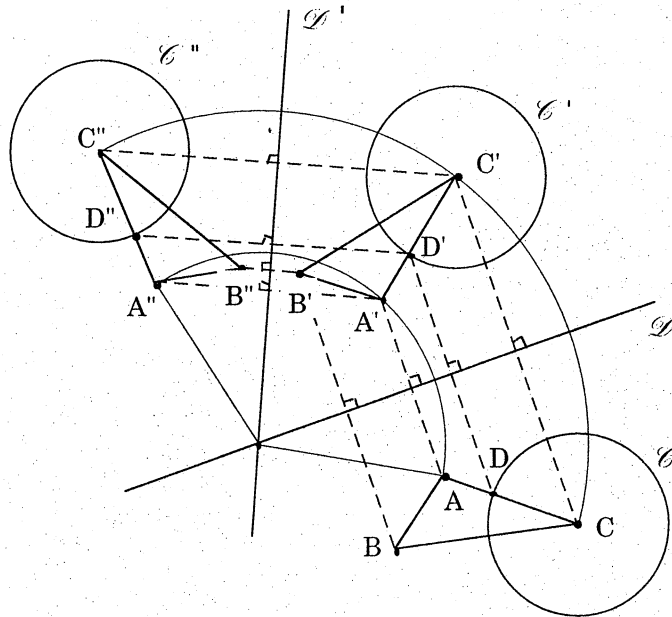


Fig. 24

D'après le résultat de cette expérience, il semblerait donc que la composée de deux réflexions d'axes sécants soit une rotation ayant pour centre le point de concours de ces deux axes. Il s'agit maintenant de vérifier cette conjecture.

b) Etude théorique

On choisit le point de concours de \mathcal{D} et \mathcal{D}' comme point origine O du plan \mathcal{P} .

Soit M un point de \mathcal{P} autre que O , M' le transformé de M par $s_{\mathcal{D}}$, M'' celui de M' par $s_{\mathcal{D}'}$.

Les réflexions conservant les distances on a : $OM = OM' = OM''$

Pour vérifier la conjecture précédente, il reste à établir que l'angle $\widehat{(\vec{m}', \vec{m}'')}$ reste constant c'est-à-dire qu'il ne dépend pas du choix de M dans $\mathcal{P} \setminus \{O\}$, mais uniquement de la donnée des droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' .

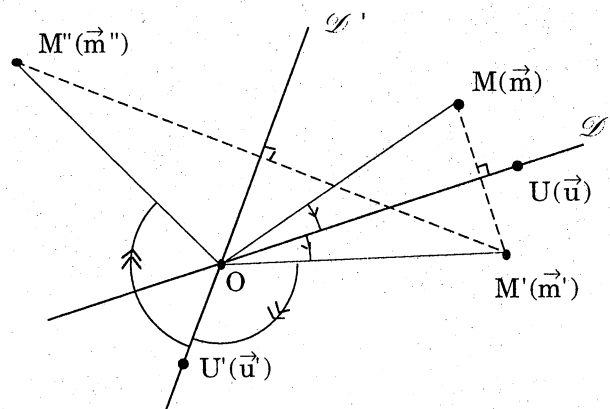


Fig. 25

Soit \vec{u} (resp. \vec{u}') un vecteur directeur de \mathcal{D} (resp. de \mathcal{D}').

$$\text{On a alors : } \begin{cases} (\widehat{\vec{m}, \vec{u}}) = (\widehat{\vec{u}, \vec{m}'}) & \text{car } M \xrightarrow{s_{(OU)}} M' \\ (\widehat{\vec{m}', \vec{u}'}) = (\widehat{\vec{u}', \vec{m}''}) & \text{car } M' \xrightarrow{s_{(OU')}} M'' \end{cases}$$

$$\text{d'où on tire : } \begin{cases} 2(\widehat{\vec{u}, \vec{m}'}) = (\widehat{\vec{m}, \vec{u}}) + (\widehat{\vec{u}, \vec{m}'}) = (\widehat{\vec{m}, \vec{m}'}) \\ 2(\widehat{\vec{m}', \vec{u}'}) = (\widehat{\vec{m}', \vec{u}'}) + (\widehat{\vec{u}', \vec{m}''}) = (\widehat{\vec{m}', \vec{m}''}) \end{cases}$$

Par suite, il vient :

$$(\widehat{\vec{m}, \vec{m}''}) = (\widehat{\vec{m}, \vec{m}'}) + (\widehat{\vec{m}', \vec{m}''}) = 2(\widehat{\vec{u}, \vec{m}'}) + 2(\widehat{\vec{m}', \vec{u}'}) = 2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$$

$$\text{Finalement, on a : } \begin{cases} OM'' = OM \\ (\widehat{OM, OM''}) = 2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) \end{cases}$$

Autrement dit la rotation $r_{O, 2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})}$ envoie le point M sur le point M'' .
 Cette rotation a donc même action que la composée « $s_{\mathcal{D}}$ suivie de $s_{\mathcal{D}'}$ » sur n'importe quel point M de \mathcal{P} (y compris sur le point O).

Conclusion : $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}} = r_{O, 2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})}$

c) Énoncé du résultat

Théorème (3)

La composée « $s_{\mathcal{D}}$ suivie de $s_{\mathcal{D}'}$ » de deux réflexions d'axes \mathcal{D} et \mathcal{D}' sécants est la rotation ayant :

- pour centre le point de concours des droites \mathcal{D} et \mathcal{D}'
 - pour angle $2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$ où \vec{u} et \vec{u}' sont respectivement des vecteurs directeurs de \mathcal{D} et \mathcal{D}'
-

L'angle de la rotation est non nul car $(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'})$ n'est ni nul, ni plat (voir §(V - 3)).

3. Moitiés d'un angle - Factorisations d'une rotation

a) Exposé du problème.

Il ressort du précédent résultat que :

Une rotation de centre Ω et d'angle $\hat{\alpha}$ non nul donné est factorisable en la composée « $s_{\mathcal{D}}$ suivie de $s_{\mathcal{D}'}$ » de deux réflexions d'axes \mathcal{D} et \mathcal{D}' passant par Ω si et seulement si, on a : $2(\widehat{\vec{u}, \vec{u}'}) = \hat{\alpha}$ où \vec{u} (resp. \vec{u}') désigne l'un des deux vecteurs unitaires dirigeant \mathcal{D} (resp. \mathcal{D}').

Pour statuer sur l'existence d'une telle factorisation nous sommes conduits à résoudre, dans l'ensemble \mathcal{A} des angles, l'équation d'inconnue $\hat{\mu}$: $2\hat{\mu} = \hat{\alpha}$ ($\hat{\alpha}$ étant un élément donné de \mathcal{A})

b) Les deux moitiés d'un angle

Soient A et M les images des angles $\hat{\alpha}$ et $\hat{\mu}$ sur le cercle Γ_N .

Alors :

$$2\hat{\mu} = \hat{\alpha} \Leftrightarrow 2(\widehat{\vec{n}, \vec{m}}) = (\widehat{\vec{n}, \vec{a}})$$

$$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{n}, \vec{m}}) = (\widehat{\vec{n}, \vec{a}}) - (\widehat{\vec{n}, \vec{m}})$$

$$\Leftrightarrow (\widehat{\vec{n}, \vec{m}}) = (\widehat{\vec{m}, \vec{a}})$$

$$\Leftrightarrow M \xrightarrow{s_{[ON] \leftrightarrow [OA]}} M$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ soit } M = M_1 \\ \bullet \text{ soit } M = M_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ soit } \hat{\mu} = \hat{\mu}_1 \\ \bullet \text{ soit } \hat{\mu} = \hat{\mu}_2 = \hat{\mu}_1 + \hat{\pi} \end{cases}$$

$$\text{car } r_{O, \hat{\pi}}(M_1) = M_2$$

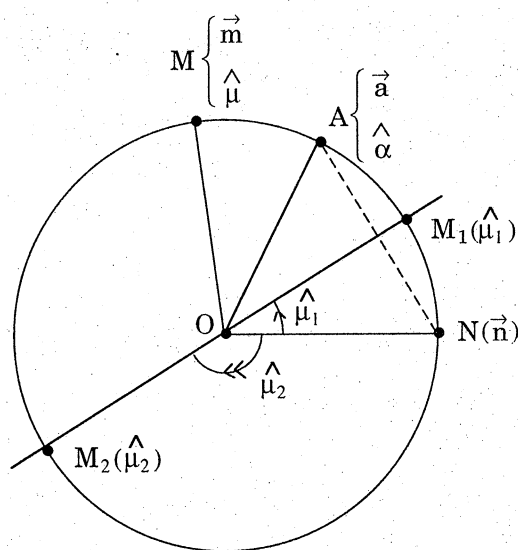


Fig. 26

Tout point de Γ_N est image

- d'un angle de \mathcal{A}
- d'un vecteur de \mathcal{U}

Théorème (4) et définition

▲ Pour tout angle $\hat{\alpha}$ de \mathcal{A} , l'équation $2\hat{\mu} = \hat{\alpha}$ d'inconnue $\hat{\mu}$ admet deux solutions dans \mathcal{A} .

- Ces deux angles-solutions ont pour différence l'angle plat.
- Leurs images sur le cercle Γ_N sont les points d'intersection de Γ_N et de l'axe de la réflexion qui fixe O et échange N et l'image A de $\hat{\alpha}$.

▲ On les appelle les **deux moitiés** de l'angle $\hat{\alpha}$.

Ainsi tout angle de \mathcal{A} possède deux moitiés. En particulier :

• **L'angle nul** a deux moitiés : lui-même et l'angle plat. On retrouve ici un résultat déjà acquis, à savoir :

$2\hat{\mu} = \hat{o}$ équivaut à soit $\hat{\mu} = \hat{o}$, soit $\hat{\mu} = \hat{\pi}$.

• **L'angle plat** a deux moitiés $\hat{\delta}$ et $\hat{\delta}'$ représentées sur le cercle Γ_N par les points D et D' -voir figure ci-contre-

Les angles $\hat{\delta}$ et $\hat{\delta}'$ sont qualifiés **droits** : l'un est dit **direct**, l'autre **indirect** (le choix sera fait plus tard).

Ils diffèrent de l'angle **plat** et possèdent en outre la particularité d'être **opposés** car D et D' sont symétriques par rapport à (ON) .

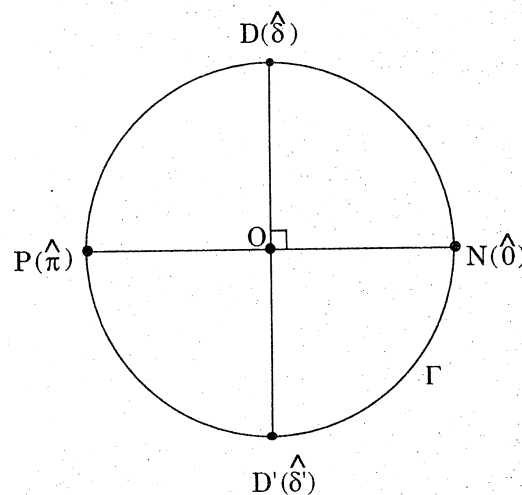


Fig. 27

c) Factorisation d'une rotation

▲ Il découle des alinéas (a) et (b) que :

• Toute rotation de centre Ω et d'angle $\hat{\alpha}$ non nuls donnés est factorisable en la composée $s_{\mathcal{D}'} \circ s_{\mathcal{D}}$ de deux réflexions d'axes \mathcal{D} et \mathcal{D}' passant par Ω .

• L'angle du couple (\vec{u}, \vec{u}') de vecteurs unitaires dirigeant respectivement \mathcal{D} et \mathcal{D}' est alors égal à l'une des deux moitiés $\hat{\mu}_1$ ou $\hat{\mu}_2$ de l'angle $\hat{\alpha}$.

Pour factoriser $r_{\Omega, \hat{\alpha}}$ on choisit **arbitrairement** l'un des vecteurs \vec{u} ou \vec{u}' .

Si, **par exemple**, on choisit \vec{u} alors:

- Soit $\vec{u}' = \vec{u}_1$ où \vec{u}_1 est le vecteur unitaire défini par $(\vec{u}, \vec{u}_1) = \hat{\mu}_1$

- Soit $\vec{u}' = \vec{u}_2$ où \vec{u}_2 est le vecteur unitaire défini par

$$(\vec{u}, \vec{u}_2) = \hat{\mu}_2 = \hat{\mu}_1 + \hat{\pi}.$$

Les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 étant manifestement **opposés**, ils dirigent la même droite \mathcal{D}' . Autrement dit le choix de la direction de \mathcal{D} détermine celle de \mathcal{D}' .

On établira de façon analogue que le choix de la direction de \mathcal{D}' détermine celle de \mathcal{D} .

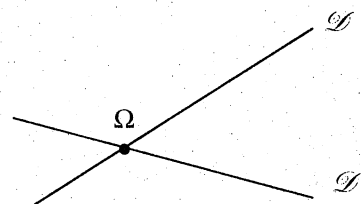
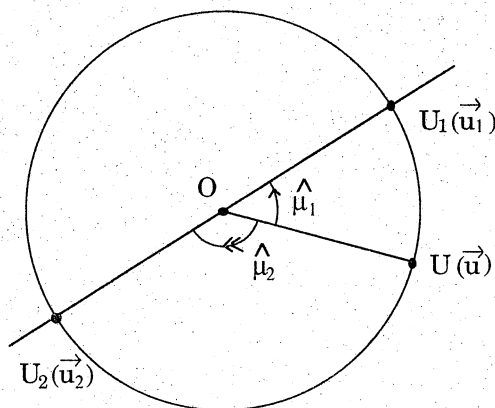


Fig. 28

Ainsi toute rotation de centre Ω et d'angle $\hat{\alpha}$ non nul donné est factorisable, d'une infinité de façons, en la composée de deux réflexions d'axes passant par Ω .

▲ Cas de la rotation $r_{\Omega, \hat{\alpha}}$

Le résultat précédent reste valable puisque, **pour toute droite \mathcal{D} passant par Ω** , on a : $r_{\Omega, \hat{\alpha}} = id_{\mathcal{D}} = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}'}$.

d) **Enoncé du résultat à retenir. Construction sur le "terrain"**

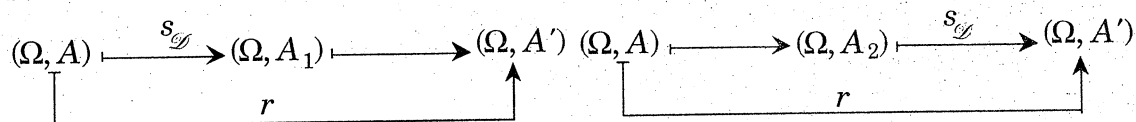
Théorème (5)

Toute rotation de centre Ω donné peut se factoriser, d'une infinité de façons, en la composée de deux réflexions dont les axes passent par Ω . Le choix de la direction d'un de ces axes détermine la direction de l'autre.

Soit r une rotation de centre Ω donné ; A un point de \mathcal{P} autre que Ω et A' son transformé par r (A et A' sont donnés sinon l'angle de la rotation est donné et on construit A' après avoir fixé le point A).

Soit \mathcal{D} une droite passant par Ω , A_1 et A_2 les transformés des points A et A' par la réflexion $s_{\mathcal{D}}$.

Ces différentes données peuvent se traduire par les schémas suivants :



Dans ce cas, on a : $r = s_{\mathcal{D}_1} \circ s_{\mathcal{D}}$
 si et seulement si $s_{\mathcal{D}_1}$ est la
 réflexion qui échange (ΩA_1) et
 $(\Omega A')$ d'où la construction de \mathcal{D}_1

Dans ce cas, on a : $r = s_{\mathcal{D}} \circ s_{\mathcal{D}_2}$
 si et seulement si, $s_{\mathcal{D}_2}$ est la
 réflexion qui échange (ΩA) et (ΩA_2)
 d'où la construction de \mathcal{D}_2

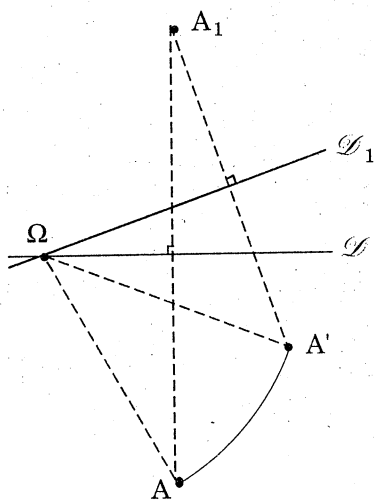


Fig. 29

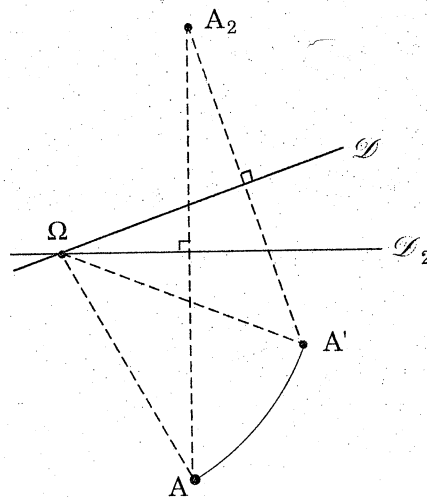


Fig. 30

4. Propriétés géométriques des rotations

a) Effet sur les figures élémentaires, sur les configurations usuelles.

On connaît l'effet d'une réflexion sur les figures élémentaires (droites, demi-droites, segments, cercles, ...) ; sur la distance, le parallélisme, l'orthogonalité, les barycentres, les contacts...

Les propriétés géométriques des rotations s'en déduisent immédiatement puisque l'on sait que toute rotation est factorisable en la composée de deux réflexions.

Ainsi une rotation transforme une droite en une droite, un segment en un segment, un cercle en un cercle,....

Elle conserve **la distance**, le parallélisme, l'orthogonalité, les barycentres, les contacts, les mesures des aires...

Une rotation transforme donc respectivement :

- un triangle isocèle, équilatéral, rectangle en un triangle isocèle, équilatéral, rectangle.
- un parallélogramme, un rectangle, un losange, un carré en un parallélogramme, un rectangle, un losange, un carré.

b) Effet sur un bipoint

Soit (A, B) un bipoint de \mathcal{P} ($A \neq B$) et (A', B') son transformé par **une** rotation d'angle $\hat{\alpha}$ agissant dans ce plan.

Notons Ω le centre de la rotation r considérée, M le point de \mathcal{P} défini par l'égalité $\overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{AB}$ et M' le transformé de M par r .

Nous avons alors,

- d'une part : $A'B' = AB$ car r conserve la distance (de deux points)
- d'autre part : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{\Omega M'}$ car le transformé par r du parallélogramme $\Omega A B M$ est le parallélogramme $\Omega A' B' M'$.

Il s'ensuit que :

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})} = \hat{\alpha}.$$

On peut donc énoncer le résultat suivant qu'il convient de retenir :

Théorème (6)

Toute rotation d'angle $\hat{\alpha}$ agissant dans \mathcal{P} transforme un bipoint (A, B) de ce plan ($A \neq B$) en le bipoint (A', B') tel que

$$A'B' = AB \text{ et } \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})} = \hat{\alpha}$$

On obtient ici la confirmation théorique d'un résultat intuitivement pressenti lors de la manipulation du paragraphe I.

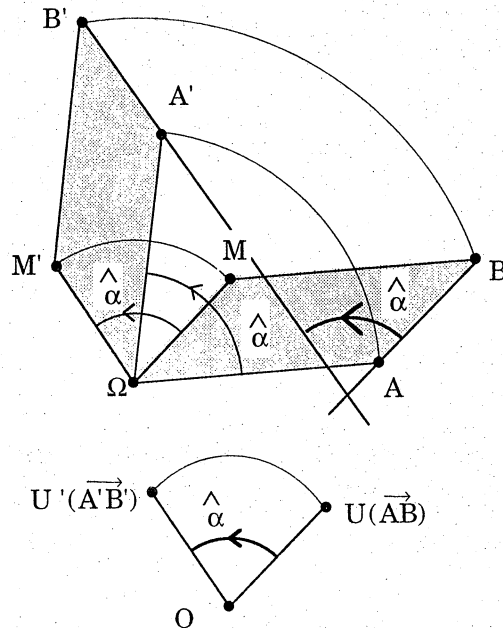


Fig. 31

d) Construction de la transformée d'une droite

On se propose de construire ci-après la transformée \mathcal{D}' d'une droite \mathcal{D} de \mathcal{P} par la rotation $r_{\Omega, A \mapsto A'}$ où Ω , A et A' sont des points donnés de \mathcal{P} .

1er cas: \mathcal{D} passe par Ω

Il est clair que Ω est un point de \mathcal{D}' . Reste donc à construire le transformé d'un autre point de \mathcal{D} par la rotation considérée.

On choisit ici l'un des points d'intersection de \mathcal{D} et du cercle centré en Ω et passant par A .

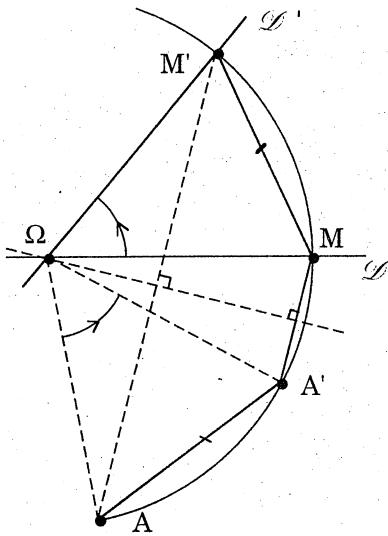


Fig. 32

2ème cas: \mathcal{D} ne passe pas par Ω

Soit H le projeté orthogonal de Ω sur \mathcal{D} . Le transformé H' de H par la rotation $r_{\Omega, A \mapsto A'}$ est un point de \mathcal{D}' .

La transformée de la droite (ΩH) par cette rotation est la droite $(\Omega H')$. La droite \mathcal{D}' est alors l'orthogonale en H' à la droite $(\Omega H')$ car on sait qu'une rotation conserve l'orthogonalité.

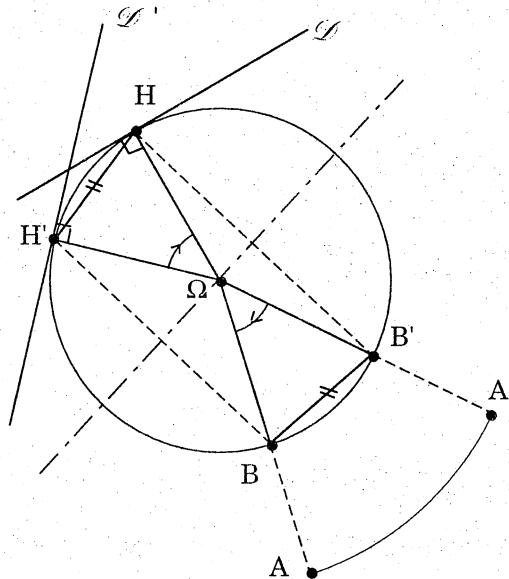


Fig 33

Remarque technique

Dans la figure 32 les cordes $[AA']$ et $[MM']$ ont la même longueur car elles se correspondent par réflexion. On imagine aisément comment faire usage du compas pour construire le point M' sans avoir à tracer l'axe de la réflexion qui échange les demi-droites $[\Omega M)$ et $[\Omega A')$.

La même remarque vaut pour la figure 33.

VII. Effet des transformations sur les angles

Dans chacun des alinéas suivants A , B et C sont des points de \mathcal{P} tels que B et C soient distincts de A . On note A' , B' et C' leurs transformés respectifs par la transformation qu'on y considère.

Notre objectif est de comparer l'angle $\widehat{(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})}$ à l'angle $\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}$

1. Effet d'une translation

On sait qu'une translation transforme un bipoint en un bipoint de même vecteur.

On a donc banalement :

$$\widehat{(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})} = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} \text{ car } \begin{cases} \vec{A'B'} = \vec{AB} \\ \vec{A'C'} = \vec{AC} \end{cases}$$

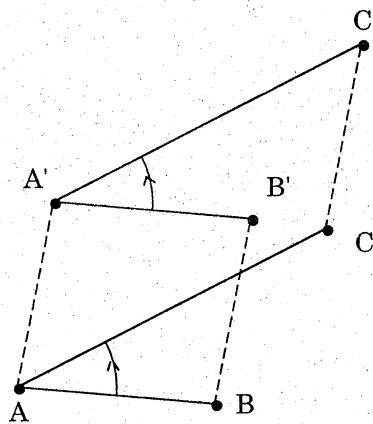


Fig. 34

On traduit ce résultat en disant que :

« les translations conservent les angles ».

2. Effet d'une homothétie

On sait que toute homothétie de rapport λ ($\lambda \in \mathbb{R}^*$) transforme un bipoint (P, Q) en un bipoint (P', Q') vérifiant l'égalité :

$$\vec{P'Q'} = \lambda \vec{PQ}.$$

Dès lors, si P et Q sont distincts, on est assuré que les vecteurs \vec{PQ} et $\vec{P'Q'}$ appartiennent soit à la même demi-droite vectorielle, soit à deux demi-droites vectorielles opposées suivant que l'homothétie considérée est, soit positive, soit négative.

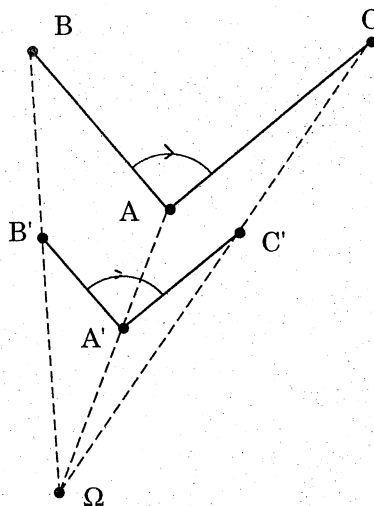


Fig. 35

En conséquence, l'égalité :

$$\widehat{(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})} = \widehat{(\vec{A'B'}, \vec{AB})} + \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} + \widehat{(\vec{AC}, \vec{A'C'})}$$

se réduit à : voir §(V-6)

$$\widehat{(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})} = \hat{\delta} + \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} + \hat{\delta} \text{ lorsque } \lambda > 0$$

$$\widehat{(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})} = \hat{\pi} + \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} + \hat{\pi} \text{ lorsque } \lambda < 0$$

et, dans les deux cas, on obtient :

$$\widehat{(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})} = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}$$

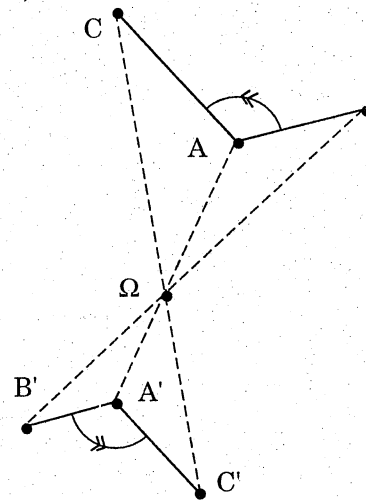


Fig. 36

On traduit ce résultat en disant que :

« **les homothéties conservent les angles** ».

3. Effet d'une rotation

On sait que toute rotation d'angle $\hat{\alpha}$ transforme un bipoint (P, Q) avec $P \neq Q$ en un bipoint (P', Q') vérifiant l'égalité $\widehat{(\vec{PQ}, \vec{P'Q'})} = \hat{\alpha}$.

En conséquence, l'égalité :

$$\widehat{(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})} = \widehat{(\vec{A'B'}, \vec{AB})} + \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} + \widehat{(\vec{AC}, \vec{A'C'})}$$

se réduit à :

$$\widehat{(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})} = -\hat{\alpha} + \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} + \hat{\alpha} = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}$$

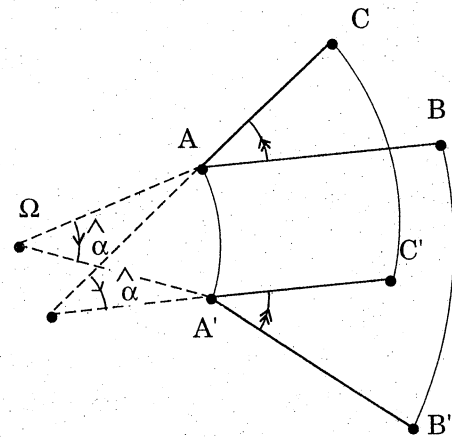


Fig 37

Le résultat obtenu étant indépendant de l'angle $\hat{\alpha}$ des rotations considérées, on peut donc énoncer les

« **rotations conservent les angles** ».

VIII. Exercices résolus

Exercice 1: Droites orthogonales et angles droits.

Montrer que deux droites (AB) et (CD) du plan \mathcal{P} sont orthogonales si, et seulement si, $\widehat{(\vec{AB}, \vec{CD})}$ est un angle droit.

Exercice étrange où il s'agit de faire le lien entre la notion d'orthogonalité du plan et la notion d'angle droit.

Solution

Posons :

$$\vec{u} = \vec{AB}, \vec{v} = \vec{CD}$$

et, dans le plan pointé \mathcal{P}_O , notons U' le transformé de U par la réflexion $s_{(OV)}$

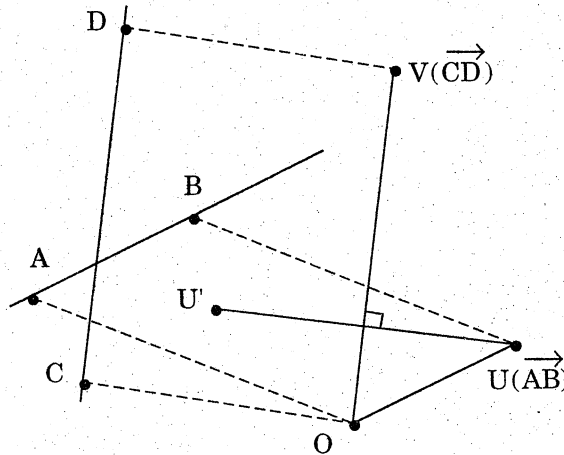
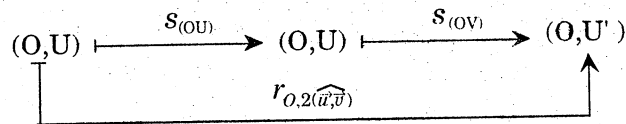


Fig. 40

Le schéma suivant montre que la rotation de centre O qui envoie U sur U' a pour angle $2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}$.



Cela dit,

• Si les droites (AB) et (CD) sont orthogonales alors les droites (OU) et (OV) le sont aussi.

On a donc : $U' = s_O(U) = r_{O, \hat{\pi}}(U)$

On en déduit :

$$2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{\pi}$$

c'est-à-dire : $2\widehat{(\vec{AB}, \vec{CD})} = \hat{\pi}$

égalité qui prouve que $\widehat{(\vec{AB}, \vec{CD})}$ est un des angles droits.

• Si $\widehat{(\vec{AB}, \vec{CD})}$ est un angle droit

alors $2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = 2\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} = \hat{\pi}$

On en déduit : $r_{O, 2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})}} = r_{O, \hat{\pi}} = s_O$

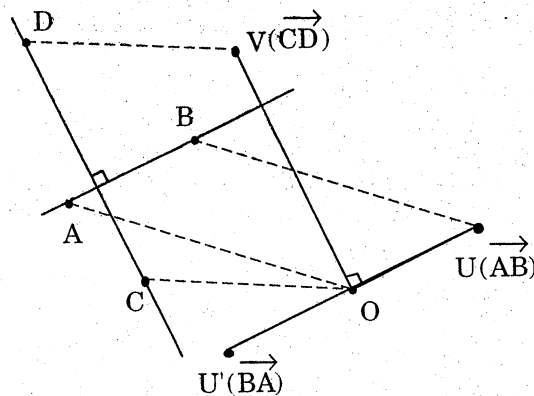


Fig. 41

Le point O est donc le milieu du segment $[UU']$ car $U' = s_O(U)$.

La droite (OV) , médiatrice du segment $[UU']$, étant orthogonale à la droite (UU') , l'est aussi à la droite (OU) .

Par suite, les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

• **Conclusion:** Le résultat attendu est établi.

Remarque.

Si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est **un** angle droit alors $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}) \stackrel{(*)}{=} (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + \hat{\pi}$ est l'autre angle droit. (*) Voir § (V.6).

Exercice 2: factorisations de rotations, angles

Soit, dans le plan \mathcal{P} , un triangle ABC isocèle en A ; H le milieu de $[BC]$, P et Q les symétriques de H par rapport aux droites (AB) et (AC) .

1. a) Donner quatre factorisations de la rotation $r_{A, B \mapsto C}$ en composée de deux réflexions dont les axes sont définis par des points donnés.

b) Exprimer les angles $(\widehat{BP, BH})$, $(\widehat{CH, CQ})$ et $(\widehat{HP, HQ})$ en fonction de $(\widehat{AB, AC})$.

2. a) Justifier que $AP=AQ$.

b) Donner trois factorisations de la rotation $r_{A, P \mapsto Q}$ en composée de deux réflexions dont les axes sont définis par des points donnés.

c) Comparer les angles $(\widehat{HP, HQ})$ et $(\widehat{AP, AQ})$

d) Montrer que les droites (PQ) et (BC) sont parallèles.

3. On note K et L les points où la droite (PQ) coupe les droites (AB) et (AC) .

a) Montrer que les quadrilatères $BPKH$ et $CQLH$ sont des losanges et que $r_{A, B \mapsto C}$ envoie K sur L .

b) En déduire que :

$$(\widehat{AB, AC}) = (\widehat{PB, PK}) = (\widehat{HK, HB}) = (\widehat{HC, HL}) = (\widehat{QL, QC})$$

Solution

Il est clair que (AH) est la médiatrice de $[BC]$.

