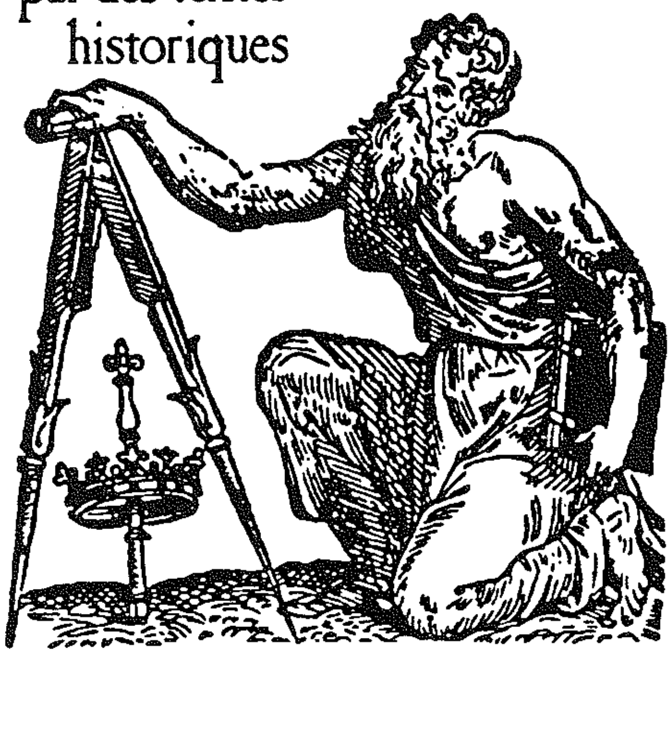
IREM
INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

79
JANVIER 90

mathématiques approche par des textes historiques M:A.T.H.



TOME 2

objectif: Sensibiliser professeurs et élèves à l'évolution des concepts et du langage mathématiques

sujet: Exemples d'utilisation de textes originaux

niveau: Collège et lycée

public: Professeurs de mathématiques

UNIVERSITE - PARIS VII

I. R. E. M. DE PARIS VII

(1990)

ont participé :

Martine BÜHLER
Michèle GREGOIRE
Maryvonne HALLEZ
Marie-Francoise JOZEAU
Paule KNERR
Catherine PERRINEAU
Henry PLANE
Jean-Luc VERLEY

La réalisation technique de l'ouvrage est due :
à Mmes *Sonia* ABDELLI *(dactylographie)*
Odette DIERAERT *(duplication)*
Nadine LOCUFIER

Le bois de la couverture est celui de la page de titre de l'ouvrage "Institutiones arithmeticae ad perpiciendam astrologiam et Mathmaticas facultates necessariae" de Hiernonymus MUNYOS, Valencia, Espagne, 1566

SOMMAIRE

SOMMAIRE PAR NIVEAUX

COLLEGE

LYCEE

mathématiques
approche
par des textes
historiques

M:A.T.H.

Cettte brochure fait suite à la brochure du même titre (n°61 de l'IREM de Paris 7 parue en 1986). Elle est conçue dans le même esprit : son but est de permettre à des élèves du collège et du lycée d'aborder la lecture de quelques textes historiques originaux en rapport avec le programme de leur classe.

Une expérience maintenant plus longue nous a confirmé dans la conviction que beaucoup d'élèves sont vivement intéressés par une telle approche. Nous sommes aussi encouragées dans cette démarche par les instructions générales des programmes préconisant des activités riches et diversifiées mettant en valeur le contenu culturel des mathématiques par l'introduction d'une perspective historique.

Les activités proposées nous semblent intéressantes à plus d'un titre, en particulier :

_ la lecture des textes montre comment l'émergence ou le développement d'une notion répond aux questions d'une époque.

_ les élèves peuvent prendre conscience de l'évolution du langage, des notations, et mesurer l'intérêt du symbolisme algébrique moderne.

_ Des problèmes traités actuellement dans le cadre algébrique sont dans les textes proposés souvent traités dans le cadre géométrique et ces occasions de "changement de cadre" pour utiliser le vocabulaire de la didactique, permettent d'élargir les représentations mentales des élèves.

Les travaux présentés ont été expérimentés en classe; Ils ont été conçus de façon à pouvoir être utilisés directement par tout enseignant, même peu formé à l'histoire des mathématiques. Les notices historiques préliminaires et les commentaires devraient permettre de répondre à la plupart des questions des élèves. Les fiches, se composant d'une suite de questions, peuvent être reproduites et données aux élèves ; elles constituent, soit un travail préliminaire à la lecture du texte, soit une aide pas à pas à cette lecture. Elles peuvent être utilisées comme problèmes à la maison, ou comme activité dirigée pour l'introduction ou la mise en application d'une notion.

La brochure regroupe une vingtaine de textes classés chronologiquement par auteurs, d'Euclide à Legendre ; le niveau concerné est précisé pour chaque activité.

Notre souhait est d'aider les enseignants à rendre la classe de mathématiques plus attrayante et plus enrichissante même pour les élèves parfois rebutés par notre discipline. Nous souhaitons que le travail se poursuive et nous serions heureux de connaître vos expérimentations et, toutes remarques et suggestions seront les bienvenues

groupe M : A.T.H.

I

EUCLIDE

EUCLIDE.

On ne sait rien de la vie d'Euclide sinon qu'il enseigna à Alexandrie sous le règne de Ptolémée Ier (306-283 av J.C.) et qu'il y fonda la plus célèbre école de mathématiques de l'Antiquité. L'habitude est prise de l'honorer comme le premier organisateur des mathématiques. S'il utilise les travaux de ses prédécesseurs, il ne les cite jamais. Il se fait une loi "de ne jamais enchainer à un nom d'homme des vérités qu'il ne voulait considérer que dans l'absolu" (1). Il n'y a d'ailleurs dans les *Eléments* son oeuvre principale, aucune référence à un extérieur au texte mathématique. Le respect minitieux de l'appareil logique nécessite des longueurs. Un des plus célébres commentateurs d'Euclide qui vécut au 5ème après J.C, nommé Proclus (410-485), rapporte cette anedocte devenue fameuse :"Ptolémée demanda un jour à Euclide s'il n'y avait pas pour la géométrie de route plus courte que celle des *Eléments*; il eut cette réponse : il n'y a pas en géométrie de chemin fait pour les rois."(2)

Les *Eléments* nous furent transmis par les commentateurs comme Héron d'Alexandrie au 1er siècle aprés J.C., Pappus d'Alexandrie au 3ème, et Proclus au 5ème qui commenta le premier livre.

Nous indiquons rapidement le plan de l'ouvrage en nous appuyant sur l'étude faite par Jean Itard(3). Nous insisterons un peu plus sur les livres I, II,VI,et IX dont sont tirés les textes proposés. Les *Eléments* comportent treize livres.

Le livre I porte sur la géométrie plane. Il commence par des définitions, cinq postulats (aussi appelés axiomes ou demandes), des "notions communes". La matière du livre commence par la construction du triangle équilatéral, se poursuit par les cas d'égalité des triangles ; la célèbre "méthode des aires" est utilisée pour comparer triangles et parallélogrammes. Le couronnement de ce premier livre est la démonstration du théorème dit de Pythagore et de sa réciproque. L'originalité du géomètre réside dans l'ordre de présentation, la rigueur des raisonnements, le choix des prémisses ; le rôle essentiel du postulat,de la demande gratuite, ni démontrable, ni évidente, y est dégagée "(4). Euclide institue un rituel de la démonstration, dont la proposition I du livre I donne une bonne illustration; on y retrouve les différentes parties décrites par Proclus :

> tout problème et tout théorème, remplis de leurs parties accomplissantes, doivent posséder en propre toutes celles-ci : la proposition , l'exposition , la détermination , la construction , la démonstration et la conclusion....
>
> La construction ajoute ce qui manque à la chose donnée en vue de poursuivre ce qui est cherché. La démonstration induit savamment la proposition par suite des choses consenties. Enfin, la conclusion retourne de nouveau à la proposition en confirmant ce qui a été démontré. (5)

Le livre II, très court, établit géométriquement des relations entre objets géométriques que l'on peut interpréter comme des identités algébriques ; c'est ce que certains auteurs appellent l'algèbre géométrique des grecs. Il contient en particulier sous une terminologie aujourd'hui oubliée la résolution de quelques équations du premier et du deuxième degré.

Le livre III traite des propriétés du cercle .

Le livre IV étudie les polygones réguliers .

Le livre V , aussi important que difficile, concerne la notion de rapport et la théorie des proportions.

Le livre VI applique la théorie des proportions du livre V au cas particulier des grandeurs géométriques . On y trouve le théorème dit de Thalès, les cas de similitude des triangles, la proportionnalité des arcs de cercles aux angles au centre et aux angles inscrits, et une théorie des résolutions géométriques des équations du deuxième degré.

Les livres VII, VIII, et IX sont consacrés à l'arithmétique : multiples, diviseurs, nombres premiers, les nombres pairs et impairs et la fameuse démonstration de l'infinité des nombres premiers (proposition 20).

Le livre X est le plus ample mais le plus démodé des treize: il contient 114 propositions! "Le thème général est un classement scrupuleux des premières longueurs irrationnelles "(6) .

Avec le livre XI commence la géométrie dans l'espace.

Le livre XII étudie les aires et les volumes en utilisant la célèbre "méthode d' exhaustion ".

Le livre XIII concerne les cinq polyèdres réguliers de Platon.

En dehors des *Eléments* d' autres oeuvres d'Euclide tel son *Traité d' Optique* nous sont parvenus; d' autres, hélas, comme les quatre livres sur les coniques, livres signalés par Pappus, ont été perdus.

(I) P.H.Michel De Pythagore à Euclide ed. Belles lettres 1950 p.86

(2) ibid p.89

(3) J.Itard Essais d'histoire des mathématiques (édités par Roshi Rashed) ed. Blanchard 1984

(4) ibid.p.9I

(5) Proclus Commentaire du livre I ed.Blanchard 1959 P.180-18I

(6)J.Itard ibid . p .94

EUCLIDE : *Eléments*. Livre I . Proposition I — Niveau 6e

Traduit par Peyrard

éd . Blanchard 1966

CONSTRUCTION D'UN TRIANGLE EQUILATERAL

I. Lecture des définitions, demandes et notions communes nécessaires à la lecture de la proposition 1

Attention : nous nommons "segment de droite" ce qu' Euclide nomme "droite".

1. Lisez les définitions 15 et 16

15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence ; toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.

16. Ce point se nomme le centre du cercle.

2. Tracez un cercle de centre O et lisez les définitions 17 et 18

17. Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales.

18. Un demi-cercle est la figure comprise par le diamètre, et la portion de la circonférence, soutendue par le diamètre.

3. Lisez les définitions 21 à 25

21. Les figures trilatères sont terminées par trois droites.

22. Les quadrilatères, par quatre.

23. Les multilatères, par plus de quatre.

24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.

25. Le triangle isocèle, celle qui a seulement deux côtés égaux.

Quel nom donne -t-on aux " figures trilatères " ?
Donnez le nom de quelques " multilatéres ".

4. Lisez les demandes 1, 2 et3

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.

2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.

3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.

Quel mot utiliserait-on de nos jours , à la place du mot "intervalle"?

5. Lisez la notion commune 1.

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.

II. Lecture de la proposition I

PROPOSITION PREMIÈRE.

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

Exposition. Soit AB une droite donnée et finie.

Détermination. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.

Construction. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence BΓΔ (dem. 3); et de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence AΓE; et du point Γ, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites ΓA, ΓB (dem. 1).

1 Tracez un segment de droite [A B] , lisez les lignes 1 à 8 en effectuant la construction proposée par Euclide et en vous reportant aux demandes 1 et 3.
remarques : Γ se lit gamma,
Δ se lit delta ; ce sont des lettres grecques.

2. Lisez la démonstration en vous reportant à la définiton 15 et à la notion commune 1 (not 1)

Démonstration. Car, puisque le point A est le centre du cercle BΓΔ, la droite AΓ est égale à la droite AB (déf. 15); de plus, puisque le point B est le centre du cercle AΓE, la droite BΓ est égale à la droite BA ; mais on a démontré que la droite ΓA était égale à la droite AB ; donc chacune des droites ΓA, ΓB est égale à la droite AB; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1); donc la droite ΓA est égale à la droite ΓB ; donc les trois droites ΓA, AB, BΓ sont égales entre elles.

3. Lisez la conclusion en vous reportant à la définition 24. Puis relisez le texte entier de la proposition.

Conclusion. Donc le triangle ABΓ (def. 24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie AB. Ce qu'il fallait faire.

LE PREMIER LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. Le point est ce dont la partie est nulle.

2. Une ligne est une longueur sans largeur.

3. Les extrémités d'une ligne sont des points.

4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.

5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.

6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.

7. La surface plane est celle qui est également placée entre ses droites.

8. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.

9. Lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont des droites, l'angle se nomme rectiligne.

10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.

11. L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.

12. L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.

13. On appèle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.

14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.

15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence ; toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.

16. Ce point se nomme le centre du cercle.

17. Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales.

18. Un demi-cercle est la figure comprise par le diamètre, et la portion de la circonférence, soutendue par le diamètre.

19. Un segment de cercle est la figure comprise par une droite et par la circonférence du cercle ; le demi-cercle étant plus grand ou plus petit que le segment.

20. Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites.

21. Les figures trilatères sont terminées par trois droites.

22. Les quadrilatères, par quatre.

23. Les multilatères, par plus de quatre.

24. Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux.

25. Le triangle isocèle, celle qui a seulement deux côtés égaux.

26. Le triangle scalène, celle qui a ses trois côtés inégaux.

27. De plus, parmi les figures trilatères, le triangle rectangle est celle qui a un angle droit.

28. Le triangle obtusangle, celle qui a un angle obtus.

29. Le triangle acutangle, celle qui a ses trois angles aigus.

30. Parmi les figures quadrilatères, le quarré est celle qui est équilatérale et rectangulaire.

31. Le rectangle, celle qui est rectangulaire, et non équilatérale.

32. Le rhombe, celle qui est équilatérale, et non rectangulaire.

33. Le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux, et qui n'est ni équilatérale ni rectangulaire.

34. Les autres quadrilatères, ceux-là exceptés, se nomment trapèzes.

35. Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre.

DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.

2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.

3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.

4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.

5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.

6. Deux droites ne renferment point un espace.

NOTIONS COMMUNES.

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.

2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.

3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.

4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux.

5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.

6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.

7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.

8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.

9. Le tout est plus grand que la partie.

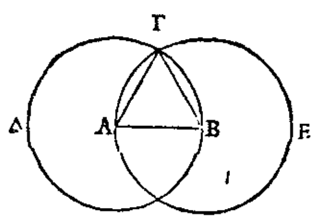
PROPOSITION PREMIÈRE.

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

Exposition. Soit AB une droite donnée et finie.

Détermination. Il faut construire sur la droite finie AB un triangle équilatéral.

Construction. Du centre A et de l'intervalle AB, décrivons la circonférence BΓΔ (dem. 3); et de plus, du centre B et de l'intervalle BA, décrivons la circonférence AΓE; et du point Γ, où les circonférences se coupent mutuellement, conduisons aux points A, B les droites ΓA, ΓB (dem. 1).

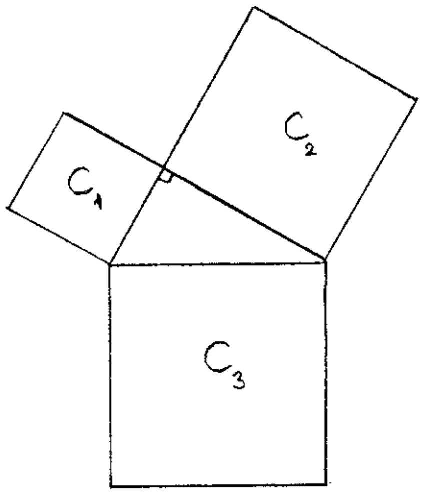


Démonstration. Car, puisque le point A est le centre du cercle BΓΔ, la droite AΓ est égale à la droite AB (déf. 15); de plus, puisque le point B est le centre du cercle AΓE, la droite BΓ est égale à la droite BA; mais on a démontré que la droite ΓA était égale à la droite AB; donc chacune des droites ΓA, ΓB est égale à la droite AB; or, les grandeurs qui sont égales à une même grandeur, sont égales entre elles (not. 1); donc la droite ΓA est égale à la droite ΓB; donc les trois droites ΓA, AB, BΓ sont égales entre elles.

Conclusion. Donc le triangle ABΓ (def. 24) est équilatéral, et il est construit sur la droite donnée et finie AB. Ce qu'il fallait faire.

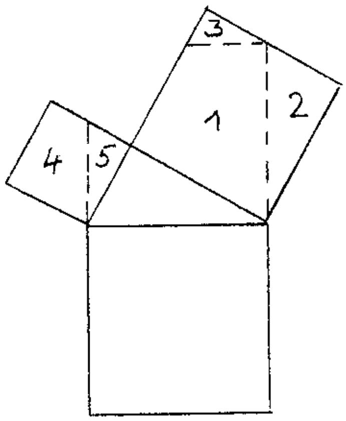
LE THEOREME DE PYTHAGORE ET LA DEMONSTRATION D'EUCLIDE
Récit d'une expérience en 4^e

1ére séance (1 heure). **Découverte,** par :



1) L'observation d'une affiche montrant la célèbre figure, (affiche réalisée par un élève). J'explique que cette figure était déjà célèbre du temps des Grecs, qu'on la trouve dans les *Eléments* d'Euclide, illustrant un énoncé célèbre, appelé le théorème de Pythagore, dont je donne l'énoncé.

Nous l'écrivons en abrégé: $C_3 = C_1 + C_2$



2) Vérification expérimentale
Chaque élève fait la figure sur son cahier, aux dimensions de son choix, puis, après mesures au double décimètre, tente de vérifier l'égalité.
(succès inégal bien sûr !)

3) un puzzle
J'explique aux enfants le découpage des cinq morceaux du puzzle, et leur explique le but : reconstituer avec cinq morceaux le grand carré. (travail à faire à la maison)

2e séance (une heure)

1) Les élèves ont apporté les puzzles. Ils ont tous réussi la reconstitution du carré. Contentement général.....

.Discussion: peut-on vraiment considérer avoir ainsi une véritable "démonstration" du théorème? Avis très partagés. (Pour beaucoup d'enfants, le puzzle apparait comme une preuve très convaincante).

C'est alors que je propose l'étude du **raisonnement d'Euclide** en expliquant que c'est la plus ancienne démonstration connue du théorème de Pythagore.

2)Je distribue alors la feuille des propositions préliminaires (fiche 1)

Pour la proposition 4, les élèves font la figure demandée, puis nous lisons à haute voix l'énoncé, expliquons l'étrange locution "chacun à chacun", dégageons les hypothèses, et les conclusions .

Ensuite nous lisons la démonstration. Quelques élèves remarquent la présence d'un raisonnement par l'absurde ; je leur lis alors la demande 6 : *"Deux droites ne comprennent point un espace"*
c'est à dire : par deux points ne passe qu'une seule droite.

Admiration générale du souci de rigueur d'Euclide!

Puis nous étudions la proposition 41. L'énoncé est clair pour tout le monde, et la démonstration facilement trouvée.

3e séance (1 heure)

Je distribue aux élèves le texte de la proposition 47. (cf fiche 2), et la figure déjà prête, pour gagner du temps, d'un triangle rectangle avec les trois carrés adjoints. (cf fiche 3)

L'heure se passe alors à lire la démonstration d'Euclide. J'ai eu pour ce travail une aide précieuse, celle du rétroprojecteur et de la pochette de documents transparents diffusés par l'IREM d'Orléans, "le théorème de Pythagore au rétroprojecteur ". Les élèves étaient ravis de voir la figure compliquée se faire (et se défaire) sur le mur de la classe, et ils ont été très intéressés par la lecture du texte d'Euclide (pour eux, bien sûr, difficile).
A la fin de l'heure, j'ai distribué la suite des questions à faire en devoir à la maison. (cf fiche 4)

4e séance (1 demi-heure)

Je rends les devoirs, c'est l'heure du bilan. Celui-ci est très positif. Les 23 élèves présents ont rendu le devoir. Une grande majorité a bien compris, et réussi à rédiger clairement la démonstration en langage plus moderne.
Interrogés par écrit,

12 trouvent la démonstration "intéressante, astucieuse, pas trop difficile "
10 la trouvent "intéressante, mais un peu difficile" .
1 la trouve "compliquée, et inutile".

Je distribue un corrigé polycopié, qui est collé dans le cahier de cours .
(cf fiche 5) .

Etude de quelques propositions du livre I des *Eléments* d'Euclide, nécessaires à la compréhension de la démonstration de la proposition 47 (théorème de Pythagore).

Proposition 4

> Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun.

exercice

Illustrer cette proposition en construisant, avec rapporteur et compas, deux triangles ABΓ et ΔEZ tels que $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$, AB = ΔE et AΓ = ΔZ.
Pensez-vous, comme Euclide, que les deux triangles soient **égaux** (c'est à dire, ici, superposables) ?
Voici le raisonnement d'Euclide :

> Car le triangle ABΓ étant appliqué sur le triangle ΔEZ, le point A étant posé sur le point Δ, et la droite AB sur la droite ΔE, le point B s'appliquera sur le point E, parce que AB est égal à ΔE ; mais AB étant appliqué sur ΔE, la droite AΓ s'appliquera sur ΔZ, parce que l'angle BAΓ est égal à l'angle EΔZ ; donc le point Γ s'appliquera sur le point Z, parce que AΓ est égal à ΔZ ; mais le point B s'applique sur le point E ; donc la base BΓ s'appliquera sur la base EZ ; car si le point B s'appliquant sur le point E, et le point Γ sur le point Z, la base BΓ ne s'appliquait pas sur la base EZ, deux droites comprendraient un espace, ce qui est impossible (dem. 6) ; donc la base BΓ s'appliquera sur la base EZ, et lui sera égale ; donc le triangle entier ABΓ s'appliquera sur le triangle entier ΔEZ, et lui sera égal ; et les angles restans s'appliqueront sur les angles restans, et leur seront égaux, l'angle ABΓ à l'angle ΔEZ, et l'angle AΓB à l'angle ΔZE.
>
> Donc, si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun. Ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 41

> Si un parallélogramme a la même base qu'un triangle, et s'il est dans les mêmes parallèles, le parallélogramme est double du triangle.

Démontrez cette proposition,en utilisant vos souvenirs concernant le calcul de l'aire d'un triangle .

Proposition 47 du livre I des *Eléments* d'Euclide.

Enoncé et démonstration du **théorème de Pythagore**

Proposition 47 *Dans les triangles rectangles, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des côtés qui comprennent l'angle droit.*

(3) Soit *ABC* un triangle rectangle, que *BAC* soit l'angle droit; je dis que le carré du côté *BC* est égal aux carrés des côtés *BA*, *AC*.

(5) Décrivons avec *BC* le carré *BDEC*, et avec *BA*, *AC* les carrés *GB*, *HC* (c'est-à-dire *ABFG* et *ACKH*); et par le point *A* conduisons *AL* parallèle à l'une ou l'autre des droites *BD*, *CE*; et joignons *AD*, *FC*.

(8) Puisque chacun des angles *BAC*, *BAG* est droit, les deux droites *AC*, *AG*, non placées du même côté, font avec la droite *BA* au point *A* de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite *CA* est dans la direction de *AG*.

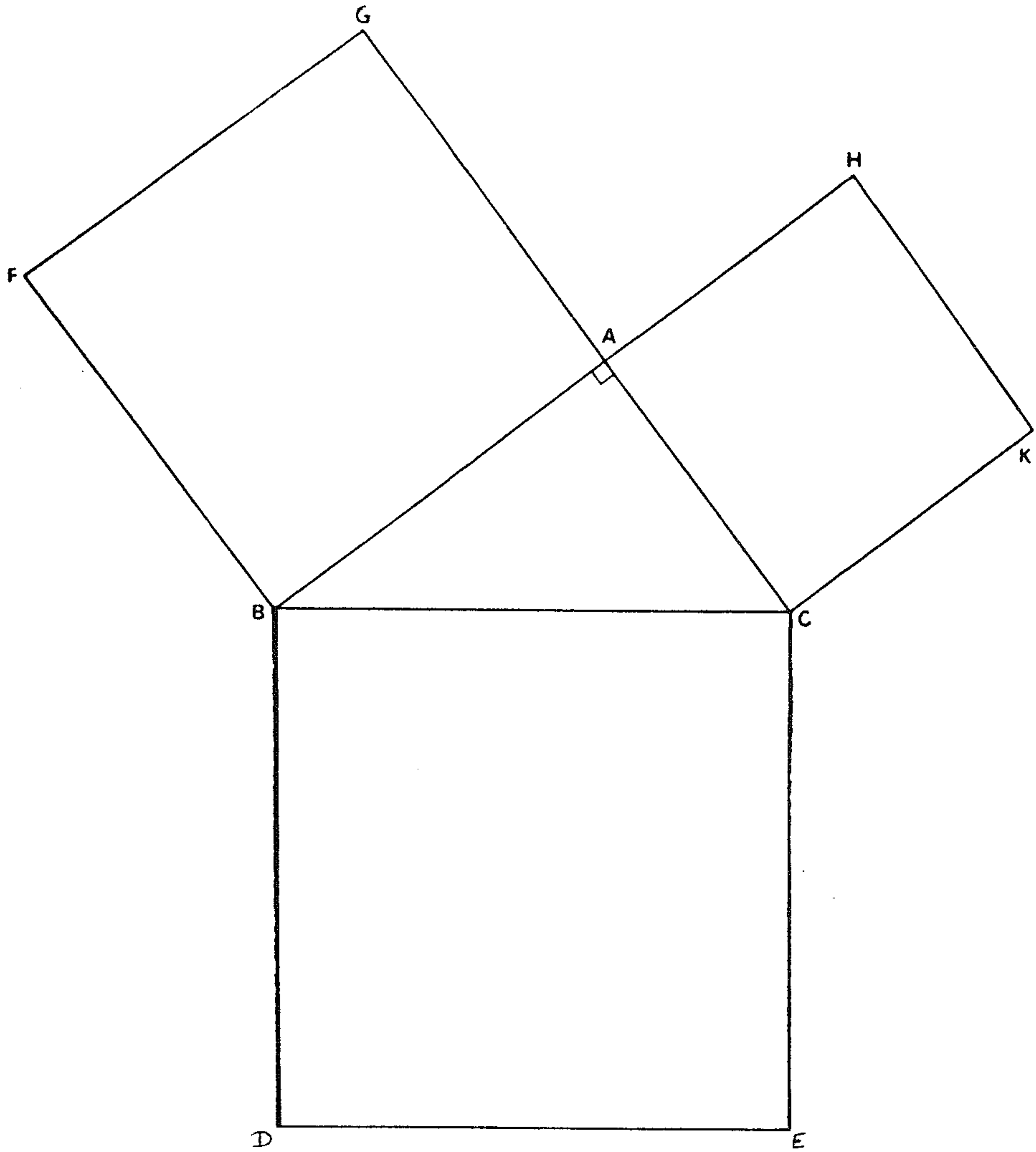
La droite *BA* est dans la direction *AH*, par la même raison.

(13) Et puisque l'angle *DBC* est égal à l'angle *FBA*, étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun *ABC*, l'angle entier *DBA* sera égal à l'angle entier *FBC* ,

Et puisque *DB* est égal à *BC*, et *FB* à *BA*, les deux droites *AB*, *BD* sont égales respectivement aux deux droites *FB*, *BC*; mais l'angle *DBA* est égal à l'angle *FBC*; donc la base *AD* est égale à la base *FC*, et le triangle *ABD* est égal au triangle *FBC* (4).

(20) Mais le parallélogramme *BL* est double du triangle *ABD* (41), car ils ont la même base *BD* et ils sont entre les mêmes parallèles *BD*, *AL*; le carré *BG* est double du triangle *FBC*, car ils ont la même base *BF* et ils sont entre les mêmes parallèles *FB*, *GC*; et les grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales sont égales entre elles; donc le parallélogramme *BL* est égal au
(25) carré *GB*. Ayant joint *AE*, *BK*, nous démontrerons semblablement que le parallélogramme *CL* est égal au carré *HC*; donc le carré entier *BDEC* est égal aux deux carrés *GB*, *HC*.

Mais le carré *BDEC* est décrit avec *BC*, et les carrés *GB*, *HC* sont décrits avec *BA*, *AC*; donc le carré du côté *BC* est égal aux carrés des côtés *BA*, *AC*. Donc dans les triangles, etc.


G
H
F
A
K
B
C
D
E

Aide à la lecture de la démonstration de la proposition 47

1) Lire l'énoncé. lignes (1) et (2).

Cet énoncé, répété sous une autre forme aux lignes (3) et (4), est célèbre : c'est le fameux THEOREME DE PYTHAGORE.

remarque : en termes modernes, il vaudrait mieux dire: "l'aire du carré de côté BC est égal à la **somme** des aires des carrés des côtés AB et AC".

2) Réaliser les constructions proposées aux lignes (5) à (7).
(le point L est à l'intersection de la parallèle tracée avec la droite (DE).

3) A la ligne (8), pourquoi Euclide peut-il affirmer que chacun des angles BAC ET BAG est droit ?

.A cette même ligne, on lit ensuite : "Les deux droites AC , AG , non placées du même côté.......". Le mot "droite" est-il celui que nous utiliserions dans notre langage moderne ?

.Récrivez le raisonnement des lignes (8) à (12) en langage plus moderne.

4) Etudiez ensuite les lignes (13) à (19).
Coloriez sur votre figure les triangles ABD et FBC. Expliquez comment la proposition 4 s'applique bien ici pour permettre de démontrer que ces triangles sont égaux.

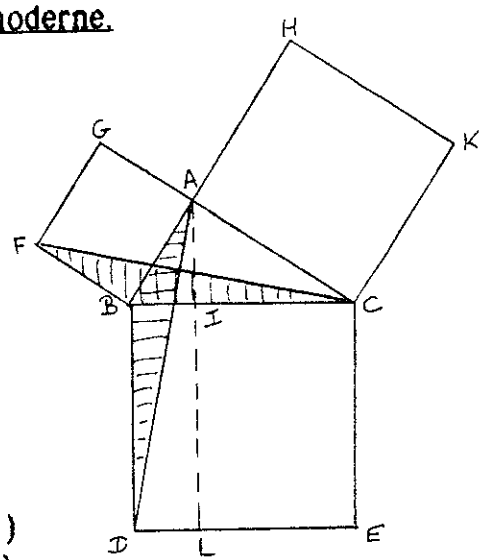
5) Etudiez ensuite les lignes (20) à (24).
Coloriez, ou hachurez d'une même couleur, le parallélogramme BDLI et le carré BFGA.
Expliquez le raisonnement d'Euclide, en montrant bien comment il peut utiliser, deux fois de suite, la proposition 41.(A ce propos, on montrera l'utilité du premier paragraphe de la démonstration, où Euclide a démontré que C , A , G sont alignés).

Illustrez les lignes (25) et (26) en coloriant (ou hachurant), d'une autre couleur le rectangle CILE et le carré ACKH.

A la ligne (27) , précisez le raisonnement permettant de conclure: "donc le carré entier BDEC est égal à la somme des deux carrés ABFG et ACKH ".("égal" signifiant ici :" a la même aire que ....").

6) Pour finir, essayez d'exposer, en résumant, le plan de la démonstration d'Euclide.

La démonstration d'Euclide en langage moderne.



1) Puisque, par hypothèse, l'angle $\widehat{BAC}$ est droit, et puisque, par construction, BAGF est un carré, $\widehat{BAG}$ est droit lui aussi, et donc $\widehat{CAG}$ est la somme de deux angles droits, $\widehat{CAG}$ est un angle plat, et par conséquent C, A, G sont alignés
Pour les mêmes raisons
B, A, H sont alignés

2) Les triangles FBC et ABD ont :
FB = AB (côtés d' un même carré)
BC = BD (côtés d' un même carré)
et $\widehat{FBC} = \widehat{ABD}$ (car chacun est égal à : l'angle $\widehat{ABC}$ plus un angle droit)
Ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux "chacun à chacun", les triangles FBC et ABD sont égaux (superposables). (cf. proposition 4)

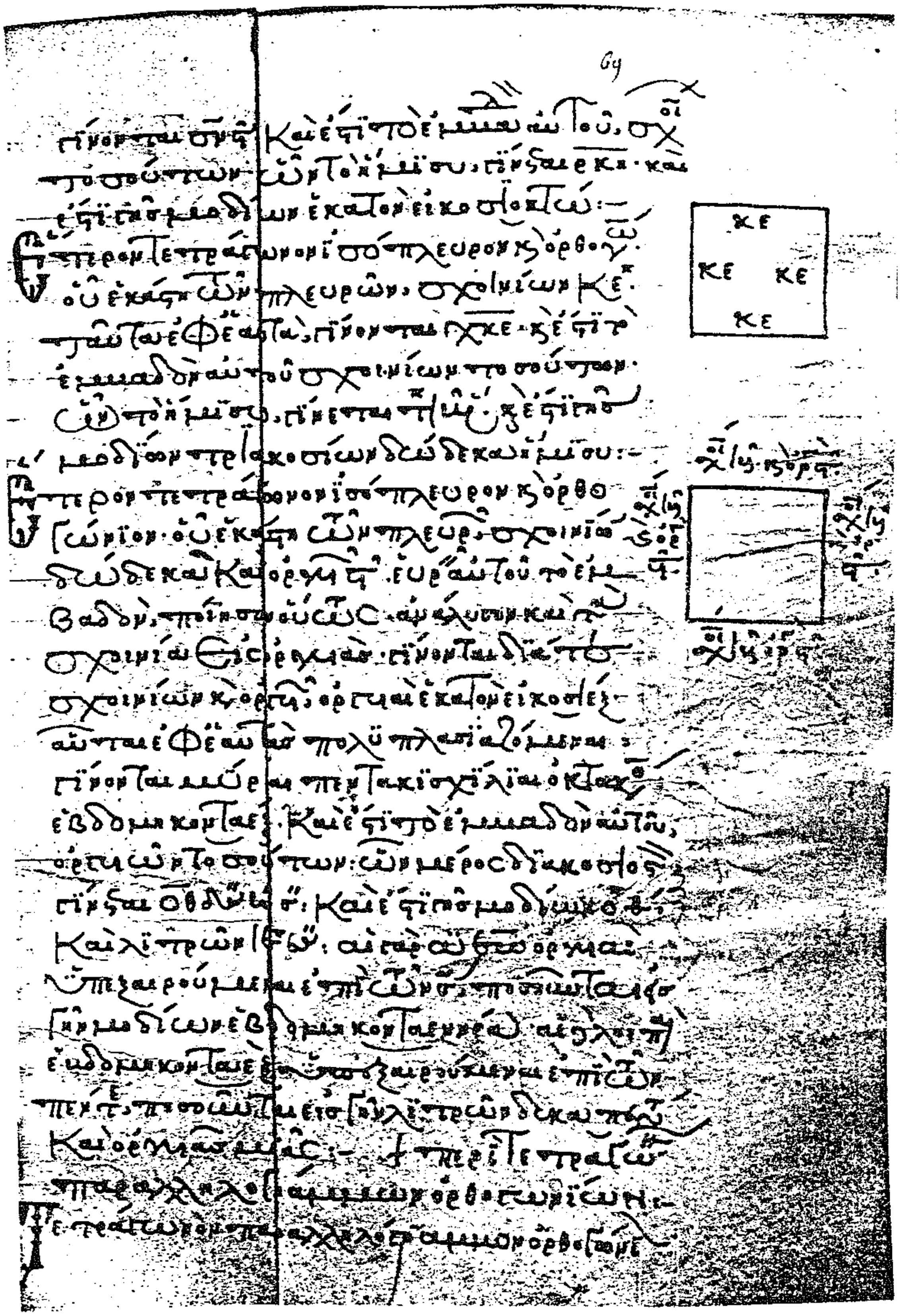
3) Or le parallélogramme BDLI est double du triangle ABD, car ils sont construits sur la même base [BD] et entre les mêmes parallèles (BD) et (AL). (cf . proposition 41)
De même, puisque C, A, G sont alignés, le carré BFGA et le triangle BFC sont construits sur la même base [BF] et entre les mêmes parallèles (BF) et (CG).
Donc, toujours d'aprés la proposition 41, le carré BFGA est le double du triangle FBC

4) Or des grandeurs doubles de grandeurs égales sont égales entre elles donc, puisque FBC et ABD, superposables, ont la même aire, le parallélogramme BDLI a la même aire que le carré BFGA .

On démontrerait de même que : le parallélogramme CILE a même aire que le carré ACKH .

Or le carré BDEC est la somme des deux parallélogrammes (rectangles) BDLI et CILE .L'aire de BDEC est donc la somme des aires des deux carrés ABFG et ACKH.

CONCLUSION :Théorème de Pythagore
Dans tout triangle rectangle, le carré construit sur l'hypoténuse est égal à la somme des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.



Les Eléments d'Euclide.
Manuscrit grec du
12e siècle.

EUCLIDE : *Eléments* Livre VI . Proposition II — Niveau 3e
Traduction Peyrard; ed. Blanchard 1966.

DEMONSTRATION DU THEOREME DE THALES.

Cette démonstration, située au début du livre VI, conjugue de façon étonnante la méthode des aires, et la théorie des proportions développée dans le livre V.
On notera qu'elle réussit à contourner la difficulté à laquelle se heurte la démonstration classique par les parallèles équidistantes, qui ne peut être faite au niveau élémentaire que dans le cas où les rapports de longueurs sont rationnels .

Expérimentations

Dans les différentes classes, cette étude a toujours été proposée après que les élèves se soient déjà familiarisés avec le célèbre théorème de Thalès, étudié d'abord classiquement, et utilisé dans de nombreux exercices .

Le travail a fait l'objet d'un **devoir à la maison,** sans préparation spéciale, englobant les exercices préparatoires et la réponse au questionnaire visant à vérifier la compréhension du raisonnement d'Euclide .
Le jour où les devoirs corrigés ont été rendus aux élèves, une demi-heure environ a été consacrée, en classe, à des mises au point, et à un court débat sur l'intérêt de la démonstration d'Euclide.

Bilan
En général, à part quelques cas, peu nombreux, d'incompréhension, les élèves ont été très intéressés par l'originalité du travail et l'élégance magistrale du raisonnement d'Euclide. Voici, pris au hasard parmi les commentaires à la fin des devoirs, le suivant :
" Cette démonstration n'est pas trop difficile, mais il ne faut pas perdre le moral pour suivre de bout en bout le raisonnement d'Euclide. Tous les éléments sont importants. Il faudrait être un génie pour trouver une faille à ce raisonnement !".

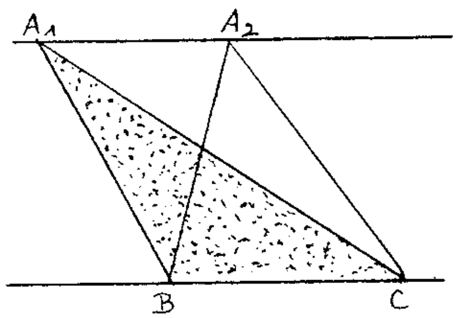
La démonstration par Euclide du théorème de Thalès.

I Exercices préparatoires.

Rappel .
L'aire d'un triangle est égale au demi-produit d'un côté par la hauteur relative à ce côté :

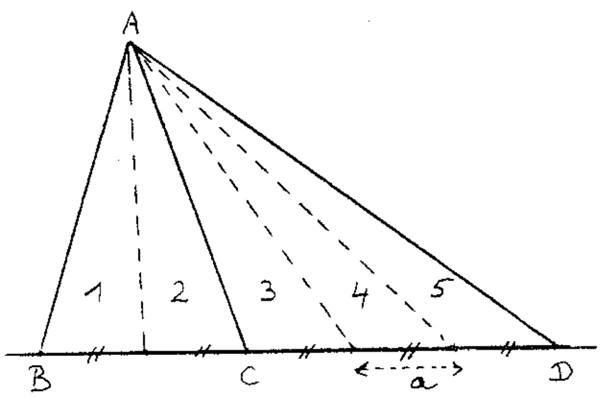
$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

Exercice 1



Prouver que les deux triangles A_1BC et A_2 BC de la figure ci-contre ont la même aire.
.Parmi les propositions d'Euclide proposées dans la feuille ci-jointe, laquelle exprime cette propriété? Dans quel sens Euclide utilise-t-il, la locution " triangles égaux "?

Exercice 2



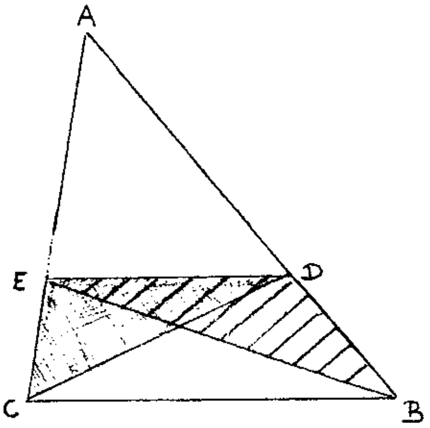
Regarder la figure ci-contre.
On suppose :
B, C, D alignés , BC = 2a et CD= 3a

Dans quel rapport sont les longueurs BC et CD ?
Montrer que les cinq triangles juxtaposés numérotés 1, 2, 3 ,4 ,5 ont la même aire .
En déduire que les aires des triangles ABC et ACD sont aussi dans le raport de 2 à 3,
(ou encore dans le rapport $\frac{2}{3}$).

Lire maintenant la proposition 1 du livre VI des *Eléments* d'Euclide.
Elle signifie, généralisant l'exemple précédent :
"Des triangles qui ont la même hauteur ont leurs aires dans le même rapport que leurs bases ."
Autrement dit :

B , C , D étant alignés, $\dfrac{\text{aire}(ABC)}{\text{aire}(ACD)} = \dfrac{BC}{CD}$

Exercice 3



Regarder la figure ci-contre.
(ED) est supposée parallèle à (BC)

1°) Montrer, en utilisant une proposition d'Euclide, que les triangles BDE et CDE ont la même aire. On écrira :

$$\mathcal{A}(BDE) = \mathcal{A}(CDE),$$

d'où, en formant les rapports de ces deux aires à l'aire de ADE :

$$\frac{\mathcal{A}(BDE)}{\mathcal{A}(ADE)} = \frac{\mathcal{A}(CDE)}{\mathcal{A}(ADE)} \qquad (1)$$

2°) Montrer que les triangles ADE et BDE ont une hauteur commune.
(On refera la figure, en coloriant ces deux triangles, et en traçant la hauteur commune).

Que peut-on en déduire, d'après la proposition I du livre VI?

Compléter: $$\frac{\mathcal{A}(BDE)}{\mathcal{A}(ADE)} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \qquad (2)$$

Montrer de même que les triangles CDE et ADE ont une hauteur commune. (Faire une nouvelle figure)

En déduire, toujours d'après la proposition 1 du livre VI.

$$\frac{\mathcal{A}(CDE)}{\mathcal{A}(ADE)} = \frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots} \qquad (3)$$

3°) Des égalités (1), (2), (3), déduire que les longueurs BD et CE sont proportionnelles à DA et EA.

II Lecture de la proposition II du livre VI des *Eléments* d'Euclide

1°) Lisez d'abord la première phrase (lignes 1 et 2).
C'est le célèbre énoncé de Thalès
.Le connaissiez-vous déjà? Sous quelle formulation est-il donné dans votre cours ?

2°) La deuxième phrase, entre crochets , est l'énoncé "réciproque ".
.Quelle différence faites vous entre ces deux énoncés?

3°) Aux lignes (5) et (6), Euclide précise les notations qu'il va utiliser pour la démonstration et réaffirme l'énoncé, désormais précisé par ces notations :

"Je dis que ED est à DA comme CE est à EA"

("Je dis " signifie : j'affirme et je vais démontrer .).

Question : Comment écrivons-nous, de façon moderne,
"ED est à DA comme CE est à EA"?

4°) La démonstration commence à la ligne (8); (c'est la première démonstration connue de ce théorème très ancien).
Si vous avez fait l'exercice 3, vous devriez la comprendre facilement.

Vous pourrez vérifier que :
- -les raisonnements des lignes (8) à (11) sont ceux de la 1ère question.
- -ceux des lignes (12) à (15) sont ceux de la 2e question,
- -qu'enfin le "donc" de la ligne (16) correspond à la déduction de la 3e question.

Question subsidiaire

Trouvez-vous ce raisonnement difficile ?
clair ?
convaincant ?

PROPOSITION XXXVII.

Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux.

LE SIXIÈME LIVRE
DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION PREMIÈRE.

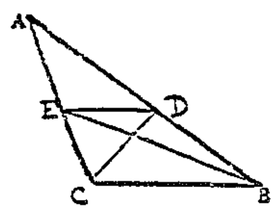
Les triangles (et les parallélogrammes) qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

PROPOSITION II.

Si l'on mène une droite parallèle à un des côtés d'un triangle, cette droite coupera proportionnellement les côtés de ce triangle; et si les côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la droite qui joindra les sections sera parallèle au côté restant du triangle. (4)

Menons DE parallèle à un des côtés BC du triangle ABC; je dis que BD est à DA comme CE est à EA. (5)

Joignons BE, CD.



