UNIVERSITÉ DE ROUEN

irem de Rouen

DES FONCTIONS

Brochure réalisée par M. Michel CHEVALLIER et M. Jean-Luc DE SEEGNER

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Rouen,
Av. de Broglie, B.P. 138, 76821 Mont-Saint-Aignan
Tél : 02 35 14 61 40/41 Fax : 02 35 14 00 49
http://irem.univ-rouen.fr/

LA MAGIE

DE

L'IMAGE.

Les images des fonctions et les fonctions des images.

SOMMAIRE

Introduction :

L'informatique joue aujourd'hui un rôle important dans la pratique pédagogique de l'enseignant : cette affirmation n'est plus à démontrer ; le dynamique génère des images mentales différentes du statique qui s'ajoutent voire interfèrent entre elles[1]… Mais sont-elles toujours pertinentes ? Dans certaines situations, ne conduisent-elles pas à des interprétations de la part des élèves, différentes voire contradictoires de celles imaginées par l'enseignant qui utilise cet outil ? Nous ne devons pas pour autant y renoncer. Il est donc nécessaire d'avoir une réflexion approfondie pour utiliser l'informatique au mieux en classe, c'est-à-dire que cet outil doit générer, chez les élèves, les images mentales voulues par l'enseignant. Mais, on observe un décalage entre les attentes de l'enseignant par rapport à l'efficience de l'outil en classe et son réel effet sur l'apprentissage des élèves.

Une question importante se pose. Pour une situation mathématique donnée où l'informatique peut être utilisée avec pertinence, peut-on optimiser le ou les fichiers réalisés en termes d'images mentales générées, au sens défini ci-dessus ? La réponse est certainement affirmative mais comment peut-on y parvenir ? Y a-t-il certains principes à appliquer ? N'y a-t-il pas des limites ?

Le sous-titre met en lumière la difficulté de rendre l'un des sujets premier par rapport à l'autre. Nous souhaitons nous intéresser aux images produites en classe principalement lors de l'utilisation des TUIC[2] par les enseignants eux-mêmes : nous nous sommes particulièrement intéressés à la géométrie dynamique. Cependant certains propos seront directement liés à l'étude du concept de fonction.

Nous allons utiliser comme fil conducteur de cette brochure une situation assez classique de troisième ou de seconde issue de la géométrie plane.

Dans un premier temps, nous présenterons l'activité telle qu'elle est généralement pratiquée en classe avec ou sans utilisation des TUIC. Nous proposerons différents fichiers informatiques qui accompagnent souvent le travail. Une première analyse permettra de faire évoluer la consigne, la place des TUIC et leur utilisation.

Malgré les améliorations apportées, l'expérience montre que les difficultés des élèves pour accéder au concept persistent.

Dans un second temps, nous proposerons des éléments théoriques liés d'une part au concept lui-même et d'autre part aux images produites par les TUIC.

Dans un troisième temps, nous mettrons en œuvre ces principes pour élaborer une activité de classe expérimentée en troisième et en seconde. Les fichiers réalisés pourront servir de base à la construction d'autres fichiers dans le cadre de situations variées.

---

[1] Marc Roux, « Les figures : papier ou écran ? », APMEP BV n° 484 septembre-octobre 2009 pages 592-594.

[2] Techniques Usuelles d'Information et de Communication.

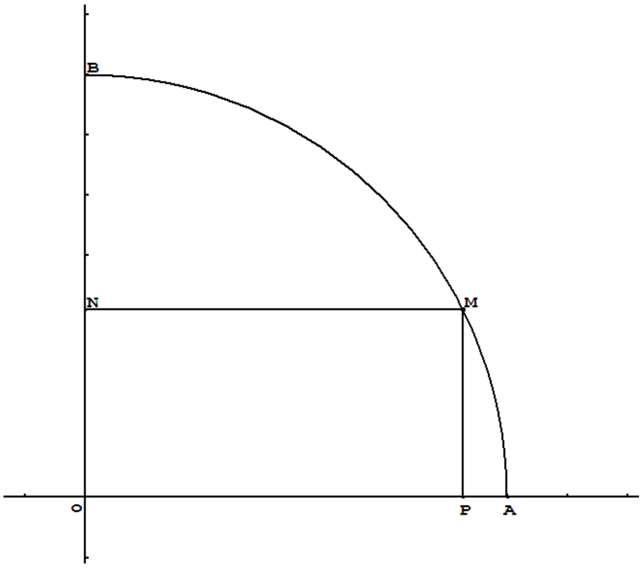
Enfin, nous évoquerons l'autre utilisation des TUIC en classe à savoir la manipulation par les élèves. Nous amorcerons également une réflexion didactique sur l'utilisation du tableur comparable à celle menée sur les logiciels de géométrie dynamique.

Une première lecture de cette brochure peut être faite sans prendre connaissance de certaines annexes secondaires pour la compréhension de l'ensemble identifiées par le symbole🕑. Certains mots sont suivis d'un astérisque (*) qui renvoie au glossaire dans lequel le lecteur trouvera une définition.

I Présentation…

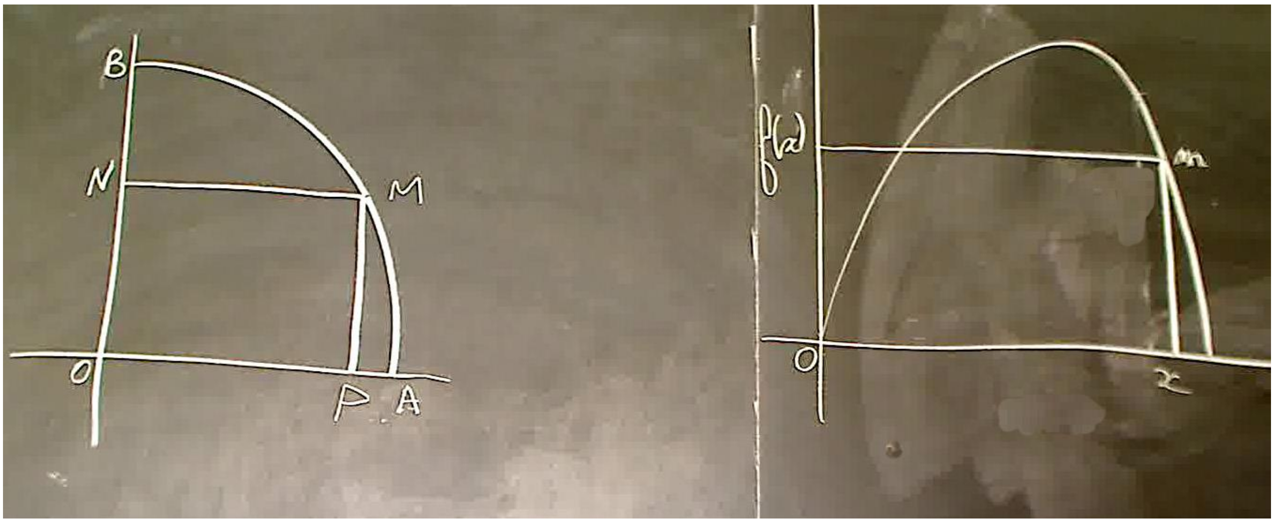
1. Le problème.

On considère un quart de cercle de centre O, de rayon 7 cm et d'extrémités A et B. Un point M est mobile sur cet arc. N et P sont les projetés orthogonaux respectifs du point M sur [OB] et [OA]. Il s'agit au cours de cette activité d'étudier les variations de l'aire du rectangle ONMP suivant la position du point M, de déterminer la position pour laquelle l'aire est maximale et de calculer ce maximum. On pose ON = x et f(x) = aire du rectangle.



2. Les premières questions.

La situation conduit à réaliser au tableau l'image suivante :



Après une observation rapide, on s'aperçoit que la position de ON verticalement à gauche fait obstacle à la position de x à droite. Cette difficulté relève de l'énoncé proposé …

Modifions l'énoncé :

On considère un quart de cercle de centre O, de rayon 7 cm et d'extrémités A et B. Un point M est mobile sur cet arc. N et P sont les projetés orthogonaux respectifs du point M sur [OA] et [OB]. Il s'agit au cours de cette activité d'étudier les variations de l'aire du rectangle ONMP suivant la position du point M, de déterminer la position pour laquelle l'aire est maximale et de calculer ce maximum. On pose ON = x et f(x) = aire du rectangle.

Cependant d'autres choses vont gêner l'élève. Tout se ressemble sur la figure : il y a deux repères, deux rectangles, deux courbes (quart de cercle et représentation graphique), deux points « O », … La proximité des deux objets visuels ainsi proposés ne permet pas aux élèves de prendre conscience de la nature différente des objets mathématiques représentés. Cette confusion se trouve également entretenue par l'absence du lien mathématique permettant d'obtenir, à partir du dessin géométrique, l'image située à droite.

Enfin, le discours souvent associé à la présentation de cette image peut également engendrer certaines difficultés : le professeur parle généralement de points de la courbe mais l'élève voit un trait et un seul point m.

Les élèves se trouvent ici confrontés à deux objets visuels appartenant à des cadres mathématiques différents (cadre géométrique, cadre de la représentation graphique) et qui relèvent donc d'une analyse perceptive différente. Cependant, ils sont habitués à fréquenter régulièrement les dessins géométriques depuis les classes primaires et n'ont rencontré que peu de représentations graphiques pendant leur scolarité. Ils décodent donc de la même façon les deux images perçues : deux rectangles dont un sommet est situé sur une courbe et les trois autres sur les axes d'un repère.

Pour aider les élèves à discriminer les images matérielles, il est indispensable d'agir suivant les trois modalités : spatialité, texture et chromatisme comme le soulignent les auteurs du *Traité du signe visuel*[3], le groupe μ.

De plus, la présence ou non de certains indicateurs intra-figuraux doit leur permettre d'associer plus facilement l'image perçue avec l'objet mathématique représenté (figure géométrique ou représentation graphique).

Pour cela, on peut :

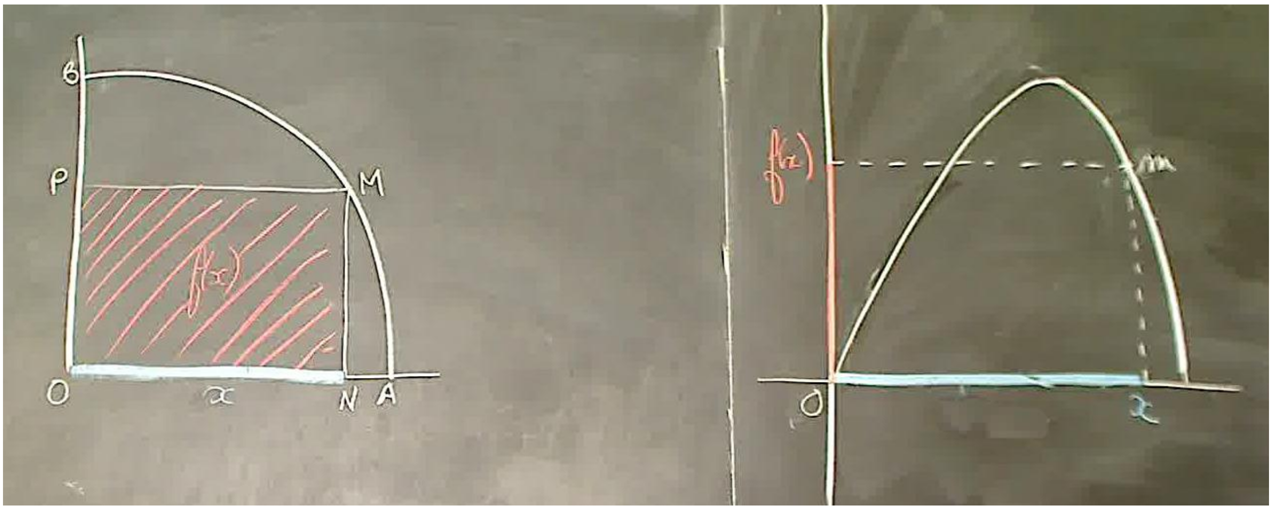
- supprimer le repère inutile dans l'image de gauche ;

- modifier le style de certains tracés en représentant en traits interrompus les segments permettant de repérer les coordonnées du point m.

Au-delà de cette reconnaissance du cadre, les élèves doivent également percevoir les liens qui existent entre ces deux images. L'enseignant peut alors jouer sur la position des éléments et la couleur. Le segment [ON] et la représentation graphique de la mesure de sa longueur sont placés horizontalement. Les objets géométriques (segment [ON] et surface rectangulaire ONMP) sont représentés avec les mêmes couleurs que les représentations graphiques (en abscisses et ordonnées) de leurs mesures de grandeurs et les notations (x et f(x)).

[3] Groupe μ, *traité du signe visuel. Pour une rhétorique de l'image*, Paris, Éd. du Seuil, 1992.

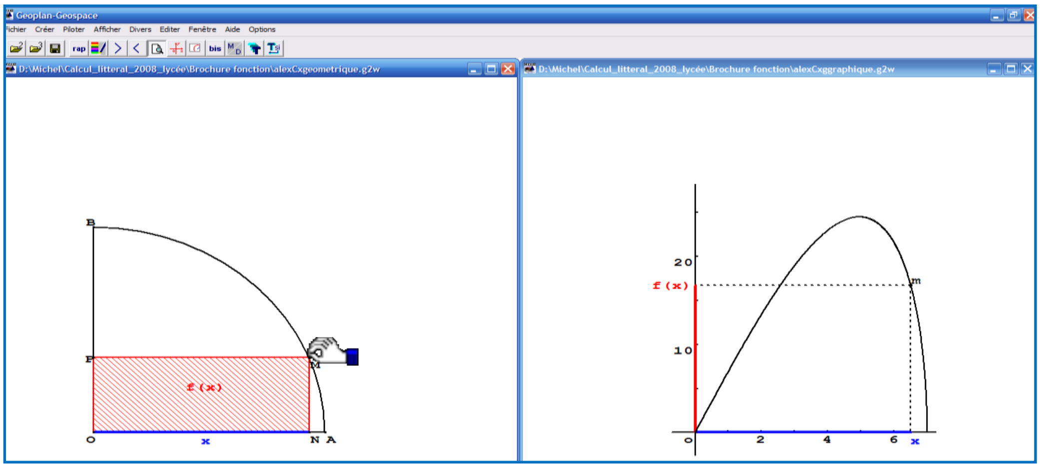
On obtient ainsi l'image statique suivante :



Les difficultés des élèves restent importantes : tout est immobile, l'élève doit imaginer que certaines grandeurs sont variables, que ces variables sont parfois dépendantes l'une de l'autre ; il doit aussi imaginer l'évolution du phénomène voire la vitesse d'évolution (dérivée) … L'objet visuel proposé ne permet pas de se créer une image pertinente du caractère fonctionnel de la situation : il est évident que l'image dynamique a son rôle à jouer pour amener ce concept de variable qui ne peut prendre sens que dans le mouvement. Les logiciels de géométrie dynamique permettent d'animer le point M et de visualiser les variations de l'aire du rectangle en fonction de la longueur variable.

Il est à ce propos très important de remarquer que, dans l'image statique proposée précédemment, le dessin géométrique de gauche représente une instance de la figure géométrique tandis que, dans la représentation graphique, la courbe correspond à l'ensemble des points m, c'est-à-dire à l'ensemble des dessins associés à la figure.

Avec le logiciel Geoplan-Geospace, par exemple, et l'outil importation permettant de lier deux fichiers avec des variables communes, l'expert peut se créer un objet visuel conforme à sa représentation mentale du concept de fonction liée à son imaginaire et à son vécu dont voici une copie d'écran :



L'expert voudrait alors que l'élève se crée automatiquement les mêmes représentations mentales concrètes* du concept que lui. L'image précédente peut en effet convenir à un enseignant en fonction de son degré d'expertise dans l'utilisation du logiciel.

La pratique montre cependant que ce n'est pas aussi simple et que l'objet visuel proposé ici peut induire des images matérielles* inadaptées à la création des représentations mentales concrètes du concept voire même y faire obstacle.

En effet, certaines difficultés déjà repérées avec l'image statique perdurent :

- un seul registre*, celui de l'image, mais deux cadres différents (géométrique et représentation graphique) ;

- une même forme fermée privilégiée par l'œil, un rectangle qui doit être interprété différemment (figure géométrique d'une part, aide à la lecture des cordonnées d'un point d'autre part) ;

- une même grandeur représentée de deux façons différentes. La grandeur aire, dont on étudie les variations, est représentée par une surface dans le cadre géométrique et par un segment dans le cadre graphique. En réalité, le lien qui existe entre ces deux grandeurs (aire et longueur) est le nombre, ordonnée du point de la courbe.

D'autres difficultés, liées au mouvement, viennent également perturber le décodage visuel :

- le point sur lequel on agit est le point M mobile sur le quart de cercle alors que l'on souhaite étudier les variations de l'aire en fonction de la longueur ON : c'est donc sur le point N que l'on devrait intervenir ;

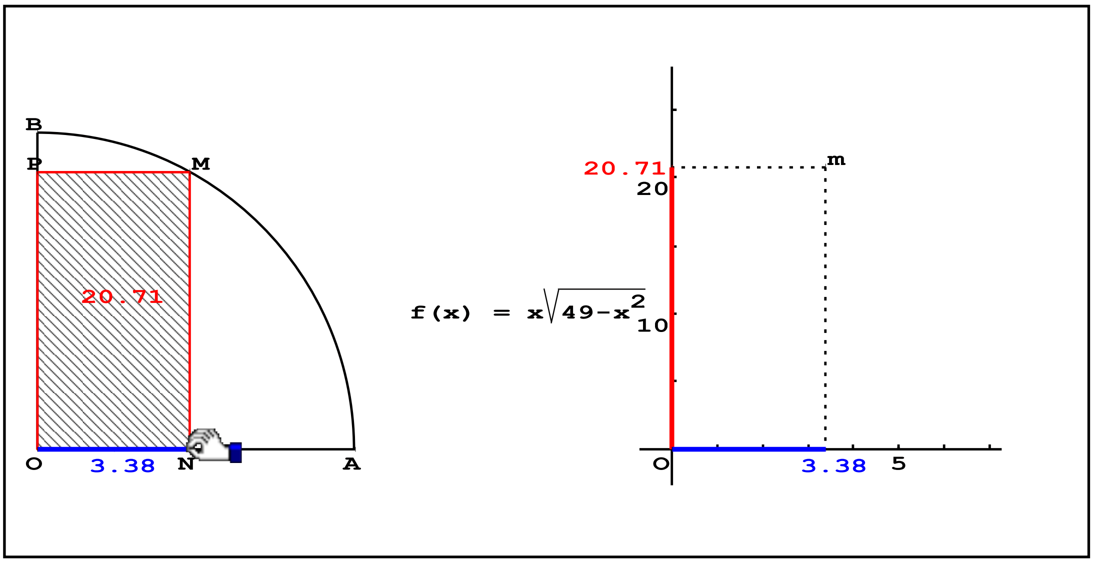
- les deux points animés attirent l'œil mais doivent être perçus et analysés différemment par l'élève : point M d'une figure géométrique à gauche, point m d'une courbe représentant une fonction à droite ;

- la fonction importation du logiciel relève d'un langage et d'un fonctionnement qui sont techniques : « … l'usage de l'ordinateur conduit à ce que l'on peut appeler une expérimentation décalée. En effet, on ne se heurte pas à la matière, l'objet d'expérimentation étant caché sous le logiciel… »[4]. Cette utilisation ne conduit pas obligatoirement l'élève à faire le lien attendu entre situation géométrique et représentation graphique. En effet, le fait d'utiliser ici deux fichiers séparés produit deux objets visuels séparés qui risquent d'être perçus comme indépendants l'un de l'autre.

[4] Rudolf Bkouche, « Une imbécillité pédagogique », Repères IREM n° 69 octobre 2007 page 49-52.

3. Les améliorations.

Une nouvelle amélioration peut donc consister à placer les deux cadres (géométrique et graphique) dans la même fenêtre et obtenir ainsi une image dynamique semblable à la première image fixe proposée. D'autre part, pour construire l'image du concept de variable et renforcer le lien entre les deux cadres, il semble préférable d'afficher les valeurs numériques des mesures de longueur et d'aire plutôt que d'indiquer les étiquettes x et f(x) qui demeurent figées lors de l'animation : on parle de variables et on montre des notations qui ne changent pas. Enfin, c'est le point N qui doit être mobile sur le segment [OA] : il convient d'adapter l'énoncé en conséquence.



4. Et pourtant ?

Cette utilisation de l'outil informatique semble convaincante pour l'enseignant : elle est compatible avec sa perception et sa connaissance du concept ; mais souvent elle ne permet toujours pas à l'élève de se créer les bonnes représentations mentales du concept de fonction.

Pourquoi ?

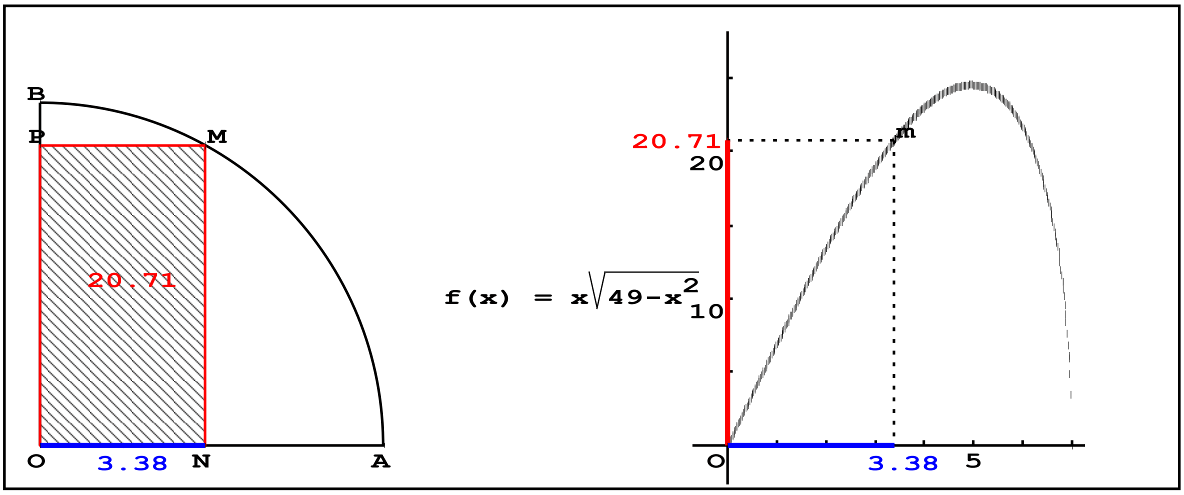
Dans cet exemple, les éléments communs aux cadres géométrique et graphique sont identifiables par l'élève. 3,38 et 20,71 sont identiques dans les deux fenêtres mais 20,71 est une mesure d'aire dans l'une et se représente par un segment dans l'autre ; on peut s'interroger alors sur le 3,38 : représente-il la même chose ? On voit deux rectangles à base bleue, apparemment semblables qui sont de natures différentes … Les difficultés persistent même lorsqu'ils apparaissent dans la même fenêtre.

Lorsque l'on passe à la phase dynamique, la saisie du point N avec l'apparition de la petite main focalise l'attention à gauche pendant que le phénomène visuel qui intéresse le professeur se situe à droite de l'écran …

Le déplacement du point N ne se fait que de gauche à droite et de droite à gauche : les valeurs de ON sont donc obligatoirement rangées et régulières. L'élève est placé dans une situation particulière qui est celle recherchée par le professeur ; elle perd donc sa particularité pour l'élève puisque c'est la seule situation qui lui est présentée alors qu'il ne connaît pas le concept étudié …

Ce déplacement ordonné et régulier du point m risque d'amener l'élève à focaliser son attention sur les caractéristiques du mouvement et non sur les différentes positions occupées par le point, les valeurs prises par x et l'aire. Même lorsque l'objet d'étude est le sens de la variation, c'est la comparaison entre les variations de x et celles de l'aire qui sont à étudier et non les conditions du déplacement.

D'autre part, un balayage gauche-droite et droite-gauche sur [OA] peut dessiner une courbe en apparence le plus souvent continue. Que représente-elle pour l'élève ? Des points reliés entre eux, un trait ? Autant d'interprétations qui ne sont pas très explicites…



II Apport de quelques éléments théoriques…

1. Eléments liés à l'image et aux TUIC.

Les difficultés sont de deux types :

- la rupture visuelle entre la situation géométrique et la situation graphique laisse un vide et donc une large place à l'interprétation et à l'implicite. De plus, aucun aller retour n'est visible entre les deux situations ;

- les spécificités des modalités dynamiques utilisées favorisent la régularité ordonnée et le continu qui donnent des interprétations diverses (banalisation des particularités de la situation, amalgame courbe-ligne-points) et qui ne sont pas celles voulues par l'enseignant.

- Les ruptures visuelles.

Comme le souligne Daniel Peraya[5], le décodage visuel s'appuie sur trois pôles :

- le signifiant, ensemble des stimuli visuels (liés à la texture, la forme, les couleurs) ;

- le référent, membre d'une classe (par exemple, une représentation graphique particulière) ;

- le type, classe conceptuelle abstraite (le concept fonction).

Mais pour accéder au référent et au type, l'élève doit mobiliser sa mémoire et avoir recours à un répertoire de représentations. En 3ème et 2nde, les élèves ne disposent pas tous de ce répertoire et l'image dynamique proposée par l'enseignant « ne leur parle pas » ou plutôt même parfois « leur dit » des choses qui ne sont pas celles que l'expert veut transmettre.

D'après la Gestalt-théorie[6], « le monde, le processus perceptif et les processus neurophysiologiques sont isomorphes, c'est-à-dire structurés de la même façon. La perception ne peut pas être isolée mais doit prendre sens ».

Gibson[7] s'appuie sur la théorie Gestaltiste pour développer le concept d'affordance* qui renvoie à la façon dont les propriétés perceptives des objets nous indiquent comment utiliser ces objets (comment on s'en sert ? À quoi ça sert ?).

En utilisant l'image dynamique telle que proposée précédemment, nous risquons de mettre les élèves dans la même situation que vous, lecteur, devant cette image ou plutôt cet objet visuel :

[5] Daniel Peraya, *Vers une théorie des paratextes : images mentales et images matérielles*, Recherches en communication, n° 4, Département de communication de l'Université catholique de Louvain, 1995.

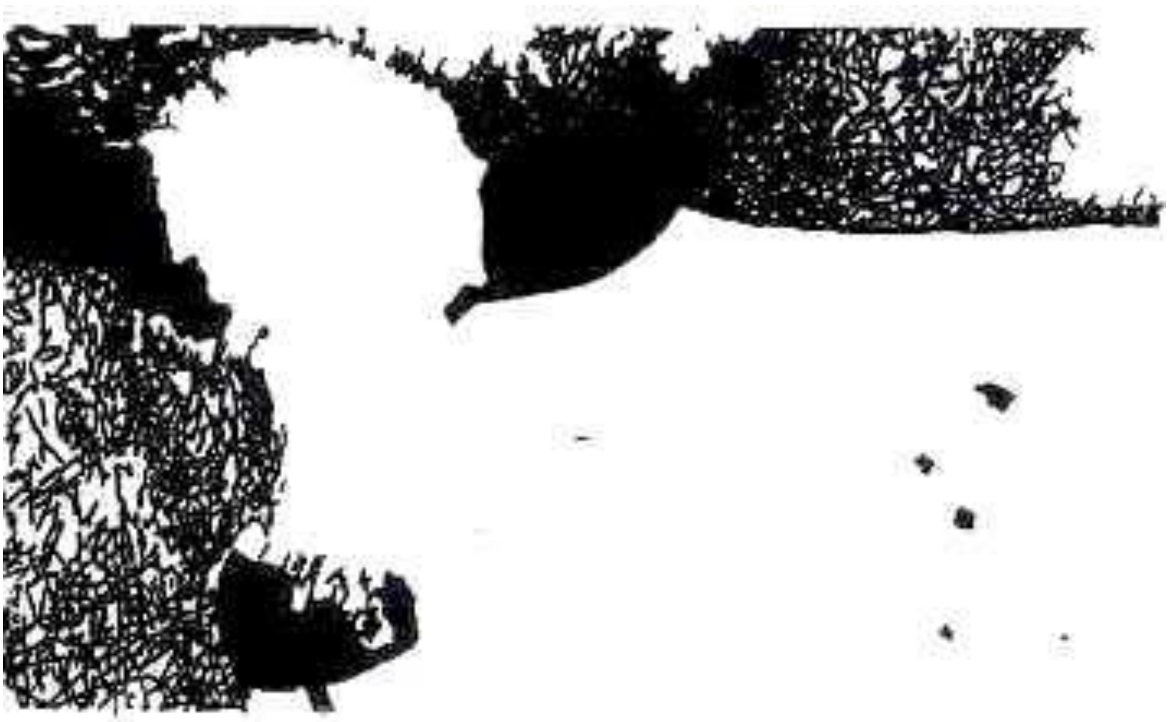
[6] Le mouvement Gestalt est né en Allemagne au XIXe siècle et étudie la psychologie de la forme.

[7] James Jerome Gibson, *The Ecological Approach to Visual Perception,* Boston : Houghton Millin, 1979

Que voyez-vous ? Quelle image matérielle obtenez-vous ? Aucune ? Une seule ? L'ensemble des stimuli visuels est identique pour tout le monde et pourtant l'image matérielle qui se forme éventuellement peut être différente : une jeune fille de trois quarts avec un chapeau à plume ou bien une vieille dame de profil avec un foulard blanc sur la tête.

Un seul objet visuel donne naissance ici à deux images matérielles qui ne cohabitent pas simultanément : le cerveau peut passer de l'une à l'autre mais ne peut pas « voir » les deux en même temps. Cependant l'une des deux images matérielles est prégnante par rapport à l'autre : cela dépend de l'individu… Et passer de l'une à l'autre demande un effort mental conséquent.

Voici un autre objet visuel proposé à un grand nombre d'adultes et d'élèves.



Certains n'y voient qu'un ensemble informe de taches, d'autres perçoivent un homme ou une femme couché sur un lit, d'autres encore imaginent un arbre ou un buisson... Et vous ! Que voyez-vous ? Quelle image matérielle obtenez-vous ?

Nous vous invitons à procéder à une petite expérience : consultez à votre rythme et l'une après l'autre dans cet ordre, les annexes numérotées de 1 à 5 avant de lire la suite…

Dans l'annexe 1, très peu de personnes perçoivent l'avant d'une vache alors que dans l'annexe 2, pratiquement tout le monde voit l'animal. L'objet visuel proposé dans cette annexe a été élaboré en extrayant une partie de l'illustration précédente et en ajoutant quelques lignes et de la couleur pour aider à la perception et à la reconnaissance au sens de Peraya.

Dans l'annexe 3, l'objet proposé, identique à celui de l'annexe 1 n'est toujours pas identifié par la majorité des personnes. Peu de personnes ont fait le lien entre les annexes 2 et 3. On peut attribuer ce phénomène à une forme de rupture visuelle.

Dans l'annexe 4, des lignes et des couleurs ont été ajoutées à l'objet initial mais aucun élément n'a été ici supprimé. L'animal est ici très majoritairement identifié.

Dans l'annexe 5, l'objet proposé est identique à celui des annexes 1 et 3 : l'animal est perçu et reconnu par la quasi-totalité des personnes.

C'est l'objet proposé en annexe 4 qui permet de faire le lien entre l'objet initial et l'image matérielle de la vache : il n'y a pas de rupture visuelle. Cependant, l'image matérielle ne peut se créer que parce que l'individu possède déjà des représentations mentales concrètes de l'animal (odeur, beuglement, photographie, écriture du mot…) stockées dans sa mémoire à long terme.

Les objets dans les annexes 1, 3 et 5 ne sont généralement pas identifiés comme des objets identiques. En effet, les objets 1 et 3 ne donnent pas naissance à une image matérielle qui pourrait être stockée par l'individu et qui lui permettrait de reconnaître l'objet. De plus, l'annexe intercalée à chaque fois provoque une forme de rupture visuelle.

Nous avons également mené l'expérience en ne montrant que l'annexe 1 accompagnée d'un commentaire oral précisant la nature du sujet représenté. Malgré cette explication, bon nombre de personnes ne parviennent pas à voir la vache. Pour que ce fouillis de points soit saisi comme un ensemble faisant sens, il faut mobiliser sa mémoire pour associer le perçu à une image stockée dans sa mémoire. Une fois que cet ensemble de points a été vu, l'image s'impose et le fouillis disparaît définitivement. La prégnance de l'image matérielle de la vache empêche également de retrouver une image matérielle perçue initialement (femme allongée, buisson…).

La construction de l'image matérielle générée par l'observation d'un objet visuel relève à la fois de la perception de l'individu mais aussi de ses représentations mentales concrètes existantes. Cette construction est favorisée par l'expérience perceptive liée à l'environnement : le fait d'avoir mentionné dans cette brochure certaines interprétations erronées de l'objet visuel « vache » vous a peut-être influencé lors de l'expérience proposée. L'individu est alors conduit à chercher des éléments qui confortent sa perception et à nier ceux qui la contredisent : dans l'objet visuel « jeune fille/vieille dame », l'une des images est mieux perçue que l'autre et le passage de l'une à l'autre nécessite un véritable effort mental.

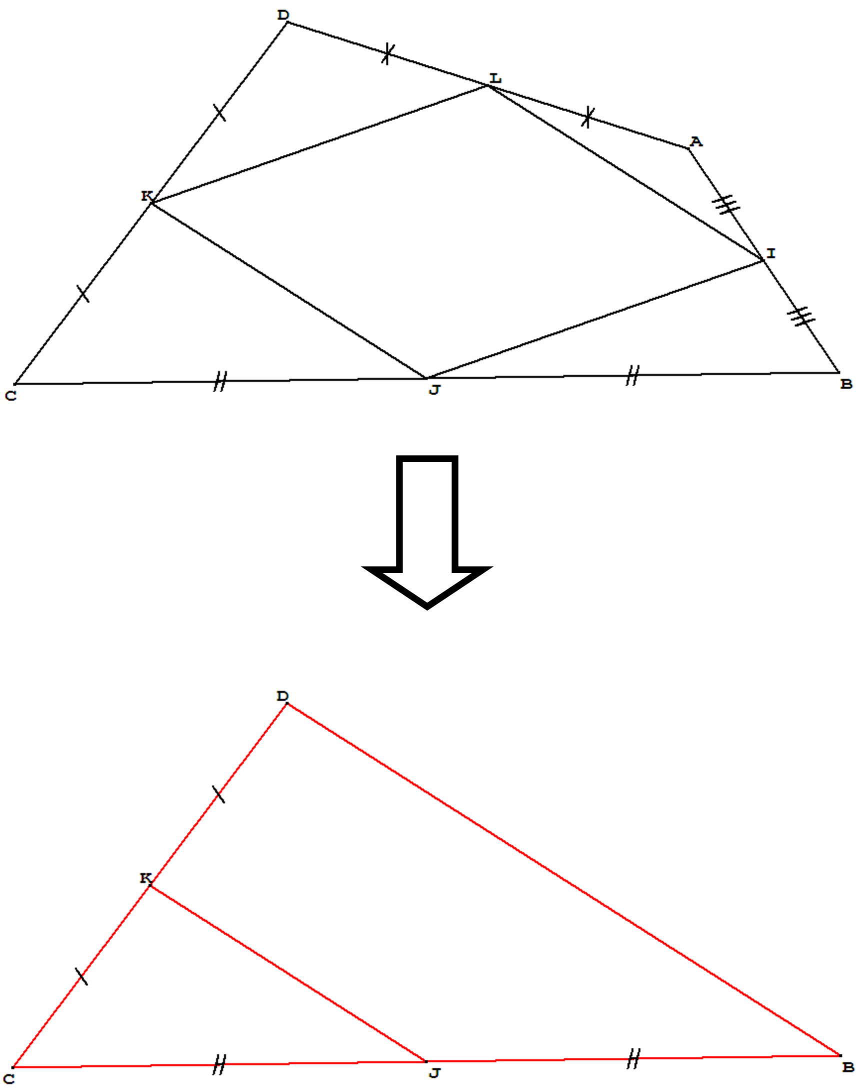
Ces expériences mettent en évidence différents principes de base :

- on ne peut pas voir ce que l'on n'a pas déjà vu ;

- l'appréhension perceptive* prévaut largement sur l'appréhension discursive*[8], pourtant indispensable en géométrie ;

- on doit éviter les ruptures visuelles : lorsque l'on souhaite extraire une sous-figure en géométrie, il est important de conserver la figure complexe d'origine (en changeant éventuellement le style ou la couleur des traits).

Voici une extraction de figure sur le problème de Varignon réalisée avec géoplan et la commande de dessin en bloc pour « basculer » d'une figure à l'autre :

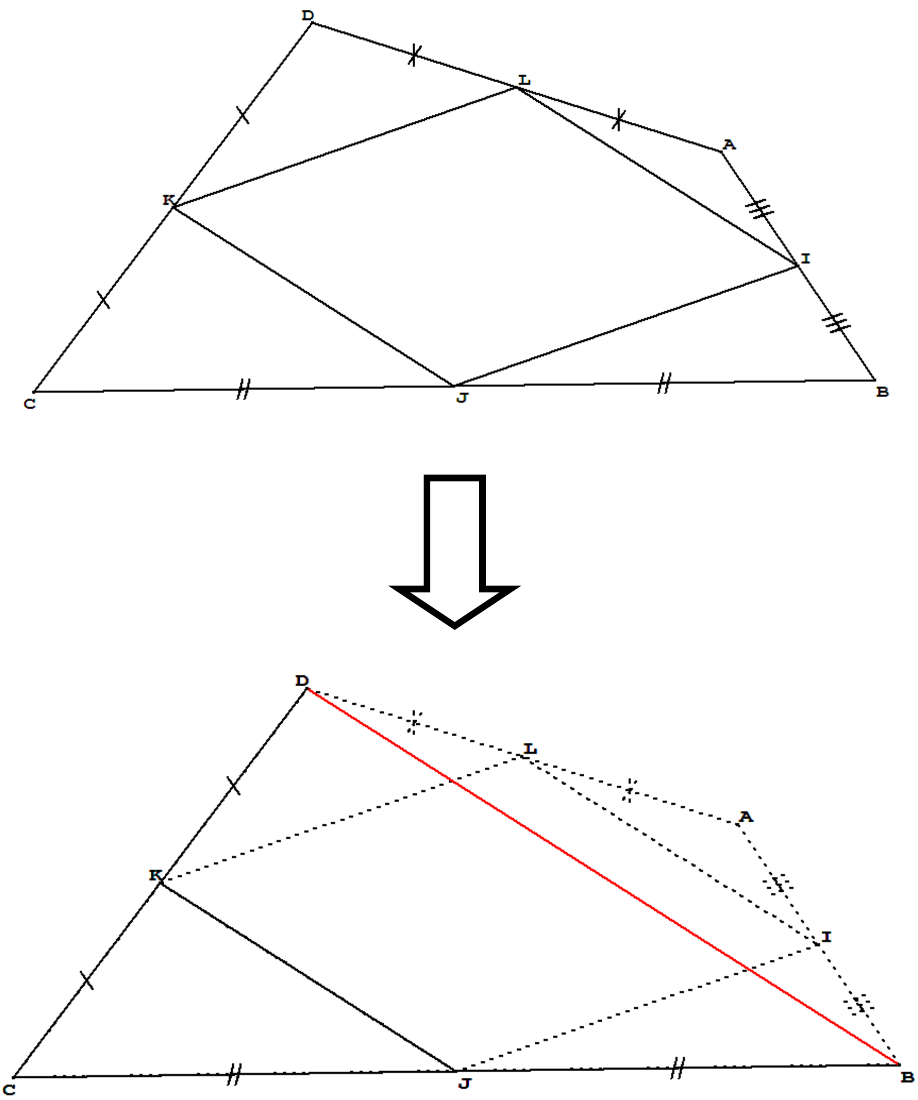


[8] Au sens de Duval

Les élèves perçoivent ici deux figures indépendantes alors que l’enseignant n’y voit qu’une sous-figure extraite de la figure initiale. Plusieurs raisons expliquent ce décalage de perception entre l’enseignant et ses élèves : le changement global de forme, le changement de couleur, des objets qui disparaissent et un autre qui apparaît (le segment [BD]). Néanmoins, le basculement répété de l’une à l’autre peut atténuer cette difficulté grâce à la persistance rétinienne.

