QU'EST-CE QUE L'ALGEBRE ? UN DOMAINE OU UN LANGAGE ?

Conférence de :

Jean-Paul GUICHARD

IREM de Poitiers

Résumé : *En regardant les programmes actuels de l'enseignement en France, on peut se demander si l'algèbre existe encore. Pourtant nous avons le sentiment que l'algèbre fait bien partie des mathématiques. Aussi pour essayer de cerner ce qui la caractérise nous examinerons le contenu de deux traités. Puis nous explorerons deux grands axes.*

En premier lieu, à partir de l'origine du mot algèbre et du contexte dans lequel il est apparu, nous aborderons le domaine des équations auquel on identifie le plus souvent l'algèbre.

Pour la mise en équation des problèmes, vont peu à peu s'élaborer des notations, qui, telle la désignation par x de l'inconnue, vont servir de critère pour identifier le domaine algébrique.

Pour la résolution des équations se construisent progressivement des techniques purement algébriques, qui vont déboucher sur une théorie des équations.

En second lieu, à partir de la conception usuelle du calcul algébrique comme calcul littéral, nous examinerons la naissance du calcul littéral chez Viète, et son développement, à la suite de Descartes, comme outil de modélisation et de résolution de problèmes.

Comme outil de modélisation, il va envahir tous les domaines des mathématiques et des sciences dont l'algèbre va devenir le langage.

Comme calcul symbolique, il va permettre la définition des structures dites algébriques qui vont devenir l'algèbre moderne.

Nous terminerons en en tirant des enseignements pour la classe dans le cadre des programmes actuels.

1. Des questions

Qu'y a-t-il de commun entre l'*Algebra* de BOMBELLI (1572), les *Elémens d'Algèbre* de CLAIRAUT (1768) et l'*Algebra* de LANG (1969) ? La comparaison du contenu de ces deux derniers ouvrages est éloquente.

1768. CLAIRAUT. Elémens d'Algèbre.	1969. LANG. Algebra.
1. De la méthode algébrique d'exprimer les problèmes par des équations, et de la résolution des équations du 1er degré 2. Résolution des équations du 2^{e} degré 3. Principes généraux pour les équations de tous les degrés 4. Résolution des équations de degré quelconque quand elles n'ont que deux termes 5. Résolution des équations du 3^{e} et 4^{e} degré	1. Groups, Rings, and Modules Groups–Rings–Modules–Homology–Polynomials-Nœtherian Rings and Modules 2. Field theory Algebraic Extensions–Galois Theory – Extensionsof Rings – Transcendental Extensions–Real Fields–Absolute Values 3. Linear Algebra and Representation Matrices and Linear Maps–Structure of Bilinear forms–Representation of One Endomorphism–Multilinear Products–Semi-simplicity–representations of Finite Groups

D'où une première question : Comment le mot "algèbre" en est arrivé à désigner des contenus aussi différents ?

Si l'on regarde maintenant ce qui se passe au niveau de l'enseignement secondaire, tout du moins en France, on peut constater que l'algèbre est un domaine aux contours incertains qui tend à se dissoudre.

Au collège, les mots "algèbre" et "algébrique" ont complètement disparu des programmes, même si la partie des programmes intitulée "Travaux numériques" correspond pour une bonne part à celle qui dans les années 1960 s'intitulait "Arithmétique et Algèbre".

Au lycée, en terminale scientifique, le contenu d'un manuel d'algèbre des années 1960 se retrouve dans le manuel d'analyse des années 1990, et le seul chapitre, celui sur les complexes, rescapé du manuel d'arithmétique de 1960, apparaît comme un chapitre d'algèbre dans le manuel de géométrie de 1990!

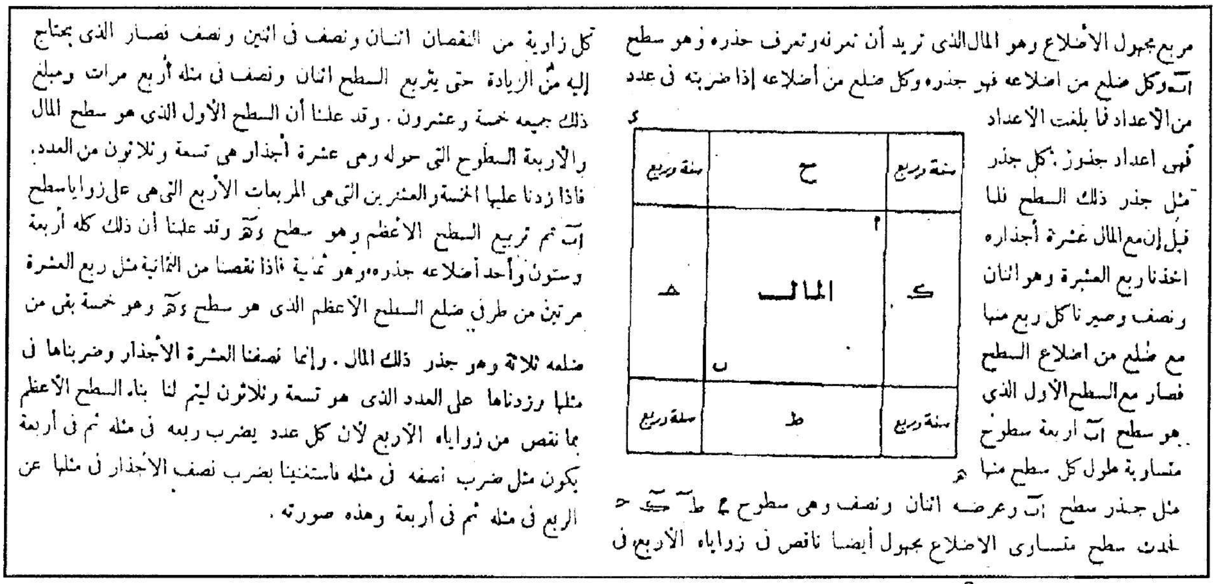
D'où une deuxième question : pourquoi le mot "algèbre" ne désigne-t-il plus, au niveau de l'enseignement secondaire, un ensemble de contenus ?

Il nous semble que des éléments de réponse à ces deux questions peuvent se trouver en considérant l'histoire des mathématiques.

2. Le domaine des équations

L'origine et l'emploi du mot "algèbre" vont nous servir de guide. C'est AL KHWARIZMI, mathématicien à Bagdad au 9ème siècle, qui va faire école. En effet, il publie un ouvrage sur les équations du premier et du second degré, avec des applications à des problèmes de géométrie et d'héritages, qu'il intitule *Court traité sur le calcul d'al-jabr et al-muqabala.* Ces deux termes désignent deux transformations de base des équations, al-jabr étant celle qui permet de "restaurer" l'équation en supprimant les soustractions. Le terme "algèbre" va dès lors désigner le domaine des équations. Mais, il faut remarquer qu'à cette époque le traitement des équations se fait sans aucun symbole. Tout s'exprime dans le langage ordinaire comme on peut en juger par le problème suivant où Al Khwarizmi donne la méthode pour résoudre l'équation $x^2 + a = bx$.

