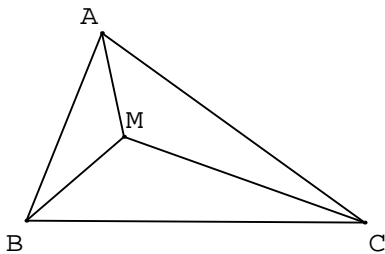


Le point de Fermat – Torricelli

Philippe REGNARD, Lycée Jules Renard, Nevers

Le traité de Pierre de Fermat *Methodus de Maxima et Minima* qui nous est parvenu par l'intermédiaire de Mersenne, et des copies d'Argobast, se termine par l'énoncé du problème suivant :

Etant donnés trois points, trouver un quatrième, tel que si l'on mène des droites aux points donnés, la somme de ces trois droites soit minimum.



MA + MB + MC minimum

Pour Fermat, nul doute que la méthode des maxima et des minima exposée dans ces quelques feuilles soit capable de résoudre une telle question.

Informé par un courrier de Mersenne le problème fut d'abord traité et résolu par Evangelista Torricelli. On trouve en particulier la solution dans des lettres du savant italien à Vincenzo Renieri qui datent de la fin de l'année 1646. Cavalieri puis Viviani traitèrent le sujet vers la même époque.

Vous trouverez en annexe 2 une traduction du latin d'extraits de deux des lettres de Torricelli telles qu'on peut les trouver dans les *Opere* de Torricelli édités en 1912 et disponibles sur internet dans *The Archimedes Project*. Le texte est tapé sans les figures que j'ai reconstituées à la suite de la traduction.

Alors que je lui demandais des renseignements sur ce problème au début des années 90, Pierre Collaudin m'avait donné quelques pages qu'il avait utilisées pour des stages de formation permanente. Vous pouvez les lire en annexe 2. Elles se terminent par une activité en classe de terminale C où il introduit un point et une courbe dite de Samuel, prénom de son fils aîné.

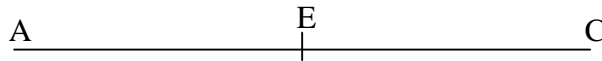
Les logiciels de géométrie dynamiques sont particulièrement adaptés au problème du point de Fermat, puisqu'il faut conjecturer sa position avant d'envisager une démonstration. Dans une classe de seconde, nous avons travaillé, essentiellement en salle informatique, avec le logiciel Géoplan, afin :

- de proposer une conjecture caractérisant le point de Fermat
- de démontrer cette conjecture
- de construire le point de Fermat.

Ces activités ont d'une part permis aux élèves de se familiariser avec un logiciel de géométrie dynamique comme Géoplan, mais surtout de découvrir une géométrie simple, attrayante et originale.

Mais avant d'aborder ces solutions purement géométriques, il faut préciser que, dans son traité, Fermat n'envisageait pas ce type de problème sous cet angle. Le titre, *Methodus de Maxima et Minima*, nous fait d'ailleurs davantage pensé à un traité d'analyse.

Son premier exemple consiste à diviser un segment en deux de telle sorte que les deux segments obtenus soient les côtés d'un rectangle d'aire maximal.



En posant $AC = b$ et $AE = a$ on aura $EC = b - a$.

Il faut donc que $a(b - a) = ab - a^2$ soit maximal.

La méthode Fermat est la suivante. Lorsque le point E se déplace légèrement, a devient $a + e$ et $b - a$ devient quant à lui $b - a - e$.

Le produit est alors $(a + e)(b - a - e) = ab - a^2 + be - 2ae - e^2$.

Ce dernier est alors *adégalé* (adaequari) au précédent : $ab - a^2 \sim ab - a^2 + be - 2ae - e^2$

Il reste : $be \sim 2ae + e^2$

En divisant tout par e : $b \sim 2a + e$

Enfin, en supprimant le e : $b = 2a$.

B est bien au milieu de $[AC]$.

Fermat ne justifie pas plus sa méthode mais conclut qu'il est impossible d'en trouver une plus générale.

Dans son *Mémoire sur la méthode des maxima et minima de Fermat et sur les méthodes des tangentes de Fermat et Descartes*, Paris, Firmin-Didot, (1860) Jean-Marie Duhamel tente d'expliquer la démarche de Fermat :

Lorsque la géométrie de Descartes parut, Fermat, étonné ce n'y pas voir spécialement traitées les questions de maximum et de minimum, fit connaître à cet effet une règle qu'il ne démontra pas, et sur laquelle il fondait d'autres règles pour la détermination des tangentes et des centres de gravité. Elle peut être énoncée de la manière suivante, en employant, pour plus de clarté, le langage et les notations actuellement en usage :

Soit désignée par $F(x)$ l'expression algébrique d'une quantité variable, dépendante d'une quantité indéterminée x et de quantités constantes données. Pour trouver les valeurs particulières de x qui donnent à $F(x)$ des valeurs maxima et minima, il faut changer x en $x + e$ et égaler les deux valeurs de l'expression désignée par F , qui correspondent à ces deux valeurs de l'indéterminée arbitraire, c'est-à-dire poser l'équation

$$(1) \quad F(x) = F(x + e)$$

En retranchant les parties communes aux deux membres, il ne restera que des termes affectés de la première puissance ou de puissances supérieures de e ; on divisera par la puissance de e qui sera commune à tous les termes, et l'on obtiendra ainsi des termes débarrassés de la quantité e , qui pourra rester encore dans certains autres à diverses puissances. On supprimera ensuite tous ces derniers, et on ne conservera dans l'équation que les termes qui ne renferment plus e . Les valeurs de x tirées de cette équation seront celles qui correspondront tant aux valeurs maxima qu'aux valeurs minima de $F(x)$; mais la règle ne donne aucun moyen de les distinguer les unes des autres...

Fermat n'ayant pas donné la démonstration de sa règle, diverses conjectures ont été faites sur le principe qui lui servait de base. Essayons de fixer l'opinion sur ce point.