Pour éviter cette rupture visuelle entre la figure initiale et la sous-figure souhaitée, il faut comme pour l’objet visuel « vache » proposé dans l’annexe 4, que les deux objets visuels soient présents ensemble mais avec des textures différentes (couleurs, styles de traits) pour atténuer ou renforcer la perception.

Voici par exemple, un objet visuel qui met en évidence la sous-figure déclenchante pour la démonstration :



Le basculement créé avec la commande de dessin en bloc permet de passer de la figure initiale à la sous-figure et de revenir à la figure initiale. Ce passage dynamique d’une figure à l’autre renforce le lien visuel.

Dans l'expérience précédente, la reconnaissance visuelle de la vache s'appuie principalement sur l'appréhension perceptive. Cette appréhension spontanée et automatique doit permettre de créer une image visuelle permettant l'identification du sujet proposé. Bien que toutes les personnes aient déjà vu une vache, une première vision de l'objet visuel ne permet pas de la distinguer. Par contre, après avoir observé l'image initiale modifiée par l'ajout de quelques contours et de la couleur, une nouvelle observation de l'objet visuel d'origine permet la création immédiate de l'image visuelle d'une vache.

Les résultats de ce test démontrent que cette appréhension perceptive doit être travaillée avec les élèves pour les familiariser avec les représentations des objets mathématiques abstraits.

Par exemple, à l'école élémentaire, les élèves apprennent d'abord à reconnaître et à décrire des figures planes et des solides. Ensuite ils doivent passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure.

Mais cette appréhension perceptive ne suffit pas pour accéder au message transmis par un dessin, représentant d'une figure. Au collège, les élèves doivent prendre de la distance par rapport à cette appréhension perceptive pour passer à une géométrie de traitement des figures : ils doivent ainsi arriver à une appréhension discursive des objets visuels proposés pour ne s'intéresser qu'aux informations données dans l'énoncé ou déduites et non à celles perçues.

De la même façon, dans certaines situations proposées pour travailler le concept de fonction, l'enseignant doit conduire les élèves à percevoir les objets visuels proposés, puis à donner sens aux différentes images perçues (et aux liens éventuels entre les différentes images visuelles proposées pour une même situation).

En dehors du champ des mathématiques, nous retrouvons cette démarche d'apprentissage pour se former au code de la route. Les différents panneaux de signalisation prennent sens à travers l'étude des formes, de la couleur et de l'objet visuel qu'ils contiennent puis du message transmis.

Que dire également de certains modes d'emploi proposés aux bricoleurs amateurs qui contiennent de plus en plus de paratextes*, voire même parfois ne sont composés que de dessins ?

Prenons deux exemples simples que nous avons rencontrés.

Ce premier exemple est issu du livret de montage d'une hotte aspirante vendue par une enseigne suédoise célèbre et friande de brochures ne contenant que des illustrations.

Face à cette illustration, nous sommes restés dans l'incapacité de donner sens au message transmis. Ce n'est qu'après avoir été confrontés à une difficulté majeure que nous avons pu l'interpréter. Il fallait comprendre :

« Attention, le tuyau d'évacuation n'est pas fourni avec l'appareil, vous devez l'acheter séparément ».

Quand on sait, la perception et l'analyse des idéogrammes deviennent évidentes …

Cette autre situation, toujours vécue par des « bricoleurs du dimanche », illustre bien notre propos.

Il provient d'un sachet d'accessoires fournis avec un store vénitien vendu pour des fenêtres de toit d'un non moins célèbre spécialiste du genre.

Les quatre vignettes proposées doivent être déchiffrées de la façon suivante :

« 1- Vous vous interrogez sur l'utilisation de ces accessoires ;

2- si les pièces existent déjà sur la fenêtre, vous jetez ces accessoires supplémentaires ;

3- s'il n'y a rien, vous les fixez à l'endroit indiqué ;

4- si d'autres pièces figurent à cet endroit alors vous les enlevez, les jetez et les remplacez par les accessoires fournis. »

Ici encore, ce n'est pas le mode d'emploi qui nous a permis de poser ce store mais c'est après avoir posé le store d'une façon pragmatique et sans comprendre le mode d'emploi que nous avons pu traduire les différentes étapes indiquées.

Les concepteurs de ces modes d'emploi maîtrisent parfaitement le message à transmettre et élaborent des objets visuels conformes à leurs connaissances, à leurs habitudes et à leur « langage visuel ». Aux bricoleurs de maîtriser le sujet pour qu'ils donnent sens aux illustrations proposées.

Nous sommes ici dans la même situation que l'expert qui maîtrise le concept de fonction et qui élabore des objets visuels conformes aux représentations mentales concrètes qu'il a du concept. Aux élèves donc, de maîtriser ce langage, ces représentations pour s'approprier le concept … mais au fait, ne sont-ils pas en classe avec un professeur, justement dans ce but ? Vient s'ajouter une autre difficulté en mathématiques : les pictogrammes des modes d'emploi sont dépositaires de messages concrets tandis que les objets visuels proposés en classe renvoient à des représentations concrètes de notions abstraites. Par exemple, la courbe présentée à l'écran par un trait symbolise la représentation graphique d'une fonction, ensemble de points qui sont le lien entre les antécédents et les images.

- Les modalités dynamiques des logiciels de géométrie dynamique :

Comme nous venons de le *« voir »,* appréhender un objet visuel statique peut ne pas aller de soi. La construction de l'image matérielle dépend de nombreux facteurs liés à la fois à la perception et au processus qui permet de donner sens à cette perception.

Mais qu'en est-il pour un objet visuel dynamique ?

En effet, longtemps emprisonnées dans un immobilisme qui les réduisait à n'être considérées que comme de « simples dessins », nos figures géométriques prennent maintenant vie avec les logiciels de géométrie dynamique. De même, nos formules algébriques s'animent avec l'utilisation des tableurs.

L'appréhension de ces nouveaux objets visuels nécessite de surmonter d'une part les mêmes difficultés que celles précédemment décrites et, d'autre part, des obstacles spécifiques liés au mouvement. Ces nouvelles difficultés sont dues :

- à l'outil informatique lui-même, à travers les choix techniques liés au développement du logiciel ;

- au mouvement lui-même qui focalise l'attention de l'observateur au détriment des autres éléments inanimés (voire même parfois au détriment d'autres objets dynamiques) ;

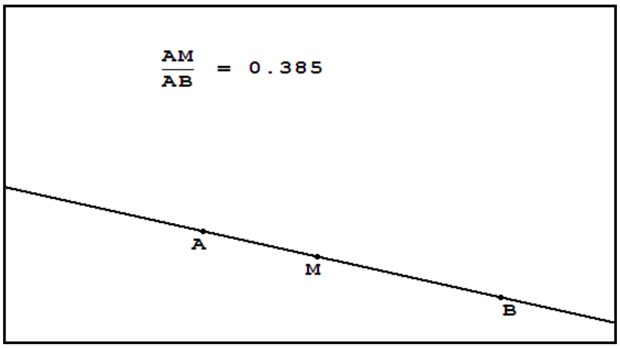
- à l'utilisation de cet outil à travers par exemple les modalités choisies pour animer l'objet visuel (*mémorisation ou non de différents dessins*, déplacement ordonné, régulier ou non, déplacement très lent, saccadé ou rapide proche du film, déplacement aléatoire…);

- au passage des objets dynamiques proposés en classe aux objets statiques auxquels les élèves demeurent encore souvent confrontés, et réciproquement.

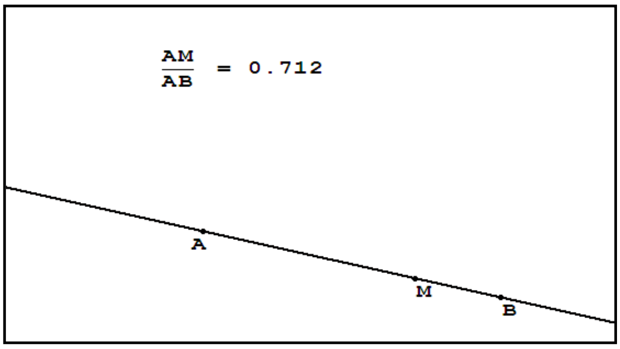
Pour éclairer ce propos, prenons par exemple différents fichiers utilisés pour illustrer la propriété de Thalès en 3ème.

Et pour commencer, menons une petite expérience avec Geoplan.

On place deux points A et B libres dans le plan ; on crée la droite (AB) et un point M libre sur cette droite. On affiche le rapport des longueurs $\frac{AM}{AB}$.

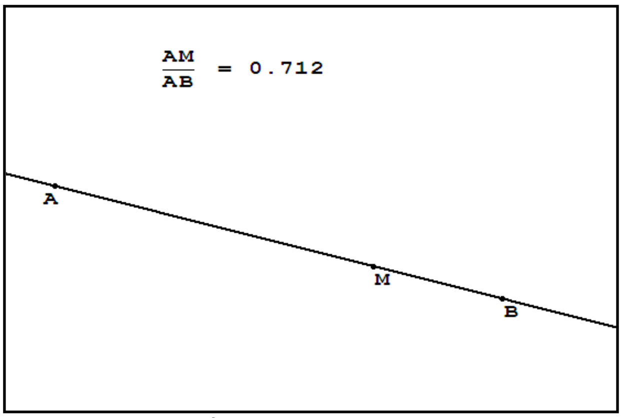


Situation initiale.

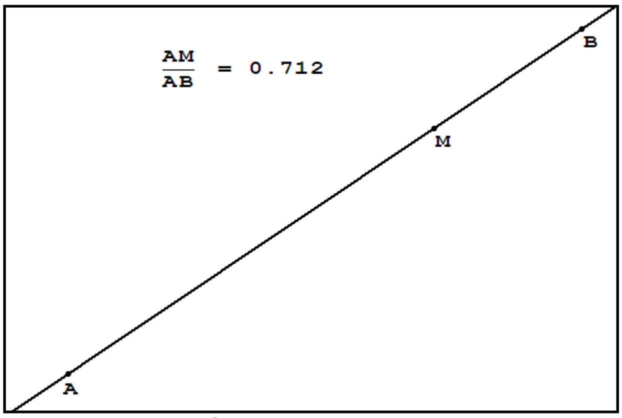


On déplace M sur (AB).

Lorsque l'on déplace le point M, le rapport change.



On déplace A dans le plan.

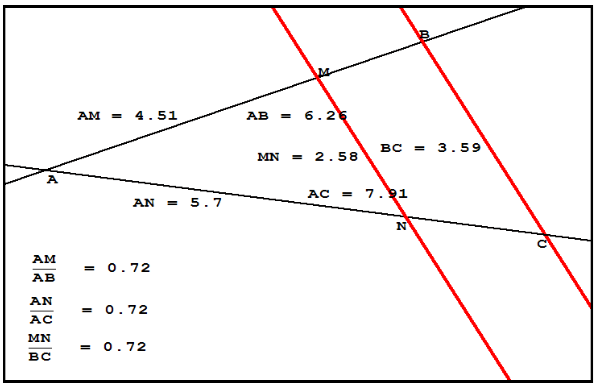


On déplace B dans le plan.

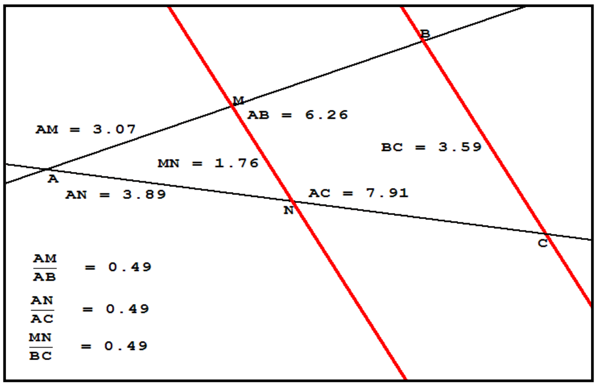
Mais on constate que lorsque l'on déplace le point A ou le point B, le point M se déplace (automatiquement) de façon à ce que le rapport $\frac{AM}{AB}$ reste constant. Le logiciel utilise la proportionnalité pour définir la position d'un point libre sur une droite.

Que se passe-t-il alors quand le logiciel est utilisé pour illustrer une situation de Thalès ?

Voici le fichier habituellement utilisé en situation de classe pour éclairer cette propriété : le point M est mobile sur la droite (AB) ; le point N est construit sur la droite (AC) pour que les droites (MN) et (BC) soient parallèles ;



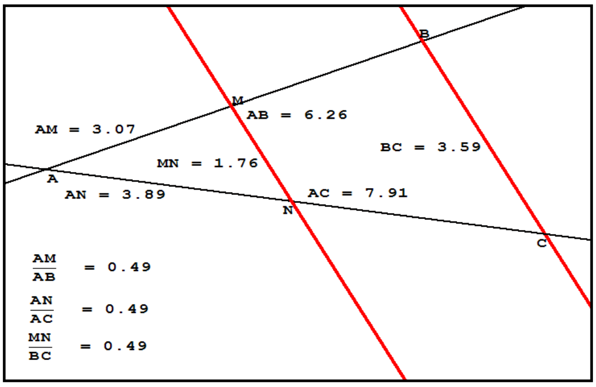
Situation initiale.



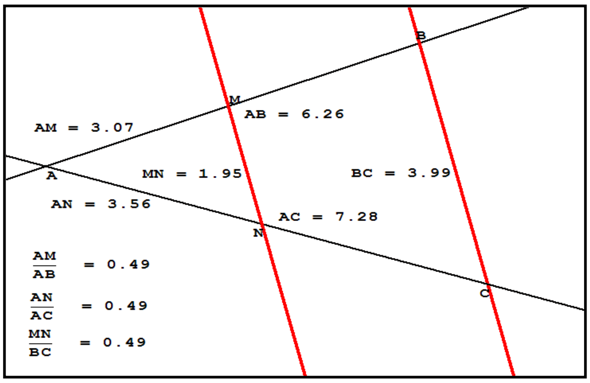
On déplace M sur (AB).

Lors du déplacement de M sur (AB), les longueurs des côtés du triangle AMN et les rapports de longueurs changent. Ces variations et le mouvement des points M et N attirent l'œil. L'élève observe naturellement ces modifications alors que l'enseignant souhaite que son attention se porte sur l'égalité des rapports.

On déplace maintenant le point C dans le plan.



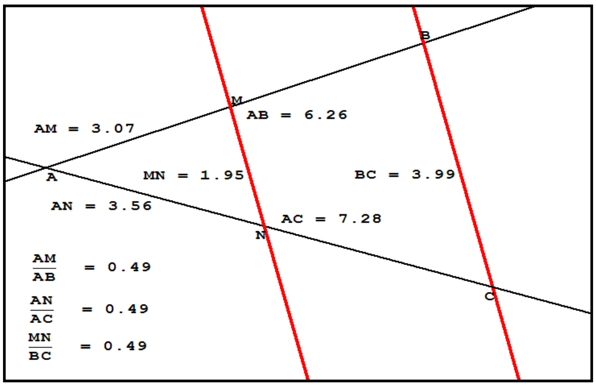
Situation initiale.



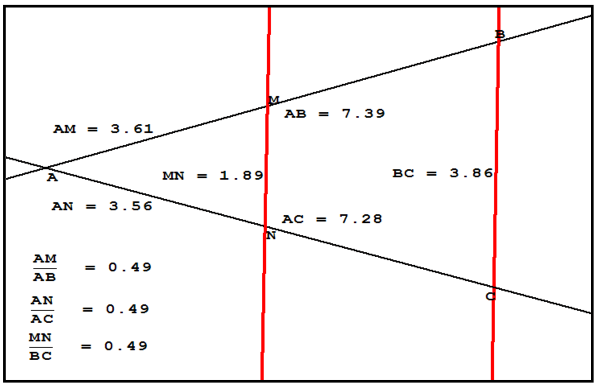
On déplace C dans le plan.

Seules, ici, quatre longueurs changent (MN, BC, AN, AC). Les rapports demeurent égaux et constants car les points A, M et B restent fixes.

On déplace maintenant le point B dans le plan.



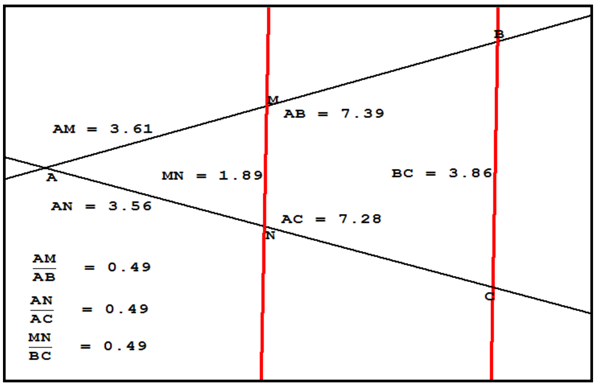
Situation initiale.



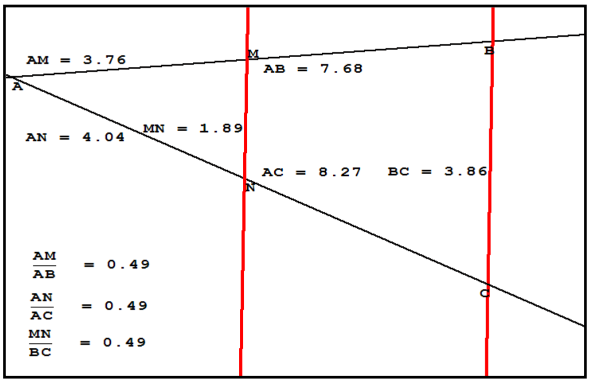
On déplace B dans le plan.

Ce sont maintenant les longueurs AM, AB, MN et BC qui varient. Les rapports restent une nouvelle fois égaux et constants. Cependant cette fixité des rapports s'explique ici par les choix des concepteurs du logiciel qui ont décidé de définir la position du point M, mobile sur (AB), par son abscisse sur cette droite graduée munie du repère (A, B). La conservation du rapport $\frac{AM}{AB}$ n'est due qu'au logiciel. Pourquoi le logiciel ne serait-il pas conçu pour que les trois rapports demeurent égaux en toutes circonstances ? Cette question pourrait être légitimement posée par les élèves ou, tout du moins, pourraient-ils inconsciemment penser qu'il en est ainsi et mettre donc hors champ d'appropriation, la propriété de Thalès visée ici.

Cette difficulté subsiste lorsque c'est le point A que l'on déplace dans le plan.



Situation initiale.



On déplace A dans le plan.

Le déplacement du point A provoque celui du point M afin de maintenir le rapport $\frac{AM}{AB}$ constant. Comment ne pas penser ici que le rapport $\frac{AN}{AC}$ reste fixe pour la même raison ? Fi alors de la propriété de Thalès !

Dans ces animations, les élèves sont confrontés à deux notions, l'égalité et la variabilité, qui s'opposent pour eux. En effet, l'égalité renvoie inconsciemment au statique tandis que la variabilité nécessite du dynamique.

Lors du déplacement du point M sur (AB), la variabilité des rapports prend le pas sur leur égalité. Ce n'est que lors d'un arrêt sur image que l'égalité reprend sa juste place. Pourquoi donc proposer un objet visuel dynamique alors que la présentation d'une succession d'objets visuels statiques serait plus judicieuse pour illustrer l'égalité de rapports ?

D'autre part, les rapports ne doivent pas rester fixes lorsque les points A ou B se déplacent[9]🕑.

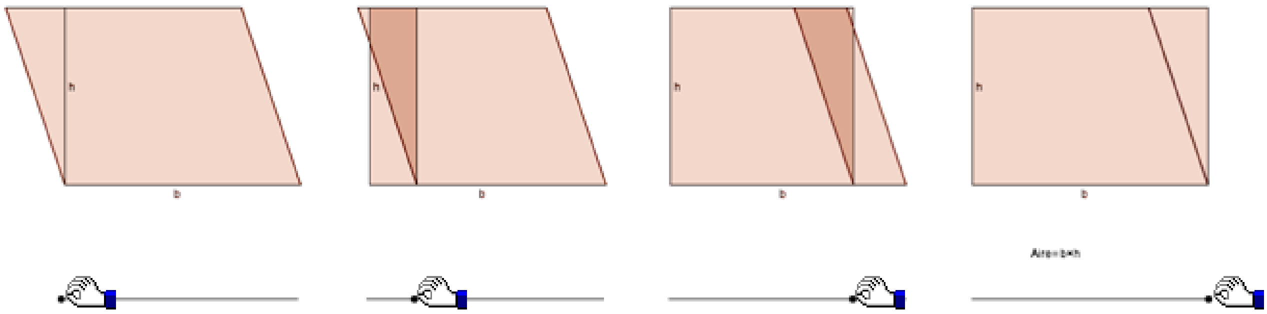
Lors de l'utilisation d'un fichier associant déplacements aléatoire et continu, il ne faut pas perdre de vue que ces modalités se complètent : initialement, on peut déplacer les points suivant des modalités aléatoires pour focaliser l'attention des élèves sur l'égalité des rapports puis lorsque cette égalité est dégagée, on peut envisager un déplacement en continu à la souris pour montrer la variabilité de ces rapports égaux. Cependant, le déplacement de C ne fait pas varier le rapport contrairement aux déplacements des points A, M et B : le déplacement de ces trois points modifie les longueurs et les rapports dont ils dépendent alors que le déplacement du point C ne fait varier que les longueurs AC et AN ; la constance des rapports est due uniquement à la propriété de Thalès.

Un autre exemple pour illustrer l'interaction entre modalités de déplacement et ruptures visuelles : en cinquième, la formule de l'aire du

[9] Voir Annexe 6 pour une proposition informatique adaptée.

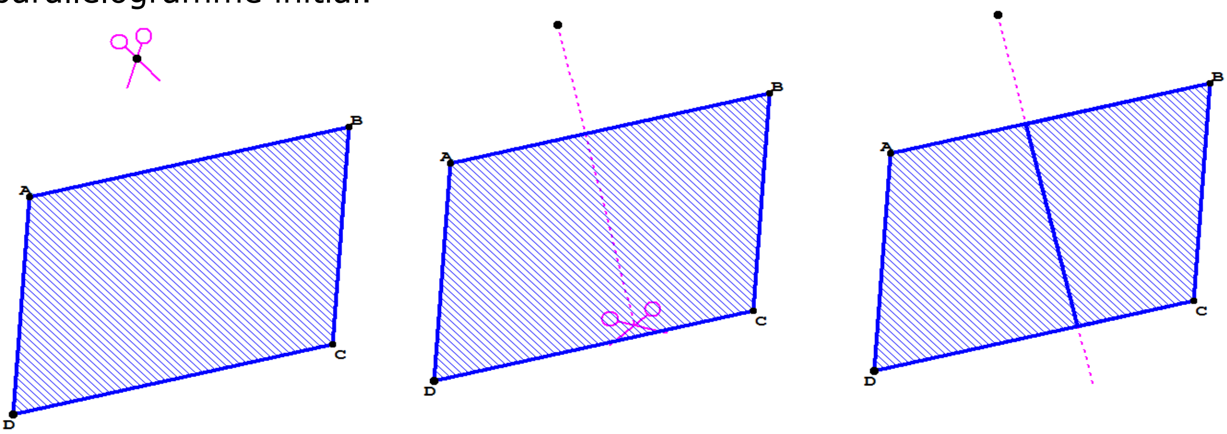
parallélogramme est généralement construite à partir de celle du rectangle ; une activité basée sur le découpage de parallélogrammes ou de rectangles est souvent proposée ; un fichier géométrique accompagne le bilan de ce travail.

Par exemple, sous GeoGebra, l'utilisation d'un curseur peut permettre de transformer un parallélogramme en rectangle :



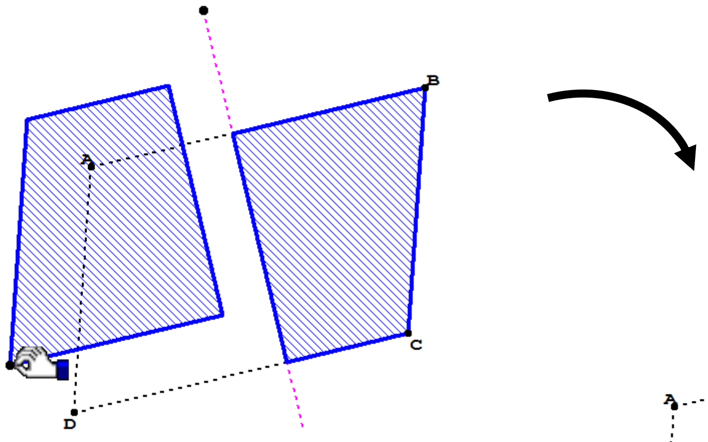
Le curseur est déplacé et certains éléments de la figure « bougent » ; seul le concepteur du fichier connaît le lien entre ces différents éléments. Lors de l'activité papier, l'élève déplace directement les morceaux découpés. De plus, le découpage ne se fait pas uniquement en partant d'un sommet comme le montre la figure ci-dessus. D'autre part, le déplacement des morceaux ne se fait pas en suivant l'un des côtés du parallélogramme : les deux objets visuels intermédiaires proposés ici montrent deux morceaux superposés difficiles à analyser pour appréhender la construction du rectangle. Enfin, il y a rupture visuelle entre l'image initiale du parallélogramme et celle finale du rectangle. Ce fichier correspond à la représentation d'une personne maîtrisant déjà le calcul de l'aire d'un parallélogramme. Que dire lorsque l'élève sera confronté à un calcul d'aire suivant une configuration différente ?

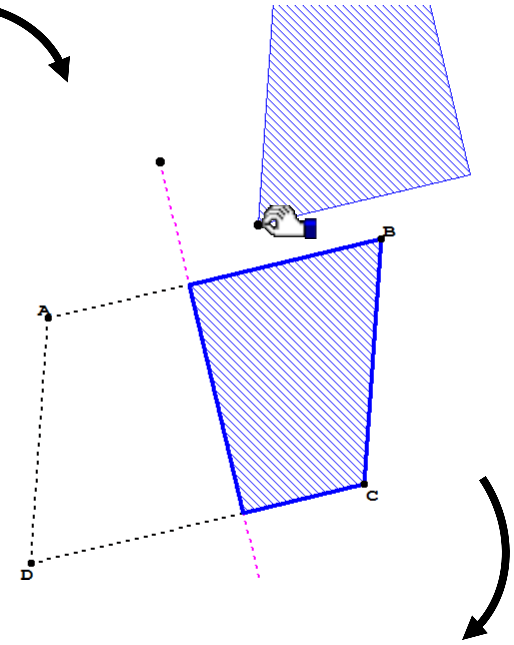
L'analyse précédente doit permettre de concevoir un fichier[10] surmontant les difficultés énoncées. On peut envisager de réaliser un découpage à l'écran suivant une direction perpendiculaire à l'un des côtés du parallélogramme, un déplacement direct d'une pièce découpée sans superposition avec l'autre pièce tout en gardant une trace du parallélogramme initial.



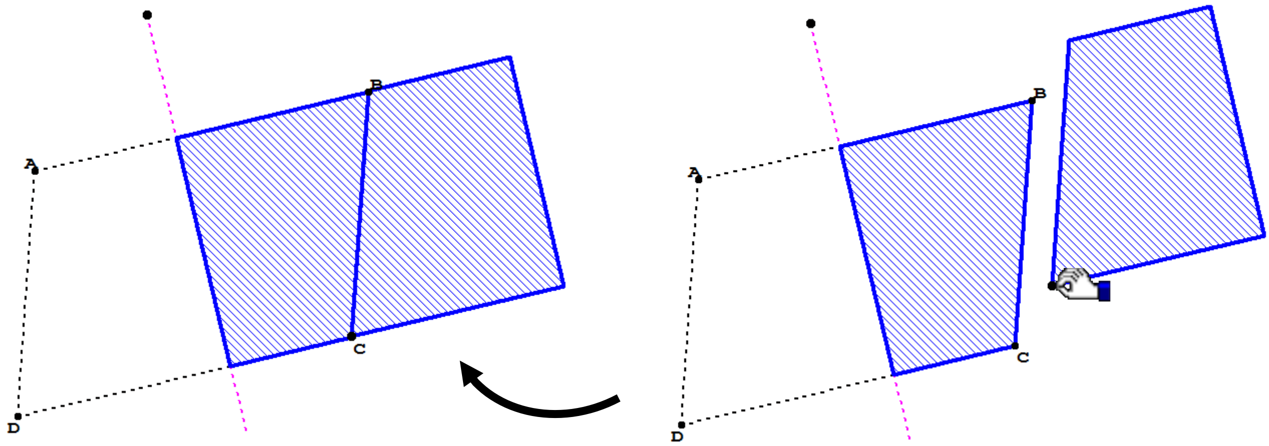
On découpe suivant la direction perpendiculaire à (AB)

[10] Fichier Geoplan réalisé par M. Frédéric Brenet.

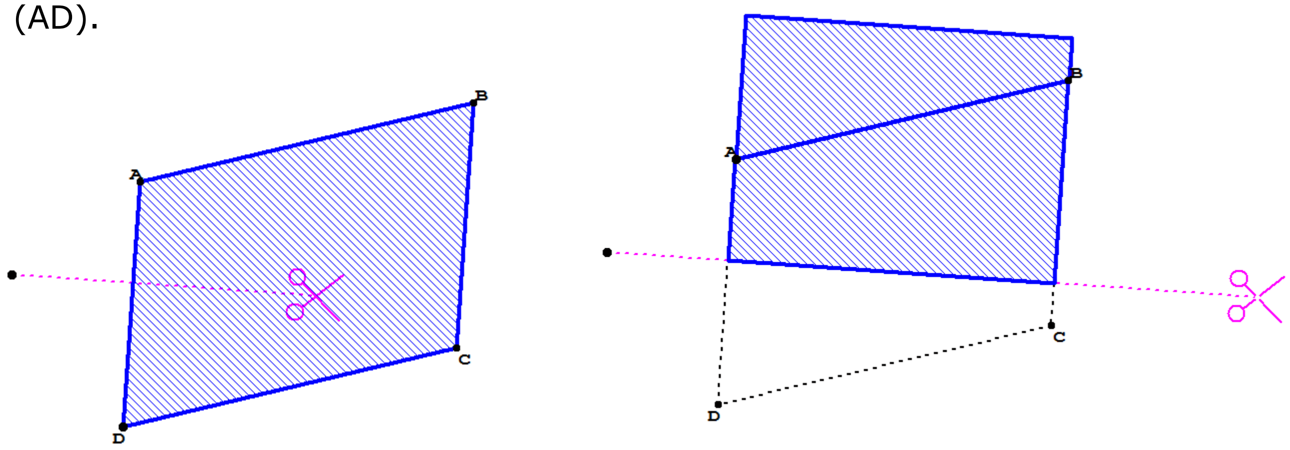




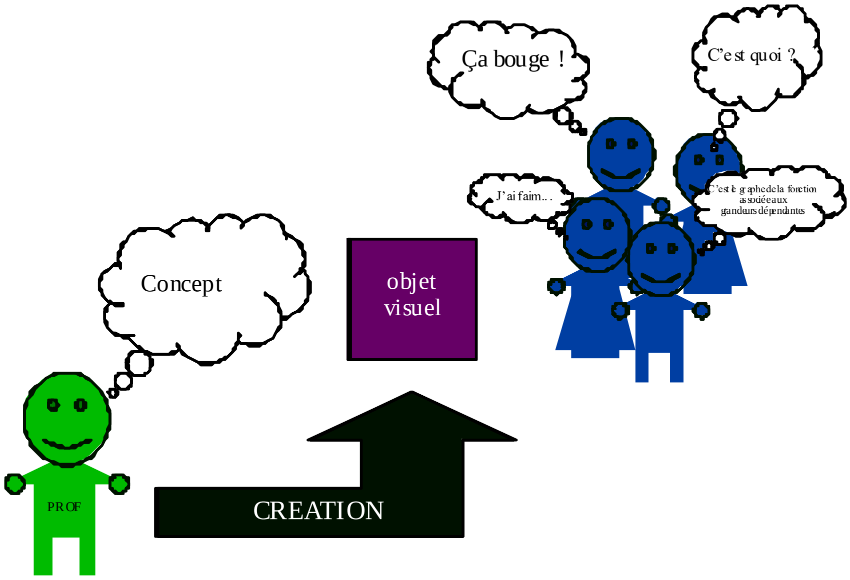
On déplace une pièce découpée pour former un rectangle.



L'objet dynamique visuel réalisé est conforme à la manipulation de l'élève pendant l'activité. De plus, on retrouve sur l'image finale obtenue l'objet initial avec le rectangle : on évacue le problème de la rupture visuelle. Enfin, on peut également déplacer la pièce vers sa position initiale (aller-retour). La découpe peut être réalisée suivant différentes positions sur [AB], éclairant l'élève sur les différentes possibilités qui s'offrent à lui. Le fichier permet aussi de proposer une découpe suivant la direction perpendiculaire à (AD).



Les fichiers informatiques initiaux proposés précédemment relèvent d'un fonctionnement de classe comparable à l'image ci-dessous :



Ils sont conformes aux représentations mentales de l'expert confortées par sa connaissance du concept mais ne permettent pas à une majorité d'élèves d'y accéder. D'autant que certains objets visuels dynamiques contiennent plusieurs éléments mobiles et qu'il est dès lors difficile de les observer tous en même temps. L'enseignant sait ce qu'il doit regarder et est capable de percevoir des éléments sans les regarder.

A titre d'anecdote, nous avons proposé lors d'un stage une situation géométrique à l'aide d'un fichier Geoplan à laquelle on avait associé, par importation, le fichier d'une représentation graphique d'une fonction qui présentait les variations inverses de celles des grandeurs étudiées. Le public d'experts présent s'est laissé duper. Cette petite expérience montre à quel point il est difficile de voir simultanément deux objets dynamiques et d'en percevoir les liens implicites. C'est pourtant ce travail que l'on propose souvent aux élèves.

Nous vous proposons de faire une expérience dynamique en visualisant un petit film[11]. Vous en trouverez un petit compte rendu en annexe 7.

Les différentes expériences réalisées et les exemples étudiés montrent les difficultés liées à la perception et à son interprétation.

En effet, l'enseignant est capable de concevoir un objet visuel conforme aux représentations mentales qu'il a d'un concept : sa perception identifie les représentations de ce concept dans l'objet visuel qu'il a créé et conforte l'enseignant dans la pertinence de cet objet ; dans une certaine

[11] « Test Your Awareness: Do The Test », film disponible à l'adresse http://www.dailymotion.com/video/x4nzdu_test-your-awareness-do-the-test_school.

mesure, elles orientent ses choix lors de la création de l'objet visuel. Lorsque cet objet visuel est soumis à la perception de son public, ce dernier se crée des images matérielles dans la mémoire à court terme qui vont construire des représentations mentales concrètes dans la mémoire à long terme. D'une part, ces représentations mentales agissent sur la perception et sur les images matérielles induites pour modifier ces représentations ; d'autre part, elles permettent à l'élève d'accéder, complètement, partiellement ou pas au concept étudié : on peut s'interroger sur le degré de construction du concept par l'élève lorsqu'il perçoit l'objet visuel proposé par l'enseignant. Certains objets visuels produisent des constructions très partielles du concept étudié voire des obstacles à la construction de ce concept.

L'enseignant doit bien évidemment maîtriser le concept ainsi que les outils informatiques utilisés, tout en gardant un œil neuf pour découvrir ce concept à travers les objets visuels proposés : n'est-il pas alors confronté à un paradoxe ? C'est en réalité le défi que doit relever l'enseignant. Pour atteindre cet objectif, il sera souvent amené à dépasser les utilisations par défaut des logiciels.

Le schéma ci-dessous synthétise les interactions entre la perception et la mémoire lors de la création par un expert d'un objet visuel et de son observation par l'élève :

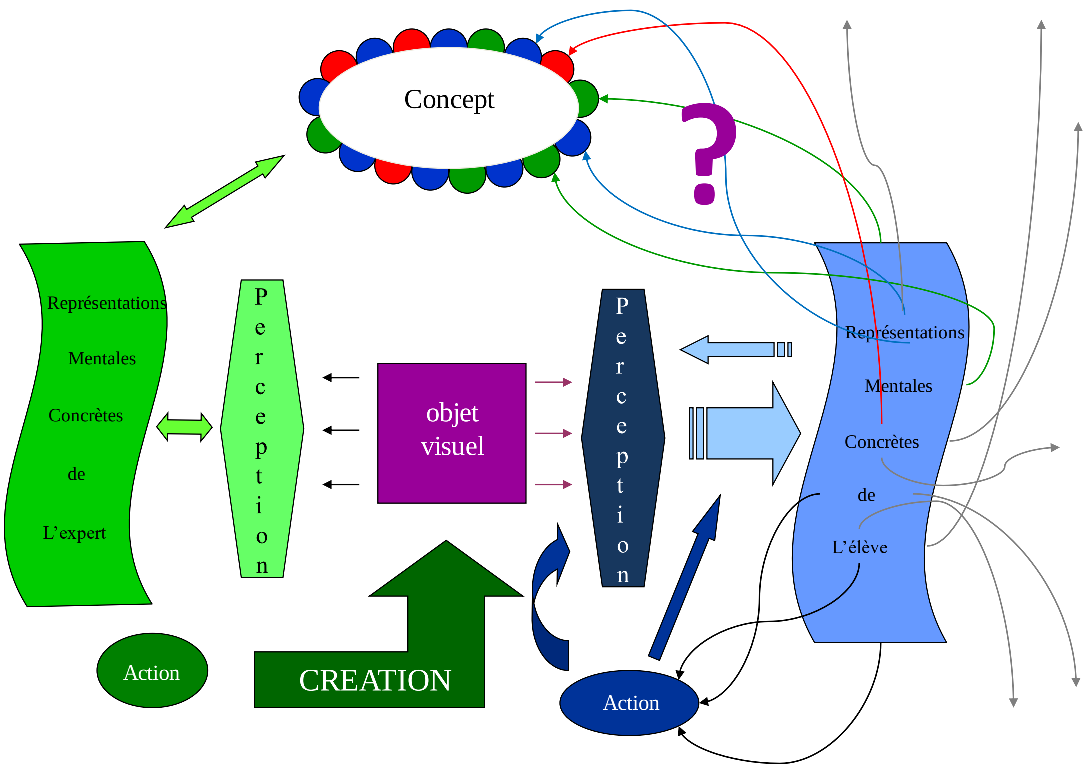


Schéma réalisé d'après la théorie des paratextes[12] de D. Peraya.

