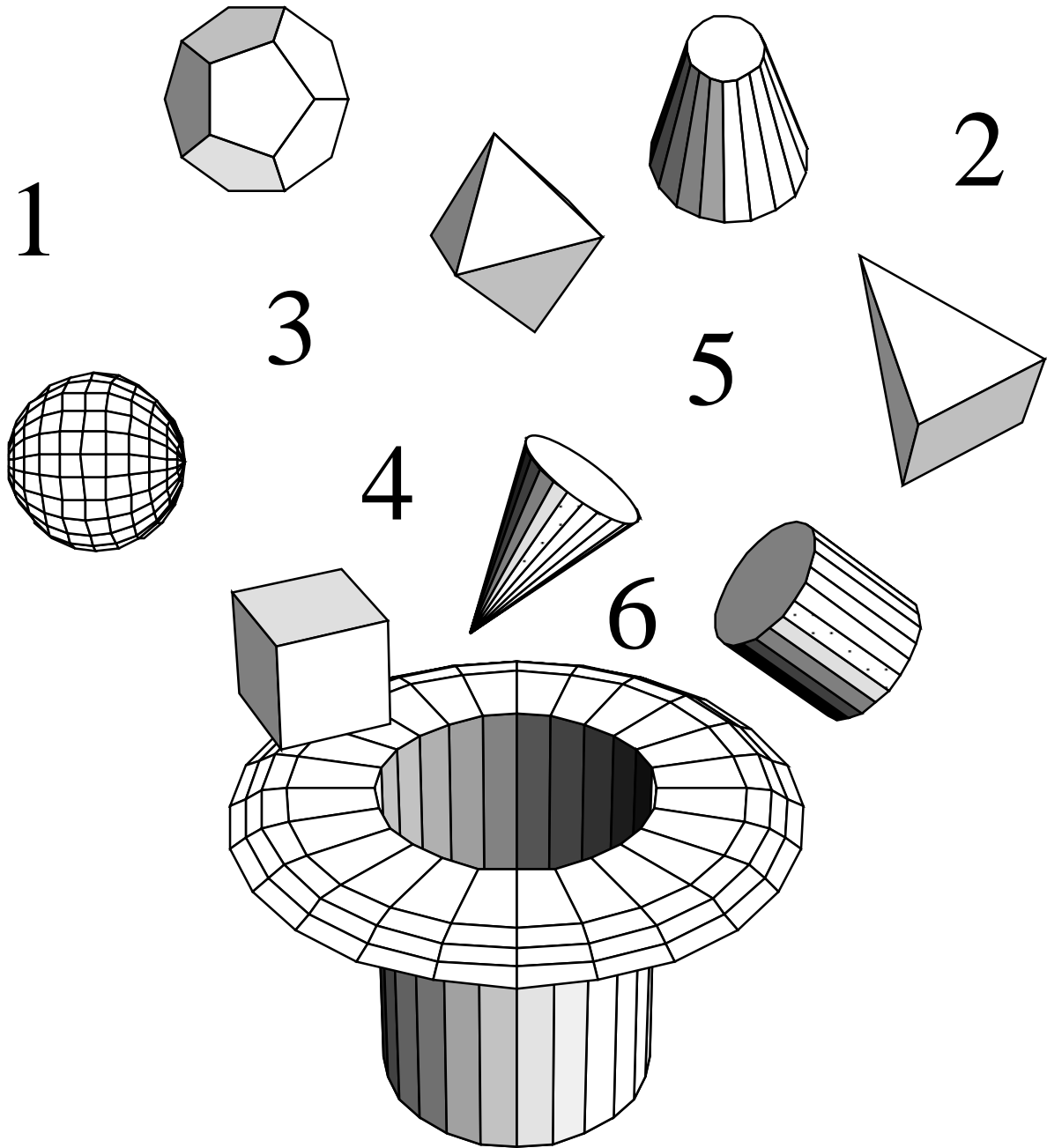


MATHÉMATIQUES VIVANTES



Bulletin de l'IREM
de BESANÇON

n° 70 – Juillet 2004

Mathématiques vivantes

Bulletin IREM

n° 70, Juillet 2004

édité par François PÉTIARD

Institut de Recherche sur l'Enseignement des
Mathématiques de Franche-Comté (IREM)

DIRECTRICE CLAUDE MERKER

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières (François Pétiard)	ici même
Projection stéréographique	1
La règle non graduée à deux bords	15
De la physique aux mathématiques	33

PROJECTION STÉRÉOGRAPHIQUE

Groupe-lycée de l'IREM :
 Françoise De LABACHELERIE
 Chantal GEOFFROY
 Michel MAGNET
 Alain PARMENTELAT

Sommaire

1	Présentation	1
2	Projection stéréographique	2
3	Démonstrations	6
4	Orthodromie : « Le Caire – Shanghai »	12

1 Présentation

Cet article fait suite à l'article intitulé « De la sphère au plan » paru dans le numéro 69 de « Mathématiques Vivantes ».

Nous présentons ici la deuxième projection azimutale citée dans cet article : la projection stéréographique. Bien que proche dans sa définition de la projection gnomonique, elle n'a pas les mêmes propriétés, son utilisation en cartographie est donc différente. La projection gnomonique est pratique pour la navigation aérienne, car il est facile d'y retrouver les orthodromies entre deux points (c'est-à-dire les chemins « les plus courts »), et la projection stéréographique, connue depuis l'Antiquité, est surtout utilisée pour représenter les régions polaires.

Dans un premier temps, nous présentons les propriétés intéressantes de cette projection, puis dans un deuxième temps, nous proposons des démonstrations. Enfin, sur un exemple concret, nous déterminons sur une carte une orthodromie entre deux villes : dans le cas de la projection stéréographique, celle-ci n'est pas représentée par un segment mais se détermine néanmoins assez facilement. Ce pourrait être l'objet d'une activité intéressante pour des élèves, source d'un travail interdisciplinaire.

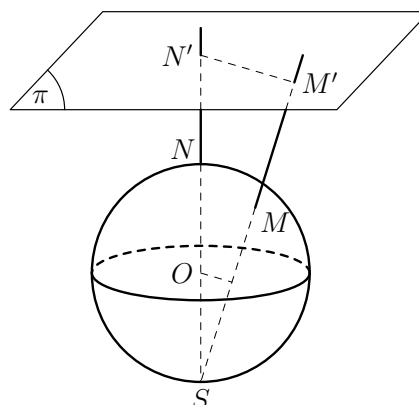
2 Projection stéréographique

a. Définition

Soit S le pôle Sud, (π) un plan parallèle au plan équatorial, et soit M un point de la sphère distinct du point S ,

On appelle image de M par la projection stéréographique sur (π) à partir du pôle Sud, le point M' , intersection de la droite (SM) et du plan (π) .

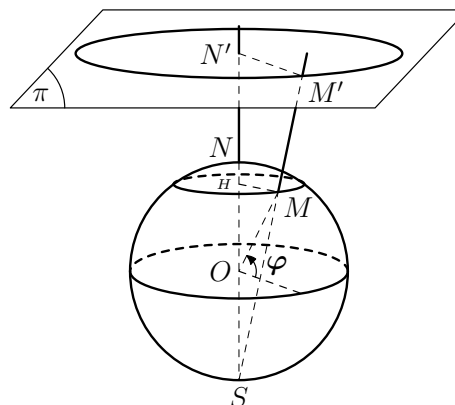
Remarque : le point S n'a pas d'image par cette projection.



b. Parallèles et méridiens

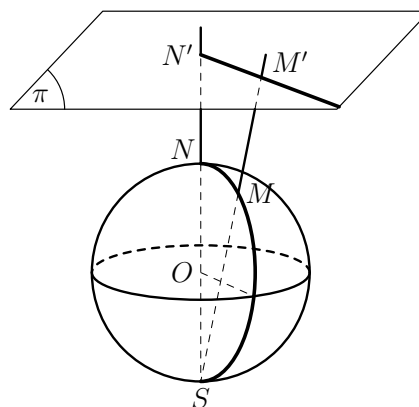
On a représenté ci-contre le parallèle passant par M (cercle de centre H), et son image par la projection stéréographique (cercle de centre N' passant par M').

Les parallèles se projettent en des cercles concentriques qui ont pour centre le point N' (projeté du pôle Nord N), et un rayon proportionnel à $\tan\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$.



On a représenté ci-contre le méridien passant par M (demi-cercle de diamètre $[NS]$), et son image par la projection stéréographique (demi-droite d'origine N' passant par M').

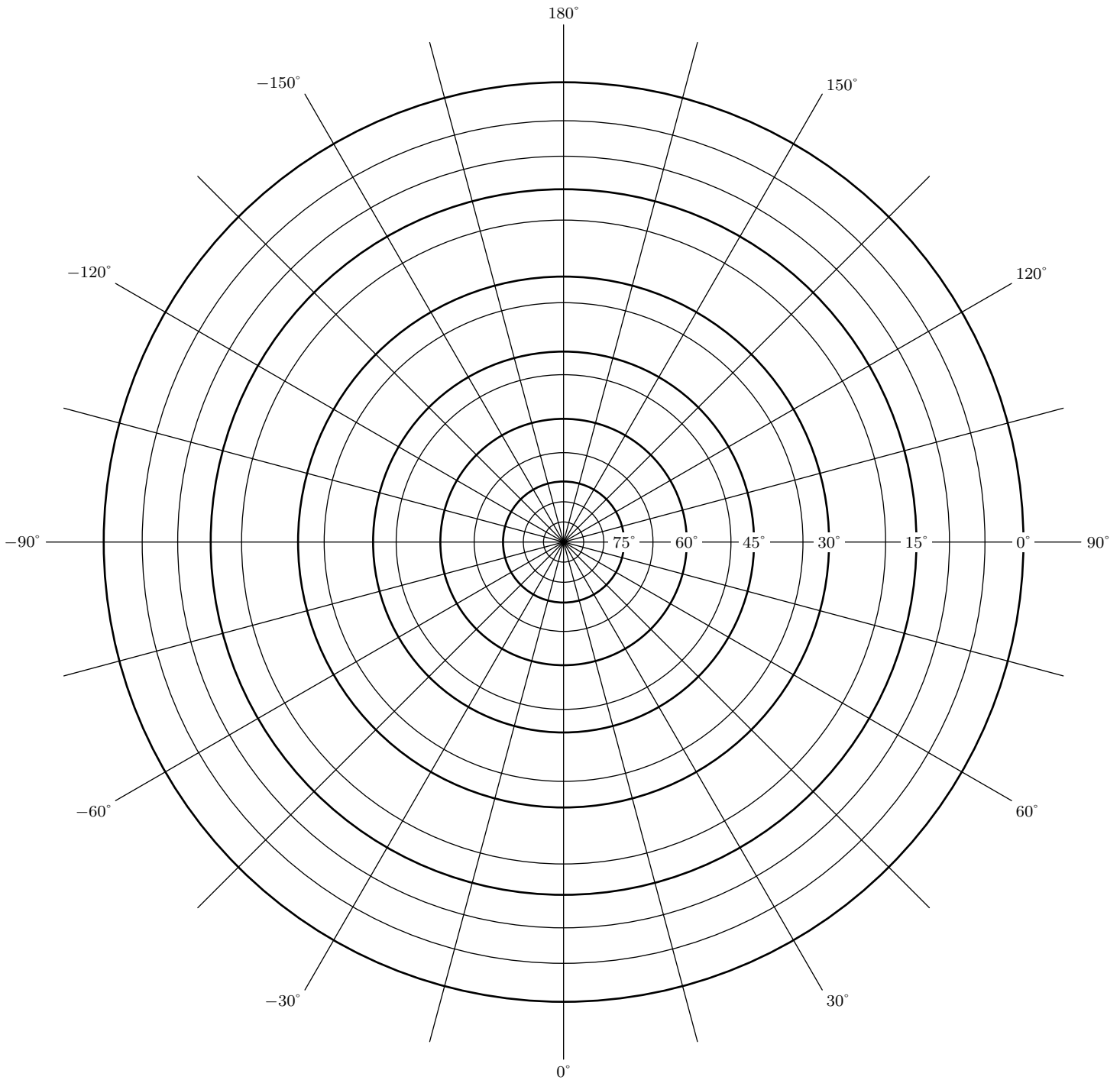
Un méridien (S exclu) se projette en une demi-droite d'origine N' .



Des démonstrations sont proposées à la fin de cet article.

Trame de la carte de l'hémisphère Nord obtenue par projection stéréographique

Latitude (φ en degrés)	0	5	10	15	20	30	35	45	50	60	68	75	80	85
$\tan\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$	1	0,916	0,839	0,767	0,700	0,577	0,521	0,414	0,364	0,268	0,194	0,132	0,087	0,044



Voir à la fin de l'article les calculs concernant la réalisation de cette trame.

c. Image d'un grand cercle

Un grand cercle (ne passant pas par le pôle Sud) se projette en un cercle.

Conséquence : la projection stéréographique ne conserve pas les orthodromies

Rappel :

On appelle orthodromie le plus court chemin entre deux points d'une surface (plane ou courbe). Sur une sphère, les orthodromies sont des arcs de grands cercles, tandis que dans un plan, les orthodromies sont des segments.

On peut néanmoins utiliser la propriété concernant l'image d'un grand cercle pour retrouver l'orthodromie entre deux points à partir d'une représentation en projection stéréographique (voir exemple à la fin de l'article).

Remarque : tout cercle ne passant pas par le pôle Sud se projette également en un cercle.

d. Conservation de certaines propriétés

Une projection stéréographique conserve les angles

cela signifie : si deux demi-droites sont tangentes à la sphère en un même point, alors leurs images par la projection stéréographique sont deux demi-droites qui déterminent un angle de même mesure.

En revanche, une projection stéréographique ne conserve $\left\{ \begin{array}{l} \text{ni les rapports d'aires,} \\ \text{ni les rapports de distances.} \end{array} \right.$

Reprenons un exemple déjà vu à propos de la projection gnomonique : sur le globe terrestre, le triangle reliant les villes de Dakar, Le Caire et Reykjavik est « presque » équilatéral ; en effet, en calculant les distances sur le globe terrestre avec un rayon de 6 366 km, on obtient :

Dakar – Le Caire : 5 217 km,

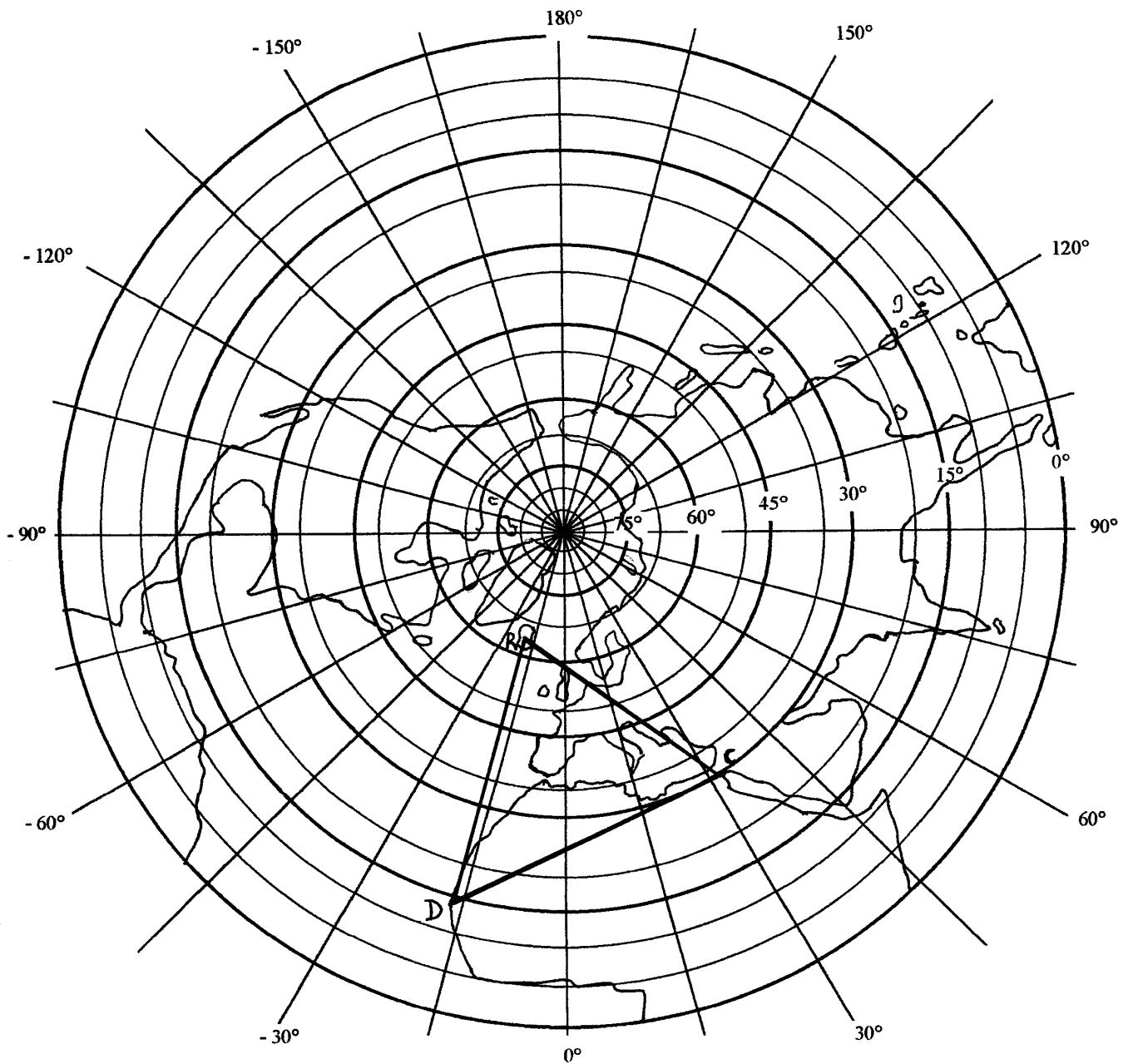
Le Caire – Reykjavik : 5 280 km,

Reykjavik – Dakar : 5 480 km.

Voir à la page suivante la représentation en projection stéréographique de ce triangle (elle est notée RDC) : on n'obtient pas un triangle équilatéral, ce qui permet de constater que les rapports de distance ne sont pas conservés.

Villes	Latitude φ	Longitude λ
Dakar	14,8	-17
Le Caire	30	31,5
Reykjavik	64	-22

Représentation de l'hémisphère Nord obtenue par projection stéréographique



3 Démonstrations

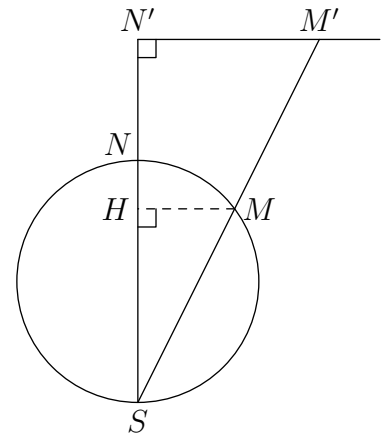
a. Les parallèles ont pour projetés des cercles centrés sur N'

➤ Démonstrations géométriques

a) En utilisant une homothétie :

Soit N le pôle Nord, et M un point de la sphère distinct de N . Soit M' et N' les projetés respectifs de M et N . Soit (C) le parallèle passant par M , et H son centre (le point H ne dépend que du parallèle choisi). L'homothétie h de centre S qui transforme H en N' transforme aussi M en M' . Donc quand M décrit le cercle (C) , M' décrit l'image de (C) par h , c'est-à-dire un cercle (C') de centre $h(H)$, soit N' .

Figure dans le plan (NSM)



b) En utilisant la géométrie des configurations :

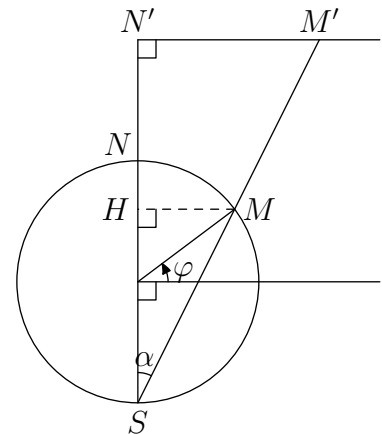
M appartient au parallèle (C) si et seulement si sa latitude est constante $(-90 < \varphi \leq 90)$.

On note α l'angle \widehat{NSM} , exprimé en degrés (pour tout φ , on a : $0 \leq \alpha < 90$).

Or α est un angle inscrit qui intercepte l'arc \widehat{MN} , il est donc égal à la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même angle, soit : $\alpha = \frac{1}{2}(90 - \varphi)$.

Le parallèle (C) est donc l'intersection du plan le contenant avec le cône droit de sommet S , d'axe (NS) et de demi angle au sommet α .

Figure dans le plan (NSM)



Son projeté (C') est l'intersection de ce cône et du plan (π) (qui est perpendiculaire à l'axe du cône), soit également un cercle.

Son rayon est égal à : $R' = M'N' = SN' \times \tan(\alpha)$ soit $R' = SN' \times \tan\left(\frac{1}{2}(90 - \varphi)\right)$.

➤ Démonstration analytique

On prend ici pour (π) le plan parallèle au plan équatorial passant par le pôle Nord, d'équation $z = R$.

Remarque : si le plan (π) ne passe pas par N , la démonstration est analogue en prenant comme équation de (π) : $z = \text{constante}$.

a) Expression des coordonnées

Soit le repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
où $\vec{i} = \frac{1}{R} \overrightarrow{OL}$, $\vec{k} = \frac{1}{R} \overrightarrow{ON}$.