Le triangle BDE sera égal au triangle CDE (37. 1), parce qu'ils ont la même base DE, et qu'ils sont compris entre les mêmes parallèles DE, CB. Mais ADE est un autre triangle; et des grandeurs égales ont la même raison avec une même grandeur (7. 5); donc le triangle BDE est au triangle ADE comme le triangle CDE est au triangle ADE. Mais le triangle BDE est au triangle ADE comme BD est à DA; car ces deux triangles, qui ont la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point E sur la droite AB, sont entr'eux comme leurs bases (1. 6). Par la même raison le triangle CDE est au triangle ADE comme CE est à EA; donc BD est à DA comme CE est à EA (8) (10) (12) (16)

EUCLIDE : *Eléments* Livre VI . Proposition XIII
Traduction Peyrard; ed. Blanchard 1966.

Niveau
3^e-2^e

MOYENNE PROPORTIONNELLE

I. Exercices préparatoires à la lecture de la proposition XIII du livre VI

1) Si a,b,c sont des éléments de R^{+*}, b est la moyenne proportionnelle entre a et c si et seulement si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

Calculez la moyenne proportionnelle: entre 3 et 2
entre 5 et 3

entre 2 et 1

Complétez la phrase suivante: si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ alors b =

2)ABC est un triangle rectangle en A de hauteur [AH].
Rappelez la relation métrique dans le triangle rectangle donnant le carré de la hauteur .
Faites une phrase pour exprimer entre quelles longueurs la hauteur est moyenne proportionnelle .

II.lecture du texte .

1) Lisez le texte en réalisant la figure.
2)La justification en langage moderne de la ligne 7 est-elle la même de nos jours ?
3) Donnez la justification des lignes 8,9 et 10 ;
4) Déduisez de ce texte une construction de la moyenne proportionnelle entre un segment de mesure 2 et un segment de mesure 3 , un segment et son double .

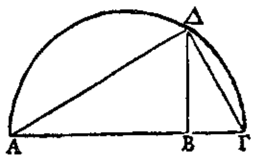
N.B.Vous trouverez plus loin un travail sur la racine carrée à l'aide d'un texte de Descartes utilisant *la méthode d'Euclide* .

PROPOSITION XIII.

Deux droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle.

Soient AB, BΓ les deux droites données; il faut trouver une moyenne proportionnelle entre AB, BΓ.

Plaçons ces droites dans la même direction, et sur la droite AΓ décrivons le demi-cercle AΔΓ; du point B menons BΔ perpendiculaire à AΓ, et joignons AΔ, ΔΓ (11. 1).



Puisque l'angle AΔΓ est dans un demi-cercle, cet angle est droit (31. 3). Et puisque dans le triangle rectangle AΔΓ on a mené de l'angle droit la droite ΔB perpendiculaire à la base, la droite ΔB est moyenne proportionnelle entre les segments AB, BΓ de la base (cor. 8. 6).

Donc les deux droites AB, BΓ étant données, on a trouvé une moyenne proportionnelle BΔ. Ce qu'il fallait faire.

EUCLIDE : *Eléments* Livre IX. Proposition XX
Traduction Peyrard; ed. Blanchard 1966.

Niveau TA_2

DE L'INFINITE DES NOMBRES PREMIERS

I. Travail préliminaire à la lecture du texte.

1. Quel est le plus petit multiple commun de 2, 3, 5?
2. On appelle a ce nombre. a + 1 est-il premier?
3. Quel est le plus petit muliple commun de 3, 5, et 7?
4. On appelle b ce nombre; b + 1 est-il premier?
5. Le nombre b + 1 permet-il de trouver un nombre premier différent de 3, 5 et 7?
6. Quel est le plus petit multiple commun de 2, 3, 5, 7 et 11?
7. On appelle c ce nombre; c + 1 est-il premier?

II. Questions accompagnant la lecture du texte :

Avant de commencer la lecture, faisons deux remarques sur le langage et les notations :"un nombre H est mesuré par un nombre A" si H est multiple de A; dans ce texte EZ est un nombre, ΔE, ΔZ sont des nombres.

1. Rappelez la définition du nombre premier.
2. Lisez l'énoncé de la proposition (lignes 1 et 2) : comment la formuleriez-vous?
3. Lisez les lignes 3 à 6: comment Euclide appelle-t-il le ppcm de 2 nombres ? Que vaut ΔE pour l'exemple numérique dans ce texte? Etant donné trois nombres A, B, Γ peut-on toujours trouver le plus petit nombre mesuré par eux?
4. Lisez les lignes 6 à 9. Dans l'exemple numérique, quel est le nouveau nombre entier.
5. Lisez la première phrase des lignes 10 et 11. Donnez un énoncé possible de la proposition 33.7. Comment pouvez-vous justifier cette proposition?
6. Lisez les lignes 11 et 12.

Euclide énonce "je dis que H n'est aucun des nombres A, B, Γ"; le "je dis que" annonce une démonstration: pour démontrer que H n'est ni A, ni B, ni Γ, il commence par supposer H égal à l'un d'eux. Comment appelle-t-on ce genre de raisonnement?

7. Supposez H = A. Les hypothèses précédentes sont :

   H mesure EZ

   A mesure ΔE

Concluez-en "H mesure 1" à l'aide du théorème:
Si a divise b et c alors a divise b-c.

8. Lisez les lignes 12 à 15. Où réside la contradiction?

9. Terminez la lecture et relisez le texte en entier. Quel commentaire pouvez vous faire?

III. Commentaires.

Cette expérience fut proposée dans le cadre de l'option arithmétique en TA2. J'ai proposé une réflexion sur les nombres premiers ; les deux questions travaillées furent :

Y a-t-il une loi de formation des nombres premiers?

La suite des nombres premiers est-elle finie ?

Le travail proposé demande comme connaissances pré-requises la définition du nombre entier et le théorème : "si a divise b et c alors a divise b-c ".

PROPOSITION XX.

Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité proposée de nombres premiers.

Soient A, B, Γ les nombres premiers que l'on aura proposés; je dis que les nombres premiers sont en plus grande quantité que les nombres A, B, Γ.

A, 2. B, 3. Γ, 5.

E 38. Δ Z

Soit pris le plus petit nombre qui est mesuré par les nombres A, B, Γ (38. 7); et que ce nombre soit ΔE; ajoutons l'unité ΔZ à ΔE; le nombre EZ sera un nombre premier, ou il ne le sera pas. Qu'il soit d'abord un nombre premier; on aura trouvé les nombres premiers A, B, Γ, EZ qui sont en plus grande quantité que les nombres A, B, Γ.

Mais que EZ ne soit pas un nombre premier; ce nombre sera mesuré par quelque nombre premier (33. 7). Qu'il soit mesuré par le nombre premier H; je dis que H n'est aucun des nombres A, B, Γ. Qu'il soit un de ces nombres, si cela est possible. Puisque les nombres A, B, Γ mesurent ΔE, le nombre H mesurera ΔE. Mais

A, 3. B, 5. Γ, 7.

E 105. Δ Z

H, 53.

H mesure EZ; donc H, qui est un nombre, mesurera l'unité restante ΔZ, ce qui est absurde; donc H n'est aucun des nombres A, B, Γ. Mais on a supposé qu'il est un nombre premier; les nombres premiers A, B, Γ, H, que l'on a trouvés, sont donc en plus grande quantité que les nombres A, B, Γ. Ce qu'il fallait démontrer.

II

ARCHIMEDE

ARCHIMEDE.

ARCHIMEDE (287 avant J.C. ,212 avant J.C.) a laissé de nombreux ouvrages, entre autres: le *Premier* et *le Second livre des èquilibres*, *l'Arénaire* où il expose un système de numération pour les très grands nombres, *Des corps flottants* (le fameux principe d'Archimède), *Sur la sphère et le cylindre* (calcul du volume de la sphère à partir d'un cylindre de même rayon, *La quadrature de la parabole* (calcul de l'aire d'un segment de parabole), etc.

Dans *La mesure du cercle*, Archimède démontre trois propositions:

Proposition 1 : "tout cercle est équivalent à un triangle dans lequel l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon du cercle et la base (c'est à dire l'autre côté de l'angle droit) égale au périmètre du cercle" .

En termes modernes, si A, P, R sont respectivement l'aire, le périmètre, le rayon d'un cercle, alors $A = \frac{1}{2}\ RP$ ou $\frac{A}{R^2} = \frac{P}{2R}$. Autrement dit, c'est la même constante (celle que nous appelons π) qui intervient dans le calcul de l'aire et celui du périmètre d'un cercle .

Archimède met en oeuvre la méthode dite d'exhaustion, déjà développée par Eudoxe et Euclide . La méthode permet d'éviter le passage à l'infini (voir *Mathématiques au fil des âges*, pages 131 à 134).

Proposition 3 : "Le périmètre de tout cercle est égal au triple du diamètre, augmenté d'un segment compris entre les dix-soixante-et-onzième et le septième du diamètre ".

Autrement dit, si P et D sont le périmètre et le diamètre d'un cercle, alors

$$3 + \frac{10}{71} < \frac{P}{D} < 3 + \frac{1}{7}$$

De ces deux propositions, on peut déduire une valeur approchée de l'aire d'un cercle : $A \approx \frac{11}{14}\, d^2$ (prop. 2 du texte)

Notons qu'Archimède se préoccupe d'encadrer un rapport ($\frac{P}{D}$) et non pas un nombre . La notation π (de περιμετρον) date du début du XVIII^e siècle.

Archimède obtient cet encadrement par le calcul de valeurs approchées (respectivement par défaut et par excès) de $\frac{P_{96}}{D}$ et $\frac{Q_{96}}{D}$ (notations bien anachroniques !), P_{96} étant le périmètre du polygone régulier à 96 côtés inscrit dans le cercle et Q_{96} celui du polygone régulier à 96 côtés circonscrit au cercle . Ces valeurs approchées sont calculées grâce à un procédé itératif : Archimède part d'un hexagone régulier (pour lequel le rapport est connu) et donne une méthode de calcul permettant d'obtenir le rapport cherché pour un polygone ayant le double de côtés .

La méthode d'Archimède sera reprise de nombreuses fois : citons Al-Kashi(XVème siècle), Fibonacci (XIIIème siècle), Métius (XVIIème siécle) etc.

Viète (1540-1603), par un travail analogue sur les aires, obtient le fameux rapport comme produit infini :

$$\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}$$

(voir brochure M.:A.T.H. n° 61 page 14)

Huygens (1629-1695) améliore la méthode .

Il faut attendre Newton (1642-1727) pour trouver des méthodes radicalement différentes: dans *La méthode des fluxions*, Newton calcule une approximation de π à l'aide d'un développement en série et d'un calcul d'intégrale (voir brochure M.A.T.H. n°61 page 24)

Lambert (1728-1777) démontre l'irrationnalité de π on retrouve cette démonstration , ainsi que celle de l'irrationnalité de π^2 , dans les *Eléments de géomètrie* de Legendre (1794).

Enfin, la transcendance de π est démontrée par Lindemann en 1882.

Au sujet de π on lira avec intérêt le numéro *spécial π* du *Petit Archimède.*

TROIS FICHES SUR LE CALCUL DE π.

I. Présentation

Ces fiches sont destinées à des élèves de troisième, mais sans doute peuvent-elles être utilement données aussi en début de classe de seconde).

. Les deux premières présentent la méthode, (adaptée de celle d'Archimède) :

La fiche 1 permet de trouver un premier encadrement de π, à partir d'hexagones réguliers (inscrit et circonscrit).

La fiche 2 améliore la précision, en utilisant des dodécagones réguliers.

La fiche 3 propose la lecture de la proposition 3 du traité *De la mesure du cercle*, et propose une réflexion sur les résultats (d'Archimède et de certains de ses successeurs).

II. Utilisation

Après plusieurs essais et mises au point, il semble raisonnable :

de proposer la fiche 1 à toute la classe de troisième, en **devoir à la maison**

. après correction de cette fiche 1, de proposer la fiche 2, en ne demandant un travail rédigé sur feuille qu'aux élèves suffisamment capables et motivés. (Inutile de décourager les autres, les calculs sont un peu difficiles)

. enfin une heure en classe peut-être consacrée à la lecture de la fiche 3, c'est à dire à la proposition d'Archimède, et ensuite au travail sur les encadrements successifs, travail fort instructif et qui est facilement suivi par toute la classe.

La fin de cette fiche, qui indique la méthode de Huygens pour améliorer celle d'Archimède, ainsi que ses résultats étonnamment précis, est là pour la détente, et aussi bien sûr pour susciter la curiosité (historique ou méthodologique).

III Prérequis

En géométrie, le théorème de Pythagore et le théorème de Thalès.
En algèbre, de bonnes notions des méthodes de calcul sur les radicaux (pour la fiche 2).

IV Objectifs

Pédagogiques

1°) Proposer un problème de géométrie motivant : comment, dans les temps anciens, a-t-on réussi à approcher ce mystérieux nombre π, quelle fut en particulier la méthode d'Archimède?

2°) Le problème nécessite la réalisation de figures soignées et intéressantes à comtempler.
Les raisonnements font intervenir des notions de géométrie élémentaire, mais aussi des théorèmes nouvellement étudiés. (Thalès, Pythagore)

3°) Faire faire aux élèves des calculs sur les radicaux,en motivant les calculs par un objectif précis :mieux encadrer π.

4°) Faire travailler les élèves de façon naturelle sur des minorations, des majorations, des encadrements.

Culturels

Proposer un exemple de méthode à point de départ géométrique, aboutissant à des calculs de plus en plus précis permettant d'approcher de plus en plus près un nombre réel inaccessible.

Proposer une réflexion sur l'ancienneté et la difficulté de certains problèmes, sur l'astuce et l'obstination des chercheurs à toutes époques. C'est l'occasion de parler un peu d'Archimède, mais aussi des mathématiciens du 17^{e} siècle et de leur successeurs...

SUR LES PAS D'ARCHIMEDE ......
Un premier encadrement de π

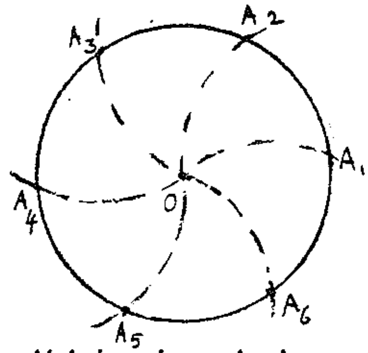
Dans les temps très anciens, on savait déjà que, pour obtenir le périmètre d'un cercle, il faut multiplier le diamètre par un nombre un peu supérieur à trois.
Mais de ce nombre mystérieux, (actuellement désigné par la lettre π), on ne connut longtemps que des valeurs approximatives, déterminées sans doute empiriquement.

Aussi l'un des mérites du grand Archimède (3e siècle Av J.C.) est-il d'avoir trouvé et expliqué une méthode, (s'appuyant sur des raisonnements géométriques), permettant d'encadrer π de façon indiscutable et précise.
Cette fiche et la suivante ont comme but de vous donner une idée du raisonnement d'Archimède.

1°) Soit (C) un cercle de centre O, de rayon R,
A_1 et A_2 deux points de (C) tels que $A_1A_2 = R$

a) Prouver que le triangle $A_1 O A_2$ est équilatéral, en déduire la mesure en degrés de l'angle $A_1 O A_2$.

b) On reporte la longueur R six fois (en partant de A_1) de façon à obtenir sur les cercles les points $A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_6, A_7$



Prouver que A_1 et A_4 sont diamétralement opposés.
Prouver que A_1 et A_7 sont confondus.

c) Calculer en fonction de R le périmètre P_6 de l'hexagone régulier ainsin obtenu, dit "inscrit " dans le cercle.

d) H étant le milieu de $[A_1A_2]$, prouver que le triangle OHA_1 est rectangle.
En déduire le calcul en fonction de R de la longueur OH, appelée "apothème" de l'hexagone. (On doit trouver $OH = R\frac{\sqrt{3}}{2}$)

2°)La droite (OH) coupe le petit arc A_1A_2 en T. Construire la tangente à (C) au point T ; elle coupe (OA_1) en B_1, (OA_2) en B_2. On admettra que $[B_1B_2]$ est un côté d'un deuxième hexagone régulier, dont les six côtés sont tangents au cercle, et dit pour cette raison "circonscrit " au cercle.

Terminer le tracé de l'hexagone circonscrit .

Prouver que les deux hexagones inscrits et circonscrits ont leurs côtés deux à deux parallèles.

D'après le théorème de Thalès appliqué aux triangles OHA_1 et OTB_1 ,

$$\frac{HA_1}{TB_1} = \frac{\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots}$$

Calculer TB_1en fonction de R.

En déduire que l'hexagone circonscrit a pour périmètre

$$P'_6 = (4\sqrt{3}) \times R$$

3°) En admettant, comme le fait Archimède dans son petit traité *De la mesure du cercle* , que la longueur L du cercle vérifie :

$$P_6 < L < P'_6 ,$$

montrer que le nombre π , qui peut se définir comme le rapport $\frac{L}{D}$ de la longueur d'un cercle à son diamètre, est sûrement compris entre 3 et 3,47.

Fiche 2

Recherche d'un encadrement de π plus précis

Comme Archimède, nous utiliserons cette fois des DODECAGONES réguliers (inscrit et circonscrit). (en grec δωδεκα = douze)

FIGURE : Tracer un cercle de grand rayon.

Trouver une méthode pour le diviser en 12 arcs égaux.

En joignant les douze points de division consécutifs, on obtient un dodécagone régulier inscrit dans le cercle .

En s' inspirant du tracé (fait à la fiche 1) de l'hexagone circonscrit, tracer aussi le dodécagone régulier circonscrit au cercle de façon que ses côtés soient parallèles à ceux du dodécagone inscrit.

CALCULS

Voici un extrait de la figure:

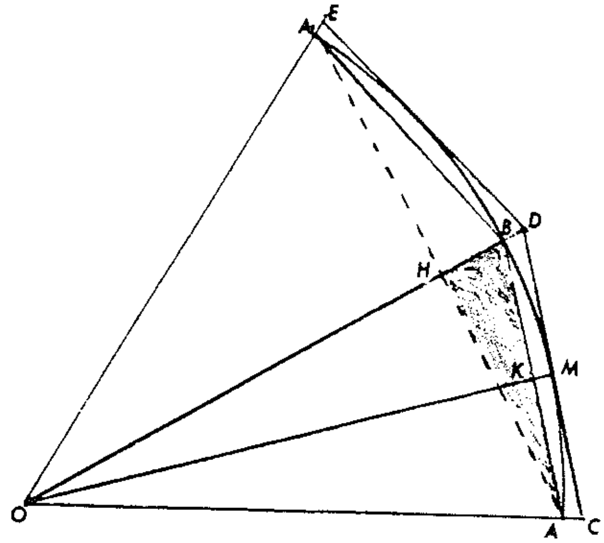
[AB] et $[BA_1]$ sont 2 côtés du dodécagone inscrit.

[CD] et [DE] sont 2 côtés du dodécagone circonscrit.

(AA_1) et (OB) se coupent en H,

M est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$,

(OM) coupe (AB) en K, milieu de [AB].



I. Calcul du périmètre P_{12} du dodécagone inscrit

1°) Que représente la doite (OB) pour le segment $[AA_1]$?

2°) Calculer en fonction de R les longueurs AH, OH, BH.

3°) En utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle AHB, montrer que : $AB = R \times \sqrt{2-\sqrt{3}}$

4°) Utiliser ce résultat et la calculatrice pour vérifier que $P_{12} \cong 6{,}211 \times R$ (par défaut)

5°) Calculer l'apothème OK (on doit trouver $OK = R \times \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$)

II. Calcul du périmètre P'_{12} du dodécagone circonscrit

1°) Pourquoi peut-on appliquer la propriété de Thalès aux triangles OKB et OMD ?

On peut en déduire que trois rapports sont égaux . Ecrire cette égalité.

2°) On pose $\lambda = \frac{OM}{OK} = \frac{MD}{KB} = \frac{OD}{OB}$.

Montrer que $\lambda = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$, en déduire $CD = 2R\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$

puis, après avoir vérifié l'égalité $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = (2-\sqrt{3})^2$,

montrer que $CD = 2R \times (2-\sqrt{3})$

A la calculatrice, vérifier alors que $P'_{12} \cong 6{,}431 \times R$ (par excès)

III. Supposant cette fois, toujours comme Archimède, que la longueur L du cercle vérifie $P_{12} < L < P'_{12}$

utiliser les valeurs trouvées de P_{12} et P'_{12} pour montrer que :

$$3{,}10 < \pi < 3{,}22$$

Fiche 3

Les résultats d'Archimède et les calculs de Huygens

Archimède, avec une remarquable obstination, poussa les calculs de périmètres jusqu'aux polygones réguliers à 96 côtés. Il obtint ainsi des valeurs approchées fractionnaires de π, (par défaut à partir des polygones inscrits, par excès à partir des circonscrits), en améliorant la précision à chaque étape.
Archimède put alors énoncer la célèbre PROPOSITION 3 de son traité
De la mesure du cercle : **Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.**

> **Le périmètre de tout cercle est égal au triple du diamètre, augmenté d'un segment compris entre les dix soixante et onzièmes et le septième du diamètre[2].**

Autrement dit, $P = 3D + S$ avec $\ldots \times D < S < \ldots \times D$

d'où $\ldots \times D < P < \ldots \times D$

et donc, en divisant par D, $3 + \frac{\ldots}{71} < \pi < 3 + \frac{\ldots}{7}$

QUESTIONS:

1°) Si Archimède avait connu l'écriture décimale,
- De combien de décimales exactes ce résultat l'assurait-il?
- Montrer qu'il aurait pu donner de π un encadrement d'amplitude 3.10^{-3}

2°) En fait Archimède fit les calculs, de proche en proche, en partant de $n = 6$ (hexagones), et en doublant n à chaque étape.
Voici, remis en écriture décimale à l'aide d'une calculatrice, les résultats d'Archimède :

n	$\frac{P_n}{D}$ (par défaut)	$\frac{P'_n}{D}$ (par excès)
6	3	3,464151
12	3,105765	3,215411
24	3,132446	3,159727
48	3,139223	3,146193
96	3,140909	3,142827

Pour n=6, on obtient $3 < \pi < 3,47$ (voir fiche 1)
pour n= 12 $3,10 < \pi < 3,22$ (voir fiche 2)

Donner de même les encadrements de π par des décimaux d'ordre 2 obtenus pour $n = 24$, $n = 48$, $n = 96$.
Comparer les précisions de ces encadrements successifs.

LA FORMULE DE HUYGENS

Le hollandais Huygens, éminent homme de science du 17ᵉ siècle, réussit à améliorer considérablement l'efficacité de la méthode d'Archimède.

Ainsi, au lieu d'écrire simplement : $P_{12} < L < P'_{12}$

Il démontre que :

$$P_{12} + \frac{1}{3}(P_{12} - P_6) < L < \frac{2}{3} P_{12} + \frac{1}{3} P'_{12}$$

Montrer que cette inégalité, appliquée en utilisant les valeurs de P_6, P_{12}, P'_{12} trouvées par Archimède, permet d'obtenir la même précision qu'Archimède avec les polygones à 96 côtés.

Huygens utilise ensuite des polygones à 30 et 60 côtés et, de la même façon, écrit :

$$P_{60} + \frac{1}{3}(P_{30} - P_{60}) < L < \frac{2}{3} P_{60} + \frac{1}{3} P'_{60}$$

alors il trouve $6{,}283183 < 2\pi < 6{,}283188$.

Enfin, en utilisant les calculs d'un certain Ludolphe de Cologne (1540-1610) qui avait étudié des polygones a 5400 et 10800 côtés, il obtint :

$$6{,}283185307179584 < 2\pi < 6{,}283185307179589$$

Combien de décimales de π Huygens a-t-il ainsi obtenu?

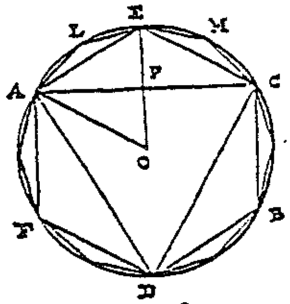
Ludolphe de Cologne, lui-même s'acharna sur le calcul de π . En utilisant un polygone à 60×2^{29} côtés, il obtint (en 1609) 35 décimales de π !

(En Allemagne, π fut longtemps appelé le nombre de Ludolphe...)

(Huygens)

THÉOR. VII. PROP. VII.

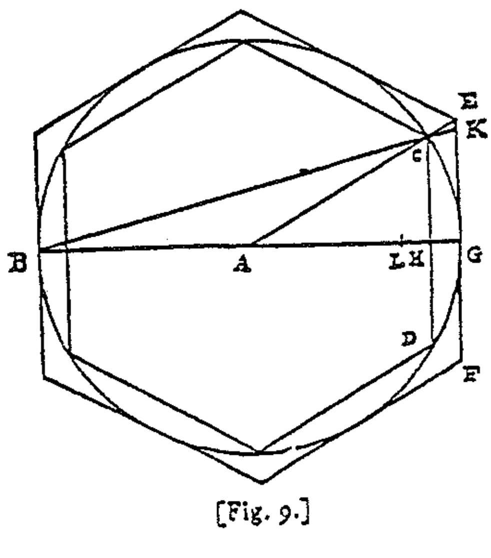
Toute circonférence de cercle eſt plus grande que le périmètre du polygone à côtés égaux qui lui eſt inſcrit, plus le tiers de la quantité dont ce même périmètre ſurpaſſe le périmètre d'un autre polygone inſcrit duquel le nombre des côtés eſt la moitié



[Fig. 7.]

THÉOR. IX. PROP. IX.

Toute circonférence de cercle eſt plus petite que les deux tiers du périmètre d'un polygone à côtés égaux qui lui eſt inſcrit plus le tiers du périmètre du polygone ſemblable circonſcrit



[Fig. 9.]

LA MESURE DU CERCLE

La mesure du cercle est un thème qui traverse l'histoire des mathématiques depuis l'Antiquité jusqu'à nos jours .

Les exercices suivants ont pour but de déterminer un algorithme de calcul de π, suivant une méthode analogue à celle employée par Archimède pour encadrer le rapport du périmètre au diamètre d'un cercle. La notation"π" est récente: début du XVIIIe siècle. Archimède ne calcule pas un nombre, mais un rapport. Nous lirons d'ailleurs en classe un extrait de *La mesure du cercle* d'Archimède .

La "règle du jeu "des exercices est la suivante: nous cherchons π, donc nous nous interdisons l'utilisation de la touche π de nos calculatrices : nous ne nous servirons que des opérations élémentaires "+ , x , : , - , $\sqrt{\ }$ " (qu'on savait faire " à la main" du temps d'Archimède).

Comme Archimède , nous admettrons le résultat suivant : si P et Q sont les périmètres respectifs d'un polygone inscrit dans le cercle et d'un polygone circonscrit au cercle , alors $P < p < Q$ où p est le périmètre du cercle .

I Deux encadrements de π .

1°) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O de rayon 1.

a) Inscrire dans $\mathcal{C}$ un hexagone régulier ($A_1A_2\ A_3\ A_4\ A_5\ A_6$) .Quel est le périmètre de l'hexagone ?

b) La médiatrice de chaque côté $[A_i\ A_{i+1}]$ de l'hexagone coupe le petit arc $(\widehat{A_i\ A_{i+1}})$ du cercle en un point par lequel on mène la tangente au cercle. On obtient ainsi un hexagone ($A'_1\ A'_2\ A'_3\ A'_4\ A'_5\ A'_6$) circonscrit au cercle. Montrer que O, A_i , A'_i sont alignés ; en déduire que cet hexagone est régulier, puis calculer son périmètre.

c) A l'aide de a), b), donner un encadrement de π par des nombres décimaux.

2°)

a) Sur la même figure, inscrire dans $\mathcal{C}$ un dodécagone régulier. Calculer son périmètre.

b) Circonscrire à $\mathcal{C}$ un dodécagone régulier . Calculer son périmètre.

c) Donner un encadrement de π par des nombres décimaux .

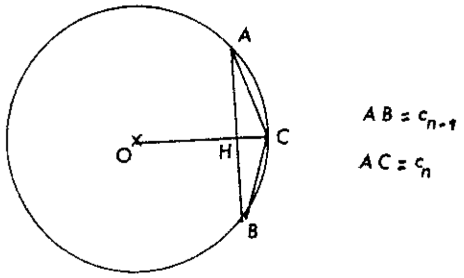
II Algorithmes de calcul de π.

On appelle :

c_n, la longueur du côté d'un polygone régulier à $2^n \times 6$ côtés inscrit dans $\mathcal{C}$ et p_n, son périmètre (que valent c_0, p_0, c_1, q_1 ?).

t_n , la longueur du côté d'un polygone régulier à $2^n x6$ côtés circonscrit à $\mathcal{C}$ et q_n, son périmètre (que valent t_0, q_0, t_1, q_1 ?) .

On veut déterminer un algorithme programmable permettant de calculer c_n et t_n (donc p_n et q_n) pour n quelconque. Admettant alors $p_n < p < q_n$ on obtient un encadrement de π.

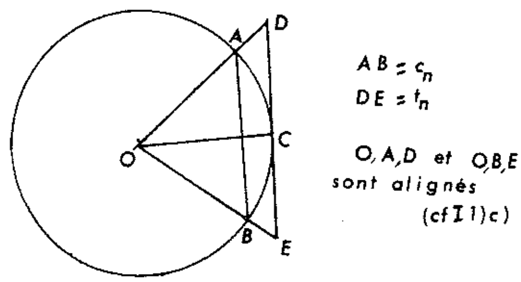


A) Première méthode.

1°)Déterminer une relation de récurrence liant c_n et c_{n-1}.

Remarque : le théorème de Pythagore suffit!

2°) Déterminer une relation liant c_n et t_n .



3°)Ecrire un programme permettant à votre machine de calculer c_n, t_n, $\frac{1}{2}p_n$, $\frac{1}{2}q_n$ pour n quelconque.

4°) A l'aide de ce programme, déterminer des valeurs approchées de $\frac{1}{2}p_n$ et $\frac{1}{2}q_n$ pour n =1, 2, 3 ,4 . En déduire des encadrements de π par des nombres décimaux .

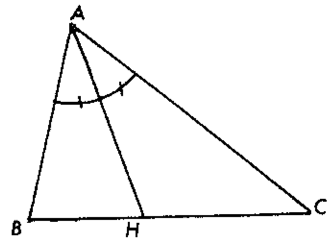
(Attention : les valeurs approchées de $\frac{1}{2}p_n$ et $\frac{1}{2}q_n$ utilisées pour encadrer π doivent-elles être choisies par défaut ou par excès?)

Quelle est l'amplitude de l'encadrement obtenu? De combien de décimales exactes de π vous assure votre travail? Que pensez-vous de la convergence des suites ($\frac{1}{2}p_n$) et ($\frac{1}{2}q_n$)? Pourriez-vous démontrer que ces deux suites convergent?

5°) Continuer ce travail jusqu'à n=11. Comment peut-on expliquer les aberrations dans les résultats ?

B) Deuxième méthode . (un plagiat moderne d'Archimède)

Il suffit de connaître le théorème de Pythagore et le fameux théorème de la bissectrice :



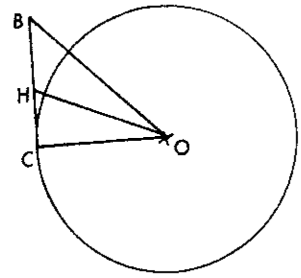
Si (AH) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$

alors: $\frac{HB}{HC} = \frac{AB}{AC}$

Savez-vous le démontrer?

1°)Sur la figure ci-contre,

$BC = \frac{1}{2} t_{n-1}$ et $HC = \frac{1}{2} t_n$.



(BC) est donc la tangente au cercle $\mathcal{C}$ en C .

a) Donner, en fonction de n , une mesure en degrés des angles $\widehat{BOC}$ et $\widehat{HOC}$.Que représente (OH) pour l'angle $\widehat{BOC}$?

b) On définit la suite (v_n) de la manière suivante : v_n est le rapport du rayon de $\mathcal{C}$ au demi-côté du polygone à 2^nx6 côtés circonscrit à $\mathcal{C}$. On a donc : $v_n = \frac{OC}{HC}$. Exprimer de même v_{n-1}.

Quel est le lien entre v_n et t_n ?

On pose $v'_n = \frac{OH}{HC}$ (on a donc $v'_{n-1} = \frac{OB}{BC}$)

Montrer : $v_n = v_{n-1} + v'_{n-1}$

puis $1 + v_n^2 = v'^2_n$

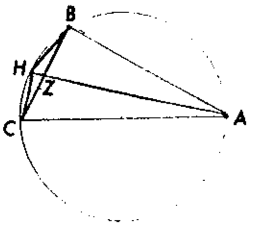
c) Ecrire un programme permettant à votre machine de calculer v_n et $\frac{1}{2}q_n$ pour n quelconque (on peut utiliser les relations montrées en b) soit pour écrire une relation de récurrence liant v_n et v_{n-1} , soit pour programmer simultanément le calcul de v_n et v'_n).

2°) a) Préliminaires .

Définition : deux triangles ayant leurs angles égaux deux à deux sont dits semblables.

Montrer que des triangles semblables ont leurs côtés proportionnels (on pourra utiliser la relation :

$\frac{\sin\hat{A}}{a} = \frac{\sin\hat{B}}{b} = \frac{\sin\hat{C}}{c}$ (où a, b et c sont les longueurs des côtés opposés aux angles $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$).



b) Sur la figure ci-contre, $BC = c_{n-1}$, $CH = HB = c_n$. [AC] est un diamètre
Comparer les arcs $\overset{\frown}{BH}$ et $\overset{\frown}{HC}$. En déduire que (AH) est bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

On définit la suite (u_n) de la manière suivante: u_n est le rapport du diamètre du cercle au côté du polygone à 2^nx6 côtés inscrit dans le cercle. On a donc $u_n = \frac{AC}{HC}$. Exprimer de même u_{n-1}. Quel est le lien entre u_n et c_n ?

d) on pose : $u'_n = \frac{AH}{HC}$ (on a donc $u'_{n-1} = \frac{AB}{BC}$)
Montrer que les triangles (HCZ) et (HAC) sont semblables et écrire les égalités de rapport qui s'en déduisent : $\frac{AH}{HC} = \ldots\ldots = \ldots\ldots$
puis, en utilisant le théorème de la bissectrice , montrer :

$$u'_n = u_{n-1} + u'_{n-1}$$

e) Montrer: $1 + u'^2_n = u_n^2$.

f) Ecrire un programme permettant à votre machine de calculer u_n et $\frac{1}{2}p_n$ pour n quelconque (on peut utiliser les relations montrées en d) et c) soit pour écrire une relation de récurrence liant u_n et u_{n-1} , soit pour programmer simultanément le calcul de u_n et u'_n).

3°) Comparer les résultats obtenus pour les encadrements de π avec ceux du A).

III Etude des suites $(\frac{1}{2}p_n)$ et $(\frac{1}{2}q_n)$

1°) On appelle [AB] un côté d'un polygone régulier à 2^nx6 côtés inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de rayon 1 de centre O.

Soit θ la mesure en radians , comprise entre 0 et π, de l'angle non orienté $\widehat{AOB}$.

a) Déterminer θ.

b) Calculer $c_n = AB$ à l'aide des lignes trigonométriques de θ. En déduire une expression de $\frac{1}{2}p_n$.

c) Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x}$ (x étant exprimé en radians) .

Etudier la convergence et la limite de ($\frac{1}{2} p_n$).

2°) Faire un travail analogue avec un polygone régulier à $2^n \times 6$ côtés circonscrit à C .

Etudier la convergence et la limite de ($\frac{1}{2} q_n$).

<u>IV.Que savez-vous d'Archimède (époque , oeuvre ?) ?</u>
<u>En avez-vous déjà entendu parler en cours ? A quel propos ?</u>

Le périmètre de tout cercle est égal au triple du diamètre, augmenté d'un segment compris entre les dix soixante et onzièmes et le septième du diamètre[3].

Soit un cercle, ΑΓ son diamètre, Ε son centre, ΓΛΖ une tangente ; que l'angle ΖΕΓ soit égal au tiers d'un angle droit ; le rapport de ΕΖ à ΖΓ est donc égal au rapport[4] de 306 à 153, et le rapport de ΕΓ à ΓΖ est égal au rapport de 265 à 153. Bissectons l'angle ΖΕΓ par ΕΗ ; dès lors ΖΕ est à ΕΓ comme ΖΗ est à ΗΓ,

et par permutation et par composition. Il s'ensuit que la somme de ΖΕ et ΕΓ est à ΖΓ comme ΕΓ est à ΓΗ ; le rapport de ΓΕ à ΓΗ est ainsi supérieur au rapport de 571 à 153. Le rapport du carré sur ΕΗ au carré sur ΗΓ est donc égal au rapport de 349 450 à 23 409 ; par conséquent ΕΗ est à ΗΓ comme 591 1/8 est à 153.

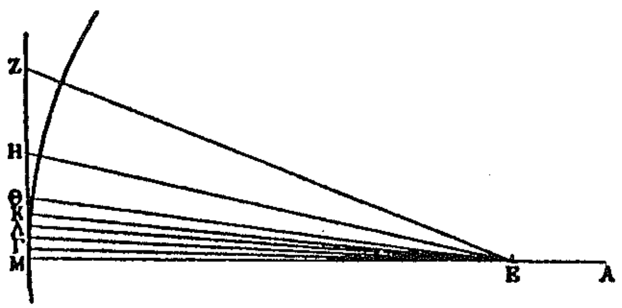


Fig. 64.

Bissectons de même l'angle ΗΕΓ par ΕΘ ; pour les mêmes raisons (sc. que plus haut), le rapport de ΕΓ à ΓΘ est donc supérieur au rapport de 1162 1/8 à 153 ; il s'ensuit que le rapport de ΘΕ à ΘΓ est supérieur au rapport de 1172 1/8 à 153. Bissectons encore l'angle ΘΕΓ par ΕΚ ; le rapport de ΕΓ à ΚΓ est donc supérieur au rapport de 2334 1/4 à 153. Bissectons encore l'angle ΚΕΓ par ΛΕ ; ΕΓ a donc à ΛΓ un rapport supérieur à celui de 4673 ½ à 153. Du moment donc que l'angle ΖΕΓ, égal au tiers d'un angle droit, a été bissecté quatre fois, l'angle ΛΕΓ est la 48e partie d'un angle droit. Donnons-nous un angle ΓΕΜ égal à ΛΕΓ de même sommet Ε[1] ; l'angle ΛΕΜ est ainsi la 24e partie d'un angle droit ; il s'ensuit que le segment de droite ΛΜ est un côté du polygone circonscrit au cercle ayant 96 côtés. Puisque, donc, on a démontré que le rapport

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ καὶ κέντρον τὸ Ε καὶ ἡ ΓΛΖ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΓ λόγον ἔχει, ὃν τϛ πρὸς ρνγ, ἡ δὲ ΕΓ πρὸς [τὴν] ΓΖ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ δίχα τῇ ΕΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΖΗ

πρὸς ΗΓ [καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέντι]. Ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΖΕ, ΕΓ πρὸς ΖΓ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΗ· ὥστε ἡ ΓΕ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. Ἡ ΕΗ ἄρα πρὸς ΗΓ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$,θυν πρὸς $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γυθ· μήκει ἄρα, ὃν φϟα η' πρὸς ρνγ. Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ΗΕΓ

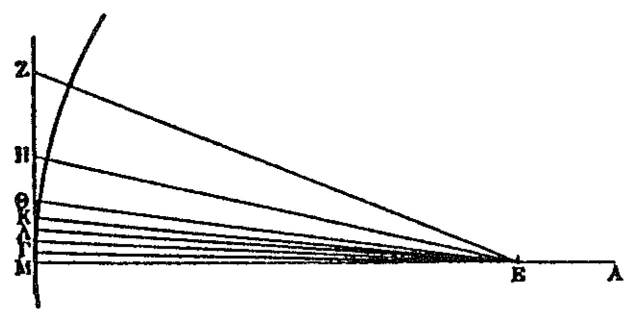


Fig. 64.

τῇ ΕΘ· διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ ΕΓ πρὸς ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αρξβ η' πρὸς ρνγ· ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αροβ η' πρὸς ρνγ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΕΓ τῇ ΕΚ· ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,βτλδ δ' πρὸς ρνγ· ἡ ΕΚ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα ἢ ὃν ,βτλθ δ' πρὸς ρνγ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΕΓ τῇ ΛΕ· ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΛΓ μείζονα [μήκει] λόγον ἔχει ἤπερ τὰ ,δχογ L' πρὸς ρνγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ ΛΕΓ ὀρθῆς ἐστι μη'. Κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση πρὸς τῷ Ε ἡ ὑπὸ ΓΕΜ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΕΜ ὀρθῆς ἐστι κδ'. Καὶ ἡ ΛΜ ἄρα εὐθεῖα τοῦ περὶ τὸν κύκλον ἐστὶ πολυγώνου πλευρὰ πλευρὰς ἔχοντος ϟϛ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν de ΕΓ à ΓΔ est supérieur au rapport de 4673 ½ à 153, que ΑΓ est le double de ΕΓ et ΛΜ le double de ΓΛ, le rapport de ΑΓ au périmètre du polygone de 96 côtés est supérieur au rapport de 4673 ½ à 14688. Et 14688 est le triple de 4673 ½, avec un reste de 667 ½, qui est inférieur à la 7e partie de 4673 ½ ; par conséquent le (sc. périmètre du) polygone circonscrit au cercle est inférieur au triple du diamètre augmenté d'une partie du diamètre supérieure au septième. A plus forte raison[1] donc le périmètre du cercle est inférieur au triple du diamètre augmenté de plus d'un septième.

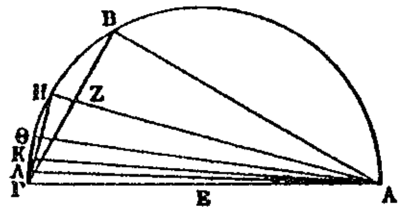


Fig. 65.

Soit un cercle, ΑΓ le diamètre, l'angle ΒΑΓ égal à la troisième partie d'un angle droit ; le rapport de ΑΒ à ΒΓ est donc inférieur au rapport de 1351 à 780, et le rapport de ΑΓ à ΓΒ est égal au rapport de 1560 à 780. Bissectons l'angle ΒΑΓ par ΑΗ. Du moment donc que l'angle ΒΑΗ est égal à l'angle ΗΓΒ[2] et aussi à l'angle ΗΑΓ, l'angle ΗΓΒ est aussi égal à l'angle ΗΑΓ. L'angle droit ΑΗΓ étant en commun[3], le troisième angle ΗΖΓ est égal au troisième angle ΑΓΗ[4]. Il s'ensuit que le triangle ΑΗΓ est équiangle au triangle ΓΗΖ ; ΑΗ est donc[5] à ΗΓ comme ΓΗ est à ΗΖ et comme ΑΓ est à ΓΖ. Mais ΑΓ est à ΓΖ aussi comme la somme de ΓΑ et ΑΒ est à ΒΓ[6], et par conséquent la somme de ΒΑ et ΑΓ est à ΒΓ comme ΑΗ est à ΗΓ. Pour ces

ΓΛ ἐδείχθη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ,δχογ 𐅵' πρὸς ρνγ, ἀλλὰ τῆς μὲν ΕΓ διπλῆ ἡ ΑΓ, τῆς δὲ ΓΛ διπλασίων ἡ ΛΜ, καὶ ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ϞϚ γώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ,δχογ 𐅵' πρὸς Μ ,δχπη. Καί ἐστιν τριπλασία, καὶ ὑπερέχουσιν χξζ 𐅵', ἅπερ τῶν ,δχογ 𐅵' ἐλάττονά ἐστιν ἢ τὸ ἕβδομον· ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον καὶ ἐλάττονι ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον· ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

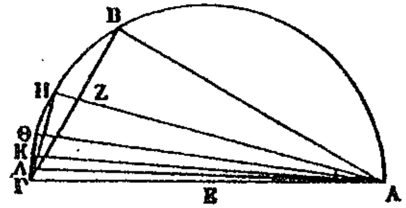


Fig. 65.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,ατνα πρὸς ψπ [ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ὃν ,αφξ πρὸς ψπ]. Δίχα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ΑΗ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΗΓΒ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ ΑΗΓ ὀρθή· καὶ τρίτη ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΖΓ τρίτῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΗ ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΓΗΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ καὶ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ, [καὶ] συναμφότερος ἡ ΓΑΒ πρὸς ΒΓ· καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ ΒΑΓ πρὸς ΒΓ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ. Διὰ raisons, le rapport de ΑΗ à ΗΓ est donc inférieur au rapport de 2911 à 780, et le rapport de ΑΓ à ΓΗ est inférieur au rapport de 3013 1/2+1/4 à 780. Bissectons l'angle ΓΑΗ par ΑΘ ; pour les mêmes raisons que plus haut le rapport de ΑΘ à ΘΓ est inférieur au rapport de 5924 1/2+1/4 à 780 ou de 1823 à 240 ; car chacun des termes (sc. du dernier rapport) est les 4/13 du terme (sc. correspondant du premier rapport) ; le rapport de ΑΓ à ΓΘ est donc inférieur au rapport de 1838 9/11 à 240. Bissectons aussi l'angle ΘΑΓ par ΚΑ. Le rapport de ΑΚ à ΚΓ est inférieur au rapport de 1007 à 66, puisque des seconds termes chacun vaut les 11/40 d'un autre nombre ; le rapport de ΑΓ à ΚΓ est donc inférieur à celui de 1009 1/6 à 66. Bissectons encore l'angle ΚΑΓ par ΛΑ ; le rapport de ΑΛ à ΛΓ est donc inférieur au rapport de 2016 1/6 à 66, le rapport de ΑΓ à ΓΛ est inférieur au rapport de 2017 1/4 à 66. Inversement donc le rapport du périmètre du polygone au diamètre est supérieur au rapport de 6336 à 2017 1/4 et 6336 est supérieur au produit de 3 10/71 par 2017 1/4. Il s'ensuit que le périmètre du polygone de 96 côtés inscrit dans le cercle est supérieur au triple du diamètre augmenté de 10/71 ; à plus forte raison[1] donc le (sc. périmètre du) cercle est supérieur au triple du diamètre augmenté de 10/71.