Une remarque importante à faire d'abord, c'est qu'il déclare expressément que les deux membres de l'équation (1) ne sont réellement pas égaux. Il les considère, dit-il, «.tanquam essent aequalia, licet

revera aequalia non sint, et hujusmodi comparationem vocavi adæqualitatem » (comme si ils étaient égaux bien qu'ils ne le soient pas réellement et j'ai appelé une telle comparaison adégalité). Il est nécessaire encore de se rappeler un passage de la *Nova Stereometria Doliorum* de Kepler, imprimée en 1615, c'est-à-dire plus de vingt ans avant la publication de la méthode de Fermat. Ce passage se rapporte aux valeurs voisines, de part et d'autre d'une valeur maximum ; il est ainsi conçu :

« *Circà maximum vero utrinque circumstantes decrementa habent initio insensilia.* » (II pars, theorema V, corollarium II.) (Assurément, autour du maximum, ils ont, de part et d'autre, des décroissances insensibles au début)

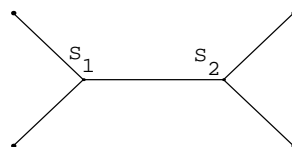
Il me paraît évident, par ce rapprochement, que Fermat est parti de cette idée de Kepler, admise comme générale sans démonstration, que si, pour une certaine valeur x , $F(x)$ est maximum, et que l'on considère des valeurs très voisines $x \pm e$, le décroissement correspondant de $F(x)$ sera incomparablement plus petit que l'accroissement $\pm e$ de x ; en d'autres termes, que la différence entre $F(x)$ et $F(x \pm e)$ est infiniment petite par rapport à e , qui est supposé lui-même infiniment petit. Mais comme cependant elle n'est pas nulle, il prévient expressément qu'il entend que l'équation

(2) $F(x+e) - F(x)$ ou $F(x+e) = F(x)$ n'est pas rigoureusement exacte.

Cette relative stabilité autour d'un extremum constatée par Kepler et Fermat est l'une des premières constatations qu'ont fait les élèves en cherchant, à l'aide de Géoplan, la position précise du point de Fermat d'un triangle.

Dans la suite de son traité, Fermat utilise sa méthode pour résoudre, entre autre, divers problèmes de tangentes à la parabole, à l'ellipse ou à la cycloïde ainsi que de centre de gravité, de partages de segments plus sophistiqués que dans son premier exemple. Comme il a été dit plus haut, ce n'est qu'à la fin qu'il propose de trouver le point d'un triangle tel que la somme des distances aux trois sommets soit minimum.

Si le corps du traité est l'un des textes à l'origine du calcul infinitésimal, la question finale a souvent été exploitée et généralisée au 19^{ème} siècle par Steiner. Son problème consiste à minimiser la liaison entre divers points du plan soit directement, soit en utilisant des points supplémentaires, dits points de Steiner. Par exemple, avec trois points, le point de Steiner est le point de Fermat Torricelli. Avec quatre points, on peut envisager une liaison comme dans la première figure, mais aussi une autre comme dans la seconde en s'autorisant deux points de Steiner.



Voilà à présent les différentes étapes du travail des élèves de seconde.

Première étape

Dans le logiciel Géoplan

Créer – point – points libres dans le plan A, B, C et M.

Créer – ligne polygone – polygone défini par ses sommets : ABC – nom : t.

Créer - segments – segments définis par 2 points : MA MB MC.

Créer – numérique – calcul géométrique – longueur d'un segment : AB nom a. Idem pour MB et MC.

Créer – numérique – calcul algébrique : a + b + c – nom d.

Créer- affichage – variable numérique déjà définie : d – 6 décimales.

Piloter – piloter au clavier : sélectionner M – OK.

Piloter – modifier paramètre de pilotage au clavier : 0,001

La souris permet alors un déplacement rapide du point M tandis que les flèches du clavier affinent les déplacements de M .

On demande de ne pas modifier les emplacements initiaux de A , B et C mais éventuellement de faire un zoom avant ou arrière avec $>$ et $<$ lorsque les points sont trop rapprochés.

On demande de déplacer le point M de telle sorte que d soit minimum.

Sur les différents postes, il y a environ deux fois plus de triangles ABC ayant un angle obtus que de triangles acutangles. Et, dans la mise en commun des résultats, le point M s'est retrouvé la plupart du temps au sommet de l'angle obtus. Dans ces cas on a demandé d'afficher la mesure de cet angle obtus en degrés :

Créer – numérique – calcul géométrique – angle géométrique : en degré, nom : an

Créer – affichage – variable numérique déjà définie : an avec 6 décimales.

Parmi ces élèves, certains diminuent progressivement l'angle obtus et, à chaque étape, vérifie la position du point M , afin de savoir à partir de quelle valeur il quitte le sommet, tandis que d'autres modifient leur triangle en le rendant acutangle et recommencent le travail.

Premier bilan

Il semble que lorsqu'un angle est supérieur ou égal à 120° , le point M est confondu avec le sommet de cet angle.

Pour les autres triangles, le point M est à l'intérieur du triangle. La plupart du temps c'est, pour eux, un centre connu : centre de gravité, orthocentre... Mais quelques-uns suggèrent l'égalité des angles de sommet M ce qu'ils vérifient ainsi que les autres en créant et en affichant deux de ces angles.

On remarque qu'un pas de pilotage très fin est nécessaire pour obtenir des angles égaux à 120° alors que le minimum de d est atteint, à 6 décimales près, dans tout un domaine du triangle.

Deuxième étape

En se plaçant dans un triangle dont les angles sont aigus, on veut démontrer que le point M qui minimise $MA + MB + MC$ est le point tel que $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = \widehat{BMC} = 120^\circ$. Une construction sur Géoplan est proposée.

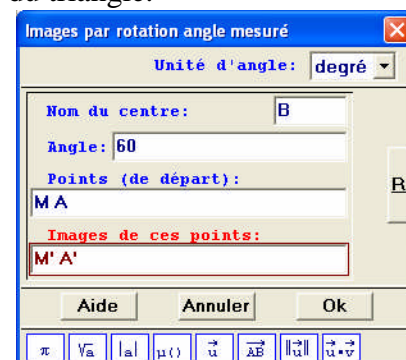
Comme dans la première étape, est demandée la création d'un triangle ABC , d'un point M et des segments $[MA]$, $[MB]$, $[MC]$, l'affichage de $d = MA + MB + MC$, ainsi que celui de deux des angles issus de M .

