INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

n° 9

JANVIER 1995

M : A.T.H.

MNEMOSYNE

UNIVERSITE DENIS DIDEROT

PARIS VII

Mnémosyne
personnification de la mémoire.
Elle s'unit à Zeus pendant 9 nuits de suite;
de cette union naquirent les neuf Muses.
(Dictionnaire Robert des noms propres)

Illustration de la couverture : **"La mémoire"**
gravure allégorique d'après Gravelot (XVIII ème)

n° 9

JANVIER 1995

MNEMOSYNE

M: *Mathématiques*

A. *Approche par les*

T. *textes*

H. *historiques*

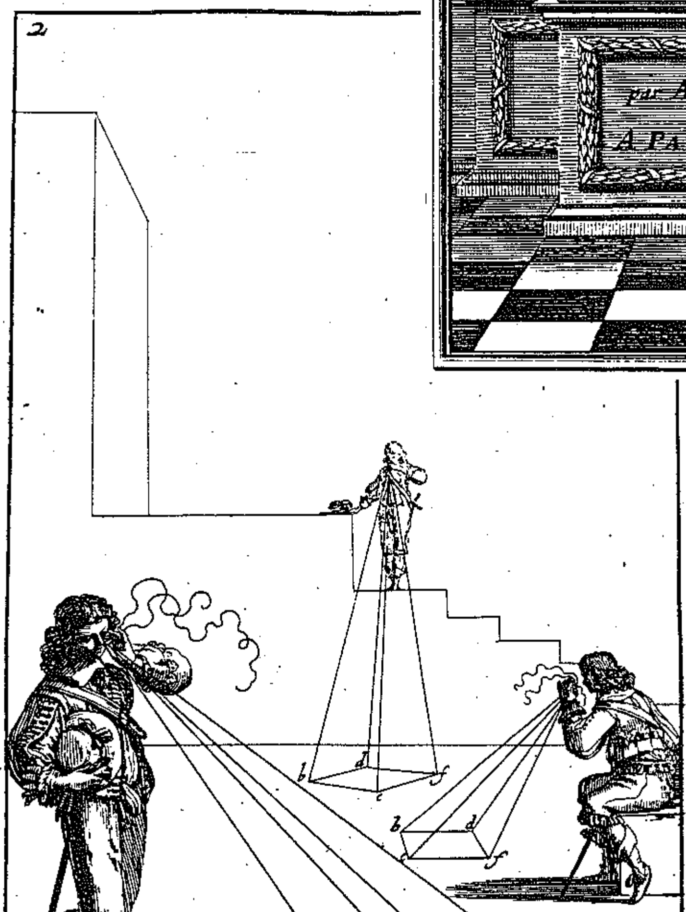
Portrait de DÜRER
à 20 ans

Autoportrait de 1491 environ

(Universitätbibliot ek Erlangen)

SOMMAIRE


MANIERE
VNIVERSELLE
DE
Mr DESARGVES
Pour Pratiquer la
PERSPECTIVE
par petit pied
comme le
Geometral
GEOMETRAL
par A. BOSSE graueur en
taille douce
A PARIS 1647 auec Privilege


2
b
d
c
f
b
d
f
b
d
c
f

EDITORIAL

Chère lectrice, cher lecteur

Mnémosyne n°9, numéro de décembre 1994, vous souhaite une bonne année et vous offre quelques questions à méditer.

Un est-il un nombre?

Dans le *conte du lundi* de Mnémosyne n°8, nous avons, dans l'esquisse d'une petite histoire du zéro et du un, mis l'accent sur le rôle de l'Arithmétique de Stevin. Nous vous en proposons les savoureuses bonnes vieilles pages dans lesquelles, pour la première fois, sont appelés nombres sans restriction, tous nos nombres réels strictement positifs, qu'ils soient rationnels, irrationnels ou autres comme π.

Tournons-nous ensuite vers la géométrie.

Quel rôle ont joué les lemmes de Pappus dans l'élaboration de la théorie de l'involution? L'article "*Desargues et Pappus*" à ouvre la voie à cette réflexion.

Dürer peut-il être considéré comme un grand géomètre?

Les *notes d'écoute* "*Humanismes et mathématiques autour de la figure emblématique d'Albrecht Dürer*". nous montrent Dürer convaincu de la nécessité d'un savoir géométrique pour devenir un artiste accompli.

Pour la rubrique *dans nos classes* nous vous proposons une merveilleuse lettre de Leibniz propice à faire naître réflexions et interrogations sur les limites ; Leibniz est-il le naïf que dénonce Laplace ?

A vous de répondre à ces questions en lisant Mnémosyne et en nous envoyant vos commentaires. Par ailleurs adressez-nous des notes d'écoute si vous assistez à une conférence, proposée dans le calendrier ou non, afin de nous faire partager votre enthousiame.

Avant le 1er février pour Mnémosyne n°10

Avant le 1er mai pour Mnémosyne n°11

Merci d'avance.

SIMON STEVIN de Bruges.

BONNES VIEILLES PAGES

Simon Stevin

Bruges 1548- La Haye 1620

En 1581 Simon Stevin s'établit à Leyde ; il prend tout de suite une part fort active à la renaissance économique et culturelle de la nouvelle république des Provinces Unies. Nous savons fort peu de choses de sa vie jusqu'en 1581 : fils illégitime de riches citoyens de Bruges, il travaille dans l'administration financière à Bruges et à Anvers et voyage en Pologne, en Prusse et en Norvège. A 33 ans il rentre à l'université de Leyde et en 1583, il écrit en latin son premier ouvrage Problèmes de géométrie. Celui-ci est marqué par l'influence d'Euclide et d'Archimède. Deux ans plus tard, il publie deux ouvrages qui font date dans l'histoire des mathématiques:

La Disme dans laquelle il introduit l'usage généralisé des fractions décimales.

L'Arithmétique, que nous présentons plus en détail ci-dessous, qu'il écrivit pour notre bonheur en français, seule exception au choix qu'il avait fait, après sa première publication, d'écrire ses ouvrages dans la langue vernaculaire en accord avec l'esprit de la nouvelle république et avec son admiration pour la capacité de sa langue maternelle à s'enrichir de nouveaux termes.

Il semble qu'il abandonne alors les mathématiques pour ne s'y remettre que vers 1605, époque à laquelle il rééditera son oeuvre mathématique. A l'âge de 62 ans, il se marie et il aura quatre enfants dont un scientifique de talent qui publiera nombre de manuscrits de son père. A partir de 1604, il est quartier-maître général des armées, tuteur de mathématiques et de sciences du prince d'Orange, Maurice de Nassau. En homme de son temps, il eut des préoccupations fort diverses et écrivit en dehors des livres de mathématiques des ouvrages de:

-mécanique, continuant l'oeuvre d'Archimède.

-astronomie, présentant le système de Copernic et appelant (en 1605!) l'hypothèse copernicienne "la vraie théorie".

-navigation, approchant la détermination de la longitude d'un bateau, si utile dans une nation de navigateurs comme la Hollande.

-instruction civique, pronant deux nécessités celle de l'obéissance du citoyen aux lois, qu'elles lui paraissent justes ou non, et celle de la religion comme moyen d'enseigner la vertu aux enfants car dans le cadre d'une période post-révolutionnaire, il pense que la consolidation du nouveau régime est plus importante que la liberté individuelle et il ne laisse au citoyen que le choix de se conformer ou de quitter le pays.

Il consacra par ailleurs des ouvrages à la théorie musicale, à la comptabilité, à la perspective, aux fortifications, à l'aménagement du territoire et à l'architecture.

L'Arithmétique est divisée en deux livres

1 Les définitions

2 Les opérations

Dans le premier livre, dans un style emphatique, qui n'est pas sans annoncer l'âge baroque, il entreprend d'abord de convaincre ses contemporains que "un" est un nombre. Il remet en question l'analogie de l'unité avec le point, mise en place dans l'antiquité grecque, et rend "Omage" au nouveau prince des nombres à savoir le zéro "0" en s'opposant à ceux qui "ont opprimé la nature du nombre empêchant l'arithmétique de connaître l'essor de la géométrie".

"Sans doute le nombre aura quelque chose en soi qui se réfère au point. Mais que sera-ce ? Ils disent l'unité : O heure infortunée en laquelle fut premièrement produite cette définition du principe du nombre. O cause de difficulté et d'obscurité de ce qui en la Nature est facile et clair ! O dommageable admis.....

L'unité doncques n'est point telle en nombre comme le point en ligne. Qu'est-ce donc qui lui correspond ? Je dis que c'est 0 (qui se dit vulgairement nul..)

0 est le vrai et naturel commencement."

Il réfute ensuite, toujours au nom de la perfection de la Nature, les distinctions entre les objets de l'arithmétique.

"Nous concluons doncques qu'il n'y a aucuns nombres absurds, irrationnels, irréguliers, inexplicables ou sourds; mais qu'il y a entre eux telle excellence et concordance , que nous avons matière de méditer nuict et jour en leur admirable perfection".

Dans le deuxième livre de l'Arithmétique, il donne dans les deux premières sections les règles opératoires entre entiers, fractions et radicaux et enseigne la règle de fausse position.

La troisième section contient une théorie des polynômes et des équations. Il paraît être le premier à avoir eu l'idée d'utiliser l'algorithme d' Euclide pour la recherche du pgcd de deux polynômes, idée qu'il dit lui être venue à la lecture du livre d'agèbre d'un mathématicien portugais Pedro Nunes, publié en 1567. A ce propos il est à noter que Stevin fait partie de ceux qui s'inscrivent explicitement dans l'histoire des mathématiques en citant ses prédécesseurs. Il peut être aussi dit le premier à *"avoir eu une idée nette"*[1] du théorème que Bolzano énoncera au 19ème siècle sur *"les courbes continues qui ne peuvent se traverser sans se rencontrer"* ce qui lui permet d'approcher d'aussi près qu'il souhaite des solutions d'équations polynomiales $f(x) = g(x)$ avec degré de $f <$ degré de g.

Dans toute son oeuvre Stevin est remarquable par sa capacité à combiner, d'une part théorie et pratique, d'autre part clarté de l'argument et lyrisme de l'expression.

1- Bourbaki *Eléments d'histoire des mathématiques* - Gauthiers -Villars 1969 p. 110

LE PREMIER LIVRE D'ARITHMETIQVE DES DEFINITIONS.

PREMIERE PARTIE DES DEFINITIONS; DE L'ARITHMETIQUE *& des nombres Arithmetiques.*

PARCE que l'Arithmetique(ce qui eſt auſſi commun aux autres ars) ſ'explique par motz comme ſignes de l'affection de l'ame, leſquels ſe denotent par eſcriptures; Il nous faut premierement deſcripre la ſignification des propres vocables de ceſte ſcience. Car auant que l'on comprenne la matiere de la doctrine, in conuient entendre les motz par leſquels on l'explique. Nous ferons doncques noſtre premier liure de leurs definitions, deſcripuant touſiours du commencement (en tant qu'il nous ſera poſſible) ce qui conſiſte premier en la nature.

AVERTISSEMENT A L'APPRENTIF.

VEV qu'il viendra bien à poinct ſoubs aucunes definitions, d'argumēter des proprietez des nombres (leſquelles l'apprentif pour le premier n'eſt pas tenu de ſçauoir) il m'a ſemblé bon l'aduertir comment nous auons appliqué tels argumens diſtinctement auec

** 2 leurs

leurs tiltres ſoubs leurs definitions, à fin que pour le premier ſe contentant des definitions, & de leurs explications, il puiſſe à ſon plus grand prouffit les paſſer oultre.

DEFINITION I.

ARithmetique eſt la ſcience des nombres.

DEFINITION II.

Nombre eſt cela, par lequel ſ'explique la quantité de chaſcune choſe.

EXPLICATION.

Comme l'vnité eſt nombre par lequel la quantité d'vne choſe expliquée ſe dict vn : Et deux par lequel on la nomme deux : Et demi par lequel on l'appelle demi: Et racine de trois par lequel on la nomme racine de trois, &c.

QVE L'VNITE EST NOMBRE.

PLuſieurs perſonnes voulans traicter de quelque matiere difficile, ont pour couſtume de declairer, cõment beaucoup d'empeſchemens, leur ont deſtourbé en leur concept, comme autres occupations plus neceſſaires; de ne ſ'eſtre longuement exercé en icelle eſtude, &c. à fin qu'il leur tourneroit à moindre preiudice ce enquoi il ſe pourroient auoir abuſé, ou pluſtoſt, cõme eſtiment les aucuns, à fin qu'on diroit. *S'il à ſceu executer cela eſtant ainſi deſtourbé, qu'euſt il faict ſ'il en euſt eſté libre?* Nous ſçaurions faire le ſemblable en ce que

que nous voulons ici dire de l'Vnité, mais non pas en verité, car ie n'ay point ſeulement leu à bon loiſir, & ſans empeſchement d'autres affaires, tous les Philoſophes anciens & modernes, que ie trouuois traicter de ceſte matiere, mais i'en ay auſſi communiqué de bouche auec quelques doctes, certes de ce temps pas des moindres, & en ceſte matiere d'autre opinion que nous : Mais pourquoi cela? par ce que ie doubtois en ce que ie propoſois de l'vnité? non certes, car i'en eſtois ainſi aſſeuré, comme ſi la Nature meſme me l'euſt dict de ſa propre bouche, voire ie le voiois (comme feront auſſi de brief ceux qui ne ſont pas du tout aueugles) par infiniz effects, qui n'ont point meſtier de preuue: Pourquoi donc? A fin que ie ſerois d'autant mieux pourveu, contre toutes obiections que i'en attendois.

Or doncques pour venir à la matiere ; Il eſt notoire que l'on dict vulgairement; que l'vnité, ne ſoit point nombre, ains ſeulement ſon principe, ou commencement, & tel en nombre comme le poinct en la ligne; ce que nous nions & en pouuons argumenter en ceſte ſorte :

La partie eſt de meſme matiere qu'eſt ſon entier,
Vnité eſt partie de multitude d'vnitez,
Ergo l'vnité eſt de meſme matiere qu'eſt la multitude d'vnitez;
Mais la matiere de multitude d'vnitez eſt nombre,
Doncques la matiere d'vnité eſt nombre.

Et qui le nie, faict comme celui, qui nie qu'vne piece de pain ſoit du pain. Nous pourrions auſſi dire ainſi:

Si du nombre donné l'on ne ſoubſtraict nul nombre, le nombre donné demeure,

** 3 *Soit*

Soit trois le nombre donné, & du mesme soubstrahons
vn, qui n'est point nombre comme tu veux.
Doncques le nombre donné demeure, c'est à dire qu'il
y restera encore trois, ce qui est absurd.

Nous pourrions aussi reciter plusieurs subtiles & sophistiques questions, qui nous ont esté proposees de bouche par les susdictes personnes, ensemble nostre refutation d'icelles, & mille absurdités en suiuãtes : mais les omettant (car il empliroit bien vn particulier & grand volume) & à fin de ne perdre huile & labeur, venons aux causes mesmes, la cognoissance desquelles dõne parfaicte intelligence. Il faut doncques sçauoir, que les Hommes i'adis voians, qu'il leur estoit mestier de parler & auoir intelligence de la quantité des choses ils nommoient chasque chose simple, vn; & quand à la mesme estoit appliquée encore vne autre, les appelloient ensemble deux, & quand la proposée simple chose estoit diuisée en deux parties egales, ils nommoient chascune partie demi, &c.

Puis considerans que vn, deux, trois, demi, tiers, &c. estoient noms propres, & conuenables, pour l'explication de ladicte quantité, ils ont veu qu'il estoit necessaire de comprendre toutes ces especes soubs vn genre (car telle est leur maniere de faire en tous autres semblables comme bled, orge, auoine, ils le nomment en genre Grain; aigle, tourterelle, rosignol, en genre Oseau) lequel genre ils appelloient nombre; Estant doncques par les principes ou causes mesmes chascun d'iceux nombre, sans doubte ils suiuent leur opinion errante, qui en apres sans consideration des causes, ont exclu l'vnité. Mais quelcun me pourra maintenant dire selon la commune sentence des Philosophes, que pour

pour traicter ordonnéement de quelque quantité, la Nature tesmoigne qu'il faut commencer de son principe, comme il appert en la quantité grande, de laquelle le manifeste principe est le poinct, mais il y a ici question de la quantité qui se dict nombre, il y faut donc dire du principe ou commencement du nombre: Certes ie ne le concede pas simplement, ains l'afferme par la suiuante 3e definition, car veu que la communauté & similitude de grandeur & nombre, est si vniuerselle qu'il resemble quasi identité, sans doubte le nombre aura quelque chose en soi, qui se refere au poinct. Mais que sera ce? Ils disent l'vnité: O heure infortunée en laquelle fut premierement produicte ceste definition du principe du nombre! O cause de difficulté & d'obscurité de ce qui en la Nature est facile & clair! O dommageable aduis de ceux qui l'ont concedé, ce qui nous à faict tel auancement en l'Arithmetique, comme il eust esté à la Geometrie, s'ils eussent concedé que le poinct soit quelque partie de la ligne, car comme de cestui la n'eust suiui que absurd, ainsi (parce que du faux ne procede que faux) de cestui ci. Mais quelle communauté (ie vous supplie) y a il entre l'vnité & le poinct? certes nulle seruant au propos; car deux vnitez (comme ils disent) font nombre, mais deux, voire mille poincts ne font nulle ligne: L'vnité est diuisible en parties (vrai est qu'ils le nient mais mille leurs distinctions ne sont pas suffisantes, de pouuoir ainsi opprimer la nature du nombre, qu'elle ne manifeste par force son essence, es Arithmetiques operations de plusieurs Autheurs, comme entre autres par l'absolute partition de l'vnité de la 33e question du 4e liure & la 12, 13, 14, 15. question du cincquiesme liure

liure du Prince des Arithmeticiens Diophante) le poinct est indiuisible : L'vnité est partie du nombre, le poinct n'est pas partie de la ligne, & ainsi des autres : L'vnité doncques n'est point telle en nombre comme le poinct en ligne. Qu'estce donc qui lui correspond ? Ie di que cest o (qui se dict vulgairement Nul, & que nous nommons commencement en la suiuante 3^e^ definition) ce que ne tesmoignent pas seulement leurs parfaictes & generales communautez, mais aussi les irrefutables effects. Les communautez sont telles :

Comme le poinct est aioinct de la ligne, & lui mesme pas ligne, ainsi est o aioinct du nombre, & lui mesme pas nombre.

Comme le poinct ne se diuise pas en parties, Ainsi le o ne se diuise en parties.

Comme beaucoup de poincts, voire & qu'ils fussent de multitude infinie, ne font pas ligne; ainsi beaucoup des o encore qu'ils fussent en multitude infinie ne font nul nombre.

Comme la ligne A B ne se peut augmenter par addition du poinct C, ainsi ne se peut le nombre D6, augmenter par l'addition de E o, car aioustant o à 6 ils ne font ensemble que 6.

A B C. D 6 E o

Mais si l'on concede que A B soit prolongée iusques au poinct C, ainsi que A C soit vne continue ligne, alors A B s'augmente par l'aide du poinct C; Et semblablement si l'on concede que D 6, soit prolongé iusques en E o, ainsi que D E 6 o soit vn continue nombre faisant soixante,

A B C D E 6 o

ſoixante, alors D 6 ſ'augmente par l'aide du nul o, & ainſi en pluſieurs autres que nous paſſons outre pour brieueté.

Quant aux effects nous pourrions dire du commencement de quantité algebraique, defini à la ſuiuante 14^e^ definition, auſſi du commencement defini à la deuxieſme definition de la DISME, par les constructions deſquelles, il appert ſuffiſamment, que le o eſt le vrai & naturel commencement, lequel comme ferme fondament nous à conduict à quelques inuentions deſcriptes (telles qu'elles ſont) au ſuiuant : Mais à fin que l'on n'eſtime que ie veux propoſer outrecuideement, mes inuentions à telle preuue, nous prendrons autre matiere ſuffiſante, non pas d'autheurs de peu d'eſtime, mais entre autres les tables de Ptolemée, Alfonſe, Nicolas Coperne, Iehan de Montroial, & ſemblables, eſquelles la deſcription, ou ſignification du poinct geometrique, ſe rencontre ſouuent entre les nombres. Prennons pour exemple les tables des Sinus de Iehan de Montroial, la ou chaſque degré eſt vne ligne oblique, de laquelle la longueur eſt la $\frac{1}{360}$ de la peripherie du circle, l'extremité de laquelle ligne, eſt le poinct Mathematique dont nous auons dict ci deſſus: Mais auec quoi eſt ſignifié chaſcun d'iceux, qui ſont iuſques à nonante? certes (en mon exemplaire) par o au commencement de chaſque premiere colomne, & ſemblables exemples ſont fort communs en pluſieurs autres tables. Or ſi encore le o ne fuſt pas cela en nombre, ce que le poinct eſt en ligne, leſdicts grans mathematiciens, voire la nature auec eux, ont en ceci tous falli; Soit ainſi, doncques au poinct ſe refere quelque autre choſe que o, poſons que ce ſoit

A ſelon

ſelon voſtre opinion 1,& en examinons la verité, mettant 1 pour le commencement ou extreme poinct (par exemple) du 3^e^ degré, auquel correſpond 523360 (ie parle de la table de Iean de Montroial, la ou le demidiametre faict 10000000) mais ceci eſt faux, car à 1 comme demonſtre ladicte table, correſpond 526265: Ou bien pour veoir double rencontre, il appert que 0, commencement du nombre, correſpond à 0, poinct & commencement du quadrant, alencontre duquel tu veux mettre 1, mais à 1 correſpond 2909. Doncques 1 ne ſignifie pas le poinct, mais 0; Et qui ne le peut veoir l'auteur de Nature aye pitie de ſes infortunez yeulx, car la faute n'eſt pas en l'obiect, ains à la veue que nous ne lui ſçauons pas donner.

QVE NOMBRE N'EST POINCT QVANTITE DISCONTINVE.

NOVS pourrions ici deſcripre pluſieurs inconueniens, procedez du ſuſdict faux fondament, mais veu qu'il auroit bien meſtier d'vn traicte particulier, ce ne ſera pas ici ſon lieu: Mais parce que nous auons dict ci deſſus, que 6, prolongé iuſques en 0, faict vn continue nombre de ſoixante, contre le vulgaire. *Nombre eſt quantité diſcontinue ou diſioincte.* il nous faut encore refuter ceſte impropre definition ainſi:

> *Tout ce qui n'eſt qu'vne quantité, n'eſt poinct quantité diſioincte;*
>
> *Soixante ſelon qu'il eſt nombre, eſt vne quantité (à ſcauoir vn nombre.)*
>
> *Soixante doncques ſelon qu'il eſt nombre, n'eſt point quantité diſioincte.*

Quant

Quant à ce que vous diuisez par vostre imagination, ceste proposée vnique & entiere quantité en soixante vnitez (ce que pourries faire par mesme raison en trente dualitez, ou vingt trinitez, &c.) & que puis apres vous definez le diuisé, ce n'est pas definition du proposé dont il est question: vous pourriez semblablement diuiser la proposée grandeur par l'imagination en soixante parties, & puis par mesme raison la definir estre quantité discontinue, ce qui est absurd. Comme doncques la generale communauté de grandeur & nombre aux autres, ainsi en cestui ci; à sçauoir à vne continue grandeur, correspond le continue nombre qu'on lui attribue, & telle discontinuité que puis apres recoit la grandeur par quelque diuision, semblable discontinuité reçoit aussi son nombre. Et à fin d'en parler par exemple, le nombre est quelque chose telle en grandeur, comme l'humidité en l'eau, car comme ceste ci s'estend par tout & en chasque partie de l'eau; Ainsi le nombre destiné à quelque grandeur s'estend par tout & en chasque partie de sa grandeur: Item comme à vne continue eau correspond vne continue humidité, ainsi à vne continue grandeur correspond vn continue nombre: Item comme la continue humidité de l'entiere eau, souffre la mesme diuision & disioinction que son eau; Ainsi le continue nombre souffre la mesme diuision & disioinction que sa grandeur; De sorte que ses deux quantitez ne se peuuent distinguer par continue & discontinue, dont nous pourrions exhiber plusieurs argumens, mais nous le conclurons par ceste leur contradiction. *Nombre* (disent ils) *est quantité disioincte*, & alieurs au contraire *Nombre est quantité conioincte ou composée de mul-*

titude d'vnitez : Certes si les vnitez sont conioinctes, elles ne sont pas disioinctes, ny par consequent leur conionction, ne produict poinct quantité disioincte. Nous accomplirons la reste par la premiere these de noz theses Mathematiques.

DEFINITION III.