[12] Daniel Peraya, « Vers une théorie des paratextes : images mentales et images matérielles. », Recherches en communication, n° 4, Département de communication de l'Université catholique de Louvain, 1995.

Les caractéristiques d'un objet visuel relèvent à la fois de l'image et des modalités de présentation. Il paraît évident que ces caractéristiques affectent la nature des représentations mentales concrètes de l'élève par rapport à la construction du concept étudié.

En dehors des éléments liés à l'image ou au logiciel que nous avons précédemment pointés, d'autres éléments directement liés au concept lui-même doivent apparaître dans les caractéristiques de l'objet visuel afin de faciliter sa construction.

2. Eléments liés au concept étudié.

- Grandeurs, mesures et nombres.

On ne peut pas parler des fonctions sans évoquer une situation problème qui s'appuie sur ce concept ; cette situation fait référence à des grandeurs dépendantes : prenons cette activité « Aire et volume » dont l'énoncé est proposé en annexe 8 et formulons quelques réponses…

On établit que l'aire du rectangle en fonction de x s'exprime par x(7,2-x) ; Le volume de la pyramide en fonction de x s'exprime par la même expression. Stupéfaction ! Evidemment une aire n'est pas égale à un volume mais pourtant on voit que : x(7,2-x)=x(7,2-x). Cherchez l'erreur !

Il n'y a pas d'erreur : il y a amalgame et implicite. Amalgame parce que l'expert se permet de supprimer les unités ; implicite parce qu'il n'en dit rien aux élèves.

La théorie des grandeurs[13] existe : elle définit parfaitement, à partir d'un objet, les notions de grandeur et de mesure. La fonction d'une variable réelle, quant à elle, est définie comme une correspondance qui, à un nombre associe au plus un nombre. Quel lien y a-t-il entre grandeurs, mesures et nombres ? Les deux premiers appartiennent a priori au monde réel ; le dernier relève du monde des idées ; le passage de l'un à l'autre est loin d'être identifié lorsque l'on pratique une activité en classe qui se veut mathématique mais qui souvent débute par un problème concret. D'autant plus que la théorie des grandeurs s'appuie sur le monde réel pour idéaliser ce concept. On peut cependant constater la proximité du nombre et de la mesure : elle est un nombre associé à une unité pour définir une grandeur. On passe de l'un à l'autre en décontextualisant la mesure vers le nombre ou en contextualisant le nombre vers la mesure d'une grandeur dans une unité choisie.

Pour éviter la confusion dans l'activité précédente, il serait donc judicieux de choisir x comme étant une mesure variable (proche de la variable numérique) plutôt qu'une grandeur variable : il conviendrait de poser AM = x cm au lieu de AM = x. Mais est-ce suffisant pour modéliser de façon unique la situation ?

[13] Par exemple, Nicolas Rouche, « Le sens de la mesure », Edition Didier Hatier, 1992.

Considérons un pavé droit de dimensions 0,5 dm, 0,6 cm et de hauteur h. On souhaite calculer son volume V. On établit la relation entre grandeurs qui suit :

$$V = 0{,}5 \text{ dm} \times 0{,}6 \text{ cm} \times h.$$

Pour passer aux mesures, on peut faire différents choix : prendre comme unité de longueur le décimètre ou le centimètre ou toute autre unité de longueur.

Si l'on choisit le centimètre, on nomme x la mesure de h et le volume V aura une mesure y en cm^3 :

$$V = y \text{ cm}^3 \text{ et } V = 5 \text{ cm} \times 0{,}6 \text{ cm} \times x \text{ cm} = 3x \text{ cm}^3.$$

On obtient la relation numérique : $y = 3x$.

Si l'on choisit le décimètre, on nomme x la mesure de h et le volume V aura une mesure y en dm^3 :

$$V = y \text{ dm}^3 \text{ et } V = 0{,}5 \text{ dm} \times 0{,}06 \text{ dm} \times x \text{ dm} = 0{,}03x \text{ dm}^3.$$

On obtient la relation numérique : $y = 0{,}03x$. Mais ce n'est pas la même que la précédente.

Pour obtenir la même relation, il faudrait imposer à la fois l'unité de la variable libre et celle de la variable dépendante à savoir : x est la mesure de h en cm et y celle de V en cm^3 (ou dm et dm^3 ou tout autre choix).

Par la suite, quel que soit le choix de l'unité pour effectuer les calculs, on aboutit à une seule et même relation numérique : en centimètres, on obtient $y = 3x$; en décimètres, on obtient $0{,}01y = 0{,}03x$ soit $y = 3x$.

Ainsi pour aborder le concept de fonction à partir d'une situation, il convient d'extraire la mesure de la grandeur libre pour atteindre la variable réelle et aussi d'extraire la mesure de la grandeur dépendante pour atteindre l'image de la variable réelle par une fonction.

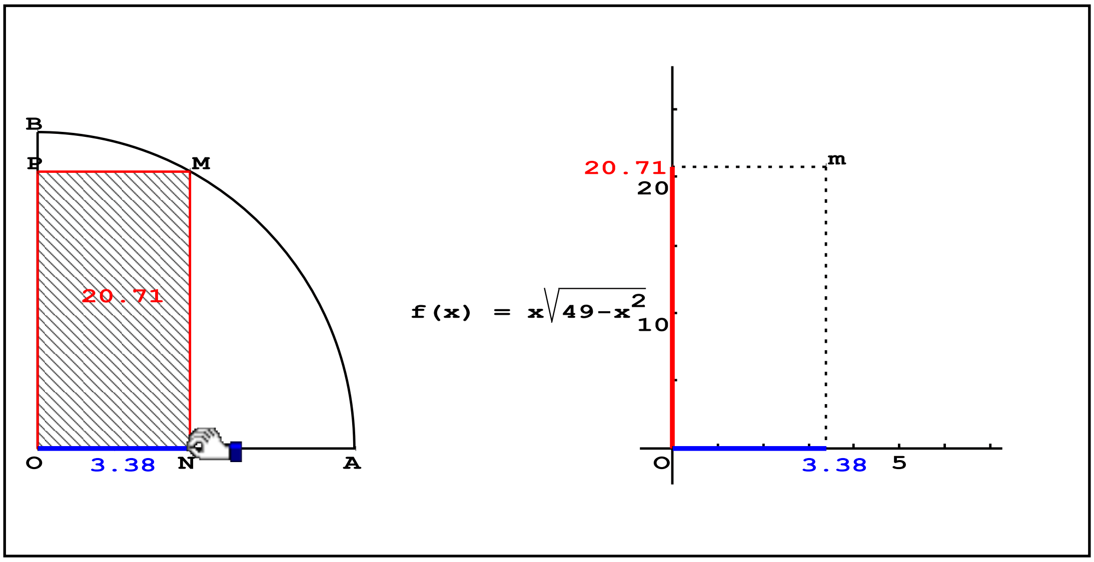
Cette nécessité d'identifier ces deux mondes (celui des grandeurs et celui des nombres) apparait à la fois dans des documents ressources[14] et dans les travaux d'André Pressiat[15] : « *En faisant apparaître, dès la sixième, des grandeurs, puis progressivement des grandeurs-quotients,… de manière à dégager, tout en restant dans le cadre des grandeurs, des aspects communs à toutes les situations de proportionnalité, afin de pouvoir rendre visible l'abstraction que l'on réalise en introduisant des fonctions numériques « de la même forme », puis enfin « la » fonction linéaire* ». Plus généralement, cette

[14] Document ressource proportionnalité collège, eduscol.education.fr/D0015/, juillet 2005.

[15] André Pressiat, Maître de conférence à l'IUFM d'Orléans Tours, *Quotients – proportionnalité – grandeurs*.

idée consiste en partant de situations concrètes à construire des modèles semblables puis d'étudier la classe de ces modèles.

Si, à partir d'une situation concrète sur des grandeurs dépendantes, on veut faire émerger la fonction numérique, on doit visualiser ce passage des grandeurs aux mesures et faire ainsi émerger la fonction dans son cadre numérique.



Dans l'image ci-dessus, proposée dans la présentation, nous avions signalé la confusion des nombres affichés dans les deux cadres. A gauche, ces nombres sont des mesures de grandeurs : il convient donc d'afficher les grandeurs soit 3,38 cm et 20,71 cm². A droite, ces mêmes nombres sont les coordonnées du point m dans le repère : les segments de couleurs n'ont donc pas lieu d'être. Cependant, le passage du cadre géométrique au cadre graphique nécessite d'être explicité : il faut donc recueillir les mesures des grandeurs et passer ainsi dans le cadre numérique. Il reste encore à expliciter le passage du cadre numérique au cadre graphique. Cependant, la présence du cadre géométrique contextualise ces nombres : il conviendra donc de faire disparaître ce cadre pour faire naître le modèle fonctionnel ; l'expression algébrique pourrait se substituer à la figure géométrique.

L'identification objet-grandeur-mesure[16] est nécessaire dans toute activité mathématique autour d'un problème concret. Elle est d'autant plus importante lorsque l'on aborde le concept de fonction qui suppose une double abstraction : celle du nombre et celle du modèle fonctionnel.

- Un modèle pour plusieurs situations.

L'activité « Aire et volume » précédente met en lumière le fait que pour plusieurs situations de grandeurs différentes, on peut aboutir à une seule fonction, un seul modèle : une aire en fonction d'une longueur et un

[16] Voir annexe 9.

volume en fonction d'une longueur sont modélisés par une seule fonction $x \mapsto x(7,2-x)$ définie sur l'intervalle [0 ; 6].

On peut aussi envisager une longueur en fonction d'une longueur : la situation de Thalès qui est proposée en annexe 10🕑 conduit à la fonction $x \mapsto x(7,2-x)$ définie sur l'intervalle [1 ; 7,2]. On perçoit alors l'intérêt d'étudier la fonction $x \mapsto x(7,2-x)$ non pas sur l'intervalle [0 ; 6] ou [1 ; 7,2] mais sur l'ensemble des réels.

Dans l'annexe 11🕑, nous vous proposons cinq situations courtes qui conduisent à cinq relations entre grandeurs, mais à une seule relation numérique : $y = 3x$. Cependant, suivant la situation, le domaine de la variable réelle n'est pas toujours le même : quatre situations conduisent à une variable dans les réels positifs alors que le problème sur le prix des DVD conduit à une variable dans les entiers naturels. Il peut être intéressant d'étudier le modèle sur le domaine le plus vaste possible. On pourra ensuite restreindre l'étude au domaine adapté à la situation rencontrée. On peut noter que le nombre 3 de la relation numérique correspond dans les situations, soit à un nombre pur, soit à une mesure de grandeur, soit à une mesure de grandeur-quotient. Ces relations entre grandeurs donnent naissance à la même relation numérique.

Comme le souligne Eugène Comin[17], plusieurs situations peuvent se modéliser par une seule fonction ce qui justifie l'étude de certaines fonctions dites de référence (carrée, inverse) en tant que modèles de base, puis de certaines classes de fonctions (affines, polynômes du second degré). Ce travail doit s'accompagner au lycée d'une structuration de l'ensemble des fonctions autour de somme et produit de fonctions puis inverse et composée. Il permet aussi de développer des outils tels que la notion de limite, la dérivation, la continuité pour étudier leurs propriétés.

- Représentations, registres et points de vue.

En s'appuyant sur les travaux de Régine Douady[18] autour des changements de cadres* et la théorie sémiotique de Raymond Duval[19], les objets visuels proposés doivent permettre de décliner le concept de fonction dans différents registres et différents cadres :

- le registre du langage naturel ;

- le registre des tableaux (cadre numérique) ;

[17] COMIN Eugène, « Variables et fonctions, du collège au lycée : Méprise didactique ou quiproquo inter institutionnel » in *Petit x*, 67, p. 33-61, 2005.

[18] DOUADY Régine, « Jeux de cadres et dialectique outil-objet » in *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 7. Num. 2, p. 5-31, 1986.

[19] DUVAL Raymond, « Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? » in *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 16. Num. 3. p. 348-382., 1996.

- le registre symbolique (cadre algébrique) ;

- le registre graphique (cadres géométrique et de la représentation graphique).

Selon le logiciel utilisé, le registre change : avec le tableur, on se situe par défaut dans le registre des tableaux mais avec un logiciel de géométrie dynamique, on se situe principalement dans le registre graphique.

Dans le registre des tableaux d'un tableur, on peut faire apparaître des nombres (cadre numérique) ou des formules (cadre algébrique ou pré-algébrique au sens de Capponi[20]) :

C4 =x*(7,2-x)

	A	B	C	D
1				
2		x	x(7,2-x)	
3		1	6,2	
4		5	11	
5		-3	-30,6	
6		2,7	12,15	
7		12	-57,6	
8				

Feuil1 Feuil2 Feuil3

Cadre numérique

C4 =x*(7,2-x)

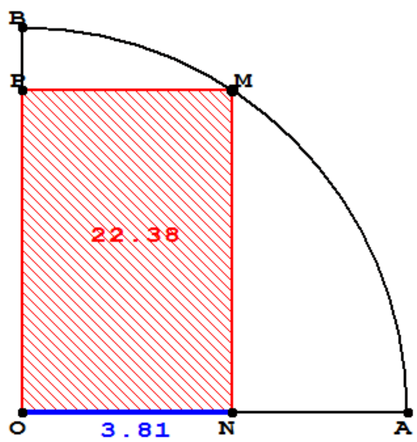
	B	C
1		
2	x	x(7,2-x)
3	1	=x*(7,2-x)
4	5	=X*(7,2-X)
5	-3	=x*(7,2-x)
6	2,7	=x*(7,2-x)
7	12	=x*(7,2-x)
8		

Feuil1 Feuil2 Feuil3

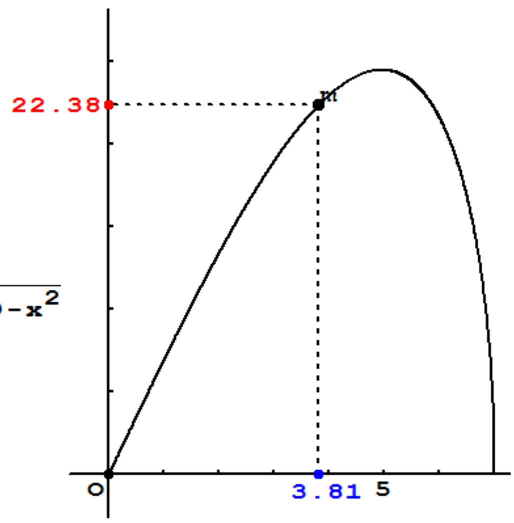
Cadre algébrique (passage en formule)

Nous reviendrons sur ce point plus loin dans une partie de cette brochure, plus spécifiquement centrée sur une utilisation « mathématique » du tableur.

Dans le registre graphique d'un logiciel de géométrie dynamique, on peut faire apparaître les objets visuels représentant des nombres variables, des formules mais aussi des points et des courbes, ce qui recouvre l'ensemble des cadres dans lesquels on peut décliner le concept de fonction :



$$f(x) = x\sqrt{49-x^2}$$



[20] CAPPONI Bernard, Actes du colloque « Journée de formation de formateurs : l'algèbre au lycée et au collège » (tableur, arithmétique et algèbre), p. 58-66, 2000.

Ici le registre graphique est prégnant. Les deux cadres (géométrique et celui de la représentation graphique) se côtoient sans que la formule fasse véritablement le lien (pour le professeur, sûrement, mais pas pour l'élève). Les informations numériques ne sont pas de même nature : elles sont issues de cadres différents du registre graphique mais restent liées visuellement à leur cadre d'origine : elles ne permettent pas d'assurer ce passage d'un cadre à l'autre.

On observe une double difficulté : d'une part, il semble nécessaire de sortir ces informations de leur cadre respectif pour les placer dans le cadre numérique (mais en utilisant un registre différent, celui des tableaux) et d'autre part, de créer un cheminement pour passer de la situation géométrique à la courbe.

On réalise alors une rupture volontaire pour distinguer, identifier et lier les deux cadres du registre graphique.

Le nombre est au cœur de ces changements de cadre : il est à la fois la mesure d'une grandeur dans le cadre géométrique et abscisse d'un point sur une droite graduée dans le cadre de la représentation graphique ; à une mesure correspond un nombre et donc une abscisse d'un point d'une droite graduée.

Cadre Géométrique	Cadre Numérique	Cadre Graphique
Grandeur	Nombre	Point

Mesure **Abscisse**

La mesure et l'abscisse servent de pont entre les différents cadres : on doit donc passer visuellement de la mesure au nombre puis du nombre à l'abscisse. On peut envisager une extraction de la mesure de la grandeur vers le nombre dans un tableau puis la construction d'un point sur un axe dont l'abscisse est ce nombre. Cependant pour éviter la rupture visuelle, on gardera une copie du nombre dans chacun des trois cadres.

Pour le concept de fonction, deux nombres sont en jeu ce qui implique une double extraction et une double construction. Cette construction nécessite d'envisager dans un premier temps de travailler sur deux axes parallèles (représentation en deux fois 1 Dimension) avant de passer à une représentation dans un repère (représentation en 2 Dimensions).

On peut schématiser ces idées ainsi :

Cadre Géométrique		Cadre Numérique		Cadre Graphique	
Objet Géométrique 1 → Grandeur 1	Mesure 1 →	Nombre 1	Abscisse 1 →	Point 1	Point
Objet Géométrique 2 → Grandeur 2	Mesure 2 →	Nombre 2	Abscisse 2 →	Point 2	

Les éléments de type 1 et 2 de ce tableau ne jouent pas le même rôle : les premiers sont libres, les seconds dépendants. Cet aspect induit une orientation liée au concept de fonction qui doit donc être visualisée lors de l'utilisation d'un fichier informatique.

Ce schéma illustre également une vision ponctuelle des choses : à un dessin correspond un couple de nombres et donc un point dans un repère. Cependant, on est amené à étudier l'ensemble des dessins possibles (figure géométrique) qui correspondent à un ensemble de couples de nombres (tableau de valeurs) et donc à un ensemble de points (représentation graphique). On est alors dans un point de vue global.

Il est nécessaire de distinguer ces deux points de vue[21] (ponctuel et global) d'autant que dans le cadre géométrique et dans le cadre graphique, ils ne cohabitent pas de la même manière. En effet, dans le cadre géométrique, le dessin (ponctuel) et la figure (global) sont représentés par le même objet visuel tandis que dans le cadre graphique, le point (ponctuel) diffère de la représentation graphique complète[22] (global). Ce double point de vue se retrouve dans le cadre numérique mais il apparaîtra sous deux aspects différents :

- l'antécédent et l'image pour le point de vue ponctuel, mais aussi un tableau de valeurs non ordonnées et/ou partiel ;
- un tableau de valeurs ordonnées et complet pour un point de vue global (impossible à obtenir pour une fonction continue)[23]🕑.

Les modalités d'utilisation du fichier informatique doivent aussi illustrer ce double aspect. On commence par un dessin pour construire un point dans le repère puis à l'aide d'une affectation aléatoire, on accède à d'autres dessins pour construire d'autres points dont on garde la trace. Progressivement, on donne naissance à un ensemble de points qui préfigure une vision globale de la fonction. Ensuite, en utilisant des modalités de déplacement ordonné, on consolide ce point de vue permettant d'accéder à la représentation graphique (courbe, morceau d'une courbe, ensemble de points…).

Le cadre algébrique, quant à lui, relève exclusivement du point de vue global : en effet, dans la formule (par exemple, x(7,2-x)), la notation x globalise l'ensemble des valeurs possibles de la variable libre. Autant on peut faire cohabiter dans le même cadre graphique, le point et la courbe qui illustrent des points de vue différents à l'aide d'objets différents, autant la présence de la formule et du dessin peut faire obstacle parce qu'ils relèvent

[21] ARTIGUE Michèle, « Que nous disent les résultats des étudiants de DEUG en analyse sur l'enseignement des fonctions ? » in Actes du XVème Colloque CORFEM, Antony-Val de Bièvre, 2008, Versailles, IUFM, p. 25-43, 2008.

[22] Dans le cas d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$, la représentation de la courbe ne peut être qu'incomplète.

[23] Voir annexe 12. Un tableau de valeurs complet définit entièrement une fonction : l'ensemble de définition est fini.

de cadres différents et de points de vues différents. Il convient d'en tenir compte lors de la réalisation d'un fichier informatique.

On n'examinera pas ici le point de vue local qui consisterait à étudier le phénomène sur un voisinage pour aborder des notions telles que la limite, la continuité ou le nombre dérivé.

La pratique de classe tend à montrer que les programmes de calcul exprimés en langage naturel (cadre algébrique) constituent certainement la meilleure entrée pour aborder le concept de fonction. Très tôt au collège, les élèves sont amenés à mettre en mots des phénomènes de dépendance pour ensuite atteindre le symbolisme à travers la production d'expressions littérales. Le programme de calcul s'appuie sur le cadre numérique : un nombre choisi au départ produit un résultat ; on retrouve ici l'orientation naturelle de la fonction. Il permet d'introduire le vocabulaire et son fonctionnement relève principalement du point de vue ponctuel.

L'utilisation de situations entre autres, géométriques, devrait donc constituer une deuxième étape dans l'étude du concept de fonction. Certaines de ces situations pourraient d'ailleurs se modéliser par la même fonction. D'autres pourraient illustrer leur diversité (discret/continu, fini/infini, borné/non borné) voire des relations non fonctionnelles[24] (d'une variable).

Lorsqu'enfin, les élèves se seront approprié les différentes représentations du concept de fonction et les liens entre les différents cadres, l'objet visuel proposé pourra être simplifié et ne présenter que les cadres géométrique, graphique et algébrique.

III La situation du quart de cercle…

1. Place de la situation dans la progression de la classe.

Cette activité est mise en place après un premier travail autour de programmes de calcul permettant d'introduire le vocabulaire et les représentations du concept de fonction : les notations peuvent apparaître plus tard dans la progression.

Il peut être intéressant que l'un des programmes de calcul proposés soit celui qui est sous-jacent à la situation du quart de cercle[25]. Il n'est pas nécessaire que ce travail soit réalisé juste avant la situation du quart de cercle mais au contraire, en laissant un temps de maturation entre les deux.

Il paraît important de rappeler ici que l'activité papier crayon ou/et la manipulation des élèves doivent précéder toute utilisation de l'outil informatique pour éclairer la situation.

[24] Voir annexe 13.

[25] Voir annexe 14.

C'est pourquoi la première partie de cette activité[26] (consignes 1, 2 et 3) est consacrée à une manipulation des élèves à travers des constructions et des recherches d'informations.

La seconde partie devra faire l'objet d'un éclairage approprié avec l'outil informatique.

2. Activité papier / crayon.

L'objectif de ce travail est double : d'une part faire émerger les éléments variables, d'autre part, identifier le degré de dépendance au fur et à mesure de l'évolution des contraintes.

Consigne 1 :

L'objectif est de distinguer les éléments variables des éléments fixes.

En débat de classe, toutes les informations possibles sont recensées au tableau en utilisant deux couleurs : l'enseignant sollicite la classe à chaque proposition (« Avez-vous tous la même information ? »)

- une couleur (le noir), pour noter les informations communes à tous les élèves ;

- une autre couleur (le rouge), pour repérer celles qui sont spécifiques à chacun.

Voici différentes propositions formulées par des élèves lors des expérimentations :

- l'égalité des longueurs des côtés opposés du rectangle.

  ON = PM et OP = NM.

- les demi-droites étant infinies, les longueurs ON et OP ne sont pas les mêmes suivant les élèves. Les dimensions mesurées sont par exemple :

  ON = 3 cm et OP = 4 cm

  L'aire du rectangle n'est pas la même suivant le rectangle tracé ; la formule de l'aire du rectangle est alors rappelée et est notée :

  Aire = ON × OP   Aire = 12 cm²

- le parallélisme des côtés opposés :

  (ON) // (PM) et (OP) // (MN)

[26] Voir annexe 15.

- les angles droits :

$$\widehat{ONM} = \widehat{NMP} = \widehat{MPO} = \widehat{PON} = 90°$$

- les diagonales qui se coupent en leur milieu :

[OM] et [NP] ont le même milieu

Les diagonales d'un rectangle ont la même longueur mais cette longueur change suivant le rectangle tracé.

OM = NP OM = 7,2 cm

- les points O, N, et A sont alignés. Comme c'est une donnée de l'énoncé, rien n'est noté à ce propos.

- Le problème des mesures des angles $\widehat{ONP}$, $\widehat{NOM}$ est abordé… Le débat permet alors de savoir si ces angles sont les mêmes ou non dans tous les rectangles : l'angle droit partagé en deux par une diagonale incite encore certains élèves à penser que la diagonale est bissectrice et donc que chaque angle mesure 45°. Le calcul de l'angle $\widehat{NOM}$ en utilisant le rapport trigonométrique de la tangente permet d'infirmer cette propriété. Aucune information nouvelle n'est alors notée.

Consigne 2 :

Un objectif est de mettre en évidence que la contrainte géométrique limite le nombre d'éléments variables. Un autre objectif est d'identifier une contrainte supplémentaire permettant d'obtenir un seul dessin possible pour tous les élèves.

La majorité des élèves construit un rectangle malgré la contrainte supplémentaire liée au cercle ; cependant certains élèves utilisent la même méthode de construction que pour la consigne 1 en positionnant d'abord les points N et P : soit le point M est ensuite obtenu pour former un rectangle mais il n'est pas sur le cercle, soit le point M est placé sur le cercle mais le quadrilatère n'est pas un rectangle.

Toutes les informations précédemment données sont reprises par les élèves mais le changement de statut de l'information sur la longueur OM n'est perçu immédiatement que par environ un élève sur deux.

En effet, beaucoup d'élèves ont quelques difficultés à établir le lien entre OM, OA, OB et le rayon du quart de cercle.

Inversement, une majorité d'élèves envisage le changement de statut de l'aire du rectangle, pensant que celle-ci est fixe car le rectangle est « enfermé » dans le disque.

À la question : « Quelle information supplémentaire doit-on donner pour que tous les élèves obtiennent le même rectangle ? », les élèves répondent rapidement : « Une longueur comme ON ou OP ». On décide de choisir ON pour la suite de l'activité. Ce travail permet d'identifier la variable libre de la situation.

<u>Consigne 3 :</u>

Les élèves disposent de deux des huit valeurs suivantes pour construire leurs rectangles :

1) ON = 1 cm. 2) ON = 4,2 cm.	1) ON = 2 cm. 2) ON = 5 cm.	1) ON = 3 cm. 2) ON = 6 cm.	1) ON = 5,6 cm. 2) ON = 6,8 cm.

Ce choix de couples de valeurs permet de gérer la diversité des publics en proposant des couples d'entiers aux élèves les plus fragiles. Les nombres 4,2 et 5,6 ont été choisis parce qu'ils correspondent à des mesures de ON permettant d'obtenir des aires égales. La moitié des nombres proposés est placé dans l'intervalle pour lequel la fonction sous-jacente est croissante, l'autre moitié de ces nombres se situe dans l'intervalle pour lequel cette fonction est décroissante.

On aboutit à un tableau non ordonné de valeurs expérimentales (mesures sur le dessin) non ordonné :

ON :	1	4,2	2	5	3	6	5,6	6,8
OP :	6,9	5,6	6,7	4,9	6,3	3,6	4,2	1,7

ON :	1	4,2	2	5	3	6	5,6	6,8
AIRE :	6,9	23,5	13,4	24,5	19,0	21,6	23,5	11,3

Le théorème de Pythagore s'applique aussi…

Tableau non ordonné de valeurs exactes :

ON :	1	4,2	2	5	3	6	5,6	6,8
OP :	$\sqrt{48}$	5,6	$\sqrt{45}$	$\sqrt{24}$	$\sqrt{40}$	$\sqrt{13}$	4,2	$\sqrt{2,76}$

ON :	1	4,2	2	5	3	6	5,6	6,8
AIRE :	$\sqrt{48}$	23,52	$2\sqrt{45}$	$5\sqrt{24}$	$3\sqrt{40}$	$6\sqrt{13}$	23,52	$6,8\sqrt{2,76}$

Un élève sur trois a recours rapidement à la propriété directe de Pythagore pour effectuer le calcul de la valeur exacte de OP. Quelques élèves tentent également d'effectuer le calcul en utilisant les rapports trigonométriques dans un triangle rectangle.

Des élèves restent bloqués. Plusieurs difficultés expliquent ce blocage :

- la figure est hétérogène : quart de cercle, rectangle et il faut extraire un triangle rectangle ;

- le segment [OM] n'est pas tracé et la donnée de 7 cm est occultée ;

- les deux diagonales sont tracées et la complexité de la figure ne permet pas d'extraire la sous-figure pertinente.

On dispose de deux stratégies pour faire émerger la formule algébrique : soit on présente les différentes méthodes utilisées par les élèves, soit on attend la consigne 4[27].

Un élève peut proposer la correction[28] pour ON = 2 cm :

Dans le triangle ONM rectangle en N,

D'après la propriété directe de Pythagore

$OM^2 = ON^2 + NM^2$

$7^2 = 2^2 + NM^2$

$49 = 4 + NM^2$

$NM^2 = 49 - 4$

$NM^2 = 45$

$NM = \sqrt{45}$

$NM = 3\sqrt{5}$

Donc $OP = 3\sqrt{5}$ La longueur OP est donc $3\sqrt{5}$ cm.

Aire du rectangle ONMP = ON $\times$ OP

$\mathcal{A} = 2 \times 3\sqrt{5}$

$\mathcal{A} = 6\sqrt{5}$ L'aire du rectangle est $6\sqrt{5}$ cm².

Naturellement, les élèves indiquent que la méthode est la même pour calculer les sept autres valeurs exactes de OP.

[27] Calculez OP et l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle ONMP en prenant d'autres valeurs de ON qui n'ont pas encore été données.

[28] Cette correction est restituée telle quelle sans référence aux grandeurs. L'absence des unités souligne que l'élève travaille avec des nombres et non des mesures de grandeurs, s'abstrayant ainsi du contexte originel de la propriété.

Un élève peut alors proposer de garder le modèle au tableau, d'effacer la valeur 2 de ON et de la remplacer par une autre valeur.

Le calcul est alors refait pour ON = 4 cm et on obtient OP = $\sqrt{33}$ cm et $\mathcal{A} = 4\sqrt{33}$ cm².

Puis, de nouveau, la valeur de ON est effacée. Cette image mentale du trou dans un calcul peut rappeler, pour certains élèves, différentes activités déjà effectuées et ils peuvent proposer alors d'utiliser une lettre : ON = x cm.

Les élèves passent donc d'un exemple numérique (ici 2), à une pré-modélisation (avec le trou) puis à une modélisation utilisant x et la production d'une formule pour OP et l'aire.

Exemple générique	Pré modélisation	modélisation
$7^2 = 2^2 + NM^2$	$7^2 = \ldots^2 + NM^2$	$7^2 = x^2 + NM^2$
$49 = 4 + NM^2$	$49 = \ldots + NM^2$	$49 = x^2 + NM^2$
$NM^2 = 49 - 4$	$NM^2 = 49 - \ldots$	$NM^2 = 49 - x^2$
$NM^2 = 45$		
$NM = \sqrt{45}$	$NM = \sqrt{49 - \ldots}$	$NM = \sqrt{49 - x^2}$
$OP = \sqrt{45}$	$OP = \sqrt{49 - \ldots}$	$OP = \sqrt{49 - x^2}$
$\mathcal{A} = 2\sqrt{45}$	$\mathcal{A} = \ldots\sqrt{49 - \ldots}$	$\mathcal{A} = x\sqrt{49 - x^2}$

La consigne 4 peut permettre d'appliquer la formule ou bien de la faire émerger si elle n'est pas apparue lors du débat ; les élèves doivent d'eux-mêmes proposer de poser ON = *x* cm pour calculer OP et l'aire du rectangle en fonction de *x* respectivement en cm et en cm². Tant qu'ils ne le font pas, il faut leur proposer d'autres nombres : ils choisissent, par exemple, un autre nombre décimal avec un chiffre après la virgule, puis si nécessaire, un autre décimal avec deux chiffres après la virgule, puis si nécessaire, un autre décimal avec trois chiffres après la virgule, puis si nécessaire, une fraction qui n'est pas un décimal, puis si nécessaire, un irrationnel… Dans certaines classes, le passage à la lettre ne se fait pas : on peut alors leur demander s'ils ont un moyen pour raccourcir la longueur de tous ces calculs, une bonne fois pour toutes.

$$OP = \sqrt{49-x^2} \text{ cm et } \mathcal{A} = x\sqrt{49-x^2} \text{ cm}^2.$$

Lors de cette recherche, certains élèves vont peut-être prendre des valeurs en dehors de [0 ;7] : il faut les laisser aboutir à une incohérence qui sera présentée dans la mise en commun ; l'ensemble de définition va alors émerger. Si cela ne se produit pas, on peut proposer $\sqrt{50}$ ou $\frac{22}{3}$ comme valeur pour ON (un entier supérieur à 7 ou un négatif seraient trop évidents a priori). Le fait de travailler en dehors du cadre des grandeurs conduit les élèves à produire des résultats faux (un négatif qui devient positif pour cause de racine carrée...) sans s'interroger sur la nature des résultats obtenus.

Tout ce travail papier crayon n'apporte qu'un point de vue ponctuel sur la situation : pour une valeur de ON, on a un seul dessin géométrique et une seule aire. Le tableau de valeurs non ordonné renforce ce point de vue. Ordonner un tel tableau constitue alors le premier pas vers un point de vue global. L'introduction d'un fichier informatique permet réellement ce passage pour envisager la recherche de l'aire maximale.

3. Trois fichiers pour l'éclairage TUIC.

Trois fichiers ont été nécessaires pour illustrer la situation en appliquant les différents éléments et principes évoqués précédemment.

Le premier fichier (Quartdecercle1.g2w) est utilisé à partir de la consigne 3. Il permet :

- de visualiser la situation géométrique de manière dynamique ;
- de passer du cadre géométrique à celui des grandeurs puis des nombres ;
- de visualiser un tableau de valeurs non ordonné en relation avec les dessins géométriques associés.

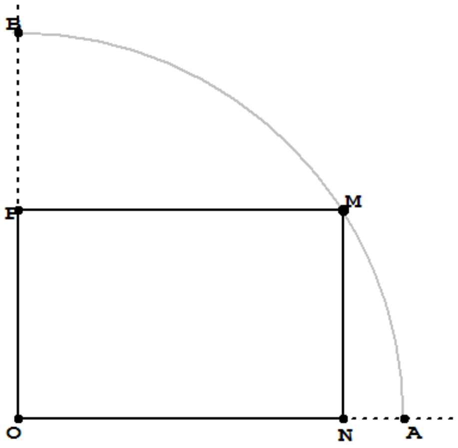
Les deuxième et troisième fichiers (Quartdecercle2.g2w et Quartdecercle3.g2w) permettent de construire la représentation graphique de la fonction sous-jacente puis de décontextualiser en substituant à la situation géométrique la relation des grandeurs puis la formule algébrique associée à la fonction. Au final, l'image obtenue contient les différentes représentations de la fonction (numérique, graphique et algébrique). Elle regroupe à la fois le point de vue ponctuel (cadre numérique) et le point de vue global (courbe et formule).

Premier fichier : Quartdecercle1.g2w

Situation géométrique de base :

Rectangle inscrit dans un quart de cercle.

Le point N est mobile sur le segment [OA]. Le quadrilatère ONMP est un rectangle tel que M soit sur le quart de cercle de centre O, de rayon 7 cm et d'extrémités B et A, et P soit un point du segment [OB].

Cadre géométrique		Le déplacement du point N sur [OA] entraîne le déplacement du point M sur le quart de cercle. Ce déplacement permet donc de visualiser les contraintes de la situation et la dépendance entre la longueur OP et la longueur ON. La couleur grise du quart de cercle illustre cette dépendance. *Aspect dynamique.*

Différentes modalités de déplacement du point N doivent être utilisées tout au long de l'activité pour aider l'élève à se construire une bonne image mentale de la situation.

Touches A et Ctrl+A :

Cette touche A permet d'attribuer au point N une position aléatoire sur le segment [OA] et obtenir ainsi un dessin « quelconque » de la situation donnée.

Appuyer sur cette touche permet donc de réaliser une photographie de la situation comme lorsque l'on presse sur le déclencheur d'un appareil photographique.

Cependant, l'action de l'enseignant sur le clavier peut détourner l'attention de l'élève. Il est donc souhaitable, dans un deuxième temps, d'automatiser cette prise de vues en utilisant la combinaison de touches Ctrl+A : l'enseignant peut alors se déplacer dans la classe, loin du clavier pour permettre aux élèves de se concentrer sur l'objet projeté.

Touches O et Ctrl+O :

La touche O permet de photographier la situation lorsque le point N se déplace, d'une façon non régulière, soit de O vers A, soit de A vers O.

La combinaison Ctrl+R permet de changer le sens du déplacement.

Nous proposons ainsi aux élèves une succession de photographies prises d'une façon « chronologique ».

Avec Ctrl+O, l'élève feuillette un album photos de la situation proposée comme il peut consulter celui d'une personne contenant des photographies prises à certains moments de sa vie.

Touches P et Ctrl+P :

Avec ces touches, les photographies sont prises à intervalles réguliers, comme on photographie une personne à chacun de ses anniversaires.

La succession de photographies proposées devient ordonnée et régulière et nous approchons de la perception de type « film ».

