Candide face à l'infiniment petit :
une introduction de la dérivation avec des textes anciens.

Frédéric Métin,
Lycée "Le Castel", Dijon.

Les Mathématiques et les Lettres

Les programmes des diverses disciplines des lycées ne sont pas contradictoires : on pense bien sûr que les mathématiques et les sciences physiques se rencontrent naturellement, à ceci près que la notion de "discipline de service" imposée il y a quelques années par les penseurs de l'Éducation Nationale induit un rapport de dépendance déplaisant. Et si la physique était plutôt une partie des mathématiques ? À moins que ce ne soit le contraire… L'introduction d'une perspective historique dans le cours de mathématiques rapproche étonnamment ces dernières de la philosophie et des Lettres, car certains auteurs majeurs des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles furent des phares de toutes ces disciplines : qu'on pense à Descartes, à Pascal, à Leibniz, etc. D'un point de vue scolaire, les liens sont encore plus évidents.

Les élèves sont les mêmes du cours de Français au cours de maths, les deux se suivant même parfois ; nous trouvons donc nos élèves devant la leçon sur le second degré l'esprit occupé par des vers de Musset (que l'on peut prendre aussi au second degré...), ou au contraire, écoutant les récits de Voltaire en craignant de se faire interroger l'heure suivante sur des exercices qu'ils n'ont pas faits ! Est-ce que j'exagère vraiment ?

Les thèmes des cours de mathématiques et de Français du lycée ont plus d'un point commun : l'époque, le passage de l'âge baroque au siècle des Lumières, la vision du monde qui se dégage de la tutelle divine, la place de plus en plus grande accordée à la raison, la modernité. L'introduction au calcul différentiel se prête particulièrement bien au travail interdisciplinaire ; la naissance du calcul différentiel est en effet l'un de ces thèmes fascinants auxquels les historiens s'intéressent en tant que révolutions scientifiques, d'autant plus que cette révolution se fit dans la durée mais sans douceur, donnant lieu à l'une des plus célèbres querelles de paternité de l'histoire des sciences[1], entre partisans de Newton (dont Voltaire ne fut pas le moins virulent) et partisans de Leibniz (en particulier quelques Bernoulli et le Marquis de L'Hospital).

Il semble que les deux grands savants ont inventé presque en même temps le concept de dérivée (ou quelque chose d'approchant) au tournant du XVIII^e^ siècle ; mais Newton en a tiré plus de crédit pour de multiples raisons, dont en particulier le côté visionnaire et révolutionnaire de sa théorie de l'attraction universelle. En effet, la compréhension du fondement mathématique de cette nouvelle vision du monde passait par celle de sa *théorie des fluxions* (ce qui n'est pas une mince affaire...), alors que la compréhension du travail de Leibniz ne devait sûrement être indispensable qu'aux seuls spécialistes. En outre, les questions métaphysiques n'interfèrent pas sur les questions scientifiques chez Newton (elles se posent ensuite, et permettent d'intéressantes digressions, même pour ceux qui n'ont rien compris !), alors que chez Leibniz elles en sont le fondement même, et sa théorie des différentielles vaut pour elle-même, ce qui ne favorise pas sa diffusion auprès du grand

[1] Une querelle de ce type peut parfaitement se retrouver entre deux enseignants, puisque les littéraires auront forcément tendance à penser comme Voltaire et que les scientifiques défendront plutôt Leibniz...

public. En France au siècle des Lumières, il fallait être newtonien (ou le devenir), c'était la modernité, la route vers cet aboutissement de la science triomphante. Il fallait donc défendre la priorité newtonienne, face aux prétentions continentales si marquées par la philosophie scolastique nettement moins "excitante", il fallait défendre l'Angleterre des empiristes, modèle de liberté et de vie démocratique. Pourtant, la notation que nous employons encore est bien celle de Leibniz et de L'Hospital, et nos réflexions sur le *dx* sont nées de leurs travaux. Notre connaissance semble bien ténue, ne commettrions nous pas une injustice *à la Voltaire* ?

Voltaire (et Émilie…)

Au vu de ces problèmes, le professeur de mathématiques ne peut que réagir à la présentation "voltairienne" qui est faite de Leibniz, à travers l'étude de Candide et du personnage de Pangloss. La mention qui en est faite n'est qu'une allusion souvent superficielle au ridicule des théories métaphysiques du savant allemand ou de son disciple Wolff, vues à travers la plume acide de notre si brillant écrivain (c'est le fameux "Tout va pour le mieux dans le meilleur des mondes"). Il ne devait pas faire bon être l'objet des attaques de Monsieur Arouet ! Ce dernier est certes un des plus grands génies de notre littérature (il suffit de compulser le catalogue de la Bibliothèque Nationale pour comprendre à quel point il fut prolixe[2]), mais on pourrait lui reprocher de manier le verbe plus vite que son ombre, d'avoir une fâcheuse tendance à se prendre pour un inquisiteur[3] ! Ses attaques contre Leibniz ne sont pas totalement infondées, si l'on considère qu'il est peut-être question de la façon dont Dieu est présent au monde, si le combat oppose en fait deux conceptions du divin : le "monarque de la plus parfaite des républiques"[4] contre le "Grand Architecte" (Voltaire était-il libre-penseur ?)

Mais mettez-vous à la place du pauvre professeur de mathématiques : puisque de nos jours tout se sait, il se trouve forcément un des élèves pour avoir déjà entendu parler de Leibniz comme fondateur avec (ou contre) Newton du calcul différentiel, c'est en effet une idée devenue assez commune et très peu nombreux sont ceux qui attribuent un rôle à Pascal ou à la théorie des indivisibles, mais c'est une autre histoire... Une question de légitimité se pose donc assez vite : comment défendre un cours si important du programme de première, alors que son inventeur est ridiculisé ? Le professeur de Français mettant le cours de mathématiques en danger, il faut protéger ce dernier ! Avant d'adopter un point de vue tranché sans connaître le fond du problème (à la manière d'un spectateur des "Guignols de l'info" qui voterait pour un candidat en pensant à sa marionnette), il faut écouter les opinions des défenseurs (ou des accusateurs selon les cas).

Voici quel était mon état d'esprit en m'essayant à un exercice tout nouveau : la lecture de textes "littéraires" en classe. Il s'agissait avant tout 1) de réhabiliter Leibniz dans l'esprit de mes élèves, 2) de leur apporter des arguments en vue de leur bac de Français, 3) d'introduire le calcul différentiel sur le terrain des infiniment petits en abordant directement leur statut, le fond du problème étant souvent de savoir de quoi on parle, et 4) de créer des liens entre les cours de Français et de Mathématiques.

---

[2] Un volume entier est consacré à ses œuvres, si vous comprenez encore ce terme qui fait référence au catalogue papier et non pas "en ligne".

[3] Dur, dur d'écraser l'infâme dans ces conditions !

[4] *Discours de Métaphysique*, § XXXVI,

Les courts textes qui suivent sont extraits de la préface à la deuxième édition française de l'ouvrage d'Isaac Newton *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (les principes mathématiques de la philosophie naturelle, c'est-à-dire de la physique). Fait remarquable pour cette époque, la traduction a été effectuée par Émilie du Châtelet, qui fut l'une des femmes les plus importantes dans la vie de Voltaire : elle était en effet sa maîtresse "officielle" (et lui son "officiel" amant), puisqu'ils ont vécu ensemble cinq ans au château de Cirey, près de Chaumont (le mari consentant habitait pendant ce temps à Semur-en-Auxois, où il rencontra sans doute Buffon, autre grand traducteur de Newton, le monde est petit !) Cette édition parut après la mort d'Émilie, que Voltaire avait délaissée, mais peut-on mettre en doute les accents de sincère tristesse qui se dégagent de ces écrits ? C'est en tout cas l'occasion d'arrimer les dérivées à un contenu imaginaire et affectif.

La préface commence par un hommage appuyé aux talents d'Émilie, qui, <u>en plus</u> est UNE FEMME !

> *Cette traduction que les plus savans Hommes de France devoient faire, & que les autres doivent étudier, une femme l'a entreprise & achevée à l'étonnement & à la gloire de son pays. Gabrielle-Emilie de Breteuil, Marquise du Châtelet, est l'Auteur de cette Traduction, devenue nécessaire à tous ceux qui voudront acquérir ces profondes connoissances, dont le monde est redevable au grand Newton.*

N'oublions pas que Voltaire est profondément newtonien, qu'il voit en ce savant anglais le génie parachevant la physique, frappant un grand coup contre la métaphysique cartésienne et la délirante théorie des tourbillons (qui, soit dit en passant, n'est peut-être pas si délirante que ça : qui sait comment a été reçue la théorie atomique au temps d'Epicure et de Démocrite ?) Il écrit par exemple dans une *Lettre sur la Physique de Newton*, également reproduite dans les *Principia* :

Déja ces tourbillons, l'un par l'autre pressés,
Se mouvant sans espace, & sans régles entassés,
Ces fantômes sçavans à mes yeux disparoissent […]
Vers un centre commun tout gravite à la fois.
Ce ressort si puissant, l'âme de la nature,
Etoit enseveli dans une nuit obscure
Le compas de Newton*, mesurant l'Univers,*
Leve enfin ce grand voile, & les Cieux sont ouverts.