Les characteres par lesquels se denotent les nombres sont dix : à sçauoir o signifiant commencement de nombre, Et 1 vn, Et 2 deux, Et 3 trois, Et 4 quatre, Et 5 cinc, Et 6 six, Et 7 sept, Et 8 huict, Et 9 neuf.

DEFINITION IIII.

Chasques trois characteres d'vn nombre s'appellent membre, desquels le premier, sont les premiers trois characteres à la dextre; Et le second membre, les trois characteres suiuans vers la senestre; Et ainsi par ordre du troisiesme membre, & autres suiuans, tant qu'il y en aura au nombre proposé.

EXPLICATION.

Soit quelque nombre tel 3 5 7 8 7 6 2 9 7. Les 297. s'appellent premier membre, & 8 7 6 second, & 3 5 7 troisiesme.

DEFI-

DEFINITION V.

Le premier charactere du premier membre commençant à dextre vers la ſeneſtre, ſignifie ſimplement ſa valeur, le ſecond autant de fois dix qu'il contient vnitez, le troiſieſme, autant des fois cent qu'il contient vnitez; Et le premier charactere du ſecond membre, autant de fois mille qu'il contient vnitez; & ainſi par dixieſme progreſſion des autres characteres contenuz en tout nombre propoſé.

EXPLICATION.

Soit quelque nombre tel 7 5 6 8 7 1 3 0 7 8 9 2 7 6. Doncques ſelon ceſte definition le premier charactere 6, faict ſix, & le 7 ſuiuant ſeptante, & le 2 ſuiuant deux cent, & le 9 neuf mille, & ainſi des autres. Pour doncques expliquer ce nombre, on mettera ſur chaſque premier charactere de chaſque membre (excepté le premier) vn poinct; Puis on dira, ſeptante cinc mille mille mille mille (à ſçauoir autant des fois mille qu'il y a des poincts depuis le 7 iuſques à la fin) ſix cents huictanteſept mille mille mille, cent trente mille mille, ſept cens huictanteneuf mille, deux cens ſeptante ſix.

DEFINITION VI.

Nombre Arithmetique eſt celui qu'on explique ſans adiectif de grandeur.

EXPLICATION.

Le nombre à deux especes, desquelles l'vne est expliquée par adiectif de grandeur, comme les nombres quarrez, cubiques, racines, quantitez, &c. lesquels nous appellons nombres Geometriques, & seront definiz à la seconde partie suiuante; l'autre espece est simplement expliquée sans ledict adiectif, comme vn, deux, trois, trois cincquiesmes, &c. Nous appellons tels nombres par distinction de l'autre espece, nombres Arithmetiques.

DEFINITION VII.

Nombre entier est vnité, ou composée multitude d'vnitez.

DEFINITION VIII.

Nombres entre eux premiers sont ceux qui n'ont point de multitude d'vnitez pour commune mesure.

EXPLICATION.

Comme 5 & 7 ou 10 & 13 & semblables: par ce qu'ils n'ont point de multitude d'vnitez, qui leur soit commune mesure, s'appellent nombres entre eux premiers.

LES

ŒUVRES
Mathematiques

DE

SIMON STEVIN de Bruges.

Ou ſont inſerées les

MEMOIRES MATHEMATIQVES,

Eſquelles s'eſt exercé le Tres-haut & Tres-illuſtre Prince MAURICE de NASSAU, Prince d'Aurenge, Gouverneur des Provinces des Païs-bas unis, General par Mer & par Terre, &c.

Le tout reveu, corrigé, & augmenté

Par ALBERT GIRARD Samielois, Mathematicien.

A LEYDE

Chez Bonaventure & Abraham Elſevier, Imprimeurs ordinaires de l'Univerſité, ANNO cIↄ Iↄ c xxxiv.


PERSPECTIF
GEONETRAL
MANIERE VNIVERSELLE
De Mr Desargues pour praticquer la PERSPECTIVE
par petit pied Comme le GEOMETRAL
par A. Bosse graueur en taille douce A PARIS 1647 auec priuilege

DESARGUES ET PAPPUS

Rosane Tossut
FUCAM, Mons

Les coniques sont des sections planes d'un cône à base circulaire. C'est ainsi qu'elles sont définies par Apollonius au 3ème siècle avant J.C. Le développement de la perspective à partir du 15ème siècle va conduire à une nouvelle manière de voir les coniques. Dans le "Brouillon Project" de 1639, Desargues considère les sections coniques comme des projections de la base circulaire à partir du sommet du cône. Il établit des propriétés des coniques en les démontrant pour le cercle et en les projetant. C'est dans ce contexte qu'il introduit l'involution qui est une relation conservée par projection. Nous traiterons ce point dans une première partie de l'article.

Nous nous interrogerons ensuite sur l'origine de l'involution. On reconnaît aujourd'hui dans la "Collection Mathématique" de Pappus, datant du 4ème siècle, des cas particuliers de certaines propriétés de l'involution. Desargues connaissait certainement le traité de Pappus. Nous pouvons alors nous demander comment il l'a lu, comment il a vu l'involution. Treize siècles après, Desargues a pu lire le texte de Pappus avec une autre "perspective". Nous regarderons la manière dont les propositions sont énoncées et démontrées par Pappus et comment elles sont unifiées par la théorie de Desargues[1].

1. Deux points de vue sur les coniques.

En 1822, Poncelet écrit au début de son "Traité des propriétés projectives des figures":

"*Suivant la définition d'Apollonius, généralement admise en Géométrie, une section conique ou simplement une conique est la ligne suivant laquelle un plan arbitraire rencontre un cône quelconque*

[1] Cet article est tiré de mon mémoire de D.E.A. en Histoire des Sciences et des Techniques réalisé sous la direction du Professeur Rudolf Bkouche (Lille, octobre 1991).

à base circulaire; une conique n'est donc autre chose que la projection d'un cercle"[2].

Le fait de considérer, comme Poncelet, la section plane d'un cône comme la projection de la base circulaire est aujourd'hui naturelle. Mais il n'en a pas toujours été ainsi.

Pour les Grecs, une conique est obtenue comme section d'un cône; il n'est pas question de projection. Au 3ème siècle avant J.C., Apollonius écrit un important traité développant la théorie des coniques. Les trois coniques, ellipse, parabole et hyperbole[3], sont obtenues en coupant par un plan un double cône à base circulaire, cône qui peut être droit ou oblique[4] (Fig.1). Il établit pour chaque conique une relation caractéristique qui exprime une égalité d'aires[5]. Les coniques sont ensuite étudiées séparément le plus souvent, sans référence au cône. A l'époque de Desargues, au 17ème siècle, le traité d'Apollonius est encore la référence sur le sujet des coniques[6].

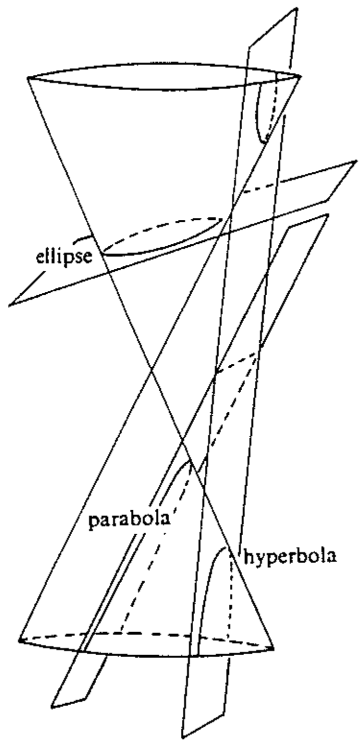


Fig.1

[2] [7], I, p.4; Poncelet précise que le mot projection a le même sens que celui de perspective; ainsi la projection est conique ou centrale.

[3] Pour nous, une hyperbole est formée de deux branches. Apollonius appelle hyperbole une branche seule et sections opposées les deux branches.

[4] Auparavant, on utilisait trois types de cônes pour définir les trois sections coniques (cf. Heath [4], II, p.111).

[5] La relation peut être lue aujourd'hui comme l'équation de la conique dans un repère déterminé par la tangente en un point et le diamètre passant par ce point (cf. Heath [4], II, p.134 à 139).

[6] La traduction latine des quatre premiers livres réalisée par Commandino est publiée en 1566.

Il n'est pas immédiat de voir dans Fig.1 des projections d'une figure plane sur une autre. Ce point de vue est apparu avec le développement de la perspective. En 1435, Alberti définit le tableau du peintre comme une intersection plane de la pyramide visuelle formée des rayons lumineux joignant les points de l'objet à l'oeil : "qui regarde une peinture, voit une certaine intersection d'une pyramide"[7]. En 1525, Dürer décrit plusieurs dispositifs permettant de réaliser des mises en perspectives (Fig.2). Dans la première gravure, le sommet de l'obélisque situe l'oeil ponctuel immobile. Dans la seconde, un anneau fixé au mur et un fil tendu matérialisent respectivement le sommet de la pyramide visuelle et un rayon visuel. Les points de l'objet sont associés aux points du tableau via les rayons visuels; un point est projeté sur son image en suivant un rayon visuel.

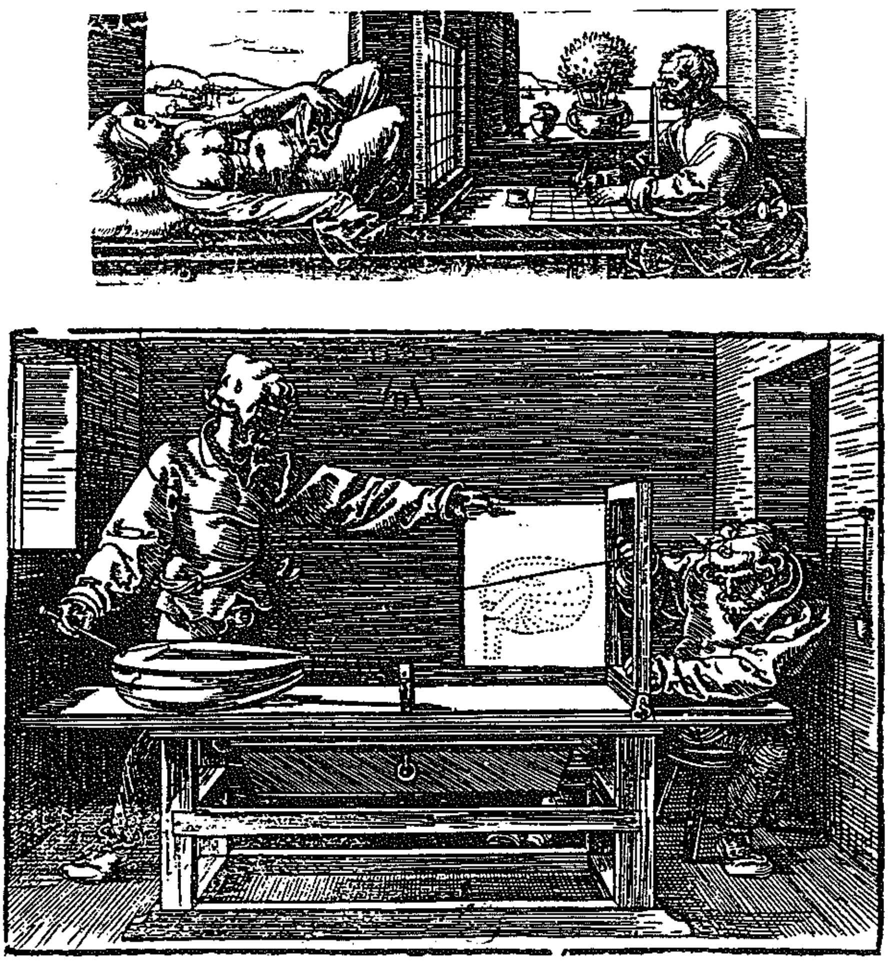


Fig.2

Dans le "Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan" [3] publié en 1639, Desargues reprend l'étude des coniques en portant un nouveau regard. Il la met en relation avec la perpective : une conique est une section plane d'un cône à base circulaire; elle est aussi la perspective du cercle de base, l'"oeil" étant au sommet du cône.

---

[7] Della Pittura, le manuscrit latin date de 1435.

Desargues considère donc les coniques comme des projections du cercle de base à partir du sommet de cône. Dans le cas d'une parabole, un point du cercle est projeté à l'infini et dans le cas d'une hyperbole, deux points[8]. Desargues introduit les points à l'infini via la notion d'ordonnance de droites qui regroupe les familles de droites parallèles et les familles de droites concourantes :

"Pour donner à entendre de plusieurs lignes droictes, qu'elles sont toutes entre elles ou bien paralleles, ou bien inclinées à mesme poinct, il est icy dit, que toutes ces droictes sont d'une mesme ordonnance entre elles, par où l'on concevra de ces plusieurs droictes, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position, elles tendent comme toutes à un mesme endroict.

L'endroict auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs droictes en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux especes de position, est icy nommé, but de l'ordonnance de ces droictes".

Desargues précise alors que si les droites sont parallèles, le but est dit "*à distance infinie en chacune d'elles d'une part & d'autre*", et si les droites sont concourantes, le but est dit "*à distance finie*". Un point est donc considéré comme le "point de concours" d'une famille de droites; il est à l'infini si les droites sont parallèles, et à distance finie sinon. Points à l'infini et points à distance finie jouent le même rôle[9].

Desargues obtient des propriétés des coniques en projetant des propriétés du cercle. Cela nécessite d'avoir reconnu des propriétés conservées par projection[10].

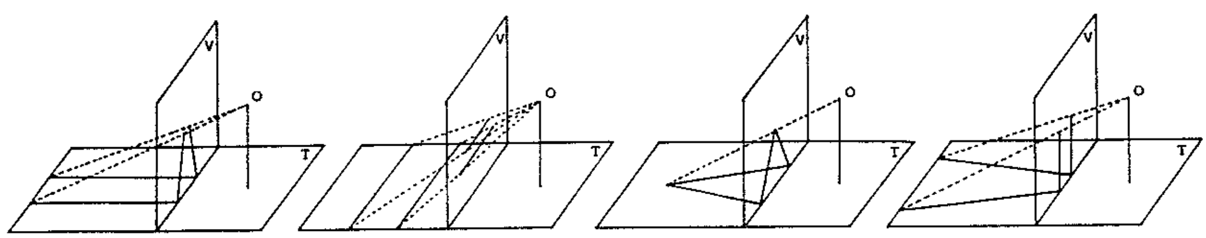
- Les intersections des lignes et leurs contacts sont conservés lors d'une projection grâce à l'introduction des points à l'infini : une ordonnance de droites est projetée sur une ordonnance de droites[11]; une tangente à une conique est l'image d'une tangente au cercle; dans le cas de

[8] Dans son texte sur la "génération des coniques", Pascal parlera de "points sans image du cercle" et de "points manquants" pour la parabole et l'hyperbole ([7], p.1114). Ce texte a été retrouvé dans les papiers de Leibniz; il s'agit d'une partie d'un traité sur les coniques qui est perdu. Pascal y détaille le passage du point de vue "section d'un cône" au point de vue "projection d'un cercle" en utilisant le langage de la perspective.

[9] Desargues définit par exemple le rouleau comme la figure engendrée par une droite passant par un point fixe et s'appuyant sur un cercle; suivant que le point fixe est à l'infini ou non, il s'agit d'un cylindre ou d'un cône. Les coniques ou "coupes de rouleau" sont ensuite définies comme les sections planes d'un rouleau.

[10] Ces propriétés seront appelées projectives par Poncelet: "toutes les relations ou propriétés qui subsistent à la fois dans une figure et dans ses projections, seront appelées également relations ou propriétés projectives" ([8], p.5)

[11] Dans son traité de perspective publié en 1636 ([2]), Desargues met déjà en évidence le fait que des droites parallèles deviennent en perspectives des droites parallèles ou concourantes, et qu'il en va de même pour des droites concourantes. Cela annonçait la notion d'ordonnance de droite de 1639.



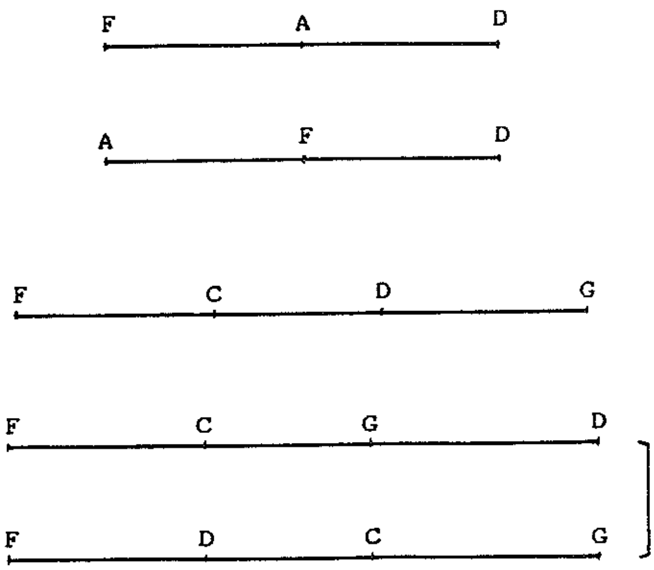
l'hyperbole, une asymptote est une tangente en un point à distance infinie[12];...
Ces propriétés sont utilisées naturellement dans le Brouillon Project.

- Les distances sont en général modifiées par une projection[13]. Un apport essentiel de Desargues est de dégager une relation métrique qui est conservée. Il s'agit de la relation d'involution définie pour des points alignés : des couples de points en involution sont projetés sur des couples de points en involution.

2. Relation d'involution de Desargues.

1°. Définition.

Desargues introduit d'abord les notions de "point engagé", "point dégagé", "couples mêlés" et "couples démêlés" qui lui permettent de mettre un ordre sur la droite (Fig.3). Notons que deux couples de points alignés sont, soit mêlés, soit démêlés. Cela est lié au fait, qu'avec son point à l'infini, une droite est analogue à un cercle.



Le point A est engagé entre F et D.

Le point A est dégagé d'entre F et D.

Les couples CG et DF sont mêlés.

Les couples CG et DF sont démêlés.

Fig.3

---

12 Pascal notera qu'il y a sur la parabole "une droite manquante, laquelle joue le rôle d'une tangente, puisqu'elle est l'image d'une tangente" ([7], p.1117).

13 Au 19ème siècle, Poncelet, puis Chasles distingueront les propriétés graphiques (ou descriptives) qui sont projectives et les propriétés métriques dont certaines sont projectives et d'autres pas. Face à une figure jouissant de propriétés métriques, "on ne pourrait affirmer à priori, et sans examen préalable, ni que ces propriétés subsistent, ni qu'elles cessent de subsister dans les diverses projections de la figure primitive. Or, on sent toutefois l'importance qu'il y aurait à pouvoir reconnaître, à l'avance, si telle ou telle relation examinée est ou n'est pas projective de sa nature; car il en résulterait qu'ayant démontré cette relation pour une figure particulière, on pourrait de suite l'étendre à toutes les projections possibles de cette figure" ([8], p.5).

Desargues aborde ainsi l'involution :

"Quand en une droite AH, il y a un poinct A, commun & semblablement engagé ou dégagé aux deux pieces de chacune de trois couples, AB, AH; AC, AG; AD, AF, dont les trois rectangles sont égaux entre eux, une telle condition en une droicte est icy nommée Arbre, dont la droicte mesme est Tronc. Le poinct comme A, ainsi commun à chacune de ces six pieces AB, AH, AC, AG, AD, AF, y est nommé Souche"[14].

La définition peut se réécrire avec des notations modernes: trois couples de points BH, CG et DF sont en involution s'il existe un point A qui est soit engagé entre les points de chaque couple, soit dégagé, et qui est tel que

$$AC.AG = AD.AF = AB.AH \ .$$

Le point A est appelé la souche. Deux cas peuvent se présenter : soit la souche est engagée entre les points de chaque couple et dans ce cas, les couples sont mêlés (Fig.4), soit la souche est dégagée et alors, les couples sont démêlés (Fig.5).

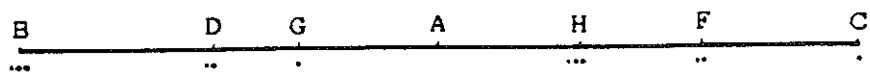


Fig.4

Fig.5

Desargues montre ensuite que l'on peut aussi exprimer l'involution sans faire intervenir la souche[15]: les trois couples de points BH, CG, DF sont en involution s'ils sont soit mêlés, soit démêlés, et si on a

$$(GB.GH):(CB.CH) = (GD.GF):(CD.CF) \ , \tag{1}$$

ou une des deux relations obtenues par permutation des couples :

---

[14] Le terme involution est introduit plus loin dans le texte.

[15] La démonstration utilise des propriétés des proportions et des compositions de raison. Reprenons les étapes. De AD.AF = AG.AC, on déduit d'une part AG:AF = AD:AC et donc AG:AF = GD:CF, et d'autre part AF:AC = AG:AD et donc AF:AC = GF:CD. A partir des égalités précédentes, on obtient AG:AC = (GD:CF).(GF:CD), et par conséquent AG:AC = (GD.GF):(CD.CF). De cette égalité et de l'égalité semblable obtenue en considérant le troisième couple de points conjugués, on tire la relation générale entre huit segments.

$$(FC.FG):(DC.DG) = (FB.FH):(DB.DH) ,$$

$$(HC.HG):(BC.BG) = (HD.HF):(BD.BF) .$$

Desargues écrit alors :

"Et quand en une droicte AH, il y a comme cela trois couples de poincts BH, CG, DF, ainsi conditionnées, à sçavoir que les deux poincts de chacune des couples soient de mesme, ou meslez, ou demeslez, aux deux poincts de chacune des autres couples. Et que les rectangles ainsi relatifs des pieces d'entre ces poincts soient entre eux comme leurs gemeaux, pris de mesme ordre, sont entre eux: une telle disposition de ces trois couples de poincts en une droicte, est icy nommée Involution".

2°. Et si un des points est à l'infini ? La souche et le point à l'infini sont conjugués.

Ayant trois couples BH, CG, DF en involution, si le point F par exemple devient le point à l'infini, son conjugué D devient la souche A (Fig.6). On a dans ce cas

$$(GB.GH):(CB.CH) = GA:CA .$$

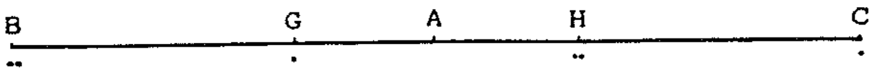


Fig.6

Desargues souligne à plusieurs reprises le caractère incompréhensible d'une relation comme (1) lorsqu'un des points est à l'infini, *"l'entendement ne void goutte"*[16]. Il considère par ailleurs le point à l'infini d'une droite à égale distance de deux points à distance finie de la droite[17], ce qui permet de retrouver la relation particulière ci-dessus à partir de (1).

3°. L'"involution de quatre points".

Ce type d'involution est illustré par Fig.7: les points coïncident pour deux couples de l'involution. On a alors

$$FH:FB = GH:GB .$$

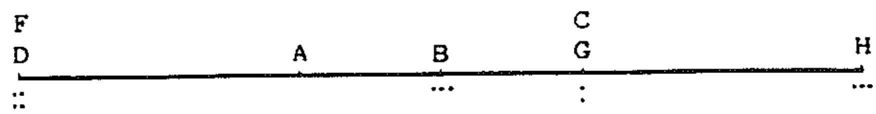


Fig.7

[16] cf. [3], p.116, p.120 (pour l'involution de quatre points), p.126 (pour le théorème de Ménélaüs).

[17] cf. [3], p.142.

Nous disons aujourd'hui que les quatre points forment une division harmonique (F et G divisent intérieurement et extérieurement BH dans le même rapport).

Un cas particulier est celui où H est à distance infinie; son conjugué B est alors le milieu de FG[18].

4°. <u>L'involution est conservée par projection.</u>

Le caractère projectif de l'involution est établi en utilisant la définition indépendante de la souche car celle-ci n'est pas conservée lors d'une projection. Desargues montre que si (DC.DG):(FC.FG) = (DB.DH):(FB.FH), alors (dc.dg):(fc.fg) = (db.dh):(fb.fh) (Fig.8).