L'attention de l'élève se trouve ainsi davantage concentrée sur la façon dont se déplacent les points et se transforme le rectangle plutôt que sur les liens entre les différents objets constituant la situation. Le dynamique prend le pas sur le statique.

Touches ← → ↑ ↓ :

Avec les flèches du clavier, nous obtenons un déplacement pseudo-continu du point N sur le segment [OA]. L'appui en continu sur une des touches permet ainsi de proposer un objet visuel dynamique de la situation.

Ce changement de modalités de déplacement permet de passer d'un point de vue ponctuel à un point de vue global.

Les diverses perceptions proposées aux élèves à travers ces différentes modalités de déplacement doivent leur faire prendre conscience des contraintes de la situation. Cependant, à aucun moment, ils ne peuvent distinguer parmi les objets géométriques qui se déplacent ou se déforment celui qui constitue la variable libre de la situation : le point N.

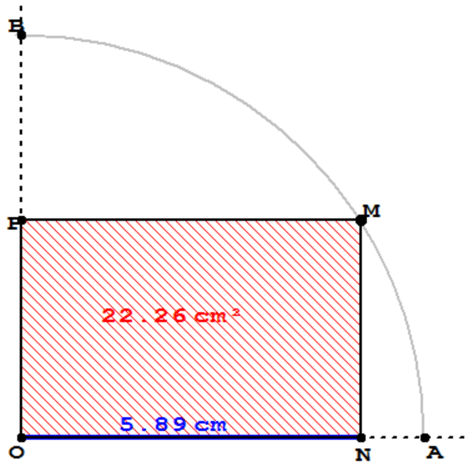
La souris 🖱 :

L'apparition de la main sur le point N permet de créer cette image de variable libre dont dépendent les autres variables : je déplace le point N (cause de la transformation) et les points M et P se déplacent et le rectangle ONMP se déforme (effets du déplacement du point N).

Ainsi, à chaque position du point N, correspondent des positions uniques des points M et P. Nous proposons ainsi une première approche d'une relation de dépendance sur des objets géométriques.

Introduction des grandeurs et des mesures :

Les éléments apparaissent dans l'ordre : objet, grandeur unité et mesure pour le segment [ON] puis pour la surface du rectangle ONMP.

Cadre des grandeurs Touche 0 à répéter 6 fois.		L'utilisation de couleurs et textures adaptées permet d'associer visuellement l'objet et sa grandeur : segment et longueur en bleu, surface et aire en rouge. De plus, l'apparition par étape des différents éléments : objet géométrique, grandeur unité puis mesure de la grandeur, permet de repérer différents cadres du travail (géométrique, cadre des grandeurs, cadre numérique). Le déplacement du point N permet de montrer visuellement que l'aire change lorsque la longueur change. *Couleurs et textures, aspect dynamique.*

Nous quittons ici le cadre purement géométrique pour introduire des grandeurs et objets numériques. L'utilisation de couleurs et textures permet de focaliser l'attention de l'élève sur les objets géométriques, les grandeurs et les mesures associées qui sont à étudier.

Les différentes modalités de déplacement sont de nouveau à utiliser :

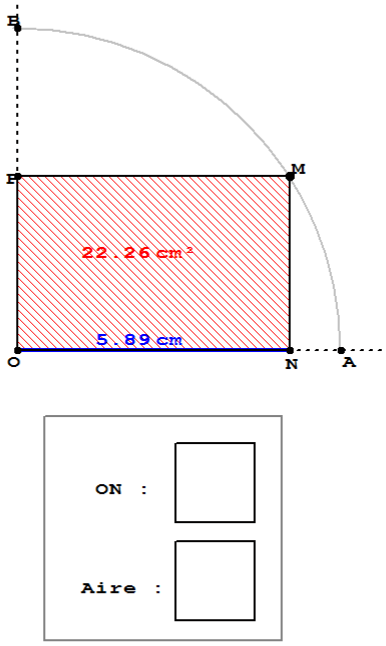
Touches A et Ctrl+A : les élèves observent que l'aire du rectangle change, ce qui n'est pas a priori évident pour certains d'entre eux ;

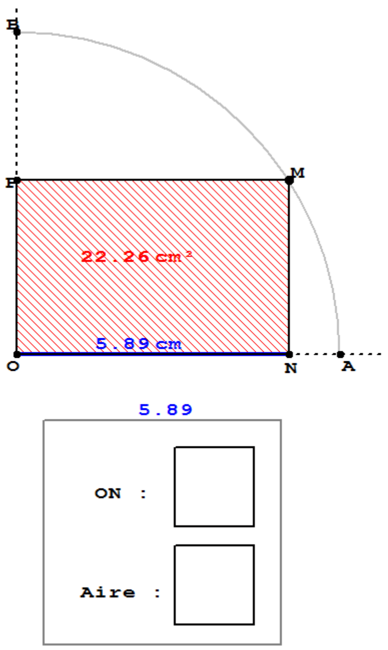
Touches O et Ctrl+O, touches P et Ctrl+P, touches ← → ↑ ↓ : ces modalités de déplacement permettent une première approche de l'étude des variations de l'aire et en particulier de l'existence d'une aire maximale ;

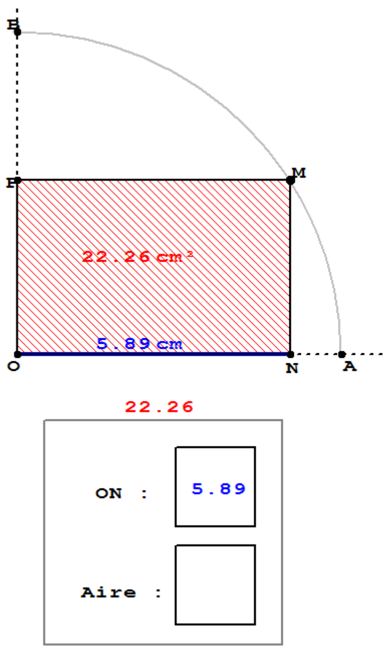
La souris : avec la main à l'écran, l'élève comprend que l'on fait varier la longueur ON et que l'aire du rectangle dépend, est fonction de cette longueur. Elle permet donc d'identifier clairement la variable libre et la variable dépendante.

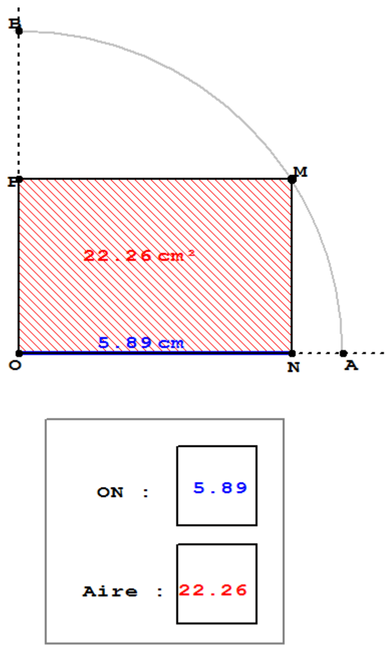
Génération d'un tableau de valeurs dynamique :

L'extraction des mesures et l'exportation de ces nombres dans le tableau de valeurs créent le lien entre cadre géométrique et cadre numérique. La permanence d'affichage (mesures et nombres) dans les deux cadres maintient ce lien. Néanmoins, dans le tableau de valeurs, il y a rupture visuelle du lien fonctionnel entre ON et l'aire.

Cadre numérique Touche 1 pour faire apparaître le tableau vide. Touche 2 pour extraire et exporter les nombres. Touche 2 de rappel.		La création du tableau est dynamique. La correspondance de couleurs entre les deux affichages maintient et renforce le lien entre les deux cadres. *Couleurs et textures, aspect dynamique.*







Le déplacement du point N permet de rendre ce tableau dynamique : deux nombres changent simultanément. Seul ici le cadre géométrique permet de maintenir la vision du lien fonctionnel entre ces deux nombres.

A nouveau, il faut varier les modalités de déplacement du point N.

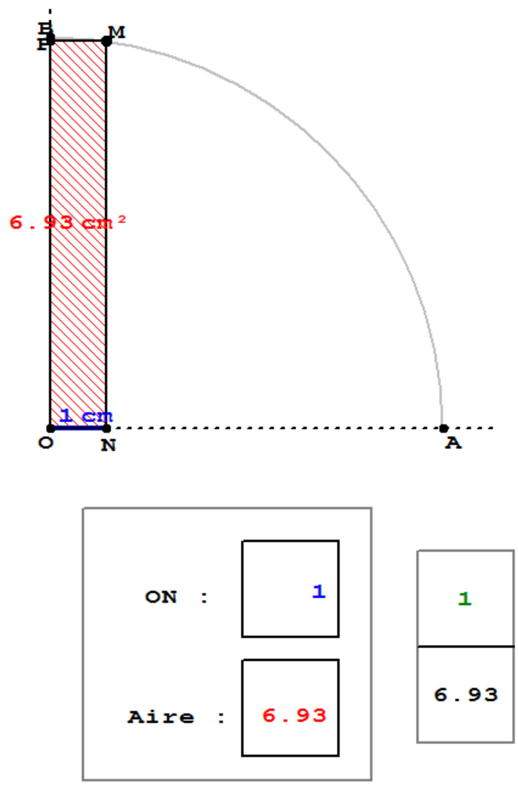
Construction d'un tableau de valeurs statique :

Cadre géométrique

Cadre numérique

Touche Q pour attribuer à ON la longueur 1 cm et garder la trace du rectangle obtenu.

Touche Ctrl+Q pour conserver dans un tableau séparé les valeurs correspondantes à ON et à l'aire du rectangle.



On peut garder à volonté la mémoire de la situation tant dans le cadre géométrique que dans le cadre numérique pour les huit valeurs utilisées dans l'activité papier.

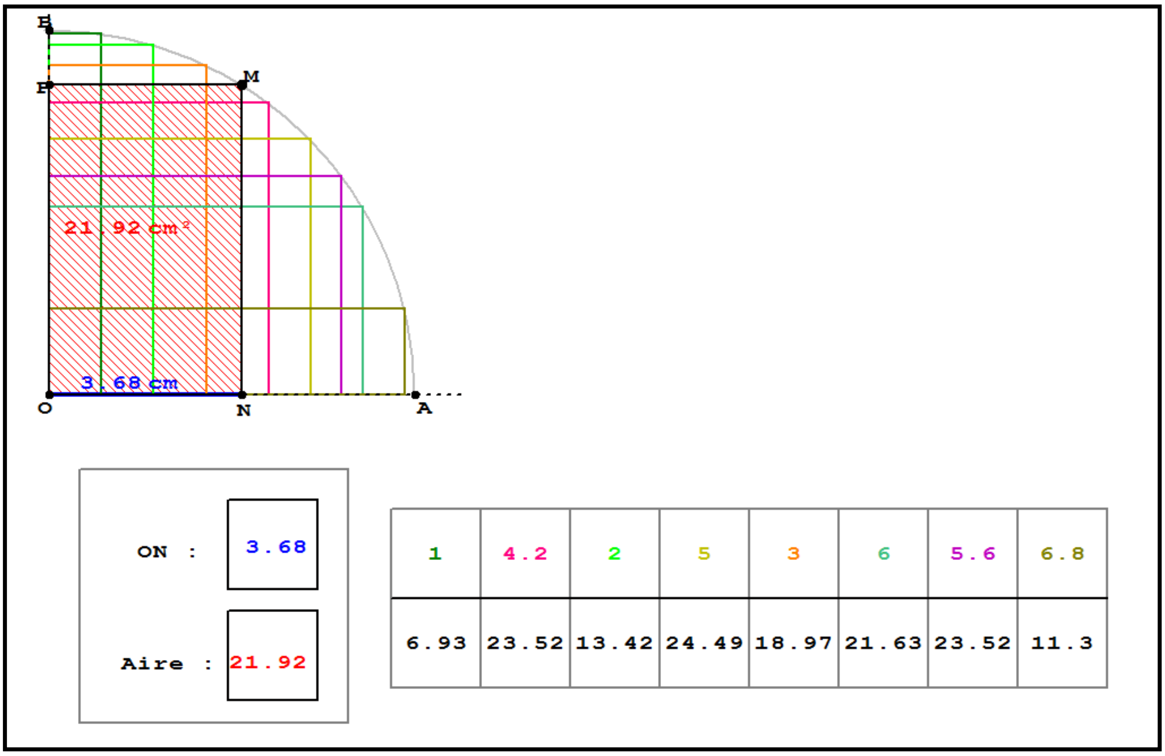
Deux types d'images cohabitent alors :

* une image dynamique avec des valeurs que l'on peut modifier à volonté ;

* une image statique qui constitue une photographie de la situation pour certaines valeurs de ON.

Le jeu de couleurs utilisé permet d'associer à chaque valeur de ON le rectangle correspondant.

Couleurs et textures, mode trace.



1	4.2	2	5	3	6	5.6	6.8
6.93	23.52	13.42	24.49	18.97	21.63	23.52	11.3

Les touches suivantes permettent d'attribuer à ON les valeurs indiquées et de garder la trace des rectangles obtenus. En combinaison avec la touche $\boxed{\text{Ctrl}}$, on construit progressivement un tableau de valeurs de la fonction.

Touches	Q	D	F	G	H	J	K	L
ON	1	4,2	2	5	3	6	5,6	6,8

Ce tableau de valeurs se construit d'une façon non ordonnée : nous obtenons ainsi une succession de photographies indépendantes les unes des autres. Chaque colonne nous permet de connaître deux nombres liés par la relation étudiée mais aucune information globale sur la fonction ne peut être obtenue par l'analyse de l'ensemble du tableau.

C'est donc aux élèves de décider de l'ordonner suivant les valeurs croissantes ou décroissantes de ON ou de l'aire : il peut être instructif pour les élèves de construire différents tableaux ordonnés (en valeurs exactes ou en valeurs approchées) pour déterminer celui (ou ceux) qui apporte davantage d'informations ; le tableau de valeurs ordonné suivant les valeurs de ON s'avère le plus pertinent et le plus naturel, du fait que ON est la variable libre. On obtient ainsi un objet visuel qui s'apparente davantage à une présentation de type « bande dessinée » plutôt qu'à un album photos dans lequel les différents clichés auraient été placés dans le désordre.

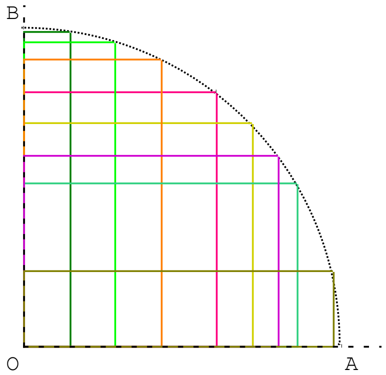
ON	1	2	3	4,2	5	5,6	6	6,8
Aire	6,93	13,42	18,97	23,52	24,49	23,52	21,63	11,3

Ce tableau permet d'approcher une vision globale de la situation : on s'intéresse moins au contenu de chaque colonne qu'à la comparaison entre deux colonnes consécutives. On peut ainsi approcher les notions de croissance et décroissance d'une fonction, de maximum ou minimum.

L'élève est également tenté de combler le vide (avec tous les dangers que cela comporte) entre deux colonnes et donc d'envisager la situation dans la continuité du déplacement du point N : c'est une étape vers une présentation de type « film ».

Ne présenter que des tableaux de valeurs ordonnés risque donc d'occulter l'aspect ponctuel de la situation, étape indispensable à la compréhension du concept de fonction.

Les élèves sont ainsi confrontés sur le même écran aux notions de dessins & figure, nombres & variable, photographies & film, images statiques & image dynamique.

<table>
<tr><td></td><td>Les images statiques
photographies</td><td>L'image dynamique
film</td></tr>
<tr><td>Cadre
géométrique</td><td>

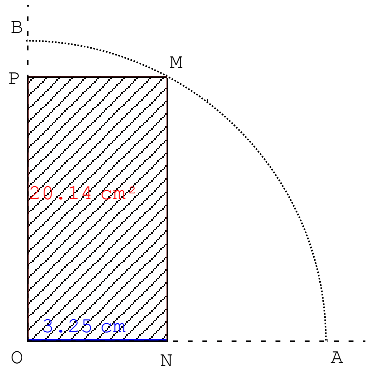
Dessins géométriques</td><td>

Figure géométrique</td></tr>
<tr><td>Cadre
numérique</td><td><table><tr><td>1</td><td>4.2</td><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>6</td><td>5.6</td><td>6.8</td></tr><tr><td>6.93</td><td>23.52</td><td>13.42</td><td>24.49</td><td>18.97</td><td>21.63</td><td>23.52</td><td>11.3</td></tr></table>Tableau de valeurs : nombres</td><td><table><tr><td>ON :</td><td>6.8</td></tr><tr><td>Aire :</td><td>11.3</td></tr></table>Variable</td></tr>
</table>

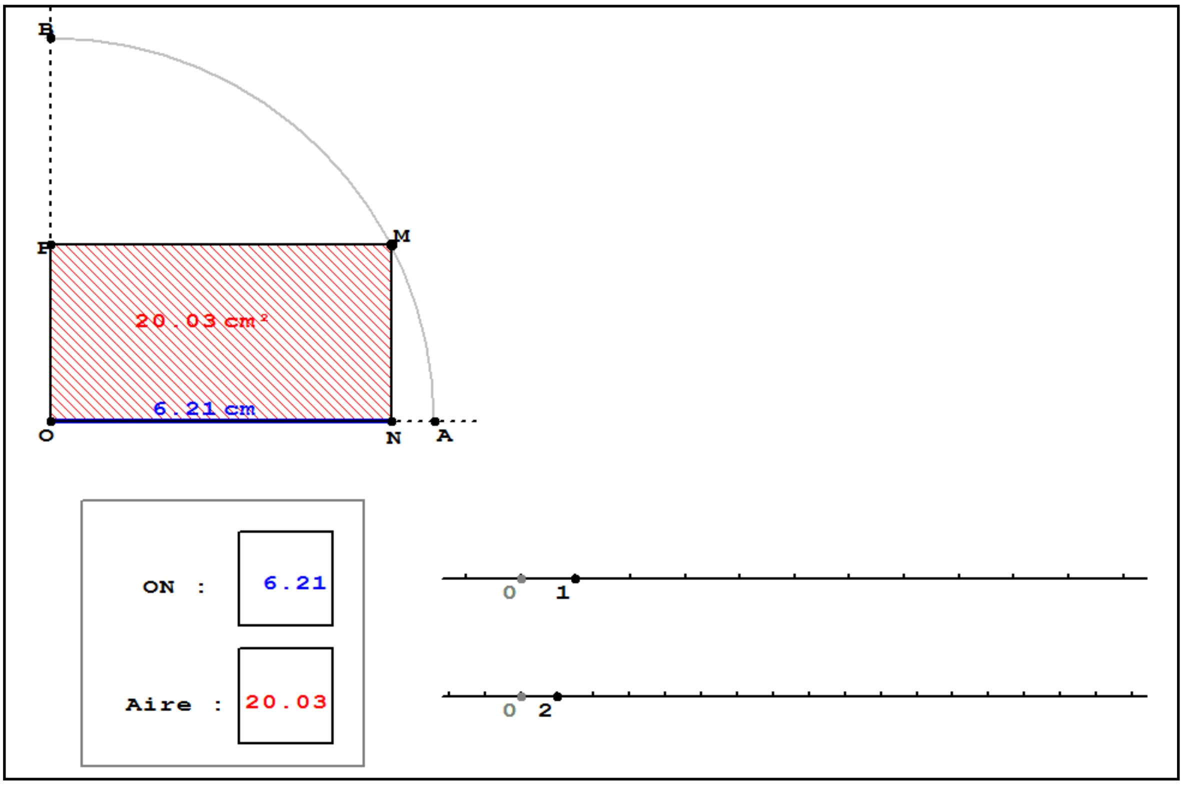
Le changement de position du point N sur [OA], suivant les modalités précédemment explicitées, doit aider les élèves à se créer une image mentale pertinente des concepts de figure et variable.

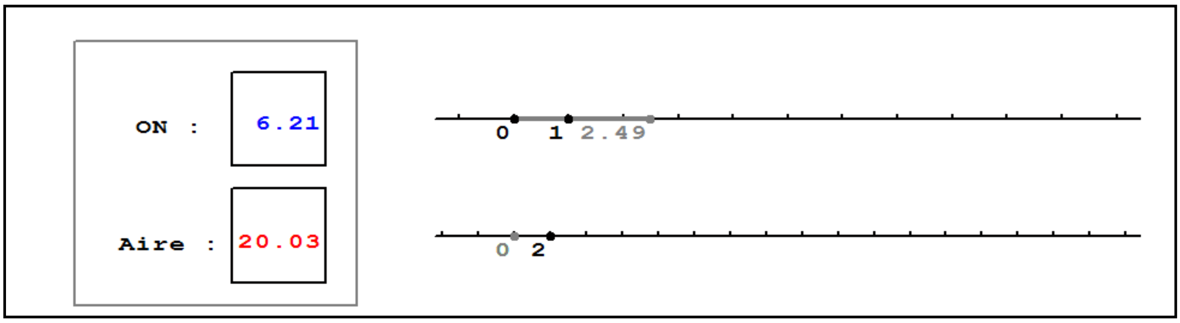
Les touches W et Ctrl+W permettent d'effacer ou de faire apparaître respectivement les huit dessins et le tableau de valeurs.

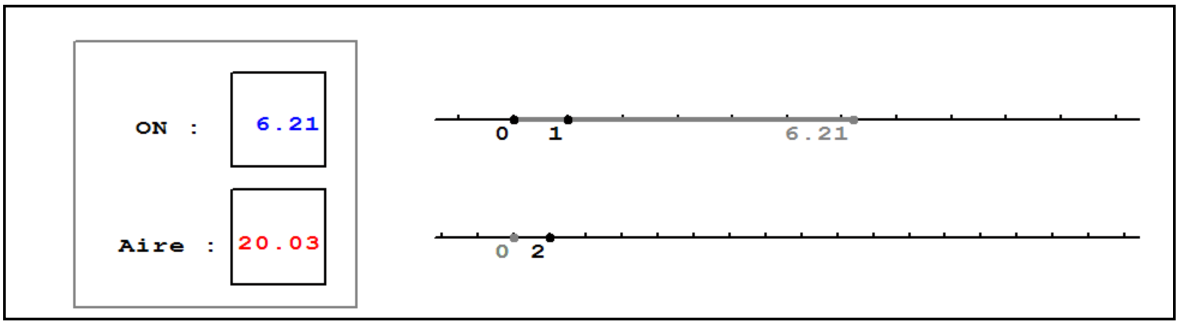
Deuxième fichier : Quartdecercle2.g2w

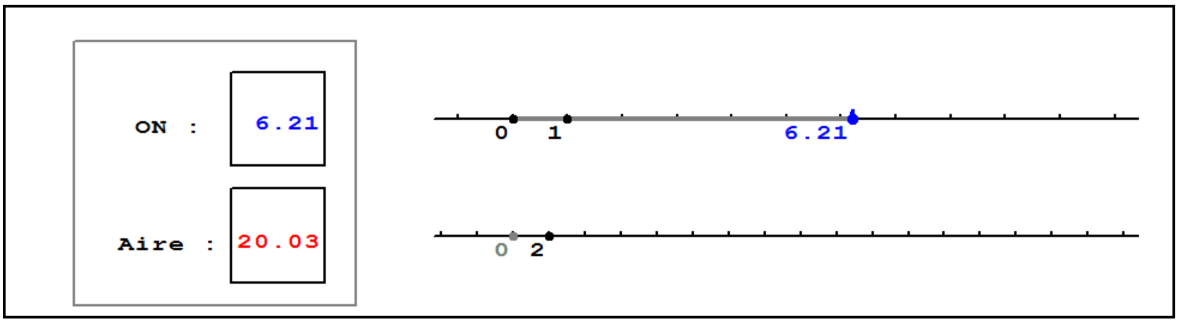
Report des nombres sur des axes gradués :

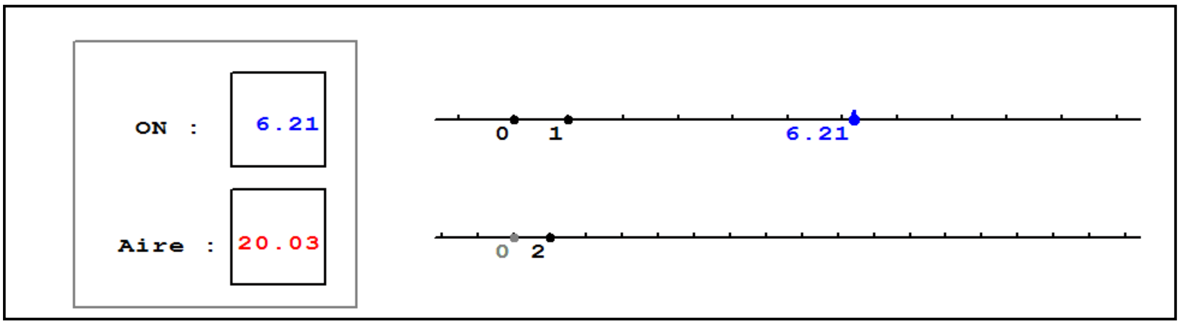
Représentation dynamique des nombres sur deux axes gradués

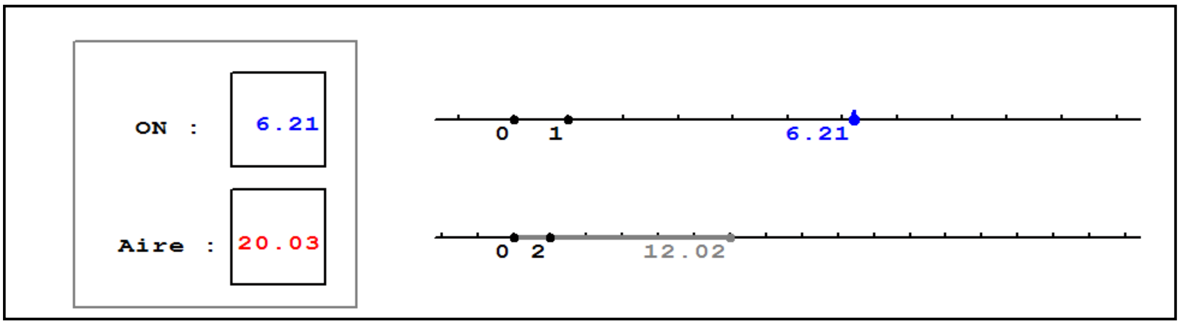


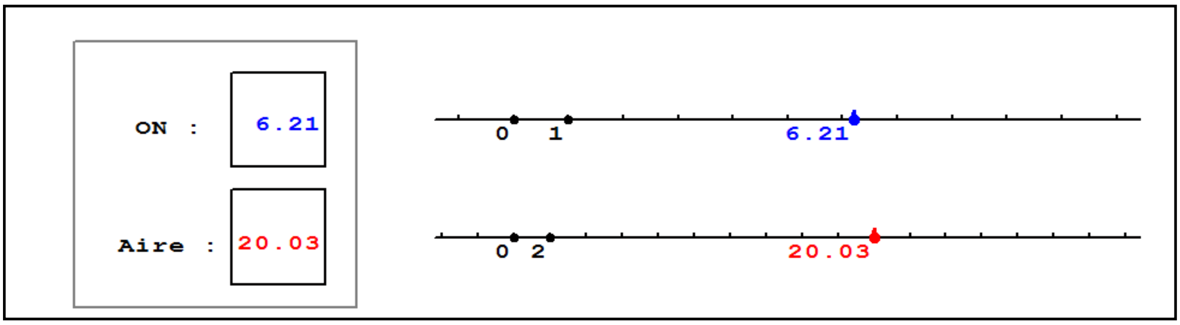


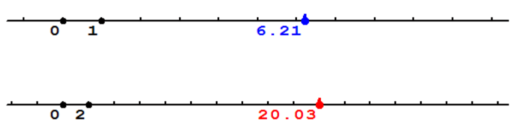










Cadre graphique 1D Touche 3 pour représenter les nombres sur deux axes gradués. Touche E de rappel.		La construction des points associés aux nombres est dynamique. Des segments gris se construisent progressivement pour expliquer la position des points bleu et rouge représentant les nombres étudiés, puis disparaissent. La correspondance de couleurs maintient les liens entre les différents affichages. *Couleurs et textures, aspect dynamique.*

Dans une première version du fichier, les segments prenaient les couleurs bleu et rouge et restaient visibles tout au long du travail. Cette permanence à l'écran des segments risquait de créer certaines difficultés :

- confusion grandeur aire et grandeur longueur ;
- amalgame entre grandeur, mesure et nombre ;
- impossibilité de représenter un nombre négatif (pour d'autres situations).

Il s'agit ici de représenter deux nombres ; comme un nombre se représente graphiquement par un point sur une droite graduée (le nombre est l'abscisse du point), on utilise donc deux axes gradués.

Cette représentation de la situation sur deux axes gradués est une étape importante avant le passage à une représentation dans un repère du plan. Cependant, comme dans le tableau de valeurs précédent, le lien fonctionnel entre les nombres représentés n'est pas apparent visuellement.

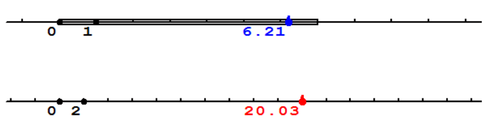
Si l'image est fixe, les élèves risquent de comparer l'antécédent avec l'image.

Si l'image est dynamique, les élèves vont comparer les mouvements des deux points : les deux points se déplacent dans le même sens ou en sens contraires. Cependant, un retour à des images fixes sera nécessaire pour formaliser la notion de fonction croissante ou décroissante : c'est la comparaison de l'ordre des nombres qui permet d'induire cette notion. Le mouvement permet de donner toute sa signification à la notion de sens de variation : *« on prend en compte* ***toutes les valeurs possibles*** *de la variable et leur* ***influence*** *sur les résultats ».* Cette utilisation dynamique permet de plonger *x* dans un ensemble de *« possibles »* et d'illustrer le rôle des quantificateurs utilisés dans des énoncés du type : *« pour tout x élément de l'ensemble E, on a… ».*

Cette représentation des valeurs de *x* et de *f(x)* sur deux axes gradués « en parallèle » donne une bonne image du sens de variation (mais moins bonne du maximum).

Visualisation de l'ensemble de définition :

Un cadre noir permet de garder la trace des valeurs prises par la mesure de ON. Cette mémoire témoigne de l'ensemble des possibles au niveau de la variable et donne sens au concept d'ensemble de définition.

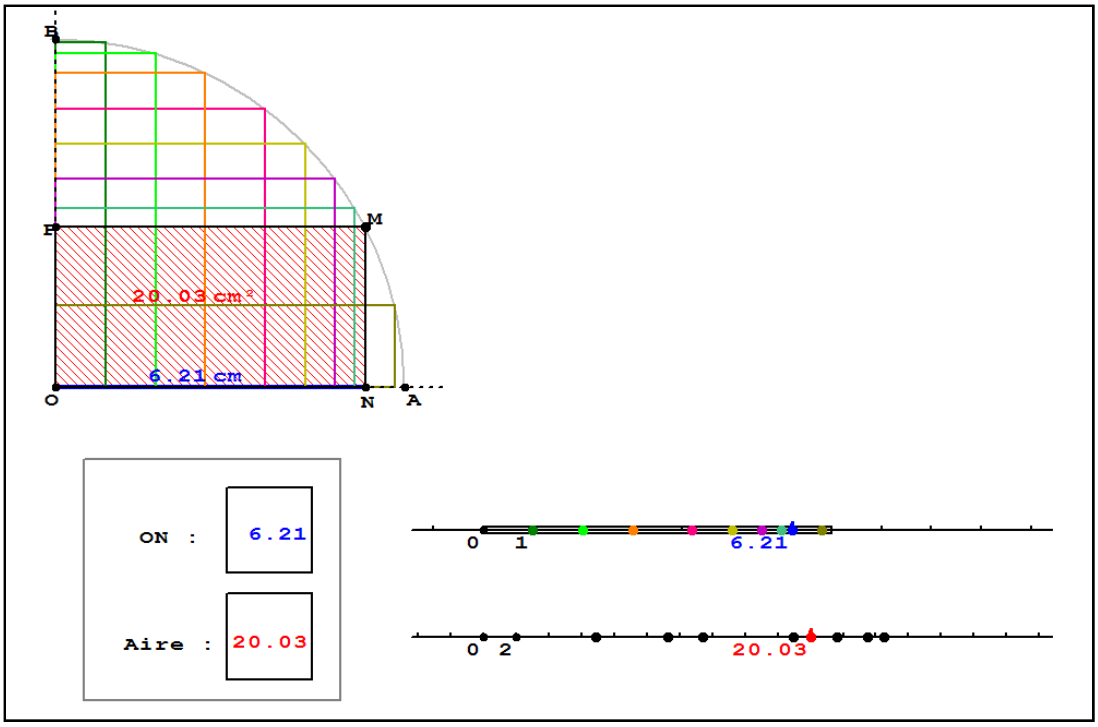
<u>Cadre graphique 1D</u> Touche $\boxed{4}$ pour visualiser le cadre représentant l'ensemble de définition. Touche $\boxed{R}$ de rappel.		Le cadre noir permet de visualiser les valeurs prises par la mesure de ON. *Couleurs et textures, aspect dynamique.*

Dans l'étude d'une fonction, le concept de variable libre est initial. On doit prendre en compte toutes les valeurs possibles de cette variable et leur influence sur les résultats. La notion d'ensemble de définition est donc première et l'ensemble image doit être vu comme une conséquence.

Représentation statique des nombres sur les deux axes gradués :

Comme dans la partie consacrée à la création du tableau de valeurs, il faut garder la mémoire des points sur les deux axes correspondant aux huit valeurs prises par ON.

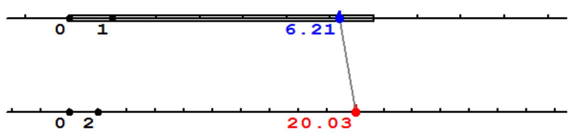
Les touches $\boxed{\text{Q}}$, $\boxed{\text{D}}$, $\boxed{\text{F}}$, $\boxed{\text{G}}$, $\boxed{\text{H}}$, $\boxed{\text{J}}$, $\boxed{\text{K}}$, $\boxed{\text{L}}$ associées aux huit valeurs de ON permettent de conserver la trace des différents rectangles ONMP et des points associés sur les deux axes.



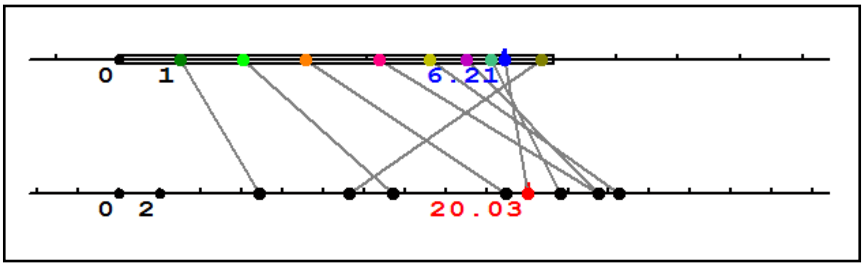
Nous retrouvons ici la situation active dans les différents cadres (géométrique, des grandeurs, numérique et graphique 2 × 1D) et les arrêts sur image avec les huit dessins de rectangles ainsi que les huit points correspondants sur chacun des deux axes.

Cependant, cette représentation en 2 × 1D est illisible puisqu'il est impossible de repérer les points qui correspondent entre le premier et le second axe.

Pour définir une fonction, il faut un ensemble de départ (clairement identifié ici par le rectangle noir), un ensemble d'arrivée (représenté par le deuxième axe) et des liens qui associent, à chaque élément de départ, au plus un élément d'arrivée.

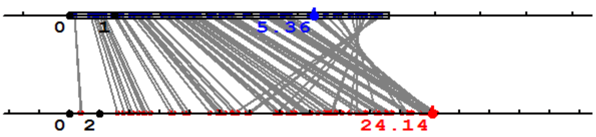
Cadre graphique 1D Touche Ctrl+Z pour visualiser le lien entre l'élément de départ et son image.	 	Les trois éléments permettant de définir la fonction sont visuellement identifiables : antécédent, image et lien entre les deux. *Couleurs et textures, aspect dynamique.*

La situation géométrique permet de justifier la nature fonctionnelle de cette relation : à chaque longueur ON correspond un rectangle unique ONMP, donc une et une seule aire. Les touches précédentes en combinaison avec la touche Ctrl, permettent de construire progressivement les huit liens en gris.



La touche W permet d'effacer ou de faire apparaître simultanément les huit dessins et les seize points associés ; les touches Ctrl+W font apparaître ou disparaître les huit liens.

On peut ajouter à volonté des points supplémentaires correspondant à d'autres valeurs de ON : d'autres liens sont créés.

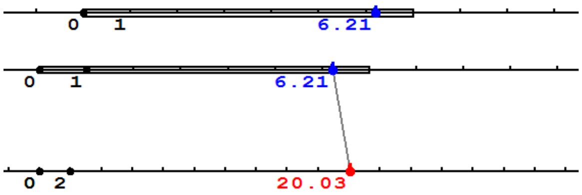
Cadre graphique 1D Touche Z pour faire apparaître les deux points sur les axes. Touche Ctrl+Z pour visualiser le lien entre l'élément de départ et son image. Touche Ctrl+T pour garder la trace des deux points et du lien.	 	La représentation devient vite illisible et ce modèle ne permet pas d'obtenir une trace interprétable de l'ensemble des possibles. *Couleurs et textures, aspect dynamique.*

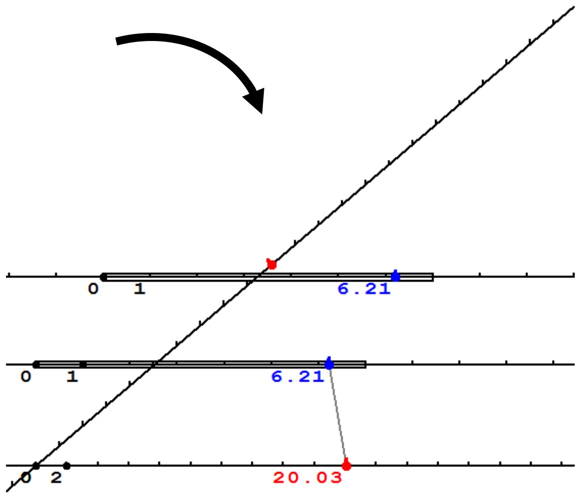
Cette représentation en 2 x 1D ne permet pas d'obtenir une vision globale de la situation.