Le rapport du périmètre au diamètre est donc inférieur à 3 1/7 et supérieur à 3 10/71.

τοῦτο οὖν ἡ ΑΗ πρὸς [τὴν] ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ,βϡια πρὸς ψπ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ ἐλάσσονα ἢ ὃν ,γιγ 𐅵' δ' πρὸς ψπ. Δίχα ἡ ὑπὸ ΓΑΗ τῇ ΑΘ· ἡ ΑΘ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,εϡκδ 𐅵' δ' πρὸς ψπ ἢ ὃν ,αωκγ πρὸς σμ· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ ιγ'· ὥστε ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΘ ἢ ὃν ,αωλη θ ια' πρὸς σμ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ΚΑ· καὶ ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΓ ἐλάσσονα [ἄρα] λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αζ πρὸς ξς· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ια μ'. Ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς [τὴν] ΚΓ ἢ ὃν ,αθ ς' πρὸς ξς. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΑΓ τῇ ΛΑ· ἡ ΑΛ ἄρα πρὸς [τὴν] ΛΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τὰ ,βις ς' πρὸς ξς, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα ἢ τὰ ,βιζ δ' πρὸς ξς. Ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ,ςτλς πρὸς ,βιζ δ', ἅπερ τῶν ,βιζ δ' μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα'· καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϟςγώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι οα'· ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ι οα'.

Ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ ι οα' μείζων.

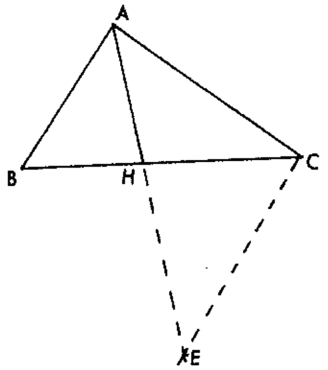
Commentaires.
Ces exercices ont été donnés en terminale C. La correction a été suivie de la lecture du texte.

Programmation : (première méthode)
Les calculs pour n = 4 redonnent un encadrement de π semblable au résultat d'ARCHIMEDE .Si on pousse les calculs jusqu'à n = 10 (n = 11 pour certaines machines), des aberrations apparaissent : p_n devient plus grand que π. En effet, nous calculons c_n grâce à deux extractions de racines carrées, d'où des erreurs d'arrondi de la machine qui s'accumulent. Puis nous multiplions c_n par 2^nx6 côtés pour obtenir p_n, multipliant ainsi l'erreur par 2^nx6. .Pour obtenir de meilleures approximations, il faudrait un algorithme plus performant (voir *Mathématiques élémentaires d'un point de vue algorithmique* de A.Engel, CEDIC).

Remarque : on peut demander aux élèves de faire une programmation au choix parmi celles proposées.

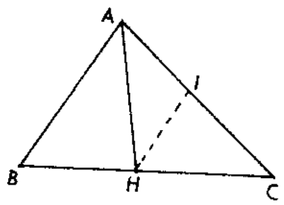
Théorème de la bissectrice. en voici quatre démonstrations dont deux fournies par les élèves.

Dem 1



La parallèle à (AB) menée par C coupe (AH) en E.
On a alors $\widehat{BAH} = \widehat{HEC}$ et comme (AH) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$, le triangle (ACE) est isocèle et AC = CE .Le théorème de Thalès appliqué aux triangles homothétiques (AHB) et (CHE) donne le résultat.

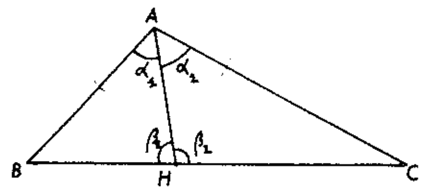
Dem 2



La parallèle à (AB) menée par H coupe (AC) en I. Comme dans la dém 1, (AIH) est isocèle et AI =IH. Le théorème de Thalès donne alors :

$$\frac{HB}{HC} = \frac{IA}{IC} = \frac{IH}{IC} = \frac{AB}{AC}$$

Dem 3



$$\frac{\sin\alpha_1}{BH} = \frac{\sin\beta_1}{AB}$$

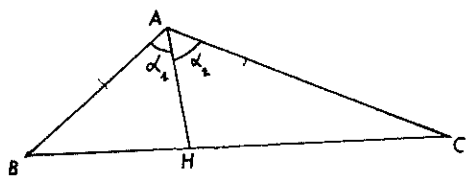
$$\frac{\sin\alpha_2}{HC} = \frac{\sin\beta_2}{AC}$$

Or $\alpha_1 = \alpha_2$ donc $\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2$

$\beta_2 = \pi - \beta_1$ donc $\sin\beta_2 = \sin\beta_1$ d'où

$$\frac{BH}{AB} = \frac{\mathrm{Sin}\alpha_1}{\mathrm{Sin}\beta_1} = \frac{\mathrm{Sin}\alpha_2}{\mathrm{Sin}\beta_2} = \frac{HC}{AC}$$

Dém 4



$\frac{HB}{HC} = \frac{\text{aire}(ABH)}{\text{aire}(AHC)}$ (triangles ayant même hauteur).

Or l'aire de (ABH) est $AH \times AB \times \sin\alpha_1$

l'aire de (AHC) est $AH \times AC \times \sin\alpha_2$

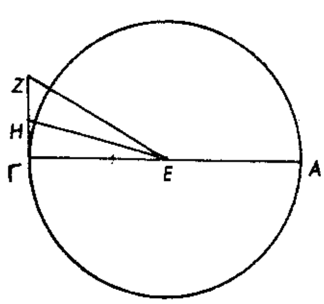
Comme $\alpha_1 = \alpha_2$ on obtient le résultat voulu.

Archimède utilise plusieurs fois la relation :

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ (qu'il appelle "composition ")

Il faut beaucoup insister sur "la régle du jeu ", n'utiliser que les touches " $+, -, \times, \sqrt{\ }$," de la calculatrice, sinon certains élèves utilisent dans le I) sin 15°, tan 15°, etc.

Lecture du texte



L'angle $\widehat{ZE\Gamma}$ vaut 30° ("tiers d'un droit"); [ΓR] est donc le demi-côté de l'hexagone circonscrit au cercle. (EH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ZE\Gamma}$ et [ΓH] est donc le demi-côté du dodécagone circonscrit au cercle.

On connait $\frac{E\Gamma}{Z\Gamma}$ (égal à 2) et $\frac{E\Gamma}{\Gamma Z}$ (égal à $\sqrt{3}$: Archimède utilise l'approximation par défaut $\frac{265}{153}$)

On cherche $\frac{EH}{H\Gamma}$ et $\frac{E\Gamma}{\Gamma H}$.

$$\frac{ZE}{E\Gamma} = \frac{ZH}{\Gamma H} \quad \text{(car (EH) bissectrice de } ZE\Gamma)$$

ou $$\frac{ZE}{ZH} = \frac{E\Gamma}{\Gamma H} = \frac{ZE + E\Gamma}{ZH + \Gamma H} \quad \text{("permutation et composition")}$$

$$\frac{\Gamma E}{\Gamma H} = \frac{ZE + E\Gamma}{Z\Gamma} = \frac{ZE}{Z\Gamma} + \frac{E\Gamma}{Z\Gamma}$$

puis $$\frac{EH^2}{H\Gamma^2} = \frac{\Gamma H^2 + \Gamma E^2}{H\Gamma^2} = 1 + \left(\frac{\Gamma E}{\Gamma H}\right)^2 \quad \text{(théorème de Pythagore)}$$

Ceci donne un procédé itératif de calcul du rapport $\frac{\text{rayon}}{\text{demi-côté}}$ ($\frac{E\Gamma}{\Gamma H}$) à l'aide du rapport "auxiliaire" $\frac{EH}{\Gamma H}$.

En d'autres termes, si on pose, pour un angle au centre donné ΓEZ,

$$u_n = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}} \quad \left(\text{ ici } \frac{E\Gamma}{\Gamma Z} \text{ puis pour l'angle suivant } \frac{E\Gamma}{\Gamma H}\right)$$

et

$$u_{n'} = \frac{\text{hypoténuse}}{\text{côté opposé}} \quad \left(\text{ ici } \frac{E\Gamma}{\Gamma Z} \text{ puis } \frac{EH}{\Gamma H}\right)\text{, on a :}$$

$$u_n = u_{n-1} + u'_{n-1}$$

$$u'_n = \sqrt{1 + u^2_n}$$

Archimède poursuit le calcul jusqu'au polygone à 96 côtés (angle au centre égal à "la 24e partie d'un angle droit ").

Dans la deuxième partie du texte, Archimède calcule les rapports correspondants pour des polygones réguliers inscrits dans le cercle. Le seul outil supplémentaire est l'utilisation de triangles semblables.

III

DIOPHANTE

DIOPHANTE

De la vie de Diophante on ne connait presque rien : il vécut à Alexandrie entre le 2^{e} et le 3^{e} siécle après J.C. Un épigramme célèbre de l'Anthologie Palatine (attribué à Métrodore de Byzance, IV^{e}s.) décrit sommairement sa vie qui aurait pris fin à l'âge de 84 ans :

> «Passant, c'est ici le tombeau de Diophante; c'est lui qui, par cette étonnante disposition, t'apprend le nombre d'années qu'il a vécu. Sa jeunesse en a occupé la sixième partie; puis sa joue se couvrit d'un premier duvet pendant la douzième. Il passa encore le septième de sa vie avant de prendre une épouse et, cinq ans après, il eut un bel enfant qui, après avoir atteint la moitié de l'âge de son père, périt d'une mort malheureuse. Son père fut obligé de lui survivre, en le pleurant, pendant quatre années. De tout ceci, déduis son âge.» (Pierre Dedron et Jean Itard. «*Mathématiques et mathématiciens*» Paris, Magnard, 1959, p. 117-118.)

La tradition grecque nous a transmis un chapitre d'un livre sur les *nombres polygones* et six livres des *Arithmétiques*, ouvrage majeur de Diophante, qui en comprenait treize. Ce n'est que récemment, en 1971, qu'ont été découverts, en Iran, quatre autres livres dans une traduction arabe. Les *Arithmétiques* se composent d'une suite de problèmes, accompagnés de leurs solutions, où l'on cherche des nombres rationnels positifs vérifiant certaines conditions que l'on peut traduire de nos jours par des équations algébriques à deux ou plusieurs inconnues, ne contenant que des quantités rationnelles , de degré multiple de 2 ou de 3 et inférieur à 9 ; en général il y a moins d'équations que d'inconnues, de sorte que le problème est "indéterminé " et qu'il peut y avoir une infinité de solutions , mais Diophante se contente d'une solution .
Les méthodes de Diophante se différencient tout à fait des méthodes géométriques grecques classiques ; elles se rapprocheraient plus des méthodes de calcul babyloniennes. Diophante est novateur aussi en introduisant quelques abréviations , pour désigner l'inconnue et ses puissances , un symbole pour la soustraction .... Pourtant il a peu influencé ses contemporains et les mathématiciens grecs postérieurs.
Par contre le traité des *Arithmétiques* , bien qu'il ne puisse pas être considéré comme un ouvrage d'algèbre (Diophante n' établit jamais par exemple de méthode générale et chaque problème fait appel à un nouveau moyen ingénieux de résolution) a beaucoup influencé les algébristes arabes du Moyen-Age et ceux de la Renaissance européenne comme Bombelli , Stevin... Il a eu une influence décisive sur la théorie des nombres : Fermat étudia l'édition princeps du texte grec donnée par Bachet de Méziriac en 1621 et c'est en marge de la résolution du problème "Partager un nombre carré donné en deux carrés" qu'il a écrit: "Au contraire il est impossible de partager (...)une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré : j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir": C'est "le dernier théorème de Fermat" qui n'est toujours pas démontré.

Des mathématiciens contemporains, en essayant de dégager les algorithmes arithmétiques utilisés par Diophante, lisent en filigrane dans l'oeuvre du mathématicien alexandrin les concepts et les instruments de la géométrie algébrique : on peut interpréter les problèmes posés par Diophante comme la recherche des points à coordonnées rationnelles, d'une courbe ou d'une surface.
Diophante serait bien l'ancêtre de toutes les théories qui portent aujourd'hui son nom :"équations diophantiennes, analyse diophantienne, géométrie diophantienne ...".

Ce travail est fait à partir de quelques lignes de Diophante, figurant au début de la résolution du problème XIX du livre 3 des *Arithmétiques*.
Pour les lecteurs curieux du genre de problèmes que Diophante aimait à se poser, nous donnons en annexe le problème XIX en entier, avec les notes du traducteur. (annexe 1).
C'est incidemment, parce qu'il en a besoin pour la résolution de son problème, que Diophante cherche quatre triangles rectangles ayant la même hypoténuse, et dont les côtés soient des nombres entiers.

(Pour quelques explications théoriques, on pourra se reporter aux annexes 2 et 3).

<u>Le travail des élèves .</u>
Il ne nécessite qu'un assez léger bagage de connaissances :
. le théorème de Pythagore et sa réciproque,
. des notions de trigonométrie,
. le développement d'une expression algébrique.

Il parait souhaitable de donner ce travail à faire **en devoir à la maison,** et **en deux fois** :
_ La première partie, précédant la lecture du texte de Diophante, relativement facile, peut être faite par tous élèves.
_ Ensuite, après avoir tiré au clair les idées de cette première partie, on peut lire en classe, et expliquer, le texte de Diophante.
Alors on peut proposer un deuxième travail, consistant à répondre, (en tout ou en partie suivant le niveau des élèves), aux questions posées sur le texte de Diophante .

On appelle ainsi tout triplet (x, y, z) d'entiers naturels, non nuls, vérifiant la relation : $x^2 + y^2 = z^2$

Le plus simple, et le plus connu est le triplet (3 ,4 , 5), ou encore son "jumeau" (4 , 3 , 5)

1°) Vérifier que (6 , 8 , 10) et (9, 12, 15) sont eux aussi des triplets pythagoriciens.

2°) Montrer que, si (x, y , z) est un triplet pythagoricien, et k un entier naturel non nul, alors le triplet (kx , ky , kz) est lui aussi pythagoricien.

3°) Construire (au compas) les triangles t_1, t_1, t_3 , t_4 de côtés respectifs (3,4, 5), (6, 8, 10), (9, 12, 15), (5, 12, 13).
Vérifier (à l'équerre) qu'ils sont tous rectangles.
Ce résultat était-il prévisible ?
Prouver à l'aide de la trigonométrie que les triangles t_1, t_2 , t_3 sont "semblables ", c'est à dire ont les mêmes angles, mais que t_4 n'est pas semblable aux autres.

<u>Exercice</u> : Trouver deux triangles rectangles de côtés de l'angle droit différents, mais de même hypoténuse, et dont tous les côtés soient des nombres entiers.

Une méthode consiste à choisir deux triplets pythagoriciens non proportionnels, et à définir à partir d'eux de nouveaux triplets (a, b, c) et (a' , b' , c') qui leur soient proportionnels et tels que, de plus , c = c'.

DIOPHANTE. (3e siécle après J.C) utilise la méthode suivante pour obtenir des triplets pythagoriciens, (méthode déjà connue d' Euclide) :

.choisir deux entiers non nuls m et n, (m > n)

.calculer
$$x = m^2 - n^2$$
$$y = 2mn$$
$$z = m^2 + n^2$$

On obtient, dit Diophante, un triplet (x, y, z) pythagoricien.

a) Vérifier la validité du procédé de Diophante pour quelques couples (m, n) : par exemple (2, 1), puis (3, 2), puis un couple quelconque de votre choix.

b) Prouver que, ainsi que le dit Diophante, la méthode est générale, c'est-à-dire que, quel que soit le couple (m , n), le triplet (x, y, z) obtenu vérifie bien la relation : $x^2 + y^2 = z^2$.

c) Cette méthode, (appelons la : méthode (D)), permet d'obtenir une infinité de triplets pythagoriciens, mais elle ne permet pas de les obtenir tous.

Toutefois si un triplet ne peut s'obtenir directement par la méthode (D), alors on peut l'obtenir par proportionnalité à partir d'un triplet qui, lui, peut s'obtenir par la méthode (D). Appelons (P) cette deuxième méthode.

Exemple . Montrer que le triplet (9, 12 ,15) peut s'obtenir par la méthode (P), mais qu'aucun couple (m, n) d'entiers ne permet de l'obtenir directement par la méthode (D).

PETIT PROBLEME, proposé (et résolu) par Diophante lui-même, dans le livre III de son traité *les Arithmétiques*.

> cherchons quatre triangles rectangles ayant les hypoténuses égales ; ce qui revient à diviser [quatre fois] un carré en deux carrés.
>
> Établissons d'abord deux triangles rectangles compris (4)
> sous les moindres nombres, tels que 3, 4, 5, et 5, 12, 13. Multiplions chacun des nombres ainsi choisis par l'hypoténuse de l'autre triangle . Dès lors, le premier triangle sera 39, 52, 65, le second
> sera 25, 60, 65 ; et ils sont droits en ayant les hypoténuses égales . (8)
>
> D'autre part, 65 se partage naturellement en carrés de deux manières, notamment en 16 et 49, et encore en 64 et en 1 unité . [...]
>
> Prenons maintenant les racines des nombres choisis 49 et 16 ; ces racines sont 7 et 4, et formons un triangle rectangle au moyen des
> deux nombres 7 et 4. Ce triangle est 33, 56, 65 . (13)
>
> Prenons semblablement les racines 8 et 1 de 64 et de 1 unité, et formons de nouveau, au moyen de ces nombres, le triangle rectangle dont les côtés sont 16, 63, 65 .
>
> On a donc obtenu quatre triangles rectangles ayant les hypoténuses égales .

N.B . Diophante ne le précise pas dans ce texte, mais il faut comprendre qu'il cherche comme solution de son problème quatre triplets de nombres entiers naturels .

QUESTIONS

1°) Montrer, en étudiant d'abord les lignes (4) à (8), puis les lignes (9) à (16), que Diophante, pour trouver deux des quatre triangles cherchés, utilise la méthode (P) ; et, pour trouver les deux autres, la méthode (D). Préciser.

2°) Vérifier la conclusion (ligne 17), puis représenter les quatre triangles rectangles inscrits dans un même cercle, à une échelle convenable (par exemple 1 cm pour 5 unités).

3°)En première lecture, nous n'avons pas reproduit une phrase de Diophante. (voir les crochets à la fin de la ligne 10).Voici le texte complet :

> D'autre part, 65 se partage naturellement en carrés de deux manières, notamment en 16 et 49, et encore en 64 et en 1 unité ; ce qui provient de ce que le nombre 65 est le produit de 13 et de 5, lesquels se partagent respectivement en deux carrés .

Pour comprendre cette explication, à première vue assez sybilline, on commencera par vérifier les identités :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac+bd)^2+(bc-ad)^2$$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2+(bc+ad)^2$$

Qu'obtient-on pour $a = 2$, $b = 3$, $c = 2$, $d = 1$?

Pour les chercheurs

En partant d'un nombre entier qui, tel 65, soit le produit de deux entiers, eux-même sommes de deux carrés, il doit être possible de trouver une autre solution au problème de Diophante. Bon courage....!

Le problème XIX du livre III des *Arithmétiques* de DIOPHANTE

XIX

Trouver quatre nombres tels que le carré de la somme de ces quatre nombres, augmenté ou diminué de chacun de ces nombres, forme un carré (2).

Puisque le carré de l'hypoténuse de tout triangle rectangle, augmenté ou diminué du double produit des côtés situés autour de l'angle droit, forme un carré (3), cherchons d'abord quatre triangles rectangles ayant les hypoténuses égales ; ce qui revient à diviser [quatre fois] un carré en deux carrés. Or, nous avons appris à diviser d'une infinité de manières un carré donné en deux carrés (1).

Établissons donc maintenant deux triangles rectangles compris sous les moindres nombres, tels que 3, 4, 5, et 5, 12, 13. Multiplions chacun des nombres ainsi choisis par l'hypoténuse de l'autre triangle (2). Dès lors, le premier triangle sera 39, 52, 65, le second sera 25, 60, 65 ; et ils sont droits en ayant les hypoténuses égales (3).

D'autre part, 65 se partage naturellement en carrés (4) de deux manières, notamment en 16 et 49, et encore en 64 et en 1 unité ; ce qui provient de ce que le nombre 65 est le produit de 13 et de 5, lesquels se partagent respectivement en deux carrés (5).

Prenons maintenant les racines des nombres choisis 49 et 16 ; ces racines sont 7 et 4, et formons un triangle rectangle au moyen des deux nombres 7 et 4. Ce triangle est 33, 56, 65 (6).

Prenons semblablement les racines 8 et 1 de 64 et de 1 unité, et formons de nouveau, au moyen de ces nombres, le triangle rectangle dont les côtés sont 16, 63, 65 (7).

On a donc obtenu quatre triangles rectangles ayant les hypoténuses égales (8). Dès lors, revenant au problème initial, posons que la somme des quatre nombres est 65 arithmes, et que chacun des quatre nombres est une quantité de carrés d'arithme quadruple de l'aire (9), c'est-à-dire que le premier nombre est 4056 carrés d'arithme ; le second nombre 3000 carrés d'arithme ; le troisième nombre 3696 carrés d'arithme, et enfin le quatrième nombre 2016 carrés d'arithme (1). Or, la somme de ces quatre nombres, ou 12768 carrés d'arithme, est égale à 65 arithmes, et l'arithme devient 65 fractionnés par 12768 unités.

Revenant à ce que l'on a posé, le premier nombre sera 17136600 unités, et le second 12675000 unités, affectées du même dénominateur ; le troisième sera 15615600 unités avec même dénominateur ; le quatrième 8517600 unités avec même dénominateur, et le dénominateur est 163021824 unités (2).

-Notes du traducteur-

2. Les quatre conditions du problème sont donc : $(X+Y+Z+W)^2 \pm X = \alpha^2$; $(X+Y+Z+W)^2 \pm Y = \beta^2$; $(X+Y+Z+W)^2 \pm Z = \gamma^2$; $(X+Y+Z+W)^2 \pm W = \delta^2$.

3. Diophante considère ici, pour la première fois dans son œuvre, un triangle rectangle dont les côtés sont représentés par des nombres rationnels qui satisfont à l'équation pythagoricienne : $a^2 = b^2 + c^2$. Il en déduit : $a^2 \pm 2bc = b^2 + c^2 \pm 2bc =$ nombre carré $(b \pm c)^2$.

1. Voir Livre II, proposition VIII. Il s'agit ici d'une infinité de solutions rationnelles. En effet, à partir de tout triplet (a, b, c) d'entiers tels que $a^2 + b^2 = c^2$, on peut donner une solution rationnelle de l'équation $x^2 + y^2 = 1$, et donc aussi une solution rationnelle de l'équation $x^2 + y^2 = A^2$.

2. C'est-à-dire multiplions les nombres, représentant les côtés de l'angle droit du premier triangle, par le nombre représentant l'hypoténuse du second triangle, et vice-versa.

3. C'est-à-dire que $(65)^2$ est déjà partagé de deux manières différentes en deux carrés : $(65)^2 = (52)^2 + (39)^2$, et $(65)^2 = (60)^2 + (25)^2$.

4. C'est-à-dire en deux carrés.

5. On a : $65 = 13 \times 5 = (3^2 + 2^2)(2^2 + 1) = (36 + 9 + 4) + 16 = 49 + 16$.

6. Chez Diophante, comme après lui chez Viète, Bachet et Fermat, un triangle rectangle est dit formé au moyen de deux nombres donnés m, n, lorsque les côtés de ce triangle rectangle sont respectivement représentés par les termes de l'identité $(m^2+n^2)^2 = (m^2-n^2)^2 + (2mn)^2$, lesquels sont assimilés aux termes de l'équation pythagoricienne $H^2 = b^2 + h^2$. On aura donc $H = m^2 + n^2$; $b = m^2 - n^2$ et $h = 2mn$. Le triangle formé au moyen de $m = 7$, et $n = 4$ sera donc, comme dans le texte : $H = 7^2 + 4^2 = 65$; $b = 7^2 - 4^2 = 33$, et $h = 2 \times 7 \times 4 = 56$.

7. On aura de même pour les racines de 64 et de 1, c'est-à-dire pour $m = 8$ et $n = 1$, le triangle ayant les côtés : $H = 8^2 + 1^2 = 65$; $b = 8^2 - 1^2 = 63$; $h = 2 \times 8 \times 1 = 16$.

8. Les quatre triangles rectangles ayant comme hypoténuse le même nombre 65 sont donc : $(65)^2 = (52)^2 + (39)^2$; $(65)^2 = (60)^2 + (25)^2$; $(65)^2 = (33)^2 + (56)^2$, $(65)^2 = (63)^2 + (16)^2$.

9. C'est-à-dire le quadruple de l'aire de chacun des quatre triangles rectangles de la note précédente, ou le double produit des deux nombres qui représentent les côtés de l'angle droit.

1. Posons $X + Y + Z + W = 65x$, et posons, en outre : $X =$ (quadruple de l'aire du triangle 39, 52, 65)$x^2 = (2 \times 39 \times 52)x^2 = 4056x^2$; $Y = (2 \times 25 \times 60)x^2 = 3000x^2$; $Z = (2 \times 33 \times 56)x^2 = 3696x^2$, et $W = (2 \times 16 \times 63)x^2 = 2016x^2$.

2. La première relation de la note précédente devient par substitution des expressions de X, Y, Z, W : $12768x^2 = 65x$, d'où : $x = \frac{65}{12768}$. Donc : $X = \frac{17136600}{163021824}$; $Y = \frac{12675000}{163021824}$; $Z = \frac{15615600}{163021824}$; $W = \frac{8517600}{163021824}$.

annexe 2

Quelques notes concernant les triplets pythagoriciens

3	4	5
6	8	10
5	12	13
9	12	15
8	15	17
12	16	20
15	20	25
20	21	29
7	24	25
10	24	26
18	24	30
21	28	35
16	30	34
24	32	40
12	35	37
15	36	39
27	36	45
9	40	41
30	40	50
40	42	58
33	44	55
24	45	51
28	45	53
14	48	50
20	48	52
36	48	60
39	52	65
48	55	73
33	56	65
42	56	70
11	60	61
25	60	65
32	60	68
45	60	75
16	63	65
60	63	87
48	64	80
51	68	85
24	70	74
21	72	75
30	72	78
54	72	90
65	72	97
40	75	85
57	76	95
36	77	85
18	80	82
39	80	89
60	80	100
13	84	85
35	84	91

Ainsi que le fait apparaitre la liste ci-contre des premiers triplets pythagoriciens donnée par une calculatrice programmable, on distingue habituellement deux sortes de triplets :

. Ceux , que nous avons entourés de noir, dont les termes sont premiers entre eux, appelons-les "triplets primitifs ".

. Ceux dont les trois termes ont un diviseur commun; en les divisant par leur PGCD, on retombe sur un triplet primitif.

Par des raisonnements d'arithmétique élémentaire , (voir à ce sujet le très intéressant "*Que sais-je? Arithmétique et théorie des nombres*" de J.Itard), on démontre :

1) Si m et n sont deux entiers naturels, ($m > n$), premiers entre eux et de parité différente, alors le triplet:

$$x = m^2 - n^2 \quad , \quad y = 2mn \quad , \quad z = m^2 + n^2$$

est un triplet primitif.

2) Réciproquement, tout triplet primitif peut, à l'ordre près, s'obtenir de cette façon, à partir de deux entiers m et n premiers entre eux et de parité différente.

3) En considérant tous les triplets (kx , ky , kz) obtenus en multipliant un triplet primitif par un entier naturel quelconque, on obtient l'ensemble de tous les triplets pythagoriciens.

Si les triplets pythagoriciens sont connus depuis la plus haute Antiquité, (des listes en sont par exemple visibles dans certaines tablettes babyloniennes), c'est dans les *Eléments* d'Euclide (livre X) qu'on trouve pour la première fois exposé ce procédé général de formation . (voir à ce sujet "*Mathématiques et Mathématiciens*" , de J. Itard).

Remarque : .dans le travail proposé aux élèves, cette distinction entre triplets "primitifs" et triplets "non primitifs" n'apparait pas, afin d'éviter des considérations d'arithmétique qui ne sont pas au programme.

Le procédé (D) défini dans la fiche élèves utilise des entiers m et n quelconques, et les triplets obtenus ne sont donc pas nécessairement primitifs.

Annexe 3.

<u>Méthode de Diophante pour obtenir quatre triplets d'entiers donnant les côtés de quatre triangles rectangles de même hypoténuse.</u>

Bien que Diophante n'opère que sur un exemple numérique, il semble que l'on puisse généraliser sa méthode comme suit :

1 . Considérons deux triplets "primitifs " distincts (3 , 4, 5) et (5 , 12 , 13) soit plus généralement (x , y , z) et (t , u , v) tels que :

$$x = m^2 - n^2 , \quad y = 2mn , \quad z = m^2 + n^2$$
$$t = p^2 - q^2 , \quad u = 2pq , \quad v = p^2 + q^2 \qquad \text{(cf. annexe 2)}$$

Multiplions chacun des termes d'un triplet par l'hypoténuse, c'est-à-dire le dernier terme de l'autre.
On obtient (39 , 52 , 65) et (25 , 60 , 65) ; soit d'une manière générale:

$$T_1 = (xv, yv , zv) = (X_1 , Y_1, Z)$$
et $$T_2 = (tz , uz , vz) = (X_2 , Y_2 , Z)$$

T_1 et T_2 sont nécessairement distincts car (x , y , z) et (t , u , v) sont primitifs et distincts.

2. Par définition $Z = zv = (m^2 + n^2)(p^2 + q^2)$.

Or

$$(m^2 + n^2)(p^2 + q^2) = (pm + qn)^2 + (qm - pn)^2$$
$$(m^2 + n^2)(p^2 + q^2) = (qm + pn)^2 + (pm - qn)^2$$

Donc

$$Z = A^2 + B^2 \quad \text{avec} \quad A = pm + qn \ \text{ et } \ B = |qm - pn|$$
$$Z = C^2 + D^2 \quad \text{avec} \quad C = qm + pn \ \text{ et } \ D = |pm - qn|$$

En posant $X_3 = |A^2 - B^2|$, $Y_3 = 2AB$,
$X_4 = |C^2 + D^2|$, $Y_4 = 2CD$,

On obtient deux autres triplets $T_3 = (X_3 , Y_3 , Z)$
$T_4 = (X_4 , Y_4 , Z)$

eux aussi pythagoriciens, et de même hypoténuse que T_1 et T_2.

((33, 56, 65) et (63, 16, 65) dans l'exemple de Diophante).

Notons que Diophante obtient quatre triplets distincts, mais en fait il peut arriver que T_3 se confonde avec T_1 ou T_2.

Ainsi, si $m = 4,\ n = 1,\ p = 15,\ q = 8$,
on obtient $T_1 = T_3 = (4335 , 2312 , 4913)$.

On peut démontrer que, pour que les quatre triplets obtenus soient distincts, il suffit d'imposer les conditions supplémentaires :

. m et p de parité différente,
. $2pmn \neq q(m^2 - n^2)$ et $2npq \neq m(p^2 - q^2)$

DIOPHANTE : *Les Arithmétiques* Niveau 1^e
Livre I .Problème XXVII
Trad .P.Ver Becke 1926
Réédition Blanchard 1959

TROUVER DEUX NOMBRES CONNAISSANT
LEUR SOMME ET LEUR PRODUIT

I . Soit S et D deux nombres réels donnés. Montrer qu'il existe un couple unique (u , v) de réels tels que $u + v = S$ et $u - v = D$.

II . Lire le texte ci-joint .
Notes :
(α) "excédent des nombres" : différence entre le plus grand et le plus petit des 2 nombres.
(β) "arithme" : du grec αριθμοσ , arithmos, nombre. C'est le terme choisi par le traducteur de Diophante pour désigner l'inconnue du problème, égale à la demi-différence des deux nombres cherchés.

1) Traduire la suite des calculs et les résultats obtenus dans ce texte, en utilisant les notations symboliques modernes ; on désignera par u et v les deux nombres cherchés (avec $u \geq v$) et par x l'arithme.
2) En suivant les calculs de Diophante , vous avez posé $u = 10 + x$ et $v = 10 - x$. Expliquez à l'aide des lignes 10 à 17 comment justifier ce changement d'inconnue.
3) Résoudre, par la méthode exposée par Diophante, les problèmes suivants :

P_1 : Trouver deux nombres tels que la somme forme 13 unités et le produit 40 unités.

P_2 : Trouver deux nombres tels que la somme forme 12 unités et le produit 40 unités.

III . Diophante ne s'intéresse qu'aux nombres rationnels positifs. Nous nous proposons de montrer, dans cette partie, que la méthode exposée par Diophante peut s'appliquer en général à la résolution dans R^2 d'un système (S).

$$(S)\quad \begin{cases} u + v = S \\ uv = P \\ u \geq v \end{cases}$$

S et P désignant des réels quelconques vérifiant seulement une condition (C) qu'on précisera.

1) Résoudre le système (S) à l'aide de la méthode utilisée plus haut, et énoncer la condition (C) nécessaire pour que le système (S) ait une solution. Comment cette conditon est-elle exprimée par Diophante, qui ne considère que des rationnels positifs?
Comparez avec les résultats trouvés par la méthode du cours.

2) (Pour les élèves ayant étudié les expressions de la somme et du produit des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$)
Comment ramener l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c réels donnés ; $a \neq 0$) à celle d'un système du type (S) ? Résoudre alors le système ; comparer avec les formules du cours.

Commentaires

La lecture du texte et l'exercice en général ont été bien traités et considérés comme assez faciles et très intéressants par plusieurs classes de 1^{ere} S.

On peut faire remarquer aux élèves que les Babyloniens, dès le deuxième millénaire avant J. C., résolvaient des équations du second degré avec des méthodes de ce genre, mais que Diophante propose ici la résolution d'un problème général, bien qu'il ne donne la solution que dans un cas numérique particulier. En cela, Diophante franchit une étape importante par rapport aux mathématiciens Babyloniens. Les élèves s'étonnent parfois que Diophante n'ait pas eu à sa disposition de notation symbolique (pas de lettre désignant les nombres connus ou inconnus, pas de signe d'opérations...);d'autres manuscrits de Diophante renferment pourtant des notations; il n'est pas exclu qu'il ait disposé de certaines abréviations.

Une question posée par les élèves a été de savoir comment Diophante connaissait la formule $(10 + x)(10 - x) = 100 - x^2$. On peut présenter alors les démonstrations géométriques des identités remarquables qu'on trouve dans les *Eléments* d'Euclide (livre II , propositions 4, 5, 6) .On peut consulter l'*Histoire des mathématiques pour les collèges* (éd .Cedic p.115) ; *Mathématiques et Mathématiciens* de Dedron et Itard (éd. Magnard 1959 p. 327 à 329) où sont commentées en particulier les propositions 5 et 6 qu'on peut interpréter comme 2 formulations de l'identité

$(X - Y)(X + Y) = X^2 - Y^2$ écrite plutôt $X^2 = (X - Y)(X + Y) + Y^2$.

XXVII

Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés (4).

Il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres (5) ;

Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités, et que leur produit forme 96 unités.

Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes. Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes. En conséquence, posons que le plus grand nombre est 1 arithme augmenté des 10 unités qui sont la moitié de la somme des nombres ; donc le plus petit nombre sera 10 unités moins 1 arithme, et il s'établit que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes.

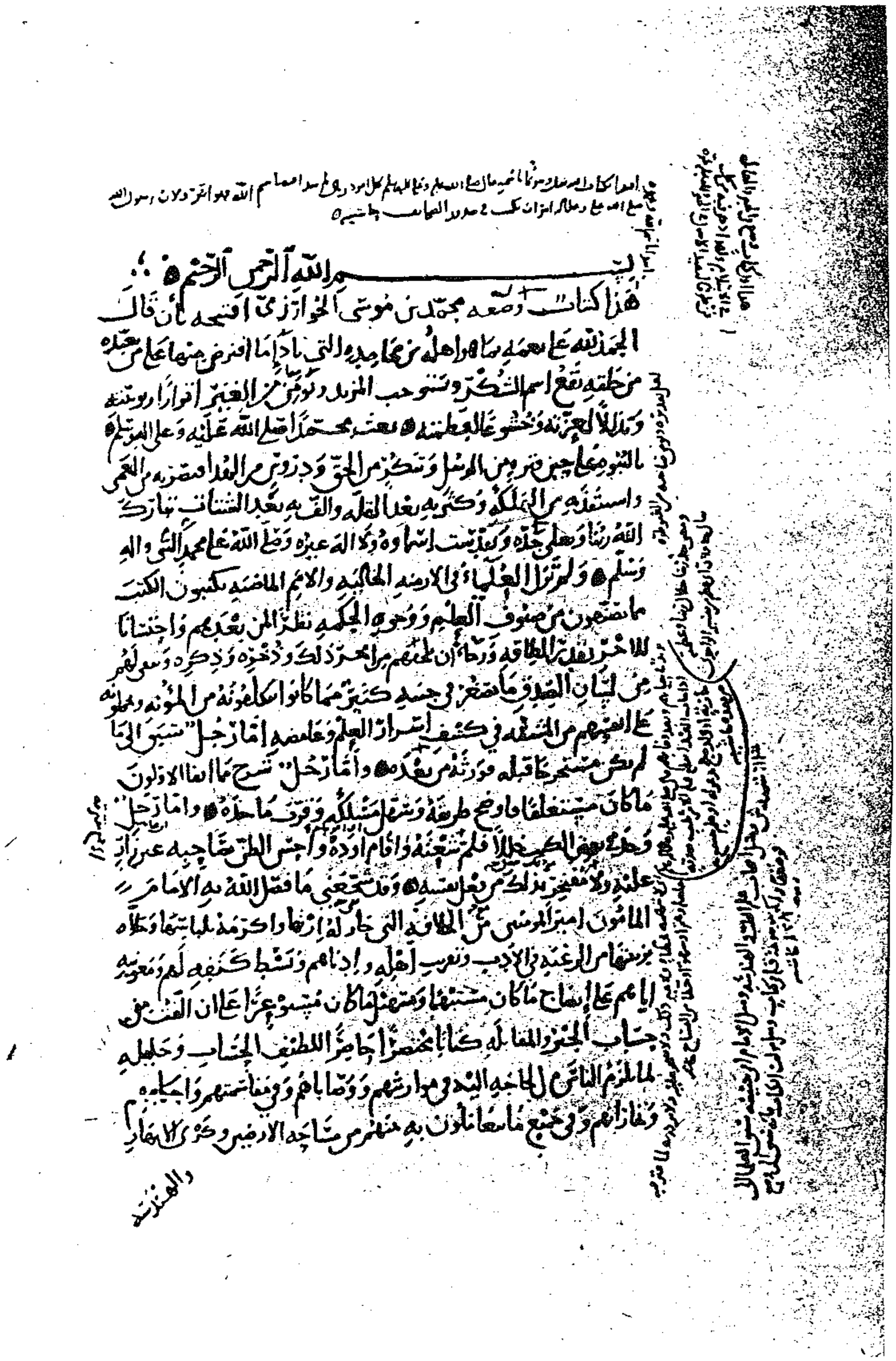
Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités. Or leur produit est 100 unités moins 1 carré d'arithme ; ce que nous égalons à 96 unités, et l'arithme devient 2 unités. En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités, le plus petit sera 8 unités, et ces nombres satisfont à la proposition (1).

Notes du traducteur:

4. Les formules générales du problème sont : $X+Y=a$, $XY=b$.

5. Cette condition de possibilité s'exprime donc par la relation $\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 - XY =$ nombre carré. Elle ne vise, chez Diophante, qu'à l'obtention exclusive de solutions en nombres rationnels positifs. En effet si nous résolvons les équations, on aura les valeurs : $\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$, qui seront rationnelles si l'on a : $\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b =$ nombre carré, ou si, par substitution on a : $\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2 - XY =$ nombre carré. Les valeurs de X seront, en outre, positives, car, pour une valeur de b, toujours positive en soi chez Diophante, on aura : $\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} < \frac{a}{2}$.

1. La solution considère les équations particulières : $X+Y=20$, (I), $XY=96$ (II). Posons : $X-Y=2x$. Or, puisque $\frac{X+Y}{2}=10$, on satisfait à la relation (I) en posant, en outre : $X=x+10$, d'où : $Y=10-x$. Dès lors, (II) donne : $(x+10)(10-x)=96$, ou, comme le texte : $100-x^2=96$, d'où : $x^2=4$, et $x=2$. Donc : $X=12$, et $Y=8$; valeurs qui satisfont à la proposition, et qui répondent à la condition : $\left(\frac{12+8}{2}\right)^2 - 12 \times 8 =$ nombre carré 4.


بسم الله الرحمن الرحيم
هذا كتاب وضعه محمد بن موسى الخوارزمي افتتحه بأن قال
الحمد لله على نعمه بما هو اهله من محامده التي باداء ما افترض منها على من يعبده
من خلقه يقع اسم الشكر ويستوجب المزيد ويؤمن من الغير اقرارا بربوبيته
وتذللا لعزته وخشوعا لعظمته بعث محمدا صلى الله عليه وعلى اله وسلم
بالنبوة على حين فترة من الرسل وتنكر من الحق ودروس من الهدى فبصر به من العمى
واستنقذ به من الهلكة وكثر به بعد القلة والف به بعد الشتات تبارك
الله ربنا وتعالى جده وتقدست اسماؤه ولا اله غيره وصلى الله على محمد النبي واله
وسلم ولم تزل العلماء في الازمنة الخالية والامم الماضية يكتبون الكتب
مما يصنفون من صنوف العلم ووجوه الحكمة نظرا لمن بعدهم واحتسابا
للاجر بقدر الطاقة ورجاء ان يلحقهم من اجر ذلك وذخره وذكره ويبقى لهم
من لسان الصدق ما يصغر في جنبه كثير مما كانوا يتكلفونه من المؤونة ويحملونه
على انفسهم من المشقة في كشف اسرار العلم وغامضه اما رجل سبق الى ما
لم يكن مستخرجا قبله فورثه من بعده واما رجل شرح مما ابقى الاولون
ما كان مستغلقا فاوضح طريقه وسهل مسلكه وقرب ماخذه واما رجل
وجد في بعض الكتب خللا فلم شعثه واقام اوده واحسن الظن بصاحبه غير راد
عليه ولا مفتخر بذلك من فعل نفسه وقد شجعني ما فضل الله به الامام
المامون امير المؤمنين مع الخلافة التي حاز له ارثها واكرمه بلباسها وحلاه
بزينتها من الرغبة في الادب وتقريب اهله وادنائهم وبسط كنفه لهم ومعونته
اياهم على ايضاح ما كان مستبهما وتسهيل ما كان مستوعرا على ان الفت من
حساب الجبر والمقابلة كتابا مختصرا حاصرا للطيف الحساب وجليله
لما يلزم الناس من الحاجة اليه في مواريثهم ووصاياهم وفي مقاسمتهم واحكامهم
وتجاراتهم وفي جميع ما يتعاملون به بينهم من مساحة الارضين وكري الانهار
والهندسة

Première page du Manuscrit Oxford Hunt 214 , f 1.a de l'oeuvre d'Al-Khwārizmī

IV

AL KHWARIZMI

Abu Abd Allah Muhammad Ben Musa Al Khwarizmi originaire de la ville de Khwarizmi (nommée aujourd'hui Khiva, en République socialiste soviétique d'Uzbekistan) naquit vers la fin du 8ᵉ siècle et mourut un peu avant 850. Il fut membre de la "Maison de la Sagesse" fondée à Bagdad par le calife Al-Mâmu qui y attirait les savants du monde arabe, musulmans, chrétiens, syriens et juifs ; ils traduisaient en arabe tous les grands textes grecs et hindous.
Le nom d'Al-Khwarizmi, à la suite de diverses modifications devint "algorithme" probablement à cause de son ouvrage d'arithmétique (intitulé en latin *de numero Indorum*) dans lequel il expose de nombreuses règles de calcul numérique.
Mais le principal ouvrage d'Al-Khwarizmi considéré comme le meilleur exposé élémentaire de l'algèbre jusqu'aux temps modernes est *Al-Mukhtasar fi Hisab al -Jabr wa l -Muqabala* (sur le calcul de l'algèbre et l'al mukabala) dont le but principal est de de servir à la résolution de problèmes de la vie quotidienne (problèmes d'héritages en particulier); il traite d'équations linéaires et du second degré.

