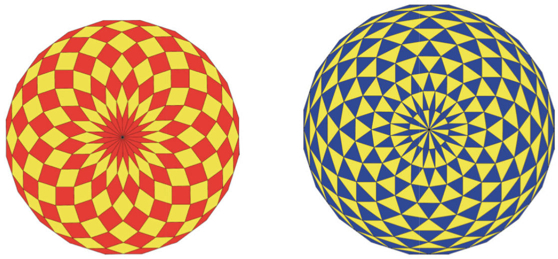
Le chef d'œuvre du compagnon : *une activité constructive de pavage sous forme historique*

Un article paru en 2015 dans la presse espagnole [1] nous a permis de découvrir l'extraordinaire pavage, récemment rénové, du sol de l'église Santa María de Mahón à Minorque (archipel des Baléares).

Profondément admiratifs, nous avons voulu étudier de plus près la géométrie très particulière à laquelle ce pavage est soumis. Le motif du pavage, situé en haut de la photo, est un pentagone étoilé (ou étoile à cinq branches) de couleur blanche, entouré de cinq losanges rouge foncé. Nous considérons l'étoile rouge centrale comme un simple décor et ne la prenons pas en compte dans cette approche. Nous avons montré [2] que les cinq triangles isocèles formant les branches de l'étoile sont des *triangles d'or obtus*, ce qui veut dire que le rapport de la longueur du grand côté à celle des deux côtés égaux est égal au nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. De même, les losanges du pourtour sont formés de deux *triangles d'or aigus*, ce qui veut dire que le rapport de la longueur des deux côtés égaux à celle du petit côté est égal au nombre d'or [4].

En généralisant cette construction au cas d'une étoile à sept branches, puis à un nombre quelconque de branches, nous avons défini ce que nous appelons les « rosaces célestes ». Celles-ci sont des pavages du plan obtenus à partir d'un polygone régulier étoilé à n côtés en construisant successivement des polygones réguliers étoilés de même centre et de même nombre de côtés de la façon suivante : à chaque étape, on insère entre deux pointes consécutives du premier polygone étoilé un losange dont deux côtés coïncident avec les côtés de l'angle rentrant du polygone étoilé précédent. On continue le processus « centrifuge » jusqu'à ce que le contour du polygone obtenu soit convexe.

Voici un exemple de rosace céleste obtenu avec GeoGebra et colorié de deux manières différentes :



Dans la figure de gauche, on est parti d'un polygone étoilé à vingt côtés (c'est l'étoile rouge au centre) et la construction de la rosace a demandé huit étapes. La figure de droite révèle comment le polygone étoilé de départ a été construit : dans un polygone convexe à vingt côtés, on a colorié alternativement en jaune et en bleu les vingt petits triangles inscrits ayant pour sommet le centre du polygone, puis on a tracé les triangles symétriques à ceux-ci pour obtenir un polygone étoilé de rayon double. Cette seconde figure donne de plus une autre visualisation de la rosace, obtenue en coloriant en bleu tous les demi-losanges extérieurs.

Les rosaces célestes sont des extensions de certains pavages, dits « quasi-périodiques », découverts en 1974 par Roger Penrose et aujourd'hui bien connus de certains amateurs d'art, architectes et, bien sûr, d'un grand nombre de mathématiciens de tous niveaux : voir notamment [3] et [5]. Ce mathématicien, physicien et philosophe anglais a exploré un nombre impressionnant de domaines ; il enseignait à Londres où l'on peut observer plusieurs façades ornées de ses pavages, notamment à proximité du dôme du millénaire. Sachant qu'il a abondamment utilisé le pentagone et le nombre d'or dans ses constructions, il nous a semblé naturel de nous demander si ses études pouvaient être généralisées aux heptagones, aux octogones, dodécagones et au-delà.