Coordonnées de M :

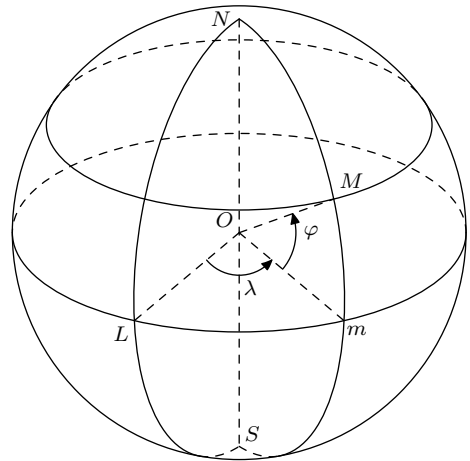
$$(R \cos(\varphi) \cos(\lambda), R \cos(\varphi) \sin(\lambda), R \sin(\varphi))$$

– Équation de (π) : $z = R$

– Représentation paramétrique de (SM) :

$$\begin{cases} x = t \times R \cos(\varphi) \cos(\lambda) \\ y = t \times R \cos(\varphi) \sin(\lambda) \\ z = t \times (R \sin(\varphi) + R) - R \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

– En traduisant le fait que M' est le point d'intersection de (π) et de (SM) , on obtient :



Coordonnées de M' dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:	$\left(\frac{2R \cos(\varphi) \cos(\lambda)}{1 + \sin(\varphi)}, \frac{2R \cos(\varphi) \sin(\lambda)}{1 + \sin(\varphi)}, R \right)$
Coordonnées de M' dans (N, \vec{i}, \vec{j}) :	$\left(\frac{2R \cos(\varphi) \cos(\lambda)}{1 + \sin(\varphi)}, \frac{2R \cos(\varphi) \sin(\lambda)}{1 + \sin(\varphi)} \right)$
$-90 < \varphi \leq 90 ; -180 < \lambda \leq 180$	

b) Démonstration

Les coordonnées de M' dans le repère (N, \vec{i}, \vec{j}) du plan (π) sont de la forme :
 $\left(k \cos(\lambda), k \sin(\lambda) \right)$, avec $k = \frac{2R \cos(\varphi)}{1 + \sin(\varphi)}$.

Quand M décrit le parallèle C de latitude φ : k est constant, λ décrit $] -180; 180]$.

Donc M' décrit le cercle de centre N' et de rayon $\frac{2R \cos(\varphi)}{1 + \sin(\varphi)}$.

Conclusion :

Les parallèles se projettent en des cercles concentriques qui ont : – pour centre, le projeté N' du pôle Nord N (ici $N' = N$) – pour rayon, $\frac{2R \cos(\varphi)}{1 + \sin(\varphi)} = 2R \tan \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right)$ (cas où $(\pi) : z = R$)
--

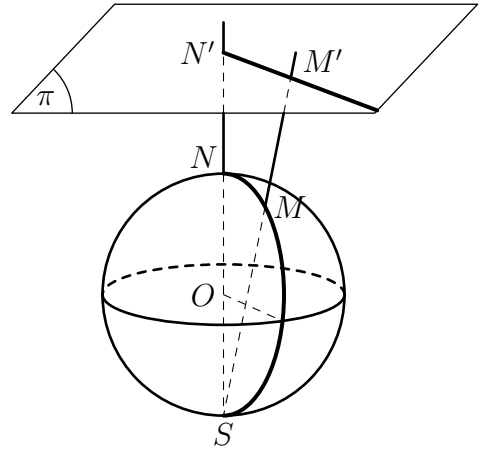
b. Les méridiens ont pour projetés des demi-droites d'origine N'

➤ Démonstration géométrique

Soit un méridien, (P) le demi-plan contenant ce méridien, et M un point de ce méridien (autre que S). M' est un point de la droite (MS) , il appartient donc à (P) . Par ailleurs, M' appartient aussi au plan (π) . M' appartient donc à $(\pi) \cap (P)$.

Les projetés des points d'un méridien appartiennent donc tous à la demi-droite d'intersection du demi-plan (P) et du plan (π) .

Réciproquement, tout point B' de cette demi-droite est le projeté d'un point du méridien, point d'intersection de (SB') et du méridien.



➤ Démonstration analytique

(cas où le plan (π) a pour équation $z = R$)

Les coordonnées de M' dans le repère (N, \vec{i}, \vec{j}) du plan (π) sont de la forme :

$$\left(t \cos(\lambda), t \sin(\lambda) \right), \text{ avec } t = \frac{2R \cos(\varphi)}{1 + \sin(\varphi)} = 2R \tan \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right)$$

Quand M décrit le méridien de longitude λ :

- $\cos(\lambda)$ et $\sin(\lambda)$ sont des constantes,
- φ décrit $] - 90; 90]$ et t décrit alors $[0; +\infty[$:
on montre par exemple que la fonction f définie sur $] - 90; 90]$ par

$$f(\varphi) = 2R \tan \left(45 - \frac{\varphi}{2} \right)$$

(φ étant exprimé en degrés) est continue et strictement décroissante sur $] - 90; 90]$, que $\lim_{x \rightarrow -90} f(x) = +\infty$ et $f(90) = 0$.

Donc M' décrit une demi-droite d'origine N' et l'angle entre cette demi-droite et le vecteur \vec{i} est égal à λ .

Conclusion :

Les méridiens se projettent en des demi-droites qui :

- ont pour origine, le projeté N' du pôle Nord N
- font un angle égal à leur longitude avec le vecteur \vec{i} .

c. Échelle le long d'un parallèle

Considérons le cas où (π) est tangent à la sphère au pôle Nord :

soit (C) le parallèle de latitude φ , Ω son centre et r son rayon.

Ce parallèle (C) se projette en un cercle de centre N de rayon r' .

Soit M_1 et M_2 deux points de (C) , M'_1 et M'_2 leurs projetés, et $\theta = \widehat{M_1\Omega M_2}$.

Soit ℓ la longueur de l'arc $\widehat{M_1M_2}$ associé à θ , ℓ' celle de l'arc $\widehat{M'_1M'_2}$ correspondant.

On a : $\ell = r\theta$ et $\ell' = r'\theta$, d'où $\frac{\ell'}{\ell} = \frac{r'}{r}$

(θ étant exprimé en radians)

Or, en utilisant le théorème de Thalès dans les triangles $SM_1\Omega$ et SM'_1N , on obtient :

$$\frac{NM'_1}{\Omega M_1} = \frac{SN}{S\Omega} \text{ d'où } \frac{r'}{r} = \frac{2R}{R + R \sin(\varphi)}$$

soit $\frac{r'}{r} = \frac{2}{1 + \sin(\varphi)}$ et par suite :

$\frac{\ell'}{\ell} = \frac{2}{1 + \sin(\varphi)}$
--

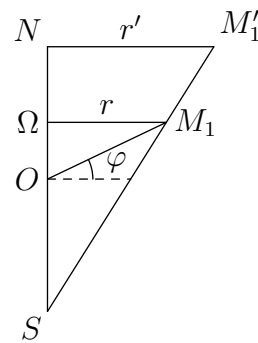
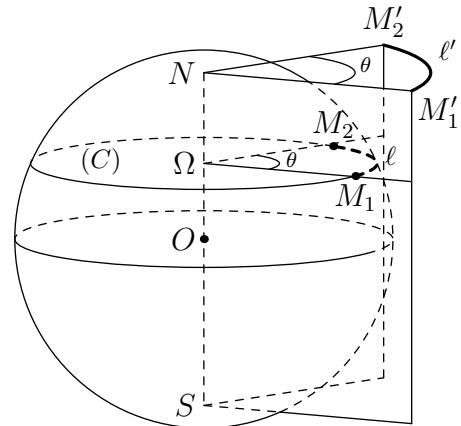


Figure dans le plan (SNM_1)

d. L'image d'un grand cercle est un cercle

Démonstration (cas où le plan (π) est tangent au pôle Nord) :

Dans cette démonstration, on utilise la notion d'inversion : la définition et quelques propriétés de l'inversion sont données plus loin.

– On montre qu'une projection stéréographique est la restriction à la sphère d'une inversion de l'espace :

les triangles SMN et SNM' ont deux angles respectivement de même mesure :

- les angles \widehat{SMN} et $\widehat{SNM'}$ sont droits.
- les angles \widehat{MSN} et $\widehat{NSM'}$ sont égaux.

Les triangles SMN et SNM' sont donc semblables.

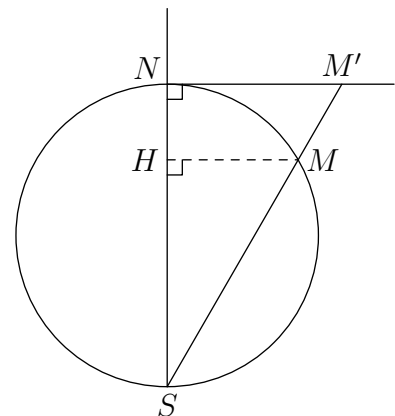
On en déduit que leurs côtés ont des longueurs proportionnelles, et qu'en particulier :

$$\frac{SM}{SN} = \frac{SN}{SM'}$$

$$\text{D'où : } SM \times SM' = 4R^2.$$

Conclusion :

la projection stéréographique est une inversion de pôle, le pôle Sud et de puissance $4R^2$.



- Un cercle qui ne passe pas par le pôle d'inversion (pôle Sud) est l'intersection d'un plan (P) ne passant pas par le pôle Sud et de la sphère terrestre. L'image de (P) est une sphère (Σ) , et l'image de la sphère terrestre est le plan (π) . L'image du cercle est donc l'intersection du plan (π) et de la sphère (Σ) , c'est donc un cercle.

Conclusion :

la projection stéréographique transforme tout cercle ne passant pas par le pôle Sud en un cercle, en particulier, **les grands cercles sont transformés en cercles.**

e. La projection stéréographique conserve les angles

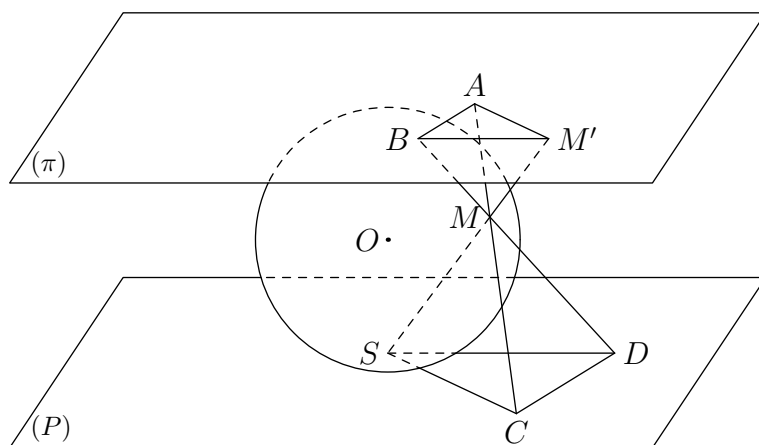
Démonstration : (cas où le plan (π) est tangent au pôle Nord)

Soit M un point de la sphère, distinct de N et de S , et soit M' son projeté stéréographique sur le plan (π) .

Soit (P) et (Q) les plans tangents à la sphère, respectivement en S et en M .

Soit (d_1) et (d_2) deux droites passant par le point M et contenues dans le plan (Q) , et soit A et B les points d'intersection respectifs de (d_1) et (d_2) avec le plan (π) .

Les demi-droites $[MA)$ et $[MB)$ sont deux demi-droites tangentes à la sphère en M ; leurs images par la projection stéréographique sont $[M'A)$ et $[M'B)$.



Il s'agit donc de montrer que les angles \widehat{AMB} et $\widehat{AM'B}$ sont de même mesure
Notons C le point d'intersection de la droite (AM) et du plan (P) , et D le point d'intersection de la droite (BM) et du plan (P) .

- Les droites (SC) et (AM') sont coplanaires (car (AC) et $(M'S)$ sont sécantes), et n'ont aucun point commun (car elles sont situées dans des plans strictement parallèles (P) et (π)) : elles sont donc parallèles.

De même, les droites (SD) et (BM') sont parallèles, ainsi que (AB) et (CD) .

On en déduit, par exemple en utilisant l'homothétie de centre M qui transforme A en C (et donc B en D et M' en S), que **les angles $\widehat{AM'B}$ et \widehat{CSD} sont de même mesure.**

- Les demi-droites $[DM)$ et $[DS)$ sont tangentes à la sphère et issues d'un même point, donc $DM = DS$. De même : $CM = CS$. Les deux triangles CMD et CSD ont leurs côtés respectifs de la même longueur, ils sont donc isométriques ; leurs angles homologues sont donc de même mesure, en particulier : \widehat{CMD} et \widehat{CSD} sont de même mesure.

Or les angles \widehat{AMB} et \widehat{CMD} sont opposés par le sommet et donc de même mesure.

En conclusion, **les angles \widehat{AMB} et \widehat{CSD} sont de même mesure.**

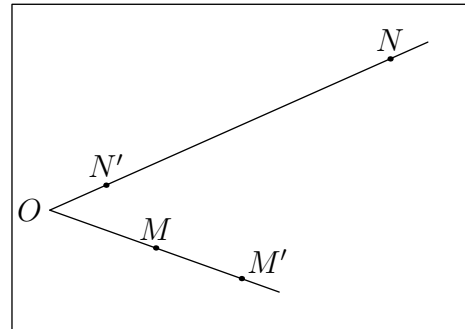
Des deux points précédents, on déduit que **les angles \widehat{AMB} et $\widehat{AM'B}$ sont de même mesure.**

f. Inversion

Définition

On se place dans l'espace, on suppose qu'une unité de longueur a été choisie.

Étant donné un point O et un nombre réel k non nul, on appelle **inversion de pôle O et de puissance k** , la transformation qui, à tout point M de l'espace distinct de O , associe le point M' de la droite (OM) tel que : $\overline{OM} \times \overline{OM'} = k$.



Propriétés

Une inversion est involutive : si M a pour image M' par une inversion, alors M est aussi l'image de M' par cette inversion.

Points invariants :

Si $k < 0$, il n'existe aucun point invariant.

Si $k > 0$, l'ensemble des points invariants est la sphère de centre O et de rayon \sqrt{k} .

Image d'une droite

Une droite passant par O , privée de O , est globalement invariante.

L'image d'une droite ne passant pas par O est un cercle.

Image d'un cercle

L'image d'un cercle, privé de O , passant par le pôle O est une droite (parallèle à la tangente à ce cercle au point O).

L'image d'un cercle ne passant pas par le pôle O est un cercle.

Image d'un plan

Un plan passant par O , privé de O , est globalement invariant.

L'image d'un plan ne passant pas par O est une sphère.

Image d'une sphère

L'image d'une sphère passant par le pôle O est un plan.

L'image d'une sphère ne passant pas par le pôle O est une sphère.

4 Orthodromie : « Le Caire – Shanghai »

La ville du Caire est située à une latitude de 30° et une longitude de 31° , celle de Shanghai à une latitude de 31° et une longitude de 121°

L'orthodromie « Le Caire – Shanghai » (sur la sphère terrestre) est un arc de grand cercle passant par ces deux villes. Notons (C) ce grand cercle.

(C) passe aussi par les points situés aux antipodes du Caire et de Shanghai, autrement dit les points diamétralement opposés au Caire et à Shanghai sur la sphère terrestre.

Le point situé aux antipodes du Caire a pour latitude : -30° (soit l'opposé de la latitude du Caire) et pour longitude : -149° (soit la longitude du Caire moins 180°).

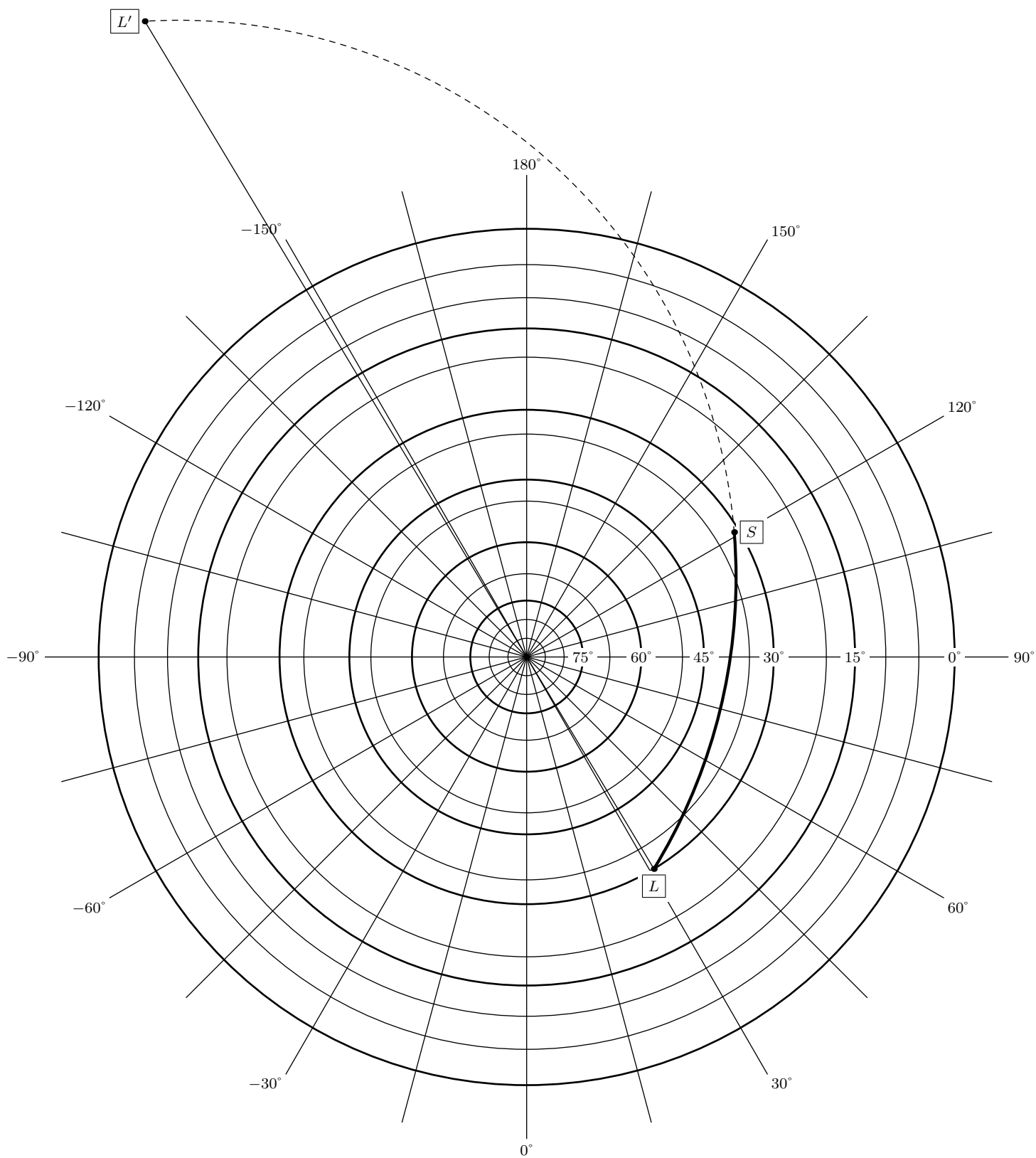
Sur la carte en projection stéréographique, le grand cercle (C) est représenté par un cercle (car par une projection stéréographique, l'image d'un grand cercle est un cercle), et ce cercle passe par les images respectives du Caire, de Shanghai et du point situé aux antipodes du Caire.

Le tracé de l'orthodromie est donnée à la page suivante : les points L , S et L' sont les images respectives du Caire, de Shanghai et du point situé aux antipodes du Caire.

Remarques :

- Pour placer le point L' , on calcule le rayon r de l'image du parallèle de latitude -30° :
On note r_0 le rayon de l'image du parallèle de latitude 0° .
$$r = r_0 \times \tan\left(45 - \frac{-30}{2}\right) \text{ soit } r = r_0 \times \sqrt{3} \text{ (pour la formule, voir au début de l'article).}$$
- On peut comparer le chemin obtenu ici avec celui obtenu en utilisant la projection gnomonique (où les orthodromies sont représentées par des segments).
- Les villes de Shanghai et du Caire étant situées approximativement à la même latitude, on peut, dès la classe de Seconde, calculer la longueur de cette orthodromie. Puis, comparer à la longueur de l'arc du parallèle reliant les deux villes.
- Cet exemple met aussi en évidence que par une projection stéréographique, le centre du cercle image de (C) n'est pas l'image du centre de (C) .

Représentation de l'orthodromie « Le Caire – Shanghai » obtenue par projection stéréographique



LA RÈGLE NON GRADUÉE À DEUX BORDS

Bernard BETTINELLI

Sommaire

Introduction	15
La règle associée aux gabarits	16
La règle non graduée seule	19
Conclusion	32

Introduction

Après avoir conçu, commercialisé le matériel de la Moisson des Formes en 1994 et avoir fait des expérimentations à différents niveaux de l'École primaire, j'ai senti le besoin de compléter ce jeu de gabarits par un instrument qui puisse élargir le champ des possibilités offertes par ce matériel : une règle non graduée de largeur adaptée au matériel. La règle ou le double-décimètre est dans toutes les trousse, avec sa graduation en centimètres et millimètres, tellement prégnante qu'il est impensable de demander à des enfants d'en faire abstraction ; j'ai donc décidé de créer cette pièce supplémentaire dans la Moisson des Formes, différente de toutes les autres parce qu'elle n'est pas porteuse d'une forme mais du concept de droite.

Cette règle se différencie des autres par sa nudité (aucune graduation ne la borde), et des pièces de la Moisson par son aspect (transparent). Mais elle s'y associe par sa largeur, dimension qui lui permet de découper les figures pour en calculer l'aire et surtout de reconstruire **seule**, par dessin, toutes les pièces du jeu, grandeur nature, comme je le montre dans ce document.

En outre, de même que la règle et le compas ont justifié la construction pyramidale des Éléments d'Euclide sur la base de ses postulats, la construction instrumentale de la géométrie métrique du Collège avec la règle à deux bords, seule, permet de mettre en application ses éléments spécifiques (médiatrice, bissectrice, perpendiculaire et parallèle) et de faire comprendre ses démonstrations fondamentales — en particulier le théorème de Thalès.

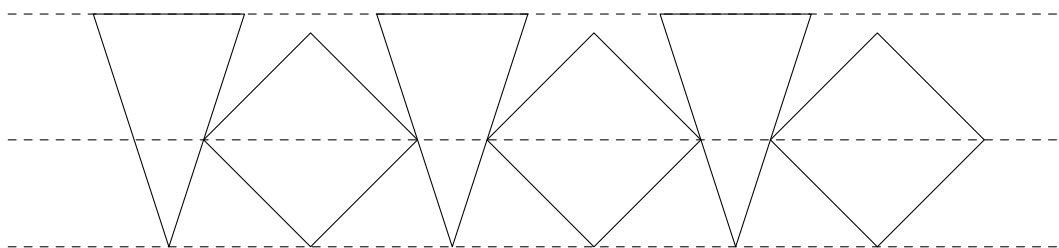
La règle associée aux gabarits

1. La règle non graduée et les alignements

Alignements de pièces ; frises

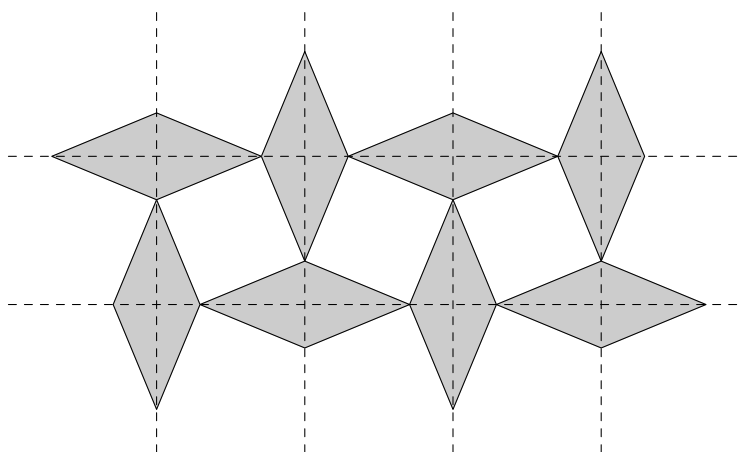
Le premier usage de la règle, avant même qu'elle soit associée au crayon, est d'aligner correctement plusieurs pièces sur une base commune.

