IREM
INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

n° 2

DECEMBRE 1992

M : A.T.H.

MNEMOSYNE

UNIVERSITE PARIS VII

Mnémosyne

personnification de la mémoire.

Elle s'unit à Zeus pendant 9 nuits de suite;

de cette union naquirent les neuf Muses.

(Dictionnaire Robert des noms propres)

Illustration de la couverture : **"La mémoire"**

gravure allégorique d'après Gravelot (XVIII ème)

n° 2
DECEMBRE
1992

MNEMOSYNE

M: *Mathématiques*

A. *Approche par les*

T. *textes*

H. *historiques*

SOMMAIRE

EDITORIAL

Nous sommes heureux de présenter le deuxième numéro de Mnémosyne: vous y retrouverez les diverses rubriques du précédent.

Pour "*les bonnes vieilles pages*" , nous avons retenu un texte peu technique sur les difficultés qu'ont posé, au cours de son histoire, les fondements du calcul infinitésimal. Dû au mathématicien Giulio VIVANTI (1859 - 1949), il est paru dans la revue Bibliotheca Matematica en 1894. Ce journal était publié par le mathématicien suédois Gustaf ENESTROM et c'est une mine de renseignements sur l'histoire des mathématiques.

L' *iconographie* offre un frontispice gravé de l'ouvrage de *Grégoire de Saint Vincent,* mathématicien jésuite du XVIIème siècle. Un texte de celui ci a été étudié en classe par les élèves. Cette expérience est décrite dans l'article qui suit. Elle rentre tout à fait dans le type de travail expérimenté par le groupe M:A.T.H. : à travers un texte original, les élèves découvrent comment a été mis en évidence le lien entre les Logarithmes et l'hyperbole.

Enfin l' étude de la violente polémique entre Descartes et Fermat à propos de la détermination des tangentes à une courbe et des difficultés de compréhension de ces deux grands mathématiciens illustre la différence de leur approche du problème et de leurs sensibilités. Cette polémique est caractéristique de ces controverses passionnées qui ont eu lieu entre scientifiques aux XVIIème et XVIIIème siècles.

Nous attendons toutes vos remarques, suggestions, critiques, notes autour d'expérimentation que vous avez pu effectuer autour de l'histoire des mathématiques. Ce, en vue d'un courrier des lecteurs qui, dans ce numéro sera vide....

BONNES VIEILLES PAGES

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATIK HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES PUBLIÉ PAR

GUSTAF ENESTRÖM.

1894. STOCKHOLM. N° 1.

NEUE FOLGE. 8. BERLIN. MAYER & MÜLLER. Markgrafenstrasse 51.

Preis des Jahrgangs 4 M. Prix par an 5 fr.

NOUVELLE SÉRIE. 8. PARIS. A. HERMANN. Rue de la Sorbonne 8.

Note sur l'histoire de l'infiniment petit.

Par G. VIVANTI à Mantova.*

Introduction.

Si nous essayons de parvenir au concept d'infiniment petit au moyen de la division indéfiniment répétée d'une grandeur continue, par exemple d'un segment rectiligne, nous nous trouvons libres de premier abord de choisir entre deux formes-limites différentes, celle de segment plus petit qu'aucun assignable, et celle de point inétendu. Mais, d'une part, on ne saurait regarder un segment, si petit qu'il soit, comme le résultat final de la division, et par là comme indivisible; de l'autre, la décomposition d'une ligne en points inétendus est une chose inconcevable. On peut échapper à cette double difficulté en envisageant le point, non pas comme le resultat *dernier* de la décomposition de la ligne, mais comme l'élément *premier* capable de lui donner naissance, et en lui attribuant par là *la puissance d'engendrer le continu.* Il naît ainsi, en opposition à *l'infiniment petit ponctuel* ou *nul* et à l'infiniment petit doué d'extension (*infiniment petit déterminé* ou *actuel*), *l'infiniment petit intensif*, c'est à dire inétendu mais ayant l'aptitude à engendrer les grandeurs continues.

Avant même que les discussions sur la nature de l'élément de l'étendue eussent excité l'intérêt des mathématiciens, il s'agita entre ceux-ci une question qui n'en diffère pas essentiellement, celle de *l'angle de contingence.* Cet angle, d'après la prop. 16 du 3e livre des Éléments d'EUCLIDE, est moindre que tout angle rectiligne, c'est donc par rapport à cet angle ce que c'est qu'un infiniment petit par rapport à une grandeur finie; et l'on a longuement discuté s'il est absolument nul ou s'il a quelque grandeur.

Mais l'histoire de l'infiniment petit doit avoir égard, non-seulement aux façons diverses dont il a été conçu, mais aussi aux formes sous lesquelles il a été introduit dans l'analyse.

L'introduction de l'infiniment petit dans les mathématiques a eu lieu à une époque relativement récente, lorsque les procédés des anciens (connus plus tard sous le nom de *méthode d'exhaustion*) ne parurent plus offrir une voie assez courte et directe pour la résolution des nombreux problèmes géométriques et mécaniques auxquels donnait naissance le progrès continuel des arts et des sciences. C'est alors que naquit et se développa la *méthode des indivisibles;* mais celle-ci fut bientôt remplacée par d'autres plus parfaites, qui peuvent se grouper sous deux titres principaux: *méthode des infiniment petits* et *méthode des limites.*

* Abrégé d'un travail plus étendu paru sous le titre: *Il concetto d'infinitesimo e la sua applicazione alla matematica* (Mantova, Mondovi 1894).

Dans cette courte note j'essaierai de tracer rapidement l'histoire de l'infiniment petit jusqu'à CAUCHY. Le plan que je suivrai résulte naturellement des considérations exposées plus haut; il me reste seulement à avertir que, quoique la question dont il s'agit ici se trouve aux bornes des mathématiques et de la philosophie, je ne dépasserai pas en général ces bornes, et je passerai sous silence, sauf quelque exception, tous ceux qui ont considéré l'infiniment petit en philosophes seulement et sans égard à son application aux mathématiques.

I. Le concept d'infiniment petit.

§ 1. *L'infiniment petit nul.* — Il est bien naturel de se demander avant tout qu'est ce que c'était l'infiniment petit pour l'inventeur du Calcul infinitésimal. Malheureusement l'examen des écrits de LEIBNIZ ne nous amène à aucune conclusion positive à ce sujet; car à côté de quelque morceaux ou il nie l'existence de grandeurs infiniment petites autres que le zéro, nous en trouvons d'autres où il exprime une opinion diamétralement opposée, et d'autres encore où il se déclare incertain. On rencontre même dans ses ouvrages de jeunesse sur la dynamique le concept d'infiniment petit intensif (*conatus*), tel qu'il a été introduit dans la science par HOBBES.

On remarque la même inconséquence chez quelques-uns de ses élèves les plus illustres, tels que GRANDI et JACQUES BERNOULLI. En effet, pendant que l'un et l'autre affirment qu'on ne saurait point concevoir de quantité infinie ou infiniment petite déterminée, le premier dit qu'on doit regarder toute chose comme actuellement infinie, attendu qu'elle est indéfiniment divisible, le second observe que l'axiome que les différences de grandeurs égales sont égales n'a plus lieu en général si ces différences sont infiniment petites par rapport aux grandeurs mêmes.

WOLF aussi, qui dans son *Ontologia* écrit: *Infinite parva impossibilia sunt,* s'exprime bien moins clairement dans sa *Dissertatio algebraica,* où il semble même admettre l'existence de grandeurs infiniment petites déterminées.

D'ALEMBERT déclara le premier ouvertement la guerre aux concepts d'infini et d'infiniment petit, en soutenant que ce ne sont vraiment que des manières abrégées de s'exprimer, et que le calcul infinitésimal n'a à faire en réalité qu'à des grandeurs finies.

Son grand contemporain EULER, en partant du même principe, à savoir, qu'il n'y a pas d'autre infiniment petit que le zéro, mais ne pouvant se résoudre à nier absolument à l'infiniment petit toute existence réelle, parvint à une conclusion inattendue. Il remarqua que, pendant que la différence de deux grandeurs nulles est toujours nulle, leur rapport peut être quelconque, car $n \cdot 0 = 0$; mais, au lieu d'en déduire que le rapport de deux zéros est complètement indéterminé, il en conclut au contraire qu'on peut envisager ce rapport comme une vraie grandeur. Rien ne s'opposait donc, suivant lui, à ce qu'on regardât comme tel le rapport de deux infiniment petits, bien que ceux-ci fussent rigoureusement nuls. Il faut toutefois remarquer qu'EULER ne réussit pas à établir le calcul sur un principe si peu satisfaisant, mais dut recourir pour cela au concept de limite, ainsi qu'on le verra plus loin (II, § 4).

§ 2. *L'infiniment petit actuel.* — Il y a bien peu d'auteurs qui aient affirmé ouvertement l'existence de grandeurs différentes de zéro mais moindres qu'aucune grandeur assignable. Le plus illustre parmi eux c'est JEAN BERNOULLI, qui eut une longue discussion avec LEIBNIZ à ce sujet. Il résulte aussi de la correspondance de LEIBNIZ, que L'HOSPITAL et VARIGNON auraient admis l'infiniment petit actuel. A une époque plus récente, on peut citer FONTENELLE et POISSON, auxquels il faut peut-être ajouter LESAGE, le premier inventeur d'un télégraphe électrique; voir sa lettre publiée par LHUILIER à la fin de son *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs.*

§ 3. *L'angle de contingence.* — La proposition d'EUCLIDE rappelée au début avait amené les mathématiciens à regarder l'angle de contingence comme une vraie grandeur de la même nature que les angles rectilignes. Mais il s'ensuivait de là un curieux paradoxe. Un rayon mobile peut partir d'une position donnée et aller à une autre sans former jamais avec la première position un angle égal à l'angle de contingence; donc une grandeur variant continuellement peut aller d'une valeur plus petite à une plus grande sans passer nécessairement par toutes les valeurs comprises entre celles-ci. Et il y a aussi une autre difficulté. L'existence de l'angle de contingence est en contradiction avec la première proposition du dixième livre d'EUCLIDE, plus connué sous le nom de *postulatum d'Archimède.* CAMPANUS, et plus tard STIFEL et CARDAN, regardèrent comme admissible le premier des deux paralogismes (ainsi que CARDAN les appellait); quant au second, ils tentèrent de le lever en disant que l'angle de contingence et l'angle rectiligne ne sont pas des grandeurs homogènes et ne tombent point par conséquent sous la proposition citée. Cette idée a été accueillie par DE FOIX CANDALLA ou FLUSSATE, et ensuite aussi par CLAVIUS et par ses défenseurs.

C'est seulement dans la seconde moitie du 16e siècle, que PELETIER eut le courage de déclarer que l'angle de contingence est absolument nul. CLAVIUS combattit âprement ses conclusions, qu'il jugea même contraires à EUCLIDE, et soutint que les angles de contingence sont de vraies grandeurs, et qu'il ne sont pas tous égaux; pendant que GUIDO UBALDO DEL MONTE exprimait le même avis à l'occasion d'une question de mécanique soulevée par TARTAGLIA.

Bientôt la discussion devint générale entre les savants de l'époque, et se prolongea pendant près d'un siècle. COMMANDIN, VIÈTE, GALILÉE, VIVIANI, WALLIS se rangèrent du côté de PELETIER; HOBBES, LEIBNIZ, NEWTON de celui de CLAVIUS.

COMMANDIN démontre que l'angle de contingence est nul, en le regardant comme l'angle extérieur d'un polygone d'un nombre infini de côtés. VIÈTE apporte plusieurs raisons à l'appui de la thèse de PELETIER; il remarque entre autres que les angles de contingence sont tous égaux entre eux, et qu'ils ne peuvent pas être mesurés par des arcs de circonférence.

GALILÉE, suivi par son élève VIVIANI, s'approprie les raisonnements de VIÈTE, et insiste particulièrement sur le premier les deux paralogismes rappelés plus haut. WALLIS recueille dans deux longs opuscules tous les arguments de ses prédécesseurs; il observe en outre d'après PROCLUS, qu'on peut dans quelques cas former un angle rectiligne égal à un angle curviligne donné, et en déduit qu'on ne peut pas regarder les angles rectilignes et les angles curvilignes comme hétérogènes, de façon que la justification du deuxième paralogisme alléguée par les adversaires tombe d'elle-même.

HOBBES, ennemi déclaré de WALLIS, n'épargna point ceux de ses écrits qui se rapportent à l'angle de contingence. Il reproduisit en grande partie les raisons de CLAVIUS, en y ajoutant toutefois une remarque qui contient en germe la solution véritable de la question: c'est à dire, qu'il y a une commune mesure pour les angles de contingence, mais qu'il n'y en a pas une pour ces angles et les angles rectilignes pris ensemble; ou dans notre langage, que dans la classe de grandeurs formée par les angles rectilignes et par les angles de contingence ceux-ci sont infiniment petits par rapport à ceux-là. Cette circonstance ne pouvait pas échapper aux deux principaux fondateurs de la nouvelle analyse, LEIBNIZ et NEWTON; tous les deux en effet regardèrent l'angle de contingence comme un exemple intéressant de leurs concepts.

Enfin TACQUET et RENALDINI, deux géomètres du 17e siècle, se déclarèrent contraires en même temps à PELETIER et à CLAVIUS; ils nièrent en effet qu'on puisse appliquer aux angles les concepts d'égalité et d'inégalité, attendu que, suivant eux, l'angle n'est pas *quantitas,* mais *modus quantitatis.*

Après une si vive discussion, la question s'apaisa vers la fin du 17e siècle; parmi les auteurs peu nombreux qui en traitèrent plus tard on peut citer FONTENELLE, KARSTEN, SCORZA.

§ 4. *L'infiniment petit intensif.* — Parmi les formes différentes qu'affecte ce concept chez les divers savants, il faut en distinguer deux principales, qu'on peut nommer *forme cinématique* et *forme dynamique.* En considérant p. ex. le point comme l'élément générateur du continu, la forme cinématique se borne à remarquer le fait de la génération de la ligne par le mouvement, tandis que la forme dynamique fixe particulièrement son attention sur la *tendance* ou aptitude du point générateur à donner naissance au continu. Les deux formes doivent leur existence à deux philosophes: GIORDANO BRUNO et THOMAS HOBBES.

Déjà, avant BRUNO, NICOLAS DE CUSA avait appelé la ligne l'évolution du point. Mais c'est à BRUNO que revient l'honneur d'avoir renversé la question fondamentale d'où tire son origine le concept d'infiniment petit, en affirmant qu'on doit regarder l'élément (*minimum*) non pas comme le *dernier* résultat de la division du continu, mais comme le *premier* élément générateur de l'extension. Le *minimum* devient ainsi pour lui le fondement, non seulement de la nature, mais aussi de notre connaissance de la nature, l'instrument sans lequel rien ne peut être conçu, le point auquel toute étude doit commencer.

On ne sait pas quelle influence aient exercé ces idées sur SOVERO et CAVALIERI, les deux savants à l'oeuvre simultanée desquels est due l'introduction du concept de mouvement comme fondement de la géométrie.

SOVERO dit que la géométrie ne peut pas subsister sans le mouvement, puisque les définitions qu'on y donne ordinairement ne nous présentent point une idée claire des formes géométriques, et, ce qui est pis, ne nous assurent même pas de leur possibilité. On définit, dit-il, le cercle comme une figure renfermée dans une ligne plane dont tous les points sont équidistants d'un point intérieur nommé centre; mais n'est-il pas permis de douter de l'existence d'une telle figure? Prenons maintenant une ligne droite, et faisons-la tourner dans un plan autour de l'une de ses extrémités; on verra l'autre extrémité engendrer le cercle, et l'on sera assuré de son existence et de sa propriété caractéristique. Mais ce n'est pas tout, car le mouvement est tout aussi bien nécessaire dans la géométrie constructive que dans la géométrie spéculative, n'étant pas possible de concevoir une construction quelconque sans l'aide du mouvement.

CAVALIERI regardait lui aussi assurément les surfaces comme engendrées par le mouvement d'un ligne; il considérait p. ex. les différentes ordonnées du contour d'une surface plane comme les positions successives (*vestigia*) de la droite mobile génératrice. Malheureusement l'infiniment petit intensif, sous quelle forme qu'on le prenne, n'est pas susceptible d'être introduit dans l'analyse, où l'on a à faire seulement à des grandeurs extensives. C'est ainsi que CAVALIERI se vit obligé de fonder sa méthode des indivisibles sur un principe tout différent, celui de la division des surfaces en une infinité de droites. Mais comme il n'eut pas soin de distinguer clairement les deux points de vue, plusieurs écrivains (p. ex. GULDIN, WALLIS, TAYLOR, GRANDI, FRISI, MONTUCLA, BOSSUT, etc.) ont été amenés à lui attribuer l'opinion qu'une surface soit effectivement décomposable en une infinité de lignes. Ce malentendu lui procura bien des adversaires, et il est curieux à voir que GULDIN, tout en combattant le concept faussement attribué à CAVALIERI, s'appropriait son concept vrai de la génération des grandeurs géométriques par le mouvement. A cette même idée sont inspirés les ouvrages de BARROW et de JEAN CÉVA.

Vers cette même époque, des recherches et des expériences qui sont restées immortelles, avaient fait de GALILÉE le créateur de la dynamique scientifique. Il avait le premier fixé son attention sur un élément essentiel du mouvement, dont on n'avait pas jusqu'alors assez tenu compte, je veux dire sur la tendance du corps mobile à poursuivre son mouvement d'une façon déterminée (*momento*). HOBBES donna au concept de GALILEI une bien plus grande étendue, en faisant du *momento*, qu'il appela *conatus*, l'élément générateur, non seulement du mouvement, mais aussi de tout continu, puisque, suivant HOBBES, on peut regarder toute grandeur continue comme engendrée par le mouvement. Le *conatus* est donc un mouvement le long d'un espace et pendant un temps moindre qu'aucun assignable, il est incomparable à tout mouvement, mais deux *conatus* sont comparables entre eux. Et la vitesse est le mouvement envisagé comme la *puissance* en vertu de laquelle un point parcourt une longueur donnée dans un temps donné.

Peu après le *conatus*, sous son nom primitif de *momentum*, apparait dans les recherches mathématiques de NEWTON, qui, en regardant les grandeurs comme nées du mouvement (*fluentes*), se propose d'en calculer les variations à l'aide des vitesses (*fluxiones*) avec lesquelles elles augmentent ou diminuent, vitesses qui sont proportionnelles aux moments. Ce même concept se retrouve chez MAC-LAURIN, et aussi, sous une forme très peu différente, chez TAYLOR.

II. L'application de l'infiniment petit aux mathématiques.

§ 1. *Méthode d'exhaustion.* — Le souvenir le plus ancien de l'usage de l'infini en mathématiques c'est la quadrature du cercle d'ANTIPHON. Ce géomètre inscrivit, comme on sait, dans le cercle des polygones réguliers de 4, 8, 16, ... côtés, et affirma qu'en continuant de la sorte on parviendrait enfin à un polygone, dont les côtés, grâce à leur petitesse, se confondraient avec la circonférence. Les géomètres grecs postérieurs n'acceptèrent point, et à bon droit, cette conclusion comme rigoureuse; au contraire ils s'efforcèrent de développer les mathématiques en dehors de toute notion de l'infini. De là naquit la méthode célèbre dont EUCLIDE et ARCHIMÈDE firent un usage si étendu, et qui consiste en ce qu'on réduit l'étude d'une figure donnée à celle d'une autre de nature différente, mais dont la grandeur et la forme peuvent différer de celles de la première aussi peu que l'on veut. Au 17e siècle VALERIO, TACQUET et RENALDINI donnèrent une forme plus générale et systématique à cette méthode, qui prit le nom de *méthode d'exhaustion*.

Il est remarquable, que presque tous les principaux fondateurs de l'analyse moderne — comme KEPLER, ROBERVAL, FERMAT, WALLIS, PASCAL, LEIBNIZ, NEWTON, JEAN BERNOULLI — ont regardé les méthodes modernes comme essentiellement identiques à celle des anciens, dont elles ne constitueraient qu'une simplification; tandis qu'au contraire depuis la moitié du 18e siècle on s'est plutôt efforcé d'en chercher et d'en éclaircir les différences. Je ne m'arrête point ici sur cette question, qui n'a peut-être pas un intérêt immédiat pour notre argument.

§ 2. *Méthode des indivisibles.* — Suivant LIBRI, LÉONARD DE VINCI aurait déterminé le centre de gravité de la pyramide en la décomposant en plans parallèles à la base. Mais le vrai précurseur de CAVALIERI c'est KEPLER, qui, pour calculer le rapport des volumes des solides, les regarde *veluti plana corporata*, comme des plans devenus corps.

La méthode de CAVALIERI s'appuie sur le principe suivant: Si deux surfaces planes sont comprises entre deux mêmes parallèles, et si l'on imagine de mener toutes les droites parallèles à celles-ci, les deux surfaces auront entre elles le même rapport que les sommes des segments de ces parallèles contenus respectivement dans l'intérieur des deux surfaces. Les deux sommes étant évidemment infinies, il s'agit en réalité de déterminer la limite du rapport des sommes des segments lorsque le nombre des parallèles croît indéfiniment. La détermination de cette limite, que CAVALIERI effectuait dans les différents cas à l'aide d'artifices spéciaux, fut rendue plus aisée et plus régulière par WALLIS, grâce à l'usage de concepts arithmétiques et à l'étude de quelques series infinies. La méthode des indivisibles, dont ROBERVAL réclamait la priorité, et dont plusieurs mathématiciens (GULDIN, TACQUET, BETTINI etc.) attaquaient les fondements, trouva une expansion rapide en Italie et à l'étranger; parmi ses adeptes on peut signaler TORRICELLI, DEGLI ANGELI, CASATI, JEAN CÉVA, GRANDI, WHITE, SCHOOTEN, WALLIS.

GRÉGOIRE DE S. VINCENT développa dans son *Opus geometricum* une méthode, qui, quoique semblable à celle de CAVALIERI dans la forme, en diffère dans le fond, parce que les démonstrations y procèdent toujours à la façon des anciens.