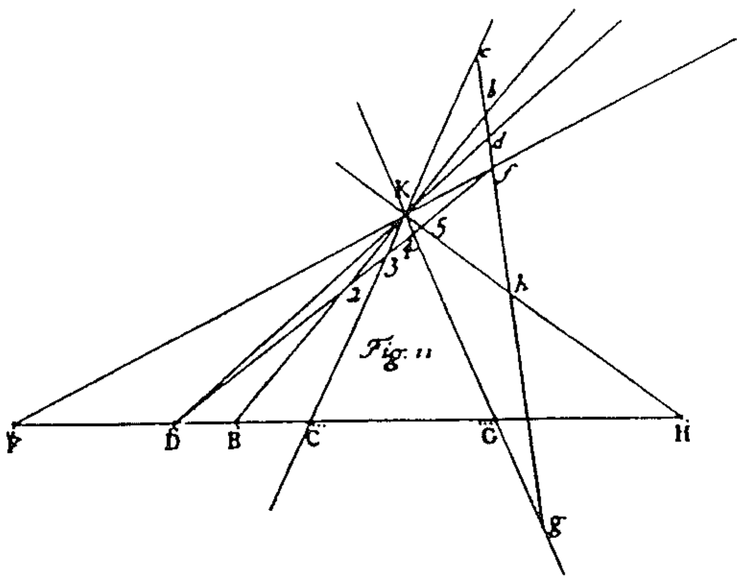


Fig.8[19]

La démonstration est tout-à-fait dans la tradition grecque. Une utilisation répétée du théorème de Ménélaüs entraîne de lourdes compositions de raisons. Ce théorème, que Desargues attribue à Ptolémée, exprime une relation entre les segments formés sur les côtés d'un triangle coupé par une droite : en considérant par exemple le triangle dfD et la droite gK4, on a gd:gf = (Kd:KD).(4D:4f).

Desargues signale ensuite que si la droite cb est parallèle à une des six droites passant par K, on obtient sur cb un couple constitué de la souche et du point à l'infini. Pour lui, la démonstration générale convient également pour ce cas[20]. Alors que la démonstration donnée est très "grecque", il s'agit là d'une transgression importante par rapport à la rigueur grecque.

---

18 Desargues note à nouveau le caractère incompréhensible de la relation FH:FB = GH:GB lorsque le point H est à l'infini (on a alors FB = GB).

19 La droite auxiliaire Df intervient dans la démonstration.

20 Rappelons qu'il considère le point à l'infini d'une droite à égale distance de deux points à distance finie de la droite; cela permet de particulariser les rapports quand un des points est à l'infini (cf. 2°).

5°. L'involution et les coniques. Démonstration par perspective du théorème fondamental.

L'utilisation de l'involution pour l'étude des coniques passe par le "théorème de Desargues sur l'involution" :

"*Quand en un plan, à quatre poincts B, C, D, E, comme bornes couplées trois fois entre elles, passent trois couples de droictes bornales BCN, EDN, BEF, DCF, BDR, ECR, chacune de ces trois couples de droictes bornales & le bord courbe d'une quelconque coupe de rouleau, qui passe à ces quatre poincts B, C, D, E, donne en quelconque autre droicte de leur plan ainsi qu'en un tronc I, G, K une des couples de noeuds d'une involution IK, PQ, GH, & LM*" (Fig.9).

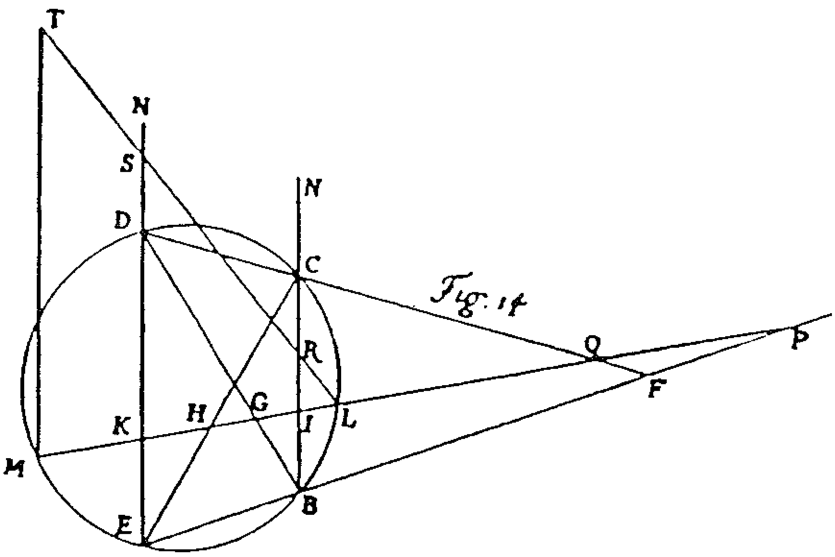


Fig.9[21]

Le théorème comporte deux propriétés qui sont démontrées successivement :
- les couples de côtés opposés et les diagonales d'un quadrilatère déterminent sur toute sécante trois couples de points en involution;
- si de plus le quadrilatère est inscrit à une conique, celle-ci détermine sur la sécante un couple de points en involution avec les trois couples précédents[22].

Desargues démontre la première propriété en se servant du théorème de Ménélaüs. Il donne une démonstration unique : il établit la relation dans le cas où les six points de

[21] Les droites TL et TM interviennent dans un autre énoncé.

[22] Chasles mettra en évidence que ce théorème exprime "une relation tout à fait générale de six points pris arbitrairement sur une conique" ([1], p.79). Il permet de construire la conique déterminée par cinq points donnés. Cette génération des coniques est métrique. Une génération purement graphique est donnée par le théorème de Pascal (les côtés opposés d'un hexagone inscrit à une conique se coupent en trois points alignés).

l'involution sont distincts et à distance finie. Pour la seconde propriété, il utilise l'invariance projective de l'involution : une conique étant une section de rouleau, il démontre la propriété pour la base circulaire et la transporte ensuite à la conique par une projection ayant son centre au sommet du rouleau.

Le théorème permet ensuite d'établir des propriétés des pôles et polaires. Nous n'aborderons pas ici ce travail mais renvoyons aux livres de R. Taton [3] et de Field et Gray [2]. Notons cependant que Desargues unifie l'étude des coniques; celles-ci sont des variétés d'une même courbe que l'on peut étudier "*par un seul et mesme discours et sous de mesmes paroles*". Si de nombreux résultats portant sur les coniques ne sont pas neufs dans le Brouillon Project, la méthode pour les obtenir et la manière de les relier est neuve. Desargues introduit un point de vue projectif absent chez Apollonius.

3. Le livre VII de la Collection Mathématique de Pappus.

On peut s'interroger sur l'origine de l'involution qui joue un rôle essentiel dans le "Brouillon Project" de Desargues. On situe généralement les premières apparitions de la relation d'involution dans le livre VII de la Collection Mathématique de Pappus[23].

Pappus a écrit les textes de la Collection Mathématique au début du 4ème siècle de notre ère. Ces textes constituent un guide de la géométrie qui ne remplace pas les textes originaux cités mais est destiné à être lu avec eux. Le manuscrit le plus ancien dont on dispose date du 10ème siècle et est conservé à la Bibliothèque du Vatican[24]. Les travaux figurant dans la Collection ont sans doute été rassemblés, non par Pappus, mais par un "éditeur" soucieux de préserver les nombreux écrits de Pappus, probablement peu après la mort de celui-ci. Entre cette transcription originale et le manuscrit du Vatican, on ne sait pas combien de copistes sont intervenus. Mais il semble peu probable que quelqu'un ait introduit dans le texte des interpolations significatives[25]. A partir du 16ème siècle, on identifie différents manuscrits descendant, directement ou indirectement, de celui du Vatican. C'est avec l'impression de la traduction latine de Commandino que la Collection devient accessible à beaucoup de mathématiciens européens (la première édition date de 1588).

Le livre VII de la Collection est destiné à accompagner la lecture de différents traités appartenant au "Domaine de l'Analyse"[26]. Pappus donne une courte description des contenus de ces traités, puis il établit, pour chacun, une série de lemmes destinés à faciliter leur lecture.

---

23 Voir par exemple Chasles [1] p.40 et 315, Heath [4] p.180.

24 Sur les huit livres de la Collection, le livre I est perdu, de même que le début du livre II et la fin du livre VIII. Jones a transcrit le livre VII à partir du manuscrit du Vatican et il l'accompagne d'une traduction anglaise dans [5]. Ver Ecke a réalisé une traduction française de la Collection à partir de l'édition complète de Hultsch de 1875-78 [6].

25 Voir à ce sujet, Jones [5], p.15 à 26.

26 Ces traités devaient constituer une aide pour l'analyse de problèmes; on y étudiait des problèmes auxquels d'autres problèmes plus compliqués pouvaient être réduits par analyse (cf. [5], p.69).

Les lemmes de Pappus qui nous intéressent ici se rapportent aux deux traités suivants :
- la Section Déterminée d'Apollonius,
- les Porismes d'Euclide.

Ces deux traités sont aujourd'hui perdus. Nous avons quelques indications sur leur contenu grâce à Pappus mais nous ne pourrons pas éclairer davantage les lemmes par les théories qu'ils servent.

Pappus annonce que les deux livres qui composent la Section Déterminée traitent une proposition unique :

"*Couper une droite indéfinie en un point tel que le carré construit sur une des droites ainsi découpées jusqu'à des points donnés sur cette droite, ou le rectangle compris sous les droites découpées, ait un rapport donné soit avec le carré d'une des droites découpées, [soit avec le rectangle compris sous l'une des droites découpées] et une droite donnée ailleurs, soit avec le rectangle compris sous deux droites découpées de l'un ou de l'autre côté qu'on voudra des points donnés*" ([6], p.482).

Le problème décrit a été restauré par Simson sous la forme suivante : étant donnés quatre points A, B, C, D sur une droite, déterminer un autre point E sur la même droite tel que un des rapports parmi $AE^2:CE^2$, $AE^2:(k.CE)$, $AE^2:(CE.ED)$, $(AE.EB):(k.CE)$, $(AE.EB):(CE.EB)$ soit égal à un rapport donné ([5], p. 386)[27].

Par ailleurs, concernant le traité sur les Porismes, il commente ce qu'est un porisme[28] et transmet l'énoncé complet d'un seul porisme, le premier :

"*Si des droites menées de deux points donnés se brisent sur une droite donnée de position, et si l'une découpe un segment sur une droite donnée de position, à partir d'un point donné sur cette droite, l'autre découpe aussi sur une autre droite un segment ayant un rapport donné*" ([6], p.490).

Plusieurs mathématiciens travaillèrent à une restauration des Porismes d'Euclide. On trouve de nombreuses indications sur les travaux et discussions autour des Porismes dans l'introduction et les commentaires de Ver Eecke [6] et dans le livre de Jones [5].

4. Des propriétés arithmétiques[29] de l'involution parmi les lemmes de Pappus pour la Section Déterminée.

Reprenons quelques lemmes qui seront ensuite rapprochés de la théorie de Desargues. L'énoncé complet de la proposition 22 est donné, les autres énoncés sont ensuite résumés en

---

27 Nous avons aussi des indications sur ce qu'a pu être la Section Déterminée grâce à un autre traité d'Apollonius repris dans le livre VII, la Section de Rapport, dont le texte a été conservé en arabe (Jones donne une traduction anglaise de certains passages dans [5]).

28 Un porisme possède une forme intermédiaire entre celle d'un théorème et celle d'un problème (cf. Heath [4], I, p.434).

29 Suivant la distinction utilisée par Chasles: six points en involution jouissent de deux types de propriétés: les unes sont appelées arithmétiques parce qu'elles ne concernent que ces relations entre les segments pris de différentes manières entre ces points, et les autres, géométriques, parce qu'elles concernent certaines figures que l'on peut faire passer par les six points en question, ou dans lesquelles se présente l'involution de six points ([1], p.309).

utilisant des notations modernes.

"Proposition 22. Soit la droite AB; soient trois points C, D, E sur cette droite, et que le rectangle compris sous les droites AD, DC soit équivalent au rectangle compris sous les droites BD, DE; je dis que le rectangle compris sous les droites AB, BC est au rectangle compris sous les droites AE, EC comme la droite BD est à la droite DE" [6] (Fig.10).

Proposition 22 (Fig.10). Si AD.DC = BD.DE, alors (AB.BC):(AE.EC) = BD:DE.

Fig.10

Proposition 30 (Fig.11). Si AD.DE = BD.DC, alors (AB.BE):(EC.CA) = BD:DC.

Fig.11

Proposition 35 (Fig.12). Si AB.BE = CB.BD, alors (DA.AC):(CE.ED) = AB:BE.

Fig.12

Proposition 36 (Fig.13). Si AB.BE = CB.BD, alors (AC.CE):(AD.DE) = CB:BD.

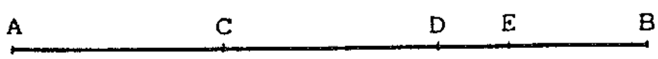


Fig.13

Proposition 37 (Fig.14). Si $AB:BC = AD^2:DC^2$, alors $AB.BC = BD^2$.

Fig.14

Proposition 40 (Fig.15). Si (AC.CB):(AE.EB) = CD^2:DE^2 , alors (EA.AC):(CB.BE) = AD^2:DB^2.

Fig.15[30]

1°. Des cas particuliers d'involution.

Parlant des lemmes de Pappus relatifs à la Section Déterminée, Chasles écrit dans l'Aperçu Historique :

"*On n'aperçoit pas, au premier abord, la vraie signification de ces nombreuses propositions, ni les rapports qui peuvent les rattacher ensemble à une même question; et la lecture dans cet état en est pénible. Mais avec quelque attention, on reconnaît qu'elles sont toutes relatives à la théorie de l'involution de six points, créée par Desargues, [...] ce sont des propriétés de plusieurs relations que l'on peut aujourd'hui considérer comme des cas particuliers de cette relation générale*" ([1]p.39).

Les propositions reprises ci-dessus peuvent en effet toutes être relues comme traitant des cas particuliers d'involution. Les propositions 22, 30, 35 et 36 font intervenir deux couples de points conjugués et la souche. La proposition 37 fait intervenir un couple de points conjugués, un point double et la souche, et la proposition 40, deux couples de points conjugués et un point double. La relation générale définie par Desargues n'apparaît pas chez Pappus.

La notion d'involution de Desargues unifie les différents cas traités par Pappus. Cette unification est rendue possible grâce
- au regroupement des points en couples de points qui se correspondent[31], et les points d'un couple peuvent éventuellement être confondus;
- à la considération du point à l'infini, et un couple peut être constitué du point à l'infini et de la souche.

2°. Les symétries d'écriture.

Pour mentionner un rectangle, Pappus place au milieu l'extrémité commune aux deux segments. Il est question par exemple du rectangle compris sous les droites AD, DC. Cette écriture fait ressortir le rectangle, c'est-à-dire l'aire sur laquelle porte l'égalité. Elle permet de dessiner, ou d'imaginer, plus aisément le rectangle (à partir de D, on reporte DC sur une perpendiculaire à AD).

Si on réécrit la proposition 22 en adoptant les notations de Desargues pour les segments, on a : si le rectangle des segments DA, DC est égal au rectangle DB, DE, alors le rectangle BA,

30 Le point Z de la figure est introduit dans la démonstration et est tel que AZ.ZB = CZ.ZE.

31 Ce regroupement apparaît au niveau des figures de Desargues dans le repérage des points conjugués par ., .. et ... . Ajouter ce type de repérage aux figures de Pappus nous aide aujourd'hui à les lire.

BC est au rectangle EA, EC comme DB est à DE. Cette écriture des segments fait ressortir des correspondances entre des points.

Les symétries d'écriture ne sont donc pas les mêmes chez les deux auteurs : chez Pappus, elles sont liées au calcul géométrique à faire, tandis que chez Desargues, elles sont plus proches d'une vision projective, l'ordre géométrique prédomine sur l'ordre dicté par le calcul.

3°. Les propositions 22, 30 et 35.

Pappus privilégie pour ses notations l'ordre suivant lequel on rencontre les points sur la droite. Il n'utilise pas des notations qui permettent une formulation unique de la propriété. Chaque proposition correspond à une disposition imposée des points dans la figure. Celle-ci passe avant la formulation de la propriété.

Suivant les conceptions de Desargues, les propositions 22, 30 et 35 présentent deux couples de points conjugués et la souche (Fig.16). A la proposition 30, les couples sont mêlés, alors que dans les deux autres, les couples sont démêlés. Rappelons que l'unification de ces deux derniers cas est liée au fait que pour Desargues, la droite est analogue à un cercle. Et sur un cercle, deux couples de points sont soit mêlés, soit démêlés.

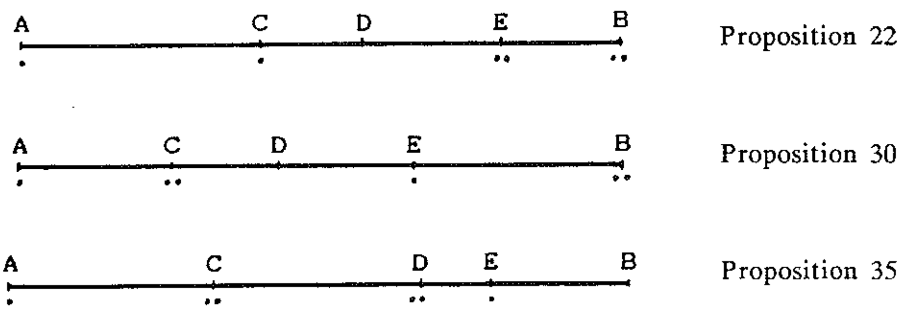


Fig. 16

4°. Les démonstrations.

Pappus démontre chaque proposition sans référence aux autres. Il donne souvent plusieurs démonstrations, certaines utilisant des lemmes intermédiaires, ce qui rend le texte très long. Pour la proposition 30 par exemple, il donne
- une démonstration utilisant des compositions de raisons (proposition 30),
- une démonstration utilisant des propriétés des proportions mais pas de composées de raisons (proposition 30, d'une autre manière),
- une démonstration basée sur des propriétés du livre II des Eléments (proposition 32),
- une démonstration faisant intervenir des cercles (proposition 34).

Nous avons vu précédemment comment Desargues démontre cette propriété dans le Brouillon Project (cf. note 15).

5. Des propriétés géométriques de l'involution parmi les lemmes de Pappus pour les Porismes.

La proposition 130 est reprise avec son énoncé complet. D'autres propositions sont ensuite résumées en utilisant des notations modernes.

"*Proposition 130. Soit la figure ABCDEZHTKL, et que le rectangle compris sous les droites AZ, DE soit au rectangle compris sous les droites AD, EZ comme le rectangle compris sous les droites AZ, BC est au rectangle compris sous les droites AB, CZ; je dis que la ligne qui passe par les points T, H, Z est droite*" [6] (Fig.17)[32].

Proposition 130 (Fig.17): dans le cas de la figure ABCDEZHTKL, si (AZ.DE):(AD.EZ) = (AZ.BC):(AB.CZ), alors les points T, H, Z sont alignés.

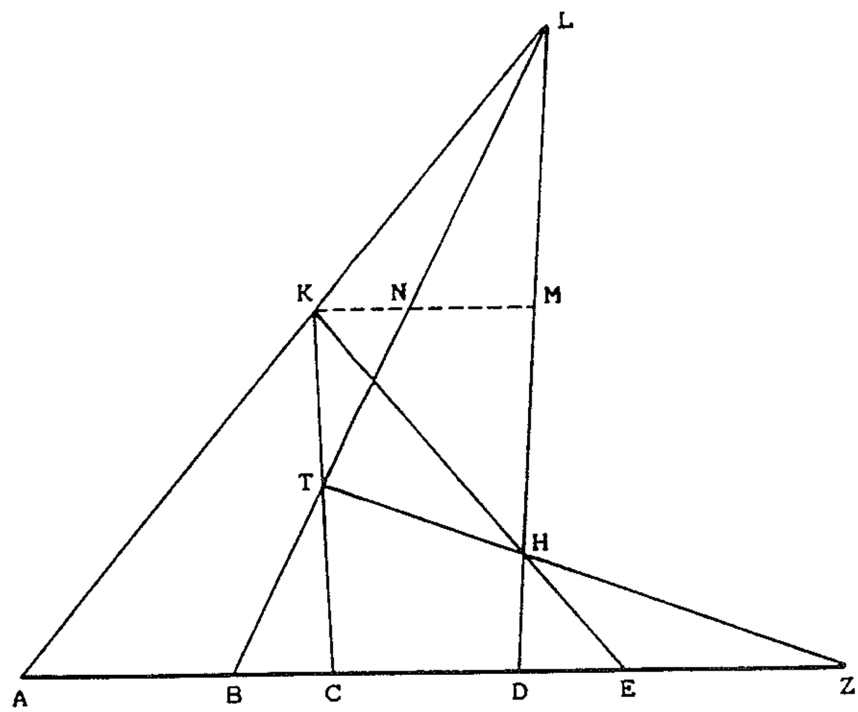


Fig.17[33]

Proposition 127 (Fig.18): on considère la figure ABCDEZH et la droite de jonction TK; si AD:DC = AZ:ZH, alors la droite TK est parallèle à AC.

[32] La démonstration de Pappus fait intervenir la droite KNM parallèle à AZ. Par compositions de rapports et utilisation des relations dans les triangles semblables, on obtient CZ:ZE = (TC:KT).(KH:HE). La suite de la démonstration établit pour le triangle CEK et la droite ZTH ce qui correspond à la réciproque du théorème de Ménélaüs (celui-ci fait l'objet de la proposition 3 du livre VIII de la Collection Mathématique).

[33] La proposition est illustrée chez Pappus par huit cas de figure.

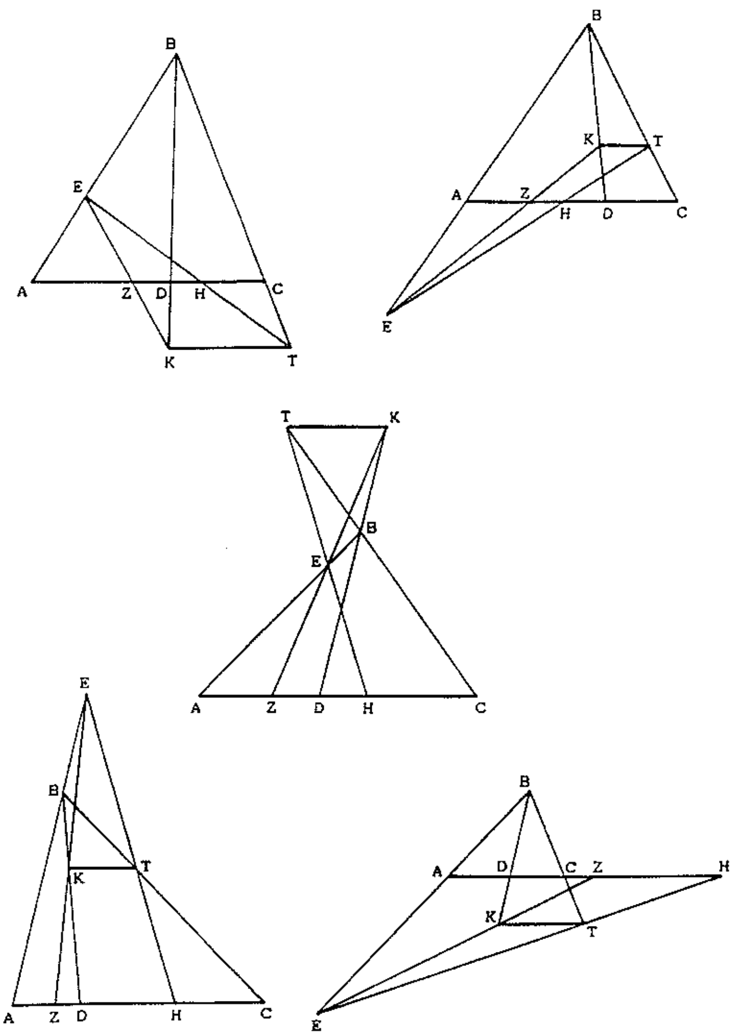


Fig.18

Proposition 128 (Fig.19): on considère la figure ABCDEZHT; si la droite AZ est parallèle à DB et si CH:HZ = AE:EZ, alors les points T, K, Z sont alignés.

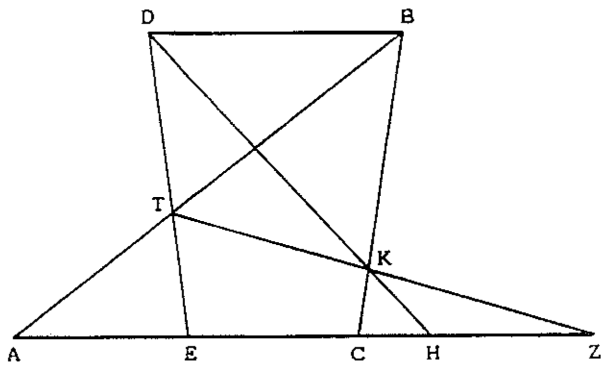


Fig.19

Proposition 131 (Fig.20): dans le cas de la figure ABCDEZHT, si AB:BC = AD:DC, alors les points A, H, T sont alignés.

