TÂCHES ALGORITHMIQUES EN CYCLE 3 : TROIS SÉANCES SUR LA MULTIPLICATION PAR JALOUSIE

Renaud CHORLAY
ESPE de l'académie de Paris
IREM de Paris

François MAILLOUX
Lycée Condorcet, Montreuil (93)
IREM de Paris, IREM Paris Nord

Blandine MASSELIN
Cité Scolaire Camille Saint-Saëns, Rouen (76)
IREM de Paris, IREM de Rouen

Introduction : motivations et modalités

Depuis la rentrée 2009, les programmes de mathématiques du lycée général et technologique font une place explicite à une « démarche algorithmique » insérée dans le cadre général du travail mathématique. En quelques années, cet aspect est entré dans les pratiques des enseignants de lycée avec ses activités récurrentes dans les manuels, ses questions au baccalauréat, ses outils usuels (calculatrices programmables, logiciels Algobox ou Scilab) et ses langages (Java, Python). Du côté de la recherche en didactique des mathématiques, plusieurs thèses ont cherché à analyser cette nouveauté au niveau du secondaire, par exemple, en termes de dialectique outil-objet, de transposition et de situations fondamentales (Modeste, 2012), ou en termes d'Espaces de Travail Mathématique (Laval, 2015).

C'est d'abord dans ce contexte que les auteurs de cet article — enseignants du secondaire et/ou formateurs d'enseignants — ont été amenés à réfléchir sur la nature et les potentialités de tâches spécifiquement algorithmiques en mathématiques. Cette expérience nous conduit à identifier huit tâches ; cette liste constitue un élément d'analyse *a priori*[1] :

---

[1] Du point de vue de la forme, cette présentation de liste de tâches peut être rapprochée d'éléments plus familiers dans le contexte de l'enseignement élémentaire. Ainsi, peut-on faire un parallèle — sur la forme — entre cette identification de tâches relatives au contexte mathématique « algorithmes » et les tâches prescrites par les programmes de l'école élémentaire dans le domaine géométrique ; tâches qui sont décrites par des verbes d'action : reproduire une figure (sur tel ou tel support, avec tels ou tels instruments), compléter une figure, construire une figure, décrire une figure (pour la faire reconnaître ou la faire construire), identifier la nature d'une figure (visuellement ou avec des instruments).

(1) face à un texte d'algorithme (en langage naturel, en pseudo-code ou en code), formuler des conjectures sur ce qu'il fait, sur la fonction qu'il réalise ;

(2) valider ou invalider des conjectures sur ce qu'il fait ;

(3) face à un texte d'algorithme, se l'approprier et le faire tourner « à la main » sur plusieurs entrées, en donnant la valeur des variables et des tests à chaque étape ;

(4) écrire un algorithme réalisant une tâche prescrite ;

(5) modifier un algorithme donné dans un objectif explicité ;

(6) démontrer qu'un algorithme réalise bien une tâche prescrite (preuve de correction) ;

(7) démontrer qu'un algorithme s'arrête ou chercher des conditions portant sur les entrées et déterminant l'arrêt (preuve de terminaison / problème de l'arrêt) ;

(8) comparer deux algorithmes réalisant la même association entrées-sorties, du point de vue de la complexité. En particulier : estimer ou majorer le nombre d'étapes élémentaires en fonction de la « taille » des entrées.

Soulignons qu'au lycée, il ne s'agit pas avant tout d'une initiation à la programmation (quoique le codage effectif ait toute sa place), mais bien de la poursuite sous un angle différent de tâches constamment travaillées dans la classe de mathématiques ; en particulier des deux classes de tâches que sont celles relatives aux textes à contenu mathématique — lecture, écriture, reformulation ; tâches (1), (3), (4), (5) — et celles relatives à l'argumentation — conjecture, démonstration ; tâches (1), (2), (6), (7) —.

Ces huit tâches ne nous semblent pas, par nature, spécifiques à l'enseignement du lycée, et, en un sens, de nombreux algorithmes sont travaillés dès l'école élémentaire, comme par exemple lors des opérations posées, ou encore lors de comparaisons d'entiers ou de décimaux dans le domaine numérique. Quant aux autres domaines, nous pensons aussi aux programmes de construction en géométrie, à l'usage de tableaux de conversion (domaine « nombre et grandeurs »), ou à l'utilisation de formules (ou de programmes) de calcul de longueurs et d'aires.

Nous pouvons faire jouer la comparaison avec la situation que nous décrivons au niveau du lycée pour faire ressortir quelques traits relatifs à l'enseignement élémentaire[2].

• Premièrement, quoique ces thèmes puissent être lus sous l'angle algorithmique, seules deux des huit tâches spécifiquement algorithmiques nous semblent usuelles à l'école élémentaire : s'entraîner, au départ à l'imitation, à la mise en œuvre de l'algorithme ; justifier la validité de l'algorithme[3].

• Deuxièmement, le travail semble laisser peu d'autonomie aux élèves.

• Troisièmement, l'accès au général passe par le *générique* : aussi bien pour apprendre à faire que pour évoquer le « pourquoi ça marche », nous travaillons sur des exemples numériques dont nous souhaitons faire entendre qu'ils sont porteurs de généralité au sens où tout autre cas est susceptible du *même* traitement (modulo des adaptations qu'on suppose transparentes) ou des *mêmes* éléments de justification.

---

[2] Nous nous appuyons ici sur les pratiques observées — en qualité de formateurs — dans les classes, ainsi que sur les propositions d'enseignement des manuels de l'école élémentaire.

[3] C'est la perspective rappelée dans le texte du programme entrant en vigueur à la rentrée 2016, en cycle 3 : *« (...) la construction de ces techniques [opératoires] est l'occasion de retravailler les propriétés de la numération et de rencontrer des exemples d'algorithmes complexes »* (MEN, 2015, p. 201). Sous le terme « algorithme complexe », on pense bien entendu aux techniques opératoires de la multiplication de deux entiers à plusieurs chiffres, de la multiplication des décimaux (en 6[e]), de la division euclidienne, de la division décimale des entiers (qui permet d'illustrer le problème de la terminaison, le cas $26 \div 5$ « s'arrêtant », contrairement au cas $10 \div 3$, par exemple).

Par contraste, nous avons choisi de mettre au point une séquence de trois séances visant à ouvrir la gamme des tâches spécifiquement algorithmiques rencontrées à l'école primaire : une première séance sur les tâches (1) et (3) (s'approprier un algorithme et conjecturer sa fonction), une seconde sur la rédaction de texte d'algorithme (tâche (4)), enfin un travail de comparaison de deux algorithmes (tâche (8)).

Quoique ce compte-rendu d'expérience puisse vraisemblablement fournir des pistes pour l'enseignement, ce n'est pas directement dans cet esprit qu'il est rédigé. La perspective générale n'est pas non plus directement celle d'une ingénierie didactique : elle est avant tout *exploratoire* au sens où nous cherchons à savoir dans quelles mesures ces tâches inhabituelles peuvent faire l'objet d'une réelle dévolution dans des classes ordinaires, ici de CM1/CM2 et de CM2. Pour cette raison, nous avons ajusté les variables didactiques pour que les tâches prescrites aient réellement une composante *réflexive*[4]; ces points seront explicités pour chaque séance. Cette perspective a aussi conduit à concevoir les séances pour que, sur un ou plusieurs temps allant de 10 à 20 minutes, les élèves travaillent en autonomie, au sens où le maître n'intervient pas dans le travail des groupes (sinon pour rappeler la consigne, encourager au travail, *etc.*). Ce compte rendu d'expérience sera donc très explicite sur ces phases : consignes et documents donnés aux élèves, éventail des productions écrites des groupes à l'issue des phases de travail autonome. Nous serons plus laconiques sur les phases dans lesquelles les groupes venaient présenter aux autres et aux encadrants le fruit de leur réflexion ; nous indiquerons rapidement les éléments validés par les encadrants ainsi que les termes de vocabulaire qu'ils ont pu souhaiter introduire à cette occasion. Enfin, la cohérence de ce projet nous a conduit à ne pas tester de séance sur la justification de l'algorithme travaillé (tâche 6) ; quoique de nature réflexive, il ne nous a pas semblé que cette tâche pouvait donner lieu à un travail autonome des élèves[5].

Le thème algorithmique retenu s'appuie en revanche sur un contenu mathématique familier aux élèves : celui de la multiplication des entiers. En CM2, le sens de l'opération n'est plus à construire, et une technique opératoire est déjà pratiquée depuis plusieurs années. C'est dans le cadre d'une formation sur l'histoire des mathématiques dans la classe[6] que nous avons travaillé sur des techniques anciennes de la multiplication des entiers et retenu le cas de la multiplication par la « méthode des tableaux » ou « par jalousie » (« *per gelosia* »)[7].

Rappelons-en les grandes lignes sur l'exemple de 93×52 :

---

[4] Le concept sous-jacent est ici celui de tâche *méta* (tâche-M), tel qu'il a été esquissé dans Chorlay (2016). Il ne nous semble pas nécessaire pour la lecture de ce compte-rendu d'expérience de faire une présentation générale de cette perspective. Il suffit de dire que l'on va étudier les tâches réalisées par les élèves ; les tâches prescrites possédant trois caractéristiques : (1) elles se distinguent de tâches d'exécution (calculer, tracer) ou d'application directe, (2) elles portent *sur* un contenu mathématique (par exemple : reformuler, résumer, comparer, évaluer selon différents critères), (3) les connaissances et compétences nécessaires à une réalisation satisfaisante de la tâche sont multiples et ne sont pas indiquées dans la consigne.

[5] Les questions d'appropriation par adaptation, d'écriture et de justification d'un algorithme numérique rencontré par un (puis *des*) exemple(*s)*, qui sont centrales dans ce travail, ont été aussi étudiées par Laurent Vivier (2013) aux niveaux Seconde et L1. Quoique non consulté au moment de la conception de notre séquence, cet article de L. Vivier nous conforte dans la décision de ne pas chercher la dévolution de la tâche de justification de l'algorithme.

[6] UE *« Utiliser l'histoire des sciences dans l'enseignement et la formation »*, Master de didactique des disciplines (option Pro), Université Paris Diderot. Responsables : C. de Hosson et R. Chorlay.

[7] Pour des éléments historiques ou pédagogiques : Guinet (1978a et b), Cerquetti-Aberkane et Rodriguez (2002), Brousseau (2007), Chabert (2010), Chorlay (à paraître).

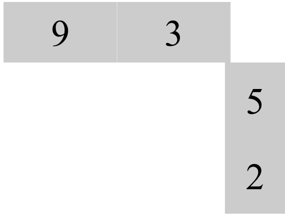
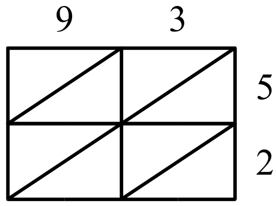
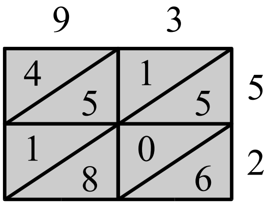
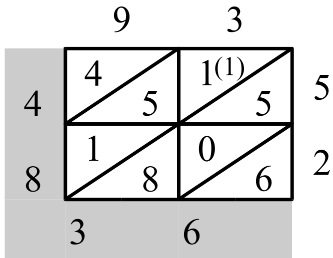
 Disposer les deux facteurs comme ceci.	 Tracer un quadrillage (une ligne par chiffre, une colonne par chiffre) puis les diagonales du haut-droit vers le bas-gauche.
 Multiplier les nombres à un chiffre. Dans chaque case, la diagonale sépare le chiffre des dizaines (en haut, éventuellement 0) du chiffre des unités (en bas) du produit.	 Additionner selon les quatre diagonales en partant d'en bas à droite, en n'oubliant pas les retenues éventuelles (ici notée (1)). Le résultat se lit « en L », en partant en haut à gauche : 4 836.