1. a) La composée $s_{(AH)} \circ s_{(AB)}$ est une rotation qui fixe le point A et envoie B sur C .

Donc : $s_{(AH)} \circ s_{(AB)} = r_{A, B \mapsto C}$

Il en est de même de la composée

$$s_{(AC)} \circ s_{(AH)}$$

La composée $s_{(AB)} \circ s_{(AP)}$ est une rotation qui fixe A et envoie P sur H , tout comme la rotation $s_{(AH)} \circ s_{(AB)}$.

On a donc :

$$s_{(AB)} \circ s_{(AP)} = s_{(AH)} \circ s_{(AB)} = r_{A, B \mapsto C}$$

La composée $s_{(AQ)} \circ s_{(AC)}$ est une rotation qui fixe A et envoie H sur Q , tout comme la rotation $s_{(AC)} \circ s_{(AH)}$.

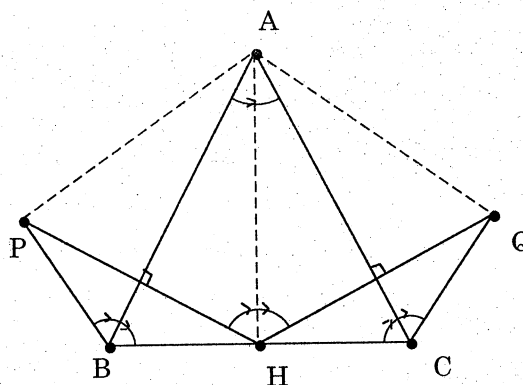


Fig. 42

On a donc : $s_{(AQ)} \circ s_{(AC)} = s_{(AC)} \circ s_{(AH)} = r_{A, B \mapsto C}$
 Ainsi la rotation $r_{A, B \mapsto C}$ envoie P sur H et H sur Q .

b) Les schémas suivants indiquent l'action de la rotation $r_{A, B \mapsto C}$ sur les bipoints (B, P) ; (B, H) et (H, P)

$$(B, P) \xrightarrow{\quad} (C, H); (B, H) \xrightarrow{\quad} (C, Q); (H, P) \xrightarrow{\quad} (Q, H)$$

Connaissant l'effet d'une rotation sur un bipoint, on a donc:

$$\widehat{(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CH})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}, \widehat{(\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CQ})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \text{ et } \widehat{(\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{QH})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \text{ cf Th (6)}$$

Compte tenu de ce que :

$$\overrightarrow{BH} = -\overrightarrow{CH}; \overrightarrow{CH} = -\overrightarrow{BH} \text{ et } \overrightarrow{HQ} = -\overrightarrow{QH},$$

il vient $\widehat{(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BH})} = \widehat{(\overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CQ})} = \widehat{(\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{HQ})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \hat{\pi}$ voir § (V.6)

2.a) La rotation $r_{A, B \mapsto C}$ transforme le segment $[AP]$ en le segment $[AH]$ et ce dernier en le segment $[AQ]$.

On a donc : $AP = AH = AQ$ car une rotation conserve les distances.

b) La composée $s_{(AC)} \circ s_{(AB)}$ est une rotation qui fixe A et envoie P sur Q .

Donc: $s_{(AC)} \circ s_{(AB)} = r_{A, P \mapsto Q}$ (e)

La rotation $r_{A, B \mapsto C}$ transforme

(A, P) en (A, H) et (A, H) en (A, Q)

On a donc:

$$\widehat{(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AH})} = \widehat{(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AQ})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$$

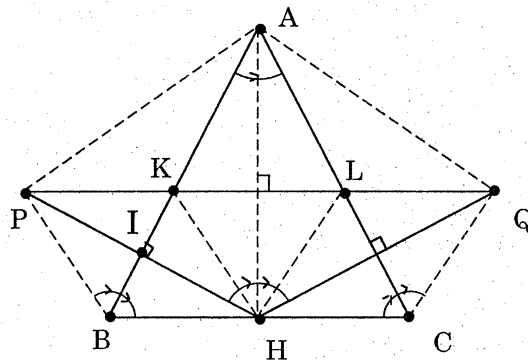


Fig. 43

On en déduit, d'après (e):

$$\begin{aligned} \bullet s_{(AH)} \circ s_{(AP)} &= r_{A, 2(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AH})} = r_{A, 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} \\ &= s_{(AC)} \circ s_{(AB)} = r_{A, P \mapsto Q} \end{aligned}$$

$$\bullet s_{(AQ)} \circ s_{(AH)} = r_{A, 2(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AQ})} = r_{A, 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = r_{A, P \mapsto Q}$$

Ainsi: $r_{A, P \mapsto Q} = s_{(AC)} \circ s_{(AB)} = s_{(AH)} \circ s_{(AP)} = s_{(AQ)} \circ s_{(AH)}$

e) De l'égalité $r_{A, P \mapsto Q} = r_{A, 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$, on tire: $\widehat{(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ})} = 2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$

Par ailleurs, on a établi -voir (1-b)- que $\widehat{(\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{HQ})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \hat{\pi}$.

On en déduit: $2\widehat{(\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{HQ})} = 2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + 2\hat{\pi} = 2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ car $2\hat{\pi} = \hat{\delta}$.

Par suite, il vient: $\widehat{(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ})} = 2\widehat{(\overrightarrow{HP}, \overrightarrow{HQ})}$

d) La rotation $r_{A, B \mapsto C}$ transforme (P, H) en (H, Q) .

On a donc $PH = HQ$ car une rotation conserve les distances.

En outre, on a établi que $AP = AQ$ (voir 2-a).

Les points A et H sont donc équidistants des points P et Q . La droite (AH) est donc la médiatrice des segments $[PQ]$ et $[BC]$. Il s'ensuit que les droites (PQ) et (BC) sont orthogonales à (AH) . Elles sont donc parallèles.

3.a) Désignons par I le milieu du segment $[HP]$. Le point $s_I(B)$ appartient aux droites $s_I(AB)$ et $s_I(BC)$, c'est-à-dire aux droites (AB) et (PQ) car $s_I(BC)$ est la parallèle à (BC) passant par le point $s_I(H)$ soit P .

Donc: $s_I(B) = K$. Par suite les diagonales du quadrilatère $BPKH$ ont le même milieu et sont orthogonales. Ce quadrilatère est donc un losange.

Le point $s_{(AH)}(K)$ appartient aux droites $s_{(AH)}(PQ)$ et $s_{(AH)}(AB)$ c'est-à-dire aux droites (PQ) et (AC) . Donc $s_{(AH)}(K) = L$.

Le schéma $(B, P, K, H) \xrightarrow{s_{(AH)}} (C, Q, L, H)$ prouve que $(CQLH)$ est un losange.

Le schéma: $K \xrightarrow{s_{(AB)}} K \xrightarrow{s_{(AH)}} L$ prouve que la rotation $r_{A, B \mapsto C}$ envoie K sur L car $r_{A, B \mapsto C} = s_{(AH)} \circ s_{(AB)}$ -voir 1-a-

b) Le schéma:

$$(P, B) \xrightarrow{r_{A, B \mapsto C}} (H, C)$$

justifie l'égalité:

$$\widehat{(PB, HC)} = \widehat{(AB, AC)}.$$

De plus, il est clair que:

$$\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{PK}.$$

Il en découle banalement:

$$\widehat{(PB, PK)} = \widehat{(AB, AC)}.$$

Les rotations conservant les angles, il vient alors:

$$\widehat{(PB, PK)} = \widehat{(HK, HB)} \quad \text{effet de } r_{I, \hat{\pi}}$$

$$\widehat{(PB, PK)} = \widehat{(HC, HL)} \quad \text{effet de } r_{A, B \mapsto C}$$

$$\widehat{(HK, HB)} = \widehat{(QL, QC)}$$

Ainsi:

$$\widehat{(AB, AC)} = \widehat{(PB, PK)} = \widehat{(HK, HB)} = \widehat{(HC, HL)} = \widehat{(QL, QC)}.$$

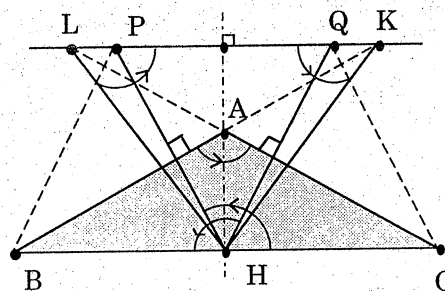


Fig. 44

Remarque:

Dans la question 3-a, on peut être tenté de montrer, au vu de la figure 43, que la rotation $r_{A, B \mapsto C}$ envoie K sur L en argumentant ainsi: le transformé de K par cette rotation **est le point du segment $[AC]$** dont la distance à A est égale à AK . Le parallélisme des droites (PQ) et (BC) permet alors de répondre que ce point est L .

Or, cette démonstration est inacceptable car elle s'appuie sur un cas de figure. Pour s'en convaincre, il suffit d'observer la figure 44.

Exercice 3: Segments de même mesure (de même longueur).

Dans le plan \mathcal{P} sont donnés un triangle ABC et une droite Δ passant par A .

Les points D et E satisfont aux conditions suivantes:

$$\begin{cases} D \text{ appartient à } \Delta \text{ et } AD=AB \\ AE=AC \text{ et } \widehat{(AC,AE)} = \widehat{(AD,AB)} \end{cases}$$

1- Construire les points D et E .

2- Montrer que les segments $[DC]$ et $[BE]$ ont même mesure.

Solution.

1) **Construction des points D et E .**

- Le point D est un des deux points d'intersection de la droite Δ et du cercle centré en A et passant par B .
- Le point E appartient alors

□ au cercle centré en A et passant par C .

□ à la transformée de la demi-droite $[AD)$ par la réflexion $s_{[AB] \leftrightarrow [AC]}$

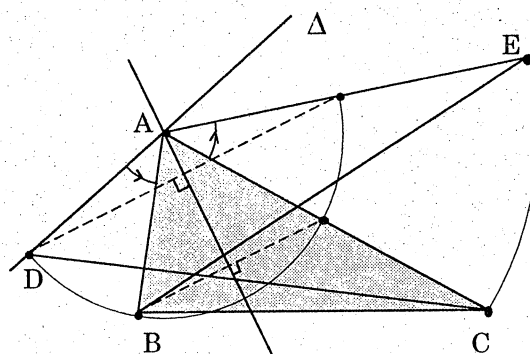


Fig. 45

On peut illustrer la configuration à étudier de deux façons différentes puisqu'il existe deux points D vérifiant la condition imposée. -voir figures 45 et 46-

2. La rotation de centre A qui envoie D sur B transforme C en E car on a:

$$AC=AE \text{ et } \widehat{(AC,AE)} = \widehat{(AD,AB)}.$$

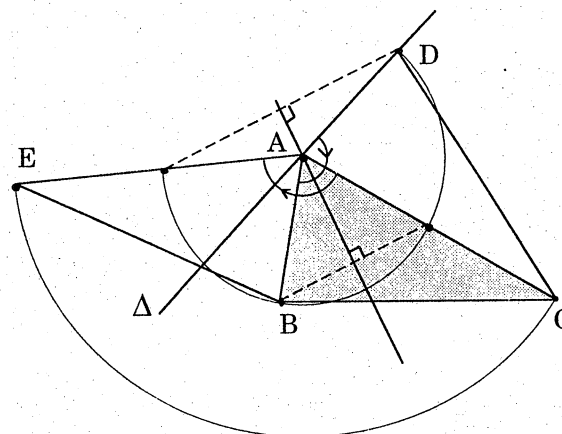


Fig. 46

Cette rotation transforme donc le segment $[DC]$ en le segment $[BE]$. Il s'ensuit que $DC=BE$ car une rotation conserve les distances.

Exercice 4: parallélisme, orthogonalité de droites, alignement de points.

Dans le plan \mathcal{P} , on note Ω le centre d'un carré $ABCD$ donné.

Soit M un point de la droite (AC) , E et F ses projetés orthogonaux sur les droites (AB) et (BC) .

1) On pose: $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$ ($x \in \mathbb{R}$). Montrer que les points E et F sont respectivement les barycentres de

$$\frac{A}{1-x} \mid \frac{B}{x} \quad \text{et} \quad \frac{B}{1-x} \mid \frac{C}{x}$$

2) a) Montrer que le triangle ΩFE est rectangle et isocèle en Ω .

b) En déduire que les droites (DM) et (EF) sont orthogonales

3) Montrer que les droites (AF) et (CE) sont sécantes et que leur point commun H appartient à la droite (DM) .

Solution.

1) De $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$

$$\text{on tire: } \overrightarrow{MA} + x(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) = \vec{0}$$

$$\text{soit } (1-x)\overrightarrow{MA} + x\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

égalité qui montre que:

$$M \text{ est le barycentre de } \frac{A}{1-x} \mid \frac{C}{x}$$

Les projections conservant les barycentres, on en déduit que:

$$E \text{ est le barycentre de } \frac{A}{1-x} \mid \frac{B}{x}$$

$$F \text{ est le barycentre de } \frac{B}{1-x} \mid \frac{C}{x}$$

2) a) Il est clair que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega A = \Omega B = \Omega C \\ \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})} \text{ est un angle droit car } (\Omega A) \perp (\Omega B) \\ \widehat{(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C})} = -\widehat{(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A})} \text{ effet de } s_{(BD)} \\ \qquad \qquad \qquad = \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})} \end{array} \right.$$

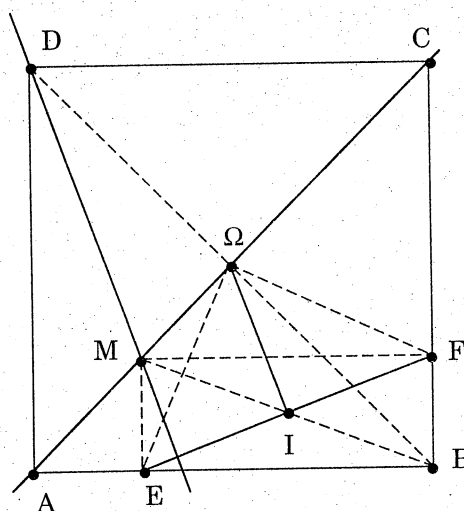


Fig. 47

La rotation de centre Ω qui envoie A sur B transforme donc B en C et par

conséquent le barycentre de $\frac{A}{1-x} \mid \frac{B}{x}$

en le barycentre de $\frac{B}{1-x} \mid \frac{C}{x}$
(conservation des barycentres)

Donc $r_{\Omega, A \mapsto B}$ envoie E sur F

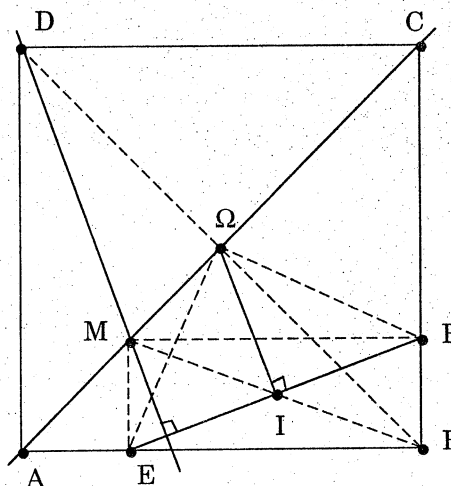


Fig. 48

Il vient alors: $\begin{cases} \Omega E = \Omega F \\ (\widehat{\Omega E, \Omega F}) = (\widehat{\Omega A, \Omega B}) \end{cases}$

égalités qui prouvent que le **triangle EOF est rectangle isocèle en Omega**.

b) Désignons par I le centre du rectangle $EMFB$. Les points I et Ω étant équidistants de E et F , la droite (ΩI) est la médiatrice du segment $[EF]$. L'homothétie de centre B et de rapport 2 transforme cette droite en la droite (DM) qui, de ce fait, est parallèle à (ΩI) . Dès lors, la droite (EF) qui est orthogonale à (ΩI) est aussi orthogonale à (DM)

3. Nous avons:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega D = \Omega A \\ (\widehat{\Omega D, \Omega A}) = -(\widehat{\Omega B, \Omega A}) \text{ effet de } s_{(AC)} \\ \quad \quad \quad = (\widehat{\Omega A, \Omega B}) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega C = \Omega D \\ (\widehat{\Omega C, \Omega D}) = (\widehat{\Omega A, \Omega B}) \text{ effet de } s_{\Omega} \end{array} \right.$$

Par suite, la rotation $r_{\Omega, A \mapsto B}$ transforme les points D et C en les points A et D .

Du schéma:

$$\left. \begin{array}{l} (D, E) \\ (E, C) \end{array} \right\} \xrightarrow{r_{\Omega, A \mapsto B}} \left\{ \begin{array}{l} (A, F) \\ (F, D) \end{array} \right.$$

On déduit: $\begin{cases} (\widehat{DE, AF}) = (\widehat{\Omega A, \Omega B}) \\ (\widehat{EC, FD}) = (\widehat{\Omega A, \Omega B}) \end{cases}$

en effet de $r_{\Omega, A \mapsto B}$

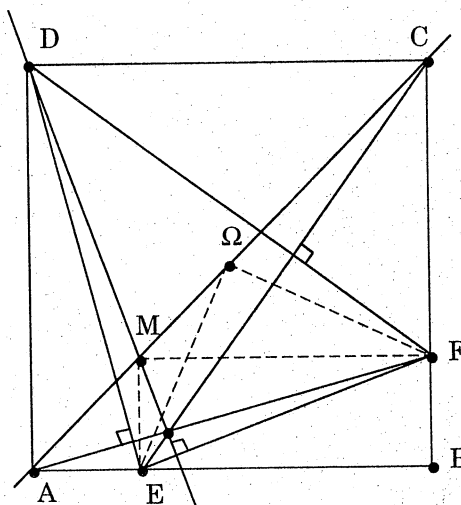


Fig. 49

Comme $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ est **un** angle droit, on est en mesure d'affirmer que les droites (DE) et (AF) ainsi que les droites (EC) et (FD) sont orthogonales. Les droites (AF) et (EC) sont ainsi des hauteurs du triangle DEF . Ces droites sont donc sécantes et leur point commun H est l'orthocentre du triangle DEF .

Cela dit, dans la question 1-b, nous avons établi que les droites (DM) et (EF) sont orthogonales. La droite (DM) est donc une hauteur du triangle ADE et par conséquent elle passe par l'orthocentre H de ce triangle. En d'autres termes: le point H appartient à la droite (DM) .

ANNEXE

Etude de la transitivité de la relation: «avoir même angle».

Exposé du problème

Il s'agit d'établir que, dans l'ensemble des couples de vecteurs non nuls de \mathcal{F} ,

Si $\left\{ \begin{array}{l} (\vec{u}, \vec{u}') \text{ a même angle que } (\vec{v}, \vec{v}') \\ \text{et} \\ (\vec{v}, \vec{v}') \text{ a même angle que } (\vec{w}, \vec{w}') \end{array} \right.$

alors $(\vec{u}, \vec{u}') \text{ a même angle que } (\vec{w}, \vec{w}')$

En se conformant aux notations de la figure ci-contre cela revient à établir que la **proposition (H)**:

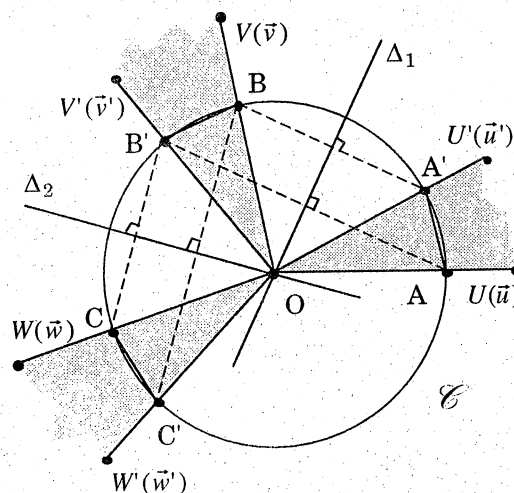


Fig 50

il existe une réflexion s_1 et une réflexion s_2 telles que:

$$(O, A, A') \xleftrightarrow{s_1} (O, B', B) \xleftrightarrow{s_2} (O, C, C')$$

entraîne la **proposition (K)**:

$$[\text{il existe une réflexion } s_3 \text{ telle que } (O, A, A') \xleftrightarrow{s_3} (O, C', C)]$$

Démonstration.

De la proposition (H) on déduit qu'il existe une réflexion s_3 telle que:

$$\left| \begin{array}{l} (O, A, A') \xleftrightarrow{s_3} (O, C', C) \text{ proposition (K)} \\ \text{ou} \\ (O, A, A') \xleftrightarrow{s_3} (O, C, C') \text{ proposition (K')} \end{array} \right.$$

car, les réflexions s_1 et s_2 conservant les distances, les cordes $[AA']$ et $[CC']$ du cercle \mathcal{C} ont même mesure.

Cela dit, l'hypothèse **(H)** étant satisfaite,

- Soit on a « **(H)** et **(K)** ».

Dans ce cas il est clair que **(K)** est vérifiée

- Soit on a « **(H)** et **(K')** »

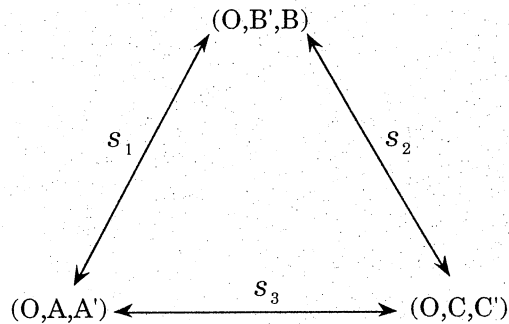


Fig. 51

autrement dit, il existe des réflexions s_1, s_2 et s_3 vérifiant le schéma ci-contre. Dans ce cas, deux éventualités et deux seulement peuvent se produire, à savoir:

▲ **Les points A, B', C d'une part et les points A', B, C' d'autre part sont non alignés (*e*)**

Les triangles $AB'C$ et $A'BC'$ ont alors leurs côtés homologues parallèles.

Par suite, il existe une transformation f (translation ou homothétie) qui envoie (A, B', C) sur (A', B, C') . Observons alors que f laisse le cercle \mathcal{C} circonscrit à ces deux triangles globalement invariant.

Donc f ne peut être que soit $id_{\mathcal{C}}$, soit la symétrie de centre O .

On en déduit la proposition notée **(K'')**:

« **les cordes $[AA']$, $[BB']$ et $[CC']$ du cercle \mathcal{C} ont pour mesure soit zéro, soit $2R$** » où R désigne le rayon de \mathcal{C} .

▲ **Les points A, B', C ou les points A', B, C' sont alignés (*non e*)**

Sachant que ces points sont cocycliques, l'une au moins des situations suivantes est réalisée:

1°) **$A = B'$ ou $A' = B$**

Dans ce cas, on a:

$s_2 = s_3$ car s_2 et s_3 ont même action sur O et C ou sur O et C'

| Lorsque $A = B'$ on obtient $A' = B$ car $A' = s_3 \circ s_2(B)$ et $s_3 \circ s_2 = id_{\mathcal{C}}$
 | Lorsque $A' = B$ on obtient $A = B'$ car $A = s_3 \circ s_2(B')$ et $s_3 \circ s_2 = id_{\mathcal{C}}$

Ces résultats conduisent au schéma:

$$(O, A, A') \xleftarrow{s_1} (O, A, A')$$

et par conséquent à la proposition **(K''')** énoncée ci-dessus.

2°) $B' = C$ ou $B = C'$

Dans ce cas, on a: $s_3 = s_1$ car s_3 et s_1 ont même action sur O et A ou sur O et A' (voir schéma ci-dessus).

Lorsque $B' = C$ on obtient $B = C'$ car $B = s_1 \circ s_3(C')$ et $s_1 \circ s_3 = id_{\mathcal{P}}$
 Lorsque $B = C'$ on obtient $B' = C$ car $B' = s_1 \circ s_3(C)$ et $s_1 \circ s_3 = id_{\mathcal{P}}$

Ces résultats conduisent au schéma:

$(O, B', B) \xleftarrow{s_2} (O, B', B)$ et par conséquent à la proposition (K'').

3°) $C = A$ ou $C' = A'$

Dans ce cas, on a: $s_1 = s_2$ car s_1 et s_2 ont même action sur O et B' ou sur O et B (voir schéma ci-dessus).

Lorsque $C = A$ on obtient $C' = A'$ car $C' = s_2 \circ s_1(A')$ et $s_2 \circ s_1 = id_{\mathcal{P}}$
 Lorsque $C' = A'$ on obtient $C = A$ car $C = s_2 \circ s_1(C)$ et $s_2 \circ s_1 = id_{\mathcal{P}}$

Ces résultats conduisent au schéma:

$(O, C, C') \xleftarrow{s_3} (O, C, C')$ et par conséquent à la proposition (K'').

Ceci dit il est clair que (K'') entraîne (K), voir figures 52.

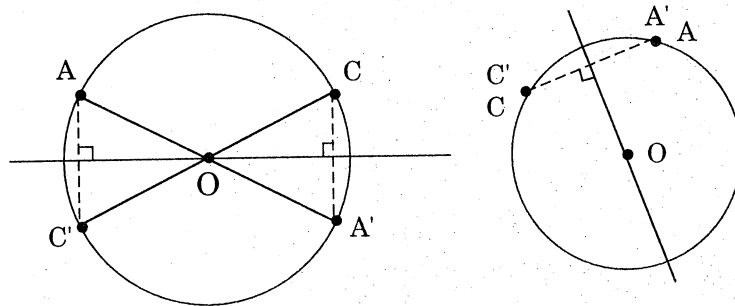


Fig. 52

Conclusion.

On vient d'établir que: $\{[(H) \text{ et } (K)] \text{ implique } (K)\}$ et $\{[(H) \text{ et } (K')] \text{ implique } (K)\}$ ce qui se résume par: $(H) \text{ implique } (K)$.

PARTIE B

UTILISATION DES ANGLES ET DES DOUBLES D'ANGLES

Les notations utilisées dans ce chapitre sont celles du chapitre précédent. Les vecteurs mis en oeuvre, sauf mention contraire, sont tous non nuls.

I. Traduction angulaire de la colinéarité, de l'orthogonalité

1. Colinéarité

a) Première traduction

Dans le chapitre précédent, nous avons établi que, étant donnés deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} ,

- d'une part que:

ils appartiennent à la même demi-droite vectorielle

si et seulement si $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{o}$

ils appartiennent à deux demi-droites vectorielles opposées

si et seulement si $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{\pi}$

- d'autre part que:

$$2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{o} \iff [\text{soit } \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{o}, \text{ soit } \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{\pi}].$$

On en déduit:

$$\begin{aligned} \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires} &\iff [\text{soit } \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{o}, \text{ soit } \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{\pi}] \\ &\iff 2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{o}. \end{aligned}$$

On retiendra le résultat suivant:

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} de \mathcal{F} sont colinéaires si, et seulement si,
 $2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{o}$.

b) Deuxième traduction

Pour traduire la colinéarité de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on peut faire intervenir un vecteur "auxiliaire" \vec{x} non nul. Alors:

$$\bullet 2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{o} \iff 2\widehat{(\vec{x}, \vec{v})} - 2\widehat{(\vec{x}, \vec{u})} = \hat{o} \iff 2\widehat{(\vec{x}, \vec{u})} = 2\widehat{(\vec{x}, \vec{v})}$$

$$\bullet 2\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{o} \iff 2\widehat{(\vec{u}, \vec{x})} + 2\widehat{(\vec{x}, \vec{v})} = \hat{o} \iff 2\widehat{(\vec{u}, \vec{x})} = 2\widehat{(\vec{v}, \vec{x})}$$

On peut donner deux versions de ce résultat:

▲ Si deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires alors, pour tout vecteur \vec{x} non nul, on a:

$$2(\widehat{\vec{x}, \vec{u}}) = 2(\widehat{\vec{x}, \vec{v}}) \text{ et } 2(\widehat{\vec{u}, \vec{x}}) = 2(\widehat{\vec{v}, \vec{x}})$$

▲ Si, étant donné deux vecteurs non nul \vec{u} et \vec{v} , il existe un vecteur \vec{x} non nul tel que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \text{ Soit } 2(\widehat{\vec{x}, \vec{u}}) = 2(\widehat{\vec{x}, \vec{v}}) \\ \bullet \text{ Soit } 2(\widehat{\vec{u}, \vec{x}}) = 2(\widehat{\vec{v}, \vec{x}}) \end{array} \right. \text{ alors les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$$

Elles conduisent aux deux interprétations suivantes:

▲ **Première version: Configuration des angles ayant même double.**

Dans les figures ci-dessous, les **trois** points A, B, C sont alignés et le point D n'appartient pas à la droite (BC) . Les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont donc colinéaires et le vecteur \vec{AD} joue ici le rôle d'un vecteur auxiliaire non nul. On a alors:

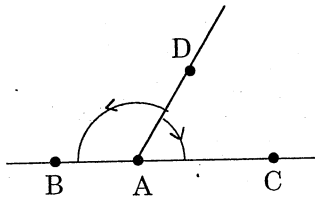


Fig. 53

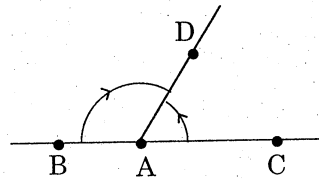


Fig. 54

$$2(\widehat{\vec{AD}, \vec{AB}}) = 2(\widehat{\vec{AD}, \vec{AC}}) \quad \text{et} \quad 2(\widehat{\vec{AB}, \vec{AD}}) = 2(\widehat{\vec{AC}, \vec{AD}})$$

Les angles signifiés sur **chacun** de ces deux dessins ont donc le même double.

▲ **Deuxième version: alignement de points.**

Etablir que **trois** points A, B, C d'une figure sont alignés revient à montrer, par exemple, que les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires.

Il suffit alors de choisir un point D de la figure **n'appartenant pas aux droites (AB) et (AC)** et de prouver:

$$\text{soit que } 2(\widehat{\vec{AD}, \vec{AB}}) = 2(\widehat{\vec{AD}, \vec{AC}}), \text{ soit que } 2(\widehat{\vec{AB}, \vec{AD}}) = 2(\widehat{\vec{AC}, \vec{AD}}).$$

c) Corollaire

Quels que soient les vecteurs non nuls \vec{u} , \vec{v} , \vec{x} et \vec{y}

Si $\begin{cases} \vec{x} \text{ est colinéaire à } \vec{u} \\ \vec{y} \text{ est colinéaire à } \vec{v} \end{cases}$ alors $2(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = 2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$

Sous l'hypothèse précédente, on a: $2(\widehat{\vec{x}, \vec{u}}) = \hat{o} = 2(\widehat{\vec{y}, \vec{v}})$

On en déduit: $2(\widehat{\vec{x}, \vec{u}}) + 2(\widehat{\vec{u}, \vec{y}}) = 2(\widehat{\vec{u}, \vec{y}}) + 2(\widehat{\vec{y}, \vec{v}})$

c'est-à-dire: $2(\widehat{\vec{x}, \vec{y}}) = 2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$.

Commentaire

Lorsqu'on manipule des **doubles d'angle**, on peut remplacer n'importe quel vecteur qui entre dans leur libellé par un vecteur non nul qui lui est colinéaire. Cette façon de procéder sera par la suite fréquemment utilisée.

▲ **Parallélisme de droites**

Etablir que deux droites (AB) et (CD) d'un plan \mathcal{P} sont parallèles revient à montrer que les vecteurs \vec{AB} et \vec{CD} du plan \mathcal{P} sont colinéaires.

Pour cela, on peut par exemple faire

intervenir le vecteur \vec{AC} et vérifier que:

$$2(\widehat{\vec{AC}, \vec{AB}}) = 2(\widehat{\vec{AC}, \vec{CD}})$$

Il s'avère ici que la plupart des élèves sont embarrassés pour signifier sur la figure l'angle $(\widehat{\vec{AC}, \vec{CD}})$ du fait que les bipoints (A, C) et (C, D) n'ont pas le même premier point.

En s'appuyant sur le corollaire précédent, après avoir évoqué la banale colinéarité des

vecteurs \vec{AC} et \vec{CA} , on peut écrire que:

$$2(\widehat{\vec{AC}, \vec{CD}}) = 2(\widehat{\vec{CA}, \vec{CD}})$$

égalité qui leur permet de franchir l'obstacle.

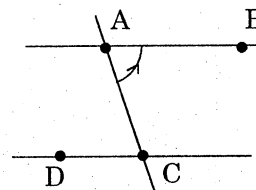


Fig. 55

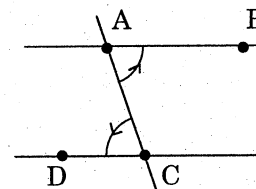


Fig. 56

Toutefois, il ne faut pas en rester là. En se référant à la configuration des angles ayant le même double, on arrive à la conclusion:

- Si des droites sont parallèles alors tous les angles signifiés sur la figure ci-contre ont le même double.
- **Réciproquement**, pour établir que deux droites sont parallèles, **il suffit** de montrer

que deux de ces angles, $\hat{\alpha}_i$ et $\hat{\beta}_i$ ont le même double.

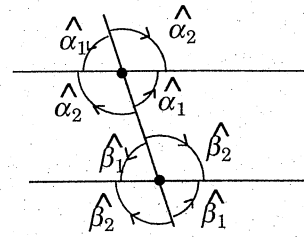


Fig. 57

Commentaire

Dès lors qu'on utilise des doubles d'angle, la terminologie mise en place pour les angles dits "géométriques": «angles supplémentaires, angles opposés par le sommet, angles correspondants, angles alternes-externes...» s'avère totalement périmée.

