

Académie d'Aix - Marseille

I . R . E . M .

INFORMATION

MATHEMATIQUE

INSTITUT DE RECHERCHE SUR
L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
70, Route Léon Lachamp
13009 - MARSEILLE

DECEMBRE 1974

N° 5

I N F O R M A T I O N

M A T H E M A T I Q U E

P u b l i c a t i o n d e l ' I . R . E . M . d e M a r s e i l l e

RESPONSABLE DE LA PUBLICATION

J.C. Beniamino

I. R. E. M.
70, Route Léon Lachamp
13009 - MARSEILLE

(Tél. 41.39.40 / 41.15.40 poste 32.10)

INFORMATION MATHÉMATIQUE

N° 5

DECEMBRE 1974

S O M M A I R E

* EDITORIAL (Jean-Claude BENIAMINO - IREM de Marseille)	3
* NAISSANCE ET ÉVOLUTION DE LA TOPOLOGIE	5
(Léonce FOURES, Faculté des Sciences St-Charles)	
* SUR UNE PRÉSENTATION DES ESPACES AFFINES	15
(Jean MARION, IREM de Marseille)	
* LIMITE D'UNE DÉRIVÉE ET VALEUR D'UNE DÉRIVÉE À LA LIMITE EN TERMINALE C	23
(Jean-Claude BENIAMINO, IREM de Marseille)	
* L'INFORMATIQUE DANS LE PREMIER CYCLE - Compte rendu d'une Expérience Pédagogique conduite en 1973-74 sous le titre : "Emploi de Mini-Ordinateurs pour une nouvelle motivation des Mathématiques et une pré-initiation à l'Informatique	25
(Gérard CONVERSEZ - G.E.S. Henri Wallon, Marseille)	
* RECHERCHE I.R.E.M./I.N.R.D.P. GROUPE DE TRAVAIL MATHÉMATIQUE-PHYSIQUE	30
* DERNIÈRES ACQUISITIONS DE LA BIBLIOTHÈQUE DU C.R.D.P.	31

RAPPELS :

- * La Bibliothèque de l'I.R.E.M. est à la disposition de tous les Enseignants .

Elle est ouverte tous les jours de 9 à 12 heures et de 14 à 17 heures , samedi excepté .

- * Les articles devant être publiés dans le bulletin "INFORMATION MATHEMATIQUE", seront désormais reçus à l'adresse suivante :

INSTITUT DE RECHERCHE SUR
L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES
Faculté de Luminy
70, Route Léon Lachamp
13009 - MARSEILLE

EDITORIAL

Peu d'éléments nouveaux en mathématiques pour cette année scolaire 1974-1975 . Nous saluons le départ de G.THOMAS grâce auquel ce bulletin a vu le jour ; nous lui souhaitons du succès dans ses nouvelles fonctions et un prompt retour parmi nous .

Les Programmes des classes de seconde doivent maintenant permettre aux élèves l'assimilation des notions de Groupe et d'Espace Vectoriel, ce qui modifie l'aspect des premières leçons de géométrie en classe de première .

Les Groupes de travail en place l'an dernier continuent cette année à fonctionner et nous espérons que nombreux seront ceux intéressés par ces activités .

Nous serions heureux de recevoir des suggestions sur l'ouverture possible de nouvelles rubriques ou de nouvelles activités . Ce bulletin reste à la disposition de tous les enseignants qui veulent participer à la vie mathématique dans notre Académie .

A vos plumes chers Collègues .

J.C. BENIAMINO

Une date à retenir : 1 au 5 Septembre 1975 à MARSEILLE
Conférence Internationale :

" INFORMATIQUE ET ENSEIGNEMENT "

NAISSANCE ET EVOLUTION
DE LA TOPOLOGIE *

Léonce FOURES - Faculté des Sciences Saint-Charles
MARSEILLE .

Il est naturel de dater la naissance de la topologie à la résolution du premier problème qui en relève, tout au moins par rapport à notre conception actuelle de la topologie .

Il est bien connu que le système d'axiomes d'EUCLIDE comportait d'étranges lacunes qui permettaient notamment de construire des "figures fausses" tout en ne violant pas les célèbres axiomes . L'une de ces "figures fausses" pouvait en particulier conduire au théorème : < tout triangle est isocèle > . Bien que l'imperfection du système d'EUCLIDE fut connue depuis longtemps, il fallut attendre PASCH qui, en 1882, ajouta au système initial un axiome de nature topologique, dont une forme équivalente donnée par HILBERT en 1885 est :

- une droite sépare le plan en deux régions .

LA FORMULE D'EULER .

Bien avant 1882 d'autres problèmes de topologie avaient été posés, souvent sous forme de curiosités, tel le célèbre problème des sept ponts de Königsberg, posé et résolu par EULER au 18ème siècle . Parmi ces problèmes l'un a eu une importance retentissante :

La formule d'EULER reliant le nombre des faces, des arêtes et des sommets d'une surface polyédrale .

Cette formule avait été remarquée par DESCARTES dès 1640 puis redécouverte par EULER en 1752 . Il revient à POINCARÉ d'avoir généralisé cette formule pour en faire l'un des grands théorèmes de la topologie .

(δ) $F - A + S = 2$, F nombre de faces , A nombre d'arêtes , S nombre de sommets, pour une surface polyédrale (obtenue par juxtaposition de polygones) simple , c'est à dire sans trou de sorte que cette surface soit continuellement déformable en une sphère de dimension 2 .

Tous les termes utilisés sont assez imprécis ainsi que la démonstration qui suit, mais correspondent aux connaissances "topologiques" de l'époque d'EULER ; les énoncés estimés corrects aujourd'hui utilisent évidemment une terminologie beaucoup moins intuitive .

Démonstration -

On retire par découpage l'un des polygones de la surface de manière à créer un trou qui permette par déformation l'étalement de la surface sur un polygone plan obtenu par juxtaposition de polygones . Cette première opération a diminué d'une unité le nombre des faces, sans altérer le nombre des cotés ni celui des sommets, de sorte qu'il reste à établir pour ce polygone plan : $F - A + S = 1$.

On décompose alors chaque polygone du pavage, en triangles (triangulation) en traçant des "diagonales", c'est à dire des segments joignant des sommets existant déjà . Chacune de ces opérations (tracé de diagonales) a pour effet d'accroître F et A d'une unité sans modifier S , donc sans altérer $F - A + S$.

Certains triangles ont un coté sur la frontière : un tel coté n'appartient alors qu'à un seul triangle dont il est appelé "coté libre" . On retire alors le coté libre et le triangle qu'il borde sans toucher aux autres cotés ni aux sommets ; ainsi S n'est pas changé tandis que F et A sont diminués chacun d'une unité . Il peut arriver qu'un sommet soit sommet d'une seule arête, ce sommet est alors "sommet libre" ; son retrait et celui de l'arête qu'il borde n'altère pas F mais diminue A et S d'une unité . Les opérations de ce type conduisent par répétition à la figure formée d'un seul point et pour laquelle $F - A + S = 1$. On peut abréger le processus en retirant, lorsque le cas se présente, un triangle ayant deux cotés libres, les deux cotés libres et le sommet commun à ces deux cotés : cette opération diminue A de deux unités, F et S d'une unité chacun .

La formule d'EULER permet de résoudre quelques problèmes amusants .

Exemple : 3 maisons A, B, C sont reliées à 3 sources d'énergie X, Y, Z par des conduites qui ne doivent pas se croiser (c'est à dire dont les projections sur le sol ne se coupent pas) .

Si un tel système de conduites existe, elles constituent les arêtes (non rectilignes) d'une surface polyédrale vérifiant :

$$F - A + S = 2 \quad \text{avec } S = 6 \text{ et } A = 9 \quad \text{donc } F = 5$$

Or une face comprend au moins 4 cotés : un parcours de la frontière d'une telle face s'exprime par une suite de sommets alternant les lettres du système $\{A, B, C\}$ avec celles du système $\{X, Y, Z\}$ puisqu'il n'y a pas de liaison entre deux maisons ni entre deux sources d'énergie . D'autre part chaque coté est commun à deux faces seulement : il y a donc 18 cotés à répartir entre 5 faces, ce qui exigerait au moins 20 cotés ! d'où l'impossibilité .