Figure 1 : Produit de 93 par 52 par la méthode des tableaux (ou « *per gelosia* »)[8].

Les séances ont été mises en œuvre à l'automne 2015 par des binômes formés de l'un d'entre nous et du professeur de la classe. Quatre classes ont été concernées, un CM1/CM2 à Saint Martin du Vivier[9] (Académie de Rouen), deux CM2 et un CM1/CM2 à Romainville[10] (Académie de Créteil). Toutes les séances ont été filmées ; les productions écrites des élèves ont été relevées et numérisées. Un dossier documentaire plus complet est disponible en ligne sur le site de l'IREM de Paris[11].

---

[8] Rappelons, en nous appuyant sur cet exemple, ce qui justifie cette technique. Si « u » signifie « unité(s) », « d » « dizaine(s) », « c » « centaine(s) » et « m » « millier(s) », on a (en partant du bas à droite) : $3u \times 2u = 6u = 0d6u$; $3u \times 5d = 15d = 1c5d$; $9d \times 2u = 18d = 1c8d$; $9d \times 5d = 45c = 4m5c$. On voit que les diagonales intérieures pourraient être libellées « unités » « dizaines » « centaines » « milliers » ; elles correspondent au classique « tableau de numération ». Signalons qu'un exercice sur cette technique (découverte, mise en œuvre, justification partielle) a été donné dans l'épreuve de mathématiques du CRPE en 2014 (Groupement 3).

[9] Merci à Isabelle Cuisiat de l'école Joseph Hémery à Saint Martin du Vivier.

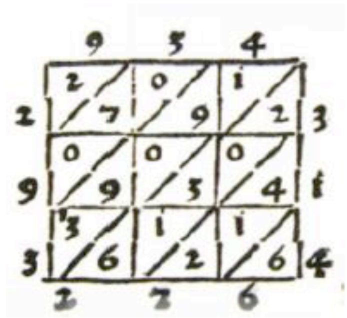
[10] Merci à Justine Camy-Palou, Stéphane Dardour et Véronique Meltouz, de l'école Gabriel Péri à Romainville.

[11] http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/taches_algorithmiques_en_cycle_3_-_trois_seances_sur_la_multiplication_par_/ (consulté le 27/09/17).

Séance 1 : découverte, appropriation et identification de l’algorithme

Nous devions trouver un moyen de communiquer aux élèves des exemples de multiplication par jalousie en leur dévoilant le moins possible la nature de l’opération et ses étapes. Nous avons opté pour une première phase du type « document mystère ». Aux élèves répartis en îlots de trois ou quatre, nous expliquons que des archéologues ont déterré un coffre contenant quatre documents[12] :

Document 1



Document 2

Document 3

Document 4

Figure 2 : Les quatre documents du coffre.

Dix minutes sont données aux groupes pour préparer une réponse à la question : *« À votre avis, pourquoi ces quatre documents ont-ils été mis ensemble ? ».*

[12] Les documents 1, 2 et 4 sont extraits de Chabert (2010), p. 30-32 ; le document 3 de Abdeljaouad (2005), p. 61). Document 1 : manuscrit latin *Tractatus de minutis philosophicis et vulgaribus* (Oxford, Bodleian Library, vers 1300). Document 2 : *Arithmétique de Trévise* (1478). Document 3 : Fac-simile du *Sharh al-Talkhīs* d’Al-Qalasādī (manuscrit du XV^e siècle, Bibliothèque de Gotha, Allemagne). Document 4 : *Jiuzhang suanfa bilei daquan*, Chine, 1450.

C’est à dessein que nous avons donné des documents réellement mystérieux, au sens où leur nature a peu de chance d’apparaître aux élèves, quoiqu’il y ait suffisamment de points communs et de différences pour que les élèves puissent réellement s’engager dans le travail de comparaison. De fait, dans les séances observées, la diversité culturelle des documents, leur authenticité ainsi que leur aspect mystérieux ont suscité immédiatement des discussions. À Romainville, par exemple, un groupe a commencé à discuter autour de la langue berbère et des différentes façons de compter.

Dans l’analyse de déroulement des séances, les bilans des groupes font ressortir comme points communs la disposition en grille, en « carrés barrés » ; la présence de chiffres ou de nombres. Quant aux différences identifiées, sont mentionnées celles de langues (arabe, chinois/japonais), la taille des grilles non unique, la présence ou non d’un texte accompagnant la grille, celle de chiffres à l’extérieur de la grille, ou encore de cases vides dans le document 4, une diagonale dans une direction ou dans l’autre.

À Saint Martin du Vivier, par exemple, au-delà de la simple observation, les élèves, souhaitent percer le secret de ce qui rassemble ces documents. Leur curiosité les pousse à émettre des conjectures sur leur nature : comme l’hypothèse la plus courante est qu’il s’agit d’un jeu numérique de type Sudoku ; certains élèves évoquent un carré magique ou un jeu de chiffres-croisés. Une autre piste est celle d’un code secret, peut-être le « code du coffre » ! Très minoritairement le lien avec les « tables de Pythagore » est évoqué, mais il s’agit d’une hypothèse fondée sur la similitude visuelle et non d’une identification de la présence de multiplications. Du point de vue de la maîtrise du français, soulignons que les élèves ont spontanément recours à des marqueurs indiquant qu’ils sont conscients de formuler des conjectures : « c’est *peut-être* un jeu », « *on pense* que c’est une sorte de mots-croisés ou de Sudoku » (nous soulignons).

À Romainville, les élèves identifient majoritairement des chiffres, des tableaux ou quadrillages et des langues différentes. L’hypothèse d’un jeu apparaît aussi, mais de façon minoritaire. Quelques groupes évoquent la présence de calculs, d’opérations et les tables de Pythagore. Dans un groupe, une élève suggère des époques différentes, mais son hypothèse ne sera pas reprise par le groupe ; de même, dans un autre groupe, pour la proposition d’un exercice pour des enfants.

Ceci est conforme à notre analyse *a priori*, d’ailleurs appuyée sur une première expérimentation au printemps 2015 : la nature synchronique de l’information portée par ces documents ne permet pas l’identification d’un calcul posé, faute d’éléments diachroniques relatifs à la chronologie du calcul, ou simplement à l’identification des entrées et de la sortie. Pour introduire ces éléments dans le milieu, nous avions donné au printemps 2015 un document du type « bande-dessinée » du même type que la figure 1 (sans texte et sans couleurs), mais il s’était avéré difficile à décoder pour les élèves. Il avait fallu passer dans les rangs pour accompagner la lecture de gestes détaillant la chronologie à un niveau plus fin que dans la BD ; on devait en particulier indiquer l’organisation spatiale propre à chaque étape : une première étape « intersection ligne-colonne », une seconde étape « en diagonales », et enfin la lecture de la sortie disposée en L.

À l’automne 2015, nous avons préféré un document d’emblée explicite sur ces aspects tout en cherchant à respecter les conditions d’un travail autonome des élèves. C’est pourquoi nous avons opté pour une petite vidéo[13] (elle aussi retrouvée dans le coffre !), dans laquelle l’un d’entre nous (François) est filmé en train de poser et d’effectuer la multiplication par jalousie de 93 par 52 ; la

[13] http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/taches_algorithmiques_en_cycle_3_-_trois_seances_sur_la_multiplication_par_/ (consulté le 27/09/17).

vidéo est muette, mais des gestes explicitent l'organisation spatiale pertinente à chaque étape du calcul.

Pour les multiplications des chiffres entre les facteurs, les index de la main droite et de la main gauche pointent les chiffres à multiplier et les font se rencontrer sur la case dans laquelle le résultat est écrit. De même, dans la phase additive, l'index de François pointe les chiffres ajoutés entre eux en « balayant » les diagonales concernées de haut en bas, avant d'écrire le chiffre des unités de la somme concernée. Il pointe aussi le report de la retenue ou indique l'ordre de lecture du résultat (du haut à gauche au bas à droite) autour de la grille.

Après deux visionnages de la vidéo, la consigne est : *« Par groupe, sur une feuille blanche, je vous demande d'essayer de refaire ce qu'a fait François, et d'expliquer à quoi ça sert. »*. Pendant cette phase, la vidéo est arrêtée sur l'image du début, dans laquelle seule les deux « entrées » 93 et 52 sont écrites au tableau, l'une horizontalement, l'autre verticalement.

La tâche de reproduction se révèle ardue, parfois au niveau graphique, toujours au niveau numérique. Au niveau graphique, si le tracé à main levée d'une grille 2×2 ne pose en général pas de problème, le tracé des diagonales est plus épineux : on observe des tracés dans le quadrillage du haut-gauche vers le bas-droit, ou des dispositions en croix ; une élève tente de tracer les diagonales avant les carrés, sans succès.

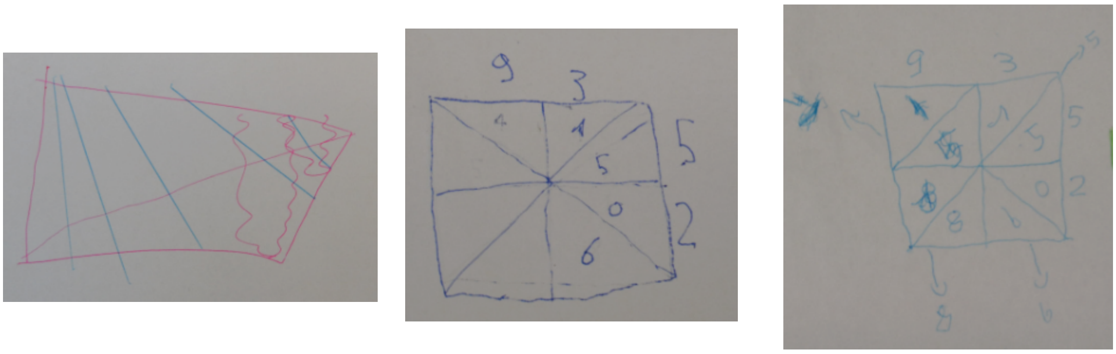


Figure 3 : Dispositions incorrectes.

Quant aux nombres, certains élèves essaient de les retrouver de mémoire, ce qui s'avère impossible. Face à cette impossibilité, les élèves changent de tactique et se tournent assez rapidement vers la multiplication : ici, le travail est porté par le collectif, car dans les groupes constitués, certains élèves ont gardé en mémoire les contenus de quelques cases. Dans la vidéo, des gestes suggéraient ensuite un travail selon les diagonales, en commençant en bas à droite. L'identification de l'opération réalisée selon ces diagonales est toutefois difficile. En procédant à tâtons, certains essaient des additions, des soustractions, parfois des multiplications. En calculant successivement des sommes de nombres écrits dans des diagonales, certains valident leur choix d'addition comme suit : ils calculent la première somme restreinte à un nombre (6). Se souvenant du geste du doigt de François balayant ces diagonales, ils ajoutent 5, 0 et 8, et trouvent 13. Dans la vidéo, certains repèrent que François n'écrit qu'un chiffre à l'extérieur de la grille et ce dans le prolongement de la diagonale, et en reporte un dans la diagonale considérée ensuite. La présence du 3 rapprochée du 13 de la somme obtenue est un indice qui conforte ces élèves dans l'idée que des sommes sont à effectuer ici.