§ 3. *Méthode des infiniment petits.* — L'idée que le cercle est un polygone d'un nombre infini de côtés, née à une époque très ancienne, repoussée ensuite par la rigueur de la science grecque, reparaît après bien des siècles chez NICOLAS DE CUSA, STIFEL, COMMANDIN, VIÈTE; KEPLER en fait l'application à la détermination de la surface du cercle, qu'il regarde comme composé d'une infinité de triangles isoscèles égaux ayant leur sommet commun au centre. A cette même époque prenait naissance la méthode des indivisibles; mais le principe de la décomposition des surfaces en lignes était accueillie avec défiance par beaucoup d'esprits. Ce fut alors qu'on conçut l'idée de substituer aux lignes rigoureusement indivisibles, des bandes superficielles très-minces, formées par un système d'ordonnées équidistantes en nombre arbitrairement grand (ROBERVAL, PASCAL). On pouvait transformer ces bandes à contour mixtiligne, par la suppression d'une portion triangulaire, en des rectangles, dont la surface totale était égale au produit de la somme des ordonnées moins une par leur distance constante δ, et il était possible dans les cas ordinaires d'établir, qu'on peut augmenter suffisamment le nombre des ordonnées pour que la somme des triangles qu'on néglige devienne arbitrairement petite. Il est aisé de voir que le résultat ainsi obtenu ne diffère de celui qu'aurait fourni la méthode des indivisibles que par le facteur constant δ, destiné d'ailleurs à disparaître lorsqu'on calculerait le rapport de deux surfaces. Mais cette différence prenait une importance particulière de ce fait qu'elle introduisait dans le calcul une quantité δ de grandeur arbitrairement petite, c'est à dire un *infiniment petit;* car cet élément allait bientôt devenir un aide précieux pour l'étude des problèmes fondamentaux qui hantaient la pensée des savants de l'époque. Je fais allusion spécialement à la recherche des maxima et des minima et à la détermination des tangentes aux lignes courbes.

FERMAT donna la règle suivante pour la recherche des maxima et des minima d'une fonction $f(x)$. On écrit l'équation approchée (*adaequatio*) $f(x+\varepsilon)=f(x)$, ou $f(x+\varepsilon)-f(x)=0$, on divise par ε et l'on fait ensuite $\varepsilon=0$; l'équation ainsi obtenue donnera les valeurs cherchées de x. HUYGÉNS commente cette règle en disant que, si x est une valeur pour laquelle $f(x)$ est maximum ou minimum, il doit y avoir au voisinage de x deux valeurs $x-\delta$, $x+\varepsilon$ telles que $f(x+\varepsilon)=f(x-\delta)$, ou bien, en posant $x-\delta=x_1$, $\delta+\varepsilon=e$:

$$f(x_1+e)=f(x_1),$$

et par conséquent, que les valeurs qu'on obtiendra de cette relation en y regardant e comme *infiniment petite* — c'est à dire en divisant par e et en négligeant ensuite tous les termes contenant e — rendront la fonction $f(x)$ maximum ou minimum.

L'un et l'autre appliquèrent leur règle au problème des tangentes. C'est justement ce dernier problème qui amena BARROW à la considération du *triangle caractéristique*, formé par les incréments simultanés de l'abscisse, de l'ordonnée et de l'arc. Ce triangle étant semblable à celui formé par la sous-tangente, l'ordonnée et la tangente, on peut déduire du rapport des incréments de l'ordonnée et de l'abscisse celui de l'ordonnée et de la sous-tangente, et par là mener la tangente à la courbe au point considéré. Il va sans dire qu'on doit ici aussi négliger les termes qui ne sont pas finis.

C'était donc un vrai relâchement dans la rigueur justement vantée des mathématiques qui se produisait à cette époque, et cela ne pouvait pas manquer d'éveiller des doutes dans les esprits timides. Il était reservé à notre siècle de mettre à jamais la nouvelle analyse à l'abri de toute attaque; mais LEIBNIZ sut au moins faire dépendre tout ce qu'il y avait de peu sûr dans son calcul d'un seul point, c. à. d. du lemme fondamental qu'un *infiniment petit, ajouté à une quantité finie, n'en altère pas la valeur et peut par suite être negligé*. D'ailleurs ce n'est pas là le seul titre de gloire de LEIBNIZ. C'est grâce à lui que le calcul différentiel est devenu un algoritme général, applicable dans tous les cas, directement et sans tâtonnements; c'est lui aussi qui a découvert le lien tout à fait simple existant entre le problème des quadratures et celui des tangentes, en rendant ainsi possible la création d'un vrai *calcul intégral*. La méthode leibnitienne a été exposée d'une façon systématique par L'HOSPITAL dans son *Analyse des infiniment petits*, en partant de ces deux postulats que l'auteur regarde comme évidents: qu'on peut prendre l'une pour l'autre deux quantités dont la différence est infiniment petite, et qu'on peut envisager une ligne courbe comme un polygone d'un nombre infini de côtés. VARIGNON, le plus illustre parmi les commentateurs de l'*Analyse*, fit de ses *Eclaircissements* un ouvrage presque original, où l'on remarque une tendance prononcée vers la méthode des limites.

On trouve aussi dans l'ouvrage de GRANDI: *De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus disquisitio geometrica* une exposition complète des principes du calcul infinitésimal. Enfin on doit signaler comme le premier traité de calcul intégral les *Lectiones mathematicae de calculo integralium aliisque* de JEAN BERNOULLI.

§ 4. *Méthode des limites.* — Cette méthode diffère de celles des indivisibles et des infiniment petits en ce qu'elle ne se fonde sur aucun lemme ou postulat particulier, et se sert seulement des moyens que lui fournit l'algèbre, et des théorèmes élémentaires sur la limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient.

La *Vera circuli et hyperbolae quadratura* de JACQUES GREGORY, ouvrage très remarquable bien que manqué, est peut être l'essai le plus ancien sur la méthode des limites, mais c'est NEWTON qui en fit le premier un usage étendu dans ses *Principia* en la fondant sur le théorème suivant: Deux grandeurs, dont la différence devient en un temps fini moindre qu'aucune assignable, deviennent enfin égales. Plus tard, en combinant la méthode des limites avec le concept de vitesse, il créa la *méthode des fluxions*, dont j'ai déjà rappelé le principe plus haut (I, § 4), et qui a été exposée dans tous ses détails et avec ses applications par MAC-LAURIN. On peut rapprocher de celle-ci la *méthode des incréments* de TAYLOR.

Ainsi que je l'ai déjà remarqué, le traité de calcul différentiel d'EULER est fondé effectivement sur le principe des limites, bien qu'il n'en soit pas ainsi en apparence; il l'avoue lui-même dans sa préface, où il dit qu'on doit concevoir les incréments des variables comme toujours décroissants, de façon que le rapport de ses incréments tend à une certaine limite, qu'il atteint lorsque les incréments deviennent absolument nuls.

Pendant que D'ALEMBERT ouvrait la campagne contre les concepts d'infini et d'infiniment petit, LANDEN, KRAMP, ARBOGAST, et plus tard LAGRANGE, tentaient d'établir des méthodes analytiques indépendantes de ces concepts, et en 1784, l'Académie de Berlin invitait les savants de tous les pays à présenter une théorie claire et précise de ce qu'on appelle *infini* en mathématiques, et à expliquer comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'un concept contradictoire, tel que celui de *grandeur infinie*. Le prix fut adjugé à LHUILIER, qui dans son *Exposition élémentaire* s'était proposé de montrer que la *méthode des anciens, convenablement étendue, suffit pour établir d'une manière certaine les principes des nouveaux calculs*. Mais l'extension qu'il présente transforme simplement la méthode des anciens dans la méthode des limites; voici en effet son théorème fondamental: *Si une quantité variable, susceptible de limite, approche d'autant plus de jouir d'une propriété, qu'elle approche d'avantage de sa limite, de manière qu'il n'y ait aucune limite à la capacité qu'elle a de jouir de cette propriété, sa limite jouit de cette propriété.* Je mentionne seulement en passant un mémoire de KARSTEN occasionné par le même concours, mais ne contenant rien de particulièrement remarquable. C'est peut-être aussi à la suite du concours de Berlin que CARNOT écrivit ses *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, publiées seulement en 1797. Dans cet opuscule, qui eut un grand retentissement, CARNOT s'acharne contre ceux qui voudraient remplacer la méthode leibnitienne par d'autres moins simples et directes. Il établit l'exactitude de la méthode infinitésimale en s'appuyant sur deux considérations: celle de l'indétermination des différentielles et celle de l'élision des erreurs. Le principe d'où il part est tout à fait juste, mais son procédé est susceptible d'une remarquable simplification, car l'indétermination des différentielles suffit à elle seule pour justifier pleinement la méthode de LEIBNIZ, et l'élision des erreurs n'en est qu'une conséquence. C'est ce qu'aperçut sans doute CAUCHY, qui trouva qu'il suffisait de définir l'infiniment petit d'une façon précise et convenable, pour lever tout doute sur l'exactitude de la méthode infinitésimale. Il définit donc l'infiniment petit comme une grandeur variable ayant pour limite zéro, et cela permit de démontrer immédiatement ce lemme fondamental, qui avait été jusqu'alors la pierre d'achoppement dans le grand édifice élevé par LEIBNIZ.

Ainsi les deux méthodes, déjà opposées l'une à l'autre, se fondaient enfin en une seule, qui, joignant la rigueur à la simplicité, prenait son départ d'une définition précise empruntée à la méthode des limites pour procéder ensuite suivant le langage et le mécanisme de la méthode infinitésimale.

ANTVERPIÆ, APVD IOANNEM ET IACOBVM MEVRSIOS. ANNO. M.DC. XLVII.
Cum priuilegio Cæsareo et Regis Hispaniarum.

La quadrature de l'hyperbole d'après Grégoire de Saint Vincent

Maryvonne Hallez

L'HOMME

Grégoire de Saint-Vincent est né à Bruges le 8 septembre 1584 et mort à Gand le 27 janvier 1667.

Il est élève de la Compagnie de Jésus à Bruges puis, sur les instances du jésuite Clavius[1] est envoyé au collège romain suivre des cours de philosophie, de théologie et de mathématiques. Il rencontre Galilée dont il défend vigoureusement les théories lors d'une célèbre séance au collège romain en 1611. De retour en Belgique, il est ordonné prêtre à Louvain le 23 mars 1613. De 1613 à 1625 il enseigne les mathématiques. Là, comme à Rome, il se fait remarquer par ses brillantes capacités ; sa générosité et sa fougue lui font envisager un départ en Chine mais son supérieur préfère utiliser ses compétences en Belgique. De 1617 à 1625 le jésuite flamand s'attaque à la quadrature du cercle. Et, en 1625, il demande au général des jésuites Vitelleschi, l'autorisation de publier le résultat de ses recherches. Vitelleschi s'adresse à son conseiller Grienberger, successeur de Clavius.

A la lecture du manuscrit de Grégoire de Saint Vincent, Grienberger est émerveillé ; il écrit à Vitelleschi le 11 octobre 1627 : "Saint-Vincent est un homme prodigieux, l'égal d'Apollonius, d'Archimède et de Pappus". Dans ce remarquable manuscrit (Table des matières (200 propositions concernant ...) il fait oeuvre originale. Comme on va le voir, il prétend avoir réussi "la quadrature du cercle ..." [2].

Rien d'étonnant à ce que Grienberger pointe des lacunes dans les raisonnements concernant ce "grand problème". Eût-il modestement intitulé son manuscrit "Opus geometricum", l'imprimatur eût pu être donné quand même, mais l'auteur tenait au titre complet "Opus geometricum quadraturae circuli et sectionem coni Decem libris

---

[1]Clavius (1537-1612) célèbre professeur de mathématiques, à l'origine de la réforme des études mathématiques dans les collèges jésuites.

[2]Il est un des derniers quadrateurs; à cette époque on commence à se douter de son impossibilité; Stifel en 1544 l'avait déjà annoncé .

comprehensum"[3]. Finalement l'autorisation de publication n'est pas donnée à ce moment là par Vitelleschi et Grégoire de Saint-Vincent dut attendre 1647 pour voir son oeuvre imprimée avec le titre complet donné ci-dessus auquel il ajouta un frontispice "Problema Austriacum plus Ultra Quadratura Circuli"[4]

Ce titre nous oblige à préciser un épisode de la vie de Grégoire de Saint-Vincent: en 1628, il est envoyé à Prague pour participer à la glorification de l'Eglise catholique entreprise par la Contre-Réforme dans sa lutte contre le Protestantisme et ceci sous deux formes la diffusion du savoir mathématique et la construction d' églises baroques. En 1631, pendant le "sac de Prague" par les suédois, notre auteur perd la plupart de ses manuscrits. Il retourne dans les Flandres au collège de Gand mais découragé, affaibli par des attaques d'apoplexie il abandonne quasiment ses recherches pendant quinze ans. Mais heureusement, un de ses collègues jésuites de Prague, Rodrigue Arriaga avait pu sauver des manuscrits lors de l'attaque suédoise et les avait envoyés à Vienne où ils avaient dormi quinze ans. Nous devons avouer notre ignorance sur la manière dont Grégoire de Saint Vincent les récupère, mais en même temps que ses manuscrits notre jésuite retrouve son énergie et surveille de près leur publication sans cette fois, semble-t-il, rencontrer de difficultés. L'oeuvre est imprimée en 1647 à Anvers. Les louanges et les critiques qui suivent la publication suffisent à redonner au mathématicien l'enthousiasme nécessaire pour reprendre une activité scientifique : nous pouvons en prendre connaissance dans une publication posthume de 1668 : "Opus posthumum ad Mesolabium"[5].

---

[3]Oeuvre géométrique relative à la quadrature du cercle et aux sections du cône, comprenant dix livres
[4]Problème Autrichien
[5] mésolabe : instrument de mathématiques dû à Eratosthène formé de trois parallélogrammes mobiles sur une coulisse et qui donnait des moyennes proportionnelles et résolvait mécaniquement le problème célèbre de la duplication du cube. Grand Larousse encyclopédique.

LA QUADRATURE DE L'HYPERBOLE

A- La proposition 109 du Livre VI de l'Opus Geometricum.

1. La proposition de Grégoire de Saint-Vincent

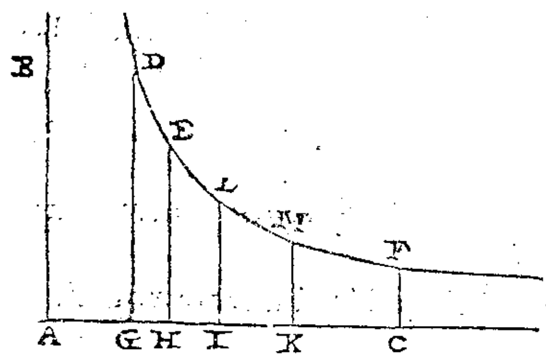
Le livre comprend 1226 pages réparties en dix livres. Les résultats qui attirent tout de suite l'intérêt des grands scientifiques de l'époque comme Huygens et Leibniz concernent les merveilleuses propriétés de l'hyperbole que l'on trouve dans le livre VI. Leibniz n'hésite pas à écrire à ce propos que Grégoire de Saint-Vincent est l'"égal de Fermat et de Descartes".

La propriété la plus fameuse, la proposition 109, qui fait l'objet du travail avec les élèves et dont nous détaillerons la démonstration est énoncée ainsi :

PROPOSITIO CIX.

Sint AB, AC aſymptoti hyperbolæ DEF : diuiſâque AC, vt AG AH, AI, AK, AC continuæ ſint proportionales, ponantur GD, EH LI, MK, FC, ipſi AB æquidiſtantes.

Dico HD, IE, KL, CM ſegmenta eſſe æqualia.



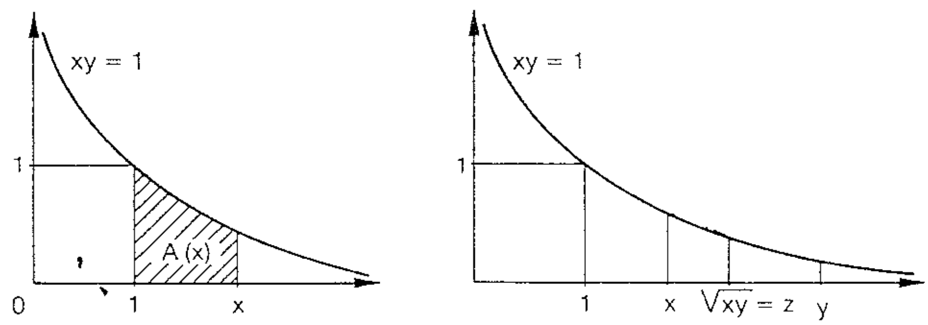
"Soient AB et AC les asymptotes de l'hyperbole DEF.
On divise AC de telle façon que AG, AH, AI, AK, AC soient proportionnels.
On trace GD, EH, LI, MK, FC parallèles à AB.
Je dis que HD, IE, KL et CM sont des segments égaux". [6]

2. La postérité de la proposition

Deux ans après la publication de l'Opus, en 1649, un autre jésuite, Alphonse de Sarasa, publie une "solution au problème du Révérend Père Marin Mersenne"[7] texte dans lequel il reprend le résultat de Grégoire de Saint-Vincent en explicitant le lien entre suite géométrique des abscisses et suite arithmétique des aires sous l'hyperbole, comme on peut le lire dans "Mathématiques au fil des âges" [8] :

"Si A(x) est l'aire hachurée sous l'hyperbole équilatère d'équation $xy = 1$, pour trois nombres x, y et z en progression géométrique ($z = \sqrt{xy}$) $A(z) - A(x) = A(y) - A(z)$ ... Cette relation est celle qui permet le calcul des logarithmes. A. de Sarasa écrit :

Ces aires peuvent servir de logarithmes "



---

[6] le segment HD est la surface mixtiligne GHED. La traduction est de J. Dhombres.

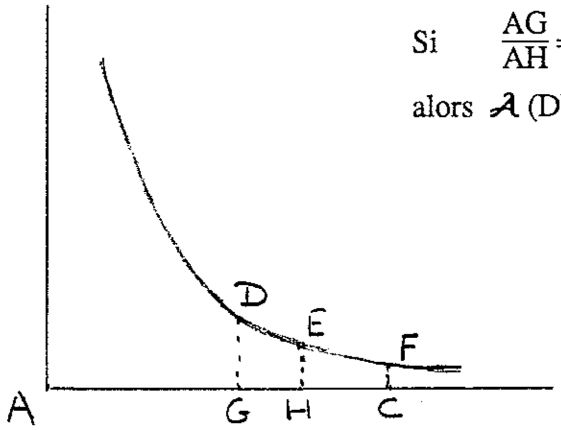
[7] Marin Mersenne (1588-1648) "grand artisan de la vie scientifique en commun, religieux de l'ordre des Minimes qui consacre sa vie à la science". Taton Histoire générale des sciences t.2 p.188.
Dans une lettre à Christian Huygens datée du 2 mai 1648, Marin Mersenne critique Grégoire de Saint-Vincent et déclare qu'il n'a pas résolu son "problème à savoir : Etant données trois grandeurs rationnelles, ou irrationnelles et deux de leur logarithmes étant aussi donnés, trouver géométriquement le logarithme de la troisième". Oeuvres complètes Huygens tome 1 p : 89.

[8] Commission Inter-IREM Epistémologie et histoire, "Mathématiques au fil des âges" Gauthier-Villars, Paris , p.188

B- Les propositions 102 à 107

Regardons maintenant comment Grégoire de Saint-Vincent aboutit à la proposition 109 citée plus haut.

1. Il démontre que si les abscisses sont en progression géométrique, alors les aires des trapèzes rectilignes sont égales ; autrement dit :



Si $\frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AC}$

alors $\mathcal{A}$ (DEHG) = $\mathcal{A}$(HEFC) [8]

Sa démonstration utilise le langage des proportions et la propriété suivante de l'hyperbole DEF qui est la manière habituelle à l'époque de définir l'hyperbole :

Pour toute hyperbole on a : $\frac{AG}{AH} = \frac{HE}{GD}$ (dessin ci-dessus)

2. Pour montrer l'égalité des aires mixtilignes DEHG et EHCF, il utilise la méthode grecque de quadrature qui consiste à approcher la surface curviligne ou mixtiligne à quarrer, par des polygones dont le nombre de côtés augmente suffisamment. Il apporte à cette méthode une grande innovation : il place <u>une fois pour toutes dans la proposition</u> 116 du livre II intitulé "De Progressionibus" consacré aux quantités proportionnelles <u>le double raisonnement par l'absurde</u>; il met ainsi en préalable de méthode ce que les anciens refaisaient pour chaque cas, autrement dit il "algébrise" [9] le raisonnement. Comme dans les traductions d'Euclide que nous pouvons consulter, Grégoire de Saint-Vincent représente les quantités étudiées par des lignes.

PROPOSITIO CXVI.

Corollarium.

A Duabus quantitatibus AB, CD, auferri possint AE, CF, æqualia, & non minora dimidio ipsarum AB, CD; & à residuis EB, FD rursum auferri possint EG, FH, æqualia & non minora dimidio residuorum: si hoc semper fieri possit, æquales erunt quantitates AB, CD. Patet ex demonstratione propositionis.

---

[8] L'équivalence logique est démontrée dans l'oeuvre par Grégoire de Saint-Vincent.

[9] cf J.Dhombres "Une algèbre des raisons au 17ème siècle; La quadrature de l'hyperbole par Grégoire de Saint-Vincent". A paraître.

Soient deux quantités AB et CD. Soit AB divisée en E, G de sorte que AE ne soit pas inférieure à la moitié de AB, EG pas inférieure à la moitié de EB ; qu'on divise de même manière CD en F et H et soient AE et CF égales.

EG et FH égales ; que "cela puisse se faire toujours". [11]

Je dis que la toute AB [12] *est égale à la toute CD.*

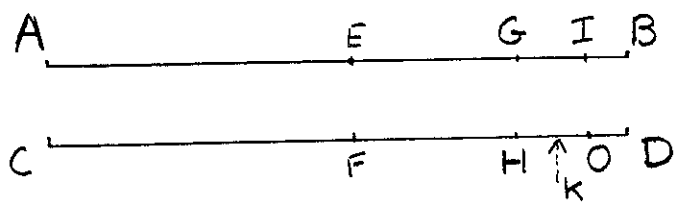
Voici la teneur du raisonnement [13], à l'aide de nos symboles d'égalité et d'inégalité pour faciliter la lecture.