On construit ensuite l'image $M'C'B$ du triangle MAB par la rotation de centre B et d'angle 60° (voir figure 1) :

Créer – point – point image par – rotation (angle mesuré) :

La figure se termine par la création des segments $[M'B]$, $[C'B]$, $[C'M']$ et $[C'A]$.

Comme dans la première étape, on modifie alors la position du point M , pilote au clavier ou non, de telle sorte que d soit minimum, c'est-à-dire lorsque les angles affichés sont de 120° . Cette position coïncide avec l'alignement des points C , M , M' et C' . Pourquoi ?



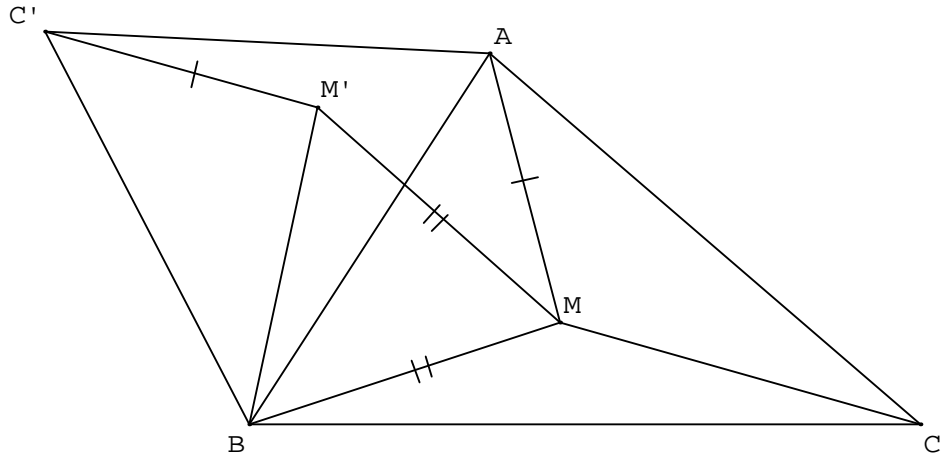


Fig.1

Troisième étape

1. Pourquoi les triangles BMA et BM'C' sont-ils isométriques ? En déduire que $MA = M'C'$.
2. Montrer que $MB = M'M$.

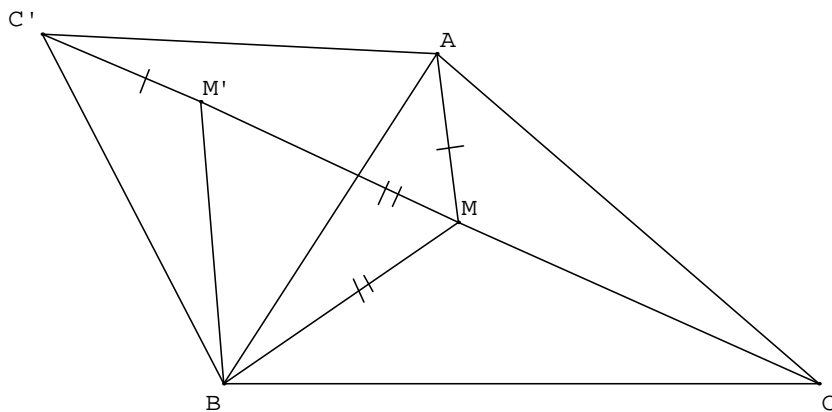


Fig.2

3. Que vaut également $MA + MB + MC$? Conclure.
Le point M ainsi défini satisfait-il à la conjecture de la deuxième étape ?
4. Lorsqu'il y a alignement des points C, M, M' et C' (figure 2), montrer que l'angle \widehat{BMC} mesure bien 120° .
5. Montrer que les triangles BAC' et BMM' sont équilatéraux. Montrer alors que $\widehat{M'MA}$ mesure 60° . En déduire que \widehat{AMB} mesure bien 120° .

Le point M solution du problème de Fermat est donc situé sur la droite (CC') joignant le sommet C au sommet C' du triangle équilatéral ABC' construit à l'extérieur de ABC. Mais comment le construire ?

Quatrième étape.

Sur une nouvelle figure, construire dans Géoplan (figure 3) les trois triangles équilatéraux ABC' , ACB' et BCA' extérieurs à ABC .

1. D'après l'étape précédente, sur quelles droites est situé le point de Fermat ?
2. En déduire que les trois droites (CC') , (AA') et (BB') sont concourantes et que les segments $[CC']$, $[AA']$ et $[BB']$ ont la même longueur.

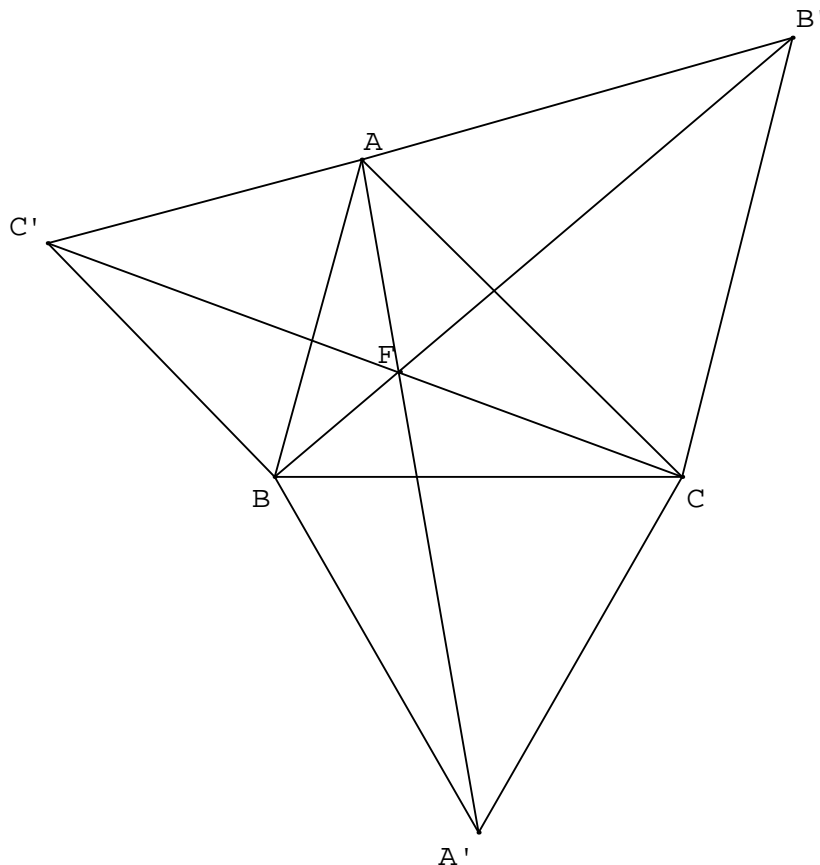


Fig.3

Cinquième étape. Devoir maison

Partie A. Théorème de Viviani (1622 – 1703).