Par le dessin, ce besoin d'aligner se fait encore plus pressant. Pour réaliser une frise, par exemple, il est nécessaire d'aligner dans certains cas une base, mais dans d'autres plusieurs lignes parallèles, comme dans l'exemple ci-dessous, inventé par un enfant de 8 ans, où il a tracé 2 droites parallèles, distantes de la hauteur d'un triangle d'or, puis une troisième pour que les carrés aient une diagonale horizontale et soient posés sur la même base que les triangles :



Pavages

Le plus souvent, les pavages sont réalisés par accolement des pièces qui le constituent. Mais on peut inventer un pavage mêlant une pièce gabarit et un trou de forme fixe n'existant pas dans les pièces du jeu. Dans ce cas, pour que les trous restent superposables, il est important de ne pas placer le gabarit au jugé. Par exemple, on fait un beau pavage avec un losange répété en alignant par alternance ses diagonales dans 2 directions perpendiculaires :



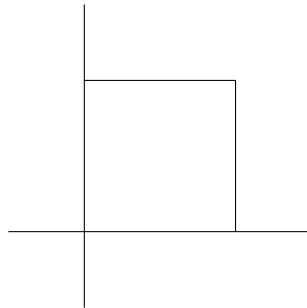
2. La règle non graduée et le dessin géométrique

Étoiles ; figures inscrites et circonscrites

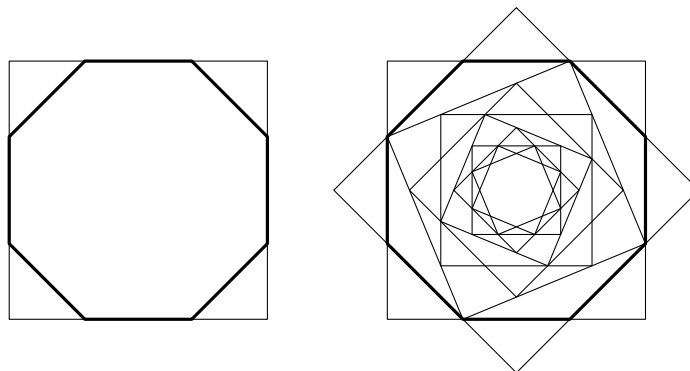
Avec une règle, on peut joindre 2 points par un segment. Ce qui permet de dessiner une figure avec une pièce-gabarit, puis d'en relier les sommets de façon à créer une figure inscrite ou une étoile.

On peut aussi, à l'inverse, prolonger un côté, ou plusieurs. Un octogone régulier permet ainsi de dessiner un carré circonscrit en prolongeant un côté sur deux.

C'est ainsi qu'on se saisit de n'importe quelle pièce dans laquelle on a reconnu un angle droit : carré, rectangle, quart de disque, triangle rectangle et qu'on prolonge à la règle 2 côtés consécutifs pour créer 2 droites perpendiculaires.



Si on propose de dessiner une configuration complexe à l'aide d'une seule pièce-gabarit, on sent très vite que la règle est l'accessoire essentiel de cette activité. Voici par exemple un grand carré fait avec l'octogone en prolongeant un côté sur deux. Ce qui ouvre la porte à des extensions infinies : 2 carrés autour de l'octogone permettent un nouvel octogone extérieur et on peut recommencer... 2 carrés dans l'octogone permettent un nouvel octogone intérieur et on peut recommencer... (invention d'un enfant de CM1).



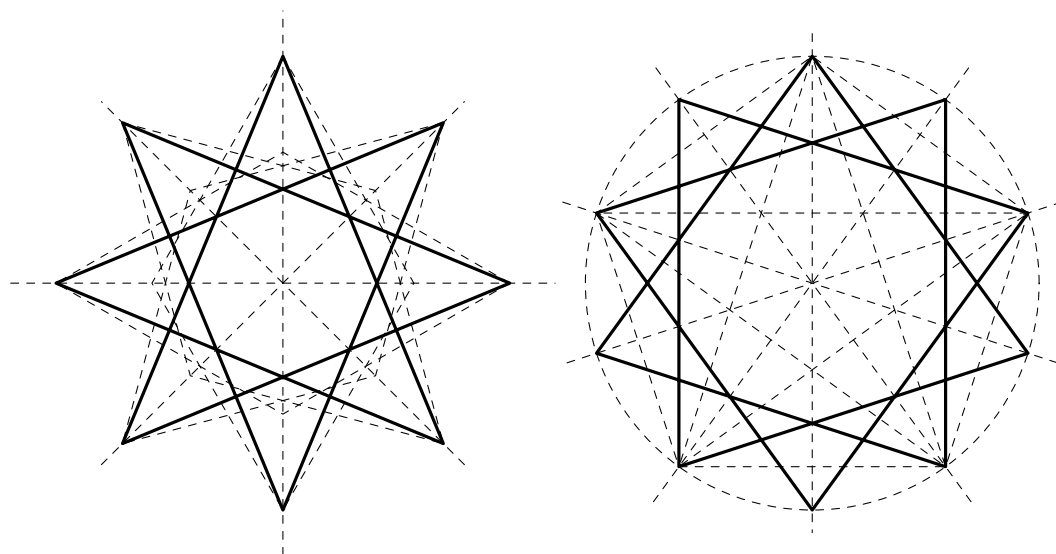
Lignes remarquables

Les lignes remarquables des figures : médiatrices des segments, bissectrices des angles, médianes ou hauteurs des triangles, ... sont autant d'occasions de se saisir de la règle.

Le support des lignes remarquables est important pour la recherche de points d'intersection. Voici 2 exemples complexes :

Le premier consiste à chercher à inscrire un carré dans un losange-gabarit quelconque. Le losange étant dessiné, ses diagonales sont tracées et prises comme support de la seconde position du losange par échange des diagonales. Les 4 points d'intersection des côtés forment un carré inscrit. Les diagonales du carré inscrit servent de support à 2 nouvelles positions du losange et l'ensemble offre 3 possibilités d'octogones réguliers qui servent de points de base à une étoile à 8 branches.

Le second part du pentagone régulier. Comme le nombre des sommets est impair, on ne peut tracer directement ses axes de symétrie. En traçant l'étoile inscrite, on les obtient, ainsi que le centre. Le cercle circonscrit coupe les axes en 10 points d'un décagone régulier qui servent de points de base à la construction de l'étoile à 10 branches.

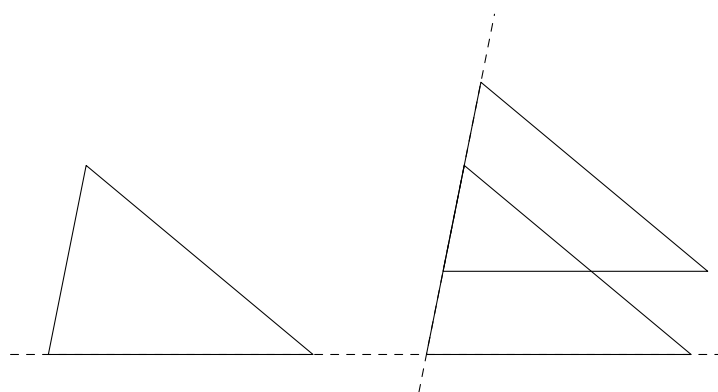


3. La règle non graduée et les transformations

Nous allons voir que la règle sert à la construction des parallèles, des translations et homothéties.

Translation d'une pièce

Le problème est de faire glisser une pièce sans la faire tourner. Un moyen simple consiste à dessiner le contour de la pièce, à poser la règle sur un côté, et à glisser la pièce vers une autre position. En général on impose une position d'arrivée à un point particulier de la pièce. Dans ce cas, il faut jouer avec 2 ou plusieurs glissements successifs du type précédent :

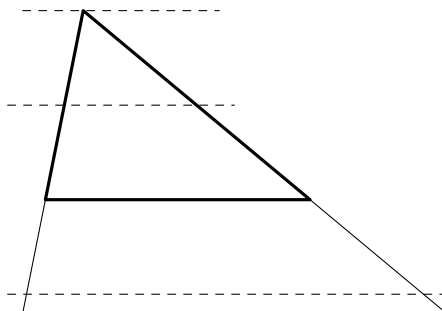


Homothétie d'une pièce

On peut reprendre l'observation faite plus haut : en posant la règle sur un triangle, un bord sur un côté, elle découpe un triangle homothétique mais plus petit. Et ceci est propre aux triangles.

À l'inverse, on peut ajouter une bande autour d'une pièce, sur 1, 2, ou plusieurs côtés, et observer dans quels cas la figure agrandie est homothétique de la pièce. La combinaison permet de graduer 2 côtés d'un triangle et de mettre en acte le théorème de Thalès. Et en particulier le fait que la parallèle à un côté d'un triangle passant par le milieu d'un

deuxième côté passe aussi par le milieu du troisième côté, et réciproquement, que la droite qui passe par les milieux de 2 côtés d'un triangle est parallèle au troisième (théorème des milieux).

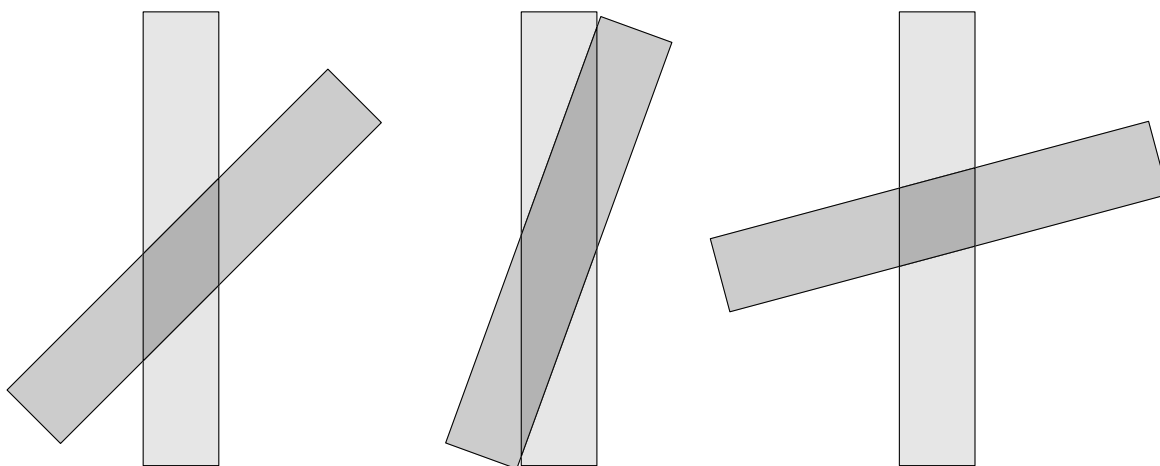


La règle non graduée seule

L'ultime défi proposé par la règle est de ne plus servir d'auxiliaire aux pièces-figures du jeu, mais de jouer un « one man's show » et de se proposer comme unique instrument. Et les possibilités qu'on découvre sont étonnantes ; elles vont exploiter simultanément la possibilité de chaque bord de tracer des traits droits et l'écartement fixe de la règle que j'appellerai ∂ pour les explications proposées.

1. Croisements de bandes et losanges

La première observation à faire, pour tirer parti de la règle seule, est que chaque fois que 2 bandes dessinées avec les 2 bords de la règle — donc de même largeur — se croisent, l'intersection est nécessairement un losange. En effet, l'aire du parallélogramme intersection est le produit de sa base par sa hauteur, et on peut choisir la base parmi l'un des couples de côtés parallèles ou l'autre. Dans tous les cas, la hauteur est ∂ et l'aire est indépendante du calcul : donc la base est toujours de même longueur.



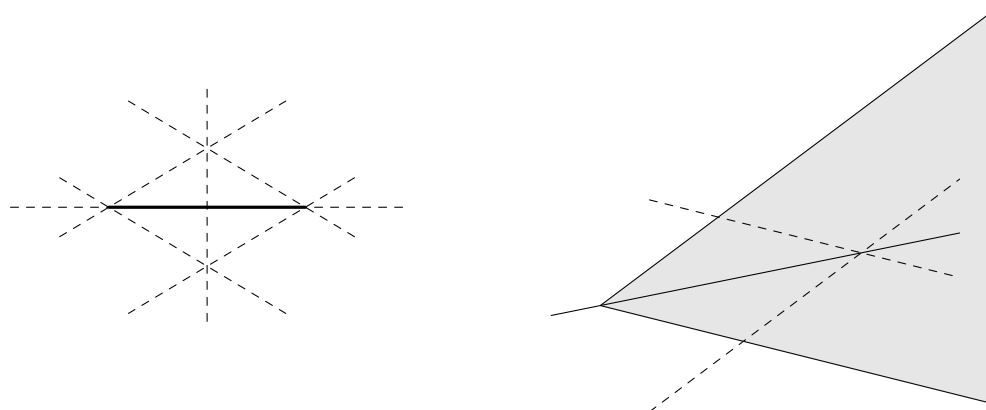
Dans la suite, le recours à 2 parallèles obtenues en traçant les 2 bords de la règle dans une position donnée sera constant, et chaque fois qu'il sera question de bandes, elles seront obtenues par ce moyen.

2. Losanges adaptés à un segment ou à un secteur

Les losanges ont de grandes qualités, et la possibilité de créer une infinité de losanges, chacun adapté à une situation rencontrée, est la clé du pouvoir de la règle.

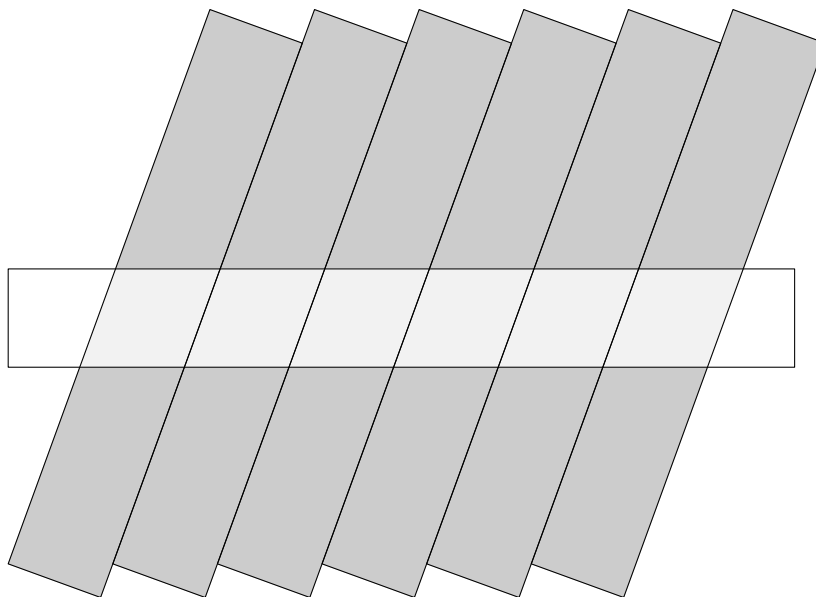
En premier lieu, tout segment donné, de longueur supérieure à ∂ , est diagonale d'un losange obtenu en trouvant les 2 seules positions de la règle, entre ses 2 extrémités, chacune passant par un bord. L'autre diagonale — facile à dessiner à la règle — donne la médiatrice du segment et son milieu.

En second lieu, dans un secteur angulaire donné, il est facile de créer un losange en plaçant la règle successivement contre les 2 bords et à l'intérieur du secteur. Et une de ses diagonales est bissectrice intérieure du secteur.



3. Reports de longueur sur une droite

La deuxième observation concerne les séries de bandes parallèles (de largeur ∂) : toute série de ce type est coupée par une bande de même largeur suivant un « train » de losanges isométriques. En effet, ces losanges ont deux à deux un côté commun — donc tous leurs côtés ont même longueur — et les mêmes angles — par parallélisme.



De nombreuses conséquences sont à tirer de cette observation. En particulier, un segment donné, de longueur supérieure à ∂ , peut être « reporté » ou multiplié à l'aide d'une série de bandes accolées dont la première passe par ses extrémités, comme ci-dessous.

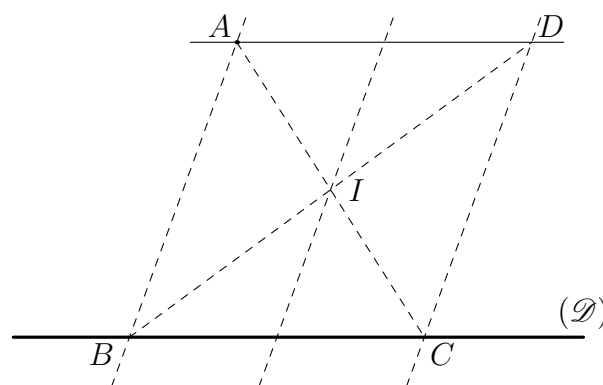


On peut aussi construire le symétrique d'un point par rapport à un centre, ce qui est équivalent à un report.

4. Parallèles

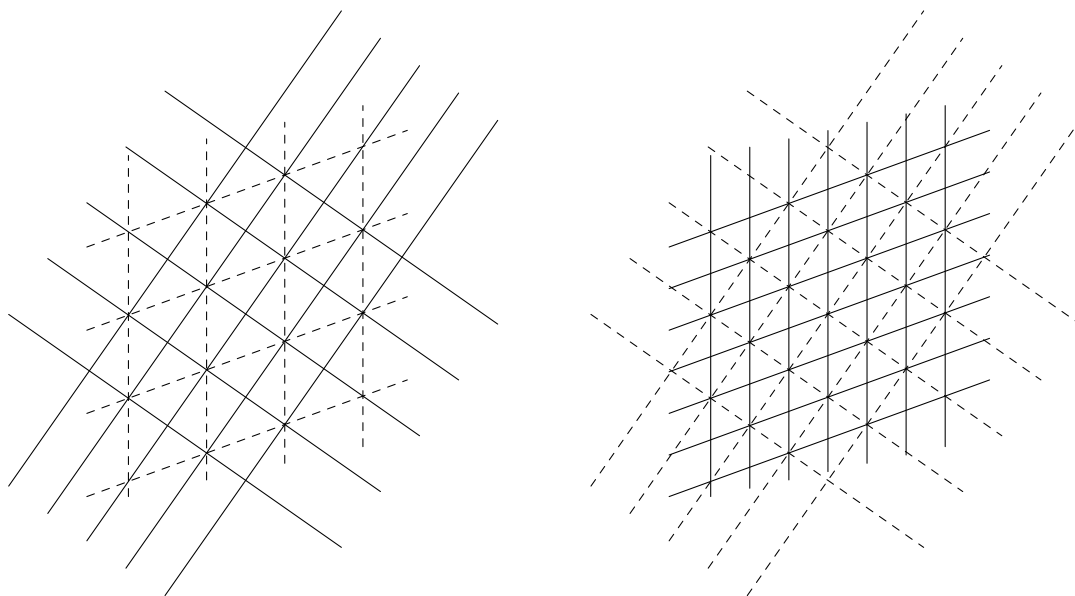
Pour tracer la parallèle à (\mathcal{D}) passant par A , on peut couper (\mathcal{D}) par 2 bandes dont une « passe par A ». L'intersection I de (AC) avec la parallèle médiane est le milieu de $[AC]$. (BI) coupe la troisième parallèle en D et I est aussi milieu de $[BD]$ et, donc, $ABCD$ est un parallélogramme.

(AD) est la parallèle à (\mathcal{D}) passant par A .

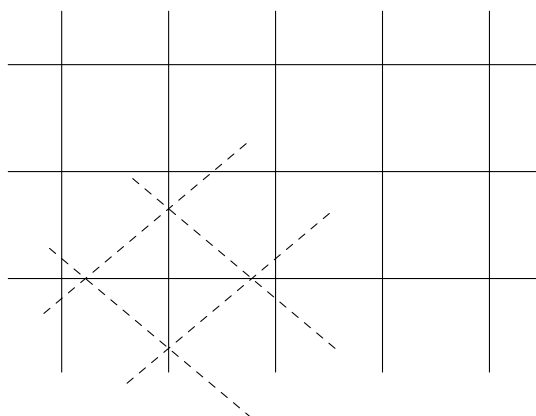


5. Réseaux de losanges, de rectangles, de carrés

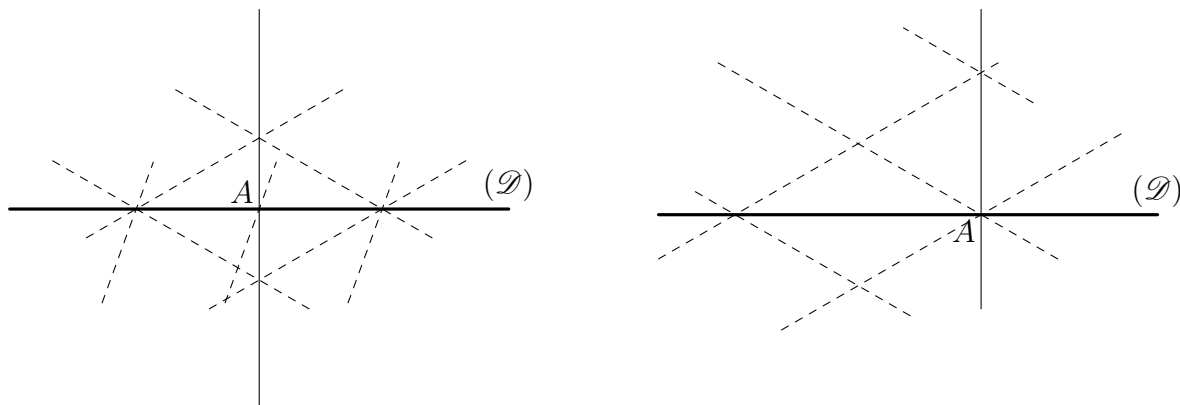
De même qu'on peut faire une série de parallèles, on peut en faire dans 2 directions, et créer ainsi un réseau de losanges. En traçant les diagonales, on obtient un réseau de rectangles. Et on peut créer des réseaux de mailles plus fines aux réseaux précédents grâce aux intersections des diagonales.