Exemple : Détermination de tous les polyèdres réguliers possibles : les faces sont des polygones de n cotés, chaque sommet est commun à r cotés.

Dénombrement des cotés $nF = 2A = rS$;

$$\frac{2A}{n} - A + \frac{2A}{r} = 2 \quad \text{c'est à dire} \quad \frac{1}{n} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} .$$

D'autre part la surface polyédrale étant découpée en vrais polygones $n \geq 3$ et $r \geq 3$ si n et r sont tous deux > 3

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{r} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{ce qui est incompatible avec } A > 0 .$$

★ $n = 3$ $\frac{1}{r} - \frac{1}{6} = \frac{1}{A}$ d'où les seules valeurs possibles $r = 3, 4, 4$ correspondant respectivement aux valeurs :

$$A = 6, 12, 30 \quad \text{et} \quad F = 4, 8, 20 .$$

Ces polyèdres existent, ce sont respectivement : le tétraèdre, l'octaèdre, l'icosaèdre .

★ $r = 3$ Le même calcul conduit aux valeurs $n = 3, 4, 5$ correspondant respectivement aux valeurs :

$$A = 6, 12, 30 \quad \text{et} \quad F = 4, 6, 12 .$$

Ces polyèdres existent qui sont respectivement : le tétraèdre, le cube, le dodécaèdre .

Il y a donc exactement cinq polyèdres réguliers .

Remarque sur la validité de la formule d'EULER :

Cette formule a été établie pour des surfaces déformables en une sphère, le pavage pouvant ne pas être polygonal au sens strict, les pavés pouvant être limités par des cotés courbes et même n'avoir que deux cotés et deux sommets, voire un coté et un sommet . On est en présence d'une propriété partagée par tous les pavages de toute surface déformable en une sphère . Nous sommes à l'aube de la topologie combinatoire .

LES PIONNIERS :

Nous avons beaucoup parlé de déformation, sans être très précis sur ce point . C'est la notion de continuité qui est en cause . La continuité avait certes beaucoup préoccupé les grecs mais il revient sans doute à LEIBNIZ d'avoir codifié de manière utilisable la notion de limite . Bien naturellement cette notion a d'abord été introduite pour des systèmes de nombres et appliquée à des problèmes géométriques .

dans lesquels la notion de distance était essentielle. C'est d'ailleurs dans ce cadre géométrique, "distancié", que les géomètres du 19^{ème} siècle découvraient les propriétés dites de position, ou de situation, préservées par des transformations "continues" par lesquelles les propriétés proprement métriques étaient perdues.

Ainsi MOEBIUS (1790-1868) dont le nom reste attaché au célèbre ruban, auteur d'un mémoire sur les surfaces à un seul côté, mémoire confié à l'Académie des Sciences en 1858, où il fut totalement oublié, fut le précurseur d'une nouvelle discipline, d'abord appelée "géométrie de position". LISTING (1808-1882) astronome à Göttingen, substitua le mot "topologie" à celui de géométrie de position, trop imprégné de "mètre". Les découvertes de LISTING furent publiées en 1847 sous le titre "Vorstudien in topologie".

BERNHARD RIEMANN (1826-1866) fut naturellement séduit à Göttingen par les nouvelles idées sur la géométrie et c'est à lui que revient l'immense découverte par ses "grandeurs plusieurs fois étendues" de la clef des mystérieuses propriétés des fonctions analytiques et des périodes des intégrales abéliennes. Ces nouvelles notions étaient en fait les concepts fondamentaux de la topologie, dépassant de très loin la vision géométrique de ses contemporains.

Il revient à BETTI le mérite d'avoir compris la portée des découvertes de RIEMANN et d'avoir entretenu avec lui une correspondance qui contribua à la diffusion de ces idées dont POINCARÉ devait faire les bases de la topologie moderne.

LA TOPOLOGIE COMBINATOIRE.

Les méthodes de RIEMANN et POINCARÉ utilisent largement des triangulations et des découpages suivant des courbes tracées sur les surfaces à étudier.

Evidemment les premières recherches ont porté sur les surfaces et les volumes dans l'espace à 3 dimensions, et paradoxalement ce sont les problèmes posés dans cet espace qui sont le plus revêches aux investigations contemporaines.

Un morceau X de l'espace Euclidien de dimension n est triangulé par des r -simplexes (ou simplexes de dimension r) : les 0-simplexes sont les points, les 1-simplexes sont les segments rectilignes, les 2-simplexes sont les triangles, les 3-simplexes les tétraèdres etc... Les simplexes sont raccordés suivant des lois simples mais strictes pour constituer un complexe K dont le support géométrique est un polyèdre.

Une r -chaîne modulo 2 est une somme (modulo 2) formelle de r -simplexes. A cette r -chaîne C^r est associée une $(r-1)$ -chaîne C^{r-1} appelée bord de C^r et notée ∂C^r qui est la somme modulo 2 des $(r-1)$ -simplexes frontières des r -simplexes figurant dans la chaîne C^r .

Une r -chaîne sans bord, ou à bord nul, est un r -cycle. Toute $(r-1)$ -chaîne de la forme ∂C^r est elle-même sans bord de sorte que l'opérateur "bord" vérifie $\partial \partial = 0$. Un cycle z qui est un bord

est dit homologue à zéro et on écrit $z \sim 0$. On définit alors entre les cycles une relation d'équivalence

$$z_1 \sim z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 \sim 0$$

$\{z_1^r, z_2^r, \dots, z_k^r\}$ est un système de r -cycles linéairement indépendant par une relation d'homologie si toute relation

$$a_1 z_1^r + a_2 z_2^r + \dots + a_k z_k^r \sim 0 \quad \text{avec } a_i = 0 \text{ ou } 1 \quad \text{et } z_1^r \neq 0$$

exige $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$.

Le nombre de Betti (modulo 2) de dimension r de K , noté $p^r(K; 2)$ est le nombre maximum de r -cycles de K linéairement indépendants par une relation d'homologie.

Les nombres de Betti sont indépendants de la triangulation de X et ne dépendent en fait que de X . RIEMANN a déjà utilisé ces nombres dans l'étude des périodes des intégrales abéliennes. C'est POINCARÉ qui leur a donné le nom de "nombres de Betti".

En introduisant une orientation sur les simplexes on a fait l'étude de l'homologie sur Z (au lieu de $\frac{Z}{2}$) et même sur G , où G est un groupe commutatif quelconque; le produit tensoriel permet d'ailleurs de déduire l'homologie sur G de l'homologie sur Z .

Les r -chaînes sont alors des combinaisons linéaires de r -simplexes orientés, à coefficients dans G . On définit un opérateur bord comme dans le cas de l'homologie modulo 2, le groupe des cycles $Z^r(K; G)$, le groupe des bords $B^r(K; G)$ vérifiant $B^r(K; G) \subset Z^r(K; G)$

$$\text{et le groupe d'homologie } H^r(K; G) = \frac{Z^r(K; G)}{B^r(K; G)}.$$

Dans le cas particulier où $G = Z$ le rang de $H^r(K; Z)$ est le nombre de Betti p^r de dimension r de K , et les ordres des groupes cycliques finis figurant dans la décomposition de $H^r(K; Z)$ sont les coefficients de torsion de K .

POINCARÉ généralisa ainsi la formule d'EULER :

$$\sum_r (-1)^r \alpha_r = \sum_r (-1)^r p^r$$

où α_r est le nombre des r -simplexes de K et p^r le nombre de Betti de dimension r .

Les travaux de POINCARÉ ont essentiellement porté sur des morceaux de l'espace Euclidien de dimension n et sur des "espaces" se comportant autour de chaque point comme des espaces Euclidiens. Ces espaces sont aujourd'hui appelés "variétés". POINCARÉ établit que si K est la triangulation d'une variété de dimension n

$$p^r(K) = p^{n-r}(K) \quad \text{entre nombres de Betti.}$$

Cette relation est appelée relation de dualité de POINCARÉ.