Soient ABC un triangle équilatéral de côté a ; H est le pied de la hauteur issue de A et M un point à l'intérieur du triangle. On appelle R , S et T les projetés orthogonaux de M sur les trois côtés, respectivement $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

1. Faire une figure en prenant $a = 8 \text{ cm}$. (Voir figure 4)
2. Calculer, à l'aide de a , AH , MR , MS et MT , l'aire du triangle ABC , de deux façon différentes.
3. En déduire que $AH = PR + PS + PT$. (Théorème de Viviani).

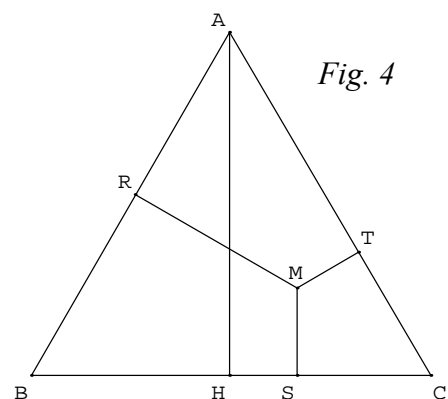


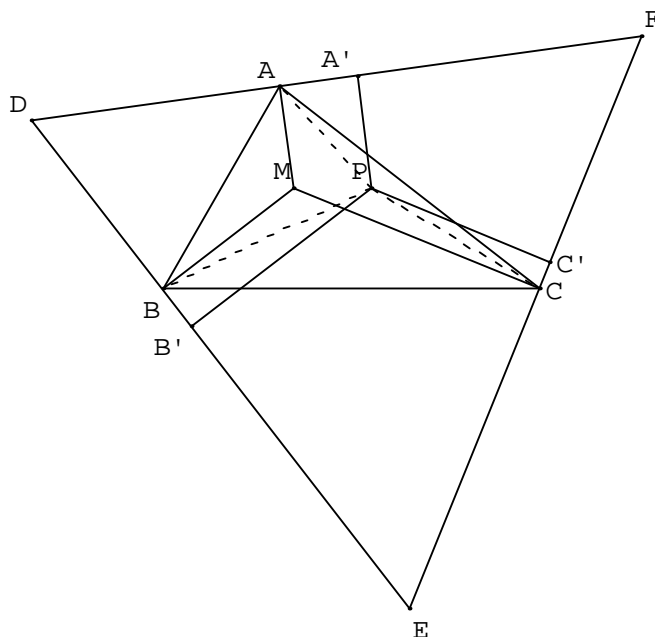
Fig. 4

Partie B. Le point de Fermat – Torricelli. (figure 5)

1. Soit M un point du plan ; construire un triangle ABC acutangle tel que $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA} = 120^\circ$. Expliquer la méthode de construction. On appelle M le point de Fermat du triangle ABC .

- On veut montrer que le point M ainsi construit est celui qui minimise la somme $MA + MB + MC$.
2. Construire les perpendiculaires à (MA) , (MB) et (MC) passant par A , B et C . Ces trois droites se coupent pour former un plus grand triangle DEF .
 3. Montrer que le triangle DEF est équilatéral.
 4. Soient P un point à l'intérieur du triangle DEF ; A' , B' et C' les projetés de P sur les côtés de DEF . Montrer que $PA' + PB' + PC' = MA + MB + MC$.
 5. Montrer que $PA + PB + PC \geq PA' + PB' + PC'$.
 6. En déduire que pour tout point P à l'intérieur de DEF , $PA + PB + PC \geq MA + MB + MC$. Conclure.

Fig 5



Annexe 1.

Extraits des lettres de Evangelista Torricelli à Vincenzo Renieri du 8 octobre et du 8 décembre 1646. (Traduction personnelle)

Etant donnés trois points A, B et C, on cherche à ce que, les trois ensemble soient le plus près possible d'un point D, à savoir AD, BD, CD ; je dis que les trois angles ADB, BDC, CDA doivent être égaux entre eux. Car s'il est possible que deux quelconques d'entre eux ne soient pas égaux, supposons ADB et BDC, faisons passer tout autour une ellipse par le point D où la tangente est EF (*figure 6*) ; les angles EDA et FDC seront égaux par la 48 du livre 3 des Coniques. Mais on a posé BDA, BDC inégaux, donc les restes BDE, BDF seront inégaux. C'est pourquoi, dans ces conditions, le cercle de centre B et de rayon BD coupera et la droite DF et cette même ellipse. Parce que si le cercle ne coupe pas l'ellipse, alors il pourra dans l'arc de cercle DF, y avoir une droite s'appuyant sur le point D de telle sorte qu'elle tombe dans un lieu qui est entre la section conique et sa tangente ce qui ne peut pas se produire d'après la 36 du livre 1 des Coniques. Qu'on prenne un point I quelconque sur l'arc de l'ellipse intercepté par le cercle il y aura des droites AD et DC les deux ensemble égales aux droites AI et IC, les deux ensemble, d'après la 52 du troisième livre des Coniques ; mais BI est plus petit que BD donc les 3 ensemble IA, IB, IC seront plus petits que les 3 les plus petits DA, DB, DC ce qui ne peut pas être. Donc, quand les trois droites ensemble sont minima, les trois angles au point D d'où elles sont tirées, sont égaux entre eux.