> Quant aux carrés et au nombre qui égalent des racines, c'est comme quand tu dis : un carré et vingt et un en nombre égalent dix de ses racines. Cela vaut aussi pour tout bien qui est tel que si on lui ajoute vingt et un dirhams, la somme qui en résulte est égale à dix racines de ce bien.
>
> La méthode de résolution consiste en ceci : prends la moitié des racines, cela fera cinq ; tu la multiplies par elle-même, cela fera vingt-cinq ; tu retranches les vingt et un dont on a dit qu'ils étaient avec les carrés, il restera quatre ; tu prends sa racine qui est deux ; tu la retranches de la moitié des racines qui est cinq. Il restera trois et c'est la racine du carré que tu voulais et le carré est neuf.



مربع مجهول الأضلاع وهو المال الذى تريد أن تعرفه وتعرف جذره وهو سطح اب وكل ضلع من اضلاعه فهو جذره وكل ضلع من أضلاعه إذا ضربته فى عدد من الأعداد فما بلغت الأعداد فهى اعداد جذور كل جذر مثل جذر ذلك السطح فلما قيل إن مع المال عشرة أجذاره اخذنا ربع العشرة وهو اثنان ونصف وصيرنا كل ربع منها مع ضلع من اضلاع السطح فصار مع السطح الأول الذى هو سطح اب اربعة سطوح متساوية طول كل سطح منها مثل جذر سطح اب وعرضه اثنان ونصف وهى سطوح ح ط ك ه فحدث سطح متساوى الاضلاع مجهول أيضا ناقص فى زواياه الأربع فى

كل زاوية من النقصان اثنان ونصف فى اثنين ونصف فصار الذى يحتاج إليه من الزيادة حتى يتربع السطح اثنان ونصف فى مثله أربع مرات ومبلغ ذلك جميعه خمسة وعشرون . وقد علمنا أن السطح الأول الذى هو سطح المال والأربعة السطوح التى حوله وهى عشرة أجذار هى تسعة وثلاثون من العدد . فاذا زدنا عليها الخمسة والعشرين التى هى المربعات الأربع التى هى على زوايا سطح اب تم تربيع السطح الأعظم وهو سطح ده وقد علمنا أن ذلك كله أربعة وستون وأحد أضلاعه جذره وهو ثمانية فاذا نقصنا من الثمانية مثل ربع العشرة مرتين من طرفى ضلع السطح الأعظم الذى هو سطح ده وهو خمسة بقى من ضلعه ثلاثة وهو جذر ذلك المال . وإنما نصفنا العشرة الأجذار وضربناها فى مثلها وزدناها على العدد الذى هو تسعة وثلاثون ليتم لنا بناء السطح الأعظم بما نقص من زواياه الأربع لأن كل عدد يضرب ربعه فى مثله ثم فى أربعة يكون مثل ضرب نصفه فى مثله فاستغنينا بضرب نصف الأجذار فى مثلها عن الربع فى مثله ثم فى أربعة وهذه صورته .

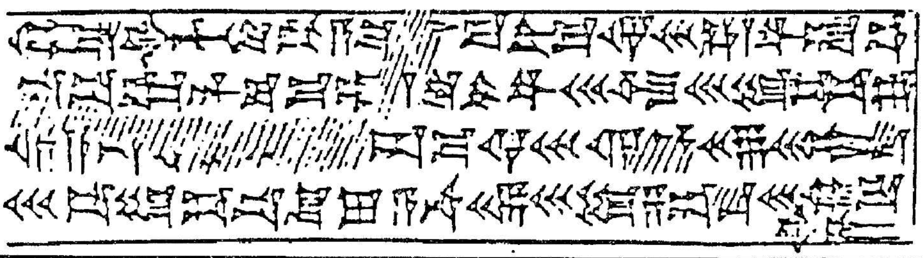
Fig. 1. Al Khwarizmi. Kitab al-Jabr wal-Muqabala. Résolution de l'équation : $x^2 + 10x = 39$

Il faut noter qu'AL KHWARIZMI démontre la validité de tous ses algorithmes en utilisant la géométrie d'EUCLIDE.

Si son traité marque la naissance d'une nouvelle discipline, est-ce à dire qu'auparavant la notion d'équation était inconnue des mathématiciens ? En fait, la recherche d'un nombre ou d'une quantité inconnue se rencontre dès les débuts de l'histoire des mathématiques, et lorsqu'il s'agit d'équations du second degré, on remonte généralement aux babyloniens. Peut-on alors, même s'il y a anachronisme, parler d'algèbre ? Examinons trois types de résolutions différents.

2.1. Babylone. Tablette BM 13901 Problème 2. 1800 avant J.C.

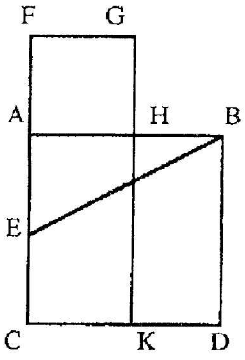
J'ai soustrait de la surface le côté de mon carré : 14`30. Tu poseras 1, l'unité. Tu fractionneras en deux 1 : (30'). Tu croiseras 30' et 30' : 15'. Tu ajouteras à 14`30 : 14`30°15'. C'est le carré de 29°30'. Tu ajouteras le 30' que tu as croisé à 29°30' : 30 le côté du carré.



Il s'agit de résoudre une équation du type $x^2 - x = a$. On peut remarquer que l'algorithme qui donne la solution est le même que celui qu'utilise AL KHWARIZMI dans le problème voisin que nous avons donné en exemple, et que la présentation de la méthode à suivre est très similaire. C'est pourquoi de nombreux auteurs parlent d'algèbre babylonienne ; ces problèmes babyloniens figurent d'ailleurs toujours dans l'histoire de l'algèbre. Mais quelle est la rupture qu'a introduite AL KHWARIZMI, et qui a été reconnue comme telle par ses successeurs dans leur emploi du nom d'algèbre pour leurs traités ? C'est certainement le fait d'avoir inversé l'ordre ancien problèmes-équations, en faisant des équations le point de départ et l'objet d'une étude mathématique. Nous allons pouvoir le vérifier sur deux autres types de résolution.

2.2. EUCLIDE. Les Eléments, livre II, proposition 11. 3e siècle avant J.C.

Couper une droite de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.



Soit la droite donnée AB. Il faut alors couper la droite AB de telle sorte que le rectangle contenu par la droite entière et l'un des segments soit égal au carré sur le segment restant.

En effet, que le carré ABCD soit décrit sur AB. Et que AC soit coupée en deux parties égales au point E. Que BE soit jointe, et que CA soit conduite jusqu'en F ; et que soit placée EF égale à BE, et que le carré FH soit décrit sur AF ; et que GH soit conduite jusqu'en K. Je dis que AB a été coupée en H de façon à rendre le rectangle contenu par AB, BH égal au carré sur AH.

Il s'agit de résoudre l'équation $cx = (c - x)^2$ qui peut se ramener au type $x^2 + a = bx$ d' AL KHWARIZMI. Nous voyons immédiatement que le problème d'Euclide est de construire géométriquement des grandeurs qui sont en fait solutions d'équations, et non de traiter de la résolution des équations. Dans sa démonstration Euclide utilise des transformations d'aires que nous pouvons lire comme des transformations d'expressions algébriques. C'est ce qui a fait dénommer, à la suite de Paul TANNERY (19es.), ces méthodes euclidiennes d'*algèbre géométrique*. D'ailleurs AL KHWARIZMI ne s'y est pas trompé : il a su interpréter algébriquement des résultats géométriques d'EUCLIDE, et ainsi pu démontrer la validité de tous ses algorithmes de résolution des équations par des méthodes géométriques puisées dans les Eléments d'EUCLIDE. Le cas de DIOPHANTE est différent.