Une fois les grilles reconstituées, la relance *« à quoi ça sert ? »* s'avère nécessaire, la tâche d'identification ayant été souvent un peu perdue de vue. Certains groupes n'identifient pas l'ensemble comme un tout. Nous illustrons ceci par l'expérimentation de Romainville où, sur les cinq groupes de la classe de CM1/CM2, deux n'identifient que la phase multiplicative, deux identifient les deux phases multiplicative et additive, mais n'arrivent pas à donner l'opération globale ; un seul groupe arrive à la multiplication 93×52. Notre hypothèse est que plusieurs facteurs se conjuguent :

(1) identification plus aisée de tâches simples isolées (multiplication de deux nombres à un chiffre, addition de nombres à un chiffre le long d'une diagonale) ;

(2) pas d'élément du milieu incitant les élèves — dans la phase de travail autonome — à ne pas se contenter de ces réponses élémentaires (mais justes), pour chercher, au-delà, un sens global à l'ensemble de la mise en œuvre de la technique ;

(3) peu d'indication qu'il y a un sens global à identifier, reliant de manière intelligible les entrées (93 et 52) à la sortie (4 836) : dans la vidéo, cette lecture d'un résultat final n'est suggérée que par le seul et dernier geste de l'index qui montre le résultat en le suivant du haut-gauche au bas-droit, en suivant une forme de « L » ; de plus, contrairement à la multiplication posée, il n'y a pas le symbole « $\times$ » entre les deux facteurs pour suggérer l'opération globale ;

(4) Enfin, effectuer — par calcul posé ou à la calculatrice — différentes opérations à partir des deux nombres initiaux, pour en comparer le résultat à 4 836, demandait une réelle prise d'initiative.

Dans l'ensemble des classes, l'hypothèse dominante est qu'il s'agit bien d'une opération (et non plus d'un jeu), mais la multiplication ne s'impose pas *a priori* comme la plus vraisemblable. En particulier, aucun groupe ne rapproche la structure d'ensemble de la méthode par jalousie de la structure — identique — de la technique posée usuelle : deux entrées, une sortie[14], une phase de multiplications de nombres à un chiffre (tables de multiplication) puis une phase d'additions. Ici, les élèves posent des opérations — le plus souvent la soustraction et la multiplication — selon la technique usuelle, et constatent que c'est le résultat de la multiplication qui est 4 836.

Par exemple, à Saint Martin du Vivier, dans un groupe, la soustraction est d'abord envisagée, puis abandonnée au profit d'une recherche se tournant vers la multiplication (figure 4) :

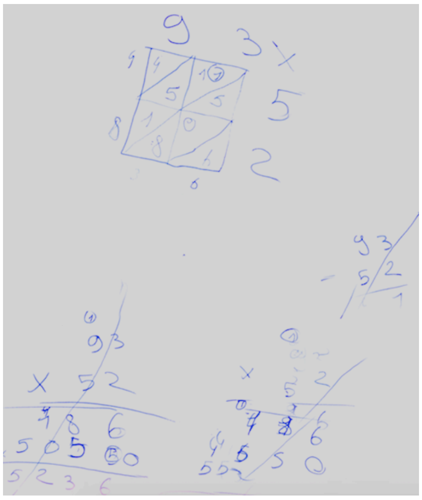


Figure 4 : Comparaison avec une soustraction et une multiplication posées.
selon les techniques usuelles.

[14] contrairement à la division euclidienne.

Les entrées sont identifiées, mais la multiplication est rejetée car elle ne permet pas à l'élève d'identifier la sortie, d'autant que le produit est erroné.

Signalons deux cas dans lesquels le mode de lecture du nombre-sortie est appliqué incorrectement aux entrées, qui se voient concaténées et lues comme l'unique nombre 9 352. Plusieurs groupes tentent le produit de cette entrée par cette sortie : 9352×4836 . Peut-être guidé par l'ordre de grandeur, un élève teste la division de 9 352 par 2.

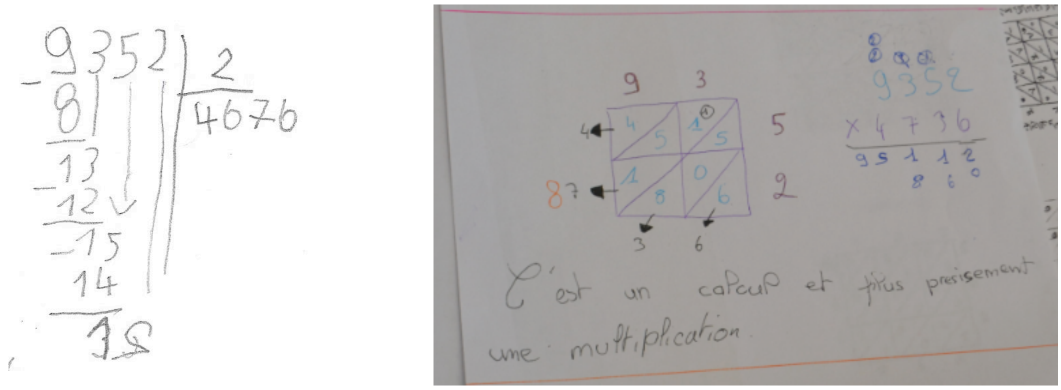


Figure 5 : Deux explorations du sens sous hypothèse de concaténation des entrées.

À Romainville, nous avons établi un bilan chiffré de l'interprétation proposée par 59 élèves, en nous fondant sur les productions écrites collectées à l'issue de la phase de travail autonome : 28 pensent qu'il s'agit de la multiplication de 93 par 52 ; pour 2 élèves, il s'agit de multiplications et d'additions, mais ils n'ont pas la vision globale d'une opération ; 3 élèves ont pensé à une multiplication en concaténant les nombres de l'entrée et de la sortie ; un élève a pensé à une division par 2. Enfin, 25 élèves n'ont pas testé d'hypothèse.

S'agissant d'une tâche complexe, comme l'identification du résultat et son interprétation par l'opération de multiplication avec l'utilisation d'un intermédiaire, c'est le bilan collectif qui valide cette hypothèse. Dans les quatre expérimentations, nous avions convenu que les groupes rapportent leurs résultats dans un ordre progressif, du moins abouti au plus abouti. Le professeur dialogue avec les groupes et les renvoie aux résultats obtenus par les méthodes classiques pour invalider ou valider les interprétations. Il institutionnalise les formules qui correspondent le plus à nos attentes comme *« ça sert à faire des multiplications à deux chiffres ou plus »*. Cette phase permet aussi de rappeler les termes « facteurs » et « produit », et d'introduire les termes « entrées » et « sortie ».

Une dernière tâche est confiée aux élèves : calculer, par cette méthode, 23×17 ; 32×25 ; 625×8 ; 625×32 . Les nombres ont été choisis de façon à établir une progression dans laquelle les élèves passent d'une tâche simple de reproduction de l'algorithme à une tâche nécessitant des adaptations. Le calcul de 23×17 ne nécessite pas de retenue dans la phase additive et 32×25 n'en demande qu'une. Les deux derniers cas demandent une prise d'initiative, puisque le calcul ne conduit plus à un carré mais à des grilles rectangulaires dont les dimensions sont à adapter aux deux entrées. Cet élément doit être rencontré pour préparer le travail de rédaction d'un algorithme général en séance 2, dans lequel on attendra — à la première étape de l'algorithme — une prise en compte de la longueur des facteurs pour déterminer le format de la grille à tracer. Il permet aussi, toujours dans une perspective exploratoire, d'observer le travail des élèves devant adapter seuls une technique rencontrée sur quelques exemples ayant un point commun (multiplication de nombres de deux chiffres) à des cas ne présentant plus ce trait particulier.

C'est le cas 625×8 qui pose le plus de problème, peut-être parce qu'il s'écarte à la fois de la forme carrée, et du format « 2 lignes, 2 colonnes », seul rencontré jusqu'ici. Une tactique courante a consisté à rendre la figure un peu moins rectangulaire. Comme on le voit dans la figure 6, cela peut donner lieu à des productions erronées : un élève se ramène à un carré grâce à un grand « 8 » étiré sur trois lignes ; de fait, ce grand « 8 » est utilisé comme s'il s'agissait de « 888 ». Cette production peut être invalidée, par exemple, par comparaison avec le résultat donné par la calculatrice pour le produit de 625 par 8. D'autres copies montrent une adaptation du format des entrées pour conserver la forme carrée (ici 3×3) ou se ramener au format à deux lignes, plus familier, en écrivant « 8 » sous la forme « 008 » (carré) ou « 08 » (deux lignes). C'est bien sûr valide du point de vue mathématique, quoique coûteux du point de vue ergonomique ; dans la copie en bas à droite, l'élève s'en rend vraisemblablement compte et abandonne en cours de route un calcul pourtant juste, pour passer au format le plus économique. Les copies reproduites à gauche et en haut à droite montrent les cas d'élèves qui, après avoir tenté une grille à deux lignes les conduisant à un embarras, l'abandonnent et passent au format à une ligne.

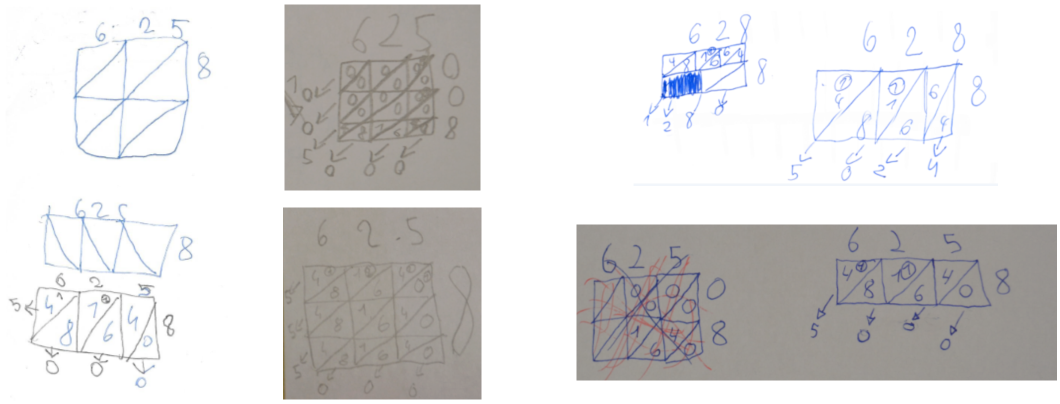


Figure 6 : Adaptations de la grille au cas 625×8 dans cinq copies.