Soient AB et CD les deux quantités données

$$AE = CF \quad AE > \frac{AB}{2} \qquad CF > \frac{CD}{2}$$

$$EG = FH \quad EG > \frac{EB}{2} \qquad FH > \frac{FD}{2}$$

$$GI = HO \quad GI > \frac{GB}{2} \qquad HO > \frac{HD}{2}$$



Supposons AB < CD. Alors il existe K ∈] CD [tel que CK = AB. Saint-Vincent utilise la proposition I du livre X des Eléments d'Euclide :

"Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées".

On peut donc de CD retrancher des parties jusqu' à obtenir un reste plus petit que KD autrement dit il existe O tel que OD < KD donc CO > CK auquel correspond I sur [AB]. Les quantités enlevées aux deux quantités AB et CD sont par hypothèse égales: GI = HO et AI = CO .

On a AI < AB et CO (=AI) > CK (= AB) ce qui est contradictoire.

La supposition AB > CD aboutit elle aussi à une contradiction.

Conclusion AB = CD.

---

11 "hoc semper fieri possit"

12 l'expression désigne le segment [AB]

13 Dans la proposition 116 Grégoire de Saint-Vincent démontre que les quantités AB et CD sont dans le même rapport que les quantités enlevées; l'égalité est étudiée en corollaire comme cas particulier:

ACTIVITES PRELIMINAIRES AVEC LES ELEVES

Découverte des puissantes propriétés de l'hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Remarque : on notera a, b, m_1, m_2, m_3, ... les projections orthogonales respectivement des points A, B, M_1, M_2, M_3, ...sur (x'x).

1. La propriété la plus simple

Montrez que si A appartient à $\mathcal{H}$, l'aire du triangle OAa est indépendante de l'abscisse de A et vaut $\frac{1}{2}$ unité d'aire.

2. Une propriété purement géométrique concernant les aires.

Montrez que si A et B appartiennent à $\mathcal{H}$, l'aire du triangle OAB est égale à l'aire du trapèze AabB.

Montrez qu'il en est de même pour les aires curvilignes OAB et AabB.

3. Enfin les plus étonnantes utilisant des points M_1, M_2, M_3 dont les abscisses x_1, x_2, x_3 , forment une suite géométrique.

a. Montrez que si les abscisses x_1, x_2, x_3, des points M_1, M_2, M_3 de $\mathcal{H}$ forment une suite géométrique, alors les ordonnées y_1, y_2, y_3 forment aussi une suite géométrique de raison inverse.

b. Montrez que la droite (OM_2) coupe $[M_1M_3]$ en son milieu.

c. Montrez que la tangente à $\mathcal{H}$ en M_2 est parallèle à (M_1M_3) avec $x_1=1$ $x_2 = \sqrt{3}$ $x_3 = 3$; puis généralisez à une suite géométrique quelconque x_1, x_2, x_3.

d. Montrez que les trapèzes $M_1\, m_1\, m_2\, M_2$ et $M_2\, m_2\, m_3\, M_3$ ont des aires égales, d'abord pour le cas $x_1=1$ $x_2=\sqrt{3}$ $x_3=3$; puis généralisez.

4. Toutes ces propriétés ainsi que beaucoup d'autres sont énoncées par Grégoire de Saint Vincent en termes de proportions dans les 101 propositions sur l'hyperbole qui précèdent celles que nous allons lire.

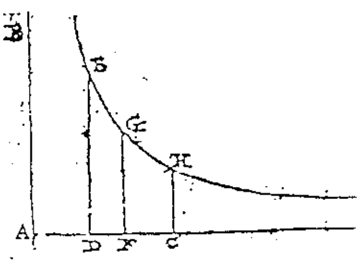
En voici un exemple:

Proposition LXXVIII

Positis denuo asymptotis AC, AB, hyperbolæ EGH. Fiant AD AF, AC proportionales, ducanturq; DE, FG, CH æquidistantes AB Dico ED, GF, HC in continua esse analogia & contra.

Demonstratio.

Ut AD ad AF, sic FG ad DE; & ut AF ad AC, sic HC ad GF: sed AD, AF, AC proportionales sunt, igitur & HC, GF, ED eandem quoque continuant rationem. Similiter ostendetur si ED, GF, HC asymptoto æquidistantes proportionales sunt, esse AD, AF, AC quoque in continua analogia. Quod erat demonstrandum.



Soient AB, AC les asymptotes de l'hyperbole EGH. On trace DE, FG, GH parallèles à AB. Je dis que ED, GF et HC sont en analogie continue et réciproquement.

Démonstration

Comme AD est à AF ainsi FG est à DE et comme AF est à AC ainsi HC est à GF. Mais AD, AF, AC sont dans la même raison....

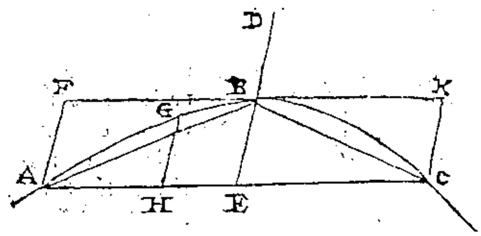
Ecrivez la démonstration complète en langage plus moderne en utilisant comme propriété de l'hyperbole EGH les égalités de rapports $\frac{AD}{AF} = \frac{FG}{DB}$ et $\frac{AF}{AC} = \frac{HC}{GF}$.

HYPERBOLÆ
PARS QVARTA
De ſegmentis hyperbolicis, conuexis & concauis.

tiré du livre "Problema Austriacum plus Ultra Quadratura Circuli" de Grégoire de Saint-Vincent

I **Proposition 102**

a. énoncé [14]



PROPOSITIO CII.

DAtæ hyperbolæ terminatæ, triangulum maximum inſcribere.

Un segment d'hyperbole [15] *étant donné, y inscrire un triangle maximal* [16].

Lisez la proposition 102 et expliquez la construction du triangle maximal inscrit dans l'arc d'hyperbole AC.

---

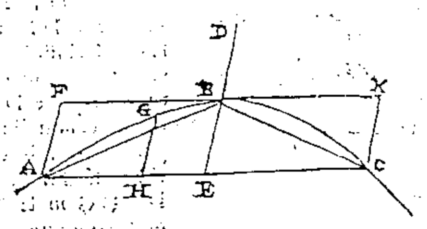
[14] Cette traduction et les suivantes sont dues à Jean Dhombres.

[15] Dans tout le problème comme dans le texte de Grégoire de Saint-Vincent l'étude porte sur une seule branche de l'hyperbole équilatère.

[16] triangle maximal a le sens de triangle d'aire maximum

b. démonstration [17]

Lisez ensuite la construction et la démonstration



Hyperbola ABC, cuius centrum D, terminetur rectâ AC, quâ diuiſâ bifariam in E, ponatur diameter DE, occurrens ſectioni in B, & iungantur AB, CB, dico triangulum ABC eſſe maximum illorum, quę hyperbolæ ABC inſcribi poſſunt. ponatur per B contingens FB, æquidiſtabit illa rectæ AC; ducatur denique quæuis HG, parallela BE, occurrens ſectioni in G. patet G punctum eſſe infra lineam FB, adeoque GH minorem BE. vnde triangulum AGC minus eſt triangulo ABC: triangulum igitur ABC maximum eſt, datæ igitur hyperbolæ terminatæ, &c. Quod erat faciendum.

Construction et démonstration

Que l'hyperbole dont le centre est D soit limitée par une droite AC ; qu'on la divise en deux parties égales en E, puis qu'on pose le diamètre DE qui rencontre la section en B. Qu'on joigne AB et BC. Je dis que le triangle ABC est le plus grand de ceux qui peuvent être inscrits dans l'hyperbole ABC. Qu'on trace par B la tangente FB ; elle sera équidistante de la droite AC (proposition 16 de ce livre). Qu'on mène une droite quelconque HG parallèle à BE, rencontrant la section en G. Il est évident que le point G est au-dessous de la ligne FB, et par conséquent que GH est inférieur à BE. D'où il suit que le triangle AGC est inférieur au triangle ABC. Donc le triangle ABC est le triangle maximal. Donc, des hyperboles définies étant données, etc, ce qu'il fallait réaliser.

Que signifie le mot "équidistante" de la ligne 5 ?

Pourquoi a-t-on (FB) // (AC) ?

Quelle(s) remarque(s) pouvez-vous faire sur les lignes 7, 8 et 9 ?.

Pourquoi a-t-on GH < BE?

II **Proposition 103**

Lisez l' énoncé de la proposition 103 et sa démonstration [18]

PROPOSITIO CIII.

Iiſdem poſitis;

Dico ABC triangulum maius eſſe dimidio ſegmenti ABC.

---

17 Ce que G. de Saint Vincent appelle centre, nous le nommerons plutôt point de rencontre des asymptotes.

Le diamètre correspondant à l'arc d'hyperbole AC est le segment qui joint le centre de l'hyperbole au milieu de la corde [Ac].

18 Chez Grégoire de Saint-Vincent comme chez les Grecs un parallélogramme est nommé par une de ses diagonales.

Demonſtratio.

ERigantur ex A & C æquidiſtantes B E, occurrentes F B contingenti in F & K: quoniam igitur tam A B C triangulum, quam [b] F E parallelogrammum, duplum eſt trianguli A B E, æqualia ſunt parallelogrammum F E, & triangulum A B C: unde F C parallelogrammum duplum eſt trianguli A B C; ſed F C parallelogrammum maius eſt ſegmento A B C, (cùm F K contingens tota cadat extra ſectionem;) triangulum igitur A B C, dimidium parallelogrammi F C, maius quoque eſt dimidio ſegmenti A B C. Quod erat demonſtrandum.

Proposition 103

Même figure. Je dis que le triangle ABC est supérieur à la moitié du segment ABC.

<u>Démonstration</u>

On élève de A et C des équidistantes à BE rencontrant la tangente FB en F et K. Puisqu'aussi bien le triangle ABC que le parallélogramme FE sont le double du triangle ABE , le parallélogramme FE et le triangle ABC sont égaux. Il s'ensuit que le parallélogramme FC est le double du triangle ABC ; mais le parallélogramme FC est supérieur au segment ABC puisque la tangente FK se trouve toute entière en dehors de la section. Donc le triangle ABC, moitié du parallélogramme FC est aussi supérieur à la moitié du segment ABC. Cqfd.

a. Que signifie le "segment" ABC ? (ligne 5)

b. Jutifiez la ligne 4.

c. En nommant p l'aire du parallélogramme FC, t l'aire du triangle ABC et s l'aire du segment ABC récrivez le raisonnement de G. de Saint Vincent.

III Proposition 104

Lisez l'énoncé de la proposition

PROPOSITIO CIV.

HYperbolam A B C, cuius centrum D, ſubtendat recta A C, diuiſa bifariam à diametro D E; iunctiſque A B, C B, ac diuiſis bifariam in F & G; demittantur D F, D G, occurrentes ſectioni in H & I; iunganturque A H, H B; B I, C I.

Dico triangula A H B, B I C, æqualia eſſe.

Proposition 104

Qu'une droite AC divisée en deux parties égales par le diamètre DE, sous-tende l'hyperbole ABC dont le centre est D. Qu'on joigne AB et CB en les divisant en deux en F et G. Puis qu'on abaisse DF et DG qui rencontrent la section en H et I, et qu'on joigne AH et HB ; BI et CI. Je dis que les triangles AHB et BIC sont égaux.

a. Réalisez la figure dans un repère orthonormé $(D, \vec{i}, \vec{j})$ et précisez les coordonnées de B

b. Comparez les aires des triangles DBA et OBC à l'aide du précédent travail.

c. Que peut-on dire de la suite formée par les abscisses de H, B et I ?
   Que pouvez-vous en déduire pour les aires des triangles DHB et DBI?.

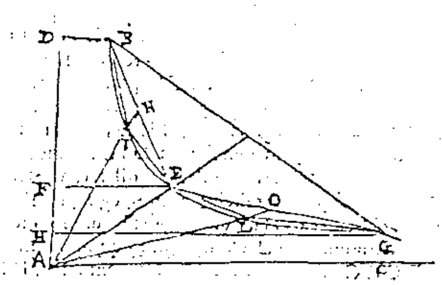
d. Achevez la démonstration de la proposition 104

IV **Proposition 106**

Lisez l'énoncé de la proposition et le début de la démonstration.

Sint AB, AC asymptoti hyperbolæ DEG, positaque ad diametrum AE ordinatim DG: ducantur DE, EG.
Dico segmenta conuexa DIE, GLE æquari.

Demonstratio.



Diuisis ED, GE bifariam in N & O; ponantur diametri AIN, ALO, iunganturque DIE, GLE: erunt igitur DIE, GLE triangula a maxima, & inter se b æqualia, maioraque dimidijs c segmentorum quibus inscribuntur. similiter si residuis vtrimque segmentis triangula inscribantur maxima, ostenditur triangula maxima segmentorum ID, IE æquari triangulis maximis segmentorum EL, LG.

Proposition 106:

Soient AB et AC les asymptotes de l'hyperbole DEG et on pose DG en l'ordonnant au diamètre AE : on mène DE et EG. Je dis que les segments convexes DIE et GLE sont égaux.

On divise ED et GE en deux parties égales en N et O. On pose les diamètres AIN et ALO. On joint DIE et GLE. On aura donc les triangles DIE et GLE maximaux (Cf. proposition 102) et égaux entre eux (Cf proposition 104), plus grands que les moitiés (Cf proposition 103) des segments dans lesquels ils sont inscrits. De même, si l'on construit les triangles maximaux dans les segments restant de part et d'autre, on voit clairement que les triangles maximaux des segments ID et IE sont égaux aux triangles maximaux des segments EL et LG.

Comment pouvez-vous terminer le raisonnement de Grégoire de Saint-Vincent?

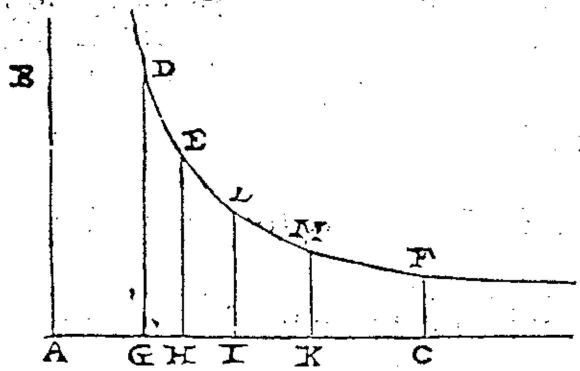
V Proposition 109

Lisez la proposition

PROPOSITIO CIX.

Sint AB, AC aſymptoti hyperbolæ DEF: diuiſâque AC, vt AG, AH, AI, AK, AC continuæ ſint proportionales, ponantur GD, EH, LI, MK, FC, ipſi AB æquidiſtantes.

Dico HD, IE, KL, CM ſegmenta eſſe æqualia.



Demonſtratio.

Quoniam AG, AH, AI, &c. proportionales ſunt, DG, EH, LI, &c. eamdem quoque inter ſe continuant rationem; vnde DH, EI ſegmenta ſunt æqualia. Similiter cùm EH, LI, MK, FC in eadem ſint proportione, æqualia quoque ſunt ſegmenta EI, LK, MC. Conſtat igitur veritas propoſitionis.

Proposition 109:

Soient AB et AC les asymptotes de l'hyperbole DEF. On divise AC de telle façon que AG, AH, AI, AK, AC, soient en proportion continue et l'on pose GD, EH, LI, MK, FC, équidistants de AB. Je dis que HD, IE, KL, CM sont des segments égaux.

Démonstration

Puisque AG, AH, AI, etc ... sont proportionnels, DG, EH, LI, etc, sont entre eux en même raison continue (proposition 78), les segments DH et EI sont égaux (proposition 106). De même puisque EH, LI, MK, FC sont dans la même proportion, les segments EI, LK et MC sont égaux aussi (proposition 106). La proposition est ainsi démontrée.

1. Quels commentaires pouvez-vous faire sur cette proposition?
2. Construisez avec soin sur l'axe [0x) d'un repère orthormal les points G, H, J, K, C d'abscisses respectives $1, \sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9$
et D, E, L, M, F les points correspondants de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ dans ce repère.
Utilisez la proposition 109 pour donner une approximation par excès de l'aire curviligne délimitée par l'hyperbole, l'axe [Ox) et les droites (DG) et (FC).
3. Comment pouvez-vous améliorer cette approximation ?

COMPTE-RENDU DE L'EXPERIMENTATION

1. en seconde

Les élèves eurent à répondre en Travail dirigé aux questions 1, 2, 3a et 3c du paragraphe "Découvertes des propriétés de l'hyperbole" .

D'autre part dans le cadre d'un travail pluridisciplinaire (arts plastiques, mathématiques, histoire, économie, anglais, allemand) sur le Baroque et la Tchécoslovaquie, un groupe fit un résumé de la vie de Grégoire de Saint-Vincent. Un autre groupe fit un court historique de la quadrature du cercle. En classe un Travail dirigé eut pour objet l'encadrement de l'aire d'un disque et le travail se poursuivit par une approche de la "quadrature de l'hyperbole": donner une valeur approchée par excès de l'aire comprise entre une branche de l'hyperbole équilatère, l'axe (xx') et deux parallèles à (y'y) d'abscisses toutes deux positives ou toutes deux négatives.

2. en première

Au premier trimestre les questions 1, 2, 3 des activités préliminaires furent données en devoir à faire à la maison, après la leçon sur la résolution des équations de degré 2. La propriété de la tangente utilisée était, à ce moment là, de "toucher" l'hyperbole en un point ; déterminer la tangente revenait ainsi à préciser à quelle condition une équation de degré 2 admettait une racine double.

Le même devoir fut redonné au deuxième trimestre après la leçon sur les dérivées en préparation d'une interrogation écrite en classe. Les lectures des propositions 116 du "De Progressionibus" de Grégoire de Saint-Vincent furent faites en classe.

Enfin le devoir sur l'hyperbole tiré du texte fut donné à faire à la maison. (l'étude portait sur la demi-hyperbole équilatère dont les points ont une abscisse positive). Nous avons conclu par l'étude du tableau suivant:

A est le point d'abscisse 1, B le point d'abscisse 3, a, b leurs projections sur (x'x), x est l'abscisse du point M_1 de projection m_1 sur (x'x).

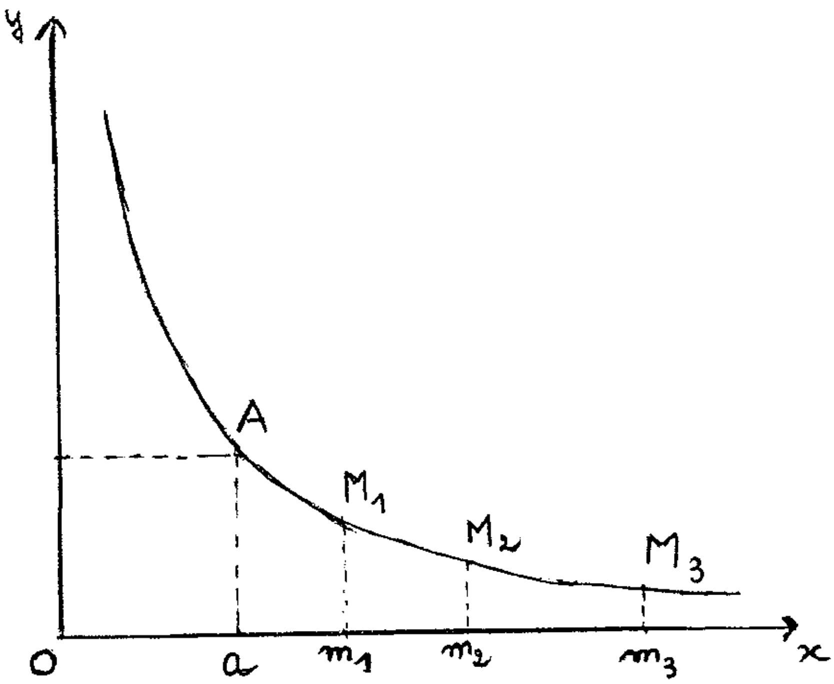
x	aire du trapèze rectiligne Aam_1M_1 $\frac{x^2-1}{2x}$	valeur approchèe par excès de l'aire curviligne AabB
3	1,333333	1,333333
$\sqrt{3}$	0,5773502	1,1547004
$\sqrt{\sqrt{3}}$	0,278119	1,112476
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}$	0,1377585	1,102068
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}$	0,0687171	1,0994726
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}}$	0,0343387	1,098841
$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{3}}}}}}$	0,0171666	1,0986624

3. en Terminale

Les questions 1, 2, 3 sur les propriétés de l'hyperbole ainsi que le devoir sur le texte fut donné à faire à la maison. Après une correction détaillée, la comparaison des résultats du tableau ci-dessus avec la valeur de ln 3 donnée par la calculatrice et une relecture du texte, la fonction logarithme fut définie par l'égalité (1):

(1) ln x (pour $x > 1$) = aire comprise entre l'hyperbole équilatère (branche "positive"), l'axe (x'x) et les droites d'abscisses 1 et x.

Après cette définition de ln x pour $x > 1$, les élèves demandèrent d'eux-mêmes l'extension de la définition à $x = 1$ et à x compris entre 0 et 1. Ils vérifièrent l'égalité $\ln 1 = \mathcal{A}\,(AaaA) = 0$ et nous en conclûmes que la définition (1) était valable pour $x = 1$.



Puis ils eurent à répondre aux questions suivantes:

1. Démontrez que, pour tous x_1, x_2, tels que $1 < x_1 < x_2$ on a $\mathcal{A}\,(M_1\, m_1\, m_2\, M_2) = \ln x_2 - \ln x_1$

2. Soient x_1 , x_2 , x_3 supérieurs à 1, en progression géométrique; montrez à l'aide de la proposition 109 de Grégoire de Saint-Vincent que: $\ln x_2 = \frac{1}{2}(\ln x_1 + \ln x_3)$ (a)

3. Soit $x > 1$; montrez que $\frac{1}{x}$, 1 , x forment une suite géométrique; déduisez de la proposition 109 et de la définition de lnx l'expression de l'aire limitée par l'hyperbole, (x'x) et les droites d'abscisses 1 et $\frac{1}{x}$. Comment doit-on définir $\ln \frac{1}{x}$ pour conserver l'égalité (a) si $x_1 = \frac{1}{x}$, $x_2 = 1$, $x_3 = x$.