En combinant les deux observations, on crée facilement un quadrillage de maille ∂ . Il suffit de dessiner un losange quelconque (observation 1) et ses diagonales pour obtenir deux droites perpendiculaires. Puis en accolant la règle plusieurs fois à ces deux droites, on obtient le quadrillage (observation 2). Ce quadrillage, base de nombreuses constructions, sera désigné par \mathcal{Q} .

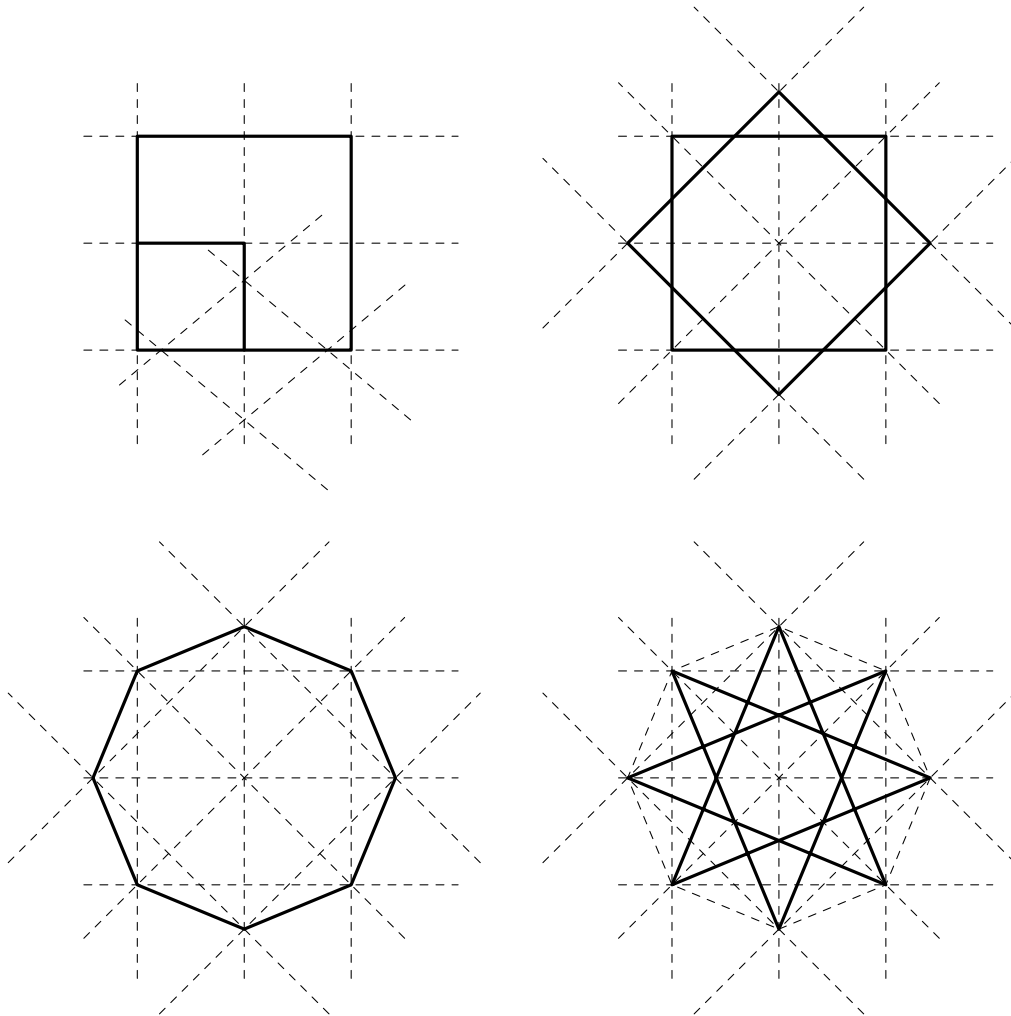


Mener la perpendiculaire à une droite passant par un point de cette droite constitue une autre application des réseaux duaux de losanges et de rectangles imbriqués (mais on peut aussi l'obtenir comme médiatrice d'un segment porté par la droite et de milieu le point).

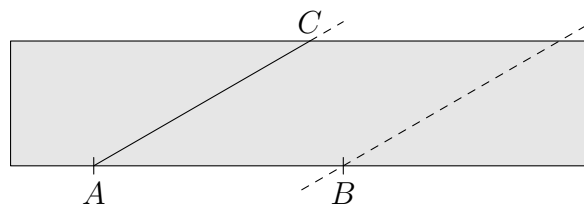


6. Figures remarquables

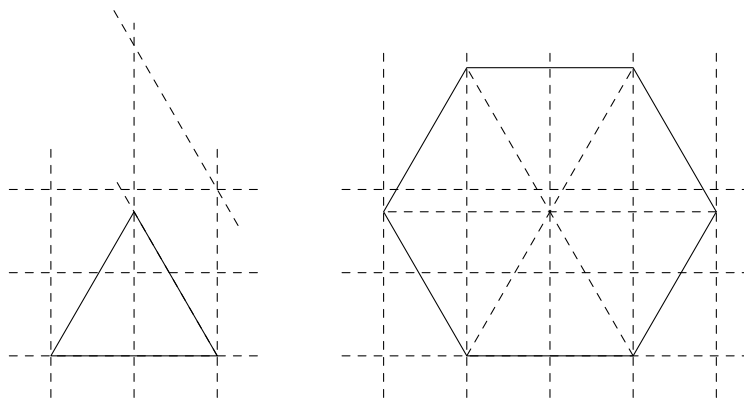
Étant capables de construire des parallèles et des angles droits, nous sommes en mesure de construire tout parallélogramme, rectangle, losange et carré avec la règle seule. À partir d'un carré, en traçant ses diagonales, on construit deux carrés imbriqués, un octogone régulier ou une étoile régulière à 8 branches.



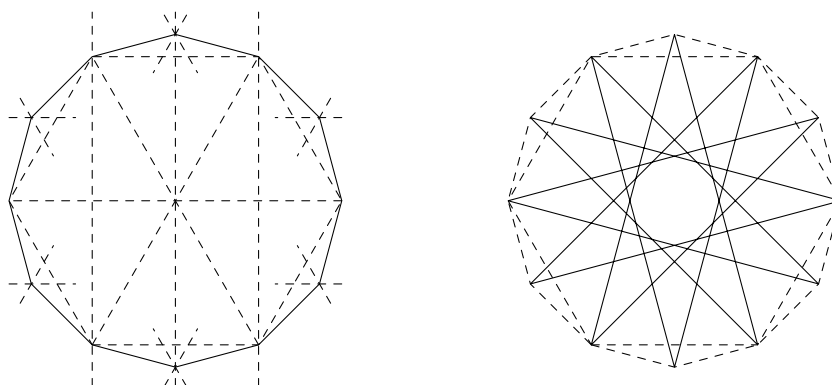
La troisième observation permet de rabattre un segment sur l'autre bord de la règle. Précisément, si $[AB]$ est donné (de longueur supérieure à ∂ !), on construit C sur l'autre bord de la règle placée le long de (AB) tel que : $AC = AB$.



On utilise cela pour construire un triangle équilatéral de côté multiple de ∂ . On part d'un carré de côté $2.\partial$ et on rabat un de ses côtés sur la médiane parallèle au côté. On en déduit la construction d'un hexagone régulier ou d'un réseau isométrique (formé de triangles équilatéraux) à partir du quadrillage Q.



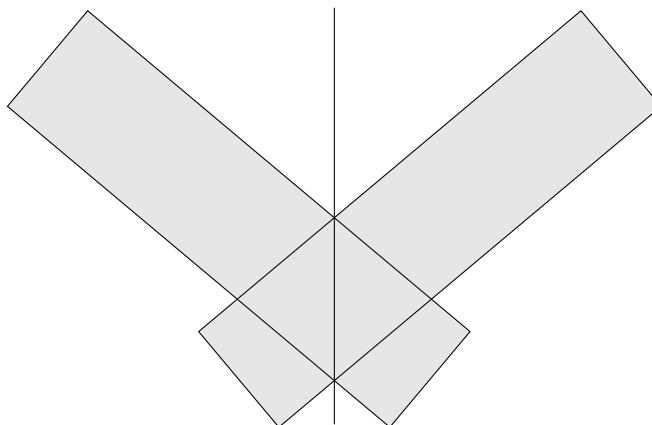
Partant de l'hexagone régulier, on peut encore doubler rapidement le nombre de ses côtés et obtenir ainsi un dodécagone régulier ou une étoile à 12 branches (on obtient les nouveaux sommets en plaçant la règle le long des bords de chaque secteur central de l'hexagone).



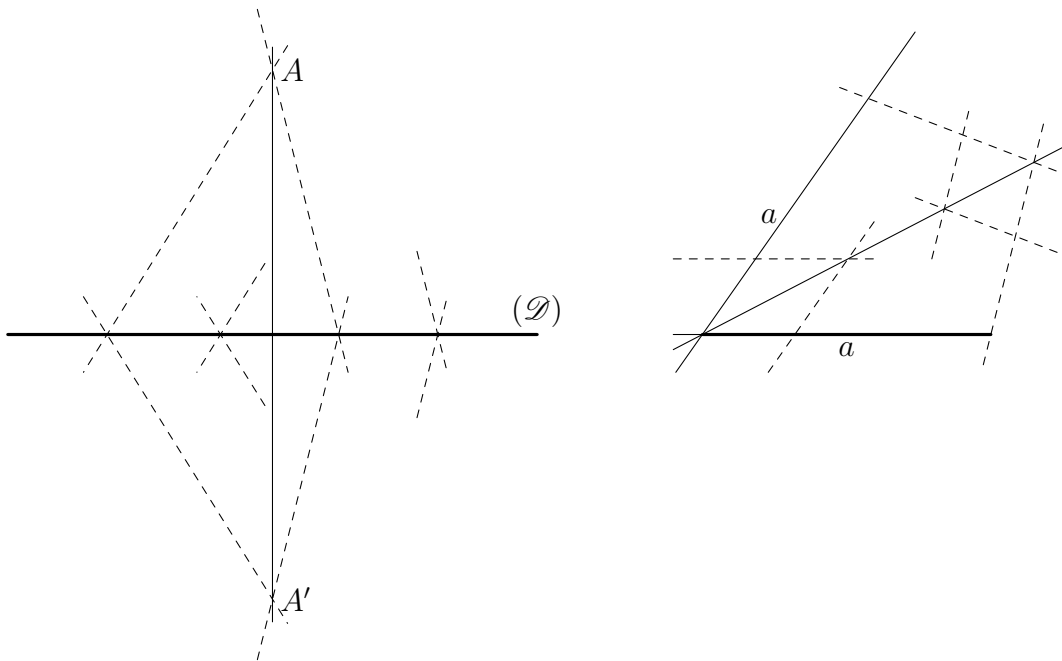
La figure classique la plus difficile à construire — même avec une règle et un compas — est sans conteste le pentagone régulier. Son cas sera envisagé à part dans un prochain paragraphe.

7. Réflexion

La quatrième observation exploite les symétries propres aux losanges.

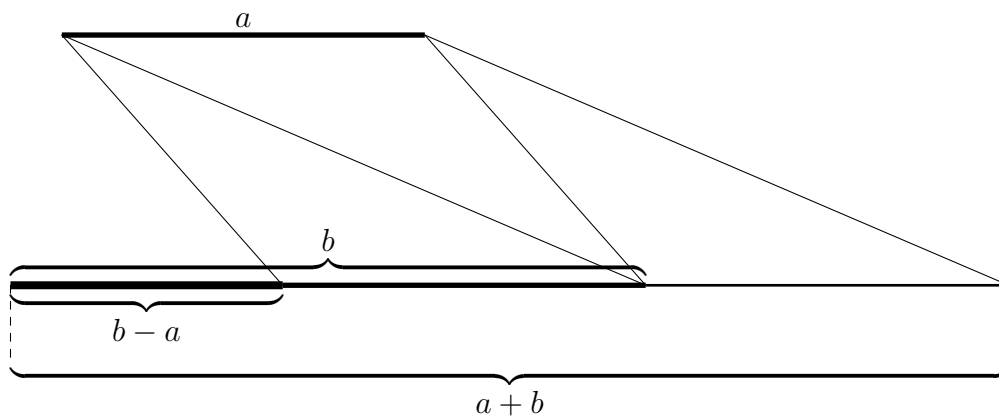


On peut ainsi construire la droite symétrique d'une droite ou le point symétrique d'un point (vu comme intersection de deux droites) par rapport à un axe.



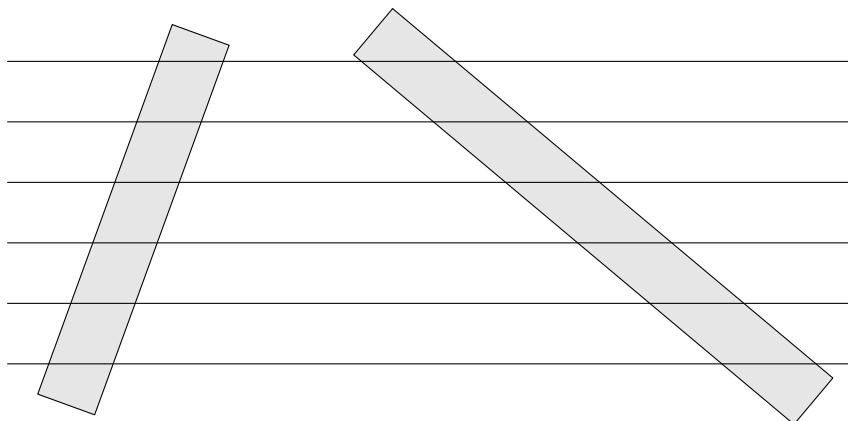
Ce qui fournit la construction de la perpendiculaire à une droite donnée passant par un point donné (hors de la droite) ainsi que le report d'un segment sur l'autre bord d'un secteur.

Cette dernière liberté combinée avec la capacité de tracer des parallèles, permet de déplacer un segment en tout point du plan et dans toutes les directions. Ce qui permet donc de construire la somme et la différence de 2 longueurs.



8. Parallèles équidistantes et théorème de Thalès

Une des plus belles applications des « trains de losanges » (observation 2) sert de base au théorème de Thalès.



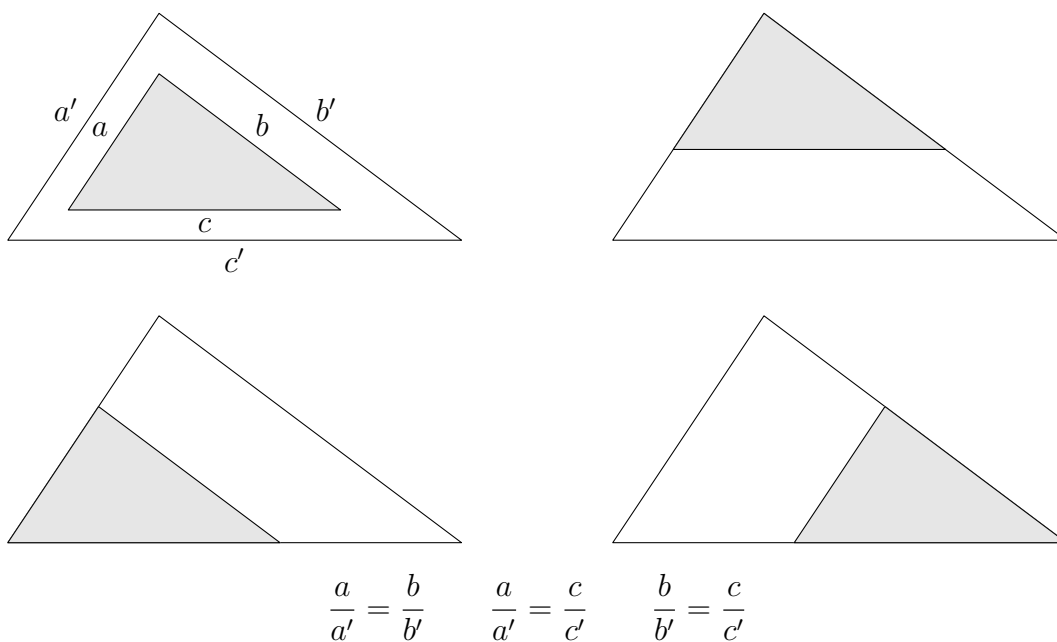
Elle peut se formuler ainsi : si une famille de parallèles découpe sur une sécante des segments de même longueur, alors elles sont équidistantes et découpent sur toute autre sécante des segments de même longueur.

La preuve se fait en deux temps :

1. Une famille de parallèles équidistantes découpe sur toute sécante des segments de même longueur. Il suffit de construire la famille avec la règle puis de placer la règle le long de la sécante. On obtient un « train de losanges » donc tous les segments ont même longueur.
2. Si une famille de parallèles découpe sur une sécante des segments de même longueur, alors elles sont équidistantes. La règle, de même largeur que la première bande, découpe un « train de parallélogrammes » dont le premier est un losange ; donc ce sont tous des losanges isométriques et ils ont même hauteur.

Le théorème de Thalès — dans sa version rationnelle — s'en déduit aisément.

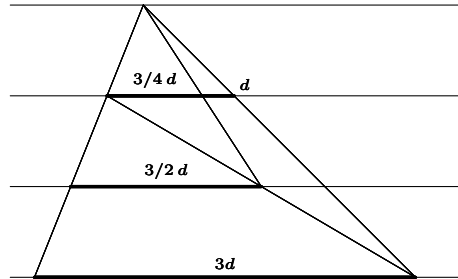
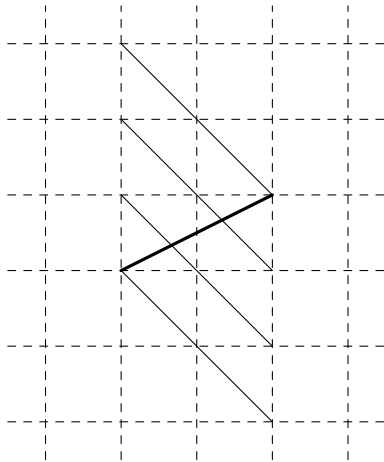
L'application aux triangles à côtés parallèles se montre à l'aide d'un gabarit du « petit triangle » qui peut prendre 3 positions dans les secteurs du « grand » qui correspondent à 3 configurations de Thalès. Pour que les rapports de Thalès soient conservés dans les translations du « petit triangle » et soient associés aux triangles — et non aux points — il suffit de les exprimer par les longueurs des côtés des triangles.



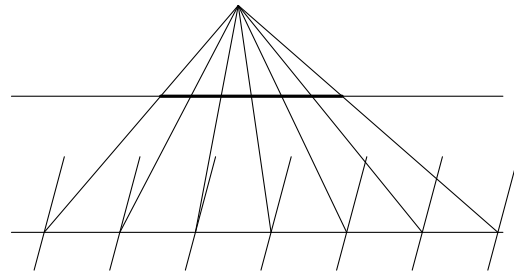
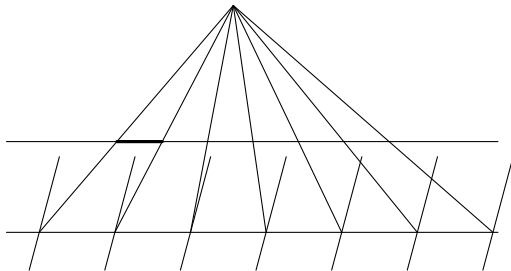
(2 positions suffisent, bien sûr !)

9. Applications du théorème de Thalès

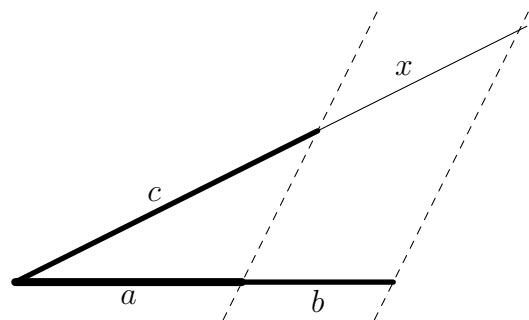
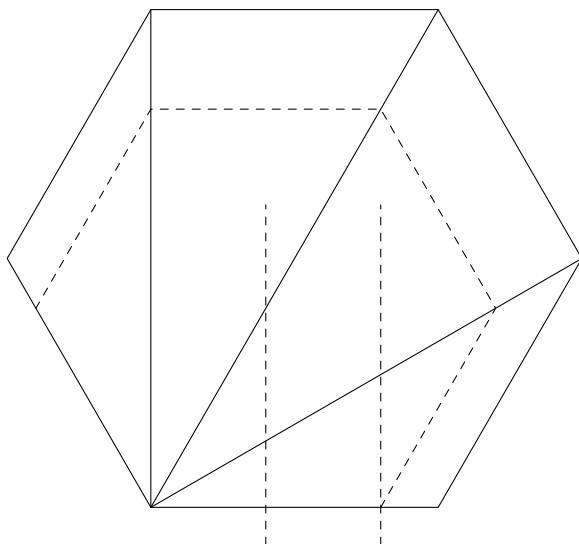
À partir de n bandes accolées, on peut partager ou multiplier n'importe quel segment.



On peut plus simplement construire une bande accolée au segment et multiplier un segment arbitraire sur l'autre bord. Ce dernier procédé permet de multiplier et diviser un segment de longueur inférieure à ∂ , d'en marquer le milieu et tracer la médiatrice.



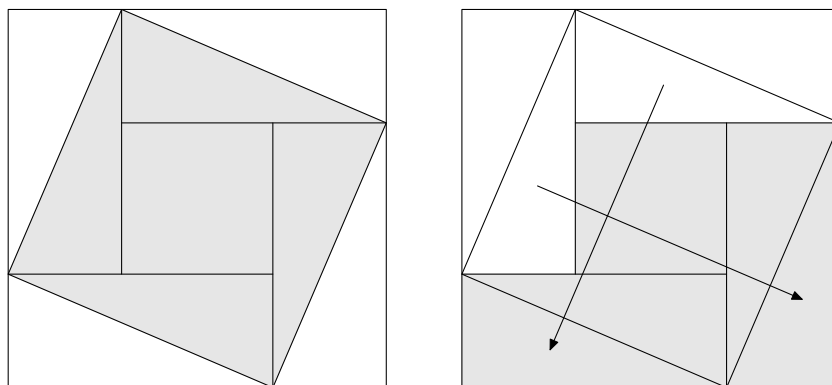
Enfin, le théorème de Thalès permet de construire des polygones de toute taille à partir de ceux que nous avons construits; ainsi que la quatrième proportionnelle à 3 longueurs données.



