LES ETOILES DE MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

2000 - 2003

académie Strasbourg
Éducation nationale

présentées par
l'Inspection Pédagogique Régionale,
les Equipes de Professeurs,
l'Institut de Recherche sur
l'Enseignement des Mathématiques
de Strasbourg.

FASCICULE 8
EDITION INTERNATIONALE

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Sujets

de décembre 2000 à mars 2003

FASCICULE 8
EDITION INTERNATIONALE

Mathématiques Sans Frontières
Lycée Pasteur
24, rue Humann
F- 67000 Strasbourg

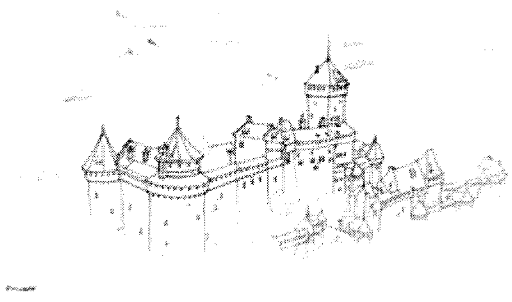
Tél : + (33) (0)3 88 15 70 60

Fax : + (33) (0)3 88 15 70 69

E-mail : msf@ac-strasbourg.fr

Site internet : http://www.ac-strasbourg.fr/microsites/maths_msf

Mathématiques sans frontières
Mathematik ohne Grenzen
Matematica senza frontiere
Mathematics without frontiers
Matematika határok nélkül
Matematyka bez granic
...une compétition interclasses !



Un concours interclasses

- Des classes entières de troisième et de seconde ou de niveau équivalent dans des pays étrangers concourent entre elles.
- Une palette d'exercices variés leur est proposée (dix en troisième et treize en seconde).
- La solution de l'un des exercices doit être rédigée en langue étrangère.
- La classe s'organise pour résoudre les exercices en une heure et demie et rend une seule feuille-réponse pour chacun d'eux.

L'équipe d'organisation

- Elle est composée de professeurs, de chefs d'établissement et d'inspecteurs.
- Elle se réserve le droit de modifier le règlement de la compétition en cas de nécessité.
- Elle a créé une association culturelle et scientifique du nom de ***Mathématiques sans frontières.***

Des exercices variés

- Ils sont de genres divers et de difficultés variées.
- Ils cherchent à favoriser le travail en équipe et s'adressent à tous les élèves.
- La rédaction d'un des exercices doit se faire en anglais, en allemand, en espagnol ou en italien.
- Chaque élève peut y trouver du plaisir selon ses goûts et ses compétences.

Pour quoi faire ?

- Ouvrir des frontières :
  - entre la France et les pays voisins,
  - entre les établissements scolaires, les entreprises et la cité,
  - entre les mathématiques et les langues vivantes,
  - entre les collèges et les lycées,
  - entre les élèves d'une classe.
- Favoriser :
  - l'intérêt pour les mathématiques,
  - le travail en équipe,
  - la participation de tous,
  - l'initiative des élèves,
  - la pratique d'une langue étrangère.

Participation en chiffres

année	nombre de classes	nombre d'élèves
1989/90	87	2 400
1990/91	282	7 875
1991/92	572	14 740
1992/93	1 370	34 645
1993/94	1 802	45 325
1994/95	2 142	54 801
1995/96	2 421	63 617
1996/97	2 551	63 712
1997/98	2 651	68 553
1998/99	2 878	74 856
1999/00	3 148	81 231
2000/01	3 496	87 374
2001/02	3 256	84 384
2002/03	5 052	128 437

- 14 langues, 17 pays, 40 secteurs d'organisation.

Comment s'inscrire ?

- Seules les classes entières de troisième, de seconde ou de niveau équivalent peuvent s'inscrire.
- La compétition s'adresse aux établissements publics ou privés.
- L'inscription se fait après accord entre la classe entière, le professeur de mathématiques et le chef d'établissement.

Calendrier annuel

- Septembre - octobre : inscription des classes,
- Décembre - janvier : épreuve d'entraînement,
- Mars : épreuve officielle,
- Mai : remises des prix.

De nombreux lots

- Sur chaque secteur concerné, deux palmarès sont établis : l'un pour les classes de troisième, l'autre pour les classes de seconde ou niveaux équivalents.
- Chaque élève d'une classe primée bénéficie d'une part du lot (par exemple : cadeau, voyage, spectacle, etc.).
- Les remises des prix par secteur se font en présence des classes gagnantes, de leurs professeurs, des personnalités locales, des parrains de la compétition et de la presse.
- Des lots de participation sont attribués par tirage au sort.

« Mathématiques sans Frontières »

Les nouvelles Etoiles
2000-2003

Créée en 1989 dans l'académie de Strasbourg par l'Inspection Pédagogique Régionale en collaboration avec l'Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, « Mathématiques sans Frontières » a rassemblé, chaque année, un nombre croissant d'élèves. En 2003, plus de 125 000 élèves de 15 à 17 ans dans une trentaine de pays d'Europe et d'ailleurs, y ont ainsi participé.

Si elle connaît cette durable réussite c'est grâce, en particulier, à

- l'originalité de la forme donnée à cette compétition : ce sont les classes entières qui y participent. La difficulté variée des exercices à résoudre permet à tous les élèves d'apporter leur concours à la performance de leur classe pour peu qu'ils sachent s'organiser. Le résultat obtenu est celui d'un travail d'équipe,
- l'originalité des exercices proposés : présentés sous forme ludique, ceux-ci font appel à des connaissances assez restreintes mais à des qualités et des compétences très diverses que développent, particulièrement, la pratique des mathématiques. De plus, le premier exercice proposé est à résoudre dans une langue étrangère, ce qui marque d'emblée la volonté affichée de dépasser les frontières entre les élèves,
- l'originalité d'une organisation très décentralisée, avec autant d'équipes d'organisation constituées de professeurs, d'inspecteurs et de chefs d'établissement qu'il est nécessaire, et par ailleurs couplée avec l'existence d'une épreuve unique pour tous les candidats et élaborée à partir des propositions de toutes ces équipes.

En cette année 2004, qui est celle de l'élargissement de l'Europe, « Mathématiques sans Frontières » publie, en un nombre de langues impressionnant (sept pour l'année 2002-2003), les annales 2000-2003 des sujets posés en compétition. Témoignage de la réalité du remarquable esprit de collaboration qui règne entre la multitude des équipes organisatrices et de la compétence de l'équipe centralisatrice qui a en charge la conception des sujets.

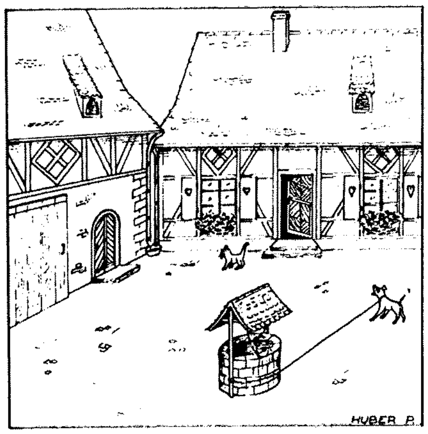
Ces annales s'appellent « les étoiles 2000-2003 ». Elles méritent bien leur nom tant elles font preuve d'originalité tant elles recèlent de trésors d'imagination, de réflexion, de suspense et tant elles suscitent la passion de chercher, provoquant l' « Eurêka » de celui qui découvre une solution. Que soient nombreux celles et ceux qui profiteront de leur rayonnement !

G. Chaix

Gérald CHAIX
Recteur de l'Académie de Strasbourg

Mathématiques sans frontières
Mathematik ohne Grenzen
Matematica senza frontiere
Mathematics without frontiers
Matematika határok nélkül
Matematyka bez granic

...ein Schülerwettbewerb für Schulklassen.



Art des Wettbewerbs

- Geschlossene 10. und 11. Klassen und vergleichbare Stufen anderer Länder tragen den Wettbewerb unter sich aus.
- Eine Reihe verschiedener Aufgaben wird ihnen gestellt (10 für Klasse 10 und 13 für Klasse 11).
- Die Lösung einer der Aufgaben muß in einer Fremdsprache verfaßt werden.
- Die Aufgaben werden klassenintern innerhalb von anderthalb Stunden gelöst ; die Klasse gibt für jede Aufgabe nur ein Lösungsblatt ab.

Organisationskomitee

- Es setzt sich zusammen aus Lehrern, Schulleitern und Mitgliedern der Schulaufsichtsbehörde.
- Es behält sich das Recht auf Änderungen der Wettbewerbsregeln vor.
- Es gründete eine kulturelle und wissenschaftliche Vereinigung mit dem Namen "**MATHEMATIK OHNE GRENZEN**".

Die Aufgaben

- Sie sind aus verschiedenen Bereichen und von verschiedenem Schwierigkeitsgrad.
- Sie versuchen die Gruppenarbeit zu fördern und wenden sich an alle Schüler.
- Eine der Aufgaben muß in Englisch, Französisch, Italienisch oder Spanisch verfaßt werden.
- Jeder Schüler kann nach seinen Interessen und Fähigkeiten arbeiten.

Zielsetzungen

- Grenzen zu sprengen :
  - zwischen Frankreich und seinen Nachbaren,
  - zwischen Schulen, Unternehmen und Städten,
  - zwischen Mathematik und Sprachen,
  - zwischen Schularten
  - zwischen den Schülern einer Klasse,
- Fördern :
  - den Zugang zur Mathematik,
  - Gruppenarbeit
  - gemeinsame Teilnahme aller,
  - Schülerengagement,
  - Anwendung einer Fremdsprache.

Beteiligung

Jahrgang	Schulklassenanzahl	Schüleranzahl
1989/90	87	2 400
1990/91	282	7 875
1991/92	572	14 740
1992/93	1 370	34 645
1993/94	1 802	45 325
1994/95	2 142	54 801
1995/96	2 421	63 617
1996/97	2 551	63 712
1997/98	2 651	68 553
1998/99	2 878	74 856
1999/00	3 148	81 231
2000/01	3 496	87 374
2001/02	3 256	84 384
2002/03	5 052	128 437

- 14 Sprachen, 17 Länder, 40 Organisationskomitees.

Teilnahmebedingungen

- Nur gesamte Klassen der Stufe 10 und 11 bzw. vergleichbare Stufen anderer Länder können teilnehmen.
- In diesem Jahr richtet sich der Wettbewerb an die öffentlichen und privaten Schulen der auf der Karte eingezeichneten Regionen.
- Die Anmeldung kann nur unter Zustimmung der ganzen Klasse, des Mathematiklehrers und des Schulleiters erfolgen.

Termine

- September - Oktober : Anmeldung der Klassen.
- Dezember, Januar : Probedurchgang.
- März : Offizielle Prüfung.
- Mai : Preisverleihung.

Preisverleihung

- Jede Stufe eines teilnehmenden Landes erhält zwei Preise.
- Jeder Schüler einer ausgezeichenen Klasse erhält einen Preisanteil, z.B. Reisen, u.s.w.
- Die Preisverteilung findet in Anwesenheit der Teilnehmer, ihrer Lehrer, der örtlichen Presse und den Sponsoren des Wettbewerbes statt.
- Einige Preise werden unter den Teilnehmern verlost.

Mathématiques sans frontières
Mathematik ohne Grenzen
Matematica senza frontiere
Mathematics without frontiers
Matematika határok nélkül
Matematyka bez granic

... una gara interclassi !

Natura della gara

- Classi intere di 3ª media e di 1ª superiore (o di livello equivalente nei paesi esteri) competono fra di esse.
- Una paletta di esecizi vari è proposta agli alunni (10 in 3ª media e 13 in 1ª superiore).
- La soluzione di uno di questi esercizi deve essere stesa in lingua straniera.
- La classe si organizza per risolvere l'esercizio entro un'ora e mezza e consegna un solo foglio-risposta per ognuno di essi.

Gli organizzatori

- Sono professori, presidi e ispettori.
- Si riservano il diritto di modificare il regolamento della gara in caso di necessità.
- Hanno creato un'associazione culturale e scientifica, chiamata "**MATEMATICA SENZA FRONTIERE**".

Gli esercizi

- Sono di vari generi e di varia difficoltà.
- Cercano di favorire il lavoro di gruppo e si rivolgono a tutti gli alunni.
- La stesura d'uno degli esercizi va fatta in francese, in tedesco, in inglese o in spagnolo.
- Ogni alunno ci proverà piacere secondo le sue preferenze e le sue competenze.

Obiettivi

- Aprire le frontiere
  - tra la Francia ed i paesi vicini,
  - tra le scuole, le imprese e la città,
  - tra le matematiche e le lingue vive,
  - tra la scuola media e il liceo,
  - tra gli alunni di una stessa classe
- Favorire
  - l'interesse per le matematiche,
  - il lavoro di gruppo,
  - la partecipazione di tutti,
  - l'iniziativa degli alunni,
  - la pratica di una lingua straniera

Alcuni dati sulla partecipazione

anno	Numero di classi	Numero di alunni
1989/90	87	2 400
1990/91	282	7 875
1991/92	572	14 740
1992/93	1 370	34 645
1993/94	1 802	45 325
1994/95	2 142	54 801
1995/96	2 421	63 617
1996/97	2 551	63 712
1997/98	2 651	68 553
1998/99	2 878	74 856
1999/00	3 148	81 231
2000/01	3 496	87 374
2001/02	3 256	84 384
2002/03	5 052	128 437

- 14 lingue, 17 paesi, 40 settori di organizzazione.

Condizioni di iscrizione

- Solo le classi intere di 3ª media, 1ª superiore o livello equivalente possono iscriversi.
- Quest'anno la gara è riservata alle scuole pubbliche o private delle regioni indicate sulla mappa.
- L'iscrizione si fa previo accordo tra la classe intera, il professore di matematica e il preside.

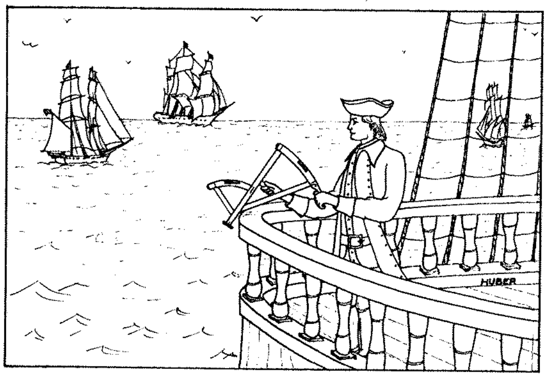
Calendario dell'anno

- Da novembre a gennaio : iscrizione delle classi.
- Febbraio : la gara di prova.
- Marzo : la gara ufficiale.
- Maggio : le consegne dei premi.

Consegna dei premi

- Per ogni settore interessato, vengono fatte due classifiche : una per gli alunni di 3a media e una per quelli di 1ª superiore.
- Ogni alunno della classe premiata riceve una parte del premio (es : un viaggio, uno spettacolo ecc .).
- La consegna dei premi si fa in presenza delle classi premiate, dei loro professori, delle personalità locali, dei padrini della gara e della stampa.
- Alcuni premi di partecipazione sono attribuiti per sorteggio.

Mathématiques sans frontières
Mathematik ohne Grenzen
Matematica senza frontiere
Mathematics without frontiers
Matematika határok nélkül
Matematyka bez granic



The competition

- Complete classes of pupils in Years 10 and 11 (or classes of a similar level in Maths) compete against each other .
- A range of Maths exercises is offered to them (10 for the pupils in Year 10 and 13 for those in Year 11).
- The answer to one of the exercises must be written in a foreign language.
- The pupils have one hour and a half in which to find the answers to the questions set. They are expected to work together on the exercises and must hand in one answer sheet for each exercise.

The maths exercises

- The exercises offered vary in type and degree of difficulty.
- They encourage group work and are meant to be tackled by all pupils.
- The answer to one of the exercises must be written out in either French, German, Italian or Spanish.
- Every pupil will find something that appeals to his or her interest and ability.

The organisers

- The competition is organised by a group of teachers, headteachers and school inspectors.
- The organisers are entitled to modify the regulations should the need arise.
- They have created a cultural and scientific association which goes by the name of ***Mathématiques sans frontières.***

Objectives

- Lifting of barriers between
    - France and neighbouring countries,
    - the different schools, local firms and local authorities,
    - Mathematics and Modern Languages,
    - middle and upper schools,
    - pupils in the same class.
- To promote
    - interest in Mathematics and Foreign Languages,
    - team work,
    - a greater sense of involvement,
    - pupil-centred initiatives.

Participation in figures

year	Number of classes	Number of pupils
1989/90	87	2 400
1990/91	282	7 875
1991/92	572	14 740
1992/93	1 370	34 645
1993/94	1 802	45 325
1994/95	2 142	54 801
1995/96	2 421	63 617
1996/97	2 551	63 712
1997/98	2 651	68 553
1998/99	2 878	74 856
1999/00	3 148	81 231
2000/01	3 496	87 374
2001/02	3 256	84 384
2002/03	5 052	128 437

- 14 languages, 17 countries, 40 local teams.

How to take part

- Only complete Year 10 and Year 11 classes (or their equivalents) may apply.
- This year the competition will be open to state-run or private schools in the areas shown on the map.
- In order to take part, classes must first have obtained the consent of their Maths teacher and their Headteacher.
- Applications must be sent in by the local teams.

Timetable

- September-October : applications are sent in.
- December-January : mock competition.
- March : official competition.
- May : prize-giving.

Prizes

- For each area taking part two prize lists are drawn up : one for pupils in year 10, the other for pupils in year 11.
- Prizes are shared out amongst all the participants of a winning class (eg. a trip, a concert or a show, etc...)
- All the pupils of a winning class, their teachers, local dignitaries, sponsors and the press are invited to the prize-giving ceremony.
- A few prizes are set aside to be drawn for classes participation.

Mathématiques sans frontières
Mathematik ohne Grenzen
Matematica senza frontiere
Mathematics without frontiers
Matemáticas sin fronteras
Matematika határok nélkül
Matematyka bez granic

Naturaleza de la competición

- Clases enteras de 3° y de 2° o de nivel equivalente en países extranjeros compiten entre sí.
- Se les propone una serie de ejercicios variados (10 en 3° y 13 en 2°).
- La solución de uno de los ejercicios debe ser redactada en lengua extranjera.
- La clase se organizará para resolver los ejercicios en una hora y media y se entregará una sola hoja-respuesta por cada uno de los ejercicios.

El equipo de organisación

- Está compuesto de profesores, directores de centros e inspectores.
- El equipo se reserva el derecho de modificar el reglamento de la competición en caso de necesidad.
- El equipo ha creado una asociación cultural y científica llamada : *"**Mathématiques sans frontières**"*.

Los ejercicios

- Hay diferentes tipos y son de dificultad variada.
- Intentan favorecer el trabajo en equipo y se dirigen a todos los alumnos.
- Uno de los ejercicios debe ser redactado en francés o en alemán o en inglés o en italiano.
- Cada alumno puede participar según sus gustos y sus capacidades.

Objetivos

- Abrir fronteras
  - entre Francia y los países vecinos,
  - entre los centros escolares, las empresas y la ciudad,
  - entre las matemáticas y los idiomas modernos,
  - entre los colegios y los institutos,
  - entre los alumnos de una misma clase.
- Favorecer
  - el interés por las matemáticas,
  - el trabajo en equipo,
  - la participación de todos
  - la iniciativa de los alumnos,
  - la práctica de un idioma extranjero.

Participatión en cifras

año	número de clases	número de alumnos
1989/90	87	2 400
1990/91	282	7 875
1991/92	572	14 740
1992/93	1 370	34 645
1993/94	1 802	45 325
1994/95	2 142	54 801
1995/96	2 421	63 617
1996/97	2 551	63 712
1997/98	2 651	68 553
1998/99	2 878	74 856
1999/00	3 148	81 231
2000/01	3 496	87 374
2001/02	3 256	84 384
2002/03	5 052	128 437

- 14 lenguas, 17 países, 40 zonas de organización.

Condiciones de matrícula

- Sólo pueden matricularse las clases enteras de 3°, de 2° o de nivel equivalente.
- Este año, la competición se dirige a los centros públicos o privados de las regiones señaladas en el mapa.
- La matrícula se hace tras un acuerdo entre toda la clase, el profesor de matemáticas y el director del centro.

Calendario anual

- Noviembre-enero : matrícula de las clases.
- Diciembre-enero : prueba de entrenamiento.
- Marzo : prueba oficial.
- Mayo : entrega de premios.

Entrega de premios

- En cada sector implicado serán establecidas dos categorías de premios : una para las clases de 3°, otra para las clases de 2°.
- Cada alumno de una clase premiada recibe un premio (por ejemplo : viaje, espectáculo etc ...).
- La entrega de premios se hace en presencia de las clases premiadas, de sus profesores, de las personalidades locales, de los patrocinadores de la competición y de la prensa.
- Algunos premios de participación son atribuidos por sorteo.

Mathématiques sans frontières
Mathematik ohne Grenzen
Matematyka bez granic

Miedzyklasowy konkurs matematyczny

Zasady ogólne

- Do konkursu przystępują trzecie klasy gimnazjum i pierwsze liceum lub technikum oraz klasy tego samego poziomu nauczania w innych krajach europejskich.
- Poziom i liczba ćwiczeń są zróżnicowane (10 zadań dla klas trzecich i 13 dla klas pierwszych).
- Rozwiązanie jednego ćwiczenia musi być zredagowane w języku obcym.
- Cała klasa uczestniczy w rozwiązaniu zadań i po 1,5 godziny oddaje rozwiązanie każdego ćwiczeni a na oddzielnym arkuszu egzaminacyjnym.

Grupa organizacyjna

- W jej skład wchodzą nauczyciele, dyrektorzy szkół i inspektorzy oświaty.
- Grupa organizacyjna ma prawo modyfikacji zasad współzawodnictwa w przypadku gdyby to było konieczne.
- Grupa organizacyjna założyła stowarzyszenie kulturalno-naukowe noszące nazwę *"Matematyka bez granic"*.

Cwiczenia

- Są z różnych dziedzin i o zróżnicowanym stopniu trudności.
- Mają na celu między innymi podniesienie umiejętności pracy w grupach i w ich rozwiązywaniu mają brać udział wszyscy uczniowie.
- Rozwiązanie jednego z zadań ma być zapisane w języku angielskim, niemieckim, hiszpańskim lub włoskim.
- Każdy uczeń znajdzie zadanie które odpowiada jego zainteresowaniom i umiejętnościom.

Cele ogólne

- Otwarcie granic :
  - między Francją i krajami ościennymi,
  - między szkołami, zakładami pracy i miastami,
  - między matematyką i językami obcymi,
  - między szkołami podstawowymi i ogólnokształcącymi.
  - między samymi uczniami.
- Podniesienie :
  - zainteresowania matematyką,
  - zainteresowania pracą w grupach,
  - stopnia zaangażowania wszystkich członków grupy,
  - inicjatywy własnej uczniów,
  - stopnia opanowania jezyków obcych.

Uczestnictwo

rok	ilość klas	ilość uczńúw
1989/90	87	2 400
1990/91	282	7 875
1991/92	572	14 740
1992/93	1 370	34 645
1993/94	1 802	45 325
1994/95	2 142	54 801
1995/96	2 421	63 617
1996/97	2 551	63 712
1997/98	2 651	68 553
1998/99	2 878	74 856
1999/00	3 148	81 231
2000/01	3 496	87 374
2001/02	3 256	84 384
2002/03	5 052	128 437

14 języków, 17 krajów, 40 sektorów organizacyjnych.

Warunki uczestnictwa

- Jedynie pełne klasy mają prawo uczestnictwa w zawodach.
- W bieżącym roku szkolnym do współzawodnictwa stają szkoły państwowe i prywatne z krajów wyszczególnionych na załączonej mapie.
- Zapisy następują za zgodą całej klasy, nauczyciela matematyki i dyrektora liceum.

Kalandarz

- Wrzesień-luty : zapisy klas.
- Grudzień-luty : konkurs przygotowawczy.
- Marzec : konkurs oficialny.
- Maj : wręczenie nagród.

Rozdanie nagród

- W każdym regionie przyznawane będą dwie główne nagrody.
- Jedna w pionie klas trzecich i jedna w pionie klas pierwszych.
- Każdy uczeń klasy nagrodzonej skorzysta ze swej części nagrody (np. wycieczka, przedstawienie itp.).
- W każdym regionie uroczystość przyznania nagród odbędzie się w obecności klasy nagrodzonej, jej nauczycieli, osobistości lokalnych sponsorów konkursu i przedstawicieli prasy.
- Nagrody pocieszenia będą przyznawane w drodze losowania.

MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Année scolaire 2000-2001

12e édition

Compétition interclasses de 3ème et de 2nde

Mathématiques sans frontières

organisée par l'Inspection Pédagogique Régionale et l'IREM de Strasbourg

ÉPREUVE D'ENTRAÎNEMENT DÉCEMBRE 2000

- **Des explications ou des justifications sont demandées pour tous les exercices.**
- **Toute solution même partielle sera examinée.**
- **Le soin sera pris en compte.**
- **Ne rendre qu'une feuille-réponse par exercice.**

Exercice n°1	7 points	*Jetons un œil*

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien (en un minimum de 30 mots).

Genoveva zeigt ihrer Freundin Anne einen Zaubertrick. Mit dem Rücken zu Anne sagt sie zu ihr :
„ Lege 13 Spielmarken, die von 0 bis 12 nummeriert sind, in einer Reihe vor dich hin. Ordne sie von links nach rechts in absteigender Reihenfolge an. Drehe sie um, damit ihr Wert verdeckt ist.
Füge nun in derselben Reihe rechts 12 weitere, zufällig ausgewählte Spielmarken an, deren Wert ebenfalls verdeckt ist.
Jetzt verschiebst du von diesen 12 hinzugekommenen Marken eine bestimmte Anzahl an das linke Ende der Reihe. "

Genoveva dreht sich um und sieht vor sich eine Reihe von 25 gleichen Spielmarken. Sie nimmt eine davon und erkennt, wie viele Marken verschoben wurden.

Erkläre diesen Trick.

Genevieve shows her friend Anne a magic trick. With her back to Anne, she gives her the following instructions :

« Lay out 13 tokens numbered 0 to 12 in a straight line, setting them in decreasing order from left to right

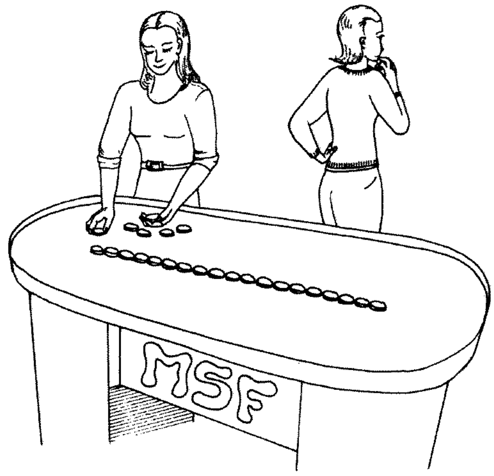
Then turn them face down to hide the numbers written on them.

To the right of those already laid out but along the same line, add twelve more tokens picked at random with their faces down.

End by moving to the left end of the line some of the tokens that have just been added. »

Genevieve then turns round, facing a line of 25 identical tokens. She picks one and it tells her how many tokens have been moved by Anne.

Explain what the trick is.



Genoveffa mostra alla sua amica Anna un gioco di magia. Con le spalle girate le dice :

« Allinea 13 gettoni numerati da 0 a 12 sistemandoli con valore decrescente da sinistra a destra.

Girali per nasconderere i lori valori.

Aggiungi sulla stessa linea, alla destra di quelli gia sistemati, 12 altri gettoni scelti a caso essendo i loro valori nascosti.

Infine, sposta a sinistra della linea un certo numero di questi ultimi 12 gettoni ».

Genoveffa si gira, quindi, e vede una linea di 25 gettoni tutti identici. Ne prende uno solo che le indica il numero dei gettoni spostati da Anna.

Spiegare questo gioco di magia.

Genoveva le enseña un truco de magia a su amiga Ana. De espaldas a ella, le dice :

« Pon en una línea recta 13 fichas numeradas de 0 a 12 , colocándolas en orden decreciente de su valor y de izquierda a derecha.

Ponlas cara abajo para que no se pueda ver el valor de cada una.

A la derecha de las fichas ya colocadas y en la misma línea, pon otras 12 fichas , elegidas por azar y también cara abajo.

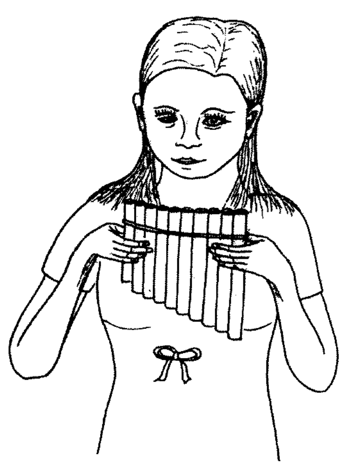
Por fin, desplaza a la izquierda de la línea algunas fichas sacadas de entre éstas últimas. »

Genoveva se vuelve y ve una línea de 25 fichas idénticas. No saca más que una ficha y esta ficha le indica el número de fichas desplazadas por Ana.

Explicar el truco de magia.

Exercice 2 — 5 points

Pas facile à ...



Aurélie veut fabriquer une flûte de Pan formée de 10 tuyaux donnant une suite de 10 notes qu'elle appelle "do - ré - mi - fa - sol - la - si - do - ré -mi".
Le tuyau qui donne le son le plus grave a une longueur de 16 cm.
Si elle divise la longueur d'un tuyau quelconque par 2, elle obtient une note plus aiguë située une octave au-dessus.
Si elle prend les 2/3 de la longueur d'un tuyau quelconque, elle obtient une note plus aiguë située une quinte au-dessus. Exemples : do - sol, ré - la.

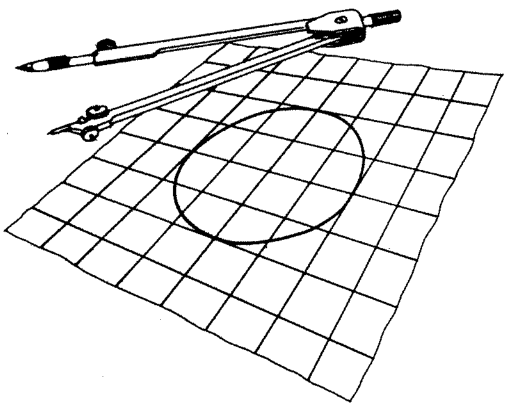
Sans utiliser d'autres longueurs, calculer les longueurs exactes des 10 tuyaux, les ranger dans l'ordre décroissant puis représenter la flûte d'Aurélie à l'échelle 1. Le diamètre extérieur des tuyaux est égal à 1 cm.

Exercice 3 — 7 points

Une douzaine

Sur un quadrillage formé de carrés, on trace un cercle dont le centre est un nœud du quadrillage et le rayon est le double du côté des carrés. Ce cercle coupe le quadrillage en 12 points qui sont les sommets d'un dodécagone.

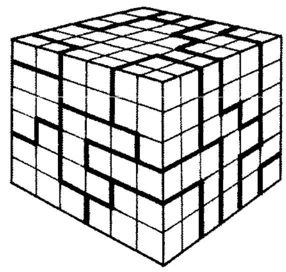
Ce dodécagone est-il régulier ? Justifier.



Exercice 4 — 5 points

Cuboloriage

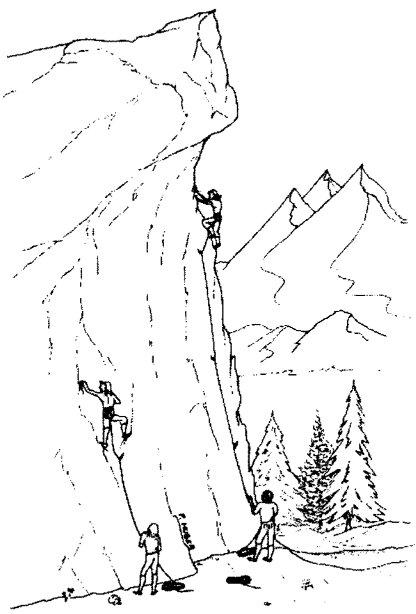
Dans un univers où tout est cubique, voici la mappemonde d'une planète dont les faces sont formées de 36 carrés. En gras sont tracées les frontières des pays de cette planète.



Colorier puis coller sur la feuille réponse une mappemonde en utilisant le moins de couleurs possible.
Le pays n°1 est colorié en noir, le n°2 en vert, le n°3 en bleu, etc. Deux pays voisins ne sont pas colorés de la même couleur et les arêtes du cube ne sont pas des frontières.
Il doit y avoir à la fin égalité des couleurs en terme d'aires.

Exercice 5 — 7 points

Le 8e degré

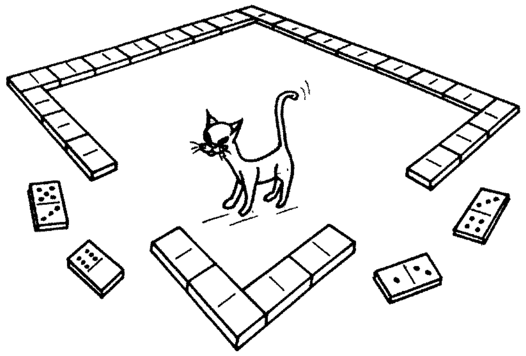


Un vendeur de cordes d'escalade dispose d'une table d'exactement 1 mètre de long.
Les opérations qui lui sont possibles sont : mesurer un mètre, ajouter ou retrancher un mètre et doubler les longueurs.
Anaïs a besoin d'une corde de 44 m, Barbara d'une corde de 63 m et Claude d'une corde de 72 m.
Le vendeur prépare séparément ces cordes et a besoin, pour chacune d'elles, de 8 opérations exactement.

Comment fait-il dans chaque cas ? Justifier.

Exercice 6 — 5 points

Dominos magiques



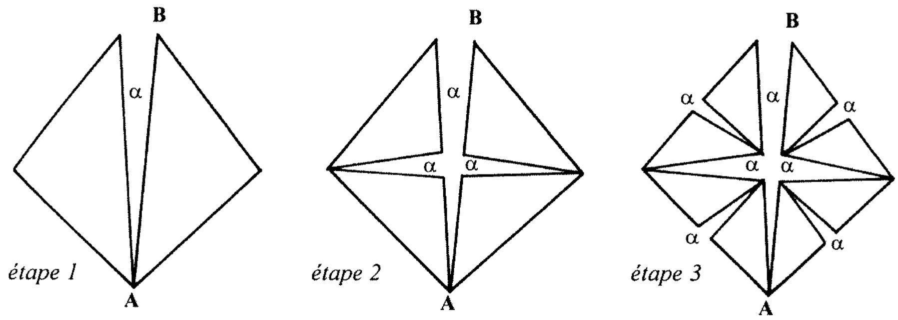
Annamaria a placé les 28 pièces différentes d'un jeu de dominos bout à bout, dans un ordre quelconque pour former les côtés d'un carré. Les sommes des points de chaque côté du carré sont égales.

Dessiner une telle disposition.

Exercice 7 — 7 points

Fractale de poumon

On appelle "fractale" une figure géométrique où l'on retrouve dans les parties la même structure que dans le tout mais à des échelles différentes.
Voici les trois premières étapes de la construction de la *fractale de poumon*.
Tous les triangles sont isocèles et ont les mêmes angles.
On prend $\alpha = 12°$ et AB = 15 cm.



Après avoir calculé les angles des triangles, construire la figure à l'étape suivante.

Exercice 8 — 5 points

Le Bogue

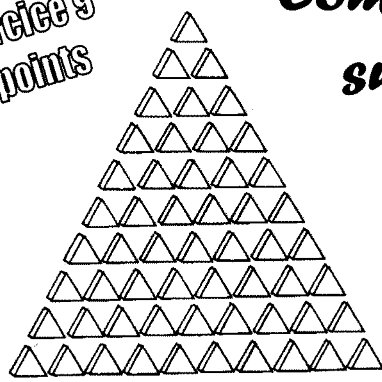
Ma calculatrice est détraquée :
quand je tape sur la touche 0, elle affiche et enregistre 1 ;
quand je tape sur la touche 1, elle affiche et enregistre 2 ;
quand je tape sur la touche 2, elle affiche et enregistre 3 ;
etc ; quand je tape sur la touche 9, elle affiche et enregistre 0.

Mais toutes les autres touches fonctionnent correctement.
Ainsi pour effectuer 12 + 34 la calculatrice affiche 23 + 45 et donne comme résultat 68.
Malgré cela, il peut arriver que pour certaines additions tapées au clavier, ma calculatrice affiche le bon résultat.

Donner un exemple d'une telle addition. Expliquer.

Exercice 9 — 7 points

Comptes suisses



Avec les dix chiffres de notre numération, ***former successivement dix entiers***, le premier de 1 chiffre, le second de 2 chiffres et ainsi de suite, jusqu'au dixième formé des dix chiffres, en ne faisant qu'ajouter, à chaque étape, un nouveau chiffre à droite ou à gauche du nombre précédent, et de telle sorte que le premier nombre soit divisible par 1, le second par 2, le troisième par 3, et ainsi de suite jusqu'au dixième, qui doit être divisible par 10.

Exercice 10 — 10 points

A l'extérieur

Alex le clown possède une veste de couleur rouge à l'extérieur et bleue à l'intérieur. Il découpe dans cette veste un triangle rectangle et il espère, en le retournant, fermer le trou fait dans la veste, de façon à obtenir extérieurement un triangle bleu sur fond rouge.
Il s'aperçoit alors qu'il ne peut fermer le trou avec le triangle retourné mais il y réussit en découpant le triangle. Il constate alors qu'il pourrait également retourner un triangle quelconque.

Donner le découpage d'un triangle rectangle puis d'un triangle quelconque. Justifier.

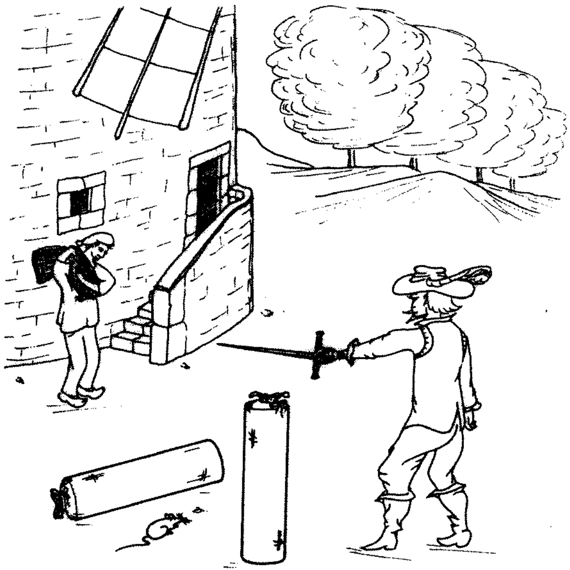
Spécial 2^de^

Exercice 11 — 5 points
Problème de pieds

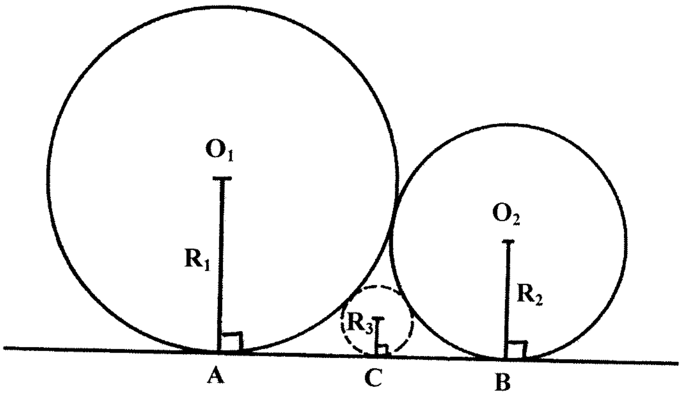
Chez le meunier Tudor, le mousquetaire Jacques commande 1 sac de blé cylindrique de 4 pieds de haut et 6 pieds de tour. Le meunier lui propose à la place 2 sacs de blé cylindriques de 4 pieds de haut mais de 3 pieds de tour chacun, en lui affirmant que cela donne le même volume de blé.
Jacques, qui sait calculer, dégaine son épée et la pointe sur le meunier.

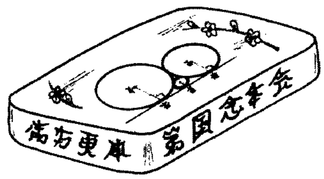
Donner l'explication mathématique de son geste.

D'après Jacques OZANAM (1640 - 1717) auteur d'un recueil de divertissements mathématiques.



Exercice 12 — 7 points
Made in Japan





Cette figure est extraite d'une tablette de bois peinte, datant de 1824, de la province de Gumma au Japon.
Elle montre trois cercles tangents à la droite (AB) et deux à deux tangents.
On donne : $R_1 = 9$ cm, $R_2 = 4$ cm et AB = 12 cm.

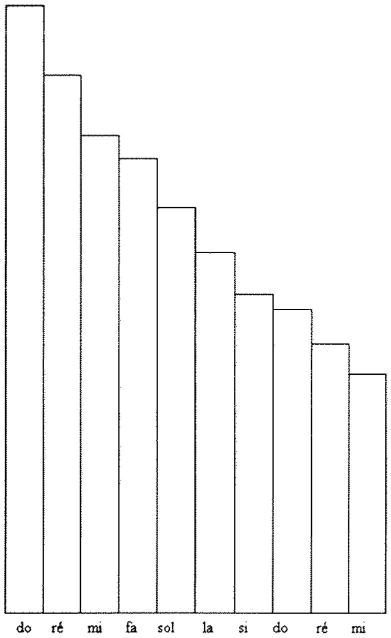
Calculer R_3.

Exercice 13 — 10 points
C'est puissant

Eliane a trouvé sur sa calculatrice une puissance de 2000 qui, dans l'écriture décimale, compte exactement 100 chiffres. Elle se demande s'il existe une puissance de 2000 qui s'écrive avec 1000 chiffres exactement.

Donner la puissance de 2000 trouvée par Eliane puis répondre à sa question. Justifier.

Corrigé de l'épreuve d'entraînement de décembre 2000



La flûte d'Aurélie à l'échelle 1/2.

Exercice 1 : Jetons un œil

Geneviève retourne le jeton qui se trouve au milieu de la rangée (le 13ème) : il indique le nombre de jetons déplacés par Anne.
Explication : Une fois qu'Anne a posé les 25 jetons, le 13ème jeton a pour valeur 0.
Si elle en ramène 1 à gauche, celui du milieu est décalé d'un rang et a pour valeur 1 ;
Si elle en ramène 2 à gauche, celui du milieu est décalé de 2 rangs et a pour valeur 2 ; etc...
Si Anne déplace n jetons ($n \leq 12$) alors le jeton du milieu aura pour valeur n.

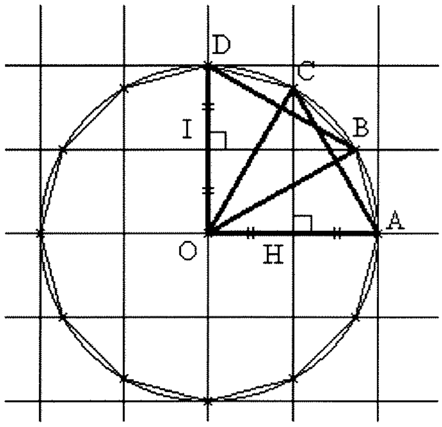
Exercice 2 : Pas facile à ...

Le calcul se fait en suivant l'ordre « do - sol - ré 2 - ré - la - mi 2 - mi - si » et « do - do 2 - fa ».

do	ré	mi	fa	sol	la	si	do 2	ré 2	mi 2
16	$\frac{128}{9}$	$\frac{1024}{81}$	12	$\frac{32}{3}$	$\frac{256}{27}$	$\frac{2048}{243}$	8	$\frac{64}{9}$	$\frac{512}{81}$
	≈ 14,2	≈ 12,6		≈ 10,7	≈ 9,5	≈ 8,4		≈ 7,1	≈ 6,3

En partant de 16 cm pour do, pour une flûte plus grande, on obtient 0,125 cm pour la 7e octave ($16 \times 0{,}5^7$) mais 0,1233 cm par 12 quintes ($16 \times (2/3)^{12}$). Les calculs peuvent donc conduire à des différences de mesures qui seront invisibles sur le dessin. En effet, mathématiquement aucune puissance de 2 n'est une puissance de 3 et vice-versa. Cette méthode de construction des fréquences et donc des longueurs d'ondes est attribuée à Pythagore.

Exercice 3 : Une douzaine



Le triangle AOC est équilatéral : en effet CO = CA (car (CH) est la médiatrice de [OA]) et OA = OC (= rayon).

De même le triangle OBD est équilatéral et [BI) est la bissectrice de $\widehat{OBD}$.

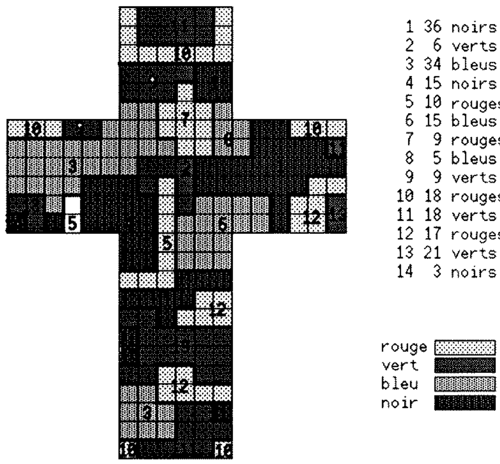
D'où $\widehat{IBO} = 30°$ et $\widehat{BOA} = 90° - \widehat{BOD} = 90° - 60° = 30°$.

Par conséquent $\widehat{BOC} = \widehat{COD} = 30°$ en utilisant les triangles équilatéraux OAC et OBD.
Idem pour les trois autres quarts de cercles.
Le dodécagone est inscrit dans un cercle avec tous les angles au centre de 30° : il est régulier.

Remarque : il y a d'autres solutions notamment en passant par la trigonométrie.

Exercice 4 : Cuboloriage

Le cube compte en tout 6^3 = 216 carrés. Il faut 4 couleurs, coloriant chacune 54 carrés de la manière suivante :



Exercice 5 : Le 8ème degré

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{-1} 11 \xrightarrow{\times 2} 22 \xrightarrow{\times 2} 44$$

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} 32 \xrightarrow{\times 2} 64 \xrightarrow{-1} 63$$

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{+1} 9 \xrightarrow{\times 2} 18 \xrightarrow{\times 2} 36 \xrightarrow{\times 2} 72$$

Exercice 9 : Comptes suisses

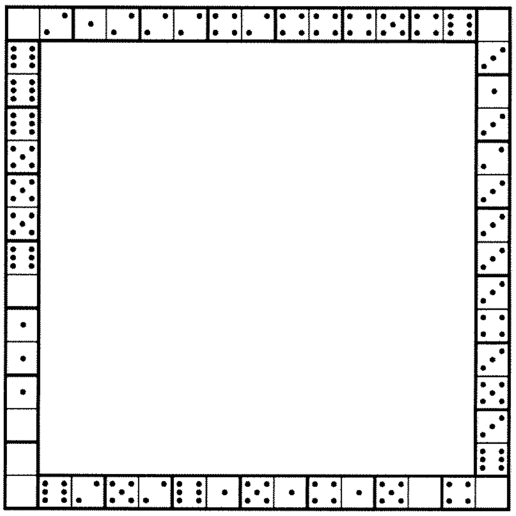
Voici deux exemples :
7 - 72 - 372 - 3724 - 37245 - 372456 - 3724560 - 13724560 - 813724560 - 9813724560
et 1 - 12 - 312 - 7312 - 73125 - 731256 - 7312564 - 73125648 - 731256489 - 7312564890

Remarque :
Une variante de cet exercice consiste à rajouter le chiffre suivant toujours à gauche.
C'est plus dur et plus long et il n'y a qu'une seule solution mais c'est très intéressant, essayez.

Solution de la variante : 3816547290.

Exercice 6 : Dominos magiques

Voici une solution parmi d'autres :



Exercice 7 : Fractale de poumon

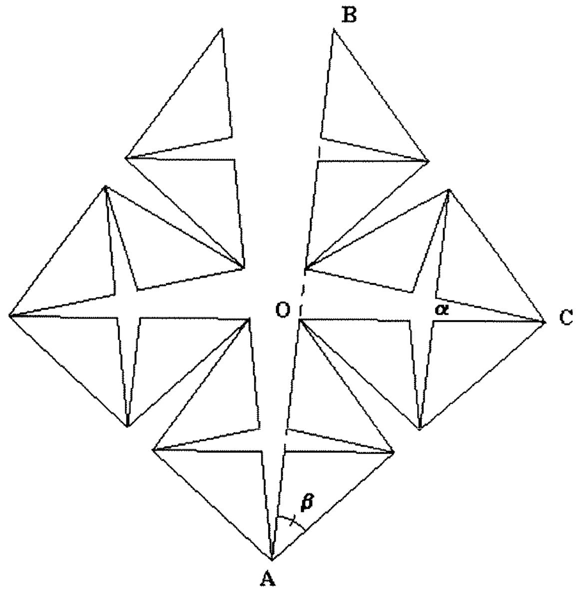
Calcul d'un angle à la base des triangles isocèles :

$\widehat{AOC} + \widehat{COB} = \widehat{AOB} = 180°$

or $\widehat{AOC} = 180° - 2\beta$ et $\widehat{COB} = 180° - (2\beta + \alpha)$
donc $180° - 2\beta + 180° - (2\beta + \alpha) = 180°$
en simplifiant $180° - 4\beta - \alpha = 0$

d'où $\beta = \dfrac{180 - \alpha}{4} = 45 - \dfrac{\alpha}{4} = 45 - \dfrac{12}{4} = 45 - 3 = 42°$.

L'angle obtus des triangles isocèles mesure $180° - 2 \times 42 = 180° - 84° = 96°$.



Exercice 8 : Le bogue

Les nombres de 2 chiffres donnent généralement 11 de plus qu'eux-mêmes, sauf les nombres finissant par 9 (1 de plus) ou commençant par 9 (89 de moins), et 99 qui donne 99 de moins. Deux possibilités parmi d'autres :
10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 99 = 189
21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 21 + 00 = 189.

19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 19 + 9 = 180
20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 20 + 0 = 180.

Exercice 10 : À l'extérieur

Un triangle isocèle retourné ferme son trou. Dans le triangle rectangle, il suffit donc de découper suivant la médiane relative à l'hypoténuse et de retourner les 2 triangles isocèles obtenus.
Dans un triangle quelconque, on trace une hauteur (non extérieure au triangle si le triangle est obtusangle : c'est à dire s'il a un angle obtus) et on applique la méthode du triangle rectangle 2 fois.

Remarques :
* *Pour les triangles non-obtusangles (3 angles aigus), on peut aussi utiliser les médiatrices. Les 3 sommets et le centre du cercle circonscrit forment 3 triangles isocèles qu'il suffit de découper et de retourner.*
* *Une dernière méthode valable pour tous les triangles : construire le cercle inscrit. Les trois quadrilatères formés par un sommet, le centre du cercle inscrit et 2 points de contact sont retournables car ils ont un axe de symétrie.*

Exercice 11 : Problème de poids

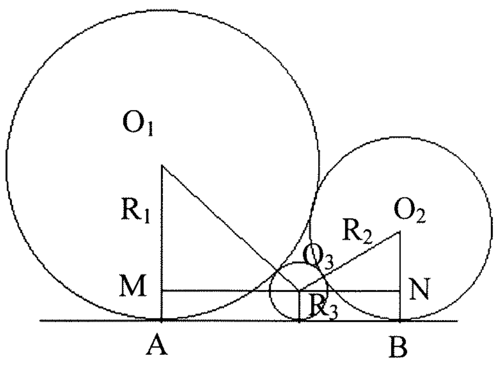
Le sac de blé de 4 pieds de hauteur et de 6 pieds de tour a pour volume : $4 \times (\frac{6}{2\pi})^2 \times \pi = \frac{36}{\pi}$ en "*pieds cubes*".

Les 2 autres sacs de 4 pieds de hauteur et de 3 pieds de tour ont un volume total de : $2 \times 4 \times (\frac{3}{2\pi})^2 \times \pi = \frac{18}{\pi}$ en "*pieds cubes*".

Donc deux sacs ont un volume total qui est la moitié de celui du grand sac. Ceci explique le geste du mousquetaire Jacques.

Exercice 12 : Made in Japan

$O_1M = 9 - R_3$ et $O_1O_3 = 9 + R_3$. $O_2N = 4 - R_3$ et $O_2O_3 = 4 + R_3$.
Le théorème de Pythagore, appliqué aux triangles rectangles O_1MO_3 et O_2NO_3, donne :
$O_3M^2 = O_1O_3^2 - O_1M^2 = (9 + R_3)^2 - (9 - R_3)^2 = 36\, R_3$ soit $O_3M = 6\sqrt{R_3}$.
De même, $O_3N = 4\sqrt{R_3}$. Comme $O_3M + O_3N = AB$, on obtient : $10\sqrt{R_3} = 12$
soit $\sqrt{R_3} = 1{,}2$ et $R_3 = 1{,}44$ cm. *Plus généralement, on a :* $\frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{R_3}}$.



Exercice 13 : C'est puissant

$2000^{30} = (2 \times 10^3)^{30} = 2^{30} \times 10^{90} = 1\,073\,741\,824 \times 10^{90}$ donc 2000^{30} a 100 chiffres.
$2000^{302} = 2^{302} \times 10^{906} \approx 8{,}148 * 10^{90} \times 10^{906} \approx 8{,}148 \times 10^{996}$ donc 2000^{302} a 997 chiffres.
$2000^{303} = 2^{303} \times 10^{909} \approx 1{,}6296 * 10^{91} \times 10^{909} \approx 1{,}6296 \times 10^{1000}$ donc 2000^{303} a 1 001 chiffres.
Il n'existe aucune puissance de 2000 avec 1000 chiffres.

Mathematik ohne Grenzen

ein internationaler Wettbewerb für Klassenstufe 10 und 11

Probewettbewerb 2000/2001

Für jede Aufgabe, auch für die nicht bearbeiteten, ist ein gesondertes Lösungsblatt abzugeben.
Bei allen Aufgaben muss die Lösung begründet oder erläutert werden.
Die Sorgfalt der Ausführung wird mitbewertet.
Auch Teillösungen werden berücksichtigt.

Aufgabe 1
7 Punkte

Trick 17

Die Lösung soll in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter umfassen.

Geneviève montre un tour de magie à son amie Anne. Dos tourné, elle lui dit :

« Dispose en ligne droite 13 jetons numérotés de 0 à 12 en les plaçant dans l'ordre décroissant de leurs valeurs de gauche à droite.

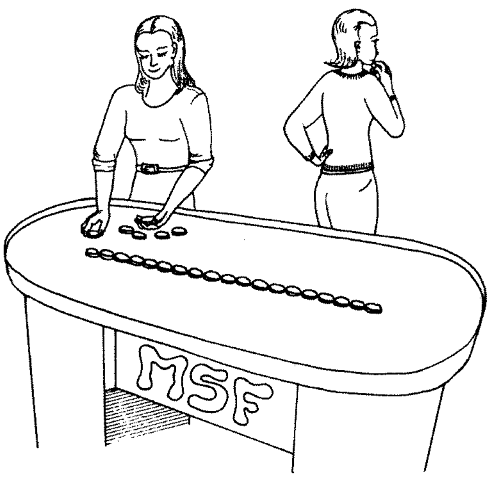
Retourne-les pour masquer leurs valeurs.

Rajoute sur la même ligne, à droite de ceux déjà placés, 12 autres jetons choisis au hasard , leurs valeurs étant cachées.

Enfin déplace à gauche de la ligne un certain nombre de ces 12 derniers jetons ».

Geneviève se retourne alors et voit une ligne de 25 jetons tous identiques. Elle en prend un seul qui lui indique le nombre de jetons déplacés par Anne.

Expliquer le tour de magie.



Genevieve shows her friend Anne a magic trick. With her back to Anne, she gives her the following instructions :

« Lay out 13 tokens numbered 0 to 12 in a straight line, setting them in decreasing order from left to right

Then turn them face down to hide the numbers written on them.

To the right of those already laid out but along the same line, add twelve more tokens picked at random with their faces down.

End by moving to the left end of the line some of the tokens that have just been added. »

Genevieve then turns round, facing a line of 25 identical tokens. She picks one and it tells her how many tokens have been moved by Anne.

Explain what the trick is.

Genoveffa mostra alla sua amica Anna un gioco di magia. Con le spalle girate le dice :

« Allinea 13 gettoni numerati da 0 a 12 sistemandoli con valore decrescente da sinistra a destra.

Girali per nasconderere i lori valori.

Aggiungi sulla stessa linea, alla destra di quelli gia sistemati, 12 altri gettoni scelti a caso essendo i loro valori nascosti.

Infine, sposta a sinistra della linea un certo numero di questi ultimi 12 gettoni ».

Genoveffa si gira, quindi, e vede una linea di 25 gettoni tutti identici. Ne prende uno solo che le indica il numero dei gettoni spostati da Anna.

Spiegare questo gioco di magia.

Genoveva le enseña un truco de magia a su amiga Ana. De espaldas a ella, le dice :

« Pon en una línea recta 13 fichas numeradas de 0 a 12 , colocándolas en orden decreciente de su valor y de izquierda a derecha.

Ponlas cara abajo para que no se pueda ver el valor de cada una.

A la derecha de las fichas ya colocadas y en la misma línea, pon otras 12 fichas , elegidas por azar y también cara abajo.

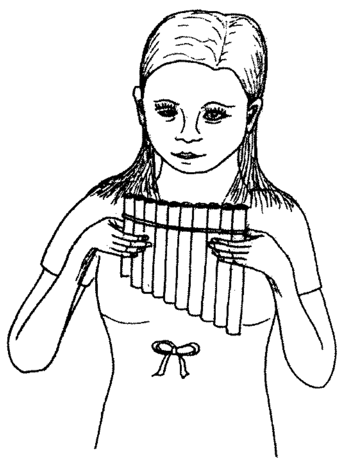
Por fin, desplaza a la izquierda de la línea algunas fichas sacadas de entre éstas últimas. »

Genoveva se vuelve y ve una línea de 25 fichas idénticas. No saca más que una ficha y esta ficha le indica el número de fichas desplazadas por Ana.

Explicar el truco de magia.

Aufgabe 2
5 Punkte

Hast du Töne ?



Aurelie möchte eine Panflöte aus 10 Röhren herstellen. Sie soll die 10 aufeinanderfolgenden Töne c, d, e, f, g, a, h, c', d', e' umfassen. Die Röhre mit dem tiefsten Ton ist 16 cm lang.

Wenn sie die Länge einer beliebigen Röhre halbiert, so ergibt sich ein Ton, der eine Oktave höher klingt. Verkürzt sie die Röhre auf 2/3 der ursprünglichen Länge, so ergibt sich ein Ton, der eine Quinte höher klingt, aus c wird zum Beispiel g und aus d wird a.

Berechne die Längen der Röhren, ohne bei der Rechnung den angegebenen Tonbereich zu verlassen. Ordne sie nach der Tonleiter.

Stelle die Panflöte auf dem Antwortblatt im Maßstab 1:1 dar. Wähle als Rohrdurchmesser 1 cm.

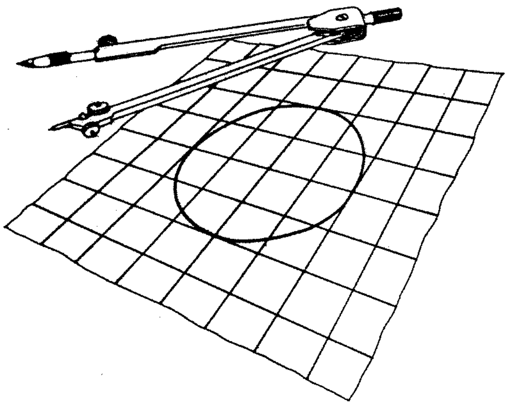
Aufgabe 3
7 Punkte

Im Dutzend

In ein quadratisches Gitternetz zeichnet man einen Kreis. Sein Mittelpunkt liegt auf einem Gitterpunkt, sein Radius ist doppelt so groß wie der Abstand zweier benachbarter Gitterlinien.

Der Kreis schneidet die Gitterlinien in 12 Punkten. Diese bilden die Ecken eines Zwölfecks.

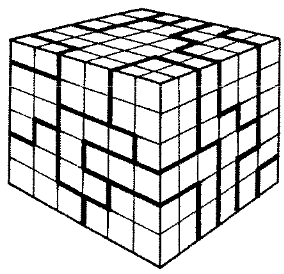
Ist dieses Zwölfeck regelmäßig? Begründe.



Aufgabe 4
5 Punkte

Kubismus

In der Würfelwelt sind selbst die Planeten würfelförmig.



Auf dem beigefügten Blatt findest du die Weltkarte eines Würfelplaneten, dessen Seitenflächen jeweils von 36 gleich großen Quadraten bedeckt sind. Die dick eingezeichneten Linien sind die Grenzen der Länder auf diesem Planeten. Die Kanten des Würfels fallen nicht mit einer Grenze zusammen.

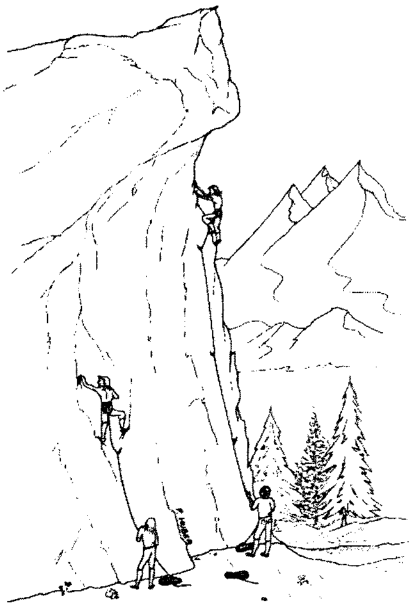
Male die Weltkarte mit möglichst wenigen Farben aus, Land 1 mit schwarz, Land 2 mit grün, Land 3 mit blau und so weiter.

Zwei benachbarte Länder müssen stets verschiedenfarbig sein. Addiert man die Flächeninhalte aller Länder derselben Farbe, so muss dieser Wert für alle Farben gleich sein.

Schneide die Karte aus, und klebe sie auf das Antwortblatt. (Die zweite Karte ist zum Ausprobieren.)

Aufgabe 5
7 Punkte

Achter Schwierigkeitsgrad



Ein Verkäufer von Kletterseilen verwendet zum Abmessen einen Tisch, dessen eine Kante genau 1 m lang ist.

Beim Messen führt er folgende Operationen durch: Abmessen der Länge 1m, Verlängern oder Verkürzen um 1 m, Verdoppeln der Länge.

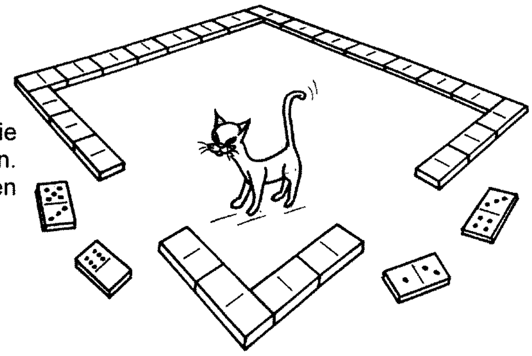
Anaïs benötigt ein Seil von 44 m Länge, das Seil für Barbara soll 63 m und das für Claudius 72 m lang sein.

Der Verkäufer misst jedes der Seile einzeln ab. Dabei führt er immer genau acht der genannten Operationen aus.

Beschreibe, wie er jedes Mal vorgehen muss.

Aufgabe 6
5 Punkte

Magisches Domino

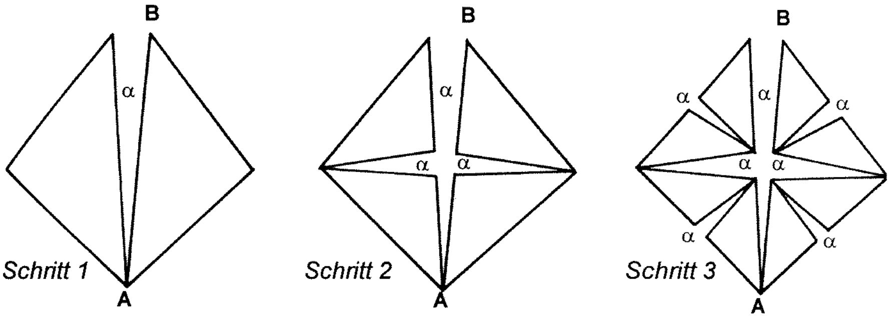


Annamaria legt die 28 Steine eines Dominospiels so aneinander, dass sie die Seiten eines Quadrats bilden. Sie beachtet nicht die Dominoregeln. Zum Schluss hat die Summe der Augenzahlen bei allen Quadratseiten denselben Wert.

Zeichne eine solche Anordnung auf.

Aufgabe 7
7 Punkte

Lungenflügelfraktal



Ein Fraktal ist eine geometrische Figur, in deren Teilen sich in verkleinertem Maßstab die Struktur der Gesamtfigur wiederfindet.

Die Abbildung zeigt die ersten drei Schritte zur Konstruktion des *Lungenflügelfraktals*.

Alle Dreiecke sind gleichschenklig und besitzen die gleichen Winkel.

Es sei $\alpha = 12°$ und $\overline{AB} = 15$ cm.

Berechne die Winkel der Dreiecke und konstruiere das Fraktal bis zum vierten Konstruktionsschritt.

Aufgabe 8
5 Punkte

Bug

Mein Taschenrechner spinnt!
Wenn ich auf die Taste mit der Null drücke, zeigt er die Ziffer 1 an. Drücke ich auf die Taste mit der Eins erscheint die Zwei, drücke ich die Taste mit der Zwei, erscheint die Drei. Und so geht es weiter. Drücke ich schließlich die Taste mit der Neun, so erscheint die Null.
Alle anderen Tasten funktionieren normal. Wenn ich zum Beispiel 12 + 34 berechnen möchte, so zeigt mein Rechner 23 + 45 an und liefert als Ergebnis 68.

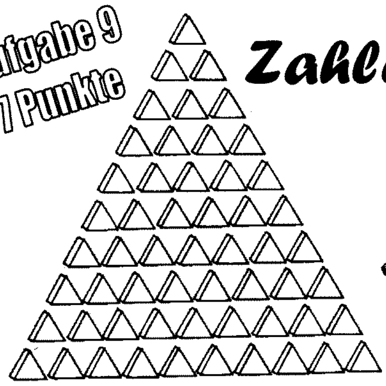
Trotzdem kann es bei manchen Additionen vorkommen, dass die angezeigte Summe mit der Summe der ursprünglich eingetippten Zahlen übereinstimmt.

Gib ein Beispiel für eine solche Addition an.

Erkläre.

Aufgabe 9
7 Punkte

Zahlenberg



Bilde aus den 10 Ziffern des Zehnersystems nacheinander zehn natürliche Zahlen.

Die erste Zahl soll einstellig, die zweite Zahl zweistellig sein und so fort, bis du schließlich eine zehnstellige Zahl erhältst.
Die nachfolgende Zahl soll immer so gebildet werden, dass vorne oder hinten eine andere der zehn Ziffern hinzugefügt wird. Jede Zahl soll durch die Anzahl ihrer Ziffern teilbar sein.

Aufgabe 10
10 Punkte

Wie man es dreht und wendet

Clown Alex besitzt eine Jacke, die außen rot und innen blau ist. Er schneidet aus dem Stoff ein rechtwinkliges Dreieck aus und versucht, das entstandene Loch mit dem gewendeten Dreieck wieder zu schließen, so dass er außen ein blaues Dreieck auf rotem Hintergrund erhält.

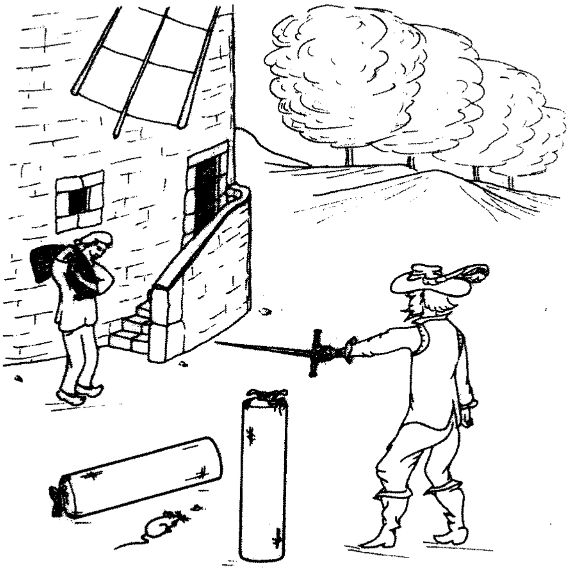
Enttäuscht stellt er fest, dass dies bei seinem Dreieck nicht möglich ist. Als er sein Dreieck jedoch zerschneidet, gelingt es ihm. Er findet schließlich heraus, dass man auch ein beliebiges Dreieck ausschneiden und entsprechend wenden kann.

Gib eine geeignete Zerlegung zunächst für ein rechtwinkliges und dann für ein beliebiges Dreieck an. Begründe.

Klasse 11

Aufgabe 11
5 Punkte

Fußproblem



Jacques, der Musketier, bestellt bei Müller Tudor einen Sack Weizen, zylinderförmig, 4 Fuß hoch und mit einem Umfang von 6 Fuß.

Der Müller bietet ihm statt dessen 2 Säcke an, auch zylinderförmig und 4 Fuß hoch, aber mit 3 Fuß Umfang. Er behauptet, dies sei die gleiche Menge Weizen.

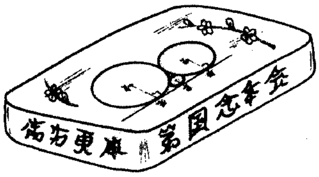
Jacques kann rechnen, zieht seinen Degen und richtet ihn auf den Müller.

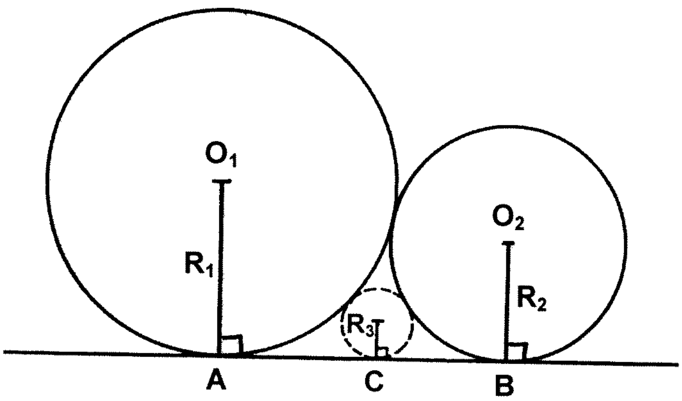
Erkläre dieses Verhalten mathematisch.

(nach Jacques Ozanam (1640 - 1717), Autor einer Sammlung mathematischer Zerstreuungen).

Aufgabe 12
7 Punkte

Made in Japan





Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus einer bemalten Holztafel. Sie stammt aus der japanischen Provinz Gumma und wird auf das Jahr 1824 datiert.

Man sieht drei Kreise mit den Radien R_1, R_2 und R_3. Sie berühren sich gegenseitig und besitzen die Gerade (AB) als gemeinsame Tangente.

Es sei $R_1 = 9$ cm, $R_2 = 4$ cm und $\overline{AB} = 12$ cm.

Berechne den Radius R_3 des kleinen Kreises.

Aufgabe 13
10 Punkte

Hoch wie viel ?

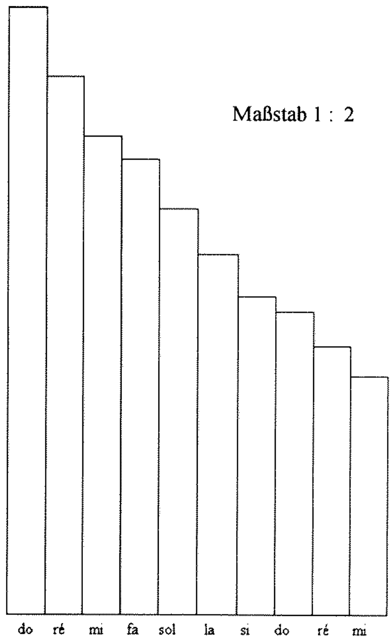
Eliane findet mit Hilfe ihres Taschenrechners eine Potenz von 2000. Sie ergibt ausgeschrieben eine Zahl mit genau 100 Ziffern.

Eliane fragt sich, ob es wohl eine Potenz von 2000 gibt, welche im Zehnersystem durch eine Zahl mit genau 1000 Ziffern dargestellt wird.

Gib die Potenz von 2000 an, die Eliane zuerst gefunden hat.

Beantworte dann Elianes Frage und begründe die Antwort.

Lösungsvorschläge Probewettbewerb 2000/2001



Aufgabe 1: Trick 17

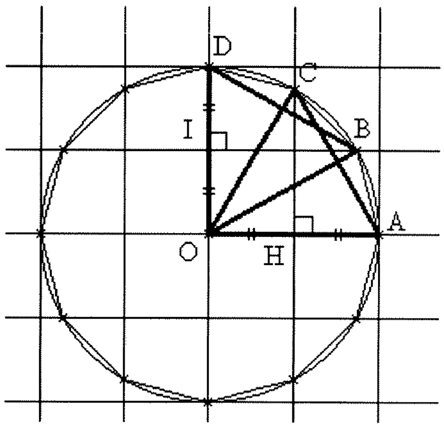
Geneviève dreht die Spielmarke in der Mitte der Reihe um: Sie zeigt die Anzahl der umgelegten Steine an.
Erklärung : Nachdem die 25 Steine ausgelegt sind, liegt in der Mitte der Stein mit der Zahl 0. Nach dem Umlegen eines Steins verschiebt sich die Mitte um jeweils einen Stein nach links. Beim Umlegen eines Steins liegt also die 1 in der Mitte, bei zwei Steinen die 2 u.s.w. Nach dem Umlegen von n Steinen trägt der Stein in der Mitte die Aufschrift n.

Aufgabe 2: Hast du Töne ?

Reihenfolge der Berechnung : « c - g - d' - d - a - e' - e - h »
und « c - c' - f ».

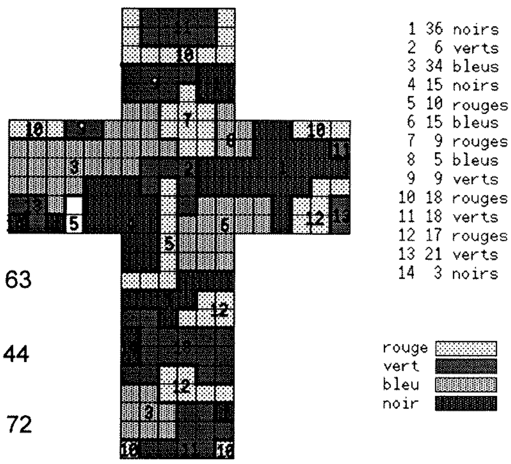
c	d	e	f	g	a	h	c'	d'	e'
16	$\frac{128}{9}$ ≈ 14,2	$\frac{1024}{81}$ ≈ 12,6	12	$\frac{32}{3}$ ≈ 10,7	$\frac{256}{27}$ ≈ 9,5	$\frac{2048}{243}$ ≈ 8,4	8	$\frac{64}{9}$ ≈ 7,1	$\frac{512}{81}$ ≈ 6,3

Aufgabe 3 : Im Dutzend



Das Dreieck ACO ist gleichseitig, denn (CH) ist Symmetrieachse und OA sowie OC sind Radien. Dreieck OBD ist ebenfalls gleichseitig, hier ist (BI) die Symmetrieachse.
Damit ist $\angle$ AOB = 90°- $\angle$BOD = 90°- 60° = 30°.
Entsprechend ist $\angle$ COD = 90° - 60° = 30° und damit $\angle$ BOC = 30°.
Die drei Sektoren mit den Kreispunkten A, B, C und D haben also gleiche Mittelpunktswinkel.
Bei den drei anderen Viertelkreisen geht man analog vor und erhält so 12 kongruente Sektoren. Das entstandene Zwölfeck ist also regelmäßig.

Aufgabe 4 : Kubismus



Die Oberfläche des Würfels besteht aus 14 Ländern, die insgesamt 216 Quadrate umfassen. Man benötigt 4 Farben, sodass auf jede Farbe 54 Quadrate entfallen (siehe Abbildung).

Aufgabe 5 : Achter Schwierigkeitsgrad

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} 32 \xrightarrow{\times 2} 64 \xrightarrow{-1} 63$$

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{+1} 3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{-1} 11 \xrightarrow{\times 2} 22 \xrightarrow{\times 2} 44$$

$$1 \xrightarrow{\times 2} 2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{+1} 9 \xrightarrow{\times 2} 18 \xrightarrow{\times 2} 36 \xrightarrow{\times 2} 72$$

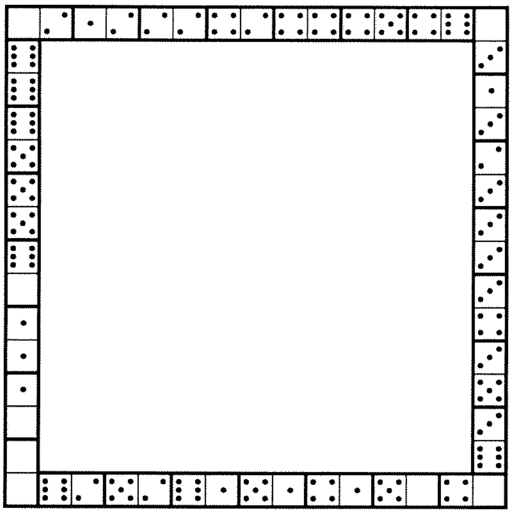
Aufgabe 9 : Zahlenberg *(steht aus Platzgründen an dieser Stelle)*

Zwei Beispiele :
7 - 72 - 372 - 3724 - 37245 - 372456 - 3724560 - 13724560 - 813724560 - 9813724560
et 1 - 12 - 312 - 7312 - 73125 - 731256 - 7312564 - 73125648 - 731256489 - 7312564890

Bemerkung : Eine schwierigere Variante dieser Aufgabe besteht darin, die nächste Ziffer immer links anzufügen. Versuchen Sie es.

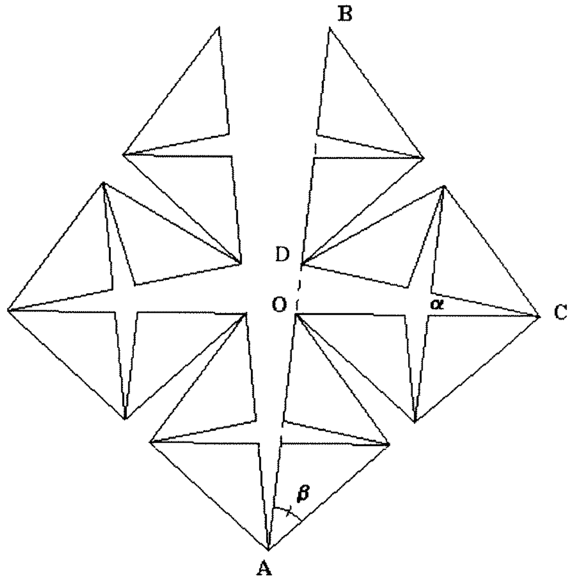
Aufgabe 6 : Magisches Domino

Eine Lösung unter vielen :



Aufgabe 7: Lungenflügelfraktal

Dreieck ACB ist gleichschenklig.
Sei $\angle$ CAB = $\angle$ ABC = β.
Da die Dreiecke ACO und CBD ebenfalls gleichschenklig sind, ist $\angle$ BCA = $\alpha + 2\beta$.
Damit gilt im Dreieck ACB : $\alpha + 4\beta = 180°$.
Mit $\alpha = 12°$ erhält man $\beta = 42°$. Für den stumpfen Winkel der Dreiecke ergibt sich 96°.



Aufgabe 8 : Bug

Bei einstelligen Zahlen ungleich 9 ist der angezeigte Wert um 1 größer, bei der Zahl 9 ist er um 9 kleiner. Addiert man also 9 einstellige Zahlen ungleich 9 , so ist die angezeigte Summe um 9 größer. Addiert man nun noch 9, so wird der Fehler kompensiert.
Beispiel :
$1 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 7 + 7 + 8 + 9 = 53$
$2 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + 8 + 8 + 9 + 0 = 53.$

Bei mehrstelligen Ziffern überlegt man analog.

Aufgabe 10 : Wie man es dreht und wendet

Ein gleichschenkliges Dreieck läßt sich stets wenden. Man muss also das rechtwinklige Dreieck in zwei gleichschenklige zerlegen. Dies gelingt mit der Seitenhalbierenden der Hypotenuse.
Ein beliebiges Dreieck läßt sich durch eine Höhe immer in zwei rechtwinklige zerlegen. Mit diesen verfährt man wie oben.
Bei spitzwinkligen Dreiecken kann man auch den Umkreismittelpunkt mit den Eckpunkten verbinden.
Folgende Methode klappt bei allen Dreiecken : Verbindet man den Inkreismittelpunkt mit den Berührpunkten des Inkreises, so wird das Dreieck in drei Drachen zerlegt, welche jeweils eine Winkelhalbierende als Symmetrieachse besitzen.

Aufgabe 11 : Fußproblem

Der Sack mit einer Höhe von 4 Fuß und einem Umfang von 6 Fuß hat das Volumen $V = 4 \times \left(\frac{6}{2\pi}\right)^2 \times \pi = \frac{36}{\pi}$ *Kubikfuß.*

Das Volumen der beiden anderen Säcke mit 3 Fuß Umfang beträgt zusammen $V' = 2 \times 4 \times \left(\frac{3}{2\pi}\right)^2 \times \pi = \frac{18}{\pi}$ *Kubikfuß.*

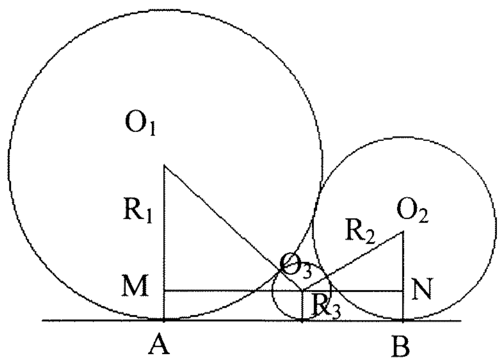
Exercice 12 : Made in Japan

Im Dreieck MO_3O_1 gilt $(9+R_3)^2 - (9-R_3)^2 = \overline{MO_3}^2 \Rightarrow \overline{MO_3} = 6 \cdot \sqrt{R_3}$.

Analog zeigt man $\overline{O_3N} = 4 \cdot \sqrt{R_3}$.

$\overline{MO_3} + \overline{O_3N} = \overline{AB} \Rightarrow 10\sqrt{R_3} = 12 \Rightarrow R_3 = 1{,}44$ (cm).

Bem. : a) $\overline{AB}$ *lässt sich auch aus* R_1 *und* R_2 *berechnen.*
b) allgemein kann man zeigen : $\frac{1}{\sqrt{R_2}} + \frac{1}{\sqrt{R_1}} = \frac{1}{\sqrt{R_3}}$.



Aufgabe 13 : Hoch wie viel ?

Probieren mit dem Taschenrechner liefert $2000^{30} \approx 1{,}07 \cdot 10^{99}$ (100 Ziffern). $2000^n = 2^n \cdot 10^{3n}$

$2000^{302} = 2^{302} \cdot 10^{906} \approx 8{,}1 \cdot 10^{90} \cdot 10^{906} = 8{,}1 \cdot 10^{996}$ (997 Ziffern) ; $2000^{303} = 2^{303} \cdot 10^{909} \approx 1{,}6 \cdot 10^{1000}$ (1001 Ziffern).
Eine Darstellung mit 1000 Ziffern ist also nicht möglich.

Matematica senza frontiere

Prova di allenamento febbraio 2001

NOTA BENE

Per tutti gli esercizi sono richieste spiegazioni, giustificazioni o illustrazioni.
Sarà esaminata ogni risoluzione, anche parziale.
Si terrà conto dell'accuratezza.
Ogni foglio-risposta deve essere utilizzato per un singolo esercizio per il quale deve essere riportata una sola soluzione.
Attenzione : in presenza di foglio risposta con soluzioni a più esercizi o in presenza di più soluzioni allo stesso esercizio la prova sarà annullata.

Esercizio 1 (7 punti)

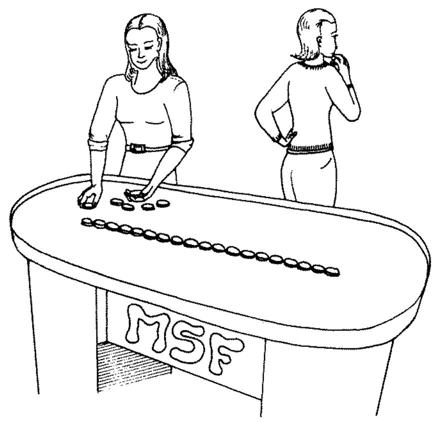
Risoluzione da formulare nella lingua prescelta (francese, inglese, spagnolo o tedesco) con un minimo di 30 parole.

Basta un'occhiata

❖ Geneviève montre un tour de magie à son amie Anne. Dos tourné, elle lui dit :
« Dispose en ligne droite 13 jetons numérotés de 0 à 12 en les plaçant dans l'ordre décroissant de leurs valeurs de gauche à droite.
Retourne-les pour masquer leurs valeurs.
Rajoute sur la même ligne, à droite de ceux déjà placés, 12 autres jetons choisis au hasard, leurs valeurs étant cachées.
Enfin déplace à gauche de la ligne un certain nombre de ces 12 derniers jetons ».

Geneviève se retourne alors et voit une ligne de 25 jetons tous identiques. Elle en prend un seul qui lui indique le nombre de jetons déplacés par Anne.

Expliquer le tour de magie.