4. Montrez que (a) reste vraie si x_1 et x_2 sont inférieurs ou égaux à 1
ou si $x_1 < 1 < x_2$
déduisez-en que $\ln x_2 = \frac{1}{2}(\ln x_1 + \ln x_3)$ pour tous x_1 , x_2 , x_3 , strictement positifs, en progression géométrique .

5. Soit $x > 0$. Montrez que 1, $\sqrt{x}$, x forment une suite géométrique
Déduisez en que $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln x)$, soit $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

6. Soient a et b deux réels strictement positifs.
Montrez que $\ln \sqrt{ab} = \frac{1}{2}(\ln a + \ln b)$

7. $1, x, x^2, x^3, x^4, \ldots\ldots, x^n$ forment une suite géométrique pour $x > 0$
Montrez que $\ln x^2 = 2 \ln x$ et $\ln x^n = n \ln x$

8. Montrer que pour tous a et b strictement positifs, on a
$\ln ab = \ln a + \ln b$

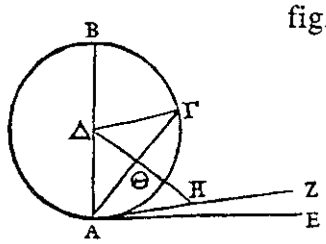
LA QUERELLE ENTRE DESCARTES ET FERMAT A PROPOS DES TANGENTES

Séminaire
"Autour de l'histoire du calcul différentiel"
(J.L. Verley)

Michèle Grégoire

Au début du XVIIème siècle, la définition d'une tangente à une courbe est encore celle des Grecs. Pour Euclide, "*une droite qui, rencontrant le cercle et prolongée ne le coupe pas, est dite être tangente au cercle.*" (c'est la définition 2 du troisième livre des *Eléments* [1]).

fig. 1



Ou bien,une tangente ou "touchante" est caractérisée par l'énoncé de la proposition 16 du livre III des *Eléments* : "(...) *dans le lieu compris entre la droite* (tangente) *et la circonférence, une autre droite ne sera pas intercalée (...)*"; aucune autre droite ne peut "tomber" entre la courbe et la touchante, ou toute autre droite issue du même point traverse la courbe, dit-on au XVIIème siècle, pour que la notion soit applicable à des courbes plus générales . A partir de ces caractérisations et de l'idée que la tangente à une courbe a un seul point commun avec la courbe, que tous les autres points de la tangente sont "extérieurs" à cette courbe, Apollonius avait pu, au Livre I de son traité des *Coniques* , déterminer les tangentes à l'ellipse, à la parabole et à l'hyperbole. Au livre V, qui n'est pas connu en occident au début du XVIIème siècle, Apollonius avait déterminé les normales aux coniques par des propriétés d'extremum, et les tangentes comme orthogonales aux normales. Mais les derniers livres du traité des *Coniques* ne commenceront à être étudiés et traduits que vers le milieu du XVIIème siècle[2].

Archimède a précisé la tangente à la spirale à partir d'une idée cinématique: la spirale étant définie comme résultant de deux mouvements uniformes, celui d'une droite autour d'un point fixe et celui d'un point sur la droite, la tangente est déterminée par une

1 Euclide Les Eléments, traduction B. Vitrac, PUF, Paris 1990

2 Dictionary of scientific biographies, article Apollonius

"résultante" des deux vitesses uniformes. Mais les mathématiciens du début du XVIIème siècle pas plus que les mathématiciens grecs ne connaissent de procédé général pour déterminer les tangentes aux courbes.

La Géométrie de Descartes est la première publication qui propose une méthode générale. C'est le 5 octobre 1637 que paraît à Leyde *Le Discours de la méthode* , suivi de trois essais scientifiques, *les Météores, la Dioptrique* et *la Géométrie.*[3] *La Géométrie* est un livre difficile, qui donnera lieu à de nombreuses discussions et à une abondante correspondance entre les savants de l'époque. Peu de temps après la parution de *la Géométrie* , on est encore en 1637, Fermat envoie un petit essai intitulé *Methodus ad disquirendam maximam et minimam* au Père Mersenne, correspondant et confident de Descartes. Ce religieux de l'ordre des Minimes est en relation avec presque tout le monde savant de son époque. Fermat expose en peu de lignes ses propres méthodes de détermination de tangentes, en réaction aux méthodes proposées par Descartes. Descartes lui répondra, de nombreuses lettres circuleront, des désaccords éclateront, la communauté scientifique prendra parti pour l'une ou l'autre des deux méthodes, ce sera une véritable "querelle des tangentes", dont nous allons analyser les principaux arguments développés entre 1637 et 1638.

La méthode de *La Géométrie* de Descartes

Rappelons que dans le premier livre de *La Géométrie* , Descartes repère les points d'une courbe à l'aide de deux nombres positifs y et x . Une droite AG étant choisie et désignée comme diamètre de la courbe (c'est effectivement un diamètre de la courbe, si elle en admet un), M étant le projeté orthogonal du point C de la courbe sur (AG) , Descartes pose y = AM et x = CM (sic). (ce n'est donc pas encore le repère du plan que nous disons "cartésien"). L'équation de la courbe est une relation, algébrique en général, entre x et y .

Dans le livre II de *La Géométrie* , Descartes cherche à déterminer les normales aux courbes : *"c'est pourquoy je croyray avoir mis icy tout ce qui est requis pour les éléments des lignes courbes, lorsque j'auray généralement donné la façon de tirer des lignes droites, qui, tombent à angles droits sur tels de leurs points qu'on voudra choisir. J'ose dire c'est cecy le problème le plus utile, & le plus général non seulement que je*

---

3 *La Géométrie* a été publiée en édition séparée en 1649, édition reproduite en fac-similé par Dover Press (1954). Les oeuvres complètes de Descartes ont été rassemblées et éditées par Adam et Tannery à la fin du XIXème siècle et rééditées par Vrin Je ferai référence à cette édition sous la forme : Descartes, A et T, livre..., p...

sçache, mais même que j'aye jamais désiré de sçavoir en Géométrie." [4] La normale à une courbe permet de déterminer la tangente et paraît à Descartes plus aisée à préciser que la tangente. En effet, pour la courbe la plus simple, le cercle, la normale en un point du cercle est la droite qui relie ce point au centre. D'où l'idée de Descartes d'approcher une courbe le plus étroitement possible par un cercle, centré sur la droite choisie comme diamètre[5]. Pour une courbe quelconque, Descartes considère qu'un cercle ($\mathcal{C}$) centré en un point P de l'axe (AG), passant par le point C de la courbe coupe la courbe en deux points. Si le cercle est centré sur la normale en P à la courbe, les deux points d'intersection de la courbe et du cercle ($\mathcal{C}$) sont confondus et Descartes postule que l'équation aux abscisses des points d'intersection de ($\mathcal{C}$) et de la courbe admet une racine double. C'est le principe de sa méthode. Voyons comment il l'applique (cf Annexe 1). Il procède conformément à la méthode qu'il a préconisée au livre I de *La Géométrie*, où il explique que, pour résoudre un problème de géométrie, "*on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes* [6] *qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent les unes des autres, jusqu'à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons: ce qui se nomme une équation.*"[7]

Ainsi, pour déterminer la normale (CP) à la courbe en P il pose: AM $= y$ CM $= x$

CP = s PA= v

donc PM $= v - y$

$CP^2 = CM^2 + MP^2$ d'où

$s^2 = x^2 + (v - y)^2$

$= x^2 + v^2 - 2vy + y^2$

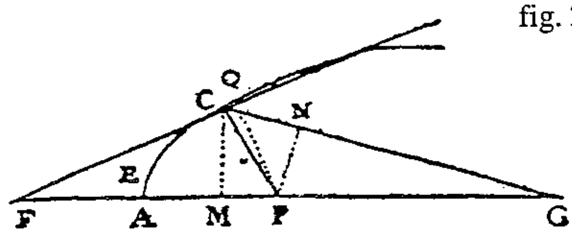


fig. 2

Il obtient les deux relations qui suivent, vérifiées par les coordonnées de tout point P de la droite (AG) : (1) $x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$ et $y = v - \sqrt{s^2 - x^2}$.

En éliminant l'une des indéterminées x ou y entre ces deux équations et une équation de la courbe, il obtient, s'il élimine par exemple x, une relation entre y, s et v qu'il considère comme une équation en y dépendant de v et de s, qu'il appelle "équation fondamentale"; c'est l'équation aux y des points d'intersection de la courbe

---

4 Descartes, A et T, livre VI, p. 413.

5 Ce n'est pas encore la notion de cercle osculateur. Cette notion et celle de courbure apparaîtra chez Newton.

6 *donner des noms aux lignes* : désigner les longueurs des segments par des lettres

7 *La Géométrie*, p. 299-300. ou A. et T., livre VI, p. 372.

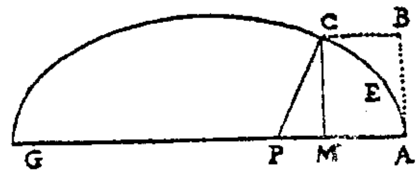
avec le cercle de centre P et passant par C. Le point P est le pied de la normale à la courbe en C si cette équation admet au moins une racine double.

Regardons l'exemple de l'ellipse, étudié par Descartes p. 343, puis repris p.347 de *La Géométrie* [8] (Annexe 1). L'équation de l'ellipse dérive de l'étude des coniques par Apollonius[9]. Si M désigne le projeté orthogonal d'un point courant C de l'ellipse sur le grand axe AG, le rapport $\frac{MC^2}{MA.\,MG}$ est constant.; Descartes désigne cette constante par le rapport $\frac{r}{q}$, où q est la longueur du grand axe AG (ou le "côté traversant" de l'ellipse). Ceci équivaut pour nous à l'équation de l'ellipse rapportée à un de ses sommets.

Avec les notations choisies par Descartes, l'équation de l'ellipse est donc

$$\frac{x^2}{y(q-y)} = \frac{r}{q} \quad \text{ou} \quad x^2 = ry - \frac{r}{q}y^2$$

fig. 3



En éliminant x entre cette équation et la relation (1), il obtient l'équation fondamentale de l'ellipse :

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q}y^2 \quad \text{ou}$$

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q-r} = 0 \quad \text{ou}$$

encore (2) $y^2 + \frac{qr - 2qv}{q-r}y + \frac{q(v^2 - s^2)}{q-r} = 0$

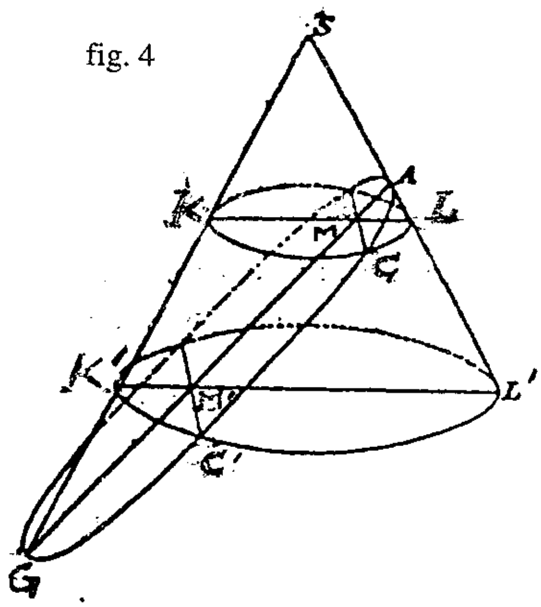
Cette équation aura une racine double e si elle peut s'écrire $(y-e)^2 = 0$ ou

---

[8] Descartes, A.T., livre VI, p. 414 à 419.

[9] Pour Apollonius, une ellipse est la section d'un cône par un plan non perpendiculaire à son axe, par exemple dans le cas où l'angle au sommet du cône est inférieur à un angle droit et où le plan de section est perpendiculaire à une génératrice du cône. Soit C et C' deux points quelconques de l'ellipse, KCL K'C'L' sont deux sections circulaires du cône perpendiculaires à l'axe. Dans les triangles rectangles KCL et K'C'L', $MC^2 = MK.\,ML$ $M'C'^2 = M'K'.\,M'L'$
Les plans des deux cercles sont parallèles donc $\frac{KM}{K'M'} = \frac{GM}{GM'}$ et $\frac{ML}{M'L'} = \frac{MA}{M'A}$ donc
$\frac{KM.\,ML}{K'M'.\,M'L'} = \frac{MA}{M'A} \times \frac{MG}{M'G}$ et $(\frac{MC}{MC'})^2 = \frac{MA.\,MG}{M'A.M'G}$.
On obtient donc:
$\frac{MC^2}{MA.\,MG} = \frac{M'C'^2}{M'A.\,M'G}$.
Le rapport $\frac{MC^2}{MA.\,MG}$ est constant pour tout point C de l'ellipse.

fig. 4



Nous pouvons retrouver la caractérisation de l'ellipse de centre O par la relation
$\frac{OM^2}{a^2} + \frac{CM^2}{b^2} = 1$ Posons OM = a - y CM = x ;
on obtient $\frac{(a-y)^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$, soit $x^2 = \frac{2b^2}{a}y - \frac{b^2}{a^2}y$ Posons alors q = 2a et $\frac{r}{q} = \frac{b^2}{a^2}$;
nous obtenons l'équation de Descartes.

(3) $y^2 - 2ey + e^2 = 0$. Par identification des coefficients entre les équations (2) et (3), Descartes obtient :

$-2e = \frac{qr - 2qv}{q - r}$, c'est à dire $\frac{2eq - 2er + qr}{2q} = v$ ou $v = e - e\frac{r}{q} + \frac{r}{2}$. La comparaison des derniers coefficients peut se faire également, mais comme le remarque Descartes, elle n'apporte pas de précision supplémentaire: e étant la valeur de y (ou AM) correspondant au point C, on obtient par la dernière relation, la valeur de v qui détermine la position de P et par suite la normale (CP) à l'ellipse en C.

Ce cas est assez simple car l'équation "fondamentale" de l'ellipse est du second degré. Exprimer qu'elle admet une racine double n'entraine que peu de calculs. La méthode se complique pour des courbes dont les équations sont de degré supérieur. Le polynôme $f(y)$, qui figure dans l'équation fondamentale $f(y) = 0$, doit être identifié avec le produit de $(y - e)^2$ par un polynôme de degré convenable. On remarque de plus que cette méthode ne convient que pour des courbes algébriques, dont nous ramenons l'équation à une relation polynomiale, et non pas pour les courbes que Descartes appelle mécaniques, qui sont d'un autre type. Descartes applique sa méthode à la conchoïde de droite[10] (ou conchoïde de Nicomède). Il en déduit une construction de la normale à la conchoïde (annexe 2). Il ne donne cependant aucun élément de son calcul, ni de justification de sa construction. Le Père Rabuel, dans ses *Commentaires de la Géométrie de M. Descartes* , publiés en 1730, effectue les calculs, relativement longs, nécessaires pour ces démonstrations; nous les joignons à l'annexe 2 .

La méthode du maximum et minimum de Fermat

Fermat lit *la Géométrie* et juge bon de faire connaître ses propres méthodes de détermination des tangentes à une courbe, qu'il dit avoir mises au point depuis quelques années, sans rien avoir publié ni écrit sur le sujet. Ses méthodes découlent d'une méthode permettant la recherche d'un maximum ou d'un minimum,

[10] Une droite D et un point P étant donnés, on fait pivoter une droite (d) variable autour de P et à chaque point Q d'intersection de D et (d), on associe le point M de (d) tel que la mesure algébrique de QM soit constante.

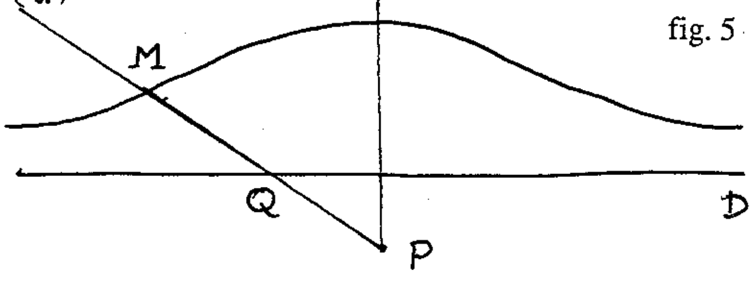


fig. 5

présentée par Fermat comme une "règle", qu'il donne sans la justifier, ni indiquer le raisonnement qui a pu le guider. C'est le premier exposé de cette règle, qu'il prétend cependant avoir mise au point dès 1629. Cette méthode a été souvent étudiée, rappelons-la cependant: S'il faut déterminer pour quelle valeur de l'inconnue a , une quantité est maximale ou minimale, on exprime cette quantité à l'aide de a ; on substitue $a+e$ à l'inconnue a ; on obtient une deuxième expression où figurent a et e ; on "adégale" [11] les deux expressions, on retranche les termes communs de part et d'autre; on divise tous les termes par e (qui se trouvait en facteur dans tous), ou par une puissance de e si c'est possible. On supprime tous les termes où figure encore e . On obtient alors une égalité (et non plus une "adégalité") qui donnera la valeur de a cherchée. (annexe 3)

Bien que Fermat ne donne, dans ce texte de 1637, aucune justification de sa méthode, nous pouvons essayer de le comprendre dans nos termes. Etant donnée une quantité exprimée en fonction de a par une expression (polynomiale) que nous notons $f(a)$, écrivons $f(a+e)$ sous la forme: $f(a+e) = f(a) + e\,g(a) + e^2\,h(a) + \ldots$

L'adégalité $f(a+e) \sim f(a)$ s'écrit $f(a) + e\,g(a) + e^2\,h(a) + \ldots \sim f(a)$

En appliquant la méthode, on est donc amené à résoudre l'équation $g(a) = 0$. On reconnait la propriété que si f présente un extremum en a , le premier terme du développement limité de $f(a+e)$ est nul. On voit aujourd'hui dans cette méthode une ébauche du calcul infinitésimal, alors que la méthode proposée par Descartes reste essentiellement finitiste.

---

[11] L'expression adaequare utilisée par Fermat, est reprise aux traductions latines des *Arithmétiques* de Diophante par Xylander (1532-1576) et par Bachet de Méziriac(1581-1638); elle signifierait "faire comme si c'était égal". Dans la traduction française des textes latins de Fermat, par P. Tannery, l'adégalité est désignée par le symbole $\sim$, mais Fermat n'a jamais écrit que le verbe adaequare sous ses différentes formes conjuguées, dans des relations "écrites en toutes lettres." Voici l'original latin correspondant à l'exemple traité à la première page de l'annexe 3. (Fermat, Oeuvres, t. 1, p. 133-134)

Sit recta A C, ita dividenda in E, ut rectang. A E C, ſit maximum ; Recta A C, dicatur B.

A E C

ponatur par altera B, eſſe A, ergo reliqua erit B, – A, & rectang. ſub ſegmentis erit B, in A, – A^2 quod debet inueniri maximum. Ponatur rurſus pars altera ipſius B, eſſe A, + E, ergò reliqua erit B, –, A – E, & rectang. Sub. ſegmentis erit B, in A, –, A^2 + B, in E, ^2E in A, – E, quod debet adæquati ſuperiori rectang. B, in A, – A^2, demptis communibus B, in E, adæquabitur A, in E^2 + E^2, & omnibus per E, diviſis B, adæquabitur ^2A + E, elidatur E, B, æquabitur ^2A, igitur B, bifariam eſt dividenda, ad ſolutionem propoſiti, nec poteſt generalior dari methodus.

C'est faire un mauvais procès à Fermat cependant de dire qu'il ne justifie aucunement sa méthode. Dans un texte ultérieur, probablement écrit dans les années 1640 à 1642, Fermat explique comment il en est venu à cette "règle" [12]. (cf. Annexe 4) L'idée qui a guidé Fermat est que, de part et d'autre d'une quantité extrémale $f(a)$, il y a deux valeurs égales $f(a_1)$ et $f(a_2)$ obtenues pour deux valeurs différentes a_1 et a_2, de la variable a , et que, plus on se rapproche de la valeur de a qui réalise un extremum, plus diminuera la différence entre a_1 et a_2 *"jusqu'à ce elle s'évanouisse tout à fait pour la division correspondant au produit maximum; dans ce cas, il n'y a qu'une solution unique et singulière les deux quantités* (a_1 et a_2) *devenant égales*." Fermat n'utilise pas les indices et appelle d'abord a et e les "solutions corrélatives" que je nomme a_1 et a_2 . Puis, pour des commodités de calcul il les nomme a et $a + e$. Remarquons que Fermat ne dit jamais que e est infiniment petit, ni même petit . L'idée est proche de celle de Descartes concernant les tangentes : les deux solutions a et $a+e$ sont quasiment confondues.

Signalons aussi, contrairement aux idées souvent rencontrées, que Fermat s'est préoccupé du problème réciproque: la "règle" qu'il propose est vérifiée si la quantité est extrémale, mais la quantité est-elle toujours extrémale lorsque cette "règle" est appliquée? Il répond à cette question dans une lettre de 1643 adressée à Brûlart de Saint Martin [13]. Dans cette lettre, il s'intéresse aux termes en e , e^2 , e^3 , des développements de $f(a+e)$ et de $f(a-e)$, remarque que les coefficients de e, de e^2 et des autres puissances de e sont les même (au signe près pour les puissances impaires), dans les deux développements. Sur un exemple, il vérifie que, si a prend la valeur déterminée par l'équation $g(a) = 0$, $f(a +e)$ et $f(a - e)$ sont tous les deux soit plus petits soit plus grands que $f(a)$. Dans cette lettre, il explique également comment distinguer un maximum d'un minimum, par l'étude du signe du coefficient de e^2 .

Comme on peut le lire dans l'annexe 3, Fermat "applique" sans explication la méthode du maximum et du minimum à la détermination des tangentes à une parabole: *"Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes.."* est la seule marque de transition.

---

12 Ce texte se trouve dans les *Oeuvres complètes* de Fermat, après la *Méthode pour la recherche du maximum et du minimum*, t. 1, p.147 et 148 (en latin), et t. 3, p. 131-132, dans la traduction française de Tannery.