Note du rédacteur

A mon grand étonnement, les premiers élèves qui ont eu droit à cette présentation n'ont pas fait référence à la terminologie précitée. Dans cette situation, ils m'ont avoué reconnaître que deux angles ont même double « lorsqu'ils se rentrent dedans ou bien lorsqu'ils se tournent le dos ».

Depuis cette agréable surprise, il va de soi que chaque année je perpétue la vision originale de cette affaire devant mes nouveaux élèves, en leur précisant que ce sont leurs prédécesseurs qui me l'ont gentiment suggérée.

2. Orthogonalité.

Rappelons que deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} de $\vec{\mathcal{P}}$ sont dits orthogonaux pour signifier que, dans le plan pointé \mathcal{P}_O , les droites (OU) et (OV) sont orthogonales. Ce qui équivaut à dire que la droite (OV) est médiatrice du segment $[UU']$ où U' est le symétrique de U par rapport à O .

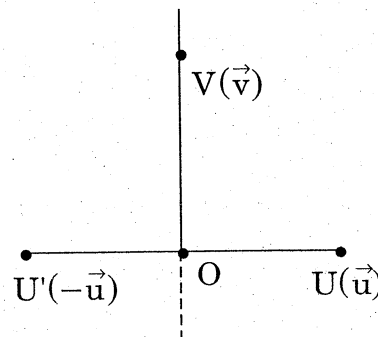


Fig. 58

Ainsi:

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} &\Leftrightarrow U \xrightarrow{S_{(OV)}} U \\
 &\Leftrightarrow U \xrightarrow{S_{(OU)}} U \xrightarrow{S_{(OV)}} U \\
 &\Leftrightarrow U \xrightarrow{r_{O, 2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})}} U \\
 &\Leftrightarrow 2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = (\widehat{\vec{u}, -\vec{u}}) = \hat{\pi}
 \end{aligned}$$

On retiendra le résultat suivant:

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} de $\vec{\mathcal{P}}$ sont orthogonaux
 si, et seulement si: $2(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \hat{\pi}$

Pour signifier que deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} de $\vec{\mathcal{P}}$ sont orthogonaux on pourra indifféremment employer l'une ou l'autre des notations: $\vec{u} \perp \vec{v}$ ou $\vec{v} \perp \vec{u}$.

Remarque

Il découle du résultat précédent que, **pour des vecteurs non nuls**,

$$\begin{aligned}
 \vec{u} \perp \vec{v} &\iff (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \text{ est } \mathbf{une} \text{ des deux moitiés de l'angle plat} \\
 &\iff (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \text{ est } \mathbf{un} \text{ des deux angles droits.}
 \end{aligned}$$

Comme $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = -(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})$ et que les deux angles droits sont opposés, on peut donc affirmer que $(\widehat{\vec{v}, \vec{u}})$ est l'autre angle droit.

Commentaire.

Etablir que deux droites du plan \mathcal{P} sont orthogonales revient à montrer qu'un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

Il apparaît donc que "**l'outil angulaire**" pour traiter les problèmes d'alignement, de parallélisme, d'orthogonalité dans \mathcal{P} est le double d'angle.

II. Bissectrices: caractérisation angulaire

1. Bissectrice de deux demi-droites de même origine

a) Définition (Rappel)

Dans le plan \mathcal{P} , on appelle **bissectrice de deux demi-droites de même origine** l'axe de la réflexion qui échange ces demi-droites

b) Caractérisation angulaire.

Soit \mathcal{B} la bissectrice de deux demi-droites $[\Omega A)$ et $[\Omega B)$ données du plan \mathcal{P} et M un point de ce plan. Alors:

$$M \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\} \iff \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega B})}$$

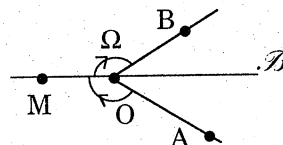


Fig. 59

Démonstration.

En pointant le plan \mathcal{P} en Ω , on a:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\} &\iff [\Omega A) \xrightarrow{s_{[\Omega M] \leftrightarrow [\Omega B)}} [\Omega B) \\ &\iff \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega B})} \end{aligned}$$

c) Remarque

Les notations précédentes étant conservées, on vérifie facilement que:

$$M \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\} \iff 2\widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})} \iff 2\widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega B})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})}$$

d) Point de méthode

Pour établir que la droite (ΩM) est la bissectrice de deux demi-droites $[\Omega A)$ et $[\Omega B)$ données de \mathcal{P} , on peut envisager de faire intervenir un vecteur "auxiliaire" \vec{x} non nul de \mathcal{P} . On obtient ainsi un résultat analogue à celui concernant le milieu d'un segment.

Si, pour un vecteur non nul de $\vec{\mathcal{P}}$, on a: $2(\widehat{x, \Omega M}) = (\widehat{x, \Omega A}) + (\widehat{x, \Omega B})$
 alors (ΩM) est la bissectrice des demi-droites $[\Omega A)$ et $[\Omega B)$.

En effet, on a sous cette hypothèse:

$$(\widehat{x, \Omega M}) - (\widehat{x, \Omega A}) = (\widehat{x, \Omega B}) - (\widehat{x, \Omega M})$$

$$\text{c'est-à-dire: } (\widehat{\Omega A, \Omega M}) = (\widehat{\Omega M, \Omega B})$$

Commentaire.

Pour désigner la bissectrice de deux demi-droites de même origine, on utilise **traditionnellement** la locution «bissectrice d'un angle». Il y a là ambiguïté que nous allons essayer de lever car on ne sait pas s'il s'agit d'un angle "**orienté**" (angle d'un **couple** de vecteurs non nuls de $\vec{\mathcal{P}}$) ou d'un angle "**géométrique**" (angle d'une **paire** de demi-droites de \mathcal{P}).

Remarque: On dit que les paires $\{[AB), [AC)\}$ et $\{[A'B'), [A'C')\}$ de demi-droites de \mathcal{P} ont le même angle "**géométrique**" pour signifier qu'elles sont superposables, autrement dit qu'il existe une isométrie qui transforme l'une de ces paires dans l'autre.

Étudions ce problème sur un exemple.

Les trois points A' , B' et C' de la figure ci-contre sont les transformés des points A, B et C par translation.

On a donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\widehat{AB, AC}) = (\widehat{A'B', A'C'}) \text{ 1ère version} \\ \text{et} \\ \widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \text{ 2ème version} \end{array} \right.$$

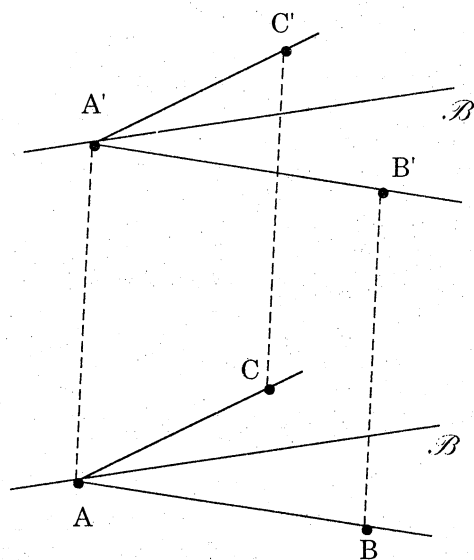


Fig. 60

Dès lors, sachant que les notations:

$\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}$ et $\widehat{(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})}$ (resp. $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$)
désignent le **même angle** dans chacune des deux versions, on est

logiquement en droit d'attendre que la bissectrice de l'angle $\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}$

(resp. \widehat{BAC}) soit celle de l'angle $\widehat{(\vec{A'B'}, \vec{A'C'})}$ (resp. $\widehat{B'A'C'}$). Or il est clair que les bissectrices \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont distinctes. On navigue donc en pleine incohérence. (Ce qui n'est pas le cas avec la terminologie que nous avons adoptée).

Au vu de cet exemple, le défaut de ces traditionnelles terminologies est facile à expliciter. Elles associent une droite de \mathcal{P} (la bissectrice) non pas à une paire de demi-droites de ce plan comme cela devrait être le cas, mais à une classe d'équivalence soit de couples de vecteurs non nuls de $\vec{\mathcal{P}}$, soit de paires de demi-droites de \mathcal{P} .

Dans le même registre, on pourrait introduire la notion de **milieu** d'un vecteur lorsqu'il est traditionnellement représenté par une "flèche". Cette idée, qui n'est pas plus saugrenue que ses devancières, est tirée de la copie d'un élève de 1ère S. Elle était accompagnée, dessin à l'appui, de la mention suivante: «le milieu d'un vecteur est un point qui partage ce vecteur en un **segment** et un **vecteur** de même longueur». A première vue, on peut penser qu'il s'agissait d'un canular. Hélas, il n'en n'était rien car après avoir demandé au restant de la classe si cette "définition" leur paraissait acceptable les avis étaient partagés ; les partisans du "non" argumentant que pour être **totale**ment correcte il eût été bon de la libeller ainsi: «la **longueur** du segment est égale à la **norme** du vecteur».

Si l'on revient maintenant à la question que nous nous étions initialement posée, le verdict est facile à rendre. La locution «bissectrice d'un angle» quelle que soit la nature de l'angle considéré est... à proscrire.

On devrait d'ailleurs, notamment dans le premier cycle de l'enseignement secondaire, évacuer la notion d'angle "géométrique" et se contenter d'introduire le concept de "**secteur**" qui est une partie du plan \mathcal{P} enfantée par l'intersection de deux demi-plans de frontières sécantes.

"L'ouverture" d'un secteur se mesure avec un **rappor**teur, "règle demi-circulaire" graduée de 0 à 180 degrés.

Une fois assimilé l'usage de cet instrument aucun élève ne peut réfuter les énoncés:

- Deux secteurs superposables ont la même mesure
- Deux secteurs de même mesure sont superposables.

On ne peut raisonnablement pas aller plus avant dans cette affaire sans encourir le risque d'être incompris.

La bissectrice du secteur \widehat{BAC} est la demi-droite $[AT)$ constituée des points communs à ce secteur et à son axe de symétrie.

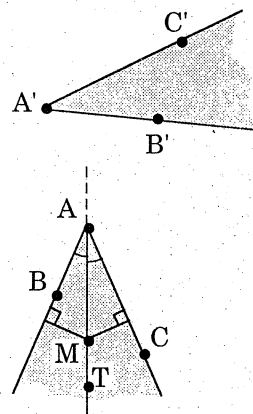


Fig. 61

Elle possède les propriétés caractéristiques suivantes:

1°) Privée du "sommets" A , elle est l'ensemble des points M du secteur \widehat{BAC} tels que $\text{mes}(\widehat{BAM}) = \text{mes}(\widehat{MAC})$

2°) Elle est l'ensemble des points M du secteur \widehat{BAC} équidistants de ses côtés c'est à dire des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$.

Observons ici qu'il n'est pas souhaitable d'envisager que la bissectrice du secteur \widehat{BAC} soit la droite (AT) car l'ensemble des points du plan \mathcal{P} équidistants des demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ est la réunion de la demi-droite $[AT)$ et de la partie hachurée de la figure ci-contre. On se priverait alors de la deuxième caractérisation de la bissectrice qui, par son caractère métrique, est facilement exploitable dans le premier cycle.

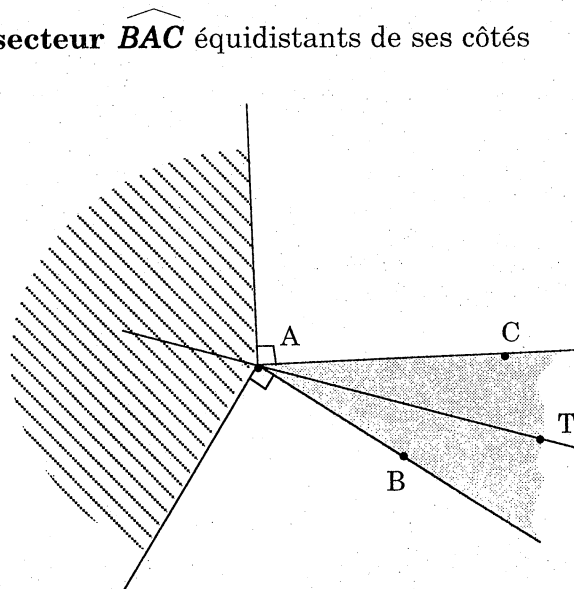


Fig. 62

Ces quelques propositions ne semblent pas de nature à mettre le feu dans les chaumières. Les nostalgiques des formules "à l'ancienne" n'auraient qu'à changer la phrase: «la bissectrice d'un angle est une droite qui partage cet angle en deux angles égaux» par «la bissectrice d'un secteur est la demi-droite qui partage ce secteur en deux secteurs de même mesure».

Ceci dit, après avoir évacué la notion d'angle géométrique, le mot "angle" perdrait son double emploi. Il n'aurait donc plus à être affublé de qualificatifs à résonance pour le moins contestable.

Nota: Il est hors de propos de condamner tout abus de langage en mathématique. Ils sont inévitables. Toutefois, il paraît souhaitable d'éviter ceux qui mettent en péril la cohérence de notre discours, lorsque pour ce faire, la facture à payer n'est pas trop lourde.

2. Bissectrices de deux droites sécantes

a) Définition (rappel).

Dans le plan \mathcal{P} , les axes des deux réflexions qui échangent deux droites sécantes données sont appelées **bissectrices** de ces droites.

On vérifie facilement que ces bissectrices sont orthogonales.

b) Caractérisation angulaire

Soit \mathcal{B} et \mathcal{B}' les bissectrices de deux droites sécantes (ΩA) et (ΩB) du plan \mathcal{P} , M un point de ce plan.

Alors:

$$M \in \mathcal{B} \cup \mathcal{B}' \setminus \{\Omega\} \iff 2\widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M})} = 2\widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega B})}$$

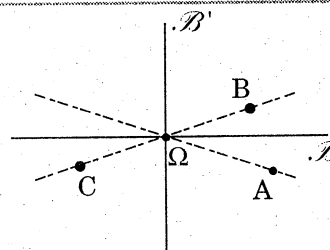


Fig. 63

Démonstration.

Désignons par C le symétrique de B par rapport à Ω . On a:

$$M \in \mathcal{B} \cup \mathcal{B}' \setminus \{\Omega\} \iff \begin{cases} \bullet \text{ Soit } (\Omega M) \text{ est la bissectrice de } [\Omega A) \text{ et } [\Omega B) \\ \bullet \text{ Soit } (\Omega M) \text{ est la bissectrice de } [\Omega A) \text{ et } [\Omega C) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \bullet \text{ Soit } \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega B})} \\ \bullet \text{ Soit } \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega C})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega B})} + \hat{\pi} \end{cases}$$

$$\iff 2\widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega M})} = 2\widehat{(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega B})}$$

c) Corollaire

Les notations précédentes étant conservées,

Si, pour un vecteur non nul \vec{x} de \mathcal{F} , on a: $4\widehat{(\vec{x}, \Omega M)} = 2\widehat{(\vec{x}, \Omega A)} + 2\widehat{(\vec{x}, \Omega B)}$
alors (ΩM) est une des deux bissectrices des droites (ΩA) et (ΩB) .

En effet, sous cette hypothèse:

$$2\widehat{(\vec{x}, \Omega M)} - 2\widehat{(\vec{x}, \Omega A)} = 2\widehat{(\vec{x}, \Omega B)} - 2\widehat{(\vec{x}, \Omega M)}$$

c'est-à-dire: $2\widehat{(\Omega A, \Omega M)} = 2\widehat{(\Omega M, \Omega B)}$

d) Remarque.

- La bissectrice de deux demi-droites de même origine est caractérisée par une égalité d'angle.
- Les bissectrices de deux droites sécantes sont caractérisées par une égalité de double d'angle.

III. Angles d'un triangle

Dans le plan \mathcal{P} , la donnée de trois points non alignés permet de définir 6 vecteurs non nuls et donc 36 couples de vecteurs non nuls.

Autrement dit, un triangle ABC détermine 36 angles de **libellés différents** (6 fois l'angle nul, 6 fois l'angle plat, les autres angles ayant, quatre par quatre, le même double...)

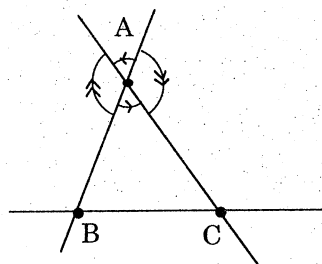


Fig. 64

Dans ce paragraphe nous n'allons pas considérer tous ces angles mais uniquement certains d'entre eux.

1. Somme "des angles d'un triangle"

a) Exposé du problème

• Etant donné un triangle ABC , il s'agit d'exprimer l'angle:

$$\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} + \widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} + \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})}$$

• Pour écrire les trois angles figurant dans cette somme, on peut prendre appui sur l'ordre dans lequel sont donnés les sommets du triangle, ainsi que le montre le schéma ci-contre.

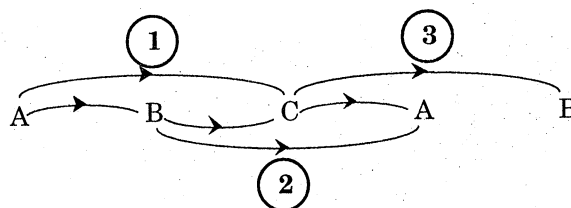


Fig. 65

b) Première solution (avec vue sur figure)

Désignons par A' et C' les transformés des points A et C par la translation $t_{(B,A)}$ et par Ω le milieu du segment $[AC]$.

Le quadrilatère $ABCC'$ étant un parallélogramme, Ω est aussi milieu de $[BC']$.

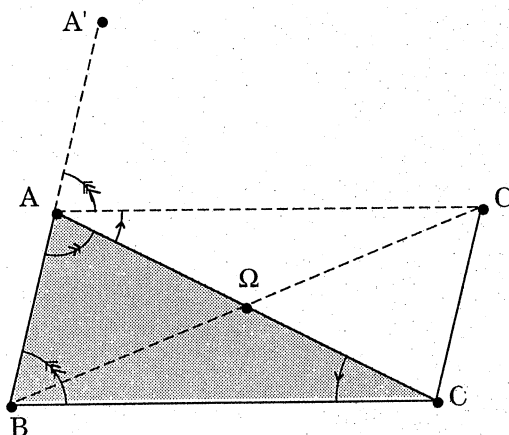


Fig. 66

Nous avons alors,

$$\text{d'une part: } \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AA'})} \quad \text{effet de } t_{(B,A)}$$

$$\text{d'autre part: } \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'})} \quad \text{effet de la symétrie } s_{\Omega}$$

Il vient alors:

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'})} + \widehat{(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AA'})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'})} = \hat{\pi}.$$

c) Deuxième solution (abstraite, mais expéditive)

$$\text{Rappelons que: } \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} = \widehat{(-\overrightarrow{CA}, -\overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})}.$$

Par suite:

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} + \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} + \widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC})} + \widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA})} = \hat{\pi}.$$

d) Remarque

La permutation de deux lettres dans le libellé du triangle ABC conduit au même résultat.

Par exemple, en permutant B et C , on est amené à considérer la somme $\widehat{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})} + \widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})} + \widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}$ qui n'est autre que la somme des opposés des angles précédemment considérés. Elle est donc égale à $\hat{\pi}$ (car $-\hat{\pi} = \hat{\pi}$)

e) Énoncé du résultat à retenir

-
- La somme des angles d'un triangle est égale à l'angle plat.
 - La somme de leurs doubles est égale à l'angle nul.
-

2. Caractérisation angulaire d'un triangle isocèle.

Théorème (1)

Etant donné un triangle ABC du plan \mathcal{P} , les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) le triangle ABC est isocèle en A ($AB = AC$)

(ii) $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$

(iii) $2\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$

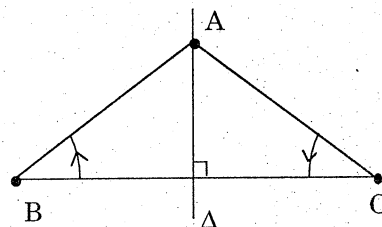


Fig. 67

Démonstration

Elle comporte trois étapes. On va établir successivement que:

1° (i) entraîne (ii)

2° (ii) entraîne (iii)

3° (iii) entraîne (i)

1ère étape: Soit Δ la médiatrice de $[BC]$

Si le triangle ABC est isocèle en A alors: $(B, C, A) \xrightarrow{s_{\Delta}} (C, B, A)$

On en déduit: $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = -\widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})}$. effet de s_{Δ}

puis: $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$

2ème étape: (C'est une banalité)

Si $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$ alors il est clair que $2\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$.

3ème étape: Soit A' le transformé de A par la réflexion $s_{(BC)}$. Le milieu I du segment $[AA']$ est donc un point de la droite (BC) et on obtient: (voir figure 68).

$$2\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = -2\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA'})} = 2\widehat{(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{BC})} \quad (\text{effet de } s_{(BC)})$$

c'est-à-dire: $2\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = 2\widehat{(\overrightarrow{BA'}, \overrightarrow{CB})}$ car \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{CB} sont colinéaires.

Cela dit,

$$\text{Si } 2(\widehat{BC, BA}) = 2(\widehat{CA, CB})$$

$$\text{alors } 2(\widehat{BA', CB}) = 2(\widehat{CA, CB})$$

égalité qui traduit que les vecteurs $\overrightarrow{BA'}$ et \overrightarrow{CA} sont colinéaires, en d'autres termes que les droites (BA') et (CA) sont parallèles.

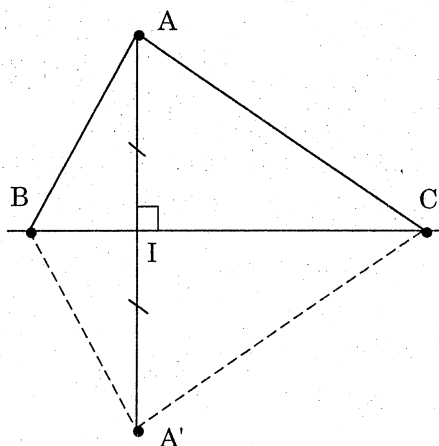


Fig. 68

Le point B commun aux droites (BC) et (BA') a pour transformé par la symétrie s_I de centre I le point commun aux droites $s_I(BC)$ et $s_I(BA')$, c'est-à-dire à (BC) et à (CA) . En effet, $s_I(BA')$ est la parallèle à (BA') passant par le point $s_I(A')$, donc $s_I(BA') = (CA)$.

On a donc: $s_I(B) = C$. La droite (AI) est alors médiatrice de $[BC]$ et par conséquent le triangle ABC est isocèle en A .

3. Caractérisation angulaire d'un triangle rectangle

Théorème (2)

Etant donné un triangle ABC du plan \mathcal{P} , les propositions suivantes sont équivalentes:

(i) le triangle ABC est rectangle en A

(ii) $2(\widehat{AB, AC}) = \hat{\pi}$

(iii) $2(\widehat{BC, BA}) + 2(\widehat{CA, CB}) = \hat{\pi}$

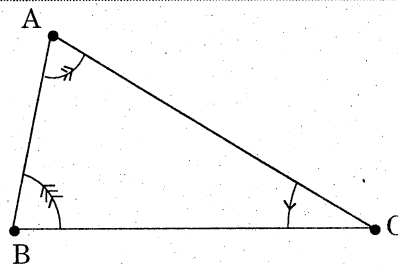


Fig. 69

Démonstration

$$ABC \text{ est rectangle en } A \iff \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$$

$$\iff 2(\widehat{AB, AC}) = \hat{\pi}$$

$$\iff 2(\widehat{BC, BA}) + 2(\widehat{CA, CB}) \stackrel{(*)}{=} -2(\widehat{AB, AC}) = -\hat{\pi} = \hat{\pi}$$

(*) car la somme des doubles des angles d'un triangle est nulle.

IV. Angles et cercles

1. Premier théorème fondamental. Ses deux corollaires

a) Caractérisation angulaire d'un cercle dont on connaît le centre et deux points

Théorème (3)

Soit, dans le plan \mathcal{P} , un cercle \mathcal{C} de centre Ω et deux points A et B de ce cercle.

Alors, pour tout point M de \mathcal{P} :

$$M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\} \iff 2(\widehat{MA, MB}) = (\widehat{\Omega A, \Omega B})$$

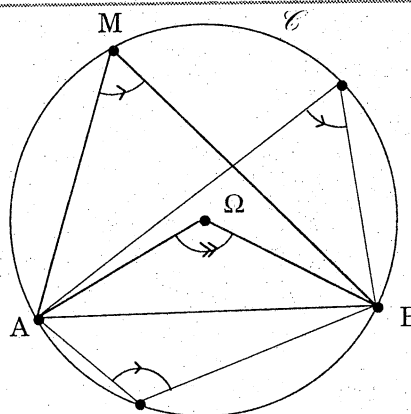


Fig. 70

Démonstration

1ère partie : Etude directe

Soit M un point du cercle \mathcal{C} autre que A et B . Nous avons alors:

$$\begin{aligned} 2(\widehat{MA, MB}) &= 2(\widehat{MA, M\Omega}) + 2(\widehat{M\Omega, MB}) \\ &= [\hat{\pi} - (\widehat{\Omega M, \Omega A})] + [\hat{\pi} - (\widehat{\Omega B, \Omega M})] \quad (*) \\ &= (\widehat{\Omega A, \Omega M}) + (\widehat{\Omega M, \Omega B}) \\ &= (\widehat{\Omega A, \Omega B}) \end{aligned}$$

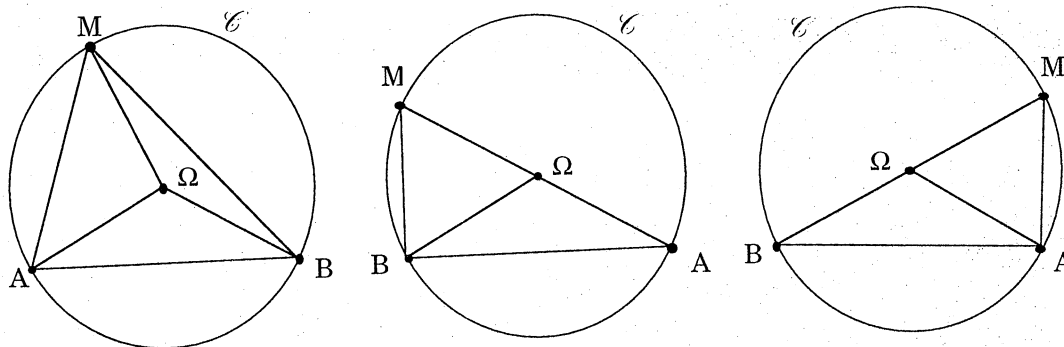


Fig. 71

L'égalité (*) est obtenue, dans le cas général, en utilisant le fait que les triangles ΩAM et ΩMB sont isocèles en Ω . Elle reste encore vraie dans les deux cas particuliers illustrés ci-dessus.

2ème partie : Etude réciproque

On se place sous l'hypothèse: « M est un point de \mathcal{P} autre que A et B vérifiant l'égalité $2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$ »

Cette étude comporte trois étapes

1ère étape: M ne peut être un point de la droite (AB) ,
sinon, du fait de la colinéarité des vecteurs \overrightarrow{MA} et \overrightarrow{MB} , on aurait:

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \hat{o}.$$

L'hypothèse conduirait alors à l'égalité: $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = \hat{o}$ qui est manifestement fausse.

2ème étape: les droites (MA) et (MB) ne peuvent être deux tangentes au cercle \mathcal{C} , sinon, grâce à la cocyclicité des points

M, A, Ω, B et le résultat obtenu lors de l'étude directe on aurait,:

$$2(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$$

où I désigne le centre du cercle $(A\Omega B)$

L'hypothèse conduirait alors à l'égalité:

$$2(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$$

c'est-à-dire à: $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = \hat{o}$
égalité qui, on l'a déjà dit, est fausse.

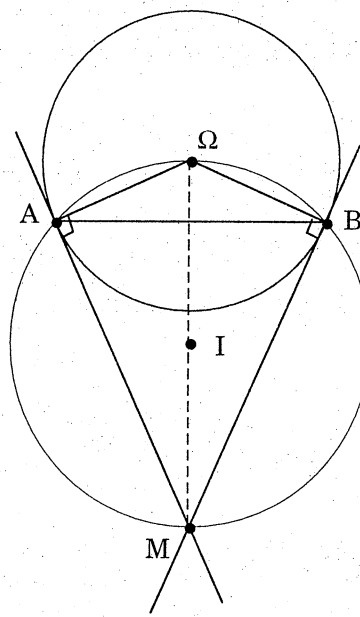


Fig. 72

3ème étape: M est un point de $\mathcal{C} \setminus \{A, B\}$

Des résultats acquis lors des deux étapes précédentes il découle que **l'une au moins des droites** (MA) et (MB) recoupe le cercle \mathcal{C} en un point M' autre que A et B .

Supposons, par exemple, que ce soit la droite (MA) . On a alors:

$$\begin{cases} 2(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})} & \text{voir 1ère partie} \\ 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})} & \text{par hypothèse} \end{cases}$$

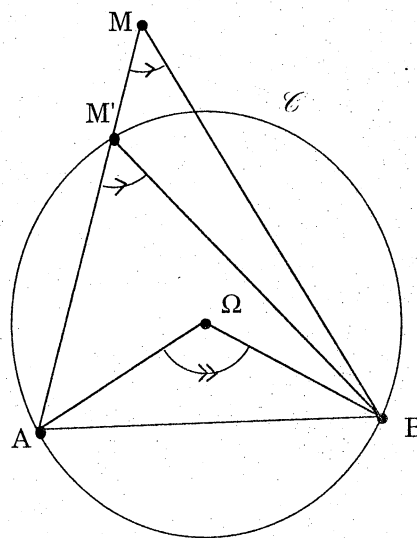


Fig. 73

On en déduit: $2(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$

puis: $2(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = 2(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{MB})$ car \overrightarrow{MA} et $\overrightarrow{M'A}$ sont colinéaires

égalité qui traduit que $\overrightarrow{M'B}$ et \overrightarrow{MB} sont des vecteurs non nuls colinéaires.

Dès lors, le point M appartient aux **deux** droites $(M'A)$ et $(M'B)$. Il ne peut donc qu'être confondu avec le point M' .

On parviendra à une conclusion analogue en faisant jouer le rôle de la droite (MA) à la droite (MB) .

On en arrive ainsi à la conclusion: M est un point de $\mathcal{C} \setminus \{A, B\}$

b) Caractérisation angulaire d'un cercle dont on connaît trois points

Corollaire (1)

Soit, dans le plan \mathcal{P} , un triangle ABC et \mathcal{C} le cercle circonscrit à ce triangle.

Alors, pour tout point M de \mathcal{P} :

$$M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\} \iff 2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$$

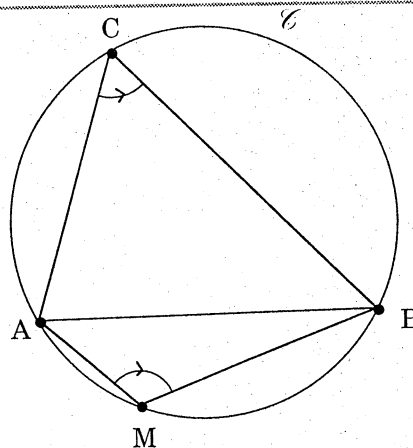


Fig. 74

Démonstration

Désignons par Ω le centre du cercle \mathcal{C} .

Nous avons alors: $2\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})}$.

Il s'ensuit que:

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\} &\iff 2\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})} \\ &\iff 2\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})} \end{aligned}$$

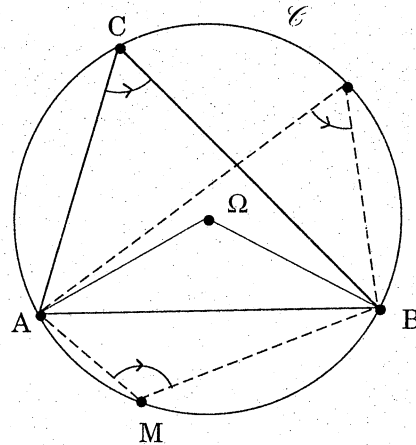


Fig. 75

c) Cocyclicité de quatre points

Corollaire (2)

Etant donné **quatre** points A, B, C et D de \mathcal{P} tels que A, B et C ne soient pas alignés.

Alors:

$$A, B, C, D \text{ cocycliques} \iff 2\widehat{(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$$

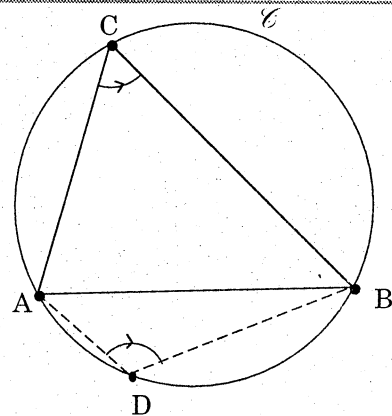


Fig. 76

Démonstration:

Désignons par \mathcal{C} le cercle circonscrit au triangle ABC . Alors:

$$A, B, C, D \text{ cocycliques} \iff D \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$$

$$\iff 2\widehat{(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}.$$

2. Deuxième théorème fondamental. Son corollaire

a) Caractérisation angulaire de la tangente en un point à un cercle dont on connaît le centre et un autre point

Théorème (4)

Soit, dans le plan \mathcal{P} , un cercle \mathcal{C} de centre Ω et deux points A et B de ce cercle; \mathcal{D}_A sa tangente en A .