Il y considère 3 sortes de nombres : les nombres simples ou dirham (unité monétaire), le gizr (racine ou say ,chose, c. à d. l'inconnue) et enfin le màl (montant d'une somme, mais aussi carré du gizr) et six formes canoniques d'équations du 1ᵉʳ et du 2ᵈ degré (où tous les termes sont positifs et la seule opération est l'addition), qui sont du type :

. les carrés égaux aux racines ($ax^2 = bx$)
. les carrés égaux à un nombre ($ax^2 = c$)
. les racines égales à un nombre ($ax = c$)
. les carrés et les racines égaux à un nombre ($ax^2 + bx = c$)
. les carrés et les nombres égaux aux racines ($ax^2 + c = bx$)
. les racines et les nombres égaux aux racines ($bx + c = ax^2$)

Al-Khwarizmi ne considère que les solutions positives de ces équations. Toute autre équation ne peut être résolue qu'après avoir été ramenée à l'une de ces formes. On se débarasse des termes affectés du signe - à l'aide du gabr (c'est à dire du remplissage), opération qui consiste à ajouter aux deux membres de l'équation des termes égaux à ceux qui sont affectés du signe "moins". On réduit ensuite tous les termes semblables à l'aide de la muqabala qui consiste à annuler les termes semblables dans les deux membres de l'équation. Enfin le coefficient du terme du second degré doit être égal à l'unité pour appliquer les règles de résolution de certaines formes d'équation.

La transformation al-jabr (prononcée al-jabr et non al-djabr) donna le mot algèbre qui désigna d'abord la science de la résolution des équations.
Al-Khwarizmi ne considère que la (ou les) solutions positives de ces équations. Souvent dépourvu de justifications logiques, le contenu de l'ouvrage ressemble souvent à de l'algèbre babylonienne ou hindoue sans l'utilisation faite par les hindous d'une notation syncopée; mais on trouve aussi une nette influence des mathématiques grecques dans les parties où l'auteur juge nécessaire de démontrer géométriquement la validité des solutions proposées à l'aide de nombres, comme c'est le cas pour le texte proposé qui traite d'une équation de l'avant dernier type cité. Mais à la différence des démonstrations grecques (euclidiennes par exemple) qui traitent de problèmes géométriques (déterminer des segments et des aires), Al-Khwarizmi indique nettement que son problème s'applique à toute quantité numérique.
Le texte étudié présente la plus ancienne attestation d'un avant goût de discussion du nombre de solutions d'une équation du second degré.

AL- KHWARIZMI. *Al-Mukhtasar fi Hisab al -Jabr wa l -Muqabala* Niveau 1ère

Edité par Mashrafa et Mursi Ahmad Le Caire 1968.

Traduction: A. Djebbar.

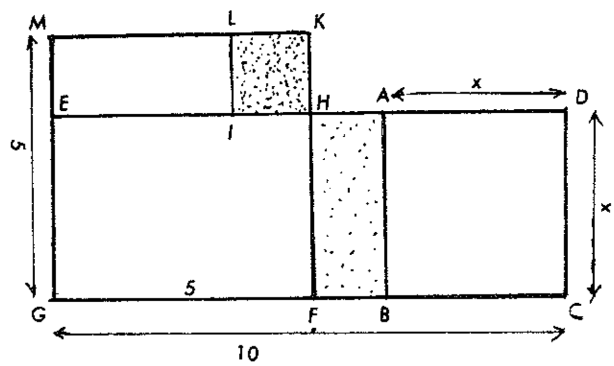
RESOLUTION D'UNE EQUATION DU SECOND DEGRE SELON UNE METHODE ARABE.

Al-Khwarizmi (environ 780-850) prend l'exemple de l'équation $x^2 + 21 = 10x$ qu'il exprime par "**un carré et vingt et un nombre égalent dix de ses racines**" dont il cherche une solution positive grâce à une interprétation géométrique de cette équation :

il veut déterminer un côté x d'un rectangle ECDN dont l'autre côté vaut 10 (et dont l'aire vaut 10 x), de façon qu'il se décompose en un carré ACDB de côté x et un rectangle de EABN d'aire 21 L'équation se traduit donc :

aire(ACDB) + aire (EABN) = aire (ECDN)

avec EC = 10 AC =x et aire (EABN) = 21



I. Résolution géométrique. On considère la figure ci-dessus .

Soit I le milieu de [ND] , NIKM le carré de côté [NI] et KLGH le carré de côté KH (égal à AH).

1) Exprimer, en fonction de x, les aires de KLGH, de AHIB et de LGEM.

2) En déduire que l'aire de EABN est égale à la différence entre l'aire du "grand carré" NIKM et celle du "petit carré" KLGH. Traduire cette égalité par une équation d'inconnue x.

3) Que peut-on en déduire pour le côté du "petit carré" KLGH, puis pour la longueur x?

4) Cette construction est-elle possible si 21 est remplacé par 26 dans l'équation proposée?

II . Recherche d'une racine de l'équation.

1) Lire le texte, lignes 1 à 13, en faisant les calculs proposés.

Indications

ligne 4 : "Dirham", unité de monnaie, désigne ici les constantes.

ligne 7: "prends la moitié des racines ": on dit aujourd'hui "la moitié du coefficient de x".
ligne 11 : "racine": "comprendre "racine carrée".

2) Justifier les calculs faits en se référant au raisonnement géométrique de la question I.

3) Déterminer, en suivant la méthode de calcul proposée par Al-Khwarizmi, une solution de l'équation $x^2+c=bx$ (b et c donnés, strictement positifs) et faire la construction géométrique justifiant ce calcul. Quelle condition doit-on imposer à b et c pour que la construction soit possible? Retrouvez-vous les résultats donnés en cours?

III . Recherche de la 2e racine carrée de l'équation.

1) Lire les lignes 14 à 16 ; quelle est la 2e solution du problème? Imaginez une construction géométrique permettant de trouver cette solution (aucune ne nous a été transmise).
(Indication : Cette solution est supérieure à 5, on pourra utiliser un"petit carré" de côté $x-5$)

2) Lire les lignes 17 à 19 ; Al-Khwarizmi y affirme que sa méthode est utilisable pour résoudre toute équation du type $x^2 + c = bx$ (b et c positifs) et permet d'obtenir deux solutions; écrire ces 2 solutions, selon la méthode d'Al-Khwarizmi; expliquer pourquoi il les distingue en expliquant que l'une est obtenue à l'aide d'un "accroissement" et l'autre d'une "diminution".

3) Les trois cas dont parle Al-Khwarizmi, lignes 21 et 22, sont les trois types d'équation du second degré suivantes :

(1) $ax^2 + bx = c$
(2) $ax^2 - bx + c$ (a, b, c, strictement positifs)
(3) $ax^2 + c = bx$

Justifier pourquoi, parmi ces trois cas, le (3) est le seul où l'on obtienne deux solutions positives. (les seules considérées par Al-Khwarizmi)

4) Comment expliquez-vous les propositions exprimées
a) lignes 23 à 25
b) lignes 26 et 27?

NB. Les lignes 1 à 27 du texte joint ont été données à lire aux élèves.

Quant au carrés et au nombre qui égalent des racines, c'est comme quand tu dis : Un carré et vingt et un en nombre égalent dix de ses racines. Cela vaut aussi pour tout bien qui est tel que si on lui ajoute vingt et un dirham, la somme qui en résulte est égale à dix racines de ce bien.

Sa méthode de résolution consiste en ceci :
Prends la moitié des racines, cela fera cinq.
Tu la multiplies par elle-même, cela fera vingt cinq.
Tu retranches les vingt et un dont a dit qu'ils étaient avec les carrés, il restera quatre.
Tu prends sa racine qui est deux.
Tu le retranches de la moitié des racines qui est cinq, il restera trois.
Et c'est la racine du carré que tu voulais et le carrré est neuf.
Si tu veux, ajoutes la racine (de quatre) à la moitié des racines.
Cela fera sept et ce sera la racine du carré que tu voulais et le carré est quarante neuf.

Si tu rencontres un problème qui te mène à ce cas, tu vérifies sa validité par l'accroissement, si elle n'est pas (vérifiée), elle le sera alors nécessairement par diminution.

Ce cas se résout à la fois par l'accroissement et par la diminution et, cela n'est pas ainsi pour les autres cas parmi les trois pour lesquels on a besoin de prendre la moitié des racines.

Sache aussi que, dans ce cas, si, ayant pris la moitié des racines et les ayant multipliées par elles-mêmes, le résultat est inférieur aux dirham qui sont avec le carré, le problème est alors impossible.
S'il est égal aux dirham eux-mêmes, la racine du carré est alors égale, exactement, à la moitié des racines, sans accroissement ni diminution.

(...) Quant à (la justification de la solution de) : un carré et vingt et dirham égalent dix de ses racines, nous prenons pour le carré une surface carrée de côtés inconnus et c'est la surface (AD) puis, nous lui accolons une surface à côtés parallèles de largeur égale à l'un des côtés de la surface (AD), ce sera le côté EN, et la surface sera (EB). La longueur des deux surfaces réunies sera alors CE. Et nous avons appris que sa longueur était dix en nombre car, pour toute surface carrée de côtés et d'angles égaux, un de ses côtés multiplié par un est égal à la racine de cette surface, et (multiplié) par deux, (il est égal) à deux de ses racines .
Comme on a dit: Un carré et vingt un égalent dix de ses racines, on sait alors que la longueur du côté CE est dix en nombre, car le côté CD est le côté du carré.

Puis, nous divisons le côté CE en deux moitiés, au point H. Nous voyons que le segment EH est égal au segment HC. (Soit 1 milieu de DN). Nous voyons que H1 est égal à CD. Ajoutons au segment H1, dans son prolongement, l'équivalent de l'excès de CH sur H1, (ajoutons au segment EN, dans son prolongement le segment EM) afin que surface (NK) soit un carré. Le segment 1K est alors égal à KM. Nous avons donc une surface carrée de côtés et d'angles égaux et c'est la surface (M1). Or, nous avons vu que le segment 1K est (égal à) cinq et les côtés sont égaux. La surface est donc (égale à) 25, et c'est le résultat du produit de la moitié des racines par elle-même, (c'est à dire) cinq (mulitiplié) par cinq qui donne vingt-cinq. (Mais), on avait vu que la surface (EB) était les vingt et un qui avaient été ajoutés aux carrés. A l'aide du segment 1K qui est un des côtés de la surface (M1), nous dissocions (E1) de la surface (EB) et il reste la surface (A1). Nous prenons, du segment KM, le segment KL qui est égal au segment HK (et, sur HE, le segment HG égal à LK). Nous voyons que le segment 1H est égal au segment ML, et il reste du segment MK le segment LK qui est égal au segment KH. La surface (MG) est alors égale à (1A).
On voit donc que la surface (E1), augmentée de la surface (MG), est égale à la surface (EB) qui est vingt et un. Mais la surface (M1) est (égale à) vingt cinq. Lorsque nous aurons retranché de la surface (M1) les surfaces (E1) et (MG) qui sont (égales à) vingt et un, il nous restera une petite surface et c'est la surface (GK) qui est la différence entre vingt cinq et vingt et un et c'est quatre. Sa racine est le segment GH qui est égal au segment HA qui est (égal à) deux. Si tu le retranches du segment HC qui est la moitié des racines, il reste le segment AC qui est (égal à) trois et c'est la racine du premier carré. Si tu l'ajoutes au segment CH qui est (égal à) la moitié des racines, cela vaudra sept et c'est le segment GC. Ce sera la racine d'un carré plus grand que le (premier carré) et qui, si tu lui ajoutes vingt et un, est égal à dix de ses racines.
Et voici la figure (de la preuve) : voir figure page 74

Et c'est ce que nous voulions démontrer .

(Extrait du *Al-Mukhtasar fi Hisab al -Jabr wa l -Muqabala* édité par A.M. Mashrafa et M. Mursi Ahmad, le Caire1968, pp.20-21 et pp.23-24.)
Traduction: A. DJEBBAR.

Divine proportion

Œuvre nécessaire à tous les esprits perspicaces et curieux, où chacun de ceux qui aiment à étudier la Philosophie, la Perspective, la Peinture, la Sculpture, l'Architecture, la Musique et les autres disciplines Mathématiques, trouvera une très délicate, subtile et admirable doctrine et se délectera de diverses questions touchant une très secrète science.

M. Antonio Capella, homme très érudit l'a revue.
A. Paganino Paganini l'a imprimée
très soigneusement à l'aide de
caractères très élégants.

V

PACIOLI

Luca Pacioli est né vers 1445, à Borgo San Sepolcro, petite ville d'Ombrie, dont est également originaire l'illustre peintre Piero della Francesca (1416,1492), lui-même bon mathématicien, auteur d'un des premiers traités de Perspective. Nous savons que Pacioli vénérait le grand artiste, qui lui même avait de l'amitié pour le jeune mathématicien.
Toute sa vie, Pacioli enseigna les mathématiques, à Pérouse d'abord, puis, après être rentré dans l'ordre de Saint-François, il voyage, pour enseigner un peu partout en Italie : à Florence, Pise, Bologne, Rome, Milan, Venise. C'est à Milan, où il séjourne de 1496 à 1500, qu'il fait la connaissance, à la cour du Duc, de Léonard de Vinci avec qui il noue amitié.
Pacioli écrivit, et fit imprimer en italien, afin de toucher un public plus large, de nombreux ouvrages. Citons en particulier :

La Summa de arithmetica, geometria, proportione et proportionalita, terminée en 1487, imprimée en 1494. Il s'agit d'une véritable encyclopédie de mathématiques où Pacioli rassemble et coordonne les connaissances trouvées dans les oeuvres de ses devanciers, depuis Euclide, son grand maître, jusqu'à ses contemporains, englobant en arithmétique et en algèbre les apports indiens et surtout arabes. Et ce n'est pas son moindre mérite que d'avoir sorti de l'oubli le grand Fibonnacci, mathématicien du XIIIe siècle, (appelé encore Léonard de Pise).

Une traduction en italien des *Eléments* d' Euclide, aujourd'hui perdue, publiée vers 1500, ainsi qu'une édition en latin, imprimée en 1508.

Enfin le célèbre traité ***Divina Proportione***, magnifiquement illustré par des planches de Léonard de Vinci, dont le manuscrit fut offert au Duc de Milan en 1496. (La première édition imprimée date de 1509, c'est la dernière oeuvre éditée de Pacioli).

Après une étude détaillée des remarquables propriétés de la "Divine Proportion", autrement dit de la proportion définie par le partage en "moyenne et extrême raison", Pacioli, suivant Euclide pas à pas, développe l'étude des pentagones et décagones réguliers, puis celle des cinq polyèdres réguliers de l'espace, figures où partout se trouve la Divine Proportion. Dans cette partie du traité, de nombreuses considérations mystiques se mêlent aux développements mathématiques.
Dans la suite, Pacioli étudie les inclusions possibles des différents polyèdres les uns dans les autres, puis il envisage des polyèdres "tronqués", et d'autres "surélevés" par l'adjonction de pyramides régulières posées sur les différentes faces. Les superbes planches de Léonard de Vinci sont fort utiles au lecteur pour l'aider à concevoir ces étranges solides, massifs ou évidés.
L'ouvrage se termine par l'étude des colonnes, rondes ou prismatiques, des cônes et pyramides, entiers ou tronqués.

Le travail présenté réunit quatre fiches, intitulées :

-La quadrature du cercle

-Approximations de π

-Mesure d'une colonne ronde (texte de Pacioli) avec questionnaire adjoint.

-La main, les mesures, le pentagone .

Pour comprendre le fil directeur de cet enchainement, à première vue un peu farfelu, il est souhaitable de lire d'abord le texte de Pacioli .
Ce texte, extrait du célèbre traité de la *Divine Proportion* est traduit de l'italien. Il est d'une lecture assez simple car l'auteur se contente d'expliquer, sans aucune tentative de démonstration la méthode de calcul bien connue du volume d'un cylindre $V = B \times h$ (en termes modernes).
Mais, pour calculer l'aire du disque de base , Pacioli explique la méthode d'Archimède, qui consiste à calculer les onze quatorzièmes de l'aire du carré circonscrit, (méthode bien sûr approchée, ce qu'Archimède lui-même savait fort bien !).
La lecture de ce passage pose de façon naturelle le célèbre problème de la **quadrature du cercle.**
Enfin Pacioli, s'adressant à des élèves ou à des lecteurs dont il craint l'ignorance, prend la peine d'expliquer que le résultat doit être compris comme un nombre de petits cubes bâtis sur les unités de longueur de l'époque, qu'il cite : les bras, les pieds, les palmes ... Ce passage nécessite quelques explications.

J'ai alors vu dans le texte de Pacioli une façon originale et intéressante de présenter deux leçons de programme de 5ème :

.L'aire du disque

.Le volume du cylindre

C'est ce qui motiva dans un premier temps la confection des premières fiches : "QUADRATURE DU CERCLE" et "APPROXIMATIONS DE π ", destinées à être faites avant la lecture du texte.

La dernière fiche : "LA MAIN, LES MESURES, LE PENTAGONE", a été conçue ultérieurement, et prévue pour être donnée après la lecture du texte de Pacioli. Tirant prétexte de la rencontre dans ce texte d'unités anciennes , elle présente l'ensemble des mesures de longueurs appelé "LA QUINE", ce qui est l'occasion d'évoquer le mystérieux " NOMBRE D'OR ", et de susciter une première étude du non moins mystérieux PENTAGONE REGULIER ETOILE.

UTILISATION DES FICHES

Il parait souhaitable de distribuer ces fiches, (prévues pour des élèves de cinquième), de façon espacée dans l'année scolaire. A titre d'exemple, voici comment j'ai procédé cette année dans ma propre classe :

1) En décembre, après avoir étudié les fractions et, en géométrie, les aires des triangles et de certains polygones plans, j'ai fait faire, en travail dirigé, l'étude de la méthode de l'octogone et celle de la règle du neuvième, début de la fiche **la Quadrature du Cercle**.

Puis nous avons étudié le résultat d'Archimède , ainsi que les formules modernes, avec π, pour le périmètre et l'aire du disque (formules inscrites dans le cahier de cours). Les élèves ont fait seuls, à la maison, les exercices des paragraphes III et IV.

2) En janvier, j'ai distribué la fiche **Approximations de π**. Cette fiche demandant des calculs, (fractions , approximations décimales), a été faite en devoir à la maison), avec visiblement beaucoup d'intérêt.

3) En février, ayant terminé la leçon : "volumes de prismes droits ", j'ai décidé de traiter la leçon "volume du cylindre de révolution " à l'aide de la lecture à haute voix du texte de Pacioli. Les élèves ont particulièrement apprécié de retrouver dans cette page le résultat d'Archimède, pour eux devenu familier.

Ils ont ensuite répondu au questionnaire, et leurs réponses ont montré dans l'ensemble une bonne compréhension du texte.

4) Enfin, en juin, je leur ai donné en travail dirigé la fiche : **La main, les mesures, le pentagone**, ce qui a été l'occasion de finir l'année en beauté, par la contemplation de beaux polygones réguliers.

Pour ces questions, les connaissances de géométrie élémentaire de 5e sont suffisantes. Quant à la construction d'un pentagone régulier étoilé, elle a vivement intéressé les élèves, qui ont proposé différentes méthodes.

Comment calculer l'aire d'une surface limitée par une ligne courbe, en particulier de la plus connue et apparemment la plus simple, le disque ?

Pendant des siècles, certains cherchèrent à <u>construire</u> , (à la règle et au compas), un carré d'aire égale à celle d' un disque donné. D'autres cherchaient une fraction permettant de <u>calculer</u> l'aire d'un disque à partir de l'aire d'un carré circonscrit au disque.
Ainsi que nous le verrons, cette recherche dura des siècles. C'est ce fameux problème qu'on appelle la **quadrature du cercle**.

I Comparaison de la surface d'un disque à celle du carré circonscrit

Méthode de l'octogone

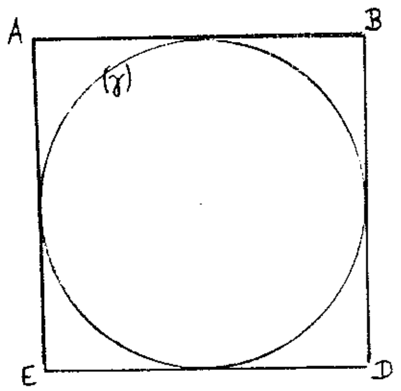


*FIGURE . Réalise un agrandissement de la figure ci-contre de façon que le carré ABDE , circonscrit au cercle (γ), ait 12 cm de côté . Place les points :

F et G sur [AB], tels que AF = FG = GB
H et I sur [BD], tels que BH = HI = ID
K et L sur [DE], tels que DK = KL = LE
M et N sur [EA], tels que EM = MN = NA

Trace en couleur l'octogone FGHIKLMN.

*QUESTIONS
A désignant l'aire du disque , $\mathcal{O}$ celle de l'octogone, C celle du carré,

1°) Montre que $\mathcal{O} = \frac{7}{9}C$

2°) Parmi les propositions suivantes : $\mathcal{A} > \mathcal{O}$, $\mathcal{A} < \mathcal{O}$, $\mathcal{A} = \mathcal{O}$,
l'une d'elles parait-elle à l'oeil absolument certaine ?
Et que penser de l'affirmation : $\mathcal{A} \cong \mathcal{O}$ (A est peu différent de $\mathcal{O}$) ?

3°)De ce qui précède, déduire une valeur approchée de l'aire du disque (γ).

4°) Plus généralement, montrer que, si un disque a pour diamètre D, et pour rayon R, on peut calculer une valeur approchée de son aire par l'une des deux formules : $A \cong \frac{7}{9}d^2$, ou $A \cong \frac{28}{9}R^2$

II La règle égyptienne pour "carrer" les cercles

Dans le papyrus Rhind, écrit par le scribe Ahmès vers 1650 avant J.C., on trouve la règle suivante, appelée la **règle du neuvième** :

> *Si tu veux calculer une aire circulaire,*
> *ôte un neuvième au diamètre,*
> *multiplie le résultat par lui-même.*

Questions

1°) Applique cette règle au calcul de l'aire d'un disque de diamètre 9 cm.
Dessine avec le même centre un disque de diamètre 9 cm et un carré de côté 8 cm.

Pour un égyptien, le disque aurait même aire que le carré, et ainsi se trouverait résolu le fameux problème de la quadrature du cercle !

2°) Toujours par la règle du neuvième, calcule des valeurs approchées
- de l'aire d'un disque de diamètre 18 cm,
- de l'aire d'un disque de diamètre 27 cm.

3°) En t'aidant d'une calculatrice, calcule par la règle du neuvième une nouvelle valeur approchée de l'aire du disque (γ) de diamètre 12 cm. Compare avec l'autre valeur approchée obtenue par la méthode de l'octogone.

4°) Montre que l'utilisation de la règle du neuvième équivaut à calculer :

$$\mathcal{A} = \frac{64}{81} \times d^2 = \frac{256}{81} \times R^2$$

III. Le résultat d'Archimède

On démontre que :

.Le **périmètre** d'un cercle est proportionnel à son **diamètre**.

.L'**aire** d'un disque est proportionnelle au **carré de son rayon**.

ARCHIMEDE (3e siécle avant J.C.), dans son petit traité ***De la mesure du cercle***, réussit à montrer que les deux coefficient de proportionnalité sont égaux, et très voisins du nombre $\frac{22}{7}$.

Ce mystérieux coefficient de proportionnalité fut plus tard désigné par la lettre grecque π.

Ainsi, on peut exprimer en langage moderne les résultats d'Archimède par les égalités :

(1) $L = \pi \times D$ avec $\pi \cong \frac{22}{7}$

(2) $A = \pi \times R^2$

(L et A désignant respectivement le périmètre et l'aire du disque)

Exercices

1°) Montre que l'on a aussi $L = 2\pi \times R$ (1 bis)

et $A = \frac{\pi}{4} \times D^2$ (2bis)

2°) En utilisant l'approximation d'Archimède $p \simeq \frac{22}{7}$, et en conservant cette écriture fractionnaire, calcule sans l'aide de la calculatrice le périmètre puis l'aire :

. d'un disque (g1) de rayon 7 cm,

. d'un disque (g2) de rayon 14 cm,

. d'un disque (g3) de rayon 21 cm.

Vérifie d'après les résultats les deux lois de proportionnalité :

_du périmètre au rayon.

_de l'aire au carré du rayon .

3°) Voici l'un des énoncés d'Archimède :

"Un cercle est au carré de son diamètre, à très peu de chose près, comme 11 est à 14".

Autrement dit, $A\,(\text{disque}) \cong \frac{11}{14}\, d^2$.

Explique ce résultat en partant de la relation (2) , ou (2 bis).

Récapitulons : Quelles sont les trois fractions permettant d'obtenir (approximativement) l'aire du disque comme une fraction de l'aire du carré circonscrit :

Par la méthode de l'octogone , $\mathcal{A} \cong \frac{....}{....} \times d^2$

Par la méthode égyptienne , $\mathcal{A} \cong \frac{....}{....} \times d^2$

Suivant le résultat d'Archimède , $\mathcal{A} \cong \frac{....}{....} \times d^2$

IV. Et la quadrature parfaite du disque?

Eh bien, après des siècles de recherche, le fameux problème : "Comment obtenir par une construction géométrique un carré d'aire exactement égale à celle d'un disque ", à été déclaré insoluble, et le nombre π incalculable exactement. (Démonstration donnée en 1882 par le mathématicien Lindemann) .

π est un nombre "transcendant ", dont la suite illimitée des chiffres après la virgule doit être calculée chiffre après chiffre, (en 1983 on en avait calculé 10 millions !).

Avec deux chiffres après la virgule, $\pi \cong 3{,}14155926535$

Exercice : Calcule cette fois-ci une valeur approchée très précise de l'aire du disque (γ) de diamètre 12 cm, en prenant

$\pi \cong 3{,}1416$

Vérifie que la méthode de l'octogone nous a fourni une valeur approchée par défaut , et que la règle du neuvième nous donne une valeur approchée par excès, mais que dans les deux cas le pourcentage d'erreur est inférieur à 1%.

APPROXIMATIONS FRACTIONNAIRES DE π

1°) La méthode de l'octogone équivaut a prendre $\pi \cong \frac{28}{9}$

La règle du neuvième équivaut à prendre $\pi \cong \frac{256}{81}$

Archimède nous dit : $\pi \cong \frac{22}{7}$

Le chinois **Lui-Hui**, au 3e siècle après J.C., calcule $\pi \cong \frac{157}{50}$

Sachant qu'en réalité, avec 7 décimales, $\pi \cong 3{,}1415927$, compare les précisions des quatre valeurs approchées fractionnaires citées.

2°) Prendre $\pi = \frac{28}{8}$ revient à dire : $\pi = 3 + \frac{....}{...}$

Prendre $\pi = \frac{22}{7}$ revient à dire : $\pi = 3 + \frac{...}{...}$

Dans les temps très anciens, les **Bayloniens**, excellents astronomes habitués à compter dans le système sexagésimal (base 60) écrivaient :

$$\pi = 3 + \frac{7}{60} + \frac{30}{3600}$$

Autrement dit, plus simplement $\pi = 3 + \frac{1}{....}$

Que penser de l'approximation des Babyloniens comparée aux précédentes?

3°) **Ptolémée**, lui aussi astronome et mathématicien, (1er siècle après J.C), calcula : $\pi \cong 3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600}$, soit $\pi \cong 3 + \frac{....}{120}$

Métius, en 1625, publia une valeur trouvée en poussant plus loin les calculs d'Archimède : $\pi \cong \frac{355}{113}$, soit $\pi \cong 3 + \frac{....}{113}$

Combien de décimales exactes ont ainsi respectivement obtenu Ptolémée, Métius?

POUR FINIR ...

Reprendre toutes les approximations fractionnaires de π proposées dans cette fiche . Les classer suivant le critère :

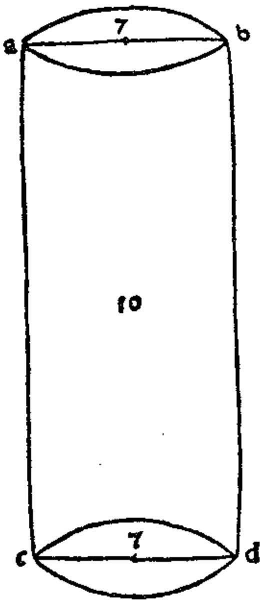
approximations par défaut ,

approximations par excès ,

puis, à l'intérieur de ces deux classes, les ranger par ordre de précision croissante.

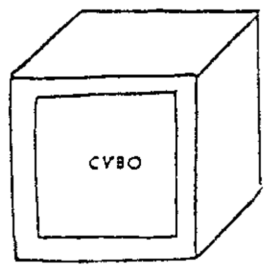
Extrait de "*La Divine Proportion*" de LUCA PACIOLI.

De la manière de mesurer toutes sortes de colonnes et d'abord les rondes.

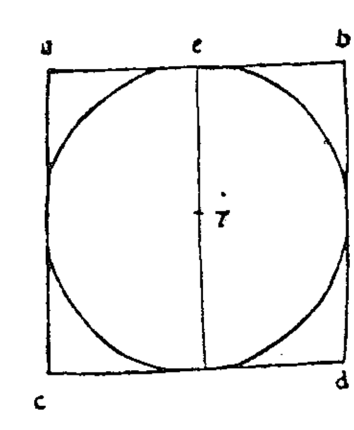


Il me paraît devoir faire connaître maintenant la manière de mesurer toutes sortes de colonnes. Bien que nous en ayons traité amplement dans notre ouvrage, nous en donnerons cependant un aperçu très succinct à Votre Grandeur; et d'abord, pour toutes les colonnes rondes, ceci est la règle générale. On mesure premièrement une de ses bases en la réduisant au carré selon la manière approchée trouvée par le grand géomètre Archimède, placée dans son livre sous la rubrique « quadrature du cercle » et donnée dans notre œuvre avec sa démonstration, c'est-à-dire ainsi. Ayant trouvé le diamètre de la base et multiplié celui-ci par lui-même, on prendra les 11/14 du produit, c'est-à-dire les onze quatorzièmes; ceux-ci étant multipliés par la hauteur de la colonne, ce dernier produit sera le volume de toute la dite colonne.

Exemple : pour mieux comprendre : Soit la colonne ronde ABCD dont la hauteur AC ou BD soit 10 et les diamètres des bases, l'un AB et l'autre CD, chacun 7. Je dis que pour carrer cette base, ou toute autre semblable, on doit prendre un de ses diamètres quel qu'il soit, AB ou CD indifféremment puisqu'ils sont égaux, c'est-à-dire 7. Ce 7 doit être multiplié par lui-même ce qui fera 49 et, de ce nombre, on prendra les 11/14 qui sont 38 1/2. Je dis que ces 38 1/2 se multiplient par la hauteur ou longueur de la colonne, c'est-à-dire par BD ou AC que nous avons posée (égale à) 10. Cela fera 385 que nous dirons correspondre à la capacité ou volume corporel de toute la dite colonne. Je veux dire à ce propos, Noble Duc, que si ces nombres comportaient des bras, de quelque sorte qu'on voudra, la colonne contiendrait en elle 385 petits cubes, comme des dés, ayant en tous sens un bras, c'est-à-dire longs d'un bras, larges d'un bras et hauts d'un bras ainsi que la figure ci-contre le présente. De même, si les dits nombres comportaient des pieds il y en aurait autant que nous avons dit trouver de bras, et il en irait de même pour des pas, des palmes et ainsi de suite. Si donc l'on décomposait la dite colonne en cubes on en ferait 385. Et ceci suffit à notre présent propos.



Toutefois pour la quadrature et la mesure des dites bases circulaires existent beaucoup d'autres moyens qui tous reviennent au même et que nous avons donnés, en ordre, dans notre œuvre citée. La raison pour laquelle on prend 11/14 c'est-à-dire 11 des 14 parties de la multiplication du diamètre par lui-même dans tout cercle, vient de ce qu'Archimède a trouvé avec grande approximation, que le cercle comparé au carré de son diamètre est dans le rapport de 11 à 14. C'est-à-dire que si le carré du diamètre était 14, le cercle ferait 11, bien que personne encore ne le sache avec précision. Mais peu s'en faut. Comme il apparaît à l'œil dans la figure ci-contre, le cercle est inférieur au carré de la surface des angles du dit carré que le cercle n'occupe pas. Lesquels angles de tout le carré font les 3/14 c'est-à-dire 3 des 14 parties. Et les 11 sont comprises dans l'espace circulaire comme on le voit dans le carré A,B,C,D, dont les côtés sont égaux au diamètre du cercle, c'est-à-dire à la ligne EF, laquelle le divise par le milieu, passant par le point G dit centre du cercle, comme, au début de son Ier (livre), le déclare notre philosophe. Et ceci (au sujet) des colonnes rondes.



QUESTIONS SUR LE TEXTE DE PACIOLI

1°) Quel est le terme moderne remplaçant celui de "colonnes rondes" utilisé par Pacioli?

2°) Que veut dire Pacioli lorsqu'il parle
.De "mesurer" une colonne ronde ?
.De "mesurer" une base ?

3°) Que signifie la locution "réduire un cercle au carré"? La méthode d'Archimède donne-t-elle le résultat exact ?

4°) Ecris le calcul conduisant, dans l'exemple proposé par Pacioli, au résultat $38\frac{1}{2}$.
Quelle grandeur ce nombre mesure-t-il?

5°) Dans la suite du texte, comment se fait-il qu'on rencontre les mots "bras", "pieds", "pas", "palmes" ?
Dans un dictionnaire ou une encyclopédie, essaie de trouver les valeurs (en centimètres), d'un bras, d'un pied, d'un pas, d'une palme.

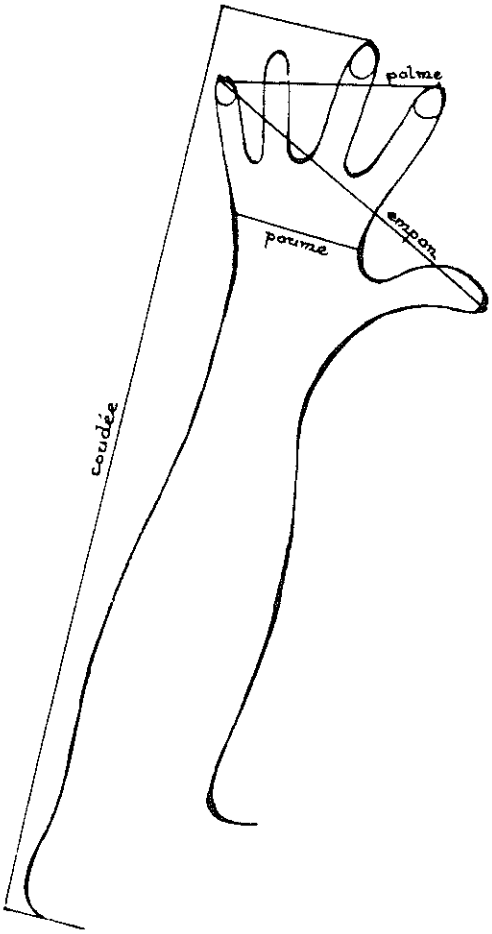
6°) En somme, d'après Pacioli, par quelle formule doit-on calculer le volume d'un cylindre de diamètre **d** de hauteur **h**?

La formule moderne est $V = \pi \times R^2 \times h$

Compare avec la formule de Pacioli.

<u>Question subsidiaire</u>

Le "philosophe" cité par Pacioli à la dernière ligne est le célèbre Euclide.
Connais-tu la raison de la célébrité d'Euclide ?
Penses-tu qu' Archimède ait pu connaitre Euclide ?



LA MAIN, LES MESURES, LE PENTAGONE

Pacioli cite certaines unités de longueur :

le bras, (ou encore coudée),
le pied,
la palme.

Ces unités, employées longtemps en Europe, (jusqu'a la définition du système métrique), ont quelque peu varié suivant les lieux et les époques .

Ainsi les compagnons bâtisseurs des cathédrales avaient défini un ensemble de cinq mesures, appelé "la Quine" :

unité cm	Equivalence	Valeurs en cm
ligne	diamètre d'un grain d'orge	0,2247
paume	34 lignes	7,64
palme	55 lignes	12,36
empan	89 lignes	20
pied	144 lignes	32,36
coudée	233 lignes	52,36

1°) A quelle échelle quatre de ces unités sont-elles représentées sur le dessin de la main ?

2°) A la même échelle, représente le pied.

3°) Ajoute : paume + palme = palme + empan =
empan + pied =

Que peut-on remarquer?

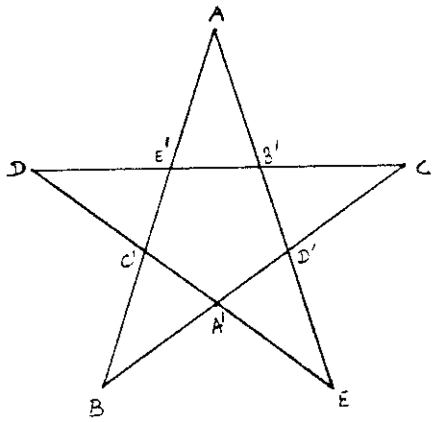
4°)Divise :

$\frac{\text{coudée}}{\text{pied}} =$ $\frac{\text{pied}}{\text{empan}} =$ $\frac{\text{empan}}{\text{palme}} =$ $\frac{\text{palme}}{\text{paume}} =$

En fait, ce résultat constant, 1,618 , est une valeur approchée d'un nombre, (célèbre autant que π), appelé le **NOMBRE D'OR**, qu'on rencontre dans de nombreuses figures géométriques planes ou de l'espace.

Ce nombre, qui fascinait depuis toujours les mathématiciens, fut même à l'époque de Pacioli, baptisée la **DIVINE PROPORTION** ce qui explique le titre de son livre, en grande partie consacré à l'étude de ce nombre et des figures géométriques où on le rencontre.

Voici justement une figure célèbre : LE PENTAGONE REGULIER <u>ETOILE</u> .



Vérifie que l'étoile ABCDE a bien cinq branches de même longueur.

Colorie la figure centrale A'D'B'E'C' ; celle-ci est

un PENTAGONE REGULIER <u>CONVEXE</u>

Fais apparaître (en pointillé) le polygone ADBEC ; lui aussi est un pentagone régulier convexe.

Mesure les côtés C_1 du pentagone étoilé ABCDE ,

C_2 du pentagone convexe ADBEC .

Vérifie que $\frac{C_1}{C_2} \cong 1,618$ (eh oui, encore le nombre d'or !)

A l'aide du rapporteur, vérifie que, dans le triangle isocèle ABE, les angles à la base sont doubles de l'angle au sommet.

Que représente la demi-droite [BC) pour l'angle ABE ?

Pour finir ....

En utilisant les instruments de ton choix, (compas, rapporteur ...), construis toi-même un pentagone régulier étoilé, agrandissement de celui dessiné ci-dessus . Explique ta méthode.

Fais apparaitre avec des couleurs différentes :

Le pentagone étoilé ABCDE , de côté C_1

Le pentagone convexe ADBEC , de côté C_2

Le pentagone étoilé A'B'C'D'E' , de côté C_3

Le pentagone convexe A'D'B'E'C' , de côté C_4.

Calcule $\frac{C_1}{C_2}, \frac{C_2}{C_3}, \frac{C_3}{C_4}$. Que remarques-tu?

LE OPERE

DI

GALILEO GALILEI

PRIMA EDIZIONE COMPLETA

CONDOTTA SUGLI AUTENTICI MANOSCRITTI PALATINI

E DEDICATA

A S. A. I. E R. LEOPOLDO II

GRANDUCA DI TOSCANA

Tomo XIV

FIRENZE

SOCIETÀ EDITRICE FIORENTINA

1855

GALILEE et PASCAL

Deux textes pour introduire l'analyse combinatoire.

GALILEE : *Le Opere de Galileo Galilei* Niveau
Florence 1855 vol. XIV traduction sous réserve 1^e-Term.
PASCAL : *Traité du triangle arithmétique*
Oeuvres complètes Ed. la Pléiade.

DEUX TEXTES POUR INTRODUIRE L'ANALYSE COMBINATOIRE . *

Les deux textes qui suivent ont été abordés en classe de lére A_1 sans cours préalable, donc sans qu'aucune formule n'ait été mise en place auparavant.

Galilée, dans le premier, expose avec une clarté inégalable, comment dénombrer, dans le lancer de trois dés, les sorties des différentes figures. La version traduite ici est extraite de la 2e édition de *Le Opere de Galileo Galilei* parue à Florence en 1855, une première édition datant de 1718.

La lecture du texte de Galilée faite en classe, sans préparation, a suscité dès le premier paragraphe des réactions immédiates : la proposition soutenue est évidente (le 10 et le 11 sortent plus souvent que le 9 et le 12) et la raison sans mystère (le 9 peut-être obtenu avec un brelan et le 10, non!). Des justifications plus précises sont tentées par les élèves (on s'était interdit de lire trop vite la suite ...) sans le succès attendu ! Après ... la démonstration de Galilée, assortie du tableau complet des figures du jeu , se suffit à elle-même mais lève, en fin de séance , un foisonnement de nouvelles questions et parallèlement une nécessité de redéfinition des termes employés. L'ensemble de ces questions rédigées et classées, est proposé en annexe. Toutes les réponses s'obtiennent par dénombrement direct en utilisant le tableau de Galilée.

*Ce chapître est un compte-rendu d'expérience et présente donc une structure différente des autres chapîtres de la brochure.

extrait de *Le Opere de Galileo Galilei* Firenze, 1855, vol.XIV,p. 293-316
(texte original, Mss. Palatini, Par.VI, Tome 3)

Que dans le jeu de dés certains points soient plus avantageux que d'autres, on en a une explication très évidente, qui consiste dans le fait que ceux là peuvent sortir plus facilement et plus souvent que ceux-ci, ce qui dépend de leur capacité à se former avec plusieurs sortes de chiffres : c'est pourquoi le 3 et 18, qui sont des points que l'on ne peut obtenir que d'une seule manière avec trois chiffres (c'est à dire l'un avec 6-6-6 et l'autre avec 1-1-1, et pas autrement) sont plus difficiles à faire apparaître que par exemple le 6 ou le 7 qui se composent de plusieurs manières (c'est à dire le 6, avec 1-2-3 et 2-2-2 et 1-1-4, et le 7 avec 1-1-5, 1-2-4, 1-3-3, 2-2-3). Cependant, bien que le 9 et le 12 se composent en autant de façon que le 10 et le 11, si bien qu'ils devraient être considérés comme ayant la même fréquence, on voit néanmoins que la longue observation a fait que les joueurs estiment plus avantageux le 10 et le 11 plutôt que le 9 et le 12.

Et que le 9 et le 10 se forment (et ce que l'on dit de ceux-ci s'entend pour leurs symétriques le 12 et le 11) se forment, dis-je, avec la même diversité de chiffres, est évident ; en effet le 9 se compose en 1-2-6, 1-3-5, 1-4-4, 2-2-5, 2-3-4, 3-3-3, qui sont six triplets, et le 10 en 1-3-6, 1-4-5, 2-2-6, 2-3-5, 2-4-4, 3-3-4, et non d'autres façons ce qui fait aussi six combinaisons. Maintenant, pour servir celui qui m'a demandé de produire ce qui me vient à l'esprit sur un tel problème, je vais exposer ma pensée, dans l'espoir, non seulement de lever ce doute, mais d'ouvrir la voie qui permette de découvrir très exactement les raisons pour lesquelles toutes les particularités du jeu ont été réparties et arrangées avec perspicacité et jugement. Et, pour me mener au but avec la plus grande clarté possible, je commence par considérer qu'étant donné un dé à six faces , il peut après avoir été jeté, tomber indifféremment sur chacune d'entre elles ; il y a donc six sorties et pas plus, chacune différente de l'autre . Mais , si avec le premier , nous jetons le second dé, qui a donc six autres faces, nous pourrons faire 36 sorties, toutes différentes, puisque chaque face du premier dé peut s'accoupler avec chacune du second, et par conséquent faire six sorties différentes, il est alors évident que le nombre de telles combinaisons est 6 fois 6, soit 36. Et si nous ajoutons le troisième dé, puisque chacune des faces , qui sont aussi au nombre de six , peut s'accoupler avec chacune des 36 sorties des deux autres dés , nous aurons que les sorties des trois dés sont au nombre de six fois 36, soit 216, toutes différentes. Mais puisque les sommes des tirages des trois dés ne sont qu'au nombre de 16, c'est à dire 3, 4, 5 jusqu'à 18, entre lesquelles on a à répartir les dites 216 sorties, il est nécessaire que pour quelques-unes de ces sommes on ait beaucoup de sorties et, si nous trouvons combien on en a pour chacune, nous aurons ouvert la voie pour découvrir tout ce que nous cherchons , et il suffira de faire une telle recherche du 1 au 10, puisque ce qui conviendra à l'un de ces nombres conviendra encore à son symétrique.