2.3. Diophante : Les Arithmétiques, livre I, problème 27. 3ème siècle

Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés.

Proposons que la somme des nombres soit M̊ κ̄ (20 unités), et que leur produit soit M̊ ϙ̄ϛ̄. (96 unités)

Que la différence des nombres soit ϛ β̄ (2x). Dès lors, puisque la somme des nombres est M̊ κ̄ (20) si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou M̊ ῑ (10). Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de la différence des nombres, c'est-à-dire ϛ ᾱ (1x), il s'établit de nouveau que la somme des nombres est M̊ κ̄ (20), et que leur différence est ϛ β̄ (2x). En conséquence, posons que le plus grand nombre est ϛ ᾱ M̊ ῑ (1x + 10) donc le plus petit sera M̊ ῑ ⋔ ϛ ᾱ (10 − 1x), et il s'établit que la somme des nombres est M̊ κ̄ (20), et que leur différence est ϛ β̄ (2x). Il faut aussi que le produit des nombres fasse M̊ ϙ̄ϛ̄ (96). Or le produit est M̊ ρ̄ ⋔ Δ^{Υ} ᾱ (100 − $1x^2$), ce que nous égalons à M̊ ϙ̄ϛ̄ (96), et ϛ devient M̊ β̄ (2).

En conséquence, le plus grand nombre sera M̊ ι̅β̅ (12), le plus petit sera M̊ η̄ (8) et ces nombres satisfont à la proposition.

Il s'agit de résoudre le système $x + y = b$ et $xy = a$ qui peut se ramener aussi à l'équation $x^2 + a = bx$ d'AL KHWARIZMI. La grande innovation de DIOPHANTE est l'utilisation explicite d'«un nombre qui possède en soi une quantité indéterminée d'unités", noté ς», et dénommé "arithme" dans la traduction française de VER EECKE (1925), et d'un calcul avec cette inconnue, comme on peut en juger dans le texte ci-dessus. Au début de son ouvrage DIOPHANTE explique comment se font les calculs avec l'arithme, son inverse, leurs puissances, leurs produits et les expressions additives et soustractives que l'on peut former avec ces nombres d'une nouvelle espèce. D'autre part les deux règles *d'al-jabr et al-muqabala* d'AL KHWARIZMI y figurent comme méthode pour transformer les équations. On comprend que DIOPHANTE ait pu être appelé le père de l'algèbre.

Les biobibliographes arabes, tel IBN al-NADIM au $10^{ème}$ siècle, disent de DIOPHANTE que c'est "un grec alexandrin qui a écrit un livre sur l'Art de l'Algèbre". La traduction en arabe des *Arithmétiques* de DIOPHANTE, au $9^{ème}$ siècle, par IBN LUQA a d'ailleurs pour titre *l'Art de l'Algèbre*. Quand à la fin du $16^{ème}$ siècle l'Europe redécouvre l'œuvre de DIOPHANTE, les grands algébristes BOMBELLI (Italie), STEVIN (Flandres), VIETE (France), l'intègrent dans leurs traités. Ainsi, si l'œuvre de DIOPHANTE marque sans conteste l'avènement de la méthode algébrique en mathématique, son traité n'est pas, comme celui d'AL KHWARIZMI, un traité des équations, mais un recueil de problèmes résolus avec cette méthode "pas encore connue". En effet, AL KHWARIZMI partage son traité en deux parties. Dans la première, il explique ce qu'est le calcul d'al-jabr et al-muqabala, et qu'il porte sur trois classes de nombres : les carrés, les racines et les nombres simples. Il envisage toutes les combinaisons possibles pour les égaler, et est donc amené à considérer six types d'équations :

Les cas simples	1) Des carrés égaux à des racines	$(ax^2 = bx)$
	2) Des carrés égaux à des nombres	$(ax^2 = c)$
	3) Des racines égales à des nombres	$(bx = c)$
Les cas combinés	4) Des carrés et des racines égaux à des nombres	$(x^2 + bx = c)$
	5) Des carrés et des nombres égaux à des racines	$(x^2 + c = bx)$
	6) Des racines et des nombres égaux à des carrés	$(bx + c = x^2)$

A chaque type est consacré un chapitre expliquant sa résolution.

La seconde partie du traité est consacrée à la résolution de problèmes, et montre comment, par al-jabr et al-muqabala, on les ramène à l'une des six formes canoniques. On voit ainsi en quoi le traité d'AL KHWARIZMI inaugure un nouveau point de vue et fonde un nouveau domaine des mathématiques dans lequel vont s'engager les mathématiciens arabes, puis à leur contact les italiens. Cela apparaît clairement dans les réflexions suivantes d'AL KHAYYAM, tirées de son traité d'Algèbre de 1074 : "L'algèbre est un art scientifique... ce qu'on cherche dans cet art, ce sont les relations qui joignent les données des problèmes à l'inconnue, qui forme l'objet de l'algèbre... Ce qu'on trouve dans les ouvrages des algébristes, relativement à ces quatre quantités géométriques, entre lesquelles se forment les équations, à savoir : nombres absolus, côtés, carrés et cubes, ce sont trois équations renfermant le nombre, des carrés et des côtés. Nous allons, au contraire, proposer des méthodes au moyen desquelles on pourra déterminer l'inconnue dans l'équation contenant les quatre degrés... Lorsque l'objet du problème est le nombre absolu, ni moi, ni aucun des savants qui se sont occupés d'algèbre, n'avons réussi à trouver la démonstration de ces équations (et peut-être un autre qui nous succèdera comblera-t-il cette lacune), que lorsqu'elles renferment seulement les trois premiers degrés, à savoir : le nombre, la chose et le carré..."

Cette résolution algébrique des équations du troisième degré, qu'AL KHAYYAM appelait de ses vœux, ce sont les algébristes italiens du 16ème siècle, DEL FERRO, TARTAGLIA, CARDAN, BOMBELLI, qui vont la réussir, avec en prime celle des équations du quatrième degré. Cette avancée significative est accompagnée d'un progrès du symbolisme, et de calculs sur des nombres nouveaux : négatifs et imaginaires. Ces nombres feront d'ailleurs par la suite partie intégrante des traités d'algèbre. Les relatifs seront tellement perçus comme ayant partie liée avec l'algèbre qu'il seront dénommés dans les manuels français jusqu'en 1970 nombres algébriques.

Quant aux symboles ce sont surtout des signes d'abréviation. Voici un extrait du calcul sur les binômes figurant dans la sixième partie du *Traité général du nombre et de la mesure* de TARTAGLIA de 1560.

Del ſummar de binomi, & reſidui de dignità Algebratice.