Nous avons évoqué la genèse de la topologie combinatoire qui a porté initialement sur des morceaux de l'espace Euclidien, c'est à dire d'espaces géométriques auxquels une certaine intuition sinon une certaine vision pouvait permettre d'accéder . Ainsi ces espaces ce sont laissés trianguler sans trop de difficulté .

Nous avons évoqué auparavant le rôle de LEIBNIZ qui a posé le problème des limites .

La topologie étant l'étude des propriétés préservées par déformation il apparut primordial de définir avec précision cette notion de déformation . Et d'abord que peut-on envisager de déformer ? Il fallait que la notion de continuité d'abord exprimée en terme de limite ait un sens : il fallait aussi que cette notion de limite fut compatible avec la notion usuelle exprimée en terme de distance lorsqu'il y a une notion de distance, par exemple pour les espaces euclidiens .

Les espaces topologiques sont précisément les ensembles (dont la théorie générale a été fondée par CANTOR) munis d'une notion de limite, de telle sorte que les fonctions continues sont définies sur ces espaces de la manière suivante :

$f : X \rightarrow Y$ est continue si $\forall p$ limite d'un ensemble $A \subset X$, $f(p)$ est limite de $f(A) \subset Y$. Si f est biunivoque (propriété ensembliste) continue, à fonction inverse continue, f est un homéomorphisme .

Ainsi la notion de variété étudiée par POINCARÉ peut-être précisée : un espace X est une variété de dimension n si tout point admet un voisinage homéomorphe à une boule de l'espace Euclidien . Des propriétés combinatoires permettent de définir les bords d'une variété .

La définition d'espaces topologiques à partir d'une famille d'ouverts est due à HAUSDORFF (1914) .

Un espace métrique, c'est à dire dans lequel existe une fonction distance, détermine une structure topologique par la notion de limite associée à celle de distance . Une question se pose alors naturellement : quels sont parmi les espaces topologiques ceux dans lesquels une distance peut-être introduite, déterminant une topologie qui soit précisément la topologie initiale ? De tels espaces sont appelés métrisables et leur étude continue à poser de difficiles problèmes

Nous n'insisterons pas sur les propriétés de séparation des espaces topologiques, propriétés qui interviennent naturellement dans l'étude de la métrisabilité et dans bien d'autres questions .

La notion essentielle d'espace compact due à FRECHET (1906), HAUSDORFF , TICHONOV (1920) joue un rôle fondamental en Analyse (introduction du nombre de Lebesgue d'un recouvrement ouvert) et dans toute la topologie, tout particulièrement dans la topologie combinatoire car tout espace triangulable est compact .

C'est l'étude des espaces topologiques, jamais interrompue depuis HAUSDORFF, qui constitue aujourd'hui la topologie générale .

LA TOPOLOGIE ALGEBRIQUE .

Les succès de la topologie combinatoire au début du siècle ont conduit les chercheurs à en étendre les méthodes, en sortant d'abord du cadre trop étroit des polyèdres .

En 1908 SCHOENFLIES démontrait que tout homéomorphisme de S^1 plongé dans R^2 , sur une courbe du plan R^2 pouvait être étendu en un homéomorphisme du plan sur lui-même . Ce résultat ne pouvait être généralisé à S^1 plongé dans R^3 , d'où la théorie des noeuds . La généralisation du problème de SCHOENFLIES pouvait aussi être tentée pour un homéomorphisme de la sphère S^2 plongée dans R^3 , sur une surface S plongée dans R^3 ; ALEXANDER (1924) établit cette généralisation dans le cas où S est un polyèdre (triangulation finie) mais donna le célèbre exemple de la "sphère cornue" qui établissait l'impossibilité de l'extension dans le cas général . Ces questions de plongement ont conduit ALEXANDER (1923) à une célèbre formule de dualité :

$$p^r(K;2) = p^{n-1-r}(S^n-K;2) \quad \text{en homologie modulo 2}$$

dans cette formule S^n est la sphère de dimension n et K une partie triangulable de S^n .

Bien évidemment il fallait étendre la théorie de l'homologie à d'autres espaces que les polyèdres . Pour les espaces compacts connexes une théorie de l'homologie fut donnée en 1927 par VIETORIS puis par CECH (1932) qui construisait un complexe associé à un recouvrement de l'espace, et définit à partir de ce complexe une homologie qui fournissait les mêmes groupes que ceux de VIETORIS, tout en mettant en évidence le caractère d'invariants topologiques des groupes obtenus .

La cohomologie de DE RHAM perfectionnait les formules de dualité de POINCARÉ pour les variétés et ouvrait la voie à une théorie universelle de l'homologie parfaitement axiomatisée par EILENBERG et STEENROD .

Une importante question restait cependant en souffrance : l'homéomorphisme paraît la voie la plus naturelle pour la classification des espaces . La topologie combinatoire avait de son côté introduit la notion d'espaces combinatoirement équivalents, par l'intermédiaire de triangulations convenablement subdivisées . JHC WHITEHEAD développait abstraitement les structures combinatoires (1930) mais la question restait posée de l'équivalence de la classification combinatoire et de la classification par homéomorphismes . Il fallut attendre MILNOR (1960) pour connaître la réponse négative à ce problème, la démonstration de MILNOR reposant largement sur les notions introduites par WHITEHEAD .

LERAY (1943) créait un outillage entièrement nouveau ; ses suites spectrales en particulier révolutionnaient les méthodes de la topologie algébrique et permettaient à SERRE d'aborder avec succès l'homologie des espaces fibrés .

HOMOTOPIE ET CONJECTURE DE POINCARÉ .

La classification des espaces, premier but de l'homologie, allait de pair avec une classification des applications (continues) d'un espace X dans un espace Y .

Le critère de classification choisi initialement était un critère de déformabilité :

$f \simeq g : X \rightarrow Y \Leftrightarrow \exists F : X \times I \rightarrow Y$ continue telle que

$\forall x \in X$, $F(x,0) = f(x)$, $F(x,1) = g(x)$

(on dit aussi que f est déformable en g dans Y) .

La classification des applications par ce critère dit d'homotopie conduisait à une classification correspondante des espaces :

s'il existe $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$

tels que $g \circ f \simeq \text{Id}_X$ et $f \circ g \simeq \text{Id}_Y$ on dit que X et Y sont de même type d'homotopie .

Tout naturellement se pose la question des rapports entre l'équivalence homotopique et l'équivalence homéomorphique quoique cette dernière soit évidemment plus fine que l'équivalence homotopique .

On sait établir que toute variété du même type d'homotopie que S^2 est homéomorphe à S^2 et il est établi maintenant que la proposition est vraie pour toutes les sphères S^n pour $n \neq 3$ et $n \neq 4$! . La vérité de cette proposition pour $n = 3$ et $n = 4$ constitue la conjecture de POINCARÉ, qui reste toujours un défi au monde des topologistes .

L'étude des classes d'homotopie (de fonctions de X dans Y) est particulièrement intéressante lorsque l'espace X est la sphère S^n . On choisit alors des homotopies fixes sur certains points . L'ensemble des classes d'homotopie d'application de S^n dans Y peut-être muni d'une structure de groupe et ce groupe que l'on note $\pi_n(Y)$ défini par HUREWICZ (1935) est le $n^{\text{ième}}$ groupe d'homotopie de l'espace Y . Le premier groupe d'homotopie $\pi_1(Y)$ introduit par POINCARÉ (1895) est le groupe fondamental de l'espace Y . Le quotient commutatif de $\pi_1(Y)$ est le premier groupe d'homologie $H_1(Y)$ et d'après un théorème d'HUREWICZ, le premier (dans l'échelle des dimensions) groupe d'homotopie non trivial est isomorphe au groupe d'homologie de même dimension qui est aussi le premier non trivial . Ces derniers résultats permettent de simplifier l'énoncé de la conjecture de POINCARÉ : "toute variété de dimension 3, simplement connexe est homéomorphe à S^3 " .