Alors, pour tout point T de \mathcal{P} :

$$T \in \mathcal{D}_A \setminus \{A\} \iff 2 \widehat{(AT, AB)} = \widehat{(\Omega A, \Omega B)}$$

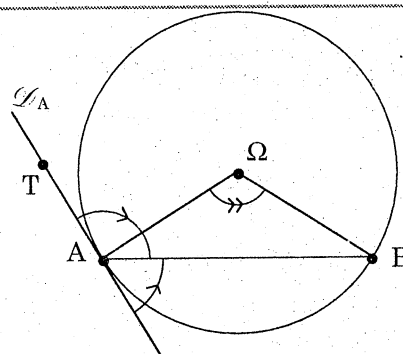


Fig. 77

Démonstration

1ère partie : Etude directe

$$\begin{aligned} \text{Nous avons: } 2 \widehat{(AT, AB)} &= 2 \widehat{(AT, A\Omega)} + 2 \widehat{(A\Omega, AB)} \\ &= \hat{\pi} + [\hat{\pi} - \widehat{(\Omega B, \Omega A)}] \\ &= \widehat{(\Omega A, \Omega B)} \end{aligned}$$

Remarque

L'égalité: $2 \widehat{(A\Omega, AB)} = \hat{\pi} - \widehat{(\Omega B, \Omega A)}$ est obtenue dans le cas général, en utilisant le fait que le triangle $A\Omega B$ est isocèle en Ω . Elle reste encore vraie lorsque les points A et B sont diamétralement opposés sur le cercle \mathcal{C} .

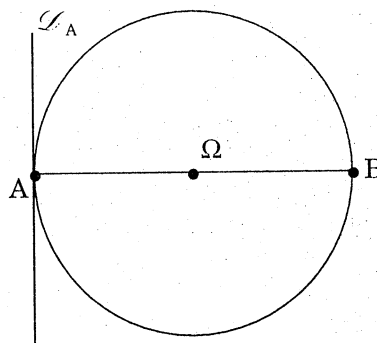


Fig. 78

2ème partie : Etude réciproque

On se place sous l'hypothèse:

« T est un point de \mathcal{P} autre que A vérifiant l'égalité: $2(\widehat{AT}, \widehat{AB}) = (\widehat{\Omega A}, \widehat{\Omega B})$ »

Soit T' un point autre que A de la tangente \mathcal{D}_A .

Nous avons alors, compte tenu du résultat obtenu dans la première partie:

$$2(\widehat{AT'}, \widehat{AB}) = (\widehat{\Omega A}, \widehat{\Omega B}).$$

L'hypothèse conduit alors à l'égalité:

$$2(\widehat{AT}, \widehat{AB}) = 2(\widehat{AT'}, \widehat{AB})$$

qui traduit que \overrightarrow{AT} et $\overrightarrow{AT'}$ sont des vecteurs non nuls colinéaires.

Donc T est un point de $\mathcal{D}_A \setminus \{A\}$

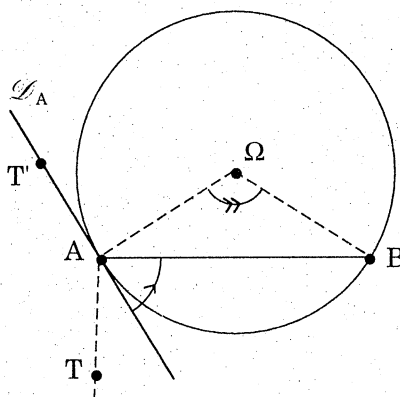


Fig. 79

Remarque

Désignons par \mathcal{D}_B la tangente en B au cercle \mathcal{C} , et par Δ la médiatrice du segment $[AB]$.

Soit T un point de \mathcal{P} autre que B , T' son transformé par la réflexion s_Δ .

Nous avons alors:

$$2(\widehat{BA}, \widehat{BT}) = 2(\widehat{AT'}, \widehat{AB}). \text{ effet de } s_\Delta.$$

Ceci étant, il vient:

$$T \in \mathcal{D}_B \setminus \{B\} \iff T' \in \mathcal{D}_A \setminus \{A\}$$

$$\iff 2(\widehat{AT'}, \widehat{AB}) = (\widehat{\Omega A}, \widehat{\Omega B})$$

$$\iff 2(\widehat{BA}, \widehat{BT}) = (\widehat{\Omega A}, \widehat{\Omega B})$$

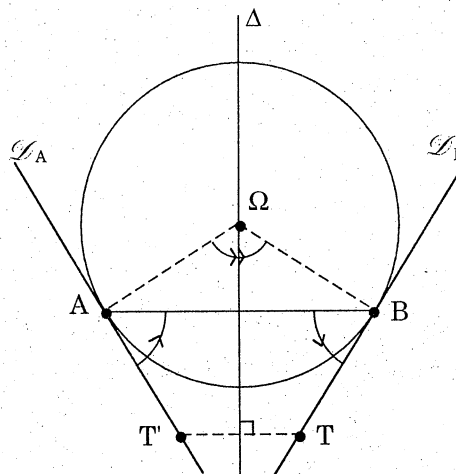


Fig. 80

b) **Caractérisation angulaire de la tangente en A à un cercle ABC**

On obtient immédiatement le résultat suivant:

Soit, dans le plan \mathcal{P} , un triangle ABC ; \mathcal{C} son cercle circonscrit, \mathcal{D}_A la tangente en A à \mathcal{C}

Alors, pour tout point T de \mathcal{P}

$$T \in \mathcal{D}_A \setminus \{A\} \iff 2(\widehat{AT, AB}) = 2(\widehat{CA, CB})$$

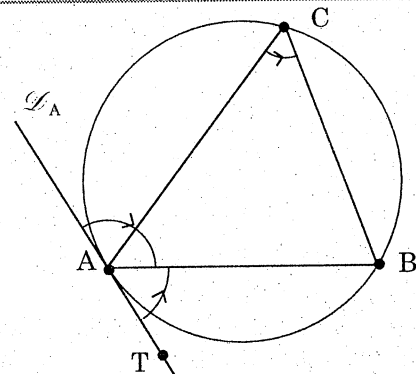


Fig. 81

Démonstration

En désignant par Ω le centre du cercle \mathcal{C} , on a:

$$2(\widehat{CA, CB}) = (\widehat{\Omega A, \Omega B})$$

Par suite, il vient:

$$\begin{aligned} T \in \mathcal{D}_A \setminus \{A\} &\iff 2(\widehat{AT, AB}) = (\widehat{\Omega A, \Omega B}) \\ &\iff 2(\widehat{AT, AB}) = 2(\widehat{CA, CB}). \end{aligned}$$

3. Métissage des deux théorèmes fondamentaux

Les notations précédentes étant conservées, nous avons établi que:

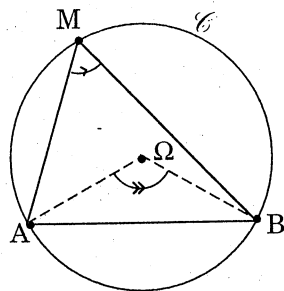


Fig. 82

**Si $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$
alors**

$$2(\widehat{MA, MB}) = (\widehat{\Omega A, \Omega B})$$

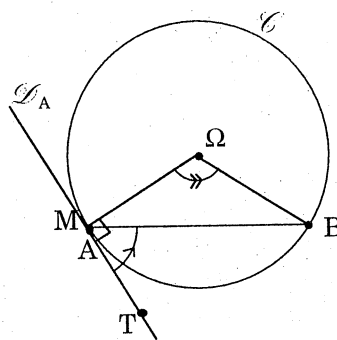


Fig. 83

**Si $M = A$
alors**

$$2(\widehat{MT, MB}) = (\widehat{\Omega A, \Omega B})$$

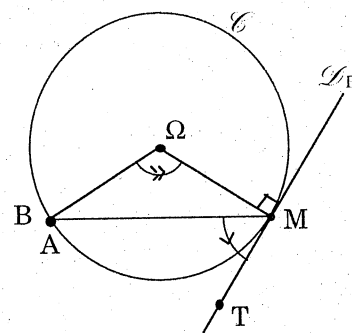


Fig. 84

**Si $M = B$
alors**

$$2(\widehat{MA, MT}) = (\widehat{\Omega A, \Omega B})$$

Il apparaît que les résultats concernant les cas particuliers " $M = A$ " et " $M = B$ " sont des **prolongements** de celui obtenu dans le cas général " $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$ " à **condition** de remplacer le vecteur nul \overrightarrow{MA} (resp. \overrightarrow{MB}) par **un** vecteur directeur \overrightarrow{MT} de la tangente à \mathcal{C} au point A (resp. au point B).

Cette façon de voir les choses, nous conduit à énoncer:

Théorème (5)

Etant donné un cercle \mathcal{C} de centre Ω et deux points A et B de ce cercle,

pour tout point M de \mathcal{C} , on a: $2\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = \widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})}$

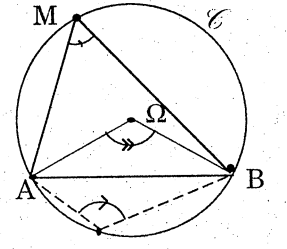
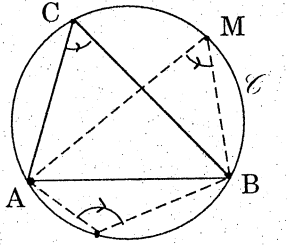
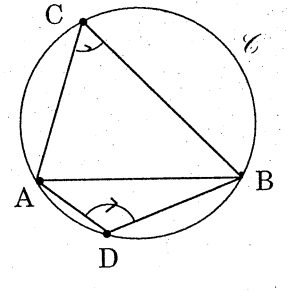
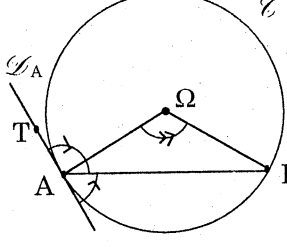
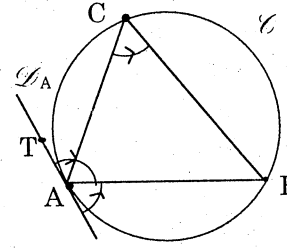
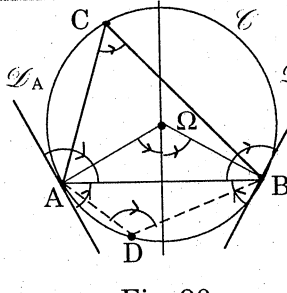
en convenant que:

- \overrightarrow{MA} désigne un vecteur directeur de la tangente à \mathcal{C} en A lorsque $M = A$
- \overrightarrow{MB} désigne un vecteur directeur de la tangente à \mathcal{C} en B lorsque $M = B$

Remarque

Lorsque le cercle \mathcal{C} est défini par trois points A, B et C on a le même résultat en remplaçant l'angle $\widehat{(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})}$ par l'angle $2\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})}$.

4. Tableau des principaux résultats

<ul style="list-style-type: none"> • Les données Les points Ω, A, B; le cercle \mathcal{C} • Le résultat $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\} \iff 2(\widehat{MA, MB}) = (\widehat{\Omega A, \Omega B})$ 	 <p style="text-align: center;">Fig. 85</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Les données Les points A, B, C; le cercle \mathcal{C} • Le résultat $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\} \iff 2(\widehat{MA, MB}) = 2(\widehat{CA, CB})$ 	 <p style="text-align: center;">Fig. 86</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Les données Le quadrilatère $ABCD$ • Le résultat A, B, C, D cocycliques $\iff 2(\widehat{CA, CB}) = 2(\widehat{DA, DB})$ 	 <p style="text-align: center;">Fig. 87</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Les données Les points Ω, A, B; le cercle \mathcal{C}; la tangente \mathcal{D}_A à \mathcal{C} en A. • Le résultat $T \in \mathcal{D}_A \setminus \{A\} \iff 2(\widehat{AT, AB}) = (\widehat{\Omega A, \Omega B})$ 	 <p style="text-align: center;">Fig. 88</p>
<ul style="list-style-type: none"> • Les données Les points A, B, C; le cercle \mathcal{C}; la tangente \mathcal{D}_A à \mathcal{C} en A. • Le résultat $T \in \mathcal{D}_A \setminus \{A\} \iff 2(\widehat{AT, AB}) = 2(\widehat{CA, CB})$ 	 <p style="text-align: center;">Fig. 89</p>
<p>Configuration des "angles ayant le même double"</p> <p>Tous les angles signifiés dans la figure ci-contre ont le même double.</p>	 <p style="text-align: center;">Fig. 90</p>

V. Première batterie d'exercices résolus

Ils traitent, pour la plupart, des problèmes de cocyclicité, d'alignement de points et des problèmes de parallélisme, d'orthogonalité de droites dans le plan \mathcal{P} .

Exercice 1 : Somme "des angles d'un polygone"

Etant donné n points A_1, A_2, \dots, A_n de \mathcal{P} ($n \geq 3$), on demande d'exprimer l'angle

$$\widehat{(A_1 A_n, A_1 A_2)} + \widehat{(A_2 A_1, A_2 A_3)} + \dots + \widehat{(A_i A_{i-1}, A_i A_{i+1})} + \dots + \widehat{(A_n A_{n-1}, A_n A_1)}$$

Solution

Notons $\hat{\alpha}$ l'angle cherché. Pour "harmoniser" son expression, posons : $A_0 = A_n$ et $A_{n+1} = A_1$. Alors :

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^n \widehat{(A_i A_{i-1}, A_i A_{i+1})}$$

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^n [\widehat{(A_{i-1} A_i, A_i A_{i+1})} + \hat{\pi}]$$

car quels que soient les vecteurs

non nuls \vec{u} et \vec{v} ,

$$\widehat{(-\vec{u}, \vec{v})} = \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} + \hat{\pi}$$

$$\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^n \widehat{(A_{i-1} A_i, A_i A_{i+1})} + n \hat{\pi}$$

$$\hat{\alpha} = \widehat{(A_0 A_1, A_n A_{n+1})} + n \hat{\pi} \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$\hat{\alpha} = \hat{\alpha} + n \hat{\pi} = n \hat{\pi}$$

Conclusion : $\begin{cases} \text{Lorsque } n \text{ est impair, on a : } \hat{\alpha} = \hat{\pi} \\ \text{Lorsque } n \text{ est pair, on a : } \hat{\alpha} = \hat{\alpha} \end{cases}$

Quant à la somme des doubles des angles d'un polygone $A_1 A_2 \dots A_n$ elle est, quel que soit l'entier $n \geq 3$, désespérément nulle.

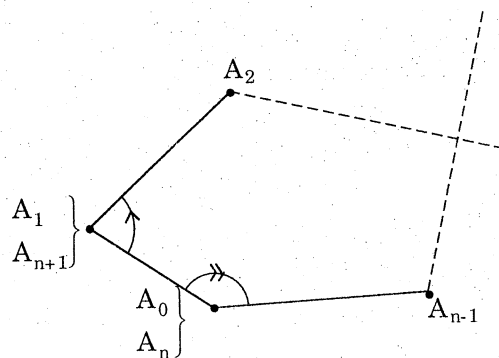


Fig. 91

Exercice 2: Cocyclicité de points.

Montrer que les symétriques de l'orthocentre H d'un triangle ABC par rapport à chacun de ses trois côtés appartiennent au cercle circonscrit à ce triangle.

Solution

Comme aucun côté du triangle ABC ne joue un rôle particulier, il suffit d'établir que, par exemple, le symétrique H_1 de H par rapport à la droite (BC) appartient au cercle (ABC) .

a) Cas général : Le triangle ABC est non rectangle

Désignons par B_1 et C_1 les pieds des hauteurs issues de B et C du triangle ABC .

On est dans ce cas assuré que tous les points signifiés dans la figure ci-contre sont distincts.

En outre, il est clair que B_1 et C_1 appartiennent au cercle de diamètre $[AH]$.

Traduit en termes d'angles, le but de l'exercice consiste à établir que les angles

$\widehat{(H_1B, H_1C)}$ et $\widehat{(AB, AC)}$ ont le même double.

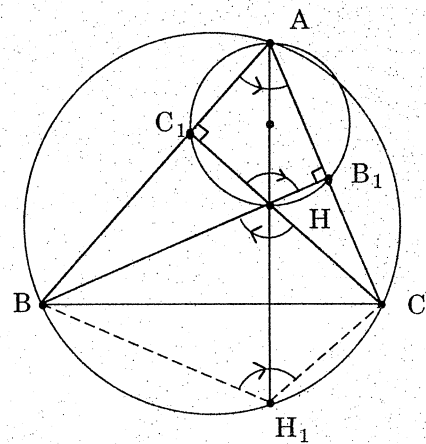


Fig. 92

Ceci dit, nous avons :

$$\begin{aligned}
 2\widehat{(H_1B, H_1C)} &= -2\widehat{(HB, HC)} && \text{effet de la réflexion } s_{(BC)} \\
 &= 2\widehat{(HC, HB)} \\
 &= 2\widehat{(HC_1, HB_1)} && \text{du fait de la colinéarité de } \begin{cases} \overrightarrow{HC} \text{ et } \overrightarrow{HC_1} \\ \overrightarrow{HB} \text{ et } \overrightarrow{HB_1} \end{cases} \\
 &= 2\widehat{(AC_1, AB_1)} && \text{car } A \text{ appartient au cercle } (HC_1B_1) \\
 &= 2\widehat{(AB, AC)} && \text{du fait de la colinéarité de } \begin{cases} \overrightarrow{AC_1} \text{ et } \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AB_1} \text{ et } \overrightarrow{AC} \end{cases}
 \end{aligned}$$

égalité qui traduit que H_1 appartient au cercle (ABC) .

b) Etude des cas particuliers

▲ Le triangle ABC est rectangle en A

Dans ce cas les points A et H sont confondus sur le cercle Γ de diamètre $[BC]$

Par suite : $s_{(BC)}(H) \in \Gamma$

Autrement dit,

H_1 appartient au cercle (ABC) .

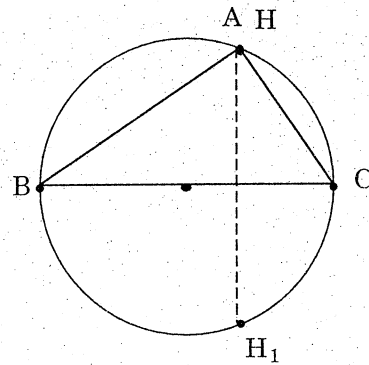


Fig. 93

▲ Le triangle ABC est rectangle soit en B , soit en C

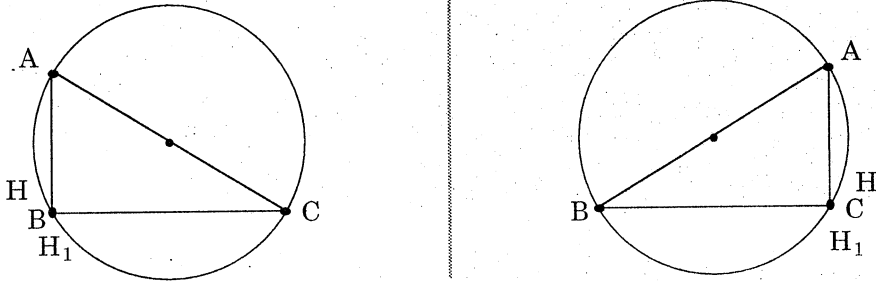


Fig. 94

Alors H_1 appartient banalement au cercle (ABC) puisque H et H_1 sont confondus soit avec B soit avec C .

Commentaire

L'emploi des angles dans la résolution de problèmes de géométrie plane nécessite quelques précautions. En dehors de la convention faite concernant l'utilisation du théorème (5), on doit s'assurer que les angles que l'on fait intervenir sont libellés avec des vecteurs non nuls, condition automatiquement satisfaite lorsque les points clés de la configuration à étudier sont deux à deux distincts.

Pour être rigoureux, il reste à étudier à part les cas particuliers où la condition précédente n'est pas remplie. On verra, à l'usage, qu'ils sont en "très petit" nombre et que leur étude ne présente aucune difficulté.

Exercice 3: Alignement de points

Trois cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ deux à deux sécants passent par le même point I . On note respectivement P, Q, R les points d'intersection autres que I de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , de \mathcal{C}_2 et \mathcal{C}_3 , de \mathcal{C}_3 et \mathcal{C}_1 . Soit M_1 un point de \mathcal{C}_1 :

la droite (M_1P) (ou la tangente en P à \mathcal{C}_1 si $M_1 = P$) recoupe \mathcal{C}_2 en M_2

la droite (M_2Q) (ou la tangente en Q à \mathcal{C}_2 si $M_2 = Q$) recoupe \mathcal{C}_3 en M_3

Montrer que la droite (M_3R) (ou la tangente en R à \mathcal{C}_3 lorsque $M_3 = R$) recoupe le cercle \mathcal{C}_1 en M_1 .

Solution

Le but de l'exercice est d'établir que les points M_3, R et M_1 sont alignés.

La rédaction de la solution est conçue en se rapportant au cas général où les droites (M_1P) , (M_2Q) et (M_3R) sont respectivement des sécantes aux cercles $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et \mathcal{C}_1 . Nous avons alors:

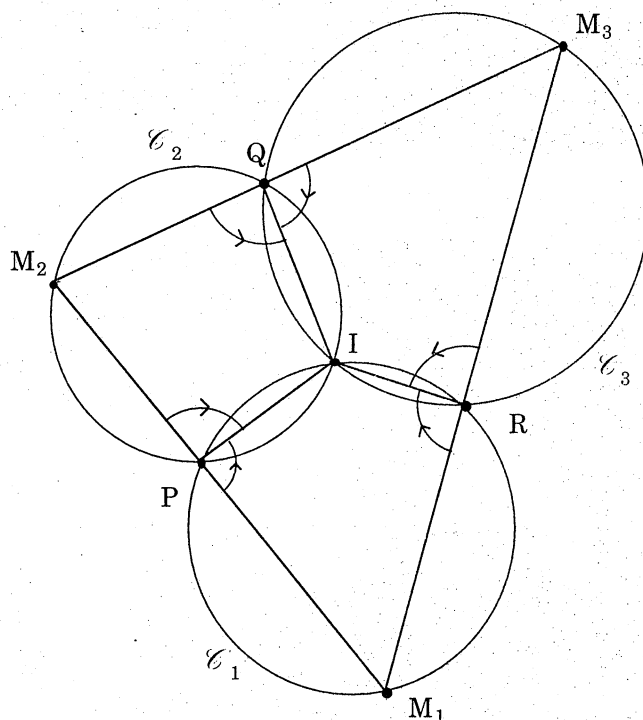


Fig. 95

$$2(\widehat{RM_3, RI}) = 2(\widehat{QM_3, QI}) \quad (1)$$

$$= 2(\widehat{QM_2, QI}) \quad (2)$$

$$= 2(\widehat{PM_2, PI})$$

$$= 2(\widehat{PM_1, PI})$$

$$= 2(\widehat{RM_1, RI})$$

Q appartient au cercle (RM_3I)

colinéarité de $\overrightarrow{QM_3}$ et $\overrightarrow{QM_2}$

P appartient au cercle (QM_2I)

colinéarité de $\overrightarrow{PM_2}$ et $\overrightarrow{PM_1}$

R appartient au cercle (PM_1I)

égalité qui traduit que les vecteurs $\overrightarrow{RM_3}$ et $\overrightarrow{RM_1}$ sont colinéaires. Les points M_3 , R et M_1 sont donc alignés.

Il importe maintenant de faire remarquer que cette solution reste acceptable quand, comme le précise l'énoncé, certaines des droites (M_1P) , (M_2Q) ou M_3R sont tangentes aux cercles donnés.

A titre d'exemple, considérons le cas particulier illustré figure 96 où (M_2Q) est tangente à \mathcal{C}_3 .

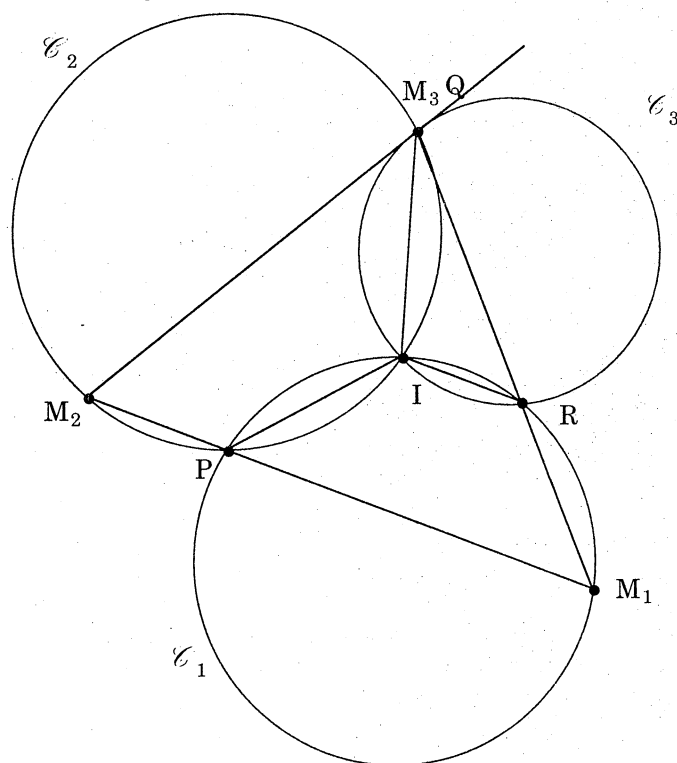


Fig. 96

En se référant au théorème (5), on doit remplacer, dans l'égalité (1) le vecteur nul $\overrightarrow{QM_3}$ par un vecteur directeur de cette tangente. C'est ce qui est fait dans l'égalité (2) où $\overrightarrow{QM_2}$ remplace $\overrightarrow{QM_3}$.

Conclusion

Pour tout point M_1 de \mathcal{C}_1 , les points M_3 , R et M_1 sont alignés.

Réactions et commentaires des élèves

Le passage "délicat" se situe au départ. Il s'agit de leur faire traduire l'objectif du problème en "langage angulaire" : il suffit, par exemple, d'établir que le double de l'angle $(\overrightarrow{RM_3}, \overrightarrow{RM_1})$ est nul ou encore que les angles $(\overrightarrow{RM_3}, \overrightarrow{RI})$ et $(\overrightarrow{RM_1}, \overrightarrow{RI})$ ont le même double (utilisation du vecteur auxiliaire \overrightarrow{RI}).

Cet obstacle franchi, la solution est rapidement trouvée. Les élèves signifient sur la figure, en partant de l'angle $(\overrightarrow{RM_3}, \overrightarrow{RI})$ les autres angles qui, compte tenu des données, ont de proche en proche le même double :

«On sait reconnaître les angles qui ont le même double "dans un cercle" puis ceux qui ont le même double parce qu'ils "se rentrent dedans".

On continue ainsi jusqu'à ce qu'on tombe sur le double de l'angle $(\overrightarrow{RM_1}, \overrightarrow{RI})$. Après il n'y a plus qu'à rédiger la solution».

La rédaction de la solution suscite encore les commentaires suivants :

- On se sert de la colinéarité pour "sauter d'un cercle dans un autre". Par exemple, en remplaçant $\overrightarrow{QM_3}$ par $\overrightarrow{QM_2}$ on passe du cercle \mathcal{C}_3 dans le cercle \mathcal{C}_2 .
- Si on avait mis plus de cercles passant par I , la solution serait plus longue à rédiger mais à la sortie, au lieu d'un triangle, on aurait un polygone avec autant de côtés qu'il y a de cercles au début. Quel que soit le nombre de cercles, on revient toujours au point de départ M_1 .

Exercice 4: Parallélisme de droites.

Soit un triangle ABC non rectangle en A ; \mathcal{C} son cercle circonscrit; B_1 et C_1 les pieds de ses hauteurs issues de B et de C ; \mathcal{D}_A la tangente en A à \mathcal{C} .

1°) Montrer que les droites \mathcal{D}_A et (B_1C_1) sont parallèles.

2°) Montrer que la tangente \mathcal{D}_A est parallèle à la droite (BC) si et seulement si le triangle ABC est isocèle en A .

Solution

Soit T un point autre que A de la tangente \mathcal{D}_A

1°) Nous avons, d'une part :

$$2(\widehat{AT, AB}) = 2(\widehat{CA, CB})$$

d'autre part :

$$2(\widehat{C_1B_1, C_1B}) = 2(\widehat{CB_1, CB})$$

cocyclicité des points B, C_1, B_1 et C .

On en déduit :

$$2(\widehat{C_1B_1, AB}) = 2(\widehat{CA, CB})$$

colinéarité de $\begin{cases} \overrightarrow{C_1B_1} \text{ et } \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{CB_1} \text{ et } \overrightarrow{CA} \end{cases}$

$$\text{puis : } 2(\widehat{C_1B_1, AB}) = 2(\widehat{AT, AB})$$

égalité qui traduit que les vecteurs $\overrightarrow{C_1B_1}$ et \overrightarrow{AT} sont colinéaires.

Conclusion :

Dans le plan \mathcal{P} , les droites (B_1C_1) et \mathcal{D}_A sont parallèles.

2°) Nous avons :

$$(BC) // \mathcal{D}_A \iff \overrightarrow{BC} \text{ et } \overrightarrow{AT} \text{ sont colinéaires.}$$

$$\iff 2(\widehat{BC, BA}) = 2(\widehat{AT, BA})$$

traduction angulaire

$$\iff 2(\widehat{BC, BA}) = 2(\widehat{AT, AB})$$

colinéarité de \overrightarrow{BA} et \overrightarrow{AB}

$$\iff 2(\widehat{BC, BA}) = 2(\widehat{CA, CB})$$

(AT) est tangente à \mathcal{C} en A

$$\iff ABC \text{ isocèle en } A$$

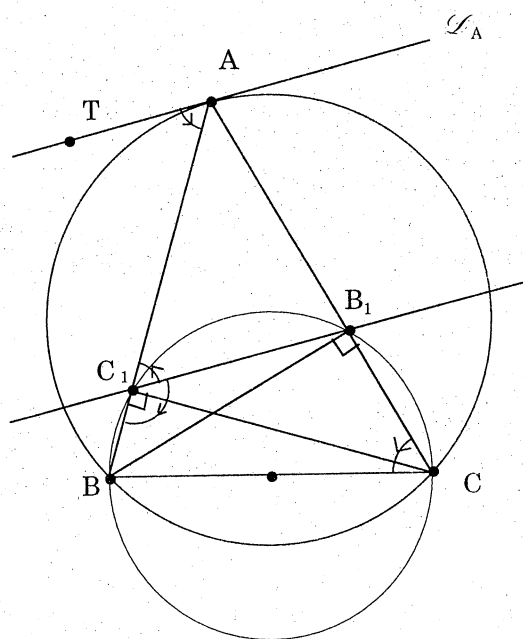


Fig. 97

Exercice 5 : Orthogonalité de droites

Dans le plan \mathcal{P} , **deux** droites parallèles \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 passent respectivement par des points A et B diamétralement opposés sur un cercle \mathcal{C} .

Soit M un point de \mathcal{C} autre que A et B : P, Q et R ses projetés orthogonaux sur les droites $(AB), \mathcal{D}_1$ et \mathcal{D}_2 . Montrer que les droites (PQ) et (PR) sont orthogonales.

Solution.

▲ Lorsque M n'appartient ni à \mathcal{D}_1 ni à \mathcal{D}_2

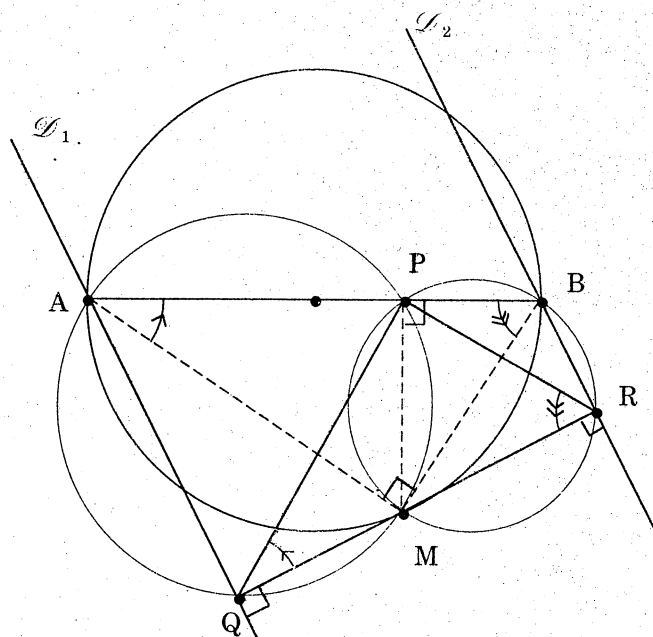


Fig. 98

Les points clés de la configuration sont deux à deux distincts.

Nous avons alors,

$$\begin{aligned}
 \text{d'une part : } 2(\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP}) &= 2(\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QP}) && \text{colinéarité de } \overrightarrow{QR} \text{ et } \overrightarrow{QM} \\
 &= 2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}) && \text{cocyclicité de } P, M, Q \text{ et } A \\
 &= 2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) && \text{colinéarité de } \overrightarrow{AP} \text{ et } \overrightarrow{AB}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d'autre part : } 2(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) &= 2(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RM}) && \text{colinéarité de } \overrightarrow{RQ} \text{ et } \overrightarrow{RM} \\
 &= 2(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BM}) && \text{cocyclicité de } R, M, P \text{ et } B \\
 &= 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) && \text{colinéarité de } \overrightarrow{BP} \text{ et } \overrightarrow{BA}
 \end{aligned}$$

On en déduit :
$$2(\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP}) + 2(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) = 2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) = \hat{\pi}$$
 car le triangle AMB est rectangle en M .

Dès lors, l'égalité $2(\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{QP}) + 2(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}) = \hat{\pi}$ traduit que le triangle PQR est rectangle en P .

Les droites (PQ) et (PR) sont donc orthogonales.