IO non te voglio ſtar a narrare particolarmente in parole il ſumar de binomi & reſidui de dignità, perche ve andaria da ſcriuere aſſai, ma te ponerò ſolamente vari, & diuerſi ſummari in figura, li quali hauendo ben in memoria le operationi delli duoi termini, piu, e men, come diſopra è ſtato detto facilmente da te le intenderai.

a ſummar	13 piu 7 co.	a ſummar	5 ce. piu 3	a ſummar	9 cu. piu 8 co.
con	12 piu 3 co.	con	2 ce. piu 2	con	3 cu. piu 6 co.
fara	25 piu 10	fara	7 ce. piu 5	fara	12 cu. piu 14 co.
a ſummar	10 men 8 co.	a ſummar	12 piu 12 ce.	a ſummar	7 cu. men. 6 co.
con	13 men 5 co.	con	8 men 5 ce.	con	5 cu. piu 4 co.
fara	23 men 13 co.	fara	20 piu 7 ce.	fara	12 cu. men 2 co.

co est l'abréviation de cosa, ce de censo, cu de cubo.

Le dernier des 6 calculs ci-dessus correspond à $(7x^3 - 6x) + (5x^3 + 4x) = 12x^3 - 2x$.

Il est à noter que NUÑEZ, professeur à Coimbra, utilise, dans son *Libro de algebra* de 1567, les notations de TARTAGLIA. Mais, l'essentiel des explications et des calculs passe par le langage courant. On voit, néanmoins, apparaître des lettres pour désigner les inconnues comme chez l'allemand STIFEL ou le français PELETIER.

> DE L'ALGEBRE. 111
>
> p.4B, seront egales a 124. Voęla noz troęs Equacions principales : lequeles il faut mêler de tele sorte, que nous trouuons les differances des nombres Absoluz, repondantes aus nombres Cosiques.
>
> Disposons donq noz troęs Equacions an cete sorte.
>
> I. 2℞ p.1A p.1B, egales a 64.
>
> II. 1℞ p.3A p.1B, egales a 84.
>
> III. 1℞ p.1A p.4B, egales a 124. Ajoutons la se.

Voici, ci-contre, comment PELETIER note dans son *Algèbre* de 1544 le système :

(1) $2x + y + z = 64$

(2) $x + 3y + z = 84$

(3) $x + y + 4z = 124$.

C'est à la fin de ce $16^{\text{ème}}$ siècle, où foisonnent les notations nouvelles et les traités d'algèbre, où l'on redécouvre les auteurs grecs, – en particulier DIOPHANTE, pour le domaine qui nous intéresse, dont les *Arithmétiques* sont traduites en latin par XYLANDER en 1575 –, que va s'opérer un progrès conceptuel décisif.

3. Le langage universel

3.1. L'algèbre littérale de VIETE

En quoi consiste ce progrès ? Il s'agit de la création d'un calcul portant uniquement sur des lettres que VIETE expose dans un court traité, véritable manifeste édité à Tours en 1591 sous le titre : *Introduction à l'Art analytique ou Algèbre nouvelle*. Il a conscience d'opérer une rupture et d'ouvrir la voie à un progrès important.

"La forme sous laquelle on doit aborder la recherche de l'équation (Zétèse) exige les ressources d'un art spécial, qui exerce sa logique non sur des nombres, suivant l'erreur des analystes anciens, mais au moyen d'une Logistique nouvelle, beaucoup plus heureuse que la Logistique numérale..." (Chapitre I).

"Logistique numérale est celle qui est exposée par des nombres. Logistique spécieuse est celle qui est exposée par des signes ou des figures, par exemple, par des lettres de l'alphabet..." (Chapitre IV).

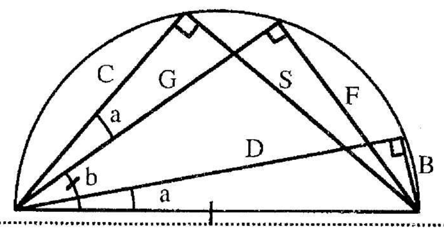
"DIOPHANTE a employé la zététique plus ingénieusement que tout autre auteur dans les livres qu'il a écrits sur l'Arithmétique. Cependant, il l'a représentée établie par des nombres et non par des espèces, dont cependant il a fait usage, ce qui doit faire admirer davantage sa subtilité et son talent, car les choses qui paraissent plus difficiles et abstruses à celui qui emploie la Logistique numérale sont familières et immédiatement claires à celui qui emploie l'arithmétique spécieuse." (Chapitre V).

Comme nous l'avons vu, avant lui certains algébristes utilisent des caractères pour désigner l'inconnue et ses puissances et parfois même des lettres. Mais les règles et les méthodes sont exemplifiées avec des coefficients numériques. La grande idée de VIETE est d'avoir généralisé l'utilisation de lettres aussi bien pour désigner les quantités inconnues que les quantités connues.

"Afin que cette méthode (la mise en équation) soit aidée par quelque artifice, on distinguera les grandeurs données des grandeurs inconnues et cherchées en les représentant par un symbole constant, invariable et bien clair, par exemple, en désignant les grandeurs cherchées par la lettre A ou par toute autre voyelle E, I, O, U, Y, et les grandeurs données par les lettres B, C, D ou par toute autre consonne." (Chapitre V).

VIETE se trouve donc en possession d'un calcul littéral, sa logistique spécieuse. Dans quel but ? La dernière phrase de son court traité nous donne la clé : "NULLUM NON PROBLEMA SOLVERE", résoudre tout problème. En effet, un certain nombre de problèmes des géomètres grecs étaient toujours non résolus. Parmi les plus célèbres : la duplication du cube, la quadrature du cercle, la trisection de l'angle, la construction de l'heptagone régulier. Pour envisager leur résolution il fallait donc essayer de trouver de nouveaux outils. VIETE va s'attaquer victorieusement à certains de ces problèmes grâce à sa logistique spécieuse : l'analyste "résout artificieusement les problèmes les plus fameux appelés jusqu'à présent irrationnels, tels que le problème mésographique, celui de la section d'un angle en trois parties égales, l'invention du côté de l'Heptagone et tous les autres qui tombent dans ces formules d'équations..." Une fois le problème traduit dans la langue de la nouvelle algèbre, la possibilité de faire des calculs sur les expressions littérales obtenues permet alors de trouver des relations entre grandeurs, jusque là inconnues. C'est ainsi, par exemple que VIETE, établit de nombreuses formules trigonométriques en particulier pour l'addition et la multiplication des angles.