$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x} \quad \frac{x}{c} = \frac{b}{a}$$

10. Quadrillages, aires, longueurs et trigonométrie élémentaire

La règle n'apporte aucune contribution à la compréhension du théorème de Pythagore. Les très nombreuses démonstrations de ce théorème que l'Histoire nous a laissées se fondent sur une propriété de conservation d'aire des rectangles : 4 exemplaires de tout rectangle peuvent être disposés en carré, images les uns des autres par rotation d'un quart de tour. On forme le carré (géométrique) de leurs diagonales dont l'aire peut être découpée en 5 pièces par le contour des rectangles. Le glissement de 2 pièces triangulaires permet de former la réunion des carrés des 2 dimensions du rectangle.

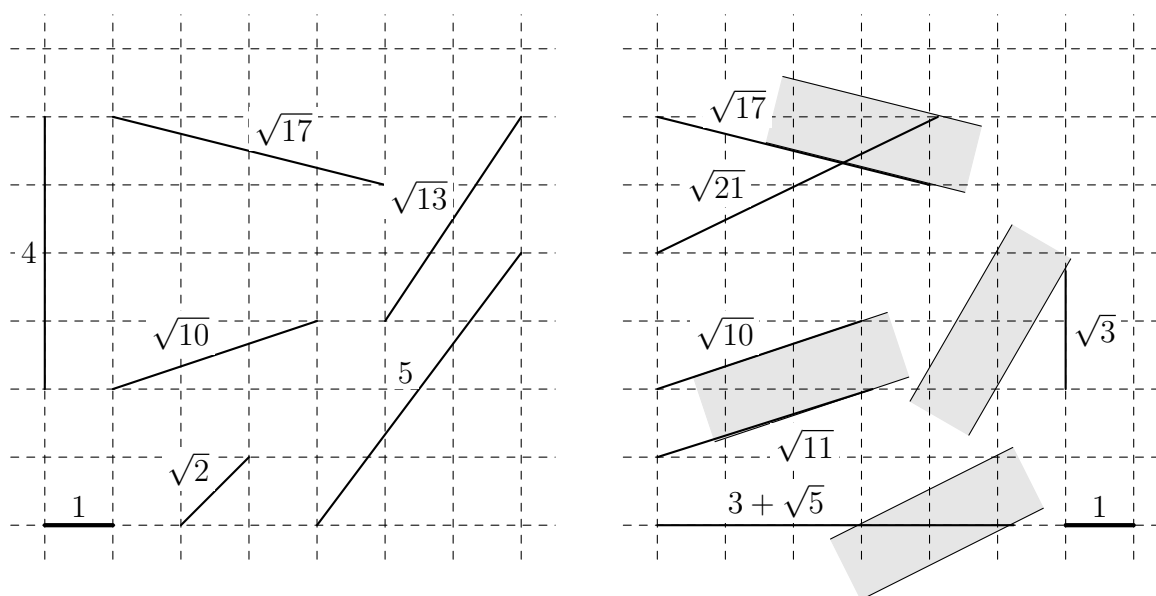


Le carré de la diagonale de tout rectangle a même aire que la réunion des carrés de ses 2 dimensions.

Appliquez cela au triangle demi-rectangle : théorème de Pythagore!

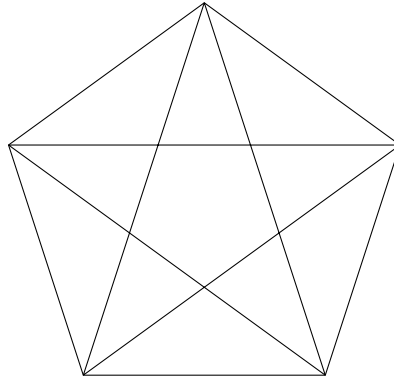
Mais la règle reprend du service pour exercer ce grand théorème. Le cadre est le quadrillage Q . ∂ étant l'unité de longueur, on peut mesurer l'aire de tout polygone dont les sommets sont des nœuds de Q par un nombre $\frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Par contre la longueur des segments d'extrémités des nœuds de Q ne s'exprime pas en général par des nombres rationnels. On peut, sur tout quadrillage construire des segments de longueur : $\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{13}$... Mais la règle et son quadrillage Q permettent, par rabattement, de construire toute longueur de la forme $n + \sqrt{p} + \sqrt{q}$, $(n, p, q) \in \mathbb{N}^3$.



11. Le pentagone régulier

Il est nécessaire d'avoir repéré la proportion très particulière qui caractérise le pentagone régulier et que les artistes ont appelé proportion harmonique et Ghyka : nombre d'or. C'est le rapport de la diagonale d au côté c de tout pentagone régulier et sa valeur (exacte) est : $\frac{d}{c} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$.

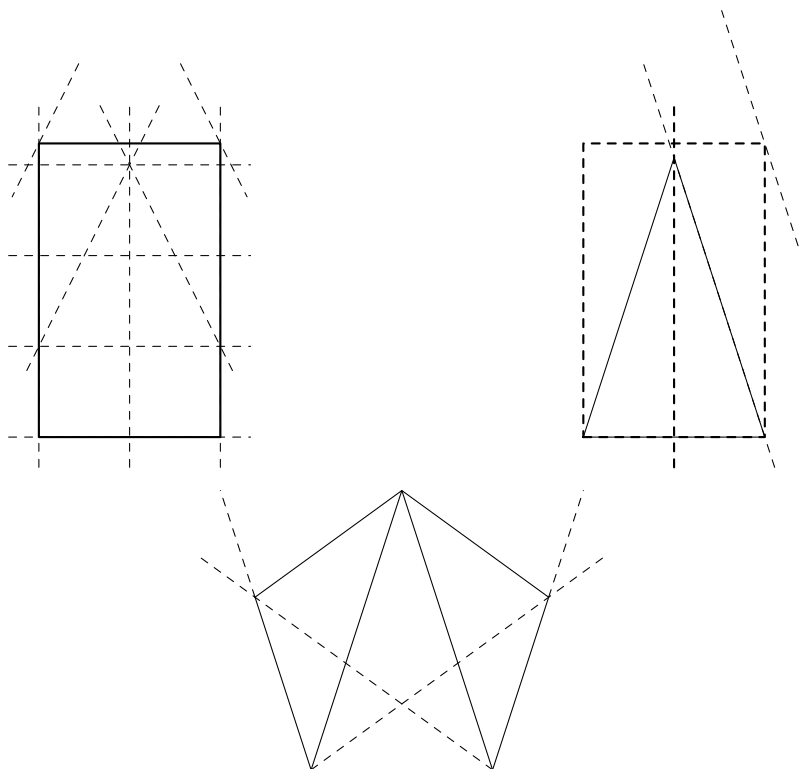


On appelle triangle d'or celui qui s'inscrit au centre du pentagone et rectangle d'or, un rectangle de dimensions d et c .

On construit d'abord un rectangle d'or de dimensions : 2∂ et $(1 + \sqrt{5})\partial$ (comme à la règle et au compas) à partir du quadrillage Q. Le triangle d'or s'en déduit par rabattement de sa longueur sur la médiane.

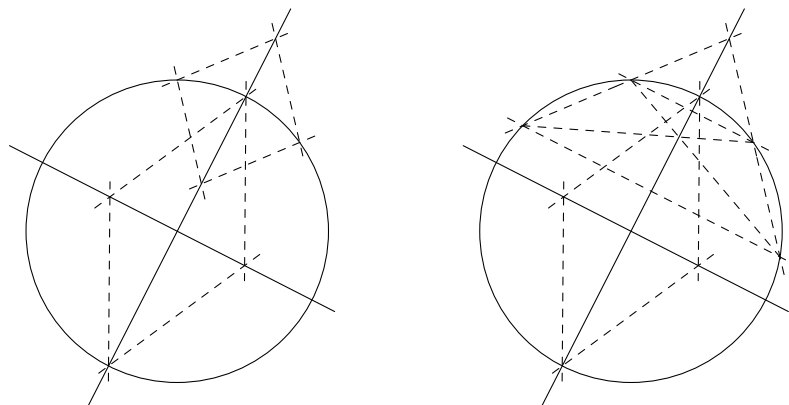
Trois sommets du pentagone sont en place. Pour les 2 derniers, plusieurs solutions se présentent. En particulier :

- ils sont chacun sur la bissectrice intérieure des secteurs de base du triangle d'or,
- ils sont chacun sur un côté parallèle à l'autre bissectrice.



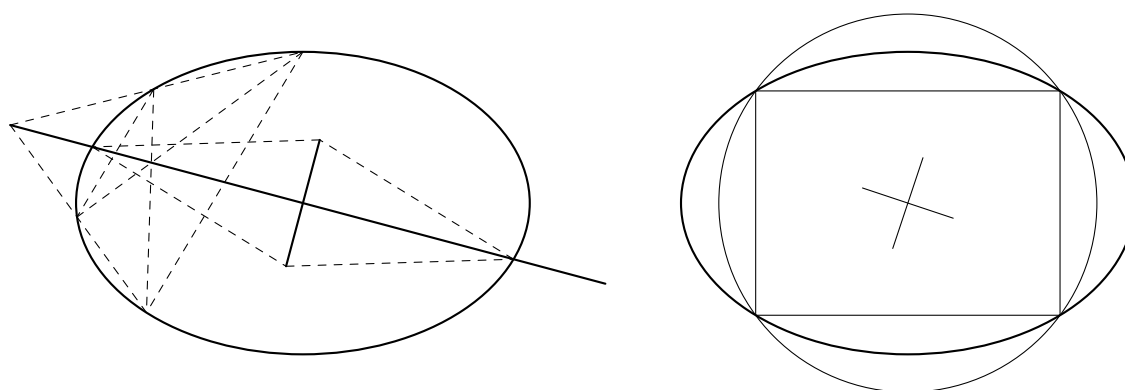
12. Centre d'un cercle ou d'une ellipse

Voici 2 constructions du centre d'un cercle donné :



1. À partir de 2 points du cercle, on construit un losange dont une diagonale est une corde. L'autre passe par le centre et donne un diamètre dont on trouve le milieu.
2. On peut aussi créer un trapèze isocèle en coupant le cercle par une bande. Son axe de symétrie donne un diamètre dont on trouve le milieu.

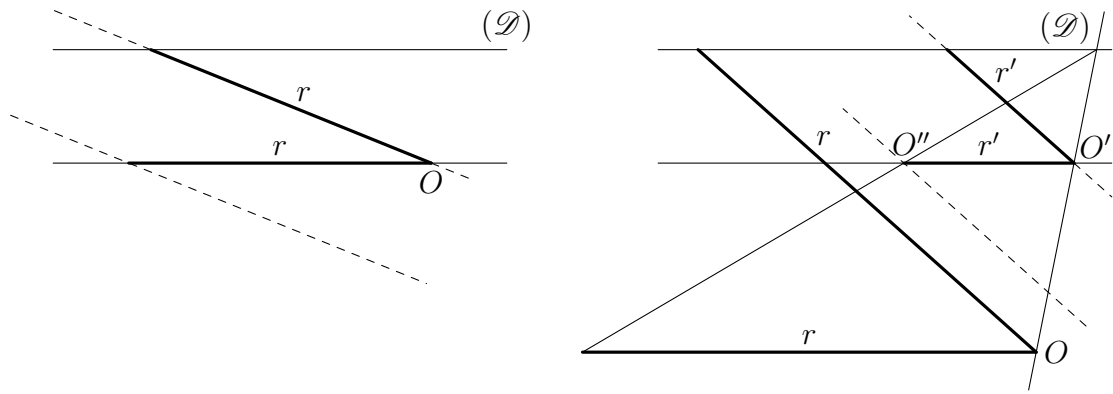
La seconde méthode pour tracer un diamètre du cercle se transpose par affinité pour donner un diamètre de l'ellipse dont on trace le milieu (si on veut aussi ses axes, il faut recourir au compas : on trace un cercle de même centre qui la coupe en 4 points formant un rectangle. Il n'y a plus qu'à tracer les axes de ce rectangle!).



13. Intersection d'une droite et d'un cercle

L'observation 3, qui nous a souvent servi dans les constructions précédentes à faire des rabattements, peut se voir comme construction de l'intersection d'une droite et d'un cercle (non tracé!) de rayon r ($r > \vartheta$) dont le centre O est à la distance ϑ de celle-ci.

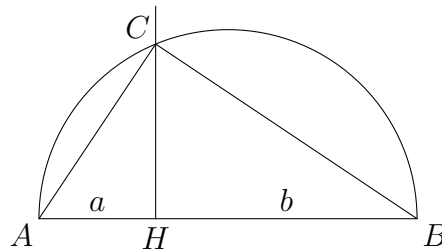
Le cas général se ramène à ce cas particulier. En supposant qu'on a placé un rayon r parallèlement à (\mathcal{D}) , on part d'un point quelconque de (\mathcal{D}) comme centre d'homothétie. Le point O est transformé en O' , le rayon r en r' et le rabattement de r' sur (\mathcal{D}) fournit une intersection de (\mathcal{D}) et de $\mathcal{C}(O'; r')$ — lorsqu'elle existe. La parallèle au rayon rabattu r' passant par O fournit alors le rabattement du rayon r (grâce au théorème de Thalès) et une intersection de (\mathcal{D}) et de $\mathcal{C}(O; r)$. ($r > d'(O; \mathcal{D})$). La seconde intersection s'obtient, soit en utilisant le rayon symétrique de r' par rapport à O' , soit en rabattant r' à partir de son autre extrémité O'' et en transformant par l'homothétie centrée sur (\mathcal{D}) telle que l'image de O'' soit O .



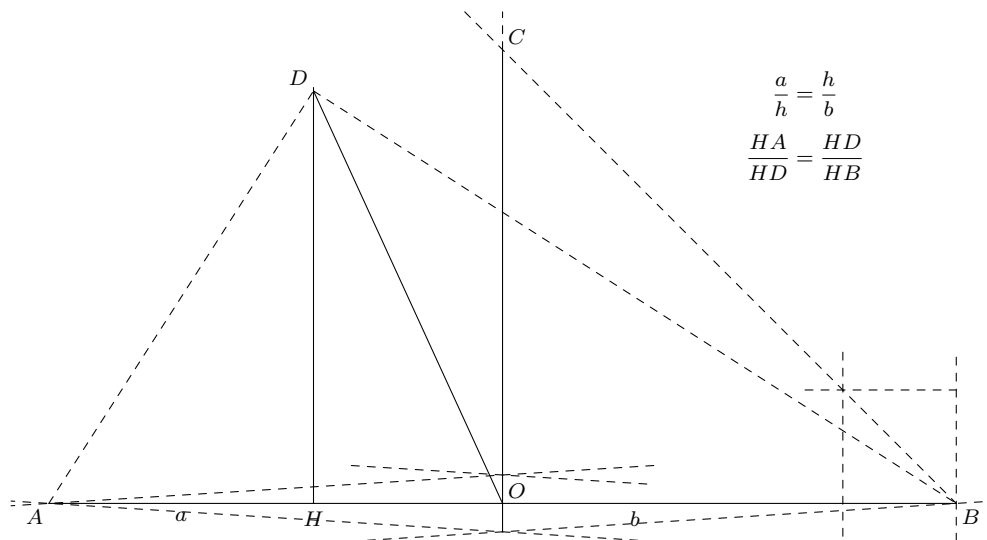
14. Moyenne géométrique

La face numérique de ce problème consiste à trouver, 2 nombres a et b étant donnés, un nombre x tel que : $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. La face géométrique consiste à construire un carré de côté x de même aire que le rectangle de dimensions a et b .

La solution d'Euclide à la règle et au compas est un incontournable et nous allons la copier ($HA = a$; $HB = b$; $HC = x$).



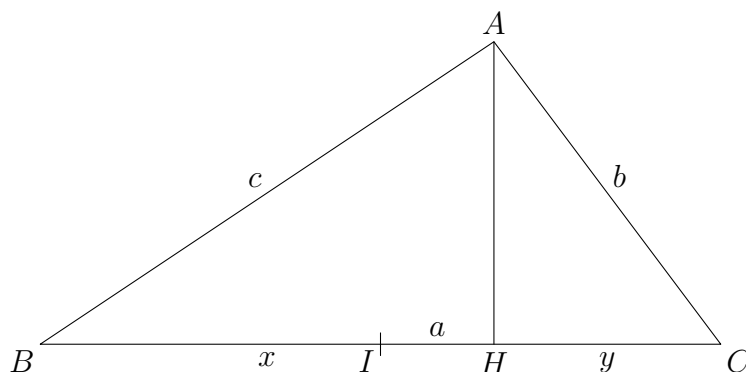
On commence par faire un segment $[AB]$ de longueur $a + b$; puis on construit son milieu O . La longueur OB est placée sur la perpendiculaire à (AB) passant par O en OC . On trace la perpendiculaire à (AB) passant par H puis on rabat le rayon $[OC]$ en $[OD]$ par la méthode précédente. HD est la moyenne géométrique de $HA = a$ et $HB = b$.



15. Intersection de deux cercles

Le dernier problème — et non le moindre! — consiste à construire à la règle l'intersection de 2 cercles (non tracés!); ou ce qui est équivalent, construire un triangle de côtés a, b, c donnés, vérifiant l'inégalité triangulaire.

Il est clair que, comme les 2 problèmes précédents, celui-ci représente un défi pour l'imagination, intéressant en tant que tel; mais que personne ne sera tenté de prendre une règle non graduée pour construire laborieusement ce qui peut être fait en 2 traits de compas!



Analysons la situation ($a = BC$; $b = CA$; $c = AB$; $b < c$; I milieu de $[BC]$; $(AH) \perp (BC)$; $h = AH$; $x = BH$; $y = HC$).

Par la seconde formule de la moyenne ou le théorème de Pythagore appliqué à AHB et AHC , on obtient une égalité qu'on peut transformer en proportion :

$$c^2 - b^2 = a(x - y) \iff \frac{IH}{c - b} = \frac{b + c}{2a}$$

La méthode (théorique) consiste à placer d'abord H par rapport à I en construisant IH comme quatrième proportionnelle à $(c - b)$, $(b + c)$ et $2a$; puis à déterminer l'intersection de la droite perpendiculaire à (BC) passant par H avec le cercle de centre C et rayon b (ou B et rayon c); ce qui donne la position du point A .

Conclusion

Ce travail — mis à part les derniers problèmes — a été proposé en 1998 dans les documents d'accompagnement de « La Moisson des Formes » pour le Collège. Il me paraît instructif, non pour remplacer les instruments classiques dans les constructions qui ont fait leur preuve depuis fort longtemps, mais pour comprendre en situation les raisonnements fondamentaux de la géométrie. En particulier, l'utilisation adaptée des caractéristiques des losanges (côtés de même longueur; perpendicularité des diagonales; symétries), des parallélogrammes, la mise en œuvre des translations et des homothéties, cette présentation limpide du théorème de Thalès qui mérite à elle seule d'accorder de l'intérêt à cet instrument et les applications du théorème de Pythagore qui mettent en exercice le concept difficile de radical.

J'ai pris connaissance, dernièrement, du travail de D. Berthe et B. Cazier (Repères-IREM n° 40) sur le même sujet; mais les constructions et raisonnements proposés sont différents (à part sur quelques incontournables comme la construction d'une parallèle) et les deux articles ne font pas double emploi.

DE LA PHYSIQUE AUX MATHÉMATIQUES : DU PROBLÈME DES CORDES VIBRANTES À L'ARTICLE DE DIRICHLET

Hombeline LANGUEREAU

Sommaire

Problèmes mathématiques	33
Avant Fourier : le problème des cordes vibrantes	35
Le travail de Fourier	40
Le mémoire de Dirichlet de 1829	45
Les successeurs immédiats	52
Bibliographie	53

Le contenu cet article est celui de l'intervention proposée dans le cadre du stage d'histoire des mathématiques proposé par l'IREM en janvier 2002. Le plan en est le suivant : après avoir rappelé quelques définitions mathématiques, nous nous intéresserons au problème des cordes vibrantes, puis à quelques passages de la *Théorie analytique de la chaleur* de Fourier. Nous terminerons par l'article de Dirichlet.

De nombreux phénomènes sont périodiques. Par exemple, l'étude des vibrations d'une corde fixée à ses extrémités, le son, les signaux en dents de scie de l'électronique... Cela amène donc à décomposer une fonction compliquée en sommes de fonctions périodiques simples que sont les fonctions trigonométriques.

La théorie correspondante est la théorie des séries de Fourier. Au début du XVIII^e siècle, l'approximation des fonctions par les polynômes qui sont les fonctions les plus simples conduit à la théorie des développements en série entière et finalement à des fonctions très régulières. En revanche, l'approximation par les polynômes trigonométriques, qui semble tout aussi naturelle, conduit à des fonctions extrêmement peu régulières et à des problèmes très complexes.

Ce qui suit est largement inspiré de l'ouvrage de J. P. Kahane et P. G. Lemarié-Rieusset cité en bibliographie.

Problèmes mathématiques

Une fonction numérique 2π -périodique f étant donnée, existe-t-il des coefficients réels a_n et b_n ($n \in \mathbb{N}$) tels que $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$?¹ Si oui, comment les trouver ? Sont-ils uniques ? La somme a-t-elle un sens (espace de convergence) ? C'est le problème des séries de Fourier.

¹En l'absence d'information contraire, ces notations seront conservées dans tout l'article.

Une série $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$ étant donnée, est-elle convergente pour certaines valeurs de x ? Définit-elle une fonction? C'est le problème des séries trigonométriques.

Le sujet des séries de Fourier tient en deux égalités :

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum c_n e^{inx} \\ c_n &= \int f(x) e^{-inx} \frac{dx}{2\pi} \end{aligned}$$

La première contient une série et la seconde contient une intégrale. L'écriture complexe est celle du XX^e siècle. Ici $n \in \mathbb{Z}$, le passage entre les deux écritures (fonctions trigonométriques et fonction exponentielle) est donné par l'égalité :

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x).$$

Le problème de la convergence, pratiquement ignoré au XVIII^e siècle, est loin d'être trivial. Il est à l'origine de nombreux articles développant des idées nouvelles.

Voici quelques dates marquantes :

- 1829 : P-G Lejeune-Dirichlet (1805–1859) : *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.*
- 1854 : B. Riemann (1826–1866) : *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique* (publié en 1867).
- 1870-72 : G. Cantor (1845–1918) : articles sur la convergence des séries trigonométriques.
- 1876 : P. Du Bois-Reymond (1831–1889) : fonction continue dont la série de Fourier diverge en un point.
- 1906 : H. Lebesgue (1875–1941) : *Leçons sur les séries trigonométriques.*
- 1926 : A. N. Kolmogorov (1903–1987) : il existe une fonction Lebesgue-intégrable dont la série de Fourier diverge partout.
- 1966 : Kahane et Katznelson : la série de Fourier d'une fonction continue peut diverger sur n'importe quel ensemble donné dont la mesure de Lebesgue est nulle.
- 1966 : Carleson : Pour toutes les fonctions continues sur $[0, 2\pi]$, la série de Fourier converge presque partout.