POINCARÉ avait initialement annoncé qu'une méthode analogue à celle qu'il venait de développer pour un autre problème, permettait de démontrer ce qui devait devenir sa célèbre conjecture, exprimée alors au moyen des nombres de Betti. HEGAARD mit alors en évidence des espaces dont les groupes d'homologie avaient une torsion. POINCARÉ dut alors réviser sa définition des nombres de Betti. De nouveaux contre exemples amenèrent POINCARÉ à exprimer sa conjecture en faisant intervenir le groupe fondamental.

Les applications des sphères dans les sphères ont préoccupé intensivement les topologistes et en particulier l'étude des classes d'homotopie des applications de S^{2n-1} dans S^n ont conduit HOPF (1935) à la mise en évidence d'invariants numériques, les invariants de HOPF, qui posèrent beaucoup de questions auxquelles la réponse ne fut apportée qu'en 1958.

LE PROBLEME DES 4 COULEURS .

Parmi les problèmes de nature topologique il en est un très ancien encore incomplètement résolu, appelé le problème des 4 couleurs .

Combien faut-il de couleurs distinctes pour colorier une carte de telle sorte que deux régions ayant un morceau de frontière commun soient de couleurs différentes ?

L'expérience semble montrer que 4 couleurs sont suffisantes. Ce problème a déjà été abordé par MOEBIUS (1840) , DE MORGAN (1850) , CAYLEY (1878) puis "démontré" par KEMPE (1879) . L'erreur de la démonstration de KEMPE fut mise en évidence par HEARWOOD (1890) qui démontra que 5 couleurs sont suffisantes . Mais le problème reste ouvert pour 4 couleurs ; les contre exemples à la conjecture que 4 couleurs sont suffisantes exigent un grand nombre de régions (plus de 38) dont un grand nombre de pentagones , mais aucun n'a pu être encore trouvé .

Paradoxalement le problème est résolu pour des surfaces plus compliquées que la sphère : pour le tore le coloriage est possible avec 7 couleurs et ce nombre 7 est bien minimum .

CONCLUSION .

Il est hors de question de faire le point sur les tendances actuelles des recherches topologiques .

Le développement en est tellement rapide, qu'en 1963 EILENBERG lui-même écrivait :

" Le sujet entier change radicalement à chaque décade, si bien que quiconque s'en est écarté pendant quelque temps, peut très bien ne plus comprendre un mot d'une nouvelle publication " .

Nous avons délibérément laissé de côté la topologie différentielle, cependant déjà brillante avant les années 50 ; extraordinairement florissante sous l'impulsion de MORSE, WHITNEY, DE RHAM, puis GROTHENDIECK, ATIYAH, HIRZEBRUCH (K-théorie) , MILNOR, WALL, SMALE etc... la topologie différentielle a eu d'éclatants succès, dans la topologie algébrique elle-même .

La topologie ne s'est jamais séparée des autres disciplines mathématiques, et son imbrication est de plus en plus profonde et féconde avec l'algèbre, la géométrie algébrique, l'analyse, la théorie des équations aux dérivées partielles et la mécanique (LERAY) . Si la topologie trouve parfois ses problèmes dans d'autres branches des mathématiques et en retient des idées de méthodes pour ses propres problèmes (rôle de la géométrie différentielle par exemple) il faut aussi souligner son apport dans ces autres disciplines et tout particulièrement remarquer que la théorie des catégories et l'algèbre homologique, branches aujourd'hui parfaitement autonomes, sont directement issues de la topologie algébrique .

Le développement de la topologie, s'il est explosif par la variété et la quantité de résultats acquis chaque jour, n'en disloque pas pour autant les mathématiques, bien au contraire .

SUR UNE PRESENTATION DES ESPACES AFFINES

* * *

Jean MARION - I.R.E.M. d'AIX-MARSEILLE

INTRODUCTION .

Les deux présentations classiques de la notion d'espace affine sont les suivantes :

Définition 1 : "Etant donné un espace vectoriel \mathcal{D} sur un corps \mathbb{K} , on appelle espace affine associé à \mathcal{D} tout ensemble E sur lequel le groupe additif $(\mathcal{D}, +)$ opère fidèlement et transitivement".

Définition 2 : "Etant donné un espace vectoriel \mathcal{D} sur un corps \mathbb{K} , on appelle espace affine associé à \mathcal{D} tout ensemble E tel qu'il existe une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathcal{D}$ telle que :

(a₁) : $\forall (a, b, c) \in E^3 : \varphi(a, b) + \varphi(b, c) = \varphi(a, c)$

(a₂) : $\forall X \in \mathcal{D}, \forall \omega \in E, \exists u \in E$ tel que $\varphi(\omega, u) = X$ " .

La définition 1 est celle que l'on peut qualifier de bourbakiste et qui est traditionnellement réservée à l'Enseignement supérieur .

La définition 2 est celle traditionnellement réservée à - et utilisée par - l'Enseignement secondaire (2ème cycle) .

Ces deux définitions, qui sont, bien sûr, équivalentes, présentent un certain nombre d'inconvénients d'ordres pédagogiques, didactiques et épistémologiques .

Nous plaçant du point de vue de l'enseignement secondaire, nous ne pouvons que rejeter la définition 1 qui fait appel à la notion d'espace homogène associé à un ensemble sur lequel un groupe opère, notion non abordée dans l'enseignement secondaire ; par ailleurs vouloir introduire cette notion uniquement pour introduire la structure affine paraît peu soutenable . La définition 2 a l'avantage de se suffire à elle-même dès lors que la structure vectorielle est connue, et donc paraît être celle que l'on doit utiliser dans le second cycle des lycées . Mais il nous paraît clair que :

- (α) Sous son apparente simplicité la définition 2, notamment pour quelqu'un qui aborde pour la première fois la structure affine, est extrêmement artificielle ; ce n'est qu'après exploitation de cette définition que l'on peut "voir" comment apparaît une structure affine et comment cela se construit .
- (β) L'expérience de l'enseignement secondaire, montre que les "définitions" de notions qui "passent bien" et qui sont opératoires sont celles qui n'utilisent pas une axiomatique aussi sophistiquée que formelle, mais une axiomatique constructiviste . Cette conclusion reste probablement vraie dans l'enseignement supérieur jusqu'à la maîtrise . C'est une attitude "conviviale" au sens d'Illich en ce sens qu'on maîtrise et domine bien la notion puis qu'on construit le modèle, ce qui, au passage, garantit l'existence du modèle . Les définitions 1 et 2 ne sont pas constructivistes .
- (γ) Aussi bien la définition 1 que la définition 2 cachent, ou du moins ne mettent pas suffisamment en évidence la réalité profonde (et en fait la seule) de la structure affine sur un ensemble E , à savoir l'existence de bijections de E , sur un certain espace vectoriel, parmi lesquelles on privilégie certaines d'entre elles pour obtenir une structure affine déterminée .

Nous nous proposons ici une présentation constructiviste de la notion d'espace affine de dimension finie . La partie (A) est un exposé théorique ; la partie (B) est un essai de ce qui pourrait se faire en classe de 2^{ème} et en classe de Terminale dans l'optique de cette présentation .

* * *

(A) \mathbb{K} -ESPACE AFFINE DE DIMENSION n .

§ I. \mathbb{K} -SCHEMA AFFINE D'ORDRE n .

\mathbb{K} étant un corps, n un entier la structure vectorielle de \mathbb{K}^n sur \mathbb{K} est supposé connue . Nous supposons \mathbb{K} commutatif .

<p><u>Définition (i)</u></p>	<p>Soient E un ensemble, \mathbb{K} un corps, n un entier naturel . On dira que le triplet (E, \mathbb{K}, n) est un \mathbb{K}-schéma affine d'ordre n si et seulement si E est équipotent à \mathbb{K}^n .</p>
------------------------------	--

Notons $\mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n)$ l'ensemble des bijections de E sur \mathbb{K}^n ; dire que (E, \mathbb{K}, n) est un \mathbb{K} -schéma affine d'ordre n est donc équivalent à dire que $\mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n) \neq \emptyset$.

La proposition suivante fournit des exemples de

\mathbb{K} -schémas affines :

Proposition 1 : Soit \mathcal{B} un espace vectoriel de dimension finie sur un corps \mathbb{K} . Alors $(\mathcal{B}, \mathbb{K}, \dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{B}))$ est un \mathbb{K} -schéma affine d'ordre $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{B})$.