13 Oeuvres de Fermat Supplément p. 121 et suivantes

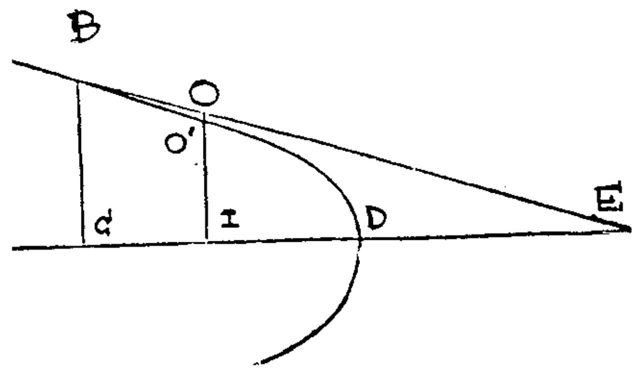
La parabole de sommet D et d'axe (DC) est caractérisée à la manière d'Apollonius par la propriété que le rapport $\frac{CD}{BC^2}$ est constant, si B est un point courant de la parabole et si C désigne son projeté orthogonal sur l'axe.

Pour le point O' de la parabole qui se projette en I, $\frac{CD}{BC^2} = \frac{DI}{O'I^2}$. Donc $\frac{CD}{DI} = \frac{BC^2}{O'I^2}$

La tangente en B à la parabole coupe l'axe en E. La tangente est entièrement "extérieure" à la parabole, le point O de la tangente est donc extérieur à la parabole et vérifie OI > O'I.

On obtient bien l'inégalité $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, et puisque les triangles ECB et EIO sont semblables, $\frac{CD}{DI} > \frac{EC^2}{EI^2}$.

fig. 6



Cette inégalité s'écrit, avec les notations choisies par Fermat, qui pose CE = a, CI = e

CD = d $\quad \frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2}$ ou $d(a-e)^2 > a^2 (d-e)$

Fermat remplace alors, sans explication, cette inégalité par une adégalité

$d(a - e)^2 \sim a^2 (d - e)$, qui après réduction, et division par e s'écrit $a^2 + de \sim 2da$

Après suppression du terme contenant encore e, il obtient $a = 2d$. Il détermine donc la position de la tangente par la valeur de la sous-tangente. La sous-tangente est double de l'ordonnée CD, résultat qui était déjà bien connu depuis Apollonius.

En quoi ce problème est-il un problème d'extremum? Fermat ne l'explique pas et nous verrons que ses contemporains, Descartes en particulier, auront du mal à le comprendre.

Nous pouvons tenter une explication, pour mieux comprendre le ressort de la méthode . Tout point O (distinct de B) de la tangente en B à la parabole est "extérieur" à la parabole, donc avec nos notations, si l'équation de la parabole est $y^2 - 2px = 0$, en tout point O, distinct de B, de la tangente en B, l'expression $y^2 - 2px$ est positive, l'ordonnée du point O étant supérieure à celle du point O' correspondant situé sur la parabole (cf fig.6). En B l'expression $y^2 - 2px$ passe donc par une valeur minimum, zéro. Dans le langage de Fermat, nous pouvons comprendre que, pour tout point O de la tangente en B à la parabole, $\frac{CD}{DI} > \frac{EC^2}{EI^2}$, la différence $\frac{CD}{DI} - \frac{EC^2}{EI^2}$ est donc strictement positive. Elle s'annulle lorsque O est en B. La différence $\frac{CD}{DI} - \frac{EC^2}{EI^2}$ passe donc par un minimum lorsque O est en B. Les notions de variable et de fonction dont nous avons besoin pour cette explication ne sont pas encore dégagées à l'époque de Fermat. Il ne faut donc pas nous étonner que le point B que Fermat avait considéré comme fixé, en lequel il cherche une tangente, qui peut être déterminée par la position du point E , c'est à dire par la valeur d de la sous-tangente CE, que ce point B donc, soit soumis à un "petit déplacement", et que ce soit donc la distance EB qui varie, du point B devenu variable au point E, supposé dès lors fixe. Mais bien sûr, ces idées ne sont pas dans les écrits de Fermat . Comment appliquer la méthode proposée à une autre courbe que la parabole? On trouve juste la formule assez laconique suivante, qui donne la démarche à suivre pour déterminer les tangentes à une courbe quelconque: il faut, écrit-il, "*exprimer une propriété d'extremum à l'aide de la propriété spécifique de la courbe* ".

La querelle des tangentes

Lettre de Descartes à Mersenne. Réponse de Fermat (janvier-février 1638)

Mersenne a transmis à Descartes le texte de Fermat, *Méthode pour la Recherche du maximum et du minimum.* Descartes a dû en prendre connaissance très rapidement et l'a mal compris. Il répond à Mersenne sans doute en janvier 1638 [14]. Il pense que la méthode de Fermat pour trouver la tangente (EB) à la parabole en B, consiste à déterminer la "plus grande ligne" qu'on puisse mener du point E à un point de la parabole, et que, selon la méthode du maximum décrite par Fermat, il suffit donc d'adégaler EB et EO. Il fait donc le calcul correspondant , en ayant pris pour inconnue EC = a , EI = $a+e$ et pour données CD = d , BC = b , et la dernière adégalité $\frac{b^2}{d} + 2a$ adégalé à rien, ne lui donne donc aucun résultat (cf annexe 5). Nous pouvons remarquer l'erreur de Descartes : la longueur EB de la tangente ne réalise pas un extremum de la distance de E aux points de la parabole. Autour de B, sur la parabole se trouvent à la fois des points plus proches et des points plus éloignés de E. Descartes détermine, en fait, pour le cas où le point E est dans la concavité de la courbe (pour nous, la mesure algébrique de EC , notée a , est alors opposée à la longueur EC étudiée) le point E qui réalise la plus courte (et non pas la plus grande) distance à la courbe. Il obtient effectivement la sous-normale à la parabole, constante et égale au paramètre :

$$-a = \mathrm{EC} = \frac{1}{2}\frac{b^2}{d}.$$

---

14 A Mersenne A et T, livre I , p. 486

Descartes reproche d'une part à Fermat de ne pas user de la règle sur le maximum et le minimum qu'il avait établie pour la détermination des tangentes ("*outre qu'il ne suit nullement sa règle, comme il paroît assez de ce que son calcul ne se rapporte point à celui que je viens de faire,...*") et il reproche d'autre part à sa règle d'être fausse puisque son calcul ne donne pas de résultat correct pour les tangentes à la parabole . Il conclut:: "*j'ose dire qu'on n'en peut trouver aucune, si bonne et si générale que la mienne, qui soit tirée d'un autre fondement.*"

La réponse de Fermat à Mersenne, de février 1638, à propos de la réaction de Descartes est très expéditive : "*J'ai appris par votre lettre que ma réplique à M. Descartes n'étoit pas goûtée, que même il avoit trouvé à dire à mes méthodes* ***de maximis et minimis et de tangentibus****, en quoi il avoit trouvé Mrs de Pascal et de Roberval de contraire sentiment. (...) et je soutiens que mes méthodes sont aussi certaines que la construction de la 1ère proposition des Eléments. Peut-être que les ayant proposées nuement et sans démonstration, elles n'ont pas été entendues ou qu'elles ont paru trop aisées à M. Descartes, qui a fait tant de chemin et a pris une voie si pénible pour ces tangentes dans sa Géométrie. (....) Je ne vous enverrai donc plus rien pour M. Descartes, puisqu'il met des lois si sévères à un commerce innocent...*[15]"

Lettre de Descartes contre Roberval et E. Pascal . Réponse de Fermat
(mars et mai 1638)

Le traité de Fermat ayant trouvé des défenseurs (Pascal, Roberval et d'autres), Descartes revient à la charge et pour convaincre de l'erreur de Fermat, il pense exhiber un contrexemple: d'un ton très péremptoire et, me semble-t-il, avec beaucoup de mauvaise foi, il applique à l'ellipse la méthode que Fermat a suivie pour déterminer la tangente à la parabole. Il suit strictement la méthode exposée par Fermat, cette fois, mais n'obtient pas la bonne détermination de la tangente puisqu'il utilise la même inégalité $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, qui dépend de la propriété caractéristique de la parabole et non de celle de l'ellipse. Il n'a donc pas compris le rôle joué par la "propriété spécifique de la courbe" [16].

Fermat répondra cependant aux arguments de Descartes, dans une lettre dont le destinataire n'a pas été identifié, qui est probablement encore Mersenne[17]. Il explique comment procéder de façon correcte pour le cas de l'ellipse. Il faut utiliser la propriété

---

[15] Oeuvres de Fermat, Correspondance, tome 2, p. 132-133

[16] Lettre de Descartes contre Roberval et Etienne Pascal, Adam et Tannery, livre II , p.1

[17] Oeuvres de Fermat, tome 2, p. 138- 145

spécifique de l'ellipse qui est, toujours selon Apollonius, " OZ.ON est proportionnel à OD^2 ", si (ZN) est le grand axe de l'ellipse et O le projeté orthogonal d'un point D de l'ellipse sur le grand axe. Ainsi, si le point I de la tangente à l'ellipse et le point E de l'ellipse se projettent tous deux en V sur l'axe (ZN) :

$\frac{OZ.\,ON}{VZ.\,VN} = \frac{DO^2}{VI^2}$ et comme I est extérieur à l'ellipse,

$\frac{OZ.\,ON}{VZ.\,VN} > \frac{DO^2}{VI^2}$. Cette inégalité permet d'appliquer la méthode du minimum et d'adégaler $\frac{OZ.\,ON}{VZ.\,VN}$ à $\frac{DO^2}{VE^2}$

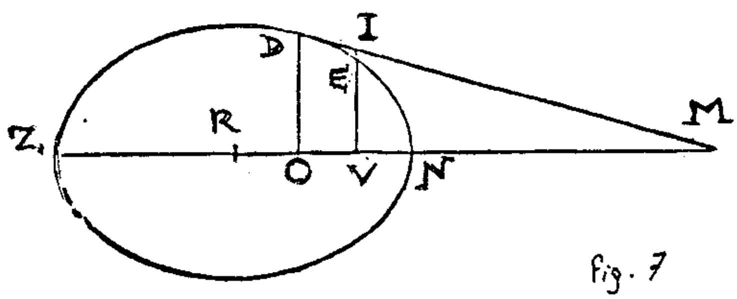


fig. 7

Fermat trouve alors que la position du point M qui précise la tangente en D est déterminée par la relation

$\frac{OZ - ON}{ON} = 2\,\frac{ZO}{OM}$ équivalente à la relation $\frac{OZ}{ON} = \frac{ZM}{MN}$, donnée par Apollonius.[18]

L'annexe 6 expose la méthode de recherche de tangente à l'ellipse, comme elle se trouve dans des textes ajoutés après 1638 au traité *Méthode pour la recherche du maximum et du minimum.*.

Lettre de Descartes à Mersenne du 3 mai 1638

Descartes a compris le rôle que joue la "propriété spécifique" de la courbe, mais il critique encore la méthode de Fermat, qu'il ne juge toujours pas fondée. Il écrit que Fermat "*n'a trouvé sa règle qu'à tastons, ou du moins qu'il n'en a pas conçu clairement les principes* ." [19] On rencontre ici la position de principe de l'auteur du *Discours de la Méthode*, pour qui il est moins important de trouver que de savoir pourquoi on a trouvé. Fermat et Descartes s'opposent ici, à l'image de leurs conceptions différentes des

---

18 En effet $\frac{OZ - ON}{ON} = 2\,\frac{ZO}{OM}$ entraine

$\frac{OZ - ON}{ON} + \frac{ON}{ON} = 2\,\frac{ZO}{OM} + \frac{OM}{OM}$ Soit $\frac{OZ}{ON} = \frac{2\,ZO + OM}{OM} = \frac{ZM + ZO}{NM + ON}$.

La relation $\frac{OZ}{ON} = \frac{ZM + ZO}{NM + ON}$ entraine $\frac{OZ}{ON} = \frac{ZM}{NM}$

19 Adam et Tannery, livre II, p. 123.

mathématiques. Fermat résout, souvent pour le plaisir, des problèmes variés adaptant ses méthodes au problème considéré. Descartes cherche avant tout à construire des méthodes générales et les mathématiques qu'il développe servent à valider sa méthode philosophique.

Puis il applique la méthode d'adégalisation au problème "*qu'il faille tirer d'un point E vers le cercle, une ligne droite en sorte que la partie de cette ligne qui sera hors de ce cercle entre sa circonférence et le point donné E soit la plus grande.*" C'est encore le même type de caractérisation de la tangente comme une "plus grande ligne tirée d'un point extérieur au cercle", mais sa mise en équation ne traduit pas la propriété demandée à la ligne d'être "extérieure au cercle" et la ligne BE qu'il considère ne réalise pas un maximum (sur la figure 9, EO, par exemple est plus grande que EB) ; il obtient une équation sans solution, alors que, dans son esprit, il devrait trouver la tangente menée de E au cercle. Il en conclut une fois de plus que la méthode de Fermat est incorrecte.

Mais l'étude qu'il a faite de la méthode de Fermat lui inspire une nouvelle méthode de détermination de tangentes, différente de celle de *La Géométrie* . Cette méthode revient à considérer la tangente comme une position "limite" de la sécante EBO lorsque les deux points B et O se confondent. Descartes adopte alors la méthode d'adégalisation, mais sans faire intervenir l'idée d'extremum, qui lui reste étrangère; l'adégalisation devient une façon commode et abrégée d'exprimer l'existence d'une racine double: il adégale BC et OI , qui sont effectivement égaux lorsque I et C se confondent, (cf. fig.9 et 10) et procède ensuite comme Fermat, divise par e, ne garde que les termes où ne figure plus e... Pour la tangente à la parabole Descartes mène un calcul analogue à celui de Fermat , mais qui consiste à adégaler d'emblée BC^2 et OI^2 , puis à supprimer les termes en e^2 .

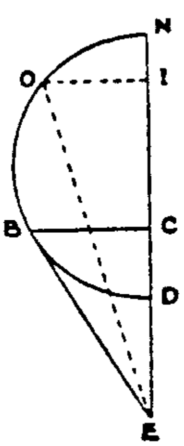


fig. 8

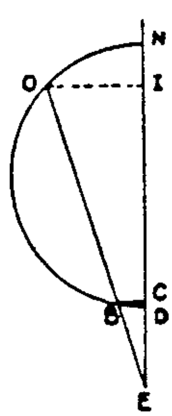


fig. 9

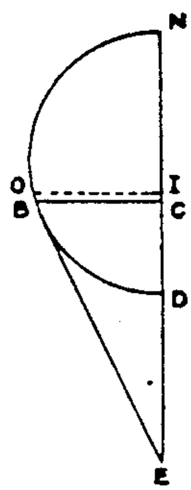


fig. 10

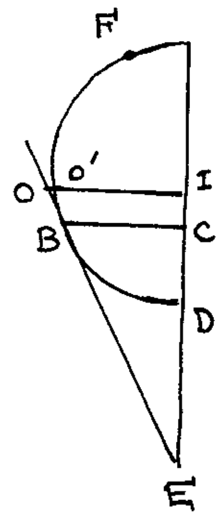


fig. 11

Les trois figures 8, 9 et 10, ci-dessus, reprises à l'appendice de la lettre du 3 mai 1638 de Descartes à Mersenne[20] montrent bien où se situe l'incompréhension de Descartes quant à la méthode développée par Fermat. Descartes pense que la méthode de Fermat, sur une figure telle que la figure 8, consiste à adégaler BC et OI , pour deux sécantes à la courbe passant par E, alors que la méthode de Fermat consiste à adégaler OI et O'I , le point O de la tangente en B et le point O' de la courbe se projetant tous deux sur l'axe en I (fig. 11).

La réponse de Fermat à Descartes (été 1638)

Cette lettre répond aux critiques et aux objections de la précédente lettre de Descartes, mais elle est, comme les autres lettres adressée à Mersenne [21]. Fermat, explicite enfin plus précisément sa méthode, son aspect de généralité et ce qui l'a guidé. (annexe 7)

Dans un premier temps, il insiste peu sur le lien avec la recherche de minimum et de maximum, mais précise bien d'emblée que sa méthode est fondée sur l'adéquation de la ligne IO avec l'appliquée IO' (dans le cas d'une figure telle que la fig. 11) et sur la propriété spécifique de la courbe vérifiée par les points O et B. Fermat peut alors appliquer sa méthode à toutes sortes de courbes, et en particulier au folium (que nous appelons folium de Descartes[22]), sur lequel celui-ci l'avait défié.

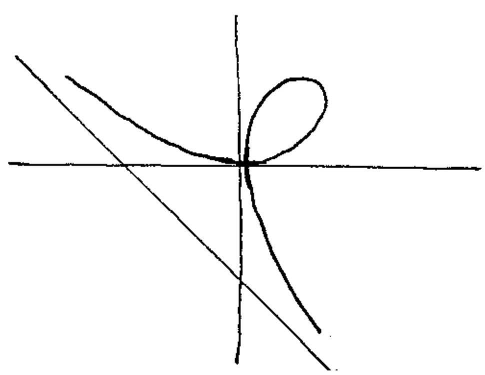
Il reprend le problème traité par Descartes " tirer d'un point extérieur à un cercle la plus grande ligne EB extérieure au cercle " à propos duquel Descartes avait de nouveau conclu à la fausseté de la méthode de Fermat. Il explique que la mise en équation du problème avait été mal faite[23] ; il aurait fallu, dit-il, chercher le point B tel que $\frac{BE}{BC}$ fût minimum.

---

20 ibid.

21 Oeuvres de Fermat, tome 2, p. 154-162.

22 Cette courbe peut être définie par l'équation $x^3 + y^3 = 3axy$ et la partie de la courbe correspondant aux x et aux y positifs a la forme d'une feuille.

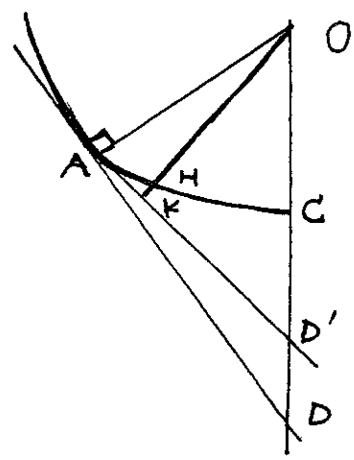


23 Si l'on cherche un point M sur le cercle tel que la distance EM soit maximum, on ne peut obtenir le point de contact B d'une tangente issue de E. Un point tel que F vérifie bien sûr EF > EB . Fermat

Enfin, Fermat expose la démarche qui l'a mené à sa méthode de détermination de tangentes. La première méthode à laquelle il a eu recours, vers 1630, peu après avoir mis au point la méthode pour le maximum et le minimum, consistait, écrit-il à déterminer une normale à la courbe.

Une normale à une conique en un point O réalise un extremum (local, préciserions-nous) de la distance du point O à la courbe[24]. Fermat étend cette propriété à une courbe quelconque. Descartes s'est trompé, dit-il," *en ce qu'il a cru que, pour appliquer la méthode* ***de Maximis et Minimis*** *à l'invention des tangentes, il falloit chercher une ligne, comme AD, menée du point A donné sur le diamètre, en telle sorte que AD soit la plus grande qui puisse être tirée du point D à la courbe. Le point A étant donné, il faut avoir recours non pas* ***ad maximam,*** *puisqu'on ne trouveroit que l'infini, mais* ***ad minimam****. Cherchons donc le point O dans le diamètre, de telle façon que la ligne OA soit la plus courte qui puisse être tirée du point O à la courbe. Le point O étant trouvé par la méthode, joignez les deux points O et A par la ligne OA, et tirez la ligne AD perpendiculaire sur OA. Je dis que la ligne AD touchera la courbe.*"

Fermat donne une démonstration de la propriété pour le cas où la concavité de la courbe est tournée vers le diamètre, qui n'est cependant pas valide pour tous les cas de figures.



Si (AD) n'était pas tangente, la tangente serait (AD'), située entre (AD) et la courbe et la perpendiculaire (OK) à (AD') en O couperait la courbe en H situé entre O et K (K est sur AD'), puisque la tangente AD' est entièrement extérieure à la courbe.
Donc $OH < OK$ et $OK < OA$, puisque le triangle OAK est rectangle en K.
L'inégalité $OH < OA$ est en contradiction avec le fait que la distance OA est la plus courte distance de O à la courbe. Fermat reprend aussi le cas où O n'est pas du côté de la concavité de la courbe.

---

n'explicite cependant pas que la méthode de Descartes ne permet pas de caractériser le fait que la ligne EB est entièrement extérieure au cercle (cf. fig. 11).

24 Ce résultat est déjà établi à la proposition 29 du livre V des *Coniques* d'Apollonius. Cependant, seuls les quatre premiers livres étaient connus au début du XVIIème siècle.

Il fait alors le calcul correspondant au minimum de la distance OA pour une parabole. Les distances d'un point à une courbes introduisent des radicaux (des "asymétries" dit-il, usant du langage de Viète), et partant, rendent le calcul difficile. Aussi a-t-il cherché une méthode "qui levât toutes ces difficultés". Il lui semble que c'est la première qu'il a proposée, qui n'introduit aucune asymétrie, "en quoi consiste la facilité et la perfection de cette méthode". Il n'est pas plus explicite sur le lien entre recherche de tangente et recherche d'extremum.

Dans les années suivantes, à partir de 1640, Fermat étend encore la validité de sa méthode à des courbes qui ne sont pas algébriques, comme la cycloïde. Pour ces problèmes plus compliqués, il applique deux principes: on peut substituer aux ordonnées des points situés sur la courbe les ordonnées des points sur une tangente à la courbe et substituer aux arcs de courbe les longueurs correspondantes des portions de tangente. Il applique alors la méthode d'adégalité. Ces principes ne seront validés que vers 1660 dans un mémoire *Sur la comparaison des lignes courbes avec les lignes droites*. La méthode de Fermat s'affirme plus puissante et plus générale que celle de Descartes, mais ne se présente pas sous la forme d'un algorithme systématique.