Séance 2 : rédaction d'un texte d'algorithme

La deuxième séance se situe plus de deux semaines après la première. Dans l'intervalle, les élèves ont régulièrement posé et effectué des multiplications d'entiers par la méthode usuelle et par la méthode par jalousie, pour acquérir des automatismes. L'objectif de la séance 2 est de travailler la tâche de rédaction d'un texte d'algorithme (tâche (4)) ; nous plaçons pour cela les élèves en position d'émetteurs (fictifs), par la consigne : *« Expliquer le procédé de multiplication pour une classe qui n'aurait pas vu la vidéo de François. Votre méthode doit pouvoir se faire avec n'importe quels nombres au départ ».*

Nous avions un moment envisagé d'interdire explicitement l'appui sur un exemple, mais il nous a semblé que le niveau de difficulté rendrait l'entrée dans la tâche trop difficile pour beaucoup d'élèves. Même sans interdire le recours à des exemples, la tâche demeure difficile, pour au moins deux raisons. Tout d'abord son caractère inhabituel : c'est peut-être la première fois que les élèves se voient confier la rédaction d'un texte détaillant une procédure générale, alors même qu'ils n'ont peut-être pas d'expérience de ce type de texte en tant que lecteurs/utilisateurs. En outre, quoique certaines étapes de l'algorithme soient de nature calculatoire (multiplier, additionner) et faciles à dire en mots, d'autres font référence de manière précise à la disposition spatiale, ce à quoi le langage ordinaire se prête moins (sauf à commenter une figure). Nous avons donc opté pour une consigne qui explicitait l'attente de généralité tout en laissant les élèves chercher le moyen d'y répondre. Dans les premières minutes de la phase de travail autonome des groupes, les encadrants sont sollicités par des élèves qui souhaitent s'assurer qu'ils ont bien compris cet aspect de la consigne ; les encadrants reformulent : *« il faudrait une méthode qui marche tout le temps »*, *« comme une recette de cuisine »* ; lorsqu'un groupe demande si on peut *« mettre des exemples »*, les encadrants disent de se débrouiller.

Les productions ont été dans l'ensemble très riches, variées et inventives ; en outre, la séance a donné lieu à moins de tâtonnements ou d'erreurs que la première. Parmi les productions, nous avons été sensibles à trois aspects :

- (A) la capacité à produire un texte articulé en étapes clairement séparées, sans en oublier ni en intervertir,
- (B) la prise en compte de la demande de généralité, en particulier dans l'étape de dimensionnement de la grille (nombres de lignes et de colonnes) en fonction du nombre de chiffres des facteurs,
- (C) la prise en compte de la demande de généralité, en particulier la présence ou non d'exemples à valeur générique[15]. Nos observations recoupent ici largement celles de Denis Butlen et Monique Charles-Pézard (2007, p. 18).

À Saint Martin du Vivier, un seul groupe n'a recours à aucun exemple (figure 7) :

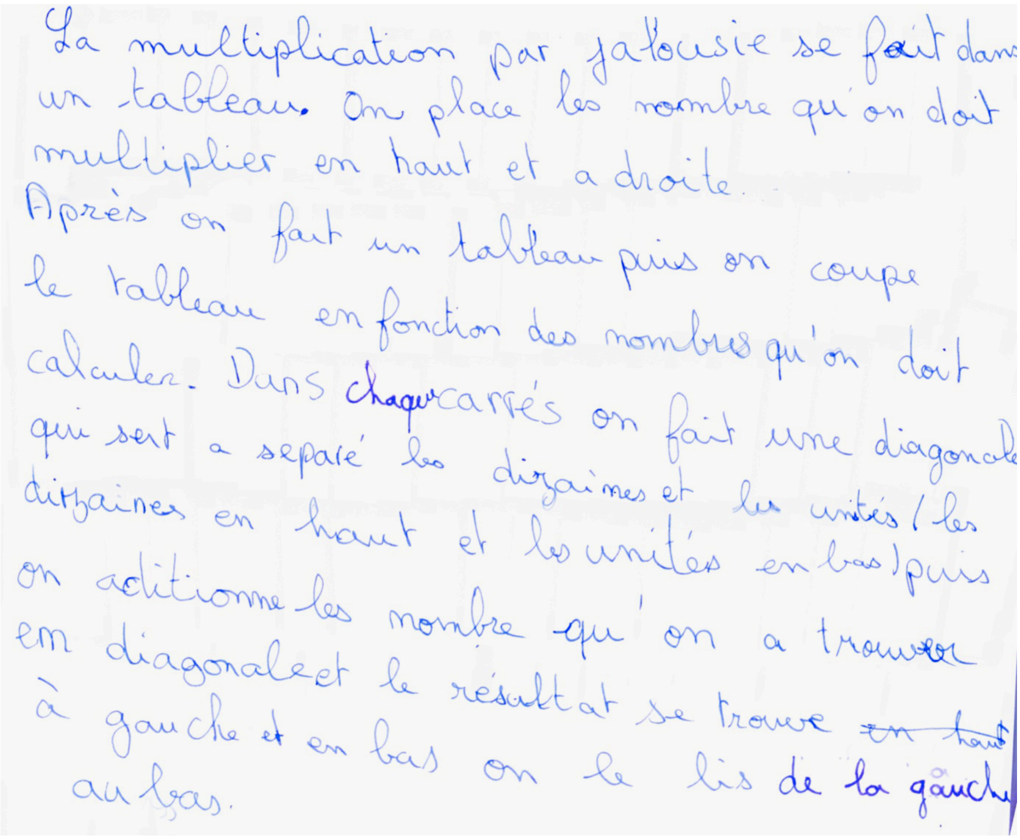

La multiplication par jalousie se fait dans
un tableau. On place les nombre qu'on doit
multiplier en haut et a droite.
Après on fait un tableau puis on coupe
le tableau en fonction des nombres qu'on doit
calculer. Dans chaqucarrés on fait une diagonale
qui sert a separé les dizaines et les unités (les
dizaines en haut et les unités en bas) puis
on aditionne les nombre qu'on a trouver
en diagonaleet le résultat se trouve ~~en haut~~
à gauche et en bas on le lis de la gauche
au bas.

Figure 7 : Production sans exemple.

[15] L'attention à cet aspect a été avivée par la lecture de travaux récents d'histoire des sciences (Chemla, 2004), ou la participation à de tels travaux (Chemla, Chorlay & Rabouin, 2016).

On notera l'omission d'une étape fondamentale de l'algorithme, celle correspondant à la multiplication des nombres à un chiffre. Un autre groupe (figure 8) produit un document proche de celui de la figure 7, en ce qu'il s'appuie très principalement sur le registre rhétorique (texte en français) ; s'il donne des exemples, il ne s'appuie pas sur eux pour désigner, dans le texte, tel nombre ou telle position dans le diagramme.

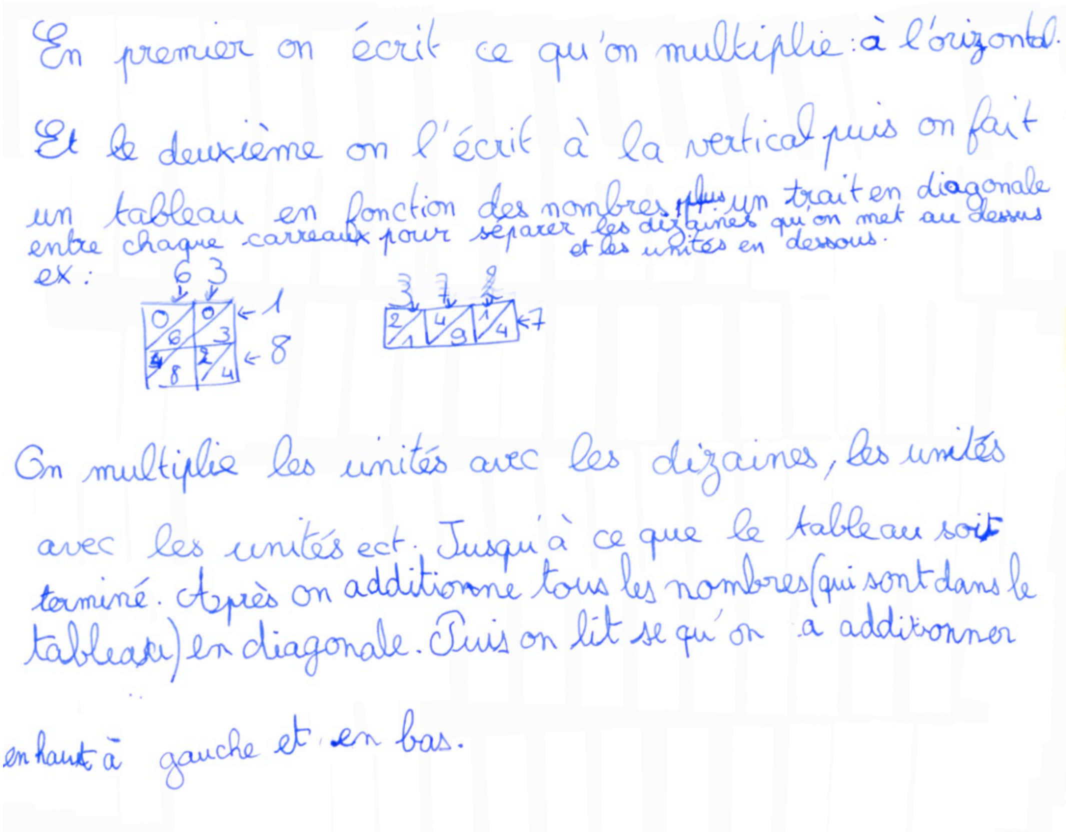

En premier on écrit ce qu'on multiplie : à l'orizontal.
Et le deuxième on l'écrit à la vertical puis on fait un tableau en fonction des nombres plus un trait en diagonale entre chaque carreaux pour séparer les dizaines qu'on met au dessus et les unités en dessous.
ex :
On multiplie les unités avec les dizaines, les unités avec les unités ect. Jusqu'à ce que le tableau soit terminé. Après on additionne tous les nombres (qui sont dans le tableau) en diagonale. Puis on lit se qu'on a additionner en haut à gauche et en bas.

Figure 8 : Production avec exemples, mais le texte ne s'appuie pas dessus.

Dans les deux cas (figures 7 et 8), la structuration en étapes (aspect (A)) est indiquée par des marqueurs temporels (*« en premier »*, *« le deuxième »*, *« après »*, *« puis »*) ; la dépendance de la taille du tableau vis à vis des entrées (aspect (B)) est énoncée de manière générale mais pas de manière suffisamment précise pour qu'un éventuel récepteur sache quoi faire (*« on fait un tableau en fonction des nombres »*). Les deux exemples de la figure 8 visent vraisemblablement à suppléer l'absence de règle de dimensionnement dans le texte.

L'exemple suivant (figure 9) illustre ce que nous proposons d'appeler le *« registre BD »*, auquel beaucoup de groupes ont recours. Il permet de bien identifier la chronologie, avec une numérotation des étapes venant accompagner la succession des figurations de l'état de la grille de calcul, et un complément textuel rédigé à l'impératif (aspect (A)) ; notons la reprise du terme *« sortie »* utilisé par le formateur lors du bilan de la séance 1. La présentation en BD, sur un unique exemple, n'invite pas à évoquer la question du dimensionnement (aspect (B)). Aucun élément textuel, ni graphique, n'indique que l'exemple qui sert de support est à considérer comme générique (aspect (C)). On notera en outre une confusion entre la droite et la gauche à l'étape 5.