❖ Genoveva le enseña un truco de magia a su amiga Ana. De espaldas a ella, le dice :
« Pon en una línea recta 13 fichas numeradas de 0 a 12, colocándolas en orden decreciente de su valor y de izquierda a derecha.
Ponlas cara abajo para que no se pueda ver el valor de cada una.
A la derecha de las fichas ya colocadas y en la misma línea, pon otras 12 fichas, elegidas por azar y también cara abajo.
Por fin, desplaza a la izquierda de la línea algunas fichas sacadas de entre éstas últimas.»

Genoveva se vuelve y ve una línea de 25 fichas idénticas.
No saca más que una ficha y esta ficha le indica el número de fichas desplazadas por Ana.

Explicar el truco de magia.

❖ Genoveva zeigt ihrer Freundin Anne einen Zaubertrick. Mit dem Rücken zu Anne sagt sie zu ihr :
„ Lege 13 Spielmarken, die von 0 bis 12 nummeriert sind in einer Reihe vor dich hin. Ordne sie von links nach rechts in absteigender Reihenfolge an. Drehe sie um, damit ihr Wert verdeckt ist.
Füge nun in der selben Reihe rechts 12 weitere, zufällig ausgewählte Spielmarken an, deren Wert ebenfalls verdeckt ist.
Jetzt verschiebst du von diesen 12 hinzugekommenen Marken eine bestimmte Anzahl an das linke Ende der Reihe."

Genoveva dreht sich um und sieht vor sich eine Reihe von 25 gleichen Spielmarken. Sie nimmt eine davon und erkennt, wie viele Marken verschoben wurden.

Erkläre diesen Trick.

❖ Genevieve shows her friend Anne a magic trick. With her back to Anne, she gives her the following instructions :
« Lay out 13 tokens numbered 0 to 12 in a straight line, setting them in decreasing order from left to right.
Then turn them face down to hide the numbers written on them.
To the right of those already laid out but along the same line, add twelve more tokens picked at random with their faces down.
End by moving to the left end of the line some of the tokens that have just been added.»

Genevieve then turns round, facing a line of 25 identical tokens. She picks one and it tells her how many tokens have been moved by Anne.

Explain what the trick is.

Esercizio 2 (5 punti)

Il golosone biricchino.

La mamma di Giannarino (ragazzo molto vivace e goloso) comprò 64 cioccolatini. Con l'aiuto del figlio li dispose sul tavolino del salotto in modo che contati risultavano 18 per ogni lato. Giannarino, non sapendo trattenere la propria golosità, a tre riprese portò via 24 cioccolatini e la mamma, sebbene vigilasse, non se ne accorse poiché contando e ricontando di cioccolattini ne aveva sempre 18 per ogni lato. Come si spiega ciò ?

2	14	2
14		14
2	14	2

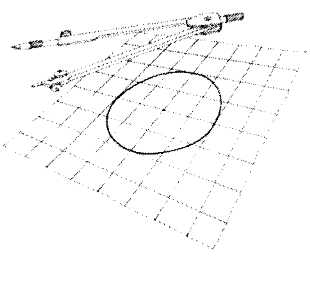
(Concorso «A. Bernasconi» 2000
Proponente: Luca Colombo classe 3 D_2 ITIS «Hensemberger» Monza)

Esercizio 3 (7 punti)

Una dozzina

Su un reticolo formato da quadrati si traccia una circonferenza con centro in un nodo del reticolo e raggio doppio del lato dei quadrati. Questa circonferenza taglia il reticolo in 12 punti che sono vertici di un dodecagono.

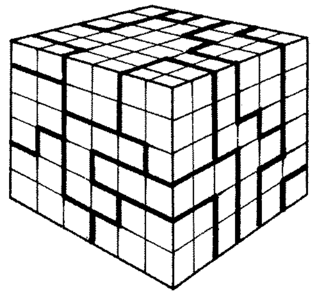
Questo dodecagono è regolare ? Motivate la risposta.



Esercizio 4 (5 punti)

Cubolatura

In un universo in cui tutto è cubo ecco il mappamondo di un pianeta in cui ogni faccia è divisa in 36 quadrati. In grassetto sono segnate le frontiere degli stati del pianeta.



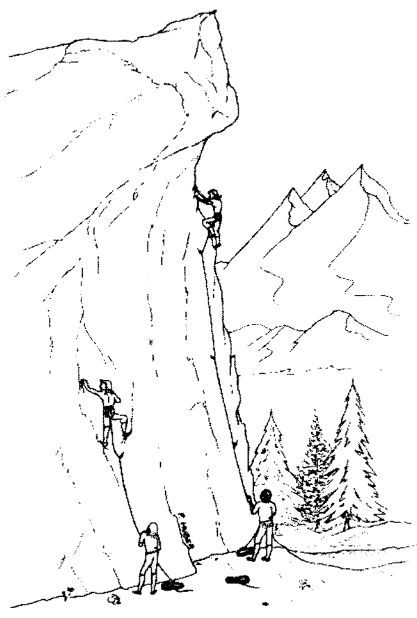
Colorare e poi incollare sul foglio-risposta la mappa del pianeta utilizzando il minor numero possibile di colori. Lo stato numero 1 è colorato, per esempio, in nero, lo stato numero 2 in verde, e così via. Stati confinanti non possono avere lo stesso colore. Gli spigoli del cubo non sono frontiere. Alla fine ogni colore dovrà coprire aree uguali.

Esercizio 5 (7 punti)

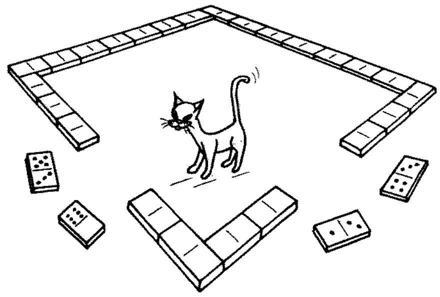
Ottavo grado

Un venditore di corda da ascensione dispone di una asta lunga esattamente un metro. Può eseguire solo queste operazioni: misurare un metro di corda, aggiungere e togliere un metro, raddoppiare una lunghezza. Anna ha bisogno di una corda di 44 metri, Barbara di una di 63 metri e Claudia di una di 72 metri. Il venditore prepara separatamente queste tre corde, compiendo per ciascuna esattamente otto operazioni.

Come procede in ciascuno dei tre casi ? Illustrate il procedimento.



Esercizio 6 (5 punti) *Domino magico*



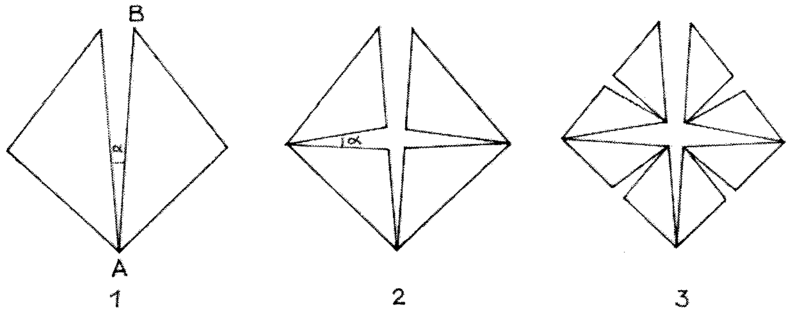
Annamaria ha disposto, estremo contro estremo, le 28 tessere di un domino, in ordine qualsiasi, per formare i lati di un quadrato. La somma dei punti è la stessa per ogni lato del quadrato.

Disegnate una disposizione di questo genere.

Esercizio 7 (7 punti) *Frattale a polmone*

Si dice « frattale » una figura geometrica le cui parti hanno la stessa struttura del tutto, ma su scala diversa. Ecco i primi tre stadi della costruzione del « frattale a polmone ». Tutti i triangoli sono isosceli ed hanno angoli uguali.
Si prenda $\alpha = 12°$ e AB = 15 cm.

Dopo aver calcolato gli angoli dei triangoli, costruite il quarto stadio del frattale.



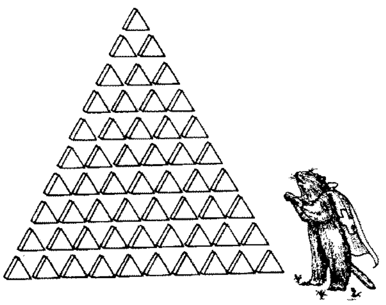
Esercizio 8 (5 punti)

Anelli di un ingranaggio

La mia calcolatrice è guasta :
quando premo il tasto 0 , fa apparire e registra 1 ;
quando premo il tasto 1 , fa apparire e registra 2 ;
quando premo il tasto 2 , fa apparire e registra 3 ; eccetera
.
quando premo il tasto 9 , fa apparire e registra 0.
Tutti gli altri tasti, però, funzionano correttamente. Così se digito 12 + 34 la calcolatrice indica 23 + 45 e dà come risultato 68.
Eppure può succedere che per certe addizioni ben azzeccate la calcolatrice dia il risultato esatto.
Fornite un esempio di somma esatta motivando perché il risultato che compare non risente del guasto.

Esercizio 9 (7 punti)

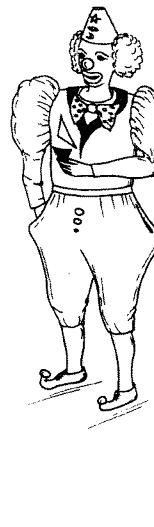
Gonfiamo il numero



Con le dieci cifre della nostra numerazione costruite successivament e dieci numeri interi : il primo di una cifra, il secondo di due cifre e così via fino al decimo numero formato da dieci cifre.
Ogni numero deve essere ottenuto aggiungendo al precedente una nuova cifra a destra o a sinistra in modo che il primo numero sia divisibile per 1, il secondo per 2, il terzo per 3 e così via fino al decimo che deve essere divisibile per 10.

Esercizio 10 (10 punti)

Diritto e rovescio

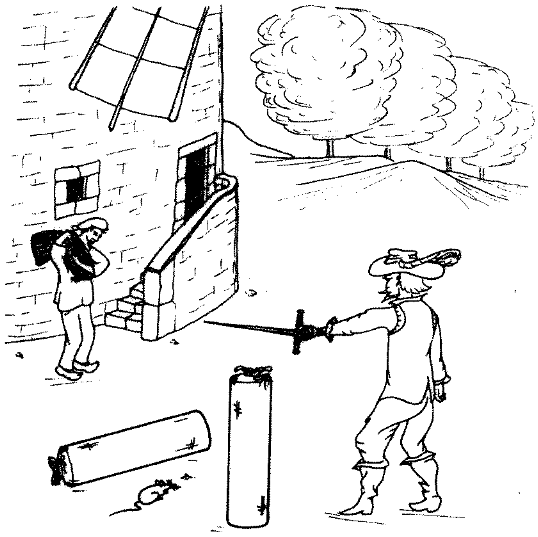


Alex il pagliaccio possiede una giacca rossa all'esterno e blu all'interno. In questa giacca ritaglia un triangolo rettangolo e spera, rivoltandolo, di richiudere il buco formatosi in modo da ottenere all'esterno un triangolo blu su fondo rosso.
Il triangolo rivoltato non si adatta al buco, ma Alex raggiunge il suo scopo sezionando il triangolo. Non solo, ma si accorge che potrebbe in modo analogo rivoltare un triangolo qualsiasi.

Mostrate graficamente come sezionare il triangolo rettangolo e poi un triangolo qualsiasi giustificando il vostro procedimento.

Esercizio 11 (5 punti) solo per la classe terza

Il mugnaio ci ha provato !



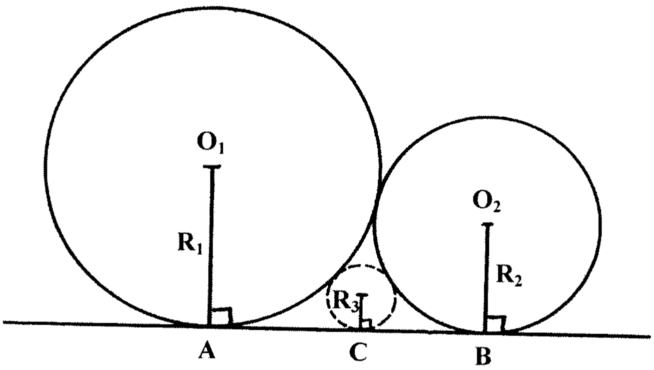
Jacques il moschettiere va al mulino di mastro Tudor per ordinargli del grano: vuole un sacco cilindrico di altezza 4 piedi e di circonferenza 6 piedi. Il mugnaio gli propone di fornirgli la stessa quantità di grano in due sacchi cilindrici sempre di altezza 4 piedi, ma di circonferenza 3 piedi.
Jacques che si intende di calcoli, sguaina la spada e la punta alla gola del mugnaio.

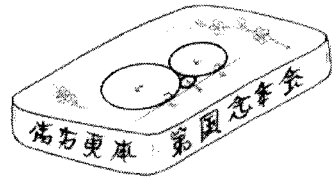
Spiegate matematicamente la reazione del moschettiere.

Tratto da Jacques OZANAM (1640 - 1717) autore di una raccolta di giochi matematici.

Esercizio 12 (7 punti) solo per la classe terza

Made in Japan





Questa figura è stata tratta da una tavoletta in legno dipinta nel 1824 nella provincia giapponese di Gumma. Mostra tre cerchi tangenti alla retta AB e tangenti tra loro a due a due.

Dati : $R_1 = 9$ cm $R_2 = 4$ cm

Calcolate il raggio del cerchio minore.

Esercizio 13 (10 punti) solo per la classe terza

Che potenza !

Eliana ha trovato con la sua calcolatrice una potenza di 2 000 che scritta in forma decimale ha esattamente 100 cifre. Si domanda, allora, se esista una potenza di 2 000 scritta esattamente con 1 000 cifre.

Scrivete la potenza di 2 000 trovata da Eliana e, poi, rispondete alla sua domanda. Illustrate la vostra risposta.

Mathématiques sans frontières

Training test - December 2000

- **Justify your answers for all the questions.**
- **Incomplete answers still get some credit.**
- **Careful work can gain marks.**
- **Only one answer should be handed in for each class.**

Question 1 — 7 marks — *Jetons un œil*

Write down your answer in French, German, Italian or Spanish using at least 30 words.

Geneviève montre un tour de magie à son amie Anne. Dos tourné, elle lui dit :

« Dispose en ligne droite 13 jetons numérotés de 0 à 12 en les plaçant dans l'ordre décroissant de leurs valeurs de gauche à droite.

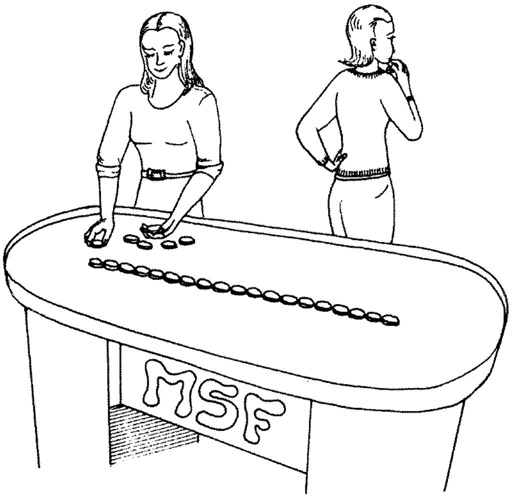
Retourne-les pour masquer leurs valeurs.

Rajoute sur la même ligne, à droite de ceux déjà placés, 12 autres jetons choisis au hasard , leurs valeurs étant cachées.

Enfin déplace à gauche de la ligne un certain nombre de ces 12 derniers jetons ».

Geneviève se retourne alors et voit une ligne de 25 jetons tous identiques. Elle en prend un seul qui lui indique le nombre de jetons déplacés par Anne.

Expliquer le tour de magie.



Genoveva zeigt ihrer Freundin Anne einen Zaubertrick. Mit dem Rücken zu Anne sagt sie zu ihr :

„ Lege 13 Spielmarken, die von 0 bis 12 nummeriert sind, in einer Reihe vor dich hin. Ordne sie von links nach rechts in absteigender Reihenfolge an. Drehe sie um, damit ihr Wert verdeckt ist.

Füge nun in derselben Reihe rechts 12 weitere, zufällig ausgewählte Spielmarken an, deren Wert ebenfalls verdeckt ist.

Jetzt verschiebst du von diesen 12 hinzugekommenen Marken eine bestimmte Anzahl an das linke Ende der Reihe. “

Genoveva dreht sich um und sieht vor sich eine Reihe von 25 gleichen Spielmarken. Sie nimmt eine davon und erkennt, wie viele Marken verschoben wurden.

Erkläre diesen Trick.

Genoveffa mostra alla sua amica Anna un gioco di magia. Con le spalle girate le dice :

« Allinea 13 gettoni numerati da 0 a 12 sistemandoli con valore decrescente da sinistra a destra.

Girali per nasconderere i lori valori.

Aggiungi sulla stessa linea, alla destra di quelli gia sistemati, 12 altri gettoni scelti a caso essendo i loro valori nascosti.

Infine, sposta a sinistra della linea un certo numero di questi ultimi 12 gettoni ».

Genoveffa si gira, quindi, e vede una linea di 25 gettoni tutti identici. Ne prende uno solo che le indica il numero dei gettoni spostati da Anna.

Spiegare questo gioco di magia.

Genoveva le enseña un truco de magia a su amiga Ana. De espaldas a ella, le dice :

« Pon en una línea recta 13 fichas numeradas de 0 a 12 , colocándolas en orden decreciente de su valor y de izquierda a derecha.

Ponlas cara abajo para que no se pueda ver el valor de cada una.

A la derecha de las fichas ya colocadas y en la misma línea, pon otras 12 fichas , elegidas por azar y también cara abajo.

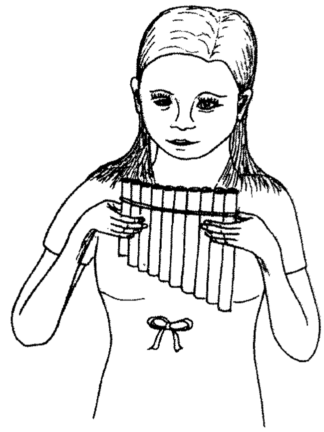
Por fin, desplaza a la izquierda de la línea algunas fichas sacadas de entre éstas últimas. »

Genoveva se vuelve y ve una línea de 25 fichas idénticas. No saca más que una ficha y esta ficha le indica el número de fichas desplazadas por Ana.

Explicar el truco de magia.

Question 2
5 marks

Note so easy



Aurelie wants to make a set of Pan Pipes from 10 tubes so as to sound the 10 notes *do, re, mi, fa, so, la, te, do re, mi.*
The tube that makes the lowest sound is 16 cm long.
If she divides the length of a tube by two , she gets a sharper note that sounds one octave higher.
If she takes 2/3 of the length of a tube she will get a note which is higher by a fifth (*so* is the fifth of *do*, and *la* is the fifth of *re*).

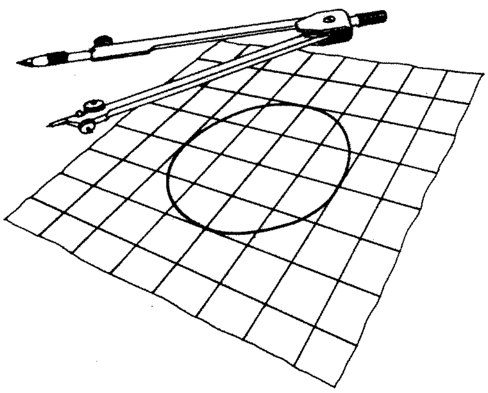
Without using any other information calculate the exact lengths of the 10 tubes and draw them in ascending order using a scale of 1:1 to get a picture of Aurelie's flute. The exterior diameter of the tubes is 1 cm.

Question 3
7 marks

Baker's dozen - not !

On a square grid a circle is drawn with its centre at a point on the grid and its radius twice the length of a square. The circle cuts the square grid in 12 points which are the vertices of a dodecagon.

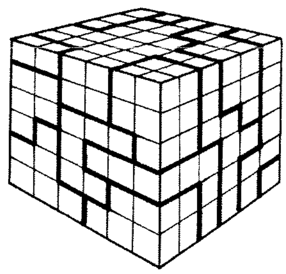
Is this dodecagon regular ? Justify your answer.



Question 4
5 marks

Cubicolouring

In a world where everything is cubic one planet has faces made up of 36 squares. The borders of the countries are shown in bold.



Colour in the world map using as few colours as possible. For example colour country number 1 in black, number 2 in green, number 3 in blue etc. Two neighbouring countries cannot be coloured in the same colour. The edges of the cube are not boundaries of countries

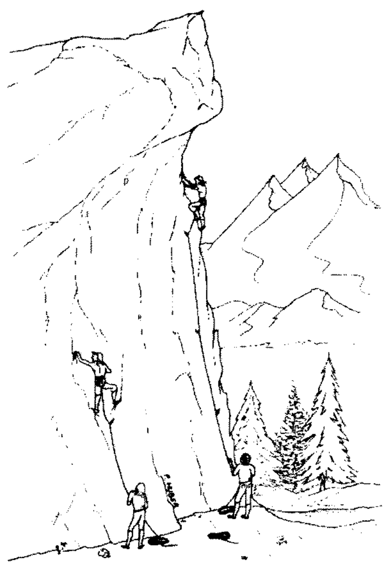
When you have completed your colouring-in each colour should cover the same area.

Question 5
7 marks

Eight degree

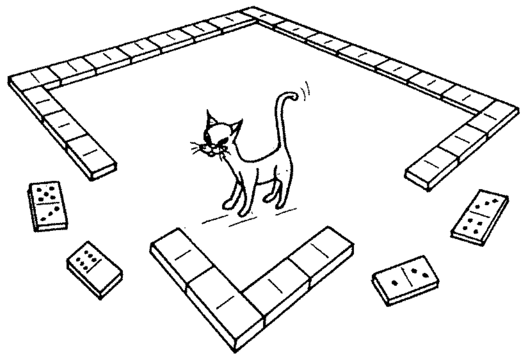
A supplier of ropes for mountaineering uses his counter which is exactly 1 metre long to measure out the rope.
So there are 3 operations he can use : measure out a metre; add or subtract a metre; and double the length.
Anais needs a 44 m rope, Barbara one of 63 metres and Claude one of 72 metres.
The supplier measures out the ropes separately needing to perform 8 operations in each case.

Explain how he does this for each length of rope.



Question 6
5 marks

Magic dominoes



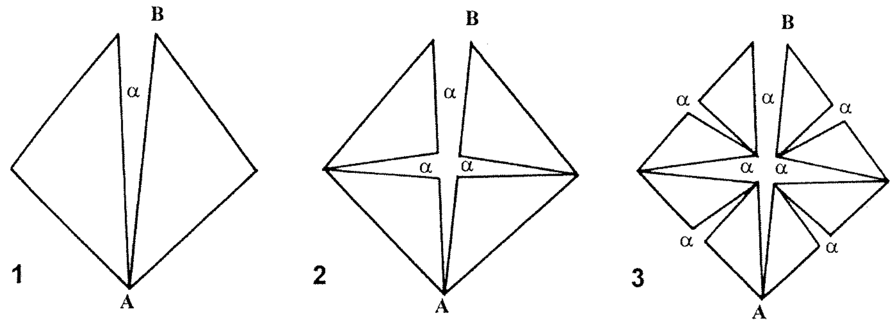
Annamaria placed the 28 different dominoes from the standard set end to end so as to form the sides of a square. The sums of the dots on each of the sides were equal.

Draw a possible solution.

Question 7
7 marks

Lung fractal

The word fractal is used in geometry to mean a figure in which you find the same structure in the parts as there is in the whole, but on a smaller scale.
Here are the first three stages in drawing the 'lung fractal'.
All the triangles are isosceles and have the same angles.
Take α = 12 and AB = 15 cm.

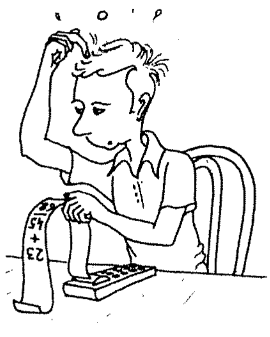


Calculate the angles of the triangle and then draw the next stage in the fractal.

Question 8
5 marks

Some sums

My calculator has gone mad :
when I type 0, it shows 1 ;
when I type 1 it shows 2 ;
when I type 2 it shows 3 ;
etc
when I type 9 it shows 0.

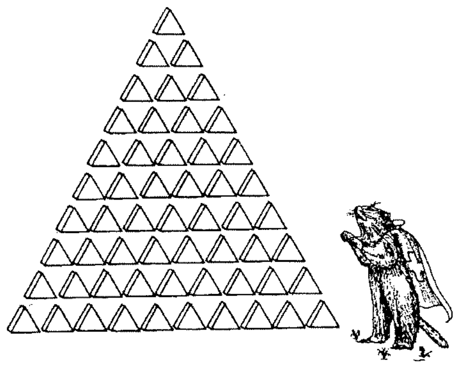


But all the other buttons work correctly.
So to deal with 12 + 34 the calculator shows 23 + 45 and gives 68 as the answer.
In spite of this there are some sums for which the calculator can give the correct answer.

Give an example of such an addition, explaining your answer.

Question 9
7 marks

Number game



Using the ten digits of our number system, ***form a series of ten whole numbers***, the first of 1 digit, the second of 2 digits and so on. At each stage you are only allowed to add a new digit on the left or on the right of the previous number. You are also required to have the first number divisible by 1, the second by 2, the third by 3 and so on with the tenth being divisible by 10.

Question 10
10 marks

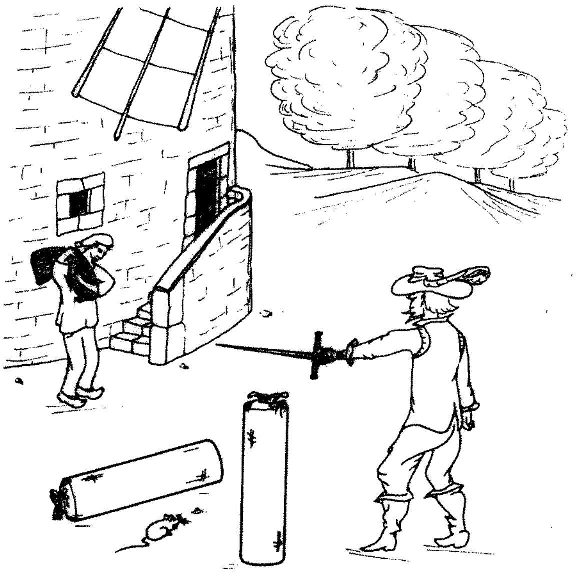
That within

Alex the clown has a jacket which is red on the outside and blue on the inside. He cuts a right angled triangle in the jacket. He hopes that he can turn the triangle to close up the hole and then seem to have a blue triangle on a red background.
He then sees that he cant close the hole by turning the triangle. He is able to cut the triangle and get it to fit. He claims that he would be able to do this with any triangle.

Show a cut with the right angle triangle and then with a scalar triangle. Justify your answer.

Senior classes only

Question 11 5 marks — Feet problem

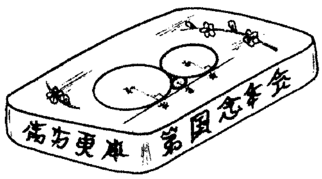


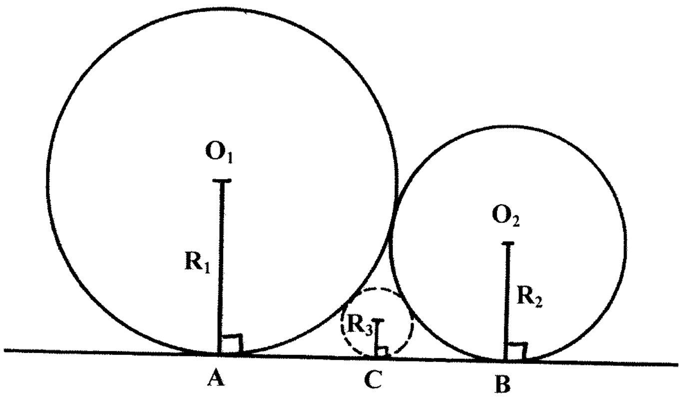
Jacques the musketeer orders a sack of wheat from Tudor the miller. The sack is to be cylindrical, 4 feet high and 6 feet in circumference. The miller suggests instead 2 cylindrical sacks 4 feet high but each one 3 feet in circumference. He claims this is the same volume.
Jacques who knows his arithmetic draws his sword to threaten the miller.

Explain the mathematical reason for his gesture.

(Jacques Ozanam 1640 - 1717)

Question 12 7 marks — Made in Japan





This figure was found on a painted wooden plaque, dated at 1824, in the province of Gumma in Japan.
It shows 3 circles mutually touching and also touching the line AB.
Given: R = 9cm, R = 4 cm, and AB = 12 cm.

Calculate R.

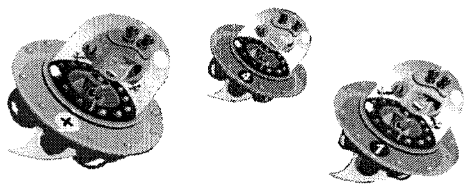
Question 13 10 marks — Calculator power

Eliane has found on her calculator a power of 2000 which in decimal notation has exactly 100 digits. She wonders if there is a power of 2000 which has exactly 1000 digits.

Write down the power of 2000 that Eliane found and then reply to her question. Justify your answer.

MATEMATIKA HATÁROK NÉLKÜL

MATHÉMATIQUES SANS FRONTIERES



<u>*Támogatóink:*</u>

Oktatási Minisztérium
Budapest Főváros Önkormányzata
Safaripark Gänserndorf
Berzsenyi Dániel Gimnázium
Lichtbogen Bt.
Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.
Graphic-A Studio
SKK Trade KFT. -CASIO
Informatika-Számítástechnika Tanárok Egyesülete – ISZE
Mozaik Kiadó Szeged

PRÓBA-FORDULÓ 2000-2001

1.feladat –*Mágikus korongok*– 7 pont

A megoldást angolul, németül, franciául, olaszul vagy spanyolul fogalmazzátok meg minimum 30 szóban.

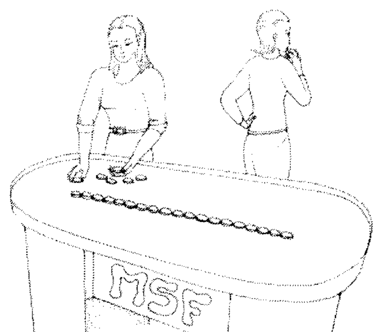
✿

Geneviève montre un tour de magie à son amie Anne. Dos tourné, elle lui dit :
« Dispose en ligne droite 13 jetons numérotés de 0 à 12 en les plaçant dans l'ordre décroissant de leurs valeurs de gauche à droite.
Retourne-les pour masquer leurs valeurs.
Rajoute sur la même ligne, à droite de ceux déjà placés, 12 autres jetons choisis au hasard, leurs valeurs étant cachées.
Enfin déplace à gauche de la ligne un certain nombre de ces 12 derniers jetons ».
Geneviève se retourne alors et voit une ligne de 25 jetons tous identiques. Elle en prend un seul qui lui indique le nombre de jetons déplacés par Anne.

Expliquer le tour de magie.

✿

Genoveffa mostra alla sua amica Anna un gioco di magia. Con le spalle girate le dice :
« Allinea 13 gettoni numerati da 0 a 12 sistemandoli con valore decrescente da sinistra a destra.
Girali per nasconderere i lori valori.
Aggiungi sulla stessa linea, alla destra di quelli gia sistemati, 12 altri gettoni scelti a caso essendo i loro valori nascosti.
Infine, sposta a sinistra della linea un certo numero di questi ultimi 12 gettoni ».
Genoveffa si gira, quindi, e vede una linea di 25 gettoni tutti identici. Ne prende uno solo che le indica il numero dei gettoni spostati da Anna.



Spiegare questo gioco di magia.

✿

Genoveva zeigt ihrer Freundin Anne einen Zaubertrick. Mit dem Rücken zu Anne sagt sie zu ihr :
„ Lege 13 Spielmarken, die von 0 bis 12 nummeriert sind in einer Reihe vor dich hin. Ordne sie von links nach rechts in absteigender Reihenfolge an. Drehe sie um, damit ihr Wert verdeckt ist.
Fügenuninderselben Reihe rechts 12 weitere, zufällig ausgewählte Spielmarken an, deren Wert ebenfalls verdeckt ist.
Jetzt verschiebst du von diesen 12 hinzugekommenen Marken eine bestimmte Anzahl an das linke Ende der Reihe. "
Genoveva dreht sich um und sieht vor sich eine Reihe von 25 gleichen Spielmarken. Sie nimmt eine davon und erkennt, wie viele Marken verschoben wurden.

Erkläre diesen Trick.

✿

Genoveva le enseña un truco de magia a su amiga Ana.
De espaldas a ella, le dice :
« Pon en una línea recta 13 fichas numeradas de 0 a 12, colocándolas en orden decreciente de su valor y de izquierda a derecha.
Ponlas cara abajo para que no se pueda ver el valor de cada una.
A la derecha de las fichas ya colocadas y en la misma línea, pon otras 12 fichas, elegidas por azar y también cara abajo.
Por fin, desplaza a la izquierda de la línea algunas fichas sacadas de entre éstas últimas. »
Genoveva se vuelve y ve una línea de 25 fichas idénticas.
No saca más que una ficha y esta ficha le indica el número de fichas desplazadas por Ana.

Explicar el truco de magia.

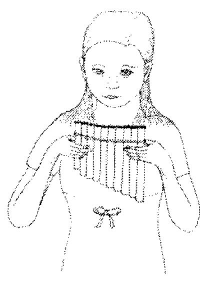
✿

Genevieve shows her friend Anne a magic trick. With her back to Anne, she gives her the following instructions :
« Lay out 13 tokens numbered 0 to 12 in a straight line, setting them in decreasing order from left to right.
Then turn them face down to hide the numbers written on them.
To the right of those already laid out but along the same line, add twelve more tokens picked at random with their faces down.
End by moving to the left end of the line some of the tokens that have just been added. »
Genevieve then turns round, facing a line of 25 identical tokens. She picks one and it tells her how many tokens have been moved by Anne.

Explain what the trick is.

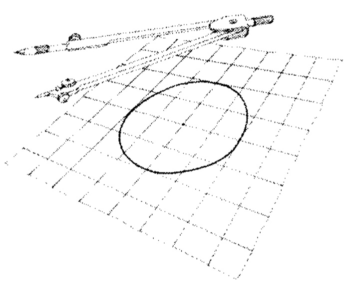
2. feladat – Nem is olyan könnyű – 5 pont

Aurélie Pan-sípot szeretne készíteni tíz sípból, melyek a dó – ré – mi – fá – szó – lá – ti – dó – ré – mi megszólaltatására alkalmasak. A legmélyebb hang megszólaltatására szolgáló síp 16 cm hosszú.



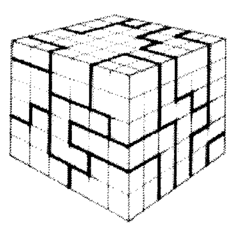
Ha egy tetszőleges hosszúságú sípot megfelezünk, egy oktávval magasabban szóló hangot kapunk. (pl. dó – dó')
Ha egy tetszőleges hosszúságú síp 2/3-át vesszük, így egy kvinttel magasabban hangzó síphoz jutunk. (pl. dó – szó, vagy ré – lá)
Számítsátok ki a 10 síp hosszát, állítsátok nagyság szerinti sorrendbe és rajzoljátok le eredeti nagyságban Aurélie Pan-sípját. Az egyes sípok külső átmérője 1 cm.

3. feladat — *Egy tucat …* — 7 pont

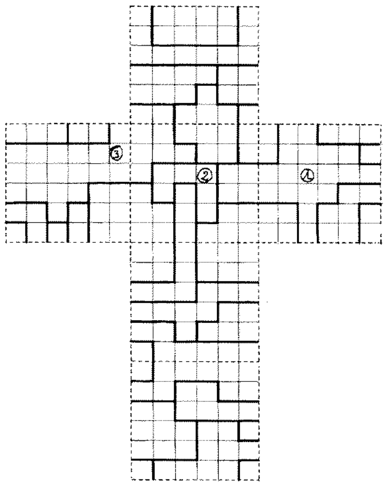


Egy négyzetrácsos papíron kört rajzolunk, amelynek középpontja egy rácspont, sugara egy rácsnégyzet oldalának kétszerese. Ez a kör 12 pontban metszi a négyzetrácsot.
Vajon a 12 pont szabályos tizenkétszöget határoz-e meg ? Állításotokat bizonyítsátok !

4. feladat – *Kocka-világ* – 5 pont



Egy bolygó kocka alakú, a « földgömb » is egy kocka, melynek lapjai 36 egybevágó négyzetből állnak. A rajzokon vastag vonal jelzi az országhatárokat.



Színezzétek be a világtérképet a lehető legkevesebb színnel úgy, hogy a szomszédos országok ne legyenek azonos színűek, egy országhoz egy szint használjátok fel, s a különböző színnel jelölt részek területe legyen egyenlő. A kocka éle nem országhatár.
Végül ragasszátok fel a válaszlapra a kapott térképet!

5. feladat – *8 lépcső* – 7 pont

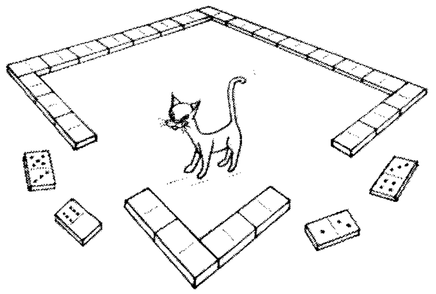
Egy elárusító, aki hegymászáshoz használható kötelet árul, egy 1 méteres mérőrúddal rendelkezik. A következő műveleteket hajthatja végre :

- Egy méteres darab lemérése és hozzáadása vagy elvétele a már lemért darabhoz (indulásnál 0-hoz)
- A lemért hossz megduplázása

Anaïs 44 m, Barbara 63 m és Claude 72 m hosszú kötelet szeretne vásárolni. Az eladó mindhármukat külön-külön kiszolgálta, s mindegyik hosszat 8 – 8 művelettel kapta meg.
Hogyan járt el az egyes esetekben ?

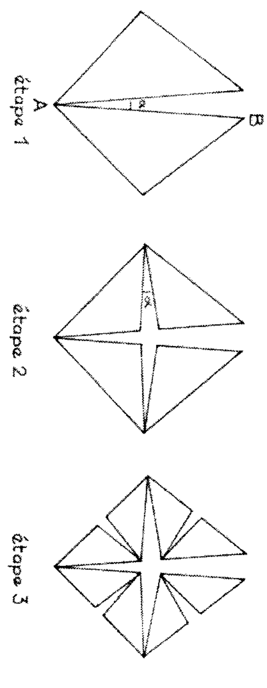
6. feladat – *Bűvös dominó* – 5 pont

Annamaria 28 különböző dominót helyezett el a rajzon látható módon egymáshoz illesztve, négyzetet formálva a darabokból. A szomszédos dominók illeszkedő oldalán azonos szám van, egy mezőn legfeljebb hat pont lehet.
A négyzet csúcsaiban ugyanolyan dominó mező áll.
Rajzoljatok le egy ilyen elhelyezést !

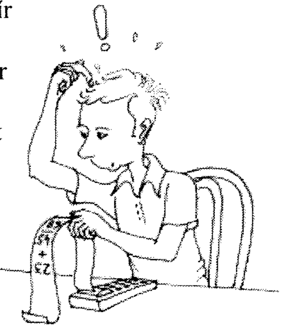


7. feladat – *Tüdő-fraktál* – 7 pont

Fraktálnak nevezünk egy geometriai alakzatot, ha annak részei ugyanolyan struktúrájúak, mint az egész, csak más méretben.
Itt látható a « tüdő-fraktál » konstrukciójának három lépése.
Minden háromszög egyenlő szárú, és ugyanakkorák a szárszögeik.
Legyen $\alpha = 12°$ és AB = 15 cm.
Számítsátok ki a háromszögek szögeit, és szerkesszétek meg a negyedik lépés ábráját !

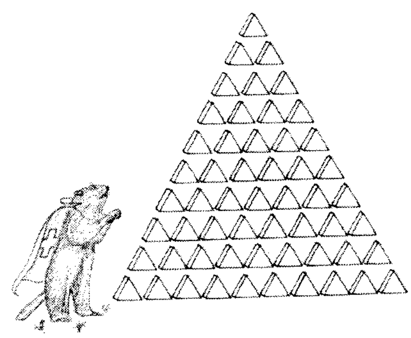


8. feladat – *Üzemzavar* – 5 pont



A számológépem elromlott :
amikor a 0-t beütöm, 1-et ír ki és tárol;
amikor a 1-et beütöm, 2-t ír ki és tárol;
amikor a 2-t beütöm, 3-at ír ki és tárol;
stb.
amikor a 9-et beütöm, 0-t ír ki és tárol.
Az összes többi gomb jól működik.
Így ha a 12 + 34-t ütöm be, a gép 23 + 45-öt ír ki, és eredményként 68-at ad.
Még így is előfordul, hogy a beírt összeadás eredményét jól írja ki.
Adjatok példát egy ilyen összeadásra, s magyarázzátok meg!

9. feladat – *Svájci számla* – 7 pont



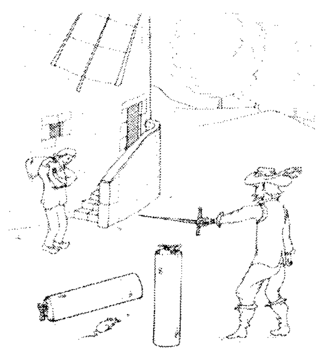
Mind a tíz számjegy felhasználásával írjatok fel tíz egész számot egymás után az alábbi módon.
Az első szám egyjegyű, a második szám kétjegyű, stb. a tizedik szám tízjegyű legyen.
Mindegyik számot úgy kapunk meg az előzőből, hogy az elejére vagy végére illesztünk egy számjegyet. Az így adódó számokra teljesüljön az, hogy az első szám osztható legyen 1-gyel, a második 2-vel, a harmadik 3-mal egészen a tizedikig, amelyik 10-zel legyen osztható.

10. feladat – *Kívül-belül* – 10 pont

Alex bohóc ruhájának külseje piros, belseje kék. Kivágott belőle egy derékszögű háromszöget, megfordította, és így akarta visszavarrni. Azt remélte, hogy így a piros ruháján egy kék háromszög díszítés lesz. Csakhogy a megfordított háromszög nem fedte le teljesen a lyukat. Azt vette észre, hogy ha a háromszöget kettévágja, a két darabbal már teljesen lefedheti a kivágást. Sőt, akkor is dekorálhatja így a ruháját, ha a háromszög nem derékszögű volt.
Mutassatok Alex eljárására két példát: egyet derékszögű, egyet tetszőleges háromszögre.
Bizonyítsátok is az eljárást !

11. feladat – *Láb probléma* – 5 pont

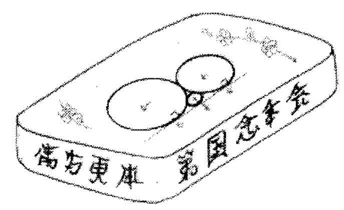
Tudor molnárhoz beállított Jacques testőr egy henger alakú zsák búzával, amely 4 láb magas, 6 láb körméretű (kerületű) volt. A molnár felajánlotta, hogy a könnyebb szállíthatóság érdekében a búzát átrakja két, egyenként 4 láb magas és 3 láb körméretű zsákba, ezekbe együttesen ugyanannyi búza fér.



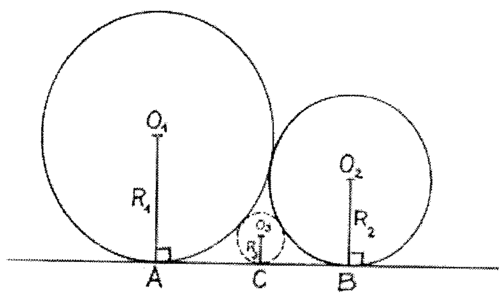
Jacques, aki jól tud számolni, a molnár ajánlatára rögtön kardot ránt mérgében.
Adjatok matematikai indoklást tettére!
A feladat OZANAM (1640 - 1717) matematikai feladatgyűjteményéből való.

12. feladat – *Made in Japan* – 7 pont

Az alábbi ábra Japán Gumma tartományából származó, 1824-ben készült festett fatábla egy darabját mutatja be.



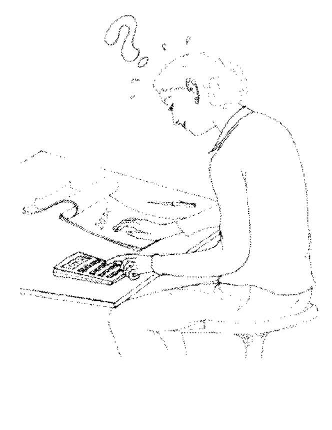
A rajzon három kör érinti az AB egyenest, és páronként egymást is. Tudjuk, hogy R_1



= 9 cm, R_2 = 4 cm és AB = 12 cm.
Számítsátok ki R_3-at!

13. feladat – *2000* – 10 pont

Eliane a számológépe segítségével megtalálta a 2000-nek egy olyan egész kitevőjű hatványát, amely 100 jegyű szám.
« Van-e 2000-nek olyan hatványa, amely 1000 jegyű ? » - gondolkodott el Eliane.
Melyik hatványt találta meg, és segítsetek a kérdés megválaszolásában!
A választ indokoljátok !



Matematyka bez granic

Zadanie 1 (7 punktów)

Jetons un œil

Rozwiązanie musi być napisane w jednym z czterech jezyków obcych i zawierać przynajmniej 30 słów.

❖ Genowefa pokaże koleżance Ani magiczną sztuczkę.

Genowefa stoi tyłem do Ani i mówi do niej: „połóż na stole 13 żetonów, które są ponumerowane od 0 do 12.Uporządkuj je od nr 12 do 0. Odwróć je numerami do stołu. Dodaj do szeregu z prawej strony następnych 12 żetonów. Teraz zabierz dowolną ilość żetonów spośród tych dołożonych i przełóż je na lewą stronę". Genowefa odwraca się i widzi 25 żetonów. Wybiera jeden żeton z szeregu i na podstawie liczby, która jest na nim odgaduje ile żetonów zostało z prawej strony na lewą.

Wytlumacz tę sztuczkę.

❖ Genoveva zeigt ihrer Freundin Anne einen Zaubertrick. Mit dem Rücken zu Anne sagt sie zu ihr :

„ Lege 13 Spielmarken, die von 0 bis 12 nummeriert sind in einer Reihe vor dich hin. Ordne sie von links nach rechts in absteigender Reihenfolge an. Drehe sie um, damit ihr Wert verdeckt ist.

Füge nun in der selben Reihe rechts 12 weitere, zufällig ausgewählte Spielmarken an, deren Wert ebenfalls verdeckt ist.

Jetzt verschiebst du von diesen 12 hinzugekommenen Marken eine bestimmte Anzahl an das linke Ende der Reihe."

Genoveva dreht sich um und sieht vor sich eine Reihe von 25 gleichen Spielmarken. Sie nimmt eine davon und erkennt, wie viele Marken verschoben wurden.

Erkläre diesen Trick.

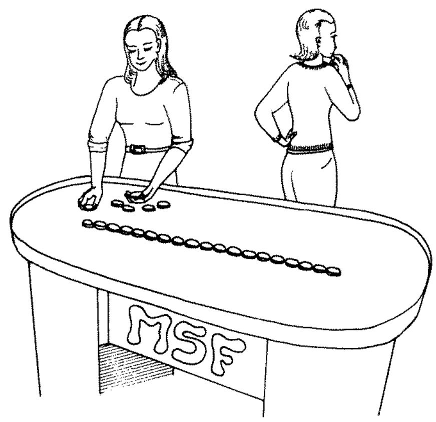
❖ Geneviève montre un tour de magie à son amie Anne. Dos tourné, elle lui dit :

« Dispose en ligne droite 13 jetons numérotés de 0 à 12 en les plaçant dans l'ordre décroissant de leurs valeurs de gauche à droite.

Retourne-les pour masquer leurs valeurs.

Rajoute sur la même ligne, à droite de ceux déjà placés, 12 autres jetons choisis au hasard, leurs valeurs étant cachées.

Enfin déplace à gauche de la ligne un certain nombre de ces 12 derniers jetons ».



Geneviève se retourne alors et voit une ligne de 25 jetons tous identiques. Elle en prend un seul qui lui indique le nombre de jetons déplacés par Anne.

Expliquer le tour de magie.

❖ Genevieve shows her friend Anne a magic trick. With her back to Anne, she gives her the following instructions :

« Lay out 13 tokens numbered 0 to 12 in a straight line, setting them in decreasing order from left to right.

Then turn them face down to hide the numbers written on them.

To the right of those already laid out but along the same line, add twelve more tokens picked at random with their faces down.

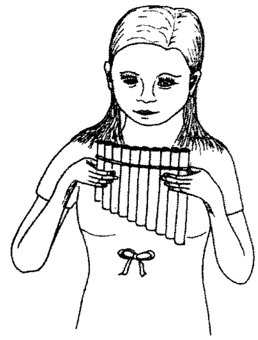
End by moving to the left end of the line some of the tokens that have just been added.»

Genevieve then turns round, facing a line of 25 identical tokens. She picks one and it tells her how many tokens have been moved by Anne.

Explain what the trick is.

Zadanie 2 (5 punktów)

Doprawdy ?

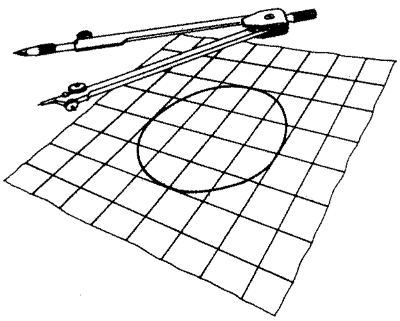


Aurelia chciałaby zbudować organki z dziesięciu rurek. Organki te mają wydawać dziesięć kolejnych dźwięków: c, d, e, f, g, a, h, c', d', e'. Rurka z najniższym dźwiękiem ma 16 cm Gdyby Aurelia podzieliła którąkolwiek z rurek na dwie równe części uzyskałaby dźwięk o oktawę wyższy. Gdyby natomiast skróciła którąś rurkę o jedną trzecią- uzyska dźwięk o kwintę wyższy, np. zamiast dźwięku c uzyska g, a zamiast d - dźwięk a. Oblicz długości pozostałych rurek przy założeniu, że chcemy uzyskać dźwięki o których mowa na początku zadania. Uporządkuj rurki według gamy. Narysuj organy na arkuszu odpowiedzi w skali 1:1, jeżeli średnica jednej rurki wynosi 1 cm.

Zadanie 3 (7 punktów)

Tuzin

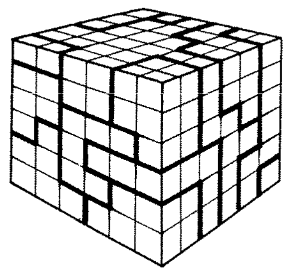
Łazienkę wyłożono identycznymi kwadratowymi kafelkami o boku a. Dwie prostopadle przecinające się fugi są środkiem pewnego okręgu o promieniu długości 2a. Narysowany okrąg przecina fugi w dwunastu punktach. Czy punkty te są wierzchołkami dwunastokąta foremnego ? Odpowiedź uzasadnij.



Zadanie 4 (5 punktów)

Kubizm

W pewnym wyimaginowanym świecie nawet planety mają kształt kości. Każdy bok kości jest zbudowany z trzydziestu sześciu przystających kwadratów. Grube linie na ilustracji oznaczają granice państw. Krawędzie kości nie są granicami żadnego państwa. Namaluj mapę tych państw używając różnokolorowych kredek, np. na oznaczenie kraju pierwszego - czarnej, kraju drugiego - zielonej, trzeciego - niebieskiej itd. Dwa sąsiadujące ze sobą państwa muszą być innej barwy. Powierzchnia każdego państwa składa się z tej samej liczby kwadratów. Wytnij mapę i naklej na arkusz odpowiedzi.

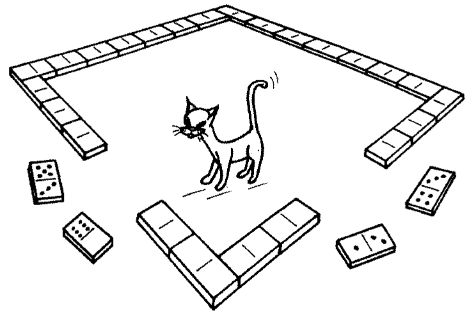


Zadanie 5 (7 punktów)

Sprzedawca w sklepie z artykułami do wspinaczki górskiej używa do mierzenia lin stołu, którego krawędź ma długość 1m. Wymierzając liny może przeprowadzać następujące operacje: odmierzyć linę długości 1m, odmierzyć linę o długości dwukrotnie większej. Anais potrzebuje 44m liny, Barbara 66m liny, a Klaudia - 72m liny. Sprzedawca odmierza wykonując w każdym przypadku 8 operacji. Opisz przeprowadzone przez sprzedawcę operacje.

Zadanie 6 (5 punktów)

Magiczne domino

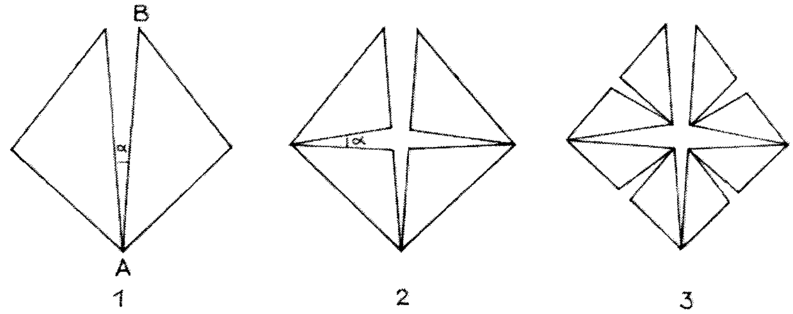


Anna Maria układa 28 klocków domina w ten sposób, że tworzą one kwadrat. Nie kieruje się przy tym zasadami gry w domino lecz dba o to aby suma oczek na każdym boku kwadratu była taka sama. Narysuj klocki domina ułożone wzdłuż boków kwadratu spełniające żądany warunek.

Zadanie 7 (7 punktów)

Latający fraktal

Fraktalem nazywamy figurę geometryczną, którą konstruujemy powtarzając dokładnie te same czynności. Na rysunku pokazano trzy pierwsze etapy takiej konstrukcji, narysowane tam trójkąty są równoramienne wiedząc że ?=120 i AB=15cm wykonaj czwarty krok tej konstrukcji.



Zadanie 8 (5 punktów)

Pomyłka

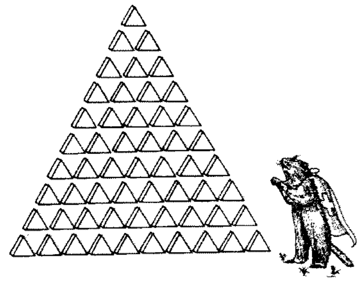
Mój kalkulator zwariował! Jeżeli nacisnę przycisk 0 kalkulator pisze 1, jeżeli nacisnę 1 - wyskakuje 2, jeżeli robię to samo z 2 wyskakuje 3, itd. Wciskając 9 - dostaję 0. Pozostałe przyciski funkcjonują prawidłowo. Jeżeli chcę wykonać operację 12 + 34 kalkulator pokazuje 23+45, a następnie wynik tej operacji : 68.

W niektórych sytuacjach kalkulator może jednak pokazać prawidłowy wynik. Podaj przykład swojej operacji i wyjaśnij swoje rozumowanie.

Zadanie 9 (7 punktów)

Góra Liczb

Utwórz w układzie decymalnym z 10 cyfr 10 kolejnych liczb naturalnych. Pierwsza liczba ma być jednocyfrowa, druga - dwucyfrowa itd., aż do liczby dziesięciocyfrowej. Każda następna liczba powstaje z poprzedniej poprzez dopisanie na początku lub na końcu tej liczby jednej z pozostałych dziewięciu cyfr i każda z tych liczb musi być podzielna przez liczbę swoich cyfr.



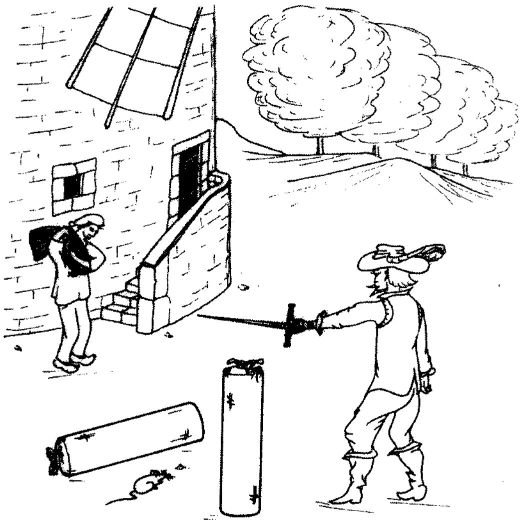
Zadanie 10 (10 punktów)

Po obrocie i po odwróceniu jest to samo

Clown Alex posiada kurtkę, która jest wewnątrz czerwona a na zewnątrz niebieska. Alex wyciął w niej trójkąt prostokątny, odwrócił na drugą stronę i chciał go doszyć z powrotem na to samo miejsce. Wówczas okazało się, że to niestety nie jest możliwe. Możliwy jest jednak podział tego trójkąta na części a następnie złożenie tych części i utworzenie trójkąta, który będzie idealnie pasował. Po pewnym czasie Alex odkrył, że jest to możliwe z każdym trójkątem. Opisz, w jaki sposób można tę operację przeprowadzić w przypadku trójkąta prostokątnego, a następnie jak to wygląda w przypadku dowolnego trójkąta.

Zadanie 11 (5 punktów)

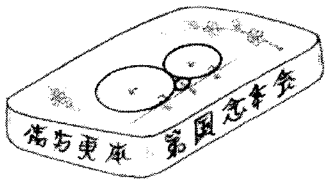
Problem stopy

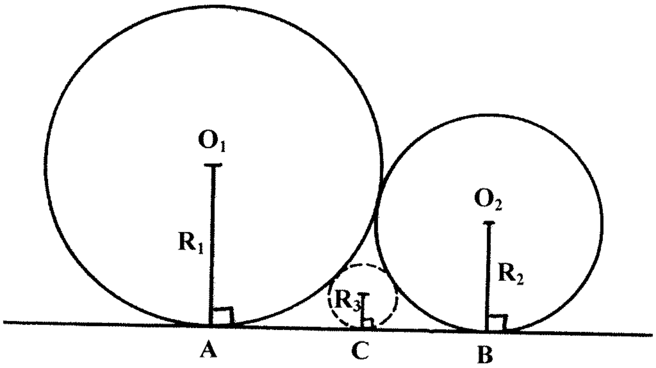


Muszkieter Jacques zamówił u młynarza worek mąki, Worek ten ma kształt walca o wysokości 4 stóp i obwodzie podstawy 6 stóp. Zamiast takiego worka jak zwykle młynarz zaoferował mu dwa worki w kształcie walca o tej samej wysokości, ale o obwodzie 3 stóp, twierdząc, że proponuje mu taką samą ilość mąki co dawniej. Jacques przeprowadził odpowiednie rachunki i ponieważ uzyskał różne wyniki wyzwał młynarza na pojedynek na szable. Wyjaśnij dlaczego Jacques uznał młynarza za nieuczciwego ?

Zadanie 12 (7 punktów)

Made in Japan





Obrazek ilustruje pomalowaną drewnianą tablicę, pochodzącą z japońskiej prowincji Gumma z 1824 r. Widać tam trzy o promieniach R1, R2, R3. Okręgi te są styczne do siebie i dodatkowo mają wspólną styczną

Mając dane :

R1 = 9 cm ;

R2 = 4 cm ;

|AB| = 12 cm ;

oblicz długość promienia R3.

Zadanie 13 (10 punktów)

Która to potęga

Elżbieta zauważyła na swoim kalkulatorze, że potęga liczby 2000 jest liczbą złożoną ze 100 cyfr. Czy istnieje potęga liczby 2000, która jest liczbą złożoną z 1000 cyfr ?

Compétition interclasses de 3e & 2de

Mathématiques sans frontières

ACADEMIE DE STRASBOURG

Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques

Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques

EPREUVE DU 13 MARS 2001

- **Toute solution même partielle sera examinée.**
- **Le soin sera pris en compte.**
- **Ne rendre qu'une feuille-réponse par exercice.**

exercice 1
7 points

A ton tour

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots.

Nick fans out in front of Francis a deck of twenty-five cards all of which are different. Nick then asks Francis to pick one without showing its face.

Nick then sets out the first five cards in a line and places the next five on top of the first five until he gets five five-card packs.

Francis is then asked to point at the pack that includes the card he first picked. The next thing Nick does is to collect the five packs, placing the one Francis pointed at in the middle of the full pack. He then deals out the cards as before until he gets the five five-card packs again.

For the second time, Francis is asked to point at the pack that includes the card he had originally picked. Nick is then able to show him which card it was.

Explain the trick.

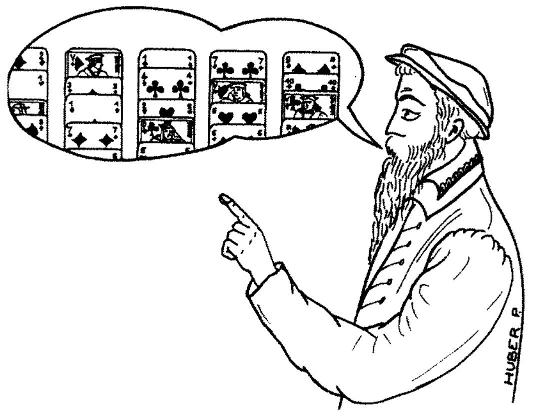
Nicolás le enseña a Francisco un abanico de 25 cartas, todas diferentes. Le pide que escoja una sin enseñársela.

Alinea las 5 primeras cartas de la baraja, luego coloca las 5 siguientes sobre las precedentes y así sucesivamente hasta formar 5 pilas de 5 cartas.

Francisco debe señalar la pila donde está la carta que ha escogido. Nicolás recoge las 5 pilas, colocando la que ha señalado Francisco en el medio de la baraja. Luego reparte las cartas de la misma manera para volver a formar 5 pilas de 5 cartas.

Francisco señala de nuevo la pila donde se encuentra ahora la carta escogida. Entonces, Nicolás le enseña esta carta.

Explicar este truco.



Nicola mostra a Francesco un ventaglio di 25 carte tutte diverse e gli chiede di sceglierne una senza mostrargliela.

Dispone le prime 5 carte in riga, poi altre 5 sulle precedenti in successione e così di seguito fino ad ottenere 5 file di 5 carte ognuna.

Francesco deve indicare la fila in cui si trova la carta scelta; Nicola raccoglie ogni fila ponendo le carte di quella indicata da Francesco al centro del mazzo. Poi ridistribuisce le carte nello stesso modo per formare altre 5 file di 5 carte.

Francesco indica di nuovo la fila in cui si trova ora la carta scelta in precedenza. A questo punto Nicola è in grado di rivelare questa carta.

Spiegare il procedimento.

Nicolas zeigt François einen Fächer aus 25 Karten, die alle verschieden sind. Er bittet ihn, eine Karte auszuwählen, ohne sie zu zeigen.

Nun legt er die ersten fünf Karten offen in eine Reihe. Die nächsten fünf Karten legt er darüber, und so fährt er fort, bis fünf Stapel aus je fünf Karten entstanden sind.

Nun muss François angeben, in welchem Stapel sich die Karte befindet, welche er ausgewählt hat. Nicolas sammelt die fünf Stapel ein, wobei er den von François bezeichneten Stapel in der Mitte des Pakets einordnet. Danach teilt er die Karten in gleicher Weise aus, so dass wieder fünf Stapel zu je fünf Karten entstehen.

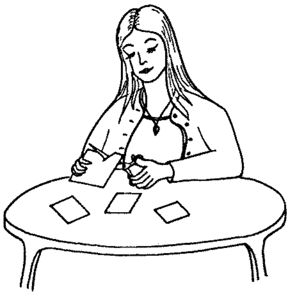
François gibt erneut den Stapel an, in welchem sich seine Karte befindet, worauf Nicolas ihm diese Karte zeigt.

Erkläre diesen Trick.

D'après Nicolas CHUQUET (1445 – 1500).

exercice 2 — 5 points
Famille de carrés

Après avoir tracé un carré de 6 cm de côté, Pierre demande à sa fille Nathalie de partager celui-ci en 9 morceaux carrés de côtés mesurés par un nombre entier de centimètres.



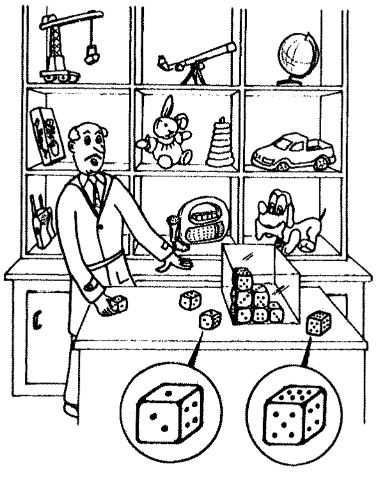
Nathalie trouve rapidement un partage et se demande s'il y en a d'autres.

Deux partages constitués des mêmes carrés mais placés différemment sont considérés comme identiques.

Représenter toutes les solutions possibles.

exercice 4 — 5 points
Le plein de points

Monsieur Victor vend des dés dans son magasin de jouets. Il peut ranger exactement 60 dés dans une boîte transparente de forme parallélépipédique :
5 dans le sens de la longueur, 4 dans le sens de la largeur et 3 dans le sens de la hauteur.

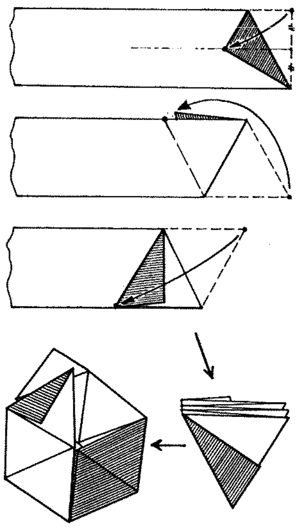


Il remplit la boîte de sorte que la somme des points visibles sur les 6 faces de la boîte soit maximale.

Quelle est cette somme ? Expliquer.

exercice 3 — 7 points
Hexagami

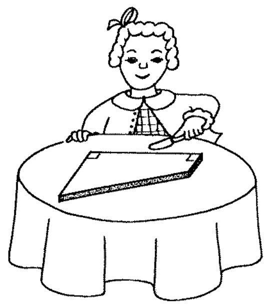
Dans un livre d'origami on trouve le pliage décrit ci-contre, réalisé à partir d'une bande de papier rectangulaire de $12\sqrt{3}$ cm sur 3,6 cm et qui permet d'obtenir un hexagone régulier. Le recto et le verso de la bande sont de deux couleurs différentes.



Réaliser puis coller l'hexagone sur la feuille-réponse.
Calculer son aire.

exercice 5 — 7 points
Aire coupable

Marie-Odile et Julie doivent se partager équitablement le reste d'un gâteau. Ce reste est un trapèze rectangle dont les bases mesurent 1 dm et 3 dm et la hauteur 4 dm.



Julie exige que les parts aient la même aire et la même forme. Marie-Odile trouve la solution en un seul coup de couteau rectiligne.

Dessiner le gâteau à l'échelle 1/5 puis marquer le trait de coupe.
Justifier que les deux morceaux ont la même aire et la même forme.

exercice 6 — 5 points
J'aimerais tant voir Syracuse ...

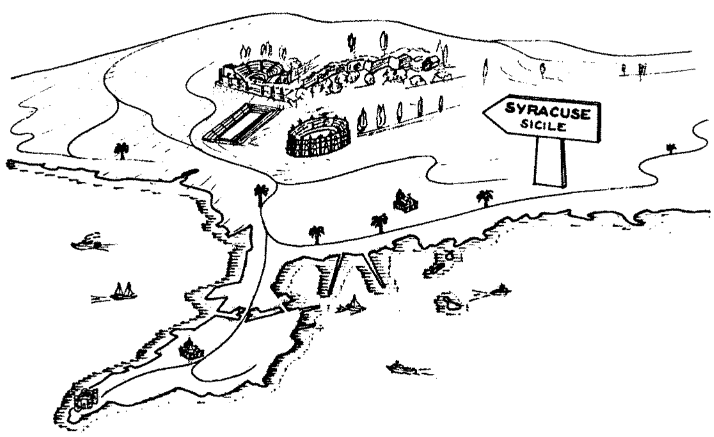
John, étudiant à l'université de Syracuse (Etats Unis), calcule des suites de nombres entiers.

Il choisit d'abord le premier entier de la suite et il calcule le suivant avec ce programme :
- si l'entier est pair, le suivant est égal à sa moitié ;
- si l'entier est impair, le suivant est obtenu en multipliant cet entier impair par 3 et en ajoutant 1.

Puis il applique à nouveau ce programme au résultat et ainsi de suite.

Il choisit 1 pour entier de départ et obtient la première suite. Ensuite il choisit 2, puis 3 et ainsi de suite jusqu'à 25. Il obtient ainsi 25 suites.

Il constate une étonnante propriété vérifiée par ces 25 suites.

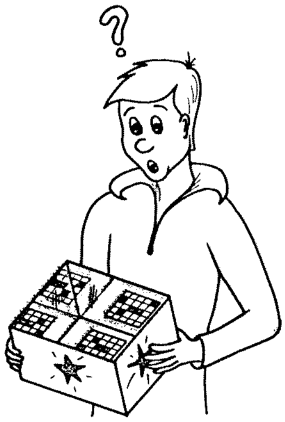


Présenter astucieusement les calculs de John et énoncer cette propriété.

Cette propriété n'a pas encore été démontrée pour tout entier choisi au départ.

exercice 7 — 7 points

Oh mon beau miroir ...



Autour de la grille centrale se trouvent 4 miroirs magiques.

Ces miroirs reflètent parfaitement les cases noires. Pour chaque nombre de la grille centrale, le reflet est inchangé par 2 miroirs alors que les 2 autres miroirs changent le reflet : l'un réfléchit l'entier qui le précède et l'autre l'entier qui le suit. Le rôle des miroirs peut changer selon la case de la grille centrale.

Reconstituer sur la feuille de réponse l'image aperçue sur le miroir du haut.

Miroir du haut :

Miroir de gauche :

5	4	2		8
8		9	■	2
3	■	■	6	3
7	1	5	4	■
■	7	8	5	2

Grille centrale :

	4			5
	■		3	
4		■	■	
■	3			8
1		8		■

Miroir de droite :

4	3	0	5	9
8	4	7	■	1
3	■	■	7	
9	1	6		■
■	5	8	4	

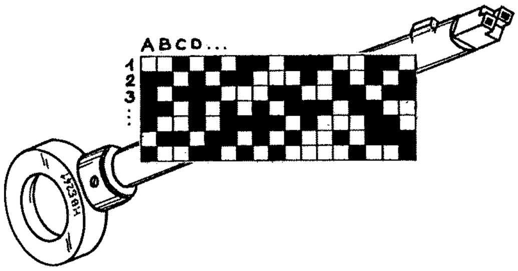
Miroir du bas :

0	6	7	6	■
■	2	6	2	
5	6	■	■	4
1	■		2	7
8	3		3	5

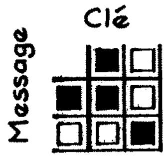
exercice 8 — 5 points

www.cache.cache

Pour communiquer sur Internet, Alice et Robert codent ou décodent leur message avec la clé suivante formée de pixels noirs ou blancs.

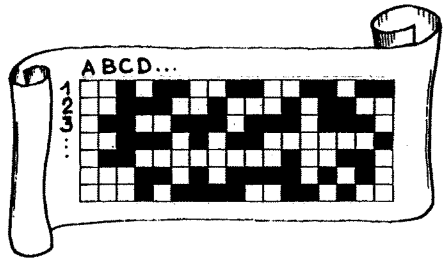


Pour coder ou décoder le message qui a les mêmes dimensions que la clé, on le pose sur la clé et, pour chaque couple de pixels de mêmes coordonnées, on applique l'opération suivante :



Deux pixels de même couleur donnent un pixel noir et deux pixels de couleurs différentes donnent un pixel blanc.

Voici le message codé envoyé par Robert à Alice.



Représenter la grille décodée. Quel est le message ?

Cette méthode de cryptage est réellement utilisée.

exercice 9 — 7 points

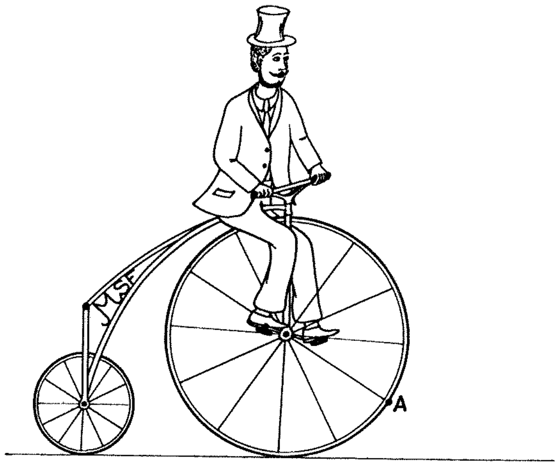
Cyclopède

Benjamin observe Emilien faire du vélocipède.

Il s'imagine la trajectoire du point A de la roue avant du vélocipède lorsque celle-ci effectue un tour et demi sans glisser.

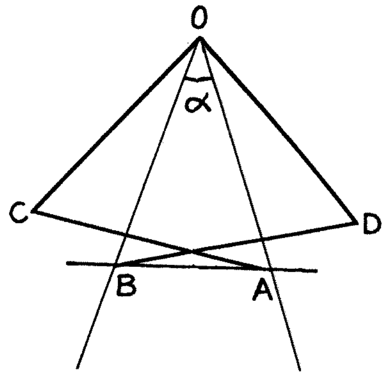
La roue a 150 cm de diamètre. Au départ le point A est en contact avec le sol.

A l'échelle 1/30, représenter la position de la roue et du point A tous les huitièmes de tour. Puis tracer la trajectoire du point A.

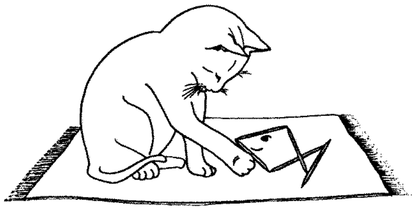


exercice 10
10 points

La curedentrice



Eric a une méthode pour matérialiser avec un cure-dent la bissectrice d'un angle α de mesure strictement inférieure à 60° en utilisant uniquement 5 cure-dents de même longueur.



Pour un angle donné, il place d'abord 3 cure-dents puis en déplace 2 pour aboutir à la disposition indiquée par la figure ci-contre.

Il sait aussi matérialiser la bissectrice d'un angle dont la mesure est comprise strictement entre 60° et 120° avec seulement 4 cure-dents.

Dans chacun des deux cas, décrire toutes les étapes des manipulations en illustrant par des figures. L'épaisseur des cure-dents est négligeable.

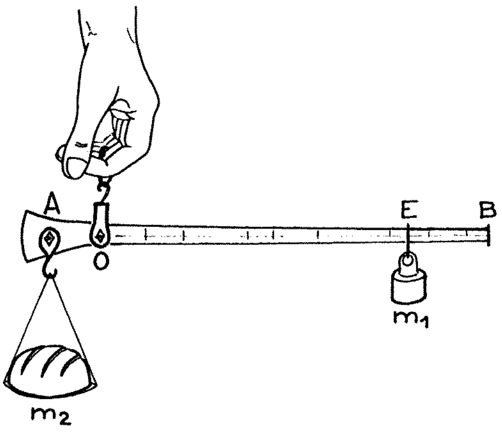
Spécial Seconde

exercice 11
5 points

Quel fléau ?

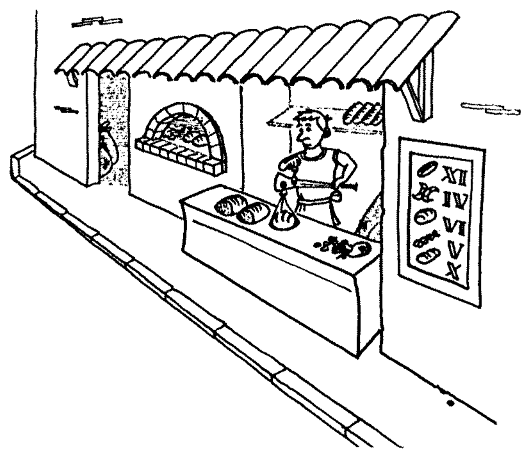
La balance romaine comporte un fléau gradué entre O et B et une masse de 500 g qui peut coulisser sur [OB].

Pour mesurer une masse inconnue de ***m*** grammes, on l'accroche en A et, tenant la balance suspendue en O, on déplace la masse de 500 g entre O et B jusqu'à l'équilibre : la masse est alors suspendue en E.
On a alors la relation : OA × ***m*** = OE × 500.



On sait que AB = 24 cm.
Avec m = 2 kg la balance est à l'équilibre si AE = 20 cm.

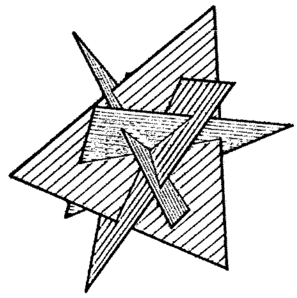
Calculer la position de O sur [AB] puis construire la graduation de la balance de 250 g en 250 g.



exercice 12
7 points

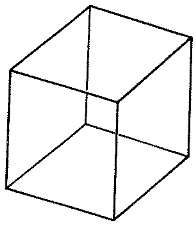
Mise en boîte

Le dodécapointe représenté ci-dessous est constitué de 4 triangles équilatéraux de même côté et deux à deux sécants.



Il a été obtenu à partir d'un cube : les sommets des triangles sont les milieux des arêtes du cube.

Sur une vue en perspective semblable à la vue ci-contre, représenter en traits pleins les côtés des 4 triangles du dodécapointe. Chaque triangle sera d'une couleur différente.



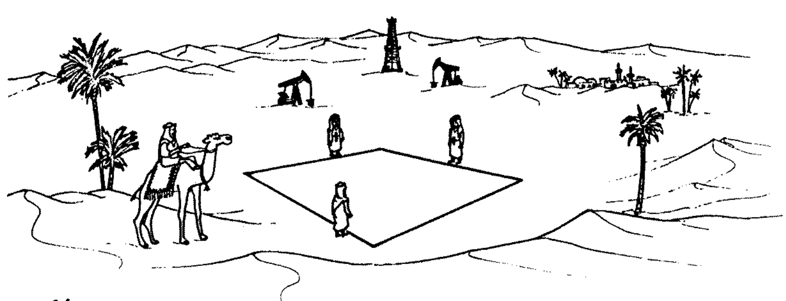
exercice 13
10 points

Des idées et du pétrole

L'Emir Abel possède un champ de pétrole carré.

Il décide d'en donner une partie à ses 3 fils : pour cela, ils doivent se placer sur les côtés du champ et ils recevront le triangle formé par leurs 3 positions.

Comment doivent-ils se placer pour que le triangle ait la plus grande aire possible ? Justifier.

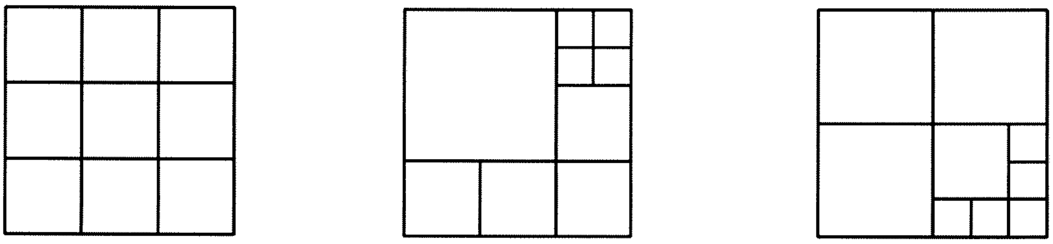


Corrigé de l'épreuve de mars 2001

Exercice 1 : A ton tour

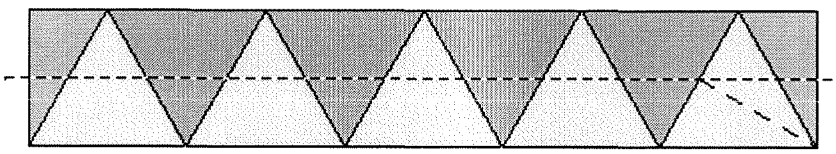
Après la 1ère répartition des 25 cartes en tas de 5 cartes et l'indication de François, Nicolas prend le tas montré par François en le plaçant au milieu du paquet. Les cartes de ce tas "médian" se trouveront lors de la 2ème répartition entre la 11ème et la 15ème carte soit dans la 3ème ligne de chaque nouveau tas. (Chaque tas précédent "colonne" devient une ligne) La deuxième indication de François détermine la carte qui se trouve au milieu du tas montré.

Exercice 2 : Famille de carrés



$9 \times 2^2 = 6^2$ $\qquad$ $1 \times 4^2 + 4 \times 2^2 + 4 \times 1^2 = 6^2$ $\qquad$ $3 \times 3^2 + 1 \times 2^2 + 5 \times 1^2 = 6^2$

Exercice 3 : Hexagami



Une construction précise, comme celle à l'échelle ci-contre, montre que la bande de papier contient 10 triangles équilatéraux dont 6 forment l'hexagone régulier. Prouvons que la longueur de la bande est exactement égale à 5 fois le côté des triangles équilatéraux.

Notons a le côté d'un triangle équilatéral.

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (= 3,6 cm). D'où $a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$ et $5a = \frac{10h}{\sqrt{3}} = \frac{36}{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$. CQFD

Donc l'aire de l'hexagone régulier est $\mathcal{A} = \frac{6}{10} \times 12\sqrt{3} \times 3{,}6 = 25{,}92\sqrt{3} \approx 44{,}9$ cm^2.

Exercice 4 : Le plein de points

La boîte contient : $2\times(3\times2+3\times1+2\times1) = 22$ dés "faces" n'ayant qu'une face visible, on choisit "6" ;
$4\times(3+2+1) = 24$ dés "arêtes" ayant deux faces visibles, on choisit "6 et 5" ;
8 dés "sommets" ayant trois faces visibles, on choisit "6, 5 et 4".

Cela donne : $22 \times 6 + 24 \times (6+5) + 8 \times (6+5+4) = 516$ points visibles en tout.

Exercice 6 : J'aimerais tant voir Syracuse

Le tableau suivant illustre une des présentations possibles.

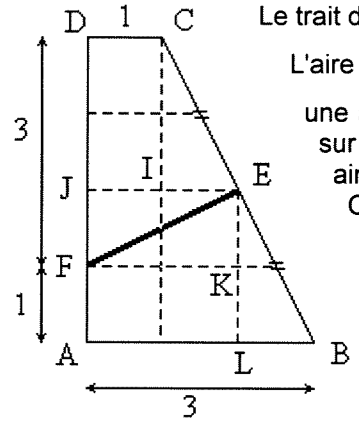
s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	s13	s14	s15	s16	s17	s18	s19	s20	s21	s22	s23	s24	s25
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
4 2 1 4 2 1	1	10 5 16 8 4 2			3	22 11 34 17 52 26 13 40 20 10 5		28 14 7			6			46 23 70 35 106 53 160 80 40			9	58 29 88 44 22 11		64 32 16			12	76 38 19
s1	s1	s2 s1	s1	s3 s1	s3 s1	s5 s1	s3 s1	s7 s1	s7 s1	s7 s1	s6 s1	s7 s1	s9 s1	s7 s1	s3 s1	s7 s1	s9 s1	s7 s1	s7 s1	s3 s1	s19 s1	s15 s1	s12 s1	s19 s1

Au moins jusqu'à 25, toutes les suites à partir d'un rang sont périodiques de période 4, 2, 1.

Remarque : On peut proposer aux élèves de continuer jusqu'à 50. On rencontre ainsi des suites pour lesquelles la partie non-périodique est étonnamment longue par exemple 27, 31, 41 et 47.

Cette propriété n'est toujours pas démontrée.

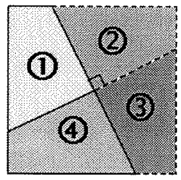
Exercice 5 : Aire coupable



Le trait de coupe est [EF] avec E milieu de [BC] et F sur [AD] tel que AF = 1.

L'aire du trapèze ABCD est en dm ^{2} : $\frac{(3+1)\times 4}{2} = 8$ donc chacune des deux parts doit avoir une aire de 4. En pavant le trapèze ABCD par des carrés de 1dm de côté tel qu'indiqué sur la figure ci-contre, on voit de façon évidente que :
aire ABEF = aire CDFE = 4. De la disposition des triangles rectangles isométriques CIE et FJE par rapport au rectangle CDJI et de celle de EFK et BLE par rapport à AFKL, il découle que les quadrilatères ABEFet CDFE ont en plus leurs angles respectivement égaux. Ils ont donc la même forme.

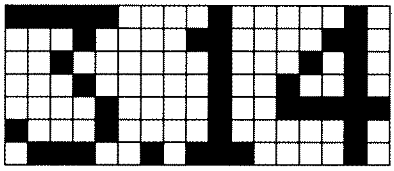
Remarque : En complétant le trapèze par symétrie par rapport à E, on obtient un découpage du carré en quatre parts superposables. Plus généralement : un carré de centre O est partagé en quatre parts égales par tout couple de droites perpendiculaires en O.