Mais revenons à la préface des *Principes*. Pour célébrer le grand génie, Newton, il faut donc attaquer Leibniz ; le coup arrive quelques lignes après , avec cependant une précaution : la Marquise a déjà traduit un livre de ce dernier...

> *[...] On a vu deux prodiges : l'un que Newton ait fait cet Ouvrage ; l'autre qu'une Dame l'ait traduit & l'ait éclairci.*
>
> *Ce n'était pas son coup d'essai, elle avoit auparavant donné au Public une explication de la Phylosophie de Léibnitz sous le titre d'Institutions de Physique, adressées à son fils, auquel elle avoit enseigné elle-même la Géométrie.*
>
> *Le discours préliminaire qui est à la tête de ses Institutions est un chef d'œuvre de raison & d'éloquence : elle a répandu dans le reste du Livre une méthode & une clarté que Léibnitz n'eut jamais, & dont ses idées ont besoin, soit qu'on veuille seulement les entendre, soit qu'on veuille les réfuter.*

Après avoir rendu les imaginations de Léibnitz intelligibles, son esprit qui avoit acquis encore de la force & de la maturité par ce travail même, comprit que cette Métaphysique si hardie, mais si peu fondée, ne méritoit pas ses recherches. Son âme étoit faite pour le sublime, mais pour le vrai. Elle sentit que les monades et l'harmonie préétablie devoient être mises avec les trois élémens de Descartes, & que des systêmes qui n'étoient qu'ingénieux, n'étoient pas dignes de l'occuper. Ainsi, après avoir eu le courage d'embellir Léibnitz, elle eut celui de l'abandonner : courage bien rare dans quiconque a embrassé une opinion, mais qui ne coûta guères d'efforts à une âme qui étoit passionnée pour la vérité.

Voilà certainement la quintessence du talent allié à la plus profonde perfidie : quel style, quels renversements ! Et ce n'est pas fini, les grands penseurs en prennent tous pour leur grade, la bonne foi s'effaçant devant l'efficacité du trait.

S'il y avoit encore quelqu'un d'assez absurde pour soutenir la matière subtile & la matière cannellée, pour dire que la terre est un soleil encrouté, que la lune a été entraînée dans le tourbillon de la terre, que la matière subtile fait la pesanteur, & toutes ces autres opinions romanesques substituées à l'ignorance des Anciens, on diroit : Cet homme est Cartésien. S'il croyoit aux monades, on diroit : Il est Léibnitzien ; mais on ne dira pas de celui qui sçait les élémens d'Euclide, Qu'il est Euclidien : ni de celui qui sçait d'après Galilée en quelle proportion les corps tombent, Qu'il est Galiléiste. Aussi en Angleterre ceux qui ont appris le calcul infinitésimal, qui ont fait les expériences de la lumiére, qui ont appris le loix de la gravitation, ne sont point appellés Newtoniens : c'est le privilège de l'erreur de donner son nom à une Secte.

Si Platon avoit trouvé des vérités, il n'y eût point eu de Platonicien, & tous les hommes auraient appris peu à peu ce que Platon avoit enseigné ; mais parce que dans l'ignorance qui couvre la terre, les uns s'attachoient à une erreur, les autres à une autre, on combattoit sous différents étendards : il y avoit des Péripatéticiens, des Platoniciens, des Epicuriens, des Zénonistes, en attendant qu'il y eût des sages.

On ne peut tout de même pas reprocher à Voltaire cette dernière idée, surtout au siècle des Lumières, alors qu'a déjà commencé l'édition de l'*Encyclopédie* et que l'on croit au triomphe prochain de la Raison sur l'obscurantisme, au bonheur issu du contrat social. Néanmoins, Voltaire, au milieu de cette raison triomphante, ajoute la touche de l'écrivain :

C'étoit un avantage qu'elle eut sur Newton, d'unir à la profondeur de la Philosophie, le goût le plus vif & le plus délicat pour les Belles Lettres.

On ne peut que plaindre un Philosophe réduit à la sécheresse des vérités, & pour qui les beautés de l'imagination & du sentiment sont perdues

Pour qui est ce dernier trait ? Pas si simple, comme on va le voir, puisque Leibniz, même s'il n'est pas très amusant, sait écrire, aime la beauté et chérit l'imagination.

D'autres textes sont intéressants pour cerner un peu l'état d'esprit de Voltaire, on pourrait même en proposer l'étude aux élèves, mais je ne les connaissais pas encore pour les aborder en classe. Par exemple, dans *Micromegas*,[5] on assiste à une discussion de philosophes :

[5] *Recueil des romans de Monsieur de Voltaire, contenant : Babouc, Memnon, Micromégas, le Songe de Platon, les Voyages de Scarmentado, Zadig et Candide...* Paris, 1764.

Enfin Micromégas leur dit : "Puisque vous savez si bien ce qui est hors de vous, sans doute vous savez encore mieux ce qui est en dedans. Dites-moi ce que c'est que votre âme, et comment vous formez vos idées." Les philosophes parlèrent tous à la fois comme auparavant ; mais ils furent tous de différents avis. Le plus vieux citait Aristote, l'autre prononçait le nom de Descartes ; celui-ci, de Malebranche ; cet autre, de Leibnitz ; cet autre, de Locke. Un vieux péripatéticien dit tout haut avec confiance : "L'âme est une entéléchie et une raison par qui elle a la puissance d'être ce qu'elle est. C'est ce que déclare expressément Aristote, page 633 de l'édition du Louvre." Il cita le passage. "je n'entends pas trop bien le grec, dit le géant. - Ni moi non plus, dit la mite philosophique. - Pourquoi donc, reprit le Sirien, citez-vous un certain Aristote en grec ? - C'est, répliqua le savant, qu'il faut bien citer ce qu'on ne comprend point du tout dans la langue qu'on entend le moins.

Le cartésien prit la parole et dit : "L'âme est un esprit pur qui a reçu dans le ventre de sa mère toutes les idées métaphysiques, et qui, en sortant de là, est obligée d'aller à l'école, et d'apprendre tout de nouveau ce qu'elle a si bien su et qu'elle ne saura plus. - Ce n'était donc pas la peine, répondit l'animal de huit lieues, que ton âme fût si savante dans le ventre de ta mère, pour être si ignorante quand tu aurais de la barbe au menton. Mais qu'entends-tu par esprit ? - Que me demandez-vous là ? dit le raisonneur ; je n'en ai point d'idée ; on dit que ce n'est pas la matière. - Mais sais-tu au moins ce que c'est que la matière ? - Très bien, lui répondit l'homme. Par exemple cette pierre est grise, est d'une telle forme, a ses trois dimensions ; elle est pesante et divisible. - Eh bien ! dit le Sirien, cette chose qui te paraît divisible, pesante et grise, me diras-tu bien ce que c'est ? Tu vois quelques attributs ; mais le fond de la chose, le connais-tu ? - Non, dit l'autre. –Tu ne sais donc point ce que c'est que la matière.

Alors M. Micromégas, adressant la parole à un autre sage qu'il tenait sur son pouce, lui demanda ce que c'était que son âme, et ce qu'elle faisait. "Rien du tout, dit le philosophe malebranchiste ; c'est Dieu qui fait tout pour moi ; je vois tout en lui, je fais tout en lui ; c'est lui qui fait tout sans que je m'en mêle. - Autant vaudrait ne pas être, reprit le sage de Sirius. - Et toi, mon ami, dit-il à un leibnitzien qui était là, qu'est-ce que ton âme ? - C'est, répondit le leibnitzien, une aiguille qui montre les heures pendant que mon corps carillonne ; ou bien si vous voulez, c'est elle qui carillonne pendant que mon corps montre l'heure ; ou bien mon âme est le miroir de l'univers, et mon corps est la bordure du miroir : tout cela est clair.