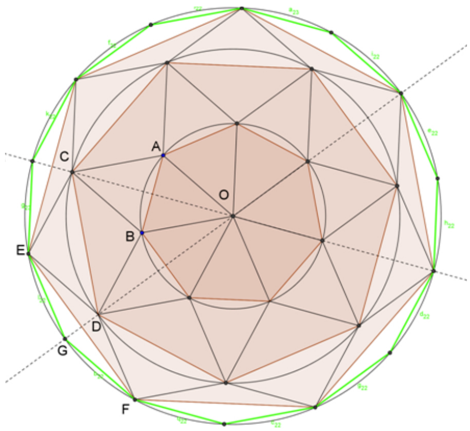
Nous proposons dans la suite une activité géométrique amusante accessible aux collégiens dès la classe de Quatrième, susceptible d'intéresser aussi les professeurs en formation et les non-spécialistes.

Matériel

Feuilles de papier fort de format A3, rapporteur, compas, double-décimètre, ciseaux, crayons, si possible plan de travail en bois, logiciel GeoGebra.

I - Activité préparatoire pour tous

Avec GeoGebra, construire une rosace céleste à sept branches comme dans la figure suivante.



On pourra s'aider des consignes suivantes :

– Tracer, avec l'ordre POINT, deux points A et B dont la distance sera le côté de l'heptagone.

– Cliquer sur POLYGONE RÉGULIER, sur les deux points A et B, puis sur 7. On obtient l'heptagone convexe du centre de la figure.

– Rechercher le centre O de cet heptagone en traçant en pointillés, avec l'ordre MÉDIATRICE, les médiatrices de deux côtés contigus de l'heptagone.

– Tracer, à l'aide de l'ordre SYMÉTRIE AXIALE, les points C et D symétriques de O du polygone par rapport à deux côtés contigus de l'heptagone.

– Tracer, à l'aide de la commande POLYGONE RÉGULIER, l'heptagone de côté $[CD]$.

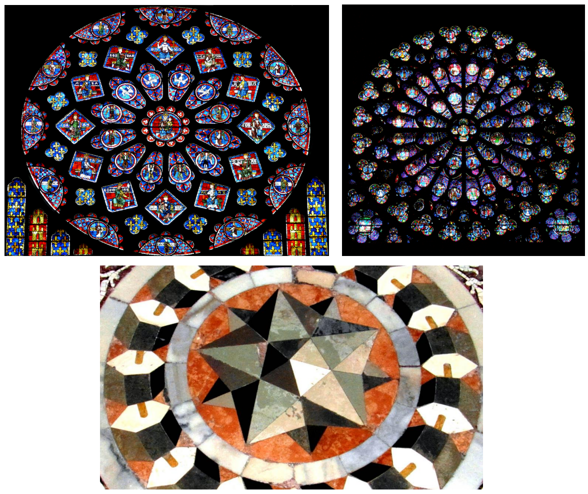
– Pour finir, construire par symétrie axiale comme plus haut le point G symétrique de D par rapport à (EF).

Comme dans le cas du pentagone, le processus s'arrête dès la première étape, car le polygone à 14 côtés obtenu est convexe.