Un cadre dans lequel les séries de Fourier trouvent place de manière satisfaisante est l'espace de Hilbert $L^2([0, 2\pi])$ des fonctions de carré intégrable c'est-à-dire les fonctions f pour lesquelles $\int f(x)^2 dx < +\infty$, la famille $\{\cos(nx), \sin(nx), n \in \mathbb{N}\}$ en étant un système orthogonal total. L'orthogonalité est facile à démontrer, il suffit de calculer les intégrales $\int_0^{2\pi} \cos(nx) \sin(px) dx, \int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(px) dx, \dots$ Quant à la totalité, les fonctions continues étant denses dans $L^2([0, 2\pi])$, il suffit de montrer que toute fonction continue est limite dans $L^2([0, 2\pi])$ de polynômes trigonométriques. Ceci est obtenu en appliquant le théorème de Stone-Weierstrass.

Ce formalisme fait de l'ensemble des fonctions de carré intégrable ou de l'ensemble des suites de carré sommable (c'est-à-dire $\sum u_n^2 < +\infty$) un espace dans lequel on raisonne géométriquement « comme » on raisonne dans \mathbb{R}^2 , avec un vocabulaire emprunté à la géométrie, mais ce cadre ne permet pas de traiter les problèmes classiques de convergence.

Avant Fourier : le problème des cordes vibrantes

Quelques dates :

1715 : Publication de *De methodo incrementorum* par B. Taylor (1685–1731).

1747 : Controverse D. Bernoulli (1700–1782), J. Le Rond d'Alembert (1717–1783) et L. Euler.

1753 : Nouvelle polémique entre D. Bernoulli et Euler.

1755 : Parution de l'article écrit en 1753 de D. Bernoulli *Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes et Sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones qui peuvent exister dans un même système de corps*.

Quelle(s) équation(s) pour le problème physique des cordes vibrantes ?²

Le problème des cordes vibrantes est la description du mouvement d'une corde fixée à ses extrémités — la corde d'un violon par exemple.

Vers 1715, B. Taylor, par un argument direct, sans utiliser d'équation aux dérivées partielles, montre que (quand a est constant) pour chaque entier $n \geq 1$, la fonction $u_n(x, t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{a}\right)$ représente les vibrations de la corde ; pour $n = 1$, c'est le son fondamental, et pour $n = 2, 3, \dots$ ce sont les harmoniques. Comme on le savait déjà, le son émis par une corde est un mélange d'harmoniques.

Jean Bernoulli (1667–1748) aborde le même problème en 1727 en essayant d'appliquer de façon stricte le modèle mécanique newtonien. Dans un cadre atomiste, le mouvement de la corde est par un système d'équations newtoniennes, $f = m\gamma$, chaque équation décrivant le mouvement d'un des corpuscules composant la corde. Cela bien que la corde se présente comme un corps continu dont nous connaissons seulement la masse totale M et la longueur ℓ . Bernoulli applique un schéma newtonien discret en assimilant la corde à un fil élastique sans épaisseur, auquel sont suspendues n masses dont la somme vaut M . Les masses sont placées à égales distances les unes des autres. Si x_k est l'abscisse de la k -ième masse, $x_k = \frac{k}{n}$. On applique la loi de Newton. Le mouvement des masses est représenté par la variation de l'ordonnée y_k .

Bernoulli démontre que l'équation du mouvement de la masse k peut s'écrire :

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = \left(\frac{n\gamma}{\ell}\right)^2 (y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1})$$

C'est une bonne idée ; mais conserver un modèle discret conduit à un schéma grossier ou inutilisable.

²Ce paragraphe est emprunté à G. Israel cité en bibliographie

D'Alembert, en 1746, propose une solution qui consiste à assimiler un corpuscule à un point géométrique muni d'une masse. La corde est à la fois continue et discrète. D'Alembert découpe de la même façon que Bernoulli, mais jusqu'à l'infini. Il note x l'abscisse d'un point quelconque de la corde, y son ordonnée, dx l'« intervalle entre deux points » de la corde. L'équation de Bernoulli devient :

$$\frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \left[\frac{y(t, x + \Delta x) - 2y(t, x) + y(t, x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \right]$$

En faisant tendre Δx vers 0, l'équation que d'Alembert obtient, en termes modernes, est : $\frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2}$; les conditions aux bornes $y(0, t) = y(\ell, t) = 0$ expriment que la corde est fixée aux points $x = 0$ et $x = \ell$ et les égalités $y(x, 0) = \phi(x)$ et $\frac{\partial}{\partial t} y(x, 0) = \psi(x)$ expriment que la forme et la vitesse sont données au temps $t = 0$.

Comment résoudre le problème ?

En 1747, D'Alembert résout l'équation (E) : $\frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y(t, x)}{\partial x^2}$ en effectuant le changement de variables $X = x - at$ et $Y = x + at$ qui réduit l'équation à $\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0$. Il conclut que la solution de (E) est donnée par $u(x, t) = f(x - at) + g(x + at)$ où f et g sont deux fonctions « arbitraires ».

Daniel Bernoulli, en 1750, propose d'écrire la solution « générale » comme la série $u(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi c}{a}(t - \beta_n)\right)$; les valeurs a_n et β_n étant convenablement choisies.

C'est la recherche d'une solution « générale » qui engendre la controverse entre d'Alembert, Euler et D. Bernoulli. Cette solution est obtenue en superposant des fonctions sinus, les coefficients étant calculés par des égalités d'intégrales sans souci de convergence. D. Bernoulli démontre que :

$$y(t, x) = \sum_p \alpha_p \sin\left(p \frac{\pi x}{\ell}\right) \cos(pkt)$$

fournit une solution au problème et il considère que c'est la plus générale possible. C'est sur ce point que réagit Euler. Pour qu'il en soit ainsi, dit Euler, il faut qu'à $t = 0$, la formule qui devient $y(x) = \sum_p \alpha_p \sin\left(p \frac{\pi x}{\ell}\right)$ représente toutes les formes que peut prendre une corde fixée à ses deux extrémités, à savoir les courbes dont le graphe est un trait tracé à volonté sans lever la plume (pour nous, une fonction continue, dérivable par morceaux). Il observe qu'une fonction mécanique arbitraire peut être définie sur un segment (intervalle fermé et borné) par la série somme de cosinus et de sinus mais en pensant que cette série représente seulement une fonction analytique. Son opinion est reprise (avec des variantes) par beaucoup d'autres mathématiciens de son temps, sans faire de progrès sur cette question jusqu'au commencement du travail de Fourier sur la théorie de la chaleur.

Voici quelques éléments de la controverse extraits de *Histoire de l'académie royale des sciences et belles lettres année 1753*, Berlin 1755.

Le paragraphe XII est écrit par D. Bernoulli.

XII. Voyons encore si toutes les nouvelles courbes trouvées par M. *Euler*, sont comprises dans notre remarque. Pour cet effet il faudra donner une équation pour toutes les courbes Tayloriennes, dont les cinq premières figures sont autant d'exemples. Je me servirai des dénominations de M. *Euler*. Soit donc la longueur de la corde $AB = a$; $\pi =$ à la demi-circonférence du cercle dont le rayon est exprimé par l'unité, la plus grande appliquée au milieu de chaque ventre pour la première figure $= \alpha$, pour la seconde $= \epsilon$, pour la troisième $= \gamma$, pour la quatrième $= \delta$; soit enfin x une abscisse quelconque, & y l'appliquée pour cette abscisse, on aura suivant M. *Taylor*,

$$\text{pour la 1. fig. } y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a}$$

$$\text{pour la 2. fig. } y = \epsilon \sin \frac{2\pi x}{a}$$

$$\text{pour la 3. fig. } y = \gamma \sin \frac{3\pi x}{a}$$

$$\text{pour la 4. fig. } y = \delta \sin \frac{4\pi x}{a} \quad \&c.$$

En combinant donc toutes ces courbes à l'imitation de la figure fixiè-
me, pour laquelle nous n'avons combiné que les deux premières figu-
res, nous aurons généralement pour la même abscisse x cette équation

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \epsilon \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \delta \sin \frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

dans laquelle les quantités α , ϵ , γ , δ , &c sont arbitraires affirma-
tives ou négatives.

XIII. Voilà donc cette infinité de courbes trouvées sans aucun calcul, & notre équation est la même que celle de M. *Euler*; voyez les Mémoires de l'Académie pour l'Année 1748 page 85. Il est vrai que M. *Euler*, ne traite pas cette multitude infiniment infinie de générale, & qu'il ne la donne au § 30 que comme des cas particuliers; mais c'est sur quoi je ne suis pas encore assez éclairci: s'il y a encore d'autres courbes, je ne comprends pas dans quel sens on peut les admettre.

Tab. I.

Fig. 1.

ad pag. 153.

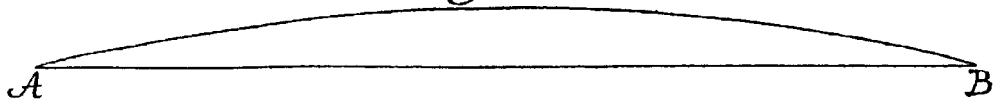


Fig. 2.

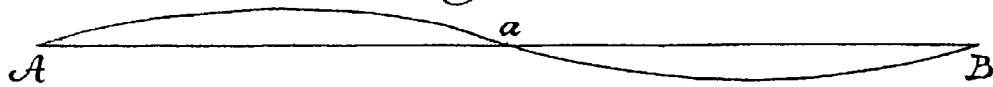


Fig. 3.

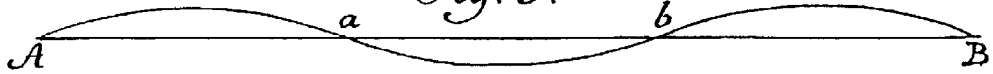


Fig. 4.

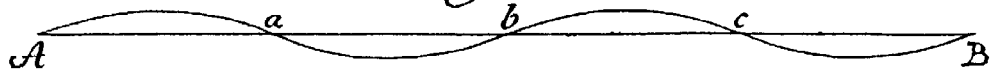


Fig. 5.



Fig. 6.

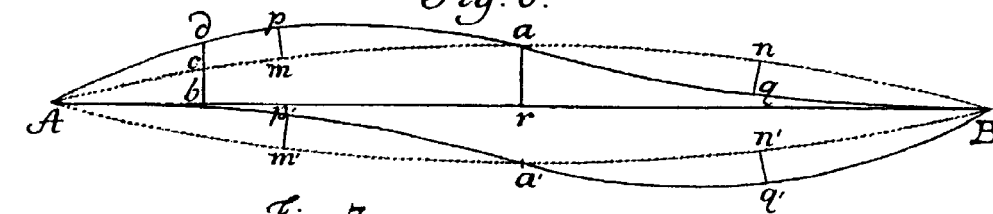


Fig. 7.

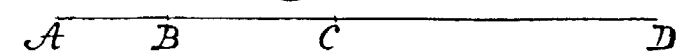
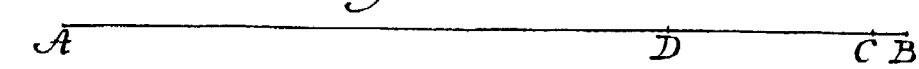


Fig. 8.



Mem. de l'Acad. Tom. IX pag. 352

F.H. Frisch sc. Berl.

Voici les *Remarques sur les mémoires précédens de M. Bernoulli* par Euler



R E M A R Q U E S
S U R L E S M É M O I R E S P R É C E D E N S
D E M. B E R N O U L L I,
P A R M. E U L E R.

I.

Il n'y a aucun doute, que *M. Bernoulli* n'ait infiniment mieux développé la partie physique, qui renferme la formation du son dans le mouvement des cordes, qu'aucun autre n'a fait avant lui. On s'étoit presque uniquement arrêté à la détermination mécanique du mouvement, dont une corde tendue peut être ébranlée, sans rechercher assez soigneusement la nature des sons, qui en sont produits. Malgré l'infinité de manières différentes dont on a trouvé qu'une corde peut être mise en vibrations, on ne voyoit pas comme il seroit possible, qu'une même corde puisse rendre à la fois plusieurs sons différens; & c'est à *M. Bernoulli*, que nous sommes redevables de cette heureuse explication, qui est sans doute de la dernière importance dans la Physique. Il est aussi évident, que cette belle idée s'étend à toutes les autres espèces des corps sonores, & que le même corps peut rendre à la fois tous les sons différens, dont il est susceptible séparément; & c'est le sujet que *M. Bernoulli* a traité avec le même succès dans son second Mémoire.

mouvement, soit toujours, ou une trochoïde allongée simple, ou un mélange de deux ou plusieurs courbes de la même espèce. Or quoiqu'un tel mélange ne pût plus être regardé comme une trochoïde, & que la seule possibilité de la combinaison de plusieurs courbes de *M. Taylor* rende déjà sa solution insuffisante; il me semble qu'elle est encore insuffisante à d'autres égards, & que le mouvement d'une corde pourroit être tel, qu'il seroit impossible de le rapporter à l'espèce des trochoïdes Tayloriennes.

III. Si toutes les courbes, auxquelles la corde s'applique pendant son mouvement, étoient comprises dans cette équation,

$$y = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} + \beta \sin \frac{2\pi x}{a} + \gamma \sin \frac{3\pi x}{a} + \delta \sin \frac{4\pi x}{a} + \&c.$$

le sentiment de *M. Bernoulli* seroit juste; vu que prenant chaque terme séparément, une telle équation $y = \mu \sin \frac{m\pi x}{a}$ donne toujours une

des trochoïdes assignées par *Taylor*; & notre équation seroit formée de plusieurs trochoïdes. Mais, dès que le nombre des termes dans cette équation devient infini, il me paroît encore douteux, si l'on peut dire, que la courbe soit composée d'une infinité de trochoïdes: le nombre infini semble détruire la nature d'une telle composition. Cependant j'avouë, que *M. Bernoulli* auroit pu parvenir à la découverte de toutes ces courbes par le seul raisonnement fondé sur la composition des trochoïdes Tayloriennes, & que l'équation rapportée, quand même elle seroit continuée à l'infini, en est une suite fort naturelle.

Le travail de Fourier³

La théorie des cordes vibrantes eut une influence manifeste sur Fourier. En premier lieu, l'équation des cordes vibrantes joua le rôle de paradigme pour l'équation de la chaleur. Fourier traita l'équation $\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} = 0$ de la même manière que Bernoulli l'équation $\frac{\partial^2 \nu}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \nu}{\partial y^2} = 0$. Fourier montre sur de nombreux exemples que la série de Fourier converge vers $\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$ (p. 407 de la *Théorie analytique de la chaleur*) et pense que c'est vrai pour une fonction arbitraire. La preuve est seulement donnée en 1829 par Dirichlet pour les fonction continues et monotones par morceaux (on dit maintenant à variations bornées).

Ces résultats sont le point de départ de l'une des principales préoccupations des analystes du XIX^e siècle, l'étude des séries trigonométriques, centrée sur le problème de la convergence et des relations intégration et coefficients. L'évolution de cette théorie est en liens étroits avec l'approfondissement des notions de nombres réels, d'ensembles, de fonction et d'intégrale. Mais avant 1920, il n'y avait pas beaucoup de contacts entre cette théorie et le développement de l'analyse fonctionnelle telle que nous l'entendons actuellement. (on est encore loin de l'espace de Hilbert).

Quelques éléments biographiques :

Joseph Fourier (1768–1830), orphelin à 10 ans, est un brillant élève. Il étudia au collège militaire d'Auxerre jusqu'à 14 ans et y enseigna à partir de 16 ans et demi. Dès le 9 décembre 1789, il présente un mémoire sur les équations algébriques dont les rapporteurs sont Monge, Legendre et Cousin. En 1793, il prend part au comité révolutionnaire d'Auxerre, et entre autres, assure avec succès le ravitaillement et la fourniture d'armes à Orléans. Il est dénoncé à la Convention. Après la chute de Robespierre, il choisit l'emploi nouvellement créé « instituteur salarié par la nation ». Il entre ensuite à l'École normale créée en 1794 (qui disparut presque aussitôt pour être recréée plus tard). De 1795 à 1798, Fourier enseigne les mathématiques (calcul différentiel, calcul intégral, statique, dynamique, hydrostatique, probabilités) à l'École polytechnique. Bonaparte, lors de l'expédition d'Égypte fonde une réplique de l'institut de France ; il nomme Monge président et Fourier secrétaire perpétuel. Après son retour en France, Fourier est nommé par Bonaparte préfet de l'Isère fin 1801. Malgré cette charge, il écrit des milliers de pages sur l'Égypte et la *Théorie analytique de la chaleur*. Fourier envoie en 1807 son « Premier mémoire sur la propagation de la chaleur dans les corps solides ». Le secrétaire perpétuel, Delambre, demande à Lagrange, Laplace, Lacroix et Monge d'être rapporteurs. Lagrange s'oppose fermement à ce qu'écrivit Fourier sur les séries trigonométriques et le mémoire n'est pas publié. Le même sujet est soumis à concours. Fourier envoie son manuscrit en septembre 1811. Les rapporteurs sont les trois même L. , Fourier eut le prix avec des réserves :

« Cette pièce renferme les véritables équations différentielles de la transmission de la chaleur, soit à l'intérieur des corps, soit à leur surface : et la nouveauté du sujet, jointe à son importance, a déterminé la Classe à couronner cet ouvrage, en observant cependant que la manière dont l'auteur parvient à ses équations n'est pas exempte de difficultés, et que son analyse, pour les intégrer, laisse encore quelque chose à désirer, soit relativement à la généralité, soit même du côté de la rigueur. »

³Ce paragraphe est directement issu de « Séries de Fourier et ondelettes » de Kahane et Lemarié-Rieusset

Après la chute de l'Empire, Fourier, en disgrâce, est nommé directeur du bureau des statistiques grâce à la protection de son ancien élève le Comte de Chabrol. En mai 1816, il est élu à l'institut, mais Louis XVIII refuse de valider l'élection ; il est réélu en 1817, l'élection est cette fois validée ; il en devient secrétaire perpétuel cinq ans plus tard.

Fourier meurt en 1830. Sa réputation ne cessera de croître à l'étranger alors qu'elle décline en France. Ses œuvres seront éditées par Darboux (1888–90)

Examinons d'un peu plus près « la théorie de la chaleur ».

L'équation $\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{CD} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$ est écrite pour la première fois dans l'ouvrage page 118 après l'étude de nombreux exemples de diffusion de chaleur où interviennent des équations dont des fonctions exponentielles ou trigonométriques sont solutions.

142.

THÉORÈME IV.

Il est facile de déduire des théorèmes précédents les équations générales de la propagation de la chaleur.

Supposons que les différents points d'un solide homogène d'une forme quelconque, aient reçu des températures initiales qui varient successivement par l'effet de l'action mutuelle des molécules, et que l'équation $v = f(x, y, z, t)$ représente les états successifs du solide, on va démontrer que la fonction v de quatre variables satisfait nécessairement à l'équation

$$\frac{dv}{dt} = \frac{K}{C.D} \left(\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{d^2 v}{dz^2} \right).$$

Les conditions aux limites sont données dans les paragraphes suivants (n° 143, 145). Il reste ensuite à résoudre cette équation. Pour cela, il commence par examiner le cas stationnaire (premier membre nul dans une plaque de longueur infinie (deux variables) ; c'est l'objet des paragraphes 166 et suivants dans lesquels la solution fonction de deux variables est choisie comme produit de deux fonctions d'une variable, la solution est paragraphe 167. La solution générale étant combinaison linéaire de ces solutions particulières.

Les deux extraits ci-dessous montrent la démarche de Fourier pour trouver les coefficients d'une série trigonométrique.

Dans celui-ci, Fourier résout un système d'une infinité d'équations ayant autant d'inconnues. Remarquons que Fourier donne la définition d'une série convergente au paragraphe 177.

171.

Nous reprendrons maintenant l'équation

$$v = a \cos. y + b \cos. 3y + c \cos. 5y + d \cos. 7y + \text{etc.}$$

dans laquelle il faut déterminer les coefficients a, b, c, d , etc. Pour que cette équation subsiste, il est nécessaire que les constantes satisfassent aux équations que l'on obtient par des différentiations successives, ce qui donne les résultats suivants :

$$v = a \cos. y + b \cos. 3y + c \cos. 5y + d \cos. 7y + \text{etc.}$$

$$0 = a \sin. y + 3 b \sin. 3y + 5 c \sin. 5y + 7 d \sin. 7y + \text{etc.}$$

$$0 = a \cos. y + 3^2 b \cos. 3y + 5^2 c \cos. 5y + 7^2 d \cos. 7y + \text{etc.}$$

$$0 = a \sin. y + 3^3 b \cos. 3y + 5^3 c \cos. 5y + 7^3 d \cos. 7y + \text{etc.},$$

ainsi de suite à l'infini.

Ces équations devant avoir lieu lorsque $x=0$, on aura

$$1 = a + b + c + d + e + f + g + \dots \text{ etc.}$$

$$0 = a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + 9^2 e + 11^2 f + \dots \text{ etc.}$$

$$0 = a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + 9^4 e + \dots \text{ etc.}$$

$$0 = a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + \dots \text{ etc.}$$

$$0 = a + 3^8 b + 5^8 c + \dots \text{ etc.}$$

etc.

Le nombre de ces équations est infini comme celui des indéterminées a, b, c, d, e, \dots etc. La question consiste à éliminer toutes les inconnues, excepté une seule.

172.

Pour se former une idée distincte du résultat de ces éliminations, on supposera que le nombre des inconnues a, b, c, d, \dots etc., est d'abord défini et égal à m . On emploiera les m , premières équations seulement, en effaçant tous les termes où se trouvent les inconnues qui suivent les m premières. Si l'on fait successivement $m=2, m=3, m=4, m=5, \dots$ ainsi de suite, on trouvera dans chacune de ces suppositions, les valeurs des indéterminées. La quantité a , par exemple, recevra une valeur pour le cas de deux inconnues, une autre pour le cas de trois inconnues, ou pour le cas de quatre inconnues, ou successivement pour un plus grand nombre. Il en sera de même de l'indéterminée b , qui recevra autant de valeurs différentes que l'on aura effectué de fois l'élimination; chacune des autres indéterminées est pareillement susceptible d'une infinité de valeurs différentes. Or la valeur d'une des inconnues, pour le cas où leur nombre est infini, est la limite vers laquelle tendent continuellement les valeurs qu'elle reçoit au moyen des éliminations successives. Il s'agit donc d'examiner si, à mesure que le nombre des inconnues augmente, chacune des valeurs a, b, c, d, \dots etc. ne converge point vers une limite finie, dont elle approche continuellement.