L'arrangement du problème est évident (*figure 7*). Soient trois points A, B, C, on demande de trouver le point D duquel les trois angles ADB, BDC, CDA sont égaux entre eux. Je dis que les trois droites menées de D sont minima. En effet si elles ne sont pas minimum, que ce soit minimum en un autre point E ; et les trois angles en E sont égaux entre eux d'après la démonstration précédente. C'est un fait que AEB sera $\frac{1}{3}$ de quatre droits, de même AEC sera $\frac{1}{3}$ de quatre droits et par construction BDC sera aussi $\frac{1}{3}$ de quatre droits. Et pour ces raisons il y aura dans le quadrilatère BDCE plus de quatre angles droits, ce qui est absurde.

Trouver le point D est vraiment facile (*figure 8*) soit par la 33 du livre III d'Euclide soit de la façon suivante. Les trois points A, B, C étant donnés, menons sur AB, BC, des triangles équilatéraux, décrivons des cercles autour des triangles qui se coupent à l'intérieur du triangle ABC en D ; ce sera le point D cherché. En effet les deux angles BDC et BEC sont opposés dans le quadrilatère inscrit dans le cercle. Or l'angle en E est de 60° donc le reste BDC sera de 120° et ainsi pour les autres.

Reste la limite du problème qui n'a pas été donnée par son auteur. Ainsi le problème n'est pas résoluble toutes les fois que le point D des cercles ne tombe pas à l'intérieur de ABC ; ce qui arrive chaque fois que le triangle ABC aura un angle qui n'est pas inférieur à 120° , mais dans ce cas de figure le sommet de l'angle cité précédemment répond à la question, bien qu'improprement.

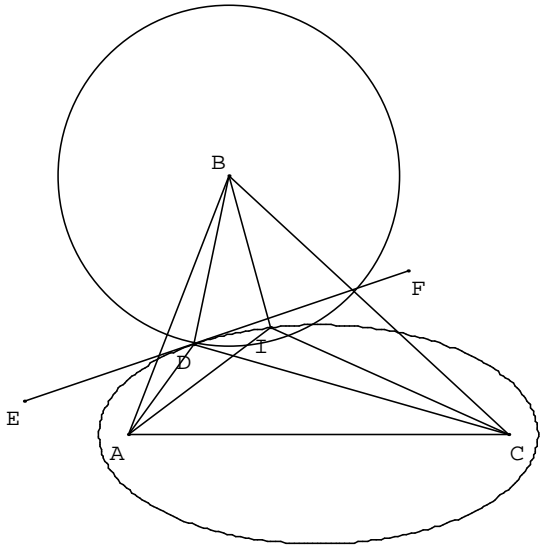


Fig.6

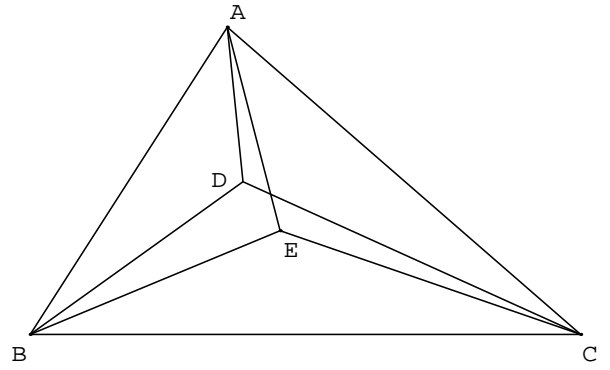


Fig.7

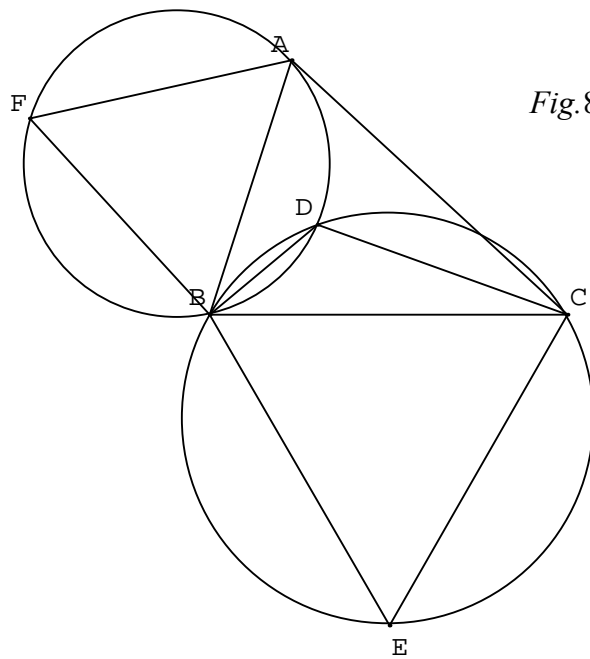


Fig.8

Annexe 2

PROBLEME DE FERMAT

Pierre COLLAUDIN, Paray le Monial

Fermat proposa à Torricelli le problème suivant :

Déterminer un point M dans un triangle ABC tel que la somme $MA + MB + MC$ soit minimale.

Ce problème a servi à construire les énoncés de plusieurs exercices d'application des isométries ou des propriétés des angles s'appuyant sur une configuration très riche.

0 - ETUDE DE LA CONFIGURATION

Soit ABC un triangle dont les angles ont une mesure ne dépassant pas en valeur absolue 120° .

Soient A', B', C' 3 points tels que les triangles $A'BC$, $AB'C$ et ABC' soient équilatéraux et extérieurs à ABC . On désigne par G, H, K les centres de gravité respectifs de ces triangles.

Soient $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B$ et \mathcal{C}_C les cercles circonscrits à ces 3 triangles sécants en un point I .