Alors que les équations envisagées par les mathématiciens étaient au maximum de degré 4, le partage d'un angle en n parties égales conduit à des équations de degré n, n pouvant être très grand. C'est ainsi qu'en 1594 VIETE relève un défi mathématique : résoudre une équation de degré 45 ! C'est le fameux problème d'Adrien Romain dont il donne les 23 solutions positives en quelques heures. Si VIETE peut résoudre aussi facilement le problème, c'est qu'il lit, derrière l'équation particulière du 45^{e} degré qui lui est proposée, un problème général de géométrie : Comment partager un angle en 45 parties égales ? Ce problème est du même type que le fameux problème de la trisection de l'angle : Comment partager, à la règle et au compas, un angle en trois parties égales ? VIETE avait mis à l'épreuve son algèbre nouvelle sur ce problème de géométrie, comme il l'avait d'ailleurs fait sur les problèmes arithmétiques de Diophante. Son « Art » étant général, il avait abordé le partage de l'angle pour tous les cas possibles dans son ouvrage *La section des angles* qui contient la liste des équations correspondant à chacun des cas, ainsi que les formules trigonométriques de base, énoncées pour la première fois sous forme générale. Voici, en exemple et en abrégé, son théorème 2 :



Avec ses notations : (in signifie multiplié par)
S est F in D + B in G
C est G in D - F in B
Avec nos notations :
$\sin(a+b) = \sin b \cos a + \sin a \cos b$
$\cos(a+b) = \cos b \cos a - \sin b \sin a.$

Les clés de sa réussite, il les doit à son algèbre littérale qui lui permet :

- d'acquérir une puissance de calcul encore inégalée : des substitutions et des développements, tels que ceux utilisés pour l'identification de l'équation d'Adrien ROMAIN, étaient impensables auparavant. Cette utilisation de l'algèbre littérale pour transformer et résoudre des équations va lui permettre de faire avancer leur théorie. Il en fait un traité intitulé *Revue et transformation des équations* qui se termine par un théorème donnant les relations entre les coefficients et les racines d'une équation, théorème qui aura une grande importance par la suite. Même sa résolution numérique des équations, dont il a fait également un traité, utilise des résultats littéraux établis dans ses *Premières notes,* traité qui fait suite à l'*Introduction à l'art analytique* ;

- de traduire sous forme d'équations et de formules des problèmes généraux de géométrie et d'arithmétique. Cette utilisation de la méthode analytique et de l'algèbre littérale pour modéliser des situations, DESCARTES va la reprendre et la développer.

Il est clair que pour VIETE l'algèbre est un outil au service d'une méthode de résolution de problèmes : l'analyse. Mais leurs rôles étant tellement imbriqués, une confusion va s'installer entre algèbre et analyse, qui est déjà présente dans le titre même que VIETE a choisi pour son manifeste : *Introduction à l'Art analytique ou Algèbre nouvelle.*

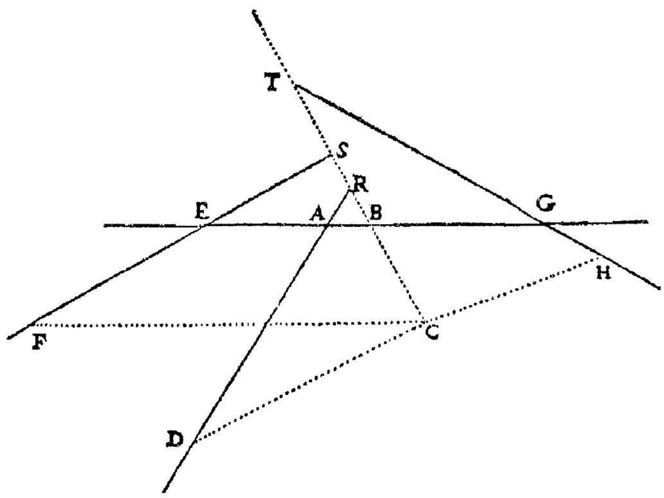
3.2. L'outil de la méthode cartésienne

"Par la méthode dont je me sers, tout ce qui tombe sous la considération des Géomètres se réduit à un même genre de Problèmes, qui est de chercher la valeur des racines de quelque Equation.". Par cette phrase de son traité de 1637, *La Géométrie*, DESCARTES se fait l'initiateur d'une méthode à laquelle son nom va rester attaché : l'algébrisation de la géométrie. Il faut noter que DESCARTES ne limite pas sa méthode à la géométrie, et que s'il l'utilise à l'occasion pour résoudre des problèmes arithmétiques, dès le début de ses recherches, il l'a voulue universelle pour "résoudre généralement toutes les questions qui peuvent se présenter en n'importe quel genre de quantité aussi bien continue que discrète."

Les caractéristiques de la méthode cartésienne sont bien connues. Voici comment DESCARTES lui-même la décrit dans sa *Géométrie* : "Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celle qui sont inconnues, qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues, et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une Equation.".

Si la première étape de la méthode relève de ce que, depuis les Grecs, on appelle l'analyse, c'est aussi un des principes de l'algèbre.

Les deuxième et troisième étapes, inaugurées par VIETE, prennent chez DESCARTES une extension capitale ; en effet la mise en lettres permet la modélisation de problèmes de toutes sortes : constructions géométriques, construction des tangentes, ensembles de points, problèmes d'optique.... Ces problèmes complexes comportant plusieurs inconnues et de nombreux paramètres confrontent immédiatement son utilisateur à une quantité de calculs sans commune mesure avec celle gérée par les algébristes du siècle précédent. Pour en avoir une idée, examinons le problème que Descartes prend pour exemple dans sa *Géométrie.*



Enoncé :

Trouver C tel que

$$\frac{CB \times CF}{CD \times CH} = \text{constante}$$

Données :

- les droites (AB), (DA), (FE), (GT);
- les angles de projection de C sur ces droites, soit :

$\widehat{CBA}$, $\widehat{CDA}$, $\widehat{CFE}$, $\widehat{CHG}$.

Mise en équation :

2 inconnues : AB=x, CB=y

9 paramètres : AE=k, AG=l, $\frac{AB}{BR} = \frac{z}{b}$, $\frac{CR}{CD} = \frac{z}{c}$, $\frac{BE}{BS} = \frac{z}{d}$, $\frac{CS}{CF} = \frac{z}{e}$, $\frac{BG}{BT} = \frac{z}{f}$, $\frac{TC}{CH} = \frac{z}{g}$

4 distances : CB=y, CF= $\frac{ezy + dek + dex}{zz}$, CD= $\frac{czy + bcx}{zz}$, CH = $\frac{gzy + fgl - fgx}{zz}$

L'équation : $yy = \frac{(-dekzz + cfglz)y + (-dezzx - cfgzx + bcgzx)y + (bcfglx - bcfgxx)}{ezzz - cgzz}$

Equation qu'il écrit, après de nombreux changements de paramètres :

$$y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}.$$

Il étudie alors cette équation générale sous cette forme pour identifier la courbe, lieu des points C. Ce qui lui permet de prouver que cette équation est l'équation générale d'une conique. On assiste là à la naissance d'un nouveau champ de recherches : être capable de connaître un ensemble de points à partir de son équation.