Et bien fait pour tous ceux qui accordent crédit à Malebranche, Descartes ou Leibniz ! Nous trouvons Voltaire moins persifleur dans ses *Élémens de la philosophie de Monsieur de Newton*,[6] par lesquels il a cherché à vulgariser la nouvelle science de l'attraction en Europe. La première partie est consacrée à la metapysique, le premier chapitre est intitulé "De Dieu", ce qui montre bien certains fondements philosophiques de la physique du XVIII^e siècle, et la discussion porte encore sur une comparaison entre la pensée de Newton et celle de Descartes :

Toute la philosophie de Newton conduit nécessairement à la connaissance d'un Être suprême, qui a tout créé, tout arrangé librement. Car, si le monde est fini, s'il y a du vide, la matière n'existe donc pas nécessairement ; elle a donc reçu l'existence d'une cause libre. Si la nature gravite, comme cela est démontré, elle ne paraît pas graviter

[6] Parmi les nombreuses éditions, nous prenons nos extraits dans les *Œuvres complètes*, Physique, Philosophie de Newton, tome vingt-troisième, Paris, chez P. Plancher, éditeur, rue Poupée, n° 7, 1818.

de sa nature, ainsi qu'elle est étendue de sa nature ; elle a donc reçu de Dieu la gravitation. Si les planètes tournent en un sens plutôt qu'en un autre, dans un espace non résistant, la main de leur créateur a donc dirigé leurs cours en ce sens avec une liberté absolue.

Il s'en faut bien que les prétendus principes physiques de Descartes conduisent ainsi l'esprit à la connaissance de son créateur. A Dieu ne plaise que, par une calomnie horrible, j'accuse ce grand homme d'avoir méconnu la suprême Intelligence à laquelle il devait tant, et qui l'avait élevé de presque tous les hommes de ce siècle ! Je dis seulement que l'abus qu'il a fait quelquefois de son esprit, a conduit ses disciples à des précipices dont le maître était fort éloigné : je dis que le système cartésien a produit celui de Spinosa ; je dis que j'ai connu beaucoup de personnes que le cartésianisme a conduites à n'admettre d'autre Dieu que l'immensité des choses, et que je n'ai vu au contraire aucun newtonien qui ne fût théiste dans le sens le plus rigoureux.

Puis au chapitre VII, c'est le tour de Leibniz ; cette-fois, il est question de l'âme ;on pourra comparer avec l'extrait de *Micromegas* ci-dessus:

Newton ne s'était point fait de système sur la manière dont l'âme est unie au corps, et sur la formation des idées. Ennemi des systèmes, il ne jugeait de rien que par analyse ; et lorsque ce flambeau lui manquait, il savait s'arrêter.

Il y a eu jusqu'ici dans le monde quatre opinions sur la formation des idées : la première est celle de presque toutes les anciennes nations qui, n'imaginant rien au-delà de la matière, ont regardé nos idées dans notre entendement comme l'impression du cachet sur la cire. Cette opinion confuse était plutôt un instinct grossier qu'un raisonnement. Les philosophes qui ont voulu ensuite prouver que la matière pense par elle-même, ont erré bien davantage […]

Le second sentiment et le plus généralement reçu est celui qui, établissant l'âme et le corps comme deux êtres qui n'ont rien de commun, affirme cependant que Dieu les a créés pour agir l'un sur l'autre. La seule preuve qu'on ait de cette action est l'expérience que chacun croit en avoir […]

Le troisième système est celui des causes occasionnelles de Descartes, poussé encore plus loin par Malebranche. Il commence par supposer que l'âme ne peut avoir aucune influence sur le corps, et dès-là il s'avance trop ; car de ce que l'influence de l'âme sur le corps ne peut être conçue, il ne s'ensuit point du tout qu'elle soit impossible […]

Le quatrième sentiment est celui de l'harmonie préétablie de Leibnitz. Dans son hypothèse, l'âme n'a aucun commerce avec son corps ; ce sont deux horloges que Dieu a faites, qui ont chacune un ressort, et qui vont un certain temps dans une correspondance parfaite ; l'une montre les heures, l'autre sonne. L'horloge qui montre les heures ne la montre pas parce que l'autre sonne ; mais Dieu a établi leur mouvement de façon que l'aiguille et la sonnerie se rapportent continuellement. […] *L'union de l'âme et du corps est ici une chose très-superflue. Mais le reste du système de Leibnitz est bien plus extraordinaire ; on en peut voir les fondemens dans le Supplément aux actes de Leipsick, tome VII ; et on peut consulter les commentaires que plusieurs Allemands en ont faits amplement avec une méthode toute géométrique.*

Selon Leibnitz, il y a quatre sortes d'êtres simples, que l'on nomme monades, comme on le verra au chapitre IX. On ne parle ici que de l'espèce de monade, qu'on appelle notre âme. L'âme, dit-il, est une concentration, un miroir vivant de tout l'univers, qui a en soi toutes les idées confuses de toutes les modifications de ce monde, présentes, passées et futures. Newton, Locke et Clarke, quand ils entendirent parler d'une telle opinion, marquèrent pour elle un aussi grand mépris que si Leibnitz n'en avait pas été *l'auteur. Mais puisque de très-grands philosophes allemands se sont fait gloire d'expliquer ce qu'aucun Anglais n'a jamais voulu entendre, je suis obligé d'exposer avec clarté cette hypothèse du fameux Leibnitz, devenue pour moi plus respectable depuis que vous en avez fait l'objet de vos recherches.* […] *Tout être dans cet univers tient à l'univers, sans doute ; mais toute action de tout être n'est pas cause des événemens du monde. La mère de Brutus, en accouchant de lui, fut une des causes de la mort de César ; mais qu'elle ait craché à droite ou à gauche, cela n'a rien fait à Rome. Il y a des événemens qui sont effet et cause à la fois. Il y a mille actions qui ne sont que des effets sans suite.* […]

On comprend bien que le différend qui oppose les deux philosophes est bien plus complexe que ce que l'on en retient en général à la lecture de *Candide*. Et que tout n'est pas à jeter dans a philosophie de Leibniz.

Comme avoué plus haut, je n'ai pas abordé ces derniers textes avec les élèves. Et c'est tant mieux ! Vous imaginez, vous, une discussion pareille comme prologue à l'étude des dérivées ? Je m'attirerais forcément une remarque sarcastique "Eh ! Faudrait pas vous prendre pour un prof de philo !" Pourtant, même avec les seuls textes de Voltaire issus de l'édition des *Principia*, je n'avais donné la parole qu'à l'un des protagonistes, au risque de voir mon édifice futur de la dérivation sapé par le ridicule avant même son érection. Il me fallait donc pousser un peu plus loin l'équivoque entretenue par Voltaire lui-même.

Leibniz

Le premier problème, pour le défenseur de l'auteur de l'*Essai de Théodicée*, c'est d'entraîner les élèves au-delà du sens commun, qui depuis toujours met en doute l'existence de Dieu par le fait qu'il existe des guerres (version simple) ou plus généralement par l'existence du Mal (version approfondie). Faire dépasser, chez 24 adolescents, l'adhésion spontanée au bon sens de Candide n'est peut-être pas un but en soi, mais au moins montrer que le problème mérite d'être discuté, voilà déjà une avancée ; expliquer que pour Leibniz il s'agit tout bonnement de défendre la possibilité de Dieu face à l'existence du Mal, même si les élèves peuvent ensuite trouver que c'est beaucoup de discussion pour pas grand chose. Comprenons-nous bien, la question en soi n'est pas d'une importance capitale, en outre elle dépasse de loin les prérogatives d'un enseignant de Mathématiques et le contenu de son programme ! Mais cela permet aussi de considérer les autres écrits (sur la multiplicité, l'infini) d'une autre façon, et de rentrer de plain-pied dans les problèmes posés par les limites, le zéro et l'infini, la question des tangentes avec des longueurs infiniment petites mais non nulles, etc.

Pour ce qui est du "meilleur des mondes possibles", Leibniz s'appuie sur un principe fondamental :

[le principe de] raison suffisante, en vertu duquel nous considérons qu'aucun fait ne saurait se trouver vrai ou existant, aucune énonciation véritable, sans qu'il y ait une raison suffisante pourquoi il en soit ainsi et non pas autrement, quoique ces raisons le plus souvent ne puissent point nous être connues. (Monadologie §32)

On en retrouve la trace dans *Candide*, lors de la guerre, où, bien sûr, Voltaire ne pourra s'empêcher d'évoquer la "raison suffisante" de la mort des soldats. Mais le principe exposé par Leibniz débouche tout naturellement sur les questions sur ce monde-ci, au-delà du fameux "pourquoi y-a-t' il quelque chose plutôt que rien ?", qui revient à "pourquoi le Créateur a t'il eu besoin de créer?" et qui n'est pas notre objet. Le monde étant ce qu'il est, maintenu en mouvement par la volonté divine, il faut qu'il soit le meilleur, car Leibniz envisage déjà une pluralité des possibles, et même une infinité des possibles. Ce que l'on retrouve dans la *Monadologie* :

53. Or, comme il y a une infinité d'univers possibles dans les idées de Dieu, et qu'il n'en peut exister qu'un seul, il faut qu'il y ait une raison suffisante du choix de Dieu qui le détermine à l'un plutôt qu'à l'autre.