Exercice 7 : Oh mon beau miroir

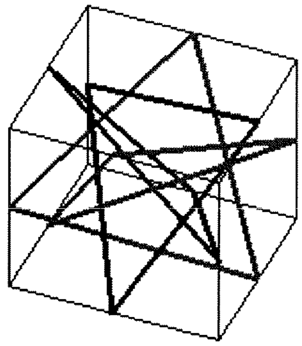
1	5	9	6	■
■	3	7	0	8
4	5	■	■	2
0	■	8	3	9
7	4	1	2	6

Exercice 8 : www.cache.cache

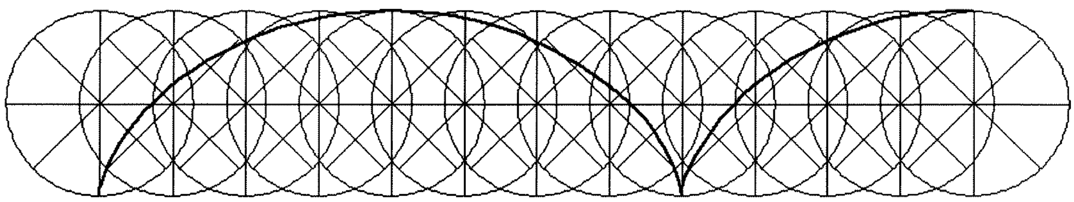


Le message de Robert est 3,14 soit la plus connue des valeurs approchées du nombre π.

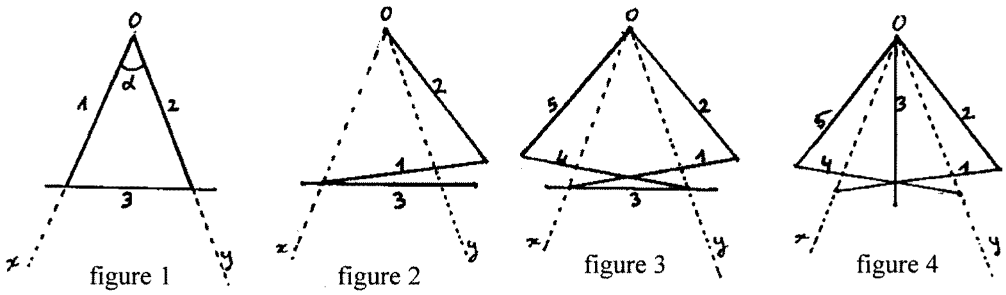
Exercice 12 : Mise en boîte



Exercice 9 : Cyclopède



Exercice 10 : La curedentrice



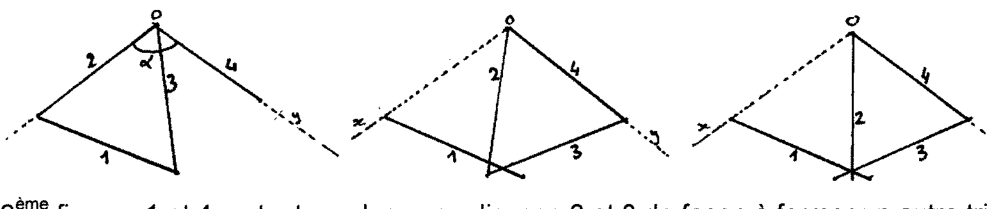
1er cas : $\alpha < 60°$

Figure 1: On place d'abord les cure-dents 1 et 2 sur les côtés de l'angle puis le cure-dents 3.

Figure 2 : Le cure-dents 3 reste en place ; on dispose 1 et 2 de façon à former avec l'ancienne position de 1 un triangle équilatéral.

Figure 3 : On dispose 4 et 5 de façon à former avec l'ancienne position de 2 un triangle équilatéral.

Figure 4 : 3 placé sur le sommet de l'angle α et le point d'intersection de 4 et 1 matérialise la bissectrice de α.



2ème cas : $60° < \alpha < 120°$

1ère figure : On place d'abord les cure-dents 1, 2 et 3 pour former un triangle équilatéral. Et on place le cure-dents 4.

2ème figure : 1 et 4 restent en place ; on dispose 2 et 3 de façon à former un autre triangle équilatéral.

3ème figure : 2 placé sur le sommet de l'angle α et le point d'intersection de 1 et 3 matérialise la bissectrice de α.

Remarque: Pour des angles entre 120° et 180°, il suffit de construire un losange dont deux côtés consécutifs sont sur les deux côtés de l'angle.

Exercice 11 : Quel fléau ?

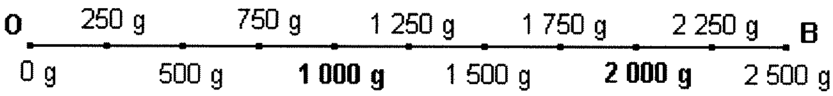
m = 2 kg = 2 000 g. Posons OA = x donc OE = AE – AO = 20 – x.
La relation OA × m = OE × 500 devient $x \times 2\,000 = (20 - x) \times 500$ soit $2\,000\,x = 10\,000 - 500\,x$
D'où $2\,500\,x = 10\,000 \Leftrightarrow x = 4$. Le point O sur [AB] est tel que AO = 4 cm et OE = 20 – 4 = 16.
La graduation se fait sur [OB] donc sur 20 cm (en effet OB = AB – AO = 24 – 4).

On sait à présent que : $4 \times m = \text{OE} \times 500$ donc $\text{OE} = \dfrac{4\,m}{500} = \dfrac{m}{125}$.

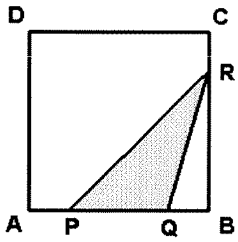
Il reste à trouver, avec cette relation $\text{OE} = \dfrac{m}{125}$, les différentes valeurs de OE comprises entre 0 et 20 cm pour m variant tous les 250 g.

m en g	0	250	500	750	1 000	1 250	1 500	1 750	2 000	2 250	2 500
OE en cm	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

graduation
à l'échelle 1/2



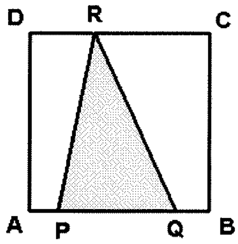
Exercice 13 : Des idées et du pétrole

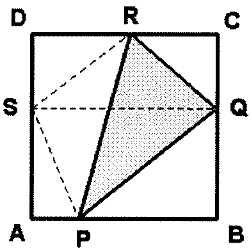


Appelons ABCD le carré de côté 1 et PQR le triangle. (On écarte le cas où les points P,Q et R sont alignés : l'aire serait nulle).

1[er] cas : deux des points P, Q, R sont sur un même côté et le troisième sur un autre côté :

- Si P et Q sont sur [AB] et R sur [BC], l'aire de PQR est égale à 0,5 × PQ × RB. PQ est maximal et vaut 1 si P est en A et Q en B . RB est maximal et vaut 1 si R est en C. Dans ce cas, l'aire est maximale et vaut 0,5 si P est en A, Q en B et R en C.
- Si P et Q sont sur [AB] et R est sur [CD], alors on prouve de la même façon que l'aire est maximale (et égale à 0,5) si P est en A et Q en B.

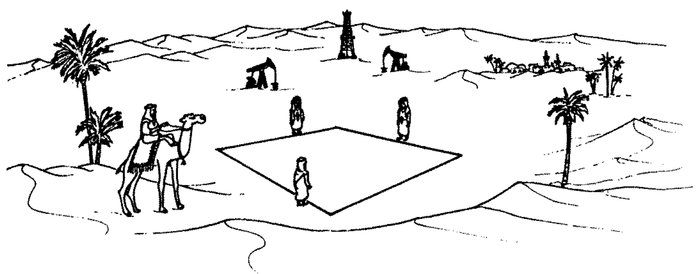


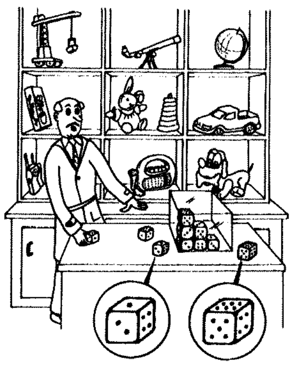


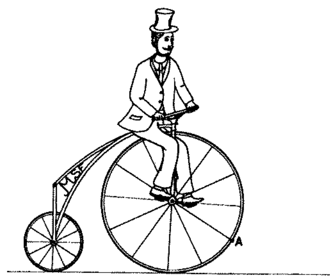
2[ème] cas : P, Q et R sont sur 3 côtés différents : Par exemple P sur [AB], Q sur]BC[et R sur [CD] avec [PR] différent de [AD].

Soit S le point de]DA[tel que (SQ) soit parallèle à (AB) alors l'aire de PQR est strictement inférieure à l'aire de PQRS qui est égale à 0,5.

En conclusion, l'aire est maximale si et seulement si les points P et Q sont deux sommets consécutifs du carré et R un point du côté opposé.







Mathematik ohne Grenzen

13. März 2001

ACADEMIE DE STRASBOURG

Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques
Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques
6, rue de la Toussaint
67061 Strasbourg Cedex

- ***Für jede Aufgabe, auch für nicht gelöste, ist ein gesondertes Blatt mit der Bezeichnung von Schule und Klasse abzugeben.***
- ***Auch Teillösungen werden berücksichtigt.***
- ***Die Darstellung wird mitbewertet.***

Aufgabe 1
7 Punkte

Noch ein Trick

Die Lösung dieser Aufgabe muss in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter enthalten.

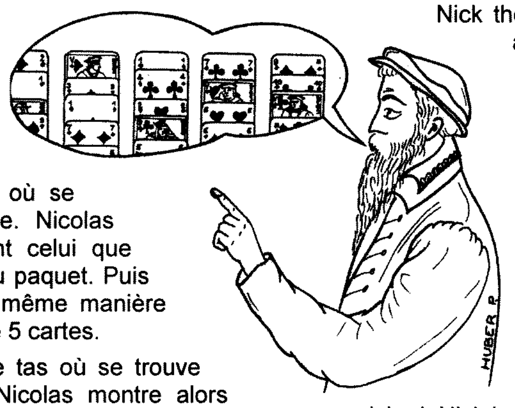
Nicolas montre à François un éventail de 25 cartes toutes différentes. Il lui demande d'en choisir une sans la révéler.

Il place les 5 premières cartes sur une ligne, puis il pose les 5 cartes sur les précédentes et ainsi de suite jusqu'à former 5 tas de 5 cartes.

François doit désigner le tas où se trouve la carte qu'il a choisie. Nicolas ramasse les 5 tas en plaçant celui que François a montré au milieu du paquet. Puis il redistribue les cartes de la même manière pour former à nouveau 5 tas de 5 cartes.

François indique à nouveau le tas où se trouve maintenant la carte choisie. Nicolas montre alors cette carte.

Expliquer ce tour.



Nick fans out in front of Francis a deck of twenty-five cards all of which are different. Nick then asks Francis to pick one without showing its face.

Nick then sets out the first five cards in a line and places the next five on top of the first five until he gets five five-card packs.

Francis is then asked to point at the pack that includes the card he first picked. The next thing Nick does is to collect the five packs, placing the one Francis pointed at in the middle of the full pack. He then deals out the cards as before until he gets the five five-card packs again.

For the second time, Francis is asked to point at the pack that includes the card he had originally picked. Nick is then able to show him which card it was.

Explain the trick.

Nicola mostra a Francesco un ventaglio di 25 carte tutte diverse e gli chiede di sceglierne una senza mostrargliela.

Dispone le prime 5 carte in riga, poi altre 5 sulle precedenti in successione e così di seguito fino ad ottenere 5 file di 5 carte ognuna.

Francesco deve indicare la fila in cui si trova la carta scelta; Nicola raccoglie ogni fila ponendo le carte di quella indicata da Francesco al centro del mazzo. Poi ridistribuisce le carte nello stesso modo per formare altre 5 file di 5 carte.

Francesco indica di nuovo la fila in cui si trova ora la carta scelta in precedenza. A questo punto Nicola è in grado di rivelare questa carta.

Spiegare il procedimento.

Nicolás le enseña a Francisco un abanico de 25 cartas, todas diferentes. Le pide que escoja una sin enseñársela.

Alinea las 5 primeras cartas de la baraja, luego coloca las 5 siguientes sobre las precedentes y así sucesivamente hasta formar 5 pilas de 5 cartas.

Francisco debe señalar la pila donde está la carta que ha escogido. Nicolás recoge las 5 pilas, colocando la que ha señalado Francisco en el medio de la baraja. Luego reparte las cartas de la misma manera para volver a formar 5 pilas de 5 cartas.

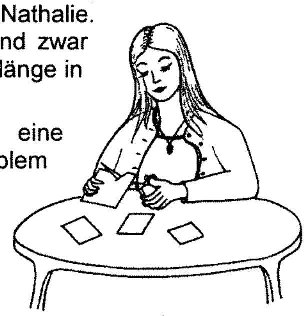
Francisco señala de nuevo la pila donde se encuentra ahora la carta escogida. Entonces, Nicolás le enseña esta carta.

Explicar este truco.

(Nach Nicolas CHUQUET 1445 – 1500)

Aufgabe 2 – 5 Punkte – Ganz quadratisch

„Dieses Quadrat hier hat eine Seitenlänge von 6 cm“, sagt Pierre zu seiner Tochter Nathalie. „Zerlege es in neun Quadrate, und zwar so, dass die Maßzahl jeder Seitenlänge in Zentimeter wieder ganzzahlig ist.“



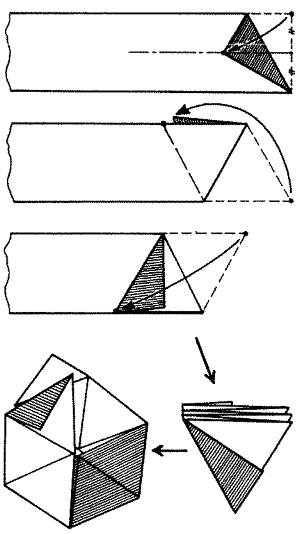
Nathalie findet recht schnell eine Lösung und überlegt, ob das Problem noch weitere Lösungen besitzt.

Dabei gilt: Zwei Lösungen sind nur dann verschieden, wenn man beim Zerschneiden des ursprünglichen Quadrats unterschiedliche Ergebnisse erhält.

Gib alle möglichen Lösungen an.

Aufgabe 3 – 7 Punkte – Hexagami

In einem Origami-Buch findet sich nebenstehende Anleitung zum Falten eines regelmäßigen Sechsecks. Man verwendet dazu einen rechteckigen Papierstreifen dessen Seiten 3,6 cm und $12\sqrt{3}$ cm lang sind.



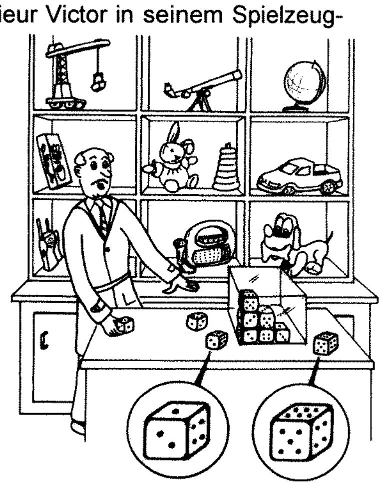
Vorder- und Rückseite des Streifens sind verschiedenfarbig.

Stelle das beschriebene Sechseck her und klebe es auf das Lösungsblatt.

Berechne seinen Flächeninhalt.

Aufgabe 4 – 5 Punkte – Volle Punktzahl

Die Würfel, welche Monsieur Victor in seinem Spielzeugladen verkauft, bewahrt er in einer durchsichtigen, quaderförmigen Schachtel auf.



In die Schachtel passen genau 60 Würfel, fünf in der Länge, vier in der Breite und drei in der Höhe.

Er sortiert die Würfel so ein, dass die Gesamtsumme aller Augenzahlen, welche durch die sechs Quaderflächen nach außen zeigen, maximal ist.

Bestimme den Wert dieser Summe. Begründe.

Aufgabe 5 – 7 Punkte – Formvollendet

Marie-Odile und Julie wollen den Rest eines Kuchens gerecht unter sich teilen.

Das Reststück ist ein Trapez mit zwei rechten Innenwinkeln.
Die Grundseiten sind 1 dm und 3 dm lang, die Höhe beträgt 4 dm.
Julie besteht darauf, dass beide Teilstücke sowohl in der Form als auch im Flächeninhalt übereinstimmen.

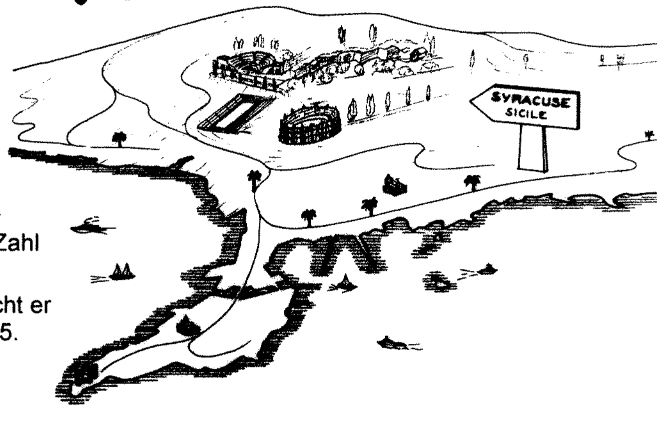
Marie-Odile löst das Problem mit einem einzigen geradlinigen Schnitt.

Zeichne die Kuchenfläche im Maßstab 1:5 und markiere die Schnittlinie.

Zeige, dass die beiden Kuchenstücke in Form und Flächeninhalt übereinstimmen.

Aufgabe 6 – 5 Punkte – Spaziergang nach Syrakus

John, Student an der Universität von Syracuse (USA), beschäftigt sich mit Folgen aus ganzen Zahlen.



Er beginnt mit einer Startzahl und berechnet die nächste Zahl nach folgender Regel:

- ist die Zahl gerade, so ist der Nachfolger halb so groß.
- ist die Zahl ungerade, so multipliziert man sie mit 3 und addiert 1.

Auf das Ergebnis wendet er die Regel erneut an, erhält die nächste Zahl der Folge und so fort.

Bei der ersten Folge beginnt John mit der Startzahl 1. Dann untersucht er die Folgen mit den Startzahlen 2, 3 und so weiter, bis zur Startzahl 25.

Dabei stellt er fest, dass alle 25 Folgen eine bemerkenswerte Eigenschaft besitzen.

Mache mit möglichst wenig Rechenaufwand die gleichen Untersuchungen wie John und gib die gemeinsame Eigenschaft an.

(Bis heute ist nicht bewiesen, ob diese Eigenschaft für alle Folgen gilt, welche nach obiger Vorschrift berechnet werden.)

Aufgabe 7 – 7 Punkte
Spieglein, Spieglein

Um das mittlere, noch unvollständige Zahlenquadrat sind vier Zauberspiegel angeordnet, in denen sich das mittlere Quadrat spiegelt.

Die schwarzen Kästchen werden normal gespiegelt.

Für jede Zahl zeigt einer der Spiegel den Vorgänger und ein anderer den Nachfolger der Ausgangszahl an.

In den beiden anderen Spiegeln erscheint die Ausgangszahl mit ihrem richtigen Wert.

Das Verhalten der Spiegel kann dabei von Zahl zu Zahl ein anderes sein.

Ergänze die fehlenden Zahlen und gib auf dem Lösungsblatt das Erscheinungsbild des oberen Spiegels wieder.

Oben:

Links:

5	4	2		8
8		9	■	2
3	■	■	6	3
7	1	5	4	■
■	7	8	5	2

Mitte:

	4			5
	■		3	
4		■	■	
■	3			8
1		8		■

Rechts:

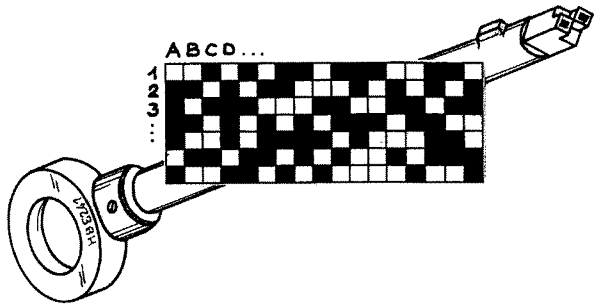
4	3	0	5	9
8	4	7	■	1
3	■	■	7	
9	1	6		■
■	5	8	4	

Unten:

0	6	7	6	■
■	2	6	2	
5	6	■	■	4
1	■		2	7
8	3		3	5

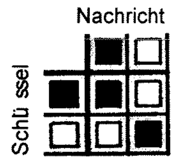
Aufgabe 8 – 5 Punkte
Streng geheim

Zur Kommunikation im Internet verwenden Alice und Robert als Codierungsverfahren den abgebildeten Schlüssel aus schwarzen und weißen Pixels.

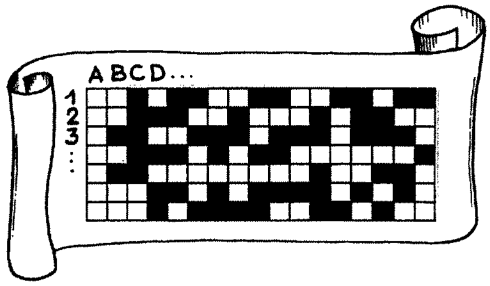


Beim Ver- und Entschlüsseln einer Nachricht denkt man sich Nachricht und Schlüssel übereinandergelegt. Beide müssen die gleiche Rastergröße besitzen.

Auf jedes Pixelpaar mit gleichen Koordinaten wendet man die Operationen der nebenstehenden Verknüpfungstafel an:
Zwei gleichfarbige Pixels ergeben ein schwarzes Pixel und zwei verschiedenfarbige ein weißes Pixel.



Robert hat folgende verschlüsselte Nachricht an Alice übermittelt:



Gib auf dem Lösungsblatt das Raster mit der entschlüsselten Nachricht an. Wie lautet sie?

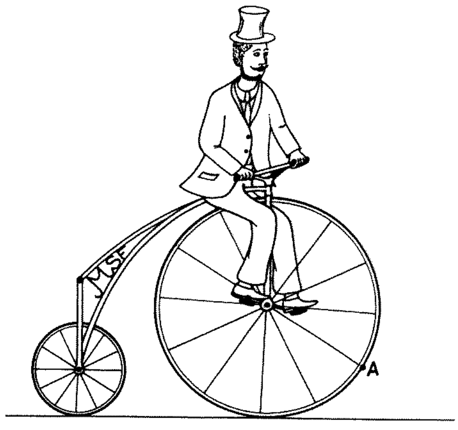
(Diese Methode wird tatsächlich verwendet.)

Aufgabe 9 – 7 Punkte
Kurvenfahrt

Benjamin schaut Emilio beim Radfahren zu. Er stellt sich die Kurve vor, welche der Punkt A beschreibt, wenn das Vorderrad, ohne zu rutschen, eineinhalb Umdrehungen macht.

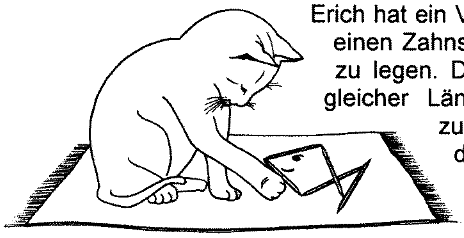
Das Rad hat einen Durchmesser von 150 cm. Zu Beginn der Bewegung hat der Punkt A Kontakt mit dem Boden.

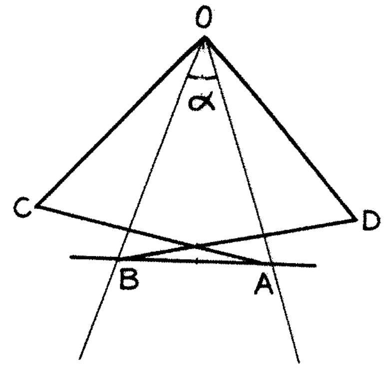
Gib im Maßstab 1:30 die Position des Rades und des Punktes A in Etappen von einer achtel Umdrehung an. Zeichne dann die Kurve ein, welche A beschreibt.



Aufgabe 10
10 Punkte

Winkelzüge





Erich hat ein Verfahren, um bei einem Winkel kleiner als 60° einen Zahnstocher in die Position der Winkelhalbierenden zu legen. Dazu verwendet er insgesamt 5 Zahnstocher gleicher Länge. Bei einem gegebenen Winkel legt er zunächst 3 Zahnstocher in eine geeignete Lage, dann legt er zwei von ihnen um und kommt anschließend mit den restlichen zur abgebildeten Figur. Nun kann er einen der Zahnstocher in die gesuchte Position legen.

Bei einem Winkel zwischen 60° und 120° kommt er sogar mit vier Zahnstochern aus.

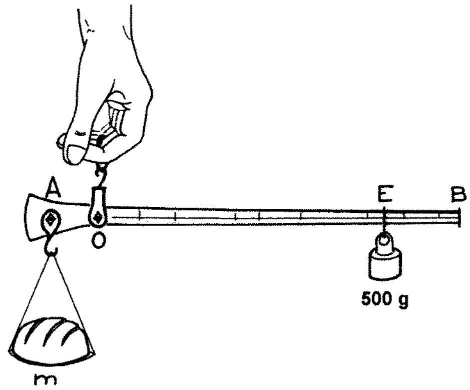
Beschreibe in jedem der beiden Fälle das Verfahren und illustriere es durch geeignete Zeichnungen. Die Dicke der Zahnstocher kann vernachlässigt werden.

Klasse 11

Aufgabe 11
5 Punkte

Im Gleichgewicht

Eine römische Waage besitzt einen Waagbalken mit einer Skala, auf welchem ein Massenstück von 500g zwischen O und B bewegt werden kann.

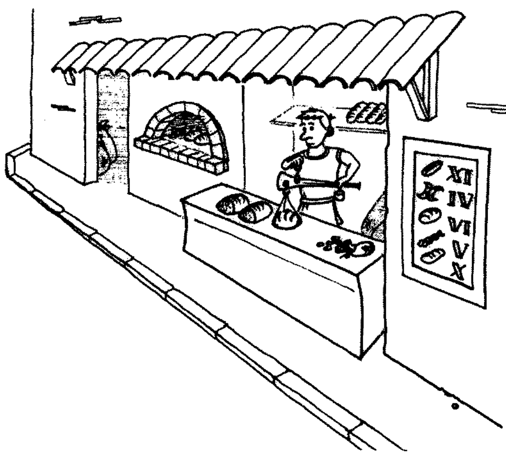


Um einen Körper der Masse m zu wiegen, befestigt man ihn im Punkt A und positioniert das bewegliche Massenstück so, dass die in O aufgehängte Waage im Gleichgewicht ist (Position E).

In diesem Fall gilt $\overline{OA} \cdot m = \overline{OE} \cdot 500\,\text{g}$

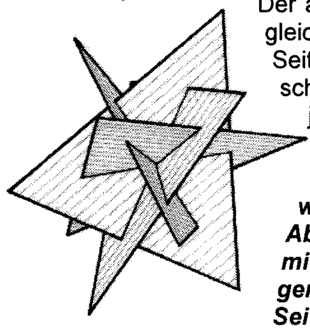
Sei $\overline{AB} = 24\,\text{cm}$. Die Waage ist bei einem Körper der Masse 2kg im Gleichgewicht, wenn $\overline{AE} = 20\,\text{cm}$ beträgt.

Berechne die Position von O auf der Strecke AB und bestimme auf ihr eine Skala mit 250g-Schritten.



Aufgabe 12
7 Punkte

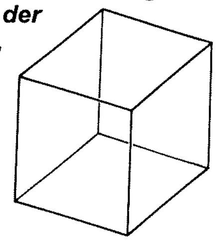
Zwölfspitz



Der abgebildete *Zwölfspitz* besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken mit gleicher Seitenlänge, die sich paarweise schneiden. Er ergibt sich, wenn man jeweils drei geeignete Kantenmitten eines Würfels miteinander verbindet.

Zeichne in einem Schrägbild, welches dem der Abbildung ähnelt, mit durchgezogenen Linien die Seiten der vier Dreiecke ein, von denen der Zwölfspitz gebildet wird.

Zeichne jedes Dreieck in einer anderen Farbe.



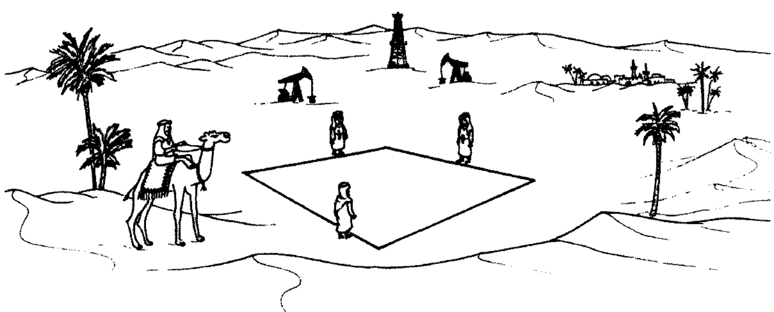
Aufgabe 13
10 Punkte

Gebietsansprüche

Emir Abel besitzt ein quadratisches Ölfeld. „Ich habe beschlossen, euch einen Teil davon zu überlassen“, sagt er zu seinen drei Söhnen. „Stellt euch auf den Grenzlinien des Feldes auf. Das Dreieck, das durch eure Position gebildet wird, soll euch gehören.“

Wie müssen sie sich aufstellen, um ein möglichst großes Flächenstück zu erhalten?

Beweise deine Antwort.



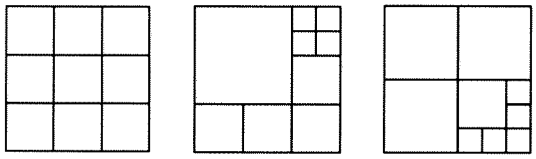
msf 13.3.2001

Mathematik ohne Grenzen 2001
Lösungshinweise zum Wettbewerb am 13.3.2001

Aufgabe 1 (7 Punkte):

Nachdem Nicolas die ausgelegten Karten wieder eingesammelt hat, befindet sich der Stapel mit der Karte von François in der Mitte, d.h. als 11. bis 15. Karte im Gesamtstapel. Beim erneuten Austeilen liegt jede dieser Karten jeweils als dritte Karte auf den neuen Fünferstapeln. Zeigt François nun erneut den Stapel mit seiner Karte an, so liegt gesuchte Karte in der Mitte dieses Stapels.

Aufgabe 2 (5 Punkte):



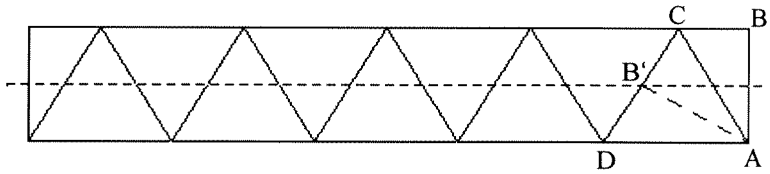
Es gibt 3 Lösungen:

a) $9 \cdot 2^2 = 6^2$

b) $1 \cdot 4^2 + 4 \cdot 2^2 + 4 \cdot 1^2 = 6^2$

c) $3 \cdot 3^2 + 1 \cdot 2^2 + 5 \cdot 1^2 = 6^2$

Aufgabe 3 (7 Punkte):



Ein regelmäßiges Sechseck lässt sich in 6 gleichseitige Dreiecke zerlegen.

Der Flächeninhalt des Streifens umfasst 10 dieser Dreiecksflächen.

Faltet man nämlich B auf B' und verlängert CB', so erhält man drei kongruenten Dreiecke ABC, ACB' und AB'D. Es ergeben sich drei kongruente Winkel mit Scheitel in A und damit $\angle CAD = 60°$. Aus der Kongruenz der Teildreiecke folgt, dass ΔACD gleichseitig ist. AB' ist die Höhe in diesem Dreieck.

In einem gleichseitigen Dreieck mit der Seite a und der Höhe h gilt: $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ und damit $a = \frac{2h}{\sqrt{3}}$.

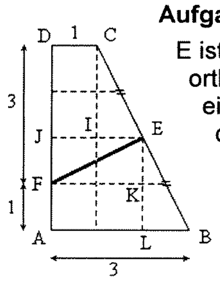
Mit h = 3,6 cm ergibt sich für die Streifenlänge $l = 5a = \frac{10h}{\sqrt{3}} = \frac{36\,\text{cm}}{\sqrt{3}} = 12 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm}$.

Für den Flächeninhalt des Sechsecks gilt somit $A = \frac{6}{10} \cdot 12\sqrt{3}\text{cm} \cdot 3{,}6\,\text{cm} \approx 44{,}9\text{cm}$.

Aufgabe 4 (5 Punkte):

Es gibt 22 Würfel, von denen nur eine Seite sichtbar ist. Für diese wählt man die Augenzahl 6. Von 24 Würfeln sind zwei Seiten sichtbar. Für sie wählt man 5 und 6. Bei 8 Würfeln sind drei Seiten sichtbar. Für sie wählt man 4, 5 und 6.

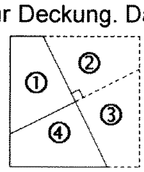
Als Summe der Augenzahlen ergibt sich $22 \cdot 6 + 24 \cdot (5+6) + 8 \cdot (4+5+6) = 516$.



Aufgabe 5 (7 Punkte):

E ist der Mittelpunkt von BC, F teilt AD im Verhältnis1:3. Aus dem Gitternetz erkennt man, dass EF orthogonal zu BC ist (Steigungsdreiecke). Da die Dreiecke IEC, FEJ und LBE kongruent sind, kommt bei einer Drehung um E mit dem Drehwinkel 90° das Viereck FECD mit dem Viereck ABEF zur Deckung. Da die beiden Vierecke deckungsgleich sind, stimmen sie auch im Flächeninhalt überein.

Bemerkung: Ergänzt man das Trapez punktsymmetrisch bzgl. E zu einem Quadrat so ergibt sich das bekannte Problem, dass zwei orthogonale Geraden durch den Mittelpunkt des Quadrats dieses in 4 kongruente Teilflächen zerlegen.



Aufgabe 6 (5 Punkte):

Alle 25 Folgen enden in der Schleife 4-2-1. Die Tabelle zeigt eine mögliche Darstellungsform. Eine Folge soll nur so weit berechnet werden, bis ein Glied einer bereits untersuchten Folge auftaucht (möglichst wenig Rechenaufwand).

s1	s2	s3	s4	s5	s6	s7	s8	s9	s10	s11	s12	s13	s14	s15	s16	s17	s18	s19	s20	s21	s22	s23	s24	s25
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
4	1	10			3	22		28			6			46			9	58		64			12	76
2		5				11		14						23				29		32				38
1		16				34		7						70				88		16				19
4		8				17								35				44						
2		4				52								106				22						
1		2				26								53				11						
						13								160										
						40								80										
						20								40										
						10																		
						5																		
s1	s1	s2	s1	s3	s3	s5	s3	s7	s7	s7	s6	s7	s9	s7	s3	s7	s9	s7	s7	s3	s19	s15	s12	s19

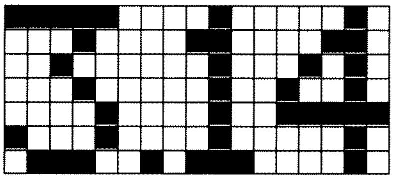
Interessant sind auch die Folgen mit den Startzahlen 27, 31, 41 und 47 oder Folgen mit negativer Startzahl.

Mathematik ohne Grenzen 2001
Lösungshinweise zum Wettbewerb am 13.3.2001

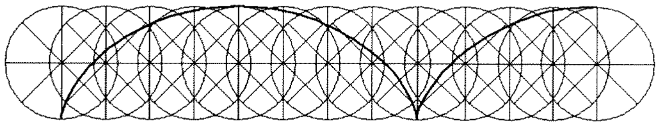
Aufgabe 7 (7Punkte):

1	5	9	6	■
■	3	7	0	8
4	5	■	■	2
0	■	8	3	9
7	4	1	2	6

Aufgabe 8 (5 Punkte):



Aufgabe 9 (7 Punkte):



Aufgabe 10 (10 Punkte):

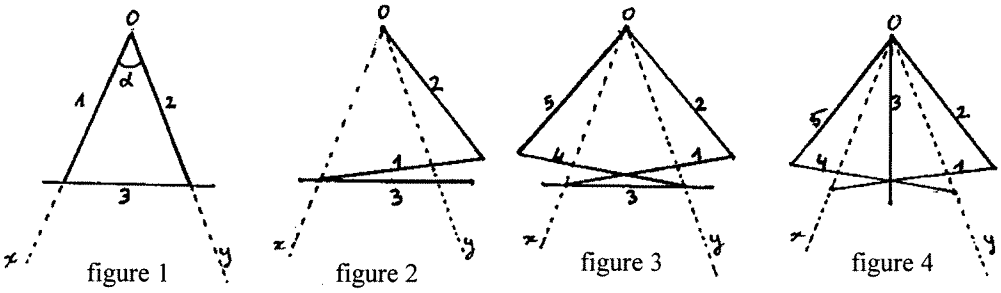
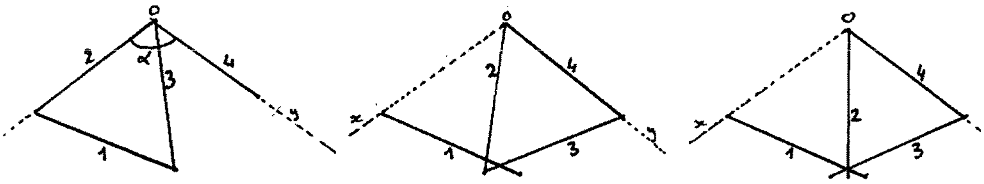


Fig.1: Durch 1 und 2 wird die Position von 3 festgelegt.

Fig.2: Der Schenkel bildet mit 1 und 2 ein gleichseitiges Dreieck.

Fig. 3: Der andere Schenkel bildet mit 4 und 5 ein gleichseitiges Dreieck.

Fig. 4: Durch 3 wird die Winkelhalbierende markiert.



Für $60° < \alpha < 120°$ verfährt man entsprechend der Abbildungen.

Es genügt nicht, mit vier Zahnstochern eine Raute zu legen, da die Diagonale in beiden Fällen länger als die Seiten ist.

Aufgabe 11 (5 Punkte):

Sei $\overline{OA} = x$, dann gilt $\overline{OE} = 20\,\text{cm} - x$.

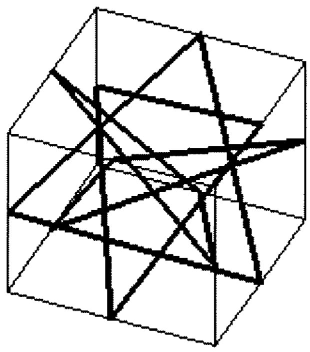
$m = 2000\,\text{g} \Rightarrow x \cdot 2000 = (20\,\text{cm} - x) \cdot 500 \Rightarrow x = 4\,\text{cm}$ und $\overline{OE} = 16\,\text{cm}$.

Da $\overline{OA}$ und die gleitende Masse fest sind, ist m proportional zu $\overline{OE}$.

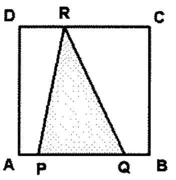
Für m = 250g ergibt sich darum $\overline{OE} = 2\,\text{cm}$.

Man erhält also eine lineare Skala mit einer Schrittweite von 2cm.

Aufgabe 12 (7 Punkte):

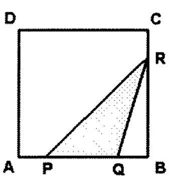


Aufgabe 13 (10 Punkte):

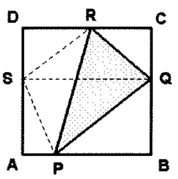


Fall 1: Stehen die drei Söhne auf gegenüberliegenden Seiten, so ist der Flächeninhalt von Dreieck PQR unabhängig von der Lage des Punktes R

Er wird maximal für PQ = AB und ist halb so groß wie der des Quadrats.



Fall 2: Stehen die Söhne auf zwei benachbarten Seiten vergrößert sich der Flächeninhalt, wenn R in C liegt. dies führt auf Fall1.



Fall 3: Stehen die Söhne auf drei verschiedenen Seiten, so betrachte man das Viereck PQRS bei dem SQ parallel zu AB verläuft. Sein Inhalt ist halb so groß wie der des Quadrats (vgl. Fall 1). Der Inhalt von Dreieck PQR ist aber kleiner.

Fazit: Den maximalen Flächeninhalt erreicht man, wenn zwei der Brüder in benachbarten Ecken stehen und sich der dritte auf die gegenüberliegende Quadratseite stellt.

Matematica senza frontiere

Competizione 13 marzo 2001

NOTA BENE

Per tutti gli esercizi sono richieste spiegazioni, giustificazioni o illustrazioni.
Sarà esaminata ogni risoluzione, anche parziale.
Si terrà conto dell'accuratezza.
Ogni foglio-risposta deve essere utilizzato per un singolo esercizio per il quale deve essere riportata una sola soluzione.
Attenzione : in presenza di foglio risposta con soluzioni a più esercizi o in presenza di più soluzioni allo stesso esercizio la prova sarà annullata.

Esercizio 1 (7 punti)

Risoluzione da formulare nella lingua prescelta (francese, inglese, spagnolo o tedesco) con un minimo di 30 parole.

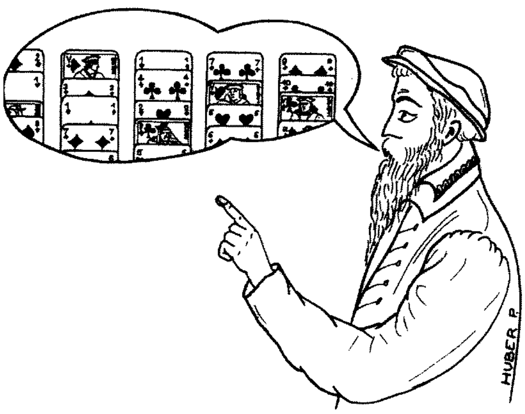
Tocca a te

Nicolas montre à François un éventail de 25 cartes toutes différentes. Il lui demande d'en choisir une sans la révéler.
Il place les 5 premières cartes sur une ligne, puis il pose les 5 cartes sur les précédentes et ainsi de suite jusqu'à former 5 tas de 5 cartes.

François doit désigner le tas où se trouve la carte qu'il a choisie. Nicolas ramasse les 5 tas en plaçant celui que François a montré au milieu du paquet. Puis il redistribue les cartes de la même manière pour former à nouveau 5 tas de 5 cartes.

François indique à nouveau le tas où se trouve maintenant la carte choisie. Nicolas montre alors cette carte.

Expliquer ce tour.



****

Nick fans out in front of Francis a deck of twenty-five cards all of which are different. Nick then asks Francis to pick one without showing its face.
Nick then sets out the first five cards in a line and places the next five on top of the first five until he gets five five-card packs.

Francis is then asked to point at the pack that includes the card he first picked. The next thing Nick does is to collect the five packs, placing the one Francis pointed at in the middle of the full pack. He then deals out the cards as before until he gets the five five-card packs again.

For the second time, Francis is asked to point at the pack that includes the card he had originally picked. Nick is then able to show him which card it was.

Explain the trick.

Nicolás le enseña a Francisco un abanico de 25 cartas, todas diferentes. Le pide que escoja una sin enseñársela.
Alinea las 5 primeras cartas de la baraja, luego coloca las 5 siguientes sobre las precedentes y así sucesivamente hasta formar 5 pilas de 5 cartas.

Francisco debe señalar la pila donde está la carta que ha escogido. Nicolás recoge las 5 pilas, colocando la que ha señalado Francisco en el medio de la baraja. Luego reparte las cartas de la misma manera para volver a formar 5 pilas de 5 cartas.

Francisco señala de nuevo la pila donde se encuentra ahora la carta escogida. Entonces, Nicolás le enseña esta carta.

Explicar este truco.

****

Nicolas zeigt François einen Fächer aus 25 Karten, die alle verschieden sind. Er bittet ihn, eine Karte auszuwählen, ohne sie zu zeigen.

Nun legt er die ersten fünf Karten offen in eine Reihe. Die nächsten fünf Karten legt er darüber, und so fährt er fort, bis fünf Stapel aus je fünf Karten entstanden sind.

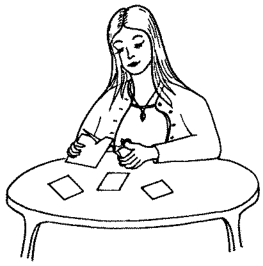
Nun muss François angeben, in welchem Stapel sich die Karte befindet, welche er ausgewählt hat. Nicolas sammelt die fünf Stapel ein, wobei er den von François bezeichneten Stapel in der Mitte des Pakets einordnet. Danach teilt er die Karten in gleicher Weise aus, so dass wieder fünf Stapel zu je fünf Karten entstehen.

François gibt erneut den Stapel an, in welchem sich seine Karte befindet, worauf Nicolas ihm diese Karte zeigt.

Erkläre diesen Trick.

Esercizio 2 (5 punti)

Famiglie di quadrati



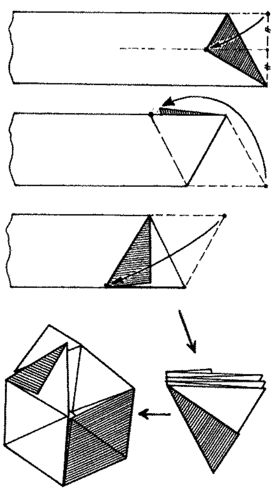
Piero, dopo aver disegnato un quadrato con lato 6 cm, chiede a sua figlia Lia di dividerlo in nove parti quadrate, ciascuna con il lato che misuri un numero intero di centimetri. Lia individua subito una suddivisione e si domanda se ce ne siano altre.

Sono considerate uguali due suddivisioni formate con gli stessi quadrati disposti diversamente.

Disegnate tutte le soluzioni possibili.

Esercizio 3 (7 punti)

Esagami

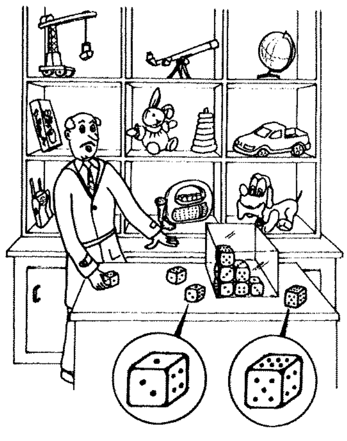


In un libro di origami si trova la piegatura qui riprodotta, realizzata con una striscia di carta rettangolare di $12\sqrt{3}$ per 3,6 cm e che permette di ottenere un esagono regolare. Le due facce della striscia sono di colore diverso.
Costruite l'esagono, poi incollatelo sul foglio-risposta.

Calcolate la sua area.

Esercizio 4 (5 punti)

Il pieno di punti

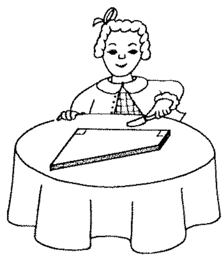


Il signor Vittorio vende dadi nel suo negozio di giocattoli. Ne può sistemare esattamente 60 in una scatola trasparente a forma di parallelepipedo: 5 dadi in lunghezza, 4 in larghezza, 3 in altezza. Nel riempire la scatola sistema i dadi in modo che la somma dei punti visibili sulle sei facce della scatola sia massima.

Qual è questa somma ? Motivate la risposta.

Esercizio 5 (7 punti)

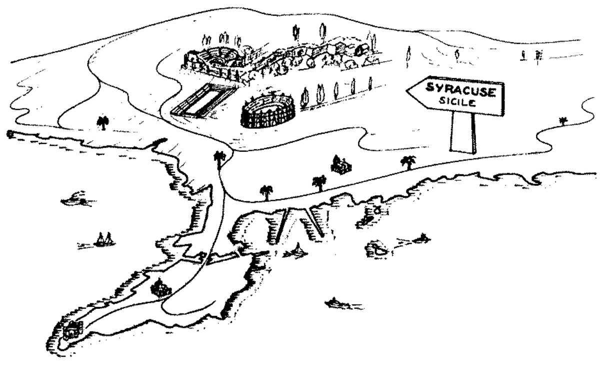
In parti uguali



Orietta e Giulia devono dividersi equamente un avanzo di torta. Questo avanzo ha la forma di un trapezio rettangolo con basi rispettivamente di 1 dm e di 3 dm e con altezza di 4 dm.
Giulia pretende che le due parti abbiano la stessa area ed anche la stessa forma. Orietta riesce a farlo con un solo taglio rettilineo.

Disegnate l'avanzo di dolce in scala 1/5, poi segnate la linea di taglio. Dimostrate che i due pezzi hanno la stessa area e la stessa forma.

Esercizio 6 (5 punti) *Ma chi l'avrebbe pensato !*



Giovanni giocherellando con la calcolatrice programmabile costruisce delle successioni di numeri interi. All'inizio sceglie il primo intero della successione e prosegue in questo modo: se il numero è pari, il successivo è uguale alla sua metà; se il numero è dispari, il successivo si ottiene moltiplicando questo per 3 e aggiungendo poi 1.

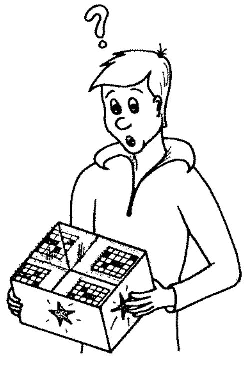
Poi applica di nuovo questo procedimento al risultato ottenuto e così via. Sceglie 1 come numero iniziale e ottiene la prima successione. Poi sceglie 2, poi 3 e così via fino a 25. Ottiene così 25 successioni che presentano una proprietà imprevedibile.

Presentate in modo accorto i calcoli di Giovanni ed enunciate la proprietà osservata.

(Questa proprietà non è stata ancora dimostrata per un intero iniziale qualsiasi.)

Esercizio 7 (7 punti)

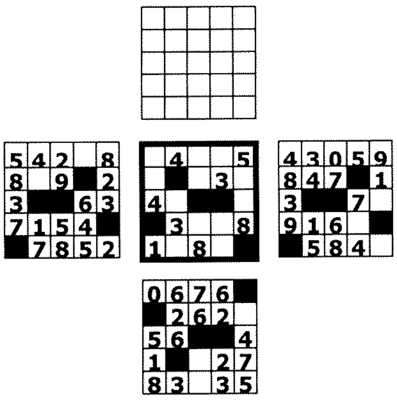
Giochi di specchi



Intorno allo schema centrale della figura sono disposti 4 specchi magici. Questi specchi riflettono esattamente le caselle nere. Per quanto riguarda, invece, i numeri, entra in gioco la magia. Consideriamo un numero : due specchi lo riflettono immutato mentre gli altri due lo cambiano sostituendolo uno col numero precedente e l'altro con quello successivo.

Gli specchi si comportano fedelmente o infedelmente a seconda della casella dello schema centrale.

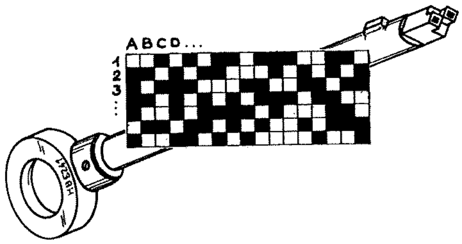
Ricostruite sul foglio-risposta l'immagine che si ottiene nello schema vuoto della figura.



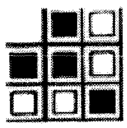
Esercizio 8 (5 punti)

Codice segreto

Per comunicare tramite Internet Alice e Roberto codificano e decodificano i loro messaggi con la seguente chiave formata da pixel neri e bianchi.

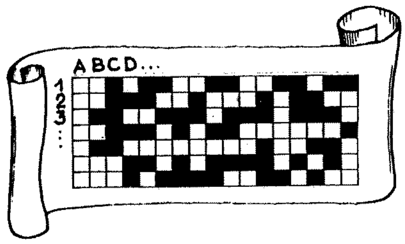


Per codificare e decodificare il messaggio che ha la stessa dimensione della chiave lo si sovrappone alla chiave stessa e per ogni coppia di pixel con le stesse coordinate si applica la seguente operazione :



due pixel dello stesso colore danno un pixel nero, due pixel di colore diverso danno un pixel bianco.

Ecco il messaggio in codice mandato da Roberto ad Alice :



Disegnate il reticolo decodificato. Qual è il messaggio ?

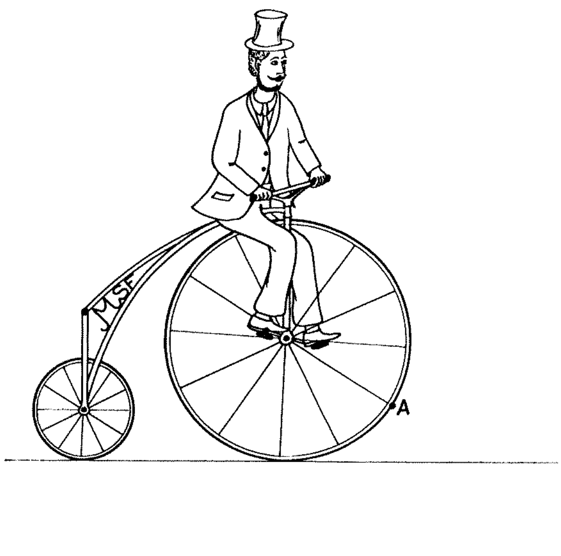
(Questo metodo di crittografia è realmente usato.)

Esercizio 9 (7 punti)

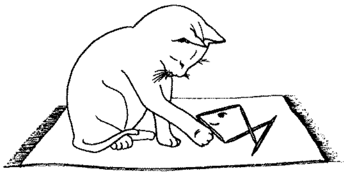
Ciclopedia

Ben osserva Emilio che si esercita con un velocipede. Ben traccia mentalmente la traiettoria del punto A della ruota anteriore del velocipede quando questa compie un giro e mezzo senza strisciare La ruota ha il diametro di 150 cm. All'inizio il punto A tocca il suolo.

Rappresentate in scala 1/30 la posizione della ruota e del punto A ogni ottavo di giro ; poi tracciate la traiettoria del punto A.

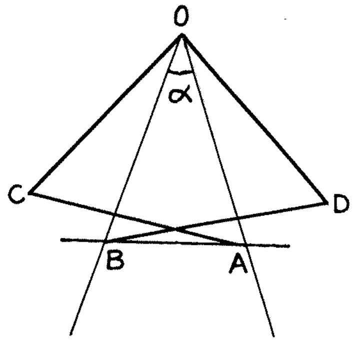


Esercizio 10 (10 punti) ***La stecchinatura***



Eric ha un metodo per visualizzare la bisettrice di un angolo α.

Ha a disposizione 5 stuzzicadenti di uguale lunghezza e se ne serve per visualizzare la bisettrice di un angolo di misura inferiore a 60°. Inizia sistemando 3 stuzzicadenti, poi ne sposta 2 e, infine, arriva alla disposizione illustrata nella figura.

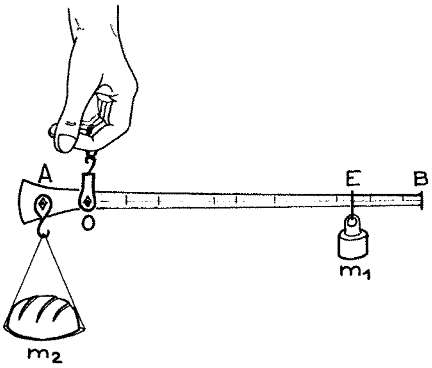


Descrivete i passaggi compiuti da Eric illustrandoli con figure.

Lo spessore degli stuzzicadenti è trascurabile.

Esercizio 11 (5 punti) *solo per la classe terza*

Graduate l'asta

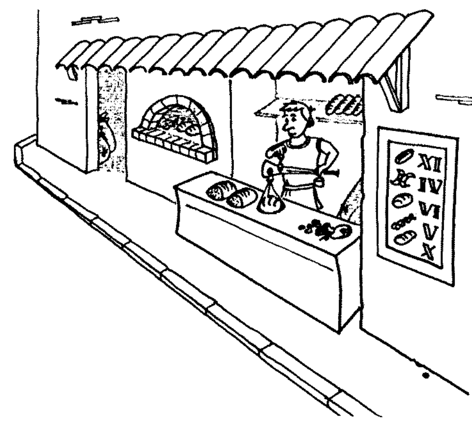


La stadera è composta da un'asta graduata tra 0 e B ed una massa m_1 denominata "romano" che può scorrere su OB.

Per misurare una massa incognita di m_2 grammi la si appende in A e tenendo la stadera sospesa in O si sposta il romano tra O e B fino ad individuare la posizione di equilibrio in E.

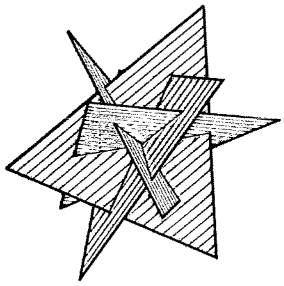
Si ha, quindi, la relazione OA x m_2 = OE x m_1.
Si sa che AB = 24 cm, m_1 = 500 g ; con una massa m_2 = 2Kg la stadera è in equilibrio se AE = 20 cm.

Determinate la posizione di O su AB; poi graduate l'asta della stadera di 250 g in 250 g.



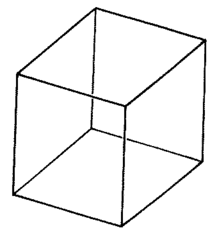
Esercizio 12 (7 punti) *solo per la classe terza*

Geometria ed arte moderna



Il dodecapunte disegnato è costituito da 4 triangoli equilateri uguali che si intersecano a due a due. E' stato ottenuto a partire da un cubo: i vertici dei triangoli sono infatti i punti medi degli spigoli del cubo.

Partendo da un cubo simile a quello rappresentato disegnate a tratto continuo solo i lati dei 4 triangoli del dodecapunte usando un colore diverso per ogni triangolo.



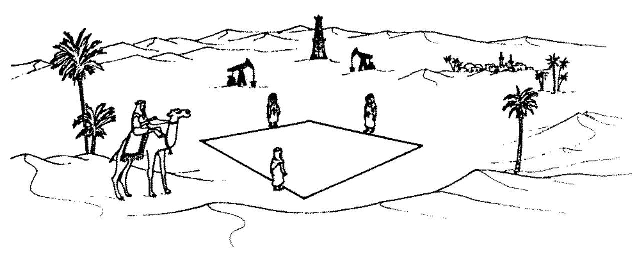
Esercizio 13 (10 punti) *solo per la classe terza*

Geometria e petrolio

L'emiro Abel possiede una campo di petrolio quadrato. Decide di regalarne una parte ai suoi 3 figli.

Per ottenerla ognuno di loro dovrà mettersi su uno dei lati del campo e riceveranno in dono il triangolo di terreno determinato dalle loro tre posizioni.

Come devono disporsi per ottenere la massima area possibile ?
Motivate la risposta.



Mathématiques sans frontières

ACADEMIE DE STRASBOURG

March 2001

- **An attempt at an answer will get some marks.**
- **Careful working is taken into account.**
- **Each class should put in only one answer sheet per question..**

QUESTION 1
7 MARKS

A tou tour

Write down your answer in French, German, Spanish or Italian using at least 30 words.

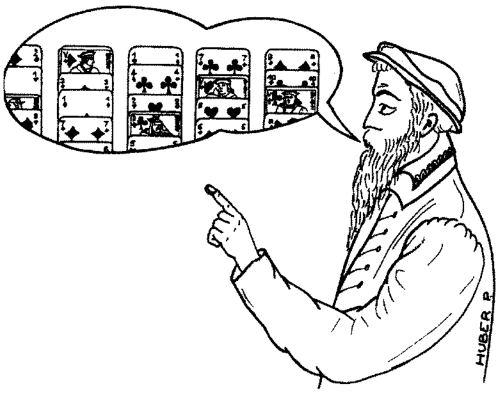
Nicolas montre à François un éventail de 25 cartes toutes différentes. Il lui demande d'en choisir une sans la révéler.

Il place les 5 premières cartes sur une ligne, puis il pose les 5 cartes sur les précédentes et ainsi de suite jusqu'à former 5 tas de 5 cartes.

François doit désigner le tas où se trouve la carte qu'il a choisie. Nicolas ramasse les 5 tas en plaçant celui que François a montré au milieu du paquet. Puis il redistribue les cartes de la même manière pour former à nouveau 5 tas de 5 cartes.

François indique à nouveau le tas où se trouve maintenant la carte choisie. Nicolas montre alors cette carte.

Expliquer ce tour.



Nicolas zeigt François einen Fächer aus 25 Karten, die alle verschieden sind. Er bittet ihn, eine Karte auszuwählen, ohne sie zu zeigen.

Nun legt er die ersten fünf Karten offen in eine Reihe. Die nächsten fünf Karten legt er darüber, und so fährt er fort, bis fünf Stapel aus je fünf Karten entstanden sind.

Nun muss François angeben, in welchem Stapel sich die Karte befindet, welche er ausgewählt hat. Nicolas sammelt die fünf Stapel ein, wobei er den von François bezeichneten Stapel in der Mitte des Pakets einordnet. Danach teilt er die Karten in gleicher Weise aus, so dass wieder fünf Stapel zu je fünf Karten entstehen.

François gibt erneut den Stapel an, in welchem sich seine Karte befindet, worauf Nicolas ihm diese Karte zeigt.

Erkläre diesen Trick.

Nicola mostra a Francesco un ventaglio di 25 carte tutte diverse e gli chiede di sceglierne una senza mostrargliela.

Dispone le prime 5 carte in riga, poi altre 5 sulle precedenti in successione e così di seguito fino ad ottenere 5 file di 5 carte ognuna.

Francesco deve indicare la fila in cui si trova la carta scelta; Nicola raccoglie ogni fila ponendo le carte di quella indicata da Francesco al centro del mazzo. Poi ridistribuisce le carte nello stesso modo per formare altre 5 file di 5 carte.

Francesco indica di nuovo la fila in cui si trova ora la carta scelta in precedenza. A questo punto Nicola è in grado di rivelare questa carta.

Spiegare il procedimento.

Nicolás le enseña a Francisco un abanico de 25 cartas, todas diferentes. Le pide que escoja una sin enseñársela.

Alinea las 5 primeras cartas de la baraja, luego coloca las 5 siguientes sobre las precedentes y así sucesivamente hasta formar 5 pilas de 5 cartas.

Francisco debe señalar la pila donde está la carta que ha escogido. Nicolás recoge las 5 pilas, colocando la que ha señalado Francisco en el medio de la baraja. Luego reparte las cartas de la misma manera para volver a formar 5 pilas de 5 cartas.

Francisco señala de nuevo la pila donde se encuentra ahora la carta escogida. Entonces, Nicolás le enseña esta carta.

Explicar este truco.

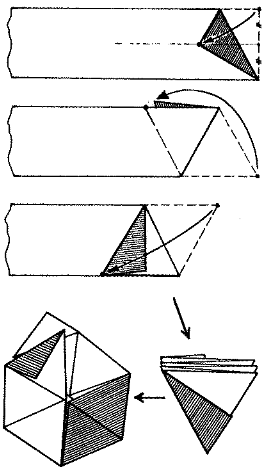
(Nicolas CHUQUET 1445 – 1500)

Question 2 — 5 marks — *Square family*

Pierre draws a square of side 6cm. He asks his sister Nathalie to cut the square into 9 square pieces whose sides are a whole number of centimetres long. Nathalie quickly finds an answer but then asks herself if there are any other ways to do it.

Find all the possible solutions. (Dissections which use the same size squares but in different places are considered as identical.)

Question 3 — 7 marks — *Hexagami*



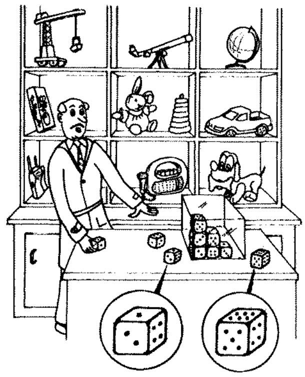
An Origami book contained the example of paper-folding shown. Using a rectangular strip of paper $12\sqrt{3}$ cm by 3.6 cm you can make a regular hexagon.

The front and back of the strip have different colours as shown.

Make a hexagon in this way and stick it to your answer sheet.

Work out its area.

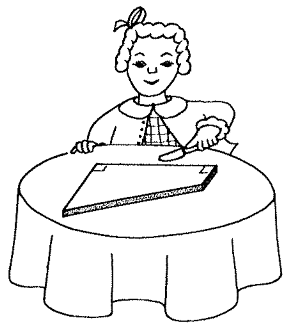
Question 4 — 5 marks — *Maximum points*



Victor sells dice in his toy shop. He can show exactly 60 dice in his transparent display cabinet. It is a cuboid and the dice fit in 5 along the length, 4 deep and 3 high.
He fills the display cabinet so that the total of the dots showing on the 6 faces of the display cabinet is a maximum.

What is this total?
Explain your answer.

Question 5 — 7 marks — *First cut*

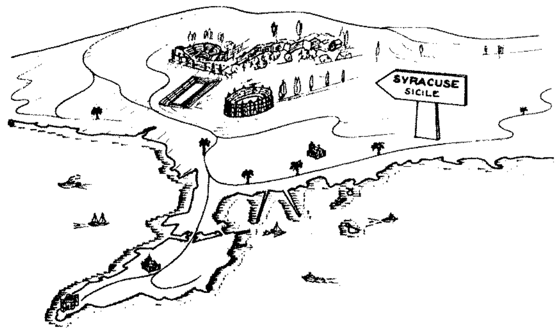


Marie-Odile and Julie have to divide the last piece of tart into two equal parts.The piece is a trapezium with 2 sides perpendicular to a third side as shown. This side is 4 dm long and the two parallel sides are 1 dm and 3 dm.

Julie insists that the 2 parts must have the same area and the same shape. Marie-Odile finds a way of doing this with one single straight-line cut.

Draw the tart on a scale of 1:5 and draw on it the cut that Marie-Odile found.
Explain why the 2 pieces have the same area and the same shape.

Question 6 — 5 marks — *Syracuse series*



John is a student at the University of Syracuse (USA). He has been exploring an interesting pattern in some different series of whole numbers.

Having chosen the first number of the series he works out the next one with this rule:
- if the number is even, the next one in the series is given by dividing it by 2;
- if the number is odd, the next one is found by multiplying by 3 and adding 1.

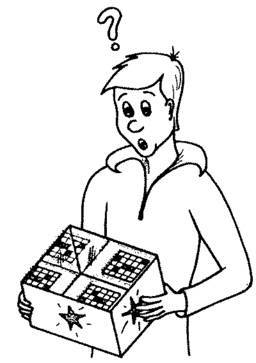
Then he continues to apply this rule to the answer and so builds up the series.
He chooses 1 to start with and gets his first series. Then he chooses 2 as his starting number, then 3 and so on up to 25. He finds 25 number series in this way.
He claims an astonishing property illustrated by the 25 number series that he has examined.

Write down clearly the 25 series that John has found and state the property he claimed.

(This property has not yet been proved for all possible starting numbers. Do you think it must always be true ?)

Question 7 — 7 marks

Mirror, mirror on the wall...



4 magic mirrors are arranged round a number grid.

The mirrors reflect the black squares perfectly. And a number is unchanged after reflection in 2 of the mirrors: but the other 2 mirrors do change each number. One changes it to the whole number that precedes it ; the other to the whole number which follows it.

The magic role of the mirrors can change for each square of the grid.

The diagram shows the original central grid surrounded by four magic mirrors.

Complete each grid and draw the image that is produced in the blank top mirror on your answer sheet.

Top mirror:

Left mirror:

5	4	2		8
8		9	■	2
3	■	■	6	3
7	1	5	4	■
■	7	8	5	2

Central grid:

	4			5
	■		3	
4		■	■	
■	3			8
1		8		■

Right mirror:

4	3	0	5	9
8	4	7	■	1
3	■	■	7	
9	1	6		■
■	5	8	4	

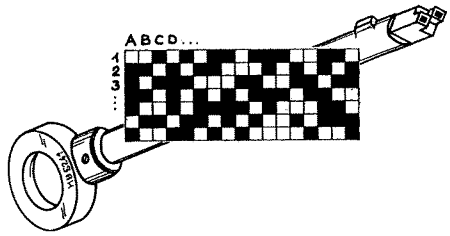
Bottom mirror:

0	6	7	6	■
■	2	6	2	
5	6	■	■	4
1	■		2	7
8	3		3	5

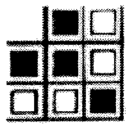
Question 8 — 5 marks

www.codes

To communicate over the internet, Alice and Robert code and decode their messages using the following key which consists of black and white pixels.

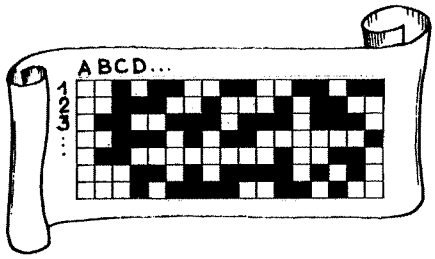


The message must have the same dimensions as the key. Then to decode or encode a message you put it over the key. For the overlapping pixels you apply the following rule:



2 overlapping pixels of the same colour give a black pixel and 2 pixels of different colour give a white pixel.

Here is the coded message sent by Robert to Alice.

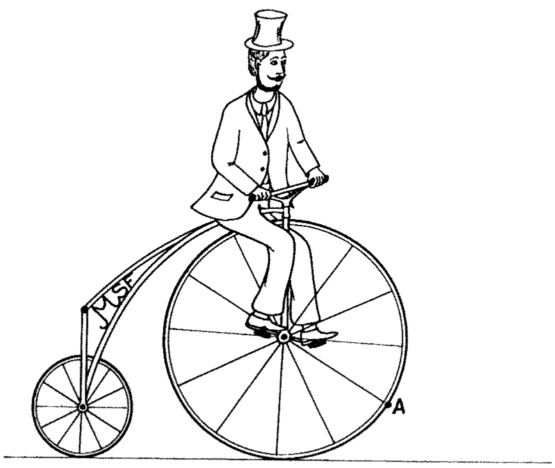


Draw the decoded grid. What is the significance of the message?

(This method of coding is currently in use.)

Question 9 — 7 marks

Cyclopaedia



Benjamin watches Emilien on his penny-farthing bike.

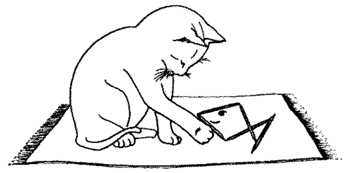
He tries to work out the path taken by the point A on the front wheel when the wheel makes one and a half turns without slipping.

The wheel has a diameter of 150 cm. Start with A in contact with the ground.

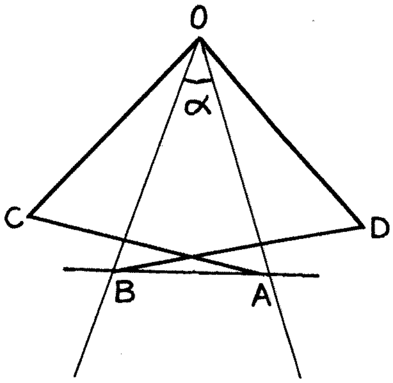
On a scale of 1:30 draw the position of the wheel and the point A for every eighth part of a turn. Then draw in the path taken by the point A.

Question 10 — 10 marks

Tooth picks



Eric has a method of bisecting an angle that uses toothpicks. For an angle less than 60° the method uses 5 toothpicks of the same length.
For a given angle he carefully places his first 3 toothpicks. Then he moves 2 of them and puts down another 2 to end up with the system shown .



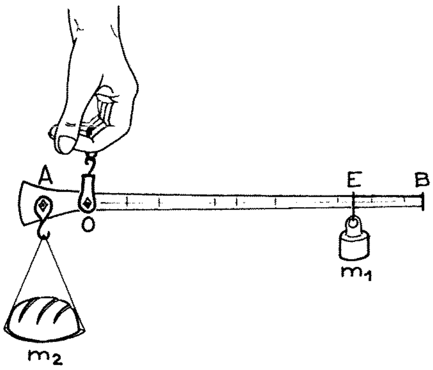
He also knows how to find the angle bisector of an angle whose size is between 60° and 120°. For that he uses 4 toothpicks.

In each of these cases describe the steps that Eric takes. Use a diagram to make it clear.

The thickness of the toothpicks is considered to be negligible.

Question 11 — 5 marks

A question of balance



Roman scales consisted of a rod with a scale marked on OB and a mass of 500g which can be positioned anywhere along OB.

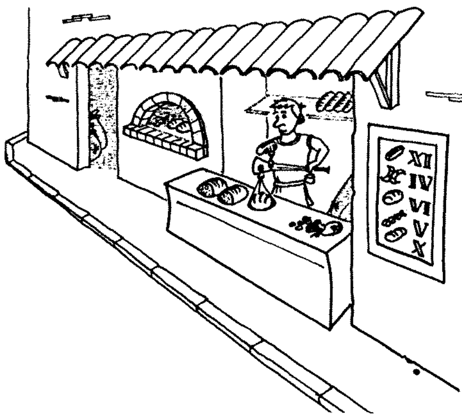
To measure an unknown mass of m grammes, you attach it at A and holding the scales at O you move the mass of 500 g along OB until it balances.

The relationship is then: OA xm = OE x 500

You know that AB = 24 cm

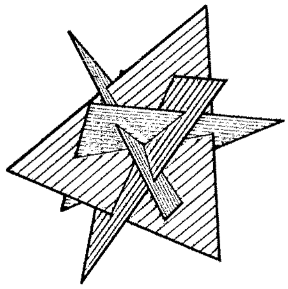
When m = 2 kg the scales balance when AE = 20 cm.

Work out the position of O on AB and draw the graduations of the scales in order to weigh from 250 g upwards by steps of 250 g.



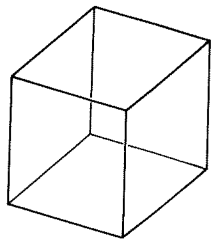
Question 12 — 7 marks

Boxed in



The dodecapoint shown is made up of 4 identical equilateral triangles which intersect each other.
It is constructed by starting with a cube: the vertices of the triangles are the midpoints of the edges of the cube.

On a perspective drawing based on the cube shown, show the sides of the 4 triangles of the dodecapoint as continuous straight lines. Use a different colour for each triangle.

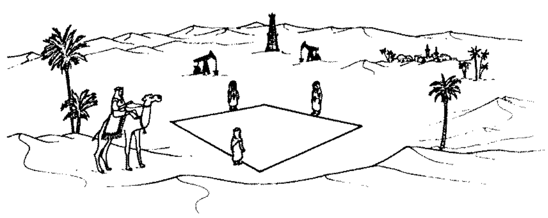


Question 13 — 10 marks

Oilfield

Emir Abel has an oilfield in the shape of a square.
He decides to give a section of it to his three sons. They are to stand anywhere on the sides of the square and they will be given the triangle formed by their positions.

Where should they stand so that the triangle will have the biggest possible area ? Explain your answer.



A VERSENYT MAGYARORSZÁGON
A MATEMATIKAHATÁROK NÉLKÜL ALAPÍTVÁNY RENDEZI

Támogatóink:

Oktatási Minisztérium
Budapest Főváros Önkormányzata
Safaripark Gänserndorf
Pro Renovanda Cultura Hungarie Alapítvány
Berzsenyi Dániel Gimnázium
Lichtbogen Bt.

Gänserndorf SAFARIPARK

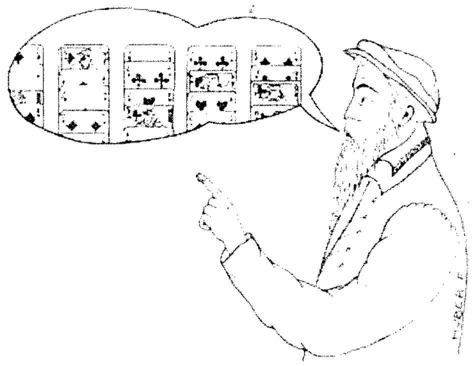
Nemzeti Tankönyvkiadó Rt.
SKK Trade Kft.- CASIO
Informatika-Számìtástechnika Tanárok Egyesülete – ISZE
Mozaik Kiadó,Szeged
Válogatás Reader's Digest

MATEMATIKA HATÁROK NÉLKÜL
MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES

1.feladat

MOST RAJTAD A SOR!

A megoldást angolul, németül, franciául, olaszul vagy spanyolul fogalmazzátok meg minimum 30 szóban.- 7 pont



Nick fans out in front of Francis a deck of twenty-five cards all of which are different. Nick then asks Francis to pick one without showing its face. Nick then sets out the first five cards in a line and places the next five on top of the first five until he gets five five-card packs. Francis is then asked to point at the pack that includes the card he first picked. The next thing Nick does is to collect the five packs, placing the one Francis pointed at in the middle of the full pack. He then deals out the cards as before until he gets the five five-card packs again. For the second time, Francis is asked to point at the pack that includes the card he had originally picked. Nick is then able to show him which card it was. Explain the trick.

Nicolas zeigt François einen Fächer aus 25 Karten, die alle verschieden sind. Er bittet ihn, eine Karte auszuwählen, ohne sie zu zeigen. Nun legt er die ersten fünf Karten offen in eine Reihe. Die nächsten fünf Karten legt er darüber, und so fährt er fort, bis fünf Stapel aus je fünf Karten entstanden sind. Nun muss François angeben, in welchem Stapel sich die Karte befindet, welche er ausgewählt hat. Nicolas sammelt die fünf Stapel ein, wobei er den von François bezeichneten Stapel in der Mitte des Pakets einordnet. Danach teilt er die Karten in gleicher Weise aus, so dass wieder fünf Stapel zu je fünf Karten entstehen.François gibt erneut den Stapel an, in welchem sich seine Karte befindet, worauf Nicolas ihm diese Karte zeigt. Erkläre diesen Trick.

Nicolas montre à François un éventail de 25 cartes toutes différentes. Il lui demande d'en choisir une sans la révéler. Il place les 5 premières cartes sur une ligne, puis il pose les 5 cartes sur les précédentes et ainsi de suite jusqu'à former 5 tas de 5 cartes. François doit désigner le tas où se trouve la carte qu'il a choisie. Nicolas ramasse les 5 tas en plaçant celui que François a montré au milieu du paquet. Puis il redistribue les cartes de la même manière pour former à nouveau 5 tas de 5 cartes. François indique à nouveau le tas où se trouve maintenant la carte choisie. Nicolas montre alors cette carte. Expliquer ce tour.

Nicola mostra a Francesco un ventaglio di 25 carte tutte diverse e gli chiede di sceglierne una senza mostrargliela. Dispone le prime 5 carte in riga, poi altre 5 sulle precedenti in succesione e così di seguito fino ad ottenere 5 file di 5 carte ognuna. Francesco deve indicare la fila in cui si trova la carta scelta; Nicola raccoglie ogni fila ponendo le carte di quella indicata da Francesco al centro del mazzo. Poi ridistribuisce le carte nello stesso modo per formare altre 5 file di 5 carte. Francesco indica di nuovo la fila in cui si trova ora la carta scelta in precedenza. A questo punto Nicola è in grado di rivelare questa carta. Spiegare il procedimento.

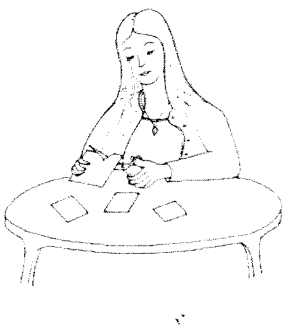
Nicolás le enseña a Francisco un abanico de 25 cartas, todas diferentes. Le pide que escoja una sin enseñársela. Alinea las 5 primeras cartas de la baraja, luego coloca las 5 siguientes sobre las precedentes y así sucesivamente hasta formar 5 pilas de 5 cartas. Francisco debe señalar la pila donde está la carta que ha escogido. Nicolás s recoge las 5 pilas, s recoge las 5 pilas, colocando la que ha señalado Francisco en el medio de la baraja. Luego reparte las cartas de la misma manera para volver a formar 5 pilas de 5 cartas. Francisco señala de nuevo la pila donde se encuentra ahora la carta escogida. Entonces, Nicolás le enseña esta carta. Explicar este truco.

2. feladat:

NÉGYZET CSALÁD

- 5 pont

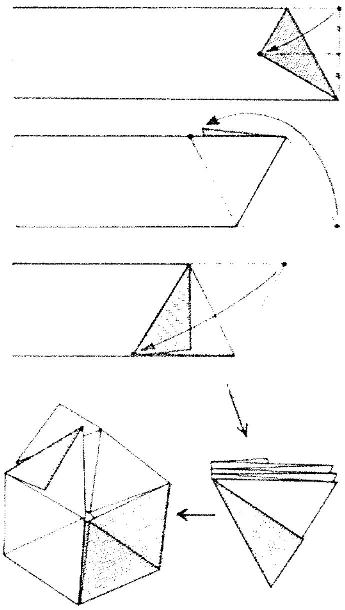
Pierre rajzolt egy 6 cm oldalú négyzetet, majd megkérte lányát, Nathalie-t, hogy darabolja fel azt 9 kis négyzetre úgy, hogy mindegyik darab oldal hossza egész szám legyen. Nathalie gyorsan talált egy felosztást, majd azon morfondírozott, hogyan lehetett volna másképpen is szétvágni a négyzetet a megadott módon. Két felosztás azonosnak számít, ha ugyanolyan négyzetekből áll, csak másképpen rakjuk össze. Rajzoljátok le az összes megoldást!



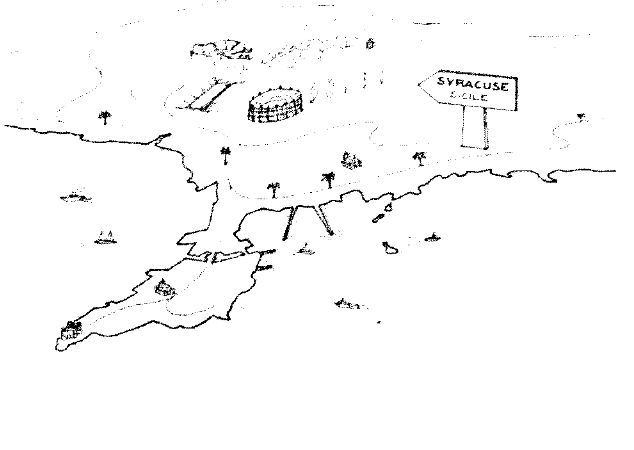
3.feladat

HEXAGÁMI

- 7 pont



Egy origámi könyvből való a mellékelt hajtogatás. A kiinduló papírcsík egy téglalap, amelynek oldalai 12$\sqrt{3}$ cm és 3,6 cm hosszúak. A hajtogatás eredményeképpen egy szabályos hatszöget kapunk. A papírcsík két oldala különböző színű. Készítsétek el a hatszöget, ragasszátok fel a válaszlapra ! Számítsátok ki a területét!

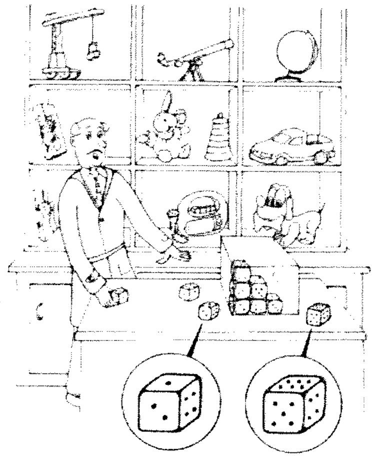


4. feladat:

CSÚCS-PONT

- 5 pont

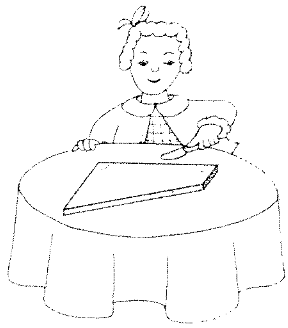
Viktor úr játék boltjában dobókockákat is árusít. Egy téglatest alakú, átlátszó dobozban helyezi el a kockákat. Összesen 60 fér el a dobozban : hosszában 5,szélteben 4 és egymásra 3 réteg fér el. A kockákat úgy helyezi el, hogy a doboz 6 oldalán látható pontszámok összege a lehető legnagyobb legyen. Mekkora lesz ez az összeg? Válaszotokat indokoljátok!



5. feladat:

FELVÁGÁS

- 7 pont



Marie-Odile és Julie egy lepény maradékán osztozkodik. A sütemény fölülnézetből egy olyan derékszögű trapéz, amelynek alapjai 1 és 3 dm, a magassága 4 dm. Julie kiköti, hogy a két rész egybevágó legyen. Marie-Odile egy függőleges egyenes vágással megoldja ezt. Rajzoljátok le fölülnézetben, 1:5-ös méretarányban a lepényt, s jelöljétek be a vágás vonalát! Igazoljátok, hogy az így kapott két rész egybevágó!

6. feladat:

ÚGY SZERETNÉM SIRACUSA-T LÁTNI ...

- 5 pont

John az Egyesült Államokban lévő Syracuse egyetemének hallgatója. Házi feladatként egész számokból álló sorozatokat alkot. Először kiválasztja a sorozat első elemét, majd az alábbi „program" alapján számítja a következő elemeket:
- Ha a szám páros, akkor a következő szám ennek a felével lesz egyenlő.
- Ha a szám páratlan, akkor megszorozza 3-mal,majd hozzáad 1-et. Az így kapott szám lesz a sorozat következő eleme.

Ugyanígy jár el a sorozat további elemeinek kiszámításánál. Először az 1-et választja a sorozat első elemének, így az első sorozathoz jut. A második,harmadik, stb., végül a huszonötödik sorozatot úgy kapja meg, hogy a sorozat első elemének a 2-t, 3-at, ..., a 25-öt választja.
John ezeknek a sorozatoknak egy meglepő tulajdonságára jön rá.
Írjátok le John sorozatait, s fogalmazzátok meg a meglepő tulajdonságot!
Megjegyzés: Ezt a tulajdonságot még nem minden, 25-nél nagyobb kezdőszámra sikerült bizonyítani.

7. feladat:

TÜKRÖM, TÜKRÖM MONDD MEG NÉKEM...