II - Activité pour les élèves à partir de la Quatrième

1. Préambule (il pourra être lu à haute voix à la classe par le professeur ou un élève)

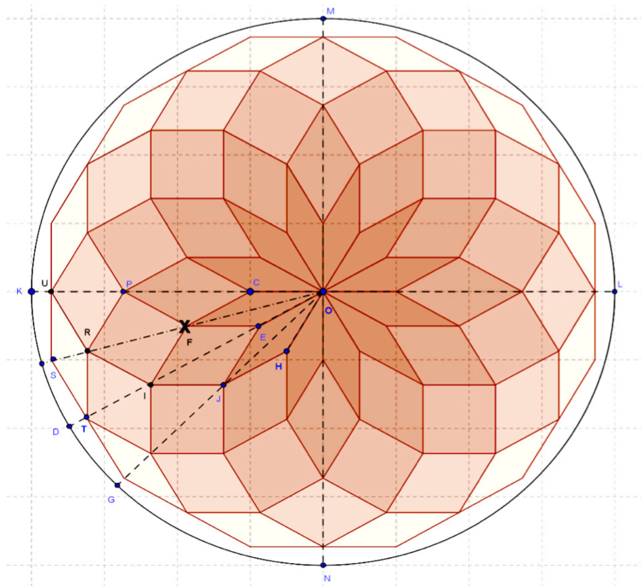
Un compagnon tailleur de pierre, chargé par le Service des monuments historiques de refaire le sol d'une belle petite chapelle en rotonde, eut envie de laisser, comme les bâtisseurs de cathédrales, sa marque dans l'histoire : ce serait, de plus, son chef d'œuvre de réception de compagnon. Il décida donc de paver la rotonde avec une « rosace céleste ». Il fallait bien sûr que ce travail fût réalisable et il dut pour s'en assurer faire quelques calculs. La chapelle avait un diamètre de 4 m, mesuré au décamètre souple des maçons. Voici comment il procéderait pour tracer la rosace : il tracerait sur le sol en ciment de son atelier un cercle de diamètre 4 m, puis un polygone régulier, comme savaient le faire tous les bâtisseurs de cathédrale pour leurs roses en vitrail (souvent des dodécagones) et leurs pavages de nefs. Regardez quelques exemples, pour voir comme c'est beau !



à gauche : Cathédrale Notre-Dame de Chartres, rose du nord
à droite : Cathédrale Notre-Dame de Paris, rose du midi
en bas : Basilique Saint-Marc de Venise, pavage attribué à P. Ucello

2. Fiche à distribuer aux élèves après lecture de l'histoire du compagnon

Le compagnon trace dans son atelier un cercle de diamètre 4 m, qui reproduit à l'échelle 1 le pourtour du sol de la chapelle. À la façon des anciens bâtisseurs, il reporte plusieurs fois sur le périmètre de ce cercle une règle plate de longueur 50 cm, pour calculer combien de pavés il devra utiliser. En effet, il a décidé qu'il utiliserait des pavés de 50 cm de côté, ce qui est commode pour le marbrier. Il constate qu'il peut reporter 24 fois sa règle, et qu'il reste même un peu de place. Il en déduit qu'il pourra placer 12 pavés à la périphérie de la rosace, comme dans la figure ci-dessous, et décide de paver la chapelle avec une rosace céleste à 12 côtés. On vous demande de construire sur papier la rosace céleste du compagnon, puis de l'aider à faire les calculs pour vérifier qu'elle va bien « rentrer » dans la chapelle.



La rosace du compagnon, dessinée avec GeoGebra. Une unité de la grille représente 50 cm, le cercle est de diamètre 4 m.

Voici les consignes. Certaines sont accompagnées de questions. Vous pouvez vous aider de la figure précédente.

1) Sur une feuille de papier fort de format A4, tracez un demi-cercle de diamètre 40 cm. Quelle est l'échelle de votre représentation du sol de la chapelle ?

2) Tracez deux diamètres orthogonaux $[MN]$ et $[KL]$, puis deux rayons $[OK]$ et $[OD]$ d'angle 30° avec le rapporteur. Reportez au compas sur les côtés de l'angle deux segments $[OC]$ et $[OE]$ d'origine O et de mesure 5 cm. Tracez au compas deux arcs de cercle de centre C et E, de rayon 5 cm, qui se rencontrent en F. Que représente la droite (OF) pour l'angle KOD ?

3) Tracez le losange $OCFE$: son angle de sommet O mesure 30° par construction. Quelle est la mesure de l'angle FEO ?

4) Tracez le losange $OEJH$ symétrique du losange $OCFE$ par rapport à (OD).

5) Tracez le rayon $[OG]$ du cercle qui passe par J. Que représente (OG) pour l'angle EOH ?

6) Tracez deux arcs de cercle, de centres respectifs F et J et de rayon 5 cm, qui se rencontrent en I : nous obtenons le losange $EFIJ$. Pourquoi le point I se trouve-t-il sur [OD] ?

7) Tracez deux arcs de cercle de centre F, de rayon 5 cm qui rencontrent $[OK]$ en P : nous obtenons le losange $FPRI$. Tracez avec la même méthode le losange $RUST$.