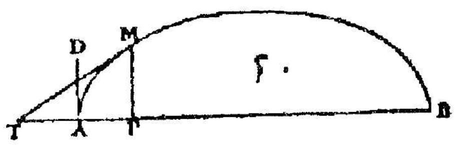
Dans le cas présent, grâce à l'étude des diverses expressions littérales intervenant dans la mise en équation du problème, DESCARTES peut dire des choses sur le lieu du point C quand, au lieu de la donnée de 4 droites, on en donne 5, 6, 7...ou quand certaines droites sont parallèles. C'est là un des intérêts du calcul littéral. En effet chaque distance s'exprime linéairement en fonction de x et y, et l'on peut donc connaître le degré de l'équation en x et y. Reste, à partir de ce degré, à connaître la nature de la courbe. C'est ce travail qu'inaugure DESCARTES dans sa *Géométrie.*

Cet exemple permet de mesurer l'avancée et les transformations opérées par DESCARTES dans le champ de l'algèbre. Tout d'abord, le domaine des équations s'élargit et s'enrichit de nouvelles questions et de nouvelles méthodes : étude des équations à deux variables, nombre et signe des racines des équations, méthode des coefficients indéterminés.... Mais, surtout, l'algébrisation des problèmes va donner une importance croissante au calcul littéral, et faire de cette méthode et de ce calcul l'essence de l'algèbre, comme en témoigne l'article *Algèbre* de l'*Encyclopédie Méthodique* de DIDEROT et D'ALEMBERT 150 ans plus tard : "Science du calcul des grandeurs considérées généralement... Quelques Auteurs définissent l'Algèbre, l'art de résoudre les problèmes mathématiques ; mais c'est là l'idée de l'Analyse ou de l'art analytique plutôt que de l'Algèbre... L'Algèbre a proprement deux parties : 1° la méthode de calculer les grandeurs, en les représentant par les lettres de l'alphabet ; 2° la manière de se servir de ce calcul pour la solution des problèmes..." On voit la mutation qui s'opère : l'algèbre devient un langage avec ses règles, langage qui permet de résoudre les problèmes par le calcul. Ainsi CONDILLAC, en 1798, dans sa *Langue des calculs*, peut-il dire : "Les mathématiques sont une science bien traitée dont la langue est l'algèbre".

3.3. Le domaine des structures

Très vite les mathématiciens se saisissent de l'outil et de la méthode cartésienne pour traiter tous les problèmes au moyen du langage et du calcul algébriques, et vont ainsi faire de nombreuses découvertes. En l'espace de peu de temps, le langage algébrique est omniprésent.

En voici un exemple, extrait du traité du Marquis DE LOSPITAL : ***Analyse** des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696, p. 13), dans lequel il s'agit de tracer la tangente à une ellipse.



12. SOIT une ligne courbe AMB telle que $AP \times PB$ $(x \times \overline{a - x})$. $\overline{PM}^2$ (yy) :: AB (a). AD (b). Donc $\frac{ayy}{b} = ax - xx$, & en prenant les différences, $\frac{2aydy}{b} = adx - 2xdx$, d'où l'on tire PT $\left(\frac{ydx}{dy}\right) = \frac{2ayy}{ab - 2bx} = \frac{2ax - 2xx}{a - 2x}$, en mettant pour $\frac{ayy}{b}$ sa valeur $ax - xx$; & $PT - AP$ ou $AT = \frac{ax}{a - 2x}$.

Le texte montre bien la modélisation du problème avec le langage algébrique (chaque longueur est désignée par une lettre, ou exprimée en fonction de celles déjà utilisées) et l'utilisation du calcul algébrique pour trouver la distance AT qui permettra la construction de la tangente. Mais pointons deux faits importants qui apparaissent ici.

D'abord, les lettres qui interviennent dans le calcul représentent des grandeurs géométriques (x, y, a, b), mais aussi des grandeurs infinitésimales (dx, dy) : le calcul algébrique est donc susceptible de traiter toutes sortes de grandeurs. Cette idée va faire son chemin. Après le calcul sur les différences de LEIBNIZ, on voit apparaître au 19ème siècle toutes sortes de calculs portant sur les objets les plus divers : les congruences de GAUSS (1801), le calcul barycentrique de MÖBIUS (1827), les couples (1837) et les quaternions (1853) d'HAMILTON, le calcul vectoriel de GRASSMANN (1844), le calcul des substitutions de CAUCHY (1846), les lois de la pensée de BOOLE (1854), les matrices de CAYLEY (1858)...

Le deuxième fait important est que les lettres x, y ne désignent plus des quantités inconnues, mais des quantités variables, donc susceptibles de prendre une infinité de valeurs. Or en substituant aux lettres des valeurs familières (nombres positifs entiers, fractionnaires ou irrationnels), les expressions algébriques restituent des valeurs étranges : négatives, imaginaires. Ce qui amène à penser que les lettres du calcul algébrique peuvent représenter toutes sortes de nombres. Ainsi pour EULER, dans son *Introduction à l'Analyse infinitésimale* de 1748, une quantité variable "comprend tous les nombres tant positifs que négatifs, les nombres entiers et fractionnaires, ceux qui sont rationnels, irrationnels et transcendants ; on ne doit pas même en exclure zéro, ni les nombres imaginaires. On peut lui substituer tous les nombres imaginables". D'autant que les combinaisons entre quantités variables et constantes s'étendent sans cesse au-delà des opérations classiques de l'algèbre : addition, soustraction, multiplication, division, puissances et extractions des racines. Il faut y ajouter, aux dires mêmes d'Euler, "les transcendantes : comme les exponentielles, les logarithmiques, et d'autres sans nombre, que le Calcul Intégral fait connaître". Là aussi, après les négatifs et les complexes, on va voir apparaître au $19^{\text{ème}}$ siècle des calculs sur toutes sortes de nombres : les entiers de GAUSS (1801), les nombres idéaux de KUMMER (1844), les nombres algébriques de DEDEKIND (1871) ...

Les nombreux résultats obtenus par la manipulation de plus en plus formelle du calcul littéral, et par la substitution de toutes sortes de nombres dans les expressions symboliques obtenues, amènent les algébristes anglais du $19^{\text{ème}}$ siècle à envisager une algèbre symbolique, où les lettres peuvent représenter des objets quelconques ; et sur lesquelles on peut faire toutes les opérations possibles a priori. Les mathématiciens vont alors concentrer leur attention non plus sur les objets, mais sur les opérations. Ainsi BOOLE écrit-il en 1847 : "La mathématique traite des opérations considérées en elles mêmes indépendamment des matières diverses auxquelles elles peuvent être appliquées", et DE MORGAN deux ans plus tard : "...aucun mot ou signe de l'arithmétique ou de l'algèbre n'a une parcelle de signification à travers tout ce chapitre dont l'objet est précisément les symboles et leurs lois de combinaison, donnant une algèbre symbolique qui peut désormais devenir la grammaire d'une centaine d'algèbres distinctes".

C'est cette étude d'ensembles abstraits munis d'une ou plusieurs opérations qui va désormais porter le nom d'algèbre, dont les objets vont s'appeler groupes, anneaux, corps, matrices, espaces vectoriels... Nous assistons à la deuxième métamorphose de l'algèbre et à la naissance de l'algèbre moderne, celle de l'*Algebra* de LANG : un domaine où l'on étudie des structures, nouveau langage des mathématiques qui unifie des domaines très divers et permet leur modélisation.

4. Quels enseignements pour la classe ?

Le point qui me frappe le plus dans l'approche historique qui précède c'est l'importance capitale qu'a eue l'invention du calcul littéral par VIETE sur le développement des mathématiques.

D'une part :

- l'analyse est issue de l'algèbre "spécieuse" : notion d'équation de courbe, de variable, de fonction...

- le calcul littéral a précédé le calcul algébrique à une indéterminée, sauf pour la résolution des équations ;

- l'explicitation des propriétés des opérations est issue du calcul littéral.

D'autre part, l'activité de modélisation à l'aide du langage algébrique a permis l'essor des mathématiques et des autres sciences : théorèmes, propriétés, lois sont énoncées dans le langage de l'algèbre littérale. Les calculs qui y mènent se font sous forme littérale.