<u>Troisième fichier : Quartdecercle3.g2w.</u>

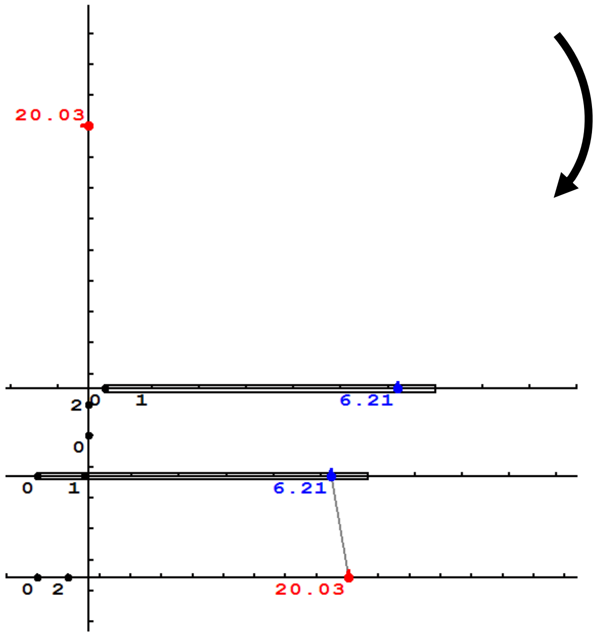
Création du repère :

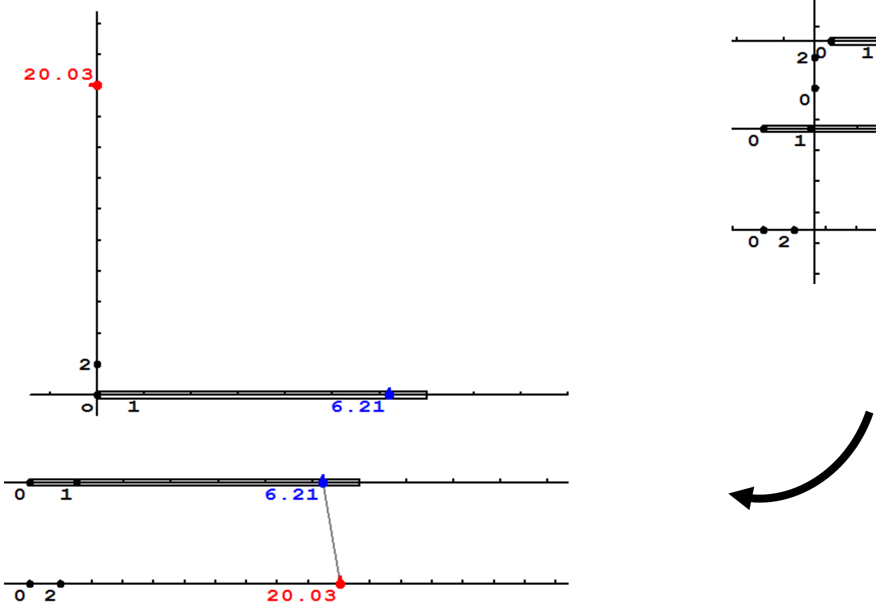
Les deux axes gradués sont déplacés et positionnés perpendiculairement avec une origine commune.

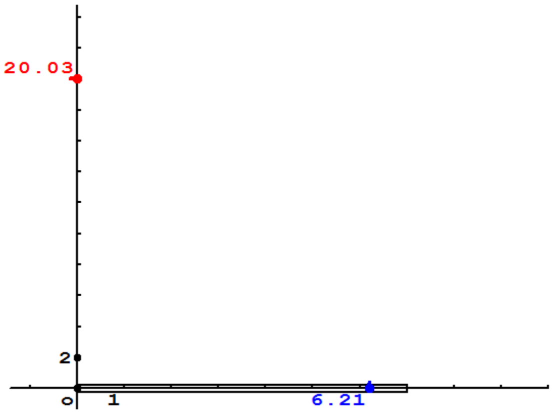




Le repère est placé au-dessus des deux axes parallèles de la représentation en 2 x 1D.





Cadre graphique 1D Touche 5 pour déplacer les deux axes gradués et créer ainsi un repère. Touche T de rappel.		Le repère se construit d'une façon dynamique en plaçant les deux axes gradués en position perpendiculaire avec la même origine. L'ensemble de définition est visualisé sur l'axe des abscisses. *Couleurs et textures, aspect dynamique.*

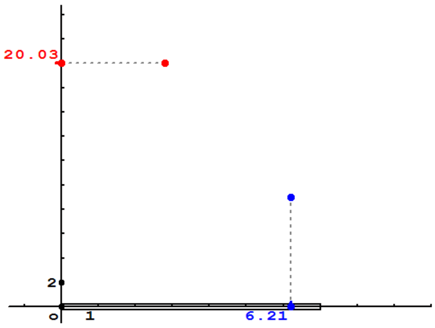
Nous sommes toujours dans une représentation graphique en une dimension.

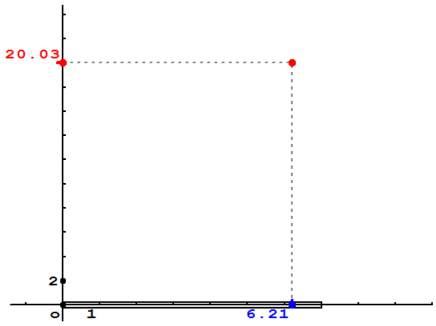
Les élèves voient que le point sur l'axe vertical monte ou descend mais aucun lien ne peut être établi avec les notions de croissance ou décroissance. Les expressions du type « *ça monte* » ou « *ça descend* » ne donnent pas sens.

Par contre, lorsque le point de coordonnées (x ; $f(x)$) n'est pas placé, la notion de maximum est éclairée par cette représentation : le maximum est une valeur de $f(x)$.

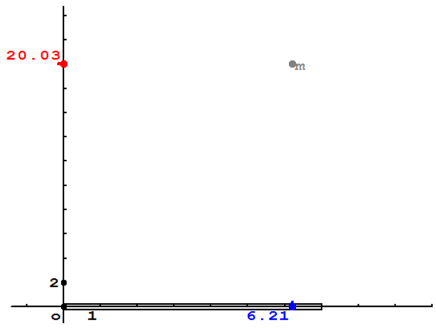
Construction du point m de coordonnées (*x ; f(x)*) :

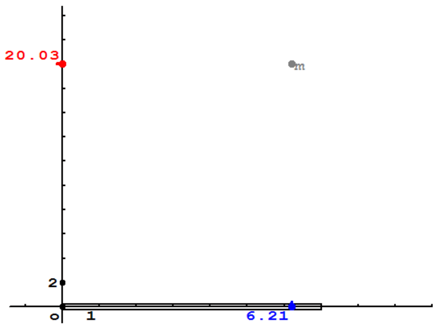
Création dynamique du point m à partir des deux nombres.





Les pointillés gris apparaissent depuis les points sur les axes pour donner naissance au point m avant de disparaître.



Cadre graphique 2D Touche 6 pour visualiser la construction de m. Touche Y de rappel.		La construction du point m est dynamique mais les traits de construction disparaissent pour ne pas être confondus avec les côtés du rectangle ONMP d'origine. *Couleurs et textures, aspect dynamique.*

Le point m recrée le lien fonctionnel entre les deux nombres, coordonnées de ce point.

Les couleurs (bleu, rouge et gris) utilisées permettent d'identifier les différents objets intervenant dans les différents cadres.

Cadre / Objet	Cadre géométrique	Cadre des grandeurs	Cadre numérique	Cadre graphique 2×1D	Cadre graphique 2D
Antécédent (bleu)	segment	longueur	antécédent	point et abscisse	abscisse
Image rouge)	surface	aire	image	point et abscisse	ordonnée
Lien fonctionnel (gris)	Contrainte de la situation : quart de cercle		cadre	lien	point m

Cependant le point m peut constituer une gêne dans l'apprentissage des concepts de croissance, décroissance, extremum… La position du point m (« *le point le plus haut* » correspond au maximum) ou l'étude de son déplacement (« *il monte* » correspond à une fonction croissante) sont des conséquences de ces concepts.

Construction point par point de la courbe :

Nous passons de la vision d'un seul point (photographie) à l'apparition de plusieurs points (album photos).

L'utilisation de la touche 7 permet d'entrer en mode trace pour conserver la mémoire du rectangle ONMP, des deux points sur les deux axes parallèles, du lien entre ces deux points, du point m dans le repère du plan.

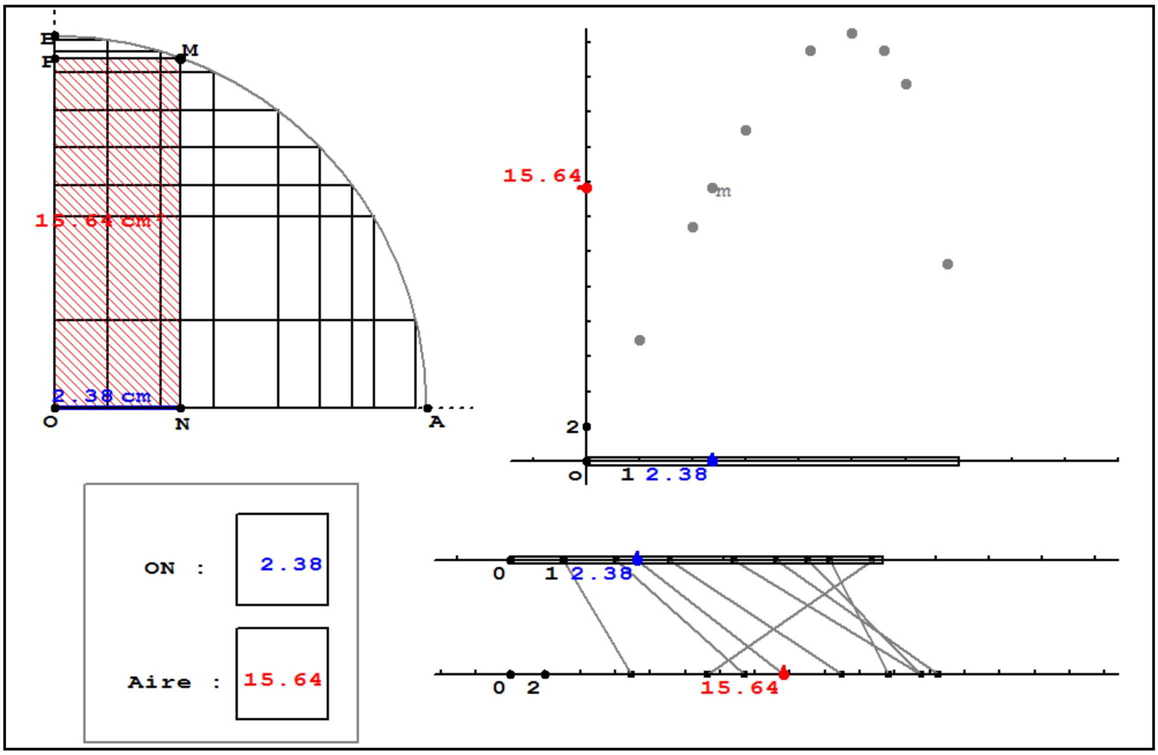
Ensuite, les touches Q, D, F, G, H, J, K, L permettent d'afficher les différentes photographies qui correspondent aux huit valeurs de référence pour ON.

L'élève se trouve ainsi confronté aux différentes traces dans les cadres géométrique, graphique en 2 × 1D et graphique en 2D.

Cette étape constitue une première approche de la notion de représentation graphique d'une fonction numérique. Elle doit permettre à l'élève d'associer mentalement :

- le dessin d'un rectangle ONMP ;
- le couple de nombres en relation ;
- le point m associé à ce couple de nombres dans le repère 2D.

Cette mise en relation à travers les différents cadres doit se faire à la fois sur les différentes traces laissées par les objets et sur la situation active.



L'utilisation successive des différentes modalités de déplacement du point N sur [OA] permet de passer progressivement d'une vision photos à une vision proche d'un film donc d'une représentation du discret à une représentation proche du continu.

Cette approche du continu s'opère à travers la trace laissée par le point *m* suite aux différentes valeurs affectées à la variable. Cette image mentale ressemble à celle créée lors de l'observation d'un album photos ou d'une bande dessinée. Cependant, pour que la notion de continuité se construise visuellement chez l'élève, les valeurs affectées à la variable doivent être ordonnées, comme d'ailleurs sont ordonnées les vignettes d'une bande dessinée.

Pour cela, il est donc nécessaire de faire varier ON en augmentant ou diminuant sa valeur. Plusieurs solutions techniques sont alors possibles :

1- utilisation de la souris et déplacement du point sur le premier axe de la représentation en 2 x 1D[29].

2- utilisation d'une flèche (←, →, ↑, ↓) et appuis successifs ;

3- utilisation d'une flèche (←, →, ↑, ↓) par un appui continu ;

4- utilisation de la touche Ctrl+P qui commande la répétition de commandes P.

Le choix de la solution technique constitue une véritable alternative didactique.

1- L'œil est attiré par la main qui apparaît à l'écran. On regarde le point de l'axe se déplacer et non le point *m* qui décrit la courbe de la fonction.

2- Les appuis successifs sur une flèche rappellent la prise de photos. On obtient donc un ensemble de clichés discontinus. Cette image mentale est renforcée par le mouvement de la main sur le clavier et le « clic » de la touche, tout comme lors d'une prise de vue. De plus, visuellement, on observe un saut du point *m* à l'écran, ce qui renforce au contraire l'idée du discret.

3- L'appui en continu s'apparente davantage à l'enregistrement d'un film. Cependant, le pas choisi constitue alors une nouvelle variable didactique. Comme pour un film où le nombre d'images par seconde est de 24 pour recréer la continuité du mouvement, le pas doit être choisi de façon à éviter le « saut » du point *m*. On peut utiliser, dans l'ordre, les valeurs suivantes :

a. *pas* = 0,02 ;

b. *pas* = 0,005 ;

c. *pas* = 0,00125.

4- L'utilisation d'une commande libère le manipulateur lors du mouvement de *m* : les valeurs de ON changent sans intervention « humaine », ce qui peut renforcer le concept de variable.

Quel que soit le pas choisi, nous restons là dans une construction point par point de la représentation graphique. Mathématiquement, des doutes peuvent subsister sur ce qui se passe entre deux points successifs, doutes qui seront levés par une étude approfondie de la fonction.

[29] Ce changement de variable des fichiers 1, 2 au fichier 3 (point N, puis point de l'axe) permet de prendre de la distance par rapport à la situation géométrique initiale et constitue une première étape vers la décontextualisation pour faire naître le concept de fonction.

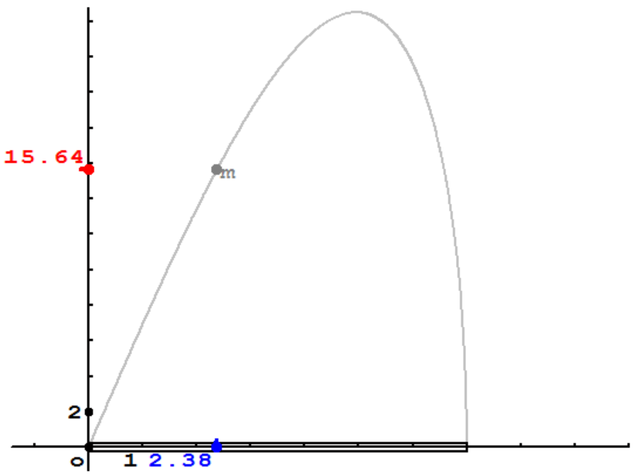
Cependant, pour l'élève, l'image mentale qu'il se construit doit lui permettre d'accéder au concept de fonction continue.

Parallèlement, une réflexion peut être menée sur le rapprochement ou non des points. Pour un pas donné relativement petit (0,02, par exemple), plus les points sont proches, plus la courbe prend une direction proche de l'horizontale. Inversement, plus les points sont éloignés, plus la courbe se rapproche de la verticale. Un travail autour du coefficient directeur de la tangente en un point et du nombre dérivé peut être mené. De plus, lors de l'appui en continu d'une flèche, la « vitesse de déplacement » du point *m* donne également une idée du concept de nombre dérivé.

La mémoire des valeurs prises par (*x ; f(x)*) est conservée à travers la trace des points m de coordonnées (*x ; f(x)*).

Représentation graphique :

<table>
<tr>
<td><u>Cadre graphique 2D</u>

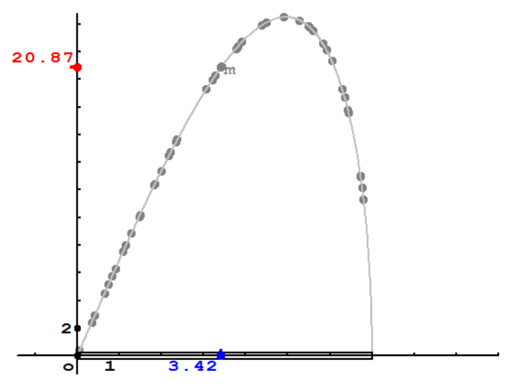
Touche C pour faire apparaître la courbe.</td>
<td>
</td>
<td>Le déplacement du point N en continu sur le segment [OA] entraîne :
- le déplacement du point m en continu sur la courbe ;
- le déplacement du point bleu à l'intérieur du cadre noir.

Couleurs et textures, aspect dynamique.</td>
</tr>
</table>

Le déplacement en continu (pseudo continu) du point m sur la représentation graphique (après sortie du mode trace) renforce l'image de continuité de la fonction.

Mode trace et représentation graphique :

Le retour au mode trace permet de superposer les traces des différents points m avec la courbe.

Cadre graphique 2D Touche 8 pour passer en mode trace.		Le déplacement du point N en continu sur le segment [OA] entraîne : - le déplacement du point m en continu sur la courbe ; - le déplacement du point bleu à l'intérieur du cadre noir. *Couleurs et textures, aspect dynamique.*

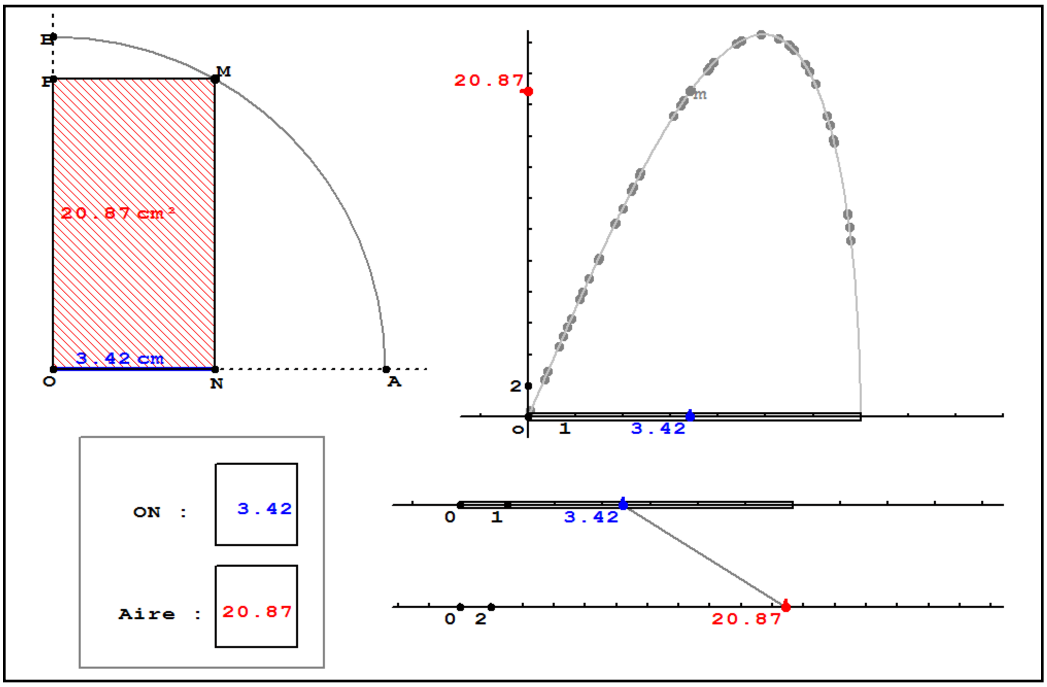
On voit bien sur cette image que la courbe est une ligne qui symbolise l'ensemble des points de la représentation graphique : il est important que les élèves prennent conscience de cette réalité.

Ici encore, la solution technique utilisée pour faire varier l'antécédent constitue un véritable choix didactique :

- souris, clavier …
- valeur du pas.

Bilan :

A la fin de la présentation, nous retrouvons à l'écran toutes les étapes clés du cheminement : situation géométrique, cadre des grandeurs, cadre numérique, cadre graphique (1D, puis 2D). L'élève peut donc faire les allers et retours nécessaires pour se créer une image mentale pertinente du concept de fonction. Court-circuiter une étape ou la faire disparaître à l'écran revient à créer un vide dans lequel l'élève va se forger ses propres représentations mentales souvent incomplètes et parfois erronées.



Cette situation permet de travailler dans différents cadres :

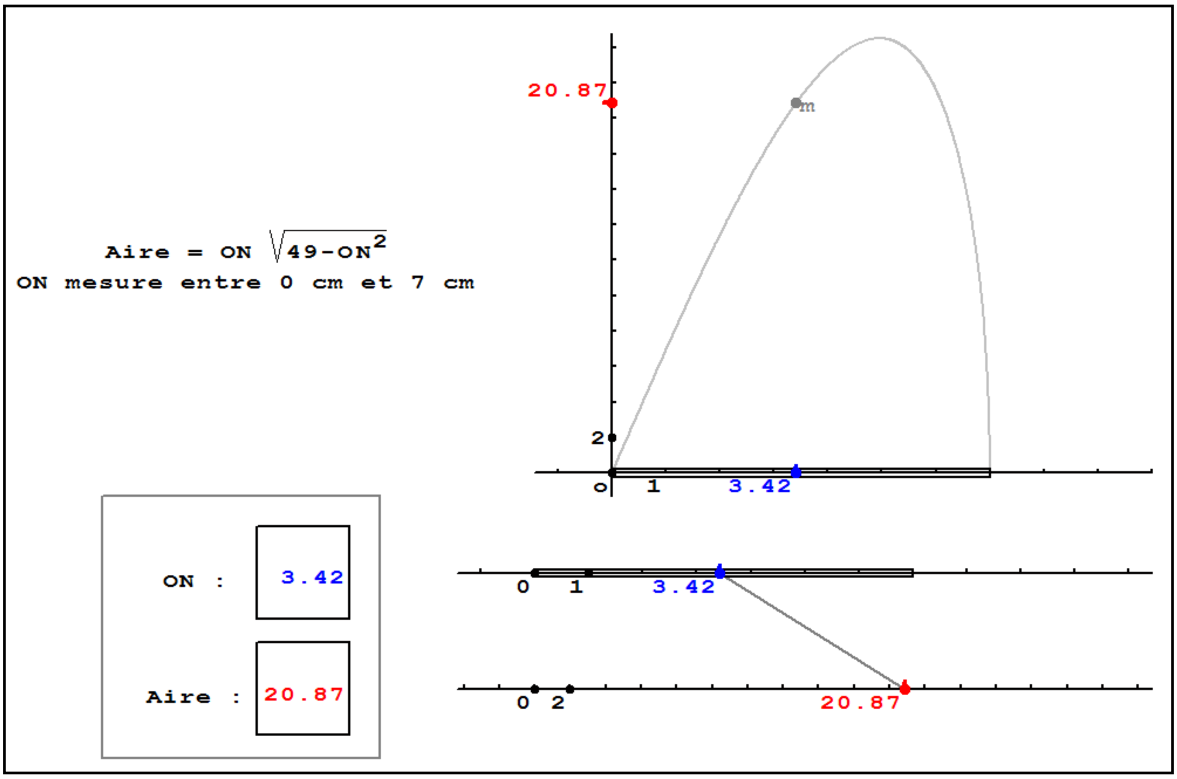
- dans le cadre géométrique, la figure ne doit pas être perçue comme un dessin unique mais comme le représentant de l'ensemble des dessins que l'on peut obtenir à partir des contraintes de l'énoncé ;

- dans le cadre numérique, les nombres correspondent à un dessin précis (un instantané de la situation) ;

- dans le cadre graphique, la courbe est la représentation de tous les possibles et c'est le seul objet mathématique qui montre l'ensemble des antécédents, images et liens entre eux.

Ce passage par les différents cadres a pour but d'aider les élèves à se créer une image mentale pertinente d'une fonction numérique à variable réelle. L'objet visuel final doit donc permettre à l'élève de ne concentrer son attention que sur les aspects numériques et graphiques, en oubliant donc provisoirement la situation géométrique initiale.

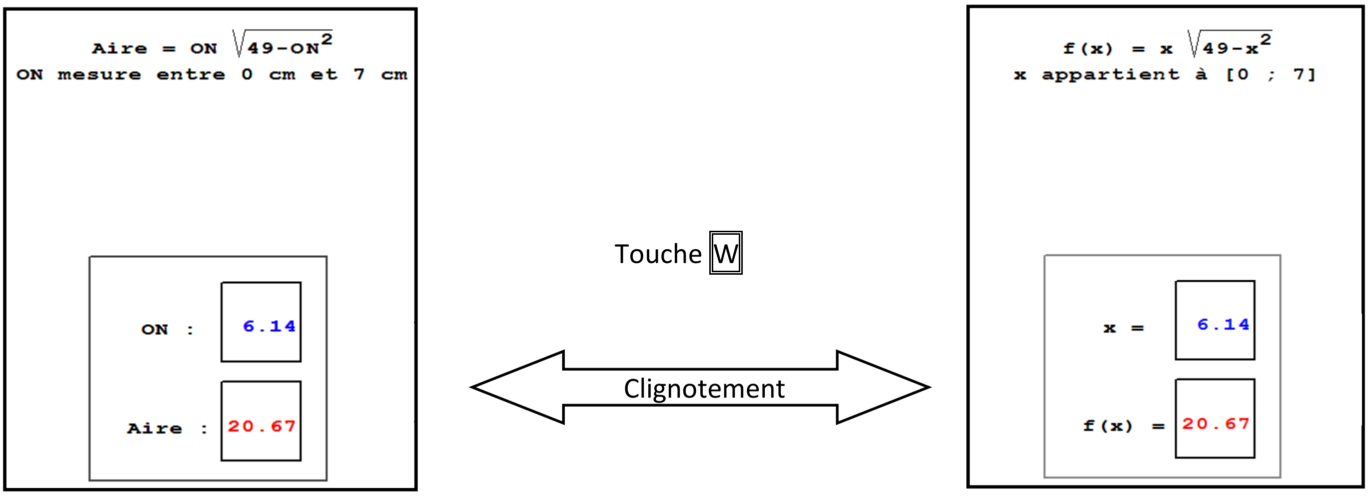
Disparition du cadre géométrique et passage aux notations algébriques :



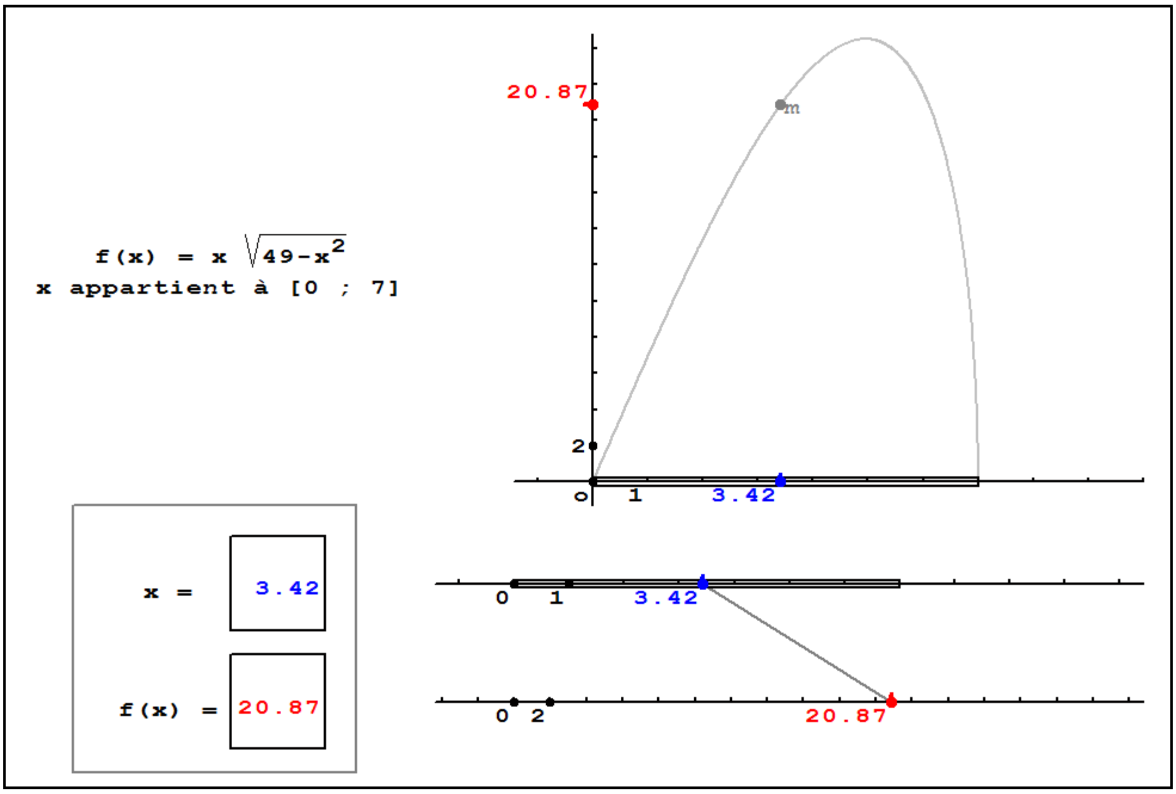
La touche $\boxed{9}$ permet de faire disparaître le cadre géométrique afin de le remplacer uniquement par la relation sur les deux grandeurs concernées (longueur, aire). C'est une deuxième étape dans la décontextualisation. L'attention des élèves peut davantage se concentrer sur l'aspect fonctionnel de la situation. Les éléments qui se modifient à l'écran sont moins nombreux :

- les nombres de départ et d'arrivée ;
- le point *m* de la courbe de coordonnées ces deux nombres.

La touche $\boxed{\text{W}}$ constitue la troisième étape de cette décontextualisation. Le cadre des grandeurs, présent dans les écritures « ON, Aire », disparaît au profit des notations fonctionnelles « *x, f(x)* »

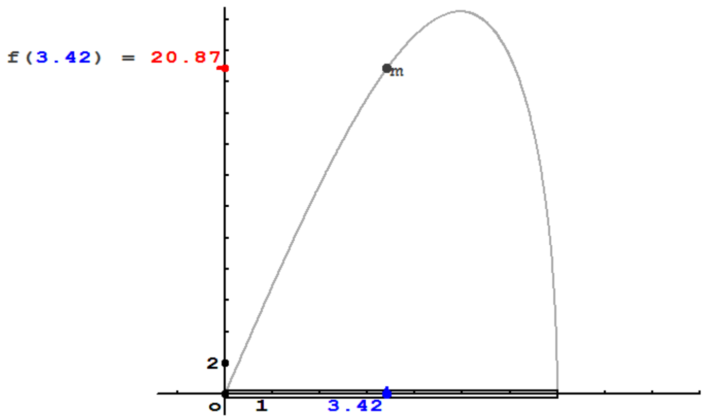


Ce dernier objet visuel obtenu ne contient plus de références à la situation géométrique initiale prétexte à l'étude de la fonction. Seuls, différents aspects de la fonction sont présents : tableau dynamique de valeurs, représentation graphique en 2 × 1D, représentation graphique en 2D, expression algébrique.



Les notations *x* et *f(x)* utilisées dans le cadre littéral sont figées ; elles diffèrent en cela des nombres qu'elles représentent qui eux changent visuellement dès que l'on modifie les valeurs.

L'image précédente se compose de deux parties : la partie supérieure contient des éléments qui illustrent l'aspect global de la fonction (expression littérale et représentation graphique) ; la partie inférieure offre une vision ponctuelle de la fonction (valeurs numériques et leurs représentations graphiques en 2 x 1D). Cependant, dans la représentation graphique en 2D, cohabitent les deux points de vue : global par la courbe et ponctuel par le point m.

Notation Touche **U** pour faire apparaître *f(..)* = au niveau de l'ordonnée.		*f*(3,42) = 20,87

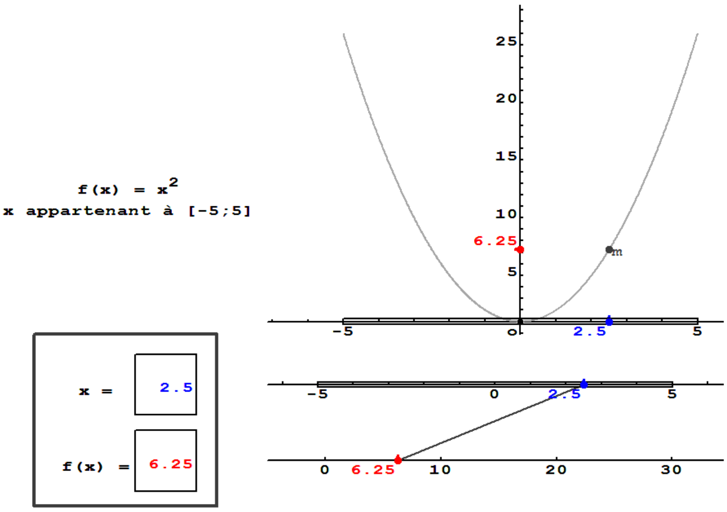
On renforce le lien fonctionnel en affichant la notation *f*(abscisse)=ordonnée. Les couleurs sont conservées : bleu pour l'antécédent, rouge pour l'image et gris pour le lien f( )=. On ajoute sur la représentation graphique un élément qui relève de l'aspect ponctuel de la fonction.

L'image finale obtenue regroupe différentes représentations d'une fonction numérique à une variable réelle. La base de ce fichier peut ainsi être reprise pour l'étude de n'importe quelle autre fonction.

4. Fichiers pour d'autres fonctions et d'autres situations.

A titre d'exemple, prenons la fonction définie sur [-5 ; 5] par $f(x)=x^2$.

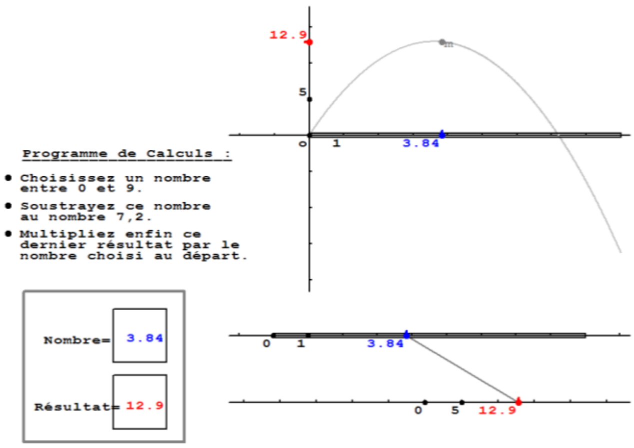
Le fichier, Fonction_base.g2w, permet de visualiser les représentations de cette fonction après avoir réalisé quelques modifications dans le texte du fichier.



Pour cela, il suffit d'ouvrir l'éditeur de texte de la figure et de modifier quelques éléments : la formule de la fonction f, les bornes de l'intervalle de définition x_0 et x_1, les valeurs extrêmes souhaitées pour l'image (y_m et y_M) ainsi que l'expression affichée à l'écran en modifiant le texte d'affichage (f(x) = \x^2\ ) pour le point B00 à la fin du texte de la figure.

De la même façon ces fichiers de base pourraient illustrer une fonction définie par un programme de calcul ou une autre situation géométrique ; pour cela, il faudrait connecter divers éléments variables ou affichés de la situation à la fonction sous-jacente. Les fichiers 1 et 2 pourraient être regroupés en un seul fichier lorsque l'on ne construit pas un tableau de valeurs[30].

Par exemple, voici l'image du fichier 3 (Prg_Calc_Base_3.g2w) pour un programme de calcul avant le passage à la formule algébrique :

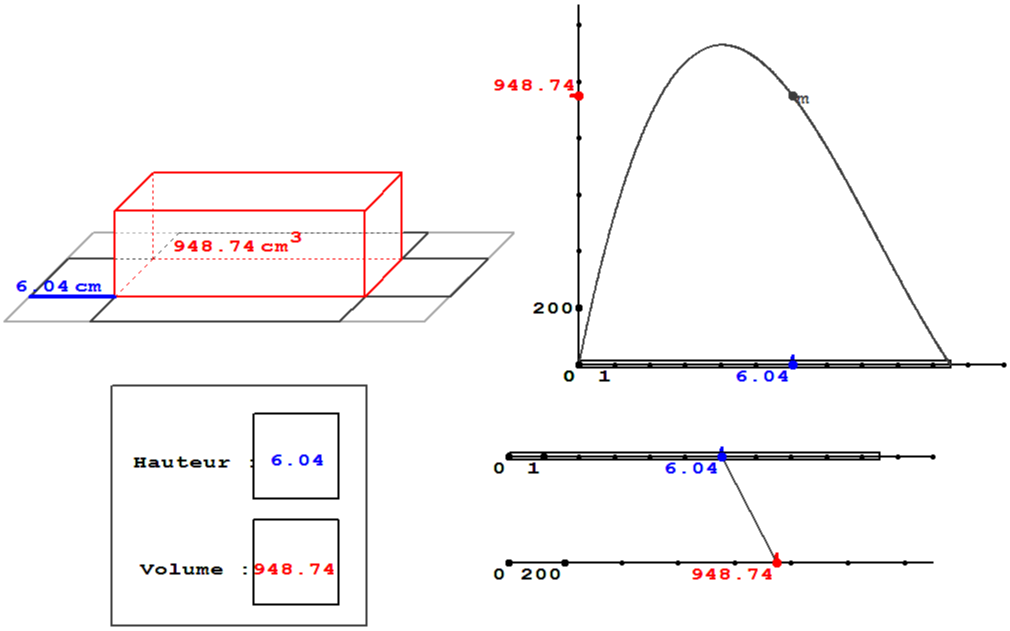


[30] Geoplan Geospace est limité entre autres dans le nombre d'objets construits (250).

On peut constater que l'absence de grandeurs implique l'absence d'extraction lors de la manipulation du fichier 12 (Prg_Calc_Base_12.g2w) .

Les fichiers peuvent être aussi utilisés pour connecter une situation géométrique dans l'espace. On utilise évidemment le logiciel Geospace. Les modifications à réaliser sont un peu plus complexes.