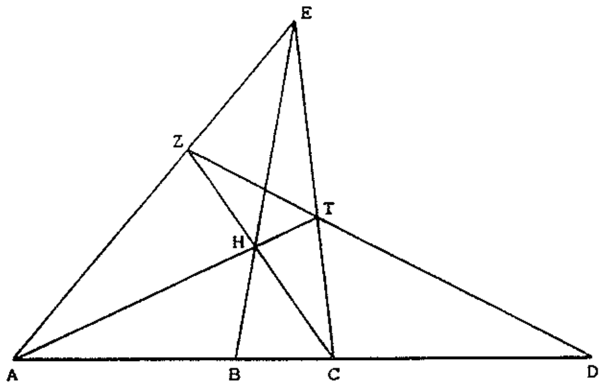


Fig.20

Proposition 132 (Fig.21): on a la figure ABCDEZH; si la droite DZ est parallèle à la droite BC, alors AB = BC.

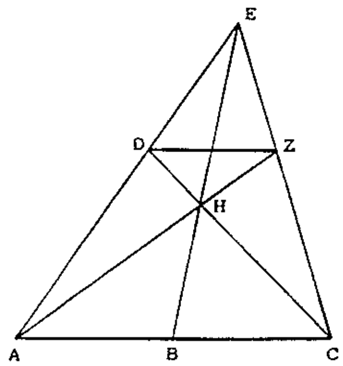


Fig.21

Proposition 133 (Fig.22): on considère la figure ABCDEZHT; si AB:BD = CB:BA, alors la droite ZH est parallèle à AC.

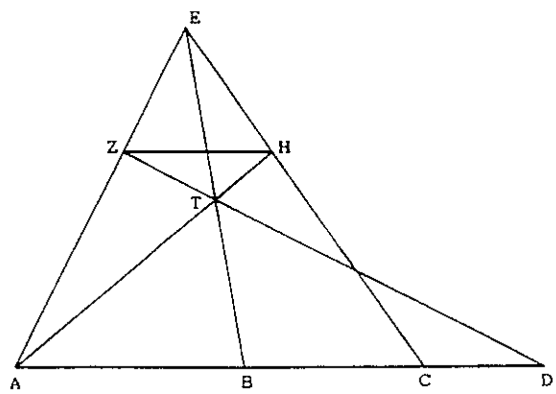


Fig.22

1°. Les énoncés.

Chasles écrit dans l'Aperçu Historique :

"La plus ancienne propriété géométrique de l'involution de six points se trouve dans Pappus (proposition 130 du septième livre)"[34].

La relation AB.CZ.ED = AD.EZ.CB tirée de l'énoncé de la proposition 130 exprime en effet l'involution des couples AZ, CD et BE[35]. Pour former cette relation entre six points en involution, on prend trois points appartenant aux trois couples; chacun d'eux fait deux segments avec les conjugués des deux autres; on aura ainsi six segments; le produit de trois de ces segments, qui n'ont pas d'extrémité commune, est égal au produit des trois autres. Ce type de relation n'apparaît pas chez Desargues.

On peut donc relire la proposition 130 de la manière suivante : les côtés opposés et les diagonales d'un quadrilatère KLHT déterminent sur une transversale AZ trois couples de points AZ, CD, BE qui sont en involution.

Notons cependant qu'il n'est pas question de quadrilatère dans l'énoncé de Pappus. Les points de la figure sont énumérés les uns à la suite des autres, la figure n'est pas définie, et l'absence de problématique n'aide pas à déchiffrer le dessin. Remarquons aussi que la proposition de Pappus a la forme d'un critère d'alignement, ce qui n'est pas le cas de l'énoncé ci-dessus.

Autour de la proposition 130, se trouvent plusieurs propositions qui traitent différents cas limites (deux droites sont parallèles, des points de concours sont confondus). Ces propositions donnent les relations entre les segments sous des formes différentes et chacune est démontrée indépendamment des autres. Aucun lien n'est explicité entre ces propositions. Seule leur proximité suggère qu'il y en a un.

On peut aussi observer que ce que nous considérons comme des éléments analogues, par exemple les sommets du quadrilatère, ne sont pas repérés par les mêmes lettres dans les différentes propositions. Les notations utilisées donnent l'impression que le lien entre les différentes propositions n'est pas celui que nous voyons aujourd'hui.

Pour Desargues au contraire, il y a une propriété unique : on a sur la transversale trois couples de points en involution. On trouve donc chez lui une manière neuve de relier des énoncés suivant un point de vue projectif : il n'y a pas de cas limite, chaque cas est un cas comme un autre (un point peut être à l'infini, les points d'un couple ou de deux couples peuvent être confondus).

2°. Les démonstrations.

Pappus démontre chaque proposition sans référence aux autres. Par contre, Desargues

---

[34] dans la note X, "Théorie de l'involution de six points", p.315.

[35] C'est une des manières d'exprimer l'involution de six points (cf. Chasles [1], p.309).

donne une démonstration unique. Celle-ci utilise le même type d'arguments que la démonstration de la proposition 130 (propriétés des proportions, compositions de raisons, relations dans les triangles semblables). Rappelons qu'à côté de cette démonstration qui s'inscrit tout à fait dans la tradition grecque, il y a une transgression significative par rapport à la rigueur grecque : il considère que le point à l'infini d'une droite est à égale distance de deux points à distance finie de cette droite, ce qui lui permet de couvrir tous les cas avec la relation définissant l'involution.

3°. Un autre lemme de Pappus.

Parmi les lemmes se rapportant aux Porismes, regardons pour terminer la proposition 145[36] :

"Menons transversalement, d'un point E, les deux droites EZ, EB sur les trois droites AB, AC, AD, et que la droite TE soit à la droite TH comme la droite EZ est à la droite ZH; je dis que la droite ED est aussi à la droite DC comme la droite BE est à la droite BC" [6] (Fig.23).

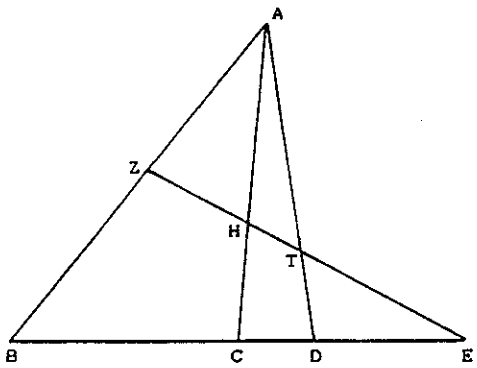


Fig.23

On peut lire dans cette proposition la conservation par projection d'une division harmonique (ou involution de quatre points). Mais cela est anachronique car l'idée de projection est étrangère au contexte grec. Par contre, quand Desargues écrit le Brouillon Project, la perspective a déjà un passé de deux cents ans. L'énoncé de son théorème sur la conservation de la relation d'involution ne s'exprime pas en termes de projections ou perspectives, mais l'idée de projection est bien présente et se retrouve dans l'utilisation du théorème pour l'étude des coniques.

6. Sur l'origine possible de la relation d'involution de Desargues.

Est-ce que Desargues a lu Pappus ? Il est fort probable que Desargues connaissait la Collection Mathématique. Il est en effet intégré à Paris dans un cercle scientifique qui a certainement connaissance des travaux de Pappus. Desargues ne le cite pas mais cela n'exclut pas

[36] Les propositions 129, 136, 137, 140 et 145 sont reliées aujourd'hui à la conservation par projection du rapport anharmonique (ou birapport) de quatre points.

qu'il l'ait lu car il fait peu référence à d'autres auteurs dans ses écrits[37].

Nous avons vu qu'il y a dans le livre VII des propriétés dans lesquelles on reconnaît aujourd'hui :
- la manière de caractériser des points en involution, dans différents cas particuliers;
- l'involution déterminée sur une transversale par les côtés opposés et les diagonales d'un quadrilatère, pour différentes positions de la transversale.

En supposant que Desargues ait connu les lemmes de Pappus, ceux-ci ont-ils joué un rôle dans l'élaboration de sa théorie de l'involution ? Et si oui, lequel ?

Une propriété essentielle de l'involution est d'être conservée par projection. Comment Desargues a-t-il vu le caractère d'invariant projectif de la relation d'involution ?

Nous n'avons pas de réponse à ces questions. Voici simplement deux exemples où des propriétés sont rapprochées et présentent des relations qui ont peut-être joué un rôle.

1°. <u>Un problème de construction d'échelles.</u>

Desargues a travaillé le problème des constructions d'échelles pour la représentation en perspective [38]. Il se peut que Desargues ait vu des ressemblances entre les relations de Pappus mises sous forme numérique et des suites de nombres intervenant dans les constructions d'échelles en perspective. On trouve par exemple les mêmes suites de nombres dans les deux figures suivantes :

- Fig.24 : on considère les points à des distances de la souche Z égales à 2, 3,... fois celle de Z à D; les distances à Z des conjugués respectifs valent 1/2, 1/3,... fois la distance ZD;

- Fig.25 extraite de [2] : les droites HD, QN, VS,... parallèles à la ligne d'horizon FE représentent des droites au sol se trouvant dans des plans parallèles au tableau dont les distances à l'oeil sont égales à 2, 3, 4,... fois la distance de l'oeil au tableau; les distances de ces droites au point de fuite principal G valent respectivement 1/2, 1/3, 1/4,... fois la distance de G à la ligne de terre AB. La figure Fig.26 illustre la situation par une vue de profil (l'oeil est en R).

Fig.24

[37] Il mentionne uniquement Apollonius et les Eléments d'Euclide dans le Brouillon Project.

[38] "Exemple de l'une des manieres universelles ..." [2] en 1636, "Aux Théoriciens" dans le livre de A. Bosse publié en 1647.

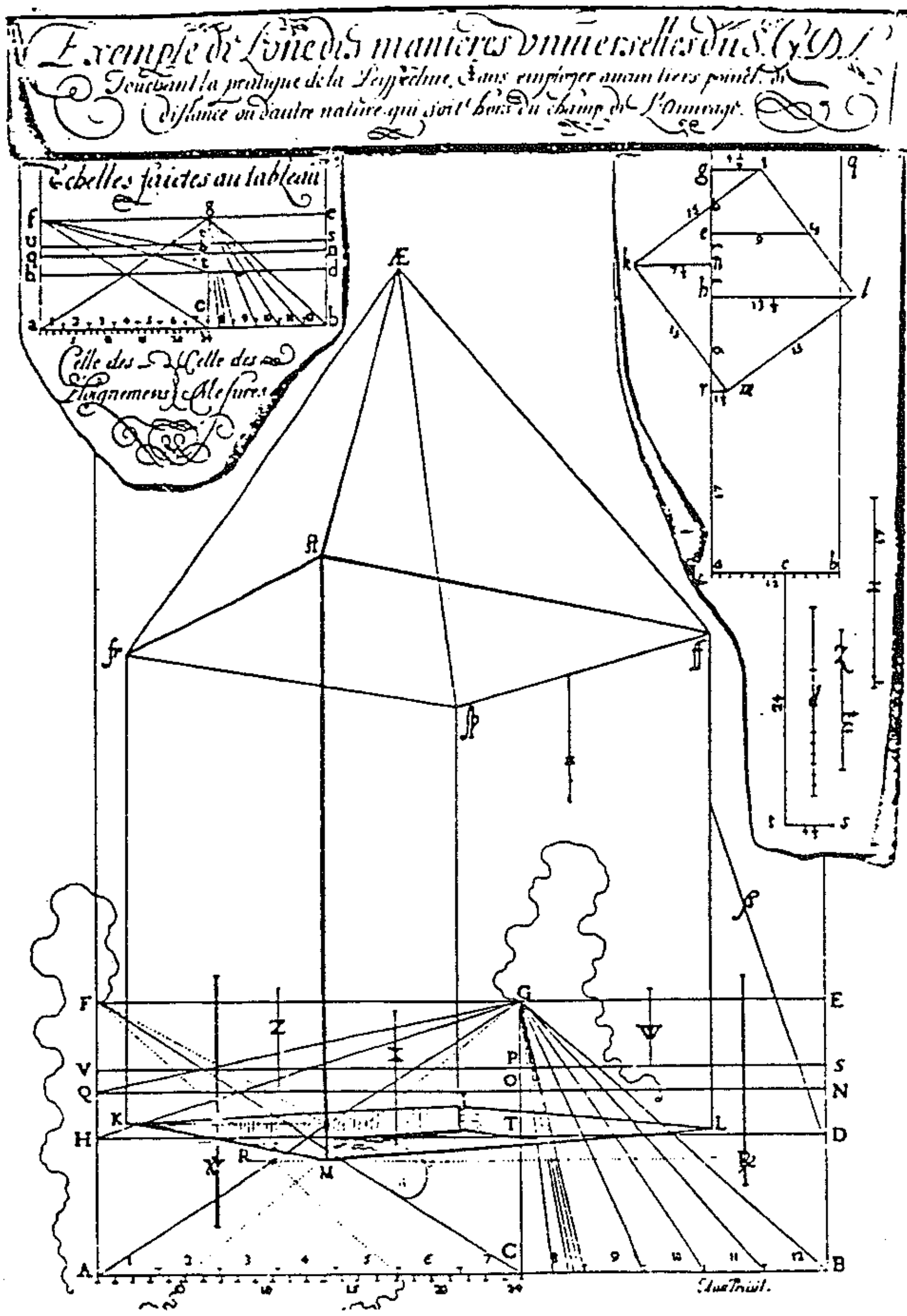

Exemple de l'vne des manieres vniuerselles du S. G. D. L.
Touchant la pratique de la Perspectiue, sans emploier aucun tiers poinct, de distance ou d'autre nature qui soit hors du champ de l'Ouurage.
Eschelles faictes au tableau
Celle des Eslognemens
Celle des Mesures
Æ
F
G
E
V
S
Q
N
K
T
L
H
D
R
M
A
C
B
Z
X

Fig.25

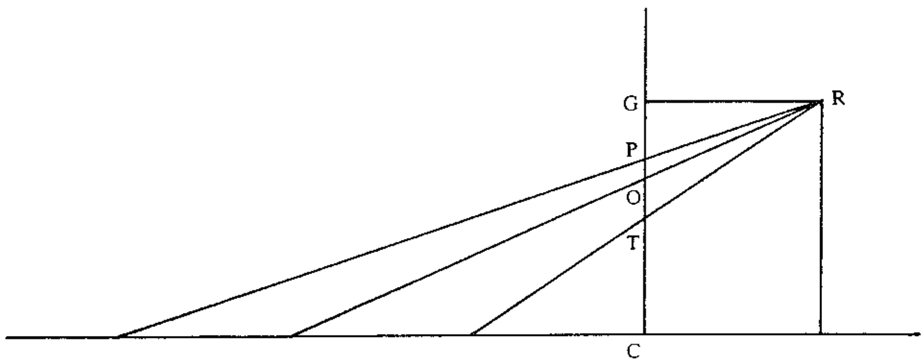

G
R
P
O
T
C

Fig.26

2°. Une analogie entre deux propriétés.

Desargues relève dans le Brouillon Project, l'analogie entre les deux propriétés suivantes:
- trois couples de droites concourantes en un même point et passant par des points en involution déterminent sur toute sécante des points en involution;
- les côtés opposés et les diagonales d'un quadrilatère déterminent sur toute sécante des points en involution.

Il écrit en effet, après avoir démontré la seconde propriété :

"*Ou l'on void que c'est une mesme propriété de trois couples de rameaux déployez au tronc d'un arbre*[39] *quand ils sont tous d'une mesme ordonnance entre eux, & quand ils sont disposez comme icy aux quatre poincts B, C, D, E, de façon que le but de l'ordonnance de trois couples de rameaux est comme si ces quatre poincts B, C, D, E, s'unissoient à un seul poinct*" ([3], p.144).

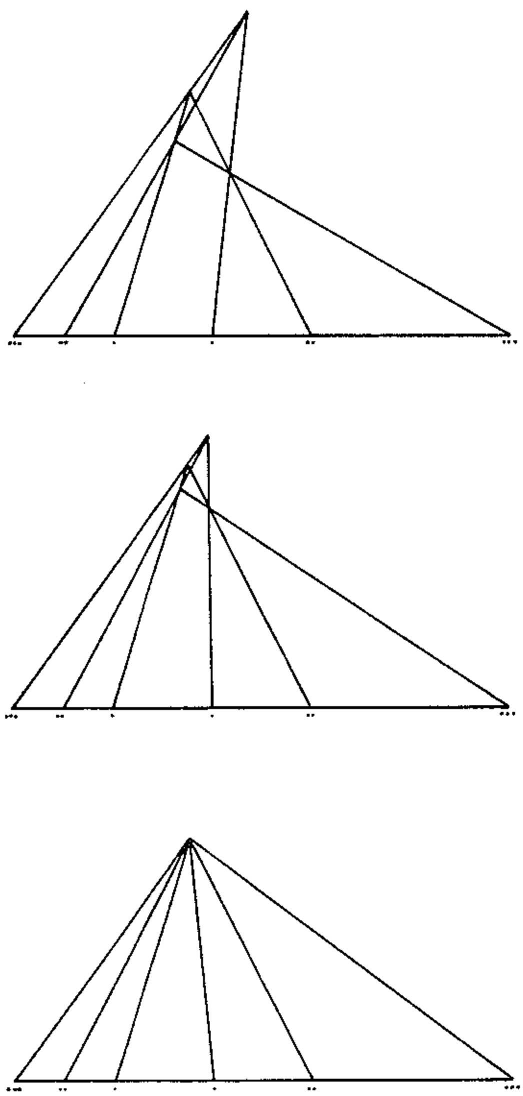


Fig.27

[39] c'est-à-dire trois couples de droites passant par trois couples de points en involution.

C'est comme si les quatre sommets du quadrilatère s'unissaient en un seul point. Pour chaque figure de Fig.27, on a trois couples de droites qui déterminent sur toute sécante des points en involution. Il est possible que ce glissement d'une figure à l'autre ait joué un rôle dans la mise en place de l'involution et de son caractère projectif.

Pour conclure, notons que Desargues a su intégrer dans le Brouillon Project des connaissances venant d'une part de la géométrie des anciens et d'autre part de la perspective. Par son approche de l'étude des coniques, il élargit en fait la rencontre entre la géométrie des anciens et la perspective. Celle-ci s'est préparée au cours des deux siècles précédents, et a déjà conduit, au début du 17ème siècle, à la parution de traités de perspective qui sont des ouvrages de géométrie dans la tradition euclidienne[40]. Par rapport au cheminement suivi par Desargues, nous ne pouvons que soulever des questions et mettre en évidence des rapprochements et des problèmes qui ont pu être sources d'inspiration.

[40] "Perspectivae Libri Sex" de Guidobaldo del Monte en 1600, "De Sciagraphia" de Simon Stevin en 1605.

Bibliographie.

[1] Michel CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie*, Gauthier-Villars, Paris, 1889 (1ère édition en 1837).

[2] Girard DESARGUES, *Exemple de l'une des manieres universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective sans emploier aucun tiers point, de distance ny d'autre nature, qui soit hors du champ de l'ouvrage*, Paris, 1636, in J.V. FIELD and J.J. GRAY, *The Geometrical Work of Girard Desargues*, Springer-Verlag, New York, 1987.

[3] Girard DESARGUES, *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan*, 1639, in René TATON, *L'oeuvre mathématique de G. Desargues*, Vrin, Paris, 1981.

[4] Thomas L. HEATH, *A History of Greek Mathematics* (deux volumes), Dover Publications, New York, 1981.

[5] PAPPUS of Alexandria, *Book 7 of the Collection*, Edited With Translation and Commentary by Alexander JONES (two parts), Springer-Verlag, New York, 1986.

[6] PAPPUS d'Alexandrie, *La Collection Mathématique* (deux volumes), traduit par Paul VER EECKE, Blanchard, Paris, 1982.

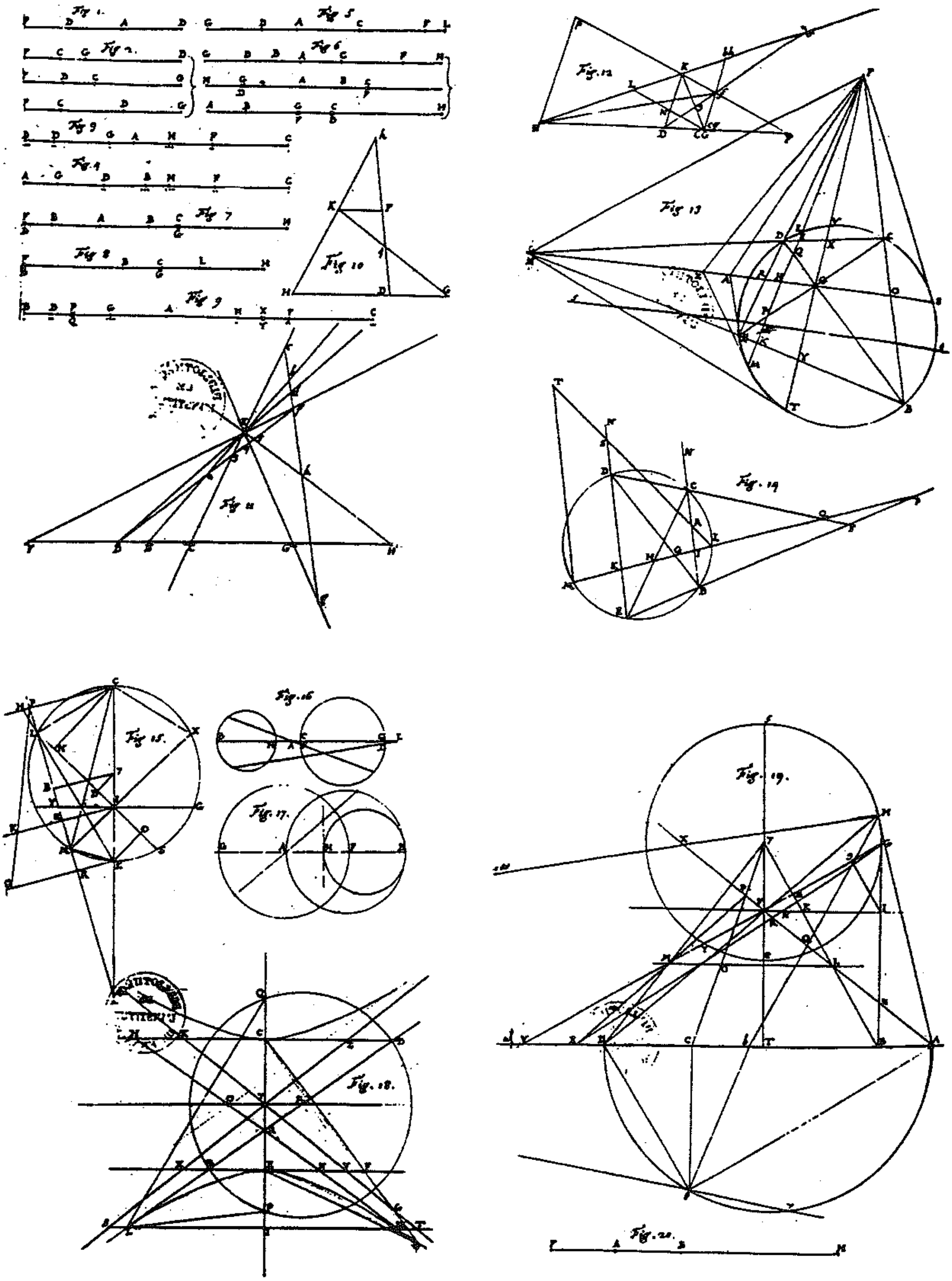
[7] Blaise PASCAL, *Generatio Conisectionum*, in *Oeuvres complètes*, tome II, texte établi, présenté et annoté par Jean MESNARD, Desclée de Brouwer, Paris, 1970.

[8] Jean-Victor PONCELET, *Traité des Propriétés Projectives des Figures* (deux volumes), Gauthier-Villars, Paris, 1865 (1ère édition du tome I en 1822).