Les incompréhensions de Descartes, probablement dûes à son désir irrépressible d'établir des méthodes générales, dont les fondements soient clairement précisés, et qu'il a tenté trop rapidement de projeter sur la méthode proposée par Fermat, ont pourtant été utiles: elles ont poussé Fermat à expliciter davantage la généralité de sa méthode, et elles ont mené Descartes à une nouvelle méthode des tangentes, un peu plus simple. On remarque que ces méthodes ne font pas appel à l'idée d'infiniment petit, ni à des quantités qui tendent vers zéro. La polémique n'est pas tout à fait close....

Bibliographie

Apollonius *Les Coniques*, trad. P. Ver Eecke, réédition Blanchard, Paris, 1959

Descartes *La Géométrie*, Appendice au Discours de la Méthode, réédition Dover, New York, 1954

Descartes *Oeuvres complètes*, éditées par Adam et Tannery, Vrin, Paris, 1988

Euclide *Les Eléments*, livres 1 à 4, Traduction de B. Vitrac, PUF, Paris, 1990

Fermat *Oeuvres*, éditées par P. Tannery et C. Henry, Gauthier-Villars, Paris, 1891-1912

Rabuel *Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes*, Paris, 1730

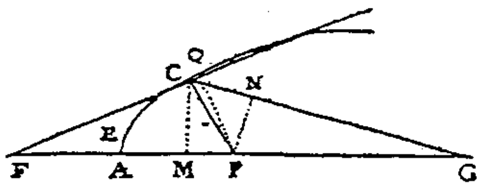
***

Clapié M. Spiesser M. *Des problèmes d'extrema chez Fermat à la notion de dérivée*. IREM- MAFPEN de Toulouse, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne 31062 Toulouse cedex

Itard J. *Essais d'histoire des mathématiques*, réunis par R. Rashed, Blanchard, Paris, 1984

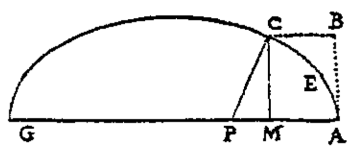
Milhaud G. *Descartes savant*, Alcan, Paris, 1921

Façon generale pour trouuer des lignes droites, qui coupent les courbes données, ou leurs contingences, a angles droits.



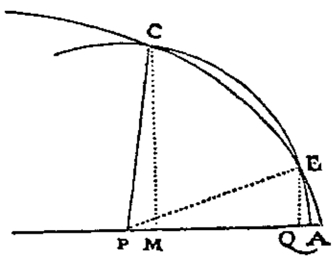
Soit C E la ligne courbe, & qu'il faille tirer vne ligne droite par le point C, qui face auec elle des angles droits. Ie suppose la chose desia faite, & que la ligne cherchée est C P, laquelle ie prolonge iusques au point P, ou elle rencontre la ligne droite G A, que ie suppose estre celle aux poins de laquelle on rapporte tous ceux de la ligne C E : en sorte que faisant M A ou C B $\propto y$, & C M, ou B A $\propto x$, iay quelque equation, qui explique le rapport, qui est entre x & y. Puis ie fais P C $\propto s$, & P A $\propto v$, ou P M $\propto v - y$, & a cause du triangle rectangle P M C iay ss, qui est le quarré de la baze esgal à $xx + vv - 2vy + yy$, qui sont les quarrés des deux costés. c'est a dire iay $x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$, oubien $y \propto v + \sqrt{ss - xx}$, & par le moyen de cete equation, i'oste de l'autre equation qui m'explique le rapport qu'ont tous les poins de la courbe C E a ceux de la droite G A, l'vne des deux quantités indeterminées x ou y. ce qui est aysé a faire en mettant partout $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ au lieu d'x, & le quarré de cete somme au lieu d'xx, & son cube au lieu d'x^3, & ainsi des autres, si c'est x que ie veille oster ; oubien si c'est y, en mettant en son lieu $v + \sqrt{ss - xx}$, & le quarré, ou le cube, &c. de cete somme, au lieu d'yy, ou y^3 &c. De façon qu'il reste tousiours aprés cela vne equation, en laquelle il ny a plus qu'vne seule quantité indeterminée, x, ou y.

Comme si C E est vne Ellipse, & que M A soit le segment de son diametre, auquel C M soit appliquée par ordre, & qui ait r pour son costé droit, & q pour le trauersant, on à par le 13 th. du 1 liu. d'Apollonius. $xx \propto ry - \frac{r}{q}yy$, d'ou ostant xx, il reste $ss - vv + 2vy - yy \propto ry - \frac{r}{q}yy$. oubien,



$yy + \frac{qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$ esgal a rien. car il est mieux en cet endroit de considerer ainsi ensemble toute la somme, que d'en faire vne partie esgale a l'autre.

Or aprés qu'on à trouué vne telle equation , au lieu de s'en seruir pour connoistre les quantités x, ou y, ou z, qui sont desia données, puisque le point C est donné, on la doit employer a trouuer v, ou s, qui determinent le point P, qui est demandé. Et a cet effect il faut considerer, que si ce point P est tel qu'on le desire, le cercle dont il sera le centre, & qui passera par le point C, y touchera la ligne courbe C E, sans la coupper: mais que si ce point P, est tant soit peu plus proche, ou plus esloigné du point A, qu'il ne doit, ce cercle couppera la courbe , non seulement au point C, mais aussy necessairement en quelque autre. Puis il faut aussy considerer, que lorsque ce cercle couppe la ligne courbe C E, l'equation par laquelle on cherche la quantité x, ou y, ou quelque autre semblable, en supposant P A & P C estre connuës, contient necessairement deux racines, qui sont inesgales. Car par exemple si ce cercle couppe la courbe aux poins C & E, ayant tiré E Q parallele a C M, les noms des quantités indeterminées x & y, conuiendront aussy bien aux lignes E Q, & Q A, qu'a C M, & M A; puis P E est esgale a P C, a cause du cercle, si bien que cherchant les lignes E Q & Q A, par P E & P A qu'on suppose comme données , on aura la mesme equation, que si on cherchoit C M & M A par P C, P A. d'où il suit euidemment, que la valeur d'x, ou d'y, ou de



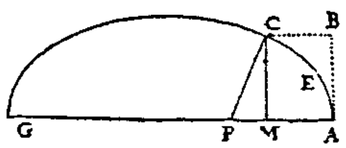
telle autre quantité qu'on aura supposee , sera double en cete equation, c'est a dire qu'il y aura deux racines inesgales entre elles; & dont l'vne sera C M , l'autre E Q , si c'est x qu'on cherche; oubien l'vne sera M A , & l'autre Q A, si c'est y. & ainsi des autres. Il est vray que si le point E ne se trouue pas du mesme costé de la courbe que le point C; il n'y aura que l'vne de ces deux racines qui soit vraye, & l'autre sera renuersée, ou moindre que rien: mais plus ces deux poins, C, & E, sont proches l'vn de l'autre, moins il y a de difference entre ces deux racines;

nes; & enfin elles font entierement efgales, s'ils font tous deux ioins en vn; c'eft a dire fi le cercle, qui paffe par C, y touche la courbe C E fans la coupper.

De plus il faut confiderer, que lorfqu'il y a deux racines efgales en vne equation, elle a neceffairement la mefme forme, que fi on multiplie par foy mefme la quantité qu'on y fuppofe eftre inconnuë moins la quantité connue qui luy eft efgale, & qu'aprés cela fi cete derniere fomme n'a pas tant de dimenfions que la precedente, on la multiplie par vne autre fomme qui en ait autant qu'il luy en manque; affin qu'il puiffe y auoir feparement equation entre chafcun des termes de l'vne, & chafcun des termes de l'autre.

Comme par exemple ie dis que la premiere equation trouuée cy deffus, a fçauoir

$yy \frac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q-r}$ doit auoir la mefme forme que celle qui fe produift en faifant e efgal a y, & multipliant $y-e$ par foy mefme, d'où il vient $yy - 2ey + ee$, en forte qu'on peut comparer feparement chafcun de leurs termes, & dire que puifque le premier qui eft yy eft tout le mefme én l'vne qu'en l'autre, le fecond qui eft en l'vne $\frac{qry - 2qvy}{q-r}$, eft efgal au fecōd de l'autre qui eft $-2ey$, d'où cherchant la quantité v qui eft la ligne P A, on à



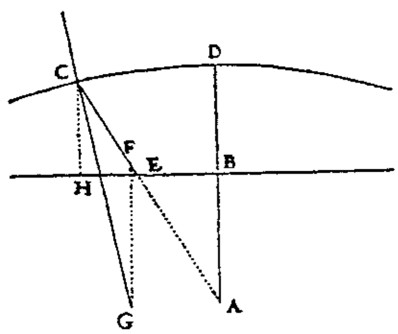
$v \propto e - \frac{r}{q}e + \frac{1}{2}r$, oubiē a caufe que nous auons fuppofé e efgal a y, on a $v \propto y - \frac{r}{q}y + \frac{1}{2}r$. Et

ainfi on pourroit trouuer s par le troifiefme terme $ee \propto \frac{qvv - qss}{q-r}$, mais pourceque la quantité v determine affés le point P, qui eft le feul que nous cherchions, on n'a pas befoin de paffer outre.

Ie n'adioufte point les conftructions, par lefquelles on peut defcrire les contingentes ou les perpendiculaires cherchées, en fuite du calcul que ie viens d'expliquer, a caufe qu'il eft toufiours ayfé de les trouuer: Bienque fouuent on ait befoin d'vn peu d'adreffe, pour les rendre courtes & fimples.

Exemple de la conftruction de ce probleſme en la conchoide.

Comme par exemple, fi D C eft la premiere conchoide des anciens, dont A foit le pole, & B H la regle: en forte que toutes les lignes droites qui regardent vers A, & font comprifes entre la courbe C D, & la droite B H, comme D B & C E, foient efgales: Et qu'on veuille trouuer la ligne C G qui la couppe au point C a angles droits.



On pourroit en cherchant, dans la ligne B H, le point par où cete ligne C G doit paffer, felon la methode icy expliquée, s'engager dans vn calcul autant ou plus long qu'aucun des precedens: Et toutefois la conftruction, qui deuroit aprés en eftre deduite, eft fort fimple. Car il ne faut que prendre C F en la ligne droite C A, & la faire efgale à C H qui eft perpendiculaire fur H B: puis du point F tirer F G, parallele à B A, & efgale à E A: au moyen de quoy on a le point G, par lequel doit paffer C G la ligne cherchée.

ANNEXE 2 (suite)

Rabuel Commentaires sur la Géométrie de M. Descartes Paris 1730

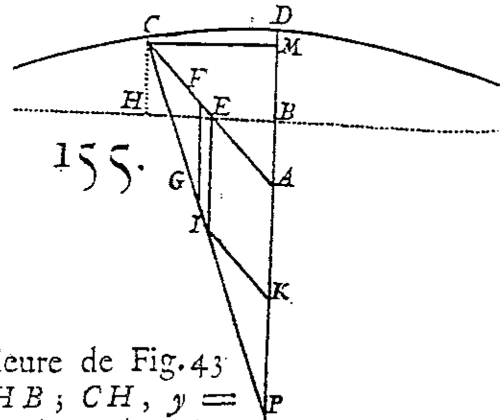


Fig. 155. 4. Soit la courbe CD, Fig. 155. la conchoïde ſuperieure de Fig. 43 Soit A le pole, BD, $a = CE$; BA, b ; CM, $x = HB$; CH, $y = MB$; $AM = b + y$; BP, v ; $PM = v + y$; PC, s. Son équation telle qu'elle a été trouvée, Liv. 2. Part. 1. Sect. 2. Art. 3. n. 1. ſera celle-ci, $y^4 + 2by^3 - aayy + bbyy + xxyy - 2aaby - aabb = 0$. $xxyy = -y^4 - 2by^3 + aayy - bbyy + 2aaby + aabb$. Après cela dans le triangle rectangle CMP l'on comme auparavant $\overline{CP}^2$, $ss = \overline{CM}^2 + \overline{PM}^2$, $xx + vv + 2vy + yy$; $xx = ss - vv - 2vy - yy$. Mettons cette valeur de xx à ſa place, nous aurons $y^3 \frac{+aayy - bbyy - ssyy + vvyy + 2aaby + aabb}{2v - 2b} = 0$. équation du troiſiéme degré. Maintenant pour donner à l'équation $yy - 2ey + ee = 0$ les dimenſions convenables, je la multiplie par $y + f = 0$, ce qui produit $y^3 - 2eyy + fyy + eey - 2efy + eef = 0$.

Je compare d'abord les derniers termes $eef = \frac{aabb}{2v - 2b}$: donc $f = \frac{aabb}{2vee - 2bee}$. Enſuite je viens aux troiſiémes termes $eey - 2efy = \frac{2aaby}{2v - 2b}$; je ſubſtituë pour f ſa valeur déja trouvée, & je fais $eey - \frac{2aabbey}{2vee - 2bee} = \frac{2aaby}{2v - 2b}$, ou $ee - \frac{aabb}{ve - be} = \frac{aab}{v - b}$, $v = b \pm \frac{aab}{ee} + \frac{aabb}{e^3} = b + \frac{aab}{yy} + \frac{aabb}{y^3}$. La conſtruction ſe fera, Art. 6.

On a déterminé par le calcul Art. 3. n. 4. le point P, Fig. 155. d'où l'on doit tirer PC ſur le point donné C de la conchoïde à angles droits ; de ſorte que la perpendiculaire, que l'on meneroit ſur PC par le point C, ſeroit tangente de la Conchoïde au point C. Et l'on a trouvé $BP = v = b + \frac{aab}{yy} + \frac{aabb}{y^3}$, étant BD, $a = CE$; BA, b ; MB, $y = CH$.

Il reſte à faire voir ici, que ſi, comme M. DESCARTES l'aſſure, on coupe ſur CA le ſegment CF égal à CH, y ; & que du point F on tire FG parallele à BA & égale à EA ; la droite CGP menée par les points C, G, coupe à angles droits la conchoïde DC, c'eſt-à-dire, que la droite CGP coupe l'axe AB au point P, de ſorte que BP ſoit $v = b + \frac{aab}{yy} + \frac{aabb}{y^3}$. Par le point E menez EI parallele à AB, & par le point I, IK parallele à EA.

A cauſe des paralleles AB, CH, les triangles EBA, EHC ſont équiangles ; & donnent cette analogie CH, y : CE, a :: AB, b : EA, $\frac{ab}{y} = IK = FG$ ſupp. les lignes FG, EI, qui ſont paralleles à AB, ſont paralleles entr'elles ; les triangles CFG, CEI ſont équiangles, & l'on a cette proportion CF, y : FG, $\frac{ab}{y}$ :: CE, a : EI, $\frac{aab}{yy} = AK$.

Les triangles CFG, IKP équiangles à cauſe des paralleles EA, IK, fourniſſent cette proportion, CF, y : FG, $\frac{ab}{y}$ :: IK, $\frac{ab}{y}$: KP, $\frac{aabb}{y^3}$.

Ainſi la ligne $BP = BA + AK + KP$ eſt $b + \frac{aab}{yy} + \frac{aabb}{y^3} = v$.

ANNEXE 3 **Fermat** (Toulouse 1679) *Varia Opera Mathematica*
trad. Tannery 1896 Paris (p.121-123 T.3)

MÉTHODE

POUR LA

RECHERCHE DU MAXIMUM ET DU MINIMUM.

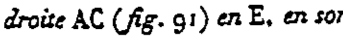
Toute la théorie de la recherche du maximum et du minimum suppose la position de deux inconnues et la seule règle que voici :

Soit a une inconnue quelconque de la question (qu'elle ait une, deux ou trois dimensions, suivant qu'il convient d'après l'énoncé). On exprimera la quantité maxima ou minima en a, au moyen de termes qui pourront être de degrés quelconques. On substituera ensuite $a+e$ à l'inconnue primitive a, et on exprimera ainsi la quantité maxima ou minima en termes où entreront a et e à des degrés quelconques. On *adégalera*, pour parler comme Diophante, les deux expressions de la quantité maxima ou minima, et on retranchera les termes communs de part et d'autre. Cela fait, il se trouvera que de part et d'autre tous les termes seront affectés de e ou d'une de ses puissances. On divisera tous les termes par e, ou par une puissance de e d'un degré plus élevé, de façon que dans l'un au moins des termes de l'un quelconque des membres e disparaisse entièrement. On supprimera ensuite tous les termes où entrera encore e ou l'une de ses puissances et l'on égalera les autres, ou bien, si dans l'un des membres il ne reste rien, on égalera, ce qui revient au même, les termes en plus aux termes en moins. La résolution de cette dernière équation donnera la valeur de a, qui conduira au maximum ou au minimum, en reprenant sa première expression.

Voici un exemple :

Soit à partager la droite AC (*fig.* 91) *en* E, *en sorte que* AE $\times$ EC *soit maximum*.

Fig. 91.



Posons AC $= b$; soit a un des segments, l'autre sera $b-a$, et le produit dont on doit trouver le maximum : $ba-a^2$. Soit maintenant $a+e$ le premier segment de b, le second sera $b-a-e$, et le produit des segments : $ba-a^2+be-2ae-e^2$;

Il doit être *adégalé au précédent :* $ba-a^2$;

Supprimant les termes communs : $be \backsim 2ae+e^2$;

Divisant tous les termes : $b \backsim 2a+e$;

Supprimez e : $b=2a$.

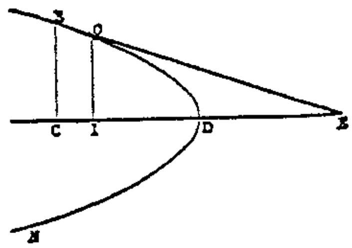
Pour résoudre le problème il faut donc prendre la moitié de b.

Il est impossible de donner une méthode plus générale.

Nous ramenons à la méthode précédente l'invention des tangentes en des points donnés à des courbes quelconques.

Soit donnée, par exemple, la parabole BDN (*fig.* 92), de sommet D,

Fig. 92.



de diamètre DC; soit donné sur elle le point B, par lequel il faut mener la droite BE tangente à la parabole et rencontrant le diamètre en E.

Si l'on prend sur la droite BE un point quelconque O, dont on mène l'ordonnée OI, en même temps que l'ordonnée BC du point B, on aura : $\frac{CD}{DI} > \frac{BC^2}{OI^2}$, puisque le point O est extérieur à la parabole. Mais, $\frac{BC^2}{OI^2} = \frac{CE^2}{IE^2}$, à cause de la similitude des triangles. Donc $\frac{CD}{DI} > \frac{CE^2}{IE^2}$.

Or le point B est donné, donc l'ordonnée BC, donc le point C, donc CD. Soit donc $CD = d$, donnée. Posons $CE = a$ et $CI = e$; on aura $\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{a^2+e^2-2ae}$.

Faisons le produit des moyens et des extrêmes :

$$da^2 + de^2 - 2dae > da^2 - a^2e.$$

Adégalons donc, d'après la méthode précédente; on aura, en retranchant les termes communs :

$$de^2 - 2dae \backsim - a^2e,$$

ou, ce qui revient au même :

$$de^2 + a^2e \backsim 2dae.$$

Divisez tous les termes par e :

$$de + a^2 \backsim 2da.$$

Supprimez de : il reste $a^2 = 2da$, donc : $a = 2d$.

Nous prouvons ainsi que CE est double de CD, ce qui est conforme à la vérité.

Cette méthode ne trompe jamais, et peut s'étendre à nombre de questions très belles; grâce à elle, nous avons trouvé les centres de gravité de figures terminées par des lignes droites et courbes, aussi bien que ceux de solides et nombre d'autres choses dont nous pourrons traiter ailleurs, si nous en avons le loisir.

Quant à la quadrature des aires limitées par des lignes courbes et droites, ainsi qu'au rapport que les solides qu'elles engendrent ont aux cônes de même base et même hauteur, nous en avons déjà longuement traité avec M. de Roberval.

Soit, par exemple, proposé de *partager la droite b en sorte que le produit de ses segments soit maximum.* Le point satisfaisant à cette question est évidemment le milieu de la droite donnée, et le produit maximum est égal à $\frac{b^2}{4}$; aucune autre division de cette droite ne donnera un produit égal à $\frac{b^2}{4}$.

Mais si l'on propose de partager la même droite b en sorte que le produit des segments soit égal à z'' $\left(\text{cette aire étant d'ailleurs à supposer plus petite que } \frac{b^2}{4}\right)$, on aura deux points satisfaisant à la question, et ils se trouveront situés de part et d'autre du point correspondant au produit maximum.

Soit en effet a un des segments de la droite b, on aura $ba - a^2 = z''$, équation ambiguë, puisque pour la droite a on peut prendre chacune des deux racines. Soit donc l'équation corrélative $be - e^2 = z''$. Comparons ces deux équations d'après la méthode de Viète :

$$ba - be = a^2 - e^2.$$

Divisant de part et d'autre par $a - e$, il viendra

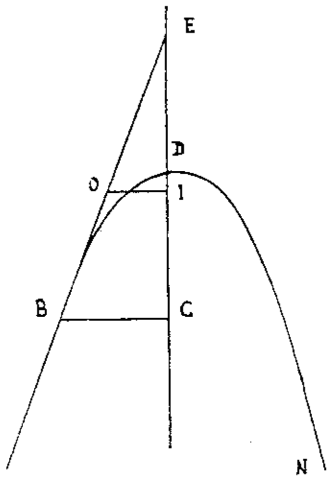
$$b = a + e;$$

les longueurs a et e seront d'ailleurs inégales.

Si, au lieu de l'aire z'', on en prend une autre plus grande, quoique toujours inférieure à $\frac{b^2}{4}$, les droites a et e différeront moins entre elles que les précédentes, les points de division se rapprochant davantage du point constitutif du produit maximum. Plus le produit des segments augmentera, plus au contraire diminuera la différence entre a et e, jusqu'à ce qu'elle s'évanouisse tout à fait pour la division correspondant au produit maximum; dans ce cas, il n'y a qu'une solution unique et singulière, les deux quantités a et e devenant égales.

Or la méthode de Viète, appliquée aux deux équations corrélatives ci-dessus, nous a conduit à l'égalité $b = a + e$; donc, si $e = a$ (ce qui arrivera constamment pour le point constitutif du maximum ou du minimum), on aura, dans le cas proposé, $b = 2a$, c'est-à-dire que, si l'on prend le milieu de la droite b, le produit des segments sera maximum.