54. Et cette raison ne peut se trouver que dans la convenance, dans les degrés de perfection que ces mondes contiennent, chaque possible ayant droit de prétendre à l'existence à mesure de la perfection qu'il enveloppe.

55. Et c'est ce qui est la cause de l'existence du meilleur que la sagesse fait connaître à Dieu, que sa bonté le fait choisir, et que sa puissance le fait produire.

Le paragraphe 54 serait à commenter d'un point de vue mathématique, mais j'ai peur d'effrayer le lecteur (surtout s'il est parent d'élève) ; que chacun se rassure, les élèves n'ont pas été si loin (voir au paragraphe suivant leurs réactions). Des arguments du même type se trouvent dans le *Discours de Métaphysique* :

D'où il s'ensuit que Dieu possédant la sagesse supreme et infinie agit de la manière la plus parfaite, non seulement au sens métaphysique, mais encor moralement parlant, et qu'on peut exprimer ainsi à nostre égard, que plus on sera éclairé et informé des ouvrages de Dieu, plus on sera disposé à les trouver excellens et entierement satisfaisans à tout ce qu'on aurait pu souhaiter (I.- De la perfection divine et que Dieu fait tout de la manière la plus souhaitable)

Il suffit donc d'avoir cette confiance en Dieu, qu'il fait tout pour le mieux, et que rien ne sçauroit nuire à ceux qui l'aiment ; mais de connoistre en particulier les raisons qui l'ont pu mouvoir à choisir cet ordre de l'univers, à souffrir les pechés, à dispenser ses grâces salutaires d'une certaine maniere, cela passe les forces d'un esprit fini, sur tout quand il n'est pas encor parvenu à la jouissance de la veue de Dieu. (V.- En quoy consistent les regles de perfection de la divine conduite et que la simplicité des voyes est en balance avec la richesse des effects)

Car Dieu voit de tout temps qu'il y aura un certain Judas, dont la notion ou idée que Dieu en a, contient cette action future libre. Il ne reste donc que cette question, pourquoy un tel Judas, le traistre, qui n'est que possible dans l'idée de Dieu, existe actuellement. Mais à cette question il n'y a point de reponse à attendre icy bas, si ce n'est qu'en general on doit dire, que puisque Dieu a trouvé bon qu'il existât, non obstant le peché qu'il prevoyoit, il faut que ce mal se recompense avec usure dans l'univers, que Dieu en tirera un plus grand bien, et qu'il se trouvera en somme que cette suite des choses dans laquelle l'existence de ce pecheur est comprise, est la plus parfaite parmy toutes les autres façons possibles (XXX - ... De l'imperfection originale avant le peché et des degrés de la grâce).

Pour en finir avec l'excellence divine, remarquons qu'il est nécessaire que la pluralité des mondes possibles soit illimitée, et cela rejoint une autre préoccupation de Leibniz, celle de l'infinité contenue dans le fini, du mouvement continu que cela implique ; on trouve ces idées en particulier dans la *Monadologie,* et tout d'abord

> *[...]quand il y a une grande multitude de petites perceptions où il n'y a rien de distingué [...] (§21)*

ce qui veut dire, comme les milliers de minuscules bruits indistinguables de gouttelettes d'eau forment celui des vagues, que nos perceptions ne sont pas souvent "claires et distinctes" mais résultent d'une superposition d'une multitude de causes (ceci n'est pas très en vogue à son époque et nous appartiendrait plus volontiers, nous sommes ses héritiers directs). Quant à l'idée de la continuité d'états instantanés, elle est légitimée dans le même texte :

> *Et comme tout présent état d'une substance simple est naturellement une suite de son état précedent, tellement, que le présent y est gros de l'avenir (§22)*

> *Et les composés symbolisent en cela avec les simples. Car comme tout est plein, ce qui rend toute la matière liée, et comme dans le plein tout mouvement fait quelque effet sur les corps distants à mesure de la distance, de sorte que chaque corps est affecté non seulement par ceux qui le touchent, et se ressent en quelque façon de tout ce qui leur arrive, mais aussi par leur moyen se ressent de ceux qui touchent les premiers dont il est touché immédiatement : il s'ensuit que cette communication va à quelque distance que ce soit[...] (§61)*

Leibniz va même beaucoup plus loin dans la métaphore, il "zoome" comme dans des objets fractals ; on tient là vraiment un fondement métaphysique à l'idée de limite, à celle de quantités infiniment petites, bien qu'il n'indique en rien qu'il faille s'arrêter à une borne inférieure.

> *67. Chaque portion de la matière peut être conçue comme un jardin plein de plantes et comme un étang plein de poissons. Mais chaque rameau de la plante, chaque membre de l'animal, chaque goutte de ses humeurs est encore un tel jardin ou un tel étang.*

Au contraire, il semblerait même que dans la succession poisson/étang/poisson, il n'y ait aucune raison de s'arrêter quelque part, cela se situant au-delà du perceptible ; on est peut-être entré dans le domaine des "ordres" infiniment petits, comme dans l'analyse non standard (qui d'ailleurs se réclame plus ou moins de Leibniz):

> *68. Et quoique la terre et l'air interceptés entre les plantes du jardin, ou l'eau interceptée entre les poissons de l'étang, ne soit point plante ni poisson, ils en contiennent pourtant encore, mais le plus souvent d'une subtilité à nous imperceptible.*

> *69. Ainsi il n'y a rien d'inculte, de stérile, de mort dans l'univers, point de chaos, point de confusion qu'en apparence; à peu près comme il en paraîtrait dans un étang à une distance dans laquelle on verrait un mouvement confus et un grouillement pour ainsi dire de poissons de l'étang sans discerner les poissons mêmes.*

Ces poissons de l'étang peuvent-ils être comparés à des *dx* de longueur nulle ou presque et qui pourtant reconstituent n'importe quelle ligne ? Ce grouillement-là rappelle forcément les théories actuelles du chaos, avec la modestie en plus, mais le même surgissement de l'ordre, les monades étant naturellement hiérarchisées. Et enfin, puisqu'il est question de "grouillement", on peut se rappeler, que la *différence* est décrite comme la quantité dont augmente continûment x ou comme ce qui sépare deux quantités x et $x + dx$ infiniment proches. N'oublions pas non plus que Newton parlera de *quantités fluentes* et de leurs *fluxions,* ce qui rejoint d'une certaine façon son grand rival.

> *[...] Car tous les corps sont dans un flux perpétuel comme des rivières, et des parties y entrent et en sortent continuellement (Monadologie, §71)*

Les élèves...

... font les gros yeux dès le début, on s'en doute ! Bien sûr, ils protestent tout de suite que ce ne sont pas des maths, qu'ils en ont assez de Voltaire, qu'ils aimeraient bien pouvoir penser à autre chose de plus sérieux en cours de maths, etc. Il n'empêche qu'ils m'écoutent jusqu'au bout, même si je n'ai pas lu tout ce qui est retranscrit ici. Ils finissent même par accorder que leur opinion de Pangloss ne remet pas en cause le sérieux des jugements de Leibniz (j'imagine qu'ils avaient saisi que c'était mon champion et que s'ils n'acquiesçaient pas, la salle des profs allait se transformer en champ de bataille !)

Il est difficile de mesurer le réel impact sur les élèves (de sections hôtelière, tertiaire, puis économique et sociale) de la discussion née de ces lectures ; en revanche, les problèmes de compréhension liés au statut des objets du calcul différentiel apparaissent de temps en temps : des élèves bloqués par ces rectangles de largeur presque nulle, mais pas tout à fait, car en les "ajoutant", on obtient une surface non nulle. De quoi s'agit-il vraiment ? Nous ne leur répondons jamais, mais savons-nous nous-mêmes vraiment de quoi nous parlons lorsque nous leur enseignons le calcul des dérivées ? Il n'est pas étonnant que Berkeley se soit élevé au début du XVIII^{e} siècle contre cette utilisation sans conscience de concepts dont personne ne comprenait exactement le sens.