▲ Lorsque $M \in \mathcal{D}_1$ ou $M \in \mathcal{D}_2$, la propriété précédente est banalement vérifiée ainsi que le montrent les deux figures suivantes.

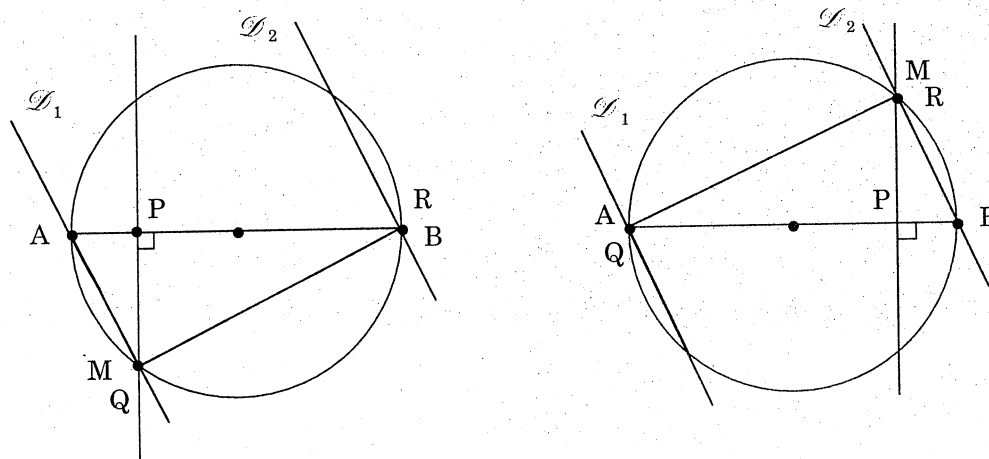


Fig. 99

Exercice 6 : Bissectrices du triangle "orthique"

Soit un triangle ABC non rectangle, H son orthocentre, A_1, B_1 et C_1 les pieds des hauteurs issues des sommets A, B et C .

Il s'agit de montrer que les droites $(A_1H), (B_1H)$ et (C_1H) hauteur du triangle ABC sont des bissectrices de son triangle "orthique" $A_1B_1C_1$.

Solution

Au vu de la figure ci-contre, on peut être tenté d'établir, par exemple, que la droite (A_1H) est la bissectrice intérieure issue de A_1 du triangle orthique $A_1B_1C_1$

via l'égalité $\widehat{(A_1B_1, A_1H)} = \widehat{(A_1H, A_1C_1)}$

Or nous ne sommes pas en mesure de le faire car, pour faire intervenir la cocyclicité évidente de certains points-clés de la configuration, nous sommes contraints d'utiliser les doubles d'angle.

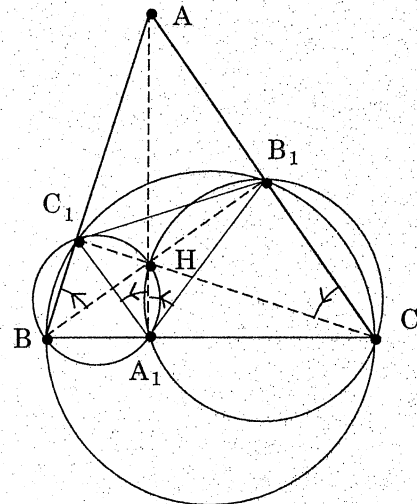


Fig 100

Nous avons ainsi :

$$\begin{aligned} 2(\widehat{A_1B_1, A_1H}) &= 2(\widehat{CB_1, CH}) \\ &= 2(\widehat{CB_1, CC_1}) \\ &= 2(\widehat{BB_1, BC_1}) \\ &= 2(\widehat{BH, BC_1}) \\ &= 2(\widehat{A_1H, A_1C_1}) \end{aligned}$$

cocyclicité de A_1, H, B_1 et C .

colinéarité de \overrightarrow{CH} et $\overrightarrow{CB_1}$

cocyclicité de C, B_1, C_1 et B

colinéarité de $\overrightarrow{BB_1}$ et \overrightarrow{BH}

cocyclicité de B, C_1, H et A_1 .

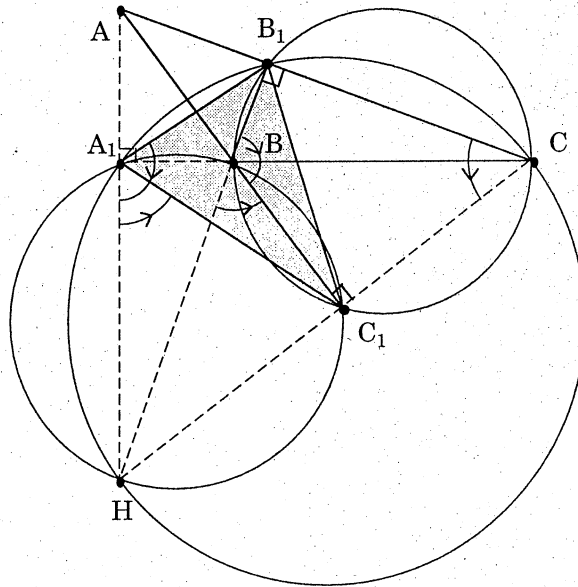


Fig 101

Dans le plan \mathcal{P} , cette dernière égalité traduit que la hauteur (A_1H) du triangle ABC est **une des deux** bissectrices (intérieure ou extérieure) issue du sommet A_1 du triangle orthique $A_1B_1C_1$, l'autre étant, de manière évidente, la droite (BC) .

La figure ci-dessus qui représente encore la configuration étudiée, confirme si besoin est, la pertinence de notre raisonnement.

On établirait de façon analogue que les hauteurs (B_1H) et (C_1H) du triangle ABC ainsi que les droites (CA) et (AB) sont aussi des bissectrices du triangle orthique $A_1B_1C_1$.

Commentaire

La stricte utilisation des théorèmes du cours peut donc nous mettre à l'abri de conclusions erronées inspirées par l'observation d'illustrations particulières de la configuration étudiée que l'on appelle traditionnellement "cas de figures".

Exercice 7 : Droite de Simson, droite de Steiner

Dans le plan \mathcal{P} , soit un triangle ABC , un point M ; P, Q et R ses projetés orthogonaux sur les droites $(BC), (CA)$ et (AB) ; P', Q' et R' ses symétriques par rapport à ces mêmes droites.

Le but de l'exercice consiste à montrer que les points P, Q et R (resp. P', Q' et R') sont alignés si et seulement si le point M appartient au cercle (ABC) .

1. On suppose que M n'appartient pas à la droite (BC)

a) Justifier l'égalité : $2\widehat{(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM})} - 2\widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM})}$

b) En déduire que les points P, Q et R sont alignés si, et seulement si, M est un point du cercle ABC autre que B et C .

2. On suppose maintenant que M appartient à la droite (BC)

a) Montrer que si M est distinct des points B et C alors les points P, Q et R ne sont pas alignés.

b) Que se passe-t-il lorsque $M = B$ ou $M = C$?

3.a) Quelle est la conclusion de l'étude précédente ?

b) En déduire une conclusion analogue pour ce qui concerne les points P', Q' et R' .

Solution

1. On suppose que M n'appartient pas à (BC)

On a alors $P \neq M$ et $P \neq Q$ et $P \neq R$

a) Lorsque $Q \neq C$ et $R \neq B$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\widehat{(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})} &= 2\widehat{(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PM})} + 2\widehat{(\overrightarrow{PM}, \overrightarrow{PR})} \\ &= 2\widehat{(\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CM})} + 2\widehat{(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BR})} \end{aligned}$$

cocyclicité de P, M, Q et C d'une part et de P, M, R et B , d'autre part.

$$2\widehat{(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM})} + 2\widehat{(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA})}$$

colinéarité des vecteurs \overrightarrow{CQ} et \overrightarrow{CA} , et des vecteurs \overrightarrow{BR} et \overrightarrow{BA}

$$2\widehat{(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM})} - 2\widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM})}$$

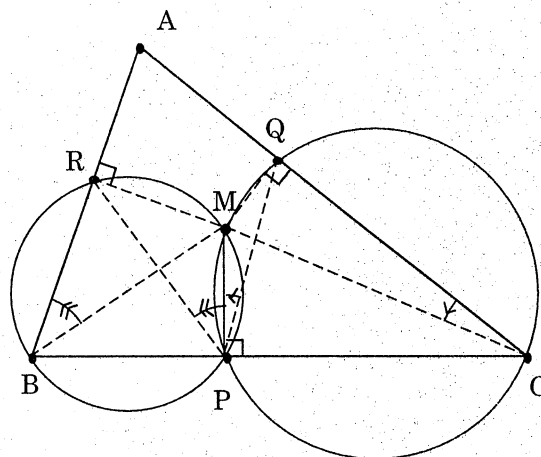


Fig. 102

b) Lorsque $Q = C$ ou $R = B$, la droite (CA) est tangente au cercle (MPC) ou la droite (AB) est tangente au cercle (MPB) . En se référant au théorème 5, on doit remplacer le vecteur nul \overrightarrow{CQ} (ou \overrightarrow{BR}) par un vecteur directeur de la tangente (CA) (ou (AB)).

C'est ce qui est fait lors de l'étude précédente.

Par conséquent, pour tout point M de $\mathcal{P} \setminus (BC)$

$$2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}) - 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM})$$

Lorsque M est un point de $\mathcal{P} \setminus (BC)$, on a donc :

$$\begin{aligned} P, Q \text{ et } R \text{ alignés} &\iff 2(\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{PR}) = \hat{0} \\ &\iff 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CM}) = 2(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BM}) \\ &\iff M \in \mathcal{C} \setminus \{B, C\} \end{aligned}$$

\mathcal{C} désignant le cercle (ABC) .

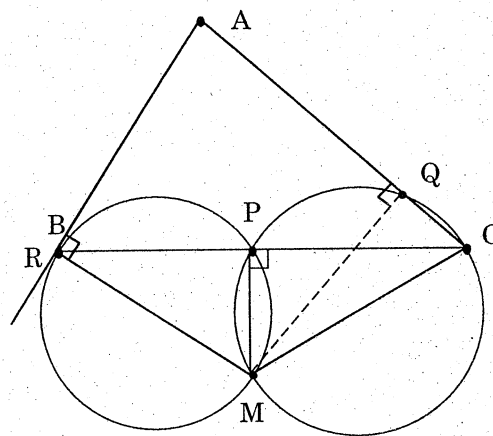


Fig. 103

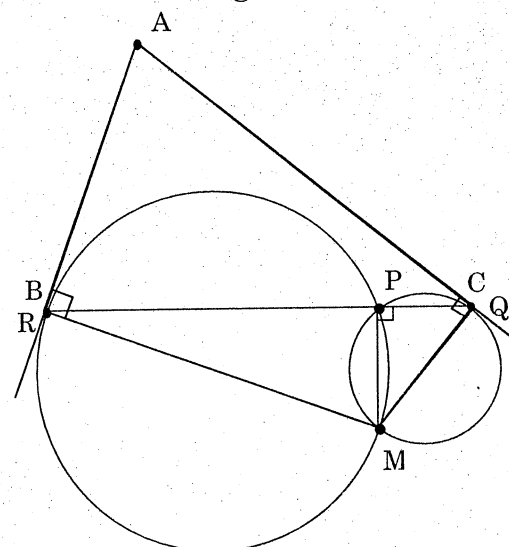


Fig. 104

2. On suppose maintenant que M appartient à la droite (BC)

On a alors : $P = M$.

a) Lorsque $M \neq B$ et $M \neq C$, les points P, Q et R sont deux à deux distincts et appartiennent au cercle de diamètre $[AM]$. Ils sont donc non alignés.

b) Lorsque $M = B$ ou $M = C$, on a : $P = R$ ou $P = Q$.

Les points P, Q et R sont alors banalement alignés.

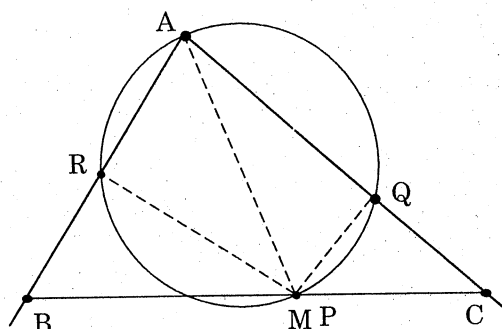


Fig. 105

Par conséquent, lorsque M est un point de (BC) , on a :

$$P, Q, R \text{ alignés} \iff M = B \text{ ou } M = C$$

3.a) L'étude précédente peut se résumer ainsi :

$$\begin{aligned}
 P, Q \text{ et } R \text{ alignés} &\iff M \in \mathcal{C} \setminus \{B, C\} \text{ ou } M = B \text{ ou } M = C \\
 &\iff M \in \mathcal{C} \text{ c'est-à-dire au cercle } (ABC)
 \end{aligned}$$

b) Il est clair que (figure 106 a) les points P', Q' et R' sont respectivement les transformés des points P, Q et R par l'homothétie de centre M et de rapport 2

Il s'ensuit que (figure 106 b)

$$\begin{aligned}
 P', Q' \text{ et } R' \text{ alignés} &\iff P, Q \text{ et } R \text{ alignés} \\
 &\iff M \text{ est un point du cercle } (ABC)
 \end{aligned}$$

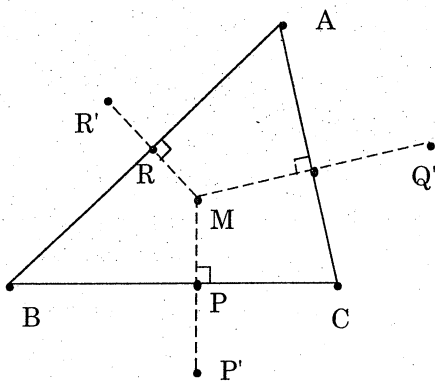


Fig. 106 a

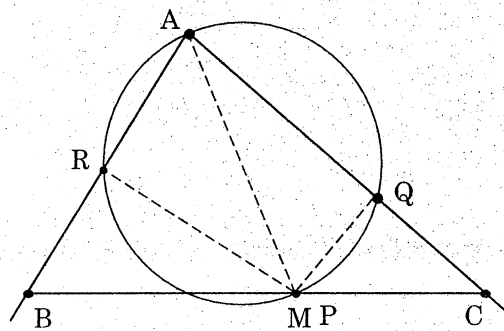


Fig. 106 b

La droite \mathcal{D} qui porte les points P, Q et R et celle \mathcal{D}' qui porte les points P', Q' et R' sont respectivement appelées **droite de Simson** et **droite de Steiner** du triangle ABC relatives au point M .

Lorsque M est confondu avec un sommet du triangle ABC , \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont confondues avec la hauteur issue de ce sommet.

Exercice 8 : lieu géométrique

Dans le plan \mathcal{P} sont donnés un cercle \mathcal{C} et deux points A et B de ce cercle, non diamétralement opposés sur \mathcal{C} .

On considère l'application $\varphi: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{P}$
 $M \longmapsto N$

définie par:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } M = A \text{ alors } N = A \\ \text{Si } M \neq A \text{ alors } N \text{ est le point d'intersection de} \\ \text{la droite } (MB) \text{ et de la médiatrice } \Delta \text{ du segment } [AM] \end{array} \right.$

On convient que, pour $M = B$, (MB) désigne la tangente en B à \mathcal{C} .

Déterminer le lieu géométrique des points N , c'est-à-dire $\varphi(\mathcal{C})$.

Solution

Désignons par Ω le centre du cercle \mathcal{C} .

▲ Etude directe

Nous avons, pour $M \in \mathcal{C} \setminus \{A\}$:

$$2(\widehat{NA, NB}) = 2(\widehat{NA, NM})$$

colinéarité de \overrightarrow{NM}

$$2(\widehat{NA, NB}) = 2(\widehat{MA, MB}) + 2(\widehat{AN, AM})$$

somme des doubles des angles d'un triangle

$$2(\widehat{NA, NB}) = 4(\widehat{MA, MB})$$

le triangle ANM est isocèle en N

$$2(\widehat{NA, NB}) = 2(\widehat{\Omega A, \Omega B})$$

égalité qui traduit que le point N appartient au cercle $(A \Omega B)$.

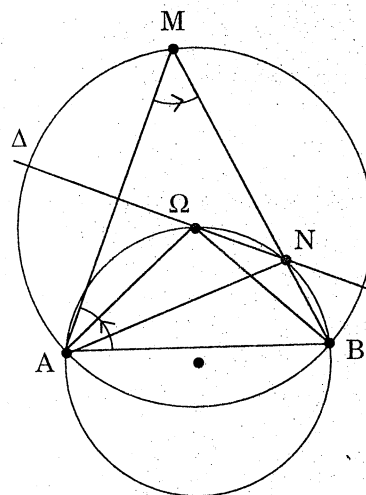


Fig. 107

L'ensemble $\varphi(\mathcal{C})$ est donc contenu dans le cercle $(A \Omega B)$. (i)

▲ Etude réciproque

Soit N un point autre que A du cercle $(A\Omega B)$, M le point où la droite (BN) recoupe le cercle \mathcal{C} . (Pour $N = B$, (BN) désigne la tangente en B au cercle $(A\Omega B)$), M est alors distinct de A et on a, d'une part:

$$2(\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NM}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}}).$$

colinéarité de \overrightarrow{NM} et \overrightarrow{NB}

$$2(\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NM}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QB}})$$

cocyclicité de N, A, B et Ω

$$2(\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NM}}) = 4(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})$$

$M \in \mathcal{C} \setminus \{A\}$

d'autre part:

$$2(\widehat{\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}})$$

somme des doubles des angles d'un triangle

On en déduit:

$$4(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) + 2(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}})$$

puis: $2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}})$

Cette égalité traduit que le triangle ANM est isocèle en N et donc que N est un point de $\varphi(\mathcal{C})$.

Le cercle $(A\Omega B)$ est donc contenu dans l'ensemble $\varphi(\mathcal{C})$ (ii)

Conclusion: de (i) et (ii), il découle que $\varphi(\mathcal{C})$ est le cercle $(A\Omega B)$.

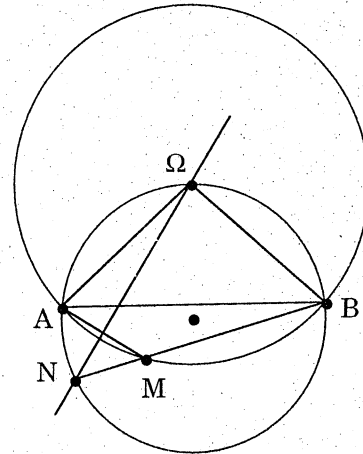


Fig. 108

Exercice 9 : évolution d'un problème dans le cursus scolaire

▲ Les données:

Deux cercles sécants \mathcal{C} et \mathcal{C}' , A et B leurs points communs; deux droites \mathcal{D}_A et \mathcal{D}_B passant respectivement par A et par B et distinctes de la droite (AB) . On désigne par P et P' (resp. Q et Q') les points d'intersection de \mathcal{D}_A (resp. \mathcal{D}_B) avec les cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}'

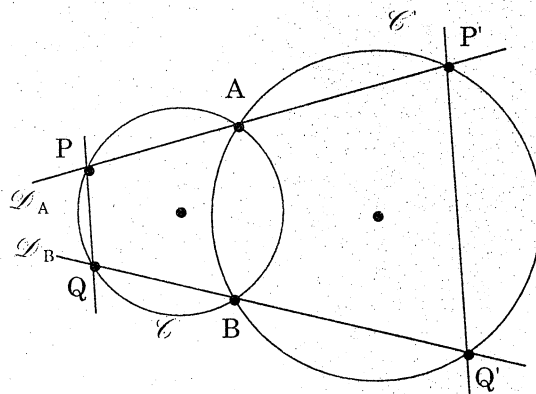


Fig. 109

▲ L'objectif

Il s'agit de montrer que les droites (PQ) et $(P'Q')$ sont parallèles.

a) Etude séparée de deux cas de figure (niveau 3ème-2nde)

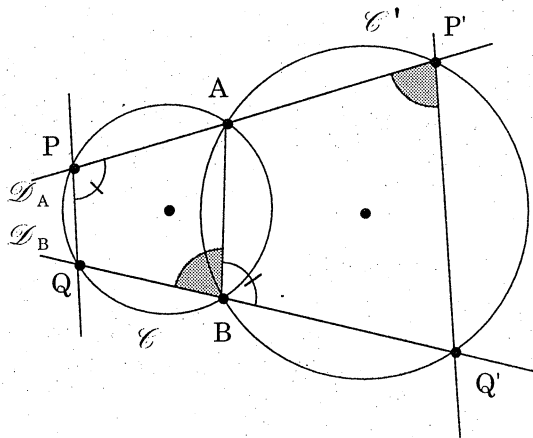


Fig. 110

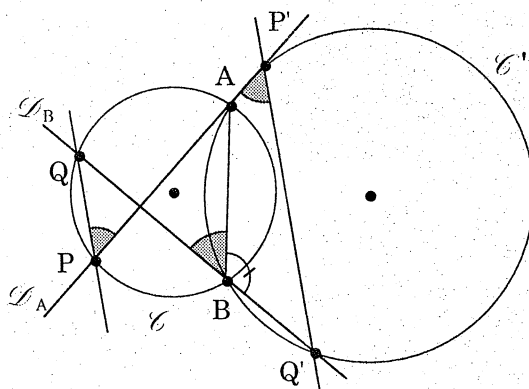


Fig. 111

outil utilisé: secteurs angulaires (secteurs de même mesure, secteurs supplémentaires, secteurs alternes-internes, alternes-externes,...) voir annexe fin de paragraphe.

Dans chacun des cas, la solution est suggérée sur la figure correspondante.

b) Etude d'un cas particulier (niveau 2nde-1ère)

Les droites \mathcal{D}_A et \mathcal{D}_B sont ici parallèles.

Outil utilisé: transformations (réflexions, translation).

- On montre d'abord que les médiatrices Δ et Δ' segments $[PA]$ et $[AP']$ sont aussi celles des segments $[QB]$ et $[BQ']$ et que ces droites sont des diamètres parallèles des cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' .

- Dès lors le schéma:

$$(P, Q) \xrightarrow{s_{\Delta}} (A, B) \xrightarrow{s_{\Delta'}} (P', Q')$$

justifie le résultat attendu puisque « s_{Δ} suivie de $s_{\Delta'}$ » est une translation.

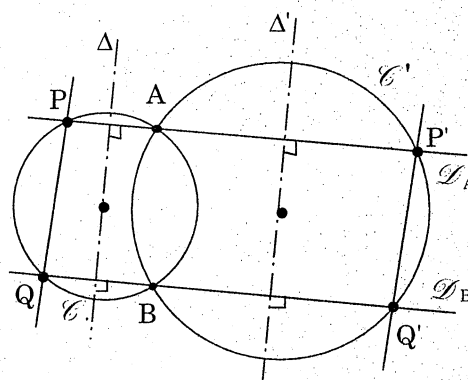


Fig. 112

Commentaire

Il va de soi que l'outil "transformation" est, dans cette étude, moins performant que l'outil "secteur angulaire" puisque le cas que l'on vient de traiter est, sur le plan de la généralité, en retrait sur les cas précédents.

c) Etude du problème dans son intégralité (niveau terminale)

On convient à ce niveau que lorsque $P = Q$ (resp. $P' = Q'$) la notation (PQ) (resp. $(P'Q')$) désigne la tangente en P à \mathcal{C} (resp. en P' à \mathcal{C}').

▲ Inventaire des différents cas de figures possibles

Les cercles \mathcal{C} et \mathcal{C}' ainsi que les droites \mathcal{D}_A et \mathcal{D}_B jouant des rôles identiques, l'inventaire des différents cas de figures peut se résumer ainsi:

1. Les droites \mathcal{D}_A et \mathcal{D}_B sont **sécantes** à \mathcal{C} et à \mathcal{C}'
 - (i) les points P et Q et les points P' et Q' sont **distincts**
 - (ii) les points P et Q ou les points P' et Q' sont **confondus**
2. **L'une** des droites \mathcal{D}_A et \mathcal{D}_B est **tangente** à **l'un** des cercles \mathcal{C} ou \mathcal{C}' .
 - (i) les points P et Q et les points P' et Q' sont **distincts**
 - (ii) les points P et Q ou les points P' et Q' sont **confondus**
3. Les deux droites \mathcal{D}_A et \mathcal{D}_B sont **tangentes** au même cercle (soit \mathcal{C} , soit \mathcal{C}')
 - (i) les points P et Q et les points P' et Q' sont **distincts**
 - (ii) les points P et Q ou les points P' et Q' sont **confondus**
4. Les deux droites \mathcal{D}_A et \mathcal{D}_B sont tangentes l'une à \mathcal{C} , l'autre à \mathcal{C}' .

▲ Solution

- Elle est rédigée en se référant au cas (1 - i) qui englobe les deux cas de figure étudiés dans le premier exercice (figures (113) et (114))
- Elle reste valable pour tous les autres cas de figure en utilisant le théorème (5)
(par exemple pour le cas (4) illustré figure (115))

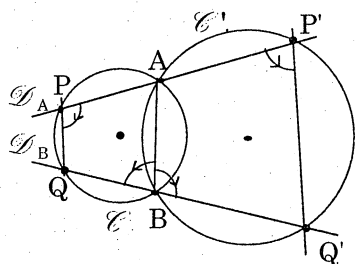


Fig. 113

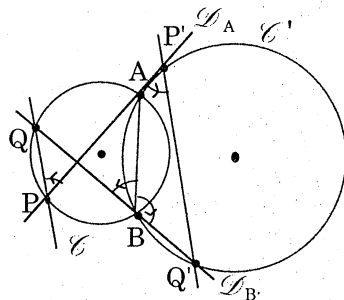


Fig. 114

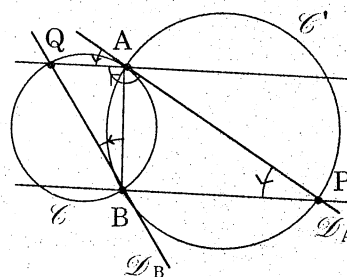


Fig. 115

$$\begin{aligned}
 \bullet 2(\widehat{PP', PQ}) &= 2(\widehat{PA, PQ}) && \text{colinéarité de } \overrightarrow{PP'} \text{ et } \overrightarrow{PA} \\
 &= 2(\widehat{BA, BQ}) && \text{cocyclicité de } P, Q, A \text{ et } B \\
 &= 2(\widehat{BA, BQ'}) && \text{colinéarité de } \overrightarrow{BQ} \text{ et } \overrightarrow{BQ'} \\
 &= 2(\widehat{P'A, P'Q'}) && \text{cocyclicité de } Q', B, A \text{ et } P' \\
 &= 2(\widehat{PP', P'Q'}) && \text{colinéarité de } \overrightarrow{P'A} \text{ et } \overrightarrow{PP'}
 \end{aligned}$$

La dernière égalité traduit que les vecteurs \overrightarrow{PQ} et $\overrightarrow{P'Q'}$ sont colinéaires. Donc, dans \mathcal{P} , les droites (PQ) et $(P'Q')$ sont parallèles.

Commentaire

Le problème qui consiste à faire dresser l'inventaire de tous les cas de figures possibles n'est pas dénué d'intérêt dès lors qu'on apprend aux élèves à conduire cette recherche de façon non empirique.

Il convient alors d'insister sur le fait qu'on détient maintenant un **outil performant** puisqu'il permet de résoudre le problème posé **indépendamment des cas figures en une seule "version"**. Si besoin est de convaincre son auditoire, il ne faut pas hésiter à **faire illustrer** chacun des cas précédemment inventoriés puis à **faire vérifier** que la solution proposée dans le cas "général" s'adapte à chacune des autres figures produites.

Lorsque le niveau de la classe le permet, on pourra progressivement aller vers une solution plus concise. Sachant qu'un double d'angle ne change pas quand on remplace un vecteur non nul entrant dans son libellé par un vecteur non nul colinéaire, on peut attribuer à chaque droite intervenant dans le problème un vecteur directeur **non fixé**.

En désignant par $\vec{d}_A, \vec{d}_B, \vec{p}, \vec{p}'$ des vecteurs directeurs des droites $\mathcal{D}_A, \mathcal{D}_B, (PQ)$ et $(P'Q')$, la rédaction de la solution de notre problème peut se réduire à:

$$\widehat{(\vec{d}_A, \vec{p})} = \widehat{(AB, \vec{d}_B)} = \widehat{(\vec{d}_A, \vec{p}')}.$$

Les vecteurs \vec{p} et \vec{p}' sont alors colinéaires. Donc, dans \mathcal{P} , les droites (PQ) et $(P'Q')$ sont parallèles. La rédaction de la solution est ainsi vite expédiée.

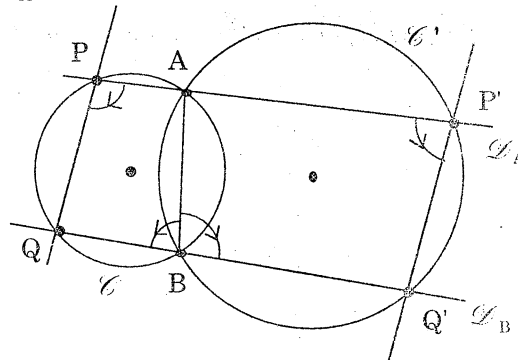


Fig. 116

Exercice 10 : Généralisation de la droite de Simson

Cet exercice est une suite de l'exercice précédent.

▲ Les données (dans \mathcal{P}):

Un triangle ABC ; M un point du cercle (ABC) autre que B et C ; P un point du plan \mathcal{P} n'appartenant pas au cercle (ABC) .

On désigne par:

- Q le point d'intersection, si possible autre que C , de la droite (CA) et du cercle (MPC)
- R le point d'intersection, si possible autre que B , de la droite (AB) et du cercle (MPB)

▲ L'objectif:

Il s'agit de montrer que:

- Les points P, Q et R sont alignés.
- Pour un choix particulier de P , la droite qui porte les points P, Q, R est la droite de Simson du triangle ABC relative au point M .
- Les droites de Simson du triangle ABC relatives à deux points M et M_1 diamétralement opposés sur le cercle (ABC) privé des points B et C sont orthogonales.

Solution

1. Désignons par A' le point où la droite (MP) recoupe le cercle (ABC) .

Le résultat de l'exercice (8) appliqué

- aux cercles (ABC) et (MPC) sécants en M et C
- aux cercles (ABC) et (MPB) sécants en M et B nous prouve que les droites (PQ) et (AA') } sont parallèles
- (PR) et (AA') } sont parallèles

Les points P, Q et R sont donc alignés.

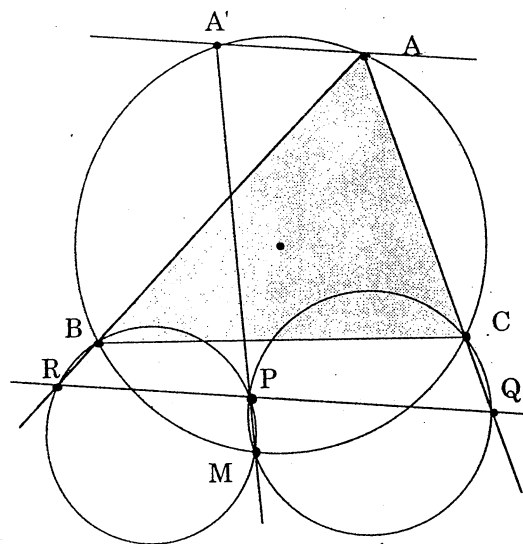


Fig. 117

2. Lorsque P est le projeté orthogonal de M sur la droite (BC) , les cercles (MPC) et (MPB) ont respectivement pour diamètre $[MC]$ et $[MB]$.

Les points Q et R sont alors les projetés orthogonaux de M sur les droites (CA) et (AB) .

La droite portant les points P, Q et R est alors la droite de Simson du triangle ABC relative au point M .

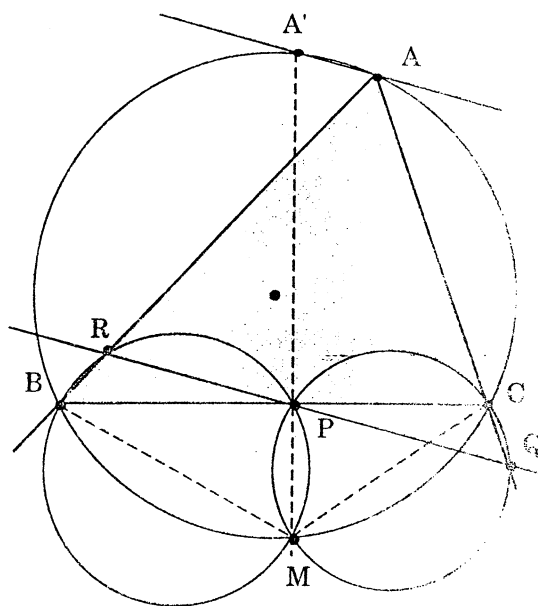


Fig.118

3. Désignons par P_1 le projeté orthogonal de M_1 sur (BC) , par A_1 le point où la droite (M_1P_1) recoupe le cercle (ABC) et par Ω le centre de ce cercle.