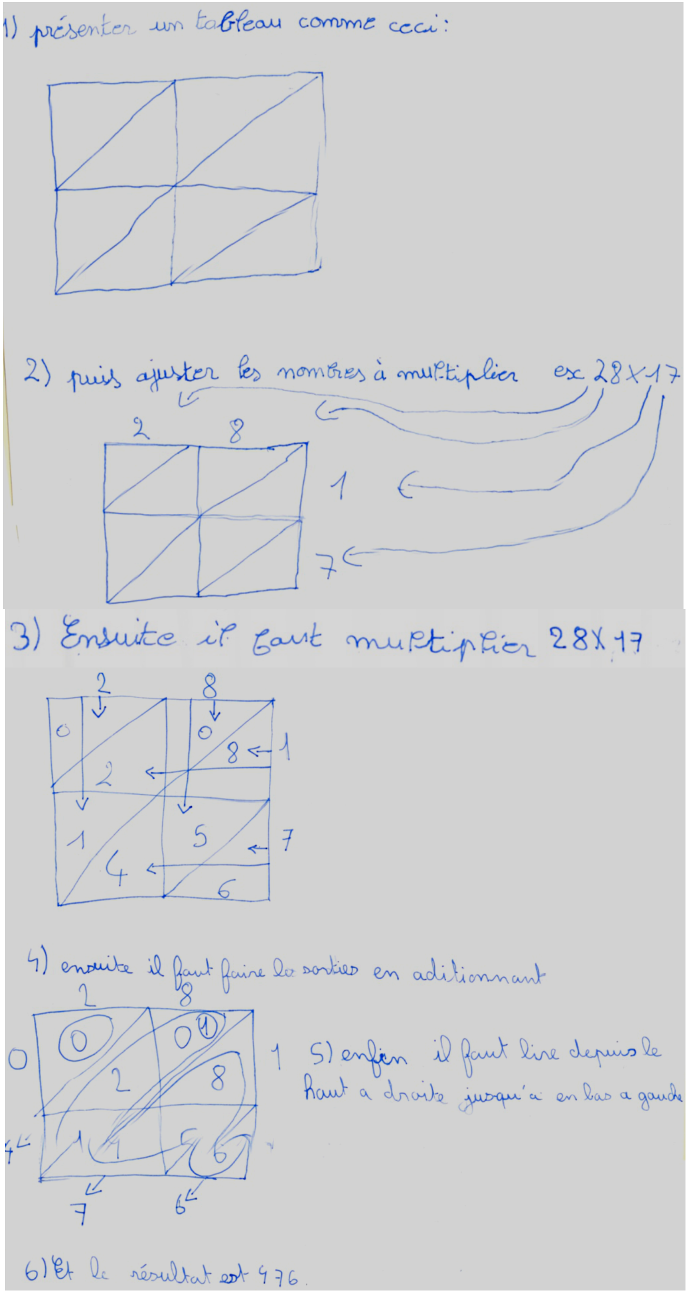


Figure 9 : Recours au *« registre BD »*.

Notons que le recours au registre BD atteste d'une certaine prise d'initiative des élèves, alors qu'ils sont plus habitués à ce que les techniques opératoires soient illustrées dans les classes au moyen de posters à une seule image. Ce registre BD est toutefois présent dans des manuels, par exemple dans *Classe maths CE2* (Schramm & *al.*, 2013, p. 104) lors des séances de mise en place de techniques opératoires ; il est possible qu'il y ait, de la part des élèves, recours à une mémoire didactique portant sur un mode d'exposition de techniques opératoires. Une autre hypothèse est que le registre BD fasse écho à la première présentation dynamique de la technique, donnée dans la vidéo lors de la séance 1.

Rares sont les cas où la chronologie est erronée (aspect (A)). C'est peut-être le cas dans la figure 10 : *« la dizaine à l'angle à gauche et l'unité en bas à droite »* pourrait renvoyer à la disposition autour de la diagonale de chaque case des deux chiffres des produits élémentaires ; cela devrait alors être mentionné avant les additions en diagonale.

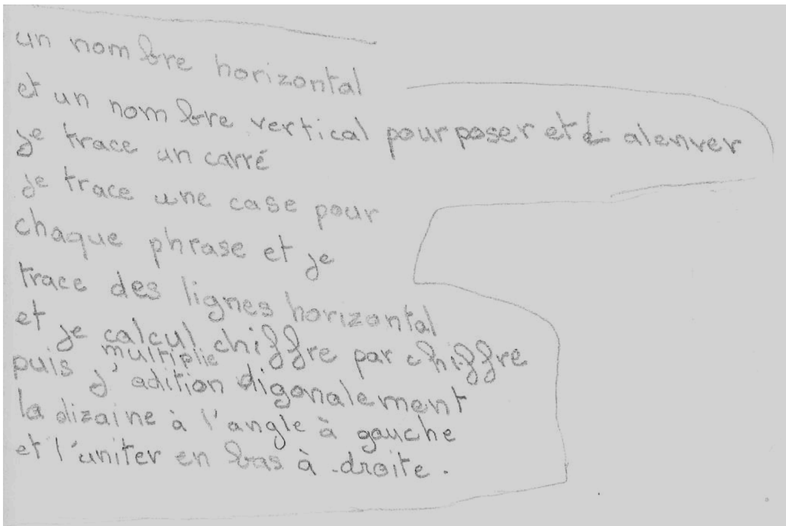


Figure 10 : Chronologie légèrement erronée.

Certains groupes vont jusqu'à expliciter la chronologie en donnant un titre aux étapes : *« Étape 1 : Poser. (…) ; Étape 2 : Multiplication. (…) ».*

Nous avions identifié l'expression de la contrainte de dimensionnement comme l'un des enjeux du travail (aspect (B)), d'abord pour savoir si la demande de généralité pouvait être prise en compte par les élèves (dans les conditions de l'expérimentation), ensuite, le cas échéant, pour voir quelles ressources (au sens large : connaissances mathématiques, ressources sémiotiques[16]) ils mobilisaient pour y répondre. Dans les cas où une certaine généralité est visée, on observe une grande variété de moyens retenus. Ainsi, à Romainville, le groupe d'Audrey accompagne son exemple numérique d'une règle générale : *« plus il y a deux chiffre plus on rajoute de cases »* (figure 11).

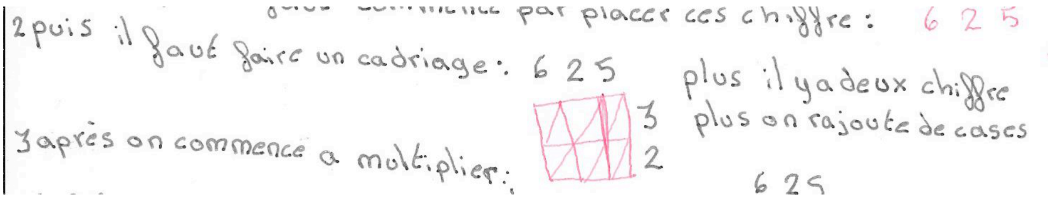


Figure 11 : Esquisse d'une règle de dimensionnement.

La variabilité des dimensions peut être exprimée de manière plus élémentaire en multipliant les exemples. Des tactiques complémentaires viennent parfois compléter cette démarche, ce qui nous semble confirmer une réelle appropriation par les élèves de l'enjeu d'expression du général. Ainsi, certains choisissent de donner des grilles vides (figure 12) : l'absence de nombres

[16] On peut regarder l'usage progressif de lettres pour dénoter des objets indéterminés (nombres, grandeurs, points, droites, *etc.*) comme un enjeu des cycles 3 et 4. Ce compte rendu d'expérience ne porte pas directement sur ce point, cette ressource sémiotique n'étant pas disponible aux élèves de CM1-CM2 ; le serait-elle qu'elle n'aiderait sans doute pas beaucoup pour énoncer de manière générale une règle de dimensionnement de la grille de la jalousie.

particuliers donne à ces grilles un caractère plus général qu'en illustrant l'algorithme par des exemples.

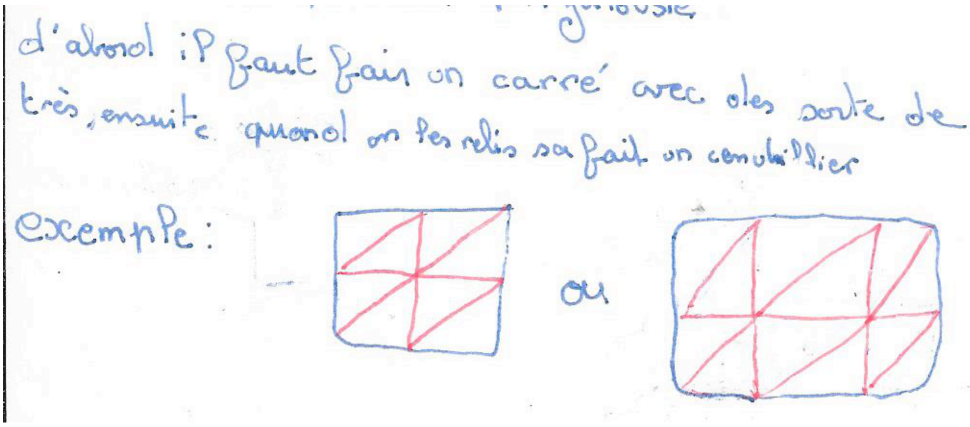


Figure 12 : Grilles vides.

On observe aussi la combinaison des tactiques (figure 13) : expression verbale de la variabilité du dimensionnement (*« ça dépend des facteurs »*) qui ne va pas jusqu'à l'énoncé d'une règle de dimensionnement. Juxtaposition de grilles vides, des points d'interrogation venant désigner l'emplacement de chiffres *quelconques*.

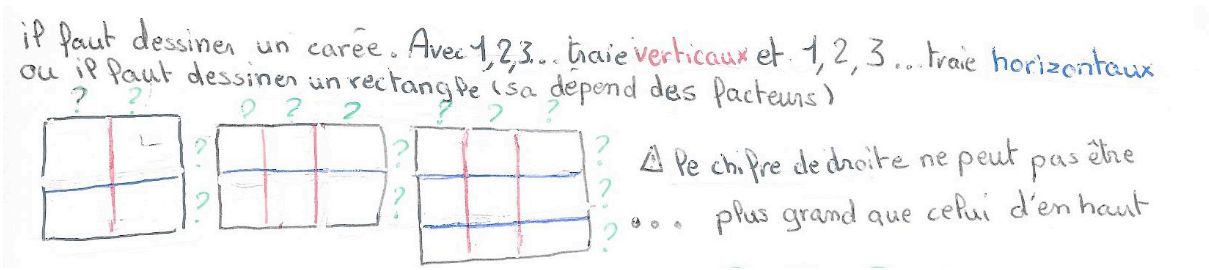


Figure 13 : Dimensionnement avec points d'interrogation.

On remarquera, à droite dans la figure 13, une mise en garde des élèves : *« Le chiffre de droite ne peut pas être plus grand que celui d'en haut »*. Nous n'avions pas anticipé ce point. On peut penser que, dans les cas où l'écriture des deux facteurs étaient de longueurs différentes, une routine s'est installée dans la classe de ces élèves, consistant à toujours placer le nombre dont l'écriture est la plus longue à l'horizontale ; ou que toutes les consignes ont été données sur le modèle *« calculer : nombre dont l'écriture est la plus longue* $\times$ *nombre dont l'écriture est la plus courte »*. Si nous l'avions anticipé, nous aurions pu faire réfléchir les élèves sur la commutativité de la multiplication.