Cette expérience n'est pas reproductible d'une année à l'autre, puisque le livre de Voltaire n'est au programme que de temps en temps et qu'il faut varier les plaisirs en Français. D'ailleurs je ne suis pas certain de vouloir reprendre une quatrième fois l'introduction sous cette forme : il s'agit probablement d'un travail décalé par rapport à ce qu'attendent les élèves de mon cours de mathématiques. En effet, si les références historiques passent très bien en général lorsque je "raconte des histoires", l'étude de textes est moins bien acceptée, car cela demande des efforts de traduction et d'appropriation que mes élèves ne font plus guère spontanément. Le premier contact avec les textes originaux engendre souvent perplexité et demande persévérance, le plaisir ne vient qu'après : c'est le "plaisir du sens", selon la belle expression de Rudolph Bkouche et Nicolas Rouche. Imaginez donc la surprise lorsque l'étude de textes n'implique aucune traduction géométrique ou algébrique, aucune activité mathématique, mais seulement de la réflexion !

Actuellement, je passerais beaucoup plus vite sur cette introduction pour me lancer directement dans l'étude des textes mentionnés ci-après.

L'Hospital

La suite la plus naturelle est de lire les premières propositions du livre du Marquis de L'Hospital, *L'Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*,[7] car les articles originaux de Leibniz[8] sont beaucoup trop difficiles. Chez L'Hospital comme chez Leibniz, le triangle caractéristique sous-tend la pensée, il est question de la tangente qui se confond avec la courbe à condition de ne point trop s'éloigner du point de tangence, mais d'une façon plus didactique, avec de nombreux exemples. Ce qui est formidable avec l'*Analyse des infiniment petits*, c'est qu'une fois admise l'existence d'infiniment petits de différents ordres, le fait que certains sont négligeables selon le contexte, les théorèmes s'expliquent avec une clarté "que Leibniz n'eut jamais" (pour paraphraser Voltaire, vous aviez suivi ?). Entrons dans le détail, avec le tout premier paragraphe et les définitions, comme il se doit :

SECTION I.
Où l'on donne les Regles de ce Calcul

DEFINITION I.

On appelle quantités *variables* celles qui augmentent ou diminuent continuellement ; & au contraire quantités *constantes* celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une parabole les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu que le paramétre est une quantité constante.

C'est plutôt agréable de commencer de cette manière peu effrayante pour les élèves, en précisant toutefois que les "appliquées" sont les ordonnées, les "couppées" les abscisses (ce qui n'a rien de choquant pour l'étymologie), et que la parabole de la Figure 1 (si c'en est une, voyez la figure plus loin) est tracée dans un sens inhabituel. Par la suite, ça se corse :

DEFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appelée la *Différence*. Soit, par exemple, une ligne courbe quelconque AMB; (*Fig.* I. *Pl.* I.) qui ait pour axe ou diamétre la ligne AC, & pour une de ses appliquées la droite PM ; & soit une autre appliquée *pm* infiniment proche de la premiere. Cela posé, si l'on méne MR parallele à AC ; les cordes AM, A*m* ; & qu'on décrive du centre A, de l'intervalle AM le petit arc de cercle MS : P*p* sera la différence de AP ; R*m* celle de PM ; S*m* celle de AM, & M*m* celle de l'arc AM. De même le petit triangle Ma*m* qui a pour base l'arc M*m*, sera la différence du segment[9] AM ; & le petit espace MP*pm*, celle de l'espace compris par les droites AP, PM, & par l'arc AM.

---

[7] L'édition dont je me suis servi est une réimpression avignonnaise de 1768 de la troisième, parue à Paris en 1758, avec les commentaires d'un auteur anonyme (dont la Bibliothèque nationale indique qu'il s'agit de l'Abbé Aimé-Henri Paulian, père Jésuite) qui met plus bas que terre le commentateur de la seconde édition de 1715, De Crouzas… Une version électronique de l'édition de 1696 est maintenant disponible sur le serveur de la BnF.

[8] Le lecteur intéressé se reportera à l'édition de Marc Parmentier, *Leibniz, naissance du calcul différentiel, 26 articles des* Acta Eruditorum, Paris, Vrin, Coll. Mathesis, 1989.

[9] Il s'agit du segment de cercle, i.e. le domaine défini par la corde [AM] et l'arc de cercle AM.

Il va falloir admettre qu'une quantité variable augmente à tout instant, et que cette augmentation est infiniment petite. En outre, il va falloir admettre que la Figure 1 reproduite ci-après montre bien deux positions infiniment proches ; c'est clair pour un enseignant, qui a été habitué à lire le concept derrière sa représentation imparfaite, mais cela soulève d'autres types de problèmes pour les jeunes gens : comment représenter deux positions infiniment proches, sinon en les superposant ? La question est intéressante, parce qu'elle ramène à celle de l'existence et du statut de l'infiniment petit, et l'on se met à chercher des points de comparaison, par exemple un point sur une ligne : comment les points se touchent-ils ? Bien sûr; lorsque l'on fait de la géométrie entre professionnels, la question ne se pose pas. Mais lorsqu'il s'agit d'enseigner, on doit faire face à des interrogations que nous avons refoulées (moi, en tout cas.) Le débat peut mener loin en classe, comme chaque fois que l'on fait appel à l'imagination des élèves, en particulier lorsqu'il est question d'infini ; ce débat risque fort de ne pas se clore par une réponse nette et collectivement acceptée : c'est une zone de doute.

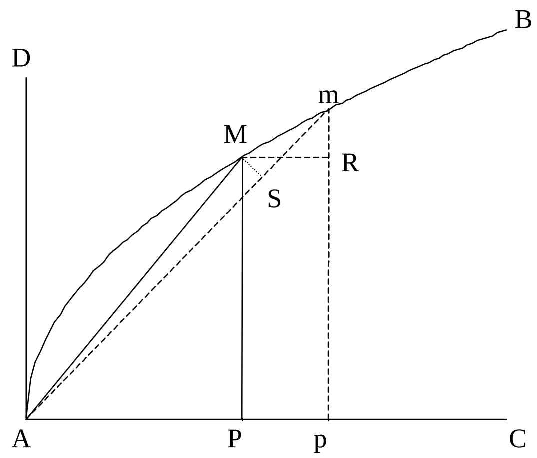

Fig. 1 Planche 1 de l'*Analyse des infiniments petits*.

Examinons la suite du texte de l'*Analyse*. Il vient immédiatement un corollaire, explication très simple du fait que la dérivée d'une constante est nulle, puis un avertissement qui réjouira tous ceux qui se demandent pourquoi ce *d* dans *dx*.

COROLLAIRE.

I. Il est évident que la différence d'une quantité constante est nulle ou zero : ou (ce qui est la même chose) que les quantités constantes n'ont point de différence.

AVERTISSEMENT.

On se servira dans la suite de la note ou caractéristique d *pour marquer la différence d'une quantité variable que l'on exprime par une seule lettre ; & pour éviter la confusion, cette note* d *n'aura point d'autre usage dans la suite de ce calcul. Si l'on nomme par exemple les variables* AP, x ; PM, y ; AM, z ; *l'arc* AM, u ; *l'espace mixtiligne* AMP, s ; *& le segment* AM, t ; dx *exprimera la valeur de* Pp, dy *celle de* Rm, dz *celle de* Sm, du *celle de du petit arc* Mm, ds *celle du petit espace* MPpm, & dt *celle du petit triangle mixtiligne* MAm.

Puis viennent les "axiomes", dont L'Hospital écrit dans sa préface : *D'ailleurs les deux demandes ou suppositions que j'ai faites au commencement de ce Traité, & sur lesquelles seules il est appuyé, me paroissent si évidentes, que je ne crois pas qu'elles puissent laisser aucun doute dans l'esprit des Lecteurs attentifs. Je les aurois même pû démontrer facilement à la maniere des Anciens, si je ne me fusse proposé d'être court sur les choses qui sont déjà connues, & de m'attacher principalement à celles qui sont nouvelles*. Mon œil ! Un peu comme Descartes qui prétendait ne pas tout écrire pour laisser à ses neveux le plaisir de chercher par eux-mêmes, L'Hospital se sert de l'adjectif "évident" à un moment délicat, prévient les critiques en évoquant l'attention du lecteur, sans éviter la rodomontade finale …

I. DEMANDE OU SUPPOSITION.

2. On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne différent entr'elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande, par exemple, qu'on puisse prendre A*p* pour AP, *pm* pour PM, l'espace A*pm* pour l'espace APM, le petit espace MP*pm* pour le petit rectangle MP*p*R, le petit secteur AM*m* pour le petit triangle AMS, l'angle *p*A*m* pour l'angle PAM, &c.

II. DEMANDE OU SUPPOSITION.

3. On demande qu'une ligne courbe puissse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un polygône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande, par exemple, que la portion de courbe M*m*, l'arc de cercle MS, puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle *m*SM puisse être censé rectiligne.