Voici par exemple, l'image du fichier 3 (Boite3v.g3w) pour la situation de la boîte du pâtissier avant décontextualisation vers la fonction sous-jacente :



D'autres fichiers[31] sont également disponibles pour d'autres situations sur le site de l'IREM de Rouen. Un code d'accès est nécessaire pour pouvoir télécharger ces fichiers : MILUC2010.

L'annexe 17🕑 contient un descriptif synthétique des touches utilisées sous Geoplan et Geospace (version GeoplanGeospace) pour l'ensemble des trois fichiers ainsi que l'image d'un clavier avec les informations utiles : ces touches sont identiques dans tous les fichiers élaborés pour différentes situations.

La manipulation des fichiers peut paraître complexe ; le nombre de touches utilisées est assez conséquent mais après un petit entraînement à la maison à l'aide du clavier de l'annexe 17, l'utilisation en classe ne pose pas de difficultés particulières. Un petit conseil : en cas d'erreur lors de la manipulation, il suffit de fermer le fichier sans enregistrer puis de l'ouvrir à nouveau avant de recommencer.

[31] Voir annexe 16 🕑

IV Perspectives.

Les fichiers informatiques décrits précédemment et leur utilisation en classe sont ici exclusivement mis au service de l'enseignement[32]. Cet usage des TUIC permet d'offrir un nouvel espace de monstration* en proposant des objets visuels dynamiques « didactisés ». La présentation répétée de fichiers construits sur le même modèle mais couvrant différentes situations (programmes de calculs, situations géométriques, fonctions de référence …) doit aider les élèves à mémoriser un ensemble d'images matérielles leur permettant d'accéder à des représentations mentales concrètes pertinentes des notions de variables et de fonctions à travers différents cadres.

Mais l'outil informatique doit également trouver sa place dans l'environnement d'étude de l'élève. Utilisés très tôt et régulièrement dans la scolarité, les logiciels de géométrie dynamique (GD) doivent participer à la construction de ces concepts. En effet, à partir de constructions géométriques simples, les élèves peuvent, par déplacement, prendre conscience des notions de variables libres, de variables dépendantes et d'invariants d'une situation. A titre d'exemple, réaliser avec un logiciel de GD la figure du rectangle inscrit dans un quart de cercle confronte l'élève au choix de l'objet géométrique variable et d'une grandeur associée :

- le point N du segment [OA] et la longueur ON ;

- le point P du segment [OB] et la longueur OP ;

- le point M du quart de cercle et l'angle $N\hat{O}M$ (ou $P\hat{O}M$) ...

Ce dernier choix de grandeur variable peut conduire d'ailleurs à modéliser la situation par une fonction dont la représentation graphique possède un axe de symétrie. Il devient alors aisé de percevoir le maximum pour $N\hat{O}M = 45°$, c'est-à-dire quand ONMP est un carré.

Coordonner ces deux usages des TUIC (monstration et manipulation) doit aider les élèves dans l'apprentissage des concepts étudiés. Cependant quelques règles de base s'imposent pour rendre efficace ces usages de la technologie. Certains éléments ont été présentés précédemment pour expliquer les choix didactiques dans la réalisation de fichiers monstratifs. D'autres principes sont à appliquer lorsque l'on souhaite conduire les élèves à utiliser efficacement divers outils technologiques (calculatrice, ordinateur). D'une part, le niveau d'instrumentation des logiciels par les élèves doit être suffisant pour réaliser le travail demandé : un excès de technicité nécessaire à la manipulation peut faire obstacle à l'apprentissage visé. Inversement, l'apprenant ne doit pas pouvoir se décharger sur l'outil technologique sans donner sens aux actions effectuées : les

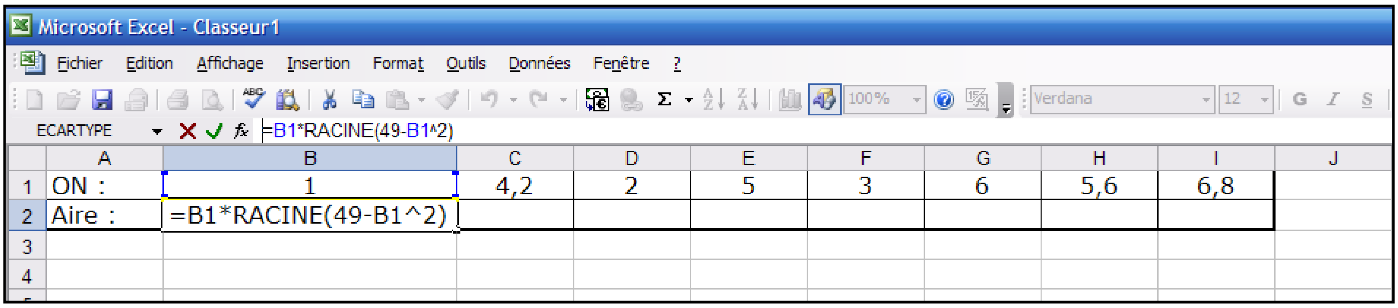
---

[32] J-B. Lagrange, N. C.-Dedeoglu, « Usages de la technologie dans des conditions ordinaires : le cas de la géométrie dynamique au collège », Recherche en Didactique des Mathématiques, Vol. 29, n° 2, pp. 189-226, 2009.

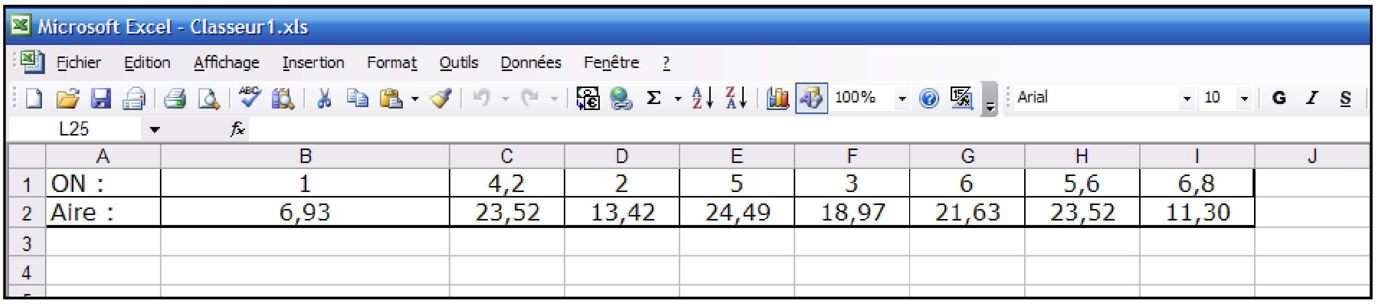
calculs exacts de certaines calculatrices ou les « copier coller » du tableur en sont des exemples. Enfin, le travail avec l'outil informatique doit être proche de la tâche mathématique étudiée : les ostensifs* doivent être les mêmes pour que s'opère un transfert réel entre le registre informatique et le registre papier/crayon (et inversement).

Pour terminer, nous vous proposons d'appliquer quelques-uns de ces principes aux tableurs, tableurs qui permettent de travailler le concept de fonction dans différents cadres (numérique, graphique, des formules). Nous avons choisi, pour illustrer ce propos, le programme de calcul correspondant à la situation du rectangle inscrit dans le quart de cercle : $x\sqrt{49-x^2}$.

L'utilisation usuelle du tableur en classe consiste à faire réaliser des tableaux de valeurs. Les élèves entrent une « formule » puis la « tirent » pour calculer les autres valeurs.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	ON :	1	4,2	2	5	3	6	5,6	6,8	
2	Aire :	=B1*RACINE(49-B1^2)								
3										
4										



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	ON :	1	4,2	2	5	3	6	5,6	6,8	
2	Aire :	6,93	23,52	13,42	24,49	18,97	21,63	23,52	11,30	
3										
4										

Les premières difficultés résident dans l'écriture du calcul. Elles relèvent du langage informatique et sont à analyser et à exploiter en relation avec le travail mathématique.

D'une part, l'utilisation systématique du signe « égal » en début de « formule » renforce le statut dynamique d'effectuation de ce signe, statut déjà prégnant chez l'élève. La production d'écritures de la forme « = A3 = B3 », employées pour tester la véracité d'une égalité, peut permettre de présenter et de faire cohabiter ces deux aspects dynamique et statique de l'égalité.

D’autre part, l’écriture de la fonction racine sous forme « racine() » est à rapprocher de la notation mathématique « f() ».

Enfin, l’écriture « B1^2 » doit être distinguée de la notation « B1² ». En langage algébrique, l’expression « x^2 » peut être considérée sous deux aspects :

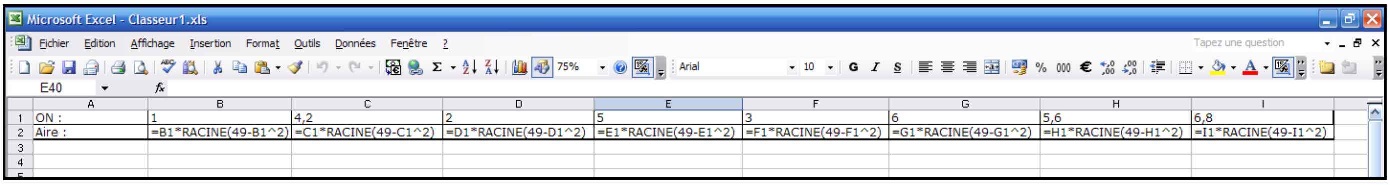
- l’aspect procédural correspondant au programme de calcul et s’écrivant en langage informatique « B1^2 » ;

- l’aspect structural désignant l’objet et s’écrivant « B1² ».

C’est donc ici l’occasion de faire réfléchir les élèves sur le « dilemme process product » : $3^2 = 9$ et $x^2 = x^2$.

D’autres difficultés sont, par contre, liées à la façon d’utiliser le tableur. Lorsque l’élève écrit le calcul à effectuer, il clique sur le nombre inscrit dans la cellule B1 ; il ne produit donc pas une formule mais plutôt une expression numérique même si c’est B1 qui apparaît dans l’écriture obtenue. Il se situe à un niveau post-numérique. Le fait d’écrire « B1 » et non de cliquer sur la cellule lui permettrait d’accéder à un niveau pré-algébrique. Cependant, très souvent, l’élève recopie la formule sans réellement percevoir le rôle relatif de la référence de cellule. Nous retrouvons là une utilisation du logiciel sans prise de sens réel. De plus, le passage en mode « affichage de formules » permet de constater que le calcul écrit est très éloigné de la formule algébrique attendue.

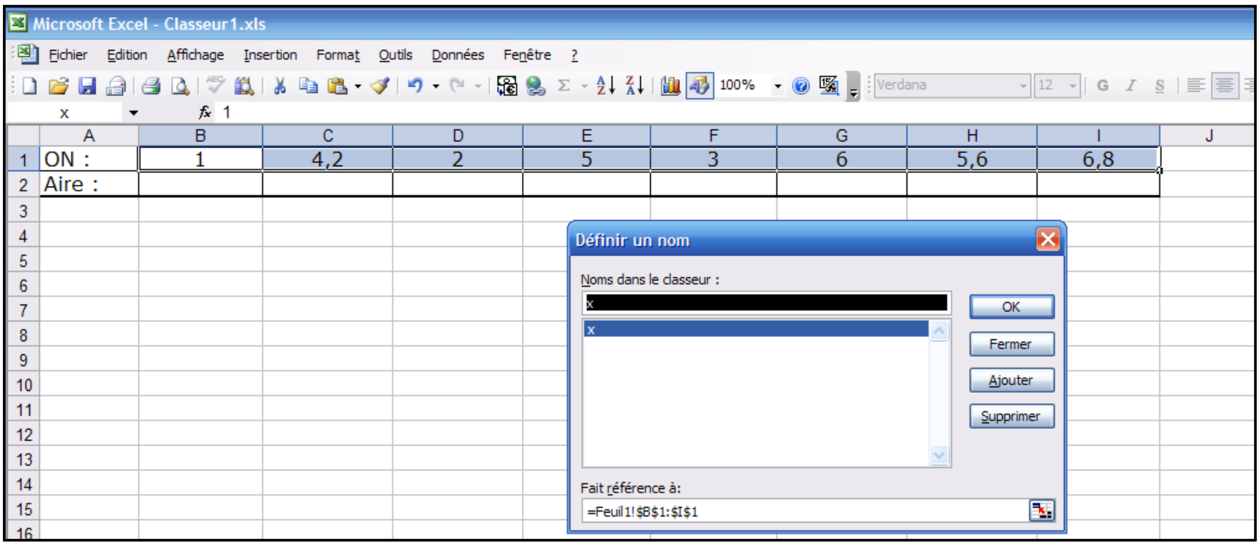
Contrairement à la formule algébrique $x\sqrt{49-x^2}$ où la notation unique « x » désigne l’ensemble des valeurs possibles, le tableur utilise une notation différente pour chaque valeur de la variable : B1, C1, …



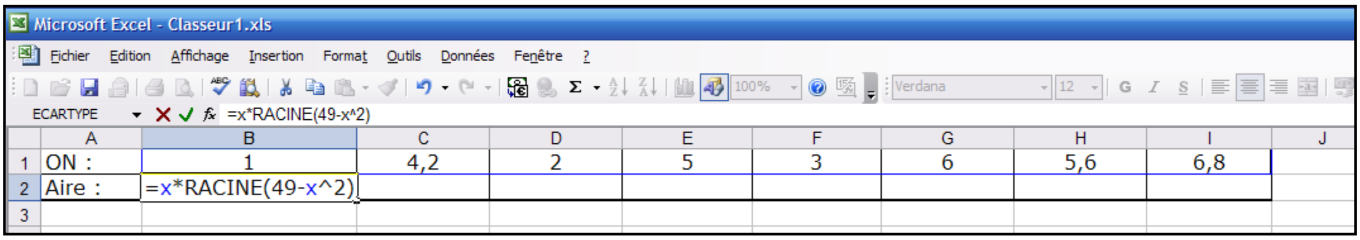
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ON :	1	4,2	2	5	3	6	5,6	6,8
2	Aire :	=B1*RACINE(49-B1^2)	=C1*RACINE(49-C1^2)	=D1*RACINE(49-D1^2)	=E1*RACINE(49-E1^2)	=F1*RACINE(49-F1^2)	=G1*RACINE(49-G1^2)	=H1*RACINE(49-H1^2)	=I1*RACINE(49-I1^2)
3									
4									

Les tableurs présentent cependant certaines fonctionnalités qui permettent de contourner cet écueil et d’utiliser le logiciel avec un langage semblable au langage littéral. Il suffit pour cela de nommer les cellules, par exemple « x »[33].

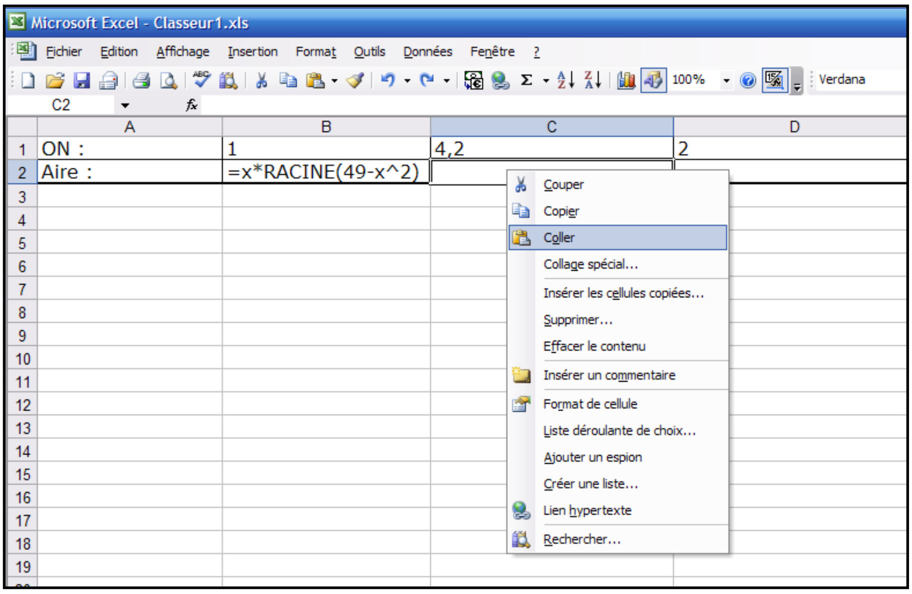
[33] On a utilisé la version 2003 de Excel. Dans la version 2007, l’ergonomie est différente mais on peut aussi nommer les cellules ou une plage de cellules ; cependant, cela peut être effectué dans le classeur ou dans une feuille du classeur : on peut ainsi nommer x plusieurs fois dans le même fichier.



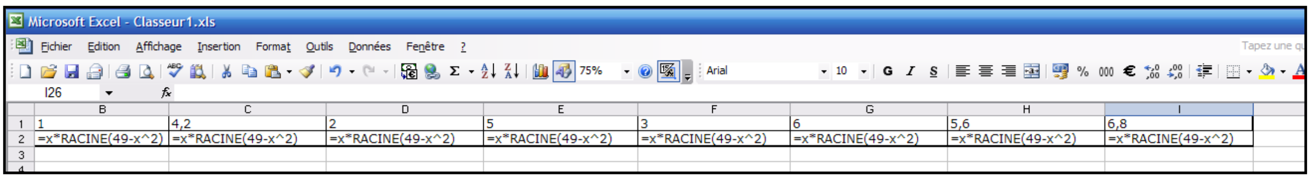
Les élèves entrent ensuite une formule semblable à celle utilisée en mathématique :



Le jeu de couleurs permet d'associer la variable x à l'ensemble des valeurs possibles, encadrées de la même couleur. Pour renforcer le rôle de la formule unique pour un ensemble de calculs, la recopie peut se faire en mode affichage de formules en copiant la formule de la cellule B2 puis en la collant dans la cellule C2.



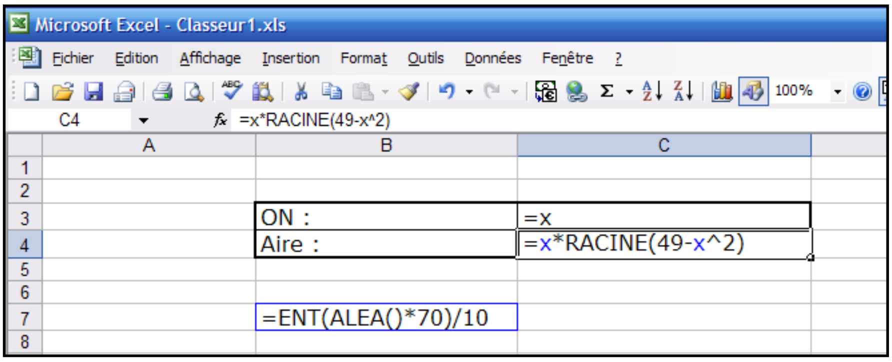
On peut ensuite recopier la formule pour toutes les valeurs nommées x.



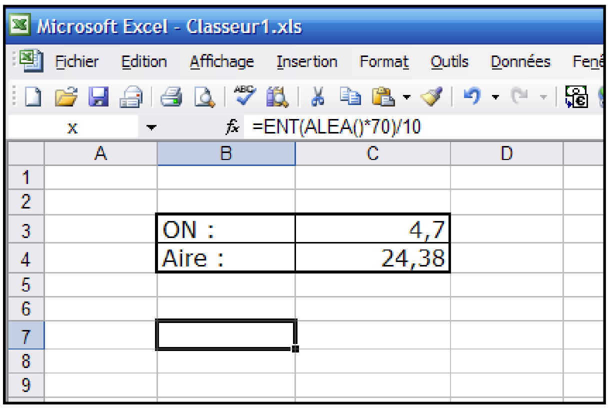
Le basculement en affichage classique permet d'affecter à x la valeur située ici dans la même colonne que la formule. On obtient alors le tableau de valeurs déjà présenté.

D'autres fonctionnalités permettent d'obtenir un tableau de valeurs dynamique de la situation.

L'affectation de la variable x peut se faire aléatoirement :

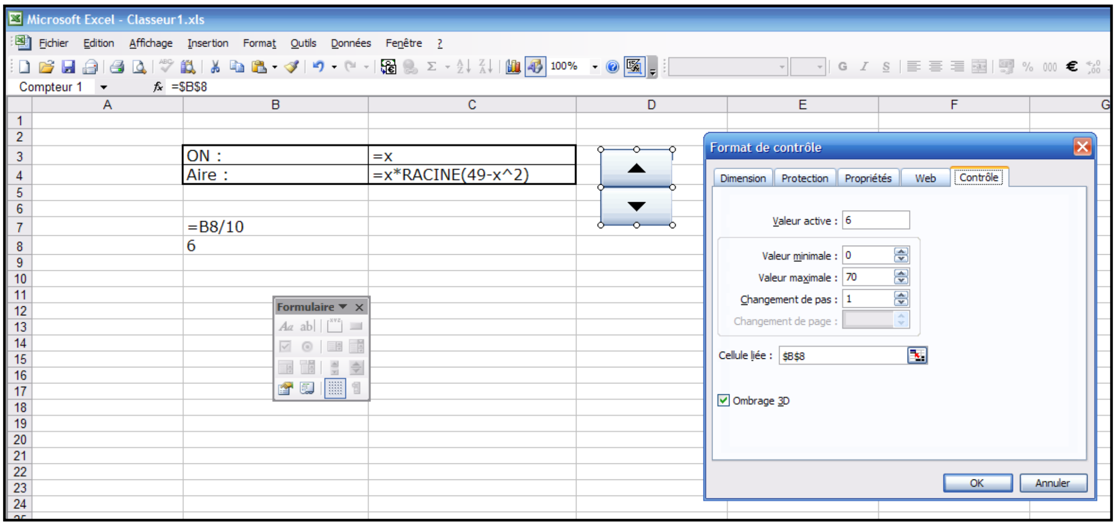


La formule écrite dans la cellule B7 permet de générer un décimal d'ordre 1 aléatoire compris entre 0 et 7. On peut ainsi trouver dans les cellules C3 et C4 des notations proches des notations fonctionnelles : variable x et image de la variable : $x\sqrt{49-x^2}$. Le contenu de la cellule B7 nommée x est écrit en blanc de façon à ne pas apparaître en mode calcul.

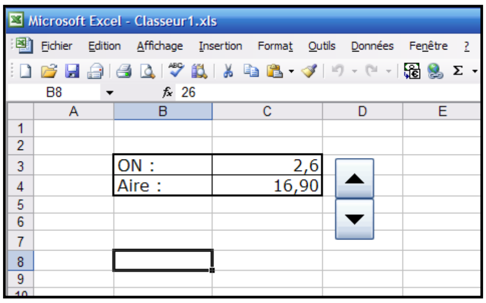


Appuyer sur la touche F9 permet de réactualiser la valeur de x.

L'utilisation d'un curseur permet de faire varier x régulièrement. Les affichages ci-dessous montrent les formules permettant de faire varier les valeurs de 0 à 7 avec un pas de 0,1 et le résultat obtenu en affichage classique :



⇩



Nous retrouvons, appliqués au tableur, différents principes décrits à propos du logiciel de géométrie dynamique : visions « album photos », « photo », « bande dessinée », « film », de la situation ; modalités de variation aléatoire ou ordonnée régulier …

Bien d’autres fonctionnalités des tableurs permettent de proposer des objets visuels qui doivent aider les élèves à se construire des représentations mentales concrètes pertinentes des concepts étudiés. L’utilisation des représentations graphiques associées offre également une richesse insoupçonnable …

Mais force est de constater à nouveau qu’une utilisation du logiciel selon des modalités par défaut sans réelle réflexion didactique sur ce qui est visualisé conduit à proposer aux élèves des images matérielles peu porteuses de significations permettant d’accéder à ces représentations mentales concrètes pertinentes.

GLOSSAIRE

affordance : se dit de la capacité d'un objet à suggérer sa propre utilisation. Utilisé dans différents champs, notamment en psychologie cognitive, ce terme a été inventé par le psychologue de la perception, Gibson.

appréhension discursive : appréhension qui consiste à lire la figure comme un réservoir d'hypothèses auquel on cherche à appliquer des théorèmes connus pour en déduire des conclusions que l'on ne cherche pas à obtenir de manière perceptive.

appréhension perceptive : appréhension qui consiste à un traitement automatique de l'image par le cerveau.

cadre : aspect théorique dans lequel peut se décliner un concept. Par exemple, les cadres algébrique, numérique et de la représentation graphique du concept de fonction.

image matérielle : sorte de schéma issu de la perception qui se localise dans la mémoire à court terme et qui interagit avec la représentation mentale concrète.

monstration : par opposition à manipulation, action qui permet au professeur de montrer des objets visuels lors de l'utilisation des TUIC en classe.

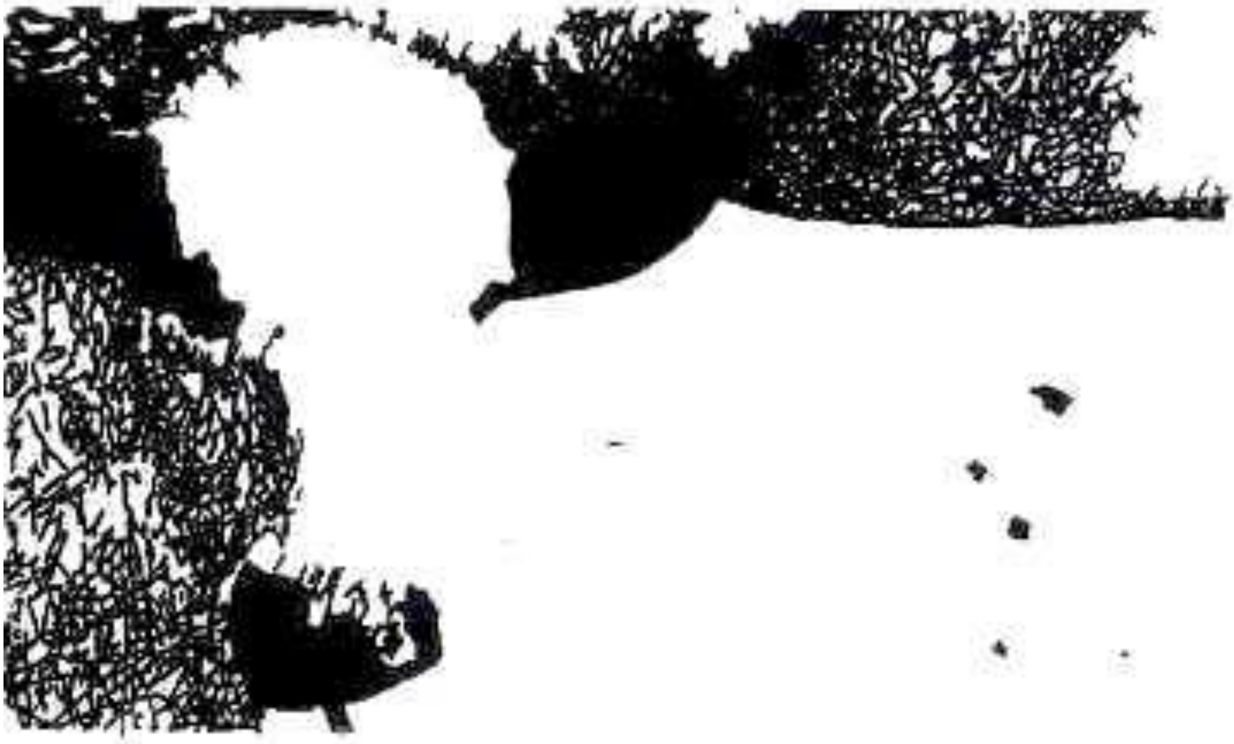
ostensif : objet qui a pour un individu une forme « matérielle » sensible et qui peut être manipulé comme un stylo, un compas mais aussi un point, un dessin, des mots, des gestes, etc.

paratexte : illustration entourant un texte. Par exemple, une note, une image, un schéma, un tableau, etc.

registre : type de langage permettant de transmettre de l'information sous différentes formes. Par exemple, une fonction peut être définie dans les registres des tableaux, du langage naturel, symbolique ou graphique.

représentation mentale concrète : sorte de schéma issu de l'image matérielle qui se localise dans la mémoire à long terme et qui interagit avec la perception.

ANNEXE 1

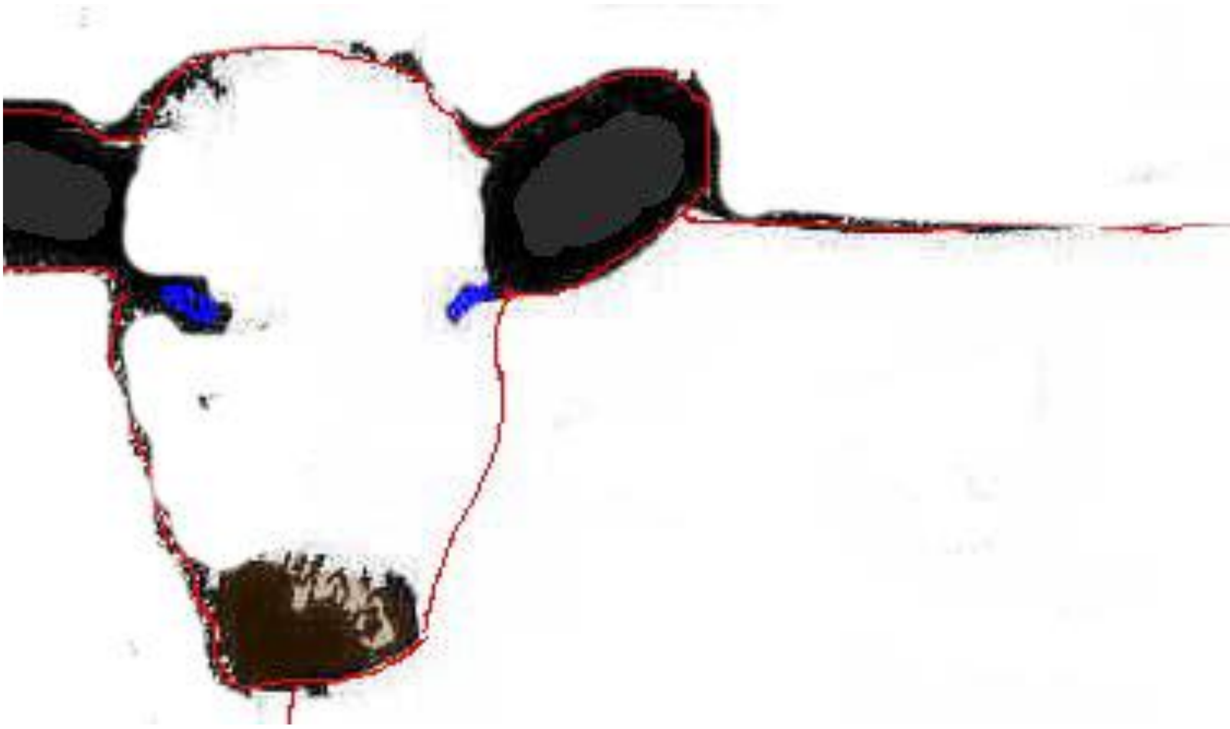


Que voyez-vous ?

Tournez la page SVP.

Tournez la page SVP.

ANNEXE 2

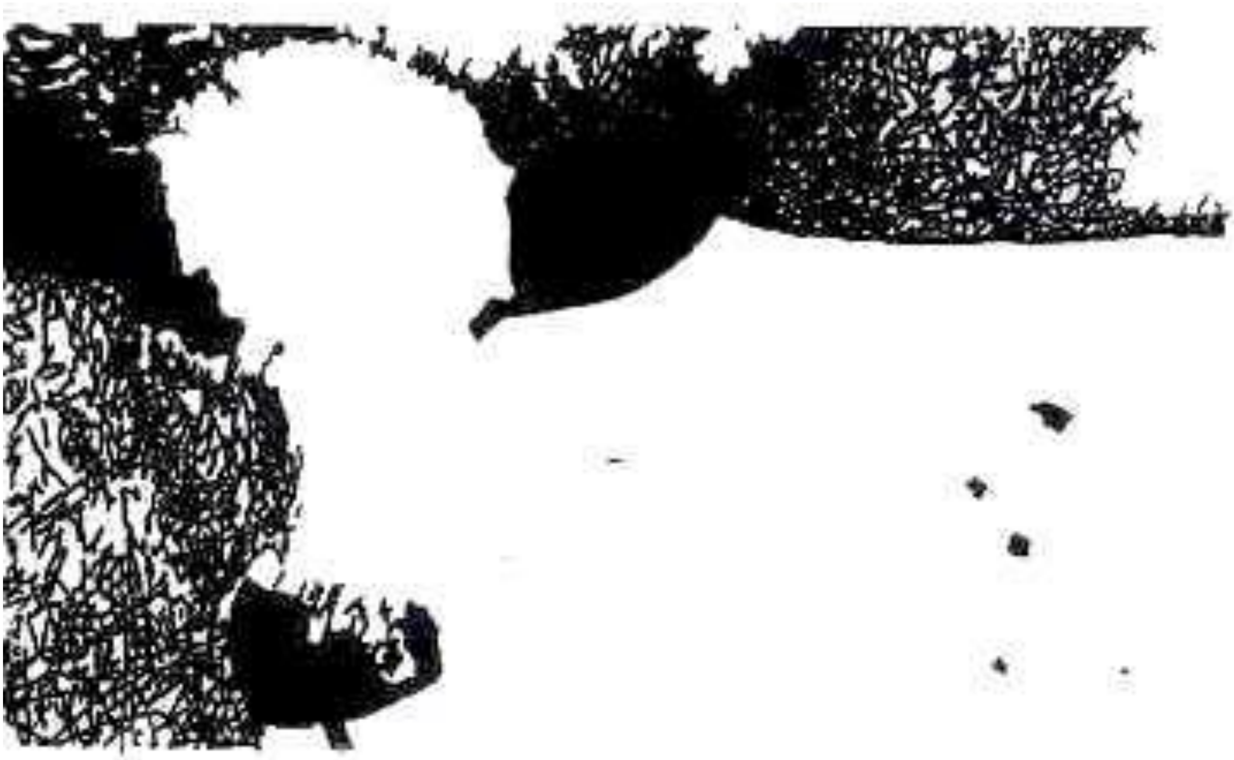


Et maintenant ?

Tournez la page SVP.

Tournez la page SVP.

ANNEXE 3

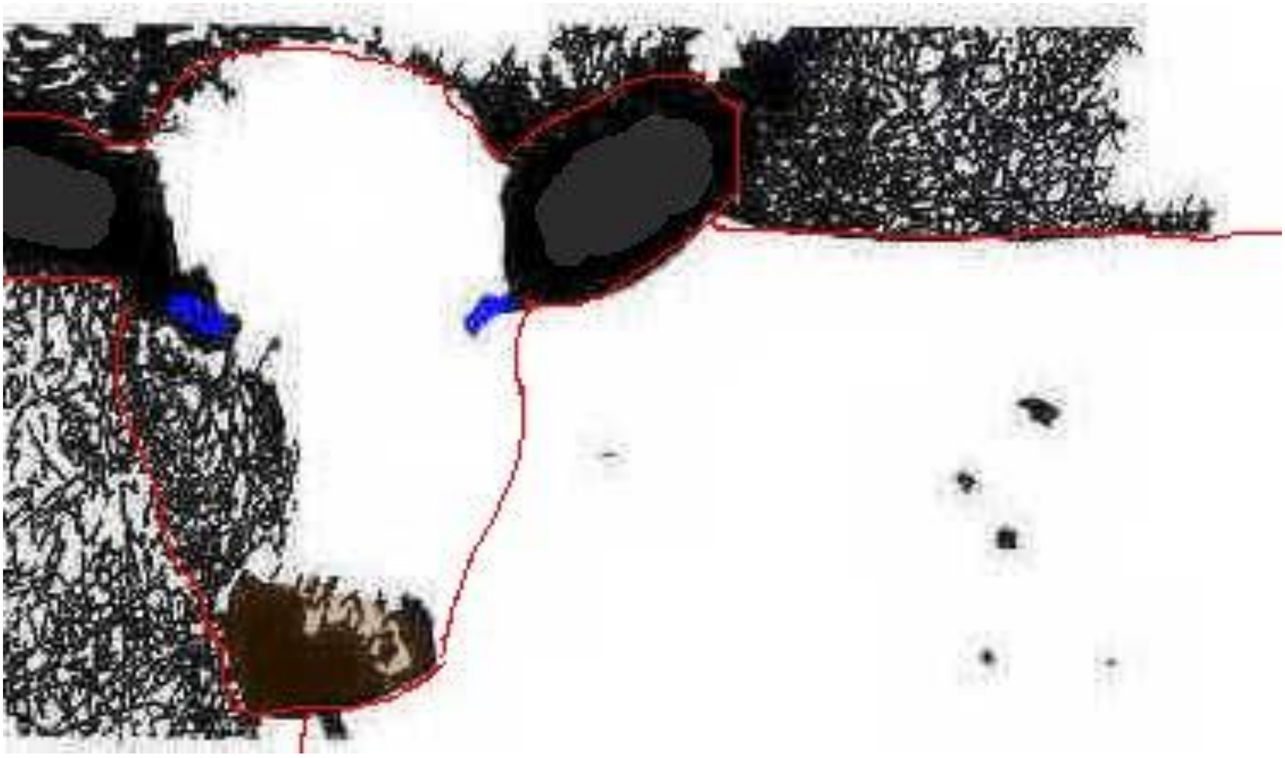


Et là ?

Tournez la page SVP.

Tournez la page SVP.