Preuve : Soit \mathcal{B} de dimension n sur \mathbb{K} , on sait qu'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels de \mathcal{B} sur \mathbb{K}^n ; en particulier \mathcal{B} est équipotent à \mathbb{K}^n .

C.Q.F.D.

Il y a apparemment d'autres ensembles susceptibles de fournir des schémas affines. Par exemple on sait que l'application $f :]-1, +1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x/(1-|x|)$ est bijective. Il en résulte que $(]-1, +1[, \mathbb{R}, 1)$ est un \mathbb{R} -schéma affine d'ordre 1, et que plus généralement $(]-1, +1[^n, \mathbb{R}, n)$ est un \mathbb{R} -schéma affine d'ordre n , bien que l'on n'ait pas envisagé une structure d'espace vectoriel sur $]-1, +1[^n$. Pourtant en fait cette structure vectorielle est sous-jacente, comme le montre la proposition suivante.

Proposition 2 : Soit (E, \mathbb{K}, n) un \mathbb{K} -schéma affine d'ordre n . Alors possède une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel isomorphe à \mathbb{K}^n .

Preuve : On a $\mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n) \neq \emptyset$; soit alors $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n)$, et $\forall (X, Y) \in E \times E$, $\forall a \in \mathbb{K}$ posons :

$$(\star) : X \dot{+} Y = f^{-1} [f(X) + f(Y)]$$

$$(\star\star) : a \cdot X = f^{-1} [af(X)].$$

De (\star) nous déduisons que $f(X \dot{+} Y) = f(X) + f(Y)$

De $(\star\star)$ nous déduisons que $f(a \cdot X) = af(X)$

Donc f est un isomorphisme linéaire de $(E, \dot{+}, \cdot)$ sur l'espace vectoriel \mathbb{K}^n .

C.Q.F.D.

La structure vectorielle de E , à un isomorphisme près, ne dépend donc pas de la bijection f choisie au départ.

Compte tenu des propositions 1 et 2 on a donc le :

Théorème 1 : (E, \mathbb{K}, n) est un \mathbb{K} -schéma affine d'ordre n si et seulement si E a une structure de \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n .

§ II . STRUCTURES AFFINES SUR UN SCHEMA AFFINE .

Remarquons d'abord que si $\mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n) \neq \emptyset$ et si $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n)$ alors pour tout $\omega \in \mathbb{K}^n$, l'application $f_\omega : X \rightarrow f(X) + \omega$ est aussi un élément de $\mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n)$: en effet soit $y \in \mathbb{K}^n$, $\omega \in \mathbb{K}^n$ donné ; f étant bijective il existe un unique élément $X \in E$ tel que $f(X) = y - \omega$, donc tel que $f_\omega(X) = y$.
 $\forall \omega \in \mathbb{K}^n$, on a évidemment $f_\omega(X) - f(X) = \omega \quad \forall X \in E$.

Ceci nous amène à étudier la relation \mathcal{N} définie sur $\mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n)$ par :

$f \mathcal{N} g \Leftrightarrow f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n), g \in \mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n)$ et il existe $\omega \in \mathbb{K}^n$ tel que $f(X) - g(X) = \omega \quad \forall X \in E$.

Proposition 3 : Soit (E, \mathbb{K}, n) un \mathbb{K} -schéma affine d'ordre n : La relation \mathcal{N} est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n)$.

Preuve . La démonstration est immédiate et la laissons aux soins du lecteur .

Proposition 4 . Soit (E, \mathbb{K}, n) un \mathbb{K} -schéma affine d'ordre $n, f, g \in \mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n)$; alors $f \mathcal{N} g \Leftrightarrow f(Y) - f(X) = g(Y) - g(X), \forall (X, Y) \in E \times E$.

Preuve . $f \mathcal{N} g \Leftrightarrow \exists \omega \in \mathbb{K}^n$ tel que $\forall Z \in E, f(Z) - g(Z) = \omega$ et donc $f(Y) - f(X) = [f(Y) + \omega] - [f(X) + \omega] = g(Y) - g(X)$.

Inversement si $f(Y) - f(X) = g(Y) - g(X), \forall (X, Y) \in E \times E$

on a $f(Y) - g(Y) = f(X) - g(X) \quad \forall (X, Y) \in E \times E$, donc

$(f-g)(Y) = (f-g)(X) = c^{te} = \omega \in \mathbb{K}^n$, donc $f \mathcal{N} g$.

C.Q.F.D.

On notera $S(E, \mathbb{K}^n)$ l'ensemble quotient $\mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n)/\eta$

Pour $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n)$, nous noterons \hat{f} la classe de f modulo η .

Définition (ii) || Les éléments de $S(E, \mathbb{K}^n)$ sont appelés les structures affines du \mathbb{K} -schéma affine (E, \mathbb{K}, n) .

Cela étant, soit (E, \mathbb{K}, n) un \mathbb{K} -schéma affine d'ordre n , $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n)$ et $\hat{f} \in S(E, \mathbb{K}^n)$; considérons l'application $\dot{f} : E \times E \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par $(X, Y) \rightarrow \dot{f}(X, Y) = f(Y) - f(X)$.

D'après la proposition 4, il est immédiat que si $f, g \in \mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n)$ alors $\dot{f} = \dot{g} \Leftrightarrow \hat{f} = \hat{g}$.

l'application \dot{f} ne dépend donc que de la structure affine \hat{f} choisie.

Définition (iii) || On appelle espace affine de dimension n la donnée d'un quadruplet $(E, \mathbb{K}, n, \hat{f})$ tel que (E, \mathbb{K}, n) soit un \mathbb{K} -schéma affine d'ordre n , et \hat{f} une structure affine sur ce \mathbb{K} -schéma.

Théorème 2 :

Soit $(E, \mathbb{K}, n, \hat{f})$ un espace affine; alors

$$(a_1) \quad \forall (X, Y, Z) \in E^3 : \dot{f}(X, Y) + \dot{f}(Y, Z) = \dot{f}(X, Z)$$

(a₂) Quels que soient $A \in E$ et $u \in \mathbb{K}^n$ fixés, il existe un unique élément $X \in E$ tel que $\dot{f}(A, X) = u$.

Preuve :

(a₁) : $\dot{f}(X, Y) + \dot{f}(Y, Z) = f(Y) - f(X) + f(Z) - f(Y) = f(Z) - f(X) = \dot{f}(X, Z)$, où f est un représentant quelconque de \hat{f} .

(a₂) : soit $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n)$ tel que $f \in \hat{f}$; alors il existe un unique élément $X \in E$ tel que $f(X) = u + f(A)$ et donc tel que $f(X) - f(A) = u$, donc tel que $\dot{f}(A, X) = u$.

C.Q.F.D.

Nous retrouvons ici ce qui est pris comme définition 2

(cf : introduction) .

Corollaire :

Soit $A \in E$, $f_A : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par $f_A(X) = \dot{f}(A, X)$
alors $\hat{f}_A = \hat{f} = \{f_A / A \in E\}$

Preuve : $f_A \in \mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n)$ résulte de (a_2) du théorème 2 .

Par ailleurs $\forall X \in E$, $f_A(X) - f(X) = f(X) - f(A) - f(X) = C^{te}$

donc $\hat{f}_A = f$ et $\{f_A / A \in E\} \subset \hat{f}$.

Inversement soit $g \in \hat{f}$: $\forall X \in E$, $y(X) - f(X) = u = C^{te}$

mais $f \in \mathcal{M}(E, \mathbb{K}^n)$ implique qu'il existe un unique élément

$A \in E$ tel que $f(A) = -u$ d'où $g(X) = f(X) + u = f(X) - f(A) = f_A(X)$.

C.Q.F.D.

Ainsi a-t-on fait le "tour" de la machine affine ?

Pas tout à fait :

Sur $E \times E$ considérons la relation \mathcal{G} (dite bien sûr équipollence) définie par : $(X, Y) \mathcal{G} (X', Y') \Leftrightarrow \dot{f}(X, Y) = \dot{f}(X', Y')$.