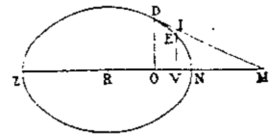
Premierement donc, ie trouue manifeſtement de l'erreur en ſa regle, & encore plus en l'exemple qu'il en donne, pour trouuer les contingentes de la parabole. Ce que ie trouue en cette ſorte. Soit B D N la parabole donnée, dont D C eſt le diametre, & que du point donné B il faille tirer la ligne droite B E, qui rencontre D C au point E, & qui ſoit la plus grande qu'on puiſſe tirer du meſme point E iuſques a la parabole : | *ſic enim proponitur quærenda maxima.* Sa regle dit : *Statuatur quilibet quæſtionis terminus eſſe A;* ie prens donc E C pour *A*, ainſi qu'il a fait; *& inueniatur maxima* (a ſçauoir B E) *in terminis ſub A gradu, vt libet, inuolutis;* ce qui ne ſe peut faire mieux qu'en cette façon : que B C ſoit *B*, le quarré de B E ſera $A\,q + B\,q$, a cauſe de l'angle droit B C E. *Ponatur rurſum idem terminus qui prius, eſſe* $A + E$: a ſçauoir, ie fais que E C eſt $A + E$ (ou bien, ſuiuant ſon exemple, $A - E$, car l'vn reuient à l'autre); *iterùmque inueniatur maxima* (a ſçauoir B E) *in terminis ſub A & E gradibus, vt libet, coefficientibus**, ce qui ne ſe peut mieux faire qu'en cette ſorte : poſons que C D ait eſté cy-deuant *D*, lors que B C eſtoit *B*, & le coſté droit de la parabole ſera $\frac{Bq}{D}$, à cauſe qu'il eſt a B C, la ligne appliquée par ordre, comme B C eſt a C D, le ſegment du diametre auquel elle eſt appliquée. C'eſt pourquoy maintenant que C E eſt $A + E$, D C eſt $D + E$; & le quarré de B C eſt $\frac{Bq \text{ in } D + Bq \text{ in } E}{D}$ qui eſtant adiouſté au quarré de C E, qui eſt $Aq + A \text{ in } E \text{ bis} + Eq$, il fait le quarré de B E. *Adæquentur duo homogenea maximæ æqualia :* c'eſt a dire que $Aq + Bq$ ſoit poſé eſgal a $Bq + \frac{Bq \text{ in } E}{D} + Aq + A \text{ in } E \text{ bis} + Eq$. *Et demptis communibus,* il reſte $\frac{Bq \text{ in } E}{D} + A \text{ in } E \text{ bis} + Eq$ égal à rien. *Applicentur ad E, &c.*, il vient $\frac{Bq}{D} + A \text{ bis} + E$. *Elidatur E,* il reſte $\frac{Bq}{D} + A \text{ bis}$ eſgal à rien. Ce qui ne donne point la valeur de la ligne *A*, comme aſſeure l'auteur, & par conſequent ſa regle eſt fauſſe.



ANNEXE 6 — La méthode de Fermat appliquée à l' ellipse.

Pour appliquer aussi cette même méthode aux *tangentes*, je puis procéder comme suit. Soit, par exemple, l'ellipse ZDN (*fig.* 96),

Fig. 96.



d'axe ZN et de centre R. Prenons sur sa circonférence un point comme D, menons par ce point la tangente DM à l'ellipse et l'ordonnée DO. Posons, en notations algébriques, la donnée $OZ = b$ et la donnée $ON = g$; soit l'inconnue $OM = a$, en comprenant par OM la portion de l'axe comprise entre le point O et le point de rencontre avec la tangente.

Puisque DM est tangente à l'ellipse, si, par un point V pris *ad libitum* entre O et N, je mène IEV parallèle à DO, il est évident que la ligne IEV coupe la tangente DM et l'ellipse, soit aux points E et I. Mais, puisque DM est tangente à l'ellipse, tous ses points, sauf D, sont en dehors de l'ellipse, donc $IV > EV$ et $\frac{DO^2}{EV^2} > \frac{DO^2}{IV^2}$. Mais, d'après la propriété de l'ellipse, $\frac{DO^2}{EV^2} = \frac{ZO.ON}{ZV.VN}$, et d'autre part $\frac{DO^2}{IV^2} = \frac{OM^2}{VM^2}$. Donc $\frac{ZO.ON}{ZV.VN} > \frac{OM^2}{VM^2}$.

Soit l'arbitraire $OV = e$, nous aurons

$$ZO.ON = bg, \quad ZV.VN = bg - be + ge - e^2,$$
$$OM^2 = a^2, \quad VM^2 = a^2 + e^2 - 2ae.$$

Donc $\frac{bg}{bg - be + ge - e^2} > \frac{a^2}{a^2 + e^2 - 2ae}$. Si donc on multiplie le premier terme par le dernier et le second par le troisième, on aura

$$\underbrace{bga^2 + bge^2 - 2bgae}_{\text{produit du premier terme par le dernier}} > bga^2 - bea^2 + gea^2 - a^2e^2.$$

Il faut donc, suivant ma méthode, comparer par adégalité ces deux produits, retrancher ce qui leur est commun et diviser ce qui reste par e; on aura donc

$$bge - 2bga \backsim - ba^2 + ga^2 - a^2e.$$

Supprimant les termes où reste e,

$$-2bga \backsim - ba^2 + ga^2,$$

membres qu'il faut égaler, d'après la méthode. Transposant comme il convient, on aura $ba - ga = 2bg$.

On voit que cette solution est la même que celle d'Apollonius, car, d'après ma construction, pour trouver la tangente, il faut faire $\frac{b-g}{g} = \frac{2b}{a}$ ou $\frac{ZO - ON}{ON} = \frac{2ZO}{OM}$, tandis que, d'après celle d'Apollonius, il faut faire $\frac{ZO}{ON} = \frac{ZM}{MN}$. Il est clair que ces deux constructions reviennent au même.

Je pourrais ajouter nombre d'autres exemples, tant du premier que du second cas de ma méthode, mais ceux-ci suffisent, et prouvent assez qu'elle est générale et ne tombe jamais en défaut.

Je n'ajoute pas la démonstration de la règle, ni les nombreuses autres applications qui pourraient en confirmer la haute valeur, comme l'invention des centres de gravité et des asymptotes, dont j'ai envoyé un exemple au savant M. de Roberval.

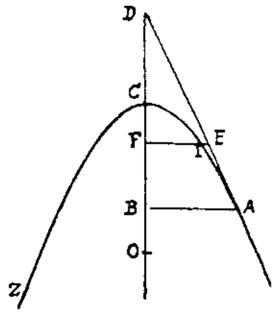
ANNEXE 7 — Lettre de Fermat à Mersenne (juin - juillet 1638)

Méthode de maximis et minimis

expliquée et envoyée par M. Fermat à M. Descartes.

La méthode générale pour trouver les tangentes des lignes courbes mérite d'être expliquée plus clairement qu'elle ne semble l'avoir été.

Soit la courbe donnée ZCA, de laquelle le diamètre soit CB. Soit encore donné dans la courbe le point A, duquel soit menée l'appliquée AB sur le diamètre. Il faut chercher la tangente AD, de laquelle le concours avec le diamètre prolongé se fait au point D.



Les lignes AB et BC sont données. Supposons que BA s'appelle B et que BC s'appelle D. Supposons que la ligne BD, que nous cherchons, s'appelle A. Prenons à discrétion un point, tel que E, sur la tangente, duquel soit tirée EF parallèle à AB, et supposons que la ligne BF soit E. Donc CF sera $D - E$, FE sera $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$. Et de quelque nature que soit la courbe, nous donnerons toujours les mêmes noms aux lignes CF et FE que nous venons de leur donner.

Cela étant fait, il est certain que le point E de la ligne EF, étant dans la tangente, sera hors de la courbe, et, par conséquent, la ligne EF sera plus grande ou plus petite que l'appliquée qui s'appuye à la courbe du point F : — plus grande lorsque la courbe est convexe en dehors, comme en cet exemple, et plus petite lorsque la courbe est convexe en dedans ; car la regle satisfait à toutes sortes de lignes et détermine même, par la propriété de la courbe, de quel côté elle est convexe.

Quoique la ligne FE soit inégale à l'appliquée tirée du point F à la courbe, je la considère néanmoins comme si en effet elle étoit égale à l'appliquée, et en suite la compare par *adéquation* avec la ligne FI, suivant la propriété spécifique de la courbe.

Comme en la parabole, par exemple, je fais

comme BC à CF, ainsi BA quarré à FE quarré,

ou bien, pour éviter les fractions et la diversité des lignes,

comme BC à CF, ainsi BD quarré à DF quarré ;

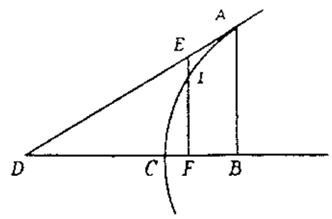
car c'est toujours la même chose, à cause des deux triangles semblables DBA, DFE.

Ou bien encore je pourrois comparer le quarré FE avec le rectangle compris sous le côté droit et la ligne CF, comme si ce quarré étoit égal à ce rectangle, quoique en effet il ne le soit pas, puisque ce sont seulement les appliquées à la courbe qui ont la proprieté que nous donnons par *adéquation* à la ligne FE.

Cela étant fait, j'ôte les choses communes et divise le reste par E. J'efface tout ce qui reste mêlé avec E et égalise le surplus, de sorte que par cette dernière équation, je connois la valeur de A et par conséquent la ligne BD et la tangente.

Et pour faire voir que la méthode est générale, et qu'elle satisfait avec pareille facilité à toutes sortes de questions, nous la pouvons appliquer, pour nous servir d'un second exemple, à la ligne courbe proposée par M. Descartes[1].

Soit la courbe convexe CA, *de laquelle la propriété est telle que, quelque point qu'on prenne sur ladite courbe, comme* A, *tirant la perpendiculaire* AB, *les deux cubes* CB *et* BA *soient égaux au parallélépipède compris sous une ligne droite donnée, comme* N, *et sous les deux lignes* CB *et* BA.



Supposons que la chose soit déjà faite, et une construction pareille à la précédente, avec les mêmes noms des lignes BD, BC, BA, CF, FE. Il faudra comparer, par *adéquation*, les deux cubes CF, FE avec le solide compris sous *N*, FC, FE.

Les deux cubes de CF, FE, sont en notes

$$Dcub. - Ecub. - Dq. \text{ in } E.\,3 + D \text{ in } Eq.\,3 + \frac{Bcub. \text{ in } Acub. - Bcub. \text{ in } Ecub. - Bcub. \text{ in } Aq. \text{ in } E.\,3 + Bcub. \text{ in } A \text{ in } Eq.\,3}{Acub.}$$

le solide de *N*, CF, FE, en notes, est :

$$\frac{N \text{ in } D \text{ in } B \text{ in } A - N \text{ in } D \text{ in } B \text{ in } E - N \text{ in } B \text{ in } A \text{ in } E + N \text{ in } B \text{ in } Eq.}{A}$$

Multipliant tout par *Acub*, il faut comparer :

$$Dc. \text{ in } Ac. - Ec. \text{ in } Ac. - Dq. \text{ in } E \text{ in } Ac.\,3 + D \text{ in } Eq. \text{ in } Ac.\,3$$
$$+ Bc. \text{ in } Ac. - Bc. \text{ in } Ec. - Bc. \text{ in } Aq. \text{ in } E.\,3 + Bc. \text{ in } Aq. \text{ in } Eq.\,3$$

avec :

$$N \text{ in } D \text{ in } B \text{ in } Ac. - N \text{ in } D \text{ in } B \text{ in } E \text{ in } Aq.$$
$$- N \text{ in } B \text{ in } E \text{ in } Ac. + N \text{ in } B \text{ in } Eq. \text{ in } Aq.$$

Otons les choses communes, savoir, du premier terme :

$$Dc. \text{ in } Ac. + Bc. \text{ in } Ac.,$$

et du second :

$$N \text{ in } D \text{ in } B \text{ in } Ac.,$$

qui sont égaux, par la propriété de la ligne, puisque les deux cubes *Dc.* et *Bc.*, répondant aux cubes des deux lignes BC et BA, sont égaux au solide *N* in *D* in *B*, qui répond à celui de la ligne donnée et des deux lignes BC et BA.

Divisons le reste par *E* et ôtons ensuite tout ce qui se trouvera mêlé avec *E* ; restera enfin :

$$Dq. \text{ in } A \text{ ter} + Bcub. \text{ ter} \quad \text{égal} \quad \text{à} \quad N \text{ in } D \text{ in } B + N \text{ in } B \text{ in } A,$$

et ainsi nous aurons :

$$\frac{N \text{ in } D \text{ in } B = Bcub. \text{ ter}}{Dq. \text{ ter} = N \text{ in } B} \text{ égal à } A,$$

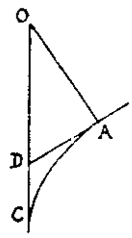
ce qu'il falloit chercher.

Mais pour lui marquer de quelle façon la méthode *de Maximis et Minimis* peut être appliquée à l'invention des tangentes, la voici :

Le point A étant donné, il faut avoir recours, non pas *ad maximam*, puisqu'on ne trouveroit que l'infini, mais *ad minimam*.

Cherchons donc le point O dans le diamètre, de telle façon que la ligne OA soit la plus courte qui puisse être tirée du point O à la courbe. Le point O étant trouvé par la méthode, joignez les deux points O et A par la ligne OA, et tirez la ligne AD perpendiculaire sur OA. Je dis que la ligne AD touchera la courbe :

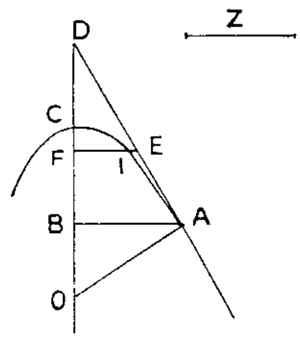
⟨ Ce ⟩ dont la démonstration est aisée. Car si AD ne touchoit pas la courbe, une autre droite la toucheroit au point A, laquelle fera son concours au dessus ou au dessous de D, et tous ses points seront hors de la courbe, et elle fera des angles inégaux avec OA au point A. Si donc, sur cette touchante supposée, du point O l'on tire une perpendiculaire, elle ne rencontrera pas la touchante au point A, mais au dessus ou au dessous, et elle coupera la courbe plus tôt que d'arriver à la touchante. Donc la partie de cette perpendiculaire comprise entre le point O et la courbe, sera plus courte que la perpendiculaire, et la perpendiculaire étant plus courte que OA, à cause de l'angle droit, il s'ensuivra que la ligne comprise entre la courbe et le point O, faisant partie de la perpendiculaire, sera plus courte que OA, laquelle pourtant nous supposons la plus courte de toutes celles qui du point O peuvent être menées à la courbe.



Que si la ligne CA est convexe en dehors, soit la tangente DA sur laquelle soit tirée la perpendiculaire AO, il paroit par la construction que AO est la plus courte de toutes celles qui du point O sont menées à la courbe, de sorte qu'en cherchant le point O, le point A étant donné, on trouve aisément la tangente[1].

Il reste donc de chercher le point O par la méthode.

Soit, par exemple, la parabole donnée CIA, *sur laquelle le point* A *soit donné. Je veux chercher le point* O, *en sorte que* OA *soit la plus courte de toutes celles qui du point* O *peuvent être menées à la parabole.*



BC, comme ci-devant, s'appellera D, et BA s'appellera B; le côté droit[1] de la figure, Z, donné, puisque la parabole est donnée. Supposons que OB soit A. Donc le quarré OA en notes sera $Aq. + Bq.$

Prenons maintenant, au lieu de la ligne A ou OB, OF ou $A + E$. Si du point F nous menons l'appliquée FI, son quarré sera en notes

$$Z \text{ in } D - Z \text{ in } E,$$

lequel, ajouté au quarré de OF, fera

$$Aq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis } + Z \text{ in } D - Z \text{ in } E,$$

et cette somme fera le quarré de OI, lequel doit être plus grand que celui de OA, puisque son côté est supposé plus grand que OA. Comparons donc, en notes, par *adéquation*, les quarrés OI et OA. Nous aurons d'un côté :

$$Aq. + Bq.,$$

et de l'autre :

$$Aq. + Eq. + A \text{ in } E \text{ bis } + Z \text{ in } D - Z \text{ in } E.$$

Otons les choses communes : la comparaison restera entre :

$$Eq. + A \text{ in } E \text{ bis} \quad \text{d'un côté, et} \quad Z \text{ in } E \quad \text{de l'autre ;}$$

car $Bq.$ est égal, par la propriété de la parabole, à Z in D.

Divisons le tout par E, et du reste ôtons le même E :

$$A \text{ bis sera égal à } Z,$$

et partant A, ou OB, sera égal à la moitié du côté droit de la parabole, et la tangente est trouvée.

C'est ainsi que j'appliquois ma méthode pour trouver les tangentes, mais je reconnus qu'elle avoit son manquement, à cause que la ligne OI, ou son quarré, sont d'ordinaire malaisés à trouver par cette voie. La raison est prise des asymmétries[1] qui s'y rencontrent aux questions tant soit peu difficiles, et qu'on ne peut éviter, puisque, sur $D - E$ en notes, il faut donner un nom à FI aussi en notes, ce qui est souvent très malaisé.

La méthode de M. Descartes n'oste pas non plus tous les inconvénients, car obligeant à mettre $\sqrt{ss - vv + 2\,vy - yy}$ au lieu de x, et le quarré de cette somme au lieu de xx, et son cube au lieu de x^3, et ainsi des autres, — c'est ainsi qu'il parle page 342[2], — si on lui propose de trouver la tangente à une courbe, en sorte que, faisant en sa figure[3] MA égal à y et CM à x, on ait l'équation suivante qui explique le rapport qui est entre x et y,

$$by^9 + b^3y^7 + b^5y^5 + b^7y^3 + b^9y \infty x^{10} - dx^9 - d^3x^7 - d^5x^5 - d^7x^3 - d^9x,$$

il me semble qu'il lui sera très malaisé de se desembarrasser des asymmétries qui se rencontrent en cette question et autres semblables, et plus difficiles encore, si on veut, à l'infini ; ce que je serai bien aise qu'il prenne la peine d'essayer[4]*.

Puisque donc ces deux méthodes paroissent insuffisantes, il en falloit trouver une qui levât toutes ces difficultés. Il me semble avec raison que c'est la première que j'ai proposée, car CF restant toujours $D - E$, et FE, $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$, je ne vois rien qui empêche qu'on ne puisse les comparer, en prenant, si vous voulez, $D - E$ pour y et $\frac{B \text{ in } A - B \text{ in } E}{A}$ pour x, sans rencontrer jamais une seule asymmétrie, en quoi consiste la facilité et la perfection de cette méthode.

On pourroit ensuite chercher la converse de cette proposition et, la propriété de la tangente étant donnée, chercher la courbe à qui cette propriété doit convenir ; à laquelle question aboutissent celles des verres brûlants proposées par M. Descartes. Mais cela mérite un discours à part et, s'il l'agrée, nous en conférerons quand il lui plaira*.

Je désire seulement qu'il sache que nos questions *de Maximis et Minimis* et *de Tangentibus linearum curvarum* sont parfaites depuis huit ou dix ans et que plusieurs personnes qui les ont vues depuis cinq ou six ans le peuvent témoigner. S'il désire voir l'application que je fais de cette même méthode pour trouver les centres de gravité des espaces compris des lignes courbes et de leurs solides, je la lui ferai voir, et lui proposerai cependant, s'il l'agrée, de *trouver le centre de gravité du conoïde qui se fait lorsque la demie parabole* CBA *est tournée sur son appliquée BA, et celui aussi de toutes ses portions, comme aussi la proportion qu'elles ont aux cones de même base et de même hauteur*[1].

209 le dénominateur A dans la fraction est omis. — 222 *depuis 8 ou 10.* — 223 *5 ou 6.* — 223 *S'il* à la ligne. — 227 *du conoïde* dans le brouillon seul. — 220 non à la ligne.

qu'il ne s'applique pas aux équations implicites, tandis que sa méthode permet de les traiter directement, lorsqu'elles sont entières, comme dans l'exemple qu'il donne. Cf. p. 250, en éclaircissement.

1. Cf. l'éclaircissement à la lettre du 4 novembre 1636 (*t. VI*, p. 149) et les lettres de FERMAT à ROBERVAL des 23 août, 22 septembre et 4 novembre (*t. VI*, n° *573*) 1636, dans l'éd. Tan.-Henry des *Œuvres de*

CONTES DU LUNDI

Les "contes du lundi" donnent un aperçu des exposés et des échanges qui ont lieu lors des réunions du groupe M:A.T.H. , ouvertes à tous, rassemblant de façon régulière, un lundi par mois à l'IREM des enseignants partageant notre passion.

Pour cette année scolaire les rencontres sont prévues

à l'IREM Paris VII, salle 8, à 14H.15

les lundi suivants:

23 septembre	Activités en classe autour du volume de la pyramide	(M. Grégoire)
12 octobre	Descartes: travaux en classe	(M.Hallez)
23 novembre	Descartes mathématicien	(M.Serfati)
14 décembre	Systèmes articulés	(J.L. Verley)
18 janvier	Pavages presque périodiques	(M Guillemot)
8 février	La perspective en 5ème, 2de, 1ère	(P.Brin,M.Grégoire)
15 mars	Des coniques d'Apollonius à la géométrie projective	(A.M. Etienne)
5 avril		
17 mai		
14 juin		

(Portrait de Weierstrass)

Premier CONTE

lundi 13 Avril 1992

Courbe de lissage d'une fonction continue:
problème de mathématiques pures avec Karl Weierstrass ?
de mathématiques appliquées avec Carl Runge?

Maryvonne Hallez

En 1885, Weierstrass, à 75 ans, publie un mémoire dans lequel il démontre que " toute fonction continue d'une ou plusieurs variables réelles peut, pour toutes les valeurs de cette (ou ces) variable réelle contenues dans un intervalle fini, être représentée par une série uniformément convergente dont les termes sont des fonctions entières."Ce mémoire satisfait pleinement aux exigences de la communauté mathématique internationale de l'époque. Au-delà de ce résultat, j'ai mis en lumière trois motivations de cette publication;

- les préoccupations pédagogiques de Weierstrass ; dans une conférence à Berlin en 1864, il déclare que le manque de rigueur qu'il trouve dans les travaux à sa disposition lui font renoncer à faire son cours sur les séries et intégrales de Fourier.