ANNEXE 4

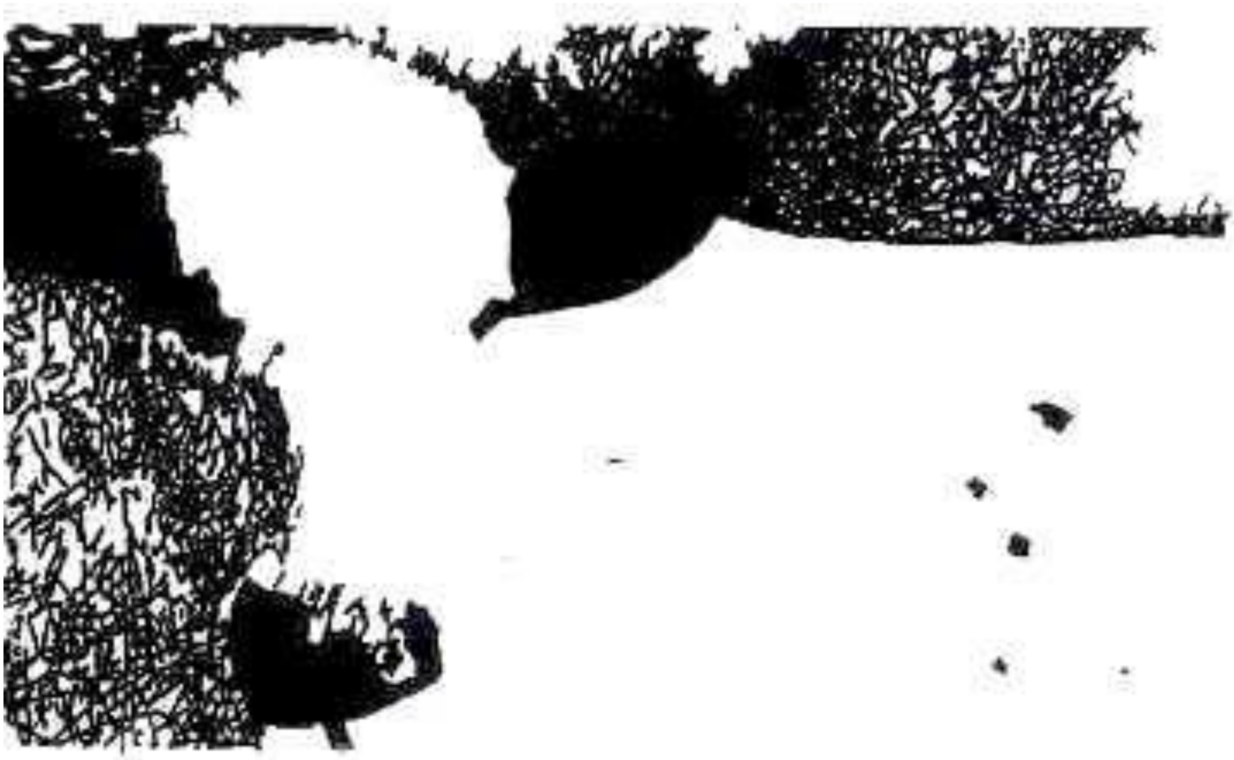


Et… ?

Tournez la page SVP.

Tournez la page SVP.

ANNEXE 5



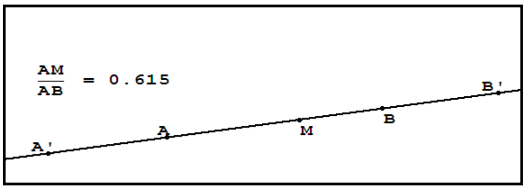
Enfin... ?

ANNEXE 6

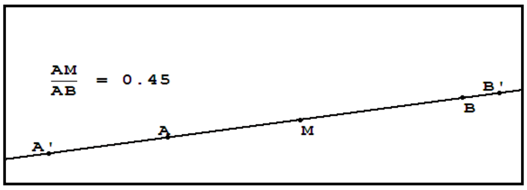
Lors du déplacement du point M sur (AB), la variabilité des rapports prend le pas sur leur égalité. Ce n’est que lors d’un arrêt sur image que l’égalité reprend sa juste place. Pourquoi donc proposer un objet visuel dynamique alors que la présentation d’une succession d’objets visuels statiques serait plus judicieuse pour illustrer l’égalité de rapports ? Pour cela, la fonctionnalité « affectation aléatoire » du logiciel doit être privilégiée plutôt qu’un déplacement à la souris ou avec le clavier du point mobile.

Par ailleurs, pour éviter que les rapports restent fixes lorsque les points A ou B se déplacent, il faut rendre indépendante de A et B la position de M sur la droite (AB).

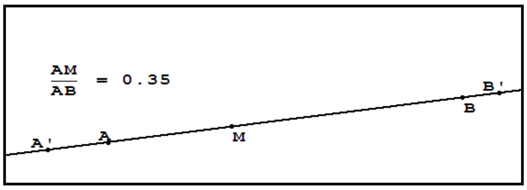
Pour cela, il suffit de créer initialement deux points A’ et B’ et la droite (A’B’) et de placer ensuite les points A, B et M sur cette droite.



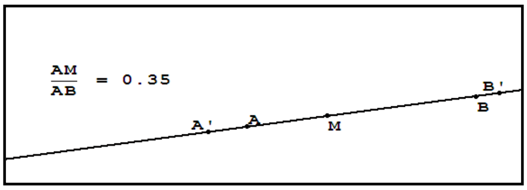
Situation initiale.



On déplace B sur la droite.



On déplace A sur la droite.

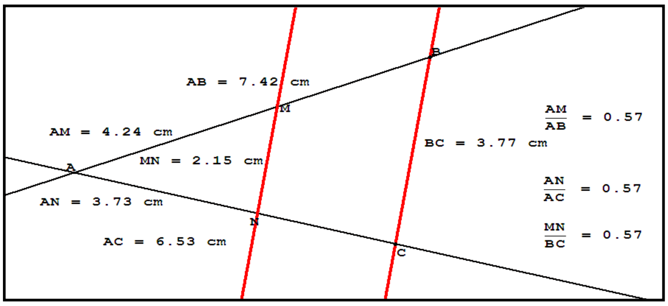


On déplace A’ sur la droite.

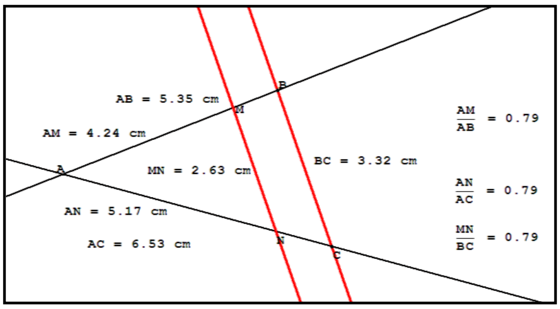
Les points A et B peuvent alors être déplacés sans modifier la position du point M et donc le rapport $\frac{AM}{AB}$ varie. Si l’on déplace les points A’ ou B’ qui définissent la droite, le logiciel déplace les points A, B et M de manière à maintenir le rapport constant : en fait, le vecteur $\overrightarrow{A'B'}$ étant le vecteur unitaire de la droite, le logiciel définit la position de ces points par leur abscisse qui ne change pas.

Il reste cependant une difficulté pour concevoir le fichier : le point A est commun à deux droites.

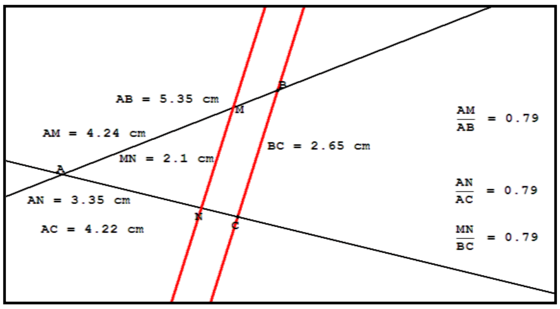
Une première approche, satisfaisante pour le mathématicien, serait de maintenir AM constant lorsque le point A est déplacé. L’appréhension séquentielle crée ainsi une image matérielle conforme à l’énoncé de la situation : la position du point M est définie sur (AB) par la longueur AM.



Situation initiale.

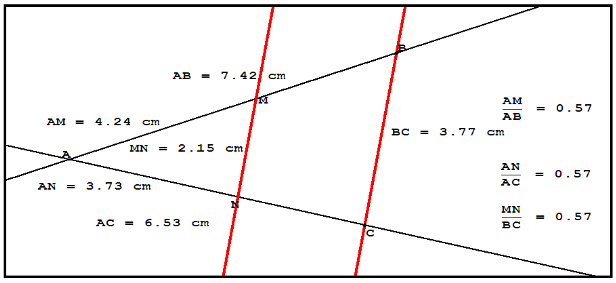


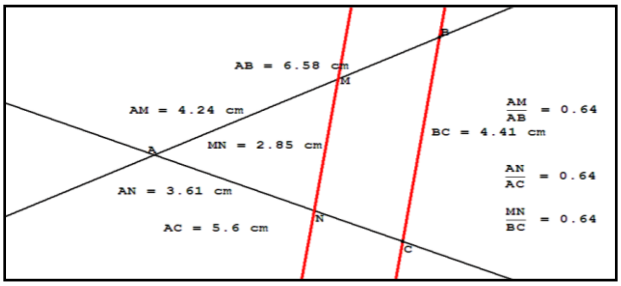
On déplace B dans le plan.



On déplace C dans le plan.

L'image matérielle créée est satisfaisante parce que les longueurs ne dépendant pas du point B (ou du point C) sont les seules à rester constantes. De plus, les rapports varient lors du déplacement du point B mais restent constants lorsque l'on déplace le point C du fait du parallélisme des droites et de la fixité des points A, B et M. On élimine ainsi la proportionnalité induite par le logiciel.





On déplace A dans le plan et la longueur AM reste constante.

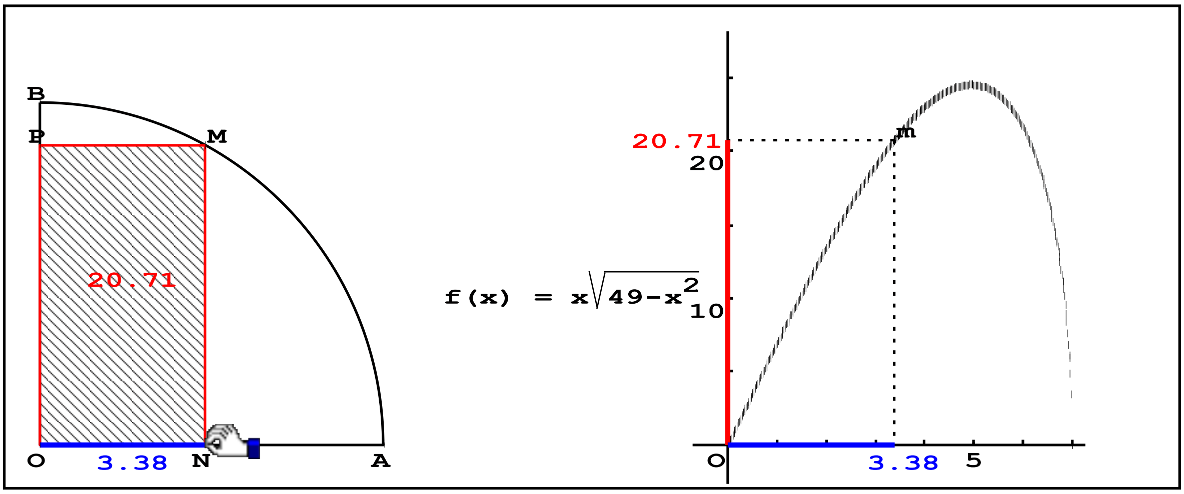
Par contre, dans ces deux objets visuels, la fixité de AM lors du déplacement du point A risque de perturber l'appréhension perceptive : en effet, le déplacement du point A provoque celui du point M qui est le résultat de la constance de AM et de l'alignement des points A, M et B. Or il ne devrait être dû qu'à la conservation de l'alignement. L'image matérielle n'est plus satisfaisante lorsque le point A est déplacé.

Une solution satisfaisante peut consister à agir sur le point B de la même manière que pour le point A lorsque l'on souhaite déplacer ce dernier. Il convient donc de superposer deux figures alternant grâce à une commande de basculement suivant les déplacements des points souhaités, soit A, soit B, indépendamment de M. Le point C peut, quant à lui, être déplacé en toute circonstance.

Le fichier correspondant, THALES.g2w, a été réalisé et est disponible sur le site de l'IREM de Rouen. Pour l'utiliser, il convient d'identifier plusieurs fonctionnements : initialement, déplacer les points suivant des modalités aléatoires puis lorsque l'égalité des rapports est dégagée par les élèves, on peut envisager un déplacement en continu à la souris.

ANNEXE 7

L'observateur porte son attention sur les joueurs blancs et compte le nombre de passes. Il ne voit généralement pas l'homme déguisé en gorille qui apparaît à l'écran et y reste quelque temps.



De la même façon, dans le fichier Geoplan ci-dessus, l'élève est concentré sur la main qui permet de déplacer le point N alors que l'enseignant souhaiterait qu'il observe la représentation graphique de la fonction.

Si l'on souhaite observer le gorille, il devient alors très difficile de compter les passes entre les joueurs blancs. Si l'élève se concentre sur le déplacement du point m de la représentation graphique, il ne fait plus le lien avec la situation géométrique d'origine, d'autant plus que ce lien n'est que mental car il y a rupture visuelle entre les deux cadres.

ANNEXE 8

ACTIVITE : AIRES ET VOLUMES.

On considère un segment [AD] de longueur 6 cm.
On note M un point quelconque de ce segment puis on construit le point B tel que l'angle $\widehat{MAB}$ est droit et AB = 1,2 + MD. On construit ensuite le rectangle MABC.
On pose AM = x.

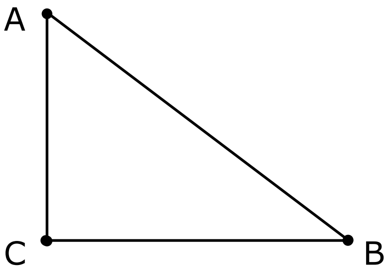
1. Exprimez AB en fonction de x puis l'aire $\mathcal{A}$ du rectangle MABC en fonction de x.
2. On construit la pyramide de base MABC, de sommet S tel que AS = 3 cm et les triangles ABS et AMS sont rectangles en A.

Exprimez le volume V de la pyramide SMABC en fonction de x.
Que pouvez-vous en conclure ?

ANNEXE 9

Tableaux objet-grandeur-mesure :

Objet	Grandeur	Mesure
Segment [AB] 	Longueur AB AB = 5 cm = 50 mm	Mesure de longueur AB ou d(A,B) ou $\|\overrightarrow{AB}\|$. 5 si on prend pour unité le cm, 50 si on prend le mm.

Objet	Grandeur	Mesure
Surface triangulaire ABC 	Aire $\mathcal{A}$ $\mathcal{A} = \frac{3\ \text{cm}\ x\ 4\ \text{cm}}{2}$ $\mathcal{A} = \frac{30\ \text{mm}\ x\ 4\ \text{cm}}{2}$ $\mathcal{A}$ = 6 cm² = 600 mm²	Mesure de l'aire $\mathcal{A}$ 6 si on prend pour unité le cm², 600 si on prend le mm².

Objet	Grandeur	Mesure
Angle $\widehat{ACB}$ 	Angle $\widehat{ACB}$ $\widehat{ACB} = 90° = \frac{\pi}{2}$ rad	Angle $\widehat{ACB}$ 90 si on prend pour unité le degré, $\frac{\pi}{2}$ si on prend le radian.

Dans ce dernier cas, le terme angle est largement usurpé. Autrefois, l'objet géométrique était le secteur angulaire, la grandeur était l'angle et la mesure se nommait écart angulaire. Aujourd'hui, le mot angle désigne l'objet et certains didacticiens proposent le mot ouverture pour désigner la grandeur de l'objet.

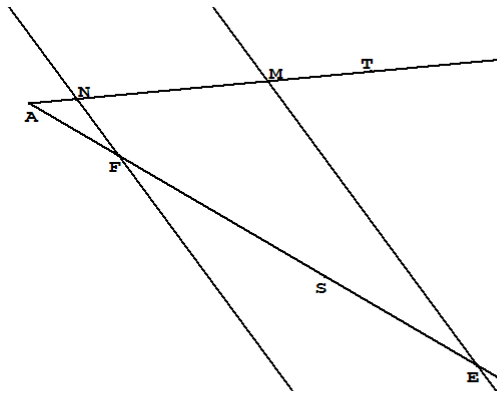
ANNEXE 10

On considère deux demi-droites [AT) et [AS) telles que A, T et S ne soient pas alignés et **AT = AS = 7,2 cm.**

On place le point N sur [AT) tel que AN = 1 cm.

On place un point M mobile sur le segment [NT] et le point F sur [AS) tel que SF = AM.

La parallèle à la droite (NF) passant par M coupe la demi-droite [AS) en E.



I- Partie 1 :

On pose **AM = 5 cm.**

1- Construire la figure.

2- Calculer AE.

II- Partie 2 :

On pose maintenant **AM = *x* cm** et **AE = *y* cm.**

1- Quelles sont les valeurs possibles de x ?

2- Démontrer que $y = x(7,2 - x)$.

3- Déterminer AE lorsque AM = 2 cm.

4- Déterminer AM lorsque AE = 11,27 cm.

5- Calculer AE lorsque AM = 55 mm.

6- ***a.*** Démontrer que le triangle AME est isocèle en A lorsque AM = 6,2 cm.

b. Démontrer que lorsque AM = 6,2 cm, les droites (ME) et (TS) sont parallèles.

7- On appelle I le milieu de [AT].

Quelle est la longueur de la trajectoire parcourue par le point E lorsque le point M décrit le segment [NI] ?

ANNEXE 11

Voici 5 situations mettant en jeu deux grandeurs dépendant l'une de l'autre :

Circuit électrique :

Une résistance de 3 ohms est mise en série avec un générateur et on détermine la tension U aux bornes de cette résistance lorsqu'elle est traversée par un courant d'une certaine intensité I.

Mécanique :

Un coureur à pied se déplace à la vitesse de 3 m/s. Il parcourt ainsi une distance d qui dépend du temps t.

Géométrie 1:

On considère un triangle équilatéral de côté *a* et on veut calculer son périmètre P.

Economie :

Un DVD vierge coûte 3 € dans un magasin de la ville. On veut calculer le prix P lorsque qu'un client achète *x* DVD.

Géométrie 2 :

On considère un rectangle de côtés 3 cm et *a*. On veut calculer son aire A.

ANNEXE 12

Exemple 1 :

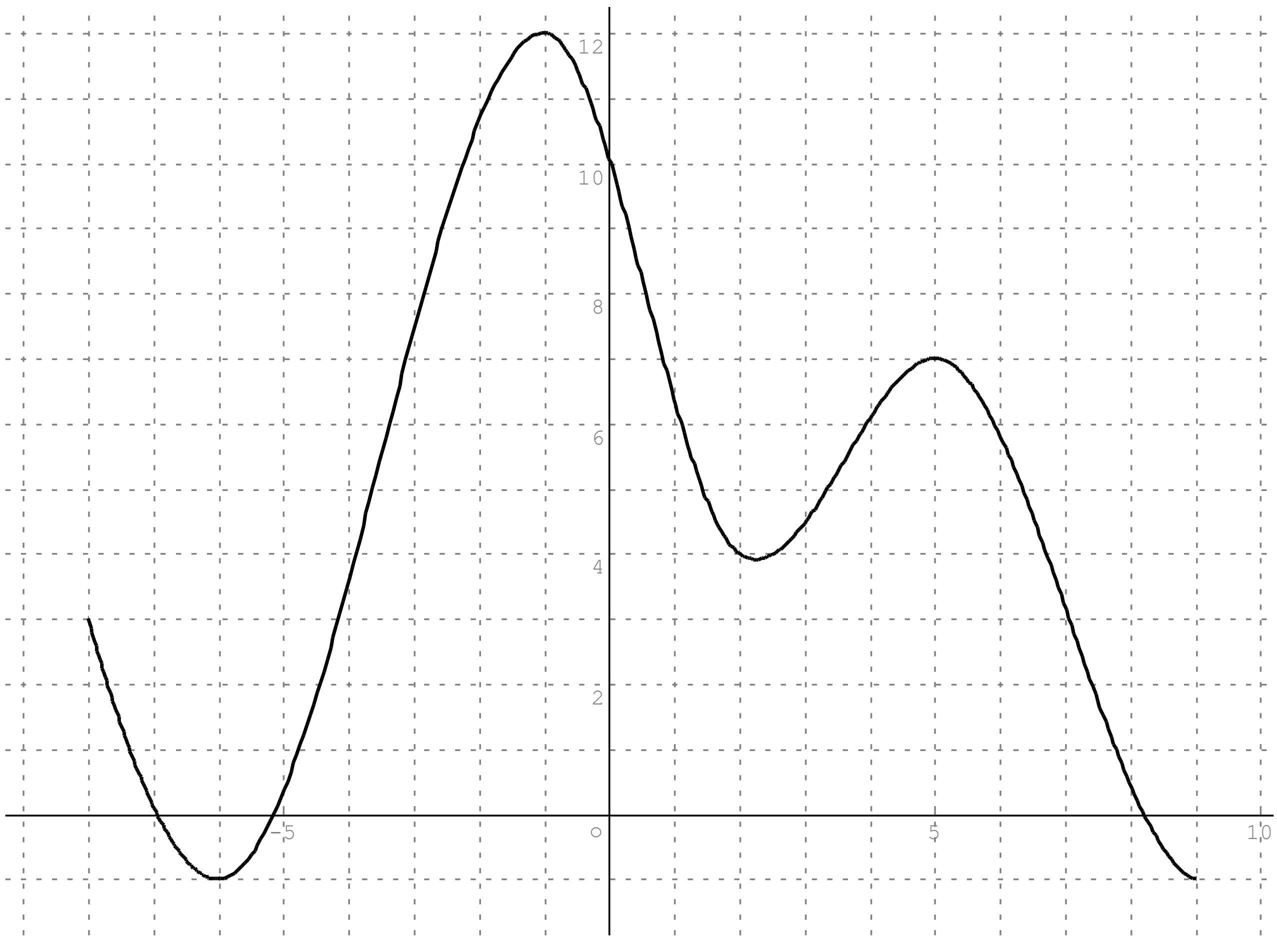
On considère un programme de calcul (ou une fonction) de la variable t que l'on nomme g.
On le définit par un tableau complet de ses valeurs :

t	-1	5	2,4	3	8	4,5	12	-2,6	7,9
$g(t)$	3	7	12,3	-4	-2,6	2	7	-5	8

a. Donnez les images de 5, de 12 et de 2 par g.
b. Quels sont le ou les antécédents de -5, de 12, de 8 et de 7 par g.
c. Déterminez $g(3)$.
d. Résolvez $g(t)=7$ puis, résolvez $g(t)<3$.
e. Donnez une expression de $g(t)$ en fonction de t.
f. Représentez graphiquement g.

Exemple 2 :

On considère une fonction (ou un programme de calcul) de la variable z que l'on nomme h.
On la définit par sa représentation graphique :



a. Donnez les images de 5, de 12 et de 2 par h.
b. Quels sont le ou les antécédents de -5, de 12, de 8 et de 7 par h.
c. Déterminez $h(3)$.
d. Résolvez $h(z)=7$ puis, résolvez $h(z)<3$.
e. Donnez une expression de $h(z)$ en fonction de z.
f. Donnez le tableau complet des valeurs de h.

Exemple 3 :

On considère maintenant un tableau de valeurs d'une certaine fonction F de la variable u définie sur l'intervalle [-8 ; 9] :

u	-8	-6	-4	-1	0	0,8	3	5	9
$F(u)$	3	-1	3,5	12	10	7	4,5	7	-1

a. Donnez les images de 5, de 12 et de 2 par F.
b. Quels sont le ou les antécédents de -5, de 12, de 8 et de 7 par F.
c. Déterminez $F(3)$.
d. Résolvez $F(u)=7$ puis, résolvez $F(u)<3$.
e. Donnez une expression de $F(u)$ en fonction de u.
f. Représentez graphiquement F.

Autre exemple dans le même esprit mais sur un support différent :

Soit la fonction f définie sur [-5 ;4] dont on donne le tableau de variation ci-dessous :

x	-5		-2		1		4
Variation de f	1	↗	5	↘	-3	↗	2

a. Comparez 2 et $f(3)$, comparez $f(0)$ et $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, comparez 1, $f(-4,2)$ et 5.
b. Combien de solutions possède l'équation $f(x)=-1$? et l'équation $f(x)=3$?
c. Donnez une valeur de k pour que l'équation $f(x)=k$ admette 3 solutions.
d. Tracez une courbe représentative de f compatible avec ce tableau de variation.

Commentaires des trois premiers exemples :

OBJECTIFS :

- Différencier les cadres utilisés pour représenter une fonction et passer de l'un à l'autre.
- Montrer aussi les limites de certains de ces cadres comme le tableau de valeurs* pour une fonction définie sur un intervalle : on ne peut trouver toutes les informations souhaitées.
- Montrer qu'une courbe permet de construire un tableau de valeurs* et qu'inversement, avec un tableau de valeurs*, on peut construire plusieurs courbes.

*Tableau de valeurs est ici employé de la manière usuelle : c'est un tableau de certaines valeurs mais pas de toutes les valeurs de la fonction.

ANALYSE A PRIORI :

On veut ici associer programme de calculs et fonction ; on souhaite aussi donner différentes représentations d'un programme de calculs…

1. Le programme est ici défini par l'ensemble des nombres et des résultats, associés deux par deux.
Les élèves vont devoir utiliser le langage fonctionnel pour répondre aux consignes sous des formes différentes (images, antécédents) et faire usage des notations…
La question (e) n'a pas de réponse et n'en a pas besoin parce que la fonction *g* est pleinement définie par son tableau de valeurs complet.
La représentation graphique contient exactement 9 points isolés !

2. Le programme est ici défini par sa représentation graphique : il y a une infinité d'associations de réels de l'intervalle [-8 ; 9] dans $\mathbb{R}$. La lecture graphique est le seul moyen pour identifier « images » et « antécédents » pour répondre aux mêmes consignes : le trait doit être imaginé comme représentant un ensemble de points… Les élèves risquent fortement de faire la confusion entre points et nombres : 1 point pour 2 nombres (ses coordonnées) ; il y a un retour sur ce qu'est la courbe représentative d'une fonction.
On ne peut pas répondre à la question (e), même si on souhaiterait le faire. On peut réaliser un tableau de valeurs mais qui ne peut pas être complet…

3. Le tableau n'étant pas complet, le doute subsiste quant aux réponses aux questions posées: peut-on formuler une réponse ? Si oui, la réponse est-elle complète ? Si non, pourquoi ne peut-on pas la formuler ? Il n'y a pas de réponse ou bien la réponse n'est pas accessible.
On ne peut toujours pas formuler de réponse à la question (e).
La représentation graphique est alors multiple !
À l'issue de ces questions, on peut envisager les modalités de définition d'une fonction : son expression littérale avec son ensemble de définition, sa courbe représentative complète, son tableau de valeurs complet.

OUTIL :

Ces trois ou quatre exemples demandent une certaine maîtrise du changement de cadre autour du concept de fonction.

Il apparaît nécessaire en classe de réaliser progressivement un tableau facilitant ces passages d'un cadre à l'autre.

	Cadres	Fonction *h*	
Tableau de valeurs	Numérique	antécédent	image
Formule	Algébrique	variable x	image $h(x)$
Courbe	Graphique	abscisse d'un point	ordonnée d'un point

Par exemple, on donne un tableau de valeurs partiel ou complet en ligne dans lequel figurent des valeurs de la variable x sur la première ligne et celles de son image *h*(x) sur la seconde. On demande l'image de 3 et ce nombre figure dans le tableau sur les deux lignes. L'élève peut s'interroger pour savoir comment trouver l'information demandée…

En raisonnant à l'aide du tableau ci-dessus, il doit pouvoir passer des informations des lignes de x et de *h*(x) à des informations numériques et inversement : on veut l'image de 3 ; donc 3 est un antécédent ; c'est donc x qui vaut 3 et on cherche son image, soit *h*(x) ou *h*(3) ; donc l'information se situe dans la seconde ligne sous la case contenant le nombre 3 de la première ligne…

	Cadres	Fonction *h*	
Tableau de valeurs	Numérique	antécédent **3**	image **?**
Formule	Algébrique	variable $\boldsymbol{x=3}$	image $h(x)$ **?**
Courbe	Graphique	abscisse d'un point	ordonnée d'un point

Un autre exemple : on donne la représentation graphique complète d'une fonction *h* sur un intervalle et on demande l'image de 3.

En raisonnant à l'aide du tableau précédent, l'élève doit pouvoir passer des informations numériques aux informations graphiques et vice versa : on veut l'image de 3 ; donc 3 est un antécédent ; c'est donc l'abscisse d'un point et on cherche son ordonnée ; c'est l'image de 3…

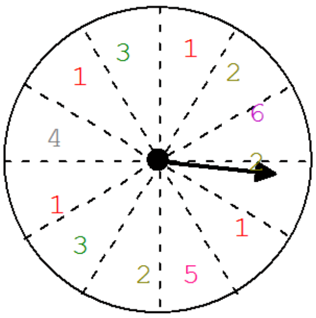
	Cadres	Fonction *h*	
Tableau de valeurs	Numérique	antécédent **3**	image **?**
Formule	Algébrique	variable x	image $h(x)$
Courbe	Graphique	abscisse d'un point **3**	ordonnée d'un point **?**

On peut envisager la même stratégie pour une fonction *h* définie par une formule pour déterminer par exemple une image.

ANNEXE 13

<table>
<tr><th>Exemple</th><th>Illustration de la diversité</th><th>Point de Vue</th></tr>
<tr><td>

La roue tourne…

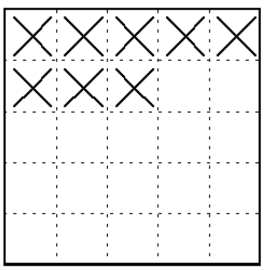


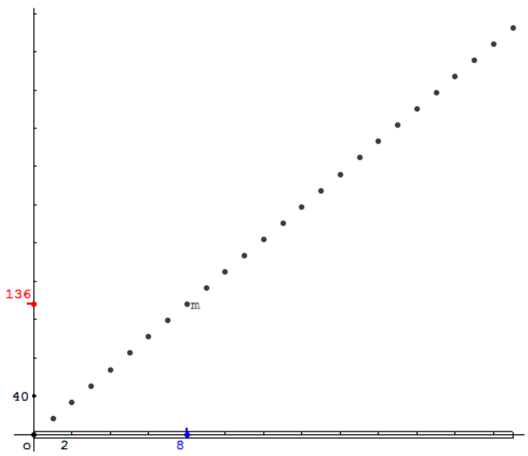
<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr>
<tr><td>$P(n)$</td><td>$\frac{1}{3}$</td><td>$\frac{1}{12}$</td><td>$\frac{1}{6}$</td><td>$\frac{1}{12}$</td><td>$\frac{1}{12}$</td><td>$\frac{1}{4}$</td></tr>
</table>

Un exemple de probabilité : une flèche tourne sur une roue partagée en secteurs identiques numérotés et s'arrête au hasard sur l'un d'entre eux. Une fonction et son tableau de valeurs.

</td><td>discret
fini</td><td>P O N C T U E L</td></tr>
<tr><td>

Les spectacles



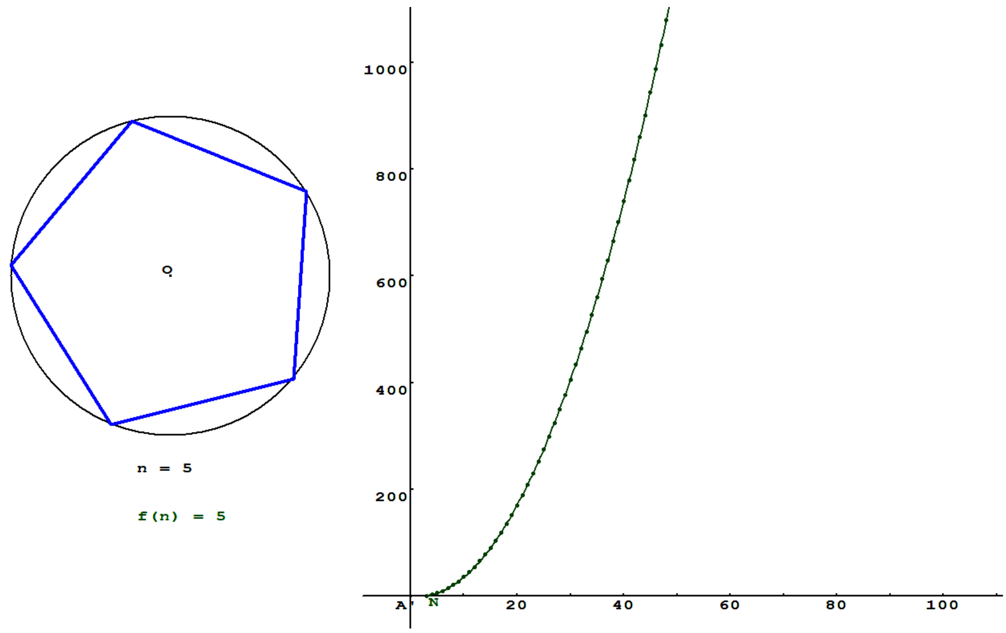


Un problème sur le prix de spectacles sur une année suivant trois modalités de tarifications. En haut à gauche, la carte cochée pour 8 spectacles et à côté, la représentation graphique associée à l'ensemble des 26 possibilités.

</td><td>discret
fini</td><td>G L O B A L</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Exemple</th><th>Illustration de la diversité</th><th>Point de Vue</th></tr>
<tr><td>

Diagonales d’un polygone…



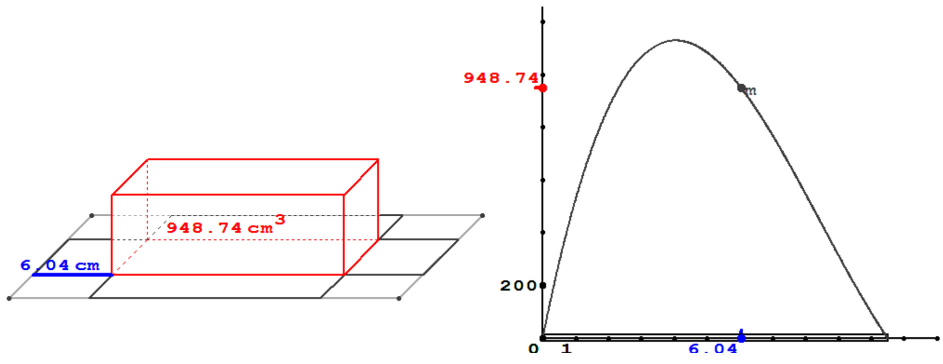
Le nombre de diagonales d’un polygone, situation conduisant à une représentation graphique d’une centaine de points qu’il est plus aisé d’appréhender avec une courbe. La situation approche les suites numériques.

</td><td>discret

fini

(à grande échelle)</td><td rowspan="2">G
L
O
B
A
L</td></tr>
<tr><td>

La boîte du pâtissier



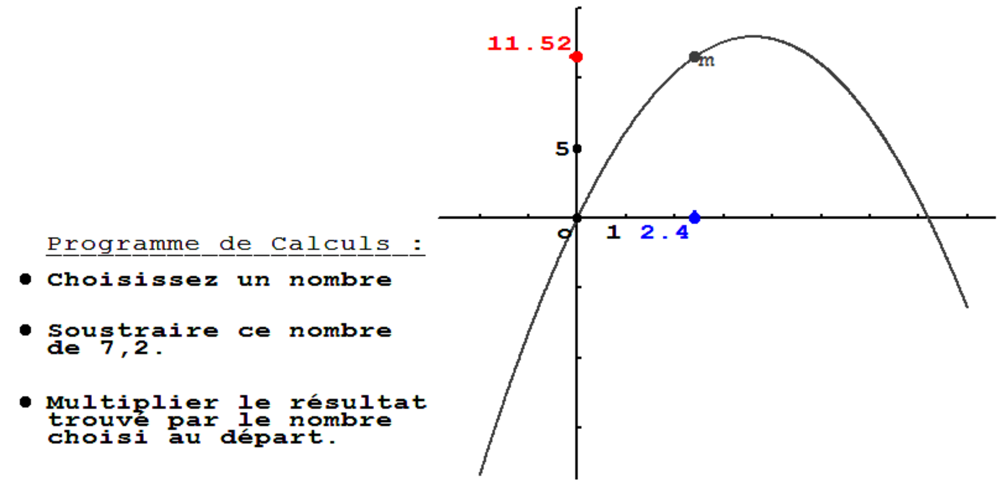
On construit une boîte à partir d’une feuille dont on retire aux quatre coins un même carré.
On cherche la boîte de volume maximum.
Une situation dans l’espace pour une représentation graphique dans le plan.

</td><td>continu

borné</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Exemple</th><th>Illustration de la diversité</th><th>Point de Vue</th></tr>
<tr><td>

Un programme de calcul

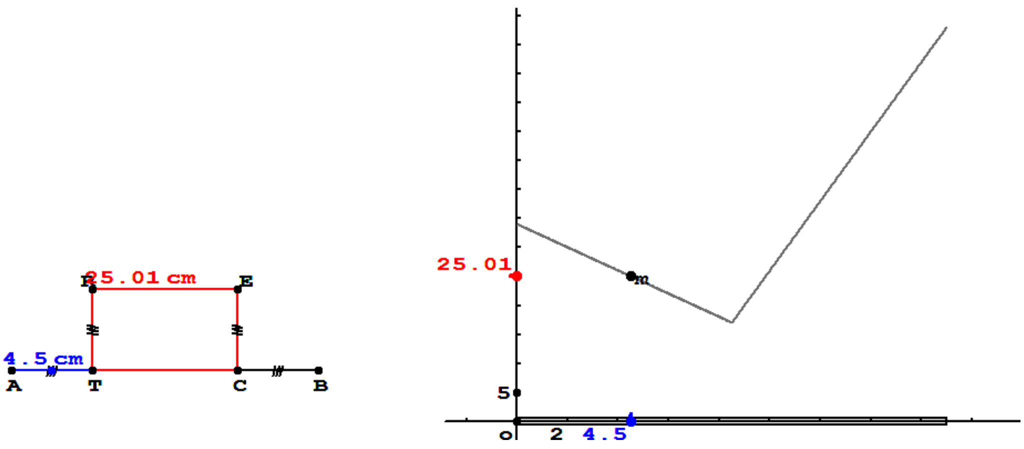


Un exemple à partir d'un programme de calcul défini sur l'ensemble des nombres : la fonction vue dans différents registres et différents cadres…

</td><td>continu

non borné</td><td rowspan="2">G
L
O
B
A
L</td></tr>
<tr><td>

Rectangle : périmètre et aire.

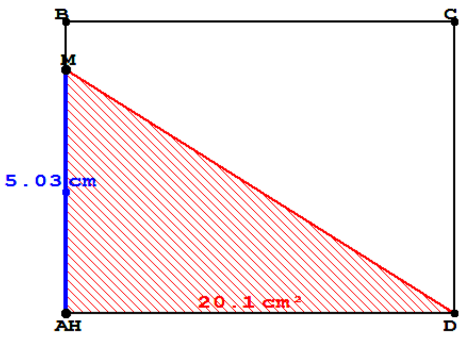


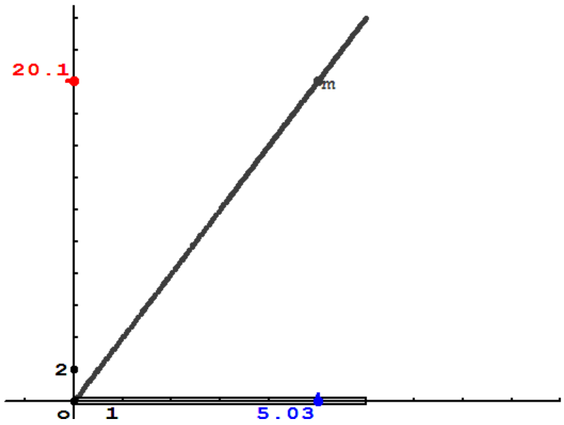
Une situation géométrique autour du périmètre ou de l'aire d'un rectangle conduit à exposer des fonctions définies par morceaux sur un intervalle.