Conformément à l'esprit de ce compte rendu d'expérience, nous ne donnons ici que de brèves indications sur la phase de bilan collectif orchestrée par les encadrants : la comparaison des productions y vise à montrer combien elles peuvent se compléter pour pallier les lacunes des unes ou des autres. Les encadrants y rappellent aux élèves le critère d'évaluation des productions : une autre classe devrait pouvoir apprendre à multiplier par jalousie en s'appuyant uniquement sur leurs textes ; ils cherchent ainsi à les placer provisoirement en position de « récepteurs » pour les enrôler dans la tâche d'évaluation. Détaillons cependant un aspect du bilan collectif ayant trait au dimensionnement de la grille (aspect (B)). Constatant que dans les productions écrites des groupes, à l'issue de la phase de travail en autonomie, aucun d'entre eux ne parle de *« longueur des nombres »*, de *« taille des nombres »* ou de *« nombre de chiffres des nombres »*, les encadrants relancent à l'oral les élèves chargés de présenter les affiches lors du bilan collectif, dans le but de leur faire préciser la contrainte de dimensionnement. Lorsque les groupes disent *« en fonction des nombres »* ou *« ça dépend des nombres »*, l'encadrant demande : *« Le tableau, ça dépend* ***de quoi****, du coup ? »*. On obtient : *« on peut l'ajuster en fonction des nombres qu'on veut placer »*, *« ça dépend des entrées »*, *« ça dépend des nombres à multiplier »*. Après une demande de précision (*« ça dépend* ***de quoi*** *dans les entrées ?»*), un élève finit par évoquer *« le nombre de chiffres »*. Quoique la réponse semble acceptée par la classe — du moins au sens où elle ne suscite pas de demande de clarification —, les élèves ont du mal à se l'approprier : les deux groupes suivants peinent à retrouver cette formulation, même en réponse à la même question précise. À la difficulté liée à la maîtrise fine du vocabulaire relatif aux nombres s'ajoute vraisemblablement une difficulté liée au mode de lecture de l'organisation spatiale de la figure : la contrainte de dimensionnement est sans doute plus facile à exprimer pour des élèves qui peuvent — lorsque c'est pertinent — la décomposer en colonnes et en lignes que pour des élèves qui la décomposent uniquement comme un assemblage de carrés.

Signalons une variante dans la lecture des entrées-sorties : à l'oral, en commentant un exemple générique 2×2, le premier groupe affirme qu'il y a quatre sorties, désignant par là les quatre chiffres du résultat ; pressés de s'expliquer, ils proposent de distinguer *« un résultat »* mais *« **quatre** sorties »* ; en cohérence, ils disent considérer qu'il y avait quatre entrées. Quoique nous ne l'ayons pas anticipé, cette réponse ne nous semble pas incorrecte, d'autant plus que les élèves proposent des termes pour distinguer les deux modes de lecture « nombre » et « suite de chiffres » ; cette dualité de lecture reflète bien le caractère « chiffre à chiffre » commun aux techniques opératoires en système positionnel.

Séance 3 : comparaison de deux algorithmes

Quelques jours plus tard, après que les élèves ont continué à être entraînés sur les deux techniques posées — l'usuelle[17] et la méthode par jalousie —, une dernière séance d'une heure est consacrée à la comparaison des deux algorithmes. La séance s'ouvre sur le calcul au tableau de quelques multiplications conduites par les deux méthodes, pour que les élèves disposent d'exemples disponibles. À titre d'exemple pour le lecteur (figure 14), rappelons le cas de 93×52 tel qu'il se calcule par jalousie (à gauche) et dans l'une des dispositions usuelles de l'algorithme couramment enseigné (à droite).

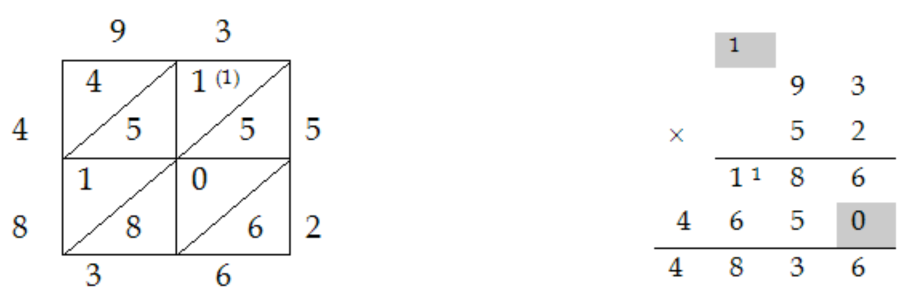


Figure 14 : Deux techniques pour 93×52.

[17] Pour un travail récent sur l'enseignement de cette technique usuelle, voir Clivaz (2016).

Pour cette dernière, nous avons grisé[18] des éléments à partir desquels les deux algorithmes vont pouvoir être distingués. Premièrement, notons la présence possible de retenues (ici le « 1 » de $5\times3=15$) nécessitant d'insérer des additions dans la phase multiplicative de la technique usuelle (ici : $5\times9=45$, $45+1=46$), ce qui ne se présente jamais dans la technique par jalousie, dont la première phase est « purement » multiplicative. Cette stricte séparation des phases multiplicatives et additives dans la jalousie permet aussi une relecture plus simple pour qui voudrait contrôler son opération après coup : les carrés de la grille de la jalousie reflètent directement les tables de multiplication, ce qui n'est pas le cas des deux lignes de calculs intermédiaires de la technique usuelle. Deuxièmement, la technique usuelle nécessite — pour un multiplicateur à plusieurs chiffres — l'écriture de zéros (ou de points) sur les lignes de calculs intermédiaires au-delà de la première ; dans l'exemple, la présence du zéro sur la deuxième ligne de calculs intermédiaires rappelle le lien entre les multiplications de 93 par 5 et de 93 par 50. Cette insertion de zéros est source d'erreurs pour de multiples raisons : par l'oubli des de zéros, par la difficulté à insérer le bon nombre de zéros (aucun, puis un, puis deux...), et enfin par la difficulté à bien disposer les chiffres en colonnes (surtout sur papier blanc). Sur ce dernier point, on peut certes considérer que la technique par jalousie est plus coûteuse en temps au départ, puisqu'elle demande le tracé d'une grille ; mais ce coût peut être compensé par un moindre risque de disposition erronée des chiffres au cours du calcul.

La consigne est brève : *« Si vous aviez à conseiller une classe de CM2, quelle méthode choisiriez-vous ? Pourquoi ? »*.

Ici encore, dans une perspective exploratoire, nous avons opté pour une consigne laissant la tâche très ouverte. Nous avions envisagé d'indiquer nous-mêmes des critères de comparaison, mais finalement choisi de confier aux élèves le soin de trouver des critères.

Soulignons quelques aspects de cette tâche. Premièrement la tâche a été bien comprise par les élèves ; aucun groupe n'est resté au simple niveau de l'expression d'une préférence, aucun n'en est resté à une justification vague du type *« on la préfère parce que c'est plus simple »*. Deuxièmement, tous les groupes ont exprimé une préférence, très majoritairement pour la jalousie : on peut penser que cette non-neutralité favorise l'investissement des élèves dans la tâche, puisqu'ils ont une préférence à défendre. Troisièmement, les critères de comparaison mis en avant par les élèves renvoient bien à des propriétés mathématiques et objectives des deux algorithmes, que leur valorisation soit positive ou négative. Cela implique, entre autres, qu'il pourrait y avoir débat scientifique lors d'une phase de mise en commun, si les diagnostics différaient sur un point important.

Nous verrons que, dans cette expérimentation, l'ensemble des points de comparaisons évoqués plus haut ont été mentionnés par des groupes d'élèves ; ils leurs permettent le plus souvent de justifier une préférence pour la technique par jalousie, source de moins d'erreur selon eux. Nous verrons ensuite qu'une comparaison en termes de complexité — qui nous intéressait particulièrement pour faire le lien avec les objectifs d'algorithmique au lycée — a pu émerger plus ponctuellement.

Comparaisons en termes de risques d'erreurs

Quoique les groupes se prononcent très majoritairement en faveur de la jalousie, certains soulignent comme inconvénient la longueur de la phase graphique de tracé de la grille et des

[18] Précisons : ces éléments sont grisés ici pour le bénéfice du lecteur, ils étaient absents dans les classes pour ne pas indiquer aux élèves les aspects à comparer.

diagonales. Par exemple : *« par contre, c'est plus long car on fait un tableau »*.

Un critère revient souvent : la technique usuelle demande, lorsque le second facteur a plusieurs chiffres, que les lignes de calcul soient décalées graphiquement, en général par l'écriture de zéros ou de points. Beaucoup de groupes soulignent qu'il y a là un risque d'erreur, absent dans la jalousie : *« elle est aussi plus rapide parce qu'il y a [sic] qu'un seul étage et qu'on ne doit pas mettre un zéro »* (Saint Martin du Vivier, groupe Charlotte-Élodie-Gaby), *« on n'a pas besoin de penser au 0 des dizaines »* (Saint Martin du Vivier, groupe Maxime-Margot-Naophel), *« pour faire la multiplication classique on est obligé de mettre un zéro dans la deuxième ligne de l'addition. Alors qu'avec la multiplication par jalousie on n'a pas besoin »* (Saint Martin du Vivier, groupe Léna-Lucas-Mattéo). Plusieurs groupes disent que la jalousie permet plus facilement de multiplier de « grands nombres », ce qui renvoie peut-être indirectement à la même difficulté dans la technique usuelle. Ainsi, quoique le tracé de la grille soit demandeur en temps, il garantit une parfaite disposition des résultats intermédiaires ; on pourrait bien entendu faire remarquer que la technique usuelle est implicitement posée dans un tableau de numération que des colonnes pourraient matérialiser graphiquement.

Un second critère parfois mis en avant en faveur de la jalousie, est le fait qu'une fois l'opération terminée toutes les étapes laissent une trace graphique, ce qui permet plus facilement de contrôler son calcul :

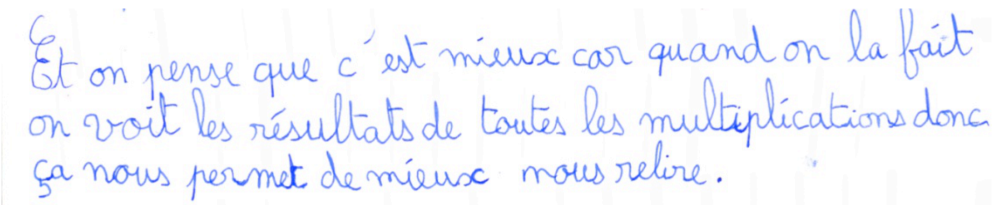

Et on pense que c'est mieux car quand on la fait
on voit les résultats de toutes les multiplications donc
ça nous permet de mieux nous relire.

Figure 15 : Saint Martin du Vivier, groupe Capucine-Philomène-Raphaël (extrait).

Un troisième aspect renvoie à une différence importante entre les deux algorithmes. Tous deux font se succéder une première phase multiplicative (reposant sur les tables) et une phase additive. Dans les deux cas, la phase additive peut donner lieu à des retenues. En revanche, aucune retenue n'intervient dans la phase multiplicative de la jalousie, contrairement à la technique usuelle. On sait les difficultés associées à ces retenues dans la phase multiplicative : difficulté de disposition spatiale sur la feuille (en particulier s'il y a plusieurs étages de retenues), difficulté à tenir le registre de retenues en cours et de celles consommées dans des étapes précédentes, risque d'échanger la multiplication et l'addition, nécessité d'un calcul mental enchaînant deux étapes (avec mémorisation d'un résultat intermédiaire).