Il est immédiat que \mathcal{G} est une relation d'équivalence sur $E \times E$.

Notons $\vec{X}Y$ la classe de (X, Y) modulo \mathcal{G} , \tilde{E} l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation \mathcal{G} et

$F : \tilde{E} \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par $F(\vec{X}Y) = \dot{f}(X, Y) = f(Y) - f(X)$

F est une application car, soit $\vec{X}Y' = \vec{X}Y$ on a bien

$$F(\vec{X}Y) = \dot{f}(X, Y) = \dot{f}(X', Y') = F(\vec{X}Y') .$$

Soit $u \in \mathbb{K}^n$; pour $X \in E$, $\exists ! Y \in E$ tel que $\dot{f}(X, Y) = u$ donc $F(\vec{X}Y) = u$; si on a $F(\vec{X}Y') = u$;

alors $\dot{f}(X, Y) = \dot{f}(X', Y')$ donc $\vec{X}Y = \vec{X}Y'$. Par suite F est

bijective . Donc \tilde{E} a une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{K} isomorphe à \mathbb{K}^n (Théorème 1) , donc de dimension n sur \mathbb{K} .

Cette fois on a bien fait le tour de la machine affine !

§ III. PLAN AFFINE REEL EN CLASSE DE SECONDE .

Connaissances supposées acquises .

- 1°/- Structure vectorielle de $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- 2°/- Notion de relation d'équivalence et de classes d'équivalence .
- 3°/- Vu en 3ème une tentative d'établissement d'une bijection du "plan physique" sur \mathbb{R}^2 .

LES ETAPES .

1ère étape : Il existe des ensembles \mathcal{A} tels qu'on puisse établir une bijection de \mathcal{A} sur \mathbb{R}^2 (rappel du plan physique)

Soit donc un ensemble \mathcal{A} dont les éléments seront appelés points, tel qu'il existe une bijection f de \mathcal{A} sur \mathbb{R}^2 : $A \in \mathcal{A} \rightarrow (a, a') \in \mathbb{R}^2$.

On se propose de structurer \mathcal{A} à l'aide d'une application \hat{f} de \mathcal{A}^2 dans \mathbb{R}^2 définie à partir de f .

2ème étape : les bipoints :

- a) On appelle bipoint tout élément (A, B) de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, A est l'origine B l'extrémité .
- b) On définit l'application $\hat{f} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^2$ par $\hat{f}(A, B) = f(B) - f(A)$
Si donc $f(A) = (a, a')$, $f(B) = (b, b')$:
 $\hat{f}(A, B) = (b-a, b'-a')$.
- c) On étudie les propriétés de \hat{f} :
 - $\forall A \in \mathcal{A}$, $\hat{f}(A, A) = (0, 0)$
 - $\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2$: $\hat{f}(B, A) = -\hat{f}(A, B)$
 - $\forall (A, B, C) \in \mathcal{A}^3$: $\hat{f}(A, B) + \hat{f}(B, C) = \hat{f}(A, C)$
 - $\forall A \in \mathcal{A}$, $\forall (C, C') \in \mathbb{R}^2$, $\exists ! B \in \mathcal{A}$ tel que $\hat{f}(A, B) = (C, C')$
 - Montrer par des contre exemples que \hat{f} , si elle est surjective, n'est pas injective .

3ème étape : équipollence de bipoints .

- la définition : $(A, B) \delta (C, D) \Leftrightarrow \hat{f}(A, B) = \hat{f}(C, D)$

- Montrer que δ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

4ème étape - On note $\vec{A}\vec{B}$ la classe d'équivalence pour \mathcal{G} du bipoint (A,B)

On note \mathcal{D}_2 l'ensemble de ces classes ou ensemble-quotient .

- Si on pose $\tilde{f}(\vec{A}\vec{B}) = \tilde{f}(A,B)$, on montre que \tilde{f} est une application de \mathcal{D}_2 dans \mathbb{R}^2 .

- On montre que \tilde{f} est une bijection .

5ème étape - Structure vectorielle sur \mathcal{D}_2

- On définit par $V,W \in \mathcal{D}_2$: $S = V + W \Leftrightarrow \tilde{f}(S) = \tilde{f}(V) + \tilde{f}(W)$

par $s \in \mathbb{R}$, $V \in \mathcal{D}_2$: $U = sV \Leftrightarrow \tilde{f}(sV) = s\tilde{f}(V)$

- On montre que $(\mathcal{D}_2, +, \cdot)$ a une structure d'espace vectoriel sur \mathbb{R} .

- On montre qu'il est isomorphe à \mathbb{R}^2 (donc a même dimension)

6ème étape - Les conséquences :

- On montre que : $\forall (A,B,C) \in \mathcal{D}_2^3$: $\vec{A}\vec{B} + \vec{B}\vec{C} = \vec{A}\vec{C}$, $\vec{B}\vec{A} = \vec{A}\vec{B}$

$\vec{A}\vec{B} = (0,0) \Leftrightarrow A = B$ etc...

§ IV . ESPACE AFFINE REEL EN PREMIERE - TERMINALE .

La démarche suivie en Seconde se généralise . On adoptera donc telle quelle la présentation (A) , en prenant chaque fois \mathbb{K} égal à \mathbb{R} . L'expérience montre qu'il n'y a aucune difficulté .

LIMITE D'UNE DERIVEE ET VALEUR D'UNE DERIVEE A LA LIMITE
EN TERMINALE C

* * *

J.C. BENIAMINO - I.R.E.M. d'AIX-MARSEILLE

Il est fréquent dans les problèmes d'analyse du Baccalauréat d'utiliser un résultat qui pour beaucoup est une évidence sans toutefois connaître exactement sa justification. La situation peut s'énoncer ainsi une fonction continue sur un segment fini $[a, b]$ est dérivable sur $]a, b[$ l'expression de f' calculée par des procédés classiques permet par exemple de constater que

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$$

existe et que cette valeur est fini ou infinie. Le réflexe est alors d'attribuer une dérivée à droite à la fonction f au point a et d'utiliser ce résultat pour le tracé de la courbe en faisant apparaître une demi-tangente convenable.

Dans le cadre actuel du programme de Terminale C ceci n'est pas justifié ; en toute rigueur la conclusion précédente ne peut être obtenue qu'après examen du rapport

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

quand x tend vers a . Cependant il convient de noter que cette étude est en général assez longue pour un élève.

Nous allons dans ce qui suit examiner le lien qui existe entre :

le comportement du rapport $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ et l'existence de $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$

La démonstration exige la connaissance du théorème de ROLLE ou plus précisément du théorème des accroissements finis (deux théorèmes qui ne sont pas au programme de la classe de Terminale C). On en rappelle les hypothèses et la conclusion : f étant continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ $a < b$ il existe c , $c \in]a, b[$

$$\text{tel que } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Démontrons maintenant le résultat qui nous occupe .

Soit donc f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ supposons de plus que

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l \quad (l \text{ fini ou infini})$$

alors f est dérivable au point a relativement à $[a,b]$ ou encore

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

admet quand x tend vers a ($x \in]a,b[$) une limite l .

Démonstration :

Soit $\xi \in]a,b[$ le théorème des accroissements finis peut s'appliquer au segment $[a,\xi]$ et donne donc

$$\frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} = f'(x) \quad \text{avec} \quad a < x < \xi$$

Comme $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$ il en résulte que $\lim_{\xi \rightarrow a} \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a} = l$

L'INFORMATIQUE DANS LE PREMIER CYCLE

Compte-rendu d'une expérience pédagogique conduite en 1973-74 sous le titre : " EMPLOI DE MINI-ORDINATEURS POUR UNE NOUVELLE MOTIVATION DES MATHÉMATIQUES ET UNE PRE-INITIATION A L'INFORMATIQUE " .