8) Le quartier de disque KOG contient tous les types de pavés utiles pour paver le sol de la chapelle. Combien y a-t-il de types de pavés ?

9) Le compagnon se demande s'il a bien calculé ses mesures et si la rosace va bien « rentrer » dans la chapelle. Calculez le périmètre de la chapelle et celui du dodécagone. La rosace rentre-t-elle dans la chapelle ?

Les deux questions qui suivent sont réservées aux plus grands.

10) Il nous faut prévoir la fourniture des pavés par le marbrier. Calculez les mesures des angles des pavés (on rappelle que l'angle COE mesure 30°). Quels sont les différents types de pavés à prévoir, et combien de pavés faut-il en tout ?

11) Observez le triangle STO rectangle en T d'angle au sommet O de 15°. En utilisant le sinus de l'angle de mesure 15° dans le triangle rectangle STO, où T est le milieu de $[SV]$, calculez la mesure de $[OS]$, demi-diagonale du dodécagone. Le dodécagone « rentre-t-il » dans la chapelle ?

Réponses abrégées aux questions précédentes

$\rightarrow$ 1) c'est 40 cm pour 4 m, soit $\frac{1}{10}$.

$\rightarrow$ 2) c'est sa bissectrice, comme diagonale du losange $OCFE$.

$\rightarrow$ 3) c'est $180° - 30° = 150°$, car la somme des angles d'un losange est 360°.

$\rightarrow$ 5) c'est sa bissectrice.

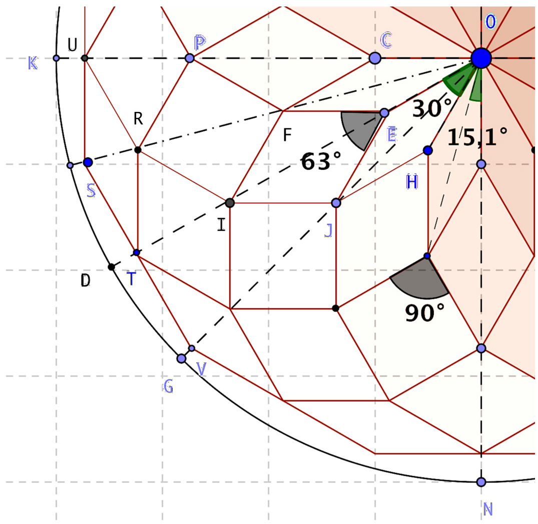
$\rightarrow$ 6) parce que (OD) est la bissectrice de l'angle FEJ.

$\rightarrow$ 8) nous observons *a priori* cinq types de pavés, mais nous verrons que sur les cinq, seuls trois sont différents

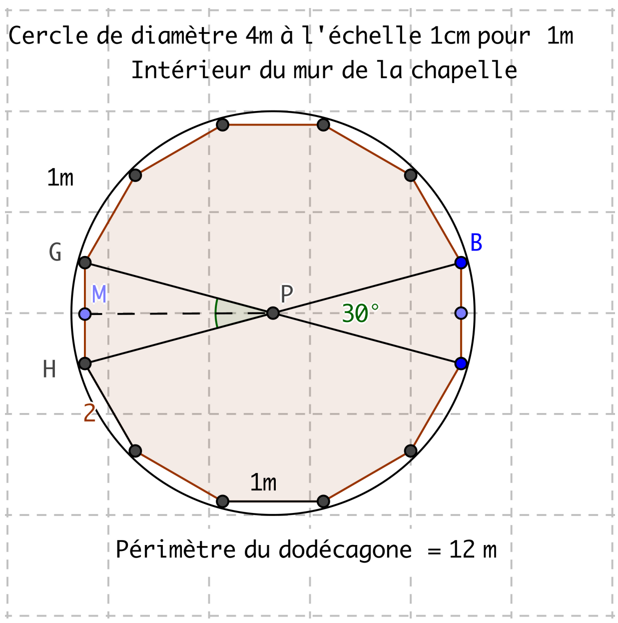
$\rightarrow$ 9) : le périmètre de la chapelle circulaire est $4\pi \simeq 12,56$ m au centième près, et le périmètre du dodécagone est 12 m ; puisqu'ils ont le même centre, le dodécagone peut s'insérer dans la chapelle.