- 7 pont

A középső négyzetháló körül négy mágikus tükör áll. A tükrök a fekete négyzeteket valósághűen tükrözik. A középső háló minden egyes számát a tükrök közül kettő változatlanul tükrözi, a másik kettő viszont megváltoztatja az értéket: az egyik eggyel növeli, a másik eggyel csökkenti az eredeti számot. A középső háló egy-egy négyzetétől függően a négy tükör „szerepe" az előbbi szabályt betartva változhat.
Rekonstruáljátok a fölső tükörben tükröződő számokat!

5	4	2		8
8		9	■	2
3	■	■	6	3
7	1	5	4	■
■	7	8	5	2

	4			5
	■		3	
4		■	■	
■	3			8
1		8		■

4	3	0	5	9
8	4	7	■	1
3	■	■	7	
9	1	6		■
■	5	8	4	

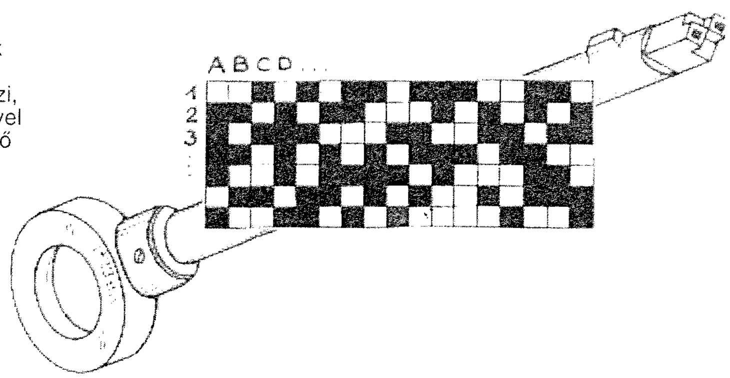
0	6	7	6	■
■	2	6	2	
5	6	■	■	4
1	■		2	7
8	3		3	5

8. feladat:

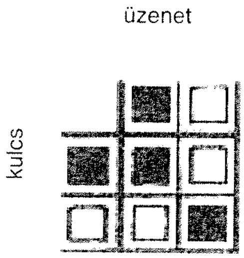
WWW.TITKOSÍTÁS.HU

- 5 pont

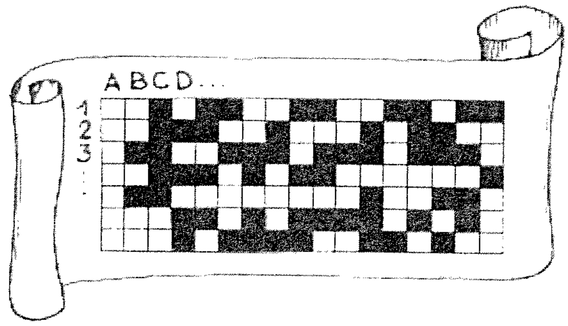
Alice és Robert titkosítják az interneten egymásnak küldött üzeneteket. A titkosításhoz az alábbi, fekete és fehér pixelekből (fénypontokból) álló kulcsot használják:



A kulccsal azonos méretű üzenet kódolását és dekódolását a következő módon végzik. Az üzenetet ráhelyezik a kulcsra. Az egymásra kerülő pixel párokat összehasonlítják.



Ha a két pixel azonos színű, akkor fekete pixelt, ha különböző színű, akkor fehér pixelt írnak az üzenet megfelelő helyére. Íme a titkosított üzenet, amelyet Alice kapott Roberttől :



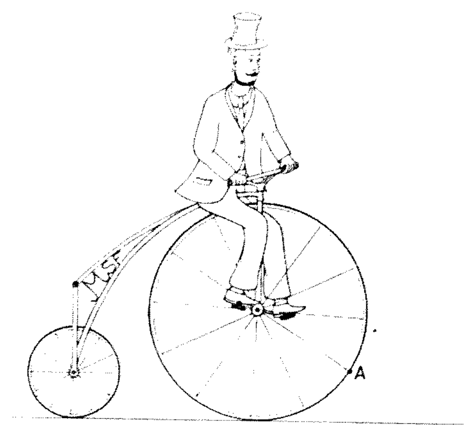
Rajzoljátok le a megfejtett üzenetet. Mi ez az üzenet?
Megjegyzés: ezt a módszert a valóságban is alkalmazzák.

9. feladat:

CYKLOPÉD

- 7 pont

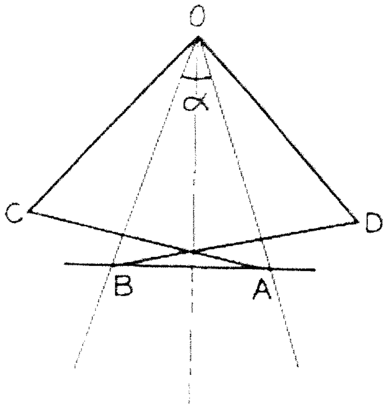
Emilien kerékpározik. Barátja Benjamin figyeli őt. Tanulmányozza az első kerék A pontjának a pályáját, miközben a kerék csúszásmentesen másfél fordulatot tesz meg. A kerék 150 cm átmérőjű. Induláskor az A pont éppen érintkezett a földdel.
Rajzoljátok le a kereket és az A pont helyzetét nyolcad fordulatonként, majd jelöljétek be az A pont pályáját!
Az ábrát 1:30-ad kicsinyítéssel készítsétek el!



10. feladat:

FOGPISZKÁLÓ-GEOMETRIA

- 7 pont

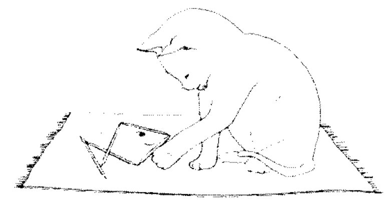


Eric kitalált egy módszert arra, hogy öt egyforma hosszúságú fogpiszkáló segítségével egy 60° – nál kisebb szög szögfelezőjét megrajzolja.
Egy adott szög esetén először három fogpiszkálót helyez el, majd ezek közül kettőt áthelyezve, s másik kettőt lerakva jut az ábrán látható helyzethez.
Arra az esetre is kidolgozott egy eljárást, amikor az adott szög 60° és 120° között van. Ekkor négy fogpiszkáló is elég a szerkesztéshez.
Mindkét esetet mutassátok be egy-egy példával! Rajzoljátok le az egymást követő lépéseket külön-külön!(A fogpiszkálók vastagsága elhanyagolható.)

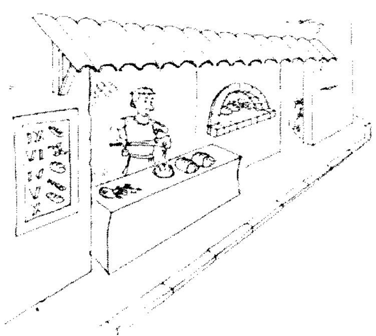
11. feladat:

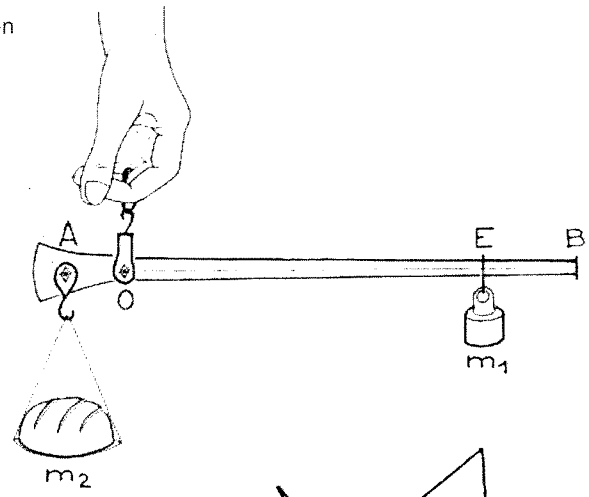
A MÉRLEG NYELVE

- 5 pont



A római mérleg egy karból állt, amelynek O és B közötti részére beosztást véstek, s egy 500 grammos tömeget lehet csúsztatni az OB-n.
Egy ismeretlen m tömeget úgy mértek meg, hogy azt A-ban felakasztották a mérleg karjára, a mérleget az O fölött felfüggesztették, végül az 500 grammos tömeget O és B között úgy állították be, hogy a mérleg egyensúlyban legyen. Az így beállított tömeg helyét jelöljük E-vel. Az ismert összefüggés alapján fennáll a következő egyenlőség: OA :OE = 500 : m.
Tudjuk, hogy AB = 24 cm, továbbá m = 2 kg, akkor AE = 20 cm esetén lesz a mérleg egyensúlyban.
Számítsátok ki, hol van az O pont az AB-n, majd készítsétek el az OB-n a beosztást 250 grammonként!

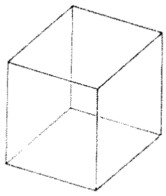


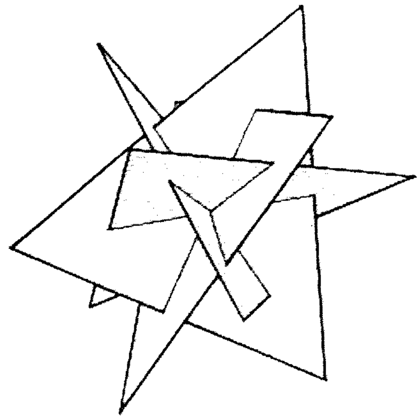


12. feladat:

CSILLAG DOBOZ

- 7 pont



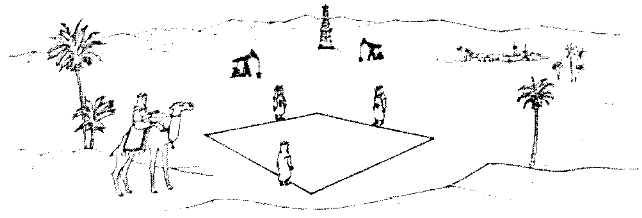


Az itt látható 12 csúcspontú „csillagképződmény" négy egybevágó szabályos háromszöglapból áll, amelyek páronként metszik egymást. Úgy kaptuk meg ezt a csillagképződményt, hogy a háromszögek csúcsai ugyanannak a kockának az él középpontjai.
Az ábrán látható nézetből rajzoljatok meg egy minél nagyobb kockát, s rajzoljátok be a háromszögek oldalait!
Minden háromszöget más színnel jelöljetek!

13. feladat:

AZ EMÍR, A HÁROM FIÚ ÉS AZ OLAJMEZŐ

- 13 pont



Abel emírnek van egy négyzet alakú olajmezője.
Egyszer elhatározta, hogy az olajmező egy részét odaadja három fiának. Ezért mindegyik fiát felszólítja, hogy álljon az olajmező határára. Az ajándék olajmező a három fiú által kijelölt háromszög lesz.
Hogyan álljanak a fiúk, hogy az ajándék olajmező a legnagyobb területű legyen?
Igazoljátok állításotokat!

Matematyka bez granic

ACADEMIE DE STRASBOURG

13 marca 2001

- *Częściowe rozwiązania zadań też będą uwzględniane w punktacji*
- *Oceniana będzie również strona graficzna przedstawionych rozwiązań.*
- *Rozwiązanie każdego zadania będzie prezentowane na oddzielnej kartce.*
- *Do każdego zadania, (także do zadań, które nie zostały rozwiązane), należy oddać osobny arkusz z kodem szkoły i klasy.*

Zadanie 1
7 punktów

A ton tour

Rozwiązanie musi być napisane w jednym z czterech języków obcych i zawierać przynajmniej 30 słów.

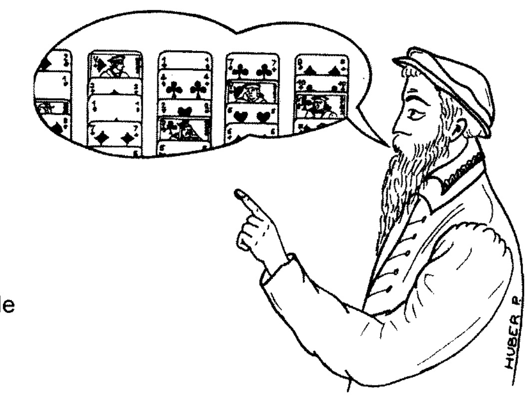
Nicolas montre à François un éventail de 25 cartes toutes différentes. Il lui demande d'en choisir une sans la révéler.

Il place les 5 premières cartes sur une ligne, puis il pose les 5 cartes sur les précédentes et ainsi de suite jusqu'à former 5 tas de 5 cartes.

François doit désigner le tas où se trouve la carte qu'il a choisie. Nicolas ramasse les 5 tas en plaçant celui que François a montré au milieu du paquet. Puis il redistribue les cartes de la même manière pour former à nouveau 5 tas de 5 cartes.

François indique à nouveau le tas où se trouve maintenant la carte choisie. Nicolas montre alors cette carte.

Expliquer ce tour.



Nicolas zeigt François einen Fächer aus 25 Karten, die alle verschieden sind. Er bittet ihn, eine Karte auszuwählen, ohne sie zu zeigen.

Nun legt er die ersten fünf Karten offen in eine Reihe. Die nächsten fünf Karten legt er darüber, und so fährt er fort, bis fünf Stapel aus je fünf Karten entstanden sind.

Nun muss François angeben, in welchem Stapel sich die Karte befindet, welche er ausgewählt hat. Nicolas sammelt die fünf Stapel ein, wobei er den von François bezeichneten Stapel in der Mitte des Pakets einordnet. Danach teilt er die Karten in gleicher Weise aus, so dass wieder fünf Stapel zu je fünf Karten entstehen.

François gibt erneut den Stapel an, in welchem sich seine Karte befindet, worauf Nicolas ihm diese Karte zeigt.

Erkläre diesen Trick.

Nicola mostra a Francesco un ventaglio di 25 carte tutte diverse e gli chiede di sceglierne una senza mostrargliela.

Dispone le prime 5 carte in riga, poi altre 5 sulle precedenti in successione e così di seguito fino ad ottenere 5 file di 5 carte ognuna.

Francesco deve indicare la fila in cui si trova la carta scelta; Nicola raccoglie ogni fila ponendo le carte di quella indicata da Francesco al centro del mazzo. Poi ridistribuisce le carte nello stesso modo per formare altre 5 file di 5 carte.

Francesco indica di nuovo la fila in cui si trova ora la carta scelta in precedenza. A questo punto Nicola è in grado di rivelare questa carta.

Spiegare il procedimento.

Nicolás le enseña a Francisco un abanico de 25 cartas, todas diferentes. Le pide que escoja una sin enseñársela.

Alinea las 5 primeras cartas de la baraja, luego coloca las 5 siguientes sobre las precedentes y así sucesivamente hasta formar 5 pilas de 5 cartas.

Francisco debe señalar la pila donde está la carta que ha escogido. Nicolás recoge las 5 pilas, colocando la que ha señalado Francisco en el medio de la baraja. Luego reparte las cartas de la misma manera para volver a formar 5 pilas de 5 cartas.

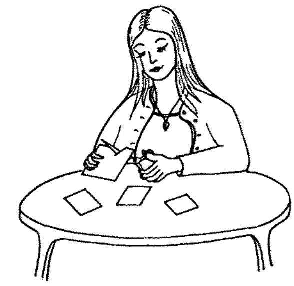
Francisco señala de nuevo la pila donde se encuentra ahora la carta escogida. Entonces, Nicolás le enseña esta carta.

Explicar este truco.

(Nicolas CHUQUET 1445 – 1500)

Zadanie 2
5 punktów

Kwadraty

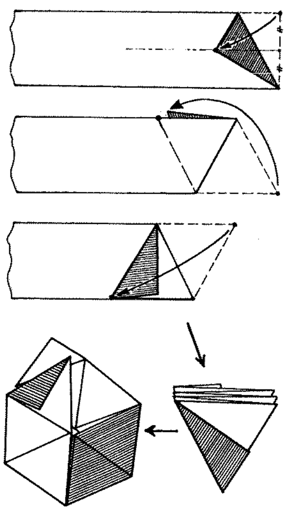


Piotr mówi do swojej córki Natalii :
– Masz kwadrat o boku długości 6cm. Podziel go na dziewięć kwadratów o całkowitych długościach boków.
Natalia wykonała jeden podział ale myśli, że można to zrobić jeszcze inaczej.

Wykonaj wszystkie takie podziały i narysuj je na karcie odpowiedzi. Dwa podziały uznajemy za różne jeżeli uzyskujemy z nich kwadraty o różnych długościach boków.

Zadanie 3
7 punktów

Hexagamia

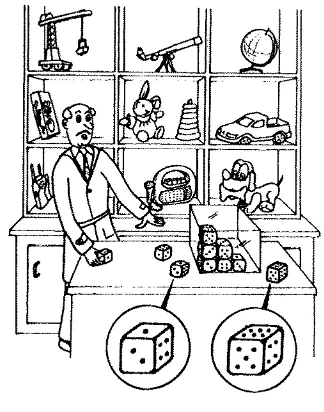


W podręczniku origami znajduje się opis składania sześciokąta foremnego. Używamy do tego prostokątnego arkusza papieru o wymiarach 3,6cm i $12\sqrt{3}$ cm. Strony tego arkusz są różnokolorowe.

Poskładaj taki sześciokąt na podstawie rysunków umieszczonych obok. Przyklej go na kartę odpowiedzi i oblicz jego pole.

Zadanie 4
5 punktów

Maksymalna ilość oczek.

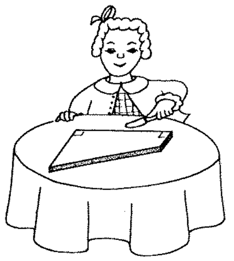


Pan Wiktor w swoim sklepie sprzedaje kości do gry. Znajdują się one w przezroczystym pudełku. Mieści się w nim dokładnie 60 kości: 5 w długości, 4 w szerokości i 3 w wysokości. Są przesortowane tak aby suma wszystkich widocznych oczek była maksymalna.

Oblicz ile wynosi ta suma i uzasadnij swoją odpowiedź.

Zadanie 5
7 punktów

Idealny kształt

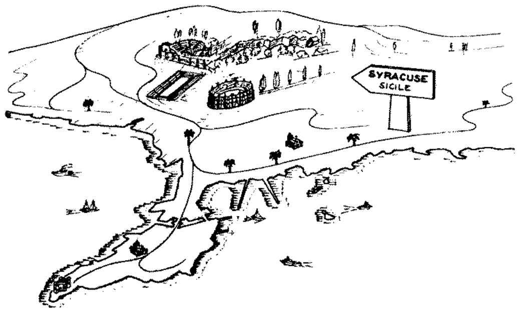


Marysia i Kasia chcą podzielić między siebie resztę ciasta. Ma ona kształt trapezu prostokątnego, którego podstawy mają długość 1dm i 3dm, a wysokość wynosi 4dm. Kasia upiera się, że oba kawałki powinny mieć taki sam kształt i wielkość. Marysia przekroiła ciasto jednym prostym cięciem i spełniła wymagania koleżanki.

Narysuj to ciasto w skali 1:5 i zaznacz na nim linię, wzdłuż której Marysia je przecięła.
Wykaż, że oba kawałki są tego samego kształtu i mają takie same pole.

Zadanie 6
5 punktów

Spacer do Syrakus



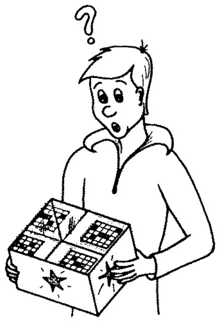
Jan jest studentem na uniwersytecie w Syracuse (USA) i zajmuje się tam ciągami liczb całkowitych. Tworzy je w następujący sposób:

- Wybiera liczbę całkowitą, która jest pierwszym wyrazem ciągu.
- Jeżeli liczba ta jest parzysta, to następny wyraz ciągu jest jej połową.
- Jeżeli wybrana liczba jest nieparzysta, to drugi wyraz tworzymy mnożąc pierwszy przez 3, a następnie dodając 1.

Odpowiednie działania powtarzamy i w ten sposób otrzymujemy kolejne wyrazy ciągu.
Pierwszy ciąg Jan tworzy począwszy od 1. Następnie bada inne ciągi, w których pierwszym wyrazem jest 2 potem 3 i tak dalej aż do 25. Robiąc to odkryje, że wszystkie 25 ciągów ma interesującą własność.

Powtórz te same badania co Jan i odgadnij co to za własność. Postaraj się wykonać przy tym jak najmniej rachunków.
(Ciekawostka : Do dziś nie ma dowodu na to, że wszystkie tak zbudowane ciągi mają tę samą własność. Może właśnie Ty to udowodnisz !)

Zadanie 7 7 punktów — *Lustereczko, lustereczko...*



W pudełku znajduje się kwadrat z liczbami oraz czarnymi polami. Na wewnętrznych ściankach pudełka umieszczone są zaczarowane lusterka. Na rysunku środkowy kwadrat to ten umieszczony w środku pudełka. Obok niego narysowane są kwadraty widoczne w lusterkach. Czarne pola kwadratu odbijają się tak jak w zwykłych lusterkach. Dwa lusterka pokazują prawidłowy obraz, jedno zwiększa liczbę o jeden, a jedno zmniejsza liczbę o jeden. Własność lusterka zmienia się w zależności od liczby.

Wpisz brakujące liczby do pustego kwadratu.

5	4	2		8
8		9	■	2
3	■	■	6	3
7	1	5	4	■
■	7	8	5	2

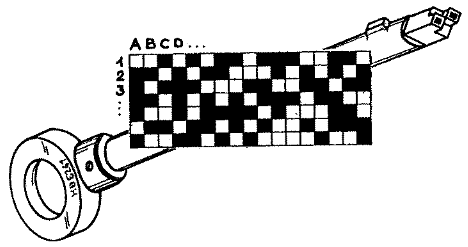
	4			5
	■		3	
4		■	■	
■	3			8
1		8		■

4	3	0	5	9
8	4	7	■	1
3	■	■	7	
9	1	6		■
■	5	8	4	

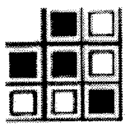
0	6	7	6	■
■	2	6	2	
5	6	■	■	4
1	■		2	7
8	3		3	5

Zadanie 8 5 punktów — *Wielka tajemnica*

Do komunikacji przez internet Alicja i Robert używają klucza złożonego czarnych i białych punktów.

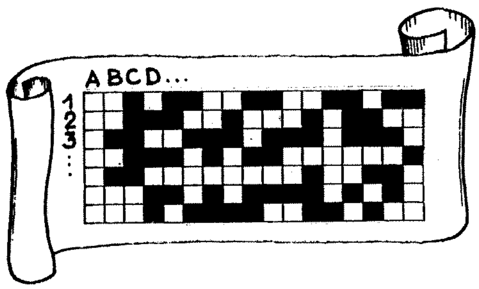


Aby zakodować lub rozkodować wiadomość klucz umieszczamy nad wiadomością.



Jeżeli klucz ma w danym miejscu taki sam kolor jak wiadomość, to w zaszyfrowanej wiadomości ten punkt jest czarny, w przeciwnym wypadku – jest biały.

Robert wysłał do Alicji następującą zakodowaną wiadomość.



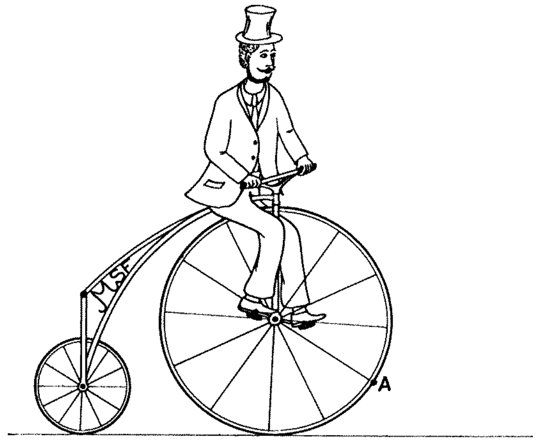
Na arkuszu odpowiedzi narysuj rozszyfrowaną wiadomość.

(Ciekawostka : Taka metoda naprawdę jest używana.)

Zadanie 9 7 punktów — *Punkt na kole*

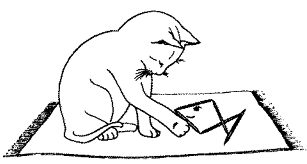
Bogdan obserwuje Arka jadącego na rowerze i wyobraża sobie drogę, po której porusza się punkt A znajdujący się na dużym kole roweru. Koło to ma średnicę równą 150cm, a punkt A na początku obserwacji ma kontakt z ziemią. Koło wykonało 1,5 obrotu bez poślizgu.

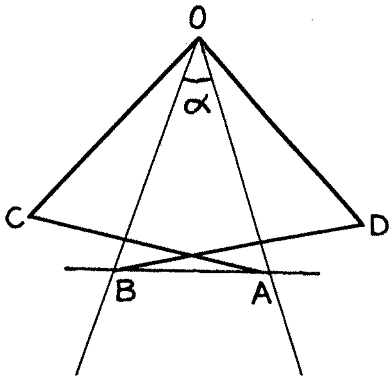
Wykonaj rysunki ilustrujące położenie punktu A i koła co $\frac{1}{8}$ obrotu. Zaznacz drogę jaką przebył punkt A.



Zadanie 10
10 punktów

Sprytny podział



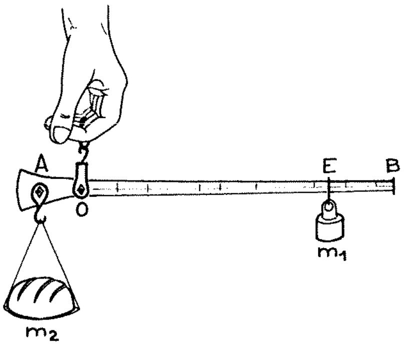


Eryk ma pewną metodę, za pomocą której potrafi podzielić kąt mniejszy od kąta o mierze 60^0 na połowy. Ma do dyspozycji 5 krótkich patyczków o równej długości. Najpierw używa tylko trzech ułożonych w odpowiedni sposób, następnie dwa z nich układa inaczej. Z tymi które zostają dochodzi do figury takiej jak na rysunku obok. Teraz jest w stanie zabrać jeden z nich i położyć tak by podzielił kąt na połowy. Jeżeli kąt ma miarę większą niż 60^0, a mniejszą niż 120^0, to poradzi sobie z tym problemem używając tylko 4 patyczków.

Objaśnij w obu tych przypadkach metodę postępowania Eryka i zilustruj ją odpowiednimi rysunkami.
(Grubość patyczków nie ma znaczenia.)

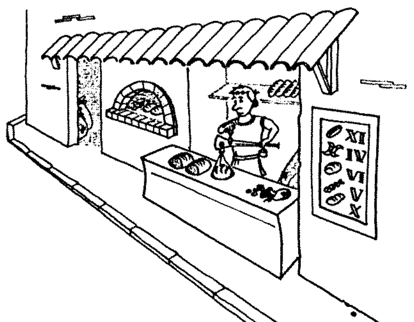
Zadanie 11
5 punktów

W równowadze



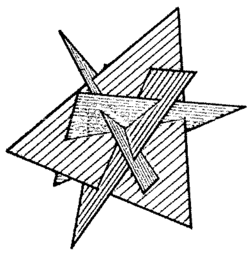
Rzymska waga ma ramię ze skalą, na którym zawieszony jest ciężarek o masie 500g. Można go przesuwać między punktami O i B. Aby zważyć np. chleb o masie m. należy zawiesić go na haczyku umieszczonym w punkcie A na ramieniu wagi. Trzymając wagę za uchwyt znajdujący się w punkcie O przesuwamy ciężarek tak, by uzyskać równowagę (pozycja E). W takiej sytuacji prawdziwa jest równość: $|OA| * m = |OE| * 500g$ .Wyobraź sobie wagę o ramieniu $|AB| = 24cm$. Taka waga jest w równowadze gdy ważony przedmiot ma masę 2kg, a $|AE| = 20cm$.

Oblicz pozycję punktu O i narysuj na ramieniu wagi taką skalę, żeby przesunięcie ciężarka o jedną jednostkę i jednocześnie zmiana masy ważonego przedmiotu o 250g nie zachwiało równowagi.



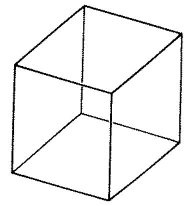
Zadanie 12
7 punktów

Dwunastoszpic



Narysowany obok dwunastoszpic składa się czterech równobocznych trójkątów o takich samych wymiarach. Trójkąty te przecinają się parami. Aby utworzyć taką figurę należy połączyć odpowiednie środki krawędzi sześcianu.

Narysuj w sześcianie trójkąty tworzące dwunastoszpic. Każdy z nich zaznacz innym kolorem i przy pomocy linii ciągłych.



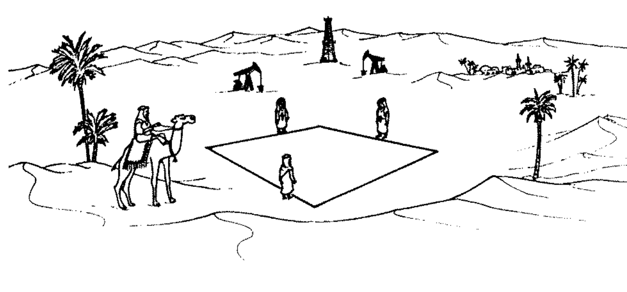
Zadanie 13
10 punktów

Maksymalny podarunek

Emir Abel posiada kwadratowe pole naftowe. Pewnego dnia powiedział do swoich trzech synów :

– Zdecydowałem, że dam wam część mojego pola naftowego. Stańcie na granicach tego pola. Daję wam część, którą wyznacza trójkąt utworzony między wami.

Wskaż na odpowiednim rysunku miejsca, w których powinni stanąć synowie aby dostać największe pole. Uzasadnij swoją odpowiedź.



MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Année scolaire 2001-2002

13^{e} édition

Compétition interclasses de $3^{ème}$ et de 2^{nde}

Mathématiques sans frontières

organisée par l'Inspection Pédagogique Régionale et l'IREM de Strasbourg

ÉPREUVE D'ENTRAÎNEMENT DÉCEMBRE 2001

- Des explications ou des justifications sont demandées pour les exercices 2, 5, 9, 10,11, 12 et 13.
- Toute solution même partielle sera examinée.
- Le soin sera pris en compte.
- Ne rendre qu'une feuille-réponse par exercice.

Exercice 1
7 points

Mots de tête

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien (en un minimum de 30 mots).

L'umorista del Quebec Pierre Légaré gioca volentieri con le parole e si diverte a presentarci dei paradossi sotto forma di brevi affermazioni.

Eccone due esempi :

1) "Di fatto, se il servizio meteo si sbagliasse ogni volta, in questo caso ci si potrebbe fidare."
2) "Secondo le statistiche, una persona su 5 non è equilibrata. Se attorno a te ci sono 4 persone che ti sembrano equilibrate, non è una buona situazione."

Analizza e critica le due affermazioni dal punto di vista logico e matematico

El humorista quebequés Pierre Légaré practica con gusto el arte de los juegos de palabras y le alegra presentamos paradojas en forma de frasecitas. He aquí dos ejemplos de ellas :

1) "De hecho, si los meteorólogos se equivo caran siempre, uno podría fiarse de ellos."

2) "Según las estadísticas, 1 persona de cada 5 está desequilibrada. Si en torno tuyo están 4 personas y que te parecen normales, ¡ay de ti !"

Analiza y critica estas dos frases desde el punto de vista lógico y mathemático.

Der aus Quebec stammende Humorist Pierre Légaré spielt gerne mit Worten und liebt es, seinem Publikum Widersinnigkeiten in Form kurzer Sätze darzubieten. Hier zwei Beispiele:

1) „Wenn sich der Wetterbericht tatsächlich immer irren würde, dann könnte man sich auf ihn verlassen."
2) „Statistisch gesehen, ist jeder Fünfte ein Psychopath. Gibt es vier Personen um dich herum, welche dir normal erscheinen, dann ist das nicht gut!"

Untersuche und kritisiere diese beiden Sätze unter logischem und mathematischem Gesichtspunkt.

Quebec humorist Pierre Légaré enjoys playing with words and presenting paradoxes by means of short sentences. Here are two examples :

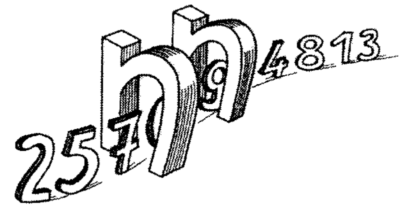
1) "Actually, if the weather forecast was always wrong, on this point you could rely on it."
2) "According to statistics, one person out of five is unbalanced. If there are four people around you and if they look balanced to you, then it's not good."

Analyse and criticise those two sentences from a logical and mathematical point of view.

D'après „Mots de tête" de Pierre Légaré.

Exercice 2
5 points

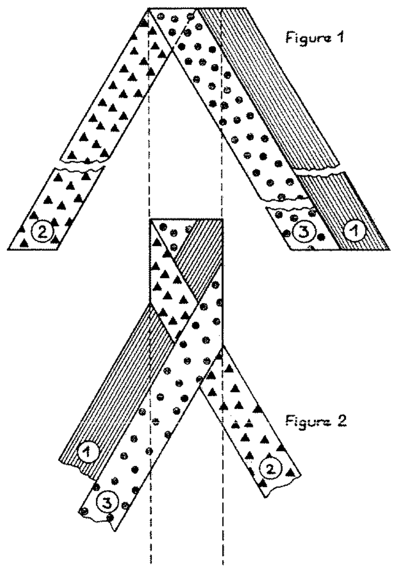
Affaire de chiffres



Trouver un entier de cinq chiffres tel qu'en réunissant ses chiffres et ceux de son double on obtienne exactement les dix chiffres de 0 à 9. ***Justifier.***

Exercice 3
7 points

Des tresses



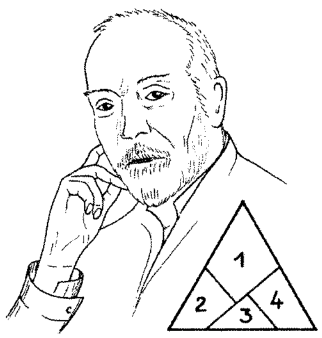
La figure 1 montre 3 bandes de papier superposables de couleurs différentes.
Chacune est un parallélogramme ayant deux côtés de 2 cm et deux angles de 60°.
La bande n° 3 recouvre un coin de la bande n° 2.

En pliant successivement ces bandes, chacune à son tour, on obtient une tresse ; la figure 2 en montre le début.

Réaliser sur ce modèle une tresse rectangulaire tricolore de largeur 3 cm et de longueur supérieure à 15 cm, telle que, sur la face visible du rectangle, la somme des aires soit la même pour chaque couleur.

Exercice 4
5 points

Métamorphose



Le Mathématicien anglais H.E. Dudeney (1857 - 1930) a inventé un découpage du triangle équilatéral en un puzzle de 4 pièces qui permet de le transformer en un carré (voir figure).

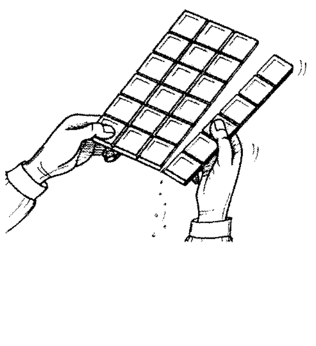
Voici un programme de construction de ce découpage :

Construire un triangle équilatéral ABC de côté 8 cm ; marquer I et J milieux respectifs des côtés [AB] et [AC]. Sur la demi-droite [JA), placer le point R tel que JR = JB.
A l'extérieur du triangle ABC, construire le demi-cercle de diamètre [CR].
La droite (BJ) coupe ce demi-cercle en H.
Sur le côté [BC], placer les points K et L tels que JK = JH et KL = CJ.
Tracer enfin le segment [KJ] ; sur ce segment, placer les points M et N tels que (KJ) soit perpendiculaire à [IM] et [LN].

Construire cette figure sur la feuille-réponse.
Refaire la construction sur une autre feuille ; découper les 4 pièces du puzzle, puis les assembler de façon à obtenir un carré que l'on collera sur la feuille-réponse.

Exercice 5
7 points

Qui est chocolat ?

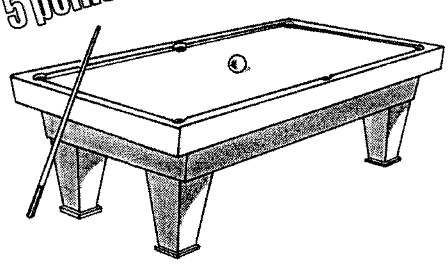


Jacques et Germain se font des politesses en mangeant une tablette de chocolat : tous deux sont d'authentiques gourmands mais aucun d'eux ne voudrait être l'égoïste qui prendra le dernier morceau.
La tablette initiale compte 24 carreaux. Chacun, à tour de rôle, casse le chocolat en 2 morceaux rectangulaires suivant une ligne horizontale ou verticale qui sépare les carreaux. Il mange l'un des morceaux et donne l'autre à son compère.

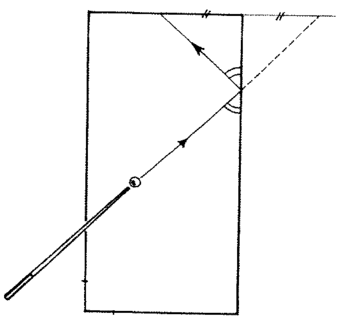
Jacques commence et s'arrange pour que Germain soit obligé de prendre le dernier carreau. Décrire sa stratégie.

Exercice 6 — 5 points

Jeu réfléchi



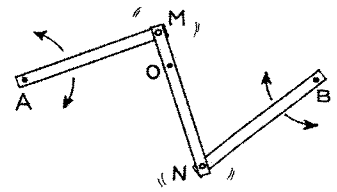
Le croquis ci-contre explique comment une boule de billard rebondit sur la bande latérale de la surface de jeu si elle est propulsée sans effet.
La surface de jeu est un rectangle de côtés 1,4 m et 2,8 m. On place une boule en son centre. On veut la propulser de sorte qu'elle rebondisse sur trois bandes consécutives avant de disparaître dans un des quatre trous situés aux coins de la surface.



Tracer sur la feuille-réponse un plan du billard à l'échelle 1/40. Construire une trajectoire de la boule en laissant tous

Exercice 7 — 7 points

Courbographe



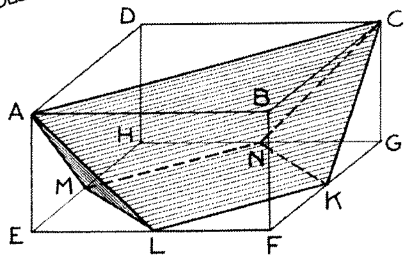
La figure ci-contre représente un montage de barres articulées fixé sur une plaque.
Les points de fixation A et B sont distants de 16 cm.
Les barres AM et BN peuvent pivoter respectivement autour de A et B. Elles sont reliées par la barre MN. Les points M et N sont des articulations qui peuvent se déplacer sur la plaque.
Les 3 barres ont des longueurs égales : AM = BN = MN = 8 cm.

Le point O est situé sur la barre MN tel que MO = 2 cm et ON= 6 cm.
Lorsqu'on déplace cette barre dans toutes les positions possibles en faisant jouer les articulations, le point O décrit une courbe étonnante.

Tracer cette courbe sur la feuille-réponse.

Exercice 8 — 5 points

C Kdo



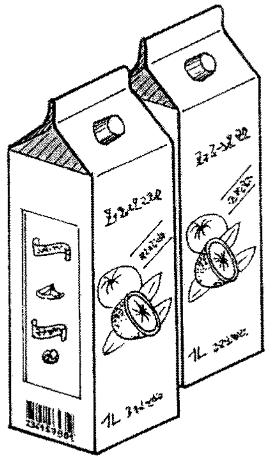
Le solide ABCDEFGH ci-contre est un pavé droit tel que AE = 3 cm, ABCD est un carré de 6 cm de côté.
M, K, L et N sont des milieux d'arêtes.

Construire deux exemplaires du solide ACKNML.
Assembler ces deux solides de manière à former une pyramide pour l'offrir à votre professeur.

Exercice 9 — 7 points

Clé-barres

3 116430 058089



Le code EAN $_{13}$ (European Article Number) est un nombre à 12 chiffres suivi d'un chiffre de contrôle. Il se décompose comme dans l'exemple :

$\underbrace{3}_{\text{Pays}}\ \underbrace{116430}_{\text{entreprise}}\ \underbrace{05808}_{\text{produit}}\ 9$ ← chiffre de contrôle

Pour cet exemple, le chiffre de contrôle se calcule ainsi à partir des 12 premiers chiffres :

$3\times\mathbf{1}+1\times\mathbf{3}+1\times\mathbf{1}+6\times\mathbf{3}+4\times\mathbf{1}+3\times\mathbf{3}+0\times\mathbf{1}+0\times\mathbf{3}+5\times\mathbf{1}+8\times\mathbf{3}+0\times\mathbf{1}+8\times\mathbf{3} = 91$

Les chiffres sont multipliés alternativement par 1 et par 3.

La différence entre 91 et la dizaine suivante est 100–91=9, qui est alors le chiffre de contrôle (si la somme est un multiple de 10 alors le chiffre de contrôle est 0).

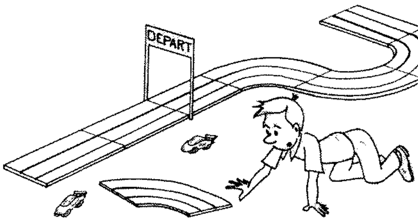
Celui-ci permet de déceler certaines erreurs de lecture. Cependant beaucoup de codes à 12 chiffres ont le même chiffre de contrôle. En particulier, il se peut qu'en permutant 2 chiffres voisins d'un code donné, on obtienne un autre code ayant le même chiffre de contrôle.

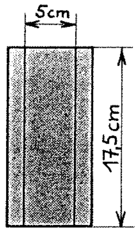
Trouver toutes les paires de 2 chiffres voisins dont la permutation donne le même chiffre de contrôle.

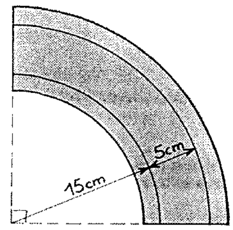
Exercice 10 — 10 points

Court-circuit

Julien a un circuit pour deux voitures électriques : chacune circule sur une piste et les deux pistes sont distantes de 5 cm.







Pour construire un circuit, il dispose de 10 éléments droits de longueur 17,5 cm et de 10 éléments ayant la forme d'un quart de cercle dont les dimensions sont indiquées sur la figure ; le circuit reste en contact avec le sol, ne se recoupe pas et se referme.
Julien sait que la voiture qui est sur la piste extérieure parcourt en un tour une distance plus grande que celle qui est sur la piste intérieure. Il se demande si la différence entre les deux chemins varie suivant le circuit construit.

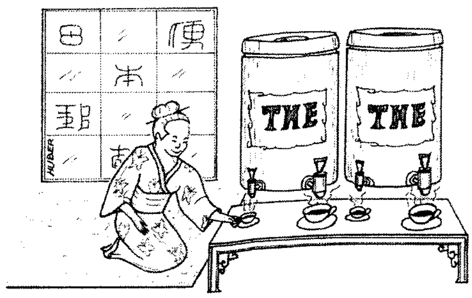
Tracer à l'échelle 1/5, sur du papier quadrillé au demi-centimètre, deux circuits : le premier sera le plus court possible et le second le plus long possible. Pour chacun d'eux, calculer la différence de longueur entre les deux pistes.

Est-il possible de construire un circuit pour lequel cette différence sera plus grande ? Expliquer.

Spécial seconde

Exercice 11 — 5 points

Le temps s'écoule



Deux récipients identiques sont pleins.
Chacun est muni de deux robinets : un gros et un petit.
Si on ouvre seulement un gros robinet, il vide le récipient en 30 minutes.
Si on ouvre seulement un petit robinet, il vide le récipient en 1 heure.
Les récipients ne comportent ni graduation ni repère.

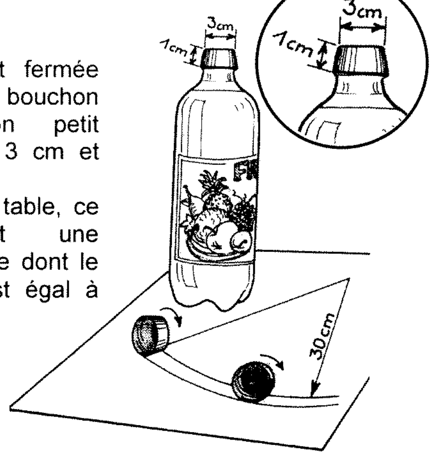
Comment faire pour chronométrer 40 minutes uniquement à l'aide de ces récipients ?
Donner deux solutions.

Exercice 12 — 7 points

Tour-bouchon

Une bouteille est fermée par un bouchon tronconique. Son petit diamètre mesure 3 cm et son côté 1 cm.
En roulant sur la table, ce bouchon décrit une couronne circulaire dont le rayon intérieur est égal à 30 cm.

Calculer le grand diamètre du bouchon.

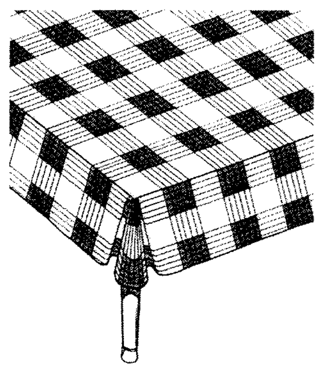


Exercice 13 — 10 points

Table de carrés

La nappe ci-contre est formée de carreaux blancs, noirs et rayés. Sur cette nappe, François observe un carré dont les 4 carreaux de coin sont blancs : il y a donc un nombre impair de carreaux sur chaque côté de ce carré.
François sait que tout entier impair peut s'écrire $2n+1$, où n est un entier.

Exprimer en fonction de n le nombre de carreaux de chaque sorte contenus dans le carré de côté 2n+1 que François observe.



Corrigé de l'épreuve d'entraînement de décembre 2001

Exercice 1 : Mots de têtes

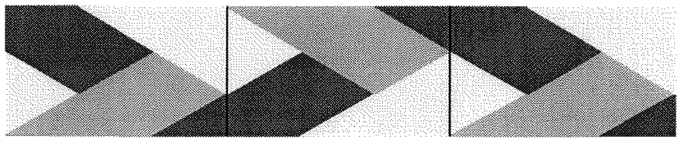
La 1ère affirmation de Pierre Légaré est vraie : la négation des prévisions données par la météo sera vraie et donc fiable. On connaît donc, avec certitude, le temps qu'il ne fera pas.

Pour la 2ème proposition, sur un grand nombre de personnes, la proportion est presque juste mais elle ne l'est pas forcément sur un aussi petit échantillon.

Exercice 2 : Affaire de chiffres

Voici quelques solutions : 13 485 - 26 970 ; 14 853 - 29 706 ; 26 709 - 53 418 ; 32 709 - 65 418 ; 34 851 - 69 702 ; 48 513 - 97 026 et 48 531 - 97 062.

Exercice 3 : Des tresses

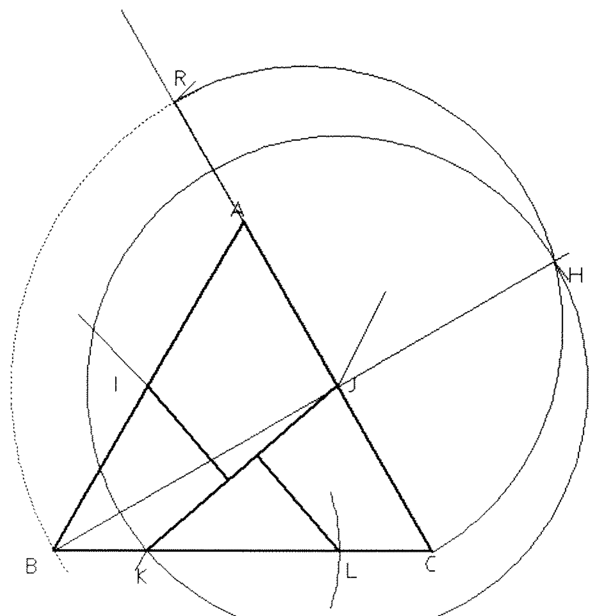


On compte pour chaque zone le nombre de triangles (ou demi-triangles) équilatéraux de côté 2 cm qu'elle contient.

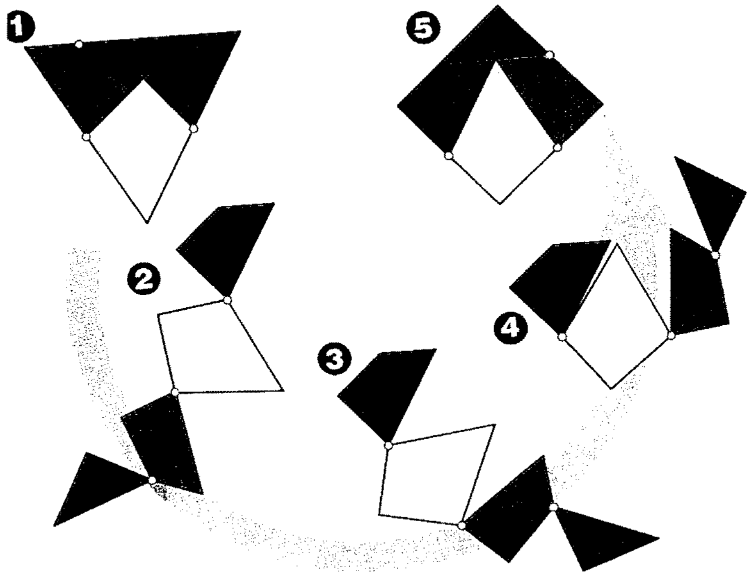
Quand la tresse a une longueur égale à $3 \times$ la hauteur **d'un tel** triangle, chaque couleur occupe une surface équivalente à 3 triangles (sur chaque face de la tresse).

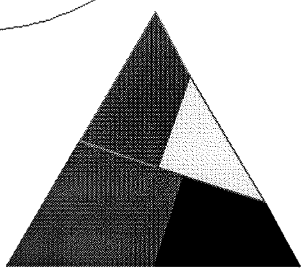
On continue la tresse jusqu'à atteindre une longeur triple de celle-ci car $9\sqrt{3} \approx 15{,}59 > 15$ cm.

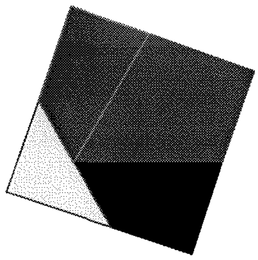
Exercice 4 : Métamorphose



Remarque :
On peut en faire un puzzle articulé. (voir ci-dessous).





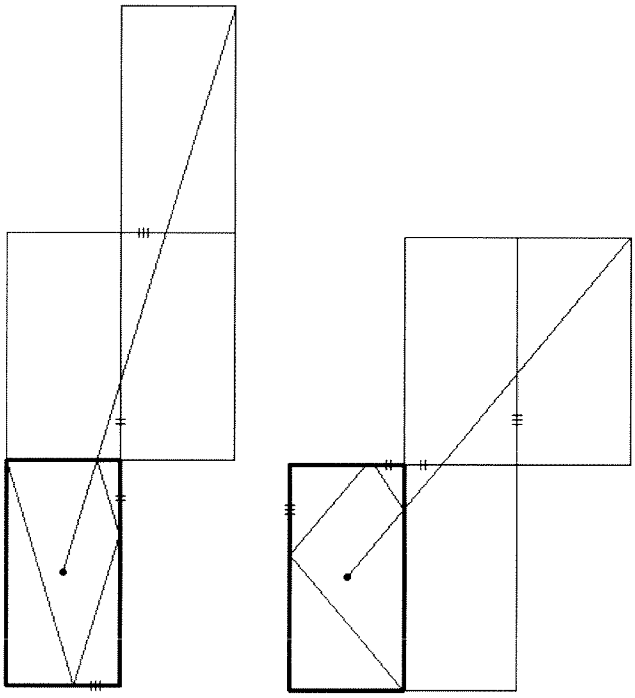


Exercice 5 : Qui est chocolat ?

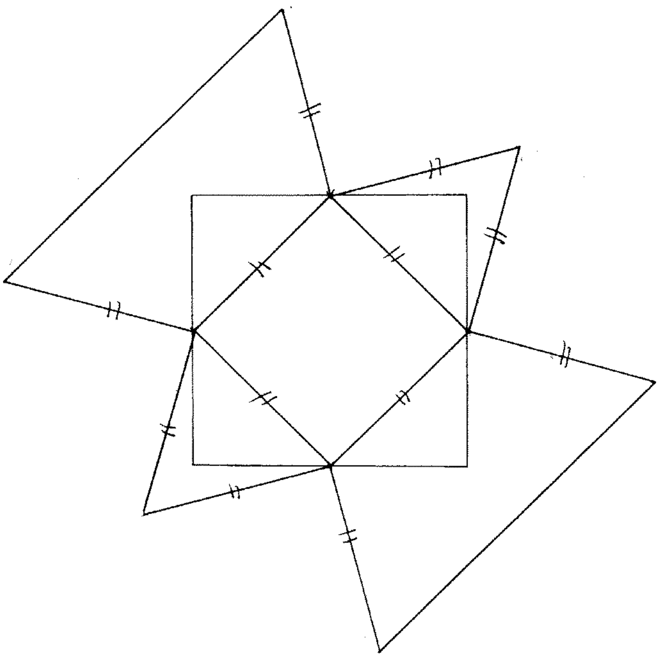
La stratégie de Jacques est la « stratégie du carré » : à chaque fois il laisse à Germain un morceau carré. Pour commencer, il lui laisse un carré 4×4 puis, selon le cas, un carré 3×3, 2×2 ou 1×1 (si la gourmandise l'emporte chez Germain...). Dans tous les cas le dernier carreau échoit à Germain.

Exercice 6 : Jeu réfléchi

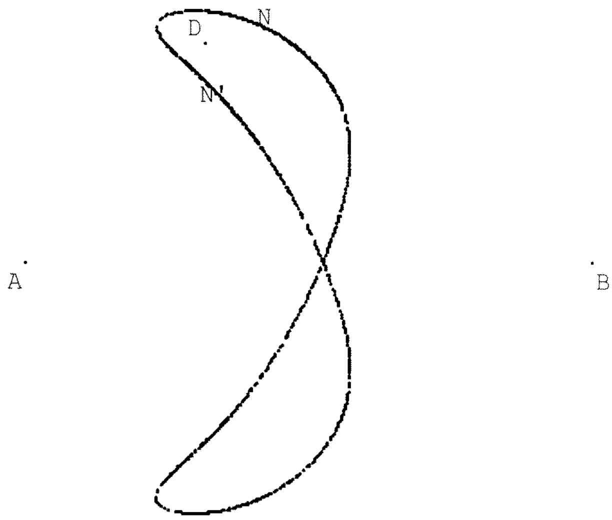
C'est un jeu de réflexions: on peut procéder par composition de symétries.
Voici deux solutions...les autres s'obtiennent par symétries à partir de celles-ci.

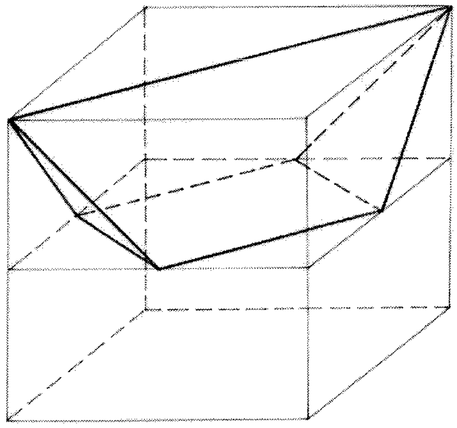


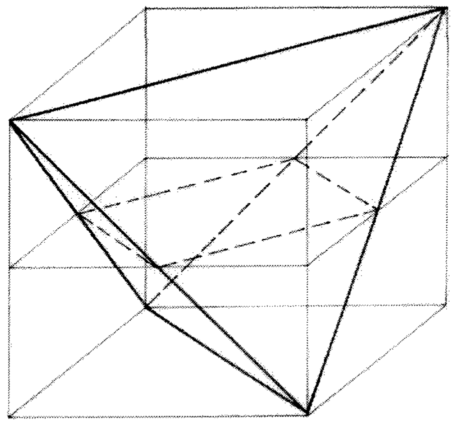
Exercice 8 : C Kdo



Exercice 7 : Courbographe







Exercice 9 : Clés-barres

2 chiffres voisins notés *a* et *b* donnent le même chiffre de contrôle lorsqu'ils sont permutés. Cela signifie que : $a \times 1 + b \times 3 = a \times 3 + b \times 1 + 10k$ avec *k* entier relatif.
Soit plus simplement $2b = 2a + 10k$ c'est à dire $\boldsymbol{b = a + 5k}$.

- $k = 0$: correspond au cas trivial $a = b$.
- $k = 1$ ou $k = -1$ donnent respectivement $b = a + 5$ ou $a = b + 5$.
- les autres cas tels que $k = 2$ sont impossibles car *a* et *b* sont des chiffres.

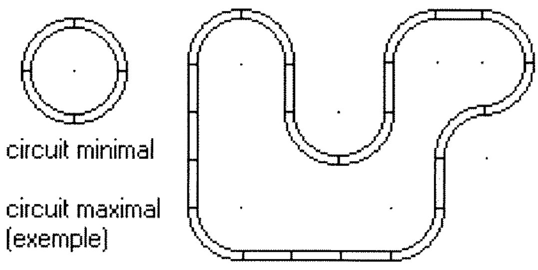
Les paires cherchées sont donc : **0 et 5 ; 1 et 6 ; 2 et 7 ; 3 et 8 ; 4 et 9**
ainsi que les couples **0 et 0 ; 1 et 1 ; 2 et 2 ; 3 et 3 ; 4 et 4 ; 5 et 5 ; 6 et 6 ; 7 et 7 ; 8 et 8 ; 9 et 9**.

Exercice 10 : Court-circuit

Circuit minimal : différence : $40\pi - 30\pi =$ **10π** cm.

Circuit maximal : différence : $(70\pi + 22{,}5\pi + 175) - (52{,}5\pi + 30\pi + 175) =$ **10π** cm.

Soit un autre circuit comportant, dans le sens de parcours, m courbes à droite, n courbes à gauche et p rails droits. On appellera Nord l'orientation de la voiture au départ.
Le circuit ne peut se refermer que si **m = n + 4 ou n = m + 4** car la voiture doit retrouver l'orientation Nord après avoir fait un tour complet. Les rails droits n'induisent aucune différence sur les longueurs des deux pistes. Les courbes à droite et à gauche peuvent se compenser deux à deux.
Il reste une différence de longueur de : **$4 \times (20\pi/2 - 15\pi/2)$ = 10π** cm **indépendamment du circuit**.



(Barème possible: 2 + 4 + 4)

Exercice 11 : Le temps s'écoule

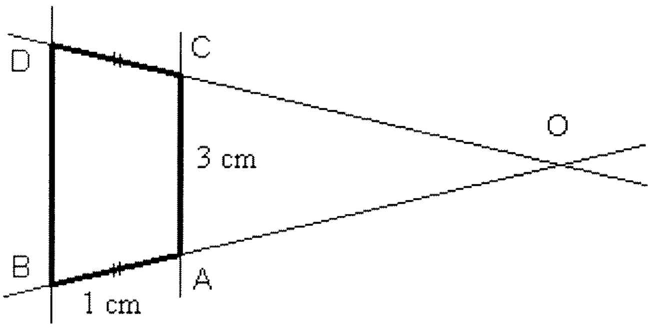
Si on ouvre simultanément les 2 robinets d'un récipient alors le débit est : 1/30+1/60=1/20 en récipient par minute ; les 2 robinets mettent donc 20 min pour vider un récipient.

1° solution :
- on ouvre en même temps les 2 robinets d'un récipient,
- quand il est vide on ouvre les 2 robinets de l'autre,
- ce 2° récipient est vide 40 min après le début de l'expérience.

2° solution :
- on ouvre simultanément le grand robinet du récipient 1 et le petit de l'autre,
- au bout de 30 min le récipient 1 est vide et le récipient 2 est encore à moitié plein ; on ouvre alors le grand robinet de ce récipient : les 2 robinets mettent 10 min pour le vider. Et 30+10=40.

Exercice 12 : Tour-bouchon

1ère solution : (avec le théorème de Thalès)



Soit [AB] le segment suivant lequel le bouchon est en contact avec la table ; le plan perpendiculaire à la table et contenant (AB) coupe le bouchon suivant le trapèze ABDC. O désigne le centre de la couronne. D'après le théorème de Thalès on a : $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$ soit $\frac{30}{31} = \frac{3}{BD}$ et BD = 3,1 cm.

2ème solution : (avec les périmètres)

La circonférence du « haut » du bouchon est : 3π cm. Ce « haut » du bouchon décrit une courbe circulaire de longueur 60π cm. Le bouchon fait donc $\frac{60\pi}{3\pi}$ = 20 tours complets.

Le « bas » du bouchon fait aussi 20 tours sur un cercle de 31 cm de rayon, donc de longueur 62π cm. Donc la circonférence du « bas » du bouchon est $\frac{62\pi}{20} = 3{,}1\pi$ cm. Le grand diamètre du bouchon est donc 3,1cm.

Exercice 13 : Table de carrés

On peut compter les carreaux par colonnes :
Il y a n colonnes présentant une alternance de noirs et de rayés.
Chacune compte n noirs et n + 1 rayés ; soit n^2 carreaux noirs n x (n + 1) rayés dans ces colonnes-ci.
Il y a n + 1 colonnes présentant une alternance de blancs et de rayés.
Chacune compte n + 1 blancs et n rayés ; soit $(n + 1)^2$ carreaux blancs et (n + 1) x n rayés dans celles-là.
En tout, on compte donc: **$n^2 + 2n + 1$ blancs, n^2 noirs et $2n^2 + 2n$ rayés**.
Total pour vérification: $n^2 + 2n + 1 + n^2 + 2n^2 + 2n = 4n^2 + 4n + 1 =$ **$(2n + 1)^2$**.

Mathematik ohne Grenzen

ein internationaler Wettbewerb für Klassenstufe 10 und 11

Probewettbewerb 2001/2002

Für jede Aufgabe, auch für die nicht bearbeiteten, ist ein gesondertes Lösungsblatt abzugeben. Bei den Aufgaben 2, 5, 9, 10, 11, 12 und 13 muss die Lösung begründet oder erläutert werden. Die Sorgfalt der Ausführung wird mitbewertet. Auch Teillösungen werden berücksichtigt.

Aufgabe 1
7 Punkte

Mots de tête

(nach dem gleichnamigen Buch von Pierrre Légaré)

Die Lösung soll in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter umfassen.

L'humoriste québécois Pierre Légaré pratique volontiers l'art des jeux de mots et s'amuse à nous présenter des paradoxes sous forme de petites phrases. En voici deux exemples :

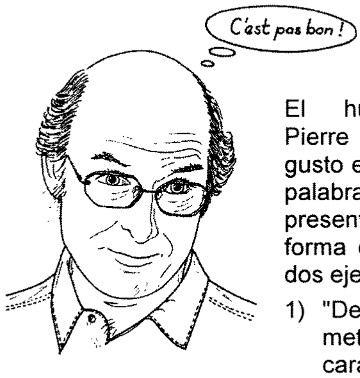
1) « En fait, si la météo se trompait tout le temps, là on pourrait se fier dessus. »
2) « Selon les statistiques, il y a 1 personne sur 5 qui est déséquilibrée. S'il y a 4 personnes autour de toi et qu'elles te semblent normales, c'est pas bon. »

Analyser et critiquer ces deux phrases du point de vue logique et mathématique.

Quebec humorist Pierre Légaré enjoys playing with words and presenting paradoxes by means of short sentences. Here are two examples :

1) "Actually, if the weather forecast was always wrong, on this point you could rely on it."
2) "According to statistics, one person out of five is unbalanced. If there are four people around you and if they look balanced to you, then it's not good."

Analyse and criticise those two sentences from a logical and mathematical point of view.



El humorista quebequés Pierre Légaré practica con gusto el arte de los juegos de palabras y le alegra presentamos paradojas en forma de frasecitas. He aquí dos ejemplos de ellas :

1) "De hecho, si los meteorólogos se equivo caran siempre, uno podría fiarse de ellos."
2) "Según las estadísticas, 1 persona de cada 5 está desequilibrada. Si en torno tuyo están 4 personas y que te parecen normales, jay de ti !"

Analiza y critica estas dos frases desde el punto de vista lógico y mathemático.

L'umorista del Quebec Pierre Légaré gioca volentieri con le parole e si diverte a presentarci dei paradossi sotto forma di brevi affermazioni.

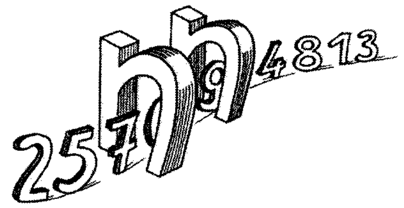
Eccone due esempi :

1) "Di fatto, se il servizio meteo si sbagliasse ogni volta, in questo caso ci si potrebbe fidare."
2) "Secondo le statistiche, una persona su 5 non è equilibrata. Se attorno a te ci sono 4 persone che ti sembrano equilibrate, non è una buona situazione."

Analizza e critica le due affermazioni dal punto di vista logico e matematico

Aufgabe 2
5 Punkte

Zahl und Ziffer



Gesucht ist eine fünfstellige natürliche Zahl. Diese Zahl und ihr Doppeltes sollen zusammen genau die Ziffern von 0 bis 9 aufweisen.

Gib eine solche Zahl an und bestätige die verlangte Eigenschaft.

Aufgabe 3
7 Punkte

Farbzopf

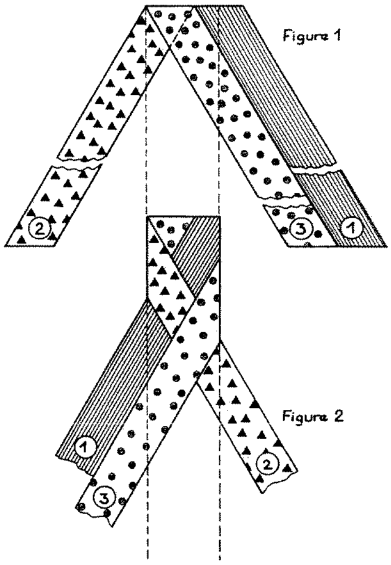
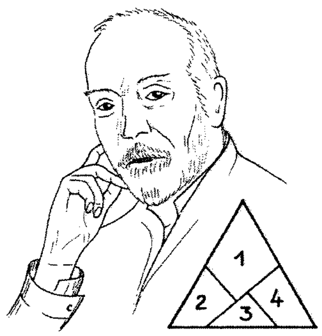


Bild 1 zeigt drei deckungsgleiche, verschiedenfarbige Papierstreifen. Jeder Streifen hat die Form eines Parallelogramms mit zwei Seiten von 2 cm Länge und zwei Winkeln von 60°. Der Streifen Nr.3 überdeckt eine Ecke des Streifens Nr.2. Wenn man diese Streifen abwechselnd übereinander faltet, erhält man einen Zopf. Bild 2 zeigt den Anfang.

Falte auf diese Weise einen 3 cm breiten, rechteckigen Zopf, der mindestens 15 cm lang ist, und klebe ihn auf das Lösungsblatt. Der Inhalt aller sichtbaren Flächen soll für jede Farbe der gleiche sein.

Aufgabe 4
5 Punkte

Metamorphose



Die abgebildete Zerlegung eines gleichseitigen Dreiecks stammt von dem englischen Mathematiker H.E. Dudeney (1857-1930). Aus den vier Teilstücken dieses Puzzles lässt sich lückenlos ein Quadrat zusammensetzen.

Hier die Beschreibung zur Herstellung des Puzzles:

Konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit 8 cm Seitenlänge. Kennzeichne die Seitenmitten von AB und AC mit I beziehungsweise J.

Lege auf der Halbgeraden [JA) den Punkt R so fest, dass $\overline{JR} = \overline{JB}$ gilt.

Konstruiere nun den Halbkreis mit dem Durchmesser CR, welcher außerhalb des Dreiecks ABC liegt. Er schneidet die Gerade (BJ) im Punkt H.

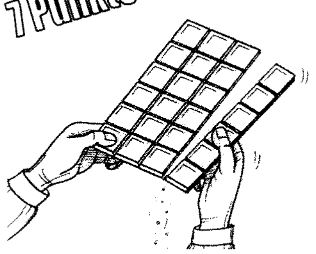
Die Punkte K und L liegen auf der Seite BC wobei $\overline{JK} = \overline{JH}$ und $\overline{KL} = \overline{CJ}$ gilt.

Lege schließlich auf der Strecke KJ die Punkte M und N so fest, dass KJ zu IM und zu LN orthogonal ist.

Konstruiere diese Figur auf das Lösungsblatt. Wiederhole die Konstruktion auf einem zweiten Blatt und schneide die vier Puzzleteile aus. Füge sie zu einem Quadrat zusammen und klebe dieses auf das Lösungsblatt.

Aufgabe 5
7 Punkte

Anstandsrest



Jacques und Germain wollen zusammen eine Tafel Schokolade vertilgen. Beide sind gleich große Naschkatzen, aber keiner will egoistisch sein und das letzte Stückchen nehmen.

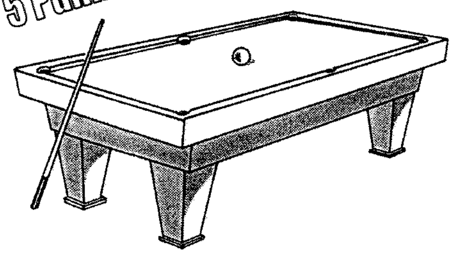
Die ganze Tafel besteht aus 24 Stücken. Sie beschließen, die Tafel abwechselnd in zwei rechteckige Teile zu zerbrechen, längs der vertikalen oder der horizontalen Linien, welche die Stücke trennen. Der eine Teil wird aufgegessen, der andere an den Freund weitergegeben.

Jacques beginnt zu teilen und erreicht, dass Germain schließlich das letzte Stück nehmen muss.

Beschreibe, nach welcher Strategie Jacques vorgegangen ist?

Aufgabe 6
5 Punkte

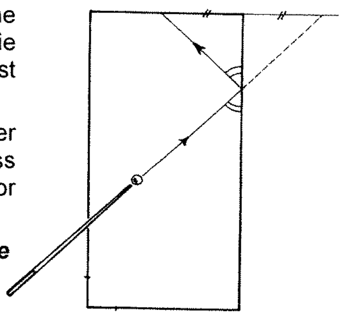
Billard



Die rechte Abbildung zeigt von oben, wie eine Billardkugel an der Bande abprallt, wenn sie ohne Effet gestoßen wurde. Die Spielfläche ist rechteckig und misst 1,40 m auf 2,80 m.

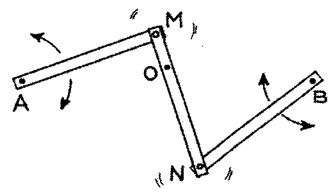
Man legt eine Kugel in das Zentrum der Spielfläche. Sie soll so gespielt werden, dass sie nacheinander an drei Banden stößt, bevor sie in einem der vier Ecklöcher verschwindet.

Zeichne auf das Antwortblatt die Spielfläche im Maßstab 1:40. Konstruiere die Bahn der Kugel und lasse alle Hilfslinien stehen.



Aufgabe 7
7 Punkte

Gelenkig



Die Abbildung zeigt eine Anordnung von Gelenkstäben, welche auf einer Platte montiert sind. Die Befestigungspunkte A und B haben einen Abstand von 16 cm. Die Stäbe AM und BN sind in A und B drehbar gelagert und durch den mittleren Stab verbunden.

Die Punkte M und N sind Gelenke, welche sich über die Platte bewegen können. Es gilt $\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{MN} = 8\text{cm}$.

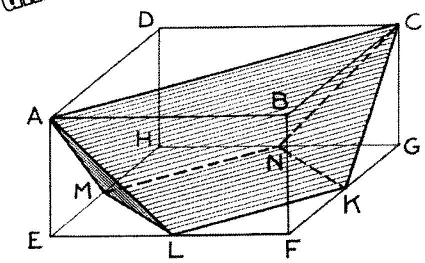
Der Punkt O befindet sich auf dem Stab MN. Er ist 2 cm von M und 6 cm von N entfernt.

Verschiebt man diesen Stab in alle möglichen Positionen, so beschreibt der Punkt O eine überraschende Kurve.

Zeichne diese Kurve auf das Lösungsblatt.

Aufgabe 8
5 Punkte

3D-Puzzle



Bei einem Quader mit den Ecken ABCDEFGH ist die Kante AE 3cm lang. ABCD ist ein Quadrat mit der Seitenlänge 6 cm, M, K, L, N sind Seitenmitten.

Stelle zwei Körper ACKNML her und setze sie so zusammen, dass eine Pyramide entsteht. Schenke sie deiner Lehrerin oder deinem Lehrer.

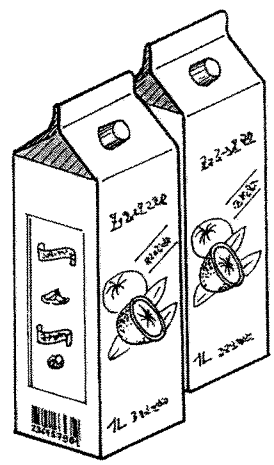
Aufgabe 9
7 Punkte

EAN-Code

Der EAN-Code (europäische Artikelnummer) besteht aus zwölf Ziffern und einer Kontrollziffer.

Das nebenstehende Beispiel zeigt, wie der Code aufgebaut ist:

3 116430 058089



Von links nach rechts kennzeichnen die beiden ersten Ziffern das Herstellerland. Dann folgen fünf Kennziffern für den Hersteller und schließlich 5 Ziffern zur Kennzeichnung des Produkts. Die letzte Ziffer, hier die 9, ist die Kontrollziffer.

Zur Berechnung der Kontrollziffer multipliziert man die ersten 12 Ziffern, von links beginnend, abwechselnd mit 1 und 3 und ergänzt anschließend die Summe der Produkte zur nächsthöheren Zehnerzahl.

Bei unserem Beispiel erhält man:

$3\cdot\mathbf{1}+1\cdot\mathbf{3}+1\cdot\mathbf{1}+6\cdot\mathbf{3}+4\cdot\mathbf{1}+3\cdot\mathbf{3}+0\cdot\mathbf{1}+0\cdot\mathbf{3}+5\cdot\mathbf{1}+8\cdot\mathbf{3}+0\cdot\mathbf{1}+8\cdot\mathbf{3}=91$.

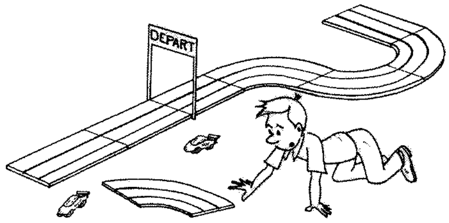
Die Differenz zur nächsthöheren Zehnerzahl ist **9**.

Die Kontrollziffer soll helfen, Eingabefehler zu entdecken. Dennoch gibt es viele EAN-Codes mit derselben Kontrollziffer. So ist es zum Beispiel möglich, dass bei manchen Codes zwei benachbarte Ziffern vertauscht werden und dennoch die gleiche Kontrollziffer erzeugt wird.

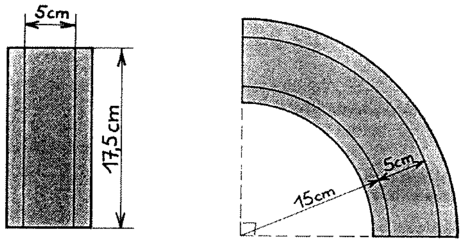
Finde alle Ziffernpaare, bei denen sich trotz Vertauschung der beiden Ziffern dieselbe Kontrollziffer ergibt.

Aufgabe 10
10 Punkte

Formel 1



Harry hat eine Rennbahn für zwei elektrische Autos. Jedes Auto hat eine eigene Spur. Die beiden Spuren sind 5 cm voneinander entfernt.



Um eine Rennstrecke aufzubauen, stehen ihm zehn 17,5 cm lange gerade Strecken und zehn 90°-Kurven mit einem inneren Bahnradius von 15 cm zur Verfügung.

Die Rennstrecke soll immer am Boden verlaufen, sich nicht überkreuzen und geschlossen sein.

Harry weiß, dass das Auto, welches auf der Außenspur fährt, im Vergleich zur Innenspur immer einen längeren Weg zurücklegen muss, und er fragt sich, ob dieser Wegunterschied von der Form der Rennstrecke abhängt.

Skizziere zwei Rennstrecken im Maßstab 1:5. Die erste soll möglichst kurz, die zweite möglichst lang sein.

Berechne für beide Rennstrecken die Wegdifferenz zwischen den beiden Spuren.

Wäre es möglich mit einer anderen Anzahl von Elementen eine Rennstrecke aufzubauen, bei der die Wegdifferenz der beiden Spuren noch größer ist ? Begründe !

Klasse 11

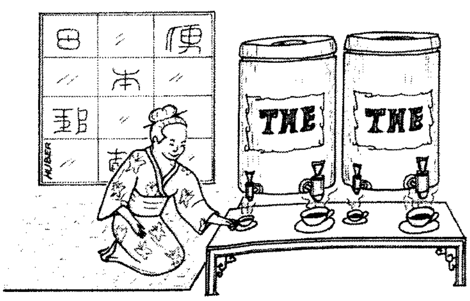
Aufgabe 11
5 Punkte

Zeitlicher Ablauf

Zwei baugleiche Behälter haben in Bodenhöhe jeweils einen großen und einen kleinen Hahn. Beide Behälter sind gefüllt.

Öffnet man nur den großen Hahn, so dauert es 30 Minuten bis ein Behälter leer ist. Öffnet man nur den kleinen Hahn, so dauert es eine Stunde. Die Flüssigkeit strömt gleichförmig aus, Markierungen sind nicht vorhanden.

Wie kann man allein mit Hilfe dieser beiden Behälter eine Zeitspanne von 40 Minuten abmessen?



Aufgabe 12
7 Punkte

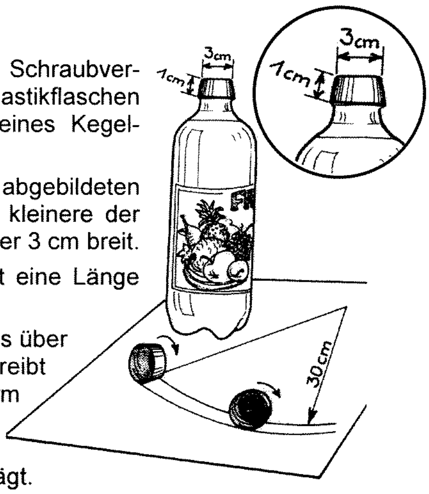
Verschlusssache

Die meisten Schraubverschlüsse von Plastikflaschen haben die Form eines Kegelstumpfes.

Bei dem abgebildeten Verschluss ist der kleinere der beiden Durchmesser 3 cm breit.

Die Mantellinie hat eine Länge von 1 cm.

Rollt der Verschluss über einen Tisch, beschreibt seine Bahn die Form eines Kreisrings, dessen innerer Radius 30 cm beträgt.



Berechne den größeren der beiden Durchmesser des Schraubverschlusses.

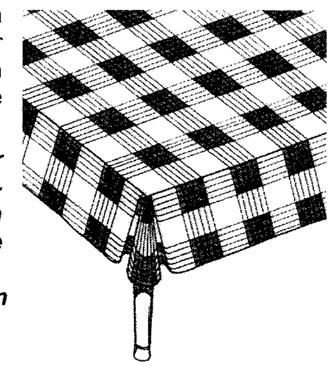
Aufgabe 13
10 Punkte

Kariert

Das Muster der abgebildeten Tischdecke besteht aus weißen, dunklen und gestreiften quadratischen Karos. Auf dieser Tischdecke betrachtet Franz ein Quadrat aus mehreren Karos, bei dem die vier Eckkaros weiß sind. Dies bedeutet, dass die Anzahl der Karos längs einer Quadratseite ungerade ist.

Franz weiß, dass man ungerade Zahlen in der Form 2n+1 schreiben kann, wobei n eine natürliche Zahl ist.

Wie viele Karos jeder Sorte enthält ein solches Quadrat, wenn auf eine Quadratseite 2n+1 Karos kommen? Bestimme die Anzahlen in Abhängigkeit von n.



Lösungshinweise zum Probewettbewerb 2001/2002

Aufgabe 1 : Mots de tête

Die erste Behauptung ist wahr: Würde sich der Wetterbericht immer irren, so wüsste man stets, welches Wetter es nicht gibt.

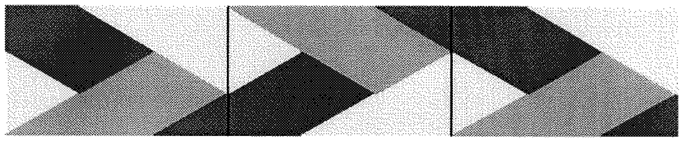
Die zweite Aussage bezieht sich auf eine große Anzahl von Individuen. Bei nur fünf Personen muss sie nicht zutreffen.

Aufgabe 2 : Zahl und Ziffer

Hier einige Lösungen : 13 485 - 26 970 ; 14 853 - 29 706 ; 26 709 - 53 418 ; 32 709 - 65 418 ;
34 851 - 69 702 ; 48 513 - 97 026 et 48 531 - 97 062.

Aufgabe 3 : Farbzopf

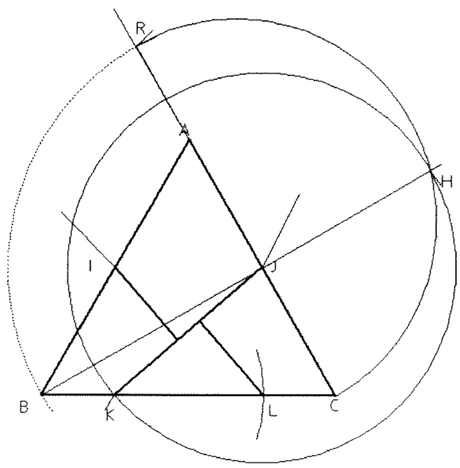
In jeder Zone zählt man, wie viele halbe und ganze gleichseitige Dreiecke der Seitenlänge 2 cm enthalten sind.

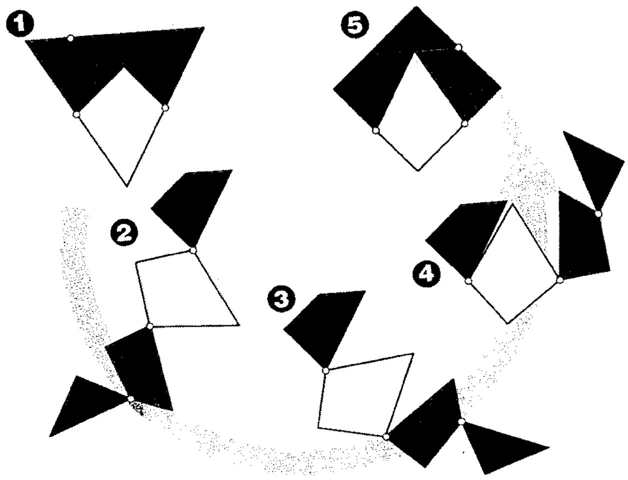


Bei einer Bandlänge von drei Dreieckshöhen ($3 \cdot \sqrt{3}$ cm) entspricht der Flächeninhalt für jede Farbe dem von drei Dreiecken.

Setzt man drei solche Abschnitte aneinander, so ergibt sich eine Bandlänge von $9 \cdot \sqrt{3}\,\text{cm} \approx 15{,}6\,\text{cm}$.

Aufgabe 4 : Métamorphose



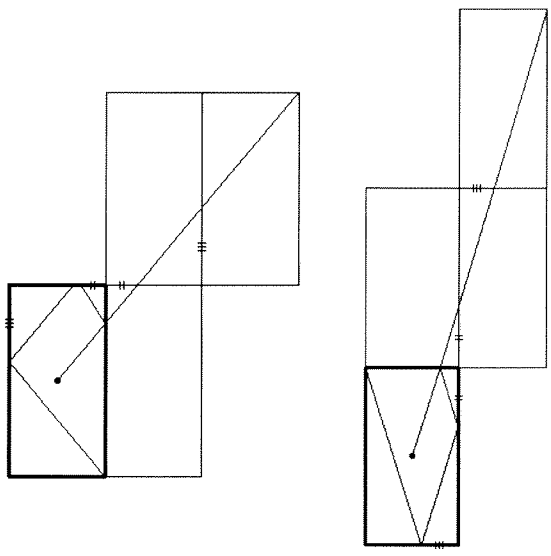


Aufgabe 5 : Anstandsrest

Jacques muss die Schokolade immer so teilen,
dass für Germain ein Quadrat übrig bleibt.
Auf diese Weise bleibt für Germain das letzte Stück übrig.

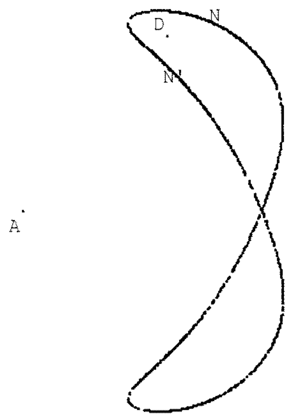
Aufgabe 6 : Billard

Die nebenstehenden Abbildungen zeigen zwei Lösungen.
Alle anderen Lösungen sind dazu symmetrisch.