Voilà ce qui est fondamental, mais sera critiqué pendant des années. Le calcul différentiel roule sur des présupposés qui ne sont pas si certains que le dit l'auteur. En bon cartésien, il a affirmé que l'évidence est suffisante (c'est un gage de vérité), mais il évoque quand même une possible preuve, signe de doute et d'honnêteté.

Les deux demandes sont-elles difficile à accepter ? Les élèves sont partagés ; certains suivent l'auteur dans sa revendication d'évidence, mais se trouvent face à un problème : si x est égal à $x + dx$, alors dx est nul. Je dois faire remarquer que L'Hospital a écrit *que l'on puisse prendre l'une pour l'autre*, ce qui ne signifie pas *les considérer égaux*, mais plutôt valeur approchée l'un de l'autre, avec différence négligeable en première approximation. La seconde demande est plus subtile, même si, au fond, elle ressemble à la première ; elle engendre également de discussions sur la nature des courbes. Mais la plupart des élèves sont dépassés, il faut le dire, il est temps de passer au calcul proprement dit, à l'action !

PROPOSITION I.

PROBLÉME.

4. *Prendre la différence de plusieurs quantités ajoutées ensemble, ou soustraire les unes des autres.*

(suite au verso)

Soit $a + x + y — z$ dont il faut prendre la différence. Si l'on suppose que x soit augmentée d'une portion infiniment petite, c'est-à-dire qu'elle devienne $x + dx$; y deviendra $y + dy$; & z , $z + dz$; pour la constante a , (Art. 1) elle demeurera la même a : de sorte que la quantité proposée $a + x + y — z$ deviendra $a + x + dx + y + dy — z — dz$; & sa différence, que l'on trouvera en retranchant de cette dernière, sera $dx + dy — dz$. Il en est ainsi des autres ; ce qui donne cette regle.

REGLE I.

Pour les quantités ajoutées, ou soustraites.

On prendra la différence de chaque terme de la quantité proposée, & retenant les mêmes signes, on en composera une autre quantité qui sera la différence cherchée.

Voilà une façon simple d'expliquer la règle de dérivation d'une somme ; il est heureux que l'exemple vienne avant l'énoncé formel, car si l'on donnait tout de go la Règle I aux élèves, ils n'y comprendraient rien. Mais le plus formidable à mon sens est tout de même l'éclairage "nouveau" donné à la rengaine $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.[10]

PROPOSITION II.

PROBLÉME.

4. *Prendre la différence d'un produit fait de plusieurs quantités multipliées les unes par les autres.*

I°. La différence de xy est $xdy + ydx$. Car y devient $y + dy$ lorsque x devient $x + dx$; & partant xy devient alors $xy + ydx + xdy + dxdy$, qui est le produit de $x + dx$ par $y + dy$, & sa différence sera $ydx + xdy + dxdy$, c'est-à-dire (Art. 2) $ydx + xdy$ puisque $dxdy$ est une quantité infiniment petite par rapport aux autres termes ydx , & xdy ; car si l'on divise, par exemple, ydx , & $dxdy$ par dx , on trouve d'une part y, & de l'autre dy qui en est la différence, & par conséquent infiniment moindre qu'elle. D'où il suit que la différence du produit de deux quantités est égale au produit de la différence de la premiere de ces quantités par la seconde, plus au produit de la différence de la seconde par la premiere.

2°. La différence de xyz est $yzdx + xzdy + xydz$. Car en considérant le produit xy comme une seule quantité, il faudra, comme l'on vient de prouver, prendre le produit de sa différence $xdy + ydx$ par la seconde z (ce qui donne $yzdx + xzdy$) plus le produit de la différence dz de la seconde z par la premiere xy (ce qui donne $xydz$) & partant la différence de xyz sera $yzdx + xzdy + xydz$. [...]

Je n'ai rien à ajouter, le texte est d'une parfaite clarté et d'une certaine élégance. Les élèves le lisent seuls, même s'ils ont tendance à passer sur l'énoncé rébarbatif de la règle générale. Quelques-uns ne voient pas pourquoi $dxdy$ est une quantité négligeable, mais qui n'a pas dit un jour "M'enfin ! Je viens de te l'expliquer !" ? D'ailleurs, je ne l'explique pas, ce sont d'autres élèves qui le font, la découverte du texte se faisant en effet en groupes, ou de manière informelle en classe entière ; seule la lecture d'un texte ancien de mathématiques

[10] Jean Terreran compare cette approche avec l'illustration géométrique du produit sous forme de rectangle, décomposé ainsi : le "grand" rectangle *xy*, les deux rectangles ultra-minces *xdy* et *ydx*, et le carré *dxdy* dont la ridicule petitesse nous permet de le dédaigner.

permet ce genre de discussion et de découverte collective, puisque l'élaboration se fait sous les yeux des élèves, et qu'ils n'ont pas à chercher la solution d'un problème mais comprendre le sens d'un problème déjà résolu.

La proposition III traite de la différence d'une fraction quelconque, et se démontre simplement : pour différencier $z=\frac{x}{y}$, il suffit de différencier $x = zy$ en tant que produit et d'isoler dz. La proposition IV traite de la différence d'une puissance quelconque d'une quantité variable ; elle est plus compliquée, et je ne l'aborde pas en classe, car l'auteur donne un rappel indigeste sur les suites et les exposants quelconques.

Voilà ! Les élèves ont tout en main pour calculer les différences les plus baroques, mêlant variables et constantes dans un langage purement littéral (avec des chiffres pour les coefficients, ne soyons pas trop extrémistes). Je passe effectivement à une séance de plus en plus virtuose, ce qui est certes contraire à l'esprit du programme, mais constitue un moment étonnant : les élèves se prennent au jeu de ce calcul abstrait, totalement gratuit, ils manient comme jamais les quantités littérales, et je dois avouer qu'il s'agit d'un des mes objectifs quand je propose cette introduction au calcul des dérivées. Oui, ils font de l'ALGÈBRE ! Même les moins familiers des lettres, et avec de plus en plus d'aisance. Ce qui donne à penser que la simplification des programmes n'est pas forcément LA solution au désintérêt, à l'ennui, à l'échec. Au contraire, sans pour autant se complaire dans l'abstraction, ne prenons pas nos élèves pour des attardés[11] ; ils sont capables de beaucoup, mais avec cette condition simple : il faut du temps. Cette partie du programme de première en prend de toute façon beaucoup en général, car il faut souvent revenir en arrière, ralentir, insister ou reprendre au début (je parle des élèves que je connais, de sections tertiaires ou ES.)

Bouquet final : Le lien avec les variations et les tangentes

Le Marquis nous fournit cette dernière étape de notre travail dans la seconde section du livre ; la définition de la tangente à une courbe est claire, dans la logique de la seconde "demande ou supposition". Au fait, comment définit-on la tangente, depuis qu'il n'est plus à la mode de parler de position-limite d'une droite ?

SECTION II.

Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes.

DEFINITION.

Si l'on prolonge un des petits côtés M*m* (*Fig.* 2. *Pl.* 1.) du poligone qui compose (*Art.* 3.) une ligne courbe ; ce petit côté ainsi prolongé sera appellé la Tangente de la courbe au point M ou *m*.

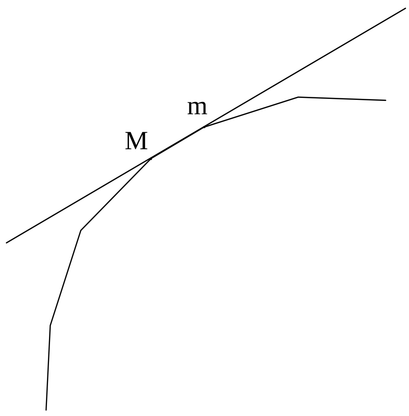

Fig. 2 Planche 1 de l'*Analyse des infiniment petits.*

[11] Bémol : je ne choisis plus cette activité pour des élèves "dégoûtés des maths". Les classes de STT avec lesquelles j'ai travaillé en ce sens ont l'option "Comptabilité-Gestion-Informatique" et ce ne sont pas les plus mauvaises en mathématiques…

Cette définition de la tangente étant donnée, son rapport avec le calcul des différences est immédiat si l'on reprend la figure n°1, ou la figure n°3 ci-après : le petit triangle *m*MR (appelé *triangle caractéristique* par Leibniz) est semblable à celui que forme la tangente avec l'axe des abscisses et le segment-ordonnée MP (ou *mp*). Or les côtés de ce petit triangle sont MR = *dx* et mR = *dy*, ce qui laisse entrevoir l'intérêt de la démarche en termes de coefficient directeur de la tangente ; ce que présente L'Hospital est un peu différent:

PROPOSITION I.