On doit noter trois particularités pour la bonne compréhension de ce qui reste : la première est que la somme des trois dés dont la composition vient de trois chiffres égaux, ne peut-être obtenue que par une seule sortie, ou tirage de dés, et ainsi le 3 ne peut-être obtenu que par les trois faces de l'as , et le 6 , si on devait le composer avec trois 2, ne s'obtiendrait que par une seule sortie. Deuxièmement : la somme qui se composent de trois chiffres dont deux sont égaux, et le troisième différent, peut s'obtenir par trois sorties, ainsi par exemple le 4 qui vient de 2 et de deux as peut se faire avec trois lancers différents, c'est à dire quand le premier dé découvre le 2, le deuxième et le troisième découvrant l'as, ou bien quand le deuxième découvre le 2 et les premier et troisième l'as, ou bien le troisième découvrant le 2 et les premier et deuxième l'as. Et ainsi par exemple le 8, quand il résulte de 3-3-2, peut se produire pareillement de trois façons : c'est à dire le premier dé découvrant 2 et chacun des deux autres 3, ou le deuxième dé découvrant 2, et les premier et troisième 3, ou finalement le troisième dé découvrant 2, et les premier et deuxième 3. Troisièmement : le nombre de points qui provient de trois chiffres différents peut s'obtenir de six manières ; comme par exemple le 8, lorsqu'il se décompose en 1-3-4, peut s'obtenir par six sorties différentes : la première quand le premier dé fait 1, le deuxième 3 et le troisième 4 ; la deuxième quand le premier dé fait 1 mais le deuxième 4 et le troisième 3, la troisième quand le deuxième dé fait 1 et le premier 3 et le troisième 4 ; la quatrième, quand le deuxième dé fait 1, le premier 4 et le troisième 3; la cinquième, quand le troisième dé fait1, le premier 3 et le deuxième 4 ; la sixième quand en plus du 1 du troisième dé, le premier fera 4 et le deuxième 3. Nous avons donc jusqu'ici déclaré ces trois principes : primo, que les triplets , c'est à dire le nombre des sorties des trois dés, qui se composent de trois chiffres égaux, ne sont produits que d'une seule manière ; secondo, que les triplets qui proviennent de deux nombres égaux et du troisième différent, se produisent de trois façons ; que ceux qui proviennent de trois nombres tous différents , se forment de six manières. De ces principes nous déduirons facilement en combien de façons ou disons, en combien de sorties différentes on peut composer toutes les sommes de trois dés, ce qui se comprend facilement par la table suivante :

1
3
6
10
15
21
25
27

108
108

216

10		9		8		7		6		5		4		3	
6-3-1	6	6-2-1	6	6-1-1	3	5-1-1	3	4-1-1	3	3-1-1	3	2-1-1	3	1-1-1	1
6-2-2	3	5-3-1	6	5-2-1	6	4-2-1	6	3-2-1	6	2-2-1	3				
5-4-1	6	5-2-2	3	4-3-1	6	3-3-1	3	2-2-2	1						
5-3-2	6	4-4-1	3	4-2-2	3	3-2-2	3								
4-4-2	3	4-3-2	6	3-3-2	3										
4-3-3	3	3-3-3	1												
	27		25		21		15		10		6		3		1

On a noté en haut les points des tirages en décroissant de 10 à 3, et , au-dessous les triplets différents par lesquels chacun peut-être obtenu ; à côté de ceux-ci, on a indiqué les nombres suivant lesquels chaque triplet peut se diversifier ; en bas de ceux-ci finalement on fait la somme de toutes ces possibilités à fournir ces tirages : comme par exemple, dans la première colonne, nous avons la somme 10, et en-dessous six triplets de chiffres avec lesquels on peut l'obtenir : ce sont 6-3-1, 6-2-2, 5-4-1, 5-3-2, 4-4-2, 4-3-3. Et puisque le premier triplet est formé de trois chiffres différents, il peut (comme on l'a dit plus haut) être fait par six sorties des différents dés; donc à coté de ce triplet 6-3-1 on note 6, le deuxième qui est 6-2-2, composé de deux chiffes égaux et d'un autre différent , ne peut s'obtenir que par trois sorties différentes, on note donc à côté 3 ; le troisième triplet 5-4-1 formé de trois chiffres différents, peut se faire par six sorties, alors on note le nombre 6, et ainsi de suite, et finalement en bas de la colonne des nombres de sorties on fait la somme de toutes : alors on voit que la somme 10 peut se faire par 27 sorties de dés différentes, mais la somme 9 par 25 seulement, le 8 par 21, le 7 par 15, le 6 par 10, le 5 par 6, le 4 par 3 et finalement le le 3 par 1: tous ces nombres ajoutés ensemble atteignent 108. Et les sorties des symétriques, c'est à dire les sommes 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 étant aussi nombreuses, on trouve la somme de toutes les sorties possibles avec les faces des trois dés, qui est 216. Et à partir de cette table, toute personne qui s'entend au jeu pourra mesurer très exactement tous les avantages, pour minimes qu'ils soient, des parties de dés, des tournois et de toute autre règle particulière que l'on observe dans le jeu.

(traduction littérale sous réserve de M.Louis)

ANNEXE

Dans le lancer de trois dés non truqués, on appelle "sortie" tout triplet constitué de trois éléments, distincts ou non, pris dans l'ensemble (1, 2, 3, 4, 5, 6).
Nombre de sorties possibles dans le lancer de trois dés ?

On appelle "Brelan" la figure obtenue quand les trois dés présentent le même point.
Nombre de brelans possibles dans le lancer de 3 dés ?
Quelle est la probabilité d'obtenir un brelan dans le lancer de 3 dés?

On appelle "paire" la figure obtenue quand deux des trois dés présentent le même point, le troisième dé présentant un point différent.
Combien de paires distinctes peut-on obtenir dans le lancer de trois dés ?
Combien de sorties des faces des 3 dés présentent-elles une paire ?
Quelle est la probabilité d'obtenir une paire d'as ?
Quelle est la probabilité d'obtenir une paire dans le lancer de 3 dés?

Combien de figures distinctes à points différents (1-2-3 ou 4-2-1 étant deux telles figures) peut-on obtenir dans le lancer de trois dés?
Nombre de sorties de figures à points différents?
Quelle est la probabilité de sortir le 421 dans le lancer de trois dés?
Quelle est la probabilité de sortir une "tierce" (c'est à dire une figure à trois points consécutifs) dans le lancer de trois dés?

Quelle est la probabilité d'obtenir, dans le lancer de 3 dés, une somme des points inférieure ou égale à 6?

Quelle est la probabilité d'obtenir, dans la même épreuve, une somme de points au moins égale à 13?

Le *Traité du triangle arithmétique* de Pascal, a été imprimé en 1654 mais publié et diffusé après la mort de l'auteur.

La première partie du Traité, qui concerne les Définitions est très rébarbative sinon inabordable pour le lecteur-élève moyen, aussi courageux soit-il, mais la construction du triangle arithmétique - dont on a des traces d'utilisation dès le IIe siécle (1) - est simple et souvent connue. On peut donc travailler sur le schéma du texte original (document n°1).

Pascal démontre ensuite 19 propriétés du triangle arithmétique, conséquence de la construction. Les premières d'entre elles, mises en évidence "géométriquement" par coloriage dans le triangle arithmétique, ont une image très explicite et leur justification est immédiate ; on peut en faire une présentation sommaire au rétroprojecteur (2). Voir particulièrement la conséquence seconde selon laquelle : la somme des nombres successifs d'une ligne du triangle est inscrite dans la case située juste en dessous de la dernière case de la ligne considérée. Cette propriété sera utilisée par Pascal dans le second objet de ce travail : "Usage du triangle arithmètique pour les combinaisons" (document °2).

L'étude de ce texte nécessite un découpage méthodique afin de conduire les élèves dans la lecture en évitant, par exemple, le blocage sur les énoncés des propositions. Entre autres intérêts, on y trouvera une des premières définitons d'une combinaison, le principe du raisonnement par récurrence que Pascal met en place avec beaucoup de précision dans la proposition I comme il l'avait déjà appliqué pour démontrer la conséquence douzième de la construction du triangle arithmétique (document n°1) et aussi, et surtout, le calcul des C_n^p aussi loin que l'on veut ... jusqu'à ce que la nécessité de formules efficaces s'impose.

(1) un bref historique du triangle arithmétique est donné dans *Pascal* Le Nouvel Archimède n°101.

(2) pour une exploration plus détaillée cf. *Cet effrayant génie... l'oeuvre scientifique de Pascal*. Pierre HUMBERT Paris 1947

TRAITÉ
DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE

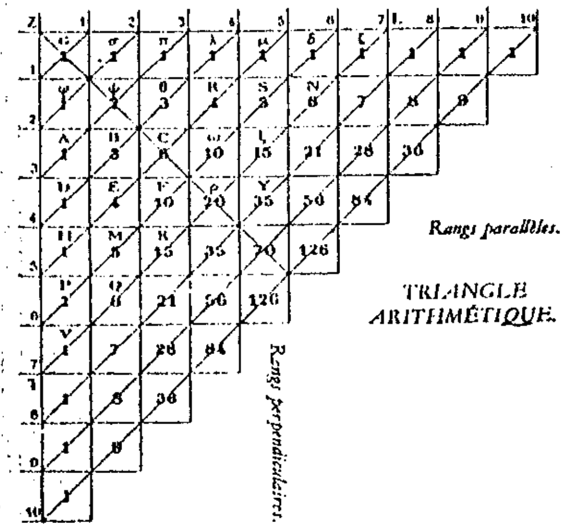
DÉFINITIONS

J'appelle *Triangle arithmétique*, une figure dont la construction est telle.

Je mène d'un point quelconque, G, deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre, GV, Gζ, dans chacune desquelles je prends tant que je veux de parties égales et continues, à commencer par G, que je nomme 1, 2, 3, 4, etc.; et ces nombres sont *les exposants* des divisions des lignes.

Ensuite je joins les points de la première division qui sont dans chacune des deux lignes par une autre ligne qui forme un triangle dont elle est *la base*.

Je joins ainsi les deux points de la seconde division par une autre ligne, qui forme un second triangle dont elle est *la base*.



Et joignant ainsi tous les points de division qui ont un même exposant, j'en forme autant *de triangles et de bases*.

Je mène, par chacun des points de division, des lignes parallèles aux côtés, qui par leurs intersections forment de petits carrés, que j'appelle *cellules*.

Et les cellules qui sont entre deux parallèles qui vont de gauche à droite s'appellent *cellules d'un même rang parallèle*, comme les cellules G, σ, π, etc., ou φ, ψ, θ, etc.

Et celles qui sont entre deux lignes qui vont de haut en bas s'appellent *cellules d'un même rang perpendiculaire*, comme les cellules G, φ, A, D, etc., et celles-ci, σ, ψ, B, etc.

Et celles qu'une même base traverse diagonalement sont dites *cellules d'une même base*, comme celles qui suivent, D, B, θ, λ, et celles-ci, A, ψ, π.

Les cellules d'une même base également distantes de ses extrémités sont dites *réciproques*, comme celles-ci, E, R et B, θ, parce que l'exposant du rang parallèle de l'une est le même que l'exposant du rang perpendiculaire de l'autre, comme il paraît en cet exemple, où E est dans le second rang perpendiculaire et dans le quatrième parallèle, et sa réciproque R est dans le second rang parallèle, et dans le quatrième perpendiculaire réciproquement; et il est bien facile de démontrer que celles qui ont leurs exposants réciproquement pareils sont dans une même base et également distantes de ses extrémités.

Il est aussi bien facile de démontrer que l'exposant du rang perpendiculaire de quelque cellule que ce soit, joint à l'exposant de son rang parallèle, surpasse de l'unité l'exposant de sa base.

Par exemple, la cellule F est dans le troisième rang perpendiculaire, et dans le quatrième parallèle, et dans la sixième base, et ces deux exposants des rangs 3 + 4 surpassent de l'unité l'exposant de la base 6, ce qui vient de ce que les deux côtés du triangle sont divisés en un pareil nombre de parties; mais cela est plutôt compris que démontré.

Cette remarque est de même nature, que chaque base contient une cellule de plus que la précédente, et chacune autant que son exposant d'unités; ainsi la seconde φσ a deux cellules, la troisième Aψπ en a trois, etc.

Or, les nombres qui se mettent dans chaque cellule se trouvent par cette méthode :

Le nombre de la première cellule qui est à l'angle droit est arbitraire; mais celui-là étant placé, tous les autres sont forcés; et pour cette raison il s'appelle le *générateur* du triangle. Et chacun des autres est spécifié par cette seule règle :

Le nombre de chaque cellule est égal à celui de la cellule qui la précède dans son rang perpendiculaire, plus à celui de la cellule qui la précède dans son rang parallèle. Ainsi la cellule F, c'est-à-dire le nombre de la cellule F, égale la cellule C, plus la cellule E, et ainsi des autres.

D'où se tirent plusieurs conséquences. En voici les principales, où je considère les triangles dont le générateur est l'unité; mais ce qui s'en dira conviendra à tous les autres.

(p 97 à 99)

CONSÉQUENCE DOUZIÈME

En tout Triangle arithmétique, deux cellules contiguës étant dans une même base, la supérieure est à l'inférieure comme la multitude des cellules depuis la supérieure jusqu'en haut de la base à la multitude de celles depuis l'inférieure jusqu'en bas inclusivement.

Soient deux cellules contiguës[1] quelconques d'une même base, E, C : je dis que :

E	est à	C	comme	2	à	3
inférieure,		*supérieure,*		*parce qu'il y a deux cellules depuis E jusqu'en bas ; savoir,* E, H ;		*parce qu'il y a trois cellules depuis C jusqu'en haut ; savoir,* C, R, μ.

Quoique cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant 2 lemmes.

Le 1, qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base; car il est bien visible que φ est à σ comme 1 à 1.

Le 2, que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.

D'où il se voit qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car elle est dans la seconde base par le premier lemme; donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, et à l'infini.

Il faut donc seulement démontrer le second lemme, en cette sorte. Si cette proportion se rencontre en une base quelconque, comme en la quatrième Dλ, c'est-à-dire si D est à B comme 1 à 3, et B à θ comme 2 à 2, et θ à λ comme 3 à 1, etc.; je dis que la même proportion se trouvera dans la base suivante, Hμ, et que, par exemple, E est à C comme 2 à 3.

Car D est à B comme 1 à 3, par l'hypothèse.

Donc $\underbrace{D + B}$ est à B comme $\underbrace{1 + 3}$ à 3.

$\quad$ E $\quad$ à B comme $\quad$ 4 $\quad$ à 3.

De même B est à θ comme 2 à 2, par l'hypothèse.

Donc $\underbrace{B + \theta}$ à B, comme $\underbrace{2 + 2}$ à 2.

$\quad$ C $\quad$ à B, comme $\quad$ 4 $\quad$ à 2.

Mais $\quad$ B $\quad$ à E, comme $\quad$ 3 $\quad$ à 4.

Donc, par la proportion troublée, C est à E comme 3 à 2.

C. q. f. d.

On le montrera de même dans tout le reste, puisque cette preuve n'est fondée que sur ce que cette proportion se trouve dans la base précédente, et que chaque cellule est égale à sa précédente, plus à sa supérieure, ce qui est vrai partout.

(p. 103)

"Oeuvres Complètes de Pascal"
Edition La Pleiade.

Document 1

Usage du Triangle arithmétique pour les combinaisons
(document n°2)

1. Lecture de la 1ère partie du texte jusqu'aux lemmes exclus.

Définition d'une combinaison selon Pascal : il s'agit de dégager un énoncé, quelque peu général et utilisable pour la suite (travail oral et collectif).

Problème auxiliaire

Remplir les cases vides...

1	dans	5	se combine	☐	fois
2	"	5	"	☐	"
3	"	5	"	☐	"
4	"	5	"	☐	"
5	"	5	"	☐	"

2. Notations conventionnelles modernes

n et p désignant des entiers naturels non nuls et $p \leq n$ on note C_n^p ou $\binom{n}{p}$ le nombre total des combinaisons de n objets distincts pris p à p, ce que Pascal nomme : la multitude des combinaisons de p dans n.

Evaluer C_4^1 ; C_4^2 ; C_5^3 ; C_4^4 ; C_6^2

3. Le lemme IV et sa démonstration

Isoler dans le texte, après une première lecture, la démonstration donnée par Pascal sur l'exemple générique.

DEVOIR

1°) Reprendre la même démonstration sur l'un des deux autres exemples numériques proposés par Pascal dans cette partie du texte (LEMME IV).

2°) Formuler, en notations modernes, le lemme IV énoncé par Pascal

3°) Tenter la démonstration du cas général en s'inspirant de la méthode de Pascal.

4. Les propositions I, II, et III.

Préparation

→ Lire le texte et tenter de comprendre la démonstration de la proposition I, on pourra notamment : traduire "avec les nombres" et en u n de la proposition I.

→ Quel type de raisonnement Pascal utilise-t-il pour démontrer la proposition I?

Souligner, dans le texte, les phrases qui justifient la réponse.

→ Déterminer, à l'aide du triangle arithmétique, les nombres suivants : C_6^4 ; C_7^2 ; C_7^5 ; C_8^3 ; C_8^5 ; C_8^2 ; C_9^4 ; C_{10}^3 ; C_{11}^4 ; C_{12}^5

On peut obtenir à l'aide des phrases du texte un raccourci du raisonnement par récurrence, à savoir :

... s'il se trouve un triangle aritmétique dans lequel cette propriété se rencontre............

... je dis que le triangle suivant aura la même propriété............................

... d'où il suit que tous les triangles arithmétiques ont cette égalité.......

La troisième partie de la préparation exige une bonne compréhension des énoncés des propositions I et II .

Prop. I $\quad C_n^p$ = somme des nombres de la $p^{ième}$ ligne du $n^{ième}$ triangle

Prop. II $\quad C_n^p$ = nombre qui se trouve à la $(p+1)^{ième}$ ligne dans la base du $(n+1)^{ième}$ triangle

et permet d'appliquer les deux méthodes proposées par Pascal (proposition III) pour le calcul de C_n^p en prolongeant, aussi loin

(mais avec le minimum de calculs) qu'il en est besoin, la construction du triangle arithmétique.

II

USAGE DU TRIANGLE ARITHMÉTIQUE

POUR LES COMBINAISONS

Le mot de *Combinaison* a été pris en plusieurs sens différents, de sorte que, pour ôter l'équivoque, je suis obligé de dire comment je l'entends.

Lorsque de plusieurs choses on donne le choix d'un certain nombre, toutes les manières d'en prendre autant qu'il est permis entre toutes qui sont présentées, s'appellent ici les *différentes combinaisons*.

Par exemple, si de quatre choses exprimées par ces quatre lettres, A, B, C, D, on permet d'en prendre, par exemple, deux quelconques, toutes les manières d'en prendre deux différentes dans les quatre qui sont proposées, s'appellent *Combinaisons*.

Ainsi on trouvera, par expérience, qu'il y a six manières différentes d'en choisir deux dans quatre; car on peut prendre A et B, A et C ou A et D, ou B et C, ou B et D, ou C et D.

Je ne compte pas A et A pour une des manières d'en prendre deux; car ce ne sont pas des choses différentes, ce n'en est qu'une répétée.

Ainsi je ne compte pas A et B et puis B et A pour deux manières différentes; car on ne prend en l'une et en l'autre manière que les deux mêmes choses, mais d'un ordre différent seulement; et je ne prends point garde à l'ordre; de sorte que je pouvais m'expliquer en un mot à ceux qui ont accoutumé de considérer les combinaisons, en disant simplement que je parle seulement des combinaisons qui se font sans changer l'ordre.

On trouvera de même, par expérience, qu'il y a quatre manières de prendre trois choses dans quatre; car on peut prendre ABC, ou ABD, ou ACD, ou BCD.

Enfin on trouvera qu'on n'en peut prendre quatre dans quatre qu'en une manière, savoir, ABCD.

Je parlerai donc en ces termes :

1 dans 4 se combine 4 fois.
2 dans 4 se combine 6 fois.
3 dans 4 se combine 4 fois.
4 dans 4 se combine 1 fois.

Ou ainsi :

La multitude des combinaisons de 1 dans 4 est 4.
La multitude des combinaisons de 2 dans 4 est 6.
La multitude des combinaisons de 3 dans 4 est 4.
La multitude des combinaisons de 4 dans 4 est 1.

Mais la somme de toutes les combinaisons en général qu'on peut faire dans 4 est 15, parce que la multitude des combinaisons de 1 dans 4, de 2 dans 4, de 3 dans 4, de 4 dans 4, étant jointes ensemble, font 15.

Ensuite de cette explication, je donnerai ces conséquences en formes de lemmes.

LEMME I

Un nombre ne se combine point dans un plus petit ; par exemple, 4 ne se combine point dans 2.

LEMME II

1 dans 1 se combine 1 fois.
2 dans 2 se combine 1 fois.
3 dans 3 se combine 1 fois.

Et généralement un nombre quelconque se combine une fois seulement dans son égal.

LEMME III

1 dans 1 se combine 1 fois.
1 dans 2 se combine 2 fois.
1 dans 3 se combine 3 fois.

Et généralement l'unité se combine dans quelque nombre que ce soit autant de fois qu'il contient d'unités.

LEMME IV

S'il y a quatre nombres quelconques, le premier tel qu'on voudra, le second plus grand de l'unité, le troisième tel qu'on voudra, pourvu qu'il ne soit pas moindre que le second, le quatrième plus grand de l'unité que le troisième : la multitude des combinaisons du premier dans le troisième, jointe à la multitude des combinaisons du second dans le troisième, égale la multitude des combinaisons du second dans le quatrième.

Soient quatre nombres tels que j'ai dit :

Le premier tel qu'on voudra, par exemple, 1.
Le second plus grand de l'unité, savoir, 2.
Le troisième tel qu'on voudra, pourvu qu'il ne soit pas moindre que le second, par exemple, 3.
Le quatrième plus grand de l'unité, savoir, 4.

Je dis que la multitude des combinaisons de 1 dans 3, plus la multitude des combinaisons de 2 dans 3, égale la multitude des combinaisons de 2 dans 4.

Soient trois lettres quelconques, B, C, D.

Soient les mêmes trois lettres, et une de plus A, B, C, D.

Prenons, suivant la proposition, toutes les combinaisons d'une lettre dans les trois, B, C, D. Il y en aura 3, savoir, B, C, D.

Prenons dans les mêmes trois lettres toutes les combinaisons de deux; il y en aura 3, savoir, BC, BD, CD.

Prenons enfin dans les quatre lettres A, B, C, D, toutes les combinaisons de 2; il y en aura 6, savoir AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Il faut démontrer que la multitude des combinaisons de 1 dans 3 et celles de 2 dans 3, égalent celles de 2 dans 4.

Cela est aisé, car les combinaisons de 2 dans 4 sont formées par les combinaisons de 1 dans 3, et par celles de 2 dans 3.

Pour le faire voir, il faut remarquer qu'entre les combinaisons de 2 dans 4, savoir, AB, AC, AD, BC, BD, CD, il y en a où la lettre A est employée, et d'autres où elle ne l'est pas.

Celles où elle n'est pas employée sont BC, BD, CD, qui par conséquent sont formées de deux de ces trois lettres B, C, D; donc ce sont des combinaisons de 2 dans ces trois, B, C, D. Donc les combinaisons de 2 dans ces trois lettres, B, C, D, font portion des combinaisons de 2 dans ces quatre lettres, A, B, C, D, puisqu'elles forment celles où A n'est pas employée.

Maintenant si des combinaisons de 2 dans 4 où A est employée, savoir AB, AC, AD, on ôte l'A, il restera une lettre seulement de ces trois, B, C, D, savoir B, C, D, qui sont précisément les combinaisons d'une lettre dans les trois, B, C, D. Donc si aux combinaisons d'une lettre dans les trois, B, C, D, on ajoute à chacune la lettre A, et qu'ainsi on ait AB, AC, AD, on formera les combinaisons de 2 dans 4, où A est employée; donc les combinaisons de 1 dans 3 font portion des combinaisons de 2 dans 4.

D'où il se voit que les combinaisons de 2 dans 4 sont formées par les combinaisons de 2 dans 3, et de 1 dans 3; et partant que la multitude des combinaisons de 2 dans 4 égale celle de 2 dans 3, et de 1 dans 3.

On montrera la même chose dans tous les autres exemples, comme :

La multitude des combinaisons de 29 dans 40;
Et la multitude des combinaisons de 30 dans 40 :
Égale la multitude des combinaisons de 30 dans 41.
Ainsi la multitude des combinaisons de 15 dans 55;
Et la multitude des combinaisons de 16 dans 55 :
Égale la multitude des combinaisons de 16 dans 56.
Et ainsi à l'infini. C. q. f. d.

PROPOSITION I

En tout Triangle arithmétique, la somme des cellules d'un rang parallèle quelconque égale la multitude des combinaisons de l'exposant du rang dans l'exposant du Triangle.

Soit un triangle quelconque, par exemple le quatrième GDλ. Je dis que la somme des cellules d'un rang parallèle quelconque, par exemple du second, $\varphi+\psi+\theta$, égale la somme des combinaisons de ce nombre 2, qui est l'exposant de ce second rang, dans ce nombre 4, qui est l'exposant de ce triangle :

Ainsi la somme des cellules du 5^{e} rang du 8^{e} triangle égale la somme des combinaisons de 5 dans 8, etc.

La démonstration en sera courte, quoiqu'il y ait une infinité de cas, par le moyen de ces deux lemmes.

Le 1^{er}, qui est évident de lui-même, que dans le premier triangle cette égalité se trouve, puisque la somme des cellules de son unique rang, savoir G, ou l'unité, égale la somme des combinaisons de 1, exposant du rang, dans 1, exposant du triangle.

Le 2^{e}, que, s'il se trouve un Triangle arithmétique dans lequel cette proportion se rencontre, c'est-à-dire dans lequel, quelque rang que l'on prenne, il arrive que la somme des cellules soit égale à la multitude des combinaisons de l'exposant du rang dans l'exposant du triangle : je dis que le triangle suivant aura la même propriété.

D'où il s'ensuit que tous les Triangles arithmétiques ont cette égalité, car elle se trouve dans le premier triangle par le premier lemme, et même elle est encore évidente dans le second; donc par le second lemme, le suivant l'aura de même, et partant le suivant encore; et ainsi à l'infini.

Il faut donc seulement démontrer le second lemme.

Soit un triangle quelconque, par exemple le troisième, dans lequel on suppose que cette égalité se trouve, c'est-à-dire que la somme des cellules du premier rang $G+\sigma+\pi$ égale la multitude

des combinaisons de 1 dans 3, et que la somme des cellules du deuxième rang $\varphi+\psi$ égale les combinaisons de 2 dans 3; et que la somme des cellules du troisième rang A égale les combinaisons de 3 dans 3; je dis que le quatrième triangle aura la même égalité, et que, par exemple, la somme des cellules du second rang $\varphi+\psi+\theta$ égale la multitude des combinaisons de 2 dans 4.

Car $\varphi+\psi+\theta$ égale	$\varphi+\psi$	+	θ
		+	$G+\sigma+\pi$
Par l'hypothèse	ou la multitude des combinaisons de 2 dans 3.	+	ou la multitude des combinaisons de 1 dans 3.
Par le 4^{e} lemme	Ou la multitude des combinaisons de 2 dans 4.		

On le montrera de même de tous les autres. C. q. f. d.

PROPOSITION II

Le nombre de quelque cellule que ce soit égale la multitude des combinaisons d'un nombre moindre de l'unité que l'exposant de son rang parallèle, dans un nombre moindre de l'unité que l'exposant de sa base.

Soit une cellule quelconque, F, dans le quatrième rang parallèle et dans la sixième base : je dis qu'elle égale la multitude des combinaisons de 3 dans 5, moindres de l'unité que 4 et 6, car elle égale les cellules A + B + C. Donc par la précédente, etc.

PROBLÈME I — PROPOSITION III

Étant proposés deux nombres, trouver combien de fois l'un se combine dans l'autre par le Triangle arithmétique.

Soient les nombres proposés 4, 6; il faut trouver combien 4 se combine dans 6.

Premier moyen.

Soit prise la somme des cellules du 4^{e} rang du 6^{e} triangle : elle satisfera à la question.

Second moyen.

Soit prise la 5^{e} cellule de la 7^{e} base, parce que ces nombres 5, 7 excèdent de l'unité les données 4, 6 : son nombre est celui qu'on demande.

CONCLUSION

Par le rapport qu'il y a des cellules et des rangs du Triangle arithmétique aux combinaisons, il est aisé de voir que tout ce qui a été prouvé des uns convient aux autres suivant leur manière. C'est ce que je montrerai en peu de discours dans un petit traité que j'ai fait des Combinaisons.

DEVOIR

Par convention on pose $\forall\ n \in \mathbb{N}\ C_n^0 = 1$.

→ Démontrer que, pour tout entier n et tout entier p au plus égal à n on a : $C_n^p = C_n^{n-p}$

Calculer les sommes suivantes :

$$C_2^0 + C_2^1 + C_2^2$$

$$C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3$$

Puis $\sum_{p=0}^{n} C_n^p$ pour $n = 5$; $n = 6$; $n = 7$; $n = 9$

Peut-on préjuger de la formule générale?

→ Démontrer, en utilisant un raisonnement par récurence sur n, que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{p=0}^{n} C_n^p = 2^n$$

→ Dénombrer les parties y compris la partie vide Φ , d 'un ensemble fini E composé de n éléments.

Ensuite...
On peut aborder les formules permettant le calcul direct de la multitude des permutations de n objets, des arrangements et des combinaisons, avec par exemple ...

De Montmort dans le traité des combinaisons de *l'Essay d'Analyse sur les jeux de Hasard* (Paris 1713) (document n°3)

Paule KNERR

PROPOSITION IV.

16. *TROUVER en combien de façons un nombre de choſes quelconque exprimé par les lettres* a, b, c, d, e, &c. *peut être arrangé differemment.*

Pour découvrir ces arrangemens differens, il faut obſerver que deux lettres *a* & *b* peuvent s'arranger en deux façons differentes *ab*, *ba*; que trois lettres *a*, *b*, *c* peuvent s'arranger de ſix façons differentes, c'eſt à dire, que trois lettres donnent trois fois plus d'arrangemens que deux lettres, ce qui ſe voit en mettant *c* dans *ab* & dans *ba* à toutes les places qu'il peut avoir, ſçavoir à la premiere, à à la ſeconde & à la troiſiéme : ces ſix arrangemens ſont :

abc	*bac*	*cab*
acb	*bca*	*cba*

On voit de même que quatre lettres *a*, *b*, *c*, *d* donnent quatre fois plus d'arrangemens poſſibles que les trois *a*, *b*, *c*; puiſque *d* peut occuper quatre places differentes dans chacun des ſix arrangemens précedens, comme il paroît par la Table ſuivante.

abcd	*bacd*	*cabd*	*dabc*
abdc	*badc*	*cadb*	*dacb*
acdb	*bcad*	*cbad*	*dbac*
acbd	*bcda*	*cbda*	*dbca*
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcab*
adcb	*bdca*	*cdba*	*dcba*

& que generalement ſi l'on nomme p le nombre des lettres qu'on veut arranger de toutes les manieres poſſibles, q, le nombre de tous les divers arrangemens d'un nombre de lettres exprimé par $p-1$; $pq = p.p-1.p-2.p-3.p-4$, &c. juſqu'à $p-p$, exprimera en combien de façons differentes on peut arranger des lettres dont le nombre ſoit exprimé par p; par exemple, ſi l'on veut ſçavoir en combien de façons ſix choſes peuvent être arrangées differemment, on trouvera $pq = 120 \times 6 = 1.2.3.4.5.6.$

(p21-22)

PASCAL(1623-1662)

Caractères de divisibilité

PASCAL : *Des caractères de divisibilité des nombres déduits de la somme de leurs chiffres* (1634)

Niveau : TA_2
option
Arithmètique

Prérequis : Les élèves devront avoir étudié des systèmes positionnels de numération de bases variées

---

DES CARACTERES DE DIVISIBILITE D'APRES UN TEXTE DE PASCAL.

I) Questions pour la lecture de la remarque préliminaire

1) Comment reconnait-on si un nombre est divisible par 9?
2) Lisez les lignes 1 à 14.
3) Vous avez l'habitude d'écrire les nombres dans le système décimal. Mais vous connaissez d'autres systèmes positionnels de bases différentes ; que signifie :
321 écrit en base quatre, en base dix, en base douze?
4) Lisez les lignes 15 à 25.

II. Questions pour la lecture des exemples.

1) Complétez le tableau, où **a** désigne un nombre entier et **r** le reste dans la division euclidienne de **a** par 7.

a	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8	10^9
r										

2) Lisez les lignes 1 à 5, et comparez le tableau précédent à celui dePascal.
3) Complétez l'énoncé du théorème suivant :
"La somme de deux multiples de 7 est aussi..."
Donnez-en une démonstration.
4) Lisez les lignes 6 à 9. Le procédé utilisé par Pascal pour débuter son tableau est-il le même que le vôtre?
5) L'égalité fondamentale de la division euclidienne de 10 par 7 est
$10 = 7 \times 1 + 3$

Multipliez les deux membres de cette égalité par 10, complétez la conclusion que l'on peut en déduire : 100 a donc le même reste que........ dans la division par 7. Ceci explique-t-il les lignes 10, 11, 12?

6) Justifiez de la même façon les lignes 13 et 14.

7) Lisez maintenant les lignes 15 à 29, en faisant vous-même les calculs de Pascal.

8) Lisez ensuite les lignes 30 à 47. Utilisez le critère de Pascal pour reconnaître si 119 est divisible par 7.

9) Lisez les lignes 48 à 64, et vérifiez aussi le résultat de la question précédente.

10) Le nombre 13479 est-il divisible par 7?
Quel est son reste dans la division par 7?

DES CARACTÈRES DE DIVISIBILITÉ DES NOMBRES DÉDUITS DE LA SOMME DE LEURS CHIFFRES

REMARQUE PRÉLIMINAIRE

Rien de plus connu en arithmétique que la proposition d'après laquelle un multiple quelconque de 9 se compose de chiffres dont la somme est elle-même un multiple de 9. Si, par exemple, on additionne les chiffres dont se compose 18, double de 9, on trouve 1 + 8 = 9. De même, en additionnant les chiffres d'un nombre quelconque, on reconnaîtra si ce nombre est divisible par 9. Ainsi 1719 est un multiple de 9, parce que la somme 1 + 7 + 1 + 9 ou 18 de tous ses chiffres est elle-même divisible par 9. Bien que cette règle soit communément employée, je ne crois pas que personne jusqu'à présent en ait donné une démonstration ni ait cherché à en généraliser le principe. Dans ce petit traité, je justifierai le caractère de divisibilité par 9 et plusieurs autres analogues; j'exposerai aussi une méthode générale qui permet de reconnaître, à la simple inspection de la somme de ses chiffres, si un nombre donné est divisible par un autre nombre quelconque; cette méthode ne s'applique pas seulement à notre système décimal de numération (système qui repose sur une convention, d'ailleurs assez malheureuse, et non sur une nécessité naturelle, comme le pense le vulgaire), mais elle s'applique encore sans défaut à tout système de numération ayant pour base tel nombre qu'on voudra, ainsi qu'on le verra dans les pages qui suivent. . . .

Exemples

Soit à chercher quels sont les multiples du nombre 7.

J'écris la suite des dix premiers nombres, et je forme le tableau

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
6	2	3	1	5	4	6	2	3	1

en procédant comme il suit :

J'écris l'unité sous l'unité.

De l'unité, prise 10 fois, je retranche 7 autant de fois que possible, et je place le reste 3 sous le chiffre 2.

Je multiplie le reste 3, par 10 et du produit 30 je retranche 7 autant de fois que possible; je place le nouveau reste 2 sous le chiffre 3.

De 20 je retranche 7 autant de fois que possible; il reste 6 que j'écris sous 4.

De 60 je retranche 7 autant de fois que possible; il reste 4 que j'écris sous 5.

De 40 je retranche 7 autant de fois que possible; il reste 5 que j'écris sous 6.

De 50 je retranche 7 autant de fois que possible; il reste 1 que j'écris sous 7.

De 10 je retranche 7 autant de fois que possible, ce qui me fait retomber sur le premier reste obtenu, savoir 3, que j'écris sous 8.

De 30 je retranche 7 autant de fois que possible: je retrouve le second reste obtenu, savoir 2, que j'écris sous 9.

Les restes déjà obtenus, savoir 1, 3, 2, 6, 4, 5, se retrouvent donc dans le même ordre, et ainsi indéfiniment.

Soit alors à reconnaître si un nombre quelconque 287 542 178 est un multiple de 7.

Je prends le premier chiffre du nombre à partir de la droite, et je le multiplie par l'unité (qui dans notre tableau est placée sous le nombre 1). J'écris donc le produit de 8 par l'unité, c'est-à-dire 8

J'écris ensuite le produit de 7 par le chiffre 3 placé sous 2 dans notre tableau, soit 21

Puis le produit de 1 par 2	2
le produit de 2 par 6	12
le produit de 4 par 4	16
le produit de 5 par 5	25
le produit de 7 par 1	7
le produit de 8 par 3	24
le produit de 2 par 2	4
et je fais la somme	119

Si 119 est divisible par 7, le nombre proposé 287 542 178 le sera aussi.

La même méthode peut encore servir à reconnaître si 119 est un multiple de 7.

On multipliera 9 par l'unité, ce qui donne	9
Puis 1 par 3	3
Et enfin 1 par 2	2
Et l'on fera la somme	14

Si cette somme est divisible par 7, 119 le sera également.

Enfin, et par curiosité plutôt que par nécessité, on pourra traiter encore le nombre 14 comme on a traité 119, c'est-à-dire :

Multiplier 4 par l'unité, ce qui donne	4
Puis 1 par 3.	3
Et faire la somme.	7

Celle-ci étant évidemment divisible par 7, le nombre 14 le sera aussi; partant 119 le sera, et par suite, enfin, le nombre proposé 287 542 178 sera lui-même un multiple de 7.

Soit à chercher quels sont les nombres divisibles par 6.

Les nombres naturels étant encore écrits les uns à côté des autres, je forme le tableau

4	3	2	1
4	4	4	1

en procédant comme il suit :

Je pose l'unité sous l'unité; je retranche 6 de 10, et je place le reste 4 sous 2; je retranche ensuite 6 de 40 autant de fois que possible, et je place le reste 4 sous 3; et ainsi de suite : le reste 4 se reproduira indéfiniment.

Soit alors à chercher si un nombre donné quelconque, 248 742, est divisible par 6.

J'écris le dernier chiffre du nombre.	2
puis le chiffre précédent multiplié par 4.	16
puis le chiffre précédent multiplié par 4, etc.. . .	28
puis.	32
. . . .	16
. . . .	8
	102

Si la somme 102 est divisible par 6, le nombre 248 742 sera lui-même divisible par 6.

Un nombre quelconque étant donné, reconnaître s'il est divisible par 3.

On construira, comme dans les exemples précédents, le tableau :

5	4	3	2	1
1	1	1	1	1

Pour cela, on pose l'unité sous l'unité; on retranche 3 de 10 autant de fois que possible et on place le reste 1 sous 2; puis on retranche 3 de 10 autant de fois que possible et on place le reste 1 sous 3; et ainsi de suite indéfiniment.

Soit alors à reconnaître si un nombre donné quelconque 2 451, est divisible par 3. J'écris

le dernier chiffre	1
le précédent	5
puis.	4
. . . .	2
	12

Si la somme 12 est divisible par 3, il en sera de même du nombre proposé.

Un nombre étant donné, reconnaître s'il est divisible par 9.

Ici encore, si on forme le tableau obtenu en plaçant l'unité sous l'unité, retranchant 9 de 10, etc., on voit que le reste 1 se répète indéfiniment. Donc, pour qu'un nombre quelconque soit divisible par 9, il suffit que la somme de ses chiffres le soit.

Un nombre étant donné, reconnaître s'il est divisible par 4.

Comme dans les exemples précédents, on forme le tableau :

4	3	2	1
0	0	2	1

Pour cela, on pose l'unité sous l'unité; on retranche 4 de 10 autant de fois que possible et on place le reste 2 sous 2; de 20 on retranche 4 autant de fois que possible, et on place le reste 0 sous 3; de 0 on retranche 4 : il reste toujours 0.

Soit alors donné le nombre 2 486. J'écris

le dernier chiffre	6
le précédent multiplié par 2.	16
	22

VII

DESCARTES

RENE DESCARTES

Descartes est né à La Haye, petit village de Touraine. Il reçut une éducation très solide, tant classique et philosophique que mathématique et physique (y compris l'exposé des découvertes de Galilée) au collège jésuite de La Flèche. Après des études de Droit à l'Université de Poitiers, Descartes suit une carrière militaire, dans les armées du prince Maurice de Nassau, puis dans celles du duc de Bavière. C'est au cours de ses quartiers d'hiver en Allemagne, le 10 novembre 1619, qu'il a la révélation, confortée suivant son biographe Baillet par trois rêves consécutifs, de fonder "une science nouvelle et admirable" - dont les principes reposent sur le bon usage de la raison - qu'il développera dans le *Discours de la Méthode* (1637).

Avant ou après un voyage en Italie en 1623-25, il rencontre à Paris le Père Mersenne avec qui il entretiendra toute sa vie une correspondance régulière et qui sera son lien avec le monde scientifique. A partir de 1629, il séjourne en Hollande changeant fréquemment de domicile et ne faisant que de rares voyages à Paris. A la demande de la reine Christine, il se rend en Suède en 1649 et meurt à Stockholm le 11 février 1650.

En 1633, il a terminé son *Traité du monde et de la lumière*, où il défend les idées de Copernic sur le mouvement de la terre, mais, apprenant par Mersenne la condamnation de Galilée par le Saint-Office, il renonce à la publication de son ouvrage, qu'il se propose de présenter sous une autre forme. En 1637, parait à Leyde le *Discours de la Méthode*, qui est l'un des textes décisifs de la pensée scientifique au XVII^ème^ siècle; nous aurons l'occasion d'y revenir.

Les principaux ouvrages de Descartes sont les *Méditations métaphysiques* (en latin1641 puis en français 1647), *les Principes de la Philosophie* (en latin 1644 puis en français 1647) qui donnent un exposé complet de la métaphysique et de la science cartésienne, *Les Passions de l'âme* (1649). Les publications posthumes sont *l'Abrégé de la Musique* (1650), *L'Homme* (1662), *Le Monde* (1664) et *La Mécanique* (1668). Dès 1643 avait paru une recueil des lettres de Descartes dont plusieurs éditions augmentées paruerent successivement. *Le Discours de la Méthode, Pour bien conduire sa raison, et chercher la vérité dans les sciences* comme l'indique le sous-titre, se propose essentiellement de proposer les règles permettant de construire une science dont la certitude égale celle des mathématiques, puis d'en déduire une métaphysique rationnelle, conciliant l'Homme et Dieu. Rappelons les quatre préceptes très simples sur lesquels s'articule cette méthode : 1°) Ne rien admettre dont on ne soit absolument certain; c'est le principe du <u>doute cartésien.</u> posé dans une perspective méthodologique constructive.

2°)Diviser chaque problème en problèmes particuliers que l'on est capable de résoudre; c'est l'<u>analyse.</u> 3°) Conduire nos pensées en allant du plus simple au plus complexe; c'est, si l'on veut, la <u>synthèse.</u> 4°) Faire une énumération complète des données du problème et des éléments de sa solution pour être certain que la solution est correcte; c'est la <u>vérification.</u>

Ce texte introductif court (il occupe 76 pages dans la première édition), est suivi de trois essais scientifiques, *La Dioptrique, Les Météores* et *La Géométrie*, à laquelle nous nous intéresserons tout particulièrement, vu son importance dans l'histoire des mathématiques. Ce court texte de 74 pages fut perçu comme très difficile par les contemporains et il est remarquable qu'il disparut des nombreuses éditions latines et françaises du XVIIème siècle, qui ne contiennent que la Dioptrique et les Météores. Il fut par contre très étudié par les mathématiciens qui en donnèrent de nombreuses éditions avec d'importants commentaires. Citons ici en particulier le mathématicien hollandais F. Van Schooten (1615 - 1660) qui rencontra Descartes à Leyde dès 1637 et, sur sa recommandation, vint à Paris où il fréquenta le cercle de Mersenne et de ses amis et prit connaissance des manuscrits de Viete et de Fermat. De retour à Leyde en 1643, il prépare l'édition collective des oeuvres mathématiques de Viete, qu'il publie en 1646 et donne en 1649 la traduction latine de la *Géométrie* suivie d'importants commentaires, qui représentent près du double du texte original de Descartes. La seconde édition latine commentée est formée de deux gros volumes qui paraissent en 1659 et 1661 respectivement ; le second tome contient des traités de mathématiciens qui ont été directement inspirés par les méthodes cartésiennes.
L'apport principal de Descartes est la numérisation de la Géométrie. Par le choix d'une longueur unité, il identifie le corpus des longueurs à celui de l'arithmétique, rendant ainsi possible les opérations de produit, de quotient ou d'extraction de racines carrées et échappant de cette manière à la règle des homogènes de Viete. Désignant les quantités géométriques par des lettres, a,b,c, pour les quantités connues et z, y, x, pour les inconnues, il ramène les problèmes géométriques à des problèmes algébriques de résolutions d'équations, introduisant en particulier à cet effet la méthode des coordonnées, qui fait de lui le créateur de la géométrie analytique. A l'inverse, des constructions géométriques permettent de résoudre graphiquement des équations : c'est ainsi qu'il donne, dans le Livre Troisième, la résolution complète des équations du troisième et du quatrième degré par intersection d'un cercle et d'une parabole. Si des constructions analogues étaient connues des mathématiciens arabes, c'est Descartes qui, par l'emploi systématique des notations littérales, écrit le premier traité moderne sur la théorie des équations.

Le premier livre est consacré aux problèmes dits plans, c'est à dire qui ne font intervenir que la droite et le cercle. Après l'exposé de sa méthode, il en donne une application à un problème, le lieu à trois ou quatre droites que les mathématiciens de l'Antiquité n'avaient pas su résoudre.