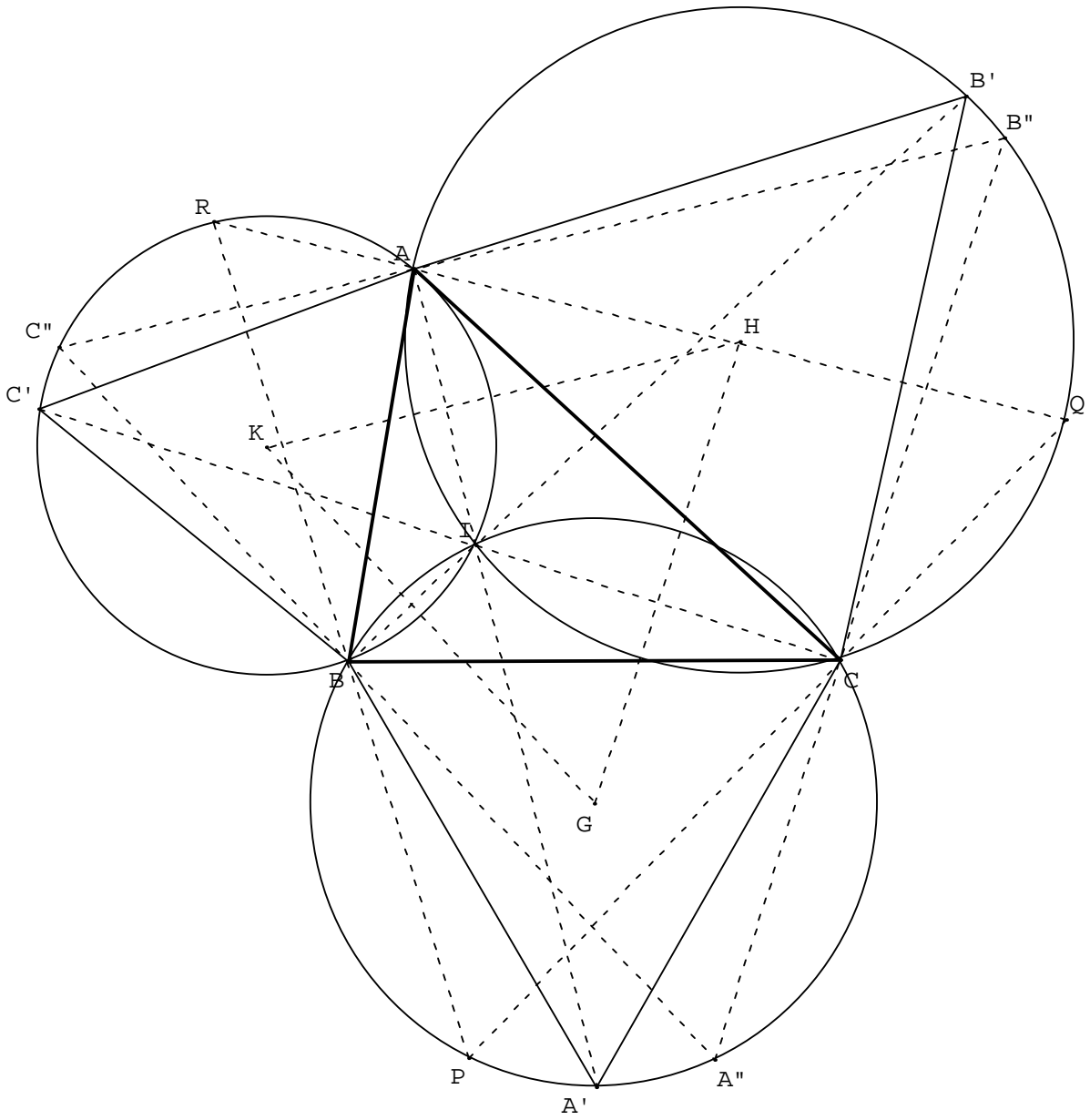
Soit $A''B''C''$ le triangle obtenu en traçant les perpendiculaires à IA, IB, IC passant par A, B et C .

Soit P un point quelconque de \mathcal{C}_A extérieur au triangle ABC .

Soient Q l'intersection de \mathcal{C}_B et de (PC) , autre que C , et R l'intersection de (OA) et de (PB) .

Propriétés démontrables

- $AA' = BB' = CC'$
- $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B$ et \mathcal{C}_C sont sécants en un point I appelé point de Torricelli du triangle ABC .
- $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en I appelé aussi point de Fermat du triangle ABC .
- Les six angles en I déterminés par les trois droites concourantes ont la même mesure.
- CHK est un triangle équilatéral appelé triangle de Napoléon.
- $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.
- (ABC) et $(A'B'C')$ sont deux triangles ayant le même centre de gravité.
- $IA + IB + IC = AA' = BB' = CC'$.
- $\cos(\overrightarrow{AA'}; \overrightarrow{BB'}) = \cos(\overrightarrow{BB'}; \overrightarrow{CC'}) = \cos(\overrightarrow{CC'}; \overrightarrow{AA'})$.
- $\overrightarrow{GH} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BB'} - \overrightarrow{AA'})$.
- R est élément de \mathcal{C}_C .
- POR est équilatéral.
- $A''B''C''$ est équilatéral.
- $IP + IQ + TR$ est maximal pour IP maximal.
- A'', B'' et C'' sont éléments respectifs de $\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B$ et \mathcal{C}_C .



I - METHODE 1

Cette méthode utilise une extension du théorème de Ptolémée.

Préliminaire

Démontrer que pour tous nombres complexes a, b, c et d :

$$|(a-c)(b-d)| \leq |(a-b)(c-d)| + |(a-d)(b-c)|$$

Préciser les cas d'égalité.

En déduire le théorème de Ptolémée et sa réciproque :

Pour tout triangle ABC et pour tout point D du plan $AC \times BD \leq AB \times CD + AD \times BC$.

L'égalité n'ayant lieu que si D appartient à l'arc \widehat{CA} ne contenant pas B du cercle circonscrit au triangle ABC .

Résolution du problème.

Démontrer que pour tout point M du plan $MC + MB \leq MA'$.

En déduire que $AA \leq MA + MB + MC$ l'égalité n'ayant lieu que pour $M = I$.

II METHODE 2

Cette méthode qui semble la plus rapide aurait été proposée par J.E. Hofmann en 1929 et par Tibor Gallai : elle utilise principalement les propriétés des rotations et des angles.

Résolution du problème

On considère un triangle ABC d'angle ne dépassant pas en mesure 120° : on effectue une rotation r de centre B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ orienté dans le même sens que $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA})$.