$\rightarrow$ 10) il faut trois types de pavés différents : vingt-quatre pavés d'angles 30° et 150°, vingt-quatre pavés d'angles 60° et 120° et douze pavés carrés, soit en tout soixante pavés.

$\rightarrow$ 11) $\frac{ST}{SO} = \sin 15°$; $SO = \frac{50}{\sin 15°} \simeq 192,30\,\text{cm} < 2\,\text{m}$; le dodécagone « rentre » donc dans la chapelle.



Agrandissement d'un quart de rosace, avec les mesures des angles trouvées par GeoGebra. Attention, elles ne sont pas très précises...



III - Étude prolongée pour les élèves professeurs

Raisonnons sur les résultats obtenus.

a) Nous avons obtenu des types de pavés qui peuvent être utilisés deux fois. Pourquoi ? Quelle est la condition sur le nombre de côtés p de la rosace pour que ce phénomène se produise ?

b) Pourrions-nous obtenir pour une autre dimension de la chapelle un type de pavé utilisable trois fois ?

c) Pouvons-nous utiliser ces trois types de pavés pour paver avec une rosace céleste une chapelle de diamètre plus petit ?

d) L'un des pavés est un carré. Est-ce toujours possible ?

e) Si le compagnon achète ses pavés au mètre carré (en moyenne 50 euros le mètre carré), quelle dépense doit-il prévoir ? Quelle est l'aire de la surface restante à couvrir de ciment-pierre entre le dallage et le mur de la chapelle ?

Indications de solutions

a) Si p est premier, aucun pavé ne se retrouve deux fois, car tous les nombres inférieurs à p sont alors premiers avec p. Considérons maintenant le cas où p est impair, mais non premier, et prenons $p = 9$ pour fixer les idées. Les couples de mesures d'angles obtenus sont : $(\frac{2\pi}{9}, \frac{7\pi}{9})$,$(\frac{4\pi}{9}, \frac{5\pi}{9})$, $(\frac{6\pi}{9}, \frac{3\pi}{9})$, $(\frac{8\pi}{9}, \frac{\pi}{9})$. Ces quatre couples et ceux qu'on obtient en inversant l'ordre des termes sont tous différents, car le premier terme de ces quatre couples correspond à un entier pair et le second correspond à son complément à 9, donc à un entier impair. Par conséquent, si le tailleur de pierre veut pouvoir utiliser deux fois un même type de pavé, il faut tracer une rosace avec un nombre pair de côtés.

b) Il est impossible d'utiliser trois fois le même type de pavé, car chaque pavé est utilisé une fois dans un sens et la fois suivante après une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

c) Si l'on veut paver une rosace de diamètre inférieur, le nombre de pavés au centre de la rosace sera plus petit, donc le petit angle au centre de la rosace sera plus grand. Le petit pavé d'angle 30° ne sera donc pas utilisable ; on utilisera seulement les pavés d'angles 60° et 120° et les pavés carrés.

d) Pour que le pavage contienne un carré, il faut que l'un des couples d'angles relatifs à la rosace d'ordre $2n$ soit de la forme $(\frac{n\pi}{2n}, \frac{n\pi}{2n})$ par exemple $(\frac{7\pi}{14}, \frac{7\pi}{14})$. Il faut donc que la rosace ait un nombre pair de côtés. Est-ce suffisant ? Non, puisque l'exemple précédent de l'hexagone ne comporte pas de carré. De manière générale, pour une rosace à $2r$ côtés, les couples d'angles sont $(\frac{2\pi}{2r}, \frac{(2r-2)\pi}{2r})$, $(\frac{4\pi}{2r}, \frac{(2r-4)\pi}{2r})$, $(\frac{6\pi}{2r}, \frac{(2r-6)\pi}{2r})$, etc. Pour obtenir parmi eux le couple $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, il faut qu'il existe $p \geq 1$ tel que le couple $(\frac{2p\pi}{2r}, \frac{(2r-2p)\pi}{2r})$ vérifie $\frac{\pi}{2} = \frac{2p\pi}{2r} = \frac{(2r-2p)\pi}{2r}$. La première équation exige d'avoir $2r = 4p$, et la seconde équation est alors satisfaite puisqu'on a dans ce cas $2r - 2p = 2p$. En résumé, il faut et il suffit, pour que le pavage contienne un carré, que le nombre de côtés de la rosace soit un multiple de 4. Ce n'est pas le cas dans un hexagone, mais c'est le cas dans un dodécagone.