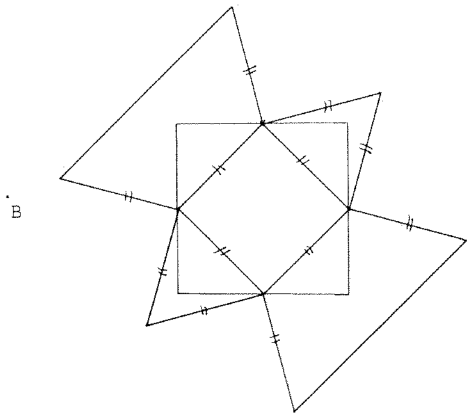


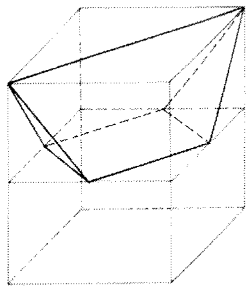
Lösungshinweise zum Probewettbewerb 2001/2002

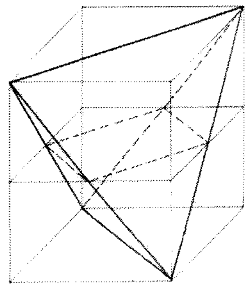
Aufgabe 7 : Gelenkig



Aufgabe 8 : 3D-Puzzle







Aufgabe 9 : EAN-Code

Die Kontrollziffer ist die gleiche, wenn sich die Summe der Produkte nicht, um 10 oder ein Vielfaches von 10 ändert. Darum muss für zwei benachbarte Ziffern a und b gelten: $a + 3b = b + 3a + 10k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Für $k = 0$ erhält man $a = b$, für $k = 1$ ergibt sich $a = b - 5$ und für $k = -1$ folgt $a = b + 5$.

Andere Werte von k sind nicht möglich, da a und b Ziffern sind.

Neben der trivialen Lösung a = b erhält man so die Nachbarzahlen 0 und 5, 1 und 6, 2 und 7, 3 und 8, 4 und 9.

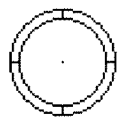
Aufgabe 10 : Formel 1

Für die Wegdifferenz d des kleinsten Rundkurses gilt:

$d = 2\pi \cdot 20\,\text{cm} - 2\pi \cdot 15\,\text{cm} = \pi \cdot 10\,\text{cm}.$

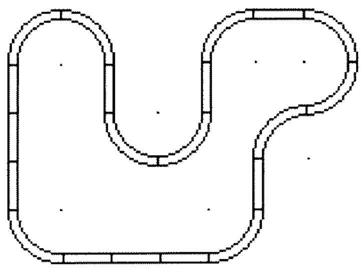
Beim Hinzufügen gerader Gleisstücke ändert sich nichts.

Beim Durchfahren eines beliebigen, geschlossenen Parcours betragen die Richtungsänderungen eines Autos insgesamt 360°. Dies bedeutet, dass bei der Erweiterung des Parcours ohne Kreuzung die Anzahl der hinzugefügten Rechts- und Linkskurven gleich sein muss. Darum ist auch der Wegunterschied für alle geschlossenen Strecken der gleiche.



circuit minimal

circuit maximal (exemple)



Aufgabe 11 : Zeitlicher Ablauf

Öffnet man beide Hähne eines Behälters, so fließt durch den kleinen Hahn 1/60 und durch den großen 1/30 des Inhalts. Insgesamt fließt als pro Minute 1/20 des Inhalts ab. Der Behälter ist nach 20 Minuten leer. Öffnet man anschließend beide Hähne des zweiten Behälters, so ergibt sich eine Gesamtzeit von 40 Minuten.

2. Lösung: Man öffnet den großen Hahn des einen und den kleinen Hahn des anderen Behälters. Nach 30 min ist ein Behälter leer, der andere noch halb voll. Öffnet man nun beide Hähne so ist dieser Behälter nach 10 min leer.

Aufgabe 12 : Verschlusssache

Bei einer Umdrehung des Verschlusses beschreibt der obere Rand (Umfang U_1) einen Kreisbogen mit dem Mittelpunktswinkel α und der Länge $b_1 = \pi \cdot 30\,\text{cm} \cdot \frac{\alpha}{180^\circ}$. Aus $b_1 = U_1 = \pi \cdot 3\,\text{cm}$ folgt $\alpha = 18°$.

Der untere Rand mit dem Durchmesser d_2 beschreibt einen Kreisbogen mit dem Radius 31 cm und dem selben Mittelpunktswinkel. Also gilt $\pi \cdot d_2 = \pi \cdot 31\text{ cm} \cdot \frac{18^\circ}{180^\circ}$. Daraus erhält man $d_2 = 3{,}1$ cm.

Aufgabe 13 : Kariert

Jedes große Quadrat besteht aus 2n + 1 Reihen quadratischer Karos.

Bei n dieser Reihen wechseln sich n+1 gestreifte und n dunkle Karos ab. Für diese Reihen erhält man also $n \cdot (n+1)$ gestreifte und n^2 dunkle Karos.

Die restlichen n+1 Reihen enthalten jeweils abwechselnd n+1 weiße und n gestreifte Karos, was insgesamt $(n+1)^2$ weiße und $(n+1) \cdot n$ gestreifte Karos ergibt.

Für das ganze Quadrat erhält man damit $(n+1)^2$ weiße, $2n \cdot (n+1)$ gestreifte, und n^2 dunkle Karos.

MATEMATICA SENZA FRONTIERE

Prova di allenamento
febbraio 2002

- ***Sono richieste spiegazioni o dimostrazioni per gli esercizi 3, 5, 9, 10, 11, 12 e 13.***
- ***Sarà esaminata ogni soluzione, anche parziale. Si terrà conto dell'accuratezza.***
- ***Restituire un solo foglio-risposta per ogni esercizio***

Esercizio 1 – 7 p *Selezione di campioni*

Risoluzione da redigere in francese o inglese o spagnolo o tedesco con un minimo di 30 parole.

A football field is divided into four sections. Each section contains the same number of players. Wanting to test them to scout out new young talent, the coach moves 5 players from the 1st to the 2nd section, 3 from the 3rd to the 4th and 6 from the 4th to the 1st.
Then he takes 4 players from each section off the field.

If, in total, 24 players are left, can you calculate how many players are now in each section?

Ein Fussballdfed ist in 4 Sektoren gegliedert. Um bei einem Test neue junge Talente ausfinding zu machen, sind in jedem Sektor die gleiche Auszahl von Spielern. Der Trainer schickt 5 Spieler von Sektor 1 zu Sektor 2, 3 Spieler von Sektor 3 zu Sektor 4, und 6 Spieler von Sektor 4 zu Sektor 1.
Dan nimmt er 4 Spieler von jedem Sektor heraus.

Wenn insgesamt noch 24 Spieler übrig sind, können Sie raten, wieviele Spieler jetz in jedem Sektor sind?

A l'occasion d'une sélection de nouveaux joueurs, un terrain de foot a été divisé en quatre secteurs. Chaque secteur contient le moindre nombre de joueurs.
L'entraîneur déplace 5 joueurs du premier au deuxième secteur, 3 joueurs du troisième au quatrième secteur et 6 joueurs du quatrième au premier secteur.
Par la suite il élimine 4 joueurs dans chaque secteur.

Si à la fin de la sélection il reste 24 joueurs en tout, sauriez-vous calculer combien de joueurs il y a dans chaque secteur?

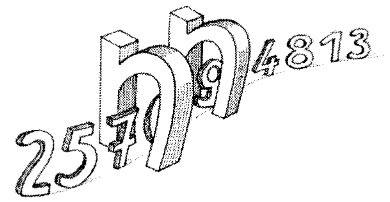
En ocasión de una selección para buscar nuevos jugadores, un campo de fútbol está diviso en cuatro sectores. Cada sector contiene el mismo número de jugadores.
El entrenador desplaza 5 jugadores del primer hacia el segundo sector; 3 del terzero hacia el cuarto y 6 del cuarto hacia el primero.
Luego elimina 4 jugadores en cada sector.

Si al final queda un total de 24 jugadores, sabéis calcular cuantos jugadores hay en cada sector?

(Concorso Angela Bernasconi 2001 - esercizio proposto da Stefano Gatti classe 4 ela IPSIA Monza)

Esercizio 2 – 5 p *Totocifre*

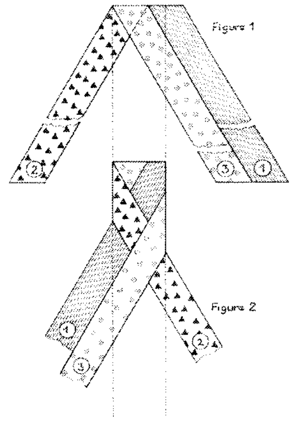
Usando, tutte e una sola volta, le cifre da 0 a 9 scrivete un intero di cinque cifre e il suo doppio.



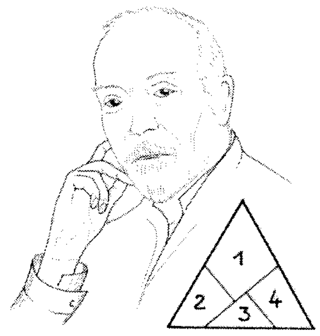
Esercizio 3 – 7 p *Trecce*

La figura1 mostra tre strisce di carta uguali di diverso colore. Ognuna di esse è un parallelogramma con due lati lunghi 2 cm e due angoli di 60°.
La terza striscia ricopre un angolo della seconda. Piegando successivamente queste strisce si ottiene una treccia di cui la figura 2 mostra l'inizio.

Realizzate in questo modo una treccia rettangolare tricolore larga 3 cm e lunga almeno 15 cm in modo che sulla faccia visibile del rettangolo ogni colore copra complessivamente la stessa area. Motivate la risoluzione.



Esercizio 4–5p *Metamorfosi*



Il matematico inglese H.E. Dudeney (1857 - 1930) ha inventato un sezionamento del triangolo equilatero (vedi figura) in un puzzle di 4 pezzi che permette di trasformarlo in un quadrato.

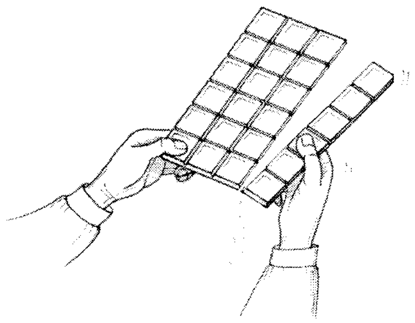
Ecco una procedura per costruire questo sezionamento:

- Costruite un triangolo equilatero ABC di lato 8 cm; indicate con I e J i punti medi rispettivamente dei lati AB e AC. Sulla semiretta JA segnate il punto R tale che JR = JB.
- All'esterno del triangolo ABC, costruite la semicirconferenza di diametro CR, che incontra la retta BJ in H.
- Sul lato BC segnate i punti K e L in modo che sia JK = JH e KL = CJ.
- Tracciate, infine, il segmento KJ e su questo segnate i punti M e N in modo che KJ sia perpendicolare a IM e LN.

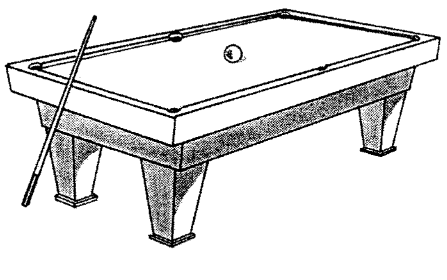
Costruite questa figura sul foglio-risposta. Ripetete la costruzione su un altro foglio; sezionatela e sistemate i 4 pezzi del puzzle in modo da ottenere un quadrato che incollerete sul foglio-risposta.

Esercizio 5–7p *Prego, dopo di Lei!*

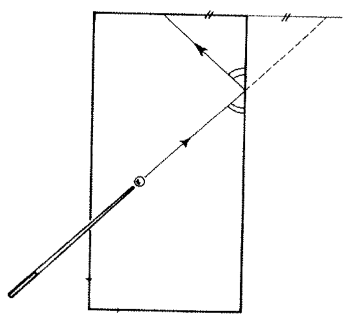
Franca e Gino sono in vena di cortesie. Si dividono una tavoletta di cioccolato, di cui entrambi sono terribilmente golosi, ma nessuno dei due vuole sentirsi egoista nel prendere l'ultimo pezzetto.
All'inizio la tavoletta è di 24 quadretti. Ognuno dei due, a turno, spezza la tavoletta in due pezzi rettangolari lungo una delle linee di separazione orizzontali o verticali, mangia uno dei due pezzi e dà l'altro al compagno.
Comincia Gino e fa in modo che Franco sia obbligato a prendere l'ultimo quadretto. ***Descrivete la sua strategia***



Esercizio 6–5p *Gioco di riflessione*

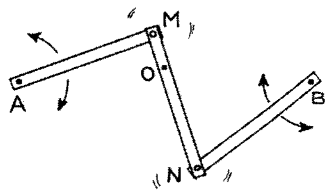


Lo schizzo illustra come una palla da biliardo rimbalzi contro il bordo laterale del tavolo da gioco se spinta senza imprimerle effetti rotatori.
Il tavolo da biliardo è un rettangolo di 1,4 per 2,8 metri.
Si mette una palla nel suo centro; si vuole spingerla in modo che rimbalzi contro tre lati consecutivi prima di finire in una delle 4 buche situate agli angoli del tavolo.



Tracciate sul foglio-risposta il piano del biliardo in scala 1:40. Costruite una traiettoria della palla, lasciando visibili le linee della costruzione.

Esercizio 7–7p *Curvografo*

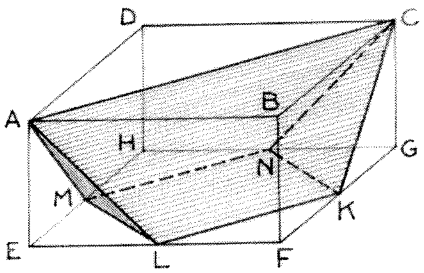


La figura rappresenta un sistema di aste articolate fissato su una tavola.
I punti fissi A e B distano16 cm.
Le aste AM e BN possono ruotare rispettivamente intorno ad A e a B. Esse sono collegate dall'asta MN i cui estremi sono snodi che possono muoversi sulla tavola.
Le 3 aste hanno la medesima lunghezza: AM = BN = MN = 8 cm.

Il punto O è situato sull'asta MN a 2 cm da M e 6 cm da N.
Il punto O descrive una curva curiosa quando l'asta MN si muove in tutte le posizioni possibili.

Tracciate questa linea sul foglio-risposta.

Esercizio 8–5p *Omaggio di tetraedri*



Il solido ABCDEFGH raffigurato è un parallelepipedo rettangolo. La base ABCD è un quadrato di lato 6 cm e altezza AE di 3 cm.
M, K, L e N sono punti medi di spigoli.

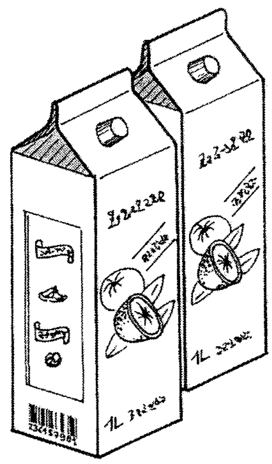
Costruite due esemplari del solido ACKNML.
Unite questi due solidi in modo da formare una piramide che offrirete al vostro professore.

Esercizio 9–7p *Codice a barre*

Il codice EAN 13 (European Article Number) è un numero di 12 cifre, seguito da una cifra di controllo.
Si scompone come nell'esempio:

3 116430 058089

stato | *produttore* | *prodotto* | *cifra di controllo*



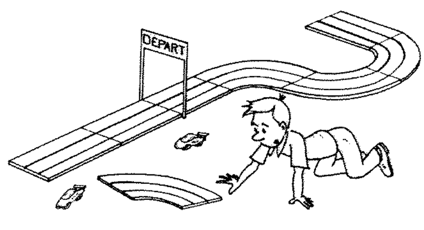
In questo esempio la cifra di controllo si calcola partendo dalle prime 12 cifre in questo modo : 3×**1**+1×**3**+1×**1**+6×**3**+4×**1**+3×**3**+0×**1**+0×**3**+5×**1**+8×**3**+0×**1**+8×**3**=91
Le cifre sono moltiplicate in modo alterno per 1 e per 3.

La differenza tra 91 e la decina seguente è 100–91=9 che è, quindi, la cifra di controllo (se la somma è multipla di 10 la cifra di controllo è 0).

Questo permette di rilevare alcuni errori di lettura. Però molti codici a 12 cifre hanno la stessa cifra di controllo. In particolare, può succedere che scambiando due cifre consecutive di un certo codice si ottenga un altro codice con la stessa cifra di controllo.

Individuate tutte le coppie di cifre consecutive che, scambiate, danno la stessa cifra di controllo.

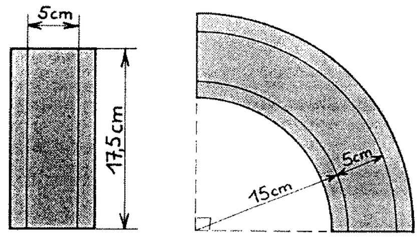
Esercizio 10–10p *Corto circuito*



Giulio riceve in regalo una scatola per costruire un circuito automobilistico. La scatola contiene due automobiline elettriche, 10 elementi rettilinei e 10 curvilinei delle dimensioni indicate in figura. Per costruire un circuito con due piste "parallele" (una per ogni automobilina) distanti 5 cm Giulio utilizza elementi scelti nella scatola. La pista aderisce al pavimento, non ha interruzioni ed è chiusa.

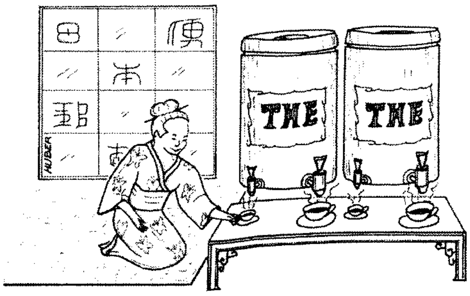
Giulio sa che l'automobilina sulla pista esterna percorsa in un giro una distanza maggiore di quella sulla pista interna. Si domanda se la differenza fra i due percorsi varia a seconda della pista costruita.

Tracciate su carta quadrettata due circuiti in scala 1:40. Il primo circuito deve essere il più breve possibile, il secondo il più lungo possibile. Per ognuno di essi calcolare la differenza fra le lunghezze delle due piste.
E' possibile costruire un circuito per cui questa differenza sia maggiore? Spiegate la vostra risposta.



Classe terza

Esercizio 11–5p *Cronometro ad acqua*



Due recipienti uguali sono pieni. Ognuno di essi è fornito di due rubinetti: uno grande e uno piccolo. Se si apre soltanto il rubinetto grande il recipiente si svuota in 30 minuti; se si apre solo quello piccolo il recipiente si svuota in un'ora. I recipienti non hanno né graduazioni né segni di riferimento.

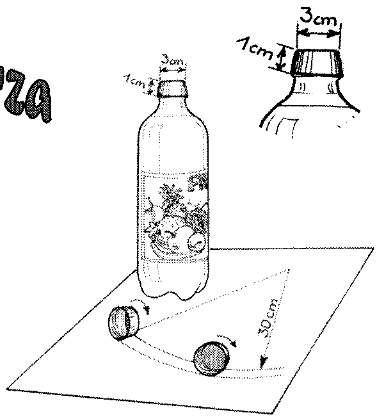
Come fareste a cronometrare 40 minuti servendovi solo di questi due recipienti ? Indicate due soluzioni.

Classe terza

Esercizio 12–7p *Gira tappo!*

Una bottiglia è chiusa da un tappo troncoconico. Il suo diametro minore misura 3 cm e il lato obliquo (apotema) misura 1 cm. Rotolando sul tavolo il tappo descrive una corona circolare il cui raggio interno è uguale a 30 cm.

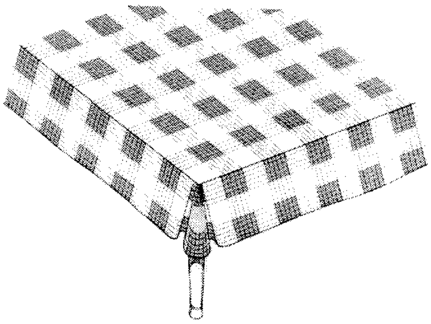
Calcolate il diametro maggiore del tappo.



Classe terza

Esercizio 13–10p *Tavola di quadrati*

La tovaglia qui riprodotta è formata da quadretti bianchi, neri e a righe. Di questa tovaglia Franco osserva una zona quadrata i cui quattro quadretti d'angolo sono tutti bianchi: quindi su ogni lato di questo quadrato c'è un numero dispari di quadretti.
Franco sa che ogni numero dispari si può scrivere come $2n + 1$, dove n è un numero intero.



Esprimete in funzione di n il numero di quadretti di ogni tipo contenuti nel quadrato di lato $2n + 1$ osservato da Franco.

Mathématiques sans frontières

Training test - December 2001

- **Justify your answers for questions 25,9,10,11,12 and 13.**
- **Incomplete answers still get some credit.**
- **Careful work can gain marks.**
- **Only one answer should be handed in for each class.**

Question 1 – 7 marks — *Mots de tête*

Write down your answer in French, German, Italian or Spanish using at least 30 words.

L'humoriste québécois Pierre Légaré pratique volontiers l'art des jeux de mots et s'amuse à nous présenter des paradoxes sous forme de petites phrases. En voici deux exemples :

1) " En fait, si la météo se trompait tout le temps, là on pourrait se fier dessus. "

2) " Selon les statistiques, il y a 1 personne sur 5 qui est déséquilibrée. S'il y a 4 personnes autour de toi et qu'elles te semblent normales, c'est pas bon. "

Analyser et critiquer ces deux phrases du point de vue logique et mathématique.

Der aus Quebec stammende Humorist Pierre Légaré spielt gerne mit Worten und liebt es, seinem Publikum Widersinnigkeiten in Form kurzer Sätze darzubieten. Hier zwei Beispiele:

1) „Wenn sich der Wetterbericht tatsächlich immer irren würde, dann könnte man sich auf ihn verlassen."

2) „Statistisch gesehen, ist jeder Fünfte ein Psychopath. Gibt es vier Personen um dich herum, welche dir normal erscheinen, dann ist das nicht gut!"

Untersuche und kritisiere diese beiden Sätze unter logischem und mathematischem Gesichtspunkt.

El humorista quebequés Pierre Légaré practica con gusto el arte de los juegos de palabras y le alegra presentamos paradojas en forma de frasecitas. He aquí dos ejemplos de ellas :

1) "De hecho, si los meteorólogos se equivo caran siempre, uno podría fiarse de ellos."

2) "Según las estadísticas, 1 persona de cada 5 está desequilibrada. Si en torno tuyo están 4 personas y que te parecen normales, ¡ay de ti !"

Analiza y critica estas dos frases desde el punto de vista lógico y mathemático.

L'umorista del Quebec Pierre Légaré gioca volentieri con le parole e si diverte a presentarci dei paradossi sotto forma di brevi affermazioni.

Eccone due esempi :

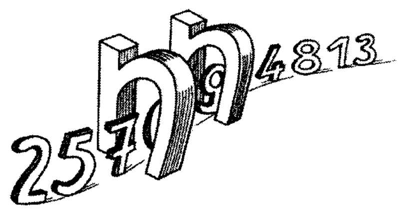
1) "Di fatto, se il servizio meteo si sbagliasse ogni volta, in questo caso ci si potrebbe fidare."

2) "Secondo le statistiche, una persona su 5 non è equilibrata. Se attorno a te ci sono 4 persone che ti sembrano equilibrate, non è una buona situazione."

Analizza e critica le due affermazioni dal punto di vista logico e matematico

D'après „Mots de tête" de Pierre Légaré.

Question 2 – 5 marks — *Number crunching*



Write down a five digit number. Double it. Can you find a five digit number so that the number and its double use all the digits from 0 to 9 exactly once. Explain how you found it.

Question 3
7 marks

French pleat

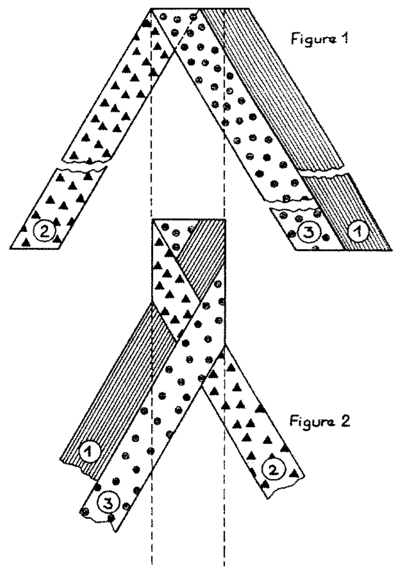


Figure 1 shows 3 strips of paper in different colours. Each strip is a parallelogram with the two short sides 2 cm long and with two angles of 60°.

Strip 3 covers a corner of strip 2 as shown.

By folding the strips one after the other you get a pleat. Figure 2 shows how to start.

Make a model of a pleat of width 3 cm and just longer that 15 cm so that the total of each coloured area is the same for each colour.

Question 4
5 marks

Cut and paste

The English mathematician H.E.Dudeney (1857- 1930) invented a way of cutting up an equilateral triangle into 4 pieces which could then be reassembled into a square.

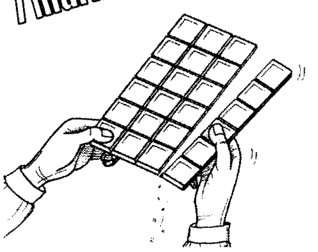
Here is how the construct the cuts:

Draw an equilateral triangle ABC of side 8 cm; mark I and J the midpoints of AB and AC. On the segment JA mark the point R so that JR = JB.
Outside the triangle draw the semicircle with diameter CR.
The line BJ cuts this semicircle at H.
On side BC mark the points K and L such that JK = JH and KL = CJ.
Draw the line KJ; on this line mark the points M and N such that KJ is perpendicular to IM and LN.

Draw this diagram on an answer sheet.
On a separate answer sheet draw the figure again, cut it into the four pieces and then reassemble them to make the square. Stick your solution on your

Question 5
7 marks

Chocolat

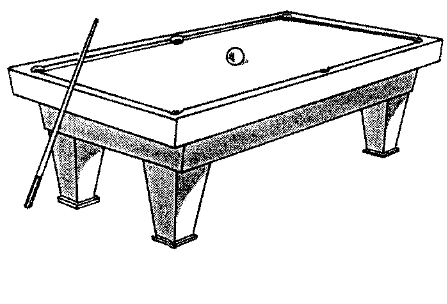


Jacques and Germain are ever so polite when sharing a chocolate bar. They are both keen chocolate eaters but don't want to be so selfish as to eat the last piece. The bar consists of 24 squares. Each one when it's his turn breaks the bar into 2 rectangular pieces along one of the horizontal or vertical lines which separate the squares. He eats one of the pieces and gives the other to his friend.

Jacques start off and makes sure that Germain must take the last piece. Describe his strategy to ensure this

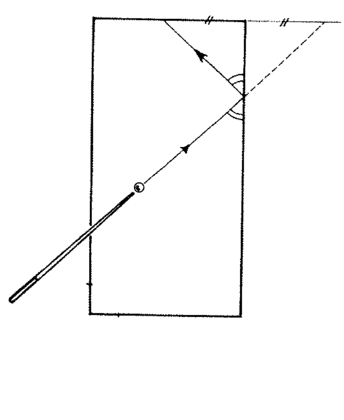
Question 6
5 marks

Reflecting on billiards



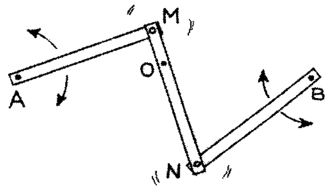
The diagram below shows how a billiard ball bounces off the cushion if it is struck without spin.
The billiard table is a rectangle 1.4 m by 2.8 m. The ball is placed at the centre. We want to hit the ball so that it bounces off three cushions before being potted in one of the four corner pockets.

Draw on your answer sheet a billiard table at a scale of 1:40. Construct a path for the ball. Show all your construction lines.



Question 7
7 marks

Curvigraph

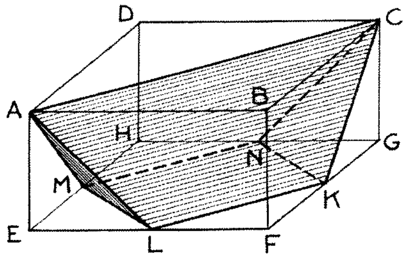


The diagram shows a linkage of articulated rods fixed to a board.
The fixed points A and B are 16 cm apart.
The rods AM and BN can pivot around A and B. They are joined by the rod MN.
The points M and N are the joints which allow movement over the board.
The three rods are all 8 cm long.
The point O is situated on MN so that MO = 2 cm and ON = 6 cm.
When you move MN into all possible positions the point O traces out a surprising path.

Draw the path of O on your answer sheet.

Question 8
5 marks

Building the pyramid



The solid ABCDEFGH shown is a cuboid such that AE = 3 cm and ABCD is a square of side 6 cm.
M,K,L and N are the midpoints of the edges shown.

Construct two examples of the solid ACKNML.

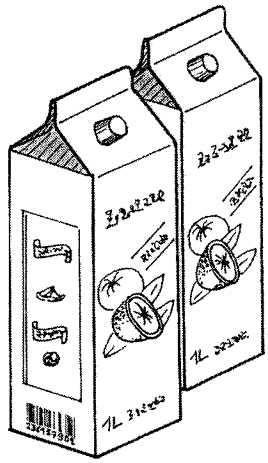
Show your teacher how these two solids can form a pyramid.

Question 9
7 marks

Number control

The code number EAN 13 (European Article Number) is a number of 12 digits followed by a control or check digit. It is made up as shown for the country, the business and the product.

3 116430 058089



$\underbrace{3}_{\text{Pays}}\ \underbrace{116430}_{\text{entreprise}}\ \underbrace{05808}_{\text{produit}}\ 9$ ← chiffre de contrôle

In this example the control number is calculated from the 12 other digits

3x**1** + 1x**3** + 1x**1** +6x**3** + 4x**1** + 3x**3** + 0x**1** + 0x**3** + 5x**1** + 8x**3** + 0x**1** + 8x**3** = 91

The digits are multiplied alternately by 1 and 3.
The difference between 91 and the next multiple of 10 is 100 – 91 = 9 which is then the control number. (if the sum is a multiple of 10 the control number is 0).

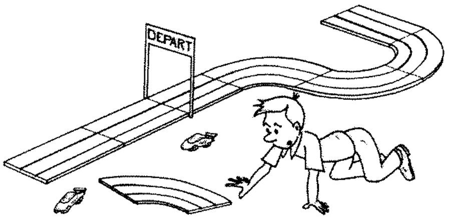
This system helps to detect some errors in electronic reading. However many of the 12 digit codes can have the same control number. In particular if we change the position of two neighbouring digits we can get a code which has the same control number.

Find all the pairs of neighbouring digits for which changing the position gives the same control number.

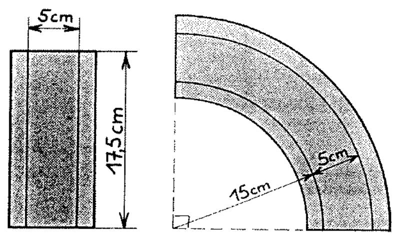
Question 10
10 marks

Short circuit

Julien has a circuit for two electric cars: each one follows its own track and the two tracks are 5 cm apart.



To construct a circuit he has 10 straight sections of length 17.5 cm and 10 sections which are quarter circles as shown. The circuit must stay in contact with the floor and doesn't cut or cross over itself. It cant come to a deadend as it must be a complete circuit. He can use as many curved or straight sections as he wants.



Julien knows that the car which is on the external track covers a longer distance on each circuit than the one on the inside track. He wonders if the difference between the two circuits depends on the particular circuit that he builds.

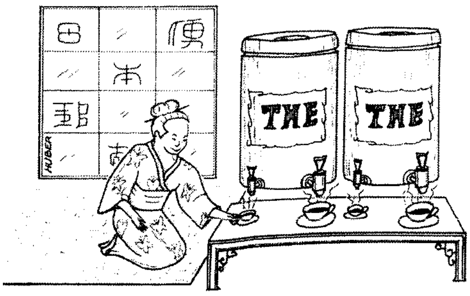
Draw two circuits on square paper using a scale of 1:5 - the first to be the shortest possible circuit and the other the longest. For both of them work out the difference in the lengths of the inner and outer tracks.

Is it possible to build a circuit for which the difference is even bigger ? Explain your answer.

Senior classes only

Question 11
5 marks

Let the good times roll

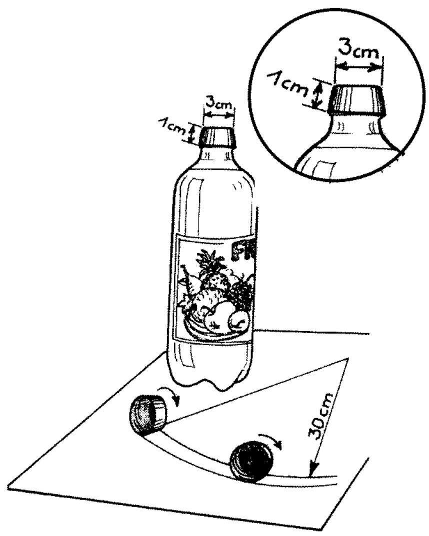


Two identical urns are full.
Each urn has two taps – one big and one small.
If you open the big tap the urn empties in 30 minutes.
If you empty the small tap the urn empties in 1 hour.
There are no scales or markings on the urns.

How can you time a period of 40 minutes using the urns ? Find two solutions.

Question 12
7 marks

Corkscrew

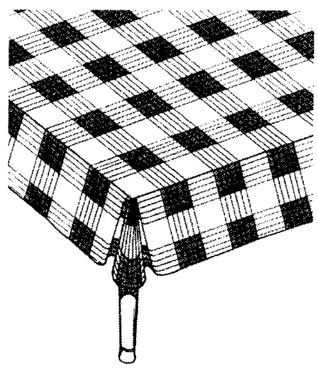


A bottle cork is in the shape of a section of a cone. Its smaller diameter is 3 cm and the sloping side is 1 cm.
When it rolls on the table top it traces out a circular path with inner radius 30 cm as shown.

Calculate the bigger diameter of the cork.

Question 13
10 marks

All square



The tablecloth shown is made up off small squares which are white, black or striped. On the tablecloth François can pick out a large square section for which the 4 small squares at the corners are white: there are therefore an odd number of small squares on each side of the square section.
François knows that an odd number can be written as $2n + 1$ where n is a whole number.

Find formulas for the number of small squares of each kind within the large square section of side 2n + 1 which François picked out. Your formulas will be in terms of n.

Matematyka bez granic

Zadanie 1
7 punktów

Gra słów

Rozwiązanie musi być napisane w jednym z czterech jezyków obcych i zawierać przynajmniej 30 słów.

Humorysta z Quebecu Pierre Légaré lubi słowne gierki, w których tworzy krótkie zdania prowadzące do paradoksalnych wniosków. Oto dwa przykłady :

1) "Zawsze, kiedy prognoza pogody była zała, można było na niej polegać"
2) "Jak mówią statystyki, jedna osoba na pięć jest niezrównoważona. Jeśli wokół ciebie są cztery osoby i wydają Ci się zrównoważone, to coś jest nie tak".

Zanalizuj i wypowiedz się na temat przytoczonych zdań z logicznego i matematycznego punktu widzenia.

L'humoriste québécois Pierre Légaré pratique volontiers l'art des jeux de mots et s'amuse à nous présenter des paradoxes sous forme de petites phrases. En voici deux exemples :

1) " En fait, si la météo se trompait tout le temps, là on pourrait se fier dessus. "
2) " Selon les statistiques, il y a 1 personne sur 5 qui est déséquilibrée. S'il y a 4 personnes autour de toi et qu'elles te semblent normales, c'est pas bon. "

Analyser et critiquer ces deux phrases du point de vue logique et mathématique.

El humorista quebequés Pierre Légaré practica con gusto el arte de los juegos de palabras y le alegra presentamos paradojas en forma de frasecitas. He aquí dos ejemplos de ellas :

1) "De hecho, si los meteorólogos se equivo caran siempre, uno podría fiarse de ellos."
2) "Según las estadísticas, 1 persona de cada 5 está desequilibrada. Si en torno tuyo están 4 personas y que te parecen normales, jay de ti !"

Analiza y critica estas dos frases desde el punto de vista lógico y mathemático.

Der aus Quebec stammende Humorist Pierre Légaré spielt gerne mit Worten und liebt es, seinem Publikum Widersinnigkeiten in Form kurzer Sätze darzubieten. Hier zwei Beispiele :

1) „Wenn sich der Wetterbericht tatsächlich immer irren würde, dann könnte man sich auf ihn verlassen."
2) „Statistisch gesehen, ist jeder Fünfte ein Psychopath. Gibt es vier Personen um dich herum, welche dir normal erscheinen, dann ist das nicht gut!"

Untersuche und kritisiere diese beiden Sätze unter logischem und mathematischem Gesichtspunkt.

L'umorista del Quebec Pierre Légaré gioca volentieri con le parole e si diverte a presentarci dei paradossi sotto forma di brevi affermazioni.

Eccone due esempi :

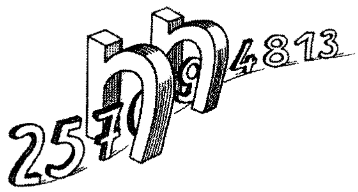
1) "Di fatto, se il servizio meteo si sbagliasse ogni volta, in questo caso ci si potrebbe fidare."
2) "Secondo le statistiche, una persona su 5 non è equilibrata. Se attorno a te ci sono 4 persone che ti sembrano equilibrate, non è una buona situazione."

Analizza e critica le due affermazioni dal punto di vista logico e matematico.

D'après „Mots de tête" de Pierre Légaré.

Zadanie 2
5 punktów

Liczba i cyfra

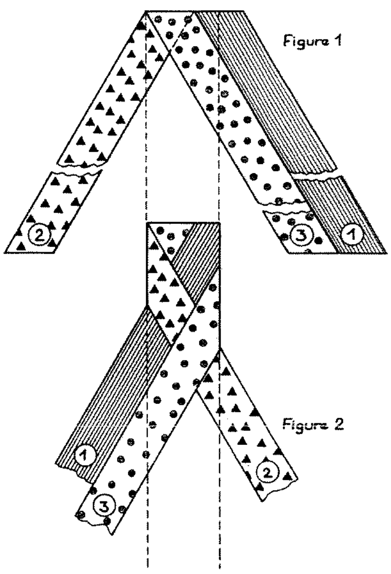


Szukana jest pięciocyfrowa liczba naturalna. Jeżeli dopiszemy do niej jej dwukrotność, to otrzymany wynik będzie liczbą składającą się z dziesięciu cyfr : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (cyfry nie mogą się powtarzać).

Podaj taką liczbę i uzasadnij, że posiada ona tą własność. Czy istnieje więcej takich liczb ?

Zadanie 3
7 punktów

Kolorowy warkocz

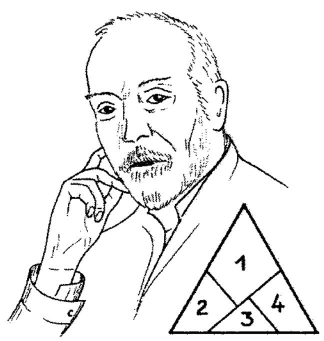


Na pierwszym rysunku widzimy trzy różnokolorowe paski papieru o tych samych wymiarach. Każdy pasek ma kształt równoległoboku, którego krótszy bok ma długość 2 cm, a kąty ostre mają miarę 60^0.
Trzeci pasek kładziemy na drugi tak, żeby przykrywał jeden z kątów ostrych. Jeżeli złożymy po kolei te paski, jeden po drugim, to powstanie warkocz.

Spleć tym sposobem warkocz o szerokości 3 cm i długości 15 cm tak, aby był prostokątem, a. widoczne powierzchnie o tym samym kolorze miały takie same pola. Naklej go na kartę odpowiedzi.

Zadanie 4
5 punktów

Metamorfoza



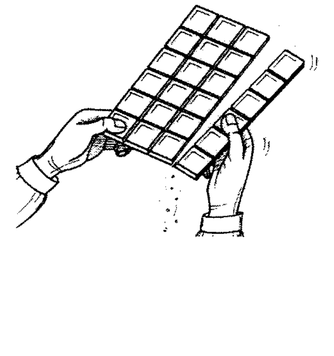
Na rysunku pokazany jest podział trójkąta równobocznego wykonany przez angielskiego matematyka H. E.Dudeney (1857-1930). Z tych części trójkąta można złożyć kwadrat.
Oto opis wykonania takiego podziału :

- Skonstruuj trójkąt równoboczny *ABC* o boku długości 8 cm.
- Wyznacz środki boków *AB* i *AC* i oznacz je odpowiednio literami *I* oraz *J*.
- Na przedłużeniu odcinka *JA* zaznacz punkt *R*, tak aby $\overline{JR} = \overline{JB}$.
- Skonstruuj półkole o średnicy *CR* znajdujące się poza trójkątem i przecinające prostą *BJ* w punkcie *H*.
- Punkty *K* i *L* wyznacz na boku *BC* tak, że $\overline{JK} = \overline{JH}$ i $\overline{KL} = \overline{JC}$.
- Na końcu wyznacz na boku *KJ* punkty *M.* i *N* tak, żeby $KJ \perp IM$ i $KJ \perp LN$.

Wykonaj taki podział trójkąta i rozetnij go na części. Następnie złóż z nich kwadrat. Na karcie odpowiedzi umieść rysunek przedstawiający konstrukcję podziału oraz przyklej otrzymany kwadrat.

Zadanie 5
7 punktów

Ostatnia kostka czekolady

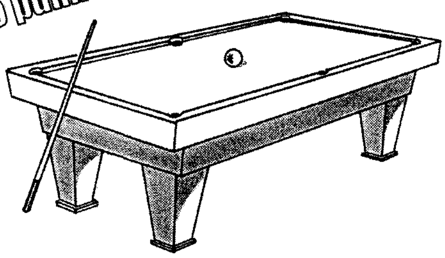


Jan i Grzegorz mają ochotę zjeść tabliczkę czekolady. Obaj są łakomczuchami, ale żaden z nich nie chce być egoistą i zjeść ostatnią kostkę.
Cała tabliczka składa się z 24 kostek. Postanawiają, że kolejno każdy z nich będzie odłamywał prostokątną część czekolady i zjadał ją. Zaczyna Jan i odłamuje takie części, że ostatnią kostkę musi zjeść Grzegorz.

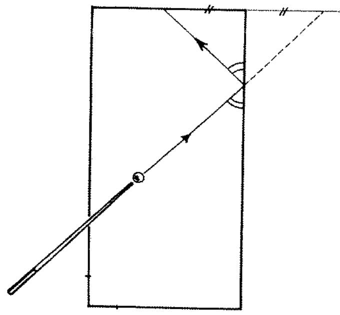
Opisz jaką strategię wymyślił Jan, aby to Grzegorz na pewno wziął ostatnią kostkę.

Zadanie 6
5 punktów

Bilard



Rysunek po prawej stronie przedstawia widok stołu bilardowego z góry z zaznaczonym torem ruchu kuli bilardowej, która nie wiruje. Stół jest prostokątem o wymiarach 1,40 m. na 2,80 m.

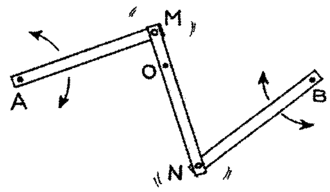


Ustawiamy kulę na środku stołu. Zagrywamy tak, aby kula uderzyła w trzy bandy, a następnie wpadła do jednej z narożnych kieszeni.

Na karcie odpowiedzi narysuj rzut stołu w skali 1:40. Skonstruuj tor ruchu kuli przy takiej zagrywce.

Zadanie 7
7 punktów

Przegub



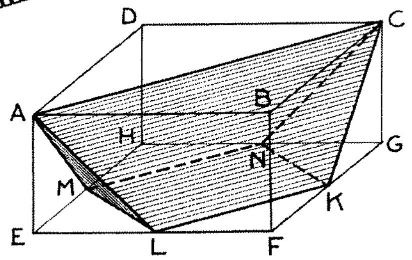
Rysunek pokazuje konstrukcję z listewek przymocowaną do blatu w punktach *A* i *B*. Odległość między tymi punktami wynosi 16 cm. Listewki *AM* i *BN* są połączone środkową listewką *MN* za pomocą nitów. Łączenia w punktach *M.*, *N* oraz *A, B* pozwalają na wykonywanie ruchów.

$\overline{AM} = \overline{BN} = \overline{MN} = 8cm$, punkt *O* znajduje się na listewce *MN* w odległości 2 cm od *M.* i 6 cm od *N.*

Poruszając listewką MN we wszystkich możliwych kierunkach punkt O zakreśli niespodziewany kształt. Narysuj ten kształt na karcie odpowiedzi.

Zadanie 8
5 punktów

Trójwymiarowe puzzle



W prostopadłościanie o wierzchołkach ABCDEFGH *krawędź* AE =*3 cm. Czworokąt* ABCD *jest kwadratem o boku długości 6 cm. Punkty* M., N, K, L *są środkami krawędzi podstawy.*

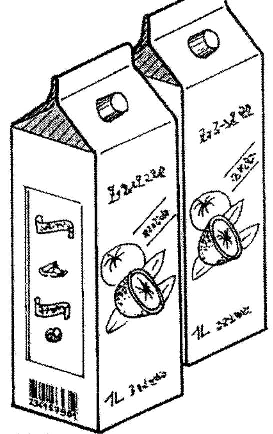
Wykonaj dwie bryły o wierzchołkach ACKNML i złóż z nich piramidę. Podaruj ją swojemu nauczycielowi.

Zadanie 9
7 punktów

Kod kreskowy

Kod kreskowy tworzy się z 12 cyfr podstawowych i jednej kontrolnej. Opiszemy teraz budowę takiego kodu na przykładzie tego narysowanego obok.

3 116430 058089



Od lewej do prawej, dwie pierwsze cyfry określają kraj producenta. Następne 5 cyfr dotyczy samego producenta. Kolejnych 5 posłuży do określenia produktu. Ostatnia cyfra, w tym przypadku 9, jest cyfrą kontrolną.

Żeby obliczyć cyfrę kontrolną mnożymy pierwsze 12 cyfr zaczynając od lewej na przemian przez 1 i 3, a wyniki dodajemy.

3*1+1*3+1*1+6*3+4*1+3*3+0*1+0*3+5*1+8*3+0*1+8*3=91

Liczba dopełniająca otrzymaną sumę do pełnych dziesiątek jest cyfrą kontrolną.

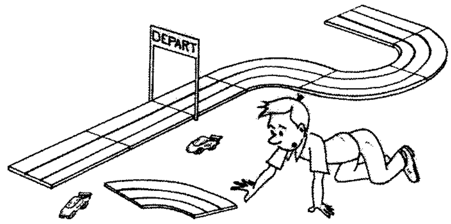
Cyfra ta służy do wykrywania pomyłek czytnika. Mimo tego zabezpieczenia jest dużo takich kodów, których złe odczytanie nie zostanie wykryte, gdyż cyfra kontrolna nie zmieni się. Jest np. możliwe, że w niektórych kodach dwie sąsiadujące cyfry zostaną zamienione miejscami, a cyfra kontrolna będzie taka sama.

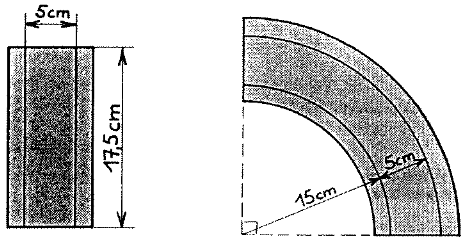
Znajdź wszystkie pary cyfr, które zamienione miejscami w kodzie nie zmienią cyfry kontrolnej.

Zadanie 10 – 10 punktów

Formuła 1

Henryk ma składaną trasę dla dwóch elektrycznych samochodzików. Każdy samochód jeździ po swoim torze, a odległość między nimi wynosi 5cm.





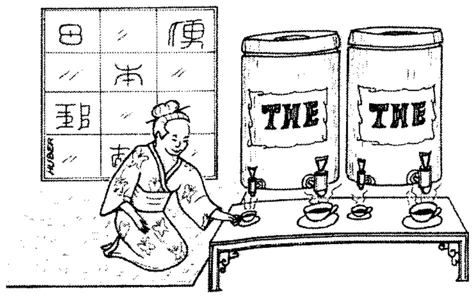
Do budowy trasy ma do dyspozycji 10 części prostych o długości 17,5 cm i 10 zakrętów o kącie 90^{0} z promieniem wewnętrznym 15 cm (jak na rysunku obok). Tor jest zamknięty i ułożony na płaskiej podłodze bez krzyżowania. Henryk wie, że samochód jadący na zewnętrznym torze pokonuje dłuższą drogę niż ten jadący na torze wewnętrznym. Zastanawia się, czy to różnica jest zależna od kształtu toru.

Narysuj dwa tory w skali 1:5. Jeden najkrótszy, a drugi najdłuższy z możliwych. Policz dla obu przypadków różnice między długością toru wewnętrznego i zewnętrznego. Czy mając więcej elementów można wybudować taką trasę, w której ta różnica będzie jeszcze większa ?

ZADANIA DLA KLAS DRUGICH

Zadanie 11 – 5 punktów

Płynność czasu



Mamy dwa napełnione, identyczne zbiorniki. U dołu, każdy z nich ma dwa krany, jeden duży, a drugi mały. Otwierając tylko duży kran opróżnienie zbiornika trwa 30 min., a otwierając tylko mały – jedną godzinę. Płyn wypływa równomiernie i nie widzimy jaki jest jego poziom.

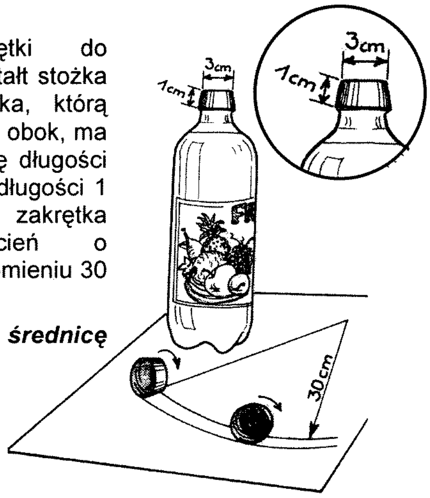
Jak można, tylko za pomocą tych zbiorników, odmierzyć czas 40 min ?

Zadanie 12 – 7 punktów

Tocząca się zakrętka

Niektóre zakrętki do butelek mają kształt stożka ściętego. Zakrętka, którą widać na rysunku obok, ma mniejszą średnicę długości 3 cm i tworzącą długości 1 cm. Tocząc się zakrętka opisuje pierścień o wewnętrznym promieniu 30 cm.

Oblicz większą średnicę zakrętki.



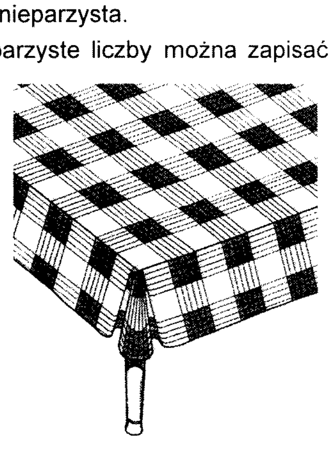
Zadanie 13 – 10 punktów

Kratka na obrusie

Wzór obrusu znajdującego się na rysunku tworzy się z białych, ciemnych i pasiastych kwadratowych kawałeczków. Na tym obrusie Franciszek obserwuje kwadratowy fragment, który w rogach ma białe kawałeczki tzn., że liczba kwadracików znajdujących się na jednym boku jest nieparzysta.

Franciszek wie, że nieparzyste liczby można zapisać jako 2n+1, gdzie n jest liczbą naturalną.

Ile kwadracików każdego typu ma obserwowany przez Franciszka fragment, jeżeli na jednym boku jest 2n+1 kwadracików ? Podaj ilość białych, ciemnych oraz pasiastych kwadracików w zależności od n.



Compétition interclasses de $3^{ème}$ et de 2^{nde}

Mathématiques sans frontières

organisée avec le concours de l'Inspection Pédagogique Régionale et l'IREM de Strasbourg

ACADEMIE DE STRASBOURG

EPREUVE DU 5 MARS 2002

- **On demande des explications ou des justifications pour les exercices 1, 7, 9, 10, 11, 12 et 13.**
- **Toute solution même partielle sera examinée.**
- **Le soin sera pris en compte.**
- **Ne prendre qu'une feuille-réponse par exercice.**

Exercice n° 1 | 7 points | Alibis

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots.

In einem Hotel wurde zwischen 22 Uhr und 22.15 Uhr ein Verbrechen begangen. Die Tat dauerte 7 Minuten.

Es gibt vier Verdächtige : Andrea, Bruce, Camilla und Dimitri. Sie bewohnen vier verschiedene Zimmer. Hier ihre Angaben bei der Polizei, was sie zwischen 22 Uhr und 22.15 Uhr gemacht haben :

Andrea : „Zuerst hatte ich 3 Minuten lang Besuch von Bruce, danach war Dimitri 4 Minuten bei mir. Dann hatte ich noch einen Telefonanruf von Camilla."

Bruce : „Ich war bei Andrea, bei Dimitri und habe noch mit einem Mausklick eine E-Mail verschickt."

Camilla : „Ich habe bis 22.05 Uhr die Fernsehnachrichten angesehen und danach 5 Minuten lang mit Andrea telefoniert."

Dimitri : „Ich war bei Andrea. Danach war Bruce für 3 Minuten bei mir."

Nachdem der Kommissar festgestellt hat, dass alle Angaben richtig sind, kennt er den Schuldigen. Wie hat er es herausgefunden ?

En un hotel, se cometió un crimen entre las 10 y las 10 y 15 minutos de la noche y la agresión duró 7 minutos.

Hay 4 sospechosos Andrea, Bruce, Camila, Dimitri, que ocupan 4 habitaciones diferentes y que, a propósito de su horario entre las 10 y las 10 y 15 , declararon lo siguiente a la policía :

Andrea : " Primero me visitó Bruce durante 3 minutos, más tarde recibí la visita de Dimitri, que duró 4 minutos y, finalmente, me telefoneó Camila."

Bruce : " Visité a Andrea, luego a Dimitri y después pinchando mandé un email."

Camila : " Vi el Telediario hasta las 10 y 5 minutos, a continuación telefoneé a Andrea durante 5 minutos."

Dimitri : " Visité a Andrea, y luego me visitó Bruce durante 3 minutos. "

¿ Después de verificar que todas las declaraciones eran exactas, el inspector encuentra al culpable. Como hizo ?

A crime was committed in a hotel between 10.00 p.m. and 10.15 p.m. and the attack lasted 7 minutes.

There are 4 suspects : Andrea, Bruce, Camilla, Dimitri. They are all staying in 4 different rooms and here are their statements to the police about their time table between 10.00 p.m. and 10.15 p.m. :

Andrea : « First Bruce paid me a visit for 3 minutes, then came Dimitri who stayed for 4 minutes ; finally Camilla called me on the phone. »

Bruce : « I went to see Andrea, then Dimitri, and with the click of the mouse, I sent an e-mail. »

Camilla : « I watched the news on TV until 10.05 p.m.. Then I called Andrea for 5 minutes. »

Dimitri : « I went to see Andrea, then Bruce came to see me for 3 minutes. »

After checking on all these statements, the police inspector found the culprit. How did he manage ?

In un albergo è accaduto un crimine tra le 22 e le 22 e quindici e l'aggressione è durata 7 minuti.

Vi sono 4 sospettati : Andrea, Bruce, Camilla e Dimitri che occupano 4 camere diverse e che rilasciano alla polizia le seguenti dichiarazioni relative alle loro azioni tra le 22 e le 22 e quindici.

Andrea : " Dapprima ho ricevuto la visita di Bruce durata 3 minuti, più tardi quella di Dimitri durata 4 minuti; infine, ho ricevuto una telefonata da Camilla."

Bruce : " Io sono andato a trovare Andrea, poi Dimitri e, quindi, con un clic di mouse ho spedito una e-mail."

Camilla : " Io ho guardato il telegiornale fino alle ore 22 e 5. In seguito ho telefonato ad Andrea per 5 minuti."

Dimitri : " Io sono andato a trovare Andrea, poi ho ricevuto la visita di Roberto durata 3 minuti."

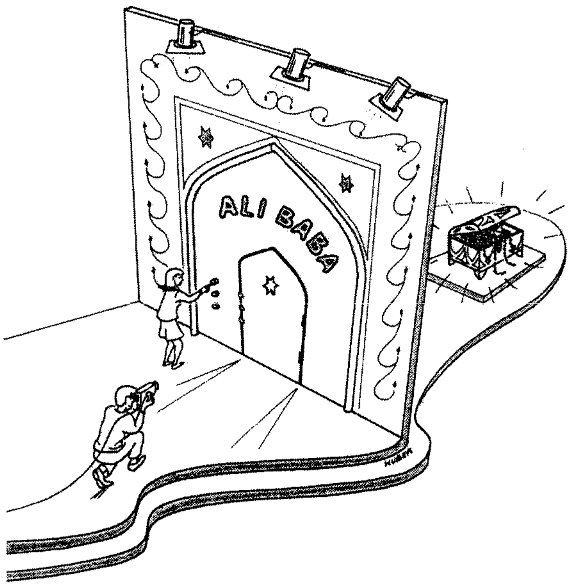
Dopo aver verificato la correttezza di tutte queste dichiarazioni, l'ispettore scopre il colpevole. Come ha fatto ?

Exercice n° 2 — 5 points

Le grand dil

Au cours du jeu télévisé "La Caverne d'Ali Baba", Sophie veut entrer dans la salle du trésor. La porte de celle-ci est munie de trois verrous commandés chacun par un commutateur qui l'ouvre et le ferme alternativement.
La porte est fermée. Sophie ne sait pas si un seul, deux ou trois verrous sont fermés.
Par 7 fois, elle aura le droit de choisir et d'actionner un commutateur. Dès l'instant où les trois verrous seront ouverts, la porte s'ouvrira.

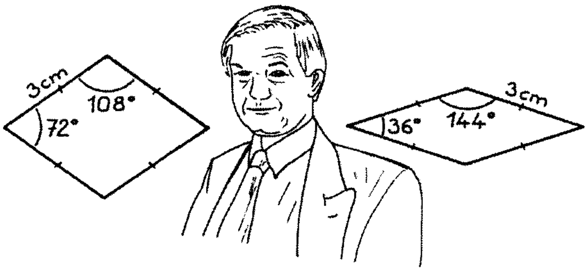
Donner une suite de 7 actions au cours de laquelle la porte s'ouvrira à coup sûr, quel que soit l'état initial des verrous.



Exercice n° 3 — 7 points

Décagomanie

Le mathématicien anglais Sir Roger Penrose né en 1931 a inventé dans les années 1970 un pavage non répétitif du plan qui n'utilise que deux sortes de dallettes en forme de losanges.
La figure ci-dessous donne les dimensions des deux losanges.



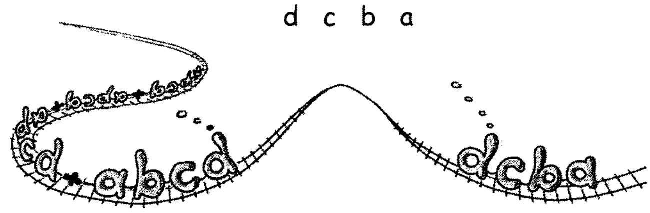
Chercher 2 façons différentes de construire un décagone régulier en assemblant 5 losanges de chaque type.
Présenter sur la feuille-réponse ces 2 décagones imbriqués en utilisant moins de 20 losanges au total.

Exercice n° 4 — 5 points

A verlan

Trouver un entier de 4 chiffres supérieur à 1 000 tel qu'en le multipliant par 4 on retrouve ce nombre "renversé".

$$\begin{array}{r} a\ b\ c\ d \\ \times\quad\ \ 4 \\ \hline d\ c\ b\ a \end{array}$$



Exercice n° 5 — 7 points

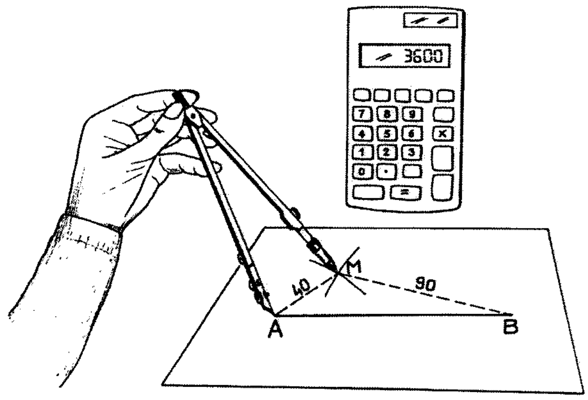
L'aviatrice

A et B sont deux points du plan, distants de 120 mm.
On cherche des points M_1, M_2, M_3, etc... tels que :

$$MA \times MB = 3600$$

les distances étant exprimées en millimètres.

Placer A et B sur la feuille-réponse, puis marquer en rouge de nombreux points M tels que $MA \times MB = 3600$. On verra apparaître une courbe que l'on essayera de compléter.
Présenter au verso de la feuille les paires de nombres utilisées pour obtenir les points M placés.

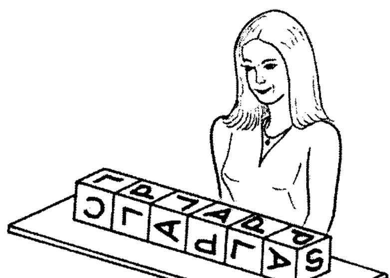


Exercice n° 6 — 5 points

Faces cachées

Etienne a posé sur la table 6 cubes tous identiques représentés ci-dessous.

Dessiner sur la feuille réponse ce que voit Barbara de l'autre côté de la table.

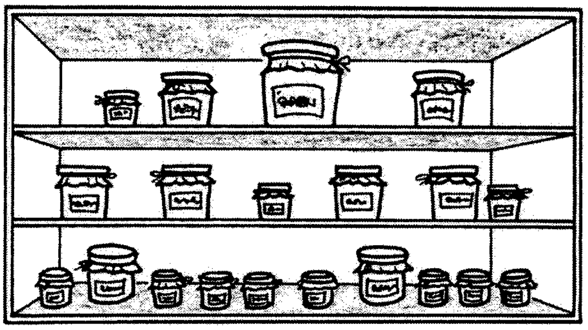


Exercice n° 7 — 7 pointzs

Pleins pots

Pierre prépare avec sa mère la gelée de groseille. Ils remplissent 20 pots de 3 tailles différentes. Les 20 pots remplis pèsent 8,4 kg en tout.
Pierre les range sur trois étagères, comme l'indique le dessin ci-dessous, de façon à ce que chaque étagère supporte le même poids.

Quelle est la masse de chaque sorte de pot rempli ? Justifier.



Exercice n° 8 — 5 points

L'Europe en lignes

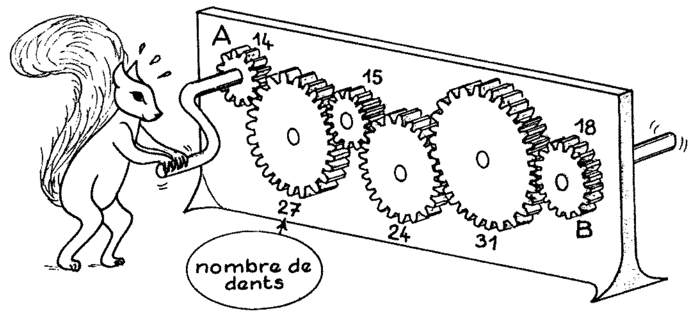
Berlin (D), Cardiff (GB), Göteborg (S), Lausanne (CH), Madrid (E), Naples (I), Paris (F), Plzen (CZ), Utrecht (NL) et Varsovie (PL) sont 10 villes d'Europe plus ou moins connues.
Leur particularité est que, sur ma carte, elles sont à peu près alignées 4 à 4 sur 5 droites.

Placer sur la feuille-réponse 10 points de façon qu'ils soient alignés 4 à 4 sur 5 droites.
Faire ensuite une deuxième figure présentant 15 points alignés 5 à 5 sur 6 droites.

Exercice n° 9 — 7 points

D'entiers

Dans le dispositif présenté sur la figure ci-dessous, quel est le nombre minimum de tours que doit faire la roue A pour que les roues A et B effectuent chacune un nombre entier non nul de tours ? Combien de tours effectue alors la roue B ? Justifier.

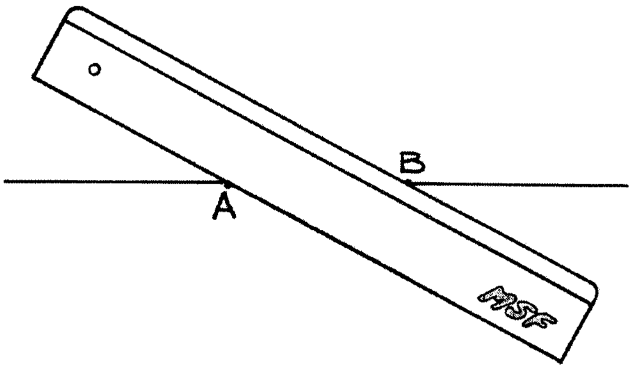


Exercice n° 10 — 10 points

Tout est en règle

Bruno veut partager un segment de droite [AB] en 3 parties égales. Il ne dispose que de son crayon et d'une règle non graduée à bords parallèles.

Bruno pose d'abord la règle comme indiqué sur la figure, puis il trace deux droites parallèles l'une passant par A et l'autre par B. Il recommence en changeant la direction de sa règle de manière à obtenir un losange dont [AB] est une diagonale.



À l'aide de sa règle, il construit alors soigneusement un réseau de losanges identiques sur sa feuille. En reliant des points convenablement choisis dans ce réseau, Bruno peut alors partager le segment [AB] en trois parties égales.

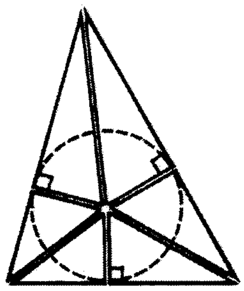
Tracer sur la feuille-réponse un segment [AB] de 8 cm, puis le partager en 3 parties égales suivant la méthode de Bruno.
Démontrer que les 3 segments ainsi obtenus ont bien des longueurs égales.

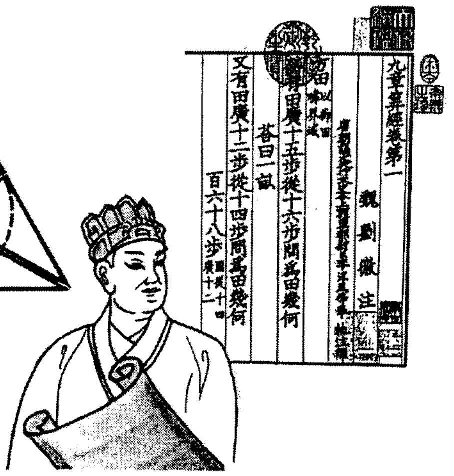
Spécial Seconde

Exercice n° 11 | 5 points | C'est Chu

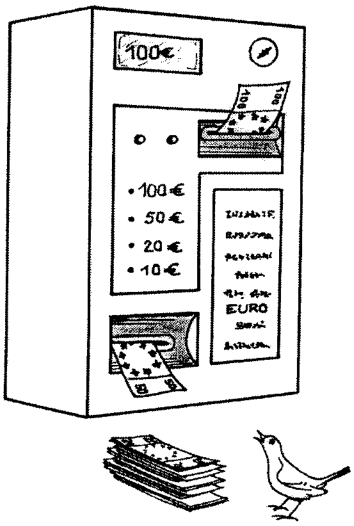
Lors d'un voyage en Chine, Marco a trouvé dans le manuscrit Chu Chang Suan Shu un puzzle représentant un cercle inscrit dans un triangle.
Dans ce triangle sont tracés les segments joignant les sommets au centre du cercle ainsi que les rayons du cercle aux points de contact avec les côtés du triangle.
En découpant ce triangle selon les segments tracés, on obtient 6 pièces triangulaires.

Ce puzzle permet de démontrer la formule $R = \dfrac{2\,S}{P}$ où S désigne l'aire du triangle, P son périmètre et R le rayon du cercle inscrit.





Tracer sur la feuille-réponse un triangle de côtés 10, 12 et 14 cm avec son cercle inscrit et ses 3 rayons caractéristiques.
Refaire cette construction sur une autre feuille pour découper les 6 pièces du puzzle. Agencer ces 6 pièces en une bande rectangulaire de largeur R que l'on collera sur la feuille-réponse, puis expliquer comment on obtient alors la formule énoncée ci-dessus.



Exercice n° 12 | 7 points | Euromate

Un changeur automatique de monnaie accepte des billets de 100 €, 50 €, 20 € et 10 € et donne la monnaie de la façon suivante :

- le billet de 100 € est changé en 1 billet de 50 € , 1 de 20 €, 2 de 10 € et 2 de 5 €
- le billet de 50 € est changé en 1 billet de 20 €, 2 de 10 € et 2 de 5 €
- le billet de 20 € est changé en 1 billet de 10 € et 2 de 5 €
- le billet de 10 € est changé en 2 billets de 5 €

Au départ on le remplit avec des billets de 50 €, 20 €, 10 € et 5 € de façon qu'il puisse effectuer exactement 100 opérations quel que soit le change exigé.

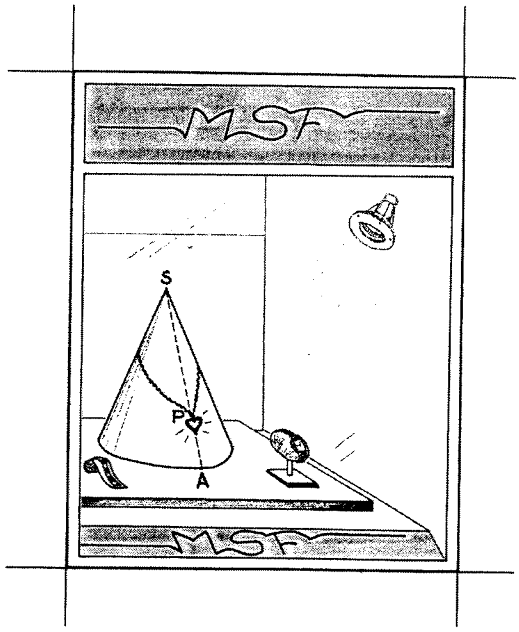
Après 100 opérations, on constate que l'appareil contient 20 billets de 100 €, 130 de 50 €, 40 de 20 € et 70 de 10 €.

Combien de billets de chaque sorte ont été introduits dans l'appareil au cours de ces 100 opérations ? Justifier.

Exercice n° 13 | 10 points | C'est pas du toc

Leonardo admire dans la vitrine d'une bijouterie un pendentif posé sur un présentoir conique. Le bijou est constitué d'une lourde pierre précieuse suspendue en un point P à une fine chaînette d'or.
La chaînette suit sur le cône une courbe qui est le plus court chemin allant de P à P en faisant le tour du cône.
Le diamètre de la base du cône est égal à 21 cm, la distance SA égale à 35 cm et la distance SP égale à 30 cm. On voudrait connaître la longueur de la chaînette.

Construire sur la feuille-réponse à l'échelle 1:5 le patron de la surface latérale du cône après découpage suivant la droite (SP). Sur ce patron, tracer la ligne de contact de la chaînette avec le cône puis calculer la longueur de la chaînette.



Corrigé de l'épreuve du 5 mars 2002

Exercice 1 : Alibis

Andrea est occupée avec Bruce pendant 3 minutes puis avec Dimitri pendant 4 minutes puis par l'appel téléphonique de Camilla pendant 5 minutes.
Elle est donc seule pendant 15 – (3 + 4 + 5) = 3 minutes, ce qui l'innocente.

Bruce est occupé avec Andrea pendant 3 minutes, puis avec Dimitri pendant 3 minutes ; il est donc seul pendant 15 – (3 + 3) = 9 minutes mais on ne connaît pas la durée de son e-mail.

Camilla est occupée jusqu'à 22 h 05 et au cours des 10 minutes restantes, elle est occupée avec Andrea pendant 5 minutes : elle est donc innocentée.

Dimitri voit Andrea après Bruce soit après 22 h 03 et avant le coup de téléphone qu'Andrea reçoit de Camilla soit avant 22 h 10 et Dimitri reste 4 minutes chez Andrea. Il arrive donc chez Andrea au plus tard à 22 h 06, donc il ne peut avoir commis le crime avant sa visite à Andrea ; il quitte Andrea au plus tôt à 22 h 07, il n'a pas pu commettre le crime après sa visite à Andrea car il voit ensuite Bruce pendant 3 minutes.

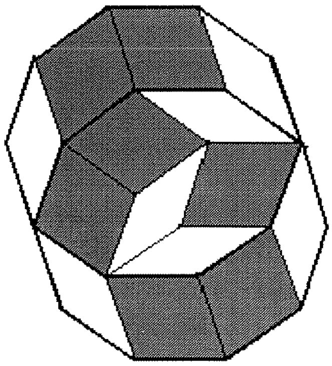
Par élimination, **le coupable est donc Bruce**.

Exercice 2 : Le grand dil

Une des stratégies possibles est d'activer les verrous dans l'ordre **1 – 2 – 3 – 2 – 1 – 2 – 3**.

Exercice 3 : Décagomanie

Il y a 6 façons d'assembler 5 losanges de chaque sorte pour constituer un décagone.
Voici un exemple de deux décagones imbriqués :



Pour en savoir plus sur les pavages de Penrose, 2 adresses :
http://ourworld.compuserve.com/homepages/gwihen/Penrose.html
http://www.geocities.com/SiliconValley/Pines/1684/Penrose.html

Exercice 4 : A verlan

L'unique solution est

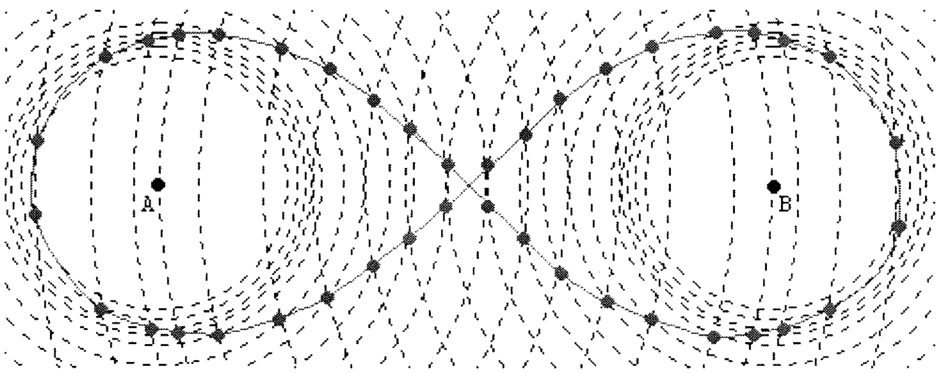
$$\begin{array}{r} 2\;1\;7\;8 \\ \times \quad\quad 4 \\ \hline 8\;7\;1\;2 \end{array}$$

Remarque : *La démonstration de l'unicité est un bon exercice d'arithmétique.*
$a < 3$ soit $a = 1$ ou 2 sinon $abcd \times 4 = dcba$ aurait 5 chiffres (à cause d'une retenue).
Le dernier chiffre du produit $d \times 4$ est pair donc $\boldsymbol{a = 2}$ et $\boldsymbol{d = 8}$. $\Rightarrow$ 2 fins possibles :

- On obtient $2bc8 \times 4 = 8cb2$ soit $(100b+10c+8)\times4=100c+10b+2$ ou $13b+1=2c$ avec $2c < 20$. Seule solution : **b = 1**, d'où **c = 7**.
- $b < 3$ car $4b$ ne doit pas donner de retenue. $4 \times 8 = 32$ donc on retient 3. $4c + 3$ est donc impair donc b est impair et égal à 1. $4c + 3 = 11$ ou 31 donc $c = 2$ ou 7. Par vérification, il n'y a que $c = 7$ qui convienne.

Exercice 5 : L'aviatrice

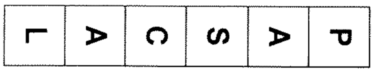
60 x 60 = 3600 ; 72 x 50 = 3600 ; 90 x 40 = 3600 ; 100 x 36 = 3600 ; 144 x 25 = 3600 etc…
Le premier produit donne le milieu de [AB]. Chacun des autres permet de placer 4 points.
Il faut cependant remarquer que l'existence de ces points est soumise à l'inégalité triangulaire, ainsi 20 x 180 = 3600 ne donne rien. En insistant, on voit apparaître **la lemniscate de Bernoulli** :

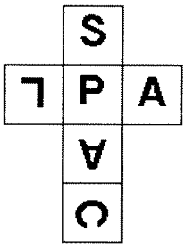


La lemniscate de Jacques BERNOULLI (1654-1705) est un ovale de CASSINI particulier. Elle admet un grand nombre de propriétés. C'est le lieu des points M tels que $MA \times MB = OA^2$ où O désigne le milieu de [AB].

Exercice 6 : Faces cachées

Voici un patron possible et ce que voit Barbara :



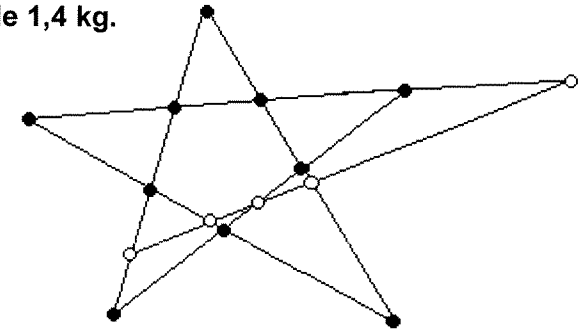


Exercice 7 : Pleins pots

Soient x, y et z les masses respectives d'un petit, d'un moyen et d'un grand pot.
Si on compare l'étagère la plus haute et l'étagère la plus basse, on constate que la masse d'un grand pot plus celle d'un petit est égale à celle de 8 petits pots. Un grand pot pèse donc sept fois plus qu'un petit soit $z = 7x$.
Chaque étagère supporte 2,8 kg (un tiers de 8,4 kg), en considérant les deux étagères du bas, on a donc le système suivant :

$$\begin{cases} 2x+4y=2{,}8 \\ 8x+2y=2{,}8 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x=0{,}2 \\ y=0{,}6 \end{cases} \quad \text{puis } z = 1{,}4.$$

Les pots ont des masses respectives de 0,2 , de 0,6 et de 1,4 kg.



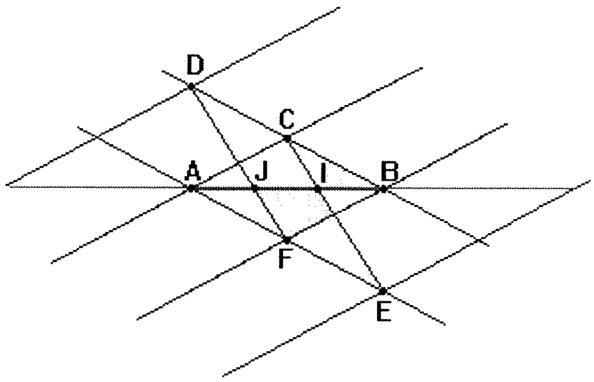
Exercice 8 : L'Europe en lignes

On peut partir d'un pentagone étoilé que l'on complètera en traçant une droite sécante à chacune des droites définies par ce pentagone.

Exercice 9 : D'entiers

Il suffit de considérer les roues A et B, car si une roue tourne d'une dent, toutes les autres tournent d'une dent. Si les roues A et B ont fait chacune un nombre entier de tours, le nombre de dents ayant défilé est un multiple commun de 14 et 18. PPCM(14;18) = 126 et $\frac{126}{14} = 9$ et $\frac{126}{18} = 7$.

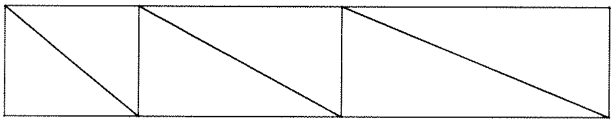
Donc si **A fait 9 tours** alors **B en fait 7**.

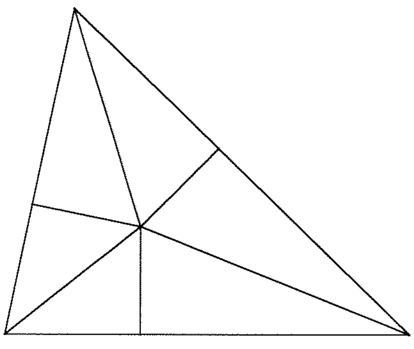


Exercice 10 : Tout est en règle

Il y a plusieurs solutions ; en voici une :

Les triangles BIC et AIE sont en situation de Thalès donc $\frac{BI}{AI} = \frac{BC}{AE}$.
Or AE = 2 BC donc AI = 2 IB et **I se trouve aux 2/ 3 de AB**.
De la même façon, on montrera que **J se trouve au 1/ 3 de AB** en considérant les triangles AJF et BJD.





Exercice 11 : C'est Chu

Le triangle est partagé en 6 triangles rectangles qui sont superposables 2 par 2.
On les rassemble 2 par 2 pour former un rectangle dont la largeur est égale au rayon du cercle inscrit et dont la longueur est égale au demi-périmètre du triangle.

D'où l'égalité : $S = R \times \frac{P}{2}$ ce qui donne $R = \frac{2\,S}{P}$.

Remarque :
Cet exercice est une belle démonstration géométrique de la formule donnant le rayon du cercle circonscrit à un triangle en fonction de son périmètre et de son aire.

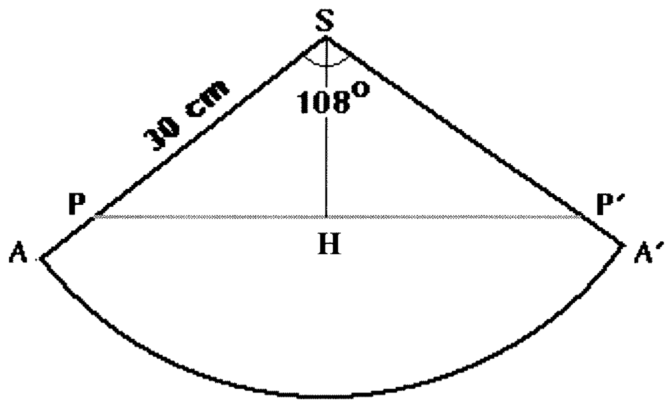
Exercice 12 : Euromate

Pour que 100 opérations soient possibles, quel que soit le change, il faut au départ : 100 billets de 50 € (au maximum 100 changes de 100 €), 100 de 20 € (pour des changes uniquement de 100 € et 50 €), 200 de 10 €, 200 de 5 €.

	100 €	50 €	20 €	10 €	5 €
Nombre de billets **au départ**	0	100	100	200	200
Billets de 100 € introduits	x				
Billets rendus		x	x	2x	2x
Billets de 50 € introduits		y			
Billets rendus			y	2y	2y
Billets de 20 € introduits			z		
Billets rendus				z	2z
Billets de 10 € introduits				t	
Billets rendus					2t
Bilan	x = 20	100+ y-x = 130	100+ z-x-y = 40	200+ t-2x-2y-z = 70	200 -2x-2y-2z-2t = 0
Par résolutions successives, on obtient	x = 20	y = 50	z = 10	t = 20	

Ont donc été introduits : **20 billets de 100 €, 50 de 50 €, 10 de 20 € et 20 de 10 €**.

Exercice 13 : C'est pas du toc



On déroule la surface latérale pour la mettre à plat, obtenant un secteur de disque.

Sur cette surface rectifiée, le chemin le plus court de P à P est le segment de droite [PP'], c'est "la ligne de contact" de la chaînette avec le cône.

Le périmètre de la base est 21π et celui du cercle de centre S et de rayon 35 cm est 70π.

D'où $\widehat{PSP'} = 360° \times \frac{21\pi}{70\pi} = 108°$.

La longueur de la chaînette PP' est égale à 2×30 cm $\times \sin(54°)$ soit **environ 48,5 cm** (déterminée grâce au triangle SHP rectangle en H).

Sachant que 2 x sin (54°) est le nombre d'or, c'est une chaînette à 24 carats !

Mathematik ohne Grenzen

ACADEMIE DE STRASBOURG

- *Bei den Aufgaben 1, 7, 9, 10, 11, 12 und 13 muss die Lösung begründet werden.*
- *Auch Teillösungen werden berücksichtigt.*
- *Die Sorgfalt der Darstellung wird mitbewertet.*
- *Für jede Aufgabe, auch für nicht gelöste, ist ein gesondertes Blatt mit der Bezeichnung von Schule und Klasse abzugeben.*

5. März 2002

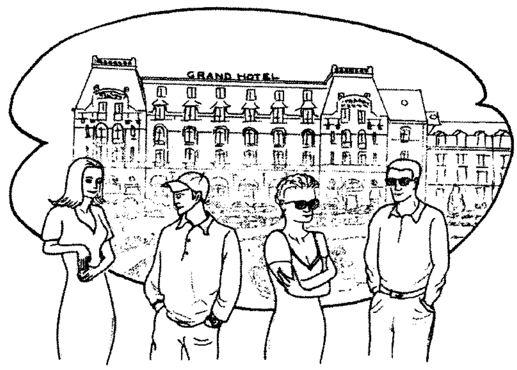
Aufgabe 1 | 7 Punkte | Alibis

Die Lösung muss in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter enthalten.

Dans un hôtel, un crime a été commis entre 22 h et 22h 15 et l'agression a duré 7 minutes.

Il y a 4 suspects Andréa, Bruce, Camilla et Dimitri qui occupent 4 chambres différentes et dont voici les déclarations à la police sur leur emploi du temps entre 22h et 22h 15 :

Andréa :" J'ai d'abord eu la visite de Bruce pendant 3 minutes, plus tard celle de Dimitri pendant 4 minutes ; enfin j'ai reçu un appel téléphonique de Camilla ".



Bruce : " J'ai rendu visite à Andréa, à Dimitri et d'un clic de souris j'ai envoyé un e-mail ".

Camille: "J'ai regardé le journal télévisé jusqu'à 22 h 05. Par la suite j'ai téléphoné à Andréa pendant 5 minutes".

Dimitri : " J'ai rendu visite à Andréa, puis j'ai eu celle de Bruce pendant 3 minutes".

Après avoir vérifié que toutes ces déclarations sont exactes, l'inspecteur trouve le coupable.

Comment a-t-il fait ?