Dans le Discours second, *De la Nature des Lignes courbes*, il donne une classification des courbes d'après le degré de leur équation, et identifie en particulier les coniques comme les courbes du second degré, dont il donne une classification systématique. Il étudie ensuite analytiquement les ovales dits de Descartes, courbes du quatrième degré qui interviennent en

Optique. La Géométrie étant ainsi réduite à l'Algèbre, il est naturel que le Livre troisième, *De la construction des problèmes solides ou plus que solides*, commence par un traité des équations algébriques, en particulier des transformations de ces équations et des constructions géométriques des solutions.

La géométrie de Descartes reste pour nous, comme pour ses contemporains, un livre de lecture difficile, car il considère comme un élément essentiel de sa Méthode que le lecteur doit être "actif", comme on dirait aujourd'hui, et se contente souvent d'indications très sommaires sur les démonstrations.

DESCARTES : *La Géométrie* Livre I
Appendice au Discours de la Méthode
Réédition Dover (1954)

Niveau 3e

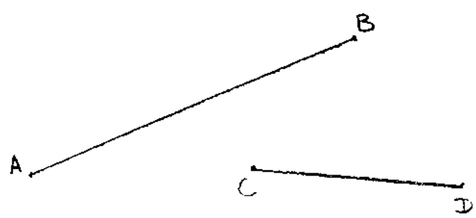
Comment représenter toutes les opérations de l'Arithmétique
par des constructions de Géométrie.
UNE IDEE D'UN GRAND GEOMETRE : **DESCARTES**

Pour les géomètres de l'école d'Euclide, certaines opérations sur les longueurs sont possibles, et chacune peut être réalisée par une construction " à la règle et au compas ".
Pour comparer deux longueurs, on se sert du compas. Pour reporter une longueur, on se sert aussi du compas. La règle, non graduée, ne sert qu'à tracer des lignes droites , ce n'est pas un instrument de mesure.

> Pour Euclide, une longueur est une "**grandeur**", une abstraction géométrique, **ce n'est pas un nombre**.

Les opérations élémentaires sur les longueurs considérées comme possibles sont l'**addition et la soustraction**.

$\boxed{Q1}$ Voici deux longueurs AB et CD:
Faites à la façon d'un géomètre grec les constructions des longueurs
AB + CD et AB - CD



D'autres opérations, moins élémentaires, sont également possibles, par exemple :

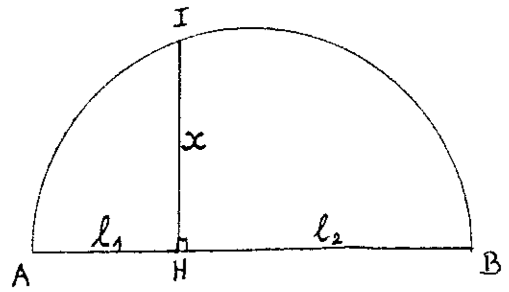
$\boxed{Q2}$ La construction de la **quatrième proportionnelle** à trois longueurs l_1, l_2, l_3, longueur x réalisant la proportion : $\frac{l_1}{l_2} = \frac{l_3}{x}$.

Exercice : choisir trois longueurs l_1, l_2, l_3 puis, à l'aide d'un tracé de parallèles, (à la règle et au compas bien sûr), construire leur quatrième proportionnelle.

$\boxed{Q3}$ Il y a aussi la construction célèbre de la "**moyenne proportionnelle**" à deux longueurs l_1 et l_2 , c'est-à-dire la longueur x telle que $\frac{l_1}{x} = \frac{x}{l_2}$. Voici la construction d'Euclide, expliquée en termes modernes :

. Porter bout à bout les deux longueurs $AH = l_1$ et $HB = l_2$.
. Tracer le cercle de diamètre [AB], et la perpendiculaire en H à [AB].
. I étant leur intersection, $x = HI$.

<u>Justifier cette construction.</u>

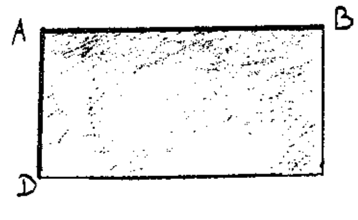


Mais dans la tradition grecque, il est <u>impossible de concevoir</u> :

une longueur **produit** de deux longueurs.
une longueur **quotient** de deux longueurs.
une longueur **racine carrée** d'une autre longueur.

et donc bien sûr, aucune construction n'est envisageable!

Pour les grecs, le **produit** de deux longueurs n'est pas une longueur, mais la SURFACE D'UN RECTANGLE construit sur ces longueurs.
Voici par exemple une représentation de AB x AD :



.Quant à un **rapport** de deux longueurs, $\frac{AB}{CD}$, aucun géomètre de la tradition grecque ne songe à en donner de représentation. Cette notion parait abstraite, et utile essentiellement pour exprimer des relations de proportionnalité, (par exemple la fameuse propriété de Thalès).

DESCARTES (1596-1650), illustre philosophe et mathématicien, fut révolutionnaire en ce domaine.

L A

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des probleſmes qu'on peut conſtruire ſans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Probleſmes de Geometrie ſe peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'eſt beſoin par aprés que de connoiſtre la longeur de quelques lignes droites, pour les conſtruire.

Et comme toute l'Arithmetique n'eſt composée, que de quatre ou cinq operations, qui ſont l'Addition, la Souſtraction, la Multiplication, la Diuiſion, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne eſpece de Diuiſion : Ainſi n'at'on autre choſe a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a eſtre connuës, que leur en adiouſter d'autres, ou en oſter, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement eſtre priſe a diſcretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit à l'vne de ces deux, comme l'autre eſt a l'vnité, ce qui eſt le meſme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatrieſme, qui ſoit a l'vne de ces deux, comme l'vnité eſt a l'autre, ce qui eſt le meſme que la Diuiſion; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou pluſieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui eſt le meſme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

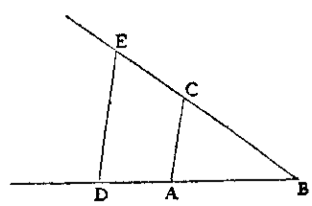
Commét le calcul d'Arithmetique ſe rapporte aux operations de Geometrie.

Ainsi, dans le texte ci-contre, début de son célèbre ouvrage "*la Géométrie*" il explique que, grâce à des constructions de géométrie, portant sur des "lignes", (autrement dit des longueurs), il va pouvoir réaliser toutes les opérations de l'Arithmétique, ceci grâce à une véritable innovation pour l'époque : l'utilisation d'une **longueur unité**.

Descartes jette ainsi les bases d'une méthode, (appelée plus tard "géométrie analytique"), permettant de traiter les problèmes de Géométrie par les méthodes de l'Algèbre, ou inversement de donner des solutions géométriques à des problèmes d'Algèbre.

Comme premier exemple, il donne celui de la **multiplication.**

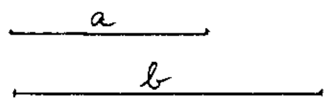
La Multiplication.



Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

En fait, ici, toute longueur est pensée comme un **nombre**, qui n'est autre que sa **mesure** relativement à **l'unité** choisie.

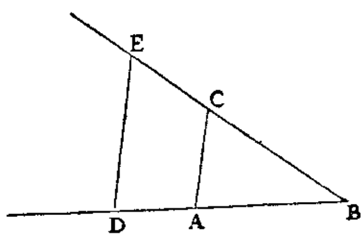
$\boxed{Q4}$ En utilisant la méthode de Descartes, et une longueur unité de votre choix, construire le PRODUIT des longueurs a et b ici représentées:



Chercher ensuite des mesures approchées, relativement à l'unité choisie, des longueurs a , b , ainsi que de la longueur obtenue BE.
Si votre construction est correcte, vous devriez vérifier (aux erreurs de mesure près), que : BE = a x b .
<u>Remarque</u> : La longueur obtenue dépend, vous pourrez le vérifier, de l'unité choisie .

$\boxed{Q5}$ Trouver un raisonnement général justifiant la méthode de Descartes.

Descartes explique ensuite comment procéder pour la **division** :



La Diui-ſion. Oubien s'il faut diuiſer BE par BD, ayant ioint les poins E & D, ie tire AC parallele a DE, & BC eſt le produit de cete diuiſion.

$\boxed{Q6}$ Reprendre la question Q4 , en remplacant le mot PRODUIT par le mot QUOTIENT. (Cette fois, après avoir fait la construction et les mesures, vous devez vérifier que $BC = \frac{a}{b}$).

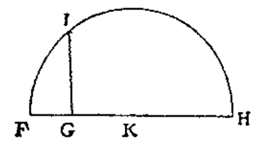
$\boxed{Q7}$ Quel raisonnement général justifie cette deuxième construction?

Mais Descartes ne s'arrête pas là. Ayant réglé le problème des quatre opérations il s'attaque à celui de la **racine carrée**.

Plus précisément, x étant une longueur, ou plutôt la mesure de cette longueur, (relativement à une certaine unité), comment, par une construction géométrique, obtenir une longueur de mesure $\sqrt{x}$?

Voici sa méthode , inspirée de la construction classique de la moyenne proportionnelle :

l'Extraction de la racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H , ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H , c'eſt G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cauſe que i'en parleray plus commodement cy aprés.

$\boxed{Q8}$ En choisisant une unité de longueur, utiliser la méthode de Descartes pour construire une longueur de mesure $\sqrt{7}$. Contrôler le résultat en mesurant la longueur GI obtenue.

$\boxed{Q9}$ Trouver un raisonnement justifiant cette construction.

<u>QUESTIONS COMPLEMENTAIRES</u>

$\boxed{Q10}$ L désignant une longueur, comment un géomètre grec se représentait-il L^2 ?
Une addition, du type $L^2 + L$, aurait-elle eu pour lui un sens? (expliquer...)

$\boxed{Q11}$ Pour Descartes, par contre, l'écriture $L^2 + L$ serait apparue simplement comme la somme d'un nombre et de son carré.
Trouver une construction, utilisant les méthodes de Descartes, d'une "longueur " $L' = L^2 + L$.
(Comme toutes les autres consrtuctions proposées par Descartes, la longueur obtenue dépend bien sûr du choix de l'unité).

DESCARTES : *La Géomètrie*. Livre III
Appendice au discours de la méthode
réédition Dover (1954)

Niveau 2e

L'INVENTION DES DEUX MOYENNES PROPORTIONNELLES

I. Racine carrée et moyenne proportionnelle

Soient a et b des nombres réels donnés strictement positifs, x est la moyenne proportionnelle entre a et b si et seulement si a, x, x, b forment une proportion dans R^{+*}

1) a et b étant deux réels strictement positifs donnés, de quel degré est l'équation dont l''inconnue x est solution?

2) Donnez la moyenne proportionnelle dans R^{+*} entre 1 et 4 ; entre 1 et2.

3) Lisez le texte de Descartes "l'extraction de la racine quarrée".
(Voir page 119)

. Quelle est la nature du triangle FIH. Justifiez votre réponse.
. Justifiez la phrase "c'est GI la racine cherchée".

Remarque : Descartes s'est inspiré pour cette construction de la construction d'Euclide de la moyenne proportionnelle entre deux lignes donnée livre VI proposition 13.

II. Racine cubique et insertion de deux moyennes proportionnelles

Soient a et q des nombres réels donnés strictement positifs, z, et y sont deux moyennes proportionnelles entre a et q si a, z, z, y forment une proposition dans R^{+*} ainsi que z, y, y, q.

1) En choisisant z comme inconnue principale et en éliminant y , formez l'équation dont l'inconnue z est la solution? Quel est son degré?

2) Trouvez deux nombres réels moyennes proportionnelles entre 1 et 8.

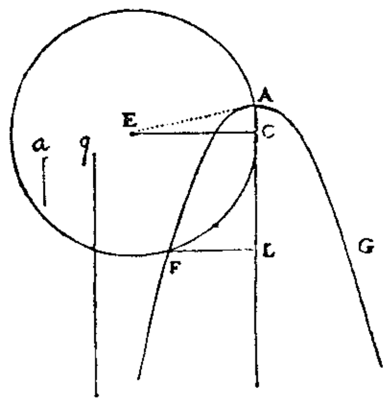
N.B : $x^3 = a$ si et seulement si $x = \sqrt[3]{a}$
$\sqrt[3]{a}$ se lit racine cubique de a.

3) a. Construisez dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathcal{P}_0$ d'équation $y = + x^2$

b . Soit E le point de coordonnés $(+1, +\frac{1}{2})$Tracez le cercle $\mathcal{C}$ de centre E, de rayon EO. Donnez l'équation de ce cercle dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

[Rappel $M\binom{x}{y} \in C(E, EO)$ si et seulement si $\|\vec{EM}\|^2 = \|\vec{EO}\|^2$]

L'inuention de deux moyennes proportionelles.



Si on veut donc suiuant cete reigle trouuer deux moyennes proportionelles entre les lignes a & q; chascun sçait que posant z pour l'vne, comme a est à z, ainsi z à $\frac{zz}{a}$, & $\frac{zz}{a}$ à $\frac{z^3}{aa}$; de façon qu'il y a Equation entre q & $\frac{z^3}{aa}$, c'est a dire, $z^3 \infty * * aaq$. Et la Parabole F A G estant descrite, auec la partie de son aissieu A C, qui est $\frac{1}{2}a$ la moitié du costé droit; il faut du point C esleuer la perpendiculaire C E esgale à $\frac{1}{2}q$, & du centre E, par A, descriuant le cercle A F, on trouue F L, & L A, pour les deux moyennes cherchées.

c . le cercle $\mathcal{C}$ et la parabole $\mathcal{P}_0$ passent tous deux par le point O et se recoupent en un autre point F. Calculez les coordonnées de F. Que représente l'abscisse de F pour le nombre 2?

III . Généralisation, et lecture du texte de Descartes

1) Soit $\mathcal{P}$ la parabole d'équation $y = \frac{1}{a}x^2$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ a étant un réel positif.

Soit E le point de coordonnées $(\frac{1}{2}q, \frac{1}{2}a)$ donnez l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre E et de rayon EO dans les repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, q étant un réel positif non nul .

2) Le cercle $\mathcal{C}$ et la parabole $\mathcal{P}$ passent tous deux par le point O et se recoupent en un autre point F. Calculez les coordonnées de F en fonction de a et q.

3) Lisez le texte de Descartes " l'invention de 2 moyennes proportionnelles ".

<u>Remarque</u> : le signe "∞" signifie " = "

L'expression "a est à b comme c'est à d" signifie $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Le mot " ligne " dans ce texte est employé pour désigner la longueur d'un segment.

a) Réécrivez les lignes 5 à 8 avec vos notations habituelles pour les proportions et retrouvez l'égalité de Descartes $z^3 - a^2q$

b)Quel est l'axe de symétrie de la parabole FAG? Quel nom donne Descartes à cet axe de symétrie?

<u>IV . Application à la construction d'une racine cubique</u>

On pose $a = 1$. En choisissant une unité de votre choix, faites et expliquez une construction d'une longueur $\sqrt[3]{5}$ à la manière de Descartes. (On notera que la construction de la racine cubique n'appparait pas de façon explicite chez Descartes).

Descartes: *la Géométrie* Livre I Niveau 1e
appendice au discours de la méthode
Réedition Dover(1954)

Problèmes dont on peut construire la solution par des cercles et des lignes droites où la "ligne inconnue apparait au carré".

Nous nous proposons dans le travail qui suit à rechercher la ligne z telle que $z^2 = az + b^2$, a et b étant deux nombre réels, positifs donnés a et b.

I. Exercice préparatoire

Soit un cercle de cercle de centre N et un point M extérieur au cercle. Tracez une des deux tangentes au cercle. Soit L le point de contact de la tangente avec le cercle. La droite (MN) coupe le cercle en P et O (P situé entre M et N).

On pose MN = d et on appelle R le rayon du cercle.

1)Exprimez LM^2 en fonction de d et de R.

2) Exprimez OMxMP en fonction de d et de R.

3) Déduisez-en $OM \times MP = LM^2$.

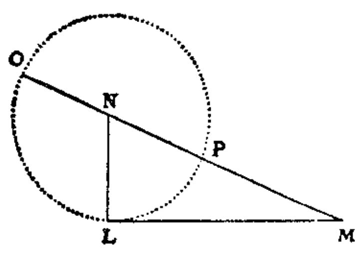
II. Lecture du texte de Descartes sur la construction de la ligne z.

Remarque : le symbole signifie =

Comment ils ſe reſoluent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue ſe trouue ayſement. Car ſi i'ay par exemple

$$z^2 \infty a z + bb$$



ie fais le triangle rectangle N L M, dont le coſté L M eſt eſgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N eſt $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui eſtoit multipliée par z que ie ſuppoſe eſtre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle, iuſques a O, en ſorte qu'N O ſoit eſgale a N L, la toute O M eſt z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete ſorte

$$z \infty \tfrac{1}{2} a + \sqrt{\tfrac{1}{4} aa + bb}.$$

Que ſi iay $yy \infty - ay + bb$, & qu'y ſoit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le meſme triangle rectangle N L M, & de ſa baze M N i'oſte N P eſgale a N L, & le reſte P M eſt y la racine cherchée. De façon que iay $y \infty - \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa + bb}$. Et tout de meſme ſi i'auois $x^4 \infty - a x^2 + b^2$. P M ſeroit x^2. & i'aurois $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainſi des autres.

1)Recopiez la figure de Descartes.
2) A l'aide de la question 3) de l'exercice préparatoire, montrez que si on pose OM = z on a bien $z^2 = az - b^2$,
3) Calculez MN en fonction de a et de b.
4) Montrez que z peut s'écrire $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b^2}$.
5) Résolvez dans R l'équation $z^2 - az - b^2 = 0$ et comparez les résultats avec celui de Descartes

Commentaire

Nous vous avons proposé un extrait du livre I de la Géométrie de Descartes dans l'édition franco-anglaise publiée par Dover. Vous trouverez à la suite un texte dont est tiré cet extrait où Descartes présente :

1) Sa méthode pour résoudre un problème en le mettant en équation.

2) Une explication de ce qu'il appelle un problème plan.

3) La construction de la solution positive d'un " problème plan " soit d'une équation de degré 2.

Dans ce dernier paragraphe Descartes résout d'abord $z^2 = az + b^2$, ce qui fut l'objet du travail proposé ; puis il entreprend de construire la ligne z telle que $z^2 - az - b^2$. Cette deuxième construction (p.302-303 du texte de Descartes) ne fut pas travaillée en classe mais certains élèves ont voulu la faire chez eux. Pour leur permettre de surmonter la difficulté du texte j'ai donné à ces élèves-là des explications sur la puissance d'un point par rapport à un cercle afin d'obtenir :

$ML^2 = MQ \times MR = MQ(a - MQ)$ voir la figure de Descartes p.303 dans le texte qui suit.

Au reste affin de ne pas manquer a se souuenir des noms de ces lignes, il en faut tousiours faire vn registre separé, à mesure qu'on les pose ou qu'on les change, escriuant par exemple.

$AB \infty 1$, c'est a dire, A B esgal à 1.

$GH \infty a$

$BD \infty b$, &c.

Commēt il faut venir aux Equatiōs qui seruent a resoudre les problesmes.

Ainsi voulant resoudre quelque problesme, on doit ‹ bord le considerer comme desia fait, & donner des nc a toutes les lignes, qui semblent necessaires pour le c‹ struire, aussy bien a celles qui sont inconnuës, qu': autres. Puis sans considerer aucune difference entre ‹ lignes connuës, & inconnuës, on doit parcourir la di culté, selon l'ordre qui monstre le plus naturelleme de tous en qu'elle sorte elles dependent mutuelleme les vnes des autres, iusques a ce qu'on ait trouué moy d'exprimer vne mesme quantité en deux façons: ce c se nomme vne Equation; car les termes de l'vne de c deux façons sont esgaux a ceux de l'autre. Et on dc trouuer autant de telles Equations, qu'on a supposé de gnes, qui estoient inconnuës. Oubien s'il ne s'en trouue pas tant, & que nonobstant on n'omette rien de ce qui est desiré en la question, cela tesmoigne qu'elle n'est pas entierement determinée. Et lors on peut prendre a discretion des lignes connuës, pour toutes les inconnuës ausqu'elles ne correspond aucune Equation. Aprés cela s'il en reste encore plusieurs, il se faut seruir par ordre de chascune des Equations qui restent aussy, soit en la considerant toute seule, soit en la comparant auec les autres, pour expliquer chascune de ces lignes inconnuës;

. . . . .

Aussy que ie n y remarque rien de si difficile, que ceux qui seront vn peu versés en la Geometrie commune, & en l'Algebre, & qui prendront garde a tout ce qui est en ce traité, ne puissent trouuer.

C'est pourquoy ie me contenteray icy de vous auertir, que pourvû qu'en demeslant ces Equations on ne manque point a se seruir de toutes les diuisions, qui seront possibles, on aura infalliblement les plus simples termes, ausquels la question puisse estre reduite.

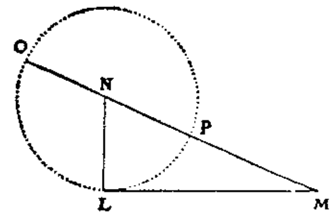
Quels sont les problesmes plans

Et que si elle peut estre resolue par la Geometrie ordinaire, c'est a dire, en ne se seruant que de lignes droites & circulaires tracées sur vne superficie plate, lorsque la derniere Equation aura esté entierement démeslée, il n'y restera tout au plus qu'vn quarré inconnu, esgal a ce qui se produist de l'Addition, ou soustraction de sa racine multipliée par quelque quantité connue, & de quelque autre quantité aussy connue

Comment ils se resoluent.

Et lors cete racine, ou ligne inconnue se trouue aysement. Car si i'ay par exemple

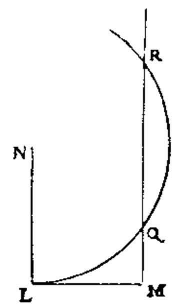
$z^2 \infty az + bb$



ie fais le triangle rectangle N L M, dont le costé L M est esgal à b racine quarrée de la quantité connue bb, & l'autre L N est $\frac{1}{2}a$, la moitié de l'autre quantité connue, qui estoit multipliée par z que ie suppose estre la ligne inconnue. puis prolongeant M N la baze de ce triangle, iusques a O, en sorte qu'N O soit esgale a N L, la toute O M est z la ligne cherchée. Et elle s'exprime en cete sorte

$z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$.

Que si i'ay $yy \infty -ay + bb$, & qu'y soit la quantité qu'il faut trouuer, ie fais le mesme triangle rectangle N L M, & de sa baze M N i'oste N P esgale a N L, & le reste P M est y la racine cherchée. De façon que i'ay $y \infty -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$. Et tout de mesme si i'auois $x^4 \infty -ax^2 + b^2$. P M seroit x^2. & i'aurois $x \infty \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}}$: & ainsi des autres.



Enfin si i'ay

$z^2 \infty az - bb$:

ie fais N L esgale à $\frac{1}{2}a$, & L M esgale à b cōme deuāt, puis, au lieu de ioindre les poins M N, ie tire M Q R parallele a L N. & du centre N par L ayant descrit vn cercle qui la couppe aux poins Q & R, la ligne cherchée z est M Q, oubiē M R, car en ce cas elle s'exprime en deux façons, a sçauoir $z \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, & $z \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$.

Et si le cercle, qui ayant son centre au point N, passe par le point L, ne couppe ny ne touche la ligne droite M Q R, il n'y a aucune racine en l'Equation, de façon qu'on peut assurer que la construction du problesme proposé est impossible.

DESCARTES : *La Géométrie*. Livre III — niveau TC
Appendice au Discours de la Méthode — 1èresS (sauf II 6°)
réédition Dover (1954)

LA TRISECTION DE L'ANGLE

<u>Prérequis :</u> notion de triangles semblables : si deux triangles (ABC) et (A'B'C') ont leurs trois angles de même mesure deux à deux

$$(\hat{A} = \hat{A}' ; \hat{B} = \hat{B}' ; \hat{C} = \hat{C}') \text{ alors } \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$

On peut démontrer ce résultat dès la 1ère en utilisant la relation

$\dfrac{\sin\hat{A}}{a} = \dfrac{\sin\hat{B}}{b} = \dfrac{\sin\hat{C}}{c}$ (voir par exemple p 78 dans cette brochure).

En terminale C, on peut également montrer cette égalité de rapports pour des triangles directement semblables en utilisant les résultats du cours sur les similitudes directes.

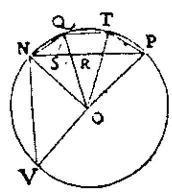
I) Mise en équation du problème de la trisection de l'angle

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O de rayon 1 et soient N et P deux points distincts de $\mathcal{C}$. Soient q = NP et θ une mesure de $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP})$.
Soient Q et T sur le petit arc $\overset{\frown}{NP}$ tels que :
$(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) = (\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OT}) = (\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{OP})$.
On pose NQ = z. Le but de l'exercice est de calculer z en fonction de q. On va montrer $z^3 - 3z + q = 0$

La façon de diuiſer vn angle en trois.

Tout de meſme ſi on veut diuiſer l'angle N O P, ou-bien l'arc, ou portion de cercle N Q T P, en trois parties eſgales; faiſant N O ∞ 1, pour le rayon du cercle, & N P ∞ q, pour la ſubtendue de l'arc donné, & N Q ∞ z, pour la ſubtendue du tiers de cet arc ; l'Equation vient,

$z^3 \infty * 3z - q$. Car ayant tiré les lignes N Q, O Q, O T; & faiſant Q S parallele a T O, on voit que comme N O eſt a N Q, ainſi N Q a Q R, & Q R a R S ; en ſorte que



que N O eſtant 1, & N Q eſtant z, Q R eſt zz, & R S eſt z^3: Et a cauſe qu'il s'en faut ſeulement R S, ou z^3, que la ligne N P, qui eſt q, ne ſoit triple de N Q, qui eſt z, ou à $q \infty 3z - z^3$ oubien,

$z^3 \infty * 3z - q$.

Suivons pas à pas la démonstration de Descartes ;

1°) a) Exprimer les mesures de $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OQ})$, $(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OP})$, $(\overrightarrow{NQ}, \overrightarrow{NP})$ en fonction de θ.

b) On note R l'intersection de (NP) et (OQ).

Montrer que les triangles (NQR) et (ONQ) sont semblables. Comparer $\frac{NO}{NQ}$ et $\frac{NQ}{QR}$.

Quelle est la nature des triangles (NQR) et (ONQ)?

2°) Soit S sur [N,P] tel que (QS) soit parallèle à (OT). On note R' l'intersection de (OT) et (NP).

a) Montrer : $\widehat{QSR} = \widehat{SR'O}$ et $\widehat{QRS} = \widehat{ORP}$.

b) Montrer : (QT) est parallèle à (NP) (on pourra montrer que la médiatrice de [QT] est un axe de symétrie de la figure).

En déduire : (ORR') est isocèle, puis (QSR) est isocèle.

c) Montrer que les triangles (QSR) et (NQR) sont semblables.

En déduire $\frac{NO}{NQ} = \frac{NQ}{QR} = \frac{QR}{RS}$, puis $QR = z^2$

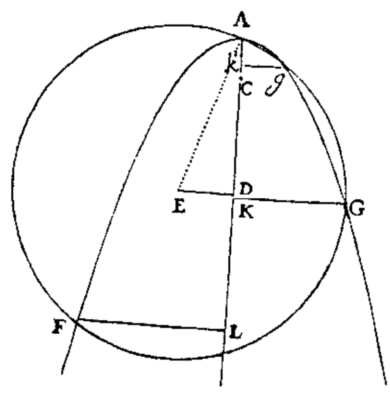
[texte "car ayant tiré ...RS est z^3 "]

3°) Montrer que : $NP = 3NQ - RS$.

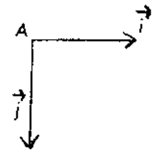
4°) Déduire de ce qui précède : $z^3 - 3z + q = 0$ [texte : "Et à cause .... $z^3 \infty 3z - q$"]

II Construction géométrique des solutions de $z^3 - 3z + q = 0$.

Puis la Parabole F A G eſtant deſcrite, & C A la moitié de ſon coſté droit principal eſtant $\frac{1}{2}$, ſi on prent C D $\infty \frac{3}{2}$, & la perpendiculaire D E $\infty \frac{1}{2} q$, & que du centre E, par A, on deſcriue le cercle F A g G, il couppe cete Parabole aux trois poins F, g, & G, ſans conter le point A qui en eſt le ſommet. Ce qui monſtre qu'il y a trois racines en cete Equation, à ſçauoir les deux G K, & g k, qui ſont vrayes; & la troiſieſme qui eſt fauſſe, á ſçauoir F L. Et de ces deux vrayes c'eſt g k la plus petite qu'il faut prendre pour la ligne N Q qui eſtoit cherchée. Car l'autre G K, eſt eſgale à N V, la ſubtendue de la troiſieſme partie de l'arc N V P, qui auec l'autre arc N Q P acheue le cercle. Et la fauſſe F L eſt eſgale a ces deux enſemble Q N & N V, ainſi qu'il eſt ayſé a voir par le calcul.



Descartes ne justifie pas sa construction. En effet, la construction géométrique des racines d'une équation du 3e degré est traitée précédement dans son livre. Détaillons (dans notre langage moderne) les calculs nécessaires.
Soit $(A, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé :



1°) Tracer la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$.

2°) Soient $C(0 ; \frac{1}{2})$ $D(0 ; 2)$ $E(-\frac{1}{2}q ; 2)$

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre E passant par A.
Déterminer une équation de $\mathcal{C}$.

3°) Montrer que les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ différents de A sont les solutions de :

$z^3 - 3z + q = 0$ [Texte:"puis la parabole.....à savoir FL"].

4°) a) Etudier les variations de la fonction $x \to x^3 - 3x + q$ $(q > 0)$ définie sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire, selon les valeurs de q, le nombre de solutions de l'équation

$z^3 - 3z + q = 0$

Dans le cas où il y a trois solutions z_1, z_2, z_3, calculer la somme et le produit des solutions (on peut utiliser la méthode du cours de 1ere pour déterminer somme et produit des racines d'un trinôme).

5°) Dans le I), dans quel intervalle se trouve q ? En déduire le nombre de solutions de l'équation $z^3 - 3z + q = 0$.
Quel est le signe des solutions?
La plus petite racine positive est NP. Et la plus grande? [Texte :"Et de ces deux vraies, ...calcul"]

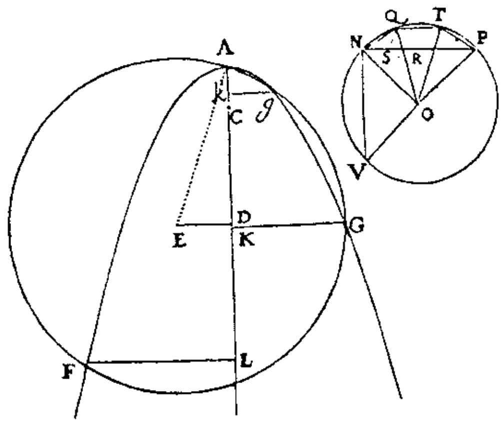
6°) Déterminer le foyer et la directrice de $\mathcal{P}$, puis son paramètre.
Quelle définition peut-on donner du "côté droit principal " d'une parabole?

Commentaires:
Vocabulaire du texte :

. Emploi du signe "∞" pour notre "=".
. "La subtendue de l'arc donné" : la corde sous-tendant l'arc donné.
. "La racine fausse" : c'est la racine négative.

Cet exercice a été expérimenté en Terminale C mais ne nécessite que des connaissances de 1ère S (sauf II 6e). Vous trouverez à la page suivante un texte d'exercice sur le même problème, moins "guidé", donné en T.C.

Equation du troisième degré : voir page 121



La façon de diuiser vn angle en trois.

Tout de mesme si on veut diuiser l'angle N O P, oubien l'arc, ou portion de cercle N Q T P, en trois parties esgales; faisant N O ∞ 1, pour le rayon du cercle, & N P ∞ q, pour la subtendue de l'arc donné, & N Q ∞ z, pour la subtendue du tiers de cet arc; l'Equation vient,

$z^3 \infty * 3z - q$. Car ayant tiré les lignes N Q, O Q, O T; & faisant Q S parallele a T O, on voit que comme N O est a N Q, ainsi N Q a Q R, & Q R a R S; en sorte que

que N O estant 1, & N Q estant z, Q R est zz, & R S est z^3: Et a cause qu'il s'en faut seulement R S, ou z^3, que la ligne N P, qui est q, ne soit triple de N Q, qui est z, ou à $q \infty 3z - z^3$ oubien,

$z^3 \infty * 3z - q$.

Puis la Parabole F A G estant descrite, & C A la moitié de son costé droit principal estant $\frac{1}{2}$, si on prent C D $\infty \frac{3}{2}$, & la perpendiculaire D E $\infty \frac{1}{2}q$, & que du centre E, par A, on descriue le cercle F A g G, il couppe cete Parabole aux trois poins F, g, & G, sans conter le point A qui en est le sommet. Ce qui monstre qu'il y a trois racines en cete Equation, à sçauoir les deux G K, & g k, qui sont vrayes; & la troisiesme qui est fausse, á sçauoir F L. Et de ces deux vrayes c'est g k la plus petite qu'il faut prendre pour la ligne N Q qui estoit cherchée. Car l'autre G K, est esgale à N V, la subtendue de la troisiesme partie de l'arc N V P, qui auec l'autre arc N Q P acheue le cercle. Et la fausse F L est esgale a ces deux ensemble Q N & N V, ainsi qu'il est aysé a voir par le calcul.

Descartes : *La Géométrie*. Livre III
Appendice au discours de la méthode.
réédition Dover (1954)

Niveau
T.C.

LA TRISECTION DE L'ANGLE.

I .d est un réel positif inférieur à 2.
Dans un plan muni d'un repère orthogonal normé$(O,\vec{i},\vec{j})$ on envisage la parabole $(\mathcal{P})$ d'équation $y = x^2$ et le point ω de coordonnées $(-\frac{d}{2}\ ;\ 2)$. On trace le cercle $(\mathcal{C})$ de centre ω qui passe par O.

1. Montrer que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{C})$ se recoupent en deux points d'abscisses positives α et β et en un point d'abscisse négative γ tels que :

$$-2 < \gamma < 0 < \alpha < 1 < \beta < 2$$

2 . Montrer que $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et $\alpha\beta\gamma = d$

II . On envisage un cercle de centre O et de rayon unité. Sur ce cercle on considère quatre points consécutifs A, B,C, D tels que les arcs $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ soient égaux. La corde [AD] coupe les rayons [OB] et [OC] en E et F et la parallèle menée par B à (OC) en G .
1 . Montrer que les triangles ABE et BEG sont isocèles .
2 . Montrer que ces triangles peuvent se déduire du triangle OAB par des similitudes (on ne cherchera pas à en déterminer le centre).
3 . On appelle x la longueur de la corde [AB] . Evaluer en fonction de x les longueurs des segments de droite [BE] et[GE] .

4 . On suppose connue la longueur d de la corde [AD] .Montrer que la détermination de x dépend d'une équation du 3e degré .

III. Donner, en utilisant les parties I et II , une construction géomètrique des points partageant les arcs limités par deux points d'un cercle, en trois parties égales. (on supposera $(\mathcal{P})$ tracée avec précision).

Quelques souvenirs quant au problème de la trisection selon Descartes

I. Plusieurs n'ont pas su exploiter le fait que α, par exemple, était racine de :

$$x^3 - 3x + d = 0$$

donc $\alpha^3 - 3\alpha + d = 0$

d'où il résulte $(x^3 - \alpha^3) - 3(x-\alpha) = 0$ et $(x-\alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2 - 3) = 0$

avec les relations entre les racines β et γ de l'équation du deuxième degré vient directement ce qui était proposé :

$$\beta + \gamma = -\alpha \quad \text{et} \quad \beta\gamma = \alpha^2 - 3 = -\frac{d}{\alpha}$$

II. Triangles semblables, angles égaux : ce fut parfois lourd car on manquait d'habitude face à la géomètrie ex-élémentaire...

III. Il y a deux racines positives car il y a deux arcs $\overset{\frown}{AD}$ sur le cercle. Heureusement que l'énoncé le précisait ; néanmoins certains se sont contentés de la plus petite ayant considéré le seul petit arc $\overset{\frown}{AD}$ et ont dit : on fera de même pour l'autre arc $\overset{\frown}{AD}$.

Alors trisection et troisième degré c'est la même chose? Si celui-ci permet de résoudre celle-là, on bute sur celle-là et on résout celui-ci par ailleurs .

IX

HUYGENS

Christiaan Huygens est un savant hollandais né le 14 avril 1629 à La Haye et mort dans la même ville le 9 juillet 1695 ; il est le fils de Constantin Huygens, ami du Pére Mersenne (1) et de René Descartes. La famille Huygens eut un grand rôle dans la vie politique de la Hollande du XVIème et du XVIIème siécle. Christiaan Huygens apparait vite comme un mathématicien de premier ordre ; ses premières publications sont précoces et il s'avère dès l' âge de seize ans un géomètre habile. Il s'intéressa au calcul des probabilités créé par Pascal et Fermat, lors de son premier voyage à Paris en 1655 et il publie en 1657 le premier traité imprimé sur le calcul des probabilités. Il est aussi un physicien de premier ordre en même temps qu'un organisateur de la recherche scientifique. Par l'entremise de Colbert la France offrit honneurs, pensions et titres de 1666 à 1681 au savant hollandais nommé en 1665 membre de l'Académie royale des sciences de Paris. Durant ces quinze années, il résida de fait presque constamment à Paris, logé à la bibliothèque du roi. Il travailla à l'Observatoire de Paris dès la construction de celui-ci en 1672. En 1681 il retourna à la Haye et, en dehors d'un court voyage à Londres, il ne quitta plus son pays natal. Il y acheva les travaux entrepris, mit au point ses mémoires et publia certains de ses traités. "Huygens est le savant type de cette fin du XVII ème siécle : curiosité pour les grands problèmes de son époque, soif d'inventer, ingéniosité technique, intérêt pour l'étude du mouvement, savoir faire d'un géomètre astucieux et souci de la gloire et de la fortune".(2)

Christiaan Huygens apprit à étudier les mathématiques avec les travaux des mathématiciens de l'Antiquité, notamment les oeuvres d'Apollonius de Perge, d'Euclide et d'Archimède. Le génie mathématique d'Archimède l'enthousiasma tout particulièrement. L'influence des travaux de Galilée et des oeuvres de Descartes fut décisive pour sa carrière. Il fut un grand inventeur : planétaire, horloge à pendule, horloge marine, lentilles, baromètre... Passionné d'astronomie, il fut le premier à découvrir qu'une lune (plus tard appelée Titan) tourne autour de Saturne.

Sa préoccupation première cependant semble rester la théorie, que ce soit la théorie musicale ou les lois du choc élastique. Pour les mathématiques, il fut l'un des hérauts de "la belle Hélène des géomètres"(3) autrement dit de la chainette ou cycloïde et il s'intéressa entre autres aux problèmes des tangentes, des maxima et minima, aux calculs d'aires comprises entre différentes courbes, au calcul des probabilités... *Ses Oeuvres complètes* comportent 22 volumes dont le premier fut publié avec des textes en latin et en français en 1888, le dernier en 1950.

Les dix premiers volumes contiennent des lettres. Citons quelques titres des traités des autres volumes : *la Dioptrique, le Traité de la lumière, le Discours de la cause de la pesanteur, le Cosmotheoros...*

(1) Le Père Mersenne (1588-1648) est au centre de la vie scientifique de son temps par sa correspondance avec les savants du monde entier et ses voyages.
(2) E. Barbin *Le secret des longitudes et le pendule cycloïdal de Huygens, Actes du colloque Inter- IREM Strasbourg 1987 p. 147.*
(3) E. Barbin J. P. Cléro *la Naissance ddu calcul infinitésimal.* Cahier de philosophie des sciences Belin.

LE PLANETAIRE

A propos des planétaires.

Apparemment le soleil se lève et se couche chaque jour, et parcourt l'ecliptique en un an. Comment rendre compte de ce phénomène? D'une manière très grossière, on peut dire que le modèle de Ptolémée en a rendu compte jusqu'à la révolution copernicienne.
Dans le système de Ptolémée, l'écliptique était "l'orbite " du soleil supposé tourner autour de la Terre ; dans celui de Copernic, l'écliptique est l'orbite réelle de la terre supposée tourner autour du Soleil. Dans les deux systèmes, l'ecliptique est un cercle. Un des premiers globes célestes semble avoir été celui d'Eudoxe de Cnide vers 370 av. J.C.
Le plus ancien globe céleste existant est conservé au Musée Royal de Naples, il date probablement de 300 av.J.C. et est en marbre. Archimède aurait réalisé un modèle mécanique, probablement une sphère armillaire.
Les Arabes perfectionnèrent les armillaires lesquelles furent utilisées pour l'enseignement en Europe occidentale jusqu'au 18e siècle.
A partir du 16e siècle la simplicité du système de Copernic permit de concevoir des mécaniques relativement simples avec des orbites circulaires et des mouvements uniformes. Mais tenir compte des découvertes de Kepler et des mesures astronomiques précises du 17e siècle était un autre affaire. Et là notre Huygens se signala...
Entre 1670 et 1672 il écrivit une description détaillée et précise de la construction d'un automate planétaire. Il a conservé la représentation du mouvement des planètes sur des orbites circulaires mais travaille en utilisant le principe des fractions continues pour calculer le nombre des dents nécessaires pour entrainer les sphères de la machine à des vitesses proportionnelles correctes. Il dit représenter ainsi "au plus près" la réalité observée. Cet écrit fut rendu public après sa mort et publié pour la première fois en 1703. Par contre l'automate fut réalisé en 1682 sur la commande de Huygens par Johannes von Ceulen artisan de La Haye. Il est actuellement visible au Musée Boerhave de Leyde.

Ce planétaire est une merveille d'élégance et de précision. Huygens réussit même à prendre en compte les lois de Képler. Certes les rails dans lesquels circulent les petites boules d'argent représentant les planètes sont des cercles, et non des ellipses. Mais, outre que l'erreur commise est très petite, compte tenu de l'excentricité faible des orbites planétaires et de la petitesse de l'instrument, Huygens a excentré chaque cercle par rappport au soleil, en sorte que le centre d'un cercle coïncide avec le centre de l'ellipse que le cercle remplace. Qui plus est, sur ces orbes circulaires, par un système d'horlogerie basé sur des considérations mécaniques et géométriques très complexes, les boules d'argent se meuvent d'un mouvement non uniforme, suivant l'hypothèse de Kepler selon laquelle les planètes vont plus lentement lorsqu'elles sont plus éloignées du soleil, (hypothèses précisées par la célèbre "lois des aires", deuxième loi de Kepler).

Remarques concernant le texte de Huygens.

. Riccioli (1598.1671) n'a pas accepté le système de Copernic et pour lui c'est encore le soleil qui tourne autour de la Terre et non le contraire.
. On remarque que le mouvement annuel de la terre est 359°45' et non pas 360°, comme on pourrait s'y attendre si on définit l'année comme la période de révolution terrestre, en fait cette période (dite année **sidérale**) est peu pratique pour les observations et pour les calculs car elle ne comporte pas un nombre entier de jours ; Huygens appelle mouvement annuel d'une planète son mouvement pour <u>une durée de</u> 365 jours (l'année sidérale était environ de 365 jour $\frac{1}{4}$ et la Terre se déplaçant d'un peu moins de 1° degré par jour, il manque donc à peu près $(\frac{1}{4})^{\circ}$ = 15' pour que le mouvement annuel de la Terre soit de 360°).
. Les tables de Riccioli permettent à Huygens d'obtenir les mouvements annuels des planètes, or il a besoin du rapport des périodes de ces mouvement pour construire son planétaire.

Si on admet que le mouvement est uniforme, on a, pour une planète donnée : $\frac{T}{360} = \frac{365}{M}$ où T est la période de la planète en jours (temps mis par la planète pour effectuer une révolution complète autour du soleil) et M est le mouvement annuel de la planète en degrés (nombre de degrés dont la planète se déplace sur son orbite en 365 jours). Donc pour deux planètes différentes (par exemple le Terre et Mars, on a : $\frac{T_1}{T_2} = \frac{M_2}{M_1}$, i.e. le rapport des périodes est l'inverse du rapport des mouvements).

Mais, en réalité, on sait que le mouvement des planètes n'est pas uniforme et la proportionnalité n'est donc pas parfaitement exacte. Pour pallier cet inconvénient et réduire les erreurs dûes à l'usage de la proportionnalité, Huygens utilise un mouvement annuel moyen.

I Questions préparant la lecture du texte (travail à la maison).

1° a) Qu'est-ce qu'un planétaire (ou planetarium)?

b) Quels ont été les premiers planétaires construits?

2° Nous allons étudier la méthode de Huygens pour la conception de son planétaire. A quelle époque a vécu Huygens?

3°) Quelles étaient les planètes connues à cette époque?

4°) Huygens et ses contemporains savaient-ils que la Terre tournait autour du Soleil?

5°) Quels sont les premiers à avoir osé défendre cette idée? Ptolémée, Copernic, Galilée, Newton, Kepler?

6°) Qui était Riccioli?