e) Calculons la surface totale de la chapelle : son rayon est 1,9 m, donc sa surface est $\pi R^2 \simeq 11,34\ \mathrm{m}^2$. Rappelons que le tailleur de pierre a besoin de 24 pavés d'angles 30° et 150°, 24 pavés d'angles 60° et 120° et 12 pavés carrés. Or l'aire d'un losange est donnée par $A = 2a^2 \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2}$, où a est le côté et α, β les deux angles. L'aire de la surface du premier type de pavé, qui a pour angles $\frac{2\pi}{12}$ et $\frac{10\pi}{12}$, est donc : $2 \times 0,5 \times 0,5 \times (\cos\frac{\pi}{12}) \times (\cos\frac{5\pi}{12}) = 0,5 \times \cos\frac{\pi}{12} \times \cos\frac{5\pi}{12} = 0,125\ \mathrm{m}^2$. De même, l'aire de la surface du second type de pavé est : $0,5 \times \cos\frac{2\pi}{12} \times \cos\frac{4\pi}{12} \simeq 0,2165\ \mathrm{m}^2$. Enfin, l'aire de la surface du pavé carré est $0,25\ \mathrm{m}^2$. L'aire totale de la surface pavée est donc : $24 \times (0,125 + 0,2165) + 12 \times 0,25 = 11,196\ \mathrm{m}^2$, ce qui représente une dépense d'environ 560 euros. La différence avec l'aire du sol de la chapelle est très petite : il ne reste qu'environ $0,145\ \mathrm{m}^2$ à cimenter.

Conclusion

Depuis plusieurs années, les enseignants des écoles primaires, des collèges et des lycées sont encouragés à rendre les mathématiques plus attrayantes et en prise avec les sciences, les arts et les techniques. Les opportunités ne manquent pas, et l'étude des pavages du plan nous semble en être une particulièrement féconde. Les structures fractales et les pavages de l'espace par les quasi-cristaux, dont nous nous préoccuperons dans un prochain article, sont également à même de fournir des activités riches et motivantes pour les publics scolaires.

Danielle Salles-Legac
avec la collaboration de Ruben Rodriguez Herrera, Philippe Langlois et Éric Trotoux

Bibliographie

[1] Elena Soto, « Un singular pavimento matemático », *El Mundo*, seccione Baleares, 3 de Marzo 2015. En ligne sur le site elmundo.es/Hemeroteca.

[2] Ruben Rodriguez Herrera et Danielle Salles-Legac, *Activité autour des triangles d'or et des pavages de type 3 au sens de Roger Penrose*, IREM de Basse-Normandie, 2016. En téléchargement sur le site irem.unicaen.fr.

[3] Thomas Fernique, Evgeny Poloskin, « Un parquet de Penrose », *Images des mathématiques*, CNRS, 2017. En ligne sur le site images.math.cnrs.fr.

[4] Ruben Rodriguez Herrera et Danielle Salles-Legac, *Le nombre d'or, nouveautés mathématiques ludiques*, IREM de Basse-Normandie, 2015. Ouvrage disponible auprès de l'IREM.

[5] Claudine Hervieu, Roger Leger, Françoise Debart, Brigitte Rozoy et Paulette Trinquet, *De M.C. Escher aux... dessins à motifs répétitifs*, IREM de Basse-Normandie, Caen, 1982. En téléchargement sur le site numerisation.irem.univ-mrs.fr. Version papier disponible auprès de l'IREM.