PROBLÉME.

9. *Soit une ligne courbe* AM (*Fig.* 3. *Pl.* 1.) *telle que la relation de la couppée* AP *à l'appliquée* PM *soit exprimée par une équation quelconque, & qu'il faille du point donné* M *sur cette courbe mener la tangente* MT.

Ayant mené l'appliquée MP, & supposé que la droite MT qui rencontre le diamètre au point T, soit la tangente cherchée ; on concevra une autre appliquée *mp* infiniment proche de la premiere, avec une petite droite MR parallèle à AP. Et en nommant les données AP, *x* ; PM, *y* ; (donc P*p* ou MR $=$ *dx*, & R*m* $=$ *dy*.) les triangles semblables *m*RM & MPT donneront *m*R (*dy*) . RM (*dx*) : : MP (*y*) . PT $= \frac{ydx}{dy}$.[12] Or par le moyen de la différence de l'équation donnée, on trouvera une valeur de *dx* en termes qui seront tous affectés par *dy*, laquelle étant multipliée par *y* & divisée par *dy*, donnera une valeur de la soutangente PT en termes entierement connus & délivrés des différences, laquelle servira à mener la tangente cherchée MT.

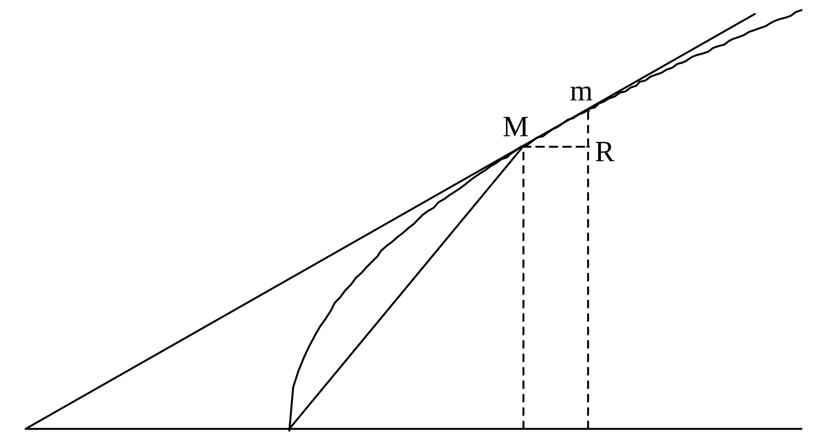

Fig. 3 Planche 1 de l'*Analyse des infiniment petits*.

Après les efforts surhumains déjà faits en classe, je n'insiste pas sur la sous-tangente, mais propose au contraire une lecture rapide de ce dernier texte, afin de recentrer l'étude sur des préoccupations plus actuelles, sur la pente de la tangente (AT). Il vient tout naturellement que cette pente vaut MP/PT, ou encore *m*R/RM, donc s'exprime sous la forme *dy*/*dx*. Il faut alors reprendre la fin du texte et l'illustrer par des exemples fonctionnels, en prenant garde de ne pas entretenir de confusion, car *l'Analyse des infiniment petits* est d'une période antérieure à la notion de fonction et les deux variables y jouent un rôle symétrique. En termes modernes, tels qu'il faut les reformuler, la fin du texte peut donc se traduire (en un sens qui n'est plus le

[12] Écriture ancienne des proportions, qui doit se lire "*m*R est à RM comme MP est à PT, qui est donc égal à…"

sens original) de la manière suivante : puisque y est donné sous la forme $y = f(x)$, alors tous les termes de dy contiennent dx, donc dy/dx s'exprime sans aucune différence, mais seulement en fonction de x.

Finalement, il reste à demander aux élèves de calculer le coefficient directeur de la tangente dans certains cas, puis à tout réécrire *à la moderne*, c'est-à-dire reconstruire le formulaire sacré en termes de dérivées de fonctions.

Retour sur terre : les dérivées

Virage difficile à négocier, le passage des différentielles aux dérivées met en évidence l'effort fourni par les élèves pour comprendre un chapitre plutôt délicat. Ils sont ensuite peu enclins à tout abandonner pour remplacer ce formalisme par un autre, confondant par-là le fond et la forme. Mais comment les blâmer d'attacher de l'importance à la forme dans du calcul formel ? Cette transition est pourtant une question essentielle pour moi, car, jusque-là, j'ai traité d'une matière hors programme (le calcul différentiel) alors que je devais formater les élèves pour des connaissances orthodoxes (le calcul des dérivées). Si donc je ne veux pas me retrouver sur la sellette, il me faut démontrer le bien-fondé de mon approche. Situons-nous par exemple sur le terrain de l'évaluation.

Le jour de l'interro…

… apparaissent les difficultés de fond, évidemment ! Je dois donc modérer mon enthousiasme en ce qui concerne la justesse de mon choix d'utiliser le texte de L'Hospital pour mieux faire comprendre la notion de dérivée. Néanmoins, on verra qu'il ne faut pas être trop pessimiste, que cela a permis à certains (pas forcément les meilleurs) de réellement fonder le statut des dérivées et, surtout, que l'approche n'est pas adaptée à n'importe quel élève : le degré d'abstraction est élevé, le mélange des disciplines (allant plus loin que la simple histoire racontée) et le volte-face final perturbent ceux qui voient dans les mathématiques un ensemble de pièges auquel on ne comprend souvent rien.

1ère époque, en classe de 1ère H (élèves hôteliers)

C'est ma première expérimentation (fin du vingtième siècle), avec des jeunes gens titulaires d'un BEP de Cuisine ou de Restauration qui souhaitent continuer leurs études, et se sont donc inscrits dans cette classe de Première d'adaptation. C'est aussi la première de mes classes dans laquelle la collègue de Français étudiait *Candide*, ce qui a tout bêtement motivé ce travail ; oui, j'ai d'abord voulu, pour le plaisir de travailler ensemble en interdisciplinarité, rebondir sur son cours, mais le bilan est mitigé : je ne peux pas dire qu'il y ait vraiment eu "travail commun", seulement un pont entre deux disciplines, grâce à un sujet qui s'y prêtait. Les élèves ont eu une certaine difficulté à accepter de retrouver le texte de Français dans le cours de maths ("c'est pas des maths !") mais la lecture s'est faite dans de bonnes conditions.

En revanche, le choc face au texte de L'Hospital est rude pour un tiers des élèves, qui "n'aime pas la géométrie parce qu'il y a des démonstrations". Imaginez leur difficulté face aux infiniment petits ! Il m'a fallu minimiser cette partie et insister sur la partie "dérivées". Cette difficulté se retrouve dans les réponses aux premières questions du devoir en classe, questions d'ordre historique ("Qu'appelle-t-on *dx* ?", "Comment est définie cette quantité ?", "Qui en est l'inventeur et durant quel siècle ?")

Leibniz a disparu de la plupart des esprits qui proposent le Marquis de L'Hospital comme inventeur du calcul différentiel, au XVIIIe siècle… La définition de *dx* comme quantité infiniment petite n'est pas mieux assimilée ; un élève écrit même "*dx*, c'est $d \times x$", idée que je retrouverai dans la suite des expérimentations. Les erreurs dans les calculs de la troisième partie sont dues aux traditionnelles lacunes en algèbre que je rencontre dans toutes les classes, quel que soit leur niveau. Mais je remarque que les questions les mieux réussies sont les plus difficiles, celles qui traitent de la différentielle d'un quotient ; en outre, il y a très peu de confusions avec la formulation *vdu – udv*, contrairement à ce qui se passe avec *u'v –u v'*, que l'on retrouve souvent écrite à l'opposé *uv' –u'v*.

L'expérience n'est pas très concluante sauf pour les passages les plus difficiles, à ceci près que deux élèves de 1ère H ont conservé les techniques de calcul différentiel bien après le retour sur les dérivées, traduisant ensuite les résultats trouvés et affirmant que "c'est beaucoup plus facile comme ça" ! Je suis bien sûr parfaitement d'accord avec elles…

2nde époque, en classe de 1ère STT

Cette seconde expérimentation (l'année suivante) m'a permis de changer mon fusil d'épaule, laissant plus de temps d'appropriation aux élèves et insistant moins sur l'aspect littéraire ; il faut croire que chacun doit rester chez soi et que l'on ne s'improvise pas professeur de Lettres (surtout si l'on ne veut pas tomber de haut lors de l'interrogation.)