Supposons que l'on emploie les sept équations suivantes :

$$1 = a + b + c + d + e + f + g$$

$$0 = a + 3^2 b + 5^2 c + 7^2 d + 9^2 e + 11^2 f + 13^2 g$$

$$0 = a + 3^4 b + 5^4 c + 7^4 d + 9^4 e + 11^4 f + 13^4 g$$

$$0 = a + 3^6 b + 5^6 c + 7^6 d + 9^6 e + 11^6 f + 13^6 g$$

$$0 = a + 3^8 b + 5^8 c + 7^8 d + 9^8 e + 11^8 f + 13^8 g$$

$$0 = a + 3^{10} b + 5^{10} c + 7^{10} d + 9^{10} e + 11^{10} f + 13^{10} g$$

$$0 = a + 3^{12} b + 5^{12} c + 7^{12} d + 9^{12} e + 11^{12} f + 13^{12} g.$$

Les six équations qui ne contiennent plus g , sont :

$$\begin{aligned} & (13^2-1^2) + b(13^2-3^2) + c(13^2-5^2) + d(13^2-7^2) + e(13^2-9^2) + f(13^2- \\ & (13^2-1^2) + 3^2 b(13^2-3^2) + 5^2 c(13^2-5^2) + 7^2 d(13^2-7^2) + 9^2 e(13^2-9^2) + 11^2 f(13^2- \\ & (13^2-1^2) + 5^4 b(13^2-3^2) + 5^4 c(13^2-5^2) + 7^4 d(13^2-7^2) + 9^4 e(13^2-9^2) + 11^4 f(13^2- \\ & (13^2-1^2) + 3^6 b(13^2-3^2) + 5^6 c(13^2-5^2) + 7^6 d(13^2-7^2) + 9^6 e(13^2-9^2) + 11^6 f(13^2- \\ & (13^2-1^2) + 3^8 b(13^2-3^2) + 5^8 c(13^2-5^2) + 7^8 d(13^2-7^2) + 9^8 e(13^2-9^2) + 11^8 f(13^2- \\ & (13^2-1^2) + 3^{10} b(13^2-3^2) + 5^{10} c(13^2-5^2) + 7^{10} d(13^2-7^2) + 9^{10} e(13^2-9^2) + 11^{10} f(13^2- \end{aligned}$$

En continuant l'élimination, on obtiendra l'équation finale en a , qui est :

$$a(13^2-1^2)(11^2-1^2)(9^2-1^2)(7^2-1^2)(5^2-1^2)(3^2-1^2) = 13^2 \cdot 11^2 \cdot 9^2 \cdot 7^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2.$$

177.

C'est ainsi qu'on est parvenu à effectuer entièrement les éliminations et à déterminer les coefficients a, b, c, d , etc., de l'équation

$$1 = a \cos. x + b \cos. 3x + c \cos. 5x + d \cos. 7x + e \cos. 9x + \text{etc.}$$

La substitution de ces coefficients, donne l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} = \cos. y - \frac{1}{3} \cos. 3y + \frac{1}{5} \cos. 5y - \frac{1}{7} \cos. 7y \\ + \frac{1}{9} \cos. 9y - \frac{1}{11} \cos. 11y + \text{etc.} \end{aligned}$$

Le second membre est une fonction de y , qui ne change point de valeur quand on donne à la variable y une valeur comprise entre $-\frac{1}{2}\pi$ et $+\frac{1}{2}\pi$. Il serait aisé de prouver que cette série est toujours convergente, c'est-à-dire que, en mettant au lieu de y un nombre quelconque, et en poursuivant le calcul des coefficients, on approche de plus en plus d'une valeur fixe, en sorte que la différence de cette valeur à la somme des termes calculés, devient moindre que toute grandeur assignable. Sans nous arrêter à cette démonstration, que le lecteur peut suppléer, nous ferons remarquer que la valeur fixe, dont on approche continuellement, est $\frac{1}{4}\pi$, si la valeur attribuée à y est comprise entre 0 et $\frac{1}{2}\pi$, mais qu'elle est $-\frac{1}{4}\pi$, si y est comprise entre $\frac{1}{2}\pi$ et $\frac{3}{2}\pi$; car, dans ce second intervalle, chaque terme de la série change de signe. En général la limite de la série est alternativement positive et négative; au reste, la convergence n'est point assez rapide pour procurer une approximation facile, mais elle suffit pour la vérité de l'équation.

L'extrait ci-dessous contient l'écriture des coefficients telle que nous la connaissons.

220.

On voit par-là que les coefficients $abcdef\dots$ etc., qui entrent dans l'équation

$$\frac{1}{2} \pi \varphi x = a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x + \text{etc.}$$

et que nous avons trouvés précédemment par la voie des éliminations successives, sont des valeurs intégrales définies exprimées par le terme général $S(\sin. ix. \varphi x dx)$, i étant le numéro du terme dont on cherche le coefficient. Cette remarque est importante, en ce qu'elle fait connaître comment les fonctions entièrement arbitraires peuvent aussi être développées en séries de sinus d'arcs multiples. En effet, si la fonction φx est représentée par l'ordonnée variable d'une courbe quelconque dont l'abscisse s'étend depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, et si l'on construit sur cette même partie de l'axe la courbe trigonométrique connue, dont l'ordonnée est $y=\sin. x$; il sera facile de se représenter la valeur d'un terme intégral. Il faut concevoir que pour chaque abscisse x , à laquelle répond une valeur de φx , et une valeur de $\sin. x$, on multiplie cette dernière valeur par la première, et qu'au même point de l'axe on élève une ordonnée proportionnelle au produit $\varphi x. \sin. x$. On formera, par cette opération continue, une troisième courbe, dont les ordonnées sont celles de la courbe trigonométrique, réduite proportionnellement aux ordonnées de la courbe arbitraire qui représente φx . Cela posé, l'aire de la courbe réduite étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, donnera la valeur exacte du coefficient de $\sin. x$; et quelle que puisse être la courbe donnée qui répond à φx , soit qu'on puisse lui assigner une équation analytique, soit qu'elle ne dépende d'aucune loi régulière, il est évident qu'elle servira toujours à réduire d'une manière quelconque la courbe trigonométrique; en sorte que l'aire de la courbe réduite a, dans tous les cas possibles, une valeur déterminée qui donne celle du coefficient de $\sin. x$ dans le développement de la fonction. Il en est de même du coefficient suivant b ou $S(\varphi x. \sin. 2x dx)$.

Il faut en général, pour construire les valeurs des coefficients $abcde\dots$ etc., imaginer que les courbes, dont les équations sont

$$y=\sin. x, y=\sin. 2x, y=\sin. 3x, y=\sin. 4x, \text{etc.},$$

ont été tracées pour un même intervalle sur l'axe des x , depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$; et qu'ensuite on a changé ces courbes en multipliant toutes leurs ordonnées par les ordonnées correspondantes d'une même courbe, dont l'équation est $y=\varphi x$. Les équations des courbes réduites, sont:

$$y=\sin. x. \varphi x, y=\sin. 2x. \varphi x, y=\sin. 3x. \varphi x, y=\sin. 4x. \varphi x. \text{etc.}$$

Les aires de ces dernières courbes, prises depuis $x=0$ jusqu'à $x=\pi$, seront les valeurs des coefficients $abcd$ etc., dans l'équation

$$\frac{1}{2} \pi \varphi x = a \sin. x + b \sin. 2x + c \sin. 3x + d \sin. 4x + \text{etc.}$$

Le mémoire de Dirichlet de 1829

Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805–1859) vient à Paris pour étudier les mathématiques en 1822. Il retourne en Allemagne en 1826. Pour survivre à Paris, il est précepteur des enfants du maréchal Fay. C'est durant cette période qu'il rencontre Fourier. Il finit sa carrière en succédant en 1855 à Gauss à Göttingen.

Dirichlet, dans l'article *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*, paru en janvier 1829 en français dans le journal de Crelle, énonce le théorème qui porte son nom : La série de Fourier de f en x converge, sous certaines conditions vers $\frac{1}{2} \left(f(x+0) + f(x-0) \right)$. Ce théorème, qui est le premier théorème sur la convergence des séries de Fourier, eut immédiatement une grande influence non seulement dans la communauté restreinte des chercheurs mais aussi dans l'enseignement. Ce résultat est, par exemple cité et démontré par A. A. Cournot (1801–1877) dans *Leçons sur les fonctions* paru en 1841. Il sera précisé par C. Jordan (1838–1921) dont le nom est associé à ce résultat.

Voici cet article, extrait du journal de Crelle :

158 9. Dirichlet, convergence des séries trigonométriques.

le sens que l'on attache à une pareille substitution même lorsqu'elle est faite dans une fonction d'une loi analytique régulière; on trouve surtout dans le Mémoire qu'il a inséré dans le 19^{ème} cahier du journal polytechnique pag. 567 et suiv. des remarques sur les difficultés que font naître les quantités imaginaires placées sans des signes de fonctions arbitraires. Quoi qu'il en soit de cette première observation, la démonstration de M. Cauchy donne encore lieu à une autre objection qui paraît ne laisser aucun doute sur son insuffisance. La considération des quantités imaginaires conduit l'auteur à un résultat sur le décroissement des termes de la série, qui est loin de prouver que ces termes forment une suite convergente. Le résultat dont il s'agit peut être énoncé comme il suit, en supposant que l'intervalle que l'on considère, s'étende depuis zéro jusqu'à 2π .

„Le rapport du terme dont le rang est n , à la quantité $A \frac{\sin nx}{n}$ (A désignant une constante déterminée dépendante des valeurs extrêmes de la fonction) diffère de l'unité prise positivement d'une quantité qui diminue indéfiniment, à mesure que n devient plus grand.”

De ce résultat et de ce que la série, qui a $A \frac{\sin nx}{n}$ pour terme général, est convergente, l'auteur conclut que la série trigonométrique générale l'est également. Mais cette conclusion n'est pas permise, car il est facile de s'assurer que deux séries (du moins lorsque, comme il arrive ici, les termes n'ont pas tous le même signe) peuvent être l'une convergente, l'autre divergente, quoique le rapport de deux termes de même rang diffère aussi peu que l'on veut de l'unité prise positivement lorsque les termes sont d'un rang très avancé.

On en voit un exemple très simple dans les deux séries, ayant l'une pour terme général $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, et l'autre $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. La première de ces séries est convergente, la seconde au contraire est divergente, car en la soustrayant de la première on obtient la série divergente:

$$-1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \dots \text{ etc.}$$

et cependant le rapport de deux termes correspondans, qui est $1 \pm \frac{1}{\sqrt{n}}$, converge vers l'unité à mesure que n croît.

Je vais maintenant entrer en matière, en commençant par l'examen des cas les plus simples, auxquels tous les autres peuvent être ra-

9. Dirichlet, convergence des séries trigonométriques.

157

9. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données.

(Par M. Lejeune-Dirichlet, prof. de mathém.)

Les séries de sinus et de cosinus, au moyen desquelles on peut représenter une fonction arbitraire dans un intervalle donné, jouissent entre autres propriétés remarquables aussi de celle d'être convergentes. Cette propriété n'avait pas échappé au géomètre illustre qui a ouvert une nouvelle carrière aux applications de l'analyse, en y introduisant la manière d'exprimer les fonctions arbitraires dont il est question; elle se trouve énoncée dans le Mémoire qui contient ses premières recherches sur la chaleur. Mais personne, que je sache, n'en a donné jusqu'à présent une démonstration générale. Je ne connais sur cet objet qu'un travail dû à M. Cauchy et qui fait partie des Mémoires de l'Académie des sciences de Paris pour l'année 1823. L'auteur de ce travail avoue lui-même que sa démonstration se trouve en défaut pour certaines fonctions pour lesquelles la convergence est pourtant incontestable. Un examen attentif du Mémoire cité m'a porté à croire que la démonstration qui y est exposée n'est pas même suffisante pour les cas auxquels l'auteur la croit applicable. Je vais, avant d'entrer en matière, énoncer en peu de mots les objections auxquelles la démonstration de M. Cauchy me paraît sujette. La marche que ce géomètre célèbre suit dans cette recherche exige que l'on considère les valeurs que la fonction $\varphi(x)$ qu'il s'agit de développer, obtient, lorsqu'on y remplace la variable x par une quantité de la forme $u + v\sqrt{-1}$. La considération de ces valeurs semble élargir à la question et l'on ne voit d'ailleurs pas bien ce que l'on doit entendre par le résultat d'une pareille substitution lorsque la fonction dans laquelle elle a lieu, ne peut pas être exprimée par une formule analytique. Je présente cette objection avec d'autant plus de confiance, que l'auteur me semble partager mon opinion sur ce point. Il insiste en effet dans plusieurs de ces ouvrages sur la nécessité de définir d'une manière précise

Crelle's Journal. IV. Bd. 2. Hft.

21

menés. Désignons par h un nombre positif inférieur ou tout au plus égal à $\frac{\pi}{2}$ et par $f(\beta)$ une fonction de β qui reste continue entre les limites 0 et h , j'entends par là une fonction qui a une valeur finie et déterminée pour toute valeur de β comprise entre 0 et h , et en outre telle que la différence $f(\beta + \varepsilon) - f(\beta)$ diminue sans limite lorsque ε devient de plus en plus petit. Supposons encore que la fonction reste toujours positive entre les limites 0 et h et qu'elle décroisse constamment depuis 0 jusqu'à h , en sorte que si p et q désignent deux nombres compris entre 0 et h , $f(p) - f(q)$ ait toujours un signe opposé à celui de $p - q$. Cela posé considérons l'intégrale

$$(1.) \int_0^h \frac{\sin i \beta}{\sin \beta} f(\beta) \partial \beta$$

dans laquelle i est une quantité positive, et voyons ce que cette intégrale deviendra à mesure que i croît. Pour cela partageons la en plusieurs autres prises la première depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = \frac{\pi}{i}$, la seconde depuis $\beta = \frac{\pi}{i}$ jusqu'à $\beta = \frac{2\pi}{i}$, et ainsi de suite, l'avant-dernière ayant pour limites $(r-1)\frac{\pi}{i}$ et $\frac{r\pi}{i}$, et la dernière $\frac{2\pi}{i}$ et h , $\frac{r\pi}{i}$ désignant, le plus grand multiple de $\frac{\pi}{i}$ qui soit contenu dans h . Il est facile de voir que ces intégrales nouvelles, dont le nombre est $r+1$, sont alternativement positives et négatives, la fonction placée sous le signe somme étant évidemment toujours positive entre les limites de la première, négative entre les limites de la seconde et ainsi de suite. Il n'est pas moins facile de se convaincre que chacune d'elles est plus petite que la précédente, abstraction faite du signe. En effet v désignant un entier $< r$, les expressions

$$\int_{(v-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i \beta}{\sin \beta} f(\beta) \partial \beta \quad \text{et} \quad \int_{(v+1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i \beta}{\sin \beta} f(\beta) \partial \beta$$

représentent deux intégrales consécutives. Remplaçons dans la seconde β par $\frac{\pi}{i} + \beta$; elle se changera ainsi en celle-ci :

$$\int_{(v-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\pi}{i}} \frac{\sin(i\beta + \pi)}{\sin(\beta + \frac{\pi}{i})} f(\beta + \frac{\pi}{i}) \partial \beta$$

ou ce qui revient au même :

$$-\int_{(v-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i \beta}{\sin(\beta + \frac{\pi}{i})} f(\beta + \frac{\pi}{i}) \partial \beta.$$

Les deux intégrales qu'il s'agit de comparer ayant ainsi les mêmes limites, on voit sans peine que la seconde a une valeur numérique inférieure à celle de la première. Il suffit pour cela de remarquer qu'il suit de la supposition que nous avons faite sur la fonction $f(\beta)$, que $f(\frac{\pi}{i} + \beta) < f(\beta)$ et que d'un autre côté $\sin(\frac{\pi}{i} + \beta) > \sin \beta$, les arcs β et $\frac{\pi}{i} + \beta$ étant l'un et l'autre moindres que $\frac{\pi}{2}$, car il en résulte l'in-

égalité $\frac{f(\beta)}{\sin \beta} > \frac{f(\beta + \frac{\pi}{i})}{\sin(\beta + \frac{\pi}{i})}$, qui ayant lieu pour toutes les valeurs de β

intermédiaires entre les limites $(v-1)\frac{\pi}{i}$ et $\frac{\pi}{i}$, fait voir que, comme nous l'avons dit, chaque intégrale est plus grande que celle qui la suit, abstraction faite du signe. Cette circonstance a lieu a fortiori, lorsqu'on compare l'avant-dernière à la dernière, attendu que la différence des limites $\frac{r\pi}{i}$ et h de la dernière est inférieure à $\frac{\pi}{i}$ différence commune des limites de toutes les autres.

Examinons actuellement un peu plus en détail l'intégrale du rang v , qui est

$$\int_{(v-1)\frac{\pi}{i}}^{\frac{\pi}{i}} \frac{\sin i \beta}{\sin \beta} f(\beta) \partial \beta.$$

Comme la fonction de β qui se trouve sous le signe intégral est le produit des facteurs $\frac{\sin i \beta}{\sin \beta}$, et $f(\beta)$, qui sont l'un et l'autre des fonctions continues de β entre les limites de l'intégration et comme d'un autre côté le premier de ces facteurs conserve toujours le même signe entre ces mêmes limites, on conclura en vertu d'un théorème connu, que l'intégrale que nous considérons est égale à l'intégrale du premier facteur multipliée par une quantité comprise entre la valeur la plus grande et la valeur la plus petite de l'autre facteur. Le second facteur décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde, la quantité dont il s'agit est comprise entre $f(\frac{(v-1)\pi}{i})$ et $f(\frac{\pi}{i})$. En la désignant par ξ , no-

tre intégrale sera équivalente à

$$\xi_\nu \int_{(\nu-1)\frac{\pi}{2}}^{\frac{\nu\pi}{2}} \frac{\sin i \beta}{\sin \beta} \partial \beta.$$

L'intégrale que renferme encore cette expression, dépend à la fois de ν et de i . Elle est positive ou négative selon que $\nu - 1$ est pair ou impair; nous la désignerons désormais par K_ν , abstraction faite du signe. Nous aurons bientôt besoin de connaître la limite vers laquelle elle converge, lors que, ν restant invariable, i devient de plus en plus grand. Pour découvrir cette limite, remplaçons β par $\frac{\pi}{2} - \gamma$, γ étant une nouvelle variable. Nous aurons ainsi

$$\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin \gamma}{\sin(\frac{\pi}{2} - \gamma)} \partial \gamma.$$

Sous cette forme, il est évident qu'elle converge vers la limite

$$\int_{(\nu-1)\pi}^{\nu\pi} \frac{\sin \gamma}{\gamma} \partial \gamma,$$

que pour abrégé nous désignerons par k_ν , abstraction faite du signe.

On sait que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin \gamma}{\gamma} \partial \gamma$ a une valeur finie et égale à $\frac{\pi}{2}$. Cette intégrale peut être partagée en une infinité d'autres, prises la première depuis $\gamma = 0$ jusqu'à $\gamma = \pi$, la seconde depuis $\gamma = \pi$ jusqu'à $\gamma = 2\pi$, et ainsi de suite. Ces nouvelles intégrales sont alternativement positives et négatives, chacune d'elles a une valeur numérique inférieure à celle de la précédente, et celle du rang ν est k_ν , abstraction faite du signe. La proposition qu'on vient de citer, revient donc à dire que la suite infinie

$$(2.) \quad k_1 - k_2 + k_3 - k_4 + k_5 - \text{etc.}$$

est convergente et a une somme égale à $\frac{\pi}{2}$.

Les termes de cette suite allant toujours en décroissant, il suit d'une proposition connue que la somme de n premiers termes est supérieure ou inférieure à $\frac{\pi}{2}$, selon que n est impair ou pair et que cette somme qu'on peut désigner par S_n , diffère de $\frac{\pi}{2}$ d'une quantité moindre que le terme suivant k_{n+1} .

Reprenons actuellement l'intégrale (1.) et cherchons à déterminer la limite vers laquelle elle converge lorsque i croît indéfiniment. En

faisant ainsi croître le nombre i , les intégrales dans lesquelles nous avons décomposé l'intégrale (1.), changeront sans cesse de valeur en même temps que leur nombre augmentera; il s'agit de connaître le résultat de ce double changement lorsqu'il continue indéfiniment. Pour cela, prenons un nombre entier m (qu'il soit supposé pair pour plus de simplicité) et supposons que le nombre m reste invariable pendant que i croît. Le nombre r , qui croît sans cesse avec i , finira bientôt par surpasser le nombre invariable m , quelque grand qu'on l'ait choisi.

Cela posé, partageons en deux groupes les intégrales dont la somme est équivalente à l'intégrale (1.). Le premier groupe comprendra les m premières de ces intégrales, et le second sera composé de toutes les suivantes. On aura pour la somme du premier groupe:

$$(3.) \quad K_1 \xi_1 - K_2 \xi_2 + K_3 \xi_3 - K_4 \xi_4 + \dots - K_m \xi_m$$

et le second, dont le nombre des termes croît sans cesse avec i , a pour premiers termes:

$$(4.) \quad K_{m+1} \xi_{m+1} - K_{m+2} \xi_{m+2} + \dots$$

Considérons séparément ces deux groupes. Le nombre i croissant indéfiniment la somme (3.) convergera vers une limite qu'il est facile de déterminer. En effet, les quantités $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ qui sont comprises la première entre $f(0)$ et $f(\frac{\pi}{i})$, la seconde entre $f(\frac{\pi}{i})$ et $f(\frac{2\pi}{i})$, et la dernière entre $f(\frac{(m-1)\pi}{i})$ et $f(\frac{m\pi}{i})$ convergent chacune vers la limite $f(0)$, lorsque, m restant invariable, i croît sans cesse. D'un autre côté nous avons vu que les quantités K_1, K_2, \dots, K_m convergent dans les mêmes circonstances respectivement vers les limites k_1, k_2, \dots, k_m . Donc la somme (3.) converge vers la limite $f(0)(k_1 - k_2 + k_3 - \text{etc.} \dots - k_m) = S_m f(0)$, ce qui veut dire que la différence entre la somme (3.) et $S_m f(0)$ finira toujours, abstraction faite du signe, par être constamment inférieure à ω , ω désignant une quantité positive aussi petite que l'on veut.