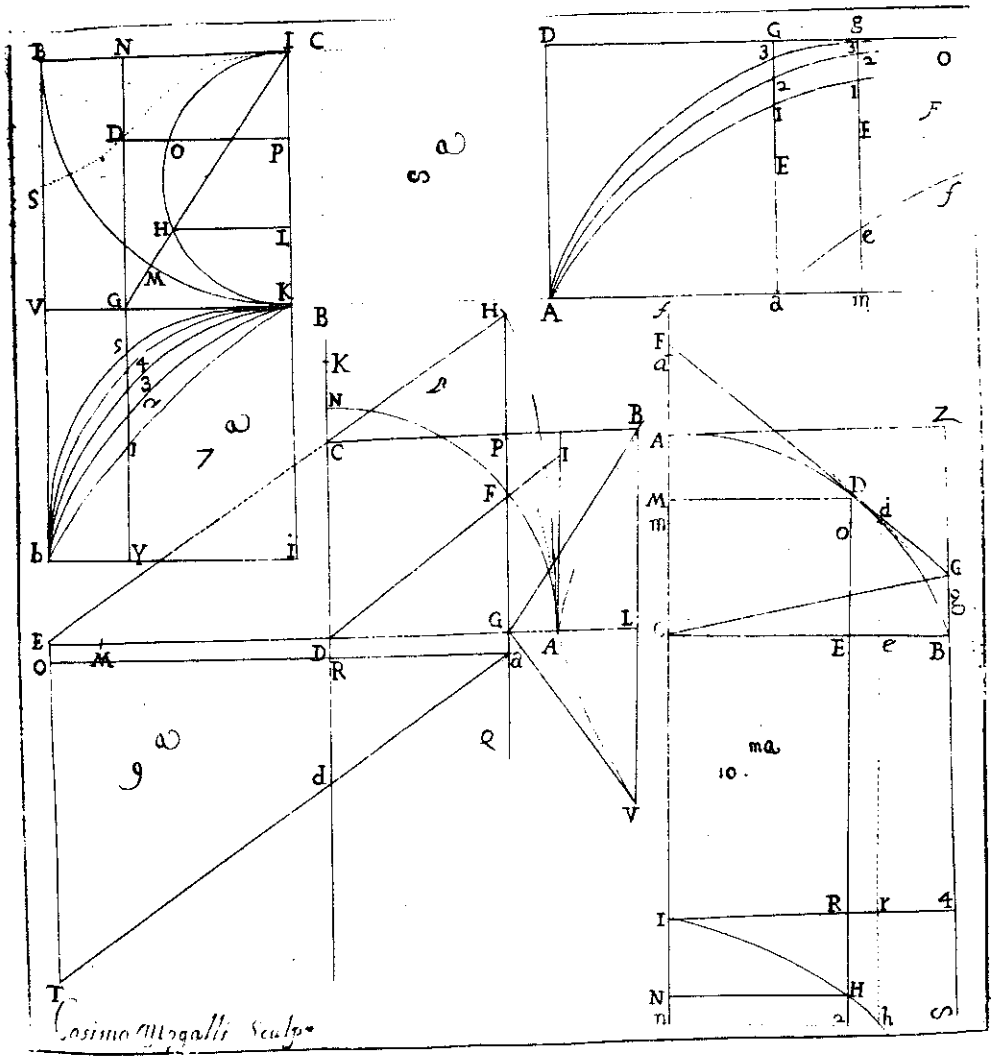
Articles qui situent l'oeuvre de Desargues dans l'histoire de la perspective et de la géométrie :

* Rudolf BKOUCHE, "La naissance du projectif, De la perspective à la géométrie projective", in *Mathématiques et Philosophie* (édité par Roshdi Rashed), Editions du CNRS, Paris, 1991.

* Denis LANIER & Jean-Pierre LE GOFF, "Dossier Desargues", in *Les Cahiers de la Perspective: Points de vue - n°5*, IREM de Basse-Normandie, Juin 1991.



Figures du "Brouillon project" ou "Traité des coniques"
de Desargues dans la copie manuscrite faite par Philippe de Lahire
(Bibliothèque de l'Institut).
Les figures originales sont perdues.


Cosimo Mogalli Sculp.

1 - 1 + 1 - 1 + 1 - .... etc. à l'infini

Maryvonne HALLEZ

La "série" 1-1+1-1-.... que nous pouvons écrire $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i$ a occupé sous différentes formes plusieurs mathématiciens et philosophes et non des moindres[1] depuis le 17ème siècle après avoir donné beaucoup de fil à retordre aux "géomètres" du Moyen-Age. Le propos de cet article est la lecture de la lettre adressée par Leibniz au philosophe Christian Wolf *"sur la science de l'infini"* qui traite justement de cette série. A l'époque de Leibniz, "*la nouvelle acuité du débat résulte de l'interprétation théologique que le père Guido Grandi, jésuite, auteur d'une quadrature du cercle et de l'hyperbole prétend y greffer*"[2]. Il énonce que 0+0+0+...à l'infini donne une quantité non nulle expliquant ainsi de manière tendancieuse voire hérétique le mystère de la création.

Voici quelques questions un peu provocatrices qui peuvent introduire le débat. Considérons l'expression "0 + 0 + 0 + 0 +.......etc. à l'infini".

Est-ce un objet mathématique ? Peut-on attribuer à la somme 0+0+... la valeur 0 ? Est-ce le même objet que "1-1+1-1+1-... etc. à l'infini" au sens où 1+2+3 serait le même objet que 3+3 ? Peut-on poser x =1-1+1-1...etc. à l'infini, en déduire x = 1- x et obtenir $\frac{1}{2}$=1-1+1-1+...etc. à l'infini ? Dira-t-on seulement : toute somme partielle est 0 ou 1 ?

Les mathématiciens contemporains qualifient 1-1+1-1+... de série alternée admettant deux valeurs d'adhérence 0 et 1. Cette série est donc divergente. Leibniz va proposer trois démarches pour "prouver" l'égalité $\frac{1}{2}$ = 1-1+1-1+...etc. à l'infini, que nous présentons dans l'aide à la lecture qui va suivre. Le but de la réflexion sur cette lettre est de montrer les paradoxes qu'entraîne la décision de poser l'infini et d'introduire les outils mathématiques forgés pour domestiquer ces paradoxes. Quelle formulation va satisfaire une communauté scientifique ? Quel outil conceptuel va remporter l'adhésion ?

D'Euclide à Grégoire de Saint-Vincent, donc du 3ème siècle avant Jésus-Christ jusqu'en 1647, une seule méthode pour "apprivoiser l'infini" celle que nous appelons méthode d'exhaustion dont le fondement est la proposition 1 du livre X des *Éléments* d'Euclide[3]. Cette proposition n'aura pas de rivale avant le 17ème siècle. La scolie à cette proposition donne le cas particulier de la dimidiation ou

---

[1]Citons Leibniz, les frères Bernoulli, le Marquis de l'Hospital, d'Alembert, Euler, Bolzano, Woodhouse, Peacock, De Morgan, Laplace, Lagrange, Borel, Bourbaki, Grattan-Guiness, Frobenius.......

[2] "*La naisance du calcul différentiel* " de G.W. Leibniz - Introduction ,traduction et notes de Parmentier - Vrin 1989 p.434
Le texte de la lettre donnée en annexe est également tiré de cet ouvrage.
La quadrature de Grandi fut publiée à Pise en 1703.

[3]Cf. Mnémosyne n°1 p. 18

dédoublement ; à partir d'une grandeur donnée , si on lui en enlève sa moitié puis la moitié de sa moitié et ainsi de suite que restera-t-il ? Euclide répond : une grandeur moindre que toute grandeur proposée à l'avance quelle que petite qu'elle fût. On peut aussi dire que le lièvre ne rattrapera jamais la tortue, que $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ ne sera jamais 1, ou répondre comme Leibniz $1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ Écrire cette égalité est un des coups de force de Leibniz qui vont lui permettre de déraciner les méthodes archimédiennes en les arrachant aux limites inhérentes à la mathématique grecque et d'inventer le calcul différentiel. Il affirme fortement la véracité de l'égalité ; "*une égalité peut être stricte et rigoureuse même si elle enveloppe l'infini que ce soit l'infiniment petit ou l'infiniment grand . 2 est autant que* $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ *le diamètre et son carré étant 1, le cercle est* $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\ldots\ldots\ldots\ldots$"[1] Il substitue ainsi à l'égalité statique de Descartes, à l'adégalité de Fermat[2], une égalité dynamique constitutive de la "doctrine des séries" qui manifeste "l*es merveilleuses harmonies de la nature*". Cette position philosophique est liée au principe de raison suffisante :"*rien ne se fait sans raison suffisante :c'est à dire que rien n'arrive sans qu'il soit possible à celui qui ne connaîtrait assez les choses, de rendre une Raison qui suffise pour déterminer pourquoi il en est ainsi, et non autrement.*"[3] Deux autres éléments de la valise métaphysique de Leibniz utilisés dans cette lettre à Christian Wolf sont

- la loi de justice que l'on peut exprimer ainsi : s'il n'y a pas plus d'arguments en faveur d'une quantité que d'une autre la loi de justice conduit à prendre "*le milieu entre les deux quantités ayant même raison d'être.*"
- et la loi de continuité : lorsque la différence entre deux grandeurs "peut être diminuée au-dessous de toute grandeur donnée in datis ou dans ce qui est posé, il faut qu'elle se puisse trouver aussi diminuée au-dessous de toute grandeur donnée in quaesitis ou dans ce qui en résulte."[4]

Christian Wolf (1679-1754) a exercé une grande influence sur la philosophie allemande de son temps. Il est d'abord mathématicien, professeur de mathématiques à Halle à partir de 1707; il se tourne officiellement vers la philosophie l'année même de cette lettre de Leibniz en 1713; mais sa correspondance avec Leibniz s'étend de 1704 à 1716. Parmi les "wolfiens", on rencontre le mathématicien Jean-Henri Lambert. Influencé par Descartes, Spinoza et Locke, il est en relation avec Tschirnaus et comme lui il considère la mathématique comme un idéal méthodologique. Toute vérité doit être déduite d'une vérité précédente; les premières vérités sont le principe de non-contradiction et le principe de raison suffisante. Il élabore une science de l'être en général en tant qu'être possible. Accusé de spinozisme, d'idéalisme et de fatalisme, il est exilé. Frédéric II, le nouveau roi de Prusse le rappelle à Halle en 1740.

1 Leibniz - lettre à Varignon publiée en 1702 dans le Journal des Savants.

2 *De vera proportione circuli* 1682

3 Leibniz *Principes de la nature et de la grâce fondés en raison* Epiméthée PUF p.45.

4 Leibniz lettre à Bayle fevrier 1687 citée par Parmentier op. cit. p. 445

Aide à la lecture.

(le texte de la lettre est donné en annexe.) [1]

Présentation des trois démarches de Leibniz:

1.Dans la première démarche, il utilise la somme des séries suivantes

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2 \qquad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots=\frac{3}{4}$$

connues depuis la publication en 1647 de l'*Opus Geometricum* de Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) et il écrit

$$"\frac{1}{1-x}=1+x+xx+x^3+x^4+ \quad \text{etc. à l'infini} \qquad (1)$$

$$"\frac{1}{x+1}=1-x+xx-x^3+x^4-x^5+ \quad \text{etc. à l'infini} \qquad (2)$$

en précisant "*à condition naturellement de supposer en x une quantité plus petite que un*".

Il attribue la première égalité à Saint-Vincent, la deuxième à Nicolas Mercator (1620-1687).

> Dans un passage célèbre de la *Logarithmotechnica* publié en 1668 à Londres, Nicolas Mercator veut quarrer l'hyperbole c'est-à-dire déterminer l'aire comprise entre l'hyperbole équilatère d'équation $y=\frac{1}{1+x}$, les axes $(x'x)$ et (yy') et la droite d'équation $x = a$.
>
> Il effectue la division du numérateur par le dénominateur
>
> $$\begin{array}{l|l} 1 & 1+x \\ \hline -(1+x) & 1-x+x^2+\ldots \\ \quad -x & \\ \quad -(-x-x^2) & \\ \qquad x^2 & \end{array}$$
>
> "ita, continuata operatione $\frac{1}{1+a}=1-a+aa\ldots..$" [2]
>
> La fraction $\frac{1}{1+x}$ peut être considérée comme point de départ ou point d'arrivée de la série infinie $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i a^i$ dans le cas où a est positif et inférieur à l'unité.

---

[1] L'aide à la lecture et le problème qui suit ont fait l'objet d'une publication dans *Histoire d'infini*, Actes du colloque de la commission inter-IREM, d'épistémologie et histoire des mathématiques, publié par l'IREM de Caen, 1994

[2] ainsi en continuant l'opération.

L'aire cherchée est ainsi donnée par la série infinie $a-\frac{a^2}{2}+\frac{a^3}{3}-\ldots$ pour $0 < a < 1$.

Cette "découverte sensationnelle de la série log(1+x) $= -\sum_{1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n}$ par Mercator" ouvre "des perspectives toutes nouvelles sur l'application des séries et principalement des séries de puissances, aux problèmes dits impossibles"[1].

D'après Montucla, Lord Brouncker aurait fait cette découverte auparavant en 1657 .

Leibniz ose alors remplacer x par 1 dans (2) :*"Observons ce qui se passe si* $x = 1$. *A notre grand émerveillement, il vient alors*

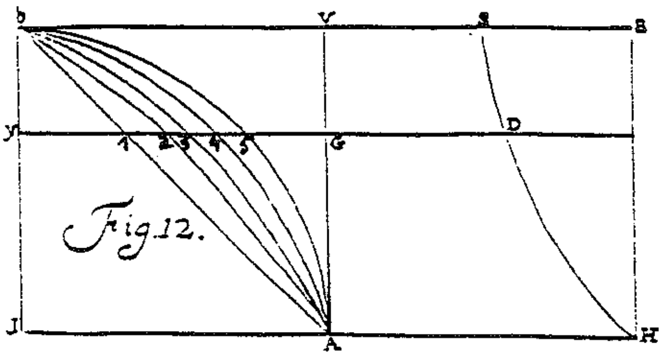
$$\frac{1}{2} = 1-1+1-1+1-1+ \quad \text{etc. à l'infini".}$$

2. La deuxième démarche consiste, à l'aide de la figure du mathématicien et théologien Guido Grandi (1671-1742), à *"mettre à la portée des gens peu familiarisés au calcul abstrait"* ce *"merveilleux"* résultat en utilisant la **loi de continuité**.

Sur $]0,1[$ Grandi représente les courbes dont les ordonnées sont respectivement $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5$ et la courbe dont l'ordonnée est $1-x+x^2-x^3+\ldots$ c'est à dire la courbe dont l'ordonnée est $\frac{1}{1+x}$.

Pour $x = AG < 1$ on a $GY - G1 + G2 - G3 + G4 - G5 + \ldots = GD$ en nommant 1,2,3,4,5 les points d'abscisse $x = AG$. Pour $x = 1$, le premier membre devient $bV - bV + bV - bV + bV - bV + \ldots$, le deuxième membre devient $Vs = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

Conclusion de Grandi : $1-1+1-1\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{1}{2}$



Leibniz fait ce commentaire : *"Ceci est en accord avec la loi de continuité ... Dans les continus, on peut considérer une limite externe comme une limite interne"*, que l'on peut interpréter ainsi :

la fonction $x \to \frac{1}{1+x}$ est continue sur $[0,1]$; la série $1-x+x^2\ldots$ est convergente sur $[0,1[$. Donc en considérant 1 qui est extérieur à $[0,1[$ comme "limite interne", Leibniz étend l'égalité $1-x+x^2\ldots = \frac{1}{1+x}$ à la valeur $x = 1$.

---

[1] Bourbaki *Eléments d'histoire des mathématiques* - Hermann 1969 p.230

3. La troisième démarche est la plus surprenante, elle consiste à établir une moyenne en probabilité : il y a autant de changes d'obtenir 0 ou 1 pour la somme de cette série puisqu'il y a équiprobabilité du pair et de l'impair dans la suite des entiers naturels.

Donc la somme de cette série est $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$!

Le pouvoir de conviction est faible pour un mathématicien moderne, mais reste fort pour beaucoup de non-mathématiciens même de nos jours, et donc pour les élèves.

Il ne faudrait pas en conclure que Leibniz ne fait aucune considération de convergence : dans une lettre du 26 juin 1705 il écrit à Hermann :

"Il me semble que la détermination des limites est une partie essentielle de la théorie des séries si on veut la traiter complètement. En effet dans tous les cas tant que nous ne démontrons pas que la série converge vers le terme inconnu, afin que nous puissions rendre l'erreur plus petite qu'une quantité donnée, nous ne pouvons pas conclure que la série complète donne ce terme"[1] Et pourtant dans cette lettre de 1713 on pourait croire que Leibniz se laisse prendre à "l'évidence" géométrique du dessin de Grandi. Le problème est complexe et vient de la nature des séries divergentes. Leibniz affine son analyse quelques mois plus tard dans une lettre à Bernoulli du 10 janvier 1714 : *"Si tu y prêtes attention tu remarqueras aisément que lorsque les termes d'une série sont **continûment décroissants** et alternativement positifs et négatifs la valeur qu'elle exprime converge et est par conséquent fini"*[2]. Il précise là le critère suffisant de convergence d'une série alternée, qu'il avait déjà proposé en 1705, lequel critère ne s'applique évidemment pas à la série $1 - x + x^2 ...$ pour $x = 1$.

Quelques prolongements :

En 1795, appelé à enseigner les mathématiques aux Écoles Normales par un décret de la Convention Nationale, Laplace va présenter les principes et les résultats de la théorie des probabilités, Dans l'introduction à son cours, il met en garde sur les illusions que les hommes, désirant ardemment un événement peuvent entretenir dans l'estimation des probabilités ; il cite à ce propos quelques exemples tirés de la vie quotidienne comme la crainte d'un futur père dont le souhait le plus cher est d'avoir un fils: celui-ci doit naître la deuxième quinzaine de mars ; or le 15 de ce mois le quota de garçons pour le mois est atteint ! Un autre exemple d'illusion dans la calcul des probabilités sur lequel Laplace s'étend longuement est notre fameuse série : " *les préjugés de l'enfance peuvent égarer les plus grands hommes*", dit-il en référence à Leibniz qui, dans son Arithmétique binaire a imaginé que l'unité pouvait représenter Dieu et zéro représenter le néant. Laplace reprend un à un les arguments de Leibniz de la lettre à Wolf et,

---

[1] Parmentier op. cité p. 438 note 12

[2] Parmentier op. cité p. 439-440 note 15

dans sa critique de la naïveté leibnizienne quant à l'estimation des probabilités s'appuie sur de considérations d'analyse. Il reprend une objection de Nicolas Bernoulli en l'étayant d'un exemple[1]:
"*Mais ces séries peuvent résulter d'une infinité de fractions différentes...*"Ainsi la série "*plus un, moins un, plus un etc.*" peut naître du développement d'une "*fraction dont le numérateur est l'unité plus la variable et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté du carré de la variable*".

Soit $\frac{1+x}{1+x+x^2} = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6 - x^8 + \ldots$ le second membre devient bien $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, si l'on substitue 1 à x, mais $\frac{1+x}{1+x+x^2} = \frac{2}{3}$ pour $x = 1$, et $\frac{2}{3} \neq \frac{1}{2}$. Laplace conclut alors "*les règles de probabilité donneraient donc alors un faux résultat, ce qui prouve combien il serait dangereux d'employer de semblables raisonnements, surtout dans les Sciences mathématiques que la rigueur de leurs procédés doit éminemment distinguer.*"[2]

L'argumentation de Laplace est renversée par le raisonnement de Lagrange "*qui montre que cette objection n'est pas essentielle*" comme le dit Emile Borel dans son introduction aux Leçons sur les séries divergentes de 1901. Lagrange prend comme fonction de la "série" la fraction rationnelle

$\frac{1 + x + \ldots + x^{n-1}}{1 + x + \ldots + x^{m-1}}$ avec n<m dont l'exemple de Laplace est un cas particulier et prenant par exemple n = 3 et m = 5

$$\frac{1 + x + x^2}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4} = 1 + 0 + 0 - x^3 + 0 + x^5 + 0 + 0 - x^8 \ldots$$

les sommes partielles sont 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, soit 3 fois 1 et 2 fois 0 toutes les 5 sommes .
La loi de justice donne pour valeur $\frac{3 \times 1 + 2 \times 0}{5} = \frac{3}{5}$.

En 1847, Bolzano s'attaque à une autre justification du $\frac{1}{2}$ comme somme de la série

$$\begin{array}{r|l} a & 1+1 \\ \hline -(a+a) & a-a+a.. \\ \hline -a & \\ -(-a-a) & \\ \hline +a+\ldots & \end{array}$$

en posant $a - a + a \ldots = x$ comme nous l'avions fait dans l'introduction

$x = a - x \quad x = \frac{a}{2} \quad$ si $a = 1 \quad x = \frac{1}{2}$

et il écrit "*l'erreur est ici assez évidente : la série entre parenthèses n'a manifestement plus le même ensemble de termes que celle donnée d'abord ; elle a en moins le premier a. Sa valeur si tant est qu'elle en ait une aurait dû être notée x-a ce qui aurait dû donner l'identité x = a+x-a*"[3] et énonce une propriété pouvant garantir contre les errements : pour considérer cette série comme une "grandeur" c'est à dire "comme la somme de ses termes" il faut qu'elle vérifie "*la propriété de ne subir aucun changement dans sa*

---

[1]Laplace annexe lignes 47 à 52

[2]Laplace annexe lignes 54 à 59

[3] Bolzano Paradoxes de l'infini introduction et traduction Hourya Sinaceur Seuil 1993 p. 109

valeur quelque soit le changement introduit dans la succession de ses termes. Les grandeurs en effet satisfont nécessairement la relation suivante :

(A+B) +C = A+ (B + C) = (A + C) + B..(...)-1+1-1+1...in inf.

devrait, si elle n'était pas complètement vide, être égale à +a et aussi à -a avec le même droit que nous prenions pour l'égaler à 0." Il reprend ensuite la remarque classique de Leibniz, de d'Alembert, de Lagrange, "*les séries obtenues résultent d'une division qui, à chaque étape, a un reste ... et c'est précisément pour cette raison qu'elles ne peuvent donner la vraie valeur du quotient ... que si les restes deviennent plus plus petits que toute grandeur si petite soit-elle.*"

Pour conclure cette introduction de la problématique, voici deux citations montrant bien la diversité des approches possibles.

Frobenius en 1880 dans un article intitulé à propos de la série de Leibniz veut éclairer ce qu'il appelle *"le paradoxe de la série infinie 1-1+1-1... = 1;2)"*[1] Il pose $S_n = a_0 + a_1 ... + a_n$. Si $\frac{s_0 + s_1 + ... + s_{n-1} + s_n}{n}$ a une limite finie M quand n augmente, si la série $a_0 + a_1 x_1 ... + a_n x_n$ converge pour x compris entre 1 et -1 on pourra prendre M comme limite quand x tend vers 1, ce qui lui permet d'attribuer un sens à l'égalité infinie. Il définit ainsi une convergence en moyenne.

Borel en 1901 : "Si *dans un calcul on est conduit à la série (1-1+1-1...etc.) on peut en général la remplacer par $\frac{1}{2}$; le résultat est exact toutes les fois qu'il s'agit de calculs se présentant naturellement au cours d'une recherche objective et non d'expressions construites artificiellement*"[2] On peut attribuer une somme à une série divergente et même plusieurs dans le cadre de certaines problèmatiques.

[1]Frobenius, *über die Leibnitzsche Reihe Journal für angewandte Mathematik* 1880 p. 262 à 264.

[2]Borel Leçons *sur les séries divergentes* Gauthiers-Villars 1901

Travail avec les élèves. Texte de problème.

De nos jours nous introduisons la notion de suite géométrique dans le cadre du cursus de 1ère et Terminale : pour la suite $u_n = (\frac{1}{2})^n$ $S_n = u_1 + ... + u_n = \dfrac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}$ et $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{1}{2}$.

L'activité proposée aux élèves peut-être menée comme introduction à la notion de limite ou comme mise au point de cette notion.

A. *Travail préliminaire à la lecture du texte de Leibniz*

Dans un repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormal tel que $\| \vec{i} \| = \| \vec{j} \| = 6$ cm, construisez les courbes représentatives des fonctions f, g, h, k, l définies sur $[0,1]$ par :

$f(x) = 1$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$, $k(x) = x^3$, $l(x) = x^4$

Pour chaque fonction vous tracerez avec soin le point d'abscisse $\dfrac{2}{3}$ et vous nommerez j, b, V, G, Y les points de coordonnées respectives $(0,1); (1,1); (1,0); \left(\dfrac{2}{3}, 0\right); \left(\dfrac{2}{3}, 1\right)$.

Dans un autre repère $(A', \vec{i}, \vec{j})$ de mêmes vecteurs unitaires que le précédent construisez la courbe représentative de la fonction définie sur $[0,1]$ par $m(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Vous appellerez H, D, S, les points de $\mathcal{C}_m$ d'abscisses respectives $0, \dfrac{2}{3}$ et 1 et B le point de coordonnées $(1,0)$.

B. *Lecture du texte 1 :*

I - Justifiez et écrivez en symboles modernes la ligne 11.

II - Justifiez le passage de la ligne 11 à la ligne 14

III - Justifiez la ligne 18

IV - Quelles sont les propositions disjonctives dont il est question ligne 42 ?
Quelle est la proposition affirmative de la ligne 43 ?