Soit M un point quelconque intérieur au triangle ABC et M' son image par r .

Soit A' l'image de A par r .

- 1) Etablir que $MA + MB + MC = M'A' + M'M + MC$.
- 2) Etablir que M', A', M et C sont alignés si et seulement si M est élément de la droite $(A'C)$ et élément du cercle circonscrit au triangle ABA' .
- 3) En déduire une solution du problème de Fermat.
- 4) Quelles sont les propriétés de la configuration initiale (§ 0) que l'on peut démontrer à l'aide des questions précédentes. ?

III METHODE 3

Il semblerait que cette méthode ait été redécouverte par F. Riesz. Elle est basée sur le théorème de Viviani.

Préliminaire

Démontrer le théorème de Viviani (1622 - 1703) : la somme des distances a, b, c d'un point M intérieur à un triangle équilatéral aux côtés de ce triangle est égale à la hauteur h de ce triangle.

Résolution du problème

Soit M un point quelconque intérieur au triangle ABC .

- 1) Démontrer que $MA + MB + MC$ est supérieur ou égal à la somme des distances de M aux 3 côtés du triangle $A''B''C''$ (§ 0)
- 2) En déduire que $MA + MB + MC = IA + IB + IC$.

IV - METHODE 4

Cette méthode proposée au XIX^e siècle par Steiner utilise des propriétés de l'ellipse.

Préliminaire

Soient une ellipse de foyers B et C et T la tangente à cette ellipse en un point M de \mathcal{E} .

- 1) Démontrer que T est la bissectrice extérieure de l'angle $(\overline{MB}; \overline{MC})$.
- 2) Soit $2a$ la distance entre les sommets du grand axe ; démontrer que pour tout point M de l'ellipse $MB + MC = 2a$ et réciproquement.

Résolution du problème

- Soit I une solution du problème de Fermat.
- Soit $r = IA$.
- Soit $E_k = \{M \in P / MB + MC = k\}$. E_k est une ellipse de foyers B et C . I est élément du cercle Γ de centre A et de rayon r :
 - 1) Montrer que si I est solution du problème de Fermat alors I est élément de Γ et de l'ellipse de foyers B et C tangente à Γ en I .
 - 2) A l'aide de la tangente commune à Γ et à cette ellipse, démontrer que $(\overline{IB}; \overline{IA}) = (\overline{IA}; \overline{IC})(\pi)$.
 - 3) Par une méthode analogue, démontrer que $(\overline{IC}; \overline{IB}) = (\overline{IB}; \overline{IA})(\pi)$.
 - 4) En déduire une résolution du problème de Fermat.

BIBLIOGRAPHIE (telle qu'elle a été citée par Pierre Collaudin en 1991)

Paragraphe 0 : Configuration

- Recueil des problèmes des bulletins de l'IREM de Besançon.
- Redécouvrons la géométrie - Coxeter (Dunod). p. 95.
- Mathématiques 1^{ère} S et E géométrie - Collection Terracher (Hachette). p. 247.
- Mathématiques terminales C, E géométrie - Gauthier. Royer. Thiercé (Hachette). p. 196.
- Cours de mathématiques élémentaires - F.G.M. (Mame. 1905) Th. 162.
- Géométrie classe de mathématiques - Lebossé et Hemery (Nathan). p.206.
- Sujet du baccalauréat, série C. septembre 1985. Paris.

Paragraphe I : Méthode 1

- Préliminaire
 - Redécouvrons la géométrie - Coxeter (Dunod). p. 48.
 - Algèbre et géométrie, terminales C et E - Sauser (Ellipses), p. 36.
- Résolution
 - Recueil des problèmes des bulletins de l'IREM de Besançon.

Paragraphe II : Méthode 2

- Algèbre et géométrie, terminales C et E - Sauser (Ellipses), p. 164.
- Joyaux Mathématiques - R. Honsberger (Cedic), p. 37.
- Mathématiques seconde - Glaymann et Malaval (Cedic), p. 241.

Paragraphe III : Méthode 3

- Mathématiques 1^{ère} S. E - IREM de Strasbourg (Istra), p. 273.
- Joyaux mathématiques - R. Honsberger (Cedic), p. 33.
- 100 greats problems of elementary mathematics - Dorrie (dover), p. 361.

Paragraphe IV : Méthode 4

- Joyaux mathématiques - R. Honsberger (Cedic), p. 39.
- Sujet du baccalauréat, série E. 1985. Dijon.

PROLONGEMENT.

En augmentant le nombre de points, on se ramène à la recherche du proximal de n points : (voir pour $n = 4$ le T.P. de terminale C et E de l'IREM de Strasbourg, intitulé *Les autoroutes de Monsieur Fermat*, et pour n points l'article d' E. Ehrhart dans un bulletin de l'APMEP).

Avec les élèves de terminale C, nous nous sommes posé quelques questions sur une autre extension. Ne sachant pas si le thème avait été étudié, par commodité et aussi par amusement, nous avons nommé certains éléments.

Etant donné un triangle ABC et un réel α strictement positif. Soit φ_α l'application du plan dans \mathbb{R}_+ définie par $\varphi_\alpha(M) = MA^\alpha + MB^\alpha + MC^\alpha$

Soient M_α les points tels que $\varphi_\alpha(M_\alpha) \leq \varphi_\alpha(M)$ pour tout point M du plan.

Soit \mathcal{C} l'ensemble des points M_α quand α décrit \mathbb{R}_+^* .

M_α est appelé point de Samuel d'ordre α de ABC.

\mathcal{C} est appelée courbe de Samuel du triangle ABC.

Nous avons tracé quelques courbes de Samuel de triangles distincts en procédant par encadrement de M_α pour différentes valeurs de α .

Nous avons observé les résultats suivants dans le cas de triangles non isocèles.

- Si le triangle n'a pas d'angle obtus :

alors $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} M_\alpha = M_\infty$ est le centre du cercle circonscrit Γ au triangle ABC et $\varphi_\alpha(M_\infty) = 3R^\alpha$ où R est le rayon de Γ .