En un hotel, se cometió un crimen entre las 10 y las 10 y 15 minutos de la noche y la agresión duró 7 minutos.

Hay 4 sospechosos Andrea, Bruce, Camila, Dimitri, que ocupan 4 habitaciones diferentes y que, a propósito de su horario entre las 10 y las 10 y 15 , declararon lo siguiente a la policía :

Andrea : " Primero me visitó Bruce durante 3 minutos, más tarde recibí la visita de Dimitri, que duró 4 minutos y, finalmente, me telefoneó Camila."

Bruce : " Visité a Andrea, luego a Dimitri y después pinchando mandé un email."

Camila : " Vi el Telediario hasta las 10 y 5 minutos, a continuación telefoneé a Andrea durante 5 minutos."

Dimitri : " Visité a Andrea, y luego me visitó Bruce durante 3 minutos. "

Después de verificar que todas las declaraciones eran exactas, el inspector encuentra al culpable.

¿Como hizo ?

A crime was committed in a hotel between 10.00 p.m. and 10.15 p.m. and the attack lasted 7 minutes.

There are 4 suspects : Andrea, Bruce, Camilla, Dimitri. They are all staying in 4 different rooms and here are their statements to the police about their time table between 10.00 p.m. and 10.15 p.m. :

Andrea : « First Bruce paid me a visit for 3 minutes, then came Dimitri who stayed for 4 minutes ; finally Camilla called me on the phone. »

Bruce : « I went to see Andrea, then Dimitri, and with the click of the mouse, I sent an e-mail. »

Camilla : « I watched the news on TV until 10.05 p.m.. Then I called Andrea for 5 minutes. »

Dimitri : « I went to see Andrea, then Bruce came to see me for 3 minutes. »

After checking on all these statements, the police inspector found the culprit.

How did he manage ?

In un albergo è accaduto un crimine tra le 22 e le 22 e quindici e l'aggressione è durata 7 minuti.

Vi sono 4 sospettati : Andrea, Bruce, Camilla e Dimitri che occupano 4 camere diverse e che rilasciano alla polizia le seguenti dichiarazioni relative alle loro azioni tra le 22 e le 22 e quindici.

Andrea : " Dapprima ho ricevuto la visita di Bruce durata 3 minuti, più tardi quella di Dimitri durata 4 minuti; infine, ho ricevuto una telefonata da Camilla."

Bruce : " Io sono andato a trovare Andrea, poi Dimitri e, quindi, con un clic di mouse ho spedito una e-mail."

Camilla : " Io ho guardato il telegiornale fino alle ore 22 e 5. In seguito ho telefonato ad Andrea per 5 minuti."

Dimitri : " Io sono andato a trovare Andrea, poi ho ricevuto la visita di Roberto durata 3 minuti."

Dopo aver verificato la correttezza di tutte queste dichiarazioni, l'ispettorescopre il colpevole.

Come ha fatto ?

Aufgabe 2 | 5 Punkte

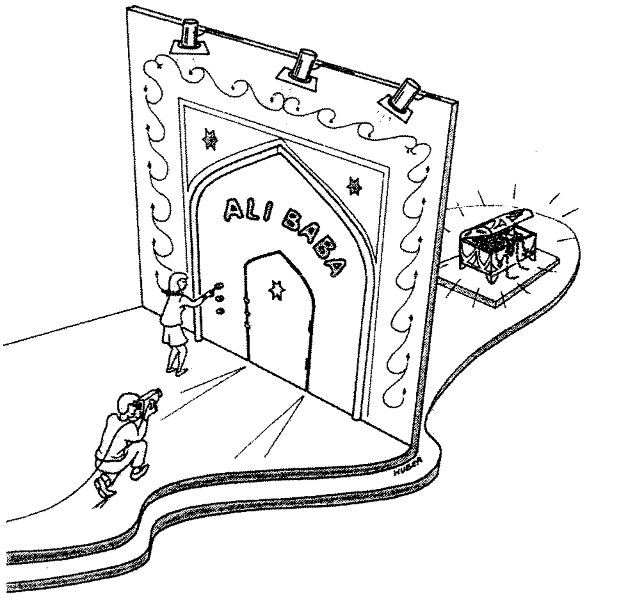
Sesam öffne dich

Im Finale der Fernsehshow *„Die Höhle des Ali Baba“* möchte Sophie in die Schatzkammer gelangen.

Die Tür ist mit 3 Riegeln versehen. Jeder ist mit einem Schaltknopf verbunden, bei dessen Betätigung sich der Riegel abwechselnd öffnet oder schließt.

Die Tür ist verschlossen und Sophie weiß nicht, ob ein, zwei oder drei Riegel vorgeschoben sind. Sie darf sieben Mal einen Schaltknopf ihrer Wahl betätigen. Nur wenn alle drei Riegel offen sind, öffnet sich die Tür.

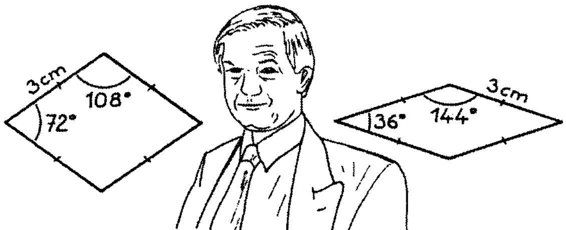
Gib eine Folge von 7 Schaltaktionen an, in deren Verlauf sich die Tür mit Sicherheit öffnen wird, unabhängig davon, wie die Ausgangsstellung der Riegel war.



Aufgabe 3 | 7 Punkte

Dekagomanie

Der englische Mathematiker Sir Roger Penrose (*1931) hat in den Siebziger Jahren eine nicht periodische Parkettierung der Ebene entdeckt, bei welcher nur zwei Arten von Rauten benötigt werden (siehe Abbildung).

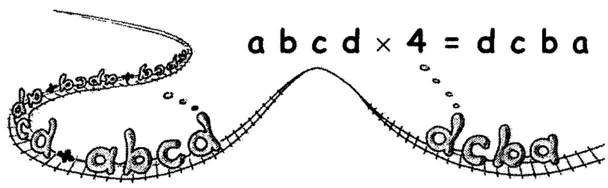


Versuche auf zwei verschiedene Arten ein regelmäßiges Zehneck aus 10 der abgebildeten Rauten zu legen. Jedes Mal sollen dazu 5 Rauten von jeder Sorte verwendet werden.

Klebe nun auf das Antwortblatt eine Figur, welche deine beiden Zehnecke enthält, aber aus weniger als 20 Rauten besteht.

Aufgabe 4 | 5 Punkte

sträwkcüR



Gesucht wird eine vierstellige Zahl mit verschiedenen Ziffern. Wenn man sie mit 4 multipliziert, erhält man die gleichen Ziffern, aber in umgekehrter Reihenfolge.

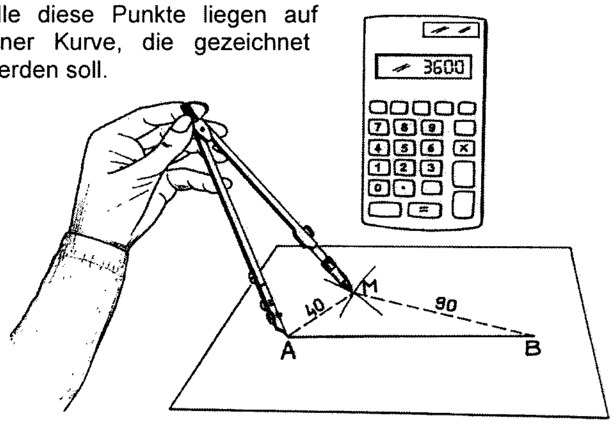
Finde eine solche Zahl!

Aufgabe 5 | 7 Punkte

Produktiv

A und B sind zwei Punkte mit dem Abstand 120 mm. Gesucht sind Punkte M, die alle mit A und B in einer Ebene liegen und für die $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 3600\ \text{mm}^2$ gilt.

Alle diese Punkte liegen auf einer Kurve, die gezeichnet werden soll.



Zeichne auf das Antwortblatt die Punkte A und B. Markiere dann in rot ausreichend viele Punkte M mit der genannten Eigenschaft, so dass die Gestalt der Kurve erkennbar wird. Vervollständige die Kurve durch Verbinden der Punkte.

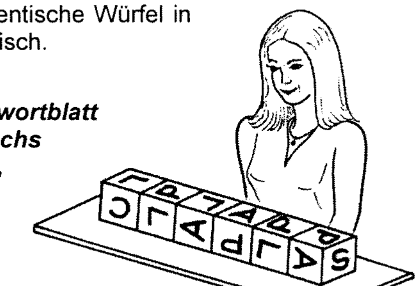
Notiere auf die Rückseite deines Blattes alle Zahlenpaare, welche du verwendet hast, um die Punkte M zu konstruieren.

Aufgabe 6 | 5 Punkte

Ansichtssache

Etienne legt sechs identische Würfel in einer Reihe auf den Tisch.

Zeichne auf das Antwortblatt die Rückseite der sechs abgebildeten Würfel, so wie Barbara sie sieht.



Aufgabe 7 | 7 Punkte

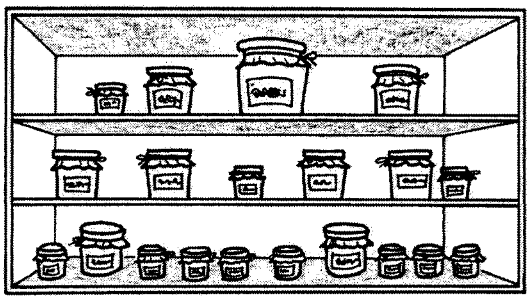
Süße Last

Peter kocht mit seiner Oma Johannisbeergelee ein.

Sie füllen 20 Gläser in 3 verschiedenen Größen. Die gefüllten Gläser wiegen zusammen 8,4 kg.

Peter setzt die Gläser so auf 3 Regalbretter, wie es in der Zeichnung zu sehen ist. Dabei hat er beachtet, dass alle drei Bretter das gleiche Gewicht tragen.

Wie viel wiegt jeweils ein Glas jeder Größe? Begründe!



Aufgabe 8 | 5 Punkte

Europa on line

Berlin (D), Cardiff (GB), Göteborg (S) Lausanne (CH), Madrid (E), Neapel (I), Paris (F), Pilsen (CZ), Utrecht (NL) und Warschau (PL) sind 10 europäische Städte.

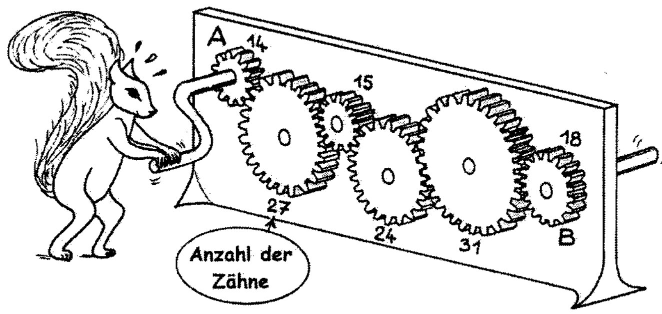
Auf meiner Karte ist mir aufgefallen, dass jeweils vier dieser Städte auf einer von fünf Geraden liegen.

Zeichne auf das Lösungsblatt 10 Punkte, von denen jeweils 4 auf einer von 5 Geraden liegen.

Zeichne dann eine zweite Figur mit 15 Punkten, von denen jeweils 5 auf einer von 6 Geraden liegen.

Aufgabe 9 | 7 Punkte

Finde den Dreh



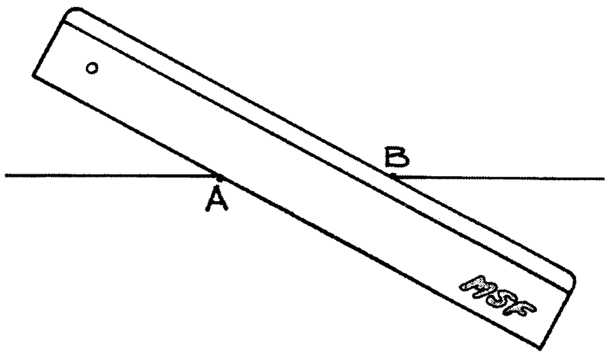
Wie viele vollständige Umdrehungen muss das Zahnrad A mindestens ausführen, damit das Zahnrad B ebenfalls eine ganze Anzahl von Umdrehungen macht?

Wie oft hat sich dann das Zahnrad B dann gedreht? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 10 | 10 Punkte

Dreigeteilt

Bruno möchte die Strecke AB in drei gleich lange Teilstücke zerlegen. Er hat dazu nur einen Bleistift und ein Lineal ohne Längenmarkierungen mit parallelen Kanten zur Verfügung.



Zunächst legt er sein Lineal so, wie es in der Abbildung zu sehen ist. Er zeichnet zwei Parallelen, von denen eine durch A und die andere durch B geht. Nun legt er das Lineal in einer anderen Richtung an und erhält so eine Raute mit der Diagonalen AB.

Mit Hilfe seines Lineals zeichnet er anschließend sorgfältig ein Netz von Rauten, welche zur ersten Raute kongruent sind. Indem er geeignete Punkte dieses Netzes miteinander verbindet, gelingt es Bruno, die Dreiteilung der Strecke AB durchzuführen.

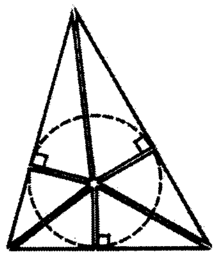
Zeichne eine Strecke der Länge 8 cm und zerlege sie mit Brunos Methode in drei gleich lange Teile.

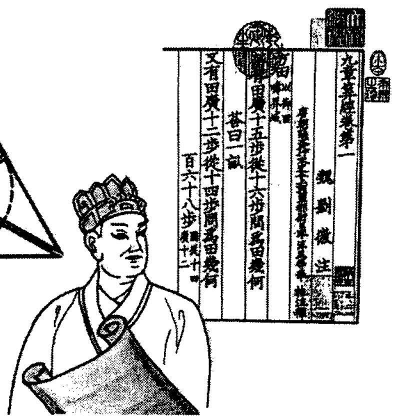
Beweise, dass die drei Teilstrecken tatsächlich gleich lang sind.

Klasse 11

Aufgabe 11	Das wusste schon der alte Shu : $R = \frac{2 \cdot A}{U}$
5 Punkte	

Bei einer Reise nach China entdeckte Marco im Manuskript *Chu Chang Suan Shu* ein Dreieckspuzzle, auf dem auch der Inkreis des Dreiecks zu sehen ist. Durch die Verbindungsstrecken des Inkreismittelpunktes mit den Eckpunkten des Dreiecks und durch die Berührradien wird das Dreieck in 6 Teildreiecke zerlegt.



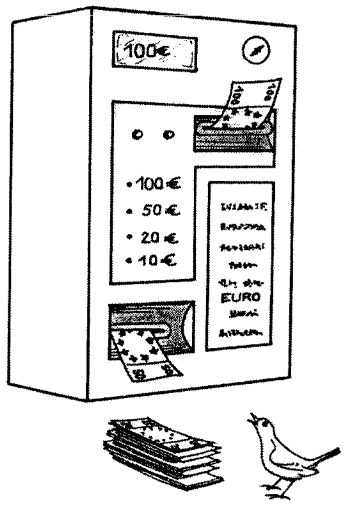


Mit Hilfe dieses Puzzles kann man zeigen, dass für den Umfang U, den Flächeninhalt A und den Inkreisradius R eines Dreiecks die in der Überschrift genannte Formel gilt.

Konstruiere auf dem Antwortblatt ein Dreieck mit den Seiten 10, 12 und 14 cm mit seinem Inkreis und den drei Berührradien.

Wiederhole die Konstruktion auf einem zweiten Blatt und zerschneide dieses Dreieck in die sechs genannten Teildreiecke. Setze daraus ein Rechteck mit der Seitenlänge R zusammen und klebe es auf das Antwortblatt.

Erkläre schließlich, wie man zu der im Aufgabentitel genannten Formel gelangt.



Aufgabe 12	7 Punkte	Euromat

Ein Wechselautomat für Geldscheine akzeptiert Scheine von 100 €, 50 €, 20 € und 10 €. Die eingeführten Scheine werden wie folgt gewechselt:

- 100 € in 1 mal 50 €, 1 mal 20 €, 2 mal 10 € und 2 mal 5 €
- 50 € in 1 mal 20 €, 2 mal 10 € und 2 mal 5 €
- 20 € in 1 mal 10 € und 2 mal 5 €
- 10 € in 2 mal 5 €

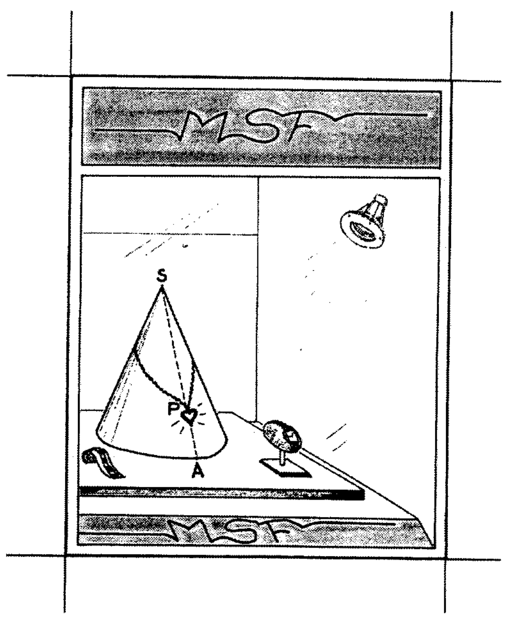
Zu Beginn befüllt man den Automaten mit Scheinen von 50, 20, 10 und 5 € und zwar so, dass er insgesamt genau 100 Wechselvorgänge durchführen kann, unabhängig davon, welche der vier Wechselarten gewählt wird.

Nachdem der Automat 100 Wechselvorgänge ausgeführt hat, überprüft man seinen gesamten Inhalt. Er enthält 20 Scheine von 100 €, 130 Scheine von 50 €, 40 Scheine von 20 € und 70 Scheine von 10 €.

Wie viele Scheine jeder Sorte wurden im Laufe der 100 Wechselvorgänge in den Automaten eingeführt? Begründe.

Aufgabe 13	10 Punkte
Geschmeidig	

Leonardo bewundert in der Auslage eines Juweliers einen Anhänger, dessen goldenes Kettchen sich um einen Kegel schmiegt. Die Linie, welche das Kettchen auf dem Kegelmantel beschreibt, ist der kürzeste Weg vom Aufhängepunkt P um den Kegel herum zurück zu P.



Die Grundfläche des Kegels hat einen Durchmesser von 21 cm. Die Mantellinie SA des Kegels ist 35 cm lang, der Punkt P ist 30 cm von der Kegelspitze S entfernt.

Zeichne zunächst im Maßstab 1:5 die Abwicklung der Mantelfläche des Kegels nach dem Aufschneiden längs der Geraden (SP).

Zeichne dann auf dieser Mantelfläche die Linie ein, auf welcher sich das Goldkettchen an den Kegel anlegt.

Berechne schließlich die Länge des Kettchens.

MoG 5.März 2002

Mathematik ohne Grenzen 2002
Lösungshinweise zum Wettbewerb am 5.3.2002

Aufgabe 1 : Alibis

Andrea war 3 Minuten mit Bruce und 4 Minuten mit Dimitri zusammen. Nach der Aussage von Camilla hat das anschließende Telefongespräch 5 Minuten gedauert. Andrea hat also für 3 Minuten kein Alibi und scheidet damit als Täterin aus

Bruce war 3 Minuten mit Andrea und 3 Minuten mit Dimitri zusammen. Es bleiben also noch 9 Minuten übrig. Da der Versand der Email nur einen Mausklick gedauert hat, könnte er der Täter sein.

Camilla sieht bis 22.05 Uhr fern. 5 Minuten spricht sie mit Andrea. Es bleiben also noch 6 Minuten, und damit ist sie unschuldig.

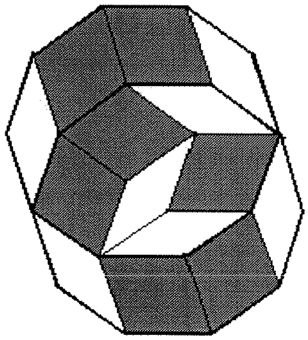
Dimitri besucht Andrea nach Bruce, also frühestens um 22.03 Uhr. Der Besuch dauert 4 Minuten, er verlässt sie also frühestens um 22.07 Uhr . Das anschließende Treffen mit Bruce dauert 3 Minuten. In den verbleibenden 5 Minuten kann er das Verbrechen nicht begangen haben.

Andererseits besucht er Andrea vor deren Telefonat mit Camilla, das spätestens 22.10 Uhr begonnen haben muss. Er trifft also spätestens um 22.06 bei Andrea ein und kann daher die Tat auch vorher nicht begangen haben.

Also kommt nur Bruce als Täter in Frage.

Aufgabe 2 : Sesam öffne dich

Eine mögliche Lösung ist die Reihenfolge **1 – 2 – 3 – 2 – 1 – 2 – 3**.



Aufgabe 3 : Décagomanie

Es gibt 6 Möglichkeiten aus 5 Rauten jeder Sorte ein Zehneck zu legen. Die Abbildung zeigt eine mögliche Lösung für die gewünschte Figur.
Im Internet findet sich eine Vielzahl von Seiten zu diesem Thema.

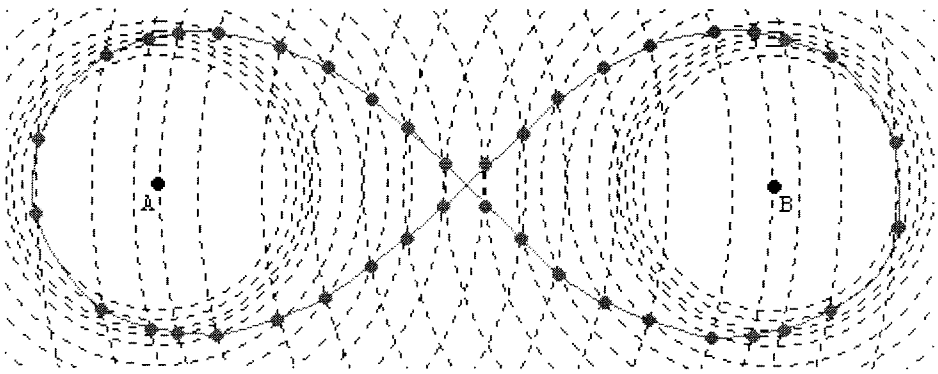
Aufgabe 4 : sträwkcüR

2178 · **4 =8712** ist die einzige Lösung.

Der Nachweis der Eindeutigkeit ist nicht verlangt, stellt aber eine hübsche Übungsaufgabe dar

Aufgabe 5 : Produktiv

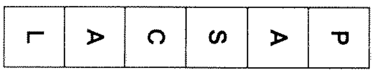
60 x 60 = 3600 ; 72 x 50 = 3600 ;
90 x 40 = 3600 ; 100 x 36 = 3600 ;
144 x 25 = 3600 etc...
Das erste Produkt kennzeichnet die Mitte von AB. Alle anderen Paare erlauben die Konstruktion von 4 Punkten.
Dabei ist zu beachten, dass die Dreiecksungleichung erfüllt sein muss. So ergibt zum Beispiel das Produkt 20 x 180 = 3600 keine Kurvenpunkte.
Als Kurve erhält man die **Lemniskate von Bernoulli.**

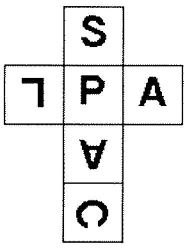


Aufgabe 6 : Ansichtssache

Hier ein mögliches Würfelnetz und die

Rückseite wie sie Barbara sieht:





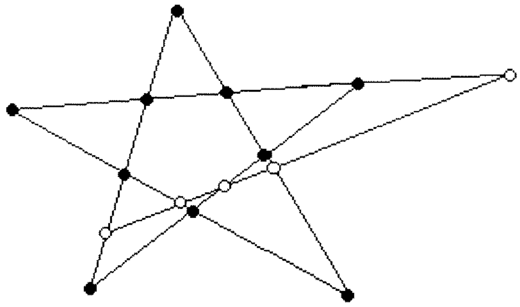
Aufgabe 7 : Süße Last

Jedes Brett trägt 2,8 kg (ein Drittel von 8,4 kg). Bezeichnet man die drei Massen der Töpfe mit a für den großen, b für den mittleren und c für den kleinen Topf, so erhält man das folgende Gleichungssystem :

$$\begin{aligned} a + 2b + c &= 2{,}8\,\text{kg} \\ 4b + 2c &= 2{,}8\,\text{kg} \\ 2b + 8c &= 2{,}8\,\text{kg} \end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich a = 1,4 kg, b = 0,6 kg und c = 0,2 kg.

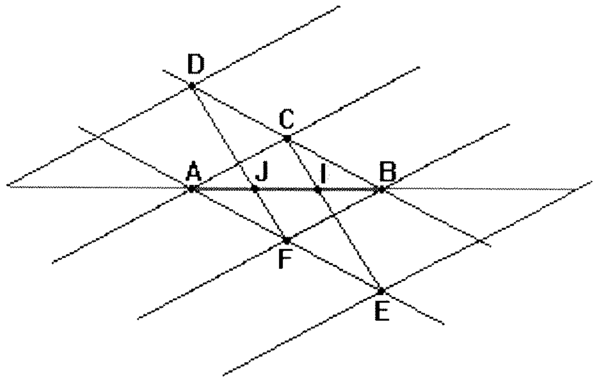
Aufgabe 8 : Europa on Line



Aufgabe 9 : Finde den Dreh

Wenn sich Rad A um einen Zahn weiterdreht, drehen sich alle Zahnräder um einen Zahn weiter . Daher genügt es, nur Rad A und Rad B zu betrachten. Machen A und B eine Anzahl voller Umdrehungen, so muss die Anzahl der Zähne, um die sie sich weitergedreht haben, ein Vielfaches von 14 und 18 sein . Da die Minimalzahl gesucht ist, berechnet man kgV(14 ;18) = 126.
Umdrehungen von A : 126 : 14 = 9.
Umdrehungen von B : 126 : 18 = 7.

Aufgabe 10 : Dreigeteilt



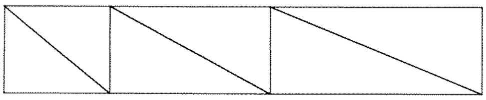
Die Abbildung zeigt eine von verschiedenen Lösungsmöglichkeiten :

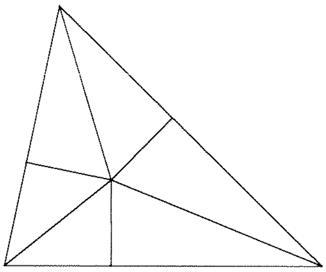
Es ist $\overline{AE} = 2\overline{BC}$ und damit $\overline{AI} = 2\ \overline{IB}$ (Strahlensatz).

Also gilt $\overline{BI} = \frac{1}{3}\overline{AB}$.

Aus $\overline{DB} = 2\overline{AF}$ folgt analog $\overline{AJ} = \frac{1}{3}\overline{AB}$

Aufgabe 11 : Das wusste schon...





Man erhält 6 Teildreiecke, die paarweise kongruent sind. Setzt man sie so wie in der Abbildung zu einem Rechteck zusammen, so hat dieses die Seitenlängen R und $\frac{1}{2}U$. Man erhält $A = \frac{1}{2}UR$ und daraus $R = \frac{2A}{U}$.

Aufgabe 12 : Euromat

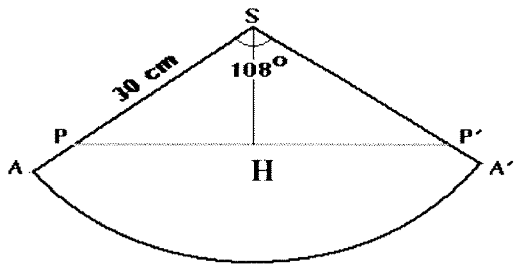
	100 €	**50 €**	**20 €**	**10 €**	**5 €**
Befüllung am Anfang	0	100	100	200	200
Eingabe von 100 €	**20**				
Ausgabe		-20	-20	-40	-40
Eingabe von 50 €		**50**			
Ausgabe			-50	-100	-100
Eingabe von 20 €			**10**		
Ausgabe				-10	-20
Eingabe von 10 €				**20**	
Ausgabe					-40
Bilanz	**20**	**130**	**40**	**70**	**0**

Mit der angegebenen Anfangsbefüllung lassen sich genau 100 Operationen durchführen. Diese Zahl durch die Befüllung mit 200 Scheinen zu 5 € festgelegt und hängt nicht mehr davon ab, wie viele andere Scheine während des Wechselns eingeführt werden.

Bei 100 € beginnend, erhält man aus der Anfangsbefüllung, der Bilanz und der Ausgabe die Anzahl der eingegebenen Scheine zu 50 €.

Durch analoges Vorgehen erhält man nacheinander die Anzahl der eingeführten Scheine von 20 € und 10 €.

Aufgabe 13 : Anschmiegsam



Der Umfang der Grundfläche beträgt $21\text{cm}\cdot\pi$.

Die Abwicklung des Kegelmantels ist demnach ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{AS} = 35\,\text{cm}$ und dem Mittelpunktswinkel $\alpha = 108°$.

Der kürzeste Weg von P um den Kegel herum, zurück zu P, erscheint auf der Abwicklung als Strecke PP'. Es ist $\overline{PP'} = 2\overline{SP}\cdot\sin 54° \approx 48{,}5\,\text{cm}$.

Competizione interclassi di 2 e 3

Matematica senza frontiere

Prova
5 Marzo 2002

- **Per gli esercizi 1, 7, 9, 10, 11, 12 e 13 sono richieste spiegazioni, giustificazioni o illustrazioni**
- **Sarà esaminata ogni risoluzione, anche parziale.**
- **Si terrà conto dell'accuratezza.**
- **Ogni foglio-risposta deve essere utilizzato per un singolo esercizio per il quale deve essere riportata una sola soluzione.**

Esercizio n° 1 | 7 punti | Alibis

Soluzione da redigere con un minimo di 30 parole in francese o inglese o spagnolo o tedesco.

In einem Hotel wurde zwischen 22 Uhr und 22.15 Uhr ein Verbrechen begangen. Die Tat dauerte 7 Minuten.

Es gibt vier Verdächtige : Andrea, Bruce, Camilla und Dimitri. Sie bewohnen vier verschiedene Zimmer. Hier ihre Angaben bei der Polizei, was sie zwischen 22 Uhr und 22.15 Uhr gemacht haben :

Andrea : „Zuerst hatte ich 3 Minuten lang Besuch von Bruce, danach war Dimitri 4 Minuten bei mir. Dann hatte ich noch einen Telefonanruf von Camilla."

Bruce : „Ich war bei Andrea, bei Dimitri und habe noch mit einem Mausklick eine E-Mail verschickt."

Camilla : „Ich habe bis 22.05 Uhr die Fernsehnachrichten angesehen und danach 5 Minuten lang mit Andrea telefoniert."

Dimitri : „Ich war bei Andrea. Danach war Bruce für 3 Minuten bei mir."

Nachdem der Kommissar festgestellt hat, dass alle Angaben richtig sind, kennt er den Schuldigen. Wie hat er es herausgefunden ?

En un hotel, se cometió un crimen entre las 10 y las 10 y 15 minutos de la noche y la agresión duró 7 minutos.

Hay 4 sospechosos Andrea, Bruce, Camila, Dimitri, que ocupan 4 habitaciones diferentes y que, a propósito de su horario entre las 10 y las 10 y 15 , declararon lo siguiente a la policía :

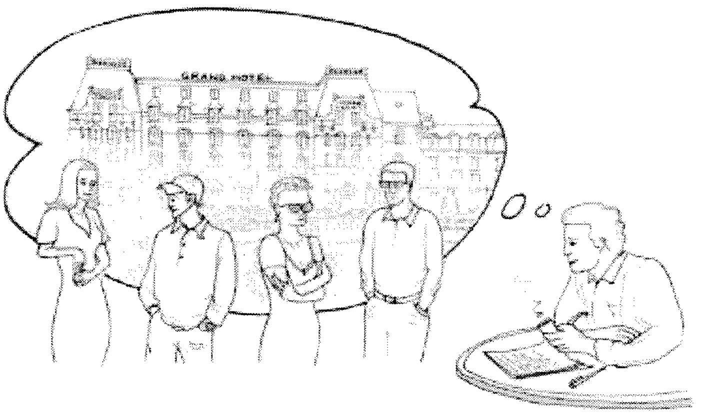
Andrea : " Primero me visitó Bruce durante 3 minutos, más tarde recibí la visita de Dimitri, que duró 4 minutos y, finalmente, me telefoneó Camila."

Bruce : " Visité a Andrea, luego a Dimitri y después pinchando mandé un email."

Camila : " Vi el Telediario hasta las 10 y 5 minutos, a continuación telefoneé a Andrea durante 5 minutos."

Dimitri : " Visité a Andrea, y luego me visitó Bruce durante 3 minutos. "

¿ Después de verificar que todas las declaraciones eran exactas, el inspector encuentra al culpable. Como hizo ?



A crime was committed in a hotel between 10.00 p.m. and 10.15 p.m. and the attack lasted 7 minutes.

There are 4 suspects : Andrea, Bruce, Camilla, Dimitri. They are all staying in 4 different rooms and here are their statements to the police about their time table between 10.00 p.m. and 10.15 p.m. :

Andrea : « First Bruce paid me a visit for 3 minutes, then came Dimitri who stayed for 4 minutes ; finally Camilla called me on the phone. »

Bruce : « I went to see Andrea, then Dimitri, and with the click of the mouse, I sent an e-mail. »

Camilla : « I watched the news on TV until 10.05 p.m.. Then I called Andrea for 5 minutes. »

Dimitri : « I went to see Andrea, then Bruce came to see me for 3 minutes. »

After checking on all these statements, the police inspector found the culprit. How did he manage ?

Dans un hôtel, un crime a été commis entre 22 h et 22 h 15 et l'agression a duré 7 minutes.

Il y a 4 suspects Andréa, Bruce, Camilla, Dimitri qui occupent 4 chambres différentes et dont voici les déclarations à la police sur leur emploi du temps entre 22 h et 22 h 15 :

Andréa : " J'ai d'abord eu la visite de Bruce pendant 3 minutes, plus tard celle de Dimitri pendant 4 minutes ; enfin j'ai reçu un appel téléphonique de Camilla ".

Bruce : " J'ai rendu visite à Andréa, à Dimitri et d'un clic de souris j'ai envoyé un e-mail ".

Camilla :" J'ai regardé le journal télévisé jusqu'à 22 h 05. Par la suite j'ai téléphoné à Andréa pendant 5 minutes".

Dimitri : " J'ai rendu visite à Andréa, puis j'ai eu celle de Bruce pendant 3 minutes".

Après avoir vérifié que toutes ces déclarations sont exactes, l'inspecteur trouve le coupable. Comment a-t-il fait ?

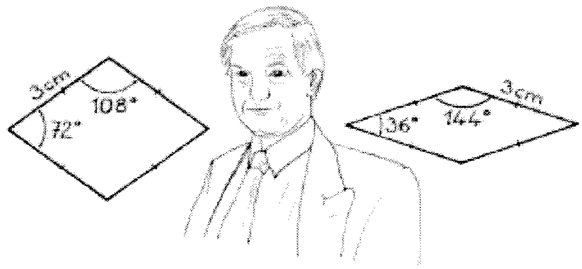
Esercizio n°2 — 5 punti
Un gran dilemma

Nel corso del gioco televisivo "La caverna di Alì Baba", Sofia vuole entrare nella sala del tesoro. La porta di questa è munita di tre chiavistelli; ogni chiavistello è comandato da un commutatore che lo apre e lo chiude alternativamente. La porta è chiusa. Sofia non sa se uno solo, due o tre chiavistelli sono chiusi. Per 7 volte, ella avrà il diritto di scegliere e di azionare un commutatore. Nell'istante in cui i tre chiavistelli saranno aperti, la porta si aprirà.

Fornite una serie di 7 azioni nel corso delle quali la porta si apra a colpo sicuro, qualunque sia lo stato iniziale dei chiavistelli.

Esercizio n°3 — 7 punti
Decagomania

Il matematico inglese sir Roger Penrose nato nel 1931 ha inventato nel 1970 una pavimentazione che utilizza solo due tipi di lastre a forma di losanghe. La figura fornisce le dimensioni delle due losanghe.



Cercate due modi differenti per costruire un decagono regolare assemblando 5 losanghe di ciascun tipo. Presentate sul foglio risposta questi due dodecagoni embricati (sovrapposti, cioè, come tegole) in modo da utilizzare complessivamente meno di 20 losanghe.

Esercizio n°4 — 5 punti
All'incontrario

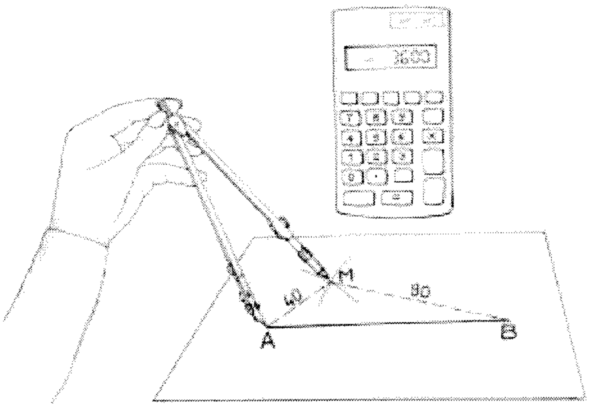
Individuate un intero di 4 cifre maggiore di 1000 in modo che moltiplicandolo per 4 si ritrovi questo numero capovolto.

$$\begin{array}{r} a\ b\ c\ d \\ \times\quad\ \ 4 \\ \hline d\ c\ b\ a \end{array}$$

Esercizio n°5 — 7 punti
Voglia di volare

A e B sono due punti del piano distanti 120 mm. Si cercano dei punti M_1, M_2, M_3, ecc... tali che **MA × MB = 3600** esprimendo le distanze in millimetri.

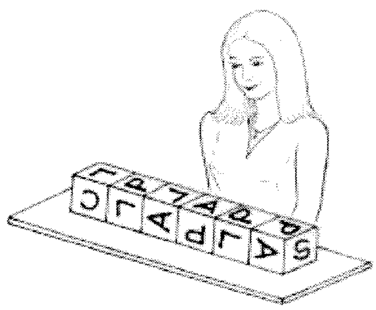
Posizionate A e B sul foglio risposta, poi segnate in rosso numerosi punti M tali che MA × MB = 3600. Si vedrà apparire una curva che sarà da completare. Presentate sul retro del foglio le coppie di numeri utilizzati per ottenere i punti M segnati in rosso.



Esercizio n°6 — 5 punti
Facce nascoste

Stefania ha posato sul tavolo 6 cubi tutti uguali qui rappresentati.

Disegnate sul foglio risposta quello che Barbara vede dall'altro lato del tavolo.

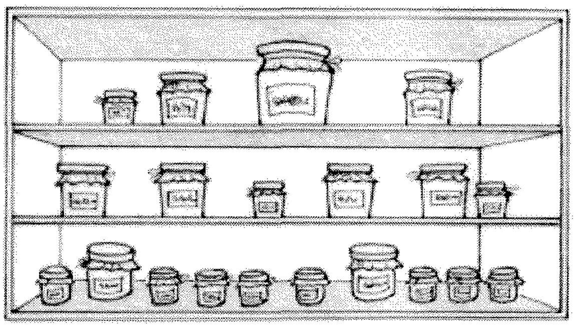


Esercizio n°7 — 7 punti

Vasetti pieni

Piero prepara con sua madre le gelatine di ribes. Riempiono 20 vasetti di 3 misure differenti. I 20 vasetti riempiti pesano 8,4 Kg in tutto. Piero li sistema su tre ripiani, come indicato in figura, in modo che ogni ripiano sostenga lo stesso peso.

Qual è la massa di ogni tipo di vaso riempito? Giustificate la risposta.



Esercizio n°8 — 5 punti

Linee europee

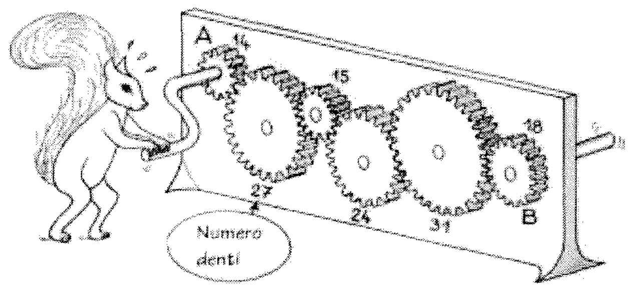
Berlin (D), Cardiff (GB), Göteborg (S), Lausanne (CH), Madrid (E), Napoli (I), Paris (F), Plzen (CZ), Utrecht (NL) e Warsawa (PL) sono 10 città d'Europa più o meno conosciute. La loro particolarità consiste nel fatto che sono pressoché allineate 4 a 4 in 5 direzioni.

Disponete sul foglio risposta 10 punti in modo che siano allineati 4 a 4 su 5 rette. Disegnate, poi, una seconda figura che rappresenti 15 punti allineati 5 a 5 su 6 rette.

Esercizio n°9 — 7 punti

Ingranaggi dentati

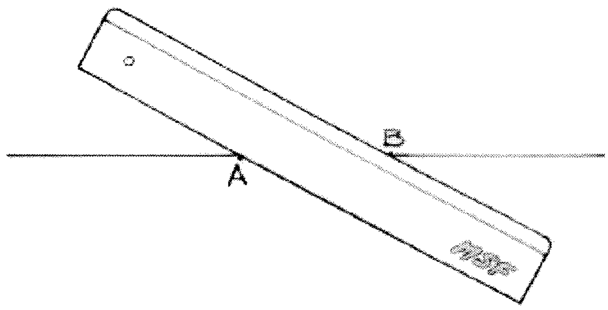
Nel dispositivo presentato in figura, qual è il numero minimo di giri che deve fare la ruota A affinché le ruote A e B effettuino ciascuna un numero intero non nullo di giri? Quanti giri effettua, allora, la ruota B? Giustificate la risposta.



Esercizio n°10 — 10 punti

Tutto è in regola

Bruno vuole ripartire un segmento di retta AB in 3 parti uguali. Dispone solo di una matita e di un righello non graduato a bordi paralleli. Bruno posa inizialmente il



righello come indicato in figura, poi traccia due rette parallele l'una passante per A e l'altra per B. Ricomincia cambiando la direzione del suo righello in modo da ottenere una losanga di cui AB è una diagonale.

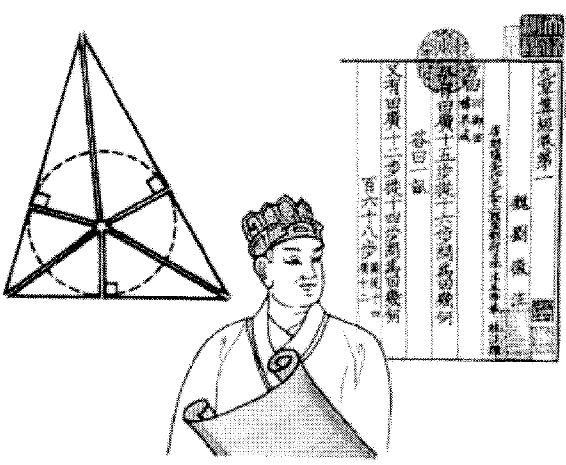
Con l'aiuto del suo righello egli costruisce accuratamente una rete di losanghe identiche sul suo foglio. Congiungendo punti opportunamente scelti in questa rete, Bruno può allora suddividere il segmento AB in tre parti uguali.

Tracciate sul foglio risposta un segmento AB di 8 cm, suddividetelo in 3 parti uguali seguendo il metodo di Bruno. Dimostrate che i 3 segmenti così ottenuti hanno uguale lunghezza.

Solo per la classe terza

Esercizio n°11 — 5 punti
China puzzle

Durante un viaggio in Cina, Marco trovò in un manoscritto di Chu Chang Suan Shu un puzzle che rappresenta una circonferenza inscritta in un triangolo. In questo triangolo sono disposti i segmenti che congiungono i vertici col centro della circonferenza e, anche, i raggi della circonferenza nei punti di contatto con i lati del triangolo. Tagliando questo triangolo lungo i segmenti disegnati, si ottengono 6 pezzi a forma triangolare. Questo puzzle permette di dimostrare la formula $R = \frac{2S}{P}$ dove S è l'area del triangolo, P il suo perimetro e R il raggio della circonferenza inscritta.



Tracciate sul foglio risposta un triangolo di lati 10, 12 e 14 centimetri con la sua circonferenza inscritta e i suoi 3 raggi caratteristici. Rifate tale costruzione su un altro foglio per tagliare i 6 pezzi del puzzle. Disponete questi 6 pezzi in una banda rettangolare di lunghezza R che incollerete sul foglio risposta, poi spiegate come si ottiene la formula precedentemente enunciata.

Esercizio n°12 — 7 punti
Il cambiaeuro

Un apparecchio automatico cambiavalute accetta biglietti da 100, da 50, da 20 e da 10 euro e fornisce la valuta nel modo seguente:

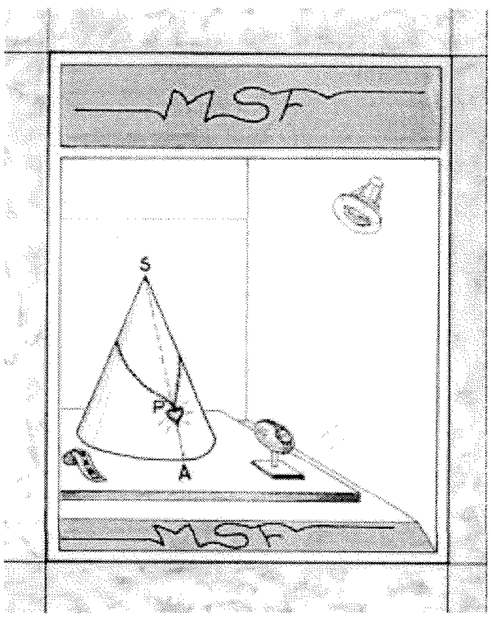
- Il biglietto da 100 euro è cambiato in 1 biglietto da 50, 1 da 20, 2 da 10 e 2 da 5 euro
- Il biglietto da 50 euro è cambiato in 1 biglietto da 20, 2 da 10 e 2 da 5 euro
- Il biglietto da 20 euro è cambiato in 1 biglietto da 10 e 2 da 5 euro
- Il biglietto da 10 euro è cambiato in 2 biglietti da 5 euro.

All'inizio viene riempito di biglietti da 50, da 20, da 10 e da 5 euro in modo che si possano effettuare esattamente 100 operazioni qualunque sia il cambio richiesto. Dopo le 100 operazioni, si constata che il distributore contiene 20 biglietti da 100, 130 da 50, 40 da 20 e 70 biglietti da 10 euro.

Quanti biglietti di ogni taglio sono stati introdotti nel distributore nel corso di queste 100 operazioni? Giustificate la risposta.

Esercizio n°13 — 10 punti
Non è paccotiglia

Leonardo ammira nella vetrina di una bigiotteria un ciondolo posto su un sostegno a forma di cono. Il gioiello è costituito da una pietra dura appesa in un punto P a una sottile catenina d'oro. La catenina descrive sul cono una curva che rappresenta il cammino più breve da P a P facendo il giro del cono. Il diametro della base del cono misura 21 cm; la distanza SA misura 35 cm e quella SP 30 cm. Si vuole conoscere la lunghea della catenina.



Costruite sul foglio risposta in scala 1:5 il modello della superficie laterale del cono dopo averlo tagliato seguendo la retta SP. Su questo modello tracciate le linee di contatto della catenina con il cono, poi calcolate la lunghezza della catenina.

Mathématiques sans frontières

ACADEMIE
DE STRASBOURG

March 2002

- Explanations are needed for questions 1, 7, 9, 10, 11, 12 and 13.
- An attempt at an answer will get some marks.
- Careful working is taken into account.
- Each class should put in only one answer sheet per question..

QUESTION 1
7 MARKS

Alibis

Write down your answer in French, German, Spanish or Italian using at least 30 words.

Dans un hôtel, un crime a été commis entre 22 h et 22h 15 et l'agression a duré 7 minutes.

Il y a 4 suspects Andréa, Bruce, Camilla et Dimitri qui occupent 4 chambres différentes et dont voici les déclarations à la police sur leur emploi du temps entre 22 h et 22 h 15 :

Andréa :" J'ai d'abord eu la visite de Bruce pendant 3 minutes, plus tard celle de Dimitri pendant 4 minutes ; enfin j'ai reçu un appel téléphonique de Camilla ".

Bruce : " J'ai rendu visite à Andréa, à Dimitri et d'un clic de souris j'ai envoyé un e-mail ".

Camille: "J'ai regardé le journal télévisé jusqu'à 22 h 05. Par la suite j'ai téléphoné à Andréa pendant 5 minutes".

Dimitri : " J'ai rendu visite à Andréa, puis j'ai eu celle de Bruce pendant 3 minutes".

Après avoir vérifié que toutes ces déclarations sont exactes, l'inspecteur trouve le coupable.

Comment a-t-il fait ?

En un hotel, se cometió un crimen entre las 10 y las 10 y 15 minutos de la noche y la agresión duró 7 minutos.

Hay 4 sospechosos Andrea, Bruce, Camila, Dimitri, que ocupan 4 habitaciones diferentes y que, a propósito de su horario entre las 10 y las 10 y 15 , declararon lo siguiente a la policía :

Andrea : " Primero me visitó Bruce durante 3 minutos, más tarde recibí la visita de Dimitri, que duró 4 minutos y, finalmente, me telefoneó Camila."

Bruce : " Visité a Andrea, luego a Dimitri y después pinchando mandé un email."

Camila : " Vi el Telediario hasta las 10 y 5 minutos, a continuación telefoneé a Andrea durante 5 minutos."

Dimitri : " Visité a Andrea, y luego me visitó Bruce durante 3 minutos. "

¿ Después de verificar que todas las declaraciones eran exactas, el inspector encuentra al culpable. Como hizo ?

In einem Hotel wurde zwischen 22 Uhr und 22.15 Uhr ein Verbrechen begangen. Die Tat dauerte 7 Minuten.

Es gibt vier Verdächtige : Andrea, Bruce, Camilla und Dimitri. Sie bewohnen vier verschiedene Zimmer. Hier ihre Angaben bei der Polizei, was sie zwischen 22 Uhr und 22.15 Uhr gemacht haben :

Andrea : „Zuerst hatte ich 3 Minuten lang Besuch von Bruce, danach war Dimitri 4 Minuten bei mir. Dann hatte ich noch einen Telefonanruf von Camilla."

Bruce : „Ich war bei Andrea, bei Dimitri und habe noch mit einem Mausklick eine E-Mail verschickt."

Camilla : „Ich habe bis 22.05 Uhr die Fernsehnachrichten angesehen und danach 5 Minuten lang mit Andrea telefoniert."

Dimitri : „Ich war bei Andrea. Danach war Bruce für 3 Minuten bei mir."

Nachdem der Kommissar festgestellt hat, dass alle Angaben richtig sind, kennt er den Schuldigen. Wie hat er es herausgefunden ?

In un albergo è accaduto un crimine tra le 22 e le 22 e quindici e l'aggressione è durata 7 minuti.

Vi sono 4 sospettati : Andrea, Bruce, Camilla e Dimitri che occupano 4 camere diverse e che rilasciano alla polizia le seguenti dichiarazioni relative alle loro azioni tra le 22 e le 22 e quindici.

Andrea : " Dapprima ho ricevuto la visita di Bruce durata 3 minuti, più tardi quella di Dimitri durata 4 minuti; infine, ho ricevuto una telefonata da Camilla."

Bruce : " Io sono andato a trovare Andrea, poi Dimitri e, quindi, con un clic di mouse ho spedito una e-mail."

Camilla : " Io ho guardato il telegiornale fino alle ore 22 e 5. In seguito ho telefonato ad Andrea per 5 minuti."

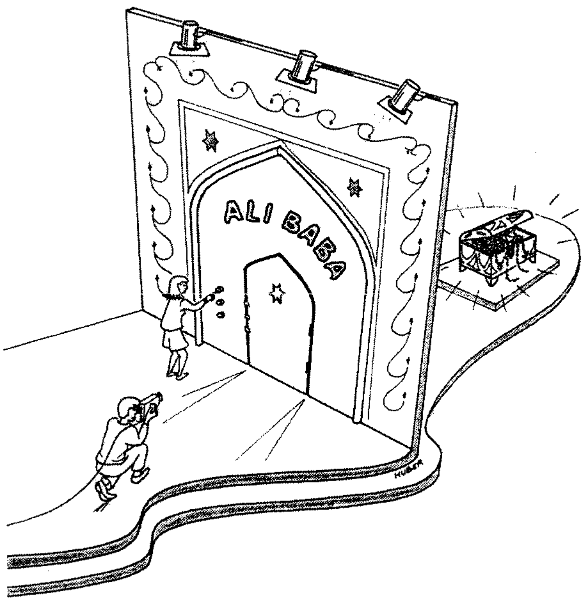
Dimitri : " Io sono andato a trovare Andrea, poi ho ricevuto la visita di Roberto durata 3 minuti."

Dopo aver verificato la correttezza di tutte queste dichiarazioni, l'ispettore scopre il colpevole. Come ha fatto ?

Question 2 *Open Sesame* 5 marks

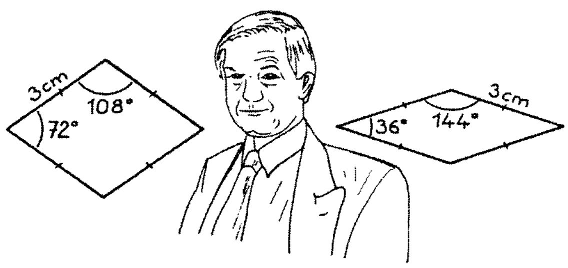
As part of a television game show, "Ali Baba's Cave", Sophie has to get into the treasure chamber. The chamber door has three locks each controlled by an individual switch. The switches open or close the locks alternately.
The door is locked but Sophie doesn't know whether one or two or all three locks are closed.
She is allowed 7 chances to choose any switch and press it. When the three locks are unlocked the door will open.

Write down a sequence of 7 actions during which the door will definitely open, no matter what the state of the switches was at the beginning.



Question 3 *Decagomania* 5 marks

During the 70s the English mathematician Sir Roger Penrose (born 1931) invented a nonrepeating tiling of the plane which used two different tiles both of which were rhombuses.
The tiles are shown here.

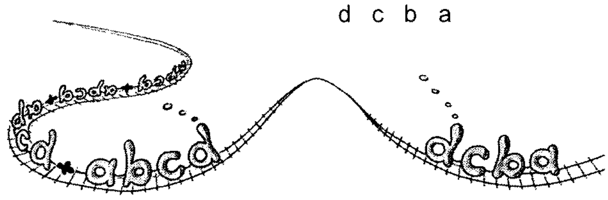


Find two different ways of constructing a regular decagon using 5 rhombuses of each type.
Stick these two decagons on your answer sheet overlapping them to use fewer than 20 rhombuses in total.

Question 4 *Turn up* 5 marks

Find a whole number with 4 digits so that after multiplying it by 4 you obtain the same number with the digits reversed. The number must be greater than 1000.

$$\begin{array}{r} a\ b\ c\ d \\ \times \quad\ \ 4 \\ \hline d\ c\ b\ a \end{array}$$



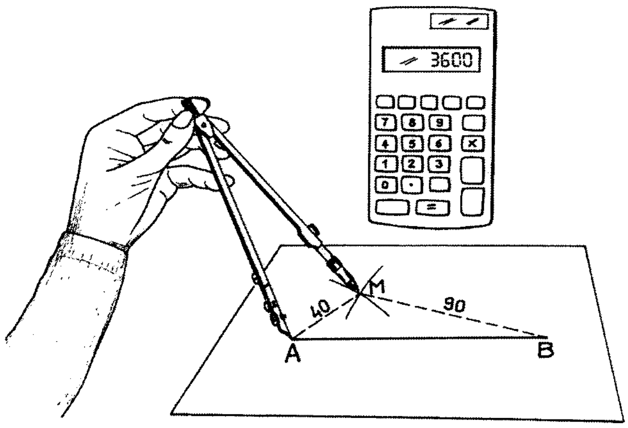
Question 5 *Point taken* 7 marks

A and B are two points 120 mm apart. We are going to find points M_1, M_2, M_3 etc ... so that :

$$MA \times MB = 3600$$

when the distances are measured in millimetres.

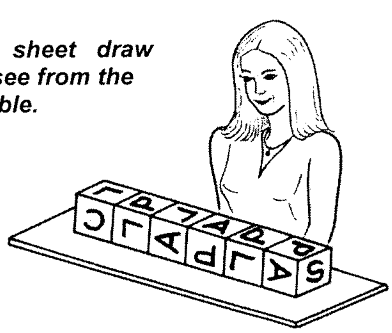
Draw A and B on your answer sheet. Mark in red a large number of points M so that MA x MB = 3600.
You will see a curve start to appear and by using enough points you will be able to complete it.
On the other side of your answer sheet, list the pairs of points you used.



Question 6 *Hide and Seek* 5 marks

Etienne has placed 6 identical cubes on the table as shown.

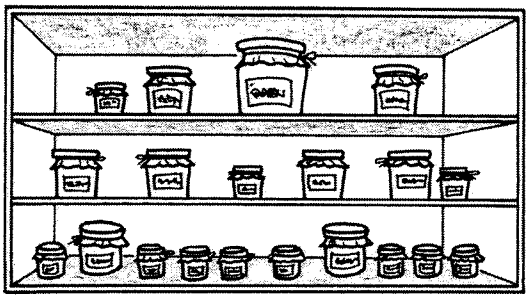
On your answer sheet draw what Barbara can see from the other side of the table.



Question 7 *Jam tomorrow* 7 marks

Pierre is helping his mum make raspberry jam. They fill 20 jars of three different sizes. The
20 full jars weigh 8.4 kg in total.
Pierre puts them on three shelves as shown, so that the same weight is on each shelf.

What is the weight of each type of jar when it is full of jam ? Explain your answer.



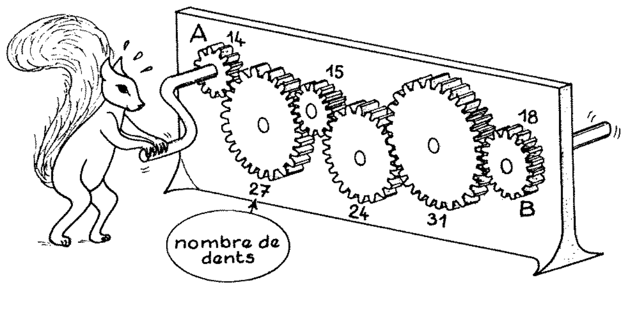
Question 8 *Europe on-line* 5 marks

Berlin (D), Cardiff (GB), Goteborg (S), Lausanne (CH), Madrid (E),Naples (I),Paris (F), Pilzen (CZ), Utrecht (NL) and Warsaw (PL) are ten reasonably well known European cities.
The special thing about them is that on my map they line up in groups of four along 5 straight lines, (well quite closely anyway).

On your answer sheet draw 10 points and 5 straight lines so that each line passes through 4 of the points.
Then draw a second diagram showing how with 15 points and 6 straight lines, each line can pass through 5 points.

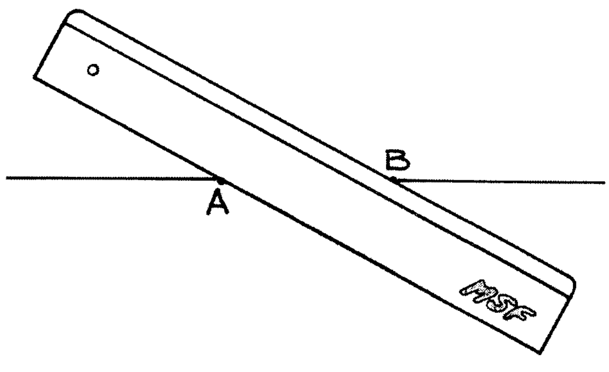
Question 9 *Whole numbers* 7 marks

With the intricate gearing mechanism shown in the diagram, what is the smallest number of turns which cog-wheel A needs to make so that cogs A and B both make a whole number of turns ? (Zero is not allowed as an answer !)
How many turns has cog B then made ?
Justify your answer.



Question 10 *Keeping the rules* 10 marks

Bruno wants to divide a line segment AB into 3 equal parts. All he has is a pencil and a ruler with no scale but it does have opposite sides parallel.
Bruno starts by placing the ruler as shown in the diagram and drawing two parallel straight lines, one passing through A, the other through B. He then continues by changing the position of the ruler to get a rhombus which has AB as a diagonal.



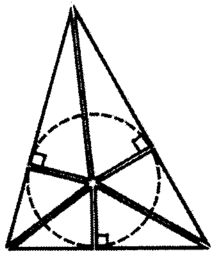
Using his ruler he carefully constructs a tiling of identical rhombuses on the paper. By using appropriate points on this tiling Bruno can divide the line segment AB into 3 equal parts.

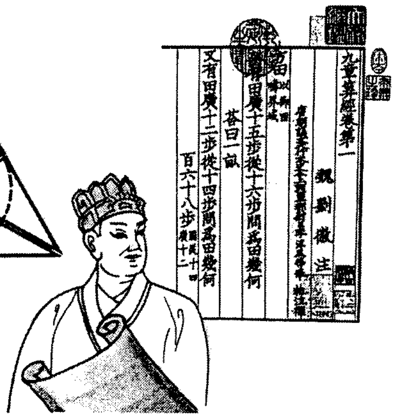
On your answer sheet draw a line segment AB 8 cm long. Divide the segment into 3 equal parts using Bruno's method.
Prove that the 3 parts are equal.

Question 11 *Chinese puzzle* 5 marks

Senior classes only

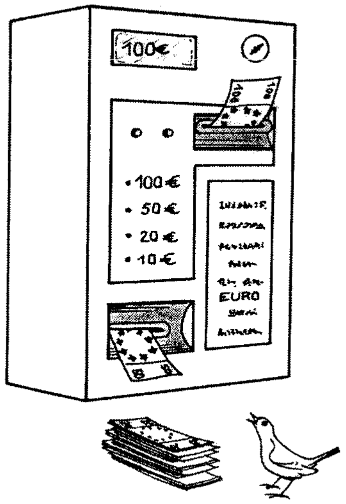
Exploring in China Marco finds in the Chu Chang Suan Shu manuscript a puzzle based on a circle inscribed in a triangle.
The diagram shows the lines joining the vertices of the triangle to the centre of the circle and the radii drawn to touch the sides of the triangle. By cutting the triangle along these lines he obtains 6 triangular pieces. This puzzle allows you to demonstrate the formula $R = \dfrac{2S}{P}$ where S represents the area of the triangle, P its perimeter and R the radius of the inscribed circle.





Draw a triangle with sides 10, 12 and 14 cm on your answer sheet. Draw the inscribed circle and the 3 radii shown.
Draw a second diagram and cut it into the 6 pieces of the puzzle. Arrange the 6 pieces into a rectangle of width R and stick it to the answer sheet. Then explain how this demonstrates the formula given above.

Question 12 *Eur change, Sir* 7 marks



Senior classes only

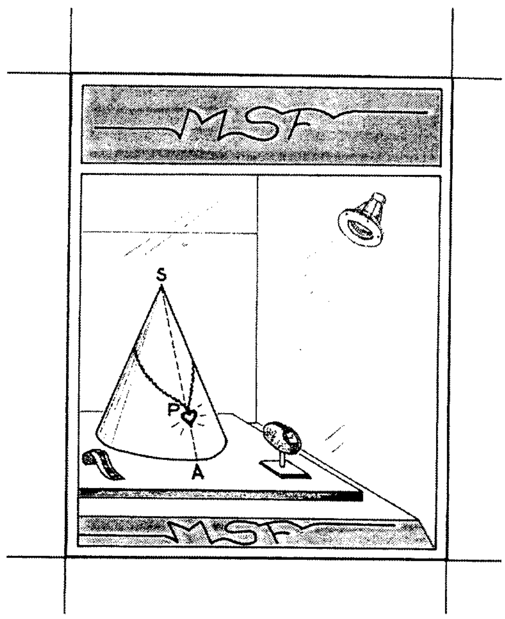
An automatic money changer accepts notes in denominations : 100 €, 50 €, 20 €, 10 €, and gives back the change as follows :

- the 100 € note is changed for one 50 € note, one 20 € note, two notes of 10 €, and two notes of 5 €..
- the 50 € note is changed for one 20 € note, two 10 € notes and two 5 € notes.
- the 20 € note is changed for one 10 € note and two 5 € notes.
- the 10 € note is changed for two 5 € notes.

At the start of each day it is filled with notes of 50 €, 20 €, 10 €, 5 € so that it can always deal with at least 100 transactions no matter what notes have been put in.
One day after 100 transactions the machine is found to contain twenty 100 € notes, 130 of the 50 € notes, 40 of the 20 € notes and 70 of the 10 € notes.

How many notes of each kind have been put into the machine in the course of these 100 transactions ? Justify your answer.

Question 13 *Golden section* 10 marks



Senior classes only

Leonardo is fascinated by a pendant which is hanging on a conical display in the window of a jeweller's shop. The necklace is made up of a precious stone (at P) hanging from a fine gold chain.
The chain lies round the cone in a curve which is the shortest path round the cone from P back to R
The diameter of the base of the cone is 21 cm, the distance SA is 35 cm and SP is 30 cm. You have to find the length of the chain.

On your answer sheet draw the net of the cone to a scale of 1:5, by cutting the cone along the line SA. On this net draw the line of contact of the chain with the cone and then calculate its length.

Międzynarodowy Konkurs Matematyczny

Matematyka bez granic

ACADEMIE DE STRASBOURG

- *W rozwiązaniach zadań 1, 7, 9, 10, 11, 12 i 13 konieczne jest uzasadnienie.*
- *Częściowe rozwiązania zadań też będą uwzględniane w punktacji*
- *Oceniana będzie również strona graficzna przedstawionych rozwiązań.*
- *Rozwiązanie każdego zadania będzie prezentowane na oddzielnej kartce.*
- *Do każdego zadania, (także do zadań, które nie zostały rozwiązane), należy oddać osobny arkusz z kodem szkoły i klasy.*

5 marca 2002

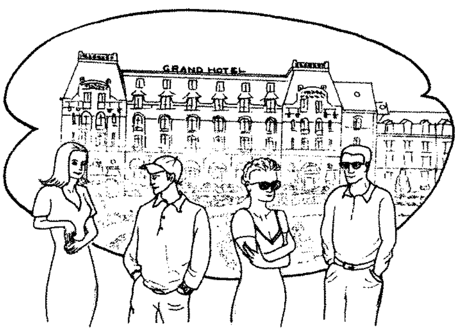
Zadanie 7	7 punktów	Alibis

Rozwiązanie musi być napisane w jednym z czterech języków obcych i zawierać przynajmniej 30 słów.

Dans un hôtel, un crime a été commis entre 22 h et 22 h 15 et l'agression a duré 7 minutes.

Il y a 4 suspects Andréa, Bruce, Camilla et Dimitri qui occupent 4 chambres différentes et dont voici les déclarations à la police sur leur emploi du temps entre 22 h et 22 h 15 :

Andréa : " J'ai d'abord eu la visite de Bruce pendant 3 minutes, plus tard celle de Dimitri pendant 4 minutes ; enfin j'ai reçu un appel téléphonique de Camilla ".



Bruce : " J'ai rendu visite à Andréa, à Dimitri et d'un clic de souris j'ai envoyé un e-mail ".

Camille: "J'ai regardé le journal télévisé jusqu'à 22 h 05. Par la suite j'ai téléphoné à Andréa pendant 5 minutes".

Dimitri : " J'ai rendu visite à Andréa, puis j'ai eu celle de Bruce pendant 3 minutes".

Après avoir vérifié que toutes ces déclarations sont exactes, l'inspecteur trouve le coupable.

Comment a-t-il fait ?

A crime was committed in a hotel between 10.00 p.m. and 10.15 p.m. and the attack lasted 7 minutes.

There are 4 suspects : Andrea, Bruce, Camilla, Dimitri. They are all staying in 4 different rooms and here are their statements to the police about their time table between 10.00 p.m. and 10.15 p.m. :

Andrea : « First Bruce paid me a visit for 3 minutes, then came Dimitri who stayed for 4 minutes ; finally Camilla called me on the phone. »

Bruce : « I went to see Andrea, then Dimitri, and with the click of the mouse, I sent an e-mail. »

Camilla : « I watched the news on TV until 10.05 p.m.. Then I called Andrea for 5 minutes. »

Dimitri : « I went to see Andrea, then Bruce came to see me for 3 minutes. »

After checking on all these statements, the police inspector found the culprit.

How did he manage ?

W hotelu między 22^{00} a 22^{15} popełniono przestępstwo, które trwało 7 min. Są cztery podejrzane osoby: Andrea, Bruce, Camilla i Dimitij. W tej chwili są w różnych pokojach. Ich zeznania są następujące:

Andrea powiedziała: Najpierw odwiedził mnie Bruce. Jego wizyta trwała 3 min. Potem przyszedł Dimitrij i został 4 min. Na końcu zadzwoniła do mnie Camilla.

Bruce : Poszedłem odwiedzić Andrea, a potem Dimitra. Kliknąłem by wysłać emailla.

Camilla : Do godziny 22^{05} oglądałem wiadomości, potem rozmawiałam przez 5 min. z Andreą przez telefon.

Dimitrij : Poszedłem zobaczyć się z Andreą, potem przyszedł do mnie Bruce na 3 min.

Po sprawdzeniu zeznań tych czterech osób inspektor policji znalazł winnego.

Jak on to zrobił ?

In un albergo è accaduto un crimine tra le 22 e le 22 e quindici e l'aggressione è durata 7 minuti.

Vi sono 4 sospettati : Andrea, Bruce, Camilla e Dimitri che occupano 4 camere diverse e che rilasciano alla polizia le seguenti dichiarazioni relative alle loro azioni tra le 22 e le 22 e quindici.

Andrea : " Dapprima ho ricevuto la visita di Bruce durata
3 minuti, più tardi quella di Dimitri durata 4 minuti; infine, ho ricevuto una telefonata da Camilla."

Bruce : " Io sono andato a trovare Andrea, poi Dimitri e, quindi, con un clic di mouse ho spedito una e-mail."

Camilla : " Io ho guardato il telegiornale fino alle ore 22 e 5. In seguito ho telefonato ad Andrea per 5 minuti."

Dimitri : " Io sono andato a trovare Andrea, poi ho ricevuto la visita di Roberto durata 3 minuti."

Dopo aver verificato la correttezza di tutte queste dichiarazioni, l'ispettorescopre il colpevole.

Come ha fatto ?

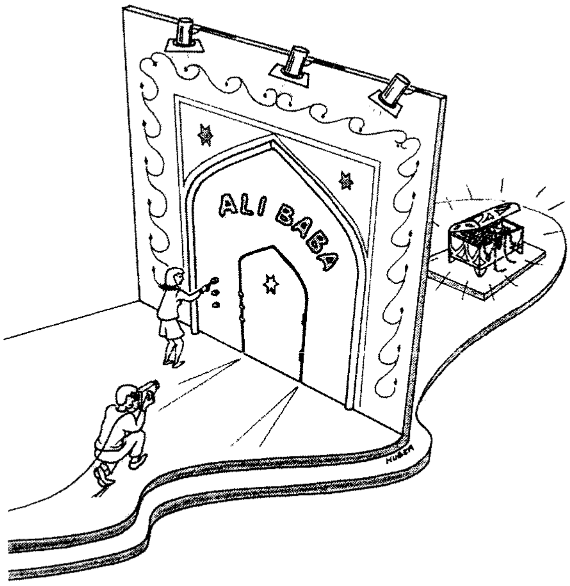
Zadanie 2 — 5 punktów

Sezamie otwórz się

W finale telewizyjnego konkursu „Jaskinie Alibaby“ Zofia chce dojść do skarbca.

Prowadzące do niego drzwi mają trzy zamki, a każdy z nich zamyka się i otwiera za pomocą przycisku. Drzwi są zamknięte, ale Zofia nie wie na ile zamków. Może 7 razy przycisnąć dowolnie wybrane przyciski. Drzwi zostaną otwarte tylko wtedy, gdy wszystkie zamki będą otwarte.

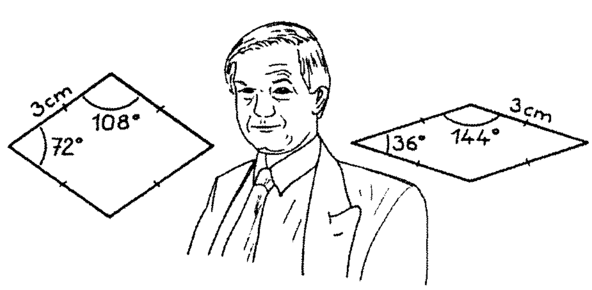
Napisz ciąg siedmiu czynności, za pomocą których na pewno wszystkie zamki będą otwarte, niezależnie od tego, które z nich były zamknięte na początku.



Zadanie 3 — 7 punktów

Dziesięciokątomania

Angielski matematyk Sir Roger Penrose (*1931) w latach siedemdziesiątych odkrył nieregularny parkiet. Składa się go z dwóch rodzajów rombów takich jak na rysunku poniżej.



Spróbuj stworzyć dwa dziesiąciokąty foremne. Każdy z nich musi zawierać 5 rombów jednego rodzaju i 5 rombów drugiego rodzaju. Z tych dwóch figur złóż inny dziesięciokąt zawierający dwa pierwsze, lecz złożony z mniej niż 20 rombów. Naklej go na kartę odpowiedzi.

Zadanie 4 — 5 punktów

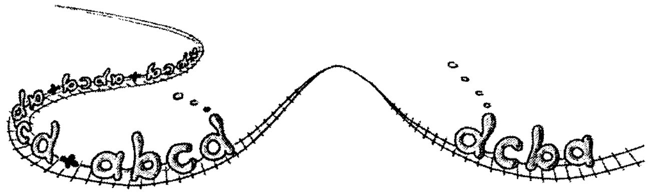
metorwop Z

Poszukiwana jest czterocyfrowa liczba o różnych cyfrach.

Jeżeli pomnożymy ją przez 4, to otrzymany wynik jest liczbą o tych samych cyfrach, lecz zapisanych w odwrotnej kolejności.

Znajdź tę liczbę!

$$\begin{array}{r} a\ b\ c\ d \\ \times \quad\quad 4 \\ \hline d\ c\ b\ a \end{array}$$



Zadanie 5 — 7 punktów

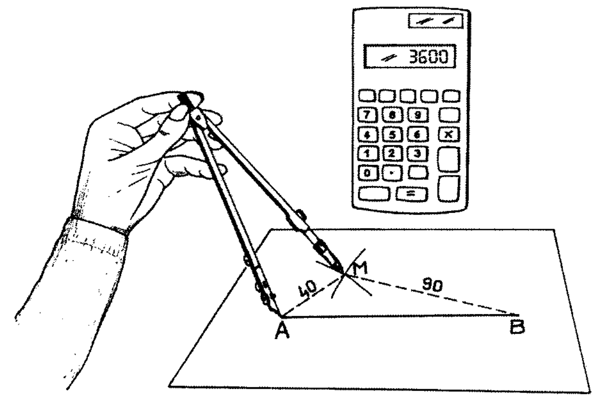
Produktywne

Punkty A i B są oddalone od siebie o 120 mm. Poszukiwane są punkty M leżące na tej samej płaszczyźnie co punkty A i B i takie, że $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 3600\,\text{mm}^2$.

Wszystkie takie punkty tworzą krzywą.

Na arkuszu odpowiedzi narysuj punkty A i B. Zaznacz na czerwono wystarczająco dużo punktów M, (spełniających opisane wyżej warunki) aby był widoczny kształt tej krzywej. Połącz otrzymane punkty linią.

Na drugiej stronie arkusza napisz wszystkie pary liczb, których potrzebowałeś żeby skonstruować punkty M.

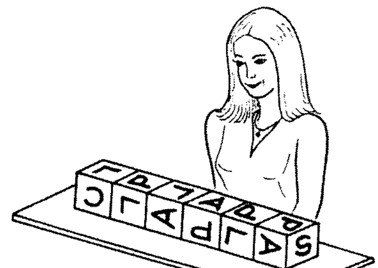


Zadanie 6 — 5 punktów

Punkt widzenia

Ela ułożyła na stole sześć identycznych sześciennych kostek w jednym szeregu.

Narysuj na arkuszu odpowiedzi to, co widzi Ela na tylnych ściankach kostek.



Zadanie 7 — 7 punktów

Słodki ciężar

Piotr smaży z babcią dżem z czarnej porzeczki.

Gotowy wkładają do 20 słoików o trzech różnych wielkościach. Pełne słoiki ważą razem 8,4 kg.

Piotr ustawił je na trzech półkach tak jak na rysunku. Zadbał o to, aby na każdej półce stał taki sam ciężar.

Ile waży pełny słoik każdej wielkości? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 8 — 5 punktów

Europa on line

Berlin (D), Cardiff (GB), Göteborg (S) Lausanne (CH), Madrid (E), Neapel (I), Paris (F), Pilsen (CZ), Utrecht (NL) i Warszawa (PL) to 10 europejskich miast.

Na mojej mapie odkryłem, że można narysować 5 linii, z których każda przechodzi przez 4 z w/w miast.

Narysuj na arkuszu odpowiedzi:

a)10 punktów i przeprowadź 5 prostych, z których każda przechodzi przez 4 punkty

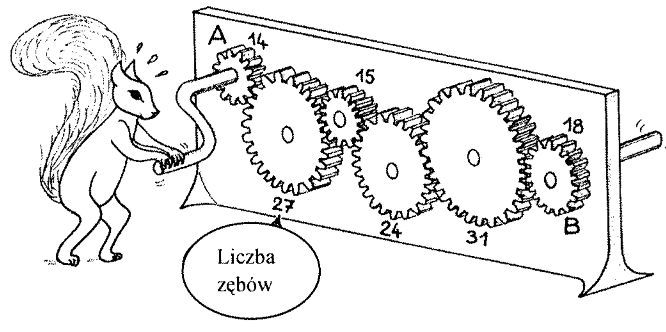
b) 15 punktów i przeprowadź 6 prostych, z których każda przechodzi przez 5 punktów

Zadanie 9 — 7 punktów

Jak to działa?

Ile najmniej pełnych obrotów musi wykonać koło A, żeby koło B także obróciło się całkowitą ilość razy.

Podaj liczbę obrotów koła B. Odpowiedź uzasadnij.



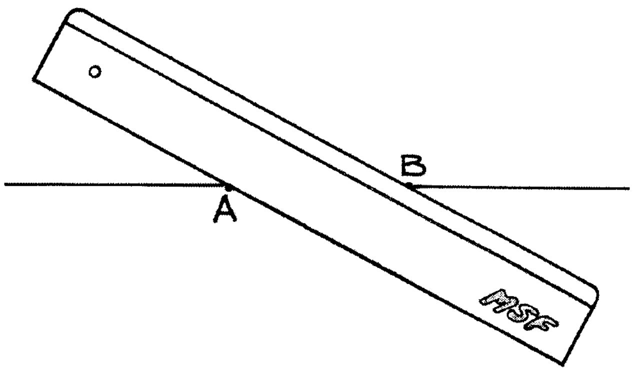
Zadanie 10 — 10 punktów

Podzielony na trzy

Bruno chce podzielić odcinek AB na trzy równe części. Ma do dyspozycji tylko ołówek i linijkę bez podziałki.

Położył linijkę tak jak na rysunku i narysował dwie proste równoległe przechodzące przez punkty A i B. Następnie układając linijkę w innym kierunku i robiąc podobnie otrzymał romb. Odcinek AB jest przekątną tego rombu.

Za pomocą linijki rysuje sieć rombów podobnych do pierwszego. Łącząc odpowiednie punkty tej sieci, udaje mu się podzielić odcinek AB na trzy równe części.



Narysuj odcinek długości 8 cm i podziel go metodą Bruna na trzy równe części. Uzasadnij, że te części są naprawdę równe.

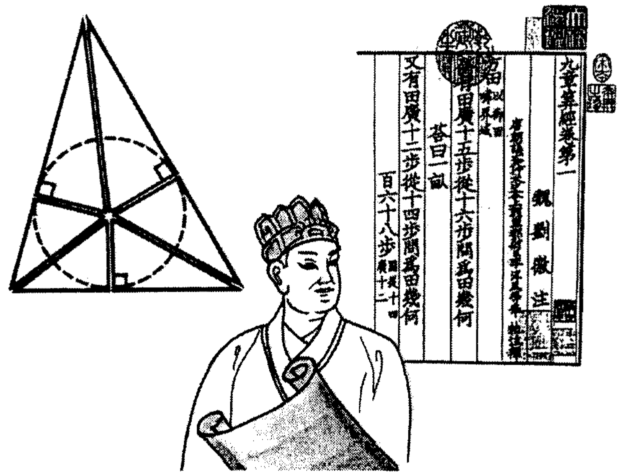
Zadania dla klas 2

Zadanie 11 | 5 punktów | To wiedział już stary Shu : $R = \frac{2 \cdot A}{U}$

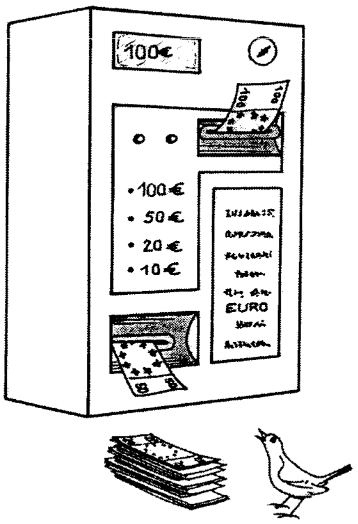
W podróży do Chin Marco odkrył w skrypcie *Chu Chang Suan Shu* trójkątne puzzle, na których widać okrąg styczny do każdego boku trójkąta. Przez odcinki poprowadzone ze środka okręgu do wierzchołków trójkąta oraz do punktów styczności, trójkąt został podzielony na 6 części. Dzięki powstałym w ten sposób puzzlom można pokazać, że prawdziwy jest wzór umieszczony w tytule zadania. Litery w tym wzorze oznaczają odpowiednio: U – obwód trójkąta, A – pole trójkąta i R – promień okręgu.

Skonstruuj na arkuszu odpowiedzi trójkąt o bokach długości 10, 12 i 14 cm razem z okręgiem i opisanymi wyżej odcinkami. Powtórz tą konstrukcję na osobnej kartce i wytnij wszystkie części. Złóż z nich prostokąt o boku R i naklej go na arkusz odpowiedzi.

Uzasadnij prawdziwość wzoru z tytułu zadania.



Zadanie 12 | 7 punktów | Euromat



Automat rozmieniający banknoty akceptuje te o nominałach 100 €, 50 €, 20 € i 10 €.

Banknoty wkładane do automatu zostają rozmienione w następujący sposób:

- 100 € na 1 raz 50 €, 1 raz 20 €, 2 razy10 € i 2 razy 5 €
- 50 € na 1 raz 20 €, 2 razy 10 € i 2 razy 5 €
- 20 € na 1 raz 10 € i 2 razy 5 €
- 10 € na 2 razy 5 €

Na początku w automacie umieszcza się banknoty 50, 20, 10 i 5 € w takiej ilości, aby można było rozmienić w nim pieniądze 100 razy niezależnie od rodzaju rozmienianego banknotu.

Po wykonaniu stu operacji pracownik sprawdził zawartość automatu i okazało się, że pozostało 20 banknotów 100 €, 130 banknotów 50 €, 40 banknotów 20 € i 70 banknotów 10 €.

Ile banknotów każdego rodzaju rozmienił automat podczas 100 operacji? Odpowiedź uzasadnij.

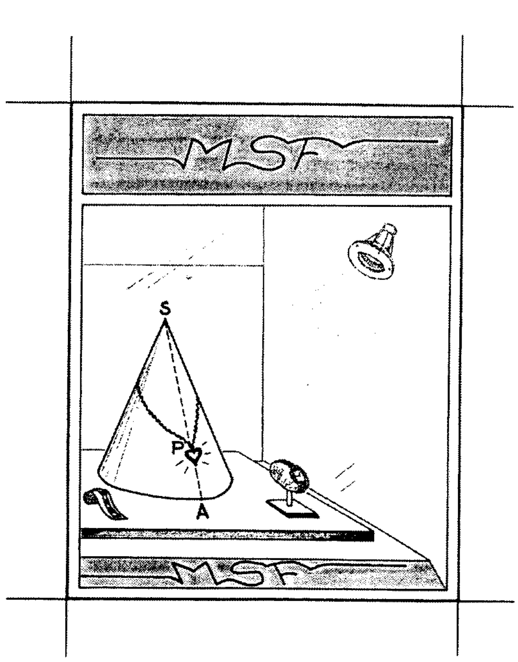
Zadanie 13 | 10 punktów

Elegancko ułożony

Leonardo zachwyca się wisiorkiem znajdującym się na wystawie sklepu jubilerskiego. Wisiorek jest na złotym łańcuszku elegancko ułożonym na podstawce w kształcie stożka. Droga od wisiorka (na rysunku pkt.P) wzdłuż łańcuszka i z powrotem do wisiorka jest najkrótsza.

Stożek, na którym wisi łańcuszek, ma średnicę podstawy długości 21 cm i tworzącą SA długości 35 cm. Punkt P znajduje się w odległości 30 cm od wierzchołka stożka.

Narysuj w skali 1:5 rozłożoną powierzchnię boczną tego stożka po rozcięciu wzdłuż odcinka AS i na niej zaznacz linią położenie łańcuszka. Oblicz też jego długość.