* * *

Gérard CONVERSET - CES Henri Wallon Marseille

Sous ce titre général, se sont développées depuis quelque temps, diverses recherches dont une, plus directement accessible à nos élèves, nous a été proposée par l'IREM de Marseille et l'INRDP . Il s'agit de concrétiser certains aspects du cours et en l'illustrant, de renouveler l'intérêt des élèves pour les Mathématiques . Il s'agit d'autre part de contraindre l'utilisateur du calculateur programmable à une rigueur totale dans la formalisation, la machine ne pouvant répondre que si les instructions lui ont été fournies correctement . Par là même, les élèves en situation de recherche ont à analyser un problème, à en discuter, et vont commander à l'instrument . Ils en recevront avec la joie de la réussite, une vision plus analytique des situations qui leur seront proposées .

Un de nos objectifs était d'utiliser la machine comme substitution pour faciliter l'approche de la notion mathématique de variables et de constantes, notions mal maîtrisées dans la classe de quatrième .

Tout d'abord, entendons nous sur le sens que nous donnons à ces termes dans les langages mathématique et informatique . On a pu dire de l'informatique (mais nous sommes là tout près de la recherche d'un algorithme ...) qu'elle est la description du travail à faire avant son exécution, alors qu'en Mathématique, on travaille sur des énoncés indépendants du temps . Pour le mathématicien, les constantes et les variables sont des symboles intervenant dans des énoncés , la variable ne repère aucune valeur, mais est susceptible d'être remplacée par une substitution, alors que la constante désigne un élément de l'univers dans lequel on travaille . L'opération fondamentale sur les variables est donc la substitution et l'intérêt des variables est d'écrire des énoncés généraux . En informatique une constante désigne une valeur, alors que la variable repèrera l'état d'un registre . En construisant un programme, on veut ainsi décrire la suite des opérations se rapportant à des données .

Notre objectif étant fixé, il nous fallait clarifier de façon aussi nette que possible nos hypothèses, afin d'en vérifier éventuellement le bien-fondé .

L'utilisation de mini-ordinateurs en 4ème permet-elle un transfert d'apprentissage dans une situation nouvelle ?

Peut-on s'en rendre compte dans un exercice ?

Si oui, cherchons-en pour servir de tests, et , en neutralisant certaines variables (Sociologiques ou culturelles celles-là ...) bâtissons un plan expérimental permettant tout d'abord d'appareiller des classes expérimentales avec des classes témoins, des types I avec des types II . Au total, 40 classes participèrent à l'expérience de part la France : (10 expérimentales de Type I, 10 de type II , 10 classes témoins de type I et 10 de type II) , qui dans leur ensemble doivent représenter autant que faire se peut, des populations semblables . Des tests, dont la valeur sera expérimentée au préalable sur des classes extérieures à l'expérience seront passés simultanément par les 40 classes à des périodes très impératives afin, d'une part de neutraliser l'apport de nouvelles connaissances dans une classe plutôt que dans une autre, et d'autre part de permettre une correction et un traitement informatique et statistique des résultats, ces corrections se faisant suivant des grilles préétablies pour éliminer toute interprétation des réponses de la part du correcteur .

Trois séries de tests seront ainsi passées :

- Mi-Octobre .: Contrôle des connaissances par les tests "Entrée" .
- Fin-Janvier : Contrôle des acquisitions par la passation des tests "Sortie" .
- Fin Mai : Contrôle des capacités de réutilisation des notions acquises au cours de la phase d'apprentissage, alors que les élèves des classes expérimentales ne sont plus en contact avec la machine depuis cinq mois environ : tests "Fin" .

De mi-October à fin Janvier, "Phase d'apprentissage" . Des fiches programmées ont été établies et distribuées à chaque élève des classes expérimentales, afin de supprimer l'influence du professeur, qui empêcherait toute analyse convenable des résultats des tests . Bien entendu, les enfants ne seront pas aidés au cours de la passation des épreuves pour avoir une absolue similitude de situation avec les classes témoins .

Cette phase, en contact avec les machines , dure environ 20 heures prises pendant les heures normales du cours ou de travaux dirigés, pendant que les élèves des classes témoins étudient le programme normal d'algèbre de 4ème .

Les batteries de tests ont été mises au point au cours de différents stades nationaux . L'interprétation de tous les résultats, qui doit se faire à Rennes; n'est pas encore terminée ;

l'analyse des différents facteurs, les corrélations possibles entre variables, la comparaison avec les résultats antérieurs, rendent délicate une analyse rapide ; des phénomènes inattendus et parfois contradictoires apparaissant en cours d'étude .

Revenons sur la période d'apprentissage (Octobre 73 / Janvier 74) .

Au cours du 1er trimestre de l'année, nous avons pu utiliser dans notre région des calculateurs programmables Olivetti P 101 prêtés par les constructeurs ou des établissements plus riches . Ces machines présentées aux élèves à l'aide de fiches fournies par l'INRDP après mise au point commune ont eu un effet puissant de motivation et d'animation dans le groupe d'élèves . Des discussions sur la valeur d'une série d'instructions, sur la recherche d'une méthode permettant de calculer avec économie, sur des thèmes originaux, animèrent la classe, toujours sanctionnées par la réponse de la machine, qui ne répond qu'à une formalisation rigoureuse .

Les élèves devaient ainsi se familiariser avec la notion de changement d'état des registres, de transfert, et bien entendu d'opérations . Des organigrammes relatifs à des recherches particulières étaient proposés par les enfants et discutés en commun, aiguillant l'esprit critique . On aurait pu facilement être plus ambitieux au cours de cette phase, les fiches programmées sur lesquelles nous travaillions ayant l'inconvénient de trop "disséquer" l'avance du travail, rendant celle-ci trop facile .

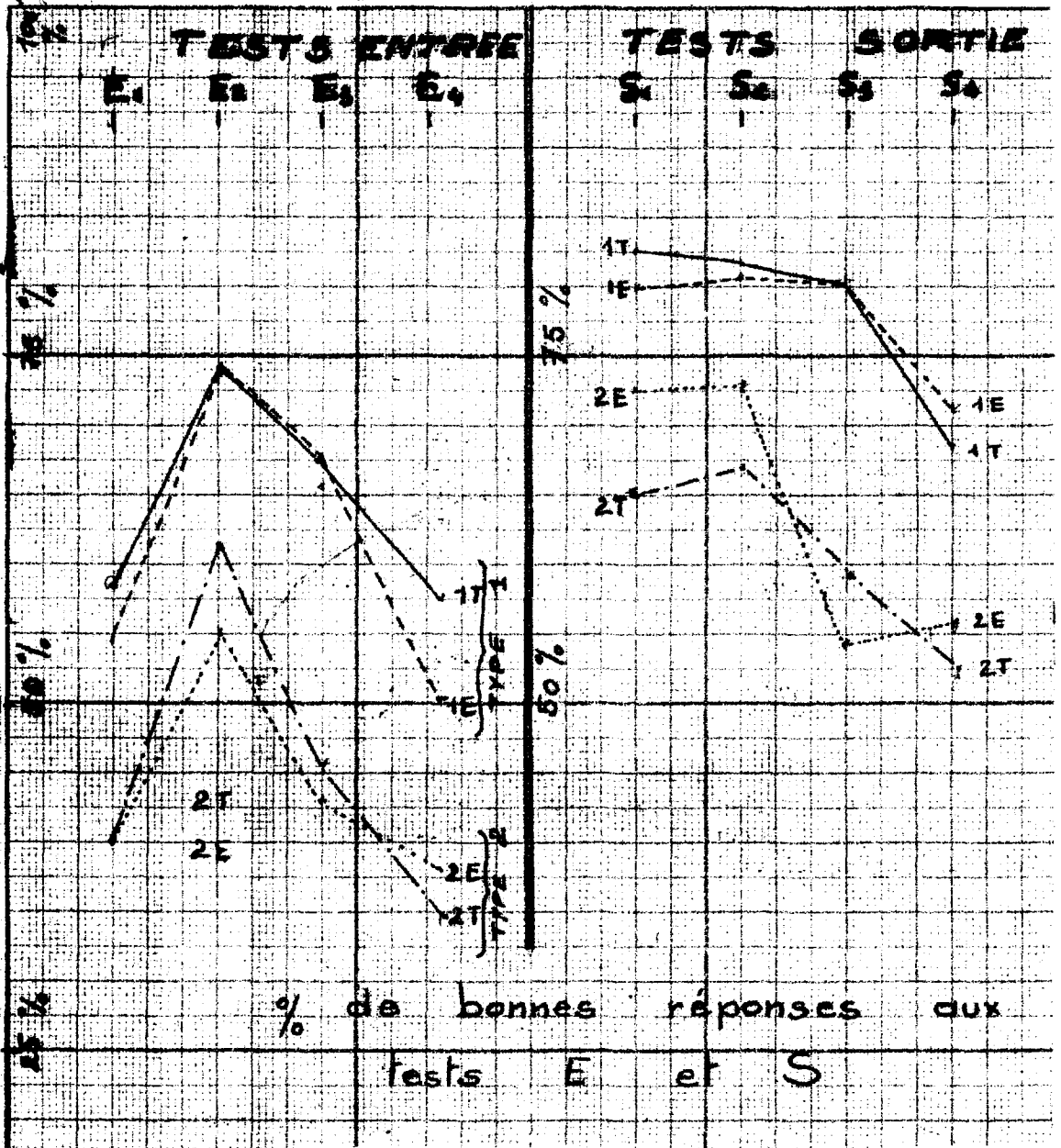
Le temps passé avec la machine a été rattrapé par une assimilation plus rapide du programme d'algèbre . (Calcul sur les polynômes, fonctions, puissances, voire factorisations et identités) . Quelques Collègues ont utilisé ainsi le 10 % , ou des travaux en club .