V - Quel commentaire pouvez-vous faire ?

C. *Lecture du texte 2 :*

Vous vous servirez des graphiques tracés en A.

Leibniz appelle 1, 2, 3, 4 les points de même abscisses sur les différentes courbes ; on peut utiliser les équivalences de notations suivantes : GY = f(x) G1 = g(x) G2 = h(x) G3 = k(x) G4 =l(x)

I - Calculez f(x) - g(x) + h(x) - k(x) + l(x) pour $x = \frac{2}{3}$ puis à 10^{-4} près la différence entre cette forme algébrique et $m\left(\frac{2}{3}\right)$.

II - Reprenez la question I pour x = 0,9 et pour x = 0,1

III - Quelle est la limite quand n tend vers l'infini

de $1 - \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 ......+\left(-\frac{2}{3}\right)^n$;

de $1 - 0{,}9 + 0{,}9^2 ....+(-0{,}9)^n$

et de $1 - 0{,}1 + 0{,}1^2 ....+(-0{,}1)^n$

IV- Donnez une autre formulation pour les lignes 10 à 12.

V - Quelles conclusions tirez-vous de ces lectures ?

Commentaires

Les objectifs du travail avec les élèves étaient les suivants :

- Révision de la comparaison graphique des fonctions monômes de degré de 0 à 4.
- Utilisation des connaissances sur les séries géométriques.
- Approfondissement de la notion de limite.

En classe de 1ère, le travail préliminaire A(Cf. p.52) fut donné à faire à la maison et corrigé en classe avant la distribution des deux extraits du texte et du devoir B (Cf. p.52) l'accompagnant.

En classe de Terminale, les deux travaux A et B sont donnés conjointement.

La correction en classe fut accompagnée de la lecture du texte intégral avec les élèves.

Pour la question B.I, la plupart des élèves utilisèrent

$\lim_{n\to\infty} S_n = u_0 \frac{1}{1-q}$ pour la suite géométrique $u_n = x^n, u_0 = 1$ de raison x, avec $0 < x < 1$.

Mais certains justifièrent l'égalité par la division infinie de 1 par $1 - x$.

Pour la question B.II, les réponses s'équilibrèrent entre l'utilisation de la suite géométrique de raison $-x$, avec $0<x<1$ et la substitution de $-x$ à x ; quelques-uns refirent la division infinie de 1 par $1 - x$.

Dans l'ensemble, les élèves répondirent correctement aux questions et une vue d'ensemble claire de la partie B se dégageait de leurs remarques. Il n'en était pas de même pour la partie C dont l'objectif leur parut fort confus jusqu'à la mise en commun des remarques et l'analyse de la figure de l'un d'entre eux agrandie sur transparent.

Le savoureux débat du XVIIe siècle dont la lettre de Leibniz à Wolf se fait l'écho, trouva son répondant dans les virulentes discussions des élèves qui se poursuivirent au café du lycée.

Voici quelques-unes de leurs remarques :

"Quel moyen peut-on utiliser pour obtenir quelque chose de fini à partir de rien ?".

"Sont-ce vraiment des riens?"

La discusion qui suivit fit référence à la question de Dieu créant le monde fini à partir de rien . Nous discutâmes alors sur la forme indéterminée $0 \times \infty$. " Peut-on avoir $0 \times \infty = \frac{1}{2}$?"

Je leur proposai comme exemple la fonction $f : x \longrightarrow \frac{x+1}{2x+1} = (x+1) \times \frac{1}{2x+1}$

$\lim\limits_{x \to \infty} x + 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{2x+1} = 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \frac{1}{2}$

Voici pour conclure une remarque fort poétique d'une élève : "0 ou 1, symbiose du 0 et du 1 à l'infini, l'infini bouclé sur lui-même par la moyenne arithmétique" ...

Je laissai un certain suspense en ne répondant pas tout de suite aux questions "Leibniz a-t-il raison ?"."Que dit-on aujourd'hui ?" Je leur proposai, à la fin de l'heure, la réponse de Knobloch : *"Aujourd'hui on dit que c'est une série alternée avec deux points d'accumulation. Donc selon la définition de la convergence d'une série infinie, cette série est divergente."* Ce fut un soulagement pour beaucoup.

Dans la classe de terminale, certains élèves émirent le souhait de lire d'autres textes du "même genre". Je leur proposai alors un extrait de l'article "Séries" de l'Encyclopédie méthodique de Diderot et d'Alembert, qui est donné en annexe, et dont la lecture se fit sans problème. Ces élèves avaient pris goût à la "division infinie".

Texte 1

Dans la question remise récemment à l'ordre du jour par *Guido Grandi*, vous me demandez si je suis d'avis que $1 - 1 + 1 - 1 + 1$ etc. à l'infini est égal à $\frac{1}{2}$ et comment écarter l'apparente absurdité d'une telle proposition. En effet puisque l'égalité $1 - 1 = 0$ semble se reproduire une infinité de fois, on ne voit pas comment la répétition à l'infini de purs néants pourrait faire $\frac{1}{2}$

Ceux qui, suivant l'exemple du grand Archimède dans sa quadrature de la parabole, ont calculé la somme de termes en progression Géométrique, au premier chef *Grégoire de Saint Vincent* ·, ont déjà montré que

$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + xx + x^3 + x^4 +$ etc. à l'infini, à condition naturellement de supposer en x une quantité plus petite que un. Nicolas Mercator du Holstein a transposé ce résultat en

$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - x^5 +$ etc. à l'infini,

Laissons-là les quadratures et revenons à la série de termes en progression Géométrique (qui me suffit pour ce que je veux faire)

$\frac{1}{1 + x} = 1 - x + xx - x^3 +$ etc. à l'infini, ou

$\frac{1}{1 + xx} = 1 - xx + x^4 - x^6 +$ etc. à l'infini. Observons ce qui se passe si $x = 1$. A notre grand émerveillement il vient alors :

$\frac{1}{1 + 1}$ soit $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. à l'infini, ce que la figure employée par M. Grandi nous met en quelque sorte sous les yeux.

Il m'appartient à présent de révéler la véritable solution, peut-être inattendue, en tout cas singulière, de cette *énigme*, ainsi que l'explication du *paradoxe*, en me ramenant d'abord à une série finie pour passer ensuite à une série infinie. Remarquons en effet que pour une série finie il faut distinguer deux cas qui, de façon assez surprenante, se confondent dès qu'il s'agit d'une série infinie . Nous pouvons développer une série finie : $1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. de deux manières : elle est ou bien constituée *d'un nombre pair de termes* et se termine par un −, comme $1 - 1$, $1 - 1 + 1 - 1$, ou $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$; dans ce cas, aussi loin que nous poursuivions, nous obtenons toujours 0. Ou bien la série est constituée *d'un nombre impair de termes* et se termine par un +, par exemple $1 - 1 + 1$, $1 - 1 + 1 - 1 + - 1 - 1$, aussi loin que nous poursuivions, tous les cas donnent + 1. Mais lorsque la Série est infinie $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. à l'infini, au-delà de tout nombre, en même temps que disparaît la notion de nombre, disparaît également la détermination pair impair. Et comme il n'y a pas plus d'arguments en faveur de la parité que de l'imparité, ni par conséquent en faveur d'un résultat égal à 0 ou à 1, le génie admirable de la nature fait que le passage du fini à l'infini s'accompagne du passage de propositions disjonctives (qui disparaissent) à une proposition unique affirmative (qui subsiste), moyen terme entre les deux propositions disjonctives. Or ceux qui ont traité des estimations ont montré que lorsqu'il s'agit de prendre le milieu entre deux quantités ayant même raison d'être , il faut prendre la moyenne Arithmétique, c'est-à-dire la moitié de leur somme ; c'est ainsi que la nature conserve ici encore sa loi de justice, par conséquent puisque dans le cas d'un nombre fini de termes la série $1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. vaut 0 si le nombre est pair et 1 s'il est impair, lorsque la multiplicité infinie des termes fait disparaître les deux cas, que les prérogatives du pair et de l'impair se confondent, et que l'un et l'autre ont exactement la même raison d'être, nous obtenons par conséquent $\frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2}$ comme je l'avançais.

Texte 2

Soit le carré bJAV, traçons la diagonale Ab ou A_1b, ainsi qu'une infinité de paraboles et de paraboloïdes A_2b, A_3b A_4b, A_5b etc., de sorte que si nous prenions le côté du carré comme unité, que nous notions x l'abscisse AG, et que nous tracions la droite yG normale à AG coupant la diagonale et les paraboloïdes en 1, 2, 3, 4, 5, etc., les ordonnées Gy, G1, G2, G3, G4, G5 etc. soient respectivement 1, x, xx, x^3, x^4 x^5 etc. et qu'en conséquence les segments de droites

Gy, G1, G2, G3, G4 etc. soient en progression Géométrique. Ceci posé, prolongeons bV jusqu'à B, avec BV = bV, et yG jusqu'à D de façon que GD soit la réunion des ordonnées alternativement additionnées et soustraites, soit GD = Gy − G_1 + G2 − G3 + etc. ou encore, ce qui revient au même (compte tenu de ce que j'ai dit plus haut), $GD = \frac{1}{VA + AG} = \frac{1}{1 + AG}$. Complétons le carré AVBH et traçons la courbe SDH joignant tous les points D, et coupant AH en H et BV en S ; il est clair que dans le cas où AG = VA = 1 nous aurons $GD = \frac{1}{1 + xx} = \frac{1}{2} = VS$, c'est-à-dire $GD = \frac{1}{2}BV$; par conséquent

dans ce cas, puisque G tombe en V et D en S, $VS = \frac{1}{2}BV$ ou $= \frac{1}{2}AV$. Or comme dans ces conditions tous les points 1, 2, 3, 4, 5 etc. coïncident au même et unique point B, les points G1, G2, G3, G4 etc. deviennent égaux à Gy ou BV, et finalement Gy − G1 + G2 − G3 + etc. devient $BV - BV + BV - BV + \text{etc.} = \frac{1}{2}BV$.

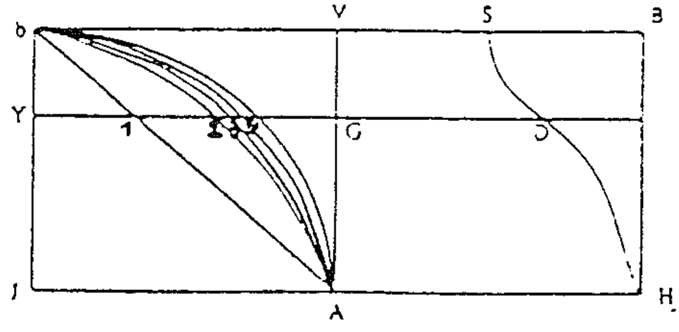


figure 48

Lettre au très illustre Christian WOLF, professeur de mathématiques à Halle, sur la Science de l'Infini? (publiée dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig en 1713)

Dans la question remise récemment à l'ordre du jour par *Guido Grandi*, vous me demandez si je suis d'avis que 1 − 1 + 1 − 1 + 1 etc. à l'infini est égal à $\frac{1}{2}$ et comment écarter l'apparente absurdité d'une telle proposition. En effet puisque l'égalité 1 − 1 = 0 semble se reproduire une infinité de fois, on ne voit pas comment la répétition à l'infini de purs néants pourrait faire $\frac{1}{2}$. Je constate que M. Grandi confère à l'infini le pouvoir de faire surgir quelque chose à partir de rien, et qu'il entend par là expliquer, non sans élégance, la création du monde, que l'omnipotence Divine tire du néant. Mais la Création n'est pas simple répétition de Néants et suppose l'adjonction d'une réalité nouvelle et positive . J'entends dire également, bien que ses arguments ne me soient pas parvenus, que *M. Marchetti*, Professeur de Mathématiques à Pise, s'est opposé à l'idée de Grandi. Au demeurant, comme l'examen du problème est plaisant et qu'il joue un rôle essentiel pour expliquer la *Science de l'Infini* (dont on ne s'est pas encore occupé comme elle le méritait), il sera bon de reprendre la chose d'un peu plus haut et de la ramener à ses origines. J'ai la conviction que ce ne sera pas pour déplaire à M. Grandi lui-même puisque sur le fond j'approuve sa conclusion, même s'il faudrait selon moi prêter attention à certains de ses raisonnements et de ses déductions pour qu'ils n'aillent pas porter préjudice à la science.

Ceux qui, suivant l'exemple du grand Archimède dans sa quadrature de la parabole, ont calculé la somme de termes en progression Géométrique, au premier chef *Grégoire de Saint Vincent* , ont déjà montré que

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + xx + x^3 + x^4 +$ etc. à l'infini, à condition naturellement de supposer en x une quantité plus petite que un. Nicolas Mercator du Holstein a transposé ce résultat en

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - x^5 +$ etc. à l'infini, résultat qu'il a démontré, en même temps que le précédent, à partir d'une division continue , bien qu'on puisse aussi le déduire du premier, en remplaçant $-x$ par $+x$. Il fut également le premier à enseigner, en publiant sa *Logarithmotechnia*, comment déduire de ce résultat une Quadrature par une série infinie ; c'est de cette manière qu'il nous a fait connaître sa Quadrature Arithmétique de l'Hyperbole, et qu'il l'a ensuite mise en relation avec les Logarithmes. Encouragé par son exemple, j'ai eu le bonheur de trouver non seulement que la quadrature de l'Aire ayant pour ordonnée $\frac{1}{1-xx}$ dépend de la Quadrature de l'Hyperbole, mais aussi semblablement, que $\frac{1}{1+xx}$ repose sur la Quadrature Arithmétique du Cercle. En effet, puisque (en remplaçant x par xx) $\frac{1}{1+xx}$ est égal à

$1 - xx + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} +$ etc. à l'infini, il s'ensuivait que $\int \frac{dx}{1+xx}$ (une méthode originale m'avait fait découvrir que cette somme fournit la quadrature d'un secteur circulaire) , serait :

$\int dx - \int xx\,dx + \int x^4\,dx - \int x^6\,dx +$ etc. à l'infini, c'est-à-dire (en faisant appel à la Quadrature des Paraboloïdes qui nous est connue) $\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} +$ etc. Dès lors, dans le cas où x = 1, il vient :

$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ etc. à l'infini, et le rapport de cette série à l'unité est celui de l'aire d'un Cercle au carré de son Diamètre. La première année où ont paru les Actes de la République des Lettres de Leipzig, j'ai fait connaître ce résultat découvert bien longtemps auparavant. Plus tard dans ces mêmes Actes, j'ai donné la formule générale rassemblant en un unique théorème la Quadrature des secteurs de toutes les Coniques à centre . C'est ce que M. Grandi a voulu, dans une intention louable, mettre à la portée des gens peu familiarisés au calcul abstrait, en le démontrant à sa manière sur une figure, pour donner plus de prise à l'imagination : lorsque dans ma jeunesse je résidais à Paris, j'avais eu moi-même l'intention de publier quelque chose d'analogue (mais applicable également à d'autres résultats apparentés), et en même temps d'éclaircir l'origine de leur découverte, qui n'est peut-être pas encore bien limpide aujourd'hui. Mais, appelé à d'autres tâches, j'ai suspendu ce projet. Il est naturellement bien plus facile de démontrer les inventions que d'en dévoiler l'origine et de faire ainsi progresser l'art d'inventer lui-même

Laissons-là les quadratures et revenons à la série de termes en progression Géométrique (qui me suffit pour ce que je veux faire)

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + xx - x^3 +$ etc. à l'infini, ou

$\frac{1}{1+xx} = 1 - xx + x^4 - x^6 +$ etc. à l'infini. Observons ce qui se passe si x = 1. A notre grand émerveillement il vient alors :

$\frac{1}{1+1}$ soit $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ etc. à l'infini, ce que la figure employée par M. Grandi nous met en quelque sorte sous les yeux.

Soit le carré bJAV, traçons la diagonale Ab ou A_1b, ainsi qu'une infinité de paraboles et de paraboloïdes A_2b, A_3b A_4b, A_5b etc., de sorte que si nous prenions le côté du carré comme unité, que nous notions x l'abscisse AG, et que nous tracions la droite yG normale à AG coupant la diagonale et les paraboloïdes en 1, 2, 3, 4, 5, etc., les ordonnées Gy, G1, G2, G3, G4, G5 etc. soient respectivement 1, x, xx, x^3, x^4 x^5 etc. et qu'en conséquence les segments de droites Gy, G1, G2, G3, G4 etc. soient en progression Géométrique. Ceci posé, prolongeons bV jusqu'à B, avec BV = bV, et yG jusqu'à D de façon que GD soit la réunion des ordonnées alternativement additionnées et soustraites, soit $GD = Gy - G_1 + G2 - G3 +$ etc. ou encore, ce qui revient au même (compte tenu de ce que j'ai dit plus haut), $GD = \frac{1}{VA + AG} = \frac{1}{1 + AG}$. Complétons le carré AVBH et traçons la courbe SDH joignant tous les points D, et coupant AH en H et BV en S ; il est clair que dans le cas où AG = VA = 1 nous aurons $GD = \frac{1}{1+xx} = \frac{1}{2} =$ VS, c'est-à-dire $GD = \frac{1}{2}BV$; par conséquent dans ce cas, puisque G tombe en V et D en S, $VS = \frac{1}{2}BV$ ou $= \frac{1}{2}AV$. Or comme dans ces conditions tous les points 1, 2, 3, 4, 5 etc coïncident au même et unique point B, les points G1, G2, G3, G4 etc deviennent égaux à Gy ou BV, et finalement Gy − G1 + G2 − G3 + etc devient $BV - BV + BV - BV +$ etc. $= \frac{1}{2}BV$.

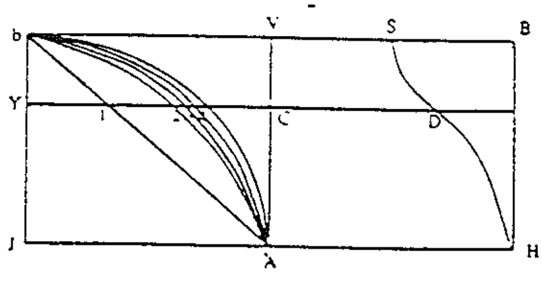


figure 48

Ceci est en accord avec la *Loi de Continuité* que j'ai proposée pour la première fois dans les Nouvelles de la République des Lettres de Bayle et appliquée aux Lois du Mouvement . Elle entraîne que *dans* *les continus, on peut considérer une limite externe comme une limite interne* , si bien que le dernier cas, même s'il est de nature complètement différente, est compris dans la loi générale gouvernant les autres ; dès ce moment, de manière paradoxale et pour ainsi dire, par une *Figure Philosophico-rhétorique*, nous pouvons considérer le point par rapport à la ligne, le repos par rapport au mouvement, comme des cas particuliers compris dans le cas général inverse , le point apparaissant comme une ligne infiniment petite, évanescente, ou le repos comme un mouvement évanescent . De même pour d'autres formules du même genre, que l'homme très profond qu'était *Joachim Jung* aurait nommées *vraies par tolérance* et qui sont des plus utiles pour l'art d'inventer, même si à mon avis elles enveloppent quelque chose de fictif et d'imaginaire. Car en les ramenant à des expressions ordinaires, il est très facile de les corriger et d'écarter tout risque d'erreur. Au reste la nature, qui procède toujours pas à pas et non par sauts, ne saurait violer la loi de continuité .

Mais apparaît ici l'objection pertinente que M. Marchetti et vous-même avez soulevée. Puisque BV – BV soit 1 – 1 = 0, n'en résulte-t-il pas que BV – BV + BV – BV + etc. à l'infini, soit

1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1 + etc. à l'infini, se réduit à

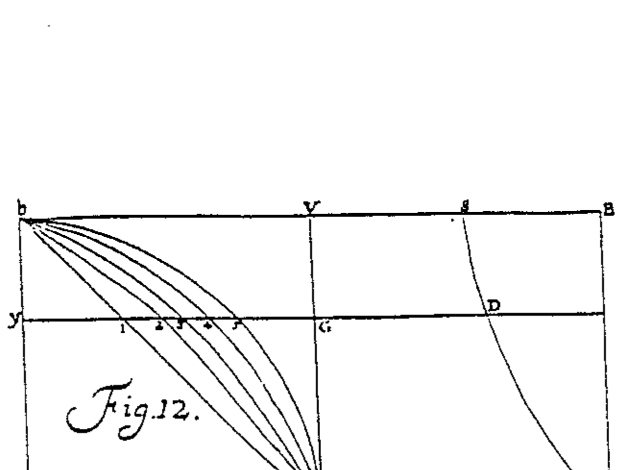
0 + 0 + 0 + 0 + 0 + etc. à l'infini ? On ne voit pas comment cela pourrait faire $\frac{1}{2}$. M. Grandi tente avec ingéniosité de lever l'objection en recourant à une analogie. Il imagine que deux frères devant partager un patrimoine découvrent dans l'héritage de leur père une pierre de très grande valeur, dont le testament interdise la vente ; ils conviennent donc entre eux de la déposer alternativement pour un an dans leur bibliothèque respective. De cette façon, à supposer que les héritiers respectent éternellement cette règle, la descendance de chaque frère se voyant accorder puis retirer la pierre une infinité de fois, en possèderait juridiquement exactement la moitié.

Mais à y regarder de plus près, cette analogie est trop claudicante. *Premièrement* parce que dans le cas qui nous occupe (M. Grandi le reconnaît lui-même), tout repose sur un privilège conféré à l'infini, de pouvoir de lui-même, par simple répétition, produire quelque chose à partir de Rien. Or dans le cas du partage d'un patrimoine, la situation reste inchangée s'il y a un nombre fini d'années. Imaginez en effet que la pierre échoie aux deux frères non par héritage paternel, mais par le legs d'un ami, et qu'ils n'en obtiennent pas la propriété perpétuelle, mais seulement l'usufruit pour cent ans ; il est clair, dès l'instant où ils la possèdent une année sur deux, que leurs droits respectifs seront les mêmes. Mais dans notre cas, si nous écrivons cent fois de suite l'unité, en faisant alternativement une addition puis une soustraction, c'est-à-dire si nous écrivons 50 fois ou même 50000 fois 1 – 1, il en résultera toujours 0.

Deuxièmement la différence tient à ce que dans le cas d'un droit commun à deux personnes possédant une chose tour à tour, ce qui est accordé puis ôté n'est pas la totalité du droit sur cette chose, mais le droit d'en user pendant un an, ce qui ne fait que de petites portions du droit total ; si nous répartissons celui-ci par années et que nous en concèdions l'usufruit pour cent ans, l'usufruit pour un an n'est, de toute évidence, que la centième partie du droit total, de ce fait puisque chacun en obtient de cette manière cinquante centièmes, nous voyons bien que chacun détient la moitié du titre. Mais dans notre cas c'est l'unité elle-même, le tout lui-même (non de petites parts), qui sont tantôt accordés, tantôt soustraits. C'est pourquoi, bien que séduisante, si nous l'examinons en détail, cette analogie laisse le problème entier.

Il m'appartient à présent de révéler la véritable solution, peut-être inattendue, en tout cas singulière, de cette *énigme*, ainsi que l'explication du *paradoxe*, en me ramenant d'abord à une série finie pour passer ensuite à une série infinie. Remarquons en effet que pour une série finie il faut distinguer deux cas qui, de façon assez surprenante, se confondent dès qu'il s'agit d'une série infinie . Nous pouvons développer une série finie : 1 – 1 + 1 – 1 + etc. de deux manières ; elle est ou bien constituée *d'un nombre pair de termes* et se termine par un –, comme 1 – 1, 1 – 1 + 1 – 1, ou 1 – 1 + 1 – 1 + 1 – 1, dans ce cas, aussi loin que nous poursuivions, nous obtenons toujours 0. Ou bien la série est constituée *d'un nombre impair de termes* et se termine par un +, par exemple 1 – 1 + 1, 1 – 1 + 1 – 1 + – 1 + 1, aussi loin que nous poursuivions, tous les cas donnent + 1. Mais lorsque la Série est infinie 1 – 1 + 1 - 1 + 1 – 1 + etc. à l'infini, au-delà de tout nombre, en même temps que disparaît la notion de nombre, disparaît également la détermination pair impair. Et comme il n'y a pas plus d'arguments en faveur de la parité que de l'imparité, ni par conséquent en faveur d'un résultat égal à 0 ou à 1, le génie admirable de la nature fait que le passage du fini à l'infini s'accompagne du passage de propositions disjonctives (qui disparaissent) à une proposition unique affirmative (qui subsiste), moyen terme entre les deux propositions disjonctives. Or ceux qui ont traité des estimations ont montré que lorsqu'il s'agit de prendre le milieu entre deux quantités ayant même raison d'être , il faut prendre la moyenne Arithmétique, c'est-à-dire la moitié de leur somme ; c'est ainsi que la nature observe ici encore sa loi de justice, par conséquent puisque dans le cas d'un nombre fini de termes la série 1 – 1 + 1 – 1 + etc. vaut 0 si le nombre est pair et 1 s'il est impair, lorsque la multiplicité infinie des termes fait disparaître les deux cas, que les prérogatives du pair et de l'impair se confondent, et que l'un et l'autre ont exactement la même raison d'être, nous obtenons par conséquent $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ comme je l'avançais.