- son admiration du travail de Fourier dont il veut rendre rigoureux les énoncés mathématiques, ne perdant jamais de vue le lien entre les mathématiques et la "compréhension des phénomènes naturels"

- son activité de recherche de théoricien des mathématiques; dans ce texte , son regard embrasse tous les résultats de l'analyse mathématique; il y travaille la définition de l'intégrale généralisée, la formulation du théorème de la moyenne. Par la généralisation qu'il tient à donner à sa démonstration, il ouvre la voie à de nouvelles théories:

la théorie de la convolution

la théorie de l'approximation

Parallèlement, Runge, qui fut l'élève de Weierstrass publie la même année une démonstration du "même" théorème qui fait appel à un très petit nombre de considérations; il se tourne ensuite vers les mathématiques "appliquées"? Dans un article de 1901, il ne s'agit plus pour lui de montrer qu'il est possible de construire une série de polynômes convergeant uniformément vers une fonction continue donnée mais d'établir les limites au-delà desquelles les procédés d'interpolation ne sont plus fiables et il décrit ce que nous appelons le "phénomène Runge".

Second CONTE

Lundi 16 décembre 1991
Michèle Grégoire

Peut- on décomposer des figures de même mesure à l'aide des mêmes pièces? Pour approcher le 3ème problème de Hilbert.

La question posée reprend le troisième des 23 problèmes que posa Hilbert aux mathématiciens réunis en 1900 pour un second congrès international. Hilbert expliquait qu'il avait été démontré que si deux polygones ont même aire, on peut découper l'un d'eux en un nombre fini de pièces et réarranger ces pièces pour obtenir l'autre polygone; nous dirons qu'ils sont équidécomposables. Il demandait si la propriété était vraie également pour deux polyèdres, en particulier pour deux tétraèdres, de même volume, remarquant que toutes les démonstrations de l'égalité des volumes de deux tétraèdres de base et de hauteur égales faisaient appel à des méthodes équivalentes aux méthodes infinitésimales. Pour situer la question, voici un historique rapide des liens entre égalité des mesures des figures et équidécomposabilité.

Chez Euclide, comme dans toute la géométrie grecque, on ne trouve pas la notion numérique d'aire ou de volume, mais seulement des comparaisons de figures. Euclide établit des égalités ou évalue des rapports de "grandeurs". La "méthode des aires" est un des outils importants de démonstration du Livre I des *Eléments* . Elle permet en particulier de démontrer l'égalité (en aires) de deux parallélogrammes de même base et de même hauteur, par un procédé qui équivaut à un découpage et à un réarrangement de pièces. Dans le Livre VI, utilisant la théorie des proportions, mise en place au Livre V, Euclide montre que deux parallélogrammes puis deux triangles de même hauteur sont proportionnels à leur bases. En ce qui concerne les solides, Euclide, dans le Livre XI, montre un résultat analogue pour les parallélépipèdes: deux parallélépipèdes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, il peut étendre ce résultat aux prismes triangulaires qui sont des moitiés de parallélépipèdes (ces démonstrations ont été présentées ou lues dans le texte d'Euclide). Mais il ne peut étendre le dernier résultat aux pyramides qu'en ayant recours à la méthode par exhaustion, équivalente à notre passage à la limite.

Au XIXème siècle on a cherché à comprendre plus précisément le lien entre égalité d'aires et équidécomposabilité. L'égalité des aires de deux figures entraine-t-elle leur équidécomposabilité? F. Bolyai (le père de J. Bolyai), en 1832, et Gerwien, officier prussien et mathématicien amateur, en 1833, montrent que deux polygones de même aire sont équidécomposables. J'ai exposé une démonstration plus moderne de ce résultat: elle consiste à trianguler les polygones, à montrer qu'un triangle est équidécomposable avec un rectangle de même aire et qu'enfin deux rectangles de même aire sont équidécomposables (fig.1); on utilise la transitivité de la relation d'équidécomposabilité.

Le problème analogue pour les volumes est de chercher si deux polyèdres de même volume sont équidécomposables. J'ai proposé une démonstration moderne de ce que deux prismes de même volume sont équidécomposables, illustrée en partie par les figures 2 et 3: un prisme est équidécomposable avec un parallélépipède oblique de même volume, lui-même équidécomposable avec un parallélépipède droit, ce dernier enfin est équidécomposable avec un cube.

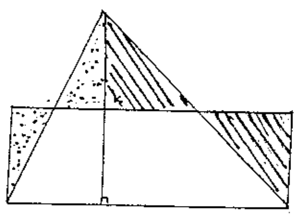
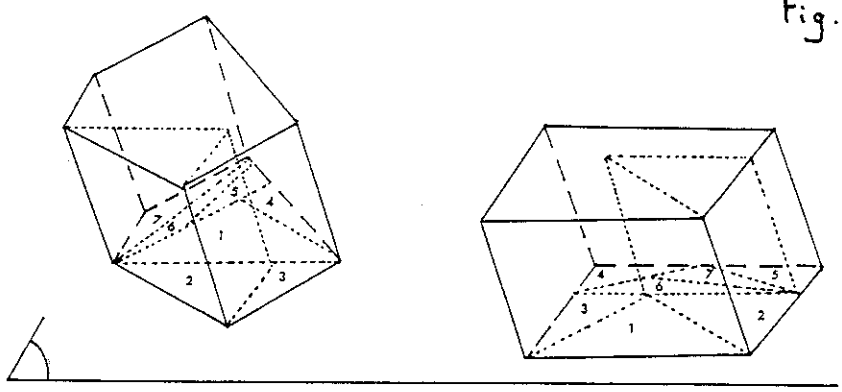


Fig. 1

Fig. 2.



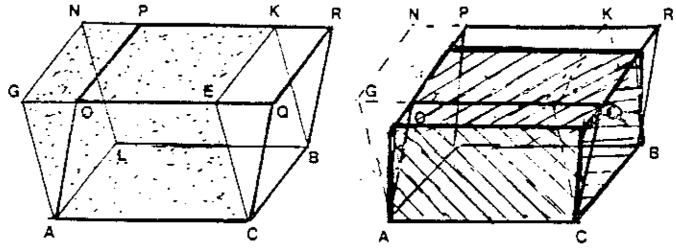
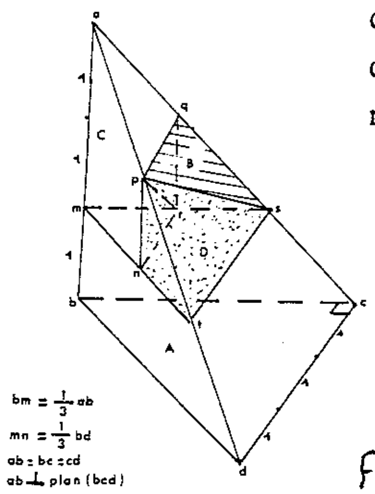


Fig. 3

Legendre, dans une note ajoutée à ses *Eléments de Géométrie* , avait déjà, au tout début du XIXème siècle, démontré que deux polyèdres symétriques sont équidécomposables avec des pièces strictement de même orientation. Hill, professeur à l'université de Londres, donne en 1895 des exemples de tétraèdres équidécomposables avec un cube (fig.4). Hilbert a cependant l'intuition que ces cas d'équidécomposabilité ne sont que des exceptions. Bricard, professeur de mathématiques à Paris, a donné en 1896 une condition pour que deux polyèdres de même volume soient équidécomposables, condition qui ne peut manifestement pas être vérifiée pour toute paire de solides de même volume. Hilbert ne mentionne pas ce résultat car la démonstration de Bricard est incomplète. C'est Max Dehn, un élève de Hilbert, qui montre en 1900, quelques mois après le Congrès de Paris, qu'il existe des polyèdres de même volume non équidécomposables. Il précise la condition trouvée par Bricard: Si deux polyèdres de même volume sont équidécomposables, il existe une relation linéaire entre les angles dièdres de ces polyèdres et l'angle plat, dont les coefficients entiers dépendent des longueurs des arêtes. Dehn met en évidence qu'un tétraèdre régulier et un cube de même volume ne peuvent être équidécomposables. Le mathématicien suisse Hadwiger a repris ces travaux dans les années cinquante et a simplifié la démonstration de Dehn. En particulier, il utilise ce qu'on appelle maintenant l'invariant de Dehn d'un polyèdre, qui est le même pour deux polyèdres équidécomposables. Or la décomposition d'un prisme en trois pyramides peut faire apparaître des pyramides de même volume mais d'invariants de Dehn différents. En 1965, après avoir obtenu plusieurs résultats intermédiaires, le mathématicien suisse J. P. Sydler réussit à démontrer que les conditions de Dehn sont nécessaires et suffisantes pour que deux polyèdres de même volume soient équidécomposables.

Le troisième problème de Hilbert est complètement résolu. Il existe des pyramides de bases et de hauteurs égales non équidécomposables. Il n'est donc pas possible de construire une théorie des volumes des polyèdres en faisant l'économie d'une méthode équivalente au calcul infnitésimal.

Un exposé plus complet et une bibliographie se trouvent dans *La Figure et l'Espace,* Actes du 8ème colloque de la commission Inter-Irem d'histoire et d'épistémologie , publié par l'Irem de Lyon (43 bd du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne cedex) .



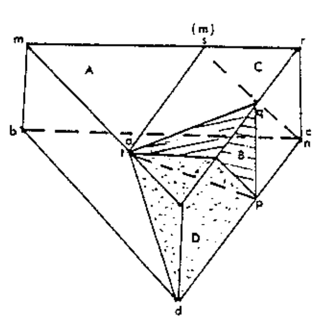


Fig. 4

Troisième CONTE

lundi 25 novembre 1991

DU THEOREME DIT DE THALES

Henry Plane

Un géomètre qui chercherait dans un ouvrage français antérieur aux ultimes années du 19ème siècle, un énoncé du "théorème de Thalès" serait certainement surpris de ne l'y point trouver et ce, quel que soit l'ouvrage consulté.

Si sa recherche va vers des livres inspirés directement du plan adopté par Euclide ou de celui de Legendre, il sera étonné du peu de place que joue dans le chapitre des figures semblables la propriété de la parallèle à un côté d'un triangle déterminant sur les deux autres côtés des segments de même rapport, place à peu près équivalente à celle de la propriété de la bissectrice d'un angle déterminant sur le côté opposé des segments dans le même rapport que celui des côtés de l'angle. Quant à la démonstration, elle repose sur le rapport de deux triangles de même base.

Ce n'est qu'avec la géométrie de Port-Royal, rédigée par Arnauld, qu' apparaît l'étude des bandes parallèles découpant sur des sécantes des segments de même rapport. C'est de reste dans la filiation de cet ouvrage que le rapport des mesures (longueurs c'est à dire nombres) se substituera, petit à petit, à celui de figures (segments de droite).

Nous avons dit ouvrages français mais ailleurs? Et bien, on trouve jusque dans les ouvrages allemands ou britanniques de la fin de ce sciècle des théorèmes de Thalès qui tournent autour du triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle. Mais alors, et la mesure des pyramides à l'aide d'un bâton et des ombres? Il s'agir vraisemblablement d'une anecdote racontée imparfaitement par Plutarque, en particulier, et reprise sur la foi à cet auteur.

P.S. Dans les actes (à paraître) du colloque inter IREM de géométrie de Limoges (Juin 1992) figurera un article sur ce sujet.

(Géométrie de Clairault 1741)

NOTES D'ECOUTE

Le Fondement du calcul différentiel dans les Eléments de la Géométrie de l'infini de Fontenelle.

Conférence de Michel Blay
lors du Colloque de la commission Epistémologie et Histoire des Mathématiques (Brest, 22 et 23 mai 1992) : Histoire d'infinis

La conférence de M. Blay présentait les *Eléments de la Géométrie de l'infini* , ouvrage que Fontenelle fait paraître en 1727, mais sur lequel il a travaillé plus de vingt ans. C'est l'oeuvre de sa vie, mais aussi une grande déception, car le livre sera très mal reçu. Fontenelle s'était proposé de comprendre et de préciser les fondements du calcul différentiel et intégral développé par Leibniz et ses émules, calcul qui produisait des résultats intéressants, mais dont les fondements étaient très controversés. On ne connait en général que la préface des *Eléments de la Géométrie de l'infini*, la seule partie qui ait été rééditée. M. Blay nous a donc exposé le système inventé par Fontenelle pour justifier les postulats du calcul différentiel. Ce système repose sur une hypothèse paradoxale: contrairement à l'infini de la métaphysique qui serait le "tout", hors duquel il n'y a rien, pour Fontenelle, **l'infini géométrique est réel.**

L'infini géométrique est pour Fontenelle une grandeur, plus grande que toute grandeur finie, et non pas plus grande que toute grandeur. L'infini est le dernier terme de la suite des nombres naturels. Pour donner une épaisseur à l'idée d'infini, Fontenelle construit des objets intermédiaires entre le fini et l'infini. Il distingue des "ordres" d'infini; dans un sens croissant, il y a les nombres finis, puis des nombres finis indéterminables (par exemple des termes finis dont les carrés seraient infinis), puis des infinis indéterminés pour lesquels il invente un symbole $\propto$, qui sont tels que $\infty / \propto$ soit entier et enfin les infinis. Cette construction lui permet de considérer des infiniment petits comme des inverses des infinis; la différentielle dy comme y divisé par l'infini, ... Avec ces définitions il peut retrouver tous les résultats obtenus dans le cadre du calcul différentiel jusqu'aux années 1710, il peut définir les nombres irrationnels par l'intermédiaire de suites utilisant des termes inverses d'infinis, ... Cette construction complexe présente une certaine cohérence et bien sûr ses paradoxes. Une intervention d'André Deledicq nous a fait remarquer que l'Analyse non standard (A.N.S.) ne modélise pas cette façon de voir: L'A.N.S. évite la problématique de la "borne" présente chez Fontenelle (par exemple dans la définition de l'infini comme dernier terme de la suite des entiers).

Michèle Grégoire

L'interpolation ou l'art de lire entre les lignes

exposé de Jean-Luc CHABERT, le 3 Juin 1992, Séminaire d'histoire des mathématiques d'Orsay. (Compte rendu d'Anne MICHEL-PAJUS)

Que signifie "interpoler"? Le verbe latin d'origine, "interpolare", veut dire : "réparer", "repriser", mais aussi "falsifier", comme pour les gloses interpolées au Moyen-Age par les copistes. L'utilisation scientifique du terme débute au XIXe siècle: il s'agit alors d'intercaler des valeurs entre des valeurs connues d'une suite.

Les tables de cordes de Ptolémée . *L'Almageste*, Livre I, IIe siècle.

La corde d'un angle α dans un cercle de rayon R est la longueur de la corde sous-tendue par un angle α, c'est-à dire: $\text{cord}(\alpha) = 2R \sin(\alpha/2)$. A l'aide de différentes formules et théorèmes, Ptolémée se ramène au calcul de cord(1°), qu'il obtient par un encadrement subtil, ainsi que cord(0,5°). Il dresse alors une table donnant les valeurs de demi-degré en demi-degré, en indiquant dans une colonne auxiliaire les "trentièmes des différences", ce qui correspondrait à un accroissement d'angle d'une minute, et incite ainsi le lecteur à ce que nous appelons une interpolation linéaire.

Pour les tables trigonométriques ultérieures, citons: Brahmagupta, Khanda Khadyaka,(665), Al-Khwarizmi (première table de sinus), Al-Battini, Révision de l'Almageste (IXe-Xe), Abu-l-Wafa, Livre complet, Al-Biruni, Qanun al-Mas'udi (Xe-XIe), Rhéticus (XVIe) (table de sinus à quinze décimales, avec un pas de 10")

La formule de Gregory-Newton et les polynômes d'interpolation de Newton et Lagrange

Textes lus:

* Gregory: extrait de la lettre de James Gregory à John Collins, 23-11-1670, in *the correspondence of Isaac Newton,* vol.I, éditée par Turnbull, Cambridge University Press, 1959.

*Newton: extrait des *Principia mathematica philosophiae naturalis.* London, 1687, Trad. Marquise du Chastelet, Paris,1756. Blanchard,1964, livre III, p 120-122.

*Lagrange: extrait des *Leçons élémentaires de mathématiques données à l'Ecole Normale en 1795.* Oeuvres, tome VII, p286.

Ultérieurement: en 1821, Cauchy propose d'utiliser les fractions rationnelles. En 1840, il donne une évaluation de l'approximation dans l'article: "sur les fonctions interpolaires", *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t XI, p775.

Citons aussi: la machine à différences finies de Babbage, reconstituée en 1991 par le Musée des Sciences de Londres.(cf *Pour la Science*, n° 169, Novembre 1991)

L'algorithme de Neville (1933)

Il permet de calculer facilement le polynôme d'interpolation sur n+1 points, connaissant deux polynômes correspondant à deux sous-ensembles de n points, ayant n-1 points en commun.

"*Iterative interpolation*", The Journal of the Indian Mathematical Society, vol 20,1933, p 87-120.

Rq.: cette étude sera publiée dans "Du caillou à la puce, histoires d'algorithmes", Belin, à paraître.

NOTE DE LECTURE

Toute étude historique en mathématiques - elle ne peut évidemment se réduire à l'énoncé pur et simple d'une liste chronologique de résultats - doit être à notre sens, et avant tout, une histoire des idées. Dans ces conditions donc, proposer en Histoire des Mathématiques, un ouvrage satisfaisant, qui soit cependant général ou encyclopédique, peut apparaître comme une tâche bien peu simple.

A ceux de nos collègues qui souhaitent néanmoins des repères historiques généraux, nous proposerons , dans les numéros de *Mnémosyne* qui suivent, une analyse comparée de quatre ouvrages généraux en Histoire des Mathématiques,choisis dans des registres - prix et contenu entre autres - bien différents, mais qui nous semblent tout à la fois instructifs et aisément disponibles en France:

- *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* (Morris Kline) (Oxford University Press. (1 tome relié ou 3 tomes brochés)

- *Histoire de Mathématiques (Routes et dédales)* (Amy Dahan-Dalmedico et J. Peiffer). Seuil. collection Point- Sciences.

- *Histoire des mathématiques* (J.F. Montucla) (Agasse éditeur. Paris Edition de l'an VII. Réédition *fac similé* Librairie Albert Blanchard. Paris . (4 tomes)

- *Histoire des mathématiques* (J.P. Collette) Erpi éditions. Diffusion Librairie Vuibert. Paris (2 tomes).

Nous vous proposerons également l'analyse de deux livres -sources[1] en Histoire des mathématiques :

- *Mathématiques au fil des âges* (ouvrage collectif), Masson éditeur. Paris.

- *A source book in Mathématics 1200-1800.* (D.J. Struick) . Princeton University Press. Princeton. New Jersey.

M. SERFATI

---

1) c'est à dire : textes originaux choisis avec commentaires.

Adresses:

U.P.spé	Union des Professeurs de Spéciales	Normale Supérieure salle des conférences 46 rue d'Ulm 75005 Paris
"ULM"	Ecole Normale Supérieure Séminaire de Philosophie et Mathématiques	salle des conférences 46 rue d'Ulm 75005 Paris
CNRS	Equipe REHSEIS (UPR 318) Recherches épistémologiques et historiques sur les sciences exactes et les institutions scientifiques	27 rue Damesne 75013 Paris 5et cour
"I.H.P."	Séminaire qui en raison des travaux se tiendra cette année au Collège de France	3 rue d'Ulm 75005 Paris, salle 306, 3ème ét.
Centre Koyré		Pavillon Chevreul 57 rue Cuvier 75005 Paris 3ème ét.
"Descartes"	Programme leibniz : La matière	Ministère de la Recherche; Pavillon Joffre 1 rue Descartes 75005 Paris

Dans l'article "De la méthode par exhaustion" paru dans le n°1 nous signalons l'apparition d'autres méthodes, comme celle des indivisibles par exemple.

Si vous désirez dès maintenant en savoir plus sur la méthode des indivisibles nous vous renvoyons à deux articles parus en 1985 dans "*Fragments d'histoire des math.* II " Brochure A.P.M.E.P. n° 65.

1) François DE GANDT :
Naissance et métamorphose d'une théorie mathématique: la géométrie des indivisibles en Italie.

2) Evelyne BARBIN :
Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles au XVII^e siècle.

Notons que ce dernier article nous a été précieux pour cerner les différents caractères de la méthode d'exhaustion.

Comité de rédaction:

Philippe BRIN	*Lycée Technique E.Branly Créteil* *Animateur à l' IREM Paris VII*
Michèle GREGOIRE	*Lycée Lavoisier Paris* *Animatrice à l' IREM Paris VII*
Maryvonne HALLEZ	*Collége P. Bert Paris* *Animatrice à l' IREM Paris VII*
Marie Françoise JOZEAU	*Lycée G. de Nerval Luzarches* *Animatrice à l' IREM Paris VII*
Michèle LACOMBE	*Lycée J. Monod Clamart* *Animatrice à l' IREM Paris VII*
Anne MICHEL-PAJUS	*Lycée C. Bernard Paris* *Animatrice à l' IREM Paris VII*
Michel SERFATI	*Lycée Technique Raspail Paris* *Animateur à l' IREM Paris VII*
Jean Luc VERLEY	*Université Paris VII* *IREM Paris VII*

Avec la collaboration de

Henry PLANE

Courrier à adresser à : Groupe M: A.T.H.
IREM de l'université Paris VII
Tour 55-56 3ème étage
75005 PARIS

Pour échanger expériences et réflexions à propos de

l'histoire et l'enseignement des mathématiques

M.: *Mathématiques*
A. *Approche par les*
T. *Textes*
H. *Historiques*

SOMMAIRE

En vente au prix de 4,50 Euros

Editeur : IREM
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Dépôt légal : Décembre 1992
ISBN : 2-86612-084-1
IREM Université Paris VII Denis Diderot
Case 7018
2, place Jussieu 75 251 Paris Cedex 05
Tel : 01 44 27 53 83