Nous lirons des extraits d'un texte de Huygens exposant les calculs nécessaires pour construire un système mécanique reproduisant au plus près les mouvements des planètes, en particulier celui de Saturne. Le système repose sur des engrenages de roues dentées dont il faut calculer le nombre de dents.

II. Question sur les calculs astronomiques du texte

Un degré d'angle ou d'arc de cercle est divisé en 60 minutes (60'), une minute d'angle en 60 secondes (60") une seconde d'angle en 60 tierces (60'"). 12°13'34"18'" se lit 12 degrés13 minutes 34 secondes 18 tierces.

1°) Réduisez en tierces la valeur du mouvement annuel de Saturne et celle du mouvement annuel de la Terre données par Huygens dans le texte suivant :

> Le mouvement annuel de Saturne — je me base tant ici qu'ailleurs sur les plus récentes Tables de Riccioli — est dit avoir la valeur 12°13'34"18'"). Celui de la Terre, que Riccioli appelle celui du Soleil, est de 359°45'40"31'"). Réduisant l'une et l'autre à des tierces, on obtient le rapport 2640858 : 77708431).

2°) Retrouvez le rapport dont il est question dans le texte, c'est à dire celui du mouvement annuel de saturne à celui de la terre.

III. Calcul du nombre des dents de roues.

Huygens indique son objectif : étant donné un rapport (de deux grands nombres), trouver un rapport voisin dont les termes sont des nombres entiers beaucoup plus petits, pour qu'il soit possible de fabriquer des roues dentées ayant comme nombre de dents les termes de ce nouveau rapport.

Soient 77708431 et 2640858 les deux grands nombres et $\frac{77708431}{2640858}$ leur rapport.

Huygens explique ensuite son calcul que nous allons exécuter.

1°a) Complétez l'égalité fondamentale de la division euclidienne de 77708431 par 2640858

$$77708431 = 2640858 \times \ldots\ldots + \ldots\ldots\ldots$$

b) Si on pose $a = 77708431$ et $b = 2640858$

Complétez

$$a = b \times \ldots\ldots + r_1$$

2°) On divise l'égalité par le diviseur 2640858, on obtient :

a) en utilisant les nombres

$$\frac{77708431}{2640858} = \ldots\ldots + \frac{\ldots\ldots}{2640858}$$

b) en utilisant les lettres a, b, et r_1

$$\frac{a}{b} = \ldots + \frac{r_1}{b}$$

Huygens continue ...."puis le plus petit par le reste de la première division et ensuite ce reste par le nouveau reste. Continuant ainsi je trouve..."

3°) Complétez le tableau suivant correspondant aux calculs de Huygens.

Egalité fondamentale de la division euclidienne	Division par le diviseur
$1^{ère}$ étape 77708431=2640858x ...+ .... a = b x...+ r_1	$\frac{77708431}{2640858} = ...+ \frac{...}{2640858}$ $\frac{a}{b} = ... + \frac{r_1}{b}$
2^e étape 2640858 = 1123549 x...+ .... b = r_1x...+ r_2	$\frac{2640858}{1123549} = ...+ \frac{...}{1123549}$ $\frac{b}{r_1} = ...+ \frac{r_2}{r_1}$
3^eétape 1123549 = ... x ... + ... r_1 = r_2 x ... + r_3	$\frac{1123549}{....} = ... + \frac{....}{...}$ $\frac{r_1}{r_2} = ... + \frac{r_3}{r_2}$
4^eétape ... = ... x ... + ... r_2 = r_3 x ....+ r_4	$\frac{....}{....} = ... + \frac{....}{....}$ $\frac{r_3}{r_2} = ... + \frac{r_3}{r_4}$

4°)La première étape donne comme approximation du rapport $\frac{a}{b}$ le nombre 29 ou le rapport $\frac{29}{1}$.

Complétez :

si $\frac{b}{r_1} = ... + \frac{r_2}{r_1}$ alors $\frac{r_1}{b} = \frac{1}{\quad\quad}$

Dans le tableau qui suit, on emploiera la même méthode appliquée à toutes les étapes.

5°) Complétez le tableau .

On a comme précédemment posé a = 77708431 et b = 2640858

Rappel : r_1, r_2, r_3, r_4 sont les restes successifs des divisions

Eglité fondamentale de la division euclidienne puis division par le diviseur	Passage aux inverses	Approximation
$1^{\text{ère}}$ étape $a = b \times ... + r_1$ $\frac{a}{b} = 29 + \frac{r_1}{b}$		$\frac{a}{b} \cong 29$
2^e étape $b = r_1 \times ... + r_2$ $\frac{b}{r_1} = ... + \frac{r_2}{r_1}$	$\frac{r_1}{b} = ... + \frac{1}{... + \frac{r_2}{r_1}}$	$\frac{a}{b} \cong 29 + \frac{1}{2}$ soit $\frac{a_1}{b_1} =$ cette approximation
3^eétape $r_1 = r_3 \times ... + r_3$ $\frac{r_1}{r_2} = ... + \frac{r_3}{r_2}$	$\frac{r_2}{r_1} = \frac{1}{... + \frac{r_3}{r_2}}$	$\frac{a}{b} \cong 29 + \frac{1}{.... + \frac{1}{...}}$ soit $\frac{a_2}{b_2} =$ cette approximation
4^eétape $r_2 = r_3 \times .... + r_4$ $\frac{r_2}{r_3} = ... + \frac{r_4}{r_3}$	$\frac{r_3}{r_2} = \frac{1}{... + \frac{r_4}{r_3}}$	$\frac{a}{b} \cong 29 + \frac{1}{.... + \frac{1}{...+...}}$ soit $\frac{a_3}{b_3}$ cette approximation

6°) Ecrivez les valeurs approchées avec six décimales données par votre calculatrice des rapports : $\frac{a_2}{b_2}$ et $\frac{a_3}{b_3}$ et donnez une valeur approchée de l'erreur commise :

1) en prenant $\frac{a_2}{b_2}$ comme approximation de $\frac{a}{b}$

2) en prenant $\frac{a_3}{b_3}$ comme approximation de $\frac{a}{b}$

Les nombres des dents des roues ont été trouvés de la manière ſuivante. Nous avons comparé entr'eux le mouvement moyen annuel, ou de 365 jours, de chaque planète ſous l'écliptique) avec le mouvement moyen annuel de la terre, tels que l'un et l'autre ſont conſignés dans les tables aſtronomiques, en réduiſant les mouvements dans les arcs entiers en tierces ou ſoixantièmes parties de ſecondes. Comme les nombres ainſi obtenus ont entr'eux la même proportion que les arcs des circonférences de cercle décrits ſimultanément dans leurs orbites par la planète conſidérée et par la terre, il s'enſuit que les périodes de l'une et de l'autre ſont exprimées par le contraire du même rapport, lequel doit donc auſſi, à moins que l'on ne prenne le même rapport exprimé par des nombres plus petits, être celui des dents des roues, ſavoir d'une part la roue planétaire, d'autre part la roue montée ſur le grand axe laquelle engrène avec elle. En effet, par chaque révolution de l'axe la Terre parcourt ſon orbite entière, puiſque nous donnons des nombres de dents égaux à la roue qui porte la Terre et à celle de l'axe qui lui correſpond, p.e. 60 ou tel autre nombre qui leur convient.

Toute la queſtion ſe réduit donc à ceci: étant donnés deux grands nombres ayant entr'eux un certain rapport, en trouver d'autres plus petits pour les dents des roues qui ne ſoient pas incommodes par leurs grandeurs et qui aient entr'eux à peu près le même rapport, de telle façon qu'aucun couple de nombres plus petits ne fourniſſe un rapport plus approchant de la vraie valeur. Mais nous rendrons la choſe plus claire par un exemple. Suppoſons donc qu'il faille trouver les dents de la roue de Saturne et celles de la roue plus petite, indiquée par la lettre K dans la Fig. 144, qui la meut et eſt elle-même montée ſur l'axe.

Le mouvement annuel de Saturne — je me baſe tant ici qu'ailleurs ſur les plus récentes Tables de Riccioli — eſt dit avoir la valeur 12°13′34″18‴). Celui de la Terre, que Riccioli appelle celui du Soleil, eſt de 359°45′40″31‴). Réduiſant l'une et l'autre à des tierces, on obtient le rapport 2640858 : 77708431). Par conſéquent, comme le dernier nombre eſt au premier, ainſi eſt la période de Saturne au temps dans lequel la Terre accomplit ſa révolution autour du Soleil; partant le nombre des dents de la roue de Saturne doit avoir, avec la meilleure approximation pratiquement poſſible, ce même rapport au nombre des dents de ſa roue motrice. Pour trouver donc des nombres plus petits qui expriment approximativement ce rapport, je diviſe le plus grand nombre par le plus petit, puis le plus petit par le reſte de la première diviſion et enſuite ce reſte par le nouveau reſte. Continuant ainſi je trouve que la première diviſion donne

$$29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4} \text{ etc.}}}}}} \quad)$$

c. à. d. un nombre plus une fraction à numérateur 1 dont le dénominateur poſsède de nouveau une fraction adjointe à numérateur 1 et dont le dénominateur eſt compoſé de la même manière; et ainſi de ſuite. Pourſuivant ce calcul auſſi longtemps que poſſible, on parvient enfin par la diviſion à un reſte 1.

7°) Lisons la suite du texte.

Or, lorſqu'on néglige à partir d'une fraction quelconque les derniers termes de la ſérie, p.e. ici la fraction $\frac{1}{5}$) et celles qui la ſuivent, et qu'on réduit les autres plus le nombre entier à un commun dénominateur, le rapport de ce dernier au numérateur, ſera voiſin de celui du plus petit nombre donné au plus grand ; et la différence ſera ſi faible qu'il ſerait impoſſible d'obtenir un meilleur accord avec des nombres plus petits. Le mode de la réduction eſt aiſé ; en effet, les dernières fractions, par leſquelles nous commençons, ſavoir $\frac{1}{2} + \frac{1}{1}$ valent $\frac{1}{3}$; paſſant à celle qui précède immédiatement et réduiſant, $\frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$ donne $\frac{3}{7}$; prenant enſuite avec la fraction le nombre entier et réduiſant de nouveau, $29 + \frac{3}{7}$ donne $\frac{206}{7}$. Par conſéquent le rapport 7 : 206 eſt voiſin de 2640858 : 77708431. C'eſt pour quoi nous avons donné 206 dents à la roue de Saturne et 7 à ſa roue motrice.

Vous constatez que Huygens a jugé la précision obtenue avec $\frac{a_3}{b_3}$ suffisante

<u>Question facultative</u> :

a) Calculer : $\frac{a_4}{b_4}$; quelle est l'erreur commise en prenant $\frac{a_4}{b_4}$ comme approximation de $\frac{a}{b}$? d'après vous, pourquoi Huygens a-t-il préféré $\frac{a_3}{b_3}$?

HUYGENS . *Oeuvres complètes*
Tome XX Ed. Nyjhoff (1940)

Niveau 1ère S
deux expérimentations
d'après le même texte

UNE METHODE ANCIENNE POUR TROUVER UN MINIMUM

Soit une droite Δ. On considère deux points A et B n'appartenant pas à Δ.
L'objet de ce problème est de trouver C sur la droite Δ tel que
$CA^2 + CB^2$ soit minimum.

I. Méthode rapportée par Huygens

1) Lire le texte ci-joint de la ligne 1 à la ligne 11.
2) Expliquer la première phrase du deuxième paragraphe. Pouvez-vous donner un exemple simple illustrant cette phrase?
3) Quelle remarque faites-vous sur le vocabulaire utilisé?
(Lignes 12 à 25).
4) Préciser les données du problème et l'inconnue.
5) Regarder la démonstration proposée lignes 26 à 37.
a) Calculer $AG^2 + GB^2$. Huygens appelle cette quantité "termes antérieurs".
b) On pose $f(x) = AG^2 + GB^2$. Huygens appelle cette quantité "termes postérieurs". Expliquer pourquoi on peut écrire $FA^2 + FB^2 = f(x + e)$. Faire le calcul (ligne 30) par la méthode de Huygens.
c) Ecrire l'équation obtenue à partir de l'égalité :
$GA^2 + GB^2 = FA^2 + FB^2$
d) Lire les lignes 38 à 40. Comment traduire ces phrases avec le langage des limites?
e) Lire les lignes 40 à 48. Suivre le détail du calcul. Le présenter selon vos notations.
6) Indiquer la position du point C solution du problème posé.

II. Méthodes utilisant les lignes de niveau ou le théorème de la médiane.

Exposer une de ces méthodes et retrouver ainsi le résultat démontré ci-dessus.

Compte rendu de l'expérimentation.

Ce texte fut distribué à des élèves de 1eS pendant une séance de travaux-dirigés d'une heure, la classe étant en demi-groupe. Dans le cours d'analyse nous étions en train d'étudier la notion de dérivabilité et en géomètrie nous avions déjà appris le produit scalaire, les relations métriques dans le triangle et les lignes de niveau.

J'ai pris le temps nécessaire pour leur présenter le personnage de Huygens, son oeuvre, son époque. Je leur ai précisé que Fr.Van Schooten (1615-1666) fut le professeur de mathématiques de C.Huygens à l'université de Leyde. Son grand mérite est d'avoir vulgarisé les idées mathématiques de Descartes.

Ensuite, nous avons lu ensemble le texte. J'ai expliqué au fur et à mesure le vocabulaire. Puis nous avons commencé l'exercice proposé. L'heure étant écoulée, le travail fut fini à la maison et repris la semaine suivante.

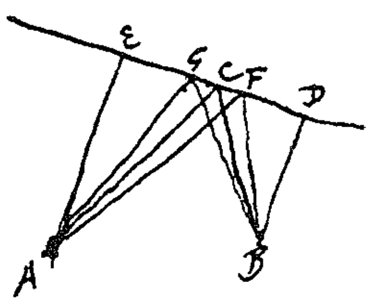
Ce texte a donné lieu à une autre expérimentation faite également en 1eS avec un objectif pédagogique légèrement différent (Le point de vue des lignes de niveau est beaucoup plus développé). Cette deuxième expérimentation, dont le texte d'exercice suit, a aussi été faite en travaux dirigés.

[1667]

Fermat eſt le premier homme que je ſache qui ait établi une règle certaine pour déterminer les valeurs maximales et minimales dans les queſtions géométriques. En en recherchant le fondement qu'il n'a pas communiqué, j'ai trouvé en même temps de quelle manière cette règle peut être réduite à une brièveté remarquable, de ſorte qu'elle s'accorde déſormais avec celle donnée plus tard par l'honorable Joh. Hudde comme une partie de ſa règle plus générale et fort élégante qui s'appuie ſur un tout autre principe. Cette dernière a été publiée par Fr. van Schooten dans le recueil qui contient auſſi les livres de Deſcartes ſur la Géométrie. Or, ma méthode d'examiner la règle de Fermat était la ſuivante.

Toutes les fois que dans un problème quelconque il s'agit de déterminer un maximum ou un minimum, il eſt certain qu'il exiſte des valeurs égales de part et d'autre. Par exemple lorſque la droite ED [Fig. 7] eſt donnée en poſition ainſi que les points A et B, et qu'on demande de trouver dans ED un point C tel qu'en tirant CA et CB on obtienne une valeur minimale de $CA^2 + CB^2$, il eſt néceſſaire que de part et d'autre du point C il ſe trouve des points G et F tels que, les droites GA, GB et FA, FB ayant été tirées, on ait $GA^2 + GB^2 = FA^2 + FB^2 > CA^2 + CB^2$.

[Fig. 7]



Pour trouver C de telle manière que $CA^2 + CB^2 =$ minimum, je me figure d'abord que, AE et BD ayant été menées perpendiculairement à ED (je poſe $AE = a$, $BD = b$, $ED = c$), la différence des deux droites EG et EF ſoit égale à une ligne donnée e; et je demande quelle doit être la valeur de EG, que j'appelle x, pour qu'on ait $GA^2 + GB^2 = FA^2 + FB^2$.

Puiſque $AE = a$ et $EG = x$, on aura $AG^2 = a^2 + x^2$. Et puiſque $GD = c - x$ et $BD = b$, on aura $GB^2 = b^2 + c^2 - 2cx + x^2$, de ſorte que $AG^2 + GB^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2$, expreſſion que nous déſignerons par les mots „termes antérieurs". Ceci s'applique également à tout autre problème ſe rapportant à un maximum ou un minimum. D'autre part, lorſqu'on ſubſtitue partout dans l'équation trouvée $x + e$ à x, $(x+e)^2$ à x^2 et ainſi de ſuite s'il s'y trouve quelque puiſſance plus élevée de x, il eſt certain qu'on obtiendra la ſomme $FA^2 + FB^2$. Celle-ci ſera donc

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2cx - 2ce + 2x^2 + 4ex + 2ee.$$

Cette expreſſion ſera appelée „termes poſtérieurs". Il faut l'égaler à $AG^2 + GB^2$. Nous aurons donc l'équation $a^2 + b^2 + c^2 - 2cx + 2x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2cx - 2ce + 2x^2 + 4ex + 2ee$, d'où ſortira la valeur EG ou x, GF ou e déſignant une ligne de longueur donnée.

Or, en prenant e infiniment petite la même équation donnera la valeur de EG lorſqu'elle eſt égale à EF. De cette façon nous aurons déterminé le point cherché C pour lequel $CA^2 + CB^2 =$ minimum. Après avoir ôté d'abord les fractions s'il y en a (mais dans l'exemple conſidéré il n'y en a point), il faut ſupprimer de part et d'autre les termes égaux, leſquels ſont néceſſairement tous ceux qui ne contiennent pas la lettre e: on le comprend aiſément puiſque, comme nous l'avons dit, les termes poſtérieurs ſe tirent des termes antérieurs en ſubſtituant $x + e$ à x dans toutes les puiſſances de cette dernière. Enſuite on diviſe tous les termes par e et on détruit ceux qui, après cette diviſion, contiennent encore cette lettre, puiſqu'ils repréſentent des quantités infiniment petites par rapport à ceux qui ne renferment plus e. C'eſt de ces derniers ſeuls qu'on tire enfin la quantité x ſatisfaiſant au problème propoſé. Telle eſt la méthode de Fermat;

1) Soit une droite Δ, A et B deux points non situés sur Δ, I le milieu de [A,B] et un point M parcourant Δ. Calculer $MA^2 + MB^2$ en fonction de MI et en déduire la position de M sur Δ correspondant au minimum de $MA^2 + MB^2$.

2) Soit un réel k. Quel est l'ensemble E_k des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$? Pour quelles valeurs de k cet ensemble contient-il des points de Δ et combien? (Discuter selon les valeurs de k). Retrouver ainsi la position de M sur Δ correspondant au minimum de $MA^2 + MB^2$.

3) Lire les lignes 1 à 25 du texte de Huygens. Expliciter le sens des mots "ligne" et "droite". Expliquer les lignes 10 et 11. Donner des exemples déjà rencontrés de la propriété énoncée.

4) Lire les lignes 20 à 37. Préciser les données et l'inconnue du problème.

a) Refaire le calcul de $AG^2 + GB^2$, en fonction de x, a, b, c. Si on pose $f(x) = AG^2 + GB^2$ remarquer que f(x) est appelé "termes antérieurs".

b) Faire le calcul de $FA^2 + FB^2$ en fonction de x, b, c, et constater qu'on peut l'écrire à l'aide de la fonction f. Expliquer pourquoi. Remarquer que $FA^2 + FB^2$ est appelé "termes postérieurs".

c) Quelle est l'équation obtenue en écrivant : $FA^2 + FB^2 = AG^2 + GB^2$? Réduire l'équation à la forme la plus simple possible.

5) Lire les lignes 30 à 50. Montrer que la démarche suivie ici revient à écrire l'équation sous la forme $\frac{f(x+e)-f(x)}{e} = 0$. Expliquer ensuite la démarche suivie aux lignes 45 à 47.

6) Quelle est la position de C ainsi obtenue? Retrouvez-vous les résultats des deux premières questions?

Remarque : pour prolonger ce travail on peut étudier le texte de P. Fermat page 30 de la brochue M:A.T.H n° 61, et comparer les méthodes utilisées.

X

MONTMORT

Pierre Rémond, né à Paris en 1678, fils d'une famille aisée, étudia le droit, voyagea puis s'adonna à l'étude des oeuvres philosophiques et scientifiques de Descartes sous la direction de Malebranche, et des mathématiques avec François Nicole. Chanoine de Notre-Dame de Paris, il achète des terres à Montmort, puis il abandonne l'état écclésiastique pour épouser la nièce de la duchesse d'Angoulême.

A l'occasion d'un voyage en Angleterre pour observer, avec E. Halley, une éclipse totale de soleil, il est élu membre de la Société Royale de Londres en 1715; il devint membre associé de l'Académie Royale des Sciences en 1716. Il mourut en 1719 de la variole.

L'*Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, publié en 1708, fit sa réputation. Un seul petit traité avait paru sur le sujet en 1657: le *De Ratiociniis in ludo aleae*, où Huygens avait réuni les problèmes déjà résolus, en particulier ceux qu'avaient traités Fermat et Pascal. L'ouvrage de Rémond de Montmort est, donc, la première étude systématique de la théorie des jeux de hasard pratiqués par la petite noblesse qu'il fréquentait. Il y résout des problèmes de combinatoire et de sommation de séries. L'ouvrage intéressa Nicolas I Bernoulli et l'incita à publier en 1713 l'*Ars conjectandi* de son oncle, Jacques I Bernoulli, mort en 1705 qui, le premier, avait énonçé la loi des grands nombres. La réédition de l'*Essay* en 1713 contient également la correspondance entre J. Bernoulli et P. R. de Montmort.

Le texte ci-dessous est extrait de la partie intitulée "Traité des Combinaisons" de cette édition.

PIERRE REMOND DE MONTMORT
Essay d'analyse sur les jeux de hazard. (1708)

Niveau
Terminales

A PROPOS DU "JEU D'OMBRE"

L'objet de l'exercice est d'étudier un extrait de l'*Essay d'analyse sur les jeux de hazard* (*Traité des combinaisons*) (1708) de Pierre Rémond de Montmort (1678-1719). Dans ce texte, il est fait allusion au "Jeu d'Ombre", qui se joue avec un jeu traditionnel de 52 cartes auquel on a retiré les 4 dix, les 4 neuf et les 4 huit ; autrement dit, il reste 40 cartes, chaque carte étant caractérisée par sa couleur (pique, coeur, trèfle, carreau) et sa valeur (as, roi, dame, valet, etc...).

I. On tire successivement et sans remise quatre cartes au hasard dans un jeu de 40 cartes. Quelle est la probabilité :
 a) P(a), de tirer dans l'ordre les as de coeur, de carreau, de trèfle et de pique?
 b) P(b) de tirer les 4 as?

II. TEXTE

Pour me faire plus facilement entendre, je me ſers d'un exemple, ſoit ſuppoſé que l'on cherche combien il y a à parier que tirant quatre cartes au hazard dans quarante, par exemple dans un Jeu d'Ombre, je tirerai les 4 as. Il eſt évident qu'il m'eſt permis de ſuppoſer que ces 4 as ſe trouveront dans les quatre cartes de deſſus ; puiſque j'ai la liberté de les choiſir par tout où je voudrai.

<u>NB.</u> L'expression "combien il y a parier que..." est synonyme de " la probabilité que..."
 1) On bat le jeu de 40 cartes. Considérez-vous évident, comme Montmort, que la probabilité d'obtenir les 4 as en tirant au hasard 4 cartes du jeu est la même que si on tirait les 4 cartes au dessus du paquet?

Or il eſt clair que nommant *m* le nombre de tous les arrangemens poſſibles de 40 cartes, j'aurai $\frac{1}{m} \times \frac{m}{40} = \frac{1}{40}$ pour tirer l'as de cœur ; puiſque cet as étant à la premiere place, les 39 autres cartes peuvent avoir tous les differens arrangemens imaginables,

2) Le mot "arrangemens" vous surprend-il? Est-il conforme à la définition que vous connaissez? Quel autre mot pourriez-vous employer? Que vaut le nombre m?

3) Que représente le nombre $\frac{m}{40}$? Expliquez le raisonnement fait par Montmort pour calculer la probabilité de tirer l'as de coeur?

> & de même j'aurai $\frac{1}{m} \times \frac{m}{40} \times \frac{1}{19} = \frac{1}{40.19}$; pour que l'as de cœur ſe trouvant à la premiere place, l'as de carreau ſoit à la ſeconde, puiſque l'as de cœur étant à la premiere place, & l'as de carreau à la ſeconde, les 38 autres cartes peuvent être arrangées diverſement en autant de façons qu'exprime d'unités un nombre compoſé de 38 produits des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c.

4) Expliquez de même le raisonnement de Montmort pour calculer la probabilité de tirer l'as de carreau?
Quelle est l'écriture moderne du nombre désigné par l'expression :"autant de façons qu'.........5, 6&c "?
NB : &c se lit :"et cetera".
Comparez avec l'écriture $\frac{m}{40} \times \frac{1}{39}$

> & pour les mêmes raiſons j'ai $\frac{1}{m} \times \frac{m}{40} \times \frac{1}{19} \times \frac{1}{18} = \frac{1}{40.19.18}$ pour amener l'as de trefle à la troiſiéme place; l'as de cœur étant à la premiere, & l'as de carreau à la ſeconde, & $\frac{1}{40.19.18.17}$ pour amener l'as de pic à la quatriéme place, l'as de trefle étant à la troiſiéme, l'as de carreau à la ſeconde, & l'as de cœur à la premiere.

5) Expliquez de même les résultats trouvés
- à la ligne 19
- à la ligne 21

> Il eſt encore certain par la propoſition ci-deſſus que le produit des quatre nombres $1 . 2 . 3 . 4 = 24$, exprime tous les divers arrangemens poſſibles des 4 as aux quatre premieres places, j'ai donc $\frac{1.2.3.4}{40.19.18.17}$, pour que les 4 as ſe trouvent être les quatre premieres cartes.

6) Expliquez le raisonnement des lignes 25 à 30. Comparez avec vos raisonnements. (cf partie I).

Maintenant ſi je ſuppoſe que la lettre p exprime le nombre de toutes les manieres poſſibles de prendre quatre choſes dans 40. Il eſt évident que j'aurai $\frac{1}{p}$ pour prendre quatre choſes déterminées dans quarante : donc $\frac{1}{p} = \frac{1.2.3.4}{40.39.38.37}$: donc $p = \frac{40.39.38.37}{1.2.3.4}$.

7) Le but poursuivi par Montmort est de calculer le nombre p. Ce nombre désigne-t-il une probabilité ? Comment désigne-t-on actuellement ce nombre ? La démarche utilisée pour calculer p vous surprend-elle? Expliquez pourquoi. Que représente le nombre $\frac{1}{p}$?

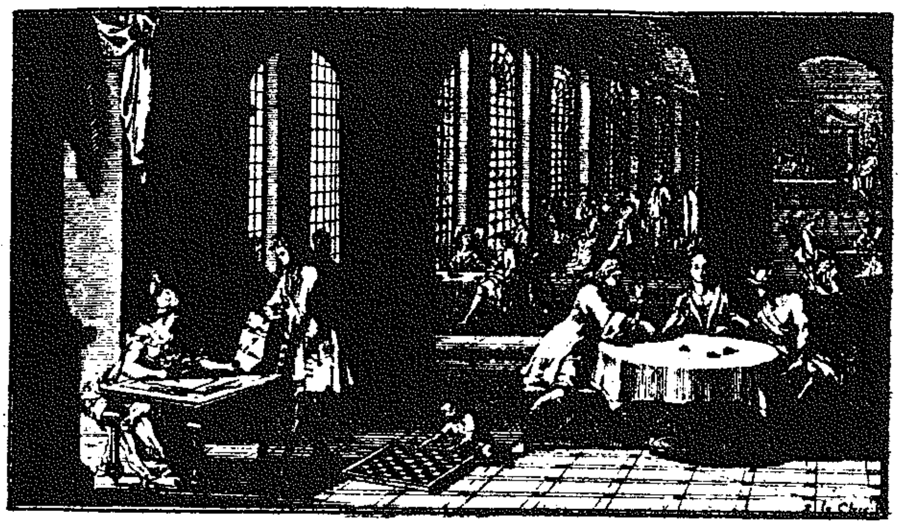
Cet exemple fait voir que ſi je me propoſe de tirer un nombre quelconque exprimé par q de choſes déterminées dans un nombre plus grand appellé p, j'aurai une fraction dont le numerateur ſera compoſé d'autant de produits des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. & le dénominateur d'autant de produits des quantités $p . p - 1 . p - 2 . p - 3 . p - 4$, *&c.* que q exprime d'unités ; en ſorte qu'appellant g le nombre de toutes les manieres poſſibles de prendre q dans p, on a $\frac{1}{g} = \frac{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6, \&c.}{p . p - 1 . p - 2 . p - 3 . p - 4 . p - 5 \ \&c.}$ d'où je tire $g = \frac{p . p - 1 . p - 2 . p - 3 . p - 4 . p - 5 \ \&c.}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 \ \&c.}$. *Ce qu'il falloit trouver* ; & par conſequent me voilà retombé par la methode des changemens d'ordre dans celle des combinaiſons, & dans la formule que nous avons ci-devant démontré, en tenant des routes fort differentes de celle-ci, &c.

<u>N.B.</u> Remarquez que dans ce paragraphe la lettre p ne désigne pas le même nombre que dans le début du texte et que les produits p(p-1) (p-2) etc ... sont écrits sans parenthèses.

8) Que désignent les nombres g et $\frac{1}{g}$? Comment désigne-t-on actuellement le nombre g ?
Le calcul de g vous parait-il démontré "rigoureusement" par Montmort? (remarquez l'introduction : "cet exemple fait voir.... ").

9) Expliquez pourquoi Montmort utilise l'expression "méthode des changements d'ordre" pour désigner la méthode de calcul de g.

Remarque : On peut interrompre la lecture du texte à la ligne 34 et le questionnaire après la question 7.



TRAITÉ

DES COMBINAISONS.

Pour me faire plus facilement entendre, je me sers d'un exemple, soit supposé que l'on cherche combien il y a à parier que tirant quatre cartes au hazard dans quarante, par exemple dans un Jeu d'Ombre, je tirerai les 4 as. Il est évident qu'il m'est permis de supposer que ces 4 as se trouveront dans les quatre cartes de dessus; puisque j'ai la liberté de les choisir par tout où je voudrai. Or il est clair que nommant m le nombre de tous les arrangemens possibles de 40 cartes, j'aurai $\frac{1}{m} \times \frac{m}{40} = \frac{1}{40}$ pour tirer l'as de cœur; puisque cet as étant à la premiere place, les 39 autres cartes peuvent avoir tous les differens arrangemens imaginables, & de même j'aurai $\frac{1}{m} \times \frac{m}{40} \times \frac{1}{39} = \frac{1}{40.39}$; pour que l'as de cœur se trouvant à la premiere place, l'as de carreau soit à la seconde, puisque l'as de cœur étant à la premiere place, & l'as de carreau à la seconde, les 38 autres cartes peuvent être arrangées diversement en autant de façons qu'exprime d'unités un nombre composé de 38 produits des nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. & pour les mêmes raisons j'ai $\frac{1}{m} \times \frac{m}{40} \times \frac{1}{39} \times \frac{1}{38} = \frac{1}{40.39.38}$ pour amener l'as de trefle à la troisiéme place; l'as de cœur étant à la premiere, & l'as de carreau à la seconde, & $\frac{1}{40.39.38.37}$ pour amener l'as de pic à la quatriéme place, l'as de trefle étant à la troisiéme, l'as de carreau à la seconde, & l'as de cœur à la premiere.

Il est encore certain par la proposition ci-dessus que le produit des quatre nombres $1.2.3.4 = 24$, exprime tous les divers arrangemens possibles des 4 as aux quatre premieres places, j'ai donc $\frac{1.2.3.4}{40.39.38.37}$, pour que les 4 as se trouvent être les quatre premieres cartes.

Maintenant si je suppose que la lettre p exprime le nombre de toutes les manieres possibles de prendre quatre choses dans 40. Il est évident que j'aurai $\frac{1}{p}$ pour prendre quatre choses déterminées dans quarante : donc $\frac{1}{p} = \frac{40.39.38.37}{1.2.3.4}$: donc $p = \frac{40.39.38.37}{1.2.3.4}$. $\frac{1.2.3.4}{40.39.38.37}$

Cet exemple fait voir que si je me propose de tirer un nombre quelconque exprimé par q de choses déterminées dans un nombre plus grand appellé p, j'aurai une fraction dont le numerateur sera composé d'autant de produits des nombres naturels 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c. & le dénominateur d'autant de produits des quantités $p . p-1 . p-2 . p-3 . p-4$, &c. que q exprime d'unités; en sorte qu'appellant g le nombre de toutes les manieres possibles de prendre q dans p, on a $\frac{1}{g} = \frac{1.2.3.4.5.6, \&c.}{p.p-1.p-2.p-3.p-4.p-5 \&c.}$

d'où je tire $g = \frac{p.p-1.p-2.p-3.p-4.p-5 \&c.}{1.2.3.4.5.6 \&c.}$ *Ce qu'il falloit trouver*; & par consequent me voilà retombé par la methode des changemens d'ordre dans celle des combinaisons, & dans la formule que nous avons ci-devant démontré, en tenant des routes fort differentes de celle-ci, &c.

ÉLÉMENS
D'ALGEBRE

PAR

M. LÉONARD EULER,

TRADUITS DE L'ALLEMAND,

AVEC DES NOTES ET DES ADDITIONS.

TOME PREMIER.

DE L'ANALYSE DÉTERMINÉE.

A LYON,
Chez JEAN-MARIE BRUYSET, Pere & Fils.
ET A PARIS,
Chez la Veuve DESAINT, Libraire, rue du Foin-Saint-Jacques.

M. DCC. LXXIV.
Avec Approbation & Privilege du Roi.

X

EULER

Leonhard EULER (1707- 1783).

Euler est le mathématicien le plus important du XVIIIème siècle, tant par le nombre de ses écrits (l'édition complète comporte déjà 80 volumes et une partie de la correspondance est encore inédite) que par la variété des sujets abordés et les innombrables méthodes et concepts nouveaux qu'il a élaborés.

Né à Bâle, il est initié aux mathématiques par son père, pasteur, qui avait été l'élève de Jacques Bernoulli. Il est lui même l'élève de Jean Bernoulli et l'ami de ses fils Nicolas, Daniel et Jean II. En 1727, il rejoint Daniel et Nicolas à l'Académie de Saint-Pétersbourg, juste avant la mort de l'impératrice Catherine, et, en 1733, occupe la chaire de mathématiques laissée libre par le retour de Daniel Bernoulli à Bâle. En 1740, Euler est sollicité par le roi de Prusse Frédéric II pour diriger la section de mathématiques et de physique de l'Académie de Berlin. Mais, estimant qu'il n'était pas apprécié à sa juste mesure par Frédéric le Grand qui ne trouvait pas en lui le philosophe mondain capable d'animer sa cour, il préfère retourner en Russie en 1766 sur l'invitation de Catherine II (la Grande). Elle le reçoit avec générosité ainsi que sa nombreuse famille de treize enfants. Dès 1735, il avait perdu l'usage de son oeil droit, mais bien que complètement aveugle à partir de 1771, il n'interrompit jamais son intense activité scientifique jusqu'à ses derniers jours, où, selon le mot célèbre de Condorcet dans son éloge "il cessa de calculer et de vivre".

L'oeuvre d'Euler couvre l'ensemble des mathématiques pures et appliquées : de la théorie des fonctions à la théorie des nombres, du calcul des probabilités à la mécanique et à l'astronomie théorique, de la théorie de la musique à la manoeuvre des vaisseaux, on retrouve partout la griffe du lion.

A travers ses grands traités didactiques : *Introduction à l'Analyse des Infiniments Petits*(2 vol.,1748), *Institutions de Calcul Différentiel*(1755), *Institutions de Calcul Intégral*(3 vol.,1768-1770 et un volume posthume 1794), Euler apparait comme le législateur du calcul infinitésimal et comme le créateur de l'Analyse au sens moderne, bien que, de notre point de vue, son traitement formel, dénué de préoccupations de convergence, manque parfois de rigueur. La notion générale de fonction - héritée de Leibniz et de Jean Bernoulli- est à la base de l'édifice eulérien. En mathématiques, d'innombrables notions, formules ou méthodes portent son nom: qu'il nous suffise de citer les formules d'Euler qui relient le cosinus et le sinus à l'exponentielle complexe (*Introduction* 1748) - avec la célèbre formule $e^{i\pi} = -1$, qui nous a tous fascinés -, les intégrales eulériennes (dont les fonctions gamma et béta), la constante d'Euler, la formule d'Euler - extension de celle de Descartes - reliant le nombre de sommets de faces et d'arêtes d'un polyèdre ($S + F = A + 2$), les angles d'Euler en géométrie et mécanique et bien d'autres.

Avec son ouvrage *Méthode pour étudier les lignes courbes relativement aux propriétés de maxima et de minima* (1744), Euler est le fondateur du calcul des variations, dont seulement des cas particuliers avaient été étudiés, par les Bernoulli notamment; là encore, on retrouve son nom, attaché à des conditions nécessaires d'extrema, les équations d'Euler.

Euler a également écrit un livre élémentaire sur l'algèbre, paru en russe en 1768-69, puis en allemand l'année d'après. Une traduction française,sous le titre *Elémens d'Algèbre*, augmentée d'importantes notes de Lagrange sur la théorie des fractions continues en particulier, parait en 1774. C'est de cette traduction qu'est extraite le passage ci-après.

Mentionnons enfin les *Lettres à une Princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie* (parues en français en 1768-72 à Saint-Petersbourg) qui est un exposé de vulgarisation des principales théories de la philosophie naturelle, comme on disait à l'époque. Cet ouvrage où Euler, revenant aux conceptions de Huygens, soutenait la nature ondulatoire de la lumière eut une profonde influence sur son temps et eut de nombreuses éditions, dont l'une donnée par Condorcet, puis une autre par A. Cournot au XIXème siècle.

L. EULER : *Elémens d'algèbre*
Ed. Française et notes avec des additions de Lagrange vol.1
Lyon -Bruyset an III

Niveau
3e-2e

APPROXIMATIONS DE $\sqrt{20}$

1. Travail préliminaire à la lecture du texte.

L'objectif de ce travail est la comparaison de x, x^2, x^3 suivant les valeurs de la variable.

1. Complétez le tableau suivant en indiquant les écritures rationnelles et les écritures décimales (quand elles diffèrent)

x	3	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10^2}$	$\frac{1}{10^3}$
x^2								
x^3								

2. Illustrez par un exemple l'énoncé

Si $0 < x < 1$ alors $x^2 < x$

puis résolvez dans $\mathbb{R}^+$ $x^2 = x$

$x^2 > x$

$x^2 < x$

Complétez la conclusion :

dans $\mathbb{R}^+$ $x^2 < x$ si et seulement si ...

3. De même illustrez

Si $0 < x < 1$, alors $x^3 < x^2$ et démontrez-le.

4. Complétez le tableau suivant :

x	0,4	0,2	0,1	0,01	0,001
$1 + 2x$					
$1 + 2x+x^2 = (1+x)^2$					

5. Lisez le paragraphe 785 du texte d'Euler.
Attention : ici, le mot fraction signifie nombre compris entre 0 et 1.
Que pensez-vous de la proposition d'Euler à la ligne 14 : "on peut les omettre dans les calculs"?

II. Questions accompagnant la lecture du paragraphe 786.

1. Donnez l'encadrement dans $\mathbb{N}$ du nombre $\sqrt{20}$

2. Lisez les lignes 1 à 8. Euler pose $x = 4+p$ et substitue $4+p$ à x dans l'équation $x^2 = 20$.

3. Lisez les lignes 8 à 11. Qu'en pensez-vous?

4. Résolvez l'équation du premier degré en p obtenue en négligeant p^2 et déduisez-en une approximation rationnelle de $\sqrt{20}$ plus précise que 4.

5. Donnez un ordre de grandeur, par excès, de la forme $a \times 10^p$, où $1 < a < 10$, de la différence entre la valeur trouvée pour $\sqrt{20}$ et l'approximation de $\sqrt{20}$ donnée par votre machine? L'approximation rationnelle trouvée est-elle par excès ou par défaut?

6. Lisez les lignes 13 à 19. Euler pose ensuite $x = 4+\frac{1}{2}+p'$ et substitue $4+\frac{1}{2}+p'$ à x dans l'équation $x^2 = 20$. Déterminez l'équation de degré 2 dont p' est la solution, puis celle de degré 1 que l'on peut en déduire en négligeant p'^2.
Remarque : on obtient une valeur négative de p' dont la valeur absolue est comprise entre 0 et 1.

7. Décrivez les calculs et le raisonnement d'Euler de la ligne 20 à la fin du paragraphe 786 et si à votre avis le copiste d'Euler a fait une erreur, rectifiez -la.

785.

Le premier moyen dont nous parlerons, suppose qu'on ait déjà déterminé assez exactement la valeur d'une racine (*); qu'on sache, par exemple, qu'une telle valeur surpasse 4, & qu'elle est plus petite que 5. Dans ce cas, si l'on suppose cette valeur $=4+p$, on est sûr que p exprime une fraction. Or si p est une fraction, & par conséquent moindre que l'unité, le quarré de p, son cube, & en général toutes les puissances plus hautes de p, seront encore beaucoup plus petites à l'égard de l'unité, & cela fait que, puisqu'il ne s'agit que d'une approximation, on peut les omettre dans le calcul. Quand on aura donc déterminé à peu près la fraction p, on connoîtra déjà plus exactement la racine $4+p$; on partira de-là pour déterminer une nouvelle valeur encore plus exacte, & on continuera de la même maniere, jusqu'à ce qu'on ait approché de la vérité autant qu'on le souhaitoit.

(*) Cette méthode est celle que *Newton* a donnée au commencement de sa *méthode des fluxions*. En l'approfondissant on la trouve sujette à différentes imperfections; c'est pourquoi on y substituera avec avantage la méthode que M. *de la Grange* a donnée dans les Mémoires de Berlin, pour les années 1767 & 68.

786.

Nous éclaircirons cette méthode d'abord par un exemple facile, en cherchant par approximation la racine de l'équation $xx=20$.

On voit ici que x est plus grand que 4 & plus petit que 5; en conséquence de cela on fera $x=4+p$, & on aura $xx=16+8p+pp=20$; mais comme pp est très-petit, on négligera ce terme pour avoir seulement l'équation $16+8p=20$, ou $8p=4$; elle donne $p=\frac{1}{2}$ & $x=4\frac{1}{2}$, ce qui approche déjà beaucoup plus de la vérité. Si donc on suppose à présent $x=4\frac{1}{2}+p$; on est sûr que p signifie une fraction encore beaucoup plus petite qu'auparavant, & qu'on pourra négliger pp à bien plus forte raison. On aura donc $xx=20\frac{1}{4}+9p=20$, ou $9p=-\frac{1}{4}$, & par conséquent $p=-\frac{1}{36}$; donc $x=4\frac{1}{2}-\frac{1}{36}=4\frac{17}{36}$.

Que si l'on vouloit approcher encore davantage de la vraie valeur, on feroit $x=4\frac{17}{36}+p$, & on auroit $xx=20\frac{1}{1296}+8\frac{34}{36}p=20$; ainsi $8\frac{34}{36}p=-\frac{1}{1296}$, $322p=-\frac{36}{1296}=-\frac{1}{36}$, & $p=-\frac{1}{36.322}=-\frac{1}{11592}$. Donc $x=4\frac{17}{36}-\frac{1}{11592}=4\frac{4473}{11592}$, valeur qui approche si fort de la vérité, qu'on peut avec confiance regarder l'erreur comme nulle.

L. EULER : *Elémens d'Algèbre.*
Ed. française et notes avec des additions de Lagrange vol.1
Lyon Bruyset an III

Niveau
1ère S

APPROXIMATIONS DE $\sqrt{20}$

1. Lecture du paragraphe 785.

785.

Le premier moyen dont nous parlerons, ſuppoſe qu'on ait déjà déterminé aſſez exactement la valeur d'une racine (*) ; qu'on ſache, par exemple, qu'une telle valeur ſurpaſſe 4, & qu'elle eſt plus petite que 5. Dans ce cas, ſi l'on ſuppoſe cette valeur $= 4 + p$, on eſt ſûr que p exprime une fraction.

<u>Remarques.</u> La "racine" désigne la racine (ou solution) d'une équation.
Le mot "fraction" est utilisé ici pour un rationnel positif plus petit que 1, et éventuellement négatif et supérieur à -1.

Or ſi p eſt une fraction, & par conſéquent moindre que l'unité, le quarré de p, ſon cube, & en général toutes les puiſſances plus hautes de p, ſeront encore beaucoup plus petites à l'égard de l'unité, & cela fait que, puiſqu'il ne s'agit que d'une approximation, on peut les omettre dans le calcul.

a) Tracer sur un même graphique les courbes représentatives sur $[-1,1]$, des fonctions $(x \to x)$, $(x \to x^2)$, $(x \to x^3)$.

. Si l'on prend $(1 + x)$ pour valeur approchée de $(1 + x + x^2)$, quelle est l'erreur commise pour $x = 0,5$; pour $x = 0,2$; pour $x = -0,1$?

b) Pour quelles valeurs de x, cette erreur est-elle inférieure à 10^{-4} ?