Le fait que les deux algorithmes diffèrent quant aux retenues est très souvent cité, sans toutefois être décrit avec précision : *« On préfère cette tequenique [la jalousie] parce que (…) les retenues des multiplications sont dans le tableau et ça nous évite de nous tromper »* (Saint Martin du Vivier, groupe Capucine-Philomène-Raphaël). Peut-être une référence aux petits calculs mentaux intermédiaires dans l'exemple suivant :

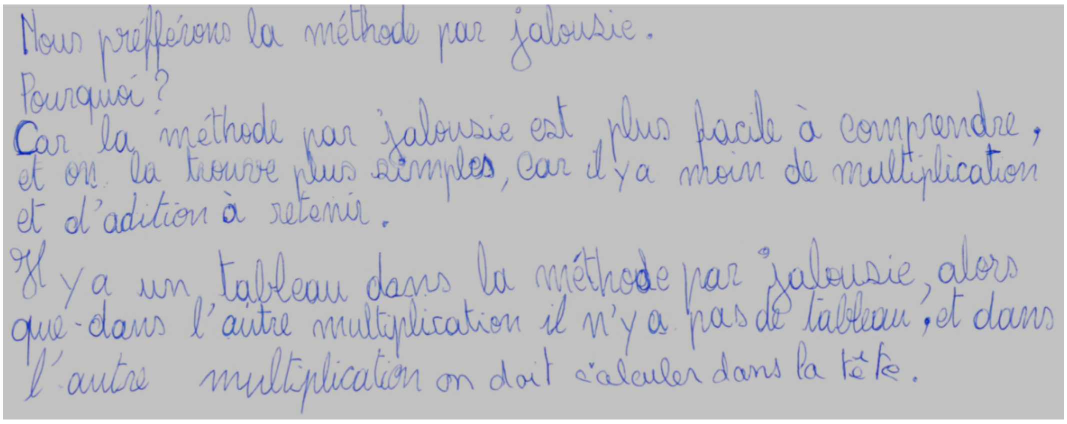

Nous préfférons la méthode par jalousie.
Pourquoi ?
Car la méthode par jalousie est plus facile à comprendre, et on la trouve plus simples, car il y a moin de multiplication et d'adition à retenir.
Il y a un tableau dans la méthode par jalousie, alors que dans l'autre multiplication il n'y a pas de tableau, et dans l'autre multiplication on doit calculer dans la tête.

Figure 16 : Saint Martin du Vivier, groupe Martin-Ninon-William.

Certains groupes vont toutefois jusqu'à une distinction précise :

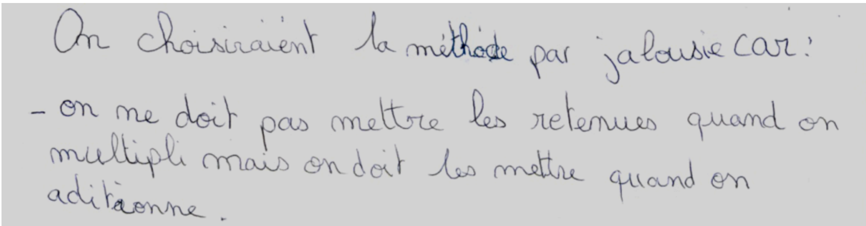

On choisiraient la méthode par jalousie car :
- on ne doit pas mettre les retenues quand on multipli mais on doit les mettre quand on aditionne.

Figure 17 : Saint Martin du Vivier, groupe Charlotte-Élodie-Gaby (extrait).

Signalons deux cas où des élèves n'ont pas exprimé de préférence pour la jalousie. Une élève atteinte d'une dyspraxie lourde n'a pu reproduire les grilles sans l'aide de l'enseignante. Une autre a exprimé le fait qu'elle préférait la multiplication « classique » ; lors des séances, cette élève avait été pénalisée par la non maîtrise des tables de multiplication, mais nous ne savons pas en quoi cela a pu affecter sa préférence, les tables étant nécessaires dans les deux techniques.

Signalons également, lors du bilan collectif à Saint Martin du Vivier, l'expression ponctuelle d'un doute sur la validité générale de la méthode par jalousie. Il ne s'agit pas d'une demande de justification générale (preuve de correction), une telle demande n'ayant été formulée à aucun moment par aucun des groupes des quatre classes. Un élève soulève pour la classe le point délicat suivant, relatif à la phase multiplicative : *« Et comment on fait si le résultat il est dans les centaines ? On met les deux dans la même case ou... ? »* ; l'encadrant renvoie la question à la classe, plusieurs élèves demandent la parole pour expliquer que *« ce n'est pas possible. Ça va jusqu'à 9, et $9 \times 9 = 81$ »*. Le débat est clos.

Les points mis en avant par les élèves — aussi bien la préférence globale pour la jalousie que la liste des points de comparaison — recoupent très largement les résultats de l'analyse ergonomique de cette technique proposée par G. Brousseau (2007, pp. 10-14) sur une expérimentation effectuée sur 20 ans. Comparant la jalousie à la multiplication classiquement posée, il souligne l'amélioration de la fiabilité des calculs, les moindres erreurs sur les ordres de grandeurs liées à la place des chiffres et des résultats prévue dès la pose, une correction et un contrôle facilités, et enfin le fait que seules des retenues sont reportées dans l'addition.

Une approche de la comparaison en termes de complexité

Un dernier critère nous intéressait particulièrement, en ce qu'il relève d'une démarche fondamentale en algorithmique, la comparaison en termes de complexité. Sans chercher à définir ici cette notion — d'ailleurs polysémique —, disons qu'une comparaison quantitative en termes de nombre d'étapes nous intéressait, en particulier parce qu'elle est celle sur laquelle les programmes et les documents d'accompagnement du lycée invitent à faire travailler les élèves. Par exemple, si pour une même multiplication, une technique demande 15 étapes intermédiaires et l'autre 6, la seconde possède un avantage sur la première. Ceci est à nuancer d'au moins deux manières : d'une part les étapes intermédiaires ne sont pas toutes équivalentes (en particulier, certaines sont des additions et d'autres des multiplications) ; d'autre part, le comptage des étapes demande qu'on se mettre d'accord sur ce que l'on considère comme une étape : ainsi, l'addition d'une colonne ou d'une diagonale de 3 nombres doit-elle être comptée comme une étape (additive) ou comme deux additions ? De plus, la présence de retenues modifie le nombre d'étapes additives. Enfin, ne doit-on compter que les étapes de calcul, ou intégrer le décompte des étapes graphiques (tracé de la grille et des diagonales, disposition des deux chiffres d'un produit élémentaire au-dessus et en-dessous de la diagonale, décalage par écriture d'un zéro...) ? Un travail complet de comparaison en termes de complexité demanderait que des conventions de comptage soient établies, et qu'on cherche à estimer (ou simplement majorer) de manière générale le nombre d'étapes en fonction de la taille des facteurs. Ce type de travail complet ne nous semble pas possible en cycle 3.

Nous avons vu plus haut que les groupes mettent majoritairement et explicitement en avant des critères du type : dans cette technique, on risque de se tromper à tel ou tel niveau, et pas dans l'autre. Par contraste, la question de la complexité apparaît très rarement dans les traces écrites élaborées en autonomie. On ne dépasse guère quelques allusions à la rapidité : *« Je choisirai la métode par jalousie car s'est plus rapide de multiplier de grands nombres plus rapidement »* (Saint Martin du Vivier, brouillon de Mathys, figure 19) ; et ces allusions sont difficiles à distinguer des critères de « simplicité » et de « facilité » avancés plus explicitement. Ceci étant, quoique les bilans écrits montrent peu d'investigation dans ce sens, c'est peut-être parce que les élèves ne trouvent pas eux-mêmes comment objectiver leur impression de rapidité. À ce moment de la séance, les encadrants qui repèrent des évocations orales de « rapidité » poussent des groupes à préciser leur pensée : *« Pourquoi plus rapidement ? Qu'est-ce qui peut mesurer la rapidité ? »* ou *« Avez-vous les moyens de mesurer laquelle est la plus rapide ? »*.

En réaction à cette relance, on observe deux stratégies : l'une de mesure du temps, l'autre de dénombrement d'opérations élémentaires. Dans les deux cas, l'enjeu de comparaison est bien saisi, chaque groupe s'engageant dans le calcul du même produit par les deux techniques.

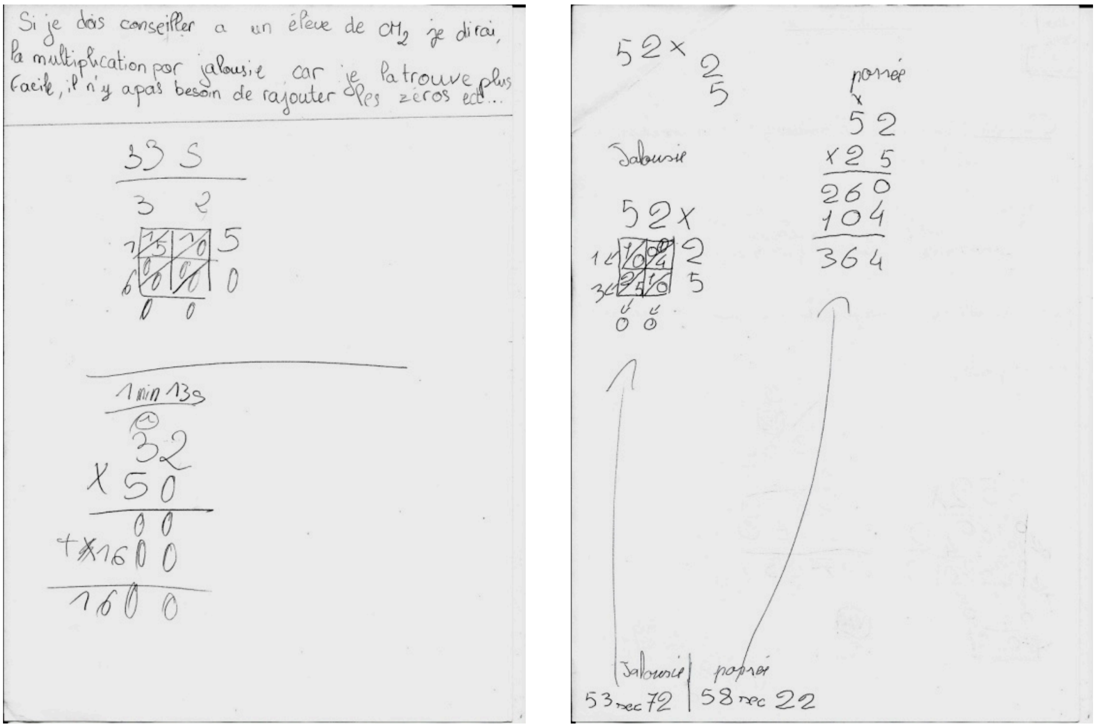


Figure 18 : Comparaison des vitesses par chronométrage (Romainville, Juliette et Chloé).