J'ajoute que même si ce type d'argumentation semble plus Métaphysique que Mathématique, il ne laisse pas d'être solide. Au reste les Règles *de la Véritable Métaphysique* (celle qui ne se contente pas de dresser des nomenclatures) sont en Mathématiques, en Analyse et même en Géométrie, d'un usage plus étendu qu'on n'imagine. En l'occurrence nous avions déjà un autre moyen de savoir, grâce au raisonnement que j'ai indiqué au début, que VS est $\frac{1}{2}$ BV (les ordonnées GD étant $\frac{1}{1 + AG}$ il en résulte que lorsque AG devient AV, c'est-à-dire 1, VS devient $\frac{1}{1+1}$). Or nous aurions pu également montrer qu'en prenant G arbitrairement voisin de V, GD devient à son tour aussi voisin de $\frac{1}{2}$ BV qu'on le souhaite, de façon que nous puissions rendre la différence inférieure à toute quantité donnée. Par conséquent, par la manière de raisonner d'Archimède nous obtenons également que VS vaut $\frac{1}{2}$ BV. Au demeurant le fait d'aboutir au même résultat à la fois par les propriétés des séries et par celles de l'infini n'est pas seulement source de satisfaction, ce sera aussi une aide très précieuse pour construire des raisonnements rigoureux sur l'infini et dévoiler de mieux en mieux les origines de notre nouvelle théorie. On prendra garde du même coup à ne pas porter préjudice à la nouvelle science en recourant à des paradoxes insoutenables. Ainsi lorsqu'on nous objectait que des quantités nulles si nombreuses soient elles ne pouvaient rien donner de réel , il ne fallait pas répondre en distinguant entre le fini et l'infini, au sens où cette règle ne vaudrait pas pour l'infini, mais il fallait reconnaître la valeur générale de la règle et montrer, comme je viens de le faire, qu'il n'y a pas lieu de l'appliquer ici .



XXVI – Epistola ad Christianum Wolfium (figure 48)

LAPLACE *Essai philosophique sur les probabilités*
Introduction , p. CXVIII à CXX , tome 7 des *Oeuvres complètes.*

Je mets encore au rang des illusions l'application que Leibnitz et Daniel Bernoulli ont faite du Calcul des Probabilités à la sommation des séries. Si l'on réduit la fraction dont le numérateur est l'unité et dont le dénominateur est l'unité plus une variable, dans une suite ordonnée par rapport aux puissances de cette variable, il est facile de voir qu'en supposant la variable égale à l'unité, la fraction devient $\frac{1}{2}$, et la suite devient *plus un*, *moins un*, *plus un*, *moins un*, etc. En ajoutant les deux premiers termes, les deux suivants, et ainsi du reste, on transforme la suite dans une autre dont chaque terme est zéro. Grandi, jésuite italien, en avait conclu la possibilité de la création, parce que, la suite étant toujours égale à $\frac{1}{2}$, il voyait cette fraction naître d'une infinité de zéros, ou du néant. Ce fut ainsi que Leibnitz crut voir l'image de la création dans son Arithmétique binaire, où il n'employait que les deux caractères zéro et l'unité. Il imagina que l'unité pouvait représenter Dieu, et zéro le néant, et que l'Être suprême avait tiré du néant tous les êtres, comme l'unité avec le zéro exprime tous les nombres dans ce système d'Arithmétique. Cette idée plut tellement à Leibnitz qu'il en fit part au jésuite Grimaldi, président du tribunal de Mathématiques à la Chine, dans l'espérance que cet emblème de la création convertirait au christianisme l'empereur d'alors, qui aimait particulièrement les sciences. Je ne rapporte ce trait que pour montrer jusqu'à quel point les préjugés de l'enfance peuvent égarer les plus grands hommes.

Leibnitz, toujours conduit par une métaphysique singulière et très déliée, considéra que la suite *plus un, moins un, plus un*, etc., devient l'unité ou zéro, suivant que l'on s'arrête à un nombre de termes impair ou pair, et comme dans l'infini il n'y a aucune raison de préférer le nombre pair à l'impair, on doit, suivant les règles des probabilités, prendre la moitié des résultats relatifs à ces deux espèces de nombres, et qui sont zéro et l'unité, ce qui donne $\frac{1}{2}$ pour la valeur de la série. Daniel Bernoulli a étendu depuis ce raisonnement à la sommation des séries formées de termes périodiques. Mais toutes ces séries n'ont point, à proprement parler, de valeurs : elles n'en prennent que dans le cas où leurs termes sont multipliés par les puissances successives d'une variable moindre que l'unité. Alors ces séries sont toujours convergentes, quelque petite que l'on suppose la différence de la variable à l'unité, et il est facile de démontrer que les valeurs assignées par Bernoulli, en vertu de la règle des probabilités, sont les valeurs mêmes des fractions génératrices des séries, lorsque l'on suppose dans ces fractions la variable égale à l'unité. Ces valeurs sont encore les limites dont les séries approchent de plus en plus, à mesure que la variable approche de l'unité. Mais, lorsque la variable est exactement égale à l'unité, les séries cessent d'être convergentes : elles n'ont de valeurs qu'autant qu'on les arrête. Le rapport remarquable de cette application du Calcul des Probabilités avec les limites des valeurs des séries périodiques suppose que les termes de ces séries sont multipliés par toutes les puissances consécutives de la variable. Mais ces séries peuvent résulter du développement d'une infinité de fractions différentes, dans lesquelles cela n'a pas lieu. Ainsi la série *plus un, moins un, plus un*, etc., peut naître du développement d'une fraction dont le numérateur est l'unité plus la variable, et dont le dénominateur est ce numérateur augmenté du carré de la variable. En supposant la variable égale à l'unité, ce développement se change dans la série proposée, et la fraction génératrice devient égale à $\frac{2}{3}$; les règles des probabilités donneraient donc alors un faux résultat, ce qui prouve combien il serait dangereux d'employer de semblables raisonnements, surtout dans les Sciences mathématiques que la rigueur de leurs procédés doit éminemment distinguer.

D'ALEMBERT
Encyclopédie méthodique Diderot-D'Alembert (1787) **Article : Séries**
3° tome p. 32-33

Quant à l'invention d'une *suite infinie*, qui exprime des quantités cherchées, Mercator, le premier inventeur de cette méthode, se sert, pour cet effet, de la division. Mais Newton & Leibnitz ont porté cette théorie plus loin; le premier, en trouvant ses *suites* par l'extraction des racines; & le second, par une autre *suite* présupposée.

Pour trouver, par le moyen de la division, une *suite* qui soit l'expression d'une quantité cherchée. Supposons qu'on demande une *suite* qui exprime le quotient de b divisé par $a+c$, divisez le dividende par le diviseur, comme dans l'algèbre ordinaire, en continuant la division, jusqu'à ce que le quotient fasse voir l'ordre de la progression, ou la loi suivant laquelle les termes vont à l'infini; observant toujours les règles de la soustraction, de la multiplication, de la division, par rapport au changement des signes. Quand vous aurez poussé cette opération jusqu'à un certain point, vous trouverez que le quotient est $\frac{b}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{bc^2}{a^3} - \frac{bc^3}{a^4}$, &c. à l'infini. Ces quatre ou cinq termes étant ainsi trouvés, vous reconnoitrez facilement que le quotient consiste en une *suite* infinie de fractions. Les numérateurs de ces fractions sont les puissances de c, dont les exposans sont moindres d'une unité que le nombre qui marque la place que ces termes occupent, & les dénominateurs sont les puissances de a, dont les exposans sont égaux au nombre qui marque la place de ces termes. Par exemple, dans le troisième terme, la puissance de c est du second degré dans le numérateur, & la puissance de a est du troisième degré dans le dénominateur.

Par conséquent 1.° si $b=1$ & $a=1$, substituant ces valeurs nous aurons le quotient ci-dessus $= 1 - c + c^2 - c^3$, &c. à l'infini: c'est pourquoi $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3$, &c. à l'infini.

2.° Donc si les termes qui sont au quotient décroissent continuellement, la suite donnera un quotient aussi près du vrai qu'il est possible. Par exemple, si $b=1$, $a=2$, ces valeurs étant substituées dans la *suite* générale, & la division étant faite comme dans l'exemple général ci-dessus, on trouvera $\frac{1}{3} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} + \frac{1}{128}$, &c. Supposons maintenant que la *série* ou la *suite* s'arrête au quatrième terme, la somme de cette *suite* sera au-dessous de la véritable; mais il ne s'en faudra pas $\frac{1}{32}$. Si elle s'arrête au sixième terme, elle sera encore en-dessous, mais moins que de $\frac{1}{128}$: c'est pourquoi plus on poussera la *série* ou la *suite*, plus aussi on approchera de la véritable somme, sans pourtant jamais y arriver.

De la même manière, on trouve que $\frac{1}{4} = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \frac{1}{81} + \frac{1}{243}$, &c. à l'infini....
$\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} + \frac{1}{64} - \frac{1}{256}$, &c. à l'infini....
$\frac{1}{6} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} + \frac{1}{125} - \frac{1}{625}$, &c. à l'infini.
Ce qui donne une loi constante, suivant laquelle toutes les fractions, dont le numérateur est l'unité, peuvent être exprimées par des *suites* infinies; ces *suites* étant toutes des progressions géométriques, qui décroissent en telle manière, que le numérateur est toujours l'unité, & que le dénominateur du premier terme, qui est aussi l'exposant du rapport, est moindre d'une unité que le dénominateur de la fraction que l'on a proposé de réduire en *suite*.

Si les termes du quotient croissent continuellement, la *série* s'éloigne d'autant plus du quotient, qu'elle est poussée plus loin; & elle ne peut jamais devenir égale au quotient, à moins qu'on ne limite ce quotient, & qu'on ne lui ajoute le dernier reste avec son propre signe. Par exemple, supposons $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$; on trouvera que le quotient $= 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 64 + 128$, &c. prenons le premier terme 1, il excède $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{3}$; deux termes, c'est-à-dire, $1-2$, seront plus petits de $\frac{4}{3}$; trois termes seront trop grands de $\frac{8}{3}$; quatre termes seront plus petits que $\frac{1}{3}$ de $\frac{16}{3}$, &c. Si l'on suppose que la *série* ou la *suite* se termine au terme -8; 8/3
alors on aura $\frac{1}{1+2} = 1 - 2 + 4 - 8 + \frac{16}{3}$; mais $1 - 2 + 4 - 8 = -5 = -\frac{15}{3}$: ainsi $\frac{1}{1+2} = \frac{16}{3} - \frac{15}{3} = \frac{1}{3}$.

Mais, dira-t-on, qu'exprime donc alors une pareille suite? Car, par la nature de l'opération, elle doit être égale à la quantité ou fraction proposée; & cependant elle s'en éloigne continuellement. Un auteur nomme *Guido Ubaldus*, dans son traité de *quadratura circuli & hyperbolæ*, a poussé ce raisonnement plus loin, & en a tiré une conséquence fort singulière. Ayant pris la suite $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, & ayant fait la division, il a trouvé au quotient $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$, &c. qui, à l'infini, ne peut jamais donner que 1 ou 0; savoir 1, si on prend un nombre impair de termes; & 0, si on prend un nombre pair; d'où cet auteur a conclu que la fraction $\frac{1}{2}$ pouvoit devenir 1 par une certaine opération, & que 0 pouvoit être aussi égal à $\frac{1}{2}$, & que par conséquent la création étoit possible, puisque avec moins on pouvoit faire plus.

L'erreur de cet auteur venoit de n'avoir pas remarqué que la suite $1 - 1 + 1 - 1$, &c. & en général $1 - c + c^2 - c^3$, &c. n'exprimoit point exactement la valeur de la fraction $\frac{1}{1+c}$. Car supposons qu'on ait poussé le quotient de la division jusqu'à cinq termes, comme la division ne se fait jamais exactement, il y a toujours un reste, soit ce reste r; & pour avoir le quotient exact, il faut, comme dans la division ordinaire, ajouter ce reste r divisé par le diviseur $1+c$, à la partie déjà trouvée du quotient.

Ainsi supposons que la *série* générale soit terminée à $-c^3$, on aura $\frac{1}{1+c} = 1 - c + c^2 - c^3 + \frac{c^4}{1+c}$ $= \frac{1+c-c-c^2+c^2+c^3-c^3-c^4+c^4}{1+c} = \frac{1}{1+c}$.
Par conséquent la valeur exacte de $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ est $1 - 1 + 1 - 1 + \frac{1}{1+1}$; & cette valeur se trouve toujours égale à $\frac{1}{2}$, & non pas zéro à 1.

QUADRATURA
CIRCULI,
ET HYPERBOLÆ

Per Infinitas Hyperbolas, & Parabolas Quadrabiles Geometricè exhibita, & demonstrata.

EDITIO ALTERA AUCTIOR, ET ACCURATIOR

In qua, præter alia multa, ad veterem Appendicem de Rectificatione Curvarum, altera accessit de earundem, & Curvilineorum Spatiorum Transformatione infinitis modis expedienda.

AUCTORE

D. GUIDONE GRANDO

Monacho Camaldulensi, in Pisana Universitate Publ. Phil. Professore Reg. Cels. M. D. Etruriæ Theologo, & Mathematico, Et Regiæ Societatis Sodali.

AD SERENISSIMUM PRINCIPEM

JOANNEM GASTONEM
AB ETRURIA.

PISIS, MDCCX.

Ex Typographia Francisci Bindi Impress. Archiep. *Superiorum permissu.*

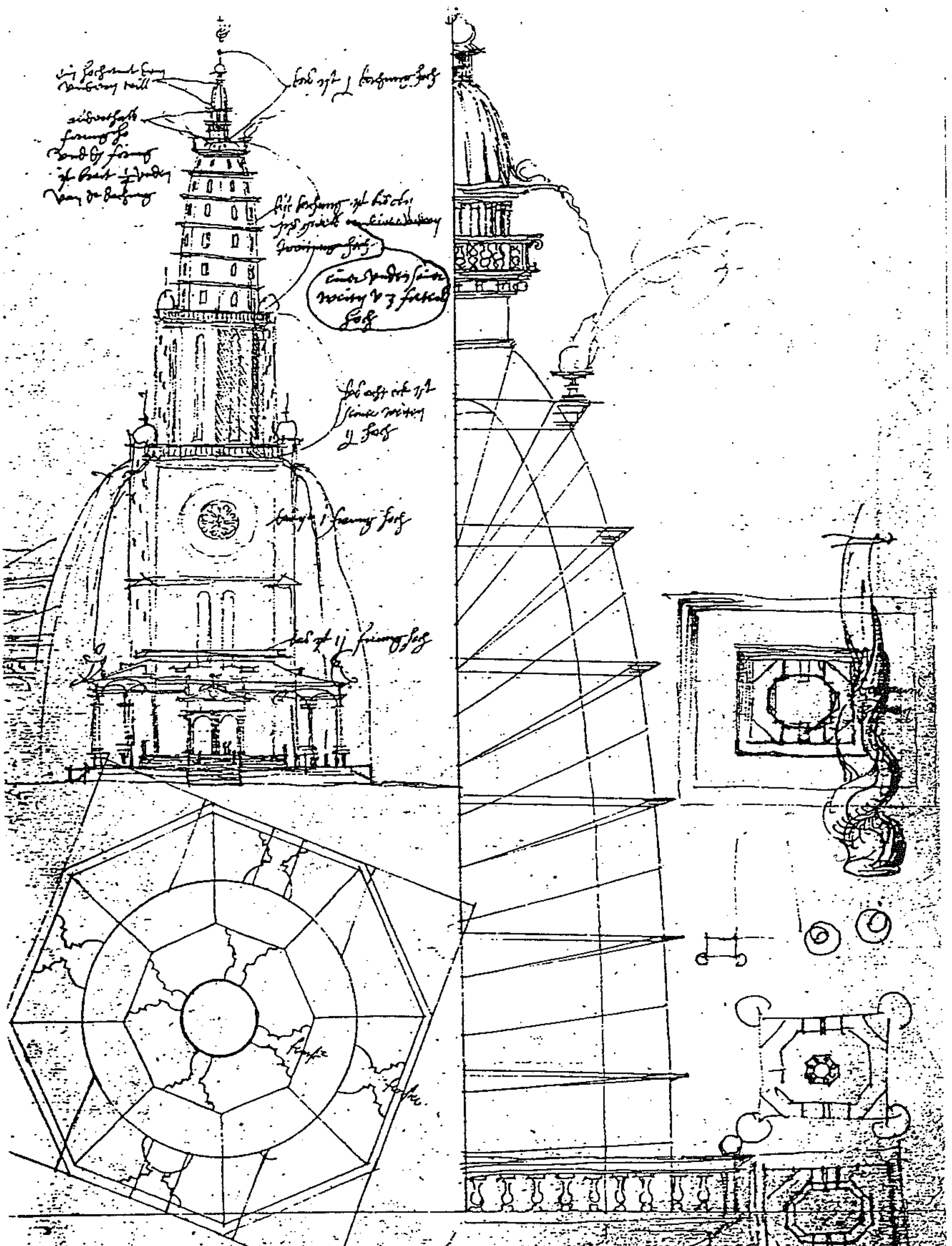


Planche du manuscrit de l'Underweysung

NOTES D'ECOUTE

Humanismes et mathématiques autour de la figure emblématique d'Albrecht Dürer

Centre Koyré

De janvier à avril 94, Jeanne Peiffer a donné un cycle de conférences consacrées à la *Géométrie* de Dürer, ouvrage dont elle a fait une traduction accompagnée de commentaires qui doit paraître prochainement[1]. Elle a donné une image très riche de l'artiste, homme de transition entre le moyen-âge et la renaissance, entre le monde germanique et l'Italie, entre les ateliers et les cercles d'érudits, qui, de plus, fut en son temps, selon Jeanne Peiffer, authentiquement géomètre. Elle a présenté et commenté une abondante bibliographie sur le sujet que je ne peux retranscrire ici.

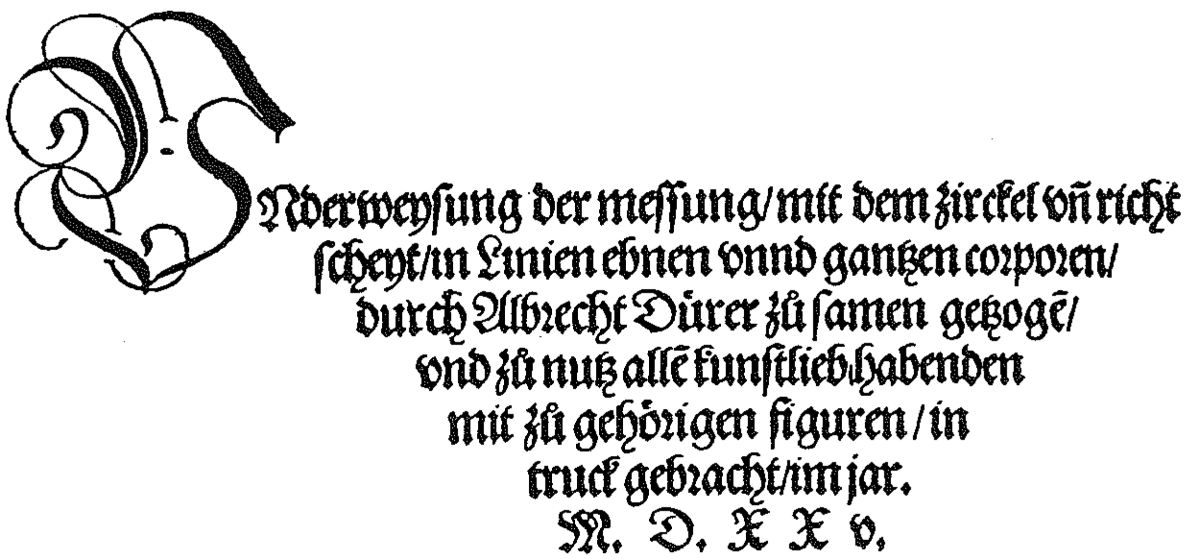
Rappelons rapidement qu'Albrecht Dürer est né en 1471 à Nuremberg ; fils d'un orfèvre, il commence à quinze ans son apprentissage chez un peintre nurembourgeois, entreprend ensuite un voyage de formation qui le mène entre autres à Colmar, à Bâle - chez l'orfèvre Georg Schongauer-, à Strasbourg... Il fait aussi deux voyages à Venise, et il est fasciné par la culture des peintres vénitiens qui, contrairement à ses compagnons artisans allemands, lisent et écrivent le latin, jouent de la musique et savent danser. Dürer lui-même connait peu ou très mal le latin, mais avec l'aide de ses amis, notamment le poète Celtis et l'humaniste nurembourgeois Pirckheimer, son ami très proche, il étudie les textes anciens, en particulier les *Eléments* d'Euclide, dont il a acheté une traduction à Venise en 1507. Il revendique de faire passer la peinture du statut artisanal à celui d'un art libéral en la fondant sur la géométrie. Après son deuxième voyage en Italie, il complète ses études théoriques et s'attelle à la composition d'un traité s'adressant aux peintres, dont l'intention est bien précisée par la dédicace à son ami Pirckheimer :

"... jusqu'à présent, dans nos pays allemands, on a mis à l'art de peindre beaucoup de jeunes gens adroits, et on les y a instruits par la seule pratique quotidienne sans leur en donner les fondements. Ils ont ainsi grandi dans l'inintelligence comme l'arbre sauvage qui n'a pas été taillé. Certains d'entre eux sont certes parvenus, à force d'exercice continu, à la maîtrise dans le dessin à main libre et ont pu créer des oeuvres puissantes, mais irréfléchies et faites à leur seule guise. Mais lorsque les peintres érudits et les véritables artistes ont vu une telle oeuvre irréfléchie, ils ont ri, non sans raison, de la cécité de ces gens. En effet, rien n'est plus désagréable à un esprit éclairé que la fausseté dans le tableau, même peint avec la plus grande application. Que ces peintres se complaisent dans l'erreur est l'unique raison qui les a empêchés d'apprendre l'art de la mesure, sans lequel il n'y a et n'y aura pas de véritable artisan. Mais c'est aussi de la faute de leurs maitres qui ignoraient eux-mêmes cet art. Comme il est le véritable fondement

[1] Albrecht Dürer, *Géométrie* , traduction et présentation de J. Peiffer, Editions du Seuil, Paris, prévue pour 1995. Notons que cette traduction est la première en français du traité *Underweysung der messung* ... . Une traduction en anglais était disponible depuis une vingtaine d'années, de Walter L. Strauss, sous le titre *A Painter's Manual* (Abaris books, New York), traduction approximative, souvent incomplète et assez éloignée du texte de Dürer.

de toute peinture, je me suis proposé d'en enseigner les éléments aux jeunes gens avides de s'instruire dans leur art, et de leur donner des raisons pour adopter la mesure à la règle et au compas, afin qu'ils sachent reconnaître l'authentique vérité lorsqu'ils l'auront sous les yeux. Ainsi, (...) ils acquerront également un jugement plus sûr et plus profond." [2]

Bien qu'il conseille aux apprentis peintres d'apprendre le latin, Dürer écrit son traité dans l'allemand de Nuremberg et il s'adresse à ceux qui ne connaissent pas la géométrie d'Euclide, à tous les artisans concernés par la mesure, graveurs, orfèvres, tailleurs de pierre, menuisiers, charpentiers aussi bien qu'aux peintres. Il ne réalise pas complètement l'ouvrage très encyclopédique projeté à son retour d'Italie et publie en 1525 l'*Underweysung der messung...*, puis en 1527, un ouvrage sur les fortifications de villes de bourgs et de chateaux et en 1528 paraît de façon posthume un traité sur les proportions du corps humain.


Underweysung der messung/ mit dem zirckel vñ richtscheyt/ in Linien ebnen vnnd gantzen corporen/
durch Albrecht Dürer zů samen getzogē/
vnd zů nutz allē kunstliebhabenden
mit zů gehörigen figuren/ in
truck gebracht/ im jar.
M. D. X X v.

Instructions pour la mesure / à la règle et au compas / des lignes, plans et corps solides / réunies par Albrecht Dürer / et imprimées avec les figures correspondantes / à l'usage de tous les amateurs d'art / en l'an M.D.XXV.