On peut alors schématiser la situation comme suit:

$$\left. \begin{array}{l} (ABC) \\ M \\ (MP) \end{array} \right\} \xleftrightarrow{s_\Omega} \left\{ \begin{array}{l} (ABC) \\ M_1 \\ (M_1P_1) \end{array} \right. \text{ car } (MP) \parallel (M_1P_1)$$

On en déduit:

$$\left. \begin{array}{l} M \\ (ABC) \cap (MP) \end{array} \right\} \xleftrightarrow{s_\Omega} \left\{ \begin{array}{l} M_1 \\ (ABC) \cap (M_1P_1) \end{array} \right. \text{ ce qui prouve que } A_1 = s_\Omega(A')$$

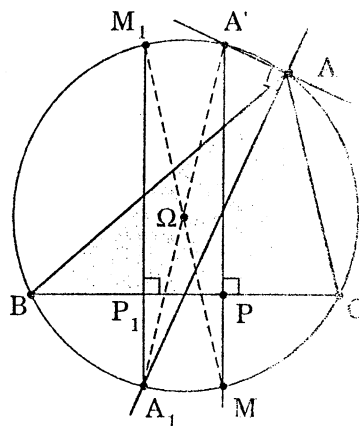


Fig.119

Les droites (AA') et (AA_1) sont alors orthogonales. Les droites de Simson du triangle ABC relatives aux points M et M_1 étant respectivement parallèles à ces deux droites sont donc orthogonales.

Remarque

Nous laissons au lecteur le soin de justifier que cette dernière propriété est encore vérifiée lorsque les points M ou M_1 sont confondus avec les points B ou C .

Annexe

▲ Secteurs (*) alternes internes: présentation et propriétés

a-Quelques illustrations du concept

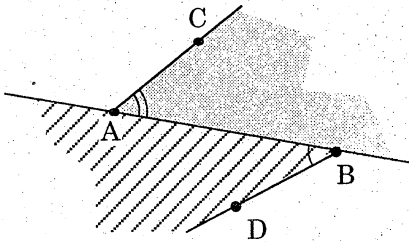


Fig. 120

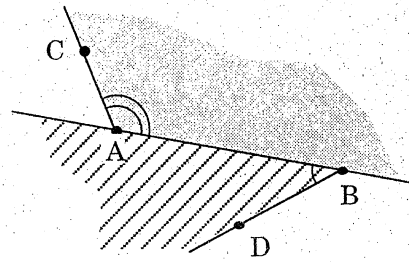


Fig. 121

Dans chacun des cas ci-dessus, les secteurs \widehat{BAC} et \widehat{ABD} sont dits alternes-internes.

b-Définition

Deux secteurs de **sommets distincts** sont dits **alternes-internes** pour signifier que :

- 1° **Chaque** secteur a un côté qui passe par un sommet de l'autre secteur.
- 2° Ces secteurs ne sont pas contenus dans un même demi-plan ayant pour bord la droite des sommets (celle qui passe par les deux sommets)

c-Propriétés (i)

P₁ Etant donné deux secteurs alternes-internes, **si** leurs côtés à supports distincts sont parallèles **alors** ces secteurs ont même mesure.

P₂ Etant donné deux secteurs alternes-internes, **si** ces secteurs ont même mesure **alors** leurs côtés à supports distincts sont parallèles

▲ Secteurs correspondants: présentation et propriétés

a-Quelques illustrations du concept

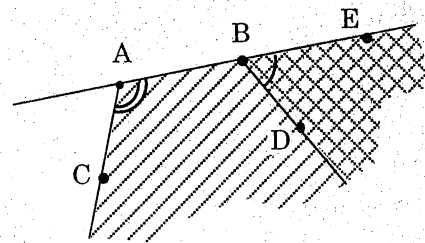
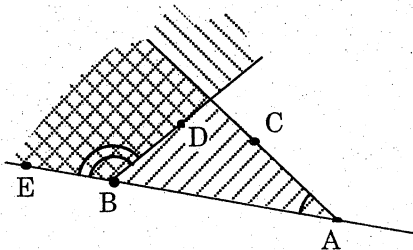


Fig. 122

Dans chacun des cas ci-dessus, les secteurs \widehat{BAC} et \widehat{DBE} sont dits correspondants.

b-Définition

Deux secteurs de **sommets distincts** sont dits **correspondants** pour signifier que :

- 1° **L'un** des secteurs a un côté qui contient un côté de l'autre secteur.
 - 2° Ces secteurs sont contenus dans un même demi-plan ayant pour bord la droite des sommets (celle qui passe par les deux sommets).
-

c-Propriétés (ii)

P₃ Etant donné deux secteurs correspondants, **si** leurs côtés à supports distincts sont parallèles **alors** ces secteurs ont même mesure.

P₄ Etant donné deux secteurs correspondants, **si** ces secteurs ont même mesure **alors** leurs côtés à supports distincts sont parallèles

Ceci dit, en utilisant les transformations qui entrent dans leur définition, on peut facilement justifier les résultats suivants:

Le fait d'utiliser les transformations pour établir les propriétés précédentes (en particulier la propriété **(ii)**) relativise -c'est le moins qu'on puisse dire- le jugement porté sur la performance comparée des outils "secteurs" et "transformations" dans le commentaire qui suit les versions (a) et (b) de l'exercice (9).

(*) Pour la définition de "secteur": voir partie B, II, 1° commentaire ou le document "**Angles de la quatrième à la terminale**" publié par l'**IREM d'Aquitaine**.

VI. LIGNES DE NIVEAU $(A, B)_{\hat{\alpha}}$ et $(A, B)_{\hat{\alpha}+\hat{\pi}}$

1. Deux résultats à connaître

a) Premier résultat

Théorème (6)

Soit, dans le plan \mathcal{P} , un triangle MAB ;
 I le point du cercle MAB équidistant
de A et de B et n'appartenant pas au
même demi-plan de frontière (AB) que
le point M .

Alors la droite (MI) est la bissectrice
des demi-droites $[MA)$ et $[MB)$

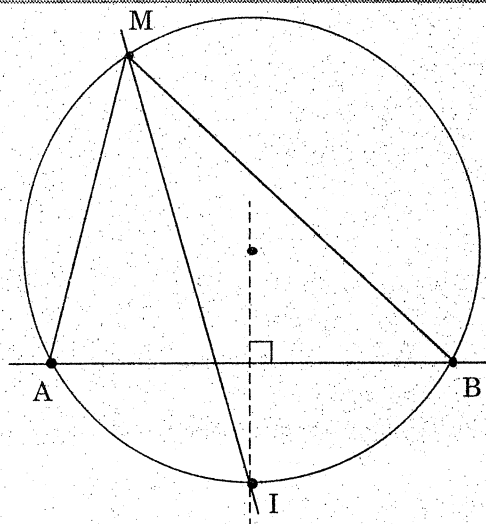


Fig. 123

Démonstration

Nous l'avons volontairement scindée en trois étapes.

1ère étape

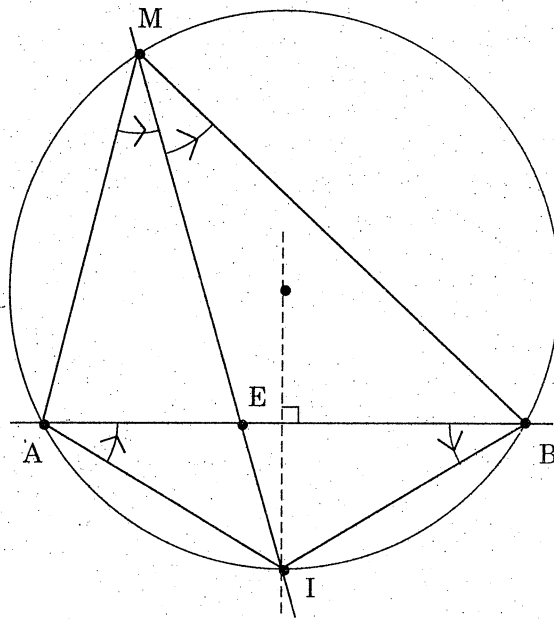


Fig. 124

Nous avons d'une part,
$$\begin{cases} 2(\widehat{MA, MI}) = 2(\widehat{BA, BI}) & \text{cyclicité de } M, A, I \text{ et } B \\ 2(\widehat{MI, MB}) = 2(\widehat{AI, AB}) & \text{cyclicité de } M, B, I \text{ et } A \end{cases}$$

d'autre part, $2(\widehat{AI, AB}) = 2(\widehat{BA, BI})$ car le triangle AIB est isocèle en I .

On en déduit: $2(\widehat{MA, MI}) = 2(\widehat{MI, MB})$ égalité qui traduit que la droite (MI) est **une** des deux bissectrices des **droites** (MA) et (MB) .

2ème étape

Les points M et I étant situés de part et d'autre de la droite (AB) , la **corde** $[MI]$ du cercle MAB a avec cette droite **un** point commun E autre que M et I . Par conséquent le point E est **intérieur** au cercle MAB . C'est donc un point de la corde $[AB]$ de ce cercle autre que A et B .

En d'autres termes, les points A et B sont situés de part et d'autre de la droite (MI) .

3ème étape

Désignons maintenant par $p\ell((MI), A)$ et $p\ell((MI), B)$ les demi-plans de frontière (MI) contenant respectivement les points A et B .

La situation peut alors se schématiser ainsi:

$$\left. \begin{array}{l} (MA) \\ p\ell((MI), A) \end{array} \right\} \xleftrightarrow{s_{(MI)}} \left\{ \begin{array}{l} (MB) \\ p\ell((MI), B) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{voir 1ère étape} \\ \text{voir 2ème étape} \end{array}$$

On en déduit:

$$(MA) \cap p\ell((MI), A) \xleftrightarrow{s_{(MI)}} (MB) \cap p\ell((MI), B)$$

$$\text{c'est-à-dire: } [MA] \xleftrightarrow{s_{(MI)}} [MB]$$

ce qui prouve que la droite (MI) est la bissectrice des **demi-droites** $[MA)$ et $[MB)$

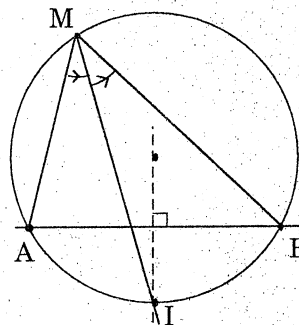


Fig 125

Commentaire

La fin de cette démonstration, notamment la 2ème étape, laissera le puriste insatisfait. Mais ne pouvant nous appuyer sur une construction axiomatique de la géométrie plane ni faire référence à la notion de **convexité**, c'est la seule argumentation "intuitivement convaincante" que nous ayons pu trouver.

Remarque (ou rappel)

Les bissectrices des droites (MA) et (MB) sont aussi appelées bissectrice **intérieure** et bissectrice **extérieure** issues du sommet M du triangle MAB , celle qualifiée d'intérieure étant la bissectrice des demi-droites $[MA)$ et $[MB)$.

Sachant que ces bissectrices sont orthogonales, le résultat précédemment acquis permet d'énoncer:

La bissectrice intérieure et la bissectrice extérieure issues du sommet M d'un triangle MAB donné recoupent respectivement le cercle circonscrit à ce triangle en deux points I et J diamétralement opposés sur la médiatrice du segment $[AB]$.

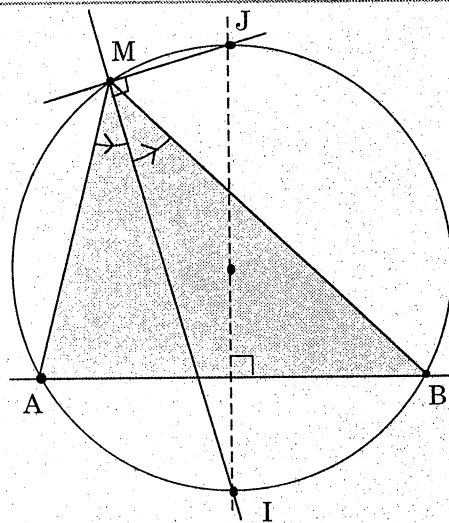


Fig. 126

Il semble ici qu'il soit superflu de préciser que les points M et I sont situés de part et d'autre de la droite (AB) car la probabilité de se tromper est quasiment nulle.

b) Deuxième résultat

Théorème (7)

Soit, dans le plan \mathcal{P} , un cercle \mathcal{C} et **deux** points A et B de cercle; T un point autre que A de sa tangente en A ; I le point de \mathcal{C} équidistant de A et de B et appartenant au même demi-plan de frontière (AB) que le point T .

Alors la droite (AI) est **la** bissectrice des **demi-droites** $[AT)$ et $[AB)$.

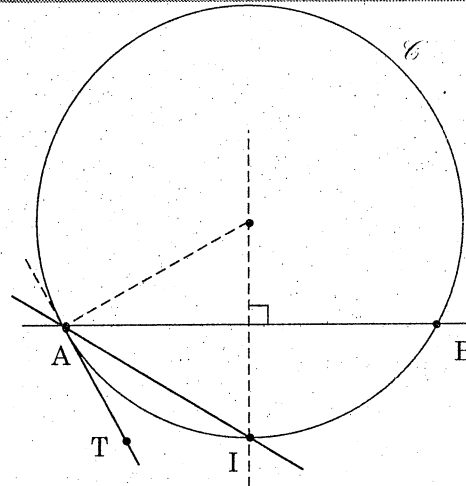


Fig. 127

Démonstration

1ère étape

Nous avons d'une part,

$$2(\widehat{AT}, \widehat{AI}) = 2(\widehat{BA}, \widehat{BI})$$

car (AT) est tangente en A à \mathcal{C}

d'autre part,

$$2(\widehat{AI}, \widehat{AB}) = 2(\widehat{BA}, \widehat{BI})$$

car le triangle AIB est isocèle en I .

On en déduit:

$$2(\widehat{AT}, \widehat{AI}) = 2(\widehat{AI}, \widehat{AB}).$$

égalité qui traduit que la droite (AI) est **une** des deux bissectrices des **droites** (AT) et (AB) .

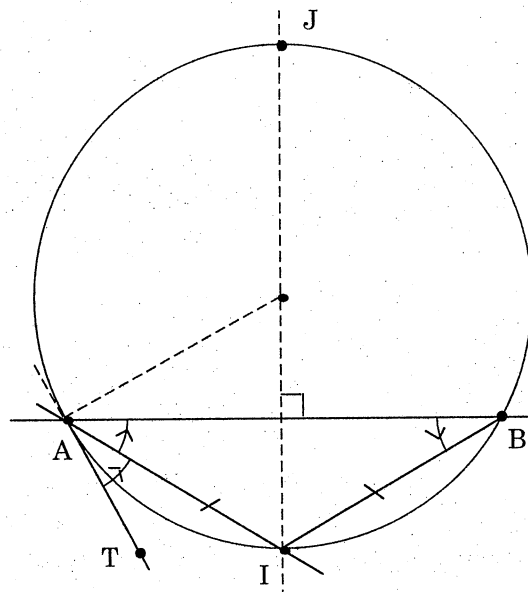


Fig. 128

2ème étape

Désignons maintenant par $p\ell((AT), I)$ et $p\ell((AB), I)$ les **demi-plans de frontières** (AT) et (AB) qui contiennent le point I .

La situation peut alors se schématiser ainsi:

$$\left. \begin{array}{l} (AT) \\ p\ell((AB), I) \end{array} \right\} \xleftrightarrow{s_{(AI)}} \left\{ \begin{array}{l} (AB) \\ p\ell((AT), I) \end{array} \right. \quad \text{voir 1ère étape}$$

On en déduit:

$$(AT) \cap p\ell((AB), I) \xleftrightarrow{s_{(AI)}} (AB) \cap p\ell((AT), I)$$

c'est-à-dire: $[AT] \xleftrightarrow{s_{(AI)}} [AB]$ ce qui prouve que la droite (MI) est la bissectrice des **demi-droites** $[AT]$ et $[AB]$

Remarque:

La bissectrice autre que (AI) des droites (AT) et (AB) passe par le point J diamétralement opposé à I sur la médiatrice du segment $[AB]$.

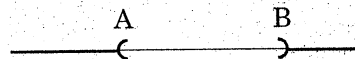
2. Lignes de niveau $(A, B)_{\hat{\alpha}}$ et $(A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}}$

a) Définition

Deux points A et B du plan \mathcal{P} et un angle $\hat{\alpha}$ de \mathcal{A} étant donnés, on appelle **ligne de niveau $\hat{\alpha}$ du bipoint (A, B)** l'ensemble - noté $(A, B)_{\hat{\alpha}}$ - des points M de $\mathcal{P} \setminus \{A, B\}$ vérifiant l'égalité: $\widehat{(MA, MB)} = \hat{\alpha}$

Ainsi, par exemple:

$$(A, B)_{\hat{\delta}} = (AB) \setminus [AB]$$



$$(A, B)_{\hat{\pi}} = [AB] \setminus \{A, B\}$$



b) Détermination des lignes de niveau $(A, B)_{\hat{\alpha}}$ et $(A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}}$ pour $\alpha \neq \hat{\alpha}$ et $\hat{\alpha} \neq \hat{\pi}$

▲ Pour se faire une idée

Considérons la figure ci-contre où \mathcal{D}_A est la tangente en A au cercle \mathcal{C} et T un point autre que A de cette droite.

Nous savons que les angles qui y sont signifiés ont tous le même double.

En posant: $\widehat{(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})} = \hat{\alpha}$, on a donc, pour tout point M de \mathcal{C} autre que A et B:

$$2\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = 2\widehat{(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})} = 2\hat{\alpha}$$

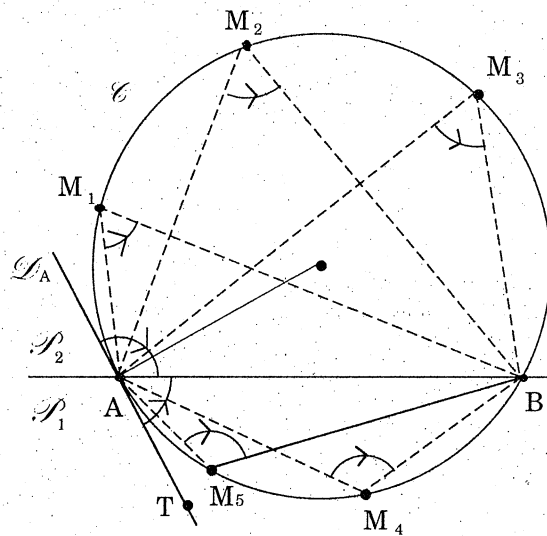


Fig. 129

C'est-à-dire:

- soit $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = \hat{\alpha}$
- soit $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = \hat{\alpha} + \hat{\pi}$

Désignons maintenant par \mathcal{P}_1 le demi-plan $p\ell((AB), T)$ privé de sa frontière (AB). \mathcal{P}_1 est appelé demi-plan ouvert de frontière (AB) contenant le point T.

En notant \mathcal{P}_2 l'autre demi-plan ouvert de frontière (AB), il semble plausible, au vu de la figure que:

$$\begin{cases} \widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = \hat{\alpha} \text{ lorsque } M \text{ est élément de l'arc } \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_2 \\ \widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = \hat{\alpha} + \hat{\pi} \text{ lorsque } M \text{ est élément de l'arc } \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_1 \end{cases}$$

Compte tenu de la définition précédente, on peut alors conjecturer:

$$\begin{cases} (A, B)_{\hat{\alpha}} = \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_2 \\ (A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}} = \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_1 \end{cases}$$

▲ Vérification de cette conjecture

Deux points A et B de \mathcal{P} et un angle $\hat{\alpha}$ de $\mathcal{A} \setminus \{\hat{0}, \hat{\pi}\}$ étant donnés, désignons par:

- \mathcal{C} le cercle passant par B et tangent en A à la droite (AT) définie par l'égalité $\widehat{(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})} = \hat{\alpha}$ (c'est à dire que T est un point autre que A de la transformée de la **demi-droite** $[AB)$ par la rotation de centre A et d'angle $-\hat{\alpha}$).
- \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 les demi-plans **ouverts** de frontière (AB) , le point T étant élément de \mathcal{P}_1
- I et J les points de \mathcal{C} diamétralement opposés sur la médiatrice de $[AB]$; le point I étant élément de \mathcal{P}_1 .

1°) Etude directe

Soit M un point **du cercle** \mathcal{C} autre que A et B . Nous avons alors:

d'une part,

$$\begin{aligned} 2\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MI})} &= 2\widehat{(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AI})} && \text{cf th.(4)} \\ &= \widehat{(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})} && \text{cf th(7)} \\ &= \hat{\alpha} \end{aligned}$$

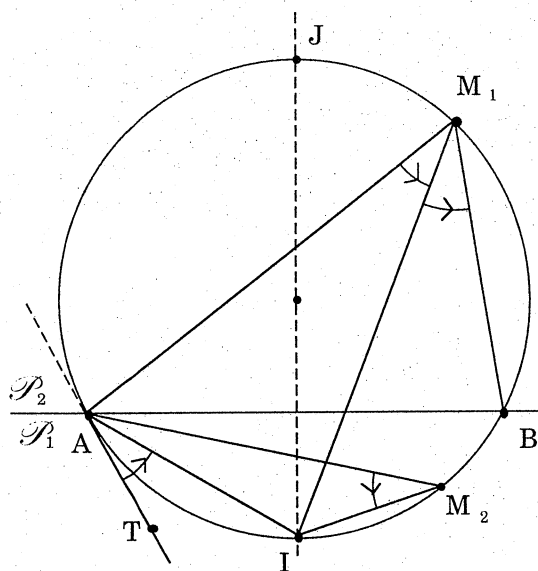


Fig. 130

d'autre part,

$$\begin{aligned} 2\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MJ})} &= 2\widehat{(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AJ})} && \text{cf h(4)} \\ &= 2\widehat{(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AI})} + 2\widehat{(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ})} \\ &= \hat{\alpha} + \hat{\pi} && \text{car } \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{AJ} \end{aligned}$$

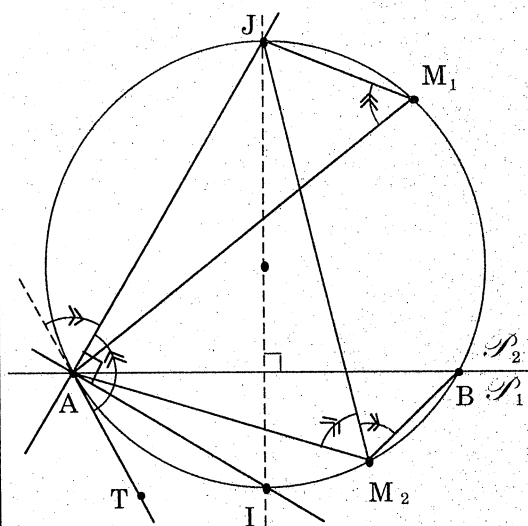


Fig. 131

Par suite

<p>Sous l'hypothèse: «$M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_2$», on a:</p> $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = 2\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MI})} \quad \text{c.f.Th(6)}$ $= \hat{\alpha}$ <p>Donc: $M \in (A, B)_{\hat{\alpha}}$</p>	<p>Sous l'hypothèse: «$M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_1$», on a:</p> $\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = 2\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MJ})} \quad \text{c.f.Th(6)}$ $= \hat{\alpha} + \hat{\pi}$ <p>Donc: $M \in (A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}}$</p>
---	---

ce qui peut se traduire par

$$\mathcal{C} \cap \mathcal{P}_2 \subset (A, B)_{\hat{\alpha}} \quad (1) \quad \parallel \quad \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_1 \subset (A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}} \quad (2)$$

2°) Etude réciproque

Soit M un point **du plan** \mathcal{P} autre que A et B .

Sous l'hypothèse: « $M \in (A, B)_{\hat{\alpha}}$ ou $M \in (A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}}$ » on a:

$$2\widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} = 2\hat{\alpha} = 2\widehat{(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})} \quad \text{donc } M \text{ appartient à } \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$$

Dès lors:

<p>Si $M \in (A, B)_{\hat{\alpha}}$, on ne peut avoir: $M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_1$ sinon on aurait: $M \in (A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}}$ d'après (2) Donc: $M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_2$</p>	<p>Si $M \in (A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}}$, on ne peut avoir: $M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_2$ sinon on aurait: $M \in (A, B)_{\hat{\alpha}}$ d'après (1) Donc: $M \in \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_1$</p>
--	--

Ce qui peut se traduire par

$$(A, B)_{\hat{\alpha}} \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_2 \quad (3) \quad \parallel \quad (A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}} \subset \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_1 \quad (4)$$

Conclusion

Des inclusions (1) et (3), puis (2) et (4), il découle que:

$$\begin{cases} (A, B)_{\hat{\alpha}} = \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_2 \\ (A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}} = \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_1 \end{cases}$$

ce qui authentifie la conjecture précédemment émise.

Théorème (8):

Deux points A et B du plan \mathcal{P} et un angle $\hat{\alpha}$ de $\mathcal{A} \setminus \{\hat{\delta}, \hat{\pi}\}$ étant donnés,

- \mathcal{C} le cercle passant par B et tangent en A à la droite (AT) définie par l'égalité

$$\widehat{(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})} = \hat{\alpha}$$

- \mathcal{P}_1 (resp \mathcal{P}_2) le demi-plan ouvert de frontière (AB) contenant (resp ne contenant pas) le point T .

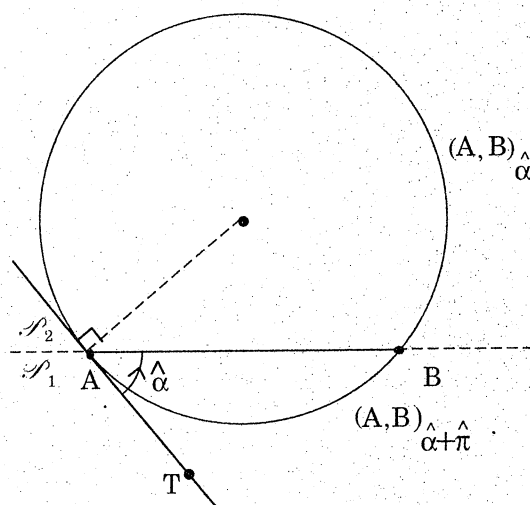


Fig. 132

Alors: $\begin{cases} (A, B)_{\hat{\alpha}} \text{ est l'arc } \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_2 \\ (A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}} \text{ est l'arc } \mathcal{C} \cap \mathcal{P}_1 \end{cases}$

Ces résultats nous incitent à introduire la terminologie suivante:

Etant donné deux points A et B du plan \mathcal{P} , pour tout angle $\hat{\alpha}$ de \mathcal{A} , les lignes de niveau $(A, B)_{\hat{\alpha}}$ et $(A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}}$ sont dites **duales**

Ainsi, la réunion de **deux lignes de niveau duales** d'un bipoint (A, B) est

- soit un cercle passant par A et par B , A et B exclus (cas général)
- soit la droite (AB) privée des points A et B pour $\hat{\alpha} = \hat{\delta}$ ou $\hat{\alpha} = \hat{\pi}$

c) Construction des lignes de niveau $(A, B)_{\hat{\alpha}}$ et $(A, B)_{\hat{\alpha}+\hat{\pi}}$ ($\hat{\alpha} \neq \hat{0}$ et $\hat{\alpha} \neq \hat{\pi}$)

▲ Construction de la droite (AT) définie par l'égalité: $\widehat{(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})} = \hat{\alpha}$

Données:

- Les deux points A et B de \mathcal{P}
- l'image A' de l'angle $\hat{\alpha}$ sur le cercle Γ_N

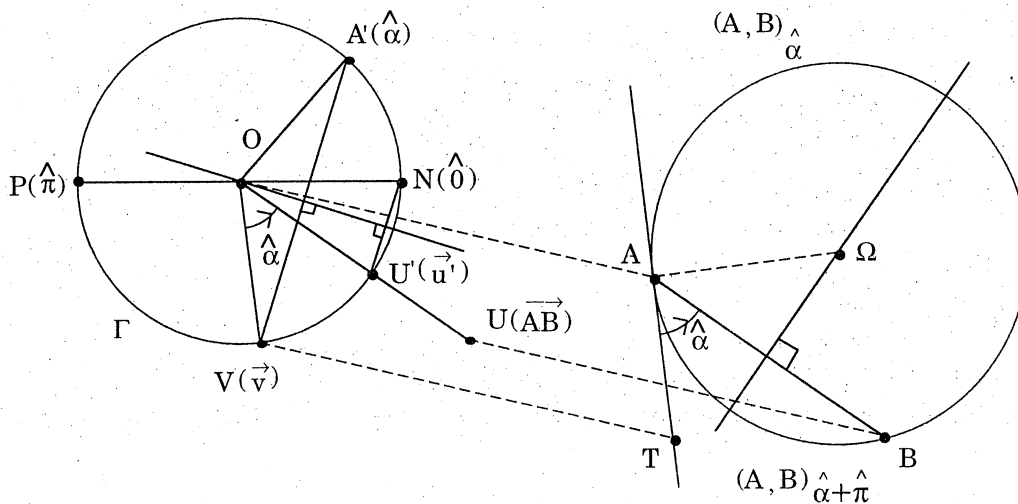


Fig. 133

Construction:

Elle se passe de commentaire. Il suffit de placer le point T défini par l'égalité: $\overrightarrow{AT} = \vec{v}$ (ou $\overrightarrow{AT} = \lambda \vec{v}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$).

▲ Construction de $(A, B)_{\hat{\alpha}}$ et $(A, B)_{\hat{\alpha}+\hat{\pi}}$

On trace successivement

- La droite (AT) telle que $\widehat{(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})} = \hat{\alpha}$
 - La médiatrice du segment $[AB]$ et l'orthogonale en A à la droite (AT)
- Ces deux droites se coupent en Ω car $\hat{\alpha} \neq \hat{0}$ et $\hat{\alpha} \neq \hat{\pi}$.

La ligne de niveau $(A, B)_{\hat{\alpha}}$ (resp $(A, B)_{\hat{\alpha}+\hat{\pi}}$) est l'arc du cercle \mathcal{C} centré en Ω et passant par A qui est contenu dans le demi-plan ouvert de frontière (AB) dont T n'est pas (resp est) élément.

Bien entendu, si lors de la résolution d'un problème, on n'a recours qu'à une seule ligne de niveau du type précédent, il est inutile de construire aussi sa duale.

▲ Nota

Le processus de construction décrit ci-dessus est aussi le mode d'emploi pour tracer l'ensemble des points M du plan \mathcal{P} vérifiant l'égalité

$$2\widehat{(\vec{MA}, \vec{MB})} = 2\hat{\alpha}.$$

Cet ensemble est le cercle \mathcal{C} centré en Ω et passant par A car, sauf mention contraire, nous ferons désormais notre la convention formulée dans le théorème (5), page 77.

VII. Deuxième batterie d'exercices résolus

Exercice 11: parallélogramme "inscriptible"

Montrer qu'un parallélogramme inscrit dans un cercle est un rectangle.

Nous allons proposer deux solutions.
La première, à l'opposé de la seconde, utilise la notion de ligne de niveau d'un bipoint.
Elles font toutes les deux intervenir le point de concours I des diagonales $[AC]$ et $[BD]$

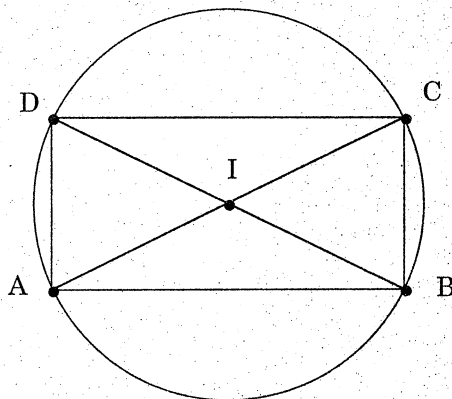


Fig. 134

Solution (1)

Nous avons, d'une part,

$$\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \widehat{(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})} \quad (\text{symétrie de centre } I)$$

d'autre part, $\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})} + \hat{\pi}$ car les points A et C appartiennent respectivement à deux lignes de niveau duale du bipoint (B, D) .

On en déduit, par addition membre à membre des termes de ces égalités:

$$2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \hat{\pi}$$

égalité qui traduit que les droites (AB) et (AD) sont orthogonales.

Le parallélogramme $ABCD$ est donc un rectangle.

Solution (2)

Nous avons, d'une part:

$$2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB})} \quad \text{effet de la symétrie de centre } I.$$

d'autre part:

$$2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = 2\widehat{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})} \quad \text{cocyclicité des points } ABCD.$$

On en déduit, par addition membre à membre des termes de ces égalités:

$$4\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \hat{\delta} \quad \text{puis, soit } 2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \hat{\delta}, \text{ soit } 2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \hat{\pi}.$$

Or l'éventualité $2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \hat{\delta}$ qui traduit que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} sont colinéaires ne peut se produire. Reste donc l'égalité $2\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} = \hat{\pi}$ qui conduit à la même conclusion que précédemment.

Nota: On trouve d'autres solutions de cet exercice dans le fascicule «Cinq problèmes de géométrie plane» publiée par l'I.R.E.M. d'Aquitaine.

Exercice 12: problème d'optimisation

▲ Les données (dans \mathcal{P})

L'arc \widehat{AB} d'un cercle \mathcal{C}

▲ L'objectif

Il s'agit de déterminer pour quelle(s) position(s) du point M sur l'arc \widehat{AB} la somme $MA + MB$ est maximum

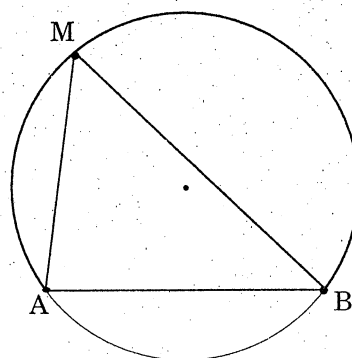


Fig. 135

Solution

L'idée qui la régente est la suivante: on introduit le point N défini par les relations:

$$MN = MA \text{ et } M \in [NB].$$

On a alors:

$$MA + MB = NM + MB = NB$$

et le problème posé revient à chercher pour quelle(s) position(s) du point M sur l'arc \widehat{AB} le segment $[NB]$ a une longueur maximale.