Dans la fin du paragraphe 785, Euler explique qu'il va "itérer" le procédé en repartant de la nouvelle racine approchée obtenue et qu'ainsi il pourra approcher de la racine (la "vérité") autant qu'il le voudra. Le paragraphe 786 expose cette méthode sur un exemple.

2. Lecture du paragraphe 786

786.

Nous éclaircirons cette méthode d'abord par un exemple facile, en cherchant par approximation la racine de l'équation $xx = 20$.

1ère étape:

On voit ici que x eſt plus grand que 4 & plus petit que 5 ; en conſéquence de cela on fera $x = 4 + p$, & on aura $xx = 16 + 8p + pp = 20$; mais comme pp eſt très-petit, on négligera ce terme pour avoir ſeulement l'équation $16 + 8p = 20$, ou $8p = 4$; elle donne $p = \frac{1}{2}$ & $x = 4\frac{1}{2}$, ce qui approche déjà beaucoup plus de la vérité.

. Réécrire le calcul d'Euler, qui aboutit à une première valeur approchée de $\sqrt{20}$: $x = 4\ \frac{1}{2}$ (c'est- à-dire $4 + \frac{1}{2}$ ou 4,5), que nous noterons x_1.

. x_1 est-il une valeur approchée par excès ou par défaut de $\sqrt{20}$?

En utilisant l'égalité $4{,}5 - \sqrt{20} = \dfrac{4{,}5^2 - 20}{4{,}5 + \sqrt{20}}$, montrer que l'erreur commise est inférieure à 3.10^{-2}. (On cherchera à majorer le rapport, sans bien sûr utiliser la valeur de $\sqrt{20}$ donnée par la calculatrice!).

2ème étape:

Si donc on ſuppoſe à préſent $x = 4\frac{1}{2} + p$; on eſt ſûr que p ſignifie une fraction encore beaucoup plus petite qu'auparavant, & qu'on pourra négliger pp à bien plus forte raiſon. On aura donc $xx = 20\frac{1}{4} + 9p = 20$, ou $9p = -\frac{1}{4}$, & par conſéquent $p = -\frac{1}{36}$; donc $x = 4\frac{1}{2} - \frac{1}{36} = 4\frac{17}{36}$.

Ecrire les calculs d'Euler.

On note x_2 la nouvelle valeur approchée obtenue. Est-ce une valeur approchée par excès ou par défaut?

Montrer, (toujours sans utiliser la valeur de $\sqrt{20}$ donnée par la calculatrice), que l'erreur commise en prenant x_2 pour valeur approchée de x_1 est inférieure à 10^{-4}.

(On pourra utiliser la méthode précédente, ou encore vérifier que
$(x_2 - 10^{-4})^2 < 20$)

3ème étape

Que si l'on vouloit approcher encore davantage de la vraie valeur, on feroit $x = 4\frac{17}{36} + p$, & on auroit $xx = 20\frac{1}{1296} + 8\frac{34}{36}p = 20$; ainsi $8\frac{34}{36}p = -\frac{1}{1296}$, $322p = -\frac{36}{1296} = -\frac{1}{36}$, & $p = -\frac{1}{36.322} = -\frac{1}{11592}$. Donc $x = 4\frac{17}{36} - \frac{1}{11592} = 4\frac{4473}{11592}$

. Refaire les calculs. (Il y a une erreur de typographie que l'on corrigera).

. Quelle est la nouvelle valeur approchée x_3 obtenue cette fois-ci?
Comparer avec la valeur décimale de $\sqrt{20}$ donnée par votre calculatrice.

4ème étape :

Répéter l'algorithme mis en jeu par Euler une fois de plus pour calculer une nouvelle valeur approchée, x_4, de $\sqrt{20}$, de la forme $x_4 = x_3 + p$ avec p rationnel.

3. Où l'on prouve que la précision des résultats augmente à chaque étape.

On appelle x_n la valeur approchée obtenue à la $n^{ième}$ étape de l'algorithme. Pour obtenir x_{n+1}, on pose $x_{n+1} = x_n + p$; on admet que : $-1 < p < 1$ et on calcule p en "négligeant les termes en p^2" dans l'équation $(x_n + p)^2 = 20$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $x_{n+1} = \dfrac{x_n^2 + 20}{2x_n}$

b) Montrer que, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{x^2 + 20}{2x} \geq \sqrt{20}$

Les valeurs approchées x_1, x_2 , ...x_n,... de $\sqrt{20}$ sont-elles obtenues par excès ou par défaut?

c) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $x_{n+1} - \sqrt{20} = \dfrac{(x_n - \sqrt{20})^2}{2x_n}$

d) En reprenant le résultat du c) montrer que, si l'erreur commise sur $\sqrt{20}$ en prenant x_n pour valeur approchée est inférieure à 10^{-p}, alors l'erreur commise en prenant x_{n+1} est inférieure à 10^{-2p} ($p \in \mathbb{N}$).

e) Reprendre les premières valeurs approchées x_1, x_2, x_3, x_4 et les majorants des erreurs évaluées pour x_2 et x_3 ; en déduire un majorant de l'erreur sur x_4.

4 Etude de la convergence de l'algorithme.

a) Montrer que la suite (x_n) définie par

$$x_0 = 5$$

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 20}{2x_n},$$ pour tout entier naturel n, est décroissante.

b) En utilisant la question 3- c) démontrez que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$0 < x_{n+1} - \sqrt{20} \leq \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{20})$$

c) En utilisant le résultat du 3. d), montrer que pour tout entier naturel n,

$$0 < x_n - \sqrt{20} < (\frac{1}{2})^n \times 0,6$$

En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$

Intérêt pédagogique et compte rendu-de l'expérience en 1ère S.

La lecture de ce texte est une occasion très motivante :

. De rappeler et de manier les notions d'encadrement, de valeur approchée, de précision d'une approximation ;

. D'établir des majorations, en particulier de majorer l'erreur commise sur une approximation ;

. De comparer les puissances de x (on en a besoin pour $x \in [-1,1]$).

. De discuter et réfléchir sur la signification mathématique de l'expression "on néglige p^2.."

. D'introduire une notation indicielle.

. De définir une suite par un algorithme amenant à une relation de récurrence ;

. De programmer une calculatrice ;

. D'étudier la limite d'une suite : ce calcul convaint de l'interêt de réitérer l'algorithme .

. De proposer des calculs numériques avec une précision supérieure à celle des calculatrices, de réfléchir aux limites de celles-ci.

Ce travail s'est inspiré d'un T.P. de l'I.R.E.M de Strasbourg (Math, premières scientifiques, ISTRA éditions Casteilla).

Ce texte a accompagné tout le début du cours d'analyse de 1ère S servant d'introduction à un chapitre sur les approximations, encadrements et majorations puis il a été repris à diverses étapes de l'étude des suites.

L'algorithme a beaucoup intéressé les élèves, certains élèves passionnés par les manipulations à la calculatrice et les problèmes numériques ont cherché des expressions décimales et comparé les diverses approximations, ont rapporté un résultat comportant 12 chiffres aprés la virgule.

$$x_4 \cong 4{,}472135954998 \text{ (décimales toutes exactes)}$$

plus précis que ce que les calculatrices permettent d'obtenir, Certains calculant sur un ordinateur, d'autres combinant calculs" à la main" et à la calculatrice.

Les élèves sont impressionnés par la qualité des approximations, demandent de comparer cet algorithme avec l'algoritme de Babylone cité parfois en seconde (en fait ils sont équivalents, puisqu'ils amènent à la même relation de récurrence), posent des questions sur les différentes façons d'obtenir des approximations de racines carrées.

L'étude des parties 1 et 2 en classe prend environ une heure. La quatrième étape (partie 2) a été donnée en exercice à la maison. La partie 3, un peu plus difficile pour les élèves, surtout lorsque c'est le premier problème qu'ils traitent sur les majorations, a été faite en travaux dirigés (d'une heure et demi environ). La partie 4 n'a été posée que quelques semaines plus tard, elle prolonge l'étude du paragraphe 3 mais ne peut être faite qu'aprés avoir étudié les suites .

Le problème peut être repris en terminale.

note de vocabulaire : Voici des extraits de l'article **Fraction** du ***Dictionnaire Mathématique*** de Ozanam (1691) (chapitre **Arithmétique**)

Le *Nombre rompu*, ou *Fraction*, eſt celuy qui repreſente une partie de l'unité. Il eſt composé de deux termes, que l'on ſepare ordinairement par une petite ligne, dont l'un qui eſt au deſſus de la ligne, s'apelle *Numerateur*, & l'autre qui eſt au deſſous, ſe nomme *Denominateur*.

Il arrive quelquefois dans la pratique, qu'une Fraction eſt plus grande que l'unité, ce que l'on connoît quand le Numerateur eſt plus grand que le Denominateur : & alors on la nomme *Fraction impropre*, comme $\frac{5}{2}$, qui vaut $2\frac{1}{2}$.

Legendre.

Legendre

XI

LEGENDRE

LEGENDRE (1752-1833)

Adrien-Marie Legendre mena une vie calme à l'écart des évènements politiques de son époque, faite de travail passionné et opiniâtre.

De 1775 à 1780, il est professeur de Mathématiques à l'école militaire de Paris, il entre comme adjoint mécanicien à l'Académie des Sciences en 1783, il participe en 1787 avec Cassini IV et Méchain aux opérations géodésiques qui devaient relier l'observatoire de Paris à celui de Greenwich, puis pendant la Révolution, à celles qui préparent la mise en place du système métrique. Pendant la Révolution il occupe différents postes importants : en 1794 il est à la tête de la Commission de l'Instruction publique ; il est nommé membre de l'Institut National dès sa création en 1795...

Il remplace Lagrange à sa mort en 1813 au Bureau des Longitudes où il restera jusqu'à la fin de sa vie.

Son travail touche à tous les domaines des mathématiques ; c'est en théorie des nombres et dans le domaine des intégrales elliptiques que ses contributions sont les plus importantes. Ses traités demeurèrent longtemps classiques : *Essai sur la théorie des nombres* (1798) puis *Théorie des nombres* (1830) ; *Exercices de calcul intégral* (1811-1819) *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes* (1825-1832), ouvrage d'une très grande technicité.

L'ouvrage dont sont tirés les textes étudiés, les *Eléments de Géométrie* (1794), a dominé l'enseignement de la géométrie pendant plus d'un siècle. C'est un traité de géométrie élémentaire destiné, comme l'indique Legendre dans sa préface, "à satisfaire l'esprit, tout en composant des éléments très rigoureux " ; il présente, en réaction contre les *Elémens de géométrie* de Clairaut , un retour à l'axiomatique euclidienne. Legendre remania les *Eléments* pour les nombreuses éditions successives. Il y en eut 21 (la dernière en 1878) et des traductions en plusieurs langues. La traduction anglaise, publiée par Charles Davies en 1851 fut longtemps l'ouvrage didactique par excellence aux U.S.A, comme en témoigne cet extrait d'une préface :

"It is believed that in clearness and precision of definition, in general simplicity and rigor of demonstration, in orderly & logical developpment of the subject and in compactness of form, Davies' Legendre is superior to anywork of its grade for the general training of the logical powers of pupils, for their instruction in the great body of elementary geometric truth."

On trouve, tout au long des éditions successives faites de son vivant, des tentatives diverses pour démontrer le postulat des parallèles ; son approche la plus récente ressemble à celle de Saccheri et il parvient à établir que la somme des angles d'un triangle est soit inférieure, soit égale à deux angles droits .

APPROXIMATIONS DE $\sqrt{2}$ PAR DES FRACTIONS CONTINUES (OU CONTINUEES)

"Les fractions étagées à numérateur égal à 1" étudiées dans l'exercice ci-dessous ne sont rien d'autre que le développement en fractions continues d'un réel A.

Pour en savoir plus on peut consulter :

* *Essais d'histoire des mathématiques* Itard (édition Blanchard Paris 1984)
* Brochure n°12 . IREM université de Paris VII mars 80. *Calculs 2*
* *Mathématiques au fil des âges* p.140 texte d'Euler
* Encyclopédie Universalis : Diophantiennes (approximations)

<u>Prérequis</u> : Puissance d'un point par rapport à un cercle
Division euclidienne dans $\mathbb{N}$

Il peut s'avérer utile de faire faire aux élèves les exercices préliminaires de type suivant :

1) Voici un exemple :

$$71 = 2 \times 31 + 9 \quad \text{donc} \quad \frac{71}{31} = 2 + \frac{9}{31} = 2 + \frac{1}{\frac{31}{9}}$$

et en continuant le procédé on obtient :

$$\frac{71}{31} = 2 + \frac{1}{\frac{31}{9}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{9}{4}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}$$

2. Faire de même avec les fractions suivantes :

$$\frac{18}{7} ; \frac{53}{12} ; \frac{53}{11} ; \frac{22}{7} ; \frac{355}{113} ; \frac{103993}{33102}$$

Remarque : les 3 dernières fractions sont des approximations de π.

3) On admettra que tout rationnel peut s'écrire sous forme de"fractions étagées à numérateur égal à 1" avec un nombre fini d'étages.

Ce procédé peut s'utiliser avec un nombre irrationnel, mais alors il ne s'arrête pas.

Un très ancien problème : la diagonale et le côté d'un carré sont-ils commensurables? Le raisonnement de Monsieur Legendre.

I. Soit ABCG un carré. On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre C et de rayon CB. Il coupe la diagonale [AC] en D. Soit E le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à D.

1) a) Que représente la droite (AB) pour le cercle $\mathcal{C}$?

b) Exprimer de deux façons différentes la puissance de A par rapport au cercle $\mathcal{C}$.

c) En déduire que $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE}$

2) a) Combien de fois la longueur AB est-elle contenue dans la longueur AE ? Quel est le reste? Compléter AE =.... x AB + ...

En déduire $\frac{AE}{AB} = 2 + \frac{...}{...}$

b) Justifier que : $\frac{AC}{AB} = 1 + \frac{AD}{AB}$

c) A l'aide des questions précédentes montrer les égalités suivantes :

(1) $\frac{AD}{AB} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{AD}{AB}}$

(2) $\frac{AC}{AB} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{AD}{AB}}$

3) a) Ecrire l'expression obtenue en remplaçant dans (2) $\frac{AD}{AB}$ par l'expression (1).

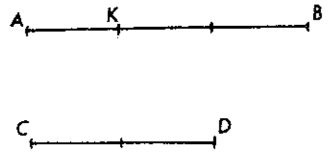
b) Peut-on continuer l'itération? Le procédé s'arrête-il?

<u>II. Lecture du texte de Legendre</u>

1) Lire l'énoncé du problème XIX livre III

"Trouver une commune mesure entre la diagonale et le côté du carré" c'est trouver une longueur contenue un nombre entier de fois dans la diagonale et un nombre entier de fois dans le côté.

exemple :



AK est une commune mesure entre AB et CD

a) Montrer que si cette commune mesure existe, alors le rapport du côté et de la diagonale est le rapport de deux nombres entiers.(c'est à dire est un nombre rationnel)
b) Etudier la réciproque .

2) Lire les lignes 3 à 12. Combien de fois BC est-il contenu dans AC? Quel est alors le reste? A quel résultat de la partie I correspondent les lignes 10, 11, 12? On doit ensuite comparer AD et BC ou AD et AB, c'est à dire pour Legendre déterminer combien de fois AB est contenu dans AD.

3) Faire la construction indiquée par Legendre à la ligne 13. Soit KB le reste obtenu.
L'étape suivante de la construction consiste à "comparer" le reste KB au reste précédant AD.

4) Lire les lignes 13 à 20. De quel inconvénient parle Legendre?

5) Dans la suite du texte, Legendre propose un moyen pour remédier à cet inconvénient. Lire le texte jusqu'à la ligne 36 et en vous aidant du I, indiquer la méthode qu'utilise Legendre.
Remarque : à la ligne 26 "AD : AB :: AB : AE" signifie $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AE}$
et se lit : "AD est à AB comme AB est à AE"

6) Lire les lignes 37 à 43. Commenter la conclusion de Legendre.
Remarque : "puisque ces deux lignes sont entre elles :: $\sqrt{2}$: 1" signifie "le rappport de ces deux longueurs est égal à $\frac{\sqrt{2}}{1}$ ".

III. Lecture du Scholie

1) lignes 1 à 3. Quel est le rapport entre la diagonale et le côté d'un carré?
2) Continuer le procédé du I.3) jusqu'à obtenir $\frac{AC}{AB}$ sous forme d'une fraction à 5 étages. Lire les lignes 3 à 8. Comment comprenez-vous : "etc à l'infini"?

3) Calculer : $1 + \frac{1}{2}$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}$$

Lire la fin du Scholie. Vos calculs sont-ils en accord avec ceux de Legendre?

Donner un"rapport plus approché "comme le suggère Legendre aux lignes 13 et 14. Comparer avec la valeur approchée de $\sqrt{2}$ obtenue avec la touche $\sqrt{\ }$ de votre calculatrice.

Trouver la commune mesure, s'il y en a une, entre la diagonale et le côté du quarré. fig. 154.

Soit ABCG un quarré quelconque, AC sa diagonale.

Il faut d'abord porter CB sur CA autant de fois qu'il peut y être contenu, et pour cela soit décrit du centre C et du rayon CB le demi-cercle DBE: on voit que CB est contenu une fois dans AC avec le reste AD; le résultat de la première opération est donc le quotient 1 avec le reste AD, qu'il faut comparer avec BC ou son égale AB.

On peut prendre AF=AD, et porter réellement AF sur AB; on trouveroit qu'il y est contenu deux fois avec un reste: mais comme ce reste et les suivants vont en diminuant, et que bientôt ils échaperoient par leur petitesse, ce ne seroit là qu'un moyen mécanique imparfait, d'où l'on ne pourroit rien conclure pour décider si les lignes AC, CB, ont entre elles ou n'ont pas une commune mesure; or il est un moyen très-simple d'éviter les lignes décroissantes et de n'avoir à opérer que sur des lignes qui restent toujours de la même grandeur.

En effet, l'angle ABC étant droit, AB est une tangente et AE une sécante menée du même point; de sorte qu'on a AD:AB :: AB:AE. Ainsi dans la seconde opération, qui consiste à comparer AD avec AB, on peut, au lieu du rapport de AD à AB, prendre celui de AB à AE : or AB ou son égale CD est contenue deux fois dans AE avec le reste AD; donc le résultat de la seconde opération est le quotient 2 avec le reste AD qu'il faut comparer à AB.

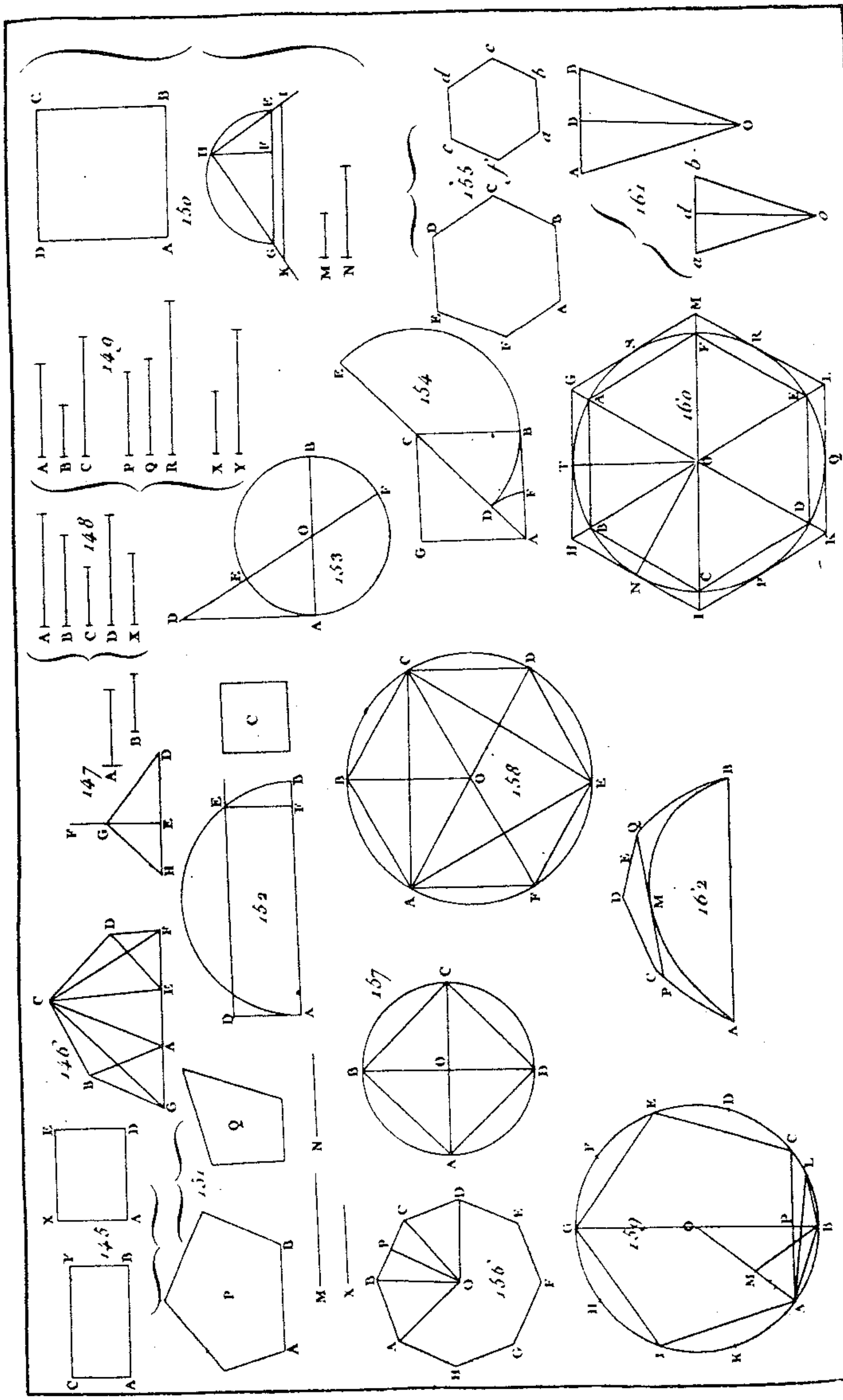
La troisième opération, qui consiste à comparer AD avec AB, se réduira de même à comparer AB ou son égale CD avec AE, et on aura encore 2 pour quotient et AD pour reste.

De là il résulte que l'opération n'aura pas de fin, et qu'ainsi il n'y a pas de commune mesure entre la diagonale et le côté du quarré; vérité qui étoit déja connue par l'arithmétique (puisque ces deux lignes sont entre elles :: $\sqrt{2}:1$), mais qui acquiert un plus grand degré de clarté par la résolution géométrique.

Scholie. Il n'est donc pas possible non plus de trouver le rapport exact en nombres de la diagonale au côté du quarré; mais on peut en approcher tant qu'on voudra au moyen de la fraction continue qui est égale à ce rapport. La première opération a donné pour quotient 1; la seconde et toutes les autres à l'infini donnent 2; ainsi la fraction dont il s'agit est $1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+}}}}$, etc. à l'infini.

Par exemple, si on calcule cette fraction jusqu'au quatrième terme inclusivement, on trouve que sa valeur est $1\frac{12}{29}$ ou $\frac{41}{29}$; de sorte que le rapport approché de la diagonale au côté du quarré est :: 41:29. On trouveroit un rapport plus approché en calculant un plus grand nombre de termes.

Élémens de Géométrie Pl. 5.



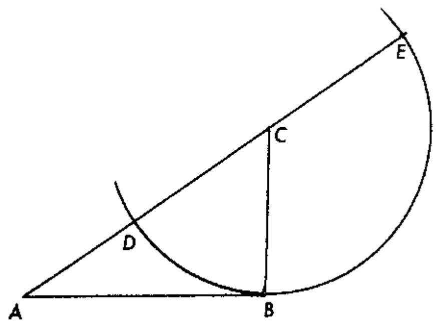
de 146 à 162.

N.° 5.

LEGENDRE : *Eléments de géométrie*
Livre III 1794.

Niveau
1ère et Terminales scientifiques

Dans ses *Eléments de Géométrie* Legendre suggère un procédé d'appproche des nombres irrationnels par des fractions, procédé que l'on peut détailler de la manière qui suit :



Soit un triangle ABC rectangle en B. On construit le cercle de centre C et de rayon CB qui recoupe la droite (AC) en D et E (D sur [AC])

1°) Montrer que $AB^2 = AD.\,AE$ et que $AD = \dfrac{AB^2}{2BC + AD}$

2°) Toute approximation de la longueur AD permet d'en déterminer une meilleure. On envisage la relation

$$u_{n+1} = \frac{AB^2}{2BC + u_n}$$

a) Montrer que si u_n est une valeur approchée par excès de AD ($u_n = AD + x$, $AD > x > 0$) alors u_{n+1} est inférieur à AD et que $AD - u_{n+1} < x$.
(on montre que $AD - u_{n+1} = \dfrac{AD \times x}{AE+x}$)

b) Qu'en est-il si u_n est une valeur approchée par défaut de AD?

3) On pose $AC = \sqrt{n}$ et $BC = a$, n et a entiers tels que :
$a^2 < n < (a+1)^2$ (a plus grand entier inférieur à n)
Montrer que la suite $v_n = a + \dfrac{n-a^2}{2a+u_n}$, avec $u_0 = 0$ fournit une suite de valeurs approchées de $\sqrt{n}$ par encadrements.

4) Applications :
a) donner une suite de huit fractions donnant des valeurs approchées de $\sqrt{23}$
b) Montrer qu'une suite de divisions permet de calculer des valeurs approchées, sous forme de nombres décimaux de $\sqrt{23}$. On pourra envisager un programme simple pour machine à calculer.
c) Calculer par ce procédé $\sqrt{50}$ à 10^{-10} près.

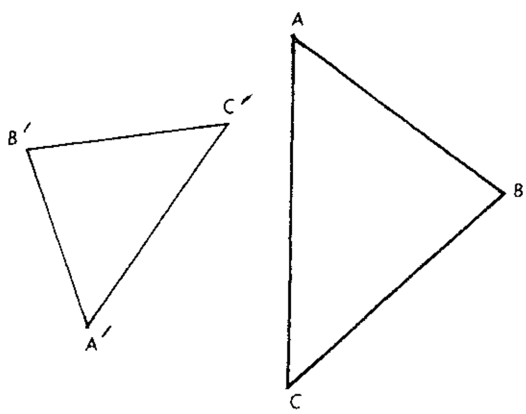
CONSTRUCTION D'UN PENTAGONE ET D'UN DECAGONE REGULIERS A LA REGLE ET AU COMPAS

Propriétés préliminaires. (triangles semblables).

Définition : Deux triangles ABC et A'B'C' sont dits semblables si et seulement si leurs angles sont deux à deux égaux.
P.1 : Deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables si et seulement si leurs côtés sont proportionnels.
Question 1 : Démontrer la propriété P.1 (on peut utiliser la relation des sinus)
Question 2 : Combien d'égalités d'angles suffit-il d'établir pour énoncer que deux triangles sont semblables?

P.2 :Soient ABC et A'B'C' deux triangles tels que $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$.
Ces triangles sont semblables.

Question 3 : (démonstration de P.2)
Construire les points B'' et C'' de [AB] et [AC] tels que AB'' = A'B' et AC'' = A'C'. Montrer que les triangles A'B'C' et AB''C'' sont isométriques
Que peut on déduire pour les triangles ABC et A'B'C'?



P.1 : $\widehat{A}=\widehat{A'}$, $\widehat{B}=\widehat{B'}$ et $\widehat{C}=\widehat{C'}$ si et seulement si $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC}$

P.2 : si $\widehat{A}=\widehat{A'}$ et $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC}$

alors $\widehat{B}=\widehat{B'}$ et $\widehat{C}=\widehat{C'}$

I. Puissance d'un point par rapport à un cercle.

1. Soit 0 un point intérieur à un cercle **C** et deux sécantes (AB) et (CD) se coupant en 0 (cf fig. 130). Dans la proposition XXVIII, Legendre démontre que $\frac{AO}{DO} = \frac{CO}{OB}$ et en déduit que OA.OB = OC.OD

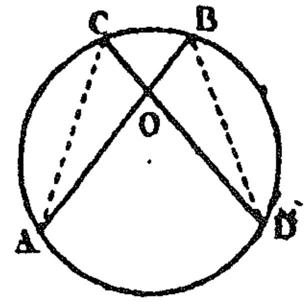
PROPOSITION XXVIII.

THÉORÈME.

fig. 130. *Les parties de deux cordes* AB, CD, *qui se coupent dans un cercle, sont réciproquement proportionnelles; c'est-à-dire qu'on a* AO:DO :: CO:OB.

Joignez AC et BD : dans les triangles ACO, BOD,

130



les angles en O sont égaux comme opposés au sommet; l'angle A est égal à l'angle D, parce qu'ils sont inscrits dans le même segment *; par la même raison l'angle C=B; donc ces triangles sont semblables, et les côtés homologues donnent la proportion AO:DO:: CO:OB.

Corollaire. On tire de là AO×OB=DO×CO; donc le rectangle des deux parties de l'une des cordes est égal au rectangle des deux parties de l'autre.

Remarques :

_Deux angles "inscrits dans le même segment" sont deux angles inscrits dans le même cercle et interceptant le même arc.

_ AO : DO :: CO : OB se lit $\frac{AO}{DO} = \frac{CO}{OB}$

_Le "rectangle" de deux longueurs désigne le produit de ces longueurs.

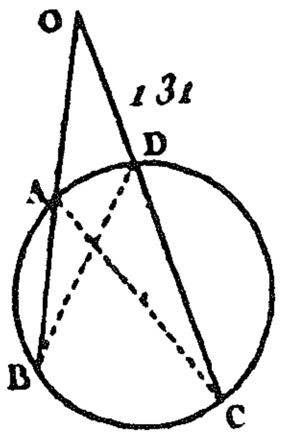
Question 4 : Lisez la démonstration de Legendre et reformulez-la dans votre langage.

2. Soit 0 un point extérieur à un cercle et deux sécantes (AB) et (CD) se coupant en 0 (cf fig.131). Dans la proposition XXIX, Legendre montre que $\frac{OB}{OC} = \frac{OD}{OA}$ et en déduit que OA.OB = OC.OD.

PROPOSITION XXIX.

THÉORÈME.

Si d'un même point O, pris hors du cercle, on mène les sécantes OB, OC, terminées à l'arc concave BC, les sécantes entières seront réciproquement proportionnelles à leurs parties extérieures; c'est-à-dire qu'on aura OB:OC :: OD:OA. fig. 131.



Car, en joignant AC, BD, les triangles OAC, OBD, ont l'angle O commun; de plus, l'angle B=C*; donc ces triangles sont semblables, et les côtés homologues donnent la proportion *18. 2.

OB:OC :: OD:OA.

Corollaire. Donc le rectangle OA×OB est égal au rectangle OC×OD.

Scholie. On peut remarquer que cette proposition a beaucoup d'analogie avec la précédente, et qu'elle n'en diffère qu'en ce que les deux cordes AB, CD, au lieu de se couper dans le cercle, se coupent au dehors. La proposition suivante peut encore être regardée comme un cas particulier de celle-ci.

Remarque : On peut comprendre l'expression "arc concave" en regardant la figure du point de vue de O ; l'arc BC est concave, l'arc AD convexe.

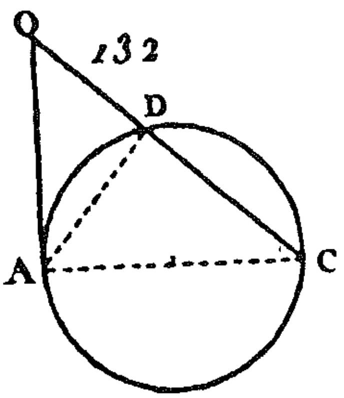
Question 5 : Identique à la question 4.

3. Soit O un point extérieur à un cercle , la tangente (OA) à ce cercle et une sécante (CD) passant par O. Dans la proposition XXX, Legendre montre que $\frac{OC}{OA} = \frac{OA}{OD}$, donc que $OA^2 = OC.OD$.

PROPOSITION XXX.

THÉORÈME.

fig. 132. *Si d'un même point O pris hors du cercle on mène une tangente OA et une sécante OC, la tangente sera moyenne proportionnelle entre la sécante et sa partie extérieure; de sorte qu'on aura* OC:OA :: OA:OD; *ou, ce qui revient au même,* $\overline{OA}^2$=OC×OD.



Car, en joignant AD et AC, les triangles OAD, OAC, ont l'angle O commun; de plus l'angle OAD,
19. 2. formé par une tangente et une corde, a pour mesure la moitié de l'arc AD, et l'angle C a la même mesure; donc l'angle OAD=C; donc les deux triangles sont semblables, et on a la proportion OC:OA :: OA:OD

qui donne $\overline{OA}^2$=OC×OD.

Remarque : $\overline{OA}^2$ ne désigne pas une mesure algébrique, mais indique seulement que l'on prend le carré de la longueur OA.

Question 6 : Identique à la question 4.

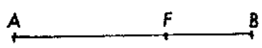
4. On a donc démontré que, un point O étant donné, une droite passant par O coupant le cercle C en A et B (distincts ou pas), le produit OA.OB ne dépend que de O, pas de la sécante passant par O.
Remarque : Si on oriente la droite (AB), le produit $\overline{OA}.\overline{OB}$ est appelé puissance du point O par rapport au cercle C.

Question 7 : Dans quel cas est-elle positive, négative , nulle?

II. Division d'un segment en moyenne et extrême raison (ou suivant le rapport φ)

PROBLEME IV, posé par Legendre :

Diviser un segment [AB] en deux parties [AF] et [FB] de manière que : $\dfrac{AB}{AF} = \dfrac{AF}{FB}$ (R)



PROBLÈME IV.

Diviser la ligne donnée AB *en deux parties, de manière que la plus grande soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et l'autre partie.*

Question 8 : On va montrer que le rapport $\dfrac{AB}{AF}$ égal à $\dfrac{AF}{FB}$ ne dépend pas du segment [AB].
Pour calculer ce rapport, poser AB = a et AF = x ; écrire la relation (R) à l'aide de x et a et en déduire une équation du second degré dont l'inconnue est le rapport a/x , et la valeur (exacte et approchée à 10^{-2} près) de ce rapport. Ce rapport φ est appelé nombre d'or ; on dit aussi que F divise le segment [AB] selon le rapport d'or.

Question 9 : Effectuer la construction proposée ci-dessous.

A l'extrémité B de la ligne AB élevez la perpendiculaire BC égale à la moitié de AB; du point C comme centre, et du rayon CB, décrivez une circonférence; joignez AC, qui coupera la circonférence en *D*, et prenez AF=AD : je dis que la ligne AB sera divisée au point F de la manière demandée, c'est-à-dire qu'on aura AB:AF :: AF:FB.

Voici la démonstration :

Car AB, étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon CB, est une tangente; et si on prolonge AC jusqu'à ce qu'elle rencontre de nouveau la circonférence en E, on aura* AE:AB :: AB:AD; donc, *dividendo*, AE—AB:AB :: AB—AD:AD. Mais puisque le rayon BC est la moitié de AB, le diamètre DE est égal à AB, et par conséquent AE—AB= AD=AF : on a aussi, à cause de AF=AD, AB—AD=FB; donc AF:AB :: FB:AD ou AF; donc, *invertendo*, AB:AF :: AF:FB.

Scholie. Cette sorte de division de la ligne AB s'appelle division en *moyenne et extrême raison.*

Question 10 : Justifier la relation $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AD}$ à l'aide des résultats du § II, puis l'égalité :

$\frac{AE-AB}{AB} = \frac{AB-AD}{AD}$ et enfin $\frac{AB}{AF} = \frac{AF}{FB}$

Quelles règles de calcul sur les proportions sont désignées ici par "dividendo" et "invertendo"?

III. Construction d'un décagone régulier.

I. Legendre propose de résoudre le problème posé à la proposition V en prenant pour côté du décagone la longueur OM obtenue en partageant le rayon [OA] suivant le rapport φ (c'est à dire de sorte que $\frac{OA}{OM}=\frac{OM}{AM}$ cf II)

PROPOSITION V.

PROBLÈME.

fig. 159. *Inscrire dans un cercle donné un décagone régulier, ensuite un pentagone et un penté-décagone.*

Divisez le rayon OA en moyenne et extrême raison au point M*, prenez la corde AB égale au plus grand segment OM, et AB sera le côté du décagone régulier qu'il faudra porter dix fois sur la circonférence.

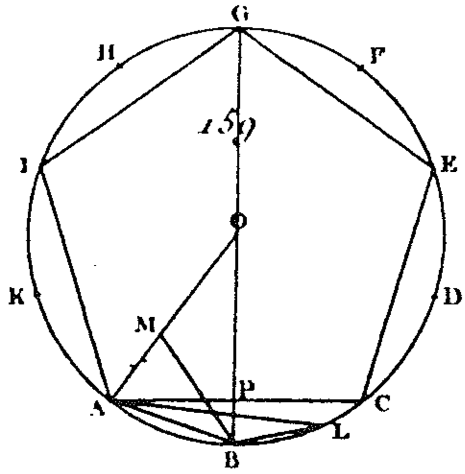
*prob 4, liv. 3.

Effectuer la construction du point M suivant la méthode exposée en II et reporter la longueur OM à partir du point A dix fois. Qu'obtenez vous?
Nous nous proposons d'étudier la démonstration donnée par Legendre de cette propriété.

2. Lecture de la démonstration de Legendre.

Car, en joignant MB, on a par construction AO : OM :: OM : AM ; ou, à cause de AB=OM, AO : AB :: AB : AM ; donc les triangles ABO, AMB, ont un angle commun A compris entre côtés proportionnels ; donc ils sont semblables*. Le triangle OAB est isoscèle ; donc le triangle AMB l'est aussi, et on a AB=BM : d'ailleurs AB=OM ; donc aussi MB=OM ; donc le triangle BMO est isoscèle.

L'angle AMB, extérieur au triangle isoscèle BMO, est double de l'intérieur O* ; or l'angle AMB=MAB ; donc le triangle OAB est tel que chacun des angles à la base OAB ou OBA est double de l'angle du sommet O ; donc les trois angles du triangle valent cinq fois l'angle O, et ainsi l'angle O est la cinquième partie de deux angles droits, ou la dixième de quatre ; donc l'arc AB est la dixième partie de la circonférence, et la corde AB est le côté du décagone régulier.



Legendre montre d'abord que les triangles ABO et AMB sont semblables (en utilisant la propriété P.2)

Question 11 : Quelle est la nature du triangle ABM? Justifier le fait que $\widehat{AMB} = 2\widehat{AOB}$ et donner une mesure en radians de l'angle $\widehat{AOB}$.

3. Construire le pentagone régulier convexe inscrit dans le cercle C et de sommet A.

Corollaire I. Si on joint de deux en deux les angles du décagone régulier, on formera le pentagone régulier ACEGI.

Corollaire II. AB étant toujours le côté du décagone, soit AL le côté de l'hexagone ; alors l'arc BL sera, par rapport à la circonférence, $\frac{1}{6} - \frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{15}$; donc la corde BL sera le côté du penté-décagone ou polygone régulier de 15 côtés. On voit en même temps que l'arc CL est le tiers de CB.

4. *Question 12* : Quelle est la longueur du côté de l'hexagone régulier convexe inscrit dans C? Donner donc une mesure en radians de l'angle BOL défini par Legendre. De quel polygone régulier CL est-il le côté?

LIVRE V.

PROBLÈME IV.

fig. 141. *Diviser la ligne donnée* AB *en deux parties, de manière que la plus grande soit moyenne proportionnelle entre la ligne entière et l'autre partie.*

A l'extrémité B de la ligne AB élevez la perpendiculaire BC égale à la moitié de AB; du point C comme centre, et du rayon CB, décrivez une circonférence; joignez AC, qui coupera la circonférence en D, et prenez AF=AD : je dis que la ligne AB sera divisée au point F de la manière demandée, c'est-à-dire qu'on aura AB:AF :: AF:FB.

Car AB, étant perpendiculaire à l'extrémité du rayon CB, est une tangente; et si on prolonge AC jusqu'à ce qu'elle rencontre de nouveau la circonférence en E, on aura* AE:AB :: AB:AD; donc, *dividendo*, AE—AB:AB :: AB—AD:AD. Mais puisque le rayon BC est la moitié de AB, le diamètre DE est égal à AB, et par conséquent AE—AB=AD=AF : on a aussi, à cause de AF=AD, AB—AD=FB; donc AF:AB :: FB:AD ou AF; donc, *invertendo*, AB:AF :: AF:FB. *30.

Scholie. Cette sorte de division de la ligne AB s'appelle division en *moyenne et extrême raison.* On en verra des usages. On peut remarquer que la sécante AE est divisée en moyenne et extrême raison au point D; car, puisque AB=DE, on a AE:DE :: DE:AD.

PROPOSITION V.

PROBLÈME.

fig. 159. *Inscrire dans un cercle donné un décagone régulier, ensuite un pentagone et un penté-décagone.*

Divisez le rayon OA en moyenne et extrême raison au point M*, prenez la corde AB égale au plus grand segment OM, et AB sera le côté du décagone régulier qu'il faudra porter dix fois sur la circonférence. *prob 4, liv. 5.

Car, en joignant MB, on a par construction AO:OM :: OM:AM; ou, à cause de AB=OM, AO:AB :: AB:AM; donc les triangles ABO, AMB, ont un angle commun A compris entre côtés proportionnels; donc ils sont semblables*. Le triangle OAB *20. 3. est isoscèle; donc le triangle AMB l'est aussi, et on a AB=BM : d'ailleurs AB=OM; donc aussi MB=OM; donc le triangle BMO est isoscèle.

L'angle AMB, extérieur au triangle isoscèle BMO, est double de l'intérieur O*; or l'angle AMB=MAB; *27. 1. donc le triangle OAB est tel que chacun des angles à la base OAB ou OBA est double de l'angle du sommet O; donc les trois angles du triangle valent cinq fois l'angle O, et ainsi l'angle O est la cinquième partie de deux angles droits, ou la dixième de quatre; donc l'arc AB est la dixième partie de la circonférence, et la corde AB est le côté du décagone régulier.

Corollaire I. Si on joint de deux en deux les angles du décagone régulier, on formera le pentagone régulier ACEGI.

Corollaire II. AB étant toujours le côté du décagone, soit AL le côté de l'hexagone; alors l'arc BL sera, par rapport à la circonférence, $\frac{1}{6}-\frac{1}{10}$ ou $\frac{1}{15}$; donc la corde BL sera le côté du penté-décagone ou polygone régulier de 15 côtés. On voit en même temps que l'arc CL est le tiers de CB.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages disponibles en langue française, d'un niveau élémentaire.

M.L. HOCQUENGHEM, C. et D. MISSENARD, F. MONNET, A.M. SERFATI, G.TARTARY: Histoire des mathématiques pour les collèges,CEDIC, Paris, 1980

Groupe Inter-IREM : La rigueur et le calcul, Documents historiques et épistémologiques, CEDIC, Paris, 1982.

A. DAHAN et J. PEIFFER : Une histoire des mathématiques. Routes et Dédales, collection Points-Science. SEUIL.

DEDRON et ITARD : Mathématiques et mathématiciens, Magnard, Paris,1959

COLLETTE : Histoire des Mathématiques, 2 vol., Vuibert, Paris, 1979.

J. DHOMBRES : Nombre, mesure et continu, épistémologie et histoire, CEDIC/NATHAN, Paris, 1978.

Mathématiques au fil des âges : commission Inter-IREM, Paris, GAUTHIER-VILLARS,1987.

J.P. CLERO et E. LE REST : La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, CNRS, Paris,1980.

G. YOUSKEVITCH : Les Mathématiques Arabes VRIN, 1986.

Fragments d'histoire des Mathématiques : brochure APMEP, n°41 et 65 (26 rue Duméril 7503 Paris.

Numéro spécial π : supplément au Petit Archimède, ADCS (61 rue St Fuscien, 8000-Amiens), Amiens, mai 1980.

Textes et documents Mathématiques : CRDP (6 rue Sainte-Catherine, 86034- Poitiers Cedex), Poitiers.

M: A.T.H. : brochure n°61 IREM Paris VII.

Equations du premier degré, du second degré, du troisième degré et du quatrième degré, brochures de l'IREM, Toulouse.

Pour une perspective historique dans l'enseignement des Mathématiques, brochure inter-IREM, IREM Lyon.

Pour des commentaires passionnants sur les Eléments d'Euclide : T. Heath : Euclid's Elements ed. DOVER.

TITRE :

Mathématiques : Approche par des textes historiques . Tome. 2.

AUTEUR (S) :

Buhler Martine, Grégoire Michèle, Hallez Maryvonne, Knerr Paule, Perrineau Catherine Plane Henry, Verley Jean-Luc

RESUME :

Cette brochure, qui fait suite à la brochure M : A.T.H n°61, présente des travaux réalisés en classes à partir de textes originaux de mathématiciens. Elle regroupe, en onze chapitres : - des textes originaux (de l'Antiquité au XVIIIème siècle) et des exercices d'accompagnement, expérimentés dans des classes de la 6ème à la Terminale;- une présentation historique pour chaque auteur. Parmi les thèmes abordés : quadrature et mesure du cercle, théorèmes de Pythagore et Thalès, extrema, dénombrement, constructions géométriques chez Descartes, trisection de l'angle, équations du second degré.

MOTS CLES

mathématiques, histoire, textes historiques, pratique, enseignants

Editeur : IREM
Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 1990
ISBN : 2-86612-062-0