- Si le triangle a un angle obtus :

alors $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} M_\alpha = M_\infty$ est le milieu du plus grand côté du triangle ABC.

- Si le triangle n'a pas d'angle de mesure supérieure à 120° :

alors M_1 est le point de Fermat du triangle ABC et il existe un réel $\lambda < 1$ tel que pour tout α de $]0; \lambda[$, M_α est confondu avec le sommet du triangle ABC dont l'angle est de plus grande mesure : la courbe de Samuel présente alors un point d'arrêt ou un point limite (nous n'avons pas pu le déterminer).

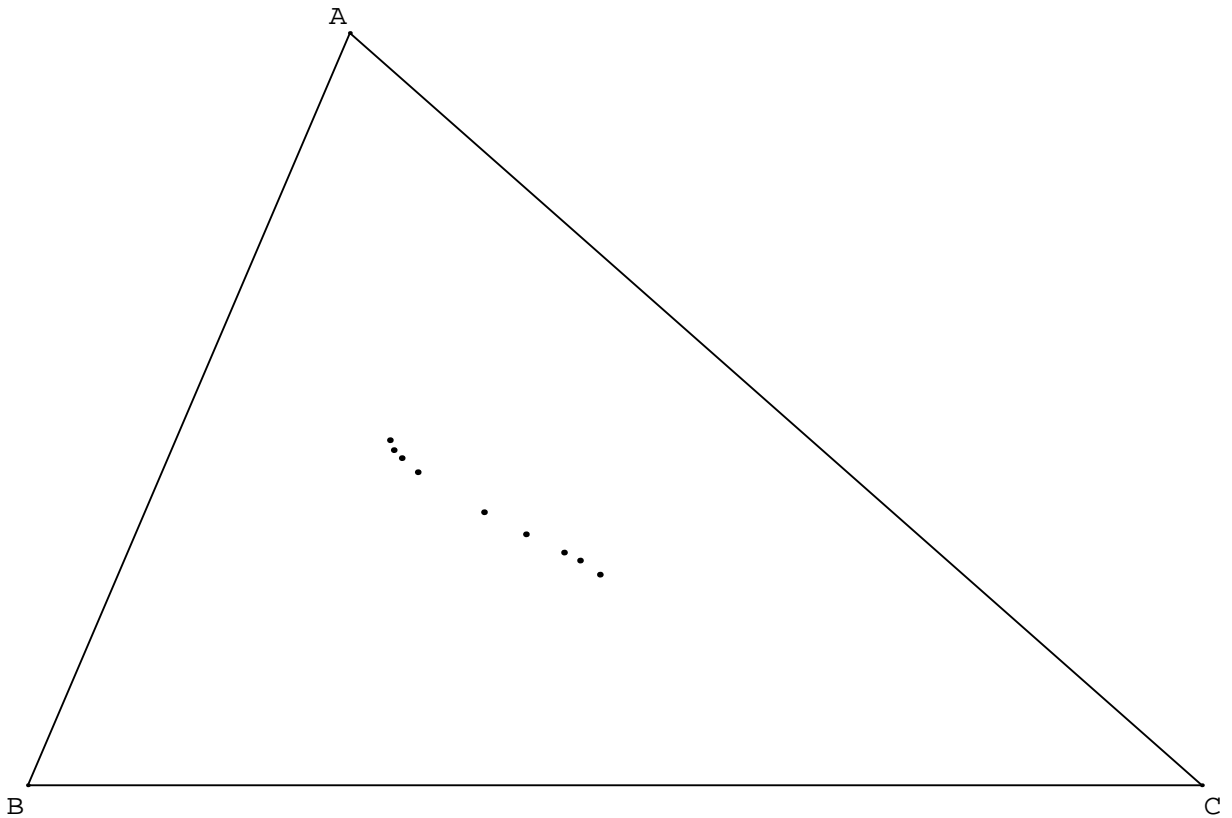
- Si le triangle a un angle de mesure supérieure à 120° :

alors la courbe de Samuel présente comme point d'arrêt le sommet A d'angle de plus grande mesure ; il existe également un réel. $\lambda \geq 1$ tel que pour tout α , si $\alpha < \lambda$ alors M_α est confondu avec A.

Toutes les courbes de Samuel passent par M_2 qui est le centre de gravité du triangle.

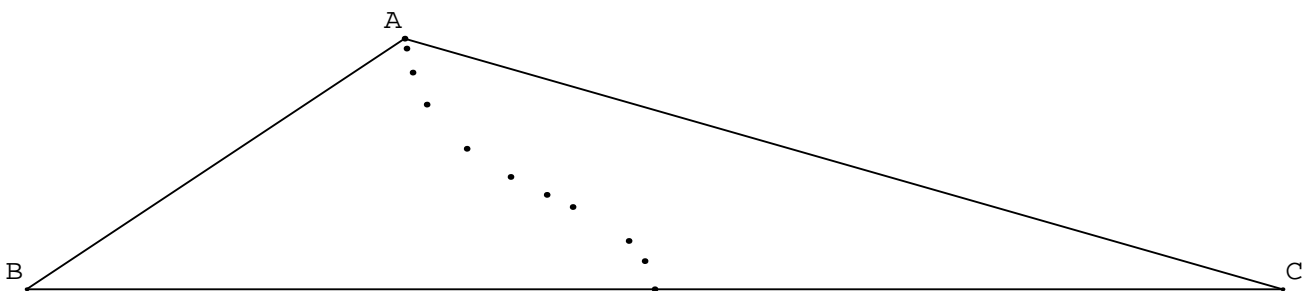
Question

Comment déterminer λ en fonction des mesures des angles du triangle sans utiliser une méthode dichotomique ?



Triangle acutangle.

Points de la courbe de Samuel pour les valeurs de α suivantes (en *allant* vers A) : 20 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1,5 ; 1 ; 0,9 ; 0,85 ; 0,81. $\lambda \approx 0,8$



Triangle ayant un angle supérieur à 120° .

Points de la courbe de Samuel pour les valeurs de α suivantes (en *allant* vers A) : 10 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1,8 ; 1,6 ; 1,4 ; 1,2 ; 1,1 ; 1,05. $\lambda \approx 1,012$