Or, il me semble que notre enseignement secondaire reste enfermé dans l'algèbre "numéreuse" : les paramètres sont indésirables, et sous ce prétexte toute lettre qui n'est pas une inconnue ou une variable est mise à l'index. Il faudrait donc procéder à une réhabilitation du calcul littéral, non comme il était enseigné autrefois, -pour lui-même et comme prolégomène à des utilisations futures, et où l'introduction de temps à autre d'un paramètre servait de caution-, mais dans un contexte de résolution de problèmes.

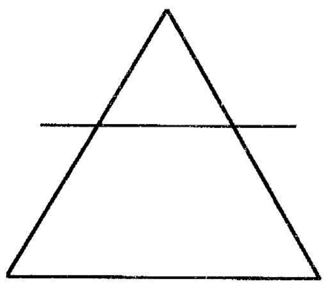
La question est alors de savoir quels seraient les types de problèmes à étudier et à algébriser dès le premier cycle ?

En reprenant les travaux de VIETE et de Descartes, il me semble que l'on pourrait chercher dans trois directions :

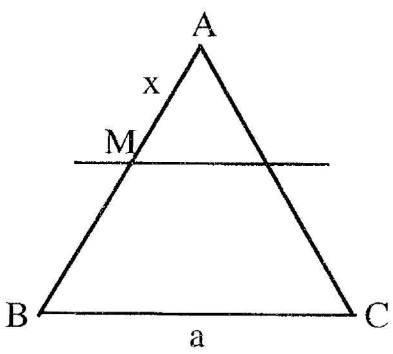
- les problèmes de constructions
- les problèmes d'ensembles de points
- les formules générales à établir et à utiliser.

Je vais essayer d'illustrer cela par quelques exemples.

4.1. Un problème de construction



Où couper un triangle équilatéral par une parallèle à un côté pour que les deux morceaux aient le même périmètre ?



Ce qui est donné : AB = BC = AC = **a**

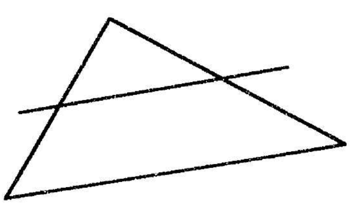
Ce que l'on cherche : AM = **x**

Equation : $3x = x + (a-x)*2 + a$

Solution : $x = \frac{3}{4} a$

Vérification

Application numérique : construction sur la figure tracée par l'élève a =..., x =...



Généralisation

$$x = \frac{a(a+b+c)}{2(a+b)}$$

Vérification pour le cas du triangle équilatéral

On peut remarquer que, dans un tel contexte de calcul, développement et factorisation sont une nécessité incontournable, et l'on peut donc en saisir l'intérêt.

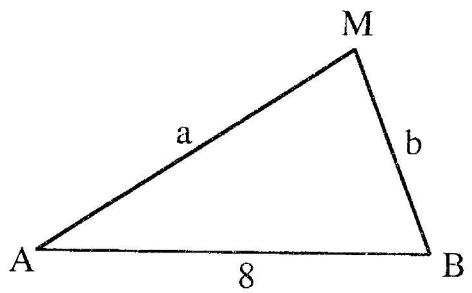
On pourrait reconsidérer aussi avec la méthode algébrique et le calcul littéral le problème de la proposition 11 du livre II d'Euclide vue dans la première partie.

Il serait intéressant de constituer un corpus de tels problèmes, de travailler leurs formulations, et de voir à quels niveaux d'enseignement ils pourraient être utilisés.

4.2. Des ensembles de points

Au niveau du premier cycle, il ne peut guère s'agir d'identifier un lieu connu à partir d'une algébrisation du problème et de la transformation de la relation obtenue en la forme canonique d'un type de courbe connue : seule la forme générale de l'équation d'une droite est connue en classe de troisième, et ce ne sera plus le cas dans deux ans. Par contre, construire, point par point, une courbe à partir d'une équation est une activité qui a eu et a toujours un intérêt fondamental pour la résolution de nombreux problèmes. Un tel travail permet de saisir, petit à petit, comme cela a été le cas historiquement, la notion de variable et de fonction.

- **Construction d'une ellipse**



MA + MB = 11

→ Recherche de nombres solutions de :
a + b = 11

Ce travail, que l'on peut faire dès la sixième, et qui permet de travailler les constructions géométriques, présente en outre l'avantage que les nombres solutions de a + b = 11 ne sont pas tous solutions du problème géométrique posé.

- **Les 7 familles**

Nous sommes des points et nous habitons tous dans un rectangle dont les sommets ont pour coordonnées : (-7; 10) (7; 10) (7; -10) (-7; -10).

Voici nos adresses :

Famille 1 : notre ordonnée est l'opposée de notre abscisse.

Famille 2 : en divisant notre abscisse par 2 et en retranchant 5 au résultat, on trouve notre ordonnée.

Famille 3 : en multipliant notre abscisse par -3 et en retranchant 7 au résultat, on trouve notre ordonnée.

Famille 4 : notre ordonnée est égale au carré de notre abscisse divisé par 2.

Famille 5 : notre ordonnée est égale au cube de notre abscisse divisé par -4.

Famille 6 : le produit de notre abscisse et de notre ordonnée est toujours égal à 4.

Famille 7 : la somme du carré de notre abscisse et du carré de notre ordonnée est toujours égale à 25.

1°) Pour chaque famille, trouve 4 points de la famille.

2°) Donne l'adresse de chaque famille sous la forme d'une relation qui lie l'abscisse x et l'ordonnée y des points de la famille.

3°) Représente les 7 familles.

4°) Pour chaque famille, trouve les coordonnées des points qui habitent sur les bords du rectangle.

5°) Pour chaque famille, trouve les coordonnées des points qui habitent sur les axes.

6°) Quels sont les points qui appartiennent à plusieurs familles ?

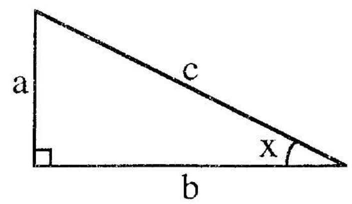
Cette activité permet en quatrième de calculer avec les relatifs dans un contexte où les calculs ont du sens. Elle permet de plus d'initier à la notion d'équation de courbe et en troisième de donner du sens à celle d'équation de droite. On trouvera une analyse plus approfondie de cette activité dans la brochure "Les nombres relatifs au collège" de l'IREM de Poitiers (Septembre 1996).