Ceci dit, nous avons pour M élément de $\widehat{AB} \setminus \{A\}$

$$2(\widehat{NA, NB}) = 2(\widehat{NA, NM})$$

\vec{NB} et \vec{NM} sont colinéaires

$$2(\widehat{NA, NB}) = \hat{\pi} - (\widehat{MN, MA})$$

le triangle AMN est isocèle en M

$$2(\widehat{NA, NB}) = (\widehat{MA, MN}) + (\widehat{MN, MB})$$

$M \in [NB] \setminus \{N, B\}$

$$2(\widehat{NA, NB}) = (\widehat{MA, MB})$$

$$2(\widehat{NA, NB}) = (\widehat{IA, IB})$$

en introduisant le point I de l'arc \widehat{AB} équidistant de A et de B .

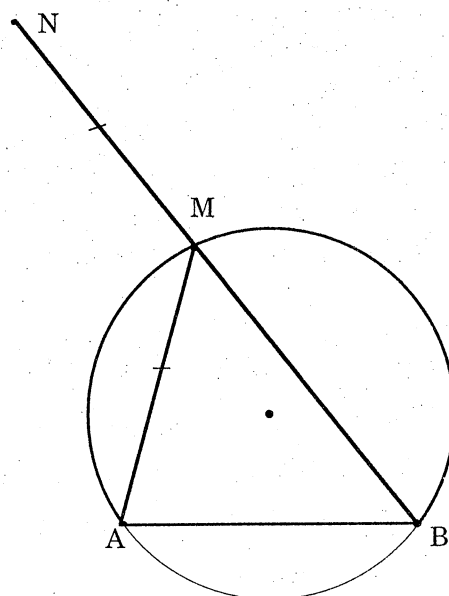


Fig. 136

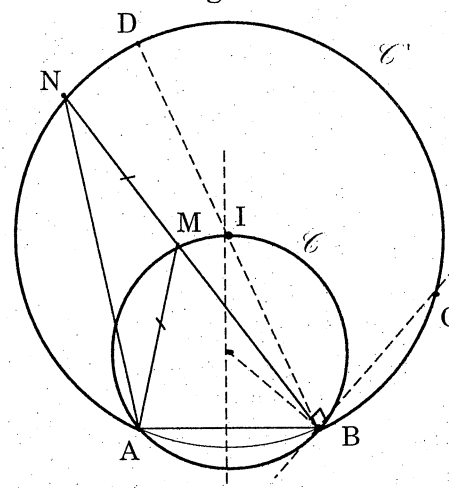


Fig. 137

Cette dernière égalité prouve que le point N est élément du cercle \mathcal{C}' centré en I et passant par B .

Par suite, la corde $[BN]$ de ce cercle est de longueur maximale lorsqu'elle est diamétrale c'est-à-dire lorsque $M = I$.

Reste à remarquer que, pour $M = A$, on a:

$$MA + MB = AB < IA + IB.$$

Conclusion:

Pour tout point M de l'arc \widehat{AB} le nombre $MA + MB$ est maximum pour $M = I$.

Prolongement.

Nous laissons au lecteur le soin d'établir que le lieu géométrique des points N lorsque M décrit l'arc \widehat{AB} privé des points A et B est la ligne de niveau $(A, C)_{\hat{\alpha}}$ où $\hat{\alpha} = (\widehat{IA}, \widehat{IB})$.

Exercice 13: lieu géométrique

Dans le plan \mathcal{P} sont donnés un cercle \mathcal{C} et deux points A et B de ce cercle. On considère l'application f de $\mathcal{C} \setminus \{B\}$ dans \mathcal{P} qui à tout point M associe le point N de la **demi-droite** $[MB]$ tel que $MN = MA$.

L'objectif du problème est de déterminer le lieu géométrique des points N c'est-à-dire l'ensemble $f(\mathcal{C} \setminus \{B\})$.

Solution

1ère étape Etude directe

Observons d'abord que,

- pour $M = A$, on a: $f(M) = A$
- pour $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$, on a:

$$2 \widehat{(\vec{NA}, \vec{NB})} = 2 \widehat{(\vec{NA}, \vec{NM})}$$

$N \in [M, B)$

$$2 \widehat{(\vec{NA}, \vec{NB})} = \hat{\pi} + \widehat{(\vec{MA}, \vec{MN})}$$

Le triangle AMN est isocèle en M

$$2 \widehat{(\vec{NA}, \vec{NB})} = \widehat{(\vec{MA}, \vec{MB})} + \hat{\pi}$$

$\vec{MB} \in \mathbb{R}_+ \vec{MN}$

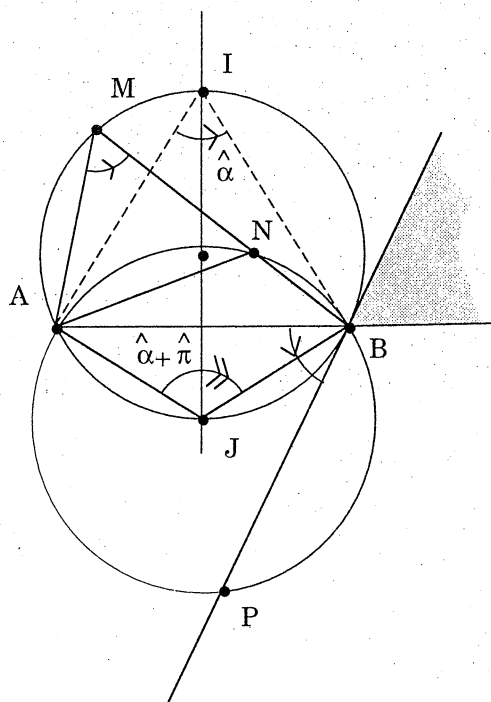


Fig. 138

Pour gérer cette dernière égalité -notée (e)- considérons les points d'intersection I et J du cercle \mathcal{C} et de la médiatrice du segment $[AB]$,

puis posons: $\widehat{(\vec{IA}, \vec{IB})} = \hat{\alpha}$.

Alors le point J appartient à la ligne de niveau $(A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}}$ duale de $(A, B)_{\hat{\alpha}}$

Ceci dit, deux éventualités sont à observer:

▲ $M \in (A, B)_{\hat{\alpha}}$. Dans ce cas, on a: $\widehat{(\vec{MA}, \vec{MB})} = \hat{\alpha}$ voir figure 138.

Par suite l'égalité (e) se réduit à: $2 \widehat{(\vec{NA}, \vec{NB})} = \hat{\alpha} + \hat{\pi} = \widehat{(\vec{JA}, \vec{JB})}$

ce qui prouve que N appartient au cercle \mathcal{C}_J centré en J et passant par B (et par A).

On a donc: $f((A, B)_{\hat{\alpha}}) \subset \mathcal{C}_J$.

Intuitivement, on pressent que cette inclusion est "trop large". Quelques constructions de N "point par point" viennent corroborer cette conjecture.

On note P le point où la tangente en B à \mathcal{C} recoupe le cercle \mathcal{C}_J . On désigne par \mathcal{L} la partie non grisée de la figure 138, on a $f((AB)_{\hat{\alpha}})$ qui est inclus dans le complémentaire dans \mathcal{S} de la réunion des secteurs \widehat{ABP} et $s_B(\widehat{ABP})$ privée du point B car les points M, N et B sont alignés.

On a donc maintenant: $f((A, B)_{\hat{\alpha}}) \subset \mathcal{C}_J \cap (\mathcal{L} \cup \{B\})$ puis, du fait que

$$(\widehat{BA}, \widehat{BP}) = (\widehat{IA}, \widehat{IB}) = \hat{\alpha}, \text{ il vient: } f((A, B)_{\hat{\alpha}}) \subset (A, P)_{\hat{\alpha}} \quad (1)$$

▲ $M \in (A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}}$. Dans ce cas, il est clair que **par dualité**, en notant Q le point d'intersection de la tangente (BP) et du cercle \mathcal{C}_I centré en I et passant par B , on obtient l'inclusion:

$$f((A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}}) \subset (A, Q)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}} \quad (2)$$

Des inclusions (1) et (2) et de l'égalité

$$f(A) = A$$

on déduit:

$$f(\mathcal{C} \setminus \{B\}) \subset (A, P)_{\hat{\alpha}} \cup (A, Q)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}} \cup \{A\} \quad (i)$$

2ème étape: Etude réciproque

Deux éventualités sont encore à observer:

▲ $N \in (A, P)_{\hat{\alpha}}$. Dans ce cas, on est assuré que la droite (NB) recoupe $(A, B)_{\hat{\alpha}}$ en un point, noté M car $N \in \mathcal{L} \cup \{B\}$ -voir figure 140-

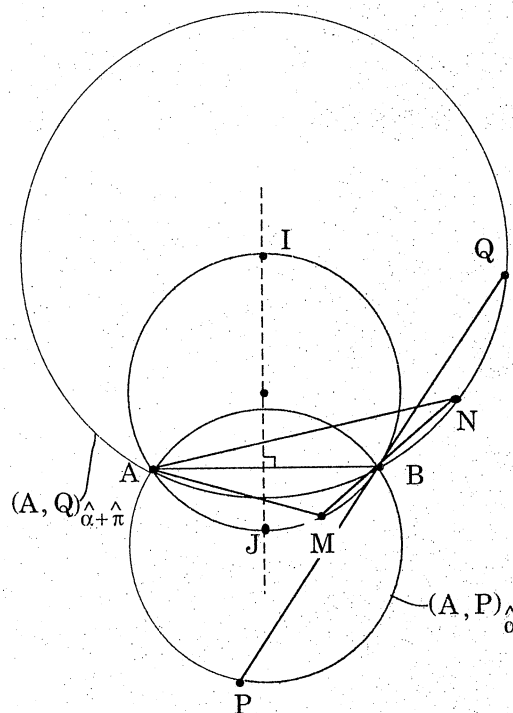


Fig. 139

Nous avons alors, d'une part:

$$2 \widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NM})} = 2 \widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})}$$

colinéarité de \overrightarrow{NM} et \overrightarrow{NB}

$$2 \widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NM})} = 2 \widehat{(\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{JB})} = \hat{\alpha} + \hat{\pi}$$

$$2 \widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NM})} = \widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})} + \hat{\pi}$$

d'autre part, en considérant le triangle AMN :

$$\widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NM})} + \widehat{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})} = \hat{\pi} + \widehat{(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})}$$

On en déduit:

$$2 \widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NM})} = \widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NM})} + \widehat{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})}$$

$$\text{puis: } \widehat{(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NM})} = \widehat{(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN})}$$

égalité qui traduit que, dans \mathcal{P} , le triangle AMN est isocèle en M .

Donc, on a: $N \in f((A, B)_{\hat{\alpha}})$

Ainsi: $(A, P)_{\hat{\alpha}} \subset f((A, B)_{\hat{\alpha}})$ (3)

▲ $N \in (A, Q)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}}$. Dans ce cas, on établit de façon analogue l'inclusion $(A, Q)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}} \subset f((A, B)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}})$ (4)

Des inclusions (3) et (4) et de l'égalité $f(A) = A$, on tire:

$$(A, P)_{\hat{\alpha}} \cup (A, Q)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}} \cup \{A\} \subset f(\mathcal{E} \setminus \{B\}) \quad (ii)$$

L'égalité:

$$f(\mathcal{E} \setminus \{B\}) = (A, P)_{\hat{\alpha}} \cup (A, Q)_{\hat{\alpha} + \hat{\pi}} \cup \{A\}$$

découle alors de (i) et (ii).

Nota: On donnera plus tard une solution plus concise de cet exercice faisant intervenir l'outil "angle" et l'outil "transformation". Compte tenu du résultat acquis, la chose pourra se faire lorsqu'on disposera d'une bijection de \mathcal{P} sur \mathcal{P} qui conserve les angles et multiplie les distances par un même nombre réel non nul.

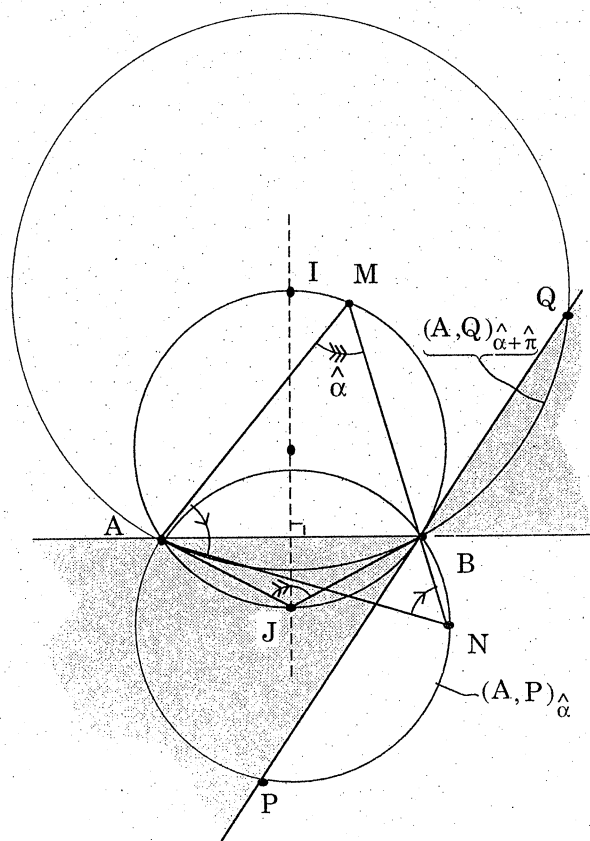


Fig 140

Exercice 14: autre détermination d'une rotation.

▲ Les données (dans \mathcal{P})

Deux bipoints (A, B) et (A', B') tels que $AB = A'B'$ et $\widehat{(\vec{AB}, \vec{A'B'})} \neq \hat{\alpha}$

▲ L'objectif

Il s'agit

- 1°) d'établir qu'il existe une et une seule rotation qui transforme (A, B) en (A', B')
- 2°) de décrire un processus de construction du centre de cette rotation

Solution

1°) Rappelons que toute rotation d'angle $\hat{\alpha}$ transforme un bipoint (M, N) en le bipoint (M', N') tel que $M'N' = MN$ et $\widehat{(\vec{MN}, \vec{M'N'})} = \hat{\alpha}$

1ère étape: analyse du problème

S'il existe une rotation qui envoie (A, B) sur (A', B') , alors, en vertu du rappel précédent,

- Son angle $\hat{\alpha}$ ne peut être que l'angle $\widehat{(\vec{AB}, \vec{A'B'})}$
- Son centre Ω ne peut être que A quand $A' = A$

sinon il ne peut appartenir qu'à la médiatrice du segment $[AA']$ et à la ligne de niveau $(A, A')_{\hat{\alpha}}$

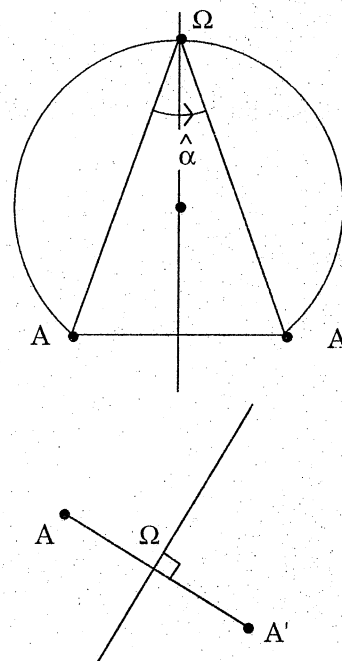


Fig. 141

Sachant que $(A, A')_{\hat{\alpha}}$ est

- soit un arc de cercle d'extrémités A et A' lorsque $\hat{\alpha} \neq \hat{\pi}$;
- soit l'ensemble $[AA'] \setminus \{A, A'\}$ lorsque $\hat{\alpha} = \hat{\pi}$

On est assuré que la médiatrice de $[AA']$ et $(A, A')_{\hat{\alpha}}$ ont un et un seul point commun Ω .

Le problème posé admet donc **au plus une** solution: $r_{\Omega, \hat{\alpha}}$

2ème étape: vérification

On teste si la rotation $r_{\Omega, \hat{\alpha}}$ est **effectivement** une solution du problème.

- Il est clair que cette rotation envoie A sur A' (voir figure 141).
- Elle transforme le bipoint (A, B) en le bipoint (A', B'') tel que:

$$A'B'' = AB = A'B' \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B''}}) = \hat{\alpha} = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$$

On a donc: $\|\overrightarrow{A'B''}\| = \|\overrightarrow{A'B'}\|$ et $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{A'B''}$ où $k \in \mathbb{R}_+$

Il s'ensuit: $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A'B''}$ puis $B' = B''$

Résumons: l'unique rotation qui pouvait être une solution du problème posé transforme effectivement le bipoint (A, B) en le bipoint (A', B') .

Concluons: Le problème posé admet **une et une seule** solution.

On pourra désormais investir le **résultat suivant** dans d'autres exercices

Si, dans le plan \mathcal{P} deux bipoints (A, B) et (A', B') sont tels que:

$$AB = A'B' \text{ et } (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}}) \neq 0$$

alors il existe **une et une seule** rotation de ce plan qui transforme le bipoint (A, B) en le bipoint (A', B')

- son angle $\hat{\alpha}$ est égal à $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}})$
- son centre Ω est confondu avec A lorsque $A' = A$,

sinon Ω est le point d'intersection de la médiatrice du segment $[A, A']$ et de la ligne de niveau $(A, A')_{\hat{\alpha}}$

2°) Construction de Ω lorsque $A \neq A'$

Elle est **théoriquement** réalisable en se conformant à l'énoncé précédent

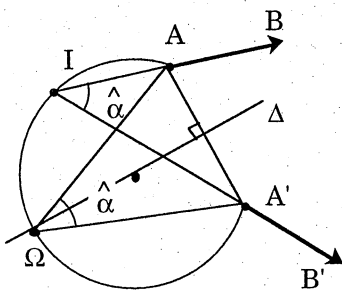


Fig. 142

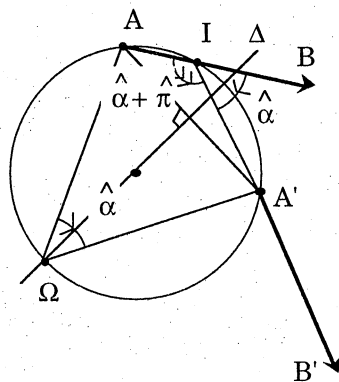


Fig. 143

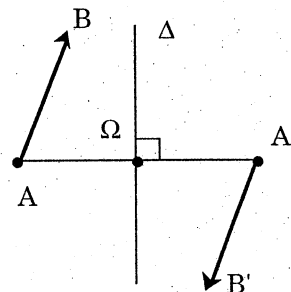


Fig. 144

Remarque

En réalité, on opère souvent d'une autre manière.

En dehors des cas:

- $A = A'$ (resp $B = B'$) pour lequel on a: $\Omega = A$ (resp $\Omega = B$)
- $\vec{AB'} = -\vec{AB}$ pour lequel Ω est le milieu du segment $[A, A']$

Il reste à examiner deux autres éventualités

▲ Les droites (AA') et (BB') sont sécantes

Dans ce cas, Ω est le point d'intersection des médiatrices des segments $[AA']$ et $[BB']$ car Ω vérifie les égalités $\Omega A = \Omega A'$ et $\Omega B = \Omega B'$.

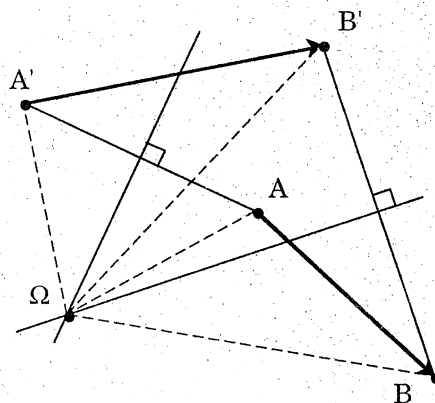


Fig. 145

▲ Les droites (AA') et (BB') sont strictement parallèles

Dans ce cas, Ω est le point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$. En effet, les triangles $\Omega AA'$ et $\Omega BB'$ sont homothétiques.

Posons: $\vec{\Omega B} = x \vec{\Omega A}$.

Alors des égalités:

$$\begin{cases} AB = A'B' \\ \vec{AB} = \vec{\Omega B} - \vec{\Omega A} = (x-1)\vec{\Omega A} \\ \vec{A'B'} = \vec{\Omega B'} - \vec{\Omega A'} = (x-1)\vec{\Omega A'} \end{cases}$$

on tire: $\Omega A = \Omega A'$ car $x \neq 1$

Les triangles $\Omega AA'$ et $\Omega BB'$ sont donc des triangles isocèles admettant le même axe de symétrie.

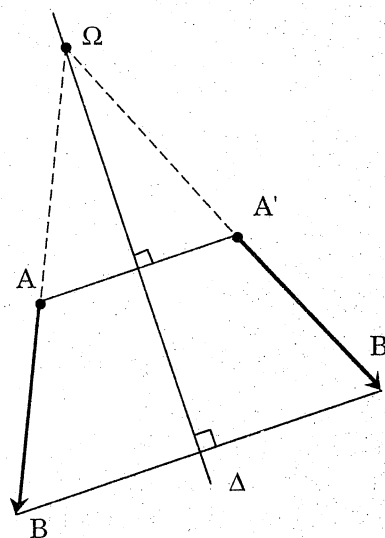


Fig. 146

Dès lors, le schéma:

$$(\Omega, A, B) \xrightarrow{s_{(AB)}} (\Omega, A, B) \xrightarrow{s_{\Delta}} (\Omega, B, B')$$

prouve que la rotation qui envoie (A, B) sur (A', B') est $s_{\Delta} \circ s_{(AB)}$ et que son centre est Ω

VIII. Notion de "mesures" d'un angle

1. Orientation du plan \mathcal{P} , du plan $\vec{\mathcal{P}}$

Considérons le cercle Γ de centre O et de rayon 1.

Dans \mathcal{P}_O , il représente l'ensemble des vecteurs de norme 1.

Muni d'un point de repère N ce cercle représente aussi l'ensemble des angles de \mathcal{A} .

Orienter le plan \mathcal{P} (resp $\vec{\mathcal{P}}$) consiste à faire un choix entre les deux angles droits opposés $\hat{\delta}$ et $\hat{\delta}'$ pour désigner celui qui désormais sera dit **direct**.

Traditionnellement, on choisit $\hat{\delta}$ comme angle droit direct.

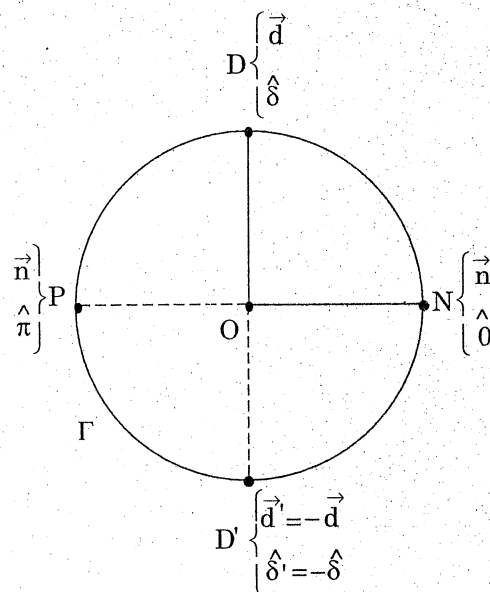


Fig. 147

unité de longueur: 2 cm.

On dit alors que:

- Le repère (O, N, D) est un **repère orthonormal direct** de \mathcal{P}
- La base (\vec{n}, \vec{d}) est une **base orthonormale directe** de $\vec{\mathcal{P}}$.

2. "Mesures" d'un angle

▲ Désignons par Δ la tangente en N au cercle Γ et par R le point de cette droite défini par $\overrightarrow{NR} = \overrightarrow{OD} = \vec{d}$.

La droite Δ est alors munie d'un repère normal (N, R) ce qui permet d'identifier chaque nombre réel au point de cette droite dont il est l'abscisse. On obtient ainsi une représentation géométrique de l'ensemble \mathbb{R} appelée "droite numérique réelle" voir fascicule («*L'enseignement des vecteurs*» publié par l'I.R.E.M 'Aquitaine)

Cela dit, nous allons nous comporter en "physicien" le temps de mettre en évidence un résultat que nous institutionnaliserons.

En enroulant "**la droite numérique réelle**" sur le cercle Γ , on fait coïncider des nombres réels avec des points de Γ_N , c'est-à-dire avec des angles de \mathcal{A} .

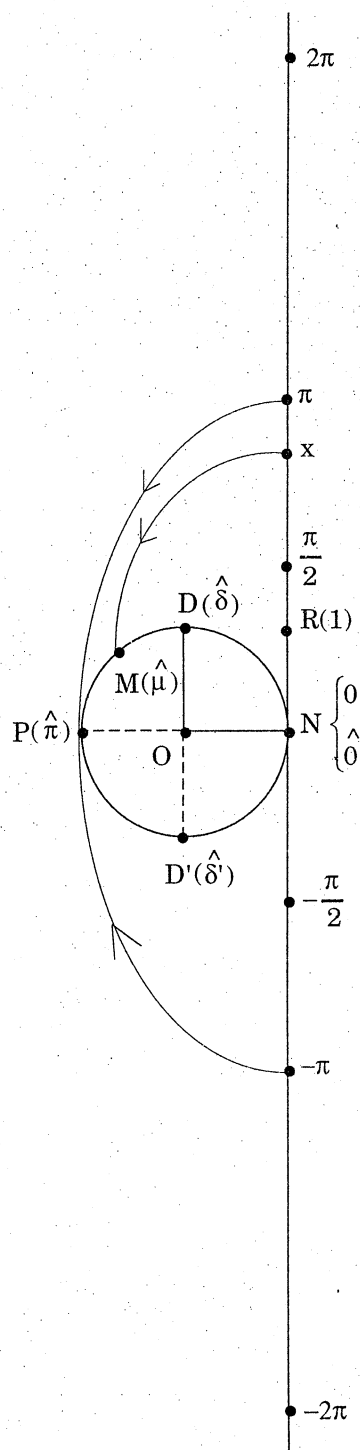


Fig. 148

unité de longueur: 1 cm

La mesure de la longueur du cercle Γ étant égale à 2π on fait coïncider:

- les réels $0 + 2k\pi$ avec l'angle nul \hat{o}
- les réels $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec l'angle droit direct $\hat{\delta}$
- les réels $\pi + 2k\pi$ avec l'angle plat $\hat{\pi}$
- les réels $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec l'angle droit indirect $\hat{\delta}'$

$(k \in \mathbb{Z})$

et d'une façon plus générale

- les réels $x + 2k\pi$ avec l'angle $\hat{\mu}$ c.f. figure 148

▲ Institutionnalisation du résultat

On admet qu'il existe une application

$$\begin{array}{ccc} \psi: \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ x & \longmapsto & \hat{\mu} \end{array}$$

qui possède les propriétés suivantes:

- Elle est périodique et de période 2π
 - Elle est impaire
 - Sa restriction à l'intervalle $]-\pi, \pi]$ est une bijection de $]-\pi, \pi]$ sur \mathcal{A}
- Tout angle $\hat{\mu}$ a donc un et un seul antécédent dans $]-\pi, \pi]$.

On adopte alors les définitions et notations suivantes:

- Les antécédents dans \mathbb{R} de l'angle $\hat{\mu}$ de \mathcal{A} -i.e. les solutions dans \mathbb{R} de l'équation $\psi(x) = \hat{\mu}$ d'inconnue x - sont appelées "**mesures**" de l'angle $\hat{\mu}$.

Tout angle de \mathcal{A} dispose donc d'une infinité de mesures qui diffèrent entre elles d'un multiple entier de 2π .

- Une seule de ces mesures appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$.
On l'appelle **mesure principale** de l'angle $\hat{\mu}$.
- La notation "mes $\hat{\mu}$ " désigne l'une quelconque des mesures de $\hat{\mu}$.
- Pour signifier que deux réels x et y diffèrent de $k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$), on convient d'écrire: $y = x [2\pi]$ qui se lit: «y "égal" x modulo 2π ».

Dès lors, l'égalité angulaire $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ se traduit **numériquement** par

$$\text{mes } \hat{\alpha} = \text{mes } \hat{\beta} [2\pi]$$

- L'angle dont la mesure principale est 1 est appelé **radian**. C'est l'unité d'angle.

3. Mesures de la somme de deux angles

a) Etude "physique" du problème

Soit $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ deux angles de \mathcal{A} ,

- x et y leurs **mesures principales** respectives;
- A et B les images de $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sur le cercle Γ_N ;
- X et Y les images de x et de y sur l'axe (N, R)

Par enroulement de la droite Δ sur le cercle Γ les points X et Y viennent donc respectivement coïncider avec les points A et B .

Considérons maintenant le point C transformé de B par la rotation $r_{O, \hat{\alpha}}$. On conçoit intuitivement que le point Z transformé de Y par la translation $t_{(N, X)}$ est **un** des points de Δ qui vient coïncider avec le point C .

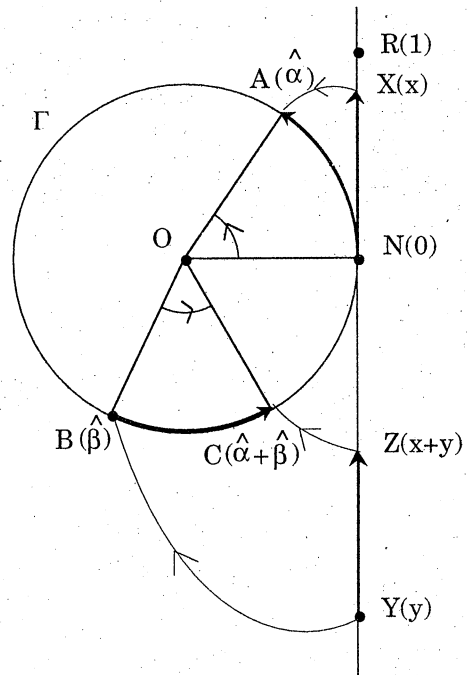


Fig. 149

unité de longueur 2 cm

Ceci étant admis, on sait que:

- Le point C est l'image sur le cercle Γ_N de l'angle $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$. effet de $r_{O, \hat{\alpha}}$
- Le point Z est l'image sur l'axe (N, R) du réel $x + y$. effet de $t_{(N, X)}$

Donc $x + y$ est **une des mesures** de l'angle $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$

Remarque

On ne peut pas affirmer que $x + y$ est **la mesure principale** de $\hat{\alpha} + \hat{\beta}$.

L'exemple suivant suffit à le prouver.

Si $\hat{\alpha} = \hat{\pi}$ et $\hat{\beta} = \hat{\delta}$ alors $x + y = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2} \notin]-\pi, \pi]$

b) Institutionnalisation du résultat

Les mesures d'un angle n'étant définies qu'à $2k\pi$ près ($k \in \mathbb{Z}$), le résultat précédent se traduit d'une façon générale par:

$$\text{Si } \begin{cases} x \text{ est une mesure de l'angle } \hat{\alpha} \\ y \text{ est une mesure de l'angle } \hat{\beta} \end{cases} \text{ alors } x + y \text{ est une mesure de } \hat{\alpha} + \hat{\beta}$$

Désormais, nous tiendrons pour acquis le résultat suivant:

$$\text{quels que soient les angles } \hat{\alpha} \text{ et } \hat{\beta} \text{ de } \mathcal{A} : \text{mes } \hat{\alpha} + \text{mes } \hat{\beta} = \text{mes}(\hat{\alpha} + \hat{\beta}) \quad [2\pi]$$

c) Relation de Chasles (pour les mesures d'angle)

Soient \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} des vecteurs non nuls de \mathcal{P} .