Considérons pareillement la somme (4.), dont le nombre des termes augmente sans cesse. Ses termes étant alternativement positifs et négatifs, et chacun d'eux ayant une valeur numérique inférieure à celle du terme précédent, comme nous l'avons vu plus haut, en considérant les intégrales que ces termes représentent, il suit d'un principe connu *),

*) Le principe sur lequel nous appuyons peut être énoncé de cette manière. Les lettres A, A', A'', \dots désignant des quantités positives en nombre quelconque et telles que

164 9. Dirichlet, convergence des séries trigonométriques.

que la précédente. On trouvera ainsi, en supposant toujours h positive et tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$, que l'intégrale $\int_0^h \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial\beta$ converge vers la limite $\frac{\pi}{2}$. Il suit de là que l'intégrale $\int_0^h c \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial\beta$, dans laquelle c est une constante positive ou négative, converge vers la limite $c \frac{\pi}{2}$.

Nous avons supposé que la fonction $f(\beta)$ était décroissante et positive entre les limites 0 et h . La première circonstance ayant toujours lieu, c'est-à-dire la fonction étant telle que $f(p) - f(q)$ ait un signe contraire à celui de $p - q$ pour des valeurs p et q comprises entre 0 et h , supposons que $f(\beta)$ ne soit pas toujours positive. On prendra alors une constante positive c assez grande pour que $c + f(\beta)$ conserve toujours un signe positif depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = h$. L'intégrale $\int_0^h f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial\beta$ étant égale à la différence de celles-ci: $\int_0^h [c + f(\beta)] \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial\beta$ et $\int_0^h c \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial\beta$, sa limite sera la différence des limites vers lesquelles convergent ces dernières. Or ces dernières rentrent dans les cas précédemment examinés ($c + f(\beta)$ étant une fonction décroissante et positive) et convergent vers les limites $[c + f(0)] \frac{\pi}{2}$ et $c \frac{\pi}{2}$, d'où il suit que la première converge vers la limite $\frac{\pi}{2} f(0)$.

Considérons actuellement une fonction $f(\beta)$ croissante depuis 0 jusqu'à h . Dans ce cas $-f(\beta)$ sera une fonction décroissante. L'intégrale $\int_0^h -f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial\beta$ convergera donc vers la limite $-\frac{\pi}{2} f(0)$, et par conséquent l'intégrale $\int_0^h f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial\beta$ vers la limite $\frac{\pi}{2} f(0)$.

En réunissant ces résultats, on aura cet énoncé:

„Quelle que soit la fonction $f(\beta)$, pourvu qu'elle reste continue entre les limites 0 et h (h étant positive et tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$), et qu'elle croisse ou qu'elle décroisse depuis la première de ces limites jusqu'à la seconde, l'intégrale $\int_0^h f(\beta) \frac{\sin i\beta}{\sin \beta} \partial\beta$ finira par différer constamment de $\frac{\pi}{2} f(0)$ d'une quantité moindre que tout nombre assignable, lorsqu'on y fait croître i au delà de toute limite positive.”

9. Dirichlet, convergence des séries trigonométriques. 163

que cette somme, quelque soit le nombre de ses termes, est positive comme son premier terme $k_{m+1} \xi_{m+1}$ et a une valeur inférieure à celle de son terme. Or, ce premier terme convergeant vers la limite $k_{m+1} f(0)$, il s'ensuit que la somme (4.) finira toujours par être inférieure à $k_{m+1} f(0)$ augmenté d'une quantité positive ω' aussi petite que l'on veut. En combinant ce résultat avec celui que nous avons obtenu sur la somme (3.), il n'y a qu'un instant, on verra que l'intégrale (1.) qui est la somme des expressions (3.) et (4.) finira toujours par différer de $f(0) S_m$ d'une quantité moindre, abstraction faite du signe, que $\omega + \omega' + f(0) k_{m+1}$, ω et ω' étant deux nombres d'une petitesse arbitraire. D'un autre côté S_m diffère de $\frac{\pi}{2}$ d'une quantité numériquement inférieure à k_{m+1} ; donc l'intégrale finira toujours par différer de $\frac{\pi}{2} f(0)$ d'une quantité moindre que $\omega + \omega' + 2f(0) k_{m+1}$, abstraction faite du signe.

Comme m peut être choisi tellement grand que k_{m+1} soit moindre que toute grandeur donnée, il s'ensuit que l'intégrale (1.) finira toujours, lorsque i croît sans limite, par différer constamment de $\frac{\pi}{2} f(0)$ d'une quantité moindre, abstraction faite du signe, qu'un nombre aussi petit que l'on veut. Il est ainsi prouvé, que l'intégrale (1.) converge vers la limite $\frac{\pi}{2} f(0)$ pour des valeurs croissantes de i .

Supposons maintenant que la fonction $f(\beta)$, au lieu d'être toujours décroissante depuis 0 jusqu'à h , soit constante et égale à l'unité. On pourra dans ce cas déterminer la limite vers laquelle converge l'intégrale (1.) par les mêmes considérations que nous venons d'employer; c'est ce qu'on voit tout de suite, en se rappelant que la démonstration précédente est fondée sur ce que les intégrales dans lesquelles nous avons décomposé l'intégrale (1.), forment une suite décroissante. Or, ce décroissement tient à deux choses, au décroissement du facteur $f(\beta)$ et à l'accroissement du diviseur $\sin \beta$. Si $f(\beta)$ devient un nombre constant, l'accroissement de $\sin \beta$ suffira toujours pour rendre chaque intégrale de la série plus petite

$A > A' > A'' > \dots$, la quantité $A - A' + A'' - A''' + \dots$ est positive et inférieure à A . Cela résulte immédiatement de ce que la quantité précédente peut être mise sous l'une et l'autre de ces deux formes:
 $(A - A') + (A'' - A''') + \dots$;
 $A - (A' - A'') - (A''' - A''') - \dots$.

Il est évident que ce résultat ne serait que légèrement modifié, si la fonction $f(\beta)$ présentait une solution de continuité pour $\beta = g$, et $\beta = h$, c'est-à-dire si $f(g)$ était différent de $f(g + \varepsilon)$ et $f(h)$ de $f(h - \varepsilon)$, ε désignant une quantité infiniment petite et positive, pourvu qu'alors les valeurs $f(g)$ et $f(h)$ ne fussent pas infinies. Il faudrait seulement dans ce cas remplacer $f(0)$ par $f(\varepsilon)$ dans l'énoncé précédent, ce qu'on peut faire encore même quand il n'y a pas de solution de continuité, attendu qu'alors $f(\varepsilon)$ est égale à $f(0)$.

Nous sommes maintenant en état de prouver la convergence des séries périodiques qui expriment des fonctions arbitraires entre des limites données. La marche que nous allons suivre nous conduira à établir la convergence de ces séries et à déterminer en même temps leurs valeurs. Soit $\varphi(x)$ une fonction de x , ayant une valeur finie et déterminée pour chaque valeur de x comprise entre $-\pi$ et π , et supposons qu'il s'agisse de développer cette fonction dans une série de sinus et de cosinus d'arcs multiples de x . La série qui résout cette question, est, comme l'on sait:

$$(7) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \partial \alpha + \frac{1}{\pi} \left\{ \begin{aligned} & \cos x \int \varphi(\alpha) \cos \alpha \partial \alpha + \cos 2x \int \varphi(\alpha) \cos 2\alpha \partial \alpha \dots \\ & \sin x \int \varphi(\alpha) \sin \alpha \partial \alpha + \sin 2x \int \varphi(\alpha) \sin 2\alpha \partial \alpha \dots \end{aligned} \right\}.$$

Les intégrales qui déterminent les coefficients constants, étant prises depuis $\alpha = -\pi$ jusqu'à $\alpha = \pi$, et x désignant une quantité quelconque comprise entre $-\pi$ et π (*Théorie de la Chaleur*, No. 232. et suiv.).

Considérons les $2n+1$ premiers termes de cette série (n étant un nombre entier) et voyons vers quelle limite converge la somme de ces termes, lorsque n devient de plus en plus grand. Cette somme peut être mise sous la forme suivante:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \partial \alpha \left[\frac{1}{2} + \cos(\alpha - x) + \cos 2(\alpha - x) + \dots + \cos n(\alpha - x) \right],$$

ou en sommant la suite de cosinus,

$$(8) \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(\alpha) \frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\alpha-x)}{2 \sin \frac{1}{2}(\alpha-x)} \partial \alpha.$$

Tout se réduit maintenant à déterminer la limite dont cette intégrale approche sans cesse, lorsque n croît indéfiniment. Pour cela nous la partagerons en deux autres prises l'une depuis $-\pi$ jusqu'à x , l'autre depuis x jusqu'à π . Si l'on remplace dans la première α par $x - 2\beta$,

Désignons par g un nombre positif différent de zéro et inférieur à h , et supposons que la fonction reste continue et croisse ou décroisse depuis g jusqu'à h . L'intégrale $\int_0^h f(\beta) \frac{\sin i \beta}{\sin \beta} \partial \beta$ convergera alors vers une limite qu'il est facile de découvrir. On pourrait y parvenir par des considérations analogues à celles que nous avons appliquées à l'intégrale (1.); mais il est plus simple de ramener ce nouveau cas à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède. La fonction n'étant donnée que depuis g jusqu'à h reste entièrement arbitraire pour les valeurs de β comprises entre 0 et g . Supposons que l'on entende par $f(\beta)$, pour les valeurs de β comprises entre 0 et g une fonction continue et croissante ou décroissante depuis 0 jusqu'à g , selon que $f(\beta)$ croît ou décroît depuis g jusqu'à h ; supposons encore que $f(g - \varepsilon)$ diffère infiniment peu de $f(g + \varepsilon)$, si ε décroît sans limite; ayant satisfait d'une manière quelconque à ces conditions, ce qu'on peut toujours faire d'une infinité de manières, la fonction $f(\beta)$ remplira depuis 0 jusqu'à h les conditions exprimées dans l'énoncé (5.). Les intégrales

$$\int_0^g f(\beta) \frac{\sin i \beta}{\sin \beta} \partial \beta \quad \text{et} \quad \int_0^h f(\beta) \frac{\sin i \beta}{\sin \beta} \partial \beta$$

convergeront donc l'une et l'autre vers la limite $\frac{\pi}{2} f(0)$. D'où l'on conclut que l'intégrale $\int_0^h f(\beta) \frac{\sin i \beta}{\sin \beta} \partial \beta$ qui est la différence des précédentes, a zéro pour limite.

Ce nouveau résultat peut être réuni en un seul énoncé avec celui que nous avons obtenu plus haut. On aura ainsi:

„La lettre h désignant une quantité positive tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$, et g une quantité également positive et en outre inférieure à h , l'intégrale

$$\int_0^h f(\beta) \frac{\sin i \beta}{\sin \beta} \partial \beta$$

(6.) dans laquelle la fonction $f(\beta)$ est continue entre les limites de l'intégration et a une marche toujours croissante ou toujours décroissante depuis $\beta = g$ jusqu'à $\beta = h$, convergera vers une certaine limite, lorsque le nombre i devient de plus en plus grand. Cette limite est égale à zéro, le seul cas excepté où g a une valeur nulle, dans ce cas elle a la valeur $\frac{\pi}{2} f(0)$.”

Elle a ainsi une forme analogue à celle de la précédente; en la décomposant comme elle en plusieurs autres, on verra qu'elle converge vers la limite zéro, le seul cas excepté, où $\frac{1}{2}(\pi + x)$ a une valeur nulle, c'est-à-dire lorsque $x = -\pi$; dans ce cas elle approche continuellement de la limite $\varphi(\pi - \varepsilon)$, ε ayant toujours la même signification. En résumé tout ce qui précède, on trouvera que la seconde des intégrales (10.) est nulle lorsque $x = \pi$, qu'elle converge vers la limite $\frac{\pi}{2}[\varphi(\pi - \varepsilon) + \varphi(-\pi + \varepsilon)]$ lorsque $x = -\pi$, et que dans tous les autres cas elle approche continuellement de la limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x + \varepsilon)$. La première des intégrales (9.) est entièrement analogue à la seconde; en y appliquant des considérations semblables, on trouvera qu'elle est nulle lorsque $x = -\pi$, qu'elle converge vers la limite $\frac{\pi}{2}[\varphi(\pi - \varepsilon) + \varphi(-\pi + \varepsilon)]$ lorsque $x = \pi$ et qu'elle converge vers la limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x - \varepsilon)$. Connaissant ainsi les limites de chacune des intégrales (9.), il est facile de trouver la limite dont l'intégrale (8.) approche sans cesse, lorsque n devient de plus en plus grand; il suffit pour cela de se rappeler que cette intégrale est égale à la somme des intégrales (9.) divisée par π . Or, l'intégrale (8.) étant équivalente à la somme des $2n + 1$ premiers termes de la série (7.), il est prouvé que cette série est convergente et l'on trouve au moyen des résultats précédents qu'elle est égale à $\frac{1}{2}[\varphi(x + \varepsilon) - \varphi(x - \varepsilon)]$ pour toute valeur de x comprise entre $-\pi$ et π , et que pour chacune des valeurs extrêmes π et $-\pi$, elle est égale à $\frac{1}{2}[\varphi(\pi - \varepsilon) + \varphi(-\pi + \varepsilon)]$.

L'exposé précédent embrasse tous les cas; il se simplifie lorsque la valeur de x qu'on considère n'est pas une de celles qui présentent une solution de continuité. En effet les quantités $\varphi(x + \varepsilon)$ et $\varphi(x - \varepsilon)$ étant alors l'une et l'autre équivalentes à $\varphi(x)$, on voit que la série a pour valeur $\varphi(x)$.

Les considérations précédentes prouvent d'une manière rigoureuse que, si la fonction $\varphi(x)$, dont toutes les valeurs sont supposées finies et déterminées, ne présente qu'un nombre fini de solutions de continuité entre les limites $-\pi$ et π , et si en outre elle n'a qu'un nombre déterminé de maxima et de minima entre ces mêmes limites, la série (7.), dont les coefficients sont des intégrales définies dépendantes de la fonction $\varphi(x)$ est convergente et a une valeur généralement exprimée par

et dans la seconde α par $x + 2\beta$, β étant une nouvelle variable, ces deux intégrales se changeront en celles-ci, abstraction faite du facteur $\frac{1}{\pi}$:

$$(9.) \int_0^{k(\pi+x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} \varphi(x-2\beta) d\beta \text{ et } \int_0^{k(\pi-x)} \frac{\sin(2n+1)\beta}{\sin\beta} \varphi(x+2\beta) d\beta.$$

Considérons la seconde de ces deux intégrales. La quantité x étant inférieure ou tout au plus égale à π , abstraction faite du signe, $\frac{1}{2}(\pi - x)$ ne pourra tomber hors des limites 0 et π . Si $\frac{1}{2}(\pi - x) = 0$, ce qui a lieu lorsque $x = \pi$, l'intégrale est nulle quelque que soit n ; dans tous les autres cas elle convergera pour des valeurs croissantes de n vers une limite que nous allons déterminer. Supposons d'abord $\frac{1}{2}(\pi - x)$ inférieure ou tout au plus égale à $\frac{\pi}{2}$, et remarquons que la fonction $\varphi(x + 2\beta)$ peut présenter plusieurs solutions de continuité depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = \frac{1}{2}(\pi - x)$, et qu'elle peut aussi avoir plusieurs maxima et minima dans ce même intervalle. Désignons par $l, l', l'', \dots, l^{(v)}$ rangées selon l'ordre de leur grandeur, les différentes valeurs de β , qui présentent l'une ou l'autre de ces circonstances, et décomposons notre intégrale en plusieurs autres prises respectivement entre les limites 0 et l, l' et $l'', \dots, l^{(v)}$ et $\frac{1}{2}(\pi - x)$. Toutes ces intégrales se trouveront dans le cas de l'énoncé (6.). Elles convergeront donc toutes vers la limite zéro à mesure que n croît, à l'exception de la première qui converge vers la limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x + \varepsilon)$, ε étant un nombre infiniment petit et positif. Si $\frac{1}{2}(\pi - x)$ était supérieure à $\frac{\pi}{2}$, ce qui arrivera lorsque x a une valeur négative, on partagerait l'intégrale en deux autres, l'une prise depuis $\beta = 0$ jusqu'à $\beta = \frac{1}{2}\pi$, l'autre depuis $\frac{1}{2}\pi$ jusqu'à $\beta = \frac{1}{2}(\pi - x)$. La première de ces nouvelles intégrales se trouvera dans le même cas que celle que nous venons de considérer, elle convergera donc vers la limite $\frac{\pi}{2}\varphi(x + \varepsilon)$. Quant à la seconde, on peut la changer en celle-ci, en y remplaçant β par $\pi - \gamma$, γ étant une nouvelle variable:

$$\int_0^{k(\pi+x)} \varphi(x + 2\pi - 2\gamma) \frac{\sin(2n+1)(\pi-\gamma)}{\sin(\pi-\gamma)} d\gamma,$$

ou ce qui revient au même, n étant un entier:

$$\int_{\frac{1}{2}(\pi+x)}^{\pi} \varphi(x + 2\pi - 2\gamma) \frac{\sin(2n+1)\gamma}{\sin\gamma} d\gamma. \quad 22^*$$

$\frac{1}{2}[\varphi(x+\varepsilon) + \varphi(x-\varepsilon)]$, où ε désigne un nombre infiniment petit. Il nous resterait à considérer les cas où les suppositions que nous avons faites sur le nombre des solutions de continuité et sur celui des valeurs maxima et minima cessent d'avoir lieu. Ces cas singuliers peuvent être ramenés à ceux que nous venons de considérer. Il faut seulement pour que la série (8.) présente un sens lorsque les solutions de continuité sont en nombre infini, que la fonction $\varphi(x)$ remplisse la condition suivante.

Il est nécessaire qu'alors la fonction $\varphi(x)$ soit telle que, si l'on désigne par a et b deux quantités quelconques comprises entre $-\pi$ et π , on puisse toujours placer entre a et b d'autres quantités r et s assez rapprochées pour que la fonction reste continue dans l'intervalle de r à s . On sentira facilement la nécessité de cette restriction en considérant que les différents termes de la série sont des intégrales définies et en remontant à la notion fondamentale des intégrales. On verra alors que l'intégrale d'une fonction ne signifie quelque chose qu'autant que la fonction satisfait à la condition précédemment énoncée. On aurait un exemple d'une fonction qui ne remplit pas cette condition, si l'on supposait $\varphi(x)$ égale à une constante déterminée c lorsque la variable x obtient une valeur rationnelle, et égale à une autre constante d , lorsque cette variable est irrationnelle. La fonction ainsi définie a des valeurs finies et déterminées pour toute valeur de x , et cependant on ne saurait la substituer dans la série, attendu que les différentes intégrales qui entrent dans cette série, perdraient toute signification dans ce cas. La restriction que je viens de préciser, et celle de ne pas devenir infinie, sont les seules auxquelles la fonction $\varphi(x)$ soit soumise et tous les cas qu'elles n'excluent pas peuvent être ramenés à ceux que nous avons considérés dans ce qui précède. Mais la chose, pour être faite avec toute la clarté qu'on peut désirer exige quelques détails liés aux principes fondamentaux de l'analyse infinitésimale et qui seront exposés dans une autre note, dans laquelle je m'occuperai aussi de quelques autres propriétés assez remarquables de la série (7.).

Berlin, Janvier 1829.

Les successeurs immédiats

Riemann (1826–1866), postulant à l'université de Göttingen, présente en 1854 deux mémoires qui ne seront publiés qu'après sa mort : le premier mémoire concerne les séries trigonométriques⁴. Ce mémoire comporte une partie historique de la question, une partie dans laquelle Riemann définit son intégrale (en lien avec les séries trigonométriques puisque les coefficients s'obtiennent par intégration) et une partie dans laquelle il étudie les fonctions exprimables comme somme de séries trigonométriques.

Le mémoire de Riemann a ouvert de nombreuses pistes (il semblerait que K. Weierstrass (1815–1897) pensait que Riemann avait conscience qu'il existe des fonctions continues sans dérivée). Le mémoire de Riemann, publié en 1867 de manière posthume par R. Dedekind (1831–1916), a eu une grande influence. En premier lieu sur Georg Cantor (1845–1918) dont les recherches dans les années 1870–72 sur les séries trigonométriques le menèrent à la théorie des ensembles.

⁴le second choisi par Gauss est *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie*

En conclusion, en nous limitant aux travaux de la première moitié du XIX^e siècle, ne sont apparus que des problèmes de convergence et de représentation dans le cadre des mathématiques et des problèmes globaux dans le cadre de la physique. La recherche d'un cadre général pour la théorie des séries trigonométriques ainsi que d'autres préoccupations comme les équations intégrales ont conduit à l'analyse fonctionnelle et à la topologie générale. Du point de vue de la physique, l'approche de Fourier ne rendant pas compte des phénomènes de localisation, la théorie des ondelettes répond à cette demande.

Bibliographie

- Bourbaki N., *Histoire des mathématiques*, Masson, 1984
- Dieudonné J., *History of functional analysis*, north-holland, 1981
- Dirichlet P. G., *Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction entre des limites données*, in *Journal de Crelle* 4, 157-169.
- Du Bois-Reymond P., *Untersuchung über die konvergenz und divergenz der Fourierschen darstellungsformeln*.
- Kahane J. P., Lemarié-Rieusset P. G., *Séries de Fourier et ondelettes*, Cassini, 1998
- Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford university press, 1972.
- Israel G., *La mathématisation du réel*, Science ouverte, Seuil, 1996
- Lebesgue H., *Leçons sur les séries trigonométriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1906
- Riemann B., *Œuvres complètes*, trad. Laugel, Paris, Gauthier-Villars, 1898.

Presses Universitaires de Franche-Comté
Université de Franche-Comté
2 Place Saint-Jacques
25030 BESANCON CEDEX
Tél : 03 81 66 59 70
Courriel : pufc@univ-fcomte.fr
Site web : <http://pufc.univ-fcomte.fr>

Maquette et mise en page François Pétiard (IREM)

Imprimerie : Reprographie du
Département de Mathématiques

Dépôt légal 3^e trimestre 2004

**Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques
de Franche-Comté**

Département de Mathématiques. UFR Sciences et Techniques.

16 route de Gray. 25030 BESANCON CEDEX

Tél. : 03 81 66 62 25 - Fax : 03 81 66 62 34

Courriel : iremfc@math.univ-fcomte.fr

Site web : <http://www-irem.univ-fcomte.fr>