MATHEMATIQUES SANS FRONTIERES

Année scolaire 2002-2003

14^e édition

Compétition interclasses de 3$^{\text{ème}}$ et de 2$^{\text{nde}}$

Mathématiques sans frontières

organisée par l'Inspection Pédagogique Régionale et l'IREM de Strasbourg

ÉPREUVE D'ENTRAÎNEMENT DÉCEMBRE 2002

- Des explications ou des justifications sont demandées pour les exercices 3, 6, 10, 11, 12 et 13.
- Toute solution même partielle sera examinée.
- Le soin sera pris en compte.
- Ne rendre qu'une feuille-réponse par exercice.

Exercice n°1 | 7 points | *Sans perdre la face*

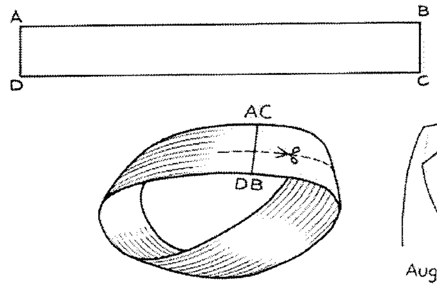
Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien (en un minimum de 30 mots).

Die Abbildung zeigt ein Möbiusband. Seine geometrischen Eigenschaften überraschen.
Um ein Möbiusband aus einem rechteckigen Papierstreifen ABCD herzustellen, musst du die Seite AD an die Seite BC kleben. Aber Achtung: A muss mit C und B mit D zusammenfallen.
Stelle ein solches Band her und male eine Seite farbig an.

Was hast du bemerkt ?

Zeichne nun die Mittellinie des Bandes ein und schneide das Band entlang dieser Linie.

Was stellst du fest ?



The Möbius strip is presented in the figure. It has got amazing geometric properties.
To make such a Möbius strip with a rectangular band of paper ABCD, you must link side AD to side BC... but be careful A must coincide exactly with C and B with D.
Now cut out such a Möbius strip. Color one side.

What do you observe ?

Draw the median line of the strip. Cut the strip on that line.

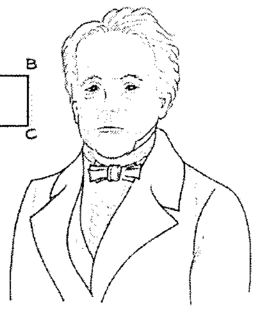
What do you notice ?

El dibujo nos muestra la cinta de Möbius. Esta cinta tiene propiedades geométricas sorprendentes.
Para fabricar una cinta de Möbius con una tira de papel rectangular ABCD, hay que unir el lado AD con el lado BC... pero cuidado A debe coincidir con C y B con D.
Construya una cinta así. Coleree una cara.

¿ Qué observas ?

Trace la línea mediana de la cinta. Corte la cinta siguiendo esta línea.

¿ Qué constatas ?



August MÖBIUS (1790-1868)

Il nastro di Möbius è rappresentato in figura : possiede delle proprietà geometriche sorprendenti.
Per costruire un nastro di questo tipo con una striscia di carta rettangolare ABCD, si deve raccordare il lato AD con il lato BC...ma attenzione perché A deve coincidere con C e B con D.
Costruite un tale nastro. Coloratene una faccia.

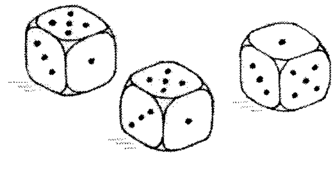
Che cosa notate ?

Tracciate la mediana del nastro. Tagliate il nastro secondo questa linea.

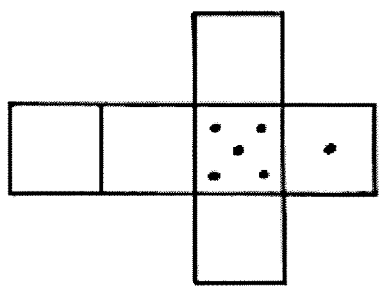
Che cosa osservate ?

Exercice n°2 | 5 points | *Sans défauts*

Pour qu'un dé cubique soit homologué, la somme de points marqués sur 2 faces opposées doit toujours être égale à 7.
Malgré cette exigence, on peut rencontrer de nombreux modèles de dés différents, comme par exemple :

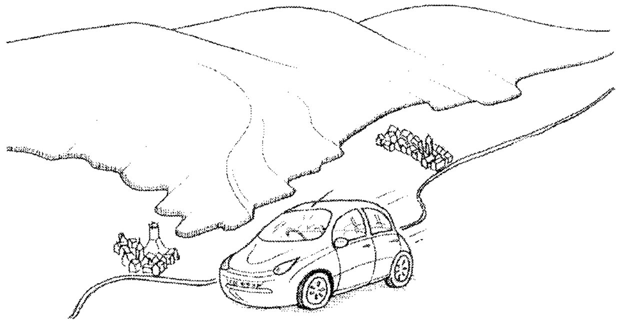


Dessiner les patrons de tous les dés homologués en complétant à chaque fois le patron ci-dessous.



Exercice n°3 — 7 points

La vitesse, c'est dépassé



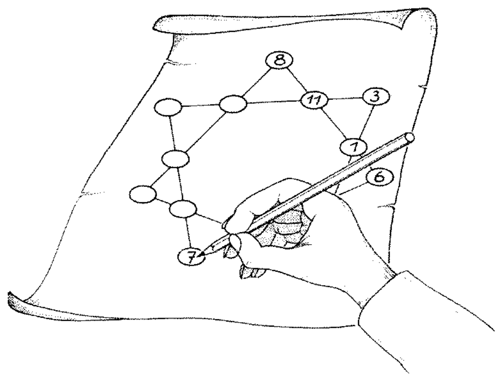
4 personnes pratiquent le covoiturage et effectuent à tour de rôle le même trajet long de 24 km chaque jour de la semaine.

Sylvie, prudente, roule calmement et met toujours le même temps. Christine met 6 minutes de moins. Michel roule trop vite et met 6 minutes de moins que Christine. Quant à Antoine, il est irresponsable et met encore 6 minutes de moins que Michel.
De ce fait, la vitesse d'Antoine est double de celle de Christine.

Calculer la vitesse moyenne de chacun de ces conducteurs.

Exercice n°4 — 5 points

Heptagone magique



Maurice s'applique à tracer une étoile magique à 7 branches dans laquelle il va placer tous les nombres entiers de 0 à 13 de sorte que la somme de 4 nombres alignés soit toujours la même.

Compléter l'étoile de Maurice et la présenter joliment sur la feuille-réponse.

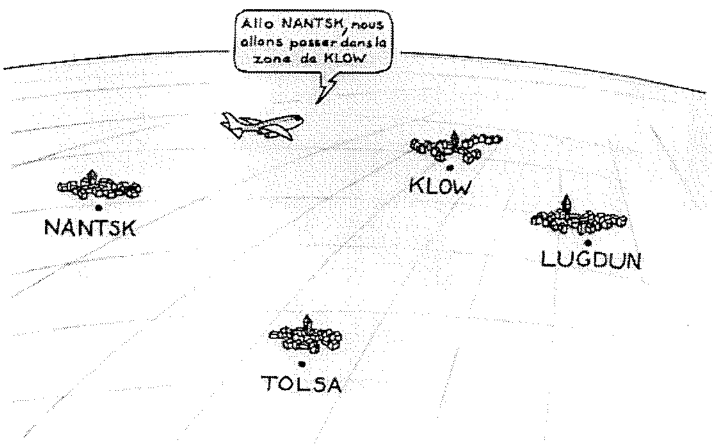
Exercice n°5 — 7 points

Contrôle continu

Vers la fin du XX$^{\text{ème}}$ siècle, la Syldavie s'est dotée de quatre centres de contrôle de son espace aérien. Ils ont été installés à Nantsk, Klow, Lugdun et Tolsa.
Pour coordonner le travail de ces quatre centres, les autorités syldaves ont énoncé une règle simple :
"Tout avion survolant le pays devra être surveillé par le centre de contrôle le plus proche de sa position."
L'espace aérien syldave se trouve ainsi partagé en quatre zones.

Représenter sur la feuille-réponse les positions relatives des 4 centres de contrôle en prenant 1 cm pour 50 km.
Matérialiser les 4 zones avec 4 couleurs après avoir bien tracé leurs frontières.

On donne les distances : KT = 600 km, KL = 350 km, NK = 350 km, TL = 400 km, NT = 450 km.

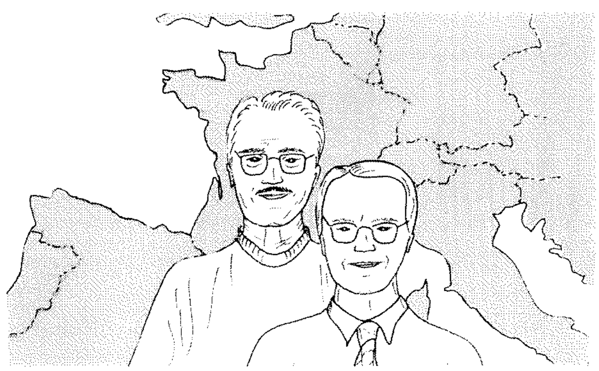


Exercice n°6 — 5 points

Tout augmente !

Hector, âgé de 50 ans aujourd'hui, apprend que l'espérance de vie dans son pays est actuellement de 78 ans et qu'elle augmente de 2 mois chaque année.

Si cette évolution se poursuivait, en quelle année l'âge d'Hector serait-il égal à l'espérance de vie dans son pays ?



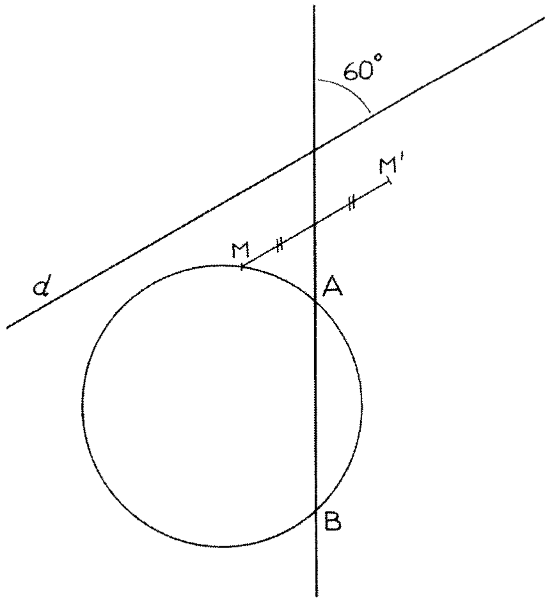
Exercice n°7 — 7 points

Non conforme

« Encore orthogonale, la symétrie ! C'est assez ! »
Jacques veut changer les règles de construction pour que la symétrie par rapport à une droite ne soit plus orthogonale mais oblique.
Pour cela il invente la symétrie oblique dont voici les règles :
Le point M' symétrique de M par rapport à la droite (AB) parallèlement à la direction *d* est tel que :
1°) Les droites (MM') et *d* sont parallèles.
2°) Le milieu de [MM'] appartient à la droite(AB).

Reproduire sur la feuille-réponse une figure analogue à la figure ci-dessous puis construire point par point l'image du cercle par cette symétrie oblique.

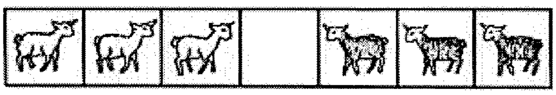
Les droites (AB) et *d* forment un angle de 60°.



Exercice n°8 — 5 points

Saute-mouton

Des moutons blancs et des moutons noirs doivent échanger leur pâturage ...
Cette situation est schématisée par le jeu suivant :
3 moutons blancs et 3 moutons noirs sont disposés dans une grille de 7 cases comme indiqué ci-dessous.



On ne peut les déplacer que suivant deux mouvements :

- faire **avancer** un mouton dans la case vide qui est devant lui ;
- faire sauter un mouton par-dessus un mouton voisin pour aller occuper la case vide.

On voudrait que les moutons blancs se retrouvent à droite et les noirs à gauche, séparés des blancs par la case vide.

Donner une suite de mouvements réalisant cet échange.

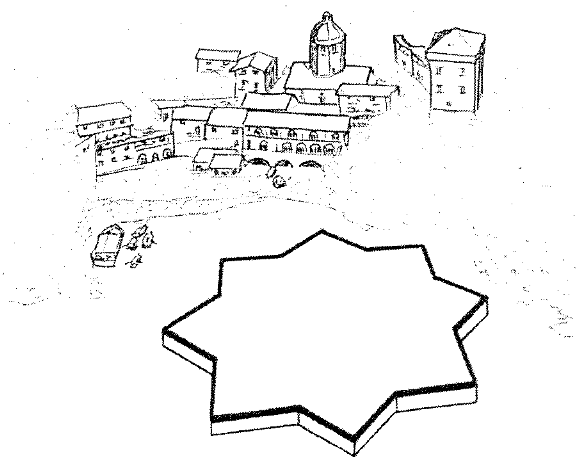
Exercice n°9 — 7 points

Carrelage ligure

A l'occasion de fouilles archéologiques dans le monastère de San Fruttuoso, près de Gênes, on a trouvé un carrelage formé de carreaux de 2 sortes, étroitement juxtaposés en nombre égal.
Les uns ont la forme d'une étoile régulière à 8 pointes que l'on pourra obtenir en superposant deux carrés de côté 1 dm et de même centre.

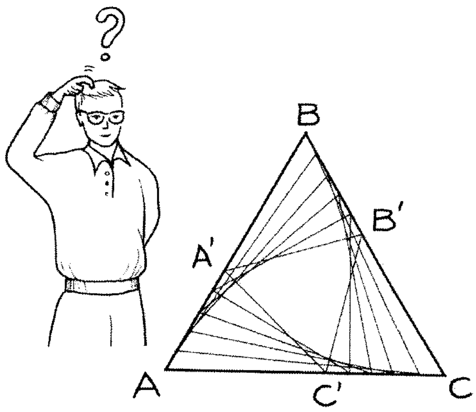
Les autres ont un périmètre égal à celui des premiers. Ils leur servent de compléments pour permettre la réalisation d'un carrelage sans interstice.

Coller sur la feuille-réponse, à l'échelle 1/2, un agencement de 6 carreaux : 3 de chaque sorte.



Exercice n°10 — 10 points

Triangles calés

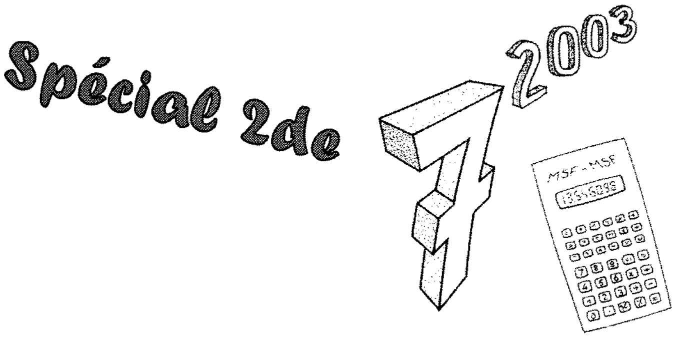


ABC est un triangle équilatéral de 8 cm de côté.
On place 3 points A', B' et C', respectivement sur [AB], [BC] et [CA], de sorte que AA' = BB' = CC'.

Comment faut-il choisir la distance AA' pour que les triangles AA'C', BB'A' et CC'B' soient rectangles, respectivement en A', B', C' ? Justifier la réponse.

Exercice n°11 — 5 points

La fin justifie les moyens...

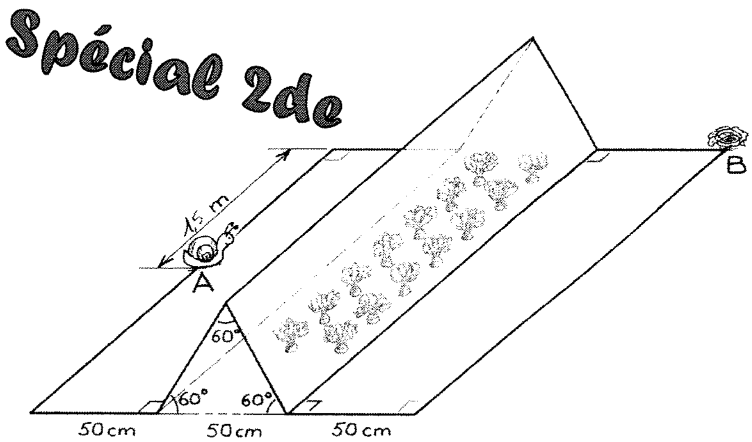


Marc s'amuse avec sa calculatrice. Il dit qu'il sait calculer les deux derniers chiffres de n'importe quelle puissance de 7.

Quels sont les deux derniers chiffres de 7^{2003} ? Expliquer la démarche.

Exercice n°12 — 7 points

... la faim aussi !

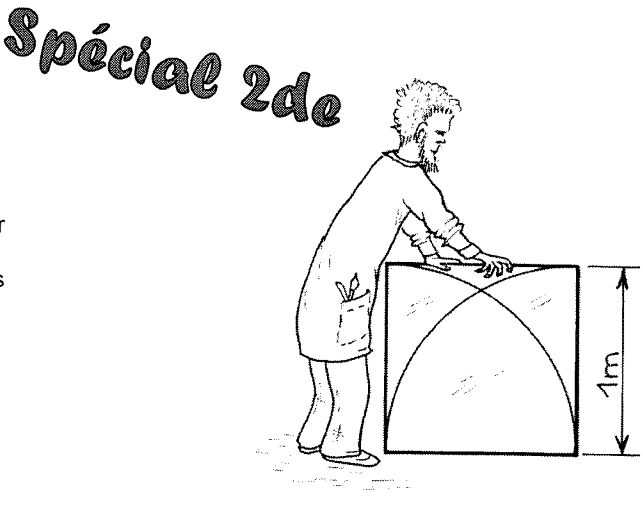


Un escargot veut se rendre du point A au point B par le chemin le plus court. Sur son chemin, il doit gravir une serre en forme de prisme. Les dimensions sont indiquées sur la figure ci-contre.

Calculer la longueur du chemin. Expliquer la démarche.

Exercice n°13 — 10 points

Attention fragile



Une fenêtre carrée de 1 mètre de côté est fermée par un vitrail représenté ci-contre.
Les surfaces de verre sont délimitées par deux quarts de cercles centrés sur les sommets inférieurs du carré.

Déterminer l'aire de chacune des 4 pièces du vitrail.

Éléments de solutions pour la correction de l'épreuve d'entraînement de décembre 2002

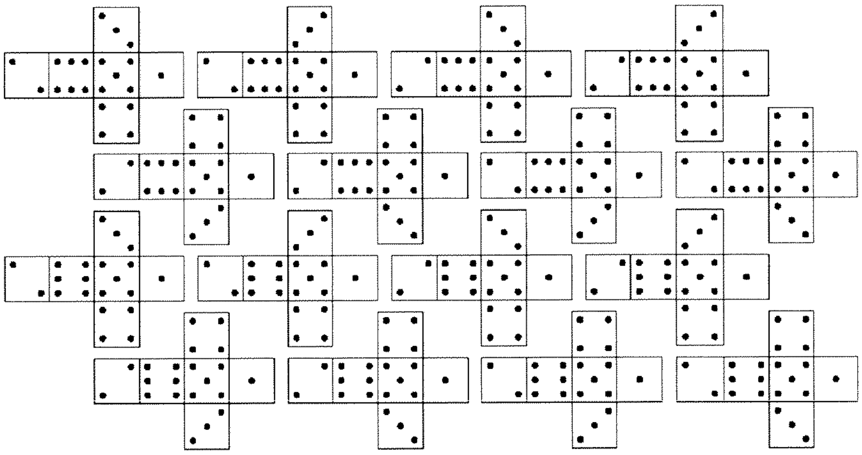
Exercice 1 : Sans perdre la face

Si on colore une face du ruban, on sera amené à traverser le raccord et finalement c'est le ruban tout entier qui sera coloré. Le ruban de Möbius **n'a donc qu'une face**.
Si on coupe le ruban en suivant sa ligne médiane, **on a la surprise de ne pas obtenir deux morceaux mais une seule boucle**.

Barème proposé : ruban 1 pt ; coloriage + une seule face : 1,5 pt ; découpage + une seule pièce :1,5pt ; expression écrite dans la langue : 3pts.

Exercice 2 : Sans défauts

Chacune des faces 2, 3 et 6 peut être orientée de deux façons différentes ; les faces 3 et 4 peuvent être échangées. En combinant ces variations, on obtient 2×2×2×2, soit 16 dés différents, tous homologués. Voici leurs patrons :



Barème proposé :
0,3 pt par patron correct . Arrondir au ½ pt le plus proche.

Exercice 3 : La vitesse, c'est dépassé

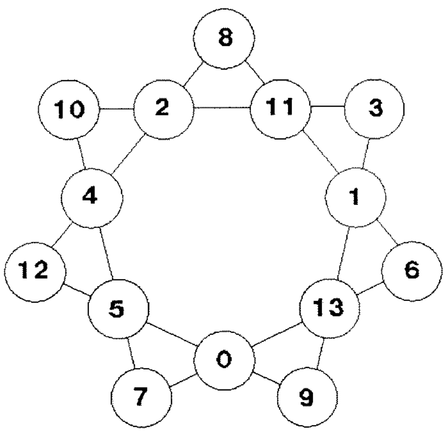
Antoine, cet irresponsable, met 12 minutes de moins que Christine. Comme sa vitesse est ainsi le double de celle de Christine, il mettra deux fois moins de temps qu'elle pour effectuer le trajet soit 12 minutes. Antoine roule donc à 120 km/h et Christine à 60 km/h. Quant à Sylvie et Michel, leur vitesse respective est de 24/30×60=48 km/h et 24/18×60=80 km/h.

autre méthode : $D = 24 = V_S T_S = V_C T_C = V_M T_m = V_A T_A$ *or on sait que* $V_A = 2V_C$ *et* $T_A - T_C = 1/5$ *h (= 12min) d'où* $V_C T_C = 2V_C(T_C - 1/5) \Rightarrow T_C = 2/5$ *et* $V_C = 24/(2/5) = 60$.

Barème proposé :
4pts pour les réponses + 3 pts pour les explications.

Exercice 4 : Heptagone magique

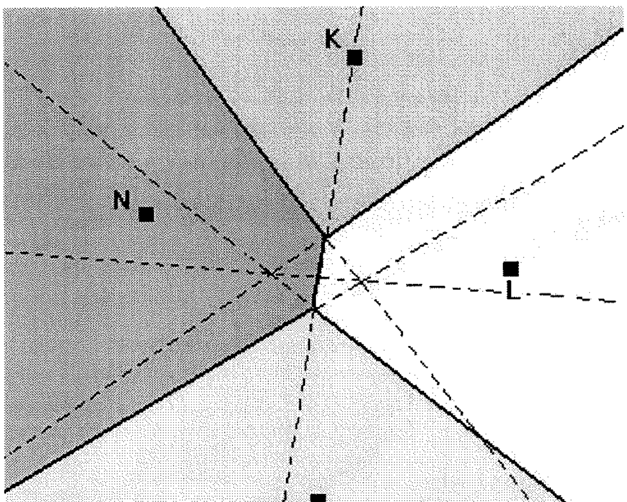
Voici la seule solution :



Barème proposé : 3 pts pour la solution + 2 pts pour l'esthétique du tracé.

Exercice 5 : Contrôle continu

Les frontières des zones sont données par les **médiatrices** qui sont 3 à 3 concourantes. Il faut être soigneux et bien choisir les bonnes frontières en Syldavie centrale :



Barème proposé :
Médiatrices de KT, TL,TN et NK : 4 x 0,5 pt ; Médiatrice de NL : 1pt ; précision des tracés : 1 pt ; choix correct des séparatrices (demi-droites, segment) : 2 pts ; Couleurs et esthétique : 1 pt

Exercice 6 : Tout augmente

Méthode 1 :

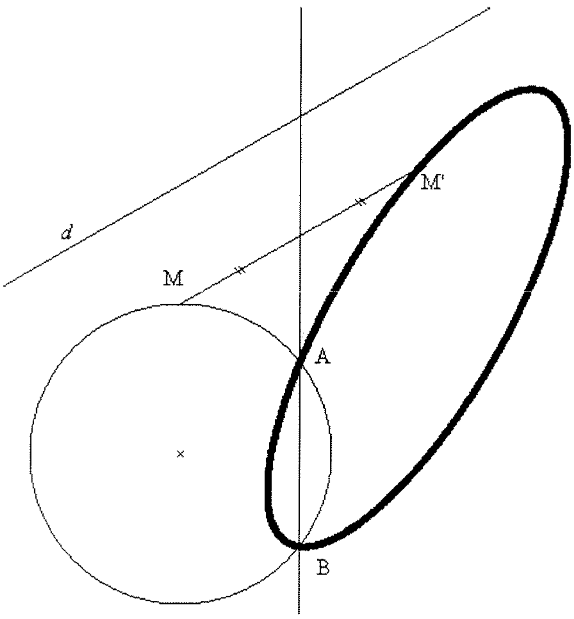
âge d'Hector	50	51	52	…	56	62	68	74	80	81	82	83
Espérance de	78	78a2m	78a4m	…	79	80	81	82	83	83a2m	83a4m	83a6m

Méthode 2 : Dans n années, Hector aura $(50 + n)$ ans. L'espérance de vie sera de $78 + n/6$ ans.
Si $50 + n = 78 + n/6$ alors $n = 33{,}6$.

Comme l'épreuve d'entraînement a lieu en décembre 2002 ou début 2003, c'est au cours de l'année 2003 + 33 = 2036 qu'aura lieu l'égalité.

Barème proposé :
3 pts pour la réponse 2036 (2 pts pour 2035) + 2pts pour les explications

Exercice 7 : Non conforme



Barème proposé :
Dtes + cercle 1 pt + jusqu'à 4 pts selon le nombre et la répartition des symétriques construits + 2 pts pour le tracé de l'ellipse.

Exercice 8 : Saute-mouton

Il y a 2 solutions en 15 mouvements.
Voici l'une d'elles :

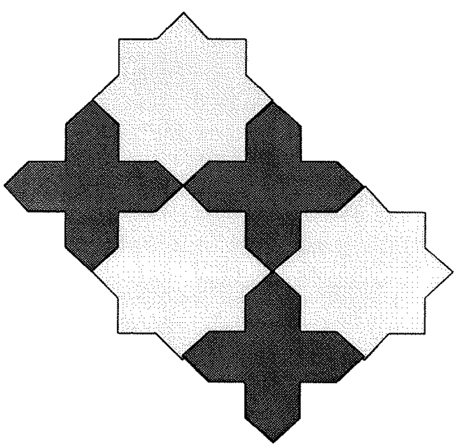
	○	○	○		●	●	●
1	○	○		○	●	●	●
2	○	○	●	○		●	●
3	○	○	●	○	●		●
4	○	○	●		●	○	●
5	○		●	○	●	○	●
6		○	●	○	●	○	●
7	●	○		○	●	○	●
8	●	○	●	○		○	●
9	●	○	●	○	●	○	
10	●	○	●	○	●		○
11	●	○	●		●	○	○
12	●		●	○	●	○	○
13	●	●		○	●	○	○
14	●	●	●	○		○	○
15	●	●	●		○	○	○

L'étape 4 correspond au dessin du sujet.

L'autre est symétrique
Plus généralement, des mathématiciens ont démontré que pour échanger le pâturage de n moutons blancs et n moutons noirs, on fera $n(n+2)$ mouvements dont n^2 sauts et $2n$ translations.

Barème proposé 2 pts pour un échange en plus de 15 actions (avec des reculades) 5pts pour l'une des solutions correctes.

Exercice 9 : Carrelage ligure



Barème proposé : 2 pts pour la pièce complémentaire + 2 pts pour l'agencement + 3 pts pour soin, esthétique et précision.

Exercice 10 : Triangles calés

Hypothèses : ABC équilatéral,

AB = 8, AA' = BB' = CC' = x

Version Thalès : Soit I le milieu de [AB]. Alors [CI] est une hauteur. On a alors les équivalences suivantes :

AA'C' est un triangle rectangle en A'

⇔Les droites (A'C') et (IC) sont parallèles

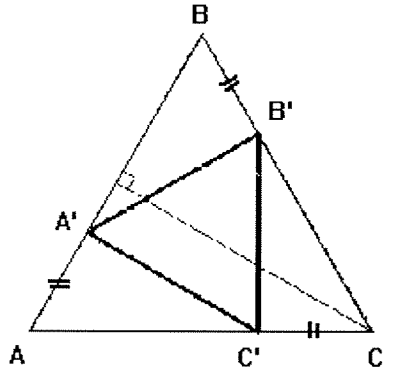
⇔AA'/AI = AC'/AC (condition nécessaire selon Thalès et suffisante selon la réciproque)

⇔x/4 = (8-x)/8 ⇔ 2x = 8-x

⇔ $\boxed{x = 8/3}$

De même pour les 2 autres triangles.

Il existe d'autres méthodes possibles (trigo , demi-triangle équilatéral…)



Barème proposé : valeur approchée par tâtonnements 2,6 ou 2,7 : 1 pt. Réponse 8/3 non expliquée : 2 pts. Explications rigoureuses : 7 pts à l'appréciation du correcteur. Référence aux 2 autres triangles : 1 pt

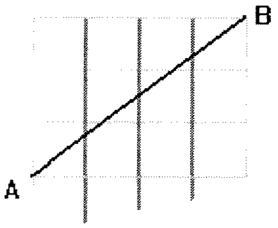
Exercice 11 : La fin justifie les moyens…

Voici les premières puissances de 7 : 1 - 7 - 49 - 343 - 2401 - 16807 - 117649 - 823543 - 5764801 - 40353607 - 282475249 - 1977326743.

On constate pour les deux derniers chiffres la succession périodique de 07, 49, 43 ou 01. Sachant que 2003=4×500+3 alors 7 puissance 2003 aura les même 2 derniers chiffres que 7 puissance 3 soit 43.

Pour aller plus loin : Supposons que 7^n finisse par 01, 43, 49 ou 07, alors $7^{n+4} = 7^n \times 2401$. Les 2 derniers chiffres de 2401 sont 01, par conséquent, si on multiplie un nombre quelconque par 2401 ne modifiera pas les 2 derniers chiffres de ce nombre. 7^{n+4} a donc les même 2 derniers chiffres que 7^n.

Barème proposé : 3 pts pour le 43 + 2 pts pour les explications



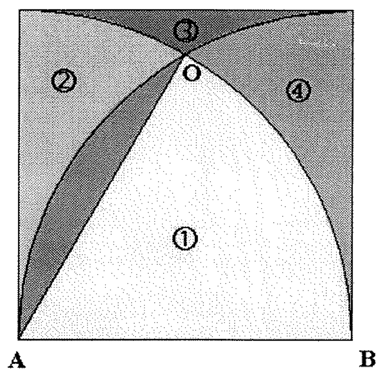
Exercice 12 : … la faim aussi !

Le chemin de l'escargot peut être segmenté en 4 tronçons chacun se situant dans une bande plane de largeur 0,5 m.

On peut «aplatir » la serre pour représenter ces 4 bandes côte à côte dans un seul plan. Alors le chemin le plus court est représenté par le segment [AB]. Selon Pythagore, sa longueur est 2,5 m.

Barème proposé : autre chemin correctement calculé : 3 pts ; contournement de la serre par l'arrière (≈ 2,58 m) : 2 pts ; chemin correct tracé ou décrit, mais non calculé : 4 pts.

Exercice 13 : Attention fragile.



Aire de la surface grise $= \frac{1}{6}$ aire du disque – aire triangle AOB

$$= \frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Aire ① $= \frac{1}{6}\pi + \left(\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$

Les pièces ② et ③ ont la même aire ; elles sont symétriques.

Aire ② = Aire ③ $= \frac{1}{4}\pi - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}}$

Aire ④ $= 1 - \frac{1}{4}\pi - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = \boxed{1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}}$

Barème proposé : les 10 pts sont à répartir à l'appréciation du correcteur suivant la production de sa classe.
-1 si valeurs approchées.

Mathematik ohne Grenzen

ein internationaler Wettbewerb für Klassenstufe 10 und 11

Probewettbewerb 2002/2003

- ***Für jede Aufgabe, auch für die nicht bearbeiteten, ist ein gesondertes Lösungsblatt abzugeben.***
- ***Bei Aufgabe 3, 6, 10, 11, 12 und 13 muss die Lösung begründet oder erläutert werden.***
- ***Die Sorgfalt der Ausführung wird mitbewertet.***
- ***Auch Teillösungen werden berücksichtigt.***

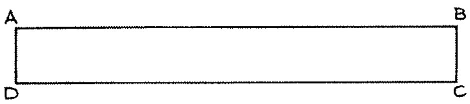
Aufgabe 1 – 7 Punkte

Verdreht

Die Lösung muss in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter umfassen.

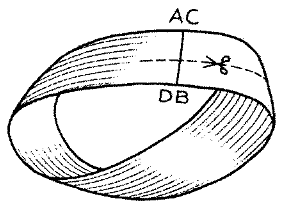
Le ruban de Möbius est présenté sur la figure. Il possède des propriétés géométriques surprenantes.

Pour fabriquer un ruban de Möbius avec une bande de papier rectangulaire ABCD, il faut raccorder le côté AD avec le côté BC... mais attention A doit coïncider avec C et B avec D.

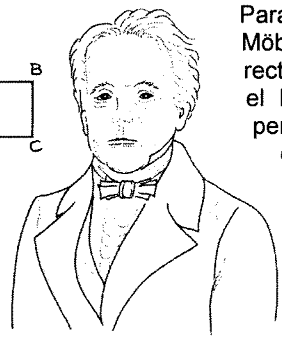


Fabriquer un tel ruban. Colorier une face.
Que remarque-t-on ?

Tracer la ligne médiane du ruban. Découper le ruban en suivant cette ligne.
Que constate-t-on ?



El dibujo nos muestra la cinta de Möbius. Esta cinta tiene propiedades geométricas sorprendentes.


August MÖBIUS (1790 - 1868)

Para fabricar una cinta de Möbius con una tira de papel rectangular ABCD, hay que unir el lado AD con el lado BC... pero cuidado A debe coincidir con C y B con D.

Construya una cinta así. Coleree una cara.
¿ Qué observas ?

Trace la línea mediana de la cinta. Corte la cinta siguiendo esta línea.
¿ Qué constatas ?

The Möbius strip is presented in the figure. It has got amazing geometric properties.

To make such a Möbius strip with a rectangular band of paper ABCD, you must link side AD to side BC... but be careful A must coincide exactly with C and B with D.

Now cut out such a Möbius strip. Color one side.
What do you observe ?

Draw the median line of the strip. Cut the strip on that line. ***What do you notice ?***

Il nastro di Möbius è rappresentato in figura : possiede delle proprietà geometriche sorprendenti.

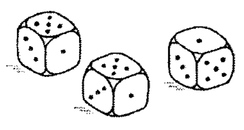
Per costruire un nastro di questo tipo con una striscia di carta rettangolare ABCD, si deve raccordare il lato AD con il lato BC...ma attenzione perché A deve coincidere con C e B con D.

Costruite un tale nastro. Coloratene una faccia.
Che cosa notate ?

Tracciate la mediana del nastro. Tagliate il nastro secondo questa linea. ***Che cosa osservate ?***

Aufgabe 2 – 5 Punkte

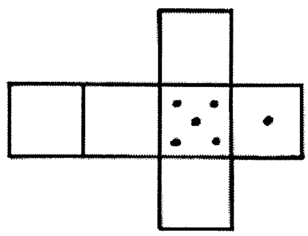
Würfelvarianten



Bei einem herkömmlichen Spielwürfel beträgt die Augensumme gegenüberliegender Seiten stets 7.

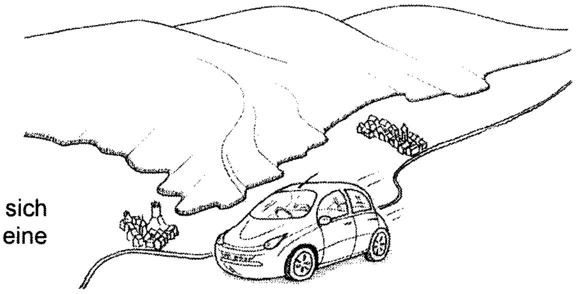
Wie die linke Abbildung zeigt, gibt es bei Einhaltung dieser Vorschrift verschiedene Möglichkeiten, die Augen auf den Würfelflächen anzuordnen.

Zeichne alle Möglichkeiten auf, welche sich beim Vervollständigen des abgebildeten Würfelnetzes ergeben können.



Aufgabe 3
7 Punkte

Ras' nicht so!



Vier Personen bilden eine Fahrgemeinschaft. Sie wechseln sich mit dem Fahren untereinander ab und legen bei jeder Fahrt eine Strecke von 24 km zurück.

Sylvie fährt ruhig und bedacht. Sie benötigt stets die gleiche Zeit. Christine braucht sechs Minuten weniger als Sylvie. Michel fährt zu schnell und braucht sechs Minuten weniger als Christine. Antoine fährt völlig unverantwortlich. Er braucht sogar sechs Minuten weniger als Michel und ist damit doppelt so schnell wie Christine.

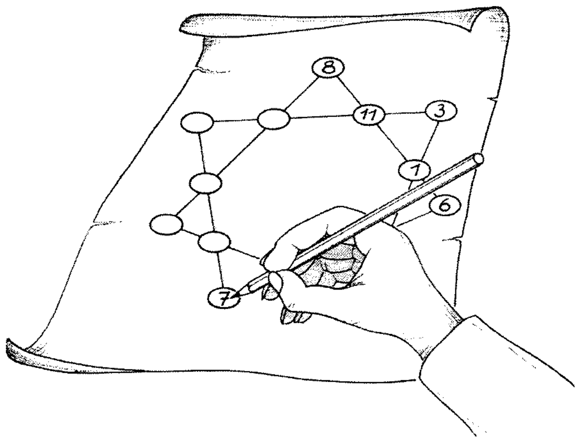
Berechne für jede der vier Personen die jeweilige Durchschnittsgeschwindigkeit.

Aufgabe 4
5 Punkte

Zahlenstern

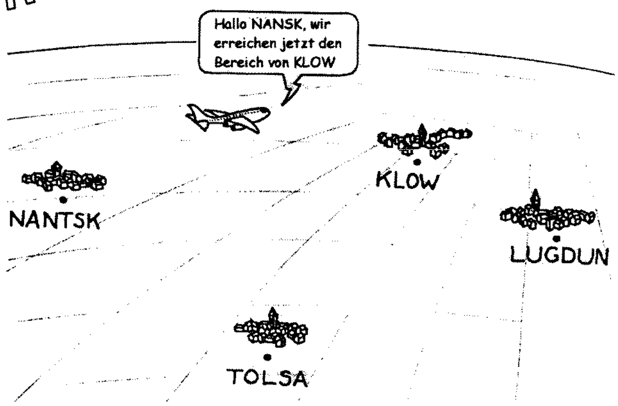
Maurice verkünstelt sich beim Zeichnen eines siebenzackigen Sterns. In seinen Eckpunkten ordnet er die Zahlen von 0 bis 13 so an, dass die Summe der vier Zahlen auf einer Linie jeweils gleich ist.

Vervollständige den Stern von Maurice und zeichne ihn in ansprechender Form auf das Antwortblatt.



Aufgabe 5
7 Punkte

Unter Kontrolle



Im fernen Syldavien wird der Luftraum von vier Kontrollzentren aus überwacht. Diese befinden sich in Nantsk, Klow, Lugdun und Tolsa.

Um die Arbeit der vier Zentren zu koordinieren, haben die syldavischen Behörden eine einfache Regelung getroffen:
Jedes Flugzeug im syldavischen Luftraum wird von dem Kontrollzentrum überwacht, das ihm am nächsten liegt.

Entfernungen: KT = 600 km, KL = 350 km, NK = 350 km, TL = 400 km und NT = 450 km.

Zeichne auf dem Lösungsblatt die vier Kontrollzentren ein (1 cm ≙ 50 km).
Markiere farbig die vier Überwachungsbereiche, nachdem du zuvor ihre Grenzen konstruiert hast.

Aufgabe 6
5 Punkte

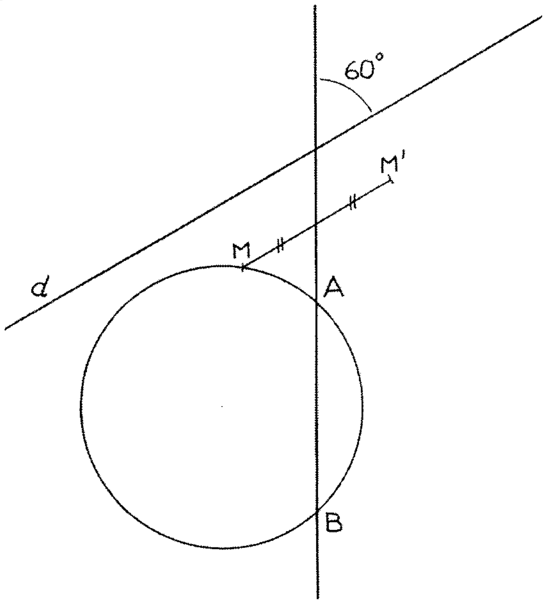
Eine Frage des Alters

Hektor ist zur Zeit fünfzig Jahre alt. Er erfährt, dass die mittlere Lebenserwartung in seinem Land zur Zeit 78 Jahre beträgt und jährlich um zwei Monate zunimmt.

In welchem Jahr entspricht das Alter von Hektor der Lebenserwartung in seinem Land, falls sich diese weiterhin wie beschrieben entwickelt und Hektor dies noch erlebt?

Aufgabe 7 – 7 Punkte

Schieflage



"Die Achsenspiegelung wird langsam langweilig!", beklagt sich Jacques. Er hat genug davon, dass die Verbindungslinie zwischen Ur- und Bildpunkt immer orthogonal zur Spiegelachse sein soll. Warum nicht mal ein anderer Winkel?

Immerhin hält er sich noch an die folgende Regel:

Die Verbindungsstrecken zwischen Ur- und Bildpunkt sind parallel zu einer Geraden d und werden von der Spiegelachse halbiert.

Eine solche Abbildung heißt Schrägspiegelung.

Übertrage die obenstehende Figur vergrößert auf das Lösungsblatt

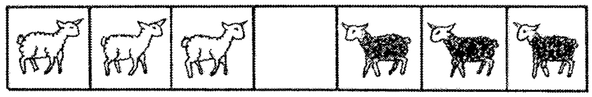
Konstruiere punktweise das Bild des Kreises bei dieser Schrägspiegelung.

Aufgabe 8 – 5 Punkte

Bocksprünge

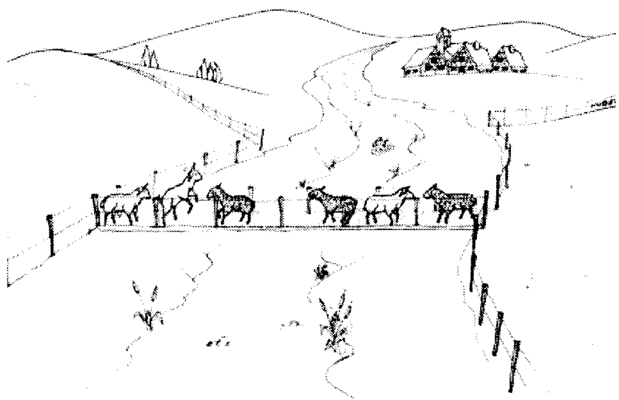
Die drei schwarzen Schafböcke in den quadratischen Kästchen sollen ihren Platz mit den drei weißen Böcken tauschen. Dabei sind einem Schaf nur folgende **Vorwärtsbewegungen** erlaubt:

- Zug auf ein vor ihm liegendes freies Kästchen
- Überspringen eines vor ihm stehenden Tieres auf ein freies Kästchen



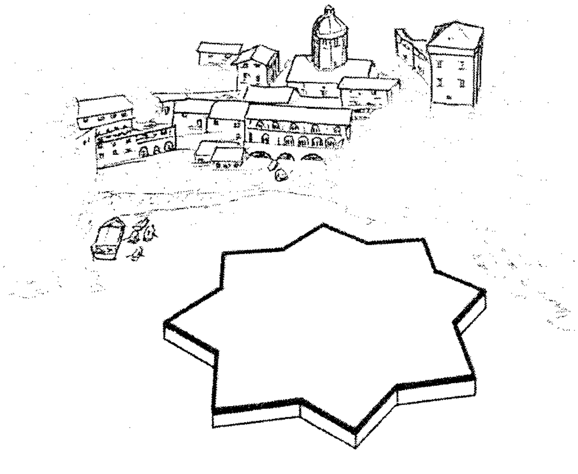
Am Ende sollen die schwarzen Böcke links und die weißen Böcke rechts stehen und durch ein leeres Kästchen in der Mitte getrennt sein.

Gib eine Folge von Bewegungen an, welche diesen Austausch bewerkstelligt.



Aufgabe 9 – 7 Punkte

Ligurisches Pflaster



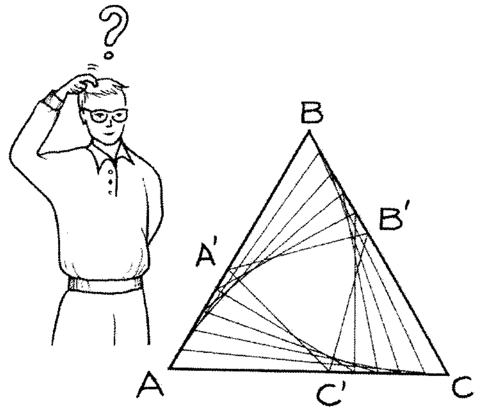
Bei Ausgrabungen in der Umgebung von Genua haben Archäologen in der Abtei San Fruttuoso einen Fliesenboden freigelegt. Er besteht aus zwei Arten von Kacheln, welche in gleicher Anzahl lückenlos aneinandergelegt sind.

Die Kacheln der einen Sorte haben die Form eines regelmäßigen achtzackigen Sterns. Man erhält ihn, wenn man zwei Quadrate von 1 dm Kantenlänge so übereinander legt, dass ihre Diagonalenschnittpunkte zusammenfallen. Die Kacheln der anderen Sorte füllen die Zwischenräume so aus, dass eine lückenlose Parkettierung entsteht. Beide Arten von Kacheln haben den gleichen Umfang.

Klebe auf das Lösungsblatt eine lückenlose Anordnung von sechs Kacheln, drei von jeder Sorte, im Maßstab 1:2.

Aufgabe 10
10 Punkte

Dreiecksgeschichten

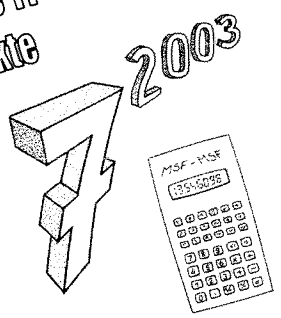


Das gleichseitige Dreieck ABC hat 8 cm Seitenlänge. Die Punkte A', B' und C' liegen jeweils auf den Seiten AB, BC und AC. Dabei gilt $\overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'}$.

Wie lang muss die Strecke AA' sein, damit die Dreiecke AA'C', BB'A' und CC'B' in A', B' bzw. C' rechtwinklig sind? Beschreibe dein Vorgehen und überprüfe die Lösung.

nur für Klassenstufe 11

Aufgabe 11
5 Punkte



Der Zweck heiligt die Mittel

Marc spielt mit seinem Taschenrechner. Er behauptet, dass er bei beliebigen Potenzen von 7 die beiden letzten Ziffern berechnen kann.

Wie lauten die beiden letzten Ziffern von 7^{2003} ? Erkläre, wie man diese Ziffern findet.

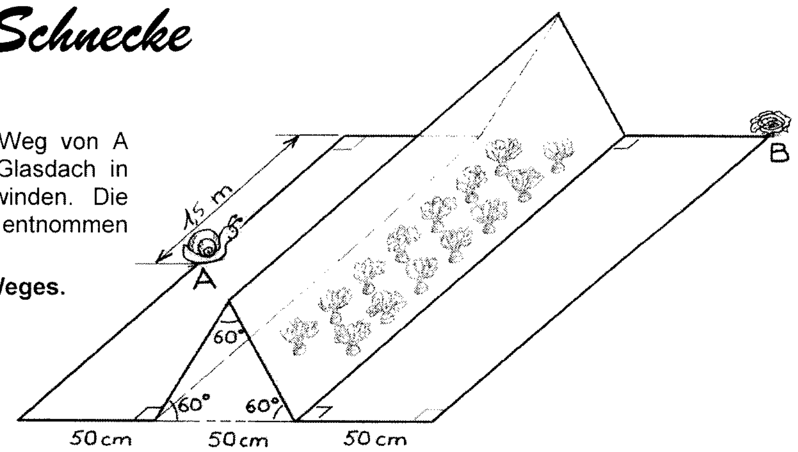
Aufgabe 12
7 Punkte

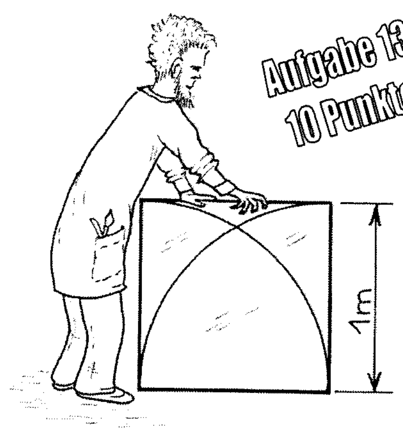
Hungrige Schnecke

Eine Schnecke will auf dem kürzesten Weg von A nach B. Auf ihrem Weg muss sie ein Glasdach in Form eines dreiseitigen Prismas überwinden. Die Abmessungen können der Abbildung entnommen werden.

Berechne die Länge dieses kürzesten Weges.

Erkläre, wie du vorgegangen bist.





Aufgabe 13
10 Punkte

Vorsicht Glas

Ein quadratisches Fenster von 1m Seitenlänge soll so verglast werden, wie es im Bild dargestellt ist. Die Glasflächen werden von zwei Viertelkreisen begrenzt, deren Mittelpunkte in den beiden unteren Quadratecken liegen.

Bestimme den Flächeninhalt jeder der vier Glasflächen.

Mathematik ohne Grenzen 2002/03
Lösungshinweise Probewettbewerb

Die den Lösungen beigefügten Bewertungsvorschläge dienen als Anhaltspunkt. Sie orientieren sich am französischen Original und sind nicht verbindlich.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

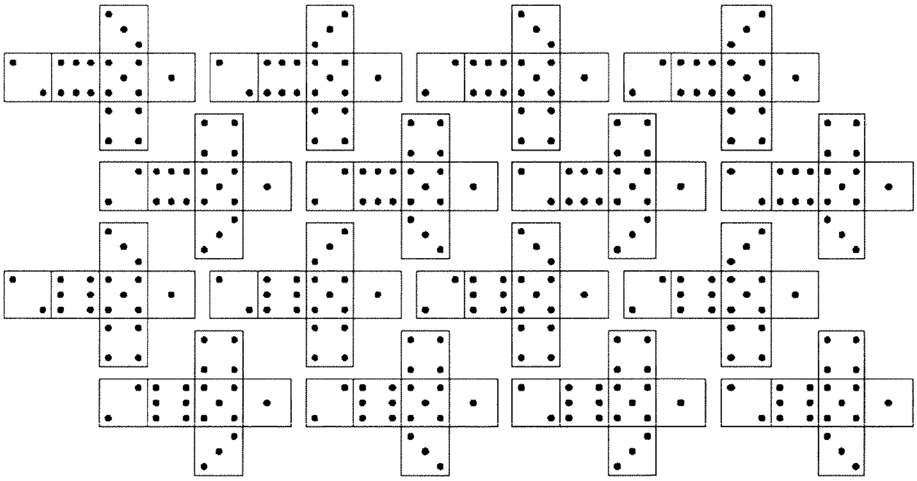
Im Text soll zum Ausdruck kommen, dass das Möbiusband nur eine einzige Seite besitzt und dass beim Zerschneiden nicht zwei Bänder entstehen. Vielmehr erhält man ein doppelt verdrehtes Band, welches nun aber zwei Seitenflächen besitzt.

Bewertungsvorschlag : Herstellen und Färben 1 Punkt, sprachlicher Ausdruck 3 Punkte, Inhalt 3 Punkte.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Bei den Seiten mit 2, 3 und 6 Augen können die Punkte jeweils in zwei Richtungen orientiert werden. Außerdem können die Seiten mit den Augenzahlen 3 und 4 vertauscht werden. Es gibt 16 verschiedene Lösungen.

Bewertungsvorschlag: 5/16 × Anzahl der richtigen Lösungen, gerundet auf volle Punktzahl



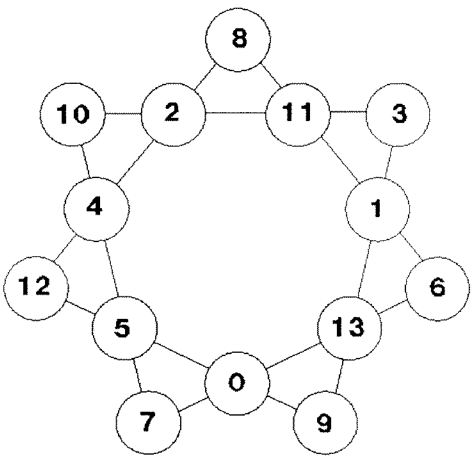
Aufgabe 3 (7 Punkte)

Antoine benötigt 12 min weniger als Christine. Da er doppelt so schnell wie Christine fährt, beträgt seine Fahrzeit ebenfalls 12 min. Daraus ergeben sich die Fahrzeiten der anderen Personen und die zugehörigen Geschwindigkeiten: Sylvie 48km/h, Christine 60km/h, Michel 80km/h, Antoine 120km/h

Bewertungsvorschlag:
4 Punkte für die Antworten, 3 Punkte für die Erklärung.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

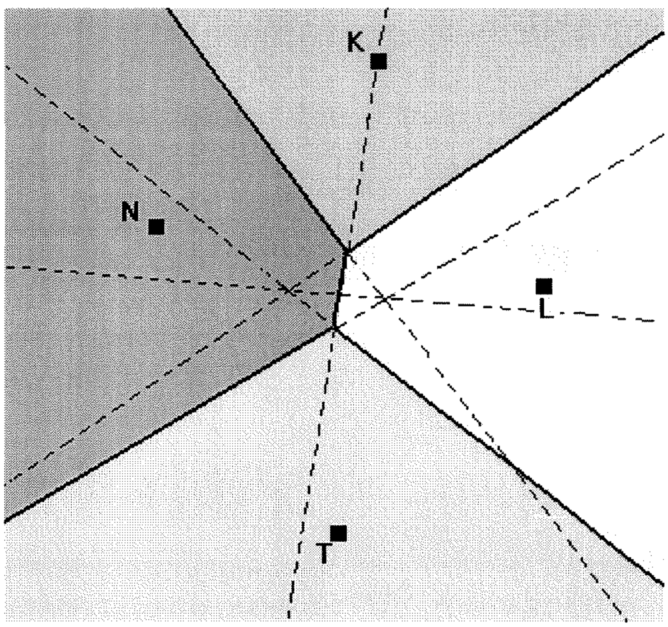
die Lösung ist eindeutig



Bewertungsvorschlag: Lösung 3 Punkte, Darstellung 2 Punkte

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Verbindet man die Städte paarweise, so erhält man die Grenzen der Kontrollbereiche aus den Mittelsenkrechten der Verbindungsstrecken. Dabei die richtige Auswahl der Grenzabschnitte entscheidend.



Bewertungsvorschlag
Mittelsenkrechte 3 Punkte, Auswahl der Grenzen 2 Punkte, Genauigkeit und Darstellung 2 Punkte.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

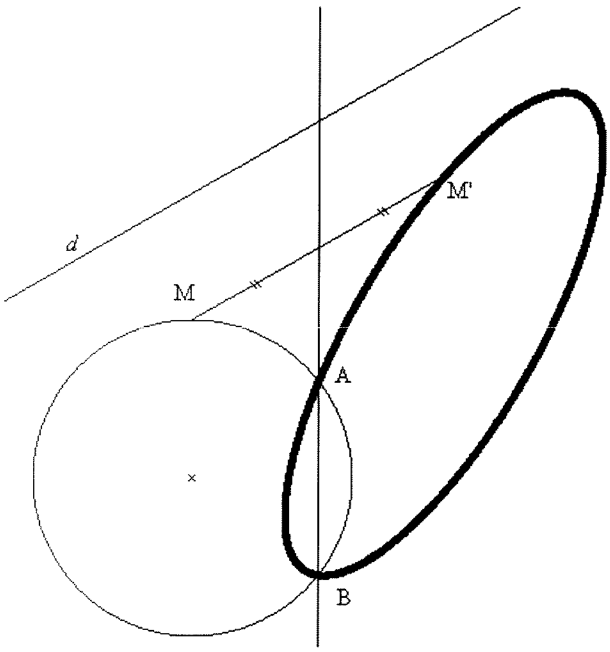
1. Weg

Hektors Alter	50	51	52	...	56	62	68	74	80	81	82	83
Lebenserwartung	78	78a2m	78a4m	...	79	80	81	82	83	83a2m	83a4m	83a6m

2. Weg: In n Jahren wird Hektor $50 + n$ Jahre alt sein. Die Lebenserwartung wird dann $78 + n/6$ Jahre betragen. Aus $50 + n = 78 + n/6$ erhält man $n = 33{,}6$.
Da der Wettbewerb Ende 2002 bzw. Anfang 2003 durchgeführt wird, erreicht man die Gleichheit im Laufe des Jahres 2036

Bewertungsvorschlag:
3 Punkte für die Antwort 2036 (2 Punkte für 2035); 2 Punkte für die Erklärung.

Aufgabe 7 (7 Punkte):



Bewertungsvorschlag:
Ausgangskonfiguration 1 Punkt; bis zu 4 Verrechnungspunkte für die Bildpunkte (gestaffelt nach Anzahl und Verteilung); 2 Punkte für das Zeichnen der Ellipse.

Aufgabe 8 (5 Punkte):

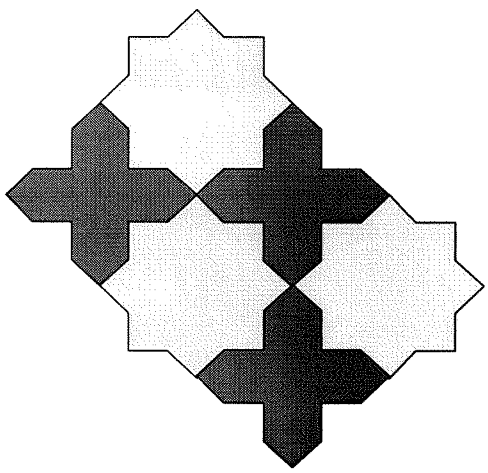
Es gibt zwei Lösungen mit 15 Zügen.
Hier ist eine davon :

	○	○	○		●	●	●
1	○	○		○	●	●	●
2	○	○	●	○		●	●
3	○	○	●	○	●		●
4	○	○	●		●	○	●
5	○		●	○	●	○	●
6		○	●	○	●	○	●
7	●	○		○	●	○	●
8	●	○	●	○		○	●
9	●	○	●	○	●	○	
10	●	○	●	○	●		○
11	●	○	●		●	○	○
12	●		●	○	●	○	○
13	●	●		○	●	○	○
14	●	●	●	○		○	○
15	●	●	●		○	○	○

Die zweite Lösung beginnt mit den schwarzen Schafen und ist symmetrisch zur ersten. Allgemein lässt sich zeigen, dass bei n weißen und n schwarzen Schafen $n(n+2)$ Züge mit n^2 Sprüngen erforderlich sind,

Bewertungsvorschlag 2 Punkte für eine Zugfolge mit mehr als 15 Zügen (mit Rückwärtsbewegungen),
5 Punkte für eine der beiden korrekten Lösungen.

Aufgabe 9 (7 Punkte):



Bewertungsvorschlag : 2 Punkte für die zweite Kachelform,
2 Punkte für die Anordnung, 3 Punkte für Sorgfalt, Genauigkeit und schöne Gestaltung.

Aufgabe 10 (10 Punkte):
Voraussetzung: ABC gleichseitig,
$\overline{AB} = 8; \overline{AA'} = \overline{BB'} = \overline{CC'} = x$.

Sei M der Mittelpunkt von AB. Dann ist MC eine Höhe des Dreiecks ABC und die folgenden Aussagen sind äquivalent:

Dreieck AA'C' ist rechtwinklig in A'

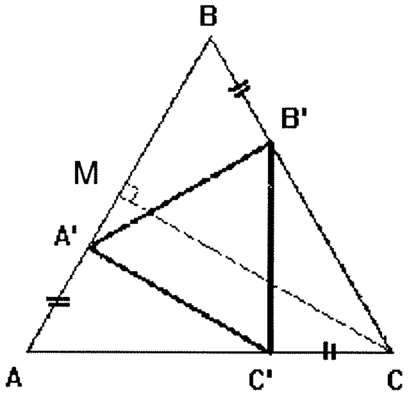
⇔die Geraden (A'C') und (MC) sind parallel

⇔ $\overline{AA'} : \overline{AM} = \overline{AC'} : \overline{AC}$

⇔x : 4 = (8-x) : 8 ⇔ 2x = 8-x

⇔ $\boxed{x = 8/3}$

Für die beiden anderen Dreiecke verläuft die Überlegung analog.



Bewertungsvorschlag: Näherungswert 2,6 oder 2,7 (durch Probieren) 1 Punkt. Antwort 8/3 ohne Nachweis 2 Punkte. Beweis 7 Punkte nach Ermessen des Korrektors. Hinweis auf die beiden anderen Dreiecke 1 Punkt.

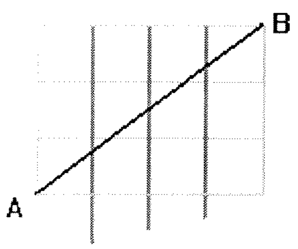
Aufgabe 11 (5 Punkte):

Hier die ersten Potenzen von 7 : 1 - 7 - 49 - 343 - 2401 - 16807 - 117649 - 823543 - 5764801 - 40353607 - 282475249 - 1977326743.
Man stellt fest, dass sich die beiden letzen Ziffern 07, 49, 43 und 01 periodisch wiederholen. Da man bei der Division von 2003 durch 4 den Rest 3 erhält, muss 7^{2003} in den beiden letzten Ziffern mit 7^3 übereinstimmen.

Etwas allgemeiner: : $7^{n+4} = 7^{n} \times 2401$. Die beiden letzten Ziffern von 2401 sind 01. Multipliziert man also eine beliebige Zahl mit 7^4, so ändern sich die beiden letzten Ziffern nicht.
Nun ist $7^{2003} = 7^3 \times 7^{2000} = 7^3 \times 2401^{500}$. Die beiden letzten Ziffern von 7^3 und 7^{2003} stimmen also überein.

Bewertungsvorschlag: 3 Punkte für das Ergebnis, 2 Punkte für die Erklärung.

Aufgabe 12 (10 Punkte)



Die Schnecke muss 4 Streifen überqueren, von denen jeder 0,5 m breit ist. Legt man die Streifen nebeneinander, so lässt sich der Weg über den Satz des Pythagoras berechnen. Es ergibt sich eine Länge von 2,5 m.

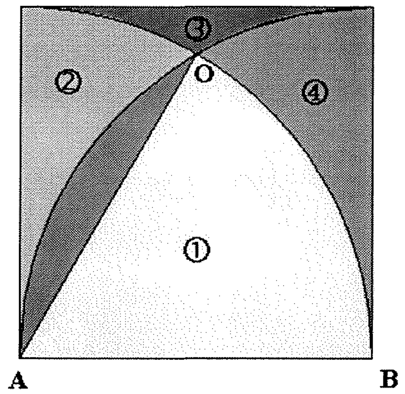
Bewertungsvorschlag : korrekt berechneter längerer Weg 3 Punkte; richtige Zeichnung aber keine Rechnung 4 Punkte

Aufgabe 13 (10 Punkte): Längeneinheit 1m

Flächeninhalt des dunklen Kreissegments:

$$A_0 = \frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$①: \ A_1 = \frac{1}{6}\pi + \left(\frac{1}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$$



Die Flächen ② und ④ sind inhaltsgleich

$$A_2 = A_4 = \frac{1}{4}\pi - \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}$$

$$A_3 = 1 - \frac{1}{4}\pi - \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{12}\right) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$$

Bewertung nach Ermessen des Korrektors. Ein Punkt Abzug beim Rechnen mit Näherungswerten.

Matematica senza frontiere

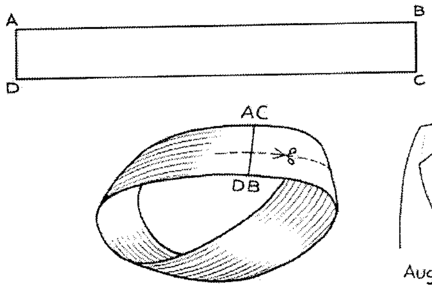
Prova di allenamento 5 - 12 febbraio 2003

NOTA BENE
Per tutti gli esercizi sono richieste spiegazioni, giustificazioni o illustrazioni.
Sarà esaminata ogni risoluzione, anche parziale. Si terrà conto dell'accuratezza.
Ogni foglio-risposta deve essere utilizzato per un singolo esercizio per il quale deve essere riportata una sola soluzione.
Attenzione : in presenza di foglio risposta con soluzioni a più esercizi o in presenza di più soluzioni allo stesso esercizio la prova sarà annullata.

Esercizio n. 1	7 punti	*Senza perdere la faccia*

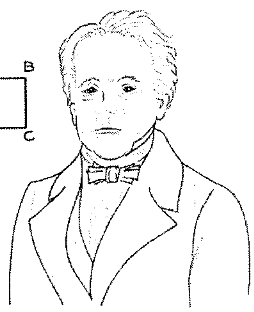
Risoluzione da formulare nella lingua prescelta (francese, inglese, spagnolo o tedesco) con un minimo di 30 parole.

Die Abbildung zeigt ein Möbiusband. Seine geometrischen Eigenschaften überraschen.
Um ein Möbiusband aus einem rechteckigen Papierstreifen ABCD herzustellen, musst du die Seite AD an die Seite BC kleben. Aber Achtung: A muss mit C und B mit D zusammenfallen.
Stelle ein solches Band her und male eine Seite farbig an. ***Was hast du bemerkt ?***
Zeichne nun die Mittellinie des Bandes ein und schneide das Band entlang dieser Linie. ***Was stellst du fest ?***



The Möbius strip is presented in the figure. It has got amazing geometric properties.
To make such a Möbius strip with a rectangular band of paper ABCD, you must link side AD to side BC... but be careful A must coincide exactly with C and B with D.
Now cut out such a Möbius strip. Color one side. ***What do you observe ?***
Draw the median line of the strip. Cut the strip on that line. ***What do you notice ?***

El dibujo nos muestra la cinta de Möbius. Esta cinta tiene propiedades geométricas sorprendentes.
Para fabricar una cinta de Möbius con una tira de papel rectangular ABCD, hay que unir el lado AD con el lado BC... pero cuidado A debe coincidir con C y B con D.
Construya una cinta así. Coleree una cara. ***¿ Qué observas ?***
Trace la línea mediana de la cinta. Corte la cinta siguiendo esta línea. ***¿ Qué constatas ?***

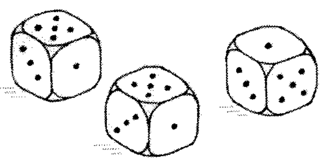


August MÖBIUS (1790-1869)

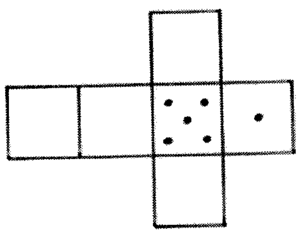
Le ruban de Möbius est présenté sur la figure ci-dessous. Il possède des propriétés géométriques surprenantes.
Pour fabriquer un ruban de Möbius avec une bande de papier rectangulaire ABCD, il faut raccorder le côté AD avec le côté BC... mais attention A doit coïncider avec C et B avec D.
Fabriquer un tel ruban. Colorier une face. **Que remarque-t-on ?**
Tracer la ligne médiane du ruban. Découper le ruban en suivant cette ligne. **Que constate-t-on ?**

Esercizio n°2	5 punti
Qualche piccola differenza	

Perché un dado sia omologato la somma dei numeri segnati su facce opposte deve sempre essere uguale a 7.
Malgrado questa esigenza ci si può imbattere in numerosi modelli di dadi diversi, come per esempio:



Disegnare le varianti di tutti i dadi omologabili completando di volta in volta il seguente sviluppo.

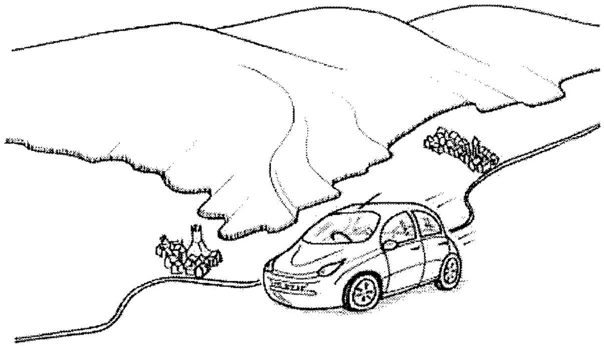


Esercizio n.3	7 punti

Chi va piano va sano

4 persone usano per lavoro la stessa automobile ed effettuano a turno il medesimo tragitto di 24 Km ogni giorno della settimana. Silvia, prudente, guida con tranquillità e impiega sempre il medesimo tempo; Cristina impiega 6 minuti di meno; Michele guida troppo velocemente e impiega 6 minuti meno di Cristina. Antonio è un irresponsabile ed impiega 6 minuti meno di Michele. In tal modo la velocità di Antonio è doppia di quella di Cristina.

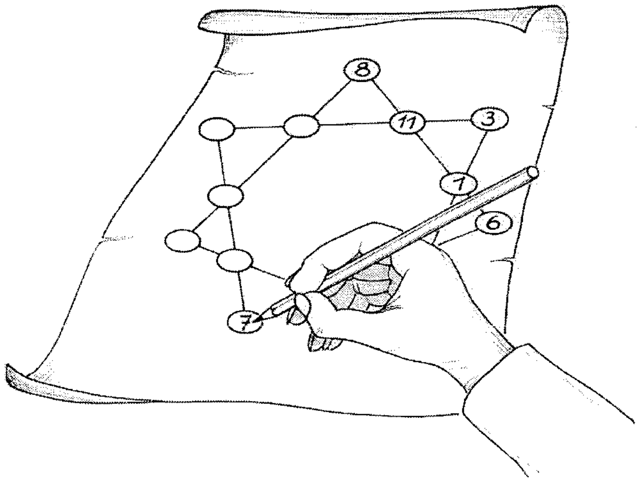
Calcolare la velocità media di ciascun membro dell'equipaggio.



Esercizio n.4	5 punti

Ettagono magico

Maurizio si impegna a tracciare una stella magica a sette punte nella quale egli colloca tutti i numeri interi da 0 a 13 in modo che la somma dei quattro numeri allineati sia sempre la stessa. ***Completare la stella di Maurizio e rappresentarla sul foglio risposta.***



Esercizio n. 5	7 punti

Controllo continuo

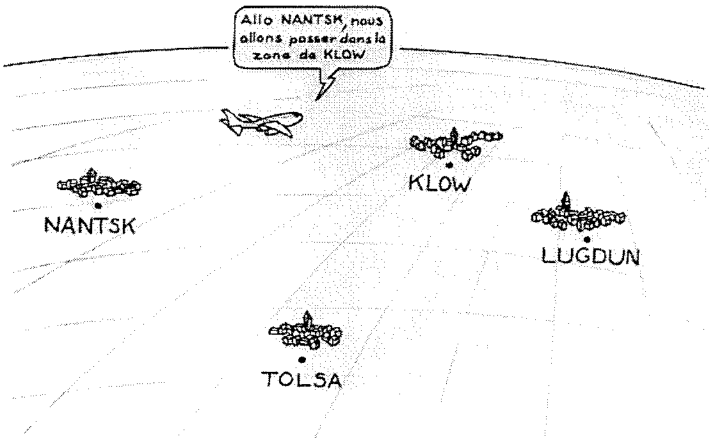
Verso la fine del ventesimo secolo, la Sildavia si è dotata di quattro centri di controllo del suo spazio aereo. Questi sono stati installati a Nantsk, Klow, Lugdun, e Tolsa.Per coordinare il lavoro di questi quattro centri, le autorità sildave hanno enunciato una semplice regola:

"Ogni aereo che sorvola il paese dovrà essere sorvegliato dal centro di controllo più vicino alla sua posizione."

Lo spazio aereo sildavo si trova così suddiviso in quattro zone. ***Rappresentare sul foglio risposta le posizioni relative dei quattro centri di controllo considerando 1 cm pari a 50 Km. Evidenziare le quattro zone con quattro colori dopo aver ben tracciato le loro frontiere .***

Il messaggio riportato nella figura è: "Nantsk ti comunico che passiamo nella zona di Klow,"

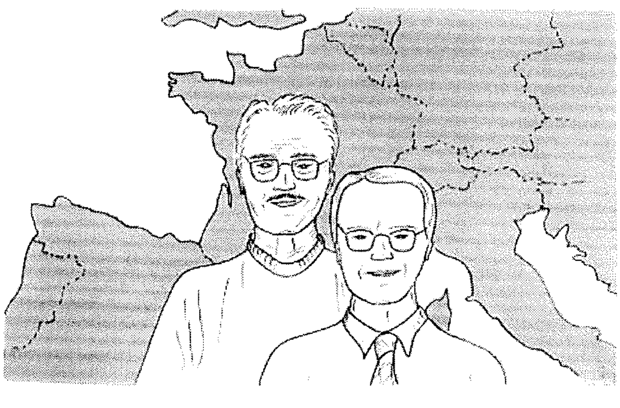
Le distanze sono: KT = 600 km, KL = 350 km, NK = 350 km, TL = 400 km, NT = 450 km.



Esercizio n. 6	5 punti

Tutto aumenta!

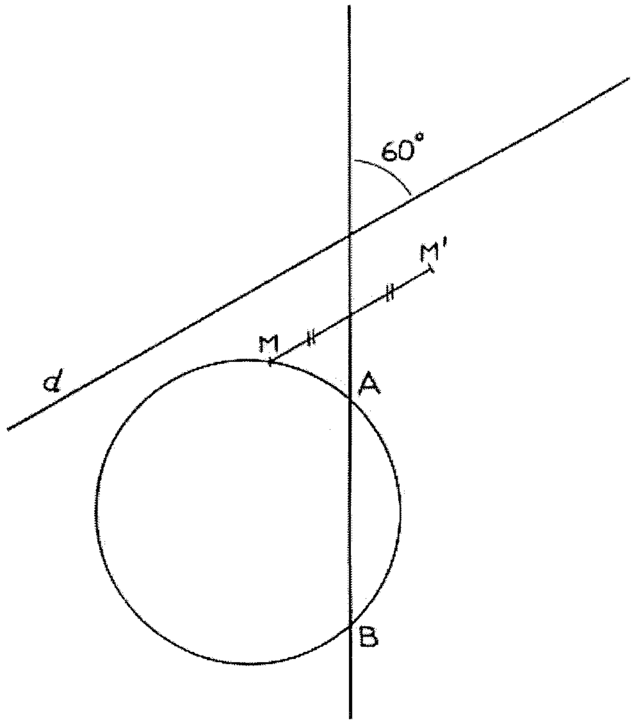
Ettore, oggi cinquantenne, apprende che la speranza di vita nel suo paese è attualmente di 78 anni e che tale speranza aumenta di due mesi ogni anno. ***Se si verificasse questa evoluzione, in quale anno l'età di Ettore sarebbe uguale alla speranza di vita nel suo paese ?***



Esercizio n. 7	7 punti
Non conforme	

" Ancora ortogonale, la simmetria! Basta!" Giacomo vuole cambiare le regole di costruzione affinché una simmetria rispetto ad una retta non sia più ortogonale, ma obliqua.
Perciò inventa la simmetria obliqua con le seguenti regole:
Il punto M' simmetrico di M rispetto alla retta (AB) parallelamente alla direzione *d* è tale che :
1°) le rette (MM') e *d* siano parallele
2°) Il punto medio di [MM'] appartenga alla retta(AB).

Riprodurre sul foglio risposta una figura analoga a quella proposta; quindi costruire punto per punto l'immagine di una circonferenza secondo questa simmetria obliqua.
Le rette (AB) e *d* formano un angolo di 60°.



Esercizio n.8	5 punti
Il cuoco	

Un giorno il cuoco di un ricco signore, per accontentare tre ragazze del villaggio che gli chiedevano delle uova, disse loro: "Vi regalo tutto ciò che ho in questo momento". Alla prima diede la metà di tutto più mezzo uovo; alla seconda la metà di ciò che gli rimaneva più mezzo uovo. Continuando l'insolita spartizione regalò alla terza la metà di ciò che gli restava con mezzo uovo. Cosicché, alla fine, al cuoco non restò alcun uovo e non dovette nemmeno romperne alcuno.

Come fece? E quante uova donò alla fanciulla?

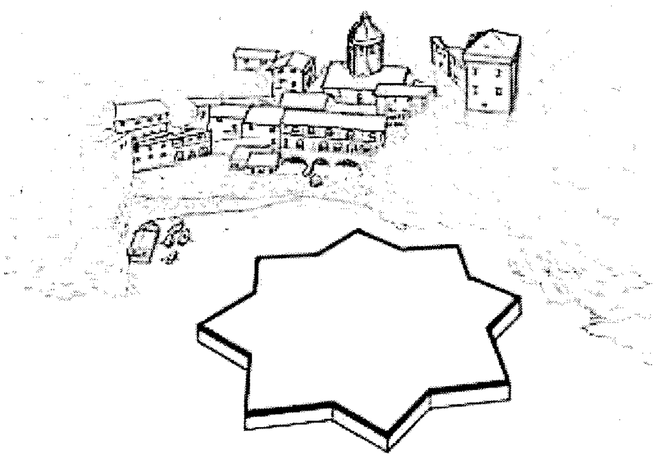
(a cura di Davide Zugliani, studente classe V A IPC "Einaudi" Cremona, vincitore della Competizione "Angela Bernasconi" 2002)

Esercizio n. 9	7 punti
Pavimento ligure	

In occasione di scavi archeologici nel Monastero di San Fruttuoso, nei pressi di Genova è stato rinvenuto un pavimento formato da piastrelle di due tipi strettamente giustapposte in numero uguale.

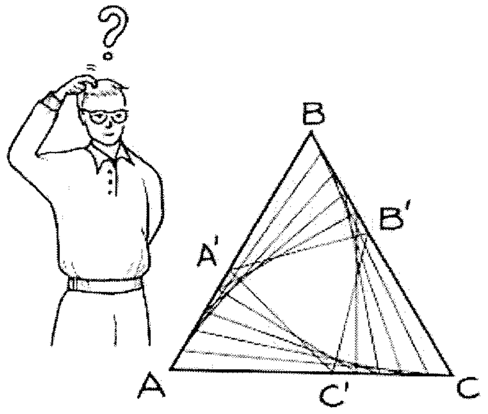
Le une hanno la forma di una stella regolare a 8 punte che si potrà ottenere sovrapponendo due quadrati di lato 1 dm aventi lo stesso centro. Le altre hanno un perimetro uguale a quello delle precedenti. Queste sono di complemento alle prime per permettere la realizzazione di una pavimentazione senza interstizi.

Incollare sul foglio risposta in scala 1/2, una distribuzione di 6 piastrelle : 3 di ciascun tipo.



Esercizio n. 10 — 10 punti

Triangoli bloccati



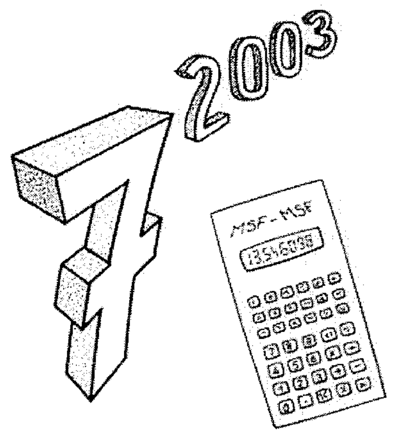
ABC è un triangolo equilatero di 8 cm di lato.
Si scelgono 3 punti A', B' e C', rispettivamente sui segmenti [AB], [BC] e [CA], in modo che AA' = BB' = CC'.

Come si può scegliere la distanza AA' in modo che i triangoli AA'C', BB'A' e CC'B' siano rettangoli, rispettivamente in A', B', C'? Giustificare la risposta.

Esercizio n. 11 — 5 punti

Il fine giustifica i mezzi

Speciale terza



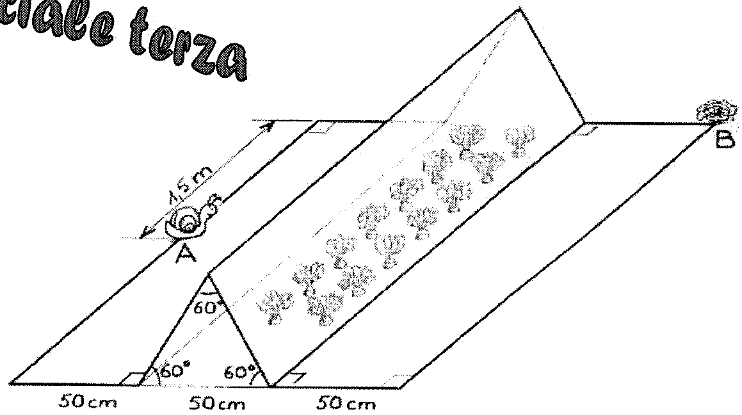
Marco si diverte con la calcolatrice e dice che sa calcolare le ultime due cifre di qualsiasi potenza di 7.

Quali sono le ultime due cifre di 7^{2003}? Spiegare il procedimento.

Esercizio n. 12 — 7 punti

Che appetito!

Speciale terza



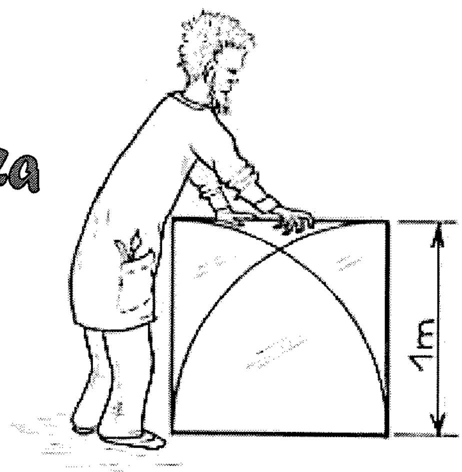
Una lumaca vuole recarsi da un punto A a un punto B per la via più breve. Sul suo cammino, deve inerpicarsi su una serra a forma di prisma.
Le dimensioni sono indicate sulla figura qui accanto.

Calcolare la lunghezza del cammino. Spiegare il procedimento seguito.

Esercizio n. 13 — 10 punti

Attenzione fragile

Speciale terza



Una finestra quadrata di un metro di lato è chiusa da una vetrata qui rappresentata.
Le superfici di vetro sono delimitate da due quarti di cerchio centrati sui vertici inferiori del quadrato.

Determinare l'area dei quattro pezzi di vetrata.

Mathématiques sans frontières

Training test - December 2002

- For questions 3,6,10,11,12 and 13 you need to explain or justify your answer.
- Incomplete answers will still get some marks.
- Careful work can gain marks.
- Only one answer should be handed in for each question.

Question 1 — 7 marks — *Möbius strip*

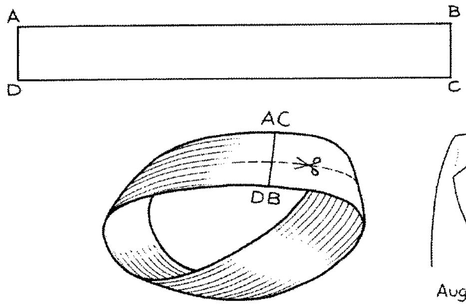
Write down your answer in French, German, Italian or Spanish using at least 30 words.

Le ruban de Möbius est présenté sur la figure. Il possède des propriétés géométriques surprenantes.

Pour fabriquer un ruban de Möbius avec une bande de papier rectangulaire ABCD, il faut raccorder le côté AD avec le côté BC... mais attention A doit coïncider avec C et B avec D.

Fabriquer un tel ruban.
Colorier une face.
Que remarque-t-on ?

Tracer la ligne médiane du ruban. Découper le ruban en suivant cette ligne.
Que constate-t-on ?



Die Abbildung zeigt ein Möbiusband. Seine geometrischen Eigenschaften überraschen. Um ein Möbiusband aus einem rechteckigen Papierstreifen ABCD herzustellen, musst du die Seite AD an die Seite BC kleben. Aber Achtung: A muss mit C und B mit D zusammenfallen.
Stelle ein solches Band her und male eine Seite farbig an.

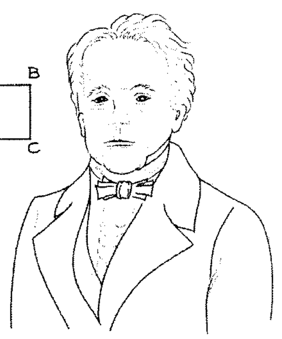
Was hast du bemerkt ?

Zeichne nun die Mittellinie des Bandes ein und schneide das Band entlang dieser Linie.

Was stellst du fest ?

El dibujo nos muestra la cinta de Möbius. Esta cinta tiene propiedades geométricas sorprendentes.

Para fabricar una cinta de Möbius con una tira de papel rectangular ABCD, hay que unir el lado AD con el lado BC... pero cuidado A debe coincidir con C y B con D.



August MÖBIUS (1790 - 1868)

Construya una cinta así.
Coleree una cara.
¿ Qué observas ?

Trace la línea mediana de la cinta. Corte la cinta siguiendo esta línea.
¿ Qué constatas ?

Il nastro di Möbius è rappresentato in figura : possiede delle proprietà geometriche sorprendenti.

Per costruire un nastro di questo tipo con una striscia di carta rettangolare ABCD, si deve raccordare il lato AD con il lato BC...ma attenzione perché A deve coincidere con C e B con D.