En posant: $(\vec{u}, \vec{v}) = \hat{\alpha}$ et $(\vec{v}, \vec{w}) = \hat{\beta}$, il vient:

$$\hat{\alpha} + \hat{\beta} = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}) \quad \text{relation de Chasles pour les angles}$$

Le résultat précédent se traduit alors par:

$$\text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) + \text{mes}(\vec{v}, \vec{w}) = \text{mes}(\vec{u}, \vec{w}) \quad [2\pi]$$

On peut donc énoncer:

quels que soient les vecteurs non nuls \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} de \mathcal{P}

$$\text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) + \text{mes}(\vec{v}, \vec{w}) = \text{mes}(\vec{u}, \vec{w}) \quad [2\pi]$$

Cette "pseudo-égalité" est baptisée: «relation de Chasles pour les mesures d'angle»

4. Traduction des principaux résultats acquis

On suppose ici que le plan \mathcal{P} (donc $\vec{\mathcal{P}}$) est orienté.

a) Somme des mesures "des angles d'un triangle ABC"

Nous savons que: $(\vec{AB}, \vec{AC}) + (\vec{BC}, \vec{BA}) + (\vec{CA}, \vec{CB}) = \hat{\pi}$

$$\text{On en déduit: } \text{mes}(\vec{AB}, \vec{AC}) + \text{mes}(\vec{BC}, \vec{BA}) + \text{mes}(\vec{CA}, \vec{CB}) = \pi \quad [2\pi]$$

b) Colinéarité

\vec{u} et \vec{v} colinéaires (et non nuls)

$$\iff \text{soit } (\vec{u}, \vec{v}) = \hat{o}, \text{ soit } (\vec{u}, \vec{v}) = \hat{\pi}$$

$$\iff \text{soit } \text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad [2\pi], \text{ soit } \text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) = \pi \quad [2\pi]$$

$$\iff \text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad [\pi]$$

c) Orthogonalité

\vec{u} et \vec{v} orthogonaux et non nuls

$$\iff \text{soit } \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = \hat{\delta}, \quad \text{soit } \widehat{(\vec{u}, \vec{v})} = -\hat{\delta}$$

$$\iff \text{soit } \text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi], \quad \text{soit } \text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

$$\iff \text{mes}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

d) Cocyclicité

Etant donné **quatre** points A, B, C et D tels que A, B et C soient non alignés.

$$A, B, C, D \text{ cocycliques} \iff \left\{ \begin{array}{ll} \text{soit } \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} = \widehat{(\vec{DA}, \vec{DB})} & \text{figure 150} \\ \text{soit } \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} = \widehat{(\vec{DA}, \vec{DB})} + \hat{\pi} & \text{figure 151} \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} \text{soit } \text{mes}(\vec{CA}, \vec{CB}) = \text{mes}(\vec{DA}, \vec{DB}) & [2\pi] \\ \text{soit } \text{mes}(\vec{CA}, \vec{CB}) = \text{mes}(\vec{DA}, \vec{DB}) + \pi & [2\pi] \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{ll} \text{mes}(\vec{CA}, \vec{CB}) = \text{mes}(\vec{DA}, \vec{DB}) & [\pi] \end{array} \right.$$

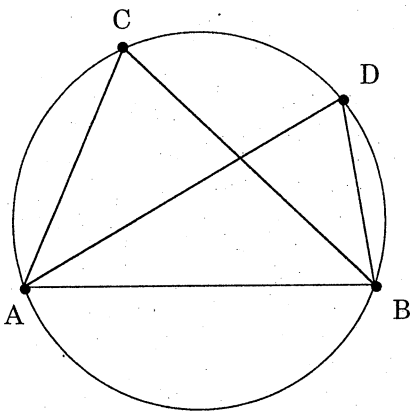


Fig. 150

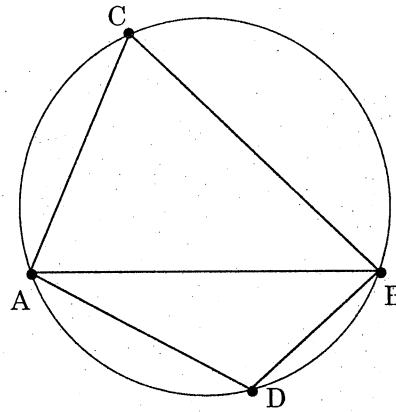


Fig. 151

e) Caractérisation de la bissectrice de deux demi-droites de même origine

$$M \in \mathcal{B} \setminus \{\Omega\} \Leftrightarrow \widehat{(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega M})} = \widehat{(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega B})}$$

$$\Leftrightarrow \text{mes}(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega M}) = \text{mes}(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega B}) \quad [2\pi]$$

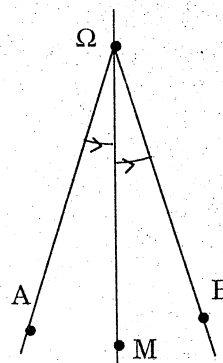


Fig. 152

f) Caractérisation des deux bissectrices de deux droites sécantes

$$M \in \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \setminus \{\Omega\} \Leftrightarrow \begin{cases} \bullet \text{ soit } \widehat{(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega M})} = \widehat{(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega B})} \\ \bullet \text{ soit } \widehat{(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega M})} = \widehat{(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega B})} + \hat{\pi} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{mes}(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega M}) = \text{mes}(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega B}) \quad [\pi]$$

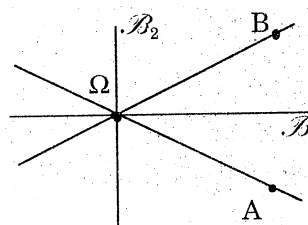


Fig 153

5. Fonction cosinus, fonction sinus: définition

Soit x un nombre réel, $\hat{\alpha}$ l'angle de \mathcal{A} dont une mesure est x , A l'image de $\hat{\alpha}$ sur le cercle Γ_N .

Le plan \mathcal{P} étant rapporté au repère orthonormal direct (O, N, D) , on dit que:

- l'abscisse du point A est le **cosinus** du nombre réel x . Ce nombre est noté: **cos x**
- l'ordonnée du point A est le **sinus** du nombre réel x . Ce nombre est noté: **sin x**

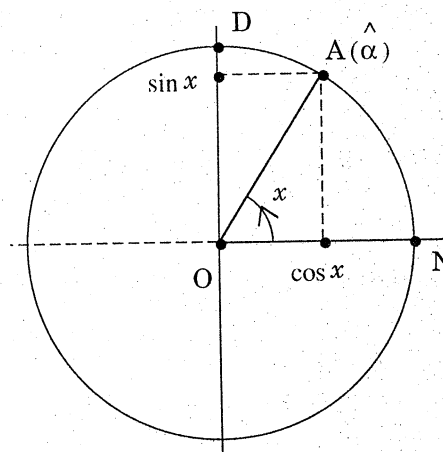


Fig. 154

Légende: $\text{mes } \hat{\alpha} = x \ (2\pi)$

On définit ainsi deux fonctions périodiques et de période 2π

$$\text{cos: } \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1] \quad \text{et} \quad \text{sin: } \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$$

$$x \longmapsto \cos x \qquad \qquad \qquad x \longmapsto \sin x$$

En outre, sachant que:

- les images de deux angles opposés sont symétriques par rapport à (ON)
- la fonction $\psi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}$
 $x \longmapsto \hat{\alpha}$ est impaire ($\psi(-x) = -\psi(x) = -\hat{\alpha}$)

On en déduit que $\left\{ \begin{array}{l} \text{la fonction } \mathbf{cosinus} \text{ est paire} \\ \text{la fonction } \mathbf{sinus} \text{ est impaire} \end{array} \right.$

Commentaire

Après avoir accordé une large place à l'étude des problèmes d'alignement, de parallélisme, d'orthogonalité, de cocyclicité liés à des "configurations traditionnelles" du plan \mathcal{P} , le lecteur pouvait attendre ici que l'on réserve le même sort aux formules de trigonométrie qui, comme le dit **Jean Dieudonné** dans une de ses célèbres préfaces, sont tout à fait indispensables à trois professions éminemment respectables:

- 1°) les astronomes
- 2°) les arpenteurs
- 3°) les auteurs de manuels de trigonométrie

Or, dans ce domaine, il y a peu à dire et ceci est correctement et abondamment fait par les gens de la troisième profession ci-dessus citée.

Comme par goût nous aurions plutôt tendance à prendre des "mesures" déflationnistes, nous n'avons donc strictement rien à ajouter à ce qui est écrit dans les manuels scolaires.

IX. Analyse "a posteriori" du contenu des deux chapitres

1. Sur l'introduction des angles et des rotations

a) La mise en place du concept "angle d'un couple de vecteurs non nul" ne nécessite pas que le plan vectoriel $\vec{\mathcal{P}}$ soit préalablement orienté - voir chapitre "angles et rotations" paragraphes II et III-

Pourtant bon nombre d'enseignants pensent le contraire. A leur décharge, il faut souligner que:

1°) la traditionnelle et très officielle appellation "angle orienté" tend à accréditer cette fausse idée.

2°) le libellé des actuels programmes des classes de 1ère S: «orientation du plan, mesures de l'angle d'un couple de vecteurs **dans le plan orienté**» vient, si besoin est, renforcer cette opinion.

b) On peut définir une rotation de \mathcal{P} comme composée de deux réflexions agissant dans ce plan. Cela ne nécessite donc pas, au départ, de lier cette transformation à la notion d'angle. Mais, si on veut la rendre efficace dans la résolution de problèmes, il paraît difficile d'y surseoir très longtemps. Ceci dit, rappelons qu'une rotation est définie par la donnée:

- de son centre, d'un point et de son transformé,
- ou
- d'un bipoint et de son transformé)

2. Sur l'utilisation des outils "angles" et "rotations"

a) L'utilisation de l'outil "angles" dans la résolution de problèmes de géométrie plane où l'on n'a pas à effectuer des calculs de "**distances**" et de "**mesures d'angles**" n'exige pas non plus que soit préalablement introduite cette dernière notion.

La résolution, dans ce chapitre, de divers types d'exercices à l'aide des seuls outils "angles" et "doubles d'angles" cautionne cette affirmation.

b) La même remarque vaut pour les **rotations**.

Nous allons illustrer nos dires, au travers de la résolution d'un exercice, pris parmi les plus classiques du répertoire puisqu'il figure dans quasiment tous les manuels scolaires. Son objet est d'étudier une propriété de la configuration formée d'un triangle ABC "flanqué" de deux triangles ABD et ACE rectangles et isocèles en A .

La présentation de la configuration donne lieu à deux types d'énoncés.

▲ **Enoncé (1)**

Etant donné un triangle ABC , on construit **extérieurement** à ce triangle les triangles ABD et ACE rectangles et isocèles en A . On note I le milieu du segment $[DE]$

(la signification de l'adverbe "extérieurement" n'est jamais explicitée).

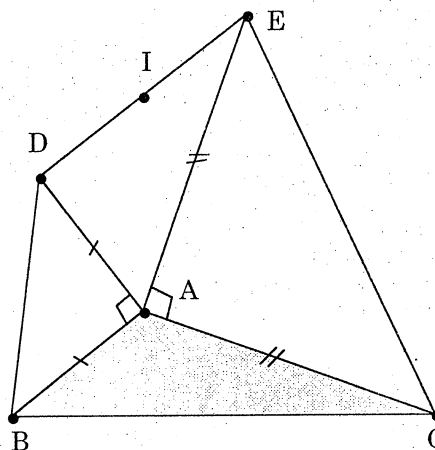


Fig. 155

▲ **Enoncé (2)**

Dans le plan orienté, étant donné un triangle ABC , on construit les triangles BAD et ACE rectangles et isocèles en A et **de sens direct**. On note I le milieu du segment $[DE]$.

La signification de la locution "de sens direct" étant généralement perçue comme suit: on effectue le trajet

$$B \longrightarrow A \longrightarrow D \longrightarrow B$$

dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

▲ **La propriété:** (la même pour les deux énoncés)

Il s'agit d'établir que la droite (AI) est une hauteur du triangle ABC donné.

Indication: On pourra faire intervenir le point F symétrique de D par rapport à la droite (AB) .

Quel que soit l'énoncé, l'élève λ donne à peu près la résolution suivante:

La rotation $r_{A, \frac{\pi}{2}}$ transforme B en F (cela va de soi) et C en E .

On a donc: $\text{mes}(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{FE}) = \frac{\pi}{2}$ (avec ou sans modulo 2π).

Les droites (BC) et (FE) sont donc orthogonales.

Comme les points A et I sont respectivement les milieux des côtés $[DF]$ et $[DE]$ du triangle DEF , la droite (AI) est parallèle à la droite (EF) . Par suite la droite (BC) qui est orthogonale à la droite (EF) est aussi orthogonale à sa parallèle (AI) .

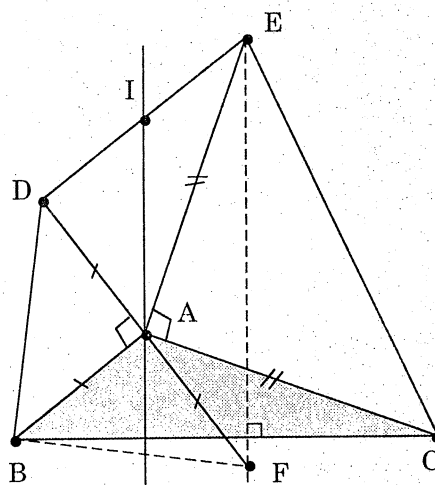


Fig.156

Conclusion: la droite (AI) est une hauteur du triangle ABC donné.

 Pour ce qui nous concerne, nous préférons l'énoncé ci-après:

▲ **Enoncé (3)**

Un triangle ABC étant donné dans le plan \mathcal{P} , on considère les points D, E et I satisfaisant aux conditions suivantes:

- le triangle ABD est rectangle et isocèle en A
- le point E est le transformé du point C par la rotation de centre A qui envoie D sur B
- le point I est le milieu du segment $[DE]$

Montrer que la droite (AI) est une hauteur du triangle ABC donné.

Indication: On pourra faire intervenir le point F symétrique de D par rapport à la droite (AB) .

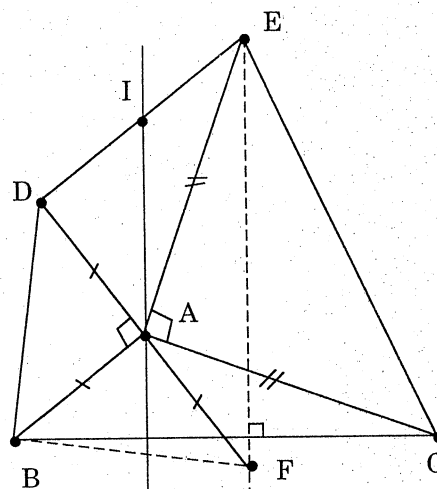


Fig. 157

Solution commentée

Le triangle ABD étant rectangle et isocèle en A , il est indéniable que l'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$ de la rotation $r_{A, D \rightarrow B}$ est **droit**.

Le plan \mathcal{P} n'étant pas orienté, il n'est donc pas possible de dire si cet angle est -ou non- l'angle **droit direct**. Heureusement d'ailleurs puisqu'il est **ABSOLUMENT INUTILE** de répondre à cette question.

Nous avons:

$$\begin{aligned} \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})} &= -\widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})} \quad \text{effet de la réflexion } s_{(AB)} \\ &= \widehat{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})} \quad \text{et } AF = AD = AB \end{aligned}$$

La situation peut alors se schématiser ainsi:

$$(B, C) \xrightarrow{r_{A, D \rightarrow B}} (F, E)$$

On en déduit: $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{FE})} = \widehat{(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})}$. égalité qui prouve que, dans $\vec{\mathcal{P}}$ les vecteurs \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{FE} sont orthogonaux. Donc les droites (BC) et (FE) sont orthogonales.

La suite de la solution est identique à celle donnée ci-dessus.

Toutefois il importe d'ajouter que, vu la formulation de l'énoncé (3), on peut illustrer la configuration à étudier de deux façons différentes puisqu'il existe **deux points D vérifiant la condition imposée.**

Le deuxième cas de figure est donné ci-contre.

En outre, la solution fournie vaut pour **les deux cas de figure.**

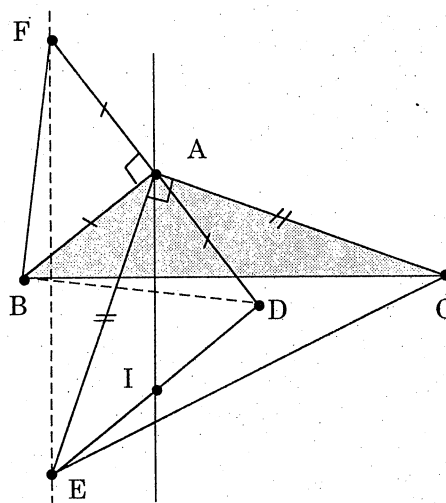


Fig. 158

Remarques

▲ L'énoncé (2) ne permet pas de faire apparaître ces deux cas de figure, à moins de remettre en cause, soit la donnée initiale du triangle ABC , soit l'orientation traditionnelle du plan \mathcal{P} .

Quant à l'énoncé (1), qui réclame une interprétation intuitive, il écarte sans appel le deuxième cas de figure.

▲ Certains lecteurs pourront faire valoir que, dans l'énoncé (3), l'intérêt de l'exercice est minimisé puisqu'il est directement fait allusion à la transformation qui permet de le résoudre.

Cette objection n'a pourtant que peu de poids lorsqu'on sait que, dans les manuels scolaires, cet exercice est proposé dans le chapitre "rotation".

▲ On peut donner une définition "théorique" du **polygone convexe de sens direct**.

• Au niveau de l'enseignement secondaire, un polygone est dit **convexe** si pour chacun de ses côtés il est entièrement contenu dans un demi-plan ayant ce côté comme frontière.

• Un polygone **convexe** $A_1A_2\dots A_n$ ($n \geq 3$) est dit **de sens direct** pour signifier que le sommet A_3 appartient au demi-plan $p\ell((A_1A_2), B)$, B étant un point de \mathcal{P} tel que $(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1B})$ soit **l'angle droit direct**.

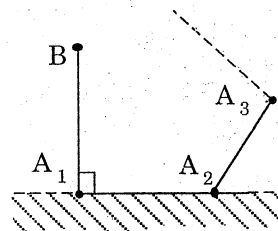


Fig. 159

Concrètement, cela revient à dire que le circuit $A_1 \longrightarrow A_2 \longrightarrow A_3 \dots \dots \dots A_n \longrightarrow A_1$ est parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, cf énoncé (2).

3. Sur la confusion d'écriture entre un angle et une de ses mesures

Les actuels programmes des classes de 1ère S sont très directifs sur ce point «on fera les abus de langage et de notations usuels: confusion d'écriture entre un angle et une de ses mesures, telle que $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$, ou $(Ox, Ox') = \pi$, ou encore, pour un angle non orienté, $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{2}$ »

La lecture des copies nous conduit, hélas, à penser que seuls les gens maîtrisant convenablement le maniement des **mesures d'angles et des congruences modulo $r\pi$** ($r \in \mathbb{Q}_+^*$) peuvent impunément se permettre ces abus.

La résolution de l'exercice suivant nous offre l'occasion d'illustrer nos propos.

Exercice 15: lieu géométrique

Dans le plan \mathcal{P} , on donne un arc de cercle Γ d'extrémités A et B et le centre Ω du cercle qui porte Γ .

On considère l'application $f: \Gamma \setminus \{A, B\} \longrightarrow \mathcal{P}$
 $M \longmapsto N$

où N est le point d'intersection de la droite (MA) et de l'orthogonale en B à la droite (MB) .

Déterminer le lieu géométrique des points N , c'est-à-dire l'ensemble $f(\Gamma \setminus \{A, B\})$

1ère solution

Commentaires mis à part, elle est la synthèse du contenu de certaines copies. Le lecteur pourra remplacer la notation \widehat{M} (resp. \widehat{N}) par l'une ou l'autre des notations (\vec{MA}, \vec{MB}) et \widehat{AMB} (resp. (\vec{NA}, \vec{NB}) et \widehat{ANB})

Lorsque le point M décrit l'ensemble $\Gamma \setminus \{A, B\}$ la mesure θ de l'angle \widehat{M} reste constante.

La stricte observance des consignes officielles nous conduit à écrire: $\widehat{M} = \theta$

On en déduit immédiatement:

$$\widehat{N} = \frac{\pi}{2} - \theta$$

égalité qui prouve que le point N appartient à l'arc capable Γ' d'où l'on voit le segment $[AB]$ sous l'angle $\frac{\pi}{2} - \theta$.

Par suite: $(\Gamma \setminus \{A, B\}) \subset \Gamma'$ (i)

▲ **Réciproquement**, soit N un point de Γ' , M le point d'intersection de la droite (NA) et de l'orthogonale en B à la droite (NB) .

On a alors: $\widehat{N} = \frac{\pi}{2} - \theta$.

On en déduit: $\widehat{M} = \frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - \theta) = \theta$ égalité qui prouve que M appartient à l'ensemble $\Gamma \setminus \{A, B\}$. Par suite: $\Gamma' \subset f(\Gamma \setminus \{A, B\})$ (ii)

Conclusion: Des inclusions (i) et (ii) il découle que $f(\Gamma \setminus \{A, B\}) = \Gamma'$

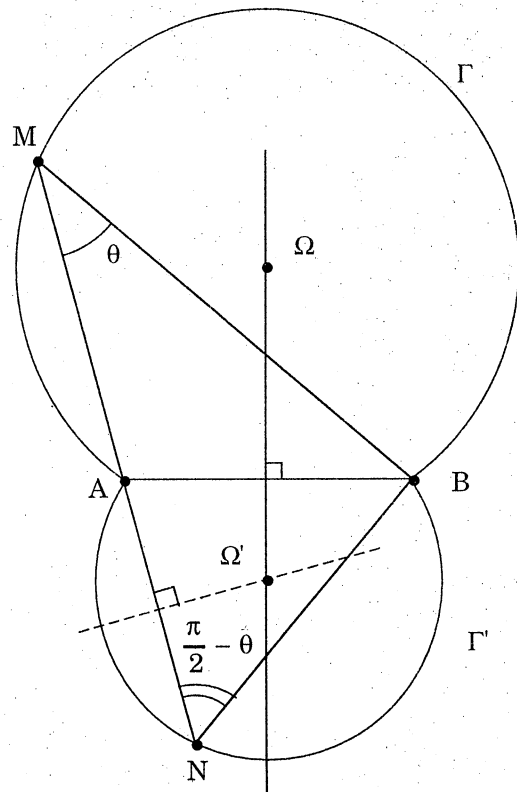


Fig. 160

2ème solution

Elle utilise la structure de groupe additif de \mathcal{A} et fait appel à la notion de ligne de niveau en posant $\widehat{(\vec{MA}, \vec{MB})} = \hat{\alpha}$, on a: $\Gamma \setminus \{A, B\} = (A, B)_{\hat{\alpha}}$

▲ Etude directe

Pour traduire l'alignement des points M, A et N ainsi que l'orthogonalité des droites (BM) et (BN) en termes d'angles, nous sommes **contraints** de mettre en oeuvre les "doubles d'angles". Nous avons alors:

$$\begin{aligned} 2\widehat{(\vec{NA}, \vec{NB})} &= 2\widehat{(\vec{NM}, \vec{NB})} && \text{colinéarité de } \vec{NA} \text{ et } \vec{NM} \\ &= \hat{\pi} - 2\widehat{(\vec{MB}, \vec{MN})} && \text{le triangle } MBN \text{ est rectangle en } B \\ &= \hat{\pi} + 2\widehat{(\vec{MA}, \vec{MB})} && \text{colinéarité de } \vec{MN} \text{ et } \vec{MA} \\ &= 2\hat{\alpha} + \hat{\pi} \end{aligned}$$

En utilisant le centre Ω du cercle \mathcal{C} qui porte l'arc $(A, B)_{\hat{\alpha}}$, l'égalité

$$\begin{aligned} 2\widehat{(\vec{NA}, \vec{NB})} &= 2\hat{\alpha} + \hat{\pi} \text{ peut s'écrire} \\ 2\widehat{(\vec{NA}, \vec{NB})} &= \widehat{(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B})} + \hat{\pi}. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité traduit que N appartient au cercle \mathcal{C}' passant par A et centré en Ω' point diamétralement opposé à Ω sur le cercle $A\Omega B$. On a donc pour l'instant: $f((A, B)_{\hat{\alpha}}) \subset \mathcal{C}'$.

Intuitivement, on pressent que cette inclusion est trop "large".

En notant D le point où la droite $(A\Omega')$, tangente en A au cercle \mathcal{C} , coupe le cercle \mathcal{C}' , l'alignement des points M, A et N justifie l'inclusion de $f((A, B)_{\hat{\alpha}})$ dans le complémentaire dans \mathcal{P} de la réunion des secteurs \widehat{BAD} et $s_A(\widehat{BAD})$ privés de leur sommet A , c'est-à-dire dans

$\mathcal{L} \cup \{A\}$ où \mathcal{L} désigne la partie non grisée de \mathcal{P} . On a donc maintenant:

$f((A, B)_{\hat{\alpha}}) \subset \mathcal{C}' \cap (\mathcal{L} \cup \{A\})$ puis, du fait que $\widehat{(\vec{AD}, \vec{AB})} = \widehat{(\vec{MA}, \vec{MB})} = \hat{\alpha}$, il vient $f((A, B)_{\hat{\alpha}}) \subset (D, B)_{\hat{\alpha}}$ (i)



Fig. 161

▲ Etude réciproque

Soit N un point de l'arc $(D, B)_{\hat{\alpha}}$, M le point d'intersection de la droite (NA) et de l'orthogonale en B à la droite (NB) .

D'une part, l'alignement des points A, N et M justifie l'appartenance de M à la partie \mathcal{L} de \mathcal{P} .

D'autre part, nous avons:

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 2(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MB})$$

colinéarité de \overrightarrow{MA} et \overrightarrow{MN}

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \hat{\pi} - 2(\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NM})$$

le triangle MBN est rectangle en B

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \hat{\pi} + 2(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})$$

colinéarité de \overrightarrow{NM} et \overrightarrow{NA}

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \hat{\pi} + (2\hat{\alpha} + \hat{\pi}) = 2\hat{\alpha}$$

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B})$$

égalité qui prouve que M appartient au cercle \mathcal{C} .

Il s'ensuit que M appartient à l'ensemble $\mathcal{L} \cap \mathcal{C}$, c'est-à-dire à l'arc $(A, B)_{\hat{\alpha}}$.

Autrement dit, on vient d'établir que:

$$(D, B)_{\hat{\alpha}} \subset f((A, B)_{\hat{\alpha}}) \quad (\text{ii})$$

Conclusion: Des relations (i) et (ii) il découle que : $f((A, B)_{\hat{\alpha}}) = (D, B)_{\hat{\alpha}}$

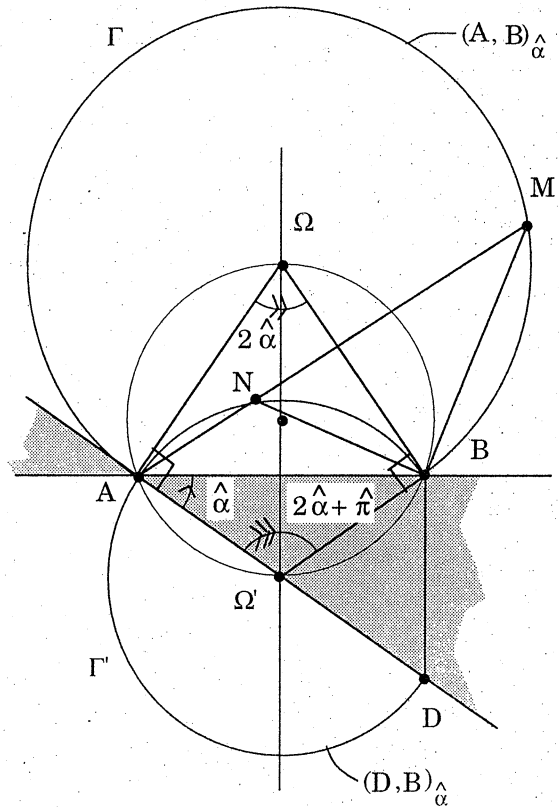


Fig. 162

3ème solution

Elle est analogue à la précédente quant à son enchaînement, mais ici on fait intervenir les mesures d'angles (ce qui présuppose que le plan \mathcal{P} soit orienté) et la notion de ligne de niveau.

Désignons par α la **mesure principale** de l'angle $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$.

On a alors

$$\Gamma \setminus \{A, B\} = (A, B)_{\hat{\alpha}}$$

ou $(A, B)_{\alpha}$ désigne l'ensemble des points M de $\mathcal{P} \setminus \{A, B\}$ tels que:

$$\text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \quad [2\pi].$$

▲ Etude directe (le début)

Nous avons:

$$\text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = \text{mes}(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NB}) \quad [\pi] \quad \text{colinéarité de } \overrightarrow{NA} \text{ et } \overrightarrow{NM}$$

$$\text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = \frac{\pi}{2} - \text{mes}(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MN}) \quad [\pi] \quad \text{le triangle } MBN \text{ est rectangle en } B;$$

$$\text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = \frac{\pi}{2} + \text{mes}(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \quad [\pi] \quad \text{colinéarité de } \overrightarrow{MN} \text{ et } \overrightarrow{MA}$$

$$\text{mes}(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) = \alpha + \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

Cette "pseudo-égalité" traduit que le point N appartient au cercle \mathcal{C}' passant par A et B et dont le centre Ω' est le point de la médiatrice du segment $[AB]$ vérifiant la "pseudo-égalité":

$$\text{mes}(\overrightarrow{\Omega'A}, \overrightarrow{\Omega'B}) = \text{mes}(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) + \pi \quad [2\pi].$$

Cette dernière "pseudo-égalité" prouve enfin que Ω' est le point diamétralement opposé à Ω sur le cercle $A\Omega B$.

On a donc établi pour l'instant que $f((A, B)_{\hat{\alpha}}) \subset \mathcal{C}'$ etc...

▲ Etude réciproque

Elle permet d'arriver à la conclusion suivante: $f((A, B)_{\hat{\alpha}}) = (D, B)_{\hat{\alpha}}$

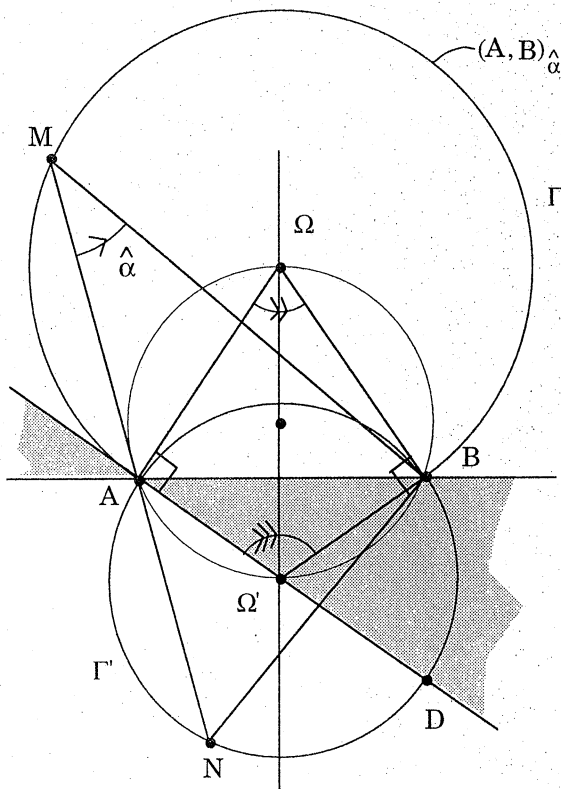


Fig. 163

Commentaire

Il va de soi que le résultat obtenu dans la première solution est erroné. Dans ce type de problème l'usage des mesures d'angles fait donc courir aux débutants le risque de donner une "solution fausse". Par ailleurs, la solution (3), qui demande de manier convenablement les congruences qui gèrent les mesures d'angles, ne facilite pas la résolution du problème. Une quinzaine d'années d'expérience montre que les élèves s'accommodent mieux, dans les problèmes qui s'y prêtent, du maniement des angles et de leurs doubles que de celui de leurs mesures.

Il serait donc souhaitable, à l'heure où la géométrie tend à devenir une matière optionnelle, que les nouveaux programmes soient moins directifs sur la façon d'introduire les angles de couples de vecteurs non nuls et leurs mesures. Sinon, ils pourraient, à égale hauteur, expliciter deux procédures pour le faire: celle qui est actuellement imposée et celle que nous avons proposée dans ces pages.

Quant à la confusion d'écriture entre un angle et une de ses mesures, la faire prématurément est dangereuse, ne pas la faire n'entraîne qu'une modeste surcharge des notations. En tout cas, quelle que soit l'opinion que l'on ait sur cette affaire, une phrase du style: «on pourra éventuellement faire les abus de langage et de notations tolérés: confusion d'écriture...» semblerait être un compromis raisonnable.

4. Sur les "angles de droites"

L'utilisation fréquente de doubles d'angle dans la résolution de problèmes conduit à introduire dans l'ensemble \mathcal{A} des angles la relation \mathcal{R} définie comme suit: $\hat{\alpha} \mathcal{R} \hat{\beta} \iff 2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta}$.

Cette relation est manifestement une relation d'équivalence. En outre, elle est banalement compatible avec la loi additive de \mathcal{A} . On peut donc installer sur l'ensemble quotient \mathcal{A}/\mathcal{R} une loi quotient qui confère à cet ensemble une structure de groupe additif.

L'introduction du groupe additif \mathcal{A}/\mathcal{R} **des angles de couple de droites de $\vec{\mathcal{P}}$** présente un petit avantage: il permet parfois d'alléger la rédaction de la solution d'un problème (mais pas de façon notable).

En revanche, les égalités "d'angles de droites" ne font que se substituer aux égalités de type $2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta}$ avec $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ éléments de \mathcal{A} .

Elles ne peuvent en aucun cas remplacer les égalités de type $2\hat{\alpha} = \hat{\beta}$ ou encore du type $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$.

Par conséquent, l'outil "angles de droites" est moins performant que les outils "angles" et "doubles d'angles" déjà utilisés.

L'introduction des "angles de droites", notamment au niveau des classes de lycée, ne s'avère donc pas être une impérieuse nécessité.

Les programmes actuels n'en font pas mention et on ne peut qu'approuver ce choix.

Villefranche, février 93

BIBLIOGRAPHIE

- [1] **FRESNEL Jean**: "Géométrie", *Hermann* (A paraître).
- [2] **GROUPE DE GEOMETRIE**: "Points de départ en Géométrie dans l'espace", *IREM de Bordeaux* (1991).
- [3] **GROUPE DE GEOMETRIE**: "Cinq problèmes de Géométrie", *IREM de Bordeaux* (1989).
- [4] **GROUPE DE GEOMETRIE**: "Activité géométriques en classe de Seconde", *IREM de Bordeaux* (1981).
- [5] **GROUPE DE GEOMETRIE**: "Aires et quadrillages", *IREM de Bordeaux* (à paraître).
- [6] **GROUPE DE GEOMETRIE**: "L'enseignement des vecteurs", *IREM de Bordeaux* (1992).
- [7] **LEHMANN Daniel - BKOUCHE Rudolf**: "Initiation à la géométrie" *PUF* (1988)
- [8] **LESPINARD V. - PERNET R.**: "Géométrie (Cours Complet)", Classes de Mathématiques Élémentaires, Programme 1962, *André Desvigne* (1962)
- [9] **PAPELIER G.**: "Exercices de géométrie moderne", *Vuibert*, (1926).