2 traduction de J. Peiffer.

Voici un plan succint de l'*Underweysung* ...

Livre I : Définitions : point, ligne, droite, cercle, ligne serpentine,... , surfaces....Spirales et hélices : construction d'une spirale par juxtaposition de demi-cercles, spirale d'Archimède, autres spirales ..., hélice conique, vis, folium de Dürer, ...
Constructions élémentaires : ove, centre d'un arc donné, cercle passant par trois points ...
L'infini mathématique : considérations asymptotiques, spirale logarithmique.
Théorie des courbes : une courbe "utile en architecture" définie par Dürer. (cf fig.1) Sections coniques : ellipse, transformée par affinité d'un demi-cercle, parabole, hyperbole, miroir ardent.
Conchoïdes : étude et instruments pour les construire.
Théorie des proportions : découper de façon réglée des longueurs sur une horizontale, construction de longueurs proportionnelles à 2^n, à 3^n, ($n = 1, ...4$), troisième proportionnelle, division d'un arc de cercle.

Livre II : Définitions : surfaces planes, angles, ..., triangles, ...
Construction des polygones réguliers. Trisection de l'angle. Rosaces et pavages
Transformations de figures : construction de rectangles semblables à un rectangle donné et ayant une aire double, triple, etc, transformation d'un triangle, d'un hexagone en un carré d'aire égale, quadrature du cercle, théorème de Pythagore...

Livre III : Colonnes avec leurs chapiteaux, bases et socles. Tours. Cadrans solaires. Conservation de l'angle sous lequel on voit des inscriptions en haut des tours.
Alphabets romain et gothique textura.

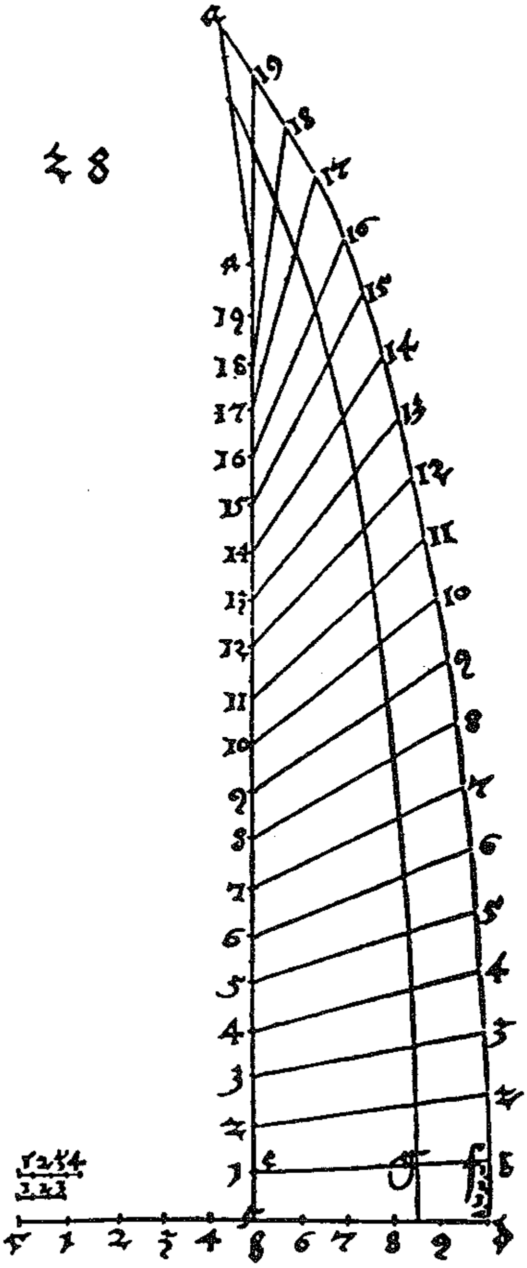
Livre IV : Corps platoniciens. Corps archimédiens.
Duplication du cube : méthodes de Sporus, de Platon, de Héron, autres méthodes.
Perspective.

Dürer connait les constructions géométriques assez rudimentaires en usage dans les ateliers allemands, où il a recueilli beaucoup de techniques et d'informations. Il reprend parfois leur termnologie et invente aussi des mots nouveaux pour désigner certains objets mathématiques. Il inclut dans sa géométrie certaines constructions de polygones réguliers (pentagone, eptagone, ennéagone), qui proviennent des ateliers et dont Dürer est capable de reconnaitre le caractère approché.

fig1. Une courbe utile en architecture

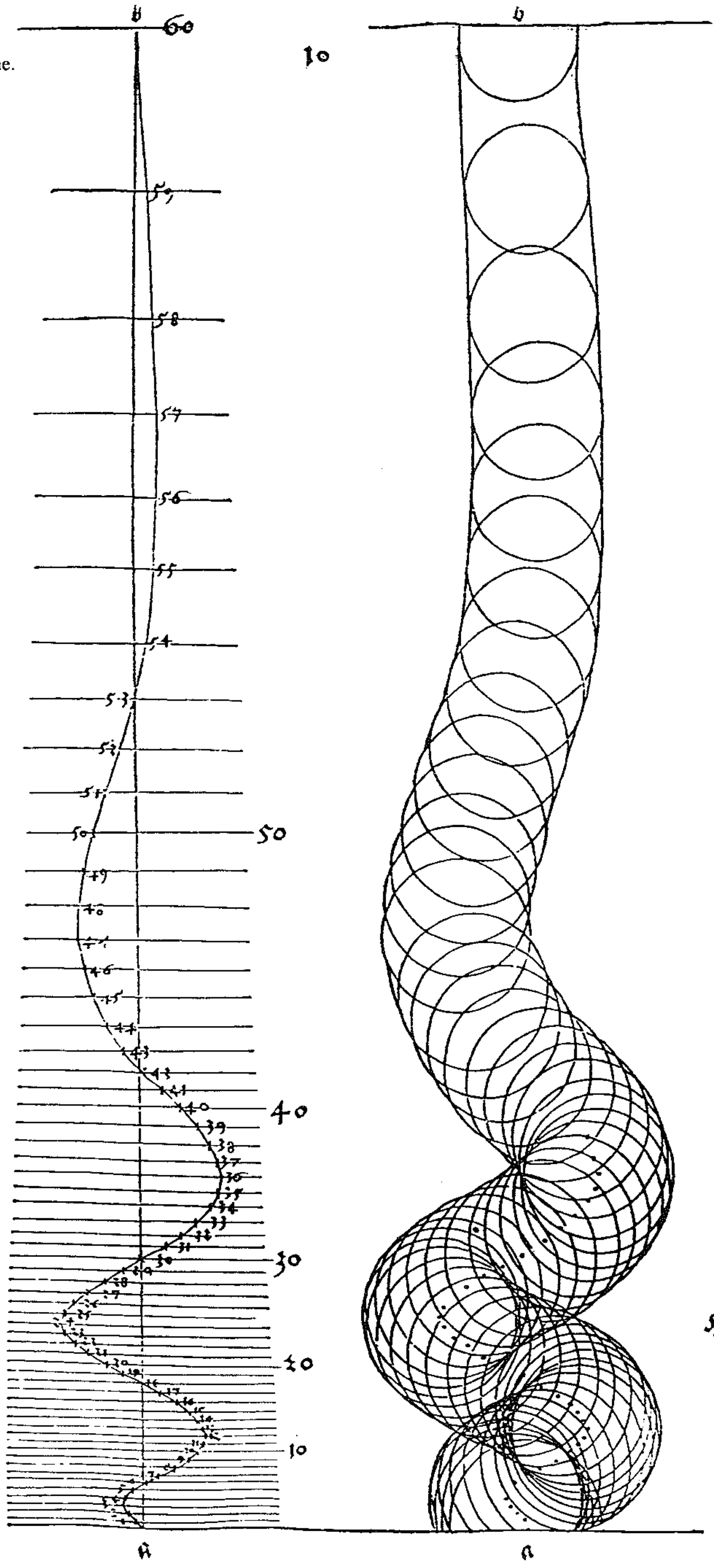
Diß sind die zwů krummen linien die durch vorbeschribnen weg gemacht werden,

die vorigē leng.e.f.die du auff dein richtscheyd gestochen hast / vnnd leg sie mit dem einen ende.e.an die auffrecht lini.a.b in den punckten.1.vnd das ander end.f. leg auff das zirckeltrum das es anrür / daselb setz von newen ein punckten/1/ Darnach leg dein richtscheydt aber von newem mit dem einen end/e/ an die lini/a/b/ in den punckten/2/ vñ setz darnach den zirckel mit dem einen fuß in den new worden punckten/ 1/ vñ mit dem andern fuß reiß eynn rund trum übersich wie vor / wo dañ die vordacht lini mit dem end. f.die krumē anrürt da setz ein punckten / 2/ also thů im darnach durch die gantz zal so hoch du komen magst/ darnach zeich dise lini in jr krume võ punckt zů punckt durch jr zal/ dise lini hab ich hernach zwifach aufzogē mit einer kürtzern lini . e.g. die krumen oben in der krum neher zůsamen dann vnden/diß ist nachfolget also auffgerissen.



La méthode de représentation d'un solide par double projection, plan et élévation, sans doute d'origine pratique, est bien maîtrisée par Dürer, qui sait l'appliquer à des objets mathématiques abstraits. On trouve, au livre III, une magistrale mise en oeuvre de cette méthode pour représenter une colonne torse, enveloppe d'une famille de sphères. Cette méthode ne sera pas reprise avant Monge.

fig. 2 Etude pour la colonne.



H iij

Les deux dernières conférences furent consacrées aux relations de Dürer avec l'Italie et à son travail sur la perspective. Dürer fit deux séjours à Venise. Du premier qui eut lieu en 1494 - 1495, il reste des croquis, des dessins, quelques copies d'oeuvres italiennes (de Mantegna par exemple). On connait le second, plus long, entre 1505 et 1507, par dix lettres de Dürer à Pirckheimer dont on peut trouver entre autres, une traduction dans le numéro *"Venise 1500"* de la revue *Autrement.* Il est manifeste que le projet de Dürer, faire de la peinture un art libéral, fondé sur la géométrie ainsi que sa démarche d'écrire un traité de géométrie pour les peintres , sont de la même inspiration que les projets d'Alberti trois quarts de siècle plus tôt. L'apprentissage par Dürer des méthodes de la perspective centrale reste peu connu. Le seul témoignage est celui d'une lettre de Dürer du 6 octobre 1505 où il annonce qu'il part pour Bologne pour rencontrer quelqu'un qui doit lui enseigner l'art secret de la perspective. S'agissait-il de Pacioli - c'est l'hypothèse fréquente - ou de l'architecte Bramante? La thèse de Jeanne Peiffer est qu'on a accordé trop d'importance à ce séjour, qui n'a peut-être même pas eu lieu, Bologne étant assiégée par les Français à cette période. Dürer doit peut-être ses connaissances en matière de perspective à la lecture des traités italiens. Il semble avéré qu'il a eu sous les yeux *La Divine Proportion* de Luca Pacioli, le *De Prospectiva Pingendi* de Piero della Francesca et de nombreux dessins de Léonard de Vinci, peut-être même un traité de la peinture de Léonard, car de nombreux dessins de Dürer s'apparentent à des figures issues de ces traités, ou en sont des reprises faites de mémoire. Il y a des points communs entre la *Divine Proportion* et l'*Underweysung* : l'étude des polyèdres réguliers et des polyèdres archimédiens, moins maîtrisée par Dürer, qui ne donne de ces derniers que les patrons, pas les représentations en perspectives ; également la construction géométrique des lettres pour l'imprimerie.

La perspective est traitée assez succintement à la fin de l'ouvrage. Dürer connait la méthode dite d'Alberti et s'inspire en quelques points du *De Prospectiva Pingendi* de Piero della Francesca. Il traite la construction des ombres, que seul Léonard de Vinci avait étudiée systématiquement en relation avec la peinture. Une première méthode permet de reconstituer l'apparence d'un objet et son ombre à partir des deux projections - plan et élévation - sur lesquelles il a précisé hauteur et éloignement latéral de la source lumineuse.

fig. 3

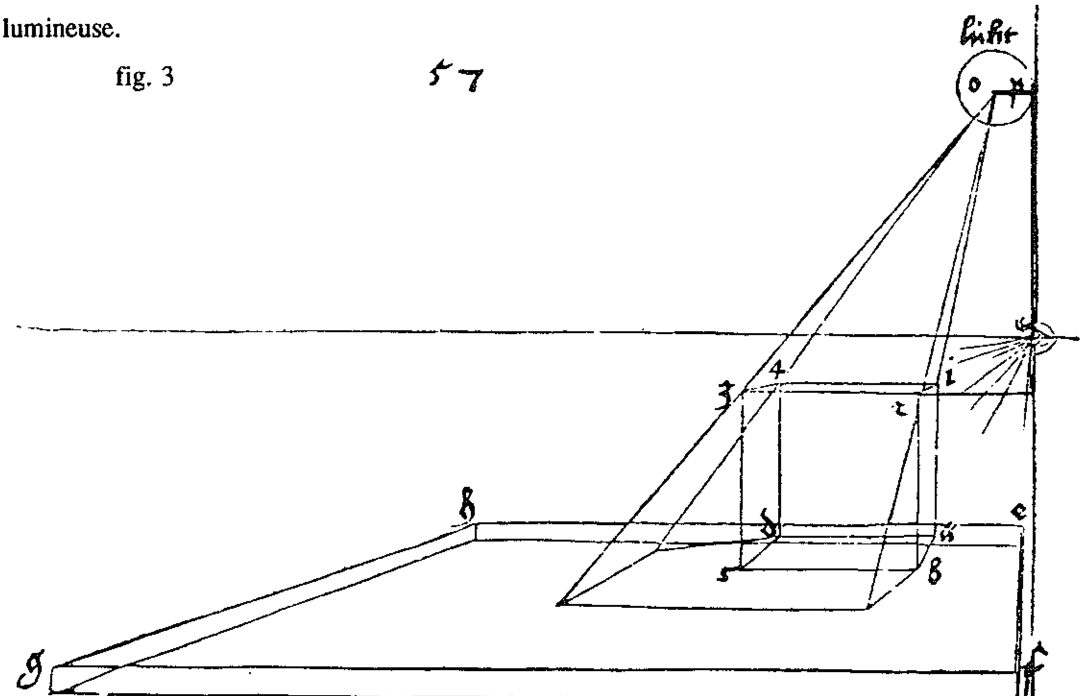
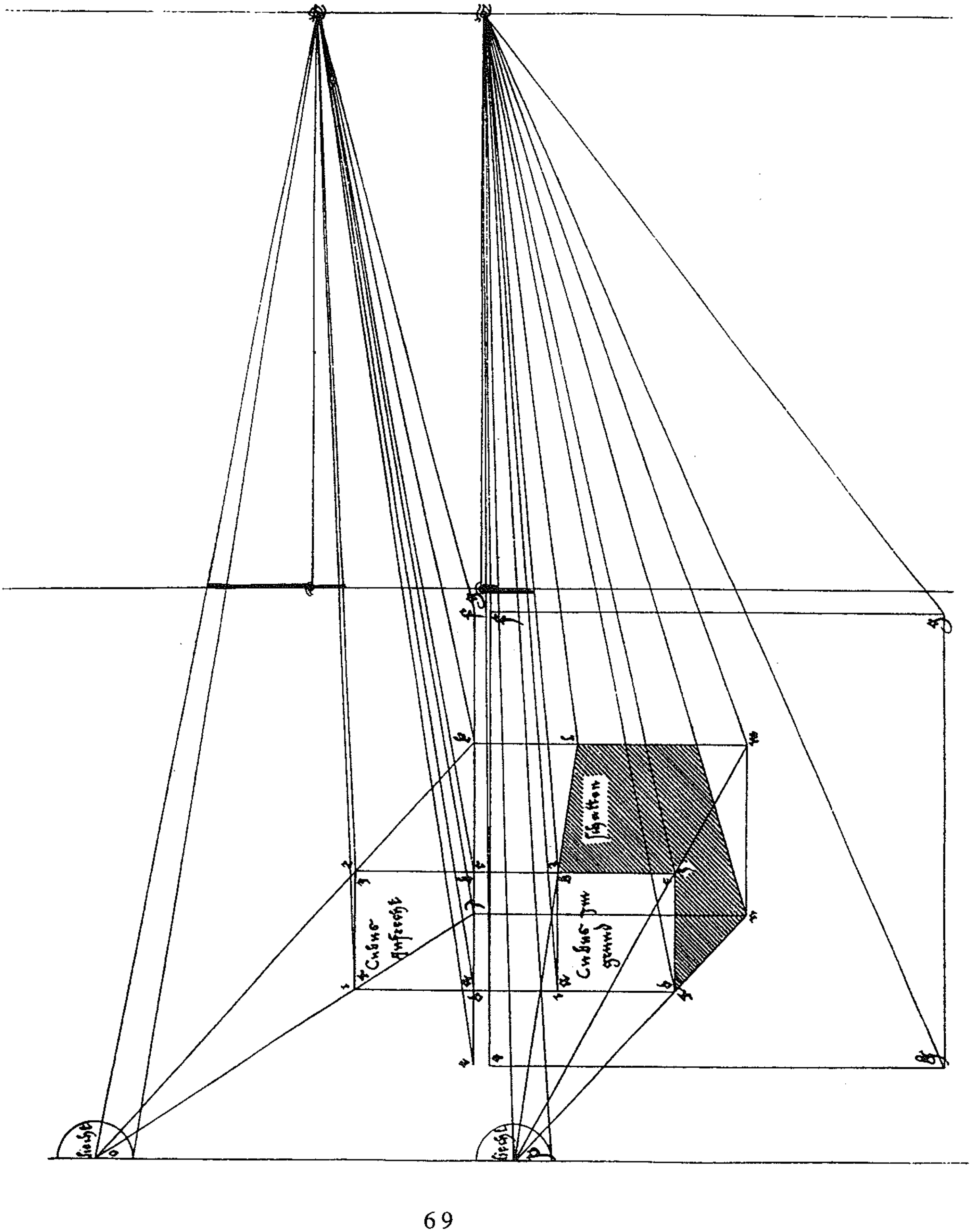
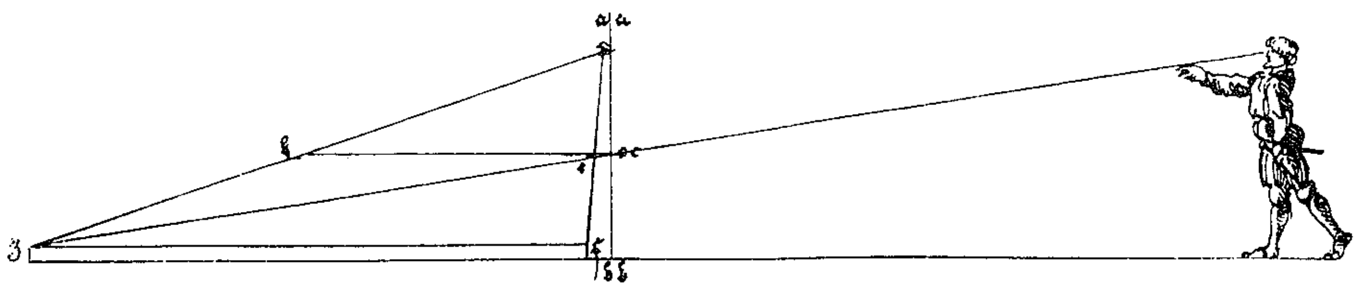


fig. 3 bis



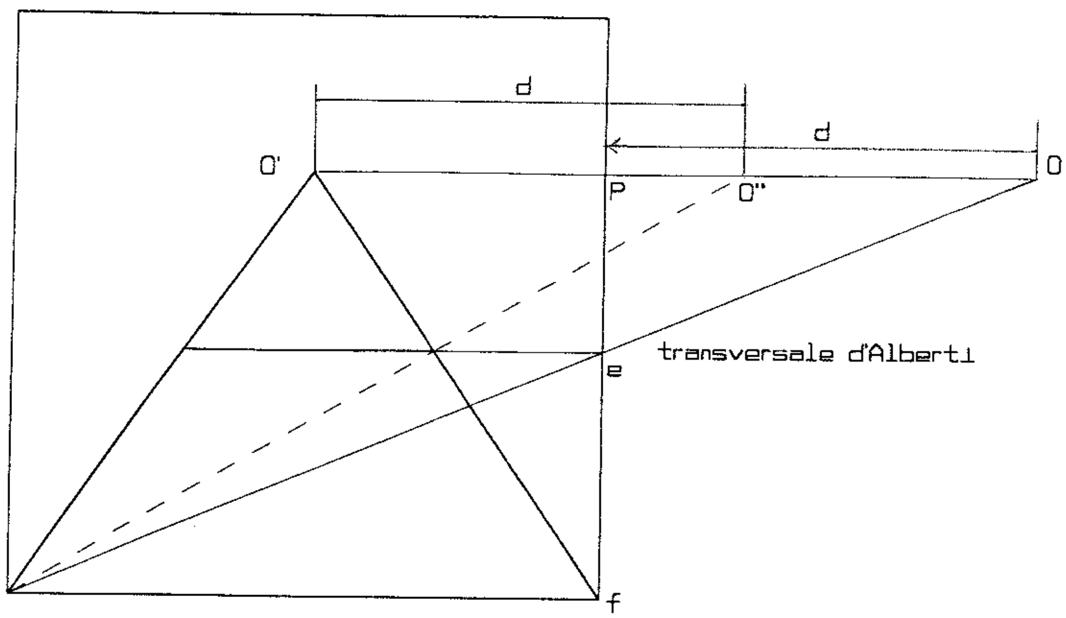
Une deuxième méthode, que Dürer appelle "voie plus courte", est erronée et semble mélanger deux méthodes, celle d'Alberti et celle de Viator. Le texte et la figure ne se correspondent pas, ce qui rend toute interprétation hasardeuse. Dürer appelle "oeil proche", le point O que nous nommerions point de fuite principal. Soit O' l'oeil du peintre, f le point du carré tracé sur le sol, qui se trouve ici sur le bord du tableau (ce qui n'est pas tout à fait le cas chez Dürer). Selon la méthode d'Alberti, si PO' est la distance de l'oeil du peintre au tableau, la première transversale du carrelage est la parallèle à la ligne de terre menée par e. Mais chez Dürer, la verticale de f et la verticale menée par l'oeil proche O sont pratiquement confondues. Sa méthode n'est correcte que lorsque les points O et P coïncident effectivement. En pratique, Dürer construit d'ailleurs souvent souvent ses gravures en choisissant un point de fuite principal ou oeil proche sur le bord du tableau. Tout se passe comme s'il avait raccourci un carré une fois pour toutes pour l'appliquer à ses gravures à l'instar d'un patron.

figure 4a



32.

fig. 4b



Lorsque le point O'', appelé tiers-point par Viator, vérifie OO'' = PO', la construction de Viator fournit la même transversale que celle d'Alberti.

Au terme de son travail de traduction et d'étude critique du traité de Dürer, Jeanne Peiffer défend la thèse que Dürer, en plus d'avoir été un peintre et un graveur d'exception, que ses contemporains honoraient du titre de "second Apelle", en référence au grand peintre de l'Antiquité, a été aussi un véritable géomètre. Il a su rassembler des savoirs dispersés et hétéroclites provenant des ateliers, des géométries pratiques du moyen-âge, des textes anciens, et des traités italiens. Parfois, il a su les étendre, innover et obtenir des résultats originaux, notamment sur certaines courbes non constructibles à la règle et au compas. Si les contemporains de Dürer célébraient surtout ses travaux de graveur et de peintre, des mathématiciens comme Clavius, Galilée et Képler ont lu les traités de Dürer (dans la traduction latine de Camerarius) et l'ont cité, mais c'est surtout Chasles qui a reconnu en Dürer le géomètre et l'a mis sur le même pied que Léonard de Vinci. Pour Dürer lui-même, la géométrie, exerçant l'oeil et la main, était avant tout une propédeutique à la peinture.

Michèle Grégoire

Comité de rédaction:

Courrier à adresser à : Groupe M: A.T.H.
IREM de l'université Paris VII
Tour 55-56 3ème étage
75005 PARIS

Pour échanger expériences et réflexions à propos de

l'histoire et l'enseignement des mathématiques

M.:	*Mathématiques*
A.	*Approche par les*
T.	*Textes*
H.	*Historiques*

SOMMAIRE

En vente au prix de 5,00 Euros

Editeur : IREM
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Dépôt légal : Janvier 1995
ISBN : 2-86612-090-6
IREM Université Paris VII Denis Diderot
Case 7018
2, place Jussieu 75 251 Paris Cedex 05
Tel : 01 44 27 53 83