</td><td>continu par morceaux

borné</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Exemple</th><th>Illustration de la diversité</th><th>Point de Vue</th></tr>
<tr><td>
Autour du rectangle : MH

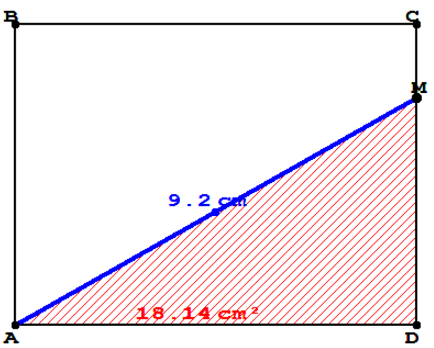


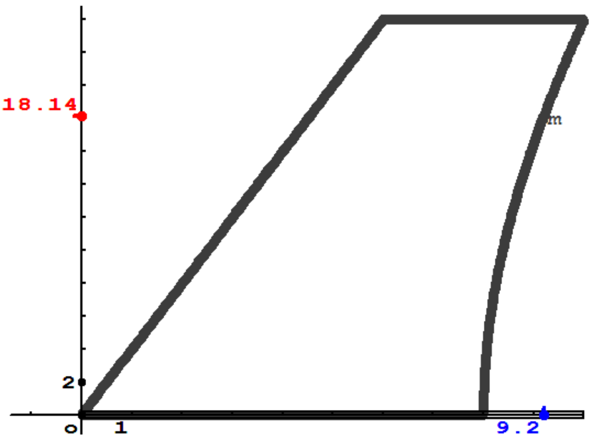


Un point M mobile sur le bord d’un rectangle. On considère l’aire du triangle AMD en fonction de la variable MH, la hauteur du triangle.
On peut avoir plusieurs dessins à gauche associés à un point de la courbe de la fonction représentée à droite.
</td><td>associations

dessin
&
point

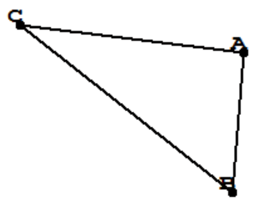
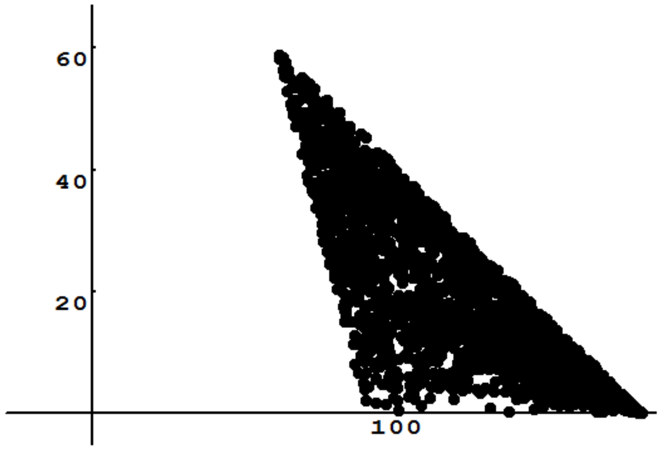
multiples</td><td rowspan="2">G
L
O
B
A
L</td></tr>
<tr><td>
Autour du rectangle : AM

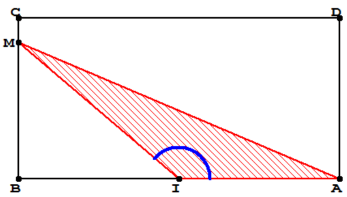
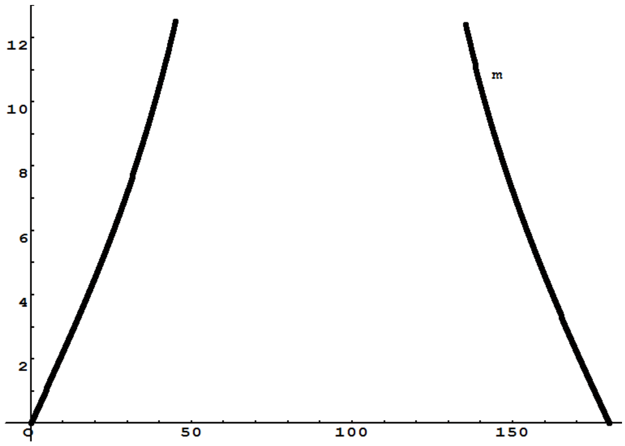




Un point M mobile sur le bord d’un rectangle. On considère l’aire du triangle AMD en fonction de la variable AM.
Une situation qui ne conduit pas à une fonction d’une variable réelle. La représentation graphique est une courbe.
</td><td>non fonctionnel

courbe</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Exemple</th><th>Illustration de la diversité</th><th>Point de Vue</th></tr>
<tr><td>Les angles du triangle.

Un triangle quelconque à gauche. On s’intéresse à la valeur du minimum des trois angles en fonction de la valeur du maximum des trois angles du triangle.
Une situation qui ne conduit pas à une fonction d’une variable réelle. La représentation graphique à droite n’est pas une courbe mais une surface.</td><td>non fonctionnel

surface</td><td rowspan="2">G
L
O
B
A
L</td></tr>
<tr><td>Angle et triangle dans le rectangle

Un point M mobile sur les largeurs du rectangle ABCD. On s’intéresse à l’aire du triangle AMI en fonction de l’angle $\widehat{AIM}$, où I est le milieu de [AB].</td><td>non continu

borné</td></tr>
</table>

ANNEXE 14

PROGRAMMES DE CALCUL…

Voici un programme de calcul :

- Choisissez un nombre entier naturel.
- Elevez-le au carré.
- Soustrayez le résultat précédent à 49.
- Prenez la racine carrée du nombre alors obtenu.
- Multipliez enfin ce dernier résultat par le nombre choisi au départ.
- Ecrivez la valeur exacte du résultat final.

1. Réalisez ce programme de calcul pour les nombres 5, 2, et 7.

2. Réalisez ce programme de calcul pour deux autres nombres de votre choix. Comparez les résultats à ceux obtenus par d'autres élèves de la classe.

3. Généralisez ce programme de calcul à tous les nombres possibles.

4. Comment pourrait-on organiser l'ensemble des informations obtenues à la question précédente ?

---

5. On décide maintenant de choisir un nombre réel positif, pas nécessairement entier et de réaliser ce même programme de calcul :

    - Choisissez un nombre réel positif.
    - Elevez-le au carré.
    - Soustrayez le résultat précédent à 49.
    - Prenez la racine carrée du nombre alors obtenu.
    - Multipliez enfin ce dernier résultat par le nombre choisi au départ.
    - Ecrivez la valeur exacte du résultat final.

    a. Réalisez ce programme pour les nombres 5,6 et 4,2.

    b. Nommez l'ensemble des nombres réels positifs pour lesquels ce programme de calcul est réalisable.

    c. Généralisez ce programme de calcul à tous les nombres possibles.

    d. Comment pourrait-on organiser l'ensemble des informations obtenues à la question précédente ?

6. On décide maintenant de choisir un nombre réel et de réaliser ce même programme de calcul :

- Choisissez un nombre réel.
- Elevez-le au carré.
- Soustrayez le résultat précédent à 49.
- Prenez la racine carrée du nombre alors obtenu.
- Multipliez enfin ce dernier résultat par le nombre choisi au départ.
- Ecrivez la valeur exacte du résultat final.

a. Réalisez ce programme pour -3, pour -4,2 et pour -10.

b. Pour quels nombres, ce programme admet-il un résultat ?

c. Généralisez ce programme de calcul à tous les nombres possibles.

d. Comment pourrait-on organiser l'ensemble des informations obtenues à la question précédente ?

Objectifs :

- Introduire et travailler directement sur les représentations du concept de fonction.
- Introduire ou réinvestir le vocabulaire autour de la notion de fonction à travers un exemple discret : variables libre et dépendante, image, antécédent, tableaux de valeurs, correspondance, représentations graphiques.
- Passer du discret au continu pour donner du sens et une légitimité à l'expression littérale ; revenir sur le vocabulaire et amener éventuellement la notation $f(x)$.

Analyse a priori :

1. Pour 5, on obtient $5\sqrt{24}$ ou $10\sqrt{6}$; pour 2, on obtient $2\sqrt{45}$ ou $6\sqrt{5}$; pour 7, on obtient 0. On peut s'attendre à voir surgir des valeurs approchées… Il faut montrer que pour chacun des trois entiers, on obtient un seul résultat, toujours le même.
2. Les élèves vont tester d'autres entiers naturels… Ils devraient s'apercevoir lors de la mise en commun que seuls les entiers compris entre 0 et 7 sont utilisables pour réaliser ce programme de calcul. On montre que chaque entier possède au plus un résultat…
3. La généralisation va conduire à réaliser ce programme de calcul pour 8 entiers.
4. On pourra établir un tableau de valeurs (non ordonné dans un premier temps). On peut ensuite demander aux élèves de réaliser différents tableaux dans lesquels on va ordonner les données de différentes manières (entiers croissants ou décroissants, résultats croissants ou décroissants, …) : le tableau peut être vu comme une « forme » numérique du programme de calcul.
   On pourra aussi établir un schéma de correspondance avec des flèches : on introduira le vocabulaire « image » et « antécédent » ; on nommera ce programme de calcul « fonction » mais on n'écrira aucune formule littérale ni aucune notation du type $f(x)$…
   On pourra représenter enfin graphiquement ces informations : on utilisera un fichier géoplan approprié ; il faut revenir sur la lecture graphique de l'image ou de l'antécédent : la représentation graphique peut être vue comme une « forme » géométrique du programme de calcul.

5. a. l'image de 5,6 est 23,52 ; celle de 4,2 est aussi 23,52. Deux valeurs peuvent avoir la même image…
   b. De la première partie, les élèves devraient faire émerger l'intervalle [0 ; 7].

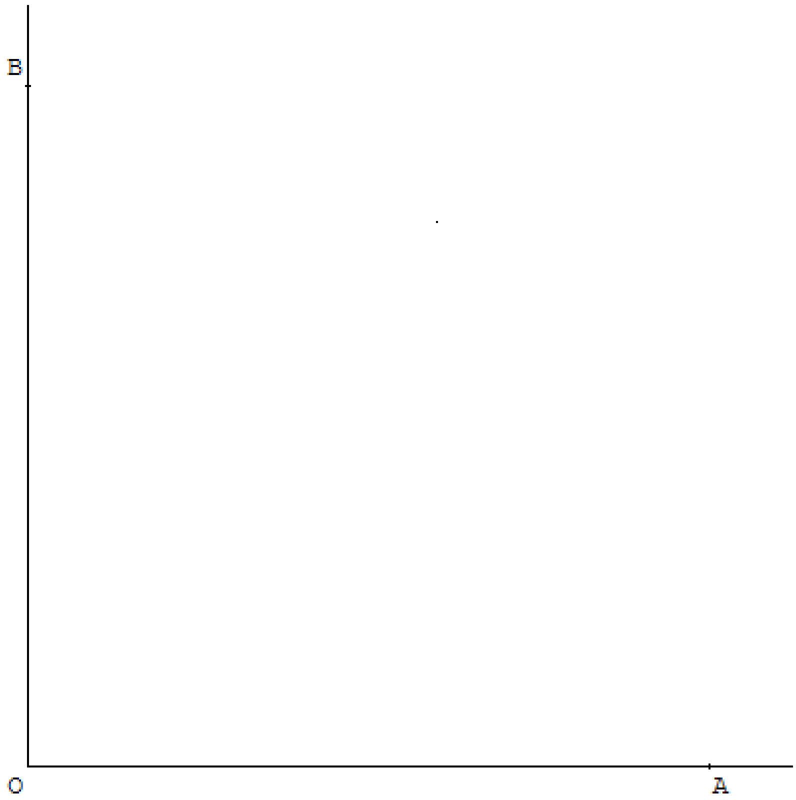
c. Contrairement à la première partie, la généralisation ne peut se faire avec un tableau de valeurs : il faut une lettre (la variable libre) et une expression algébrique (la variable dépendante)… On introduira la notation $f(x)$.

d. On pourra aussi réaliser une représentation graphique… On insistera sur le fait que tout tableau de valeurs n'est qu'un tableau partiel de quelques valeurs…

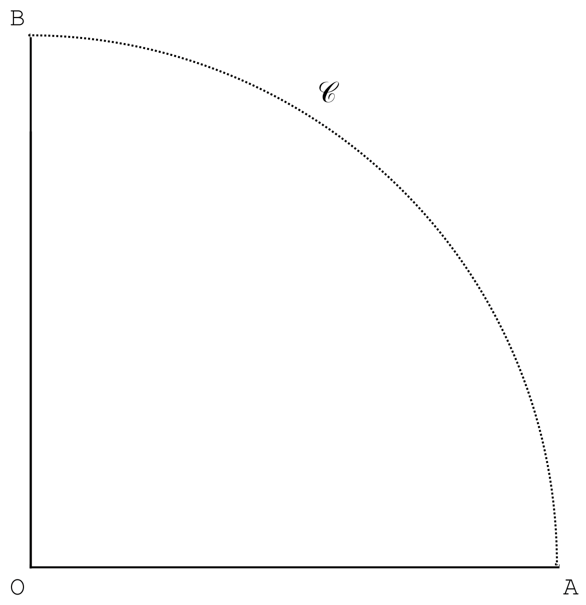
6. Dans cette partie, on peut prendre tous les nombres de l'intervalle [-7 ;7]. La formule est identique mais s'applique sur un autre intervalle. La représentation graphique est différente et présente une symétrie par rapport à l'origine du repère (parité).
   Enfin lors de l'étude des variations, le tableau sera différent : trois flèches au lieu de deux.

ANNEXE 15

Etre ou ne pas être .



Consigne 1:
Tracez un rectangle ONMP avec N appartenant à la demi-droite [OA) et P appartenant à la demi-droite [OB).
Donnez toutes les informations possibles sur ce rectangle.



Consigne 2:
Tracez un rectangle ONMP avec N appartenant à la demi-droite [OA), P appartenant à la demi-droite [OB) et M appartenant au cercle $\mathscr{C}$.
Donnez toutes les informations possibles sur ce rectangle.

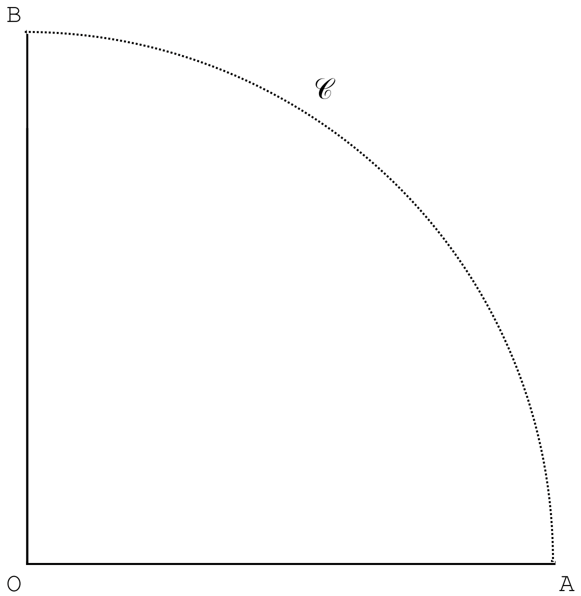
On veut que tous les élèves de la classe aient le même rectangle. Que doit-on donner comme information ?

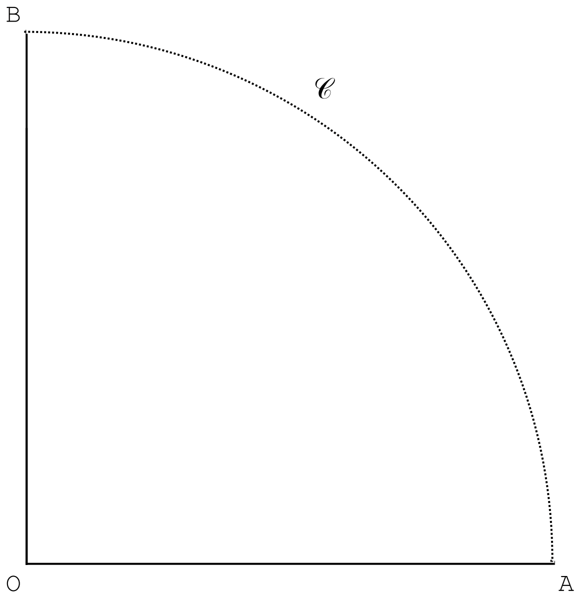
Consigne 3:

On suppose que OM = 7 cm.
Voici deux valeurs de ON :

1) ON = 1 cm. 2) ON = 4,2 cm.	1) ON = 2 cm. 2) ON = 5 cm.	1) ON = 3 cm. 2) ON = 6 cm.	1) ON = 5,6 cm. 2) ON = 6,8 cm.

Tracez un rectangle ONMP correspondant sur chaque dessin avec N appartenant à la demi-droite [OA), P appartenant à la demi-droite [OB) et M appartenant au cercle $\mathscr{C}$.
Donnez toutes les informations possibles sur ce rectangle.





ANNEXE 16

Liste des activités, des fichiers Texte et des fichiers TUIC mis en ligne sur le site de l'IREM de Rouen :

Activités	Fichier Texte	Fichiers TUIC
Etre ou ne pas être…	Activité être ou ne pas être….doc	Quartdecercle1.g2w Quartdecercle2.g2w Quartdecercle3.g2w
Bitriangle	Activité Bitriangle.doc	Bitriangle12a.g2w Bitriangle3a.g2w
La boîte de conserve	Boite de conserve.doc	BoitConserv1a.g3w BoitConserv2a.g3w BoitConserv3a.g3w
La boîte du pâtissier	Boite du patissier.doc	Boite12v.g3w Boite3v.g3w
Autour du rectangle	Activités autour du rectangle.doc	OTour_rec_arcAM12.g2w OTour_rec_arcAM3.g2w OTour_rec_Rah12.g2w OTour_rec_Rah3.g2w OTour_rec_Ram12.g2w OTour_rec_Ram3.g2w OTour_rec_Rhm12.g2w OTour_rec_Rhm3.g2w
Le paravent chinois	Le paravent chinois.doc	Paraventchinois1.g2w Paraventchinois2.g2w Paraventchinois3.g2w Paraventchinois1rad.g2w Paraventchinois2rad.g2w Paraventchinois3rad.g2w
Programmes de calculs	Programmes de calcul.doc Programme_calcul_01.doc Programme_calcul_02.doc Programme_calcul_03.doc	Prg_calculs_N12.g2w Prg_calculs_N3.g2w Prg_calculs_R+12.g2w Prg_calculs_R+3.g2w Prg_calculs_R12.g2w Prg_calculs_R3.g2w Prg_x(7.2-x)_12.g2w Prg_x(7.2-x)_3.g2w Prg_Calc_Base12.g2w Prg_Calc_Base3.g2w

Activités	Fichier Texte	Fichiers TUIC
Trois situations	Modèle et situations.doc	Rectangle12a.g2w Rectangle3a.g2w Pyramide12v.g3w Pyramide3v.g3w Thales12l.g2w Thales3l.g2w
Rectangle : périmètre et aire	Rectangles_périmètre_aire1.doc Rectangles_périmètre_aire2.doc	Rectangl1p.g2w Rectangl2p.g2w Rectangl3p.g2w Rectangl1a.g2w Rectangl2a.g2w Rectangl3a.g2w
Rectangle et parallélogramme	Activité Rectangle&parallélogramme.doc	Rec&parallelog12a.g2w Rec&parallelog3a.g2w
Les spectacles	Activité Les spectacles1.doc Activité Les spectacles2.doc	Spectacle_A12.g2w Spectacle_A3.g2w Spectacle_B12.g2w Spectacle_B3.g2w Spectacle_C12.g2w Spectacle_C3.g2w
Taxi à Paris	Les Taxis à Paris.doc	Taxi_S1C1.g2w Taxi_S1C2.g2w Taxi_S1C3.g2w Taxi_S2C1.g2w Taxi_S2C2.g2w Taxi_S2C3.g2w Taxi_S3C1.g2w Taxi_S3C2.g2w Taxi_S3C3.g2w Taxi_S4C1.g2w Taxi_S4C2.g2w Taxi_S4C3.g2w
Triangle et Trapèze	Activité Triangle&trapèze.doc	Tri&trap12p.g2w Tri&trap3p.g2w
Fichier pour créer les représentations d'une fonction.		Fonction_base.g2w
Fichier présentant la propriété de Thalès.		THALES.g2w

ANNEXE 17

FONCTIONNALITE DES TOUCHES UTILISEES SOUS GEOPLAN OU GEOSPACE DANS LES FICHIERS REALISES :

Consultez le commentaire éventuel pour obtenir des informations spécifiques au fichier utilisé. Pour le reste, les explications ci-dessous sont communes à tous les fichiers…

fichiers type 1 :

APPUYEZ SUR LA TOUCHE POUR AGRANDIR L'AFFICHAGE DES NOMS.
touche X puis flèches : par défaut, le point libre de la figure géométrique est piloté au clavier.
touche N puis flèches: modifie le nombre de décimales des nombres (0 à 6).

TOUCHES UTILISEES SUR LE CLAVIER:
touche 0 : appuyez successivement six fois sur cette touche pour afficher les objets, les grandeurs et les mesures (s'il y a une situation pour l'extraction des mesures).
touche 1: apparition du cadre des valeurs (image, antécédent).
touche 2: extraction des valeurs à partir des grandeurs. Appuyez à nouveau sur cette touche pour recommencer cette action.
touche I: après avoir utilisé les touches 0, 1, 2; permet de réinitialiser au début .

MODALITES DE DEPLACEMENT :
Aléatoire
touche A: position et succession de positions aléatoires du point libre de la figure géométrique.
touches CTRL-A: succession programmée de positions aléatoires du point libre de la figure géométrique.
Ordonné non régulier
touche O: position et succession de positions ordonnées non régulières du point libre de la figure géométrique.
touches CTRL-O: succession programmée de positions ordonnées non régulières du point libre de la figure géométrique.
touches CRTL-R: permet un retour dans l'autre sens du déplacement du point libre dès que celui-ci a dépassé le milieu.
Ordonné régulier (pas fixe)
touche P: position et succession de positions ordonnées régulièrement du point libre de la figure géométrique.
touches CTRL-P: succession programmée de positions ordonnées régulièrement du point libre de la figure géométrique.

fichiers type 2 :

APPUYEZ SUR LA TOUCHE POUR AGRANDIR L'AFFICHAGE DES NOMS.
touche X puis flèches : par défaut, le point libre de la figure géométrique est piloté au clavier.
touche N puis flèches: modifie le nombre de décimales des nombres (0 à 6).

TOUCHES UTILISEES SUR LE CLAVIER:
touche 3: construit les deux axes gradués parallèles.
touche E: répétition de l'action de la touche 3
touche 4 puis flèches: construit le rectangle correspondant à l'ensemble de définition.
touche R: répétition de l'action de la touche 4
touche I: après avoir utilisé les touches 3, 4; permet de réinitialiser au début .
touche Z: construit les deux points sur chaque axe.
touche CTRL-Z: construit le lien entre les deux points précédents.
touche CTR-T: garde la trace des points sur les deux axes et du lien entre les bipoints.
touche ESPACE: permet de sortir du mode Trace.

MODALITES DE DEPLACEMENT :
Ce sont les mêmes que celles des fichiers de type 1.

fichiers type 12 :

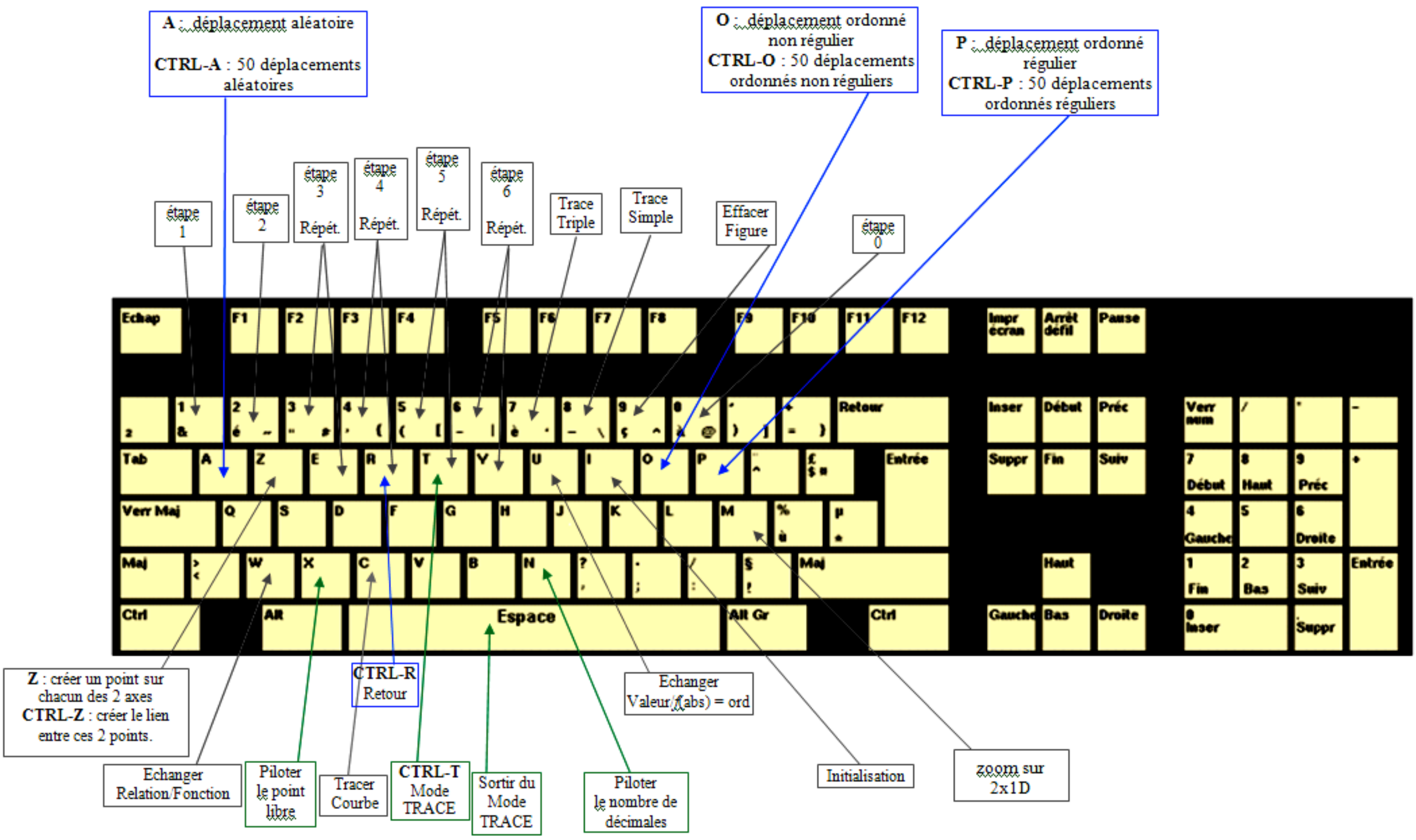
Les mêmes touches sont utilisées.
touche I: après avoir utilisé les touches 0, 1, 2, 3, 4; permet de réinitialiser au début .

fichiers type 3 :

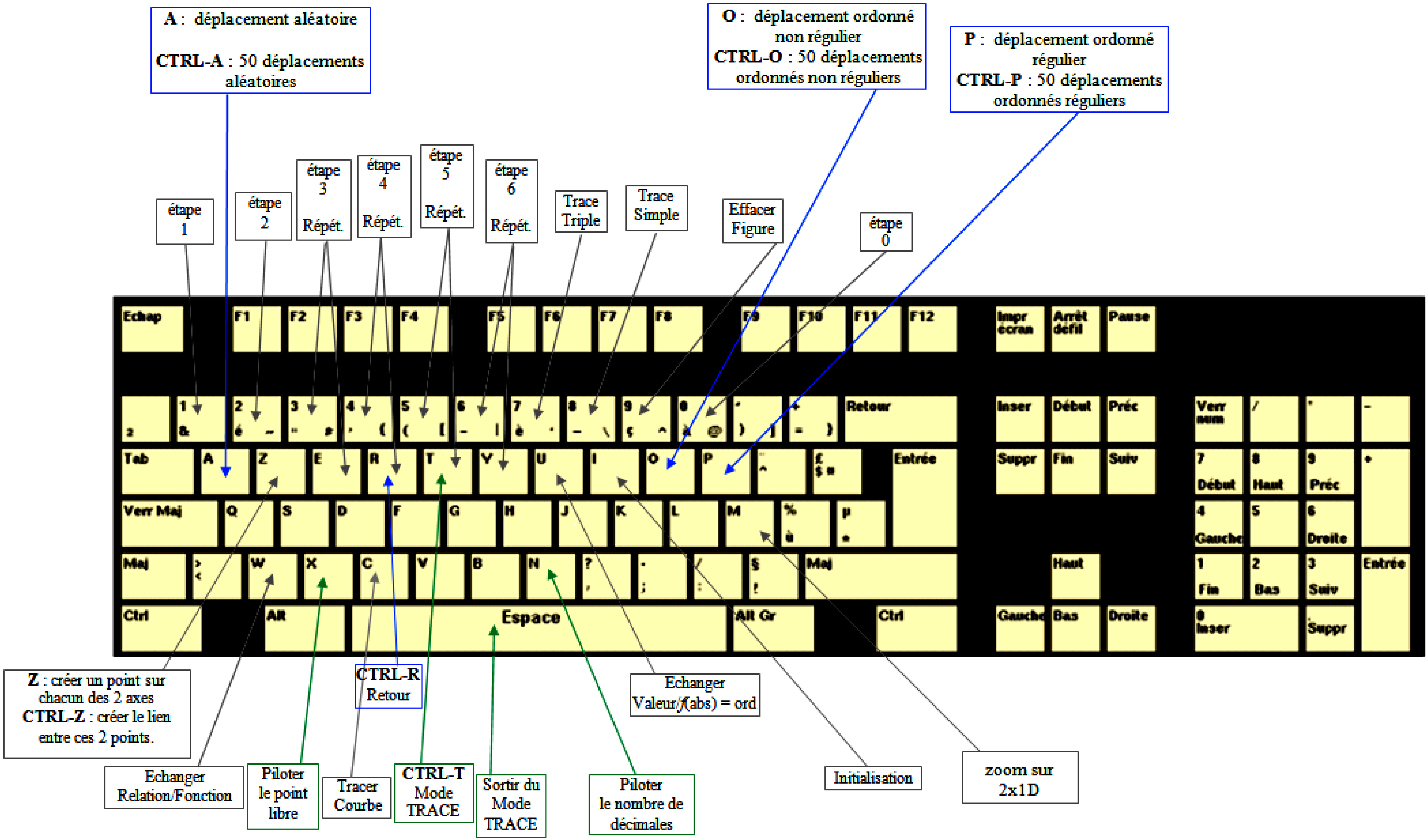
APPUYEZ SUR LA TOUCHE POUR AGRANDIR L'AFFICHAGE DES NOMS.
touche X puis flèches : par défaut, le point libre bleu de l'axe horizontal est piloté au clavier.
touche N puis flèches: modifie le nombre de décimales des nombres (0 à 6).

TOUCHES UTILISEES SUR LE CLAVIER:
touche 5: déplacement des deux axes gradués parallèles pour construire le repère.
touche T: répétition de l'action de la touche 5
touche 6: construit le point m(variable libre, variable dépendante).
touche Y: répétition de l'action de la touche 5
touche I: après avoir utilisé les touches 5, 6; permet de réinitialiser au début .
touche Z: construit les deux points sur chaque axe.
touche CTRL-Z: construit le lien entre les deux points précédents.
touche 7: garde la trace des points sur les deux axes, du lien entre les bipoints, du point m.
touche 8: garde la trace du point m.
touche 9: efface la situation géométrique et la remplace par la relation entre les grandeurs.
touche U : remplace la valeur image située en ordonnée par la relation f(abs)=ord.
touche W: substitue en clignotant la grandeur variable libre et x ainsi que la variable grandeur dépendante et f(x).
touche ESPACE: permet de sortir du mode Trace.
touche C: le graphe de la fonction f apparaît.
touche M : zoom sur les deux axes parallèles.

MODALITES DE DEPLACEMENT :
Ce sont les mêmes que celles des fichiers de type 1.



FONCTIONNALITE DES TOUCHES UTILISEES SOUS GEOPLAN DANS LES FICHIERS REALISES :



BIBLIOGRAPHIE

ARTIGUE Michèle, « Rapports et articulations entre cadres théoriques : le cas de la théorie anthropologique de didactique », in *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 29. Num. 3. p. 305-334., 2009.

ARTIGUE Michèle, « Que nous disent les résultats des étudiants de DEUG en analyse sur l'enseignement des fonctions ? » in *Actes du XVème Colloque CORFEM*, *Antony-Val de Bièvre*, *2008*, Versailles, IUFM, p. 25-43, 2008.

BKOUCHE Rudolf, « Une imbécillité pédagogique » in *Repères IREM*, n° 69, p. 49-52, 2007.

CAPPONI Bernard, Actes du colloque « Journée de formation de formateurs : l'algèbre au lycée et au collège » (tableur, arithmétique et algèbre), p. 58-66, 2000.

CHEVALLARD Yves, « Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie 1. Une Atlantide oubliée. » in *Petit x*, 55, p. 5-32, 2001.

COMIN Eugène, « Variables et fonctions, du collège au lycée : Méprise didactique ou quiproquo inter institutionnel » in *Petit x*, 67, p. 33-61, 2005.

COMIN Eugène, « Les difficultés de l'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège. », in *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de 2001*, p. 47-70, 2002.

COMIN Eugène, « L'enseignement de la proportionnalité à l'école et au collège » in *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 22, Num. 2-3, p. 135-182, 2002.

DOUADY Régine, « Jeux de cadres et dialectique outil-objet » in *Recherches en didactique des mathématiques.* Vol. 7. Num. 2, p. 5-31, 1986.

DUVAL Raymond, « Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leur fonctionnement. » in *Annales de didactique et de sciences cognitives.* V. 10. p. 5-53, 2005.

DUVAL Raymond, « Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? » in *Recherches en didactique des mathématiques*. Vol. 16. Num. 3. p. 348-382., 1996.

DUVAL Raymond, « Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique » in *Repères IREM*, Num. 17. p. 121-138, 1994.

GIBSON James Jerome, *The Ecological Approach to Visual Perception,* 1979.

GROUPE µ, *traité du signe visuel. Pour une rhétorique de l'image*, 1992.

LAGRANGE J-B., C.-Dedeoglu N., « Usages de la technologie dans des conditions ordinaires : le cas de la géométrie dynamique au collège in *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 29, Num. 2, pp. 189-226, 2009.

PERAYA Daniel, « Une approche expérimentale des représentations visuelles fonctionnelles. L'iconomètre : méthodologie, instrumentation et résultats » in *Images et sémiotique,* p.103-131, 2006.

PERAYA Daniel & VIENS J., « TIC et innovations pédagogiques : y a-t-il un pilote… après Dieu, bien sûr » in *L'intégration pédagogique des TIC dans le travail enseignant. Recherches et pratiques. Actes du symposium du Centre de recherche interuniversitaire sur la formation et la profession enseignante (CRIFPE)*, p.15-60, 2005.

PERAYA Daniel, « Vers une théorie des paratextes : images mentales et images matérielles » in *Recherches en communication*, Num. 4, 1995.

PRESSIAT André, « La place des grandeurs dans la construction des mathématiques » in *Bulletin de l'APMEP*, Num. 483, p. 467-500, 2009.

ROUCHE Nicolas, *Le sens de la mesure*, Bruxelles, Didier, 1992.

ROUX Marc, « Les figures : papier ou écran ? » in *APMEP BV 484*, p. 592-594, 2009.

Document ressource *proportionnalité collège*, eduscol.education.fr/D0015/, juillet 2005.

Remerciements…

Les auteurs remercient l'IREM de Rouen et particulièrement son directeur, Patrick Frétigné et sa documentaliste, Josette Méasson sans lesquels cette brochure n'aurait pu voir le jour.

Ils remercient aussi leurs épouses respectives pour leurs relectures attentives et précieuses.

Ils remercient également les différents collègues qui pendant des années ont assisté aux différents stages de formation continue et qui ont ainsi permis d'alimenter leur réflexion.

Ils remercient enfin, Hélène CROCHEMORE qui a su saisir la philosophie de cette brochure en réalisant les illustrations de la couverture et la quatrième de couverture.

Réf. :	**R 141**
Titre :	**La Magie De L'Image.** **Les images des fonctions et les fonctions des images.**
Auteur :	Michel CHEVALLIER et Jean-Luc DE SÉEGNER I.R.E.M. de ROUEN
Public visé :	Enseignants de collèges et de lycées, étudiants.
Résumé :	Cette brochure synthétise la réflexion et les analyses des auteurs à propos de la production d'objets visuels obtenus lors de l'utilisation de l'outil informatique. Elle propose des pistes afin d'optimiser cette utilisation pour aider les élèves à se construire des représentations mentales cohérentes par rapport au concept étudié. Le concept de fonction, choisi principalement comme support, présente l'intérêt de traverser un certain nombre de cadres : géométrique, des grandeurs, numérique, algébrique, graphique …
Mots clés :	Images, fonctions, T.U.I.C, activités, géométrie dynamique, tableur, perception, grandeurs, mesures, nombres, cadres, registres.
Date :	Novembre 2010
Nombre de pages :	122
Prix :	15 €
N° ISBN :	**978-2-86239-099-4**
Publication :	**IREM, Université de Haute-Normandie, Av. de Broglie** **BP 138- 76821 Mont-Saint-Aignan Cedex**

Bon de commande à retourner à : IREM, Université de Haute-Normandie, Avenue de Broglie
BP 138- 76821 Mont-Saint-Aignan Cedex

M, Mme ....
Adresse ....
....
....
Quantité ....
Prix à payer nombre d'exemplaires ..... x 15 € + frais de port : 2,40 € + 0, 80€ par livre supplémentaire

Date: .... Signature :

Chèque libellé à l'ordre de l'Agent comptable de l'Université de Rouen.