4. 3. Des formules générales

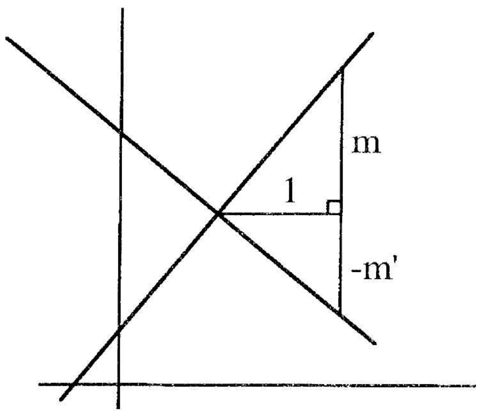
- **Etablir des formules du programme**

Exemple 1 : $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$

à partir de :



Exemple 2 : $m\ m' = -1$



à partir de :

$(m + (-m'))^2 = 1^2 + m^2 + 1^2 + (-m')^2$

Il serait intéressant de faire la liste des formules au programme du collège et de voir de quelle manière on peut les valider : de la formulation générale d'une propriété numérique à la démonstration avec l'outil "calcul littéral". Car réduire une grande part de l'activité mathématique des élèves à admettre et appliquer des formules ne constituent pas une bonne formation : il faut voir après une telle pratique la représentation des mathématiques que renvoient les élèves ! En plus cela élargit le cadre de la démonstration et la fait sortir du domaine géométrique.

Il y aurait aussi à réfléchir à l'algébrisation de certains des théorèmes que nous utilisons : par exemple nous restons souvent très euclidiens et très peu cartésiens dans nos formulations des théorèmes de Pythagore et de Thalès. Or ces deux théorèmes sont deux outils fondamentaux dont Descartes disait, dans une lettre à Elisabeth, qu'ils lui suffisaient pour mettre en équation et résoudre tous les problèmes.

- **Utiliser les formules du programme**

Exemple : V = a*b*c

Le volume d'un pavé est de 48 cm^3.

1°) Trouve les dimensions possibles sachant que ce sont des nombres entiers de cm.

2°) Pour chaque solution calcule l'aire du pavé.

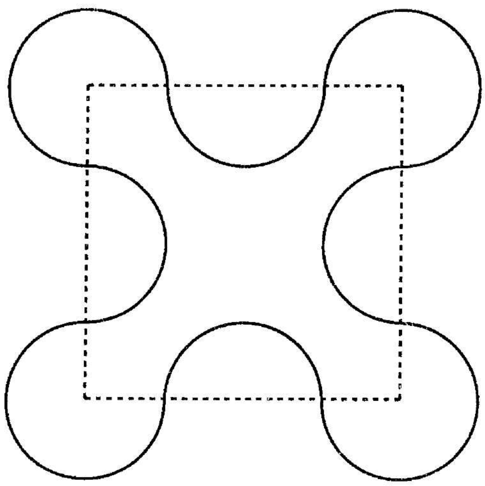
Ordonne les aires et fais des remarques.

3°) Trouve la troisième dimension d'un pavé dont les deux autres sont 4cm et 5cm.

La recherche d'un ensemble de solutions peut se faire très tôt sous des formulations adaptées et fait alors travailler sur la notion de variable. Dans cet exercice de sixième, on peut voir aussi que pour les solutions trouvées l'aire varie en fonction des dimensions, alors que le volume reste toujours le même. On peut faire exprimer cette aire en fonction de a,b,c : cela permet de mieux comprendre le programme de calcul qui va donner l'aire. Fixer toutes les variables sauf une permet de travailler très tôt là aussi la notion d'inconnue et d'équation, et, en jouant sur les valeurs des nombres, on peut amener l'élève à mieux s'approprier la notion de nombre, et à dépasser des obstacles tenaces (en prenant par exemple 10 et 6, ou 4 et 7, à la place de 4 et 5).

- **Etablir des formules et les utiliser**

La serpentine



La serpentine ci-contre est fabriquée à partir d'un carré de côté a. On appelle p son périmètre et A son aire.

1°) Démontre que les formules donnant p et A en fonction de a sont :

$p = 2{,}5pa$ et $A = (1+\frac{p}{16})a^2$.

2°) Comment faut-il choisir a pour que la longueur de la serpentine soit de 1 m ?

3°) Comment faut-il choisir a pour que l'aire de la serpentine soit de 100 cm^2 ?

Là aussi, il y aurait à faire un inventaire des situations géométriques et numériques intéressantes, car on est alors en phase avec la logique du développement des mathématiques et des autres sciences comme nous l'avons vu dans la partie historique.

- **Que disent les programmes ?**

$6^{\text{ème}}$ $5^{\text{ème}}$	Initiation aux **écritures littérales.**
$6^{\text{ème}}$	Appliquer une **formule littérale**... On entraînera l'élève à schématiser un calcul **en utilisant des lettres**....
$5^{\text{ème}}$	Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques données.
$4^{\text{ème}}$ $3^{\text{ème}}$ 2^{nde}	La **résolution de problèmes** (issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. Elle nourrit les activités, tant dans le domaine numérique que dans le **domaine littéral**. Les exercices de technique pure ne sont pas à privilégier.
$4^{\text{ème}}$	Le **calcul littéral** sera introduit avec prudence en veillant à ce que les élèves puissent donner du sens aux activités entreprises dans ce cadre.

La lecture des programmes, éclairée par la perspective historique précédente, fournit des explications aux interrogations formulées dans le titre et au début de cet article.

En effet il s'agit d'utiliser l'algèbre comme un outil de résolution de problèmes. Nous sommes dans la logique de DIOPHANTE, de VIETE, de DESCARTES et de leurs successeurs : l'algèbre est avant tout un langage avec son cadre, la résolution de problèmes, sa méthode, la mise en lettres, et son outil, le calcul littéral. L'étude de cet outil, de certains de ses aspects en tant qu'objet, ne viendra que plus tard. Les choix faits dans les programmes me semblent donc pertinents, car le travail de modélisation est fondamental. Ces choix permettent une interaction riche entre les domaines géométrique, numérique et graphique, et ils doivent permettre, à condition de bien choisir situations et problèmes, à une compréhension progressive des différents statuts des lettres. Mais, cette façon d'envisager l'enseignement est plus exigeante, et les bons problèmes pour mettre en œuvre un tel programme restent souvent à trouver.

ALGEBRE

Numérique (vulgaire, numéreuse)	Résolution des équations (cf. origine ***arabe*** : transformation des équations)	- Babyloniens, Egyptiens - Diophante - Arabes - Europe $16^{\text{ème}}$ (Italie) **BOMBELLI 1572**
Littérale (nouvelle, spécieuse)	Calcul abstrait (cf. ***calcul algébrique***) Résolution de problèmes (langage algébrique)	- Viète 1591 - Descartes 1637 - 17 – $18^{\text{ème}}$: analyse-algèbre **CLAIRAUT 1768**
Moderne (abstraite)	Calcul formel Théorie des structures (cf. ***structures algébriques***)	- 19 – $20^{\text{ème}}$ **LANG 1969**

BIBLIOGRAPHIE

NORREDDINE M., 1995, "*Sur la résolution des équations algébriques*". IREM de Lille.

GASCON J., 1997, "*Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'arithmétique généralisée*". Petit x n°37. IREM de Grenoble.

REPERES n°28, juillet 1997.

CHEVALLARD Y. "*Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège*". Petit x n°5. IREM de Grenoble.

On trouvera des illustrations de la méthode cartésienne et des compléments sur l'évolution des notations algébriques dans le cédérom PC Descartes, construire la connaissance, Espace Mendès France (Poitiers) et Cosei (Saint Jean d'Angély ; http://www.cosei.com), 1996.

Sur Viète : on pourra consulter, avec Internet Explorer, le site :

http://www.district-parthenay.fr/parthenay/creparth/GUICHARDJp/VIETEaccueil1.html.