La stratégie de dénombrement des étapes s'avère délicate, mais donne lieu à des productions montrant une certaine inventivité dans l'expression. Un cas assez typique est celui du groupe Aline-Benjamin-Matthys à Saint Martin du Vivier : ils décident d'effectuer la même multiplication par les deux méthodes et de compter le nombre d'étapes. Leur choix se porte sur $10\,000\times3\,000$: il est sans doute guidé par le souci de comparer les multiplications pour des « grands nombres », donc dans un cas où une différence de rapidité devrait se manifester (selon Mathys : *« plus facile pour multiplier les grands nombres rapidement »*). Le choix de valeurs n'est cependant pas heureux, et les élèves abandonnent la technique usuelle à cause des fastidieuses lignes de zéros à écrire. La relative pénibilité des calculs pour de « grands » nombres aurait pu conduire à une estimation du nombre d'étapes ne s'appuyant pas sur les calculs réalisés. Ainsi, pour multiplier un facteur à 5 chiffres par un facteur à 4 chiffres, la jalousie conduira clairement à $5\times4=20$ multiplications élémentaires (nombre de cases) puis à $5+4=9$ additions en diagonale (on pourrait aussi décider de n'en compter que 8, le chiffre des unités du produit ne demandant pas d'addition) ; la technique usuelle conduira au même nombre de multiplications élémentaires et à l'addition d'autant de colonnes (mais ce nombre de colonnes est plus difficile à anticiper dans cette disposition, où il n'est pas assimilable à un nombre de cases), sans compter les retenues éventuelles à additionner dans la phase multiplicatives. Face au léger découragement du groupe devant les calculs à faire, un encadrant invite les élèves à persévérer dans cette voie en demandant : *« Combien faites-vous d'additions ? »* ; l'encadrant n'en dit pas plus et laisse le groupe travailler seul. Voici le bilan qu'ils rédigent :

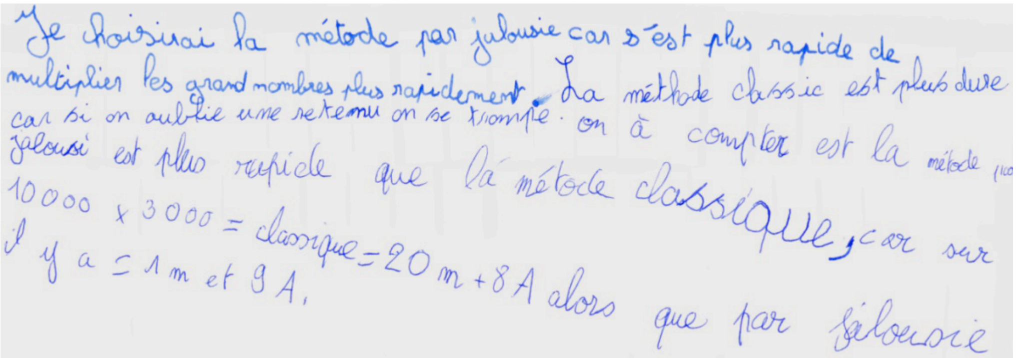

Je choisirai la métode par jalousie car s'est plus rapide de
multiplier les grand nombres plus rapidement. La méthode classic est plus dure
car si on oublie une retenu on se trompe. on à compter est la métode (10
jalousi est plus rapide que la métode classique, car sur
10000 x 3000 = classique = 20 m + 8 A alors que par jalousie
il y a = 1 m et 9 A.

Figure 19 : Comparaison des algorithmes (Saint Martin du Vivier., groupe Aline-Benjamin-Mathys).

Notons l'usage des lettres m et A introduites par les élèves pour exprimer le décompte des opérations élémentaires. Ce recours à la lettre relève de l'algèbre syncopée (abréviation d'une phrase qui pourrait être écrite en langue usuelle) et non de l'algèbre littérale (pas de substitution de nombres aux lettres, pas de calcul portant sur les expressions littérales). Le groupe ne compte qu'une multiplication pour la jalousie, celle de 1 par 3, comptant pour rien les zéros ; ces derniers étaient cependant comptés pour l'autre méthode, ce qui fausse la comparaison.

Conclusion

Rappelons les principales caractéristiques de l'expérimentation dont nous avons rendu compte. Elle prend ses racines dans une expérience double assez éloignée du terrain « cycle 3 » : premièrement, l'expérience d'enseignants et de formateurs ayant vécu comme très positive l'ouverture de la gamme des tâches mathématiques en lycée induite par la demande explicite d'un travail sur les algorithmes ; deuxièmement, celle d'historiens des mathématiques — en particulier des mathématiques anciennes — pour lesquels le travail sur les textes d'algorithmes — la variété de leurs modes d'écriture, la question des justifications et celle de la généralité — constitue un terrain de recherche en pleine activité.

Le support retenu a été celui de la multiplication par jalousie, à partir d'une petite sélection de documents historiques. Ce matériau aurait pu être exploité dans deux directions qui n'ont pas été retenues : d'une part, une direction numérique, avec, par exemple, un travail sur la justification de la technique permettant de revenir sur les *« propriétés de la numération »* (MEN, 2016) ; on pense en particulier au prolongement de la multiplication des entiers aux décimaux — pour lequel la disposition par jalousie présente des avantages connus (Brousseau, 2007) —, ou pour un travail sur la distributivité de la multiplication sur l'addition ; d'autre part, une direction historico-culturelle, avec un travail plus précis d'identification des documents, une enquête sur les systèmes de numération utilisés ou la recherche d'autres techniques de multiplication.

La direction retenue a porté sur la dévolution de tâches spécifiquement algorithmiques : s'approprier un algorithme par imitation, formuler des hypothèses sur ce qu'il réalise ; rédiger un texte d'algorithme ; comparer deux algorithmes réalisant la même fonction. Dans chacune des séances, ce questionnement sur les possibilités de dévolution nous a conduits à chercher les conditions d'une autonomie maximale des collectifs d'élèves (groupes de 3 ou 4), en choisissant des consignes qui plaçaient les curseurs de complexité à un niveau élevé : d'une part, la demande de rédaction d'un texte d'algorithme s'accompagnait d'une demande explicite de généralité incitant les élèves à chercher d'autres modes d'expression que celui de l'exemple ; d'autre part, la demande de comparaison englobait une première tâche d'identification et de formulation de critères de comparaison.

Ainsi paramétrées, ces tâches algorithmiques sont inhabituelles à l'école primaire. Elles ne rentrent d'ailleurs pas dans des formats mieux connus : résolution de problème (d'application directe ou plus complexe), étude de situations-problèmes construites à partir d'une situation fondamentale relative à une notion mathématique spécifique, problèmes-pour-chercher/problèmes-ouverts. On s'écarte ici sensiblement de ces classes de tâches par l'absence de ce qu'on pourrait appeler une « solution » (pour les séances 2 et 3), et l'absence relative de feed-back du milieu mathématique. Les critères de validation des productions ne sont cependant pas subjectifs, et peuvent ainsi donner lieu à débat argumenté lors des bilans : en fin de séance 1, on sait (ou pas) poser et effectuer une multiplication par jalousie ; cette technique calcule bien un produit, et pas une différence, *etc.* En séance 2, une classe réceptrice devrait pouvoir apprendre la technique à partir des messages émis, l'absence d'une étape ou une formulation trop vague compromettrait l'objectif. En séance 3, les éléments mis en avant sont objectifs, en particulier le rôle différent des retenues ou le nombre de calculs élémentaires.

Pour ces tâches, à la fois complexes et encore peu étudiées dans la littérature didactique, notre perspective était donc exploratoire, au sens où nous avons cherché à savoir si elles pouvaient faire l'objet d'une réelle dévolution, et — si oui — quelle était la gamme des productions possibles des élèves.

L'étude sur quatre classes de CM2 ou CM1-CM2 nous conduit à répondre positivement à la première question. En outre, l'indéniable investissement de tous les élèves durant les trois séances — dans deux établissements de profils très différents — et la qualité des productions semblent conférer à cette réponse une certaine robustesse. Soulignons que, quoique la séance 1 ait pu sembler reprendre un scénario plus familier aux élèves (apprentissage par imitation d'une technique opératoire), elle est celle qui a donné lieu au plus de tâtonnement ; *a contrario*, les élèves se sont appropriés plus aisément les tâches des séances 2 et 3, tâches requérant plus d'initiative, demandant qu'ils adoptent une posture réflexive par rapport à des contenus mathématiques (comparaison et évaluation de procédures, à la séance 3), et passant par des tâches d'écriture complexes.

Terminons sur quelques perspectives d'enseignement ou de recherche. Sur le premier plan, si l'expérience a été menée en CM1-CM2, elle trouve directement écho en cycle 3 dans son ensemble. Trois prolongements de recherche nous semblent se présenter assez immédiatement. Tout d'abord, on peut se demander si cette séquence contribue à préparer les élèves à un travail intégrant une composante algorithmique au cycle 4. Ensuite, nous avons rendu compte de cette expérience en nous concentrant sur l'activité des élèves ; l'activité des enseignants mériterait une analyse complémentaire, avec par exemple, une attention particulière sur la nature des aides. Enfin, les travaux de Butlen et Pézard (2007) sur le rôle de la rédaction et de la mise en discussion de bilans de savoir dans les processus de décontextualisation et de généralisation ont montré que l'apport pouvait en être limité pour les élèves en difficulté. Certes, le présent travail diffère du leur par sa nature — travail exploratoire et non ingénierie didactique — comme par son ampleur (durée, nombre d'élèves) ; les points communs sont cependant suffisants pour que leurs travaux puissent nous guider, en particulier dans l'étude de la variabilité des productions des élèves et des facteurs permettant de l'expliquer.

Références bibliographiques

ABDELJAOUAD, M. (2005). *Les arithmétiques arabes* (IX^e-XV^e siècles). Tunis : Ibn Zeidoun.

BROUSSEAU, G. (2007). Le calcul « à la plume » des multiplications et des divisions élémentaires. Communication à l'ARDM, 14/01/2007. Disponible en ligne : http://www.ardm.eu/contenu/guy-brousseau-le-calcul-%C2%AB-%C3%A0-la-plume-%C2%BB-des-multiplications-et-des-divisions-%C3%A9l%C3%A9mentaires (consulté le 1/3/2016).

BUTLEN, D. & CHARLES-PÉZARD, M. (2007). Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique. *Grand N, 79*, 7-32.

CHABERT, J.-L. (Éd.) (2010). *Histoire d'algorithmes, du caillou à la puce.* Paris : Belin.

CHEMLA K. (Éd.) (2004). *History of Science, History of Text.* Dordrecht: Springer.

CHEMLA, K., CHORLAY, R. & RABOUIN, D. (Éds) (2016). *Handbook of Generality in Mathematics and the Sciences.* Oxford : Oxford University Press.

CHORLAY, R. (2016). Historical sources in the classroom and their educational effects. In L. Radford, F. Furinghetti et T. Hausberger (Éds.), *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between History and Pedagogy of Mathematics* (HPM 2016, 18-22 July 2016). Montpellier, France: IREM de Montpellier, 5-23. Disponible en ligne : https://hal.archives-ouvertes.fr/HPM2016/.

CHORLAY, R. (2015). Ressources en histoire des mathématiques : un exemple et des pistes. *Actes du 41^e colloque de la COPIRELEM*, Mont-de-Marsan 18-20 juin 2014. ARPEME.

CLIVAZ, S. (2016). Connaissances mathématiques des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication. *Recherche en didactique des mathématiques, 36*(2), 231-261.

CERQUETTI-ABERKANE, F. & RODRIGUEZ, A. (2002). *Faire des mathématiques avec des images et des manuscrits historiques du cours moyen au collège.* Champigny-sur-Marne : CRDP de l'académie de Créteil.

GUINET, R. (1978a). Histoire des techniques opératoires. *Grand N, 14*, 53-68.

GUINET, R. (1978b). Histoire des techniques opératoires : la multiplication. *Grand N, 15*, 27-41.

LAVAL, D. (2015). L'algorithmique comme objet d'apprentissage de la démarche de preuve en théorie élémentaire des nombres : algorithme de Kaprekar. In I. Gomez-Chacon, J. Escribano, A. Kuzniak, P. Richard, *Quatrième symposium international Espace de Travail Mathématique* (30/6 - 4/7/2044). Madrid : Instituto de Matematica Inderdisciplinar (IMI), Universidad Complutense. Disponible en ligne : http://www.mat.ucm.es/imi/ETM4/ETM4libro-final.pdf (consulté le 29/2/2016)

MODESTE, S. (2012). Enseigner l'algorithmique, pourquoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ? Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier.

SCHRAMM, F. (dir.) (2013). *Classe Maths CE2.* Les Mureaux : Editions SED.

VIVIER, L. (2013). Un algorithme de somme pour les rationnels en écritures décimales. Des exemples, et après ? *Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz, 7*, 59-67.

MEN, (2015). Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4). *Bulletin Officiel spécial n°11 du 26 novembre 2015*.