J'ai lu tous les extraits de Voltaire, en lien avec l'histoire locale (celle d'Émilie du Châtelet à Semur-en-Auxois), mais pas du tout ceux de Leibniz ; cela a rendu mon exposé plus compréhensible, il suffisait de laisser les poissons dans l'étang (qui est contenu dans chaque poisson, qui contient donc lui-même les autres poissons; on se rend bien compte que ces questions n'ont aucun intérêt pour des jeunes gens normaux.[13]) Les Premières STT "gestion" ont trois heures de mathématiques, et cela laisse un peu de temps pour expliquer les problèmes de manière individuelle.[14]

Comme pour les élèves de Première H, la réussite la plus spectaculaire concerne les quotients les plus difficiles, auxquels il faut ajouter les fonctions composées, comme les puissances d'une expression du premier degré. Plus de question historique cette fois (la cruelle déception de l'année précédente est encore présente), mais encore le souci de connaître l'idée que se font les élèves de la mystérieuse quantité *dx*. Je demande donc : "Que signifie *dx* ? De quoi s'agit-il ?" et "Pourquoi néglige-t-on *dxdy* dans les calculs ?", cette dernière question étant plus délicate mais plus libre.

La première question est bien traitée, la plupart du temps par citation exacte de la phrase du traité de L'Hospital, mais quelquefois incomplète ("*dx* est un infiniment petit" ou "l'infiniment petit de *x*".) La seconde réserve des surprises, car elle ne correspond pas à une définition, mais à un extrait de la démonstration de la proposition II, section I. Cette partie avait donné lieu à discussion en classe, car les élèves ne comprenaient pas pourquoi l'auteur divisait par *dx*, cela pouvant changer la nature de la comparaison entre les quantités. Je livre ici quelques réponses telles qu'elles ont été fournies, dans l'ordre d'arrivée des copies :

---

13 C'est-à-dire entièrement tendus vers leur soirée du vendredi. Croyez-vous que ces délires piscicoles permettent de briller en boîte ?

14 D'autant que la classe est composée aux deux tiers d'élèves de l'autre option (AAC) qui n'ont que deux heures hebdomadaires de mathématiques, la troisième heure se déroule donc avec peu d'élèves.

Delphine	dxdy est une quantité très petite, on la néglige car elle ne changera pratiquement pas le résultat. C'est une quantité infiniment petite multipliée par une autre quantité infiniment petite donc son résultat est presque nul.
Hafida	On néglige dxdy car on considère que cette quantité est infiniment petite de là trop petite. On décide alors de l'abandonner.
Elhame	On néglige dxdy car c'est infiniment infiniment petit. Ça n'existe presque pas.
Yilmaz	On néglige dxdy dans les calculs la différence d'un infiniment petit multiplié par la différence d'un infiniment petit donne un nombre très infiniment petit, que l'on peut négliger.
Xavier	On néglige dxdy car il s'agit d'un produit et car on ne peut pas multiplier deux quantités infiniment petites.
Alain	On néglige dxdy car quand on multiplie l'infiniment petit par l'infiniment petit cela nous donne quelque chose extrêmement petit ou presque rien.
Sébastien	dx et dy sont négligés car x et y sont des inconnus. On ne peut pas finir les calculs car ils sont infiniment petits.
Hares	Car on ne peut multiplier 2 infiniment petits.
Sandra	On néglige dx et dy car y et x sont constamment augmentées par une quantité infiniment petite.
Nicolas	Dans les calculs, on néglige dxdy car cela donne une différence infiniment petite.

On peut remarquer l'usage des superlatifs, ou de la répétition ("infiniment infiniment) pour indiquer l'aspect extrême du produit *dxdy* ; on trouve également la notion de "presque nul", ce qui n'est pas une expression ordinaire en classe, mais est de bonne augure pour le futur cours sur les limites. Plusieurs élèves ont également avancé l'idée selon laquelle "on ne peut pas le faire", qu'il s'agisse effectivement d'opérer ou simplement de "finir le calcul", peut-être parce que ces quantités sont si bizarres qu'il est hors de question de faire des calculs ordinaires avec elles ? Aucun n'évoque directement l'ordre de grandeur du produit, comparé à l'un des facteurs.

L'interrogation, semblable pour le reste à celle de l'année précédente, est très bien réussie (moyenne de 14) ; c'est plutôt agréable, mais n'ai-je pas été assez peu exigeant ? Je change encore une fois mon fusil d'épaule pour la troisième expérimentation.

3^e^ époque, en classe de 1^ère^ ES

L'expérimentation la plus récente (2002/2003)[15] a été menée en section générale, sans emphase sur le côté littéraire de la chose. Encore une fois, L'*Essai de Théodicée* et la *Monadologie* de Leibniz sont passé à la trappe, car il importe peu de réhabiliter le grand Gottfried-Willhelm dans l'esprit de jeunes élèves de 16 ans, dont ce n'est pas la préoccupation essentielle. Cette fois-ci, j'ai préféré concentrer mon récit sur la question des tangentes, et les idées de Leibniz en réponse à cette question ; je parle bien de mon récit, car il n'est pas question de chercher à expliquer les Mémoires des *Acta eruditorum* tant leur niveau est hors de portée des élèves (j'ai aussi du mal…)

Mais je n'abandonne pas Voltaire, qui reste encore une fois le point d'entrée "original" dans ce difficile chapitre. D'autant que les élèves de ES ont naturellement plus d'affinités avec

[15] Il a fallu attendre le retour de *Candide*, passé de mode quelque temps.

la littérature, et m'écoutent volontiers (ça leur permet aussi de passer des moments tranquilles.)

Pour les infiniment petits, nous prenons le temps de l'appropriation ; beaucoup d'exercices sont nécessaires, et j'ai décidé de ne plus évaluer l'aspect anecdotique, mais seulement différentiel. Cette année, je vais plus loin dans la complication pour l'interrogation, il s'agit de développer les expressions :

$d(2a+5b)$,	$d(x^2-3x+18{,}5)$,	$d\big((x+2)(3-4x)\big)$,	$d(\frac{-4}{3}x+x^2)$,
$d(xy-bx+z)$,	$d(xy/az)$,	$d(y^3x-7x^2y^2+1)$,	$d(\frac{1}{x-4})$
$d(\frac{x}{x-4})$,	$d(\frac{y}{x-4})$,	$d(\frac{x^2+2x-1}{x+3})$,	$d\left(\frac{a}{x}\Big/\frac{b}{y}\right)$ et $d\big((x-3)\big)z/y+1/xy)$

Les résultats sont bons et les quelques erreurs laissent à penser qu'il n'est toujours pas facile, même en 1ère ES, de calculer avec des lettres. La plupart des erreurs des élèves seront très vite corrigées (par eux-mêmes), d'autant qu'elles se ramènent à quelques constantes simples : confusion dans les priorités opératoires, et entre multiplication et addition, incompréhension du statut de la lettre *d*, mais il faut reconnaître que c'est subtil. Par exemple, je trouve dans les copies :

Erreur conceptuelle supposée	Erreurs trouvées dans les copies
d est une lettre comme une autre ?	$x^2dx = xdx^2$, mais aussi $xdx = dx^2$, $xdy - ydx = 0$,
Joyeux mélanges ?	$d(x-4) = -4dx$ $(x+2)d(3-4x) = -(x+2)d\,4dx$ $dxy = dxdy + ydx$ $2xdx = 2dx^2 + xdx2$, le $xdx2$ étant barré à la fin.
Confusion entre addition et multiplication ? (Le cas de Fabien)	$xdx + ydx = xydx$ (cela ressemble à du logarithme) $ydx - bdx = ybdx$ " $\div\left(b/y\right)^2$ " est remplacé par " $\times\left(b/y\right)^2$ "
Opérateur agissant à distance ? (Le cas de Pauline) ou inopérant ? (Le cas de Claire)	$(b/y)^2$ remplacé par $-bdy/y^2$ $d(a/x)$ devenant $d(-adx/x^2)$ et (a/x) devenant $-adx/x^2$ $d\left(\frac{a/b}{b/y}\right) = d\left(\frac{a}{b}\right)\times d\left(\frac{y}{b}\right)$

Ce tableau montre assez bien quelles sont les difficultés des élèves face au calcul formel. À chaque fois, on peut supposer qu'il s'agit d'une perte du sens de l'opération en cours, de la formule ou de la signification des lettres.

Finalement, c'est pour moi le plus grand intérêt pédagogique de l'introduction du calcul des dérivées par le calcul des différentielles, outre l'ouverture vers l'interdisciplinaire que cela permet : c'est de retrouver le goût du calcul algébrique en travaillant sur un texte porteur de sens et générateur d'interrogations sur la nature de ces objets mathématiques.