Costruite un tale nastro. Coloratene una faccia.
Che cosa notate ?

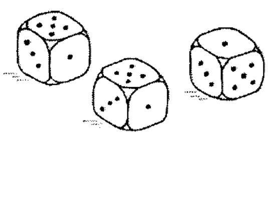
Tracciate la mediana del nastro. Tagliate il nastro secondo questa linea.

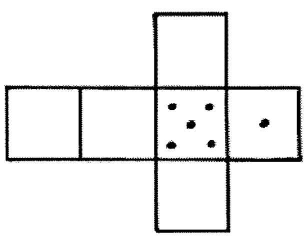
Che cosa osservate ?

Question 2 — 5 marks — *No mistake*

Draw the net for every possible different example of a standard dice using this grid as your starting point.

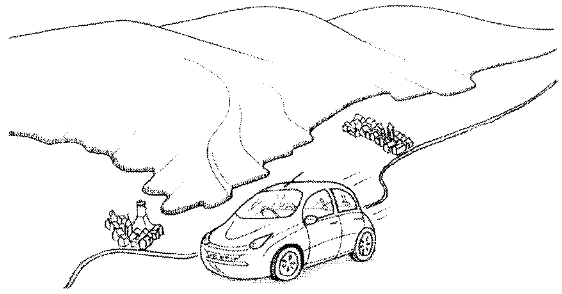
For a standard dice, the numbers on opposite faces always add up to 7. In spite of this rule, you can still get different examples of a dice, for example :





Question 3 — 7 marks

Speed trap



Four people enjoy driving. They drive the same journey of 24 km every day.

Sylvie who is very cautious drives very carefully. She always takes the same time for the journey. Christine does the journey 6 minutes faster. Michel drives too fast and takes 6 minutes less than Christine. Antoine is quite irresponsible and takes 6 minutes less than Michel.
In fact Antoine's speed is double Christine's speed.

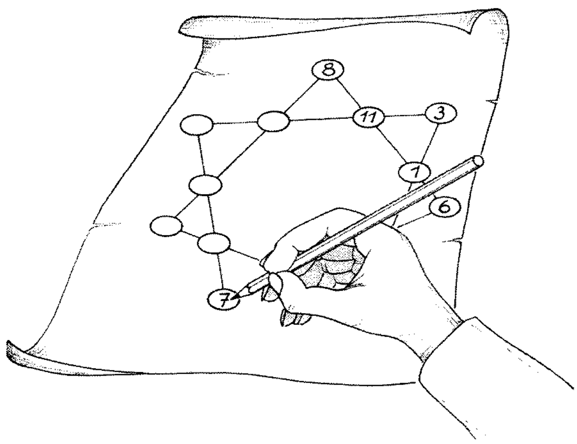
Find the average speed of each driver.

Question 4 — 5 marks

Magic Heptagon

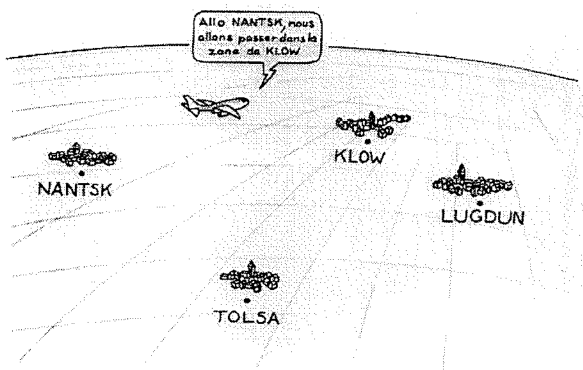
Maurice draws a magic star in which he is going to put the whole numbers 0 to 13. The sum of any four numbers in a line has to be the same.

Complete Maurice's star and draw it neatly on your answer paper.



Question 5 — 7 marks

In control



Towards the end of the 20th century, Syldavia needed 4 centres to control its airspace. They were based at Nansk, Klow, Lugdun and Tolsa.
To coordinate the work of the four centres the Syldavian authorities had a simple rule:
" Every aircraft flying over the country must be controlled by the airspace control centre nearest to its position."
Because of this rule Syldavia was divided into 4 control zones.

Show the positions of the four centres on your answer sheet using a scale 1 cm to 50 km.

Show the 4 zones on four different colours after drawing the boundaries carefully.

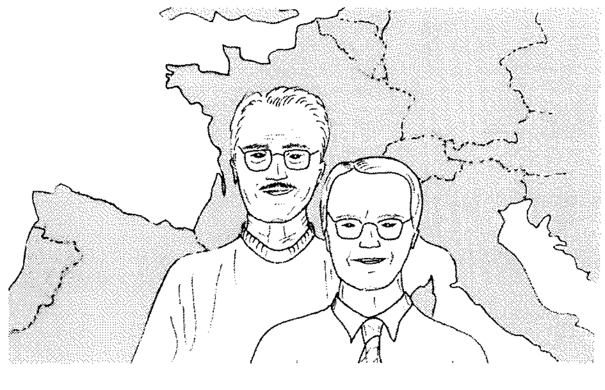
You are given the distances : KT = 600 km KL = 350 km NK = 350 km TL = 400 km NT = 450 km

Question 6 — 5 marks

Ever increasing !

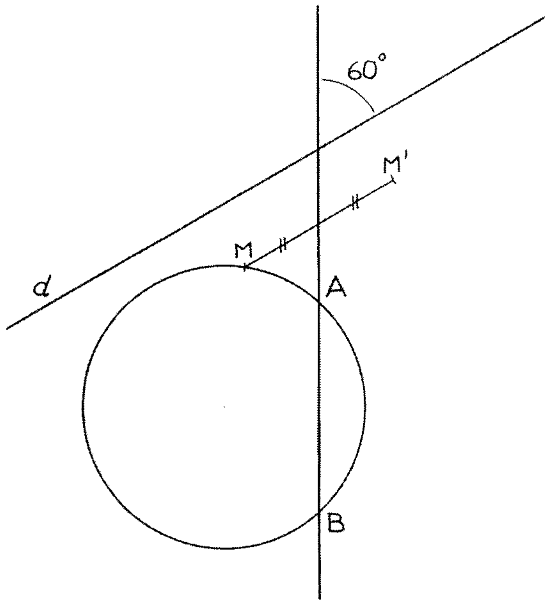
Hector, who is 50 years old today, finds out that life expectancy in his country is now 78 years. It goes up 2 months every year.

If this trend continues in which year of Hector's life will his age be the same as the life expectancy in his country ?



Question 7
7 marks

Nonconformist



Jacques wants to change the rules so that reflection in a line is no longer at right angles but can be oblique. He invents oblique symmetry with the rules:
The point M' is the image of M on reflection in the line AB and parallel to the line *d* when

1) the lines MM' and *d* are parallel
2) the mid-point of MM' is on the line AB.

Draw on your answer sheet a diagram similar to the one below. Construct on it the image of the circle under this oblique symmetry by drawing a large enough number of points.

The lines AB and *d* make an angle of 60°.

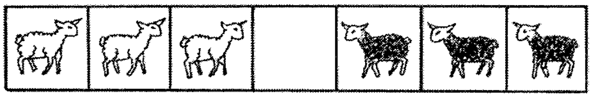
Question 8
5 marks

Baa-baa black sheep

The white sheep and the black sheep want to change fields with each other. The problem can be turned into a game :

3 white sheep and three black sheep are placed in the grid below made up of 7 boxes.
You can move the sheep in two ways:

- you can move a sheep forward into an empty box if there is one in front of it
- you can jump a sheep over a neighbouring sheep to get to an empty box.

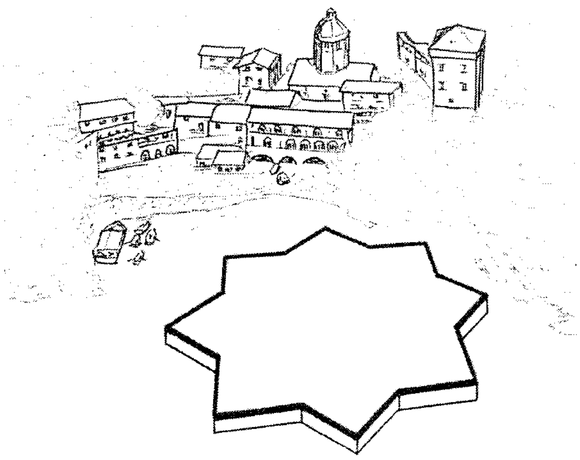


You have to get the white sheep on the right and the black sheep on the left, separated by an empty box.

Write down a sequence of moves which will bring this about.

Question 9
7 marks

On the tiles



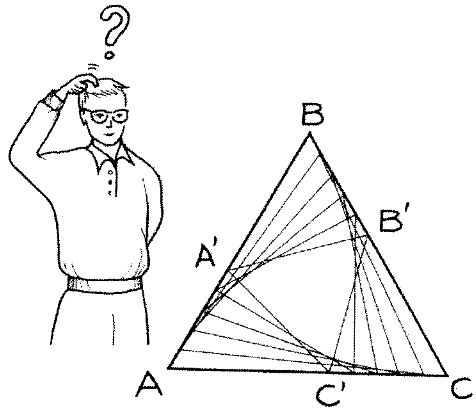
During an archaeological "dig" at the monastery of San Fruttuoso near Genoa, they found a tiled floor made from an equal number of two different kinds of tiles.
One kind was the regular eight-pointed star that is made by taking two squares of side 10 cm and putting one on top of the other, making sure that the centres of the squares are also one on top of the other.

The other kind of tile has the same length of perimeter as the first type. This second kind fits with the first to form a tiled floor without any gaps.

Show on your answer sheet an arrangement of 6 tiles, 3 of each kind. Use a scale of 1:2.

Question 10
10 marks

Triangle puzzle



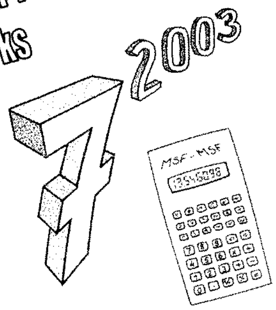
ABC is an equilateral triangle with side 8 cm.

Three points A',B',C' are placed respectively on AB, BC and CA, so that AA' = BB' = CC'.

How can you find the distance AA' so that the triangles AA'C', BB'A' and CC'B' are right-angled triangles with the right angle at A',B' and C' respectively. Justify your answer.

Senior classes only

Question 11
5 marks



Means to an end

Marc has been playing with his calculator. He says that he now knows how to find the last two digits of any power of 7.

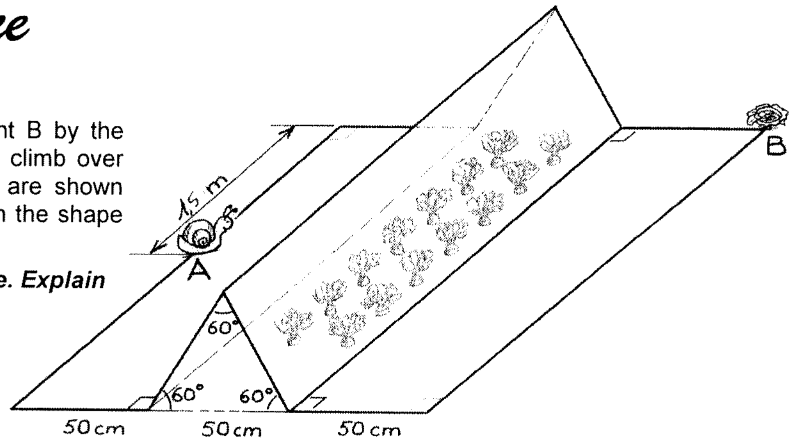
What are the last two digits of 7^{2003} ? Explain how you found them.

Question 12
7 marks

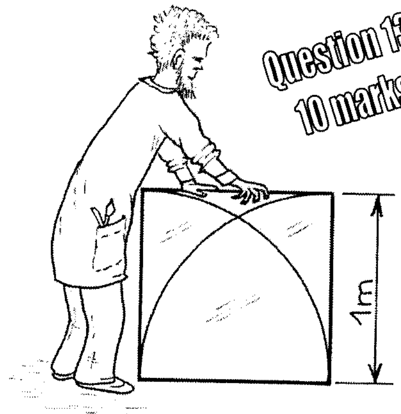
Snail's pace

A snail wants to get from point A to point B by the shortest route. On the way it will have to climb over the glass covering the plants. The sizes are shown here on the diagram. The glass cover is in the shape of a prism.

Work out the length of the shortest route. Explain your answer.



Question 13
10 marks



Handle with care

A square window-frame of side 1 metre holds the stain-glass window shown below.

The four sections of glass are bounded by parts of the two quarter circles whose centres are the bottom corners of the square.

Work out the area of each section of glass.

PRÓBA-FORDULÓ

2002-2003

Támogatóink:

Budapest Főváros Önkormányzata
Safaripark Gänserndorf
OTP RT.
Berzsenyi Dániel Gimnázium
Lichtbogen BT.
Nemzeti Tankönyvkiadó RT.
Magyar Követeléskezelő RT.

1. feladat	7 pont
Ne légy kétszinű	

A megoldást angolul, németül, franciául, olaszul vagy spanyolul fogalmazzátok meg minimum 30 szóban.

✿

Le ruban de Möbius est présenté sur la figure. Il possède des propriétés géométriques surprenantes.
Pour fabriquer un ruban de Möbius avec une bande de papier rectangulaire ABCD, il faut raccorder le côté AD avec le côté BC... mais attention A doit coïncider avec C et B avec D.
Fabriquer un tel ruban. Colorier une face.
Que remarque-t-on ?
Tracer la ligne médiane du ruban. Découper le ruban en suivant cette ligne. ***Que constate-t-on ?***

✿

Die Abbildung zeigt ein Möbiusband. Seine geometrischen Eigenschaften überraschen.
Um ein Möbiusband aus einem rechteckigen Papierstreifen ABCD herzustellen, musst du die Seite AD an die Seite BC kleben. Aber Achtung: A muss mit C und B mit D zusammenfallen.
Stelle ein solches Band her und male eine Seite farbig an. **Was hast du bemerkt ?**
Zeichne nun die Mittellinie des Bandes ein und schneide das Band entlang dieser Linie.
Was stellst du fest ?

✿

Il nastro di Möbius è rappresentato in figura : possiede delle proprietà geometriche sorprendenti.
Per costruire un nastro di questo tipo con una striscia di carta rettangolare ABCD, si deve raccordare il lato AD con il lato BC...ma attenzione perché A deve coincidere con C e B con D.
Costruite un tale nastro. Coloratene una faccia.
Che cosa notate ?
Tracciate la mediana del nastro. Tagliate il nastro secondo questa linea. ***Che cosa osservate ?***

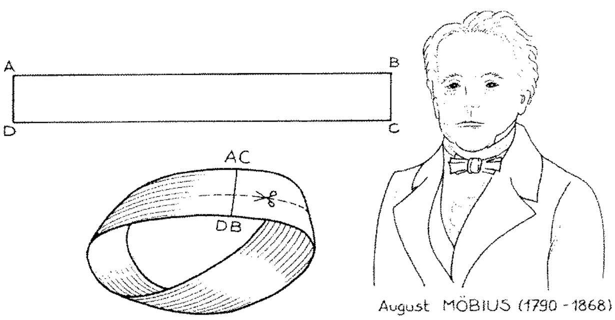
✿

El dibujo nos muestra la cinta de Möbius. Esta cinta tiene propiedades geométricas sorprendentes.
Para fabricar una cinta de Möbius con una tira de papel rectangular ABCD, hay que unir el lado AD con el lado BC... pero cuidado A debe coincidir con C y B con D.
Construya una cinta así. Coleree una cara.
¿Qué observas ?
Trace la línea mediana de la cinta. Corte la cinta siguiendo esta línea. ***¿Qué constatas ?***

✿

The Möbius strip is presented in the figure. It has got amazing geometric properties.To make such a Möbius strip with a rectangular band of paper ABCD, you must link side AD to side BC... but be careful A must coincide exactly with C and B with D.Now cut out such a Möbius strip. Color one side.
What do you observe ?
Draw the median line of the strip. Cut the strip on that line. ***What do you notice ?***

✿

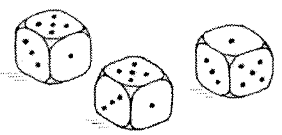


August MÖBIUS (1790 - 1868)

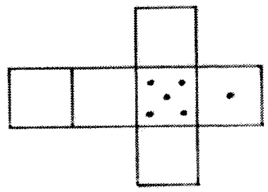
2. feladat — 5 pont

Kockák

Egy dobókockát akkor nevezünk szabványosnak, ha a szemköztes oldalakon lévő pontok összege egyenlő 7-tel.
E követelményt még több, egymástól eltérő kocka is teljesíti:



Rajzoljátok le a mellékelt ábrából kiindulva az összes szabványos kockának a hálózatát !

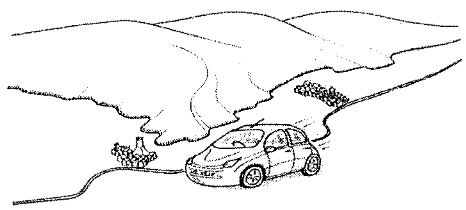


3. feladat — 7 pont

Gyorshajtás

4 jóbarát a hét minden napján ugyanazt a 24 km-es utat teszi meg, mindegyik a saját autóján.
Sylvie óvatos, nyugodtan vezet, minden nap ugyanannyi idő alatt teszi meg az utat. Christine 6 perccel rövidebb idő alatt
ér célba. Michel túl gyorsan vezet, Christine-nél is 6 perccel hamarabb teszi meg a távot. Antoine felelőtlen.
Ő még Michel-nél is 6 perccel kevesebb idő alatt vezeti le a távot.
Így Antoine sebessége duplája Christine sebességének.

Számítsátok ki mind a négyük átlagsebességét !

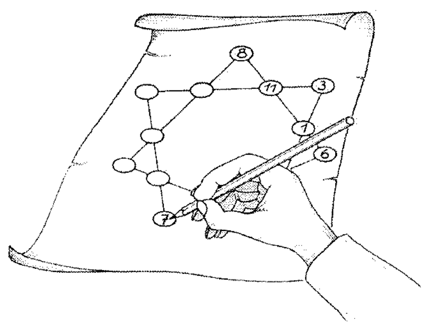


4. feladat — 5 pont

Bűvös hétszög

Maurice egy 7 ágú bűvös csillagot rajzol. Az ágai mellé 0-tól 13-ig úgy írja be az egész számokat, hogy az egy egyenesbe eső 4-4 szám összege mindig ugyanaz legyem.

Egészítsétek ki Maurice ábráját, és rajzoljátok le a kész ábrát a válaszlapra !

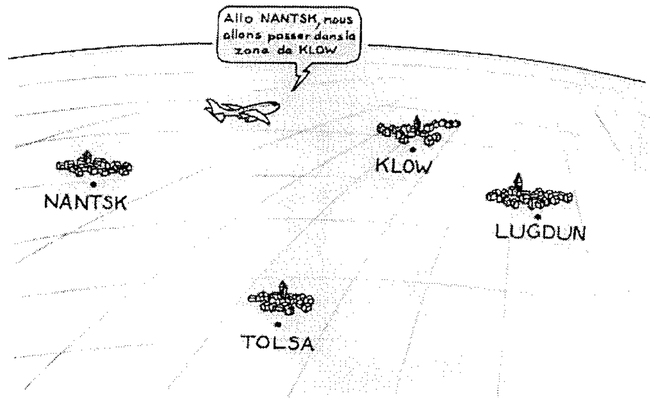


5. feladat — 7 pont

Folyamatos ellenőrzés

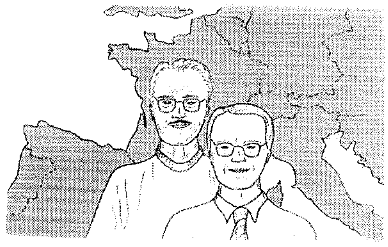
A XX. század vége felé Szildáviában 4 légiirányító központot helyeztek üzembe a légterük ellenőrzése céljából. Ezeket Nantsk, Klow, Lugdun és Tolsa városába telepítették.
A 4 központ munkájának koordinálására a szildáv hatóságok a következő egyszerű utasítást adták ki:
"Minden, az ország légterét használó repülőgépet a hozzá adott pillanatban legközelebbi irányító központból kell felügyelni."
A szildáv légteret ezzel az utasítással 4 részre bontották.***Ábrázoljátok a válaszlapon a 4 irányító központot. 50 km távolságot 1 cm-nek vegyétek.***

Jelöljétek különböző színekkel a 4 zónát, jelöljétek be a szomszédos zónákat elválasztó határt.
A távolságok : KT = 600 km, KL = 350 km, NK = 350 km, TL = 400 km, NT = 450 km.



6. feladat — 5 pont

Minden változik!



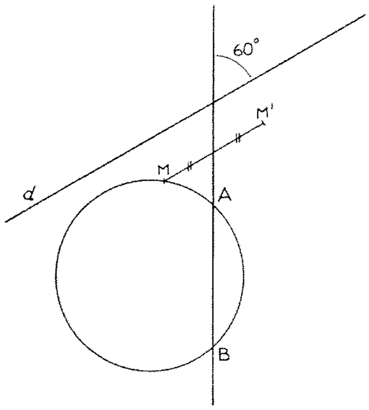
A most 50 éves Hector megtudta, hogy hazájában a várható élettartam 78 év, és ez évente 2 hónappal emelkedik.
Ha ez a folyamat állandó marad, melyik évben lesz Hector éppen annyi idős, mint amennyi akkor éppen a várható élettartam a hazájában?

7. feladat — 7 pont

Non-konformizmus

« Elegem van már a merőlegességből, a szimmetriából ! » - fakadt ki Jacques, s elhatározta : változtat a tengelyes tükrözés szabályain. Ezentúl nem merőlegesen, hanem ferdén tükröz.

Megalkotta így a ferde szimmetriát, aminek a következő a szabálya :
Az M' pont az M pont képe az (AB) tengelyre való, *d irányú tükrözésre vonatkozóan, ha*:



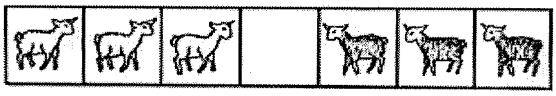
1°) Ha (MM') egyenes és *d egyenes párhuzamosak*, és
2°) Az [MM'] szakasz felezőpontja (AB) egyenesre illeszkedik.

Másoljátok le a válaszlapra az itt látható ábrát, és szerkesszétek meg a kör ferde szimmetrikus képét.
Az (AB) és *d* egyenesek 60°-os szöget zárnak be egymással.

8. feladat — 5 pont

Bárány-ugrás

A fehér és fekete bárányok megcserélik legelőjüket ...
Ezt a helyzetet modellezi a következő játék :
3 fehér és 3 fekete bárány az ábrán látható módon helyezkedik el a hét mezőben.

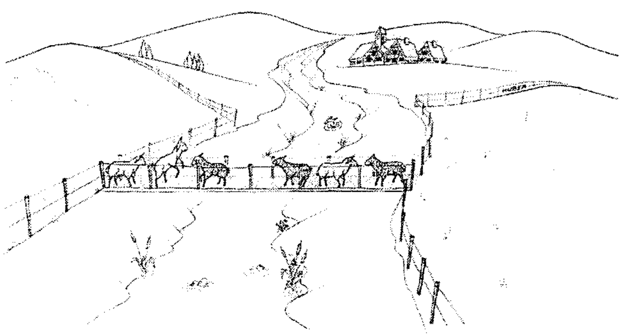


A helycseréhez két fajta lépést lehet alkalmazni :

- A bárány egyet előre léphet, ha az előtte lévő mező üres;
- Egy szomszédos bárányt átugorhat, ha amögött üres mező van.

A cél az, hogy jobb oldalon legyenek a fehér, a bal oldalon a fekete bárányok, és közöttük egy üres elválasztó mező legyen.

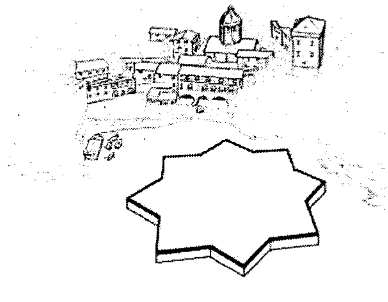
Írjátok le lépésről lépésre a helycserét.



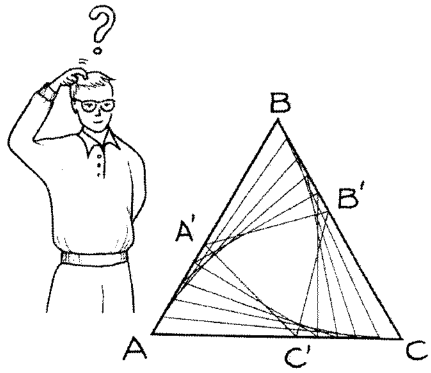
9. feladat — 7 pont

Ligur csempe

A Genova melletti San Fruttuoso apátságban egy régészeti feltárás során egy különösen szép mintázatú csempefelületet találtak. A minta kétféle, azonos számú csempéből rajzolódik ki.
Az egyik fajta 8 ágú szabályos csillag alakú, amelyet két, 1 dm oldalú, azonos középpontú négyzet egymásra helyezésével kaphatunk.
A másik fajta csempe kerülete egyenlő nagyságú az első kerületével. Ez utóbbi arra szolgál, hogy kitöltse az első csempe lerakásakor kapott hézagokat.Ragasszátok fel a mintázatot ½ ***kicsinyítéssel 6 csempével : 3-at mindkét fajtából!***



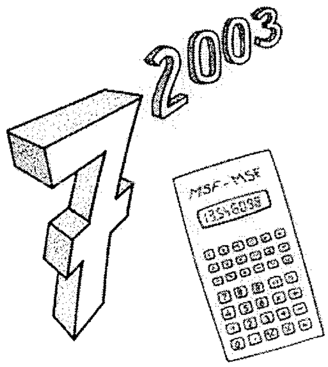
10. feladat	10 pont
Háromszögelés	



Az ABC szabályos háromszög oldala 8 cm hosszúságú. Helyezzük el az A', B' és C' pontokat az [AB], [BC] illetve [CA] oldalon úgy, hogy az AA' = BB' = CC' teljesüljön.

Hogyan kell az AA' távolságot megválasztani, hogy az AA'C', BB'A' és CC'B' háromszögek A', B' illetve C'-ben derékszögűek legyenek.

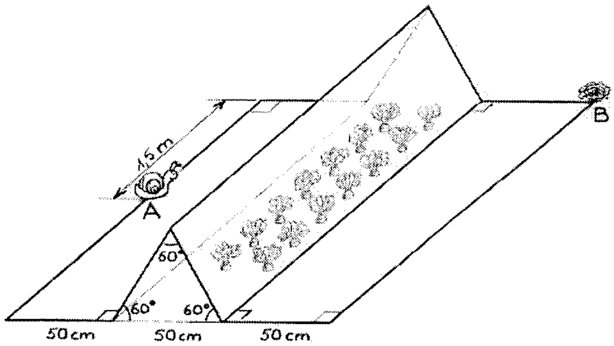
11. feladat	5 pont
A vég szentesíti az eszközt...	



Marc játszadozik a számológépével. Az állítja, hogy meg tudja mondani a 7 bármilyen hatványának az utolsó két számjegyét.

Mi lesz a 7^{2003} utolsó két számjegye? A választ indokoljátok !

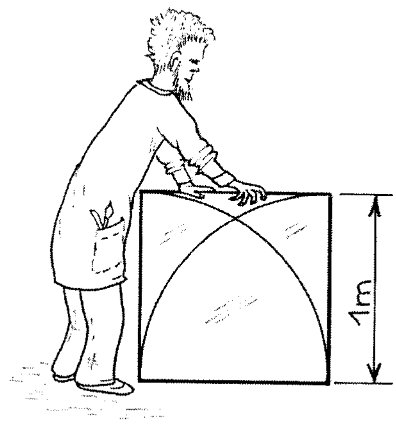
12. feladat	7 pont
Csiga-túra	



Egy csiga A-ból B-be szeretne eljutni a legrövidebb úton. Az útja során kénytelen megmászni egy fekvő helyzetű, háromszög alapú hasáb formájú üvegházat Az adatok leolvashatóak az ábráról.

Számítsátok ki a csiga útját !

13. feladat	10 pont
Vigyázat, törékeny!	



Egy négyzet alakú ablak oldala 1 méter. Az ablak üvegrésze négy darabból áll, amelyeket két negyedkör választ el egymástól. A negyedkörök középpontja a négyzet két alsó csúcsában van.

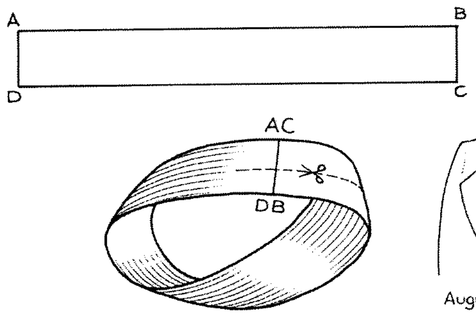
Számítsátok ki mind a 4 rész területét.

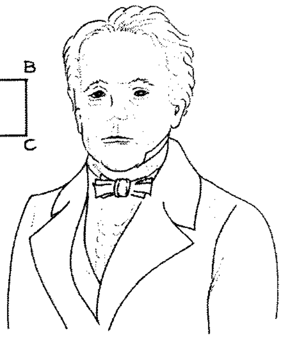
Matematyka bez granic

Zadanie 1
7 punktów

Wstęga Mobiusa

Rozwiązanie musi być napisane w jednym z czterech języków obcych i zawierać przynajmniej 30 słów.





August MÖBIUS (1790 - 1868)

Figura przedstawiona na rysunku to wstęga Mobiusa. Ma ona zaskakujace własności.Żeby wykonać taką wstęgę trzeba skleić prostokątny pasek papieru, tak aby punkt A spotkał się z punktem C nai punkt B z punktem D.

Sklej taką wstęgę i pokoloruj jedną stroı zauważyłeś ?
Teraz przetnij tą wstęgę wzdłuż przechodzącej przez środek papierowego Co zaobserwowałeś?

Le ruban de Möbius est présenté sur la figure. Il possède des propriétés géométriques surprenantes.

Pour fabriquer un ruban de Möbius avec une bande de papier rectangulaire ABCD, il faut raccorder le côté AD avec le côté BC... mais attention A doit coïncider avec C et B avec D.

Fabriquer un tel ruban.
Colorier une face.
Que remarque-t-on ?

Tracer la ligne médiane du ruban. Découper le ruban en suivant cette ligne.
Que constate-t-on ?

The Möbius strip is presented in the figure. It has got amazing geometric properties.

To make such a Möbius strip with a rectangular band of paper ABCD, you must link side AD to side BC... but be careful A must coincide exactly with C and B with D.

Now cut out such a Möbius strip. Color one side.
What do you observe ?

Draw the median line of the strip. Cut the strip on that line. ***What do you notice ?***

El dibujo nos muestra la cinta de Möbius. Esta cinta tiene propiedades geométricas sorprendentes.

Para fabricar una cinta de Möbius con una tira de papel rectangular ABCD, hay que unir el lado AD con el lado BC... pero cuidado A debe coincidir con C y B con D.

Construya una cinta así. Coleree una cara.
¿ Qué observas ?

Trace la línea mediana de la cinta. Corte la cinta siguiendo esta línea.
¿ Qué constatas ?

Il nastro di Möbius è rappresentato in figura : possiede delle proprietà geometriche sorprendenti.

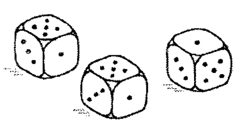
Per costruire un nastro di questo tipo con una striscia di carta rettangolare ABCD, si deve raccordare il lato AD con il lato BC...ma attenzione perché A deve coincidere con C e B con D.

Costruite un tale nastro. Coloratene una faccia.
Che cosa notate ?

Tracciate la mediana del nastro. Tagliate il nastro secondo questa linea. ***Che cosa osservate ?***

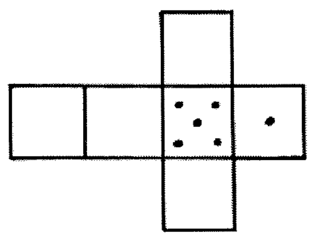
Zadanie 2
5 punktów

Kostka do gry



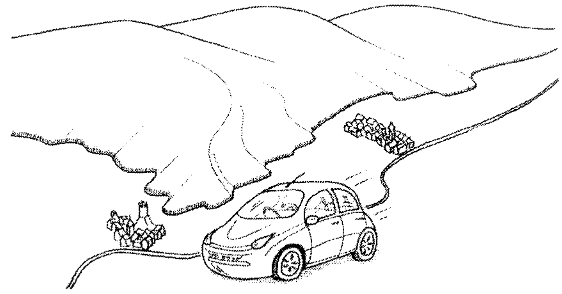
W tradycyjnej kostce do gry suma oczek na przeciwległych ścianach wynosi 7. Jak widać na rysunku po lewej stronie, w ten sposób na kostce można rozmieścić oczka na różne sposoby.

Zaznacz na siatce kostki wszystkie możliwe rozmieszczenia oczek.



Zadanie 3 7 punktów

Nie pędź



Cztery osoby tworzą grupę podróżujących samochodem. Prowadzą zmieniając się od czasu do czasu i każdy pokonuje odległość 24 km.

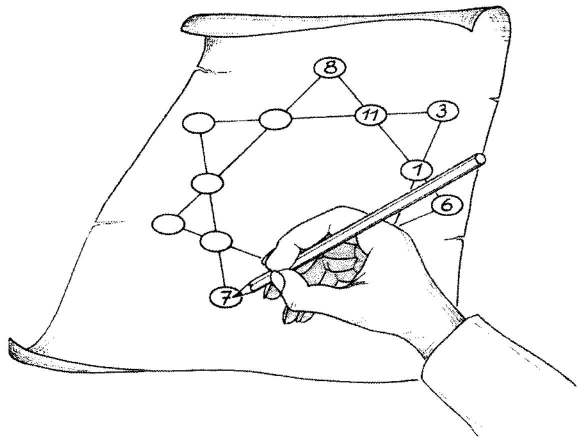
Sylwia jedzie spokojnie i rozważnie. Potrzebuje zawsze jednakowego czasu. Christine potrzebuje 6 mim mniej niż Sylwia. Michał jedzie szybciej i potrzebuje 6 min mniej niż Christine. Antoni jedzie całkowicie nieodpowiedzialnie. Potrzebuje 6 min mniej niż Michał i jest dwa razy szybszy niż Christine.

Oblicz dla każdej osoby średnią prędkość.

Zadanie 4 5 punktów

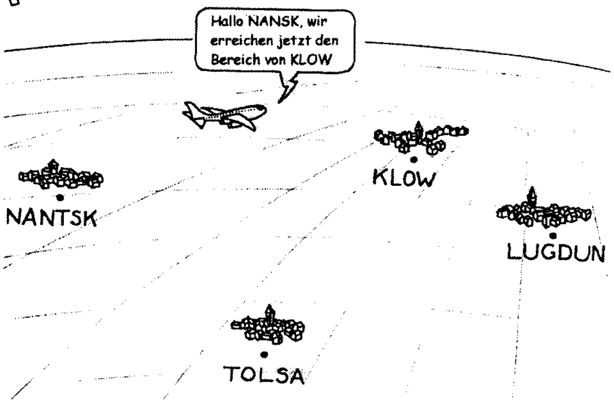
Licząc

Maurice rysuje siedmioramienną gwiazdę. Każdemu kątowi przyporządkowuje cyfry od 0 do 13 tak, że suma czterech liczb na każdej linii jest taka sama. ***Uzupełnij gwiazdę Maurica i narysuj ją w odpowiedniej formie na karcie odpowiedzi.***



Zadanie 5 7 punktów

W czasie



W dalekiej Syldawii przestrzeń powietrzna jest pilnowana przez cztery centra kontrolne. Znajdują się one w Nantsk, Klow, Lugdun i Tolsa. Żeby kontrolować pracę tych czterech centr, syldawska władza ustaliła proste zasady. Każdy samolot jest pilnowany przez te centrum, którego najbliżej się znajduje. Odległości :
Klow - Tolsa = 600km, Klow - Lugdun = 350 km, Nantsk - Klow = 350 km, Tolsa - Lugdun = 400 km, Nantsk - Tolsa = 450 km.

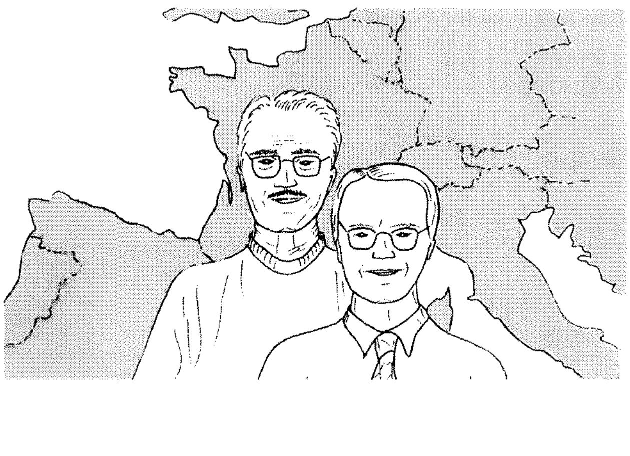
Zaznacz na karcie odpowiedzi te cztery centra kontrolne (1cm=50km). Skonstruuj granice czterech obszarów kontrolnych i zaznacz je na kolorowo.

Zadanie 6 5 punktów

Pytania Hektora

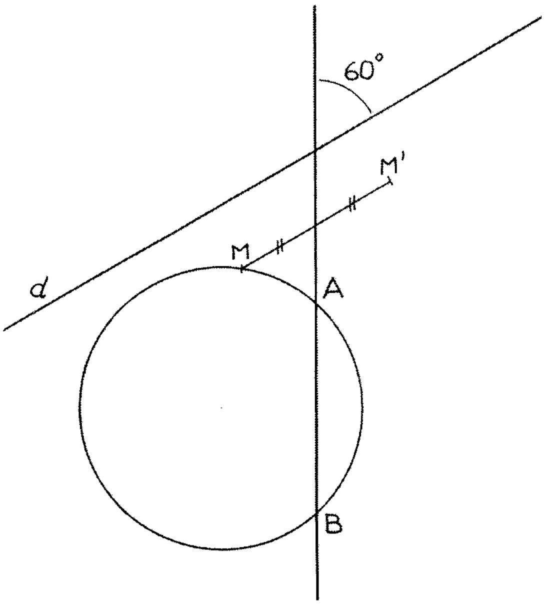
Hektor ma teraz 50 lat. Dowiaduje się, że średnia wieku w jego kraju wynosi 78 lat i co rok powiększa się o 2 miesiące.

W którym roku jego wiek będzie równy średniej krajowej, jeżeli średnia wieku będzie wzrastać tak jak do tej pory i czy Hektor tego dożyje ?



Zadanie 7
7 punktów

Odbicie ukośne



Odbicie lustrzane względem osi jest powoli nudne!'- narzeka Jacques. Dlatego tak uważa, że linia łącząca punkt i jego odbicie jest zawsze prostopadła do osi. Dlaczego nie może ten kąt być inny? Proponuje wykonać odbicie symetryczne według takiej reguły:Linia łącząca punkt i jego odbicie symetryczne jest równoległa do pewnej prostej d.
Oś przecina odcinek łączący punkt i jego odbicie symetryczne w połowie.
Takie odbicie nazywa się lustrzanym odbiciem skośnym

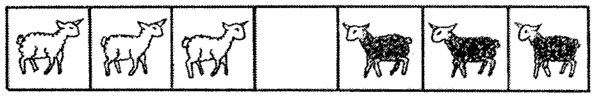
Na arkuszu odpowiedzi narysuj w powiększeniu taką figurę jak widzisz na rysunku obok. Skonstruuj jej skośne lustrzane odbicie.

Zadanie 8
5 punktów

Skoki owiec

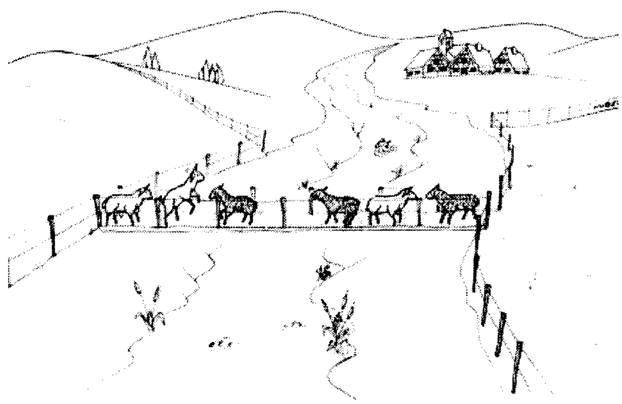
Trzy czarne owce w kwadracikach powinny zmienić swoje miejsce z trzema białymi owcami. Przy czym dozwolone są tylko następujące ruchy do przodu:

- Ruch na wolny kwadracik leżący przed owcą
- Przeskok na wolny kwadracik przez jedno stojące przed nią zwierze.



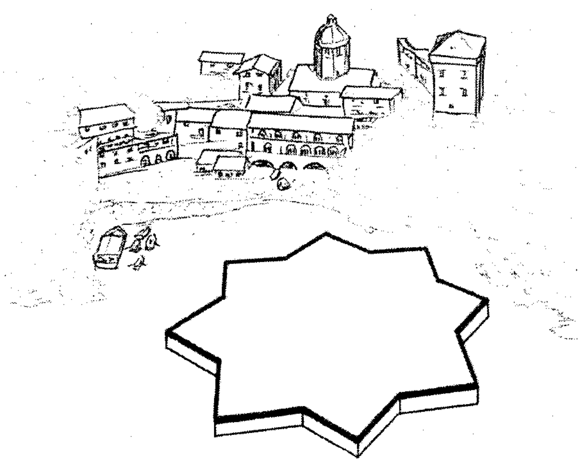
Na końcu czarne owce powinny stać po lewej stronie, a białe po prawej i powinny być oddzielone przez jeden pusty kwadracik na środku.

Podaj kolejne ruchy jakie należy wykonać do takiej wymiany.



Zadanie 9
7 punktów

Liguryczny plaster

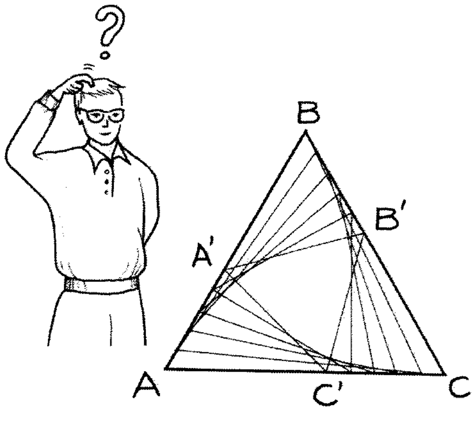


Przy wykopaliskach w okolicach Genui archeolodzy z oddziału San Frauttuoso odnaleźli posadzkę wykładaną płytami kamiennymi. Posadzka ta składa się z dwóch rodzajów kafli, które przylegają do siebie. Ilość kafli każdego rodzaju jest jednakowa.
Kafle jednego rodzaju mają kształt regularnej ośmioramiennej gwiazdy. Gwiazdę tą otrzymuje się kładąc na siebie dwa kwadraty o krawędzi długości 1dm tak, aby punkty przecięcia się ich przekątnych pokrywały się.
Kafle drugiego rodzaju wypełniają puste przestrzenie między pierwszymi tak, że powstaje zwarty parkiet. Rozmiar kafli każdego rodzaju jest jednakowy.

Wykonaj z papieru w skali 1:2 6 kafli, po 3 z każdego rodzaju. Ułóż fragment takiej posadzki i przyklej ją na karcie odpowiedzi.

Zadanie 10 – 10 punktów

Trójkąt

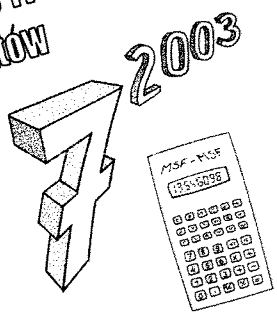


Trójkąt równoboczny ABC ma boki długości 8 cm. Punkty A', B', C' leżą na bokach AB, BC, AC, przy czym AA' = BB' = CC'.

Jak długi musi być odcinek AA', aby trójkąty AA'C', BB'A', CC'B' były prostokątne ?
Opisz swoje postępowanie i sprawdź rozwiązanie.

ZADANIA DLA KLAS DRUGICH

Zadanie 11 – 5 punktów



Cel uświęca

Mark bawi się swoim kalkulatorem. Uważa, że dla dowolnej potęgi liczby 7 może obliczyć jej dwie ostatnie cyfry.

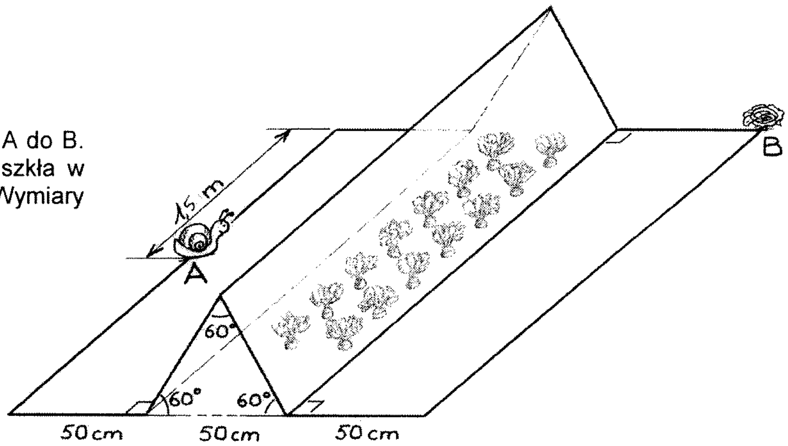
Jakie są dwie ostatnie cyfry potęgi 7^{2003} ? Wyjaśnij jak można znaleźć te liczby.

Zadanie 12 – 7 punktów

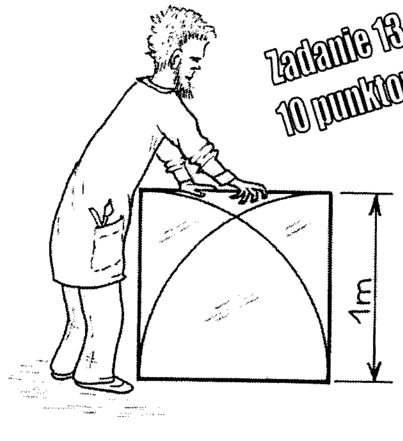
Głodny

Ślimak chce dojść jak najszybciej z punktu A do B. Na swojej drodze musi pokonać dach ze szkła w kształcie graniastosłupa trójkątnego. Wymiary możesz wziąć z obrazka.

Oblicz długość tej najkrótszej drogi.
Odpo wiedź uzasadnij.



Zadanie 13 – 10 punktów



Uwaga

Kwadratowe okno o boku długości 1m powinno zostać oszklone tak jak pokazuje rysunek obok. Powierzchnie szklane są ograniczone przez dwie ćwiartki koła, których środki leżą w dwóch dolnych wierzchołkach kwadratu.

Oblicz pole powierzchni każdej z czterech szklanych części.

Matemáticas sin fronteras

Diciembre 2002

Ejercicio 1
7 puntos

Cinta de Möbius

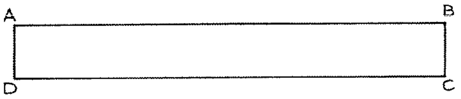
La solución de ejercicio 1 debe ser redactada en lengua extranjera.

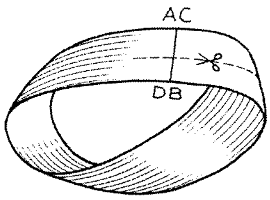
Le ruban de Möbius est présenté sur la figure. Il possède des propriétés géométriques surprenantes.

Pour fabriquer un ruban de Möbius avec une bande de papier rectangulaire ABCD, il faut raccorder le côté AD avec le côté BC... mais attention A doit coïncider avec C et B avec D.

Fabriquer un tel ruban.
Colorier une face.
Que remarque-t-on ?

Tracer la ligne médiane du ruban. Découper le ruban en suivant cette ligne.
Que constate-t-on ?



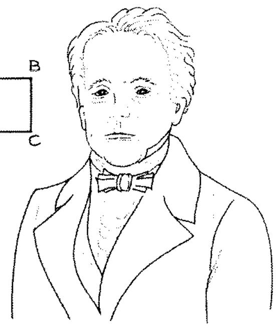


The Möbius strip is presented in the figure. It has got amazing geometric properties.
To make such a Möbius strip with a rectangular band of paper ABCD, you must link side AD to side BC... but be careful A must coincide exactly with C and B with D.
Now cut out such a Möbius strip. Color one side.

What do you observe ?

Draw the median line of the strip. Cut the strip on that line.

What do you notice ?



August MÖBIUS (1790 - 1868)

Die Abbildung zeigt ein Möbiusband. Seine geometrischen Eigenschaften überraschen.
Um ein Möbiusband aus einem rechteckigen Papierstreifen ABCD herzustellen, musst du die Seite AD an die Seite BC kleben. Aber Achtung: A muss mit C und B mit D zusammenfallen.
Stelle ein solches Band her und male eine Seite farbig an.

Was hast du bemerkt ?

Zeichne nun die Mittellinie des Bandes ein und schneide das Band entlang dieser Linie.

Was stellst du fest ?

Il nastro di Möbius è rappresentato in figura : possiede delle proprietà geometriche sorprendenti.

Per costruire un nastro di questo tipo con una striscia di carta rettangolare ABCD, si deve raccordare il lato AD con il lato BC...ma attenzione perché A deve coincidere con C e B con D.

Costruite un tale nastro. Coloratene una faccia.
Che cosa notate ?

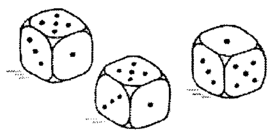
Tracciate la mediana del nastro. Tagliate il nastro secondo questa linea.

Che cosa osservate ?

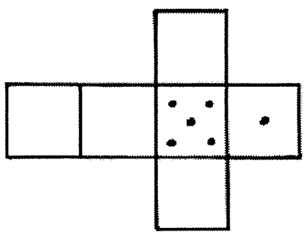
Ejercicio 2
5 puntos

Sin defecto

Para que un dado cúbico sea homologado la suma de los puntos marcados en las dos caras opuestas debe ser siempre igual a 7.

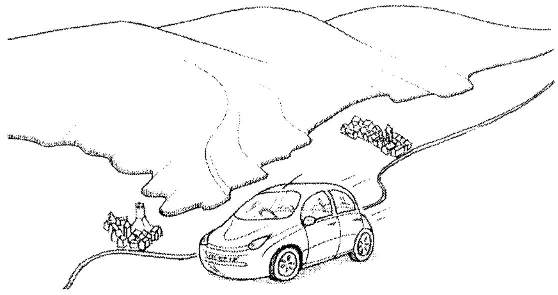


Dibujar los patrones de todos los dados homologados completando a cada paso el patrón de al lado.



Ejercicio 3
7 puntos

La velocidad es sobrepasada



4 personas practican la conducción conjunta y efectúan a turnos el mismo trayecto de 24 km cada dia de la semana.

Silvia ,prudente, circula con calma y tarda siempre el mismo tiempo. Cristina tarda 6 minutos menos . Miguel circula demasiado rápido y tarda 6 minutos menos que Cristina. En cuanto a Antonio, es un irresponsable y tarda 6 minutos menos que Miguel. Según esto, la velocidad de Antonio es el doble de la de Cristina.

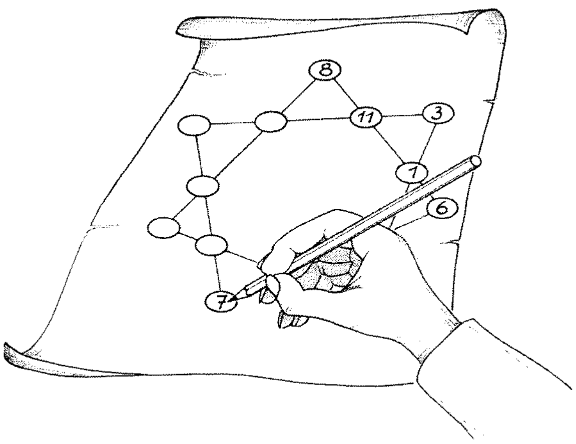
Calcular la velocidad media de cada uno de los conductores.

Ejercicio 4
5 puntos

Heptágono magico

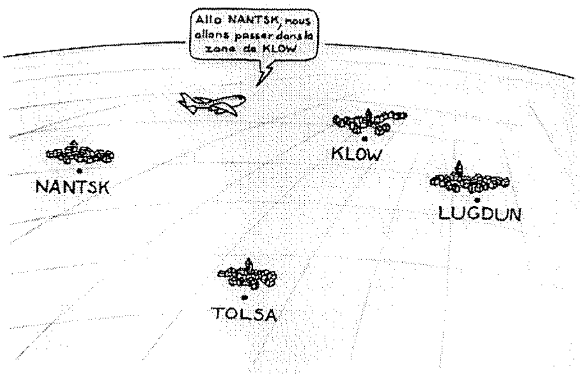
Mauricio se esfuerza en trazar una estrella mágica de 7 brazos, en la cuel va a colocar todos los numeros enteros del 0 al 13 de modo que la suma de 4 números alineados sea siempre la misma.

Completar la estrella de Mauricio y representarla con claridad en el folio-respuesta.



Ejercicio 5
7 puntos

Control continuo



Hacia el final del siglo XX Sildavia es dotada de 4 centros de control de su espacio aéreo. Estos han sido instalados en Nantsk , Klow , Lugdun y Tolsa.
Para coordinar el trabajo de estos 4 centros, las autoridades sildavas han anunciado una regla simple :
« Todo avión que sobrevuele el país deberá ser vigilado por el centro de control más próximo a su posicion ».
De esta manera el espacio aéreo sildavo se encuentra protegido por 4 zonas.

Representar en el folio-respuesta las posiciones relativas a los 4 centros de control tomando 1 cm por 50 km.

Materializar las 4 zonas con 4 colores y después trazar bien sus fronteras.

Les damos las distancias :
KT = 600 km ; KL = 350 km ; NK = 350 km ;
TL = 400 km ; NT = 450 km

Ejercicio 6
5 puntos

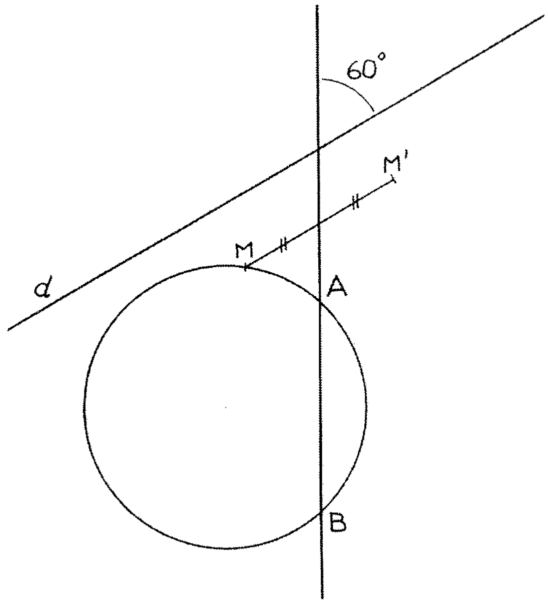
Todo aumenta

Héctor, de 50 años de edad, sabe que la esperanza de vida en su pais es actualmente de 78 años y que ésta aumenta 2 meses cada año.

Si esta evolución prosigue, ¿en qué año la edad de Héctor será igual a la esperanza de vida de su pais ?

Ejercicio 7 7 puntos

No conforme



¡ Todavia octogonal, la simetria! , ¡ i ya basta !
Juan quiere cambiar las reglas de la construcción para que la simetria mediante una recta no sea mas octogonal sino oblicua. Para ello inventa la simetria oblicua, cuyas reglas son las siguientes:
El punto M' simetrico de M mediante la recta (AB) es paralelo a la dirección d tal como:

1) Las rectas (MM') y d son paralelas.
2) El centro de [MM'] pertenece a la recta (AB).

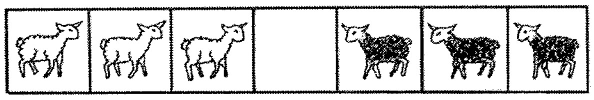
Reproducir sobre el folio-respuesta una figura análoga a la figura de al lado; después construir punto por punto la imágen del círculo mediande esta simetria oblicua.

Las rectas (AB) y d forman un ángulo de 60°.

Ejercicio 8 5 puntos

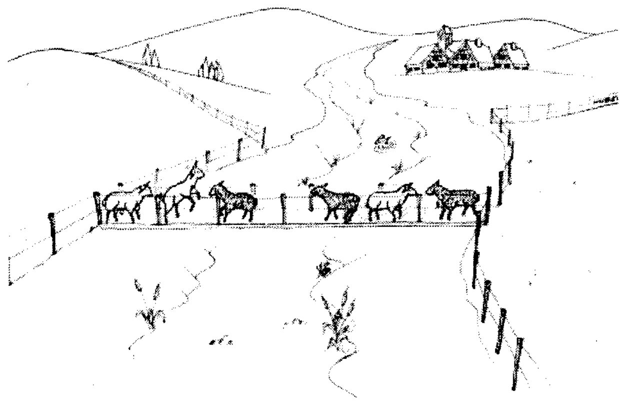
El salto del borrego

Los borregos blancos y negros deben intercambiar su pasto.
Les mostramos esta situación mediante el siguiente juego:
3 borregos blancos y 3 negros son dispuestos en una verja de 7 casillas, como queda indicado aquí al lado :



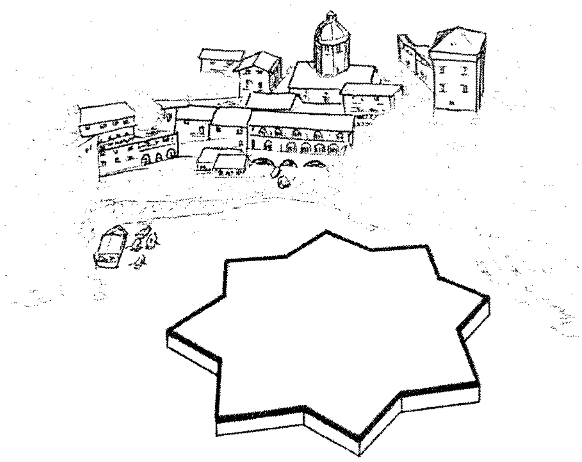
Sólo es posible desplazarse utilizando dos movimientos:
1) Haciendo avanzar un borrego hacia la casilla vacía que está delante de él.
2) Haciendo saltar un barrego por encima de otro vecino para llegar a ocupar la casilla vacía.
Queremos que los borregos blancos se encuentren a la derecha y los negros a la izquierda, separados por la casilla vacía.

Proporcionar un desarrollo de los movimientos que se han realizado para este intercambio.



Ejercicio 9 7 marks

Enlosado ligur

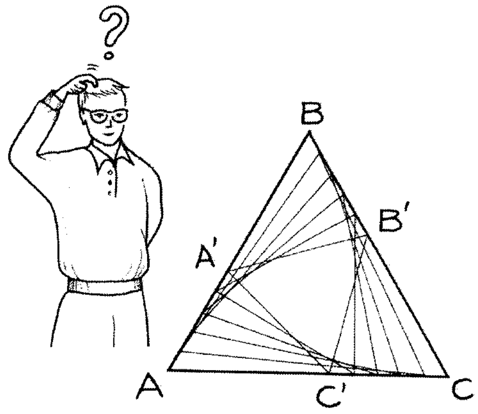


Debido a las excavaciones arqueológicas en el monasterio de San Fruttuoso cerca de Génova , encontramos un enlosado formado por dos clases de baldosas en igual número estrechamente yustapuestas.
Unas tienen la forma de una estrella regular con 8 puntas que podremos obtener superponiendo 2 cuadrados de 1 dm de lado y con el mismo centro.
Las otras tienen un perímetro igual al de las primeras. Estas sirven de complementos para obtener un enlosado sin intersticio.

Pegar sobre el folio-respuesta, en la escala ½ , una disposición de 6 baldosas : 3 de cada clase.

Ejercicio 10 — 10 puntos

Triángulos

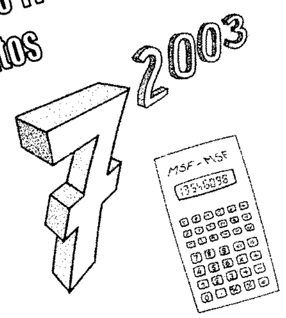


ABC es un triángulo equilátero de 8 cm de lado. Colocamos 3 puntos A' , B' y C' respectivamente sobre [AB] , [BC] y [CA] de modo que AA' = BB' = CC'.

¿Cómo debemos elegir la distancia AA' para que los triángulos AA'C' , BB'A' y CC'B' sean rectángulos en A' , B' , C' ? Justifica la respuesta.

Especial segundo

Ejercicio 11 — 5 puntos



El fin justifica los medios

Marcos se divierte con la calculadora. El dice que es capaz de calcular las dos últimos cifras de cualquier potencia de 7.

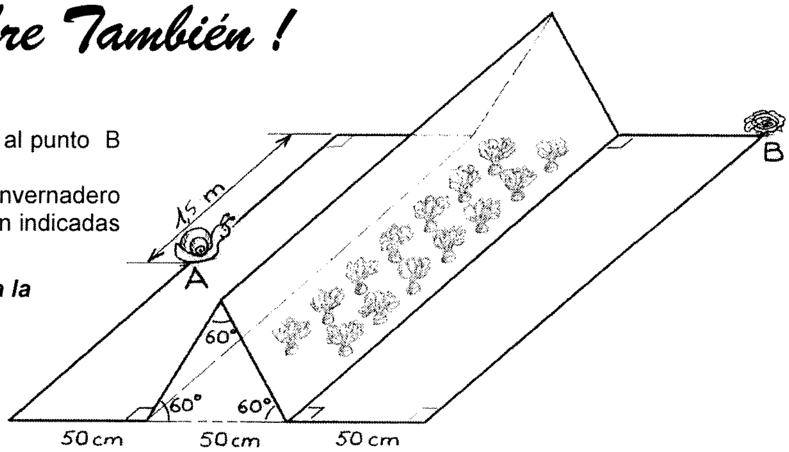
¿ Cuáles son las últimas cifras de 7^{2003} ? Justifica la respuesta.

Ejercicio 12 — 7 puntos

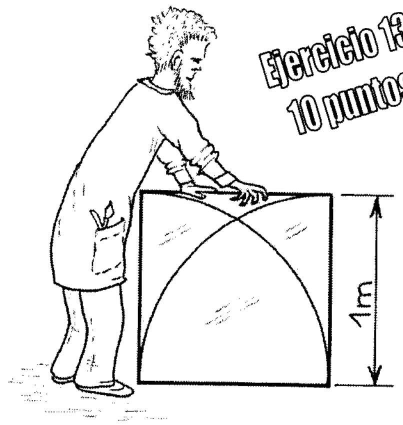
¡ El Hambre También !

Un caracol quiere trasladarse del punto A al punto B por el camino más corto.
A lo largo del camino deberá escalar un invernadero en forma de prisma . Las dimensiones estan indicadas en la figura de al lado.

Calcular la longitud del camino. Justifica la respuesta.



Ejercicio 13 — 10 puntos



Cuidado, frágil

Una ventana cuadrada de 1 m de lado está cerrada por una vidriera representada en el lado.
Las superficies del vidrio estan delimitadas por dos cuartos de círculos cerrados en las vértices inferiores del cuadrado.

Determinar el aérea de cada una de las cuatro piezas de la vidriera.

Compétition interclasses de 3ème et de 2nde

organisée avec le concours de l'Inspection Pédagogique Régionale et l'IREM de Strasbourg

ACADEMIE DE STRASBOURG

Mathématiques sans frontières

Epreuve du 13 mars 2003

- On demande des explications ou des justifications pour tous les exercices sauf pour les numéros 4, 6 et 8.
- Toute solution même partielle sera examinée.
- Le soin sera pris en compte.
- Ne prendre qu'une feuille-réponse par exercice.

Exercice n°1 — 7 points

Pause café

Solution à rédiger en allemand, anglais, espagnol ou italien en un minimum de 30 mots.

Cuatro estudiantes desean cada uno tomar un café durante el recreo y sólo tienen poca moneda. Un café cuesta 35 centimos de euros. La maquina de café ya no tiene cambio. Los responsables vienen para vaciarla.

Alberto tiene una moneda de 1 euro y una de 5 centimos.

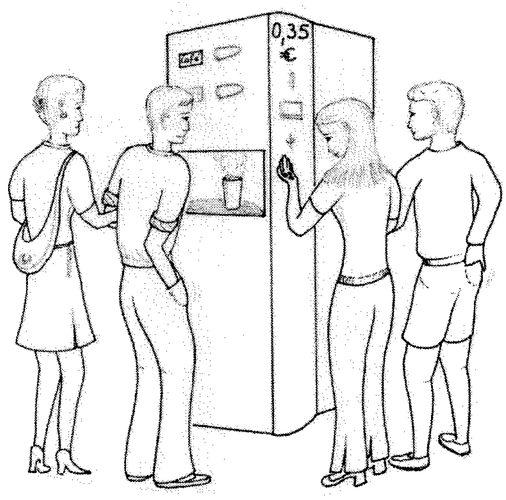
Bernardo tiene una moneda de 50 centimos y una de 5 centimos.

Claudia tiene una moneda de 20 centimos y dos de 10 centimos.

Daniela tiene dos monedas de 20 centimos.

Cada uno quiere su café y la vuelta de su moneda. La maquina sólo sirve a una persona a la vez y sólo vuelve monedas cuando las tiene.

¿ Como se las van a arreglar ?



Vier Studenten haben Kaffeedurst, aber leider zu wenig Kleingeld. Ein Kaffee kostet 35 Cent. Der Kaffeeautomat kann im Moment kein Wechselgeld zurückgeben, weil er eben erst geleert wurde.

Albert hat eine 1-Euro-Münze und ein 5-Cent-Stück.

Bernhard hat eine 50-Cent- und eine 5-Cent-Münze.

Claudia hat eine Münze zu 20 Cent und zwei zu 10 Cent.

Daniela hat zwei 20-Cent-Münzen.

Jeder möchte seinen Kaffee und sein Wechselgeld. Der Automat kann nur eine Person auf einmal bedienen und kann nur Wechselgeld herausgeben, wenn er welches hat.

Wie gehen sie vor ?

Quattro studenti desiderano bere un caffè durante l'intervallo delle lezioni e possiedono solo della moneta. Un caffè costa 35 centesimi di euro. La macchinetta non ha più moneta dato che i manutentori l'hanno appena svuotata.

Alberto ha una moneta da 1 euro e una da 5 centesimi.

Bernardo ha una moneta da 50 centesimi ed una da 5 centesimi.

Claudia ha una moneta da 20 centesimi e due da 10 centesimi.

Daniela ha due monete da 20 centesimi.

Ognuno desidera il suo caffè e vuole il suo resto. La macchinetta serve una sola persona per volta e fornisce il resto quando ha moneta.

Come possono organizzarsi ?

Four students wish to have a cup of coffee during their break and have very little change. A cup costs 35 euro cents. The machine has no change left, the people in charge have just come to empty it.

Albert has a 1 euro coin and a 5 cents coin.

Bernard has a 50 cents coin and a 5 cents coin.

Claudia has a 20 cents coin and two 10 cents coins.

Daniela has two 20 cents coins.

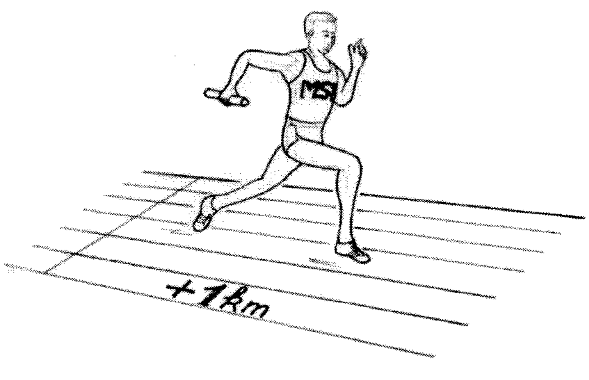
Each of them wants his coffee and his change. The machine serves one person at a time and gives back change only when it has some.

How are they going to manage ?

Exercice n°2 — 5 points

Au suivant !

Une course de relais de 40 km est courue de façon à ce que chaque équipier parcoure un nombre entier de kilomètres. De plus, lorsqu'un coureur reçoit le témoin, il doit courir 1 km de plus que celui qui le lui donne.

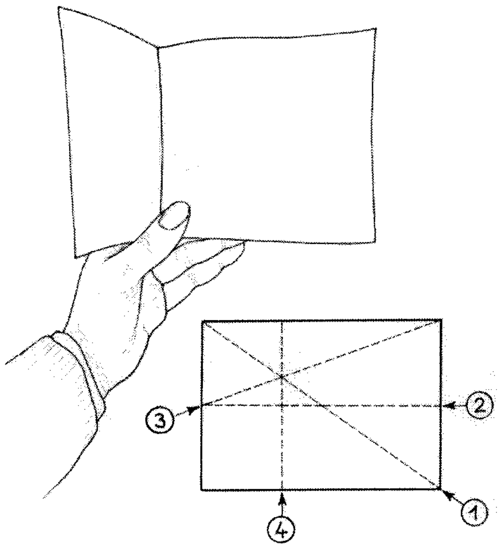


Donner la distance parcourue par chaque membre de l'équipe.

Exercice n°3 — 7 points

Tripli

Voici une méthode qui permet de trouver le tiers de la longueur d'une feuille de papier rectangulaire uniquement par pliages :



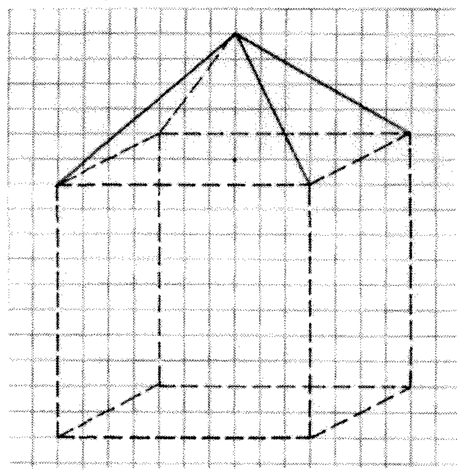
Plier successivement la feuille suivant la diagonale 1, la médiane 2, puis suivant les plis 3 et 4 comme indiqué sur la figure ci-dessus. Le pli 4 donne alors le tiers de la longueur.

Justifier cette méthode.

Exercice n°4 — 5 points

Rhombique

La figure ci-dessous représente un cube surmonté d'une pyramide régulière à base carrée dont la hauteur égale la moitié de l'arête du cube.



Si l'on construit une telle pyramide sur chacune des 6 faces du cube, on observe que les faces de ces pyramides sont deux à deux dans un même plan et s'assemblent pour former des losanges. Ces 12 losanges sont les faces d'un solide appelé **dodécaèdre rhombique**.

Ses 14 sommets sont les 8 sommets du cube et les 6 sommets des pyramides.

Dessiner en perspective cavalière le dodécaèdre rhombique obtenu à partir d'un cube semblable à celui de la figure ci-dessus. Colorier les faces visibles du dodécaèdre.

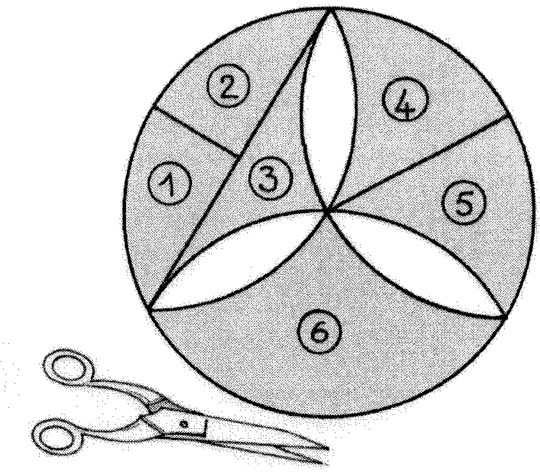
Exercice n°5 — 7 points

C'est pas π

Ci-dessous est dessinée une rosace construite à partir d'un hexagone régulier.

Pour calculer l'aire de la surface grise, on peut la découper en 6 morceaux comme indiqué sur ce dessin.

Avec ces 6 pièces, on peut composer un rectangle.



Réaliser le puzzle à partir d'un disque de rayon 6 cm.
Coller le rectangle sur la feuille-réponse.
Calculer l'aire de la surface grise.

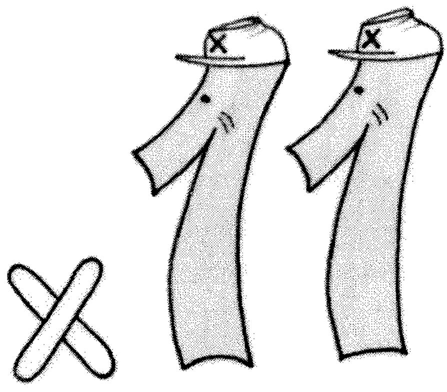
Exercice n°6 — 5 points

Le 11 gagnant

Un entier est un multiple de 11 si et seulement si la somme algébrique **alternée** de ses chiffres est elle-même un multiple de 11, éventuellement négatif ou nul.

Exemples :

- **1958** est un multiple de 11 car 1 – 9 + 5 – 8 = **–11**
- **2002** est un multiple de 11 car 2 – 0 + 0 – 2 = **0**
- **94 919** est un multiple de 11 car 9 – 4 + 9 – 1 + 9 = **22**
- mais 1989 n'est pas multiple de 11 car 1 – 9 + 8 – 9 = –9.



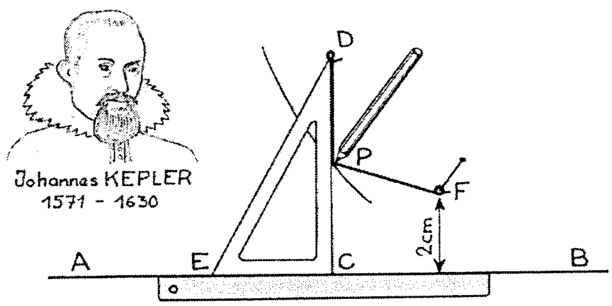
Trouver le plus grand multiple de 11 s'écrivant avec 10 chiffres tous différents.

Exercice n°7 — 7 points

À la ficelle

L'astronome allemand Johannes Kepler a publié une méthode permettant de tracer une parabole en utilisant une règle une équerre, une ficelle, une épingle et un crayon.

On pose la règle le long d'une droite (AB) et on plante l'épingle en un point F. La longueur de la ficelle étant égale au côté CD de l'équerre, on en fixe une extrémité en D et l'autre en F. La pointe P du crayon maintient la ficelle tendue le long de l'équerre le plus loin possible, comme le montre le dessin ci-dessous.



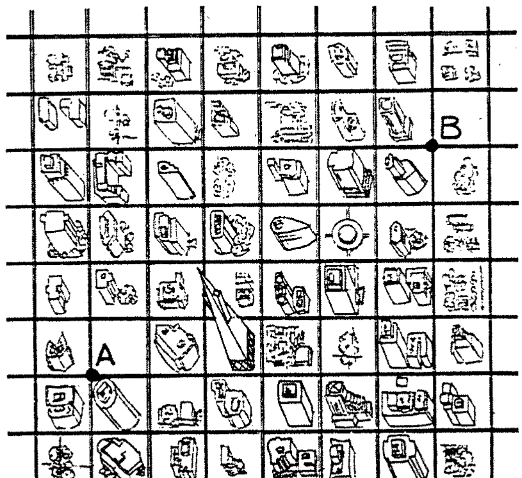
Si on fait glisser le coté EC de l'équerre sur la droite (AB), le point P se déplace alors sur une parabole.

Justifier l'égalité PF = PC.
Dessiner point par point une telle parabole sachant que CD = 14 cm et que F se trouve à 2 cm de la droite (AB).

Exercice n°8 — 5 points

Police Geometry

Dans certaines villes, comme par exemple New York ou Mannheim, les rues forment un quadrillage régulier.
Jules et Jim sont chefs de deux postes de police dans une telle ville. Leurs postes sont marqués A et B sur le plan ci-dessous.



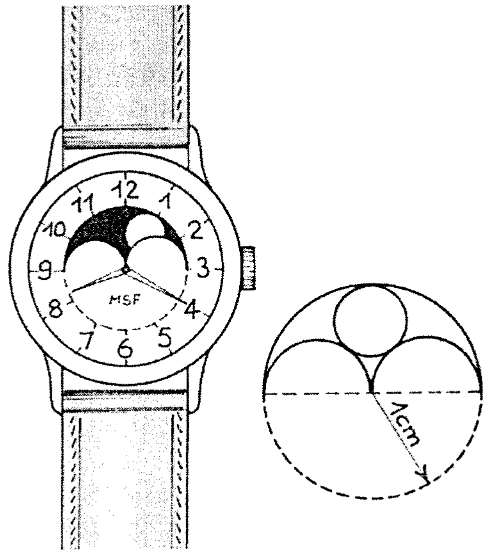
Reproduire le quadrillage sur la feuille-réponse. Marquer en couleur les points de rues pour lesquels la distance minimale à parcourir en voiture pour rejoindre le poste de Jules ou le poste de Jim est la même.

Exercice n°9 — 7 points

Cadran lunaire

Une montre indique mécaniquement les phases de la lune, de la manière suivante :

La lune est représentée par un disque. Celui-ci est dessiné sur une plaque sombre circulaire qui tourne autour du même axe que les aiguilles et que l'on aperçoit dans une ouverture délimitée par 3 demi-cercles.



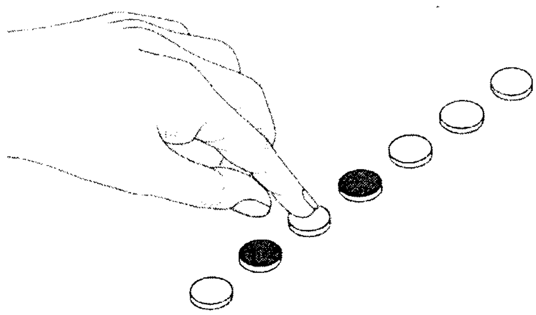
La lune a le plus grand diamètre permettant de se montrer entièrement dans l'ouverture.

Calculer ce diamètre sachant que le rayon du grand demi-cercle est 1 cm.

Exercice n°10 — 10 points

Black blanc bloque

Pour jouer à ce jeu, on aligne des jetons ayant une face blanche et une face noire. Au départ, toutes les faces visibles sont blanches.
Le but du jeu est d'avoir toutes les faces noires visibles en respectant la règle suivante :
" On bloque un jeton avec un doigt et on retourne alors le jeton voisin s'il n'y en a qu'un, les deux voisins s'il y en a deux. On recommence autant de fois que nécessaire. "



Dessiner les alignements de 2 jetons, 3 jetons, etc... jusqu'à 15 jetons. Pour chaque alignement ayant une solution, marquer d'une croix les jetons qui ont été bloqués successivement. Sinon, écrire que cet alignement n'a pas de solution.
Y a-t-il une solution pour un alignement de 2003 jetons ? Justifier la réponse.

Spécial Seconde

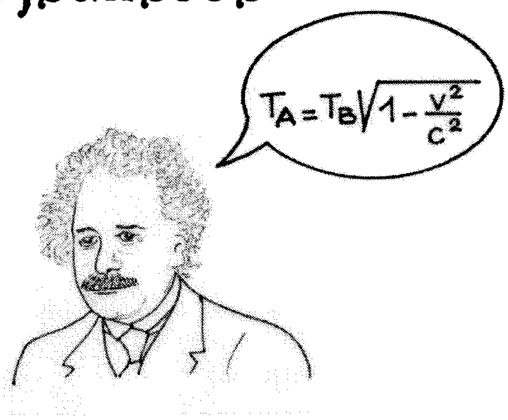
Exercice n°11
5 points

Les voyages forment la jeunesse

Albert Einstein a établi que le temps n'est pas une grandeur absolue et qu'il ne s'écoule pas de la même façon pour un voyageur se déplaçant à très grande vitesse que pour son ami qui reste immobile.
Si Albert fait un voyage dans l'espace à la vitesse **v** et si Bernard reste immobile, Bernard mesurera une durée $\mathbf{T_B}$ pour ce voyage, tandis qu'Albert mesurera une autre durée $\mathbf{T_A}$ pour ce même voyage.

Selon Einstein, on a la relation : $T_A = T_B\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$ où **c** est la vitesse de la lumière, soit environ 300 000 km/s.
Albert part en voyage dans l'espace à l'âge de 40 ans, alors que son fils Bernard est âgé de 20 ans. Au retour, tous deux se retrouvent âgés de 60 ans.

A quelle vitesse Albert s'est-il déplacé ? Donner la réponse en km/s.

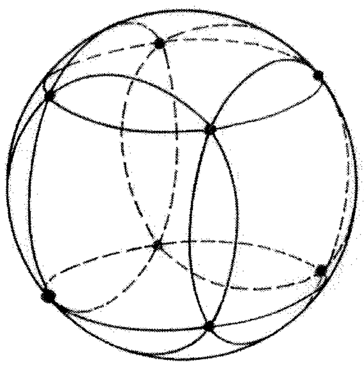


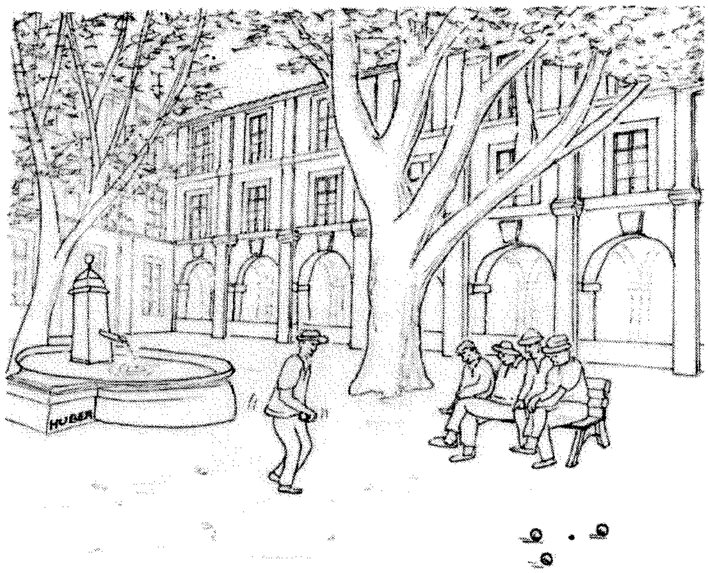
Albert EINSTEIN
1879 - 1955

Exercice n°12
7 points

Partie de boule

Sur une boule de pétanque de rayon 37 mm on veut tracer 6 cercles comme indiqué sur la figure ci-dessous. Leurs 8 points d'intersection sont les sommets d'un cube.





Calculer le rayon de ces cercles.

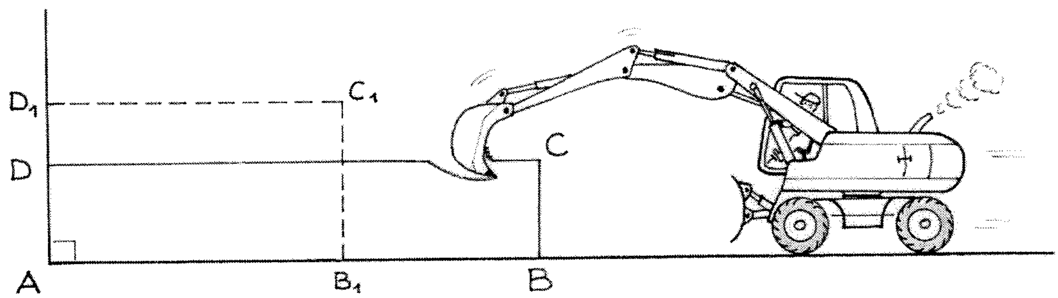
Exercice n°13
10 points

Quadrature

Voici un programme de construction :
- dessiner un rectangle ABCD de côtés AB = 9 cm et AD = 3 cm.
- placer sur [AB] le point B_1 de façon que AB_1 soit la moyenne de AB et AD.
- tracer le rectangle $AB_1C_1D_1$ de même aire que ABCD.

Répéter ce programme de construction à partir du rectangle $AB_1C_1D_1$ pour obtenir le rectangle $AB_2C_2D_2$ toujours de même aire et ainsi de suite.

Tracer sur la feuille-réponse les 4 premiers rectangles. Comment évoluent les dimensions de ces rectangles ?



Eléments de solutions pour un corrigé de l'épreuve du 13 mars 2003

Exercice 1 : Pause café

Le plus simple est de **mettre toute la monnaie en commun**.
On dispose alors de : **1€ + 50 ct + 3× 20 ct + 2×10 ct + 2× 5 ct**
On commence par acheter 2 cafés en introduisant
2 × (20 ct + 10 ct + 5 ct)
On achète un 3° café en introduisant 50 ct. La machine rend 10 ct + 5 ct . On rend 5 ct à Daniela et 10 ct à Bernardo
On achète le 4° café en introduisant 1€ la machine doit rendre 0,65 € .
Elle n'a qu'une façon pour le faire: rendre 50 ct + 10 ct + 5 ct.
On donne 5 ct à Claudia, encore 10 ct à Bernardo, et à Alberto 50 ct plus les 20 ct non utilisés. **Alors chacun a son café et sa monnaie**.

Exercice 2 : Au suivant

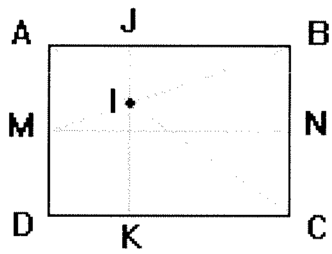
L'unique solution est :
6+7+8+9+10 = 40

On ne demande pas de démontrer l'unicité de la solution.