Analysons à la lumière des résultats connus le bénéfice que procure l'introduction dans les classes du premier cycle d'un mini-ordinateur, de façon globale, sans tenir compte ni de l'interprétation des divers facteurs, ni d'une analyse sectorielle plus fine (Pour un établissement, pour les garçons, les filles, pour les élèves de tel ou tel âge ...)

On rappelle que E désigne les tests d'entrée (Octobre) , S les tests de sortie (Février) E1 , E2 ... les groupes de questions d'un test, classés par série

1 T ; 1 E les classes témoins et expérimentales de Type I

2 T ; 2 E les classes témoins et expérimentales de Type II



% de bonnes réponses aux tests E et S

On remarque tout d'abord une assez bonne homogénéité entre les Classes T et E d'une même catégorie et de meilleurs résultats pour les classes de type 1, dues au recrutement. On constate d'autre part, qu'en février les classes expérimentales 2 sont plus performantes que les témoins de même type, alors que pour les classes 1, les résultats sont pratiquement identiques. On ne peut que regretter que les fiches d'apprentissage n'aient pu être mieux adaptées au niveau des élèves ou même, différenciées, autorisant un objectif plus large.

Le traitement des tests par analyse des correspondances permet de dégager un certain nombre de points importants concernant le comportement des différentes classes aux questions des tests de sortie.

Tout d'abord une grande différence de résultat devant la question 1 de S_1 , pour laquelle des classes entières ont bien ou mal répondu, la plupart des réponses incorrectes étant des réponses incomplètes .

Pour étudier l'attitude des classes vis à vis de l'ensemble des autres questions et les profils comparés des questions entre elles, une autre analyse a été faite en mettant ces questions en "éléments supplémentaires " .

Il apparait que l'évolution des classes de type 1 et 2 est très différente . La répartition des classes expérimentales et témoins aux tests d'entrée et de sortie est très différente pour les classes de type 2 .

Alors que dans les tests d'entrée, on ne trouvait du côté positif (haut niveau) qu'une classe témoin et pas de classe expérimentale, pour les tests de sortie, on trouve 2 classes témoins et 4 classes expérimentales . Une analyse plus fine a même montré que tous les types 2 expérimentaux ont transité vers un niveau supérieur, ce qui signifie qu'ils ont tous amélioré leurs réponses ; mieux que l'ensemble des autres classes . Il faut encore rechercher comment a pu évoluer un enfant déterminé en cours d'année et par comparaison, en déduire ce qui est dû à l'apprentissage de cet outil pédagogique qu'est le mini-ordinateur .

Au cours de l'année 74-75, l'expérience sera reconduite sur le même thème, modifiée par l'expérience acquise .

G. CONVERSET .

Ont participé à l'expérience dans la région ;

Pour les classes expérimentales .

Mmes ANSAS et PATALANI
MM. CHAVE, CONVERSET, MATHE

Pour les classes témoins .

Mmes PERRIER et COUTTON
MM. VITIELLO, SOULA, PERSEGOL

Animateur :

Gilles THOMAS .

RECHERCHE I.R.E.M. - I.N.R.D.P.

* * *

Groupe de Travail : MATHÉMATIQUE-PHYSIQUE

Le travail portera pour l'année scolaire 1974-1975 sur les sujets suivants :

* LYCEE MARSEILLEVEYRE - Classe de Première D :

- En liaison avec le problème de la Construction de Courbes expérimentales, étude de la droite de régression .
- Etude du flux en électro magnétisme .
- Triangles homothétiques en liaison avec l'électro statique .

* LYCEE MONTGRAND - Classe de Première C :

- Utilisation des objets décrits par l'algèbre linéaire pour l'élaboration d'un Cours d'Optique .
- Essai de déroulement simultané des Cours de Mathématique et de Physique .

* LYCEE CEZANNE à AIX - Classe de Seconde C :

- Rapports entre Force et Vecteur .
- Elaboration de modèles simples conduisant à la notion d'espace vectoriel .
- Notion de champ de Vecteurs .
- Moment d'une force par rapport à un point .

Les résultats positifs ou négatifs de ces expériences seront étudiés en commun pendant les réunions du Mercredi après-midi qui ont lieu environ toutes les trois semaines . En fin d'année un stage général, rassemblant les groupes de travail de toutes les Académies, sera organisé à CARRY LE ROUET .

D E R N I E R E S A C Q U I S I T I O N S
D E L A B I B L I O T H E Q U E D U C . R . D . P .

Extrait du règlement :

" la bibliothèque du C.R.D.P. de Marseille est destinée aux membres de l'Enseignement public - et privé sous contrat d'association - de l'Académie d'Aix-Marseille et à toute personne assurant des cours de formation professionnelle .

 Pour bénéficier du prêt, un certificat d'exercice signé par le Chef d'établissement est nécessaire . L'inscription est valable pour une année scolaire .

 La durée du prêt est limitée à 3 semaines (maximum 3 volumes) et 1 semaine pour une revue .

 Les lecteurs résidant hors de Marseille peuvent demander l'envoi des ouvrages par la poste .

 L'expédition au lieu de fonction et le retour des ouvrages bénéficiant de la franchise postale sous le couvert de Monsieur le Recteur de l'Académie d'Aix-Marseille "

I. LIVRES

Réf.

- | | |
|----------------|--|
| 372.47
MIC | Mémento Mathématique -Cours Moyen
A.MICHELOT - C.R.D.P.de Bordeaux 1974 |
| 372.851
BAR | Echec et Math
STELLA BARUK - Seuil 1973 |
| 804.0-5
VAN | Franc-Math : introduction mathématique
3. La proposition
G. VAN HOUT - Didier 1974 |
| 512
JER | Activités sur quelques thèmes d'Algèbre
Louis JEREMY - Cedic IREM Poitiers 1974 |
| 510
JAR | Opérateurs à l'Ecole Elémentaire
F.JARENTE - Cedic 1974 |
| 372.47
MAR | Pédagogie Pratique de la Mathématique à
l'Ecole Elémentaire .
L.MARCAULT-DEROUARD -Sudel 1974 |

II. REVUES

- Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public .

N° 294, 295 (A.P.M.E.P.)

- Le Petit Archimède .

N° 8, 9, 10

- Bulletin d'Information des Professeurs d'Initiation Technologique .

N° 20 (Académie d'Aix-Marseille)

- Bulletin de l'Union des Physiciens .

N° 565, 566, 567

- Bulletin de Liaison : l'Informatique dans l'Enseignement Secondaire .

N° 11 (I.N.R.D.P.)

- Bulletin de Liaison de la Recherche en Informatique et Automatique (I.R.I.A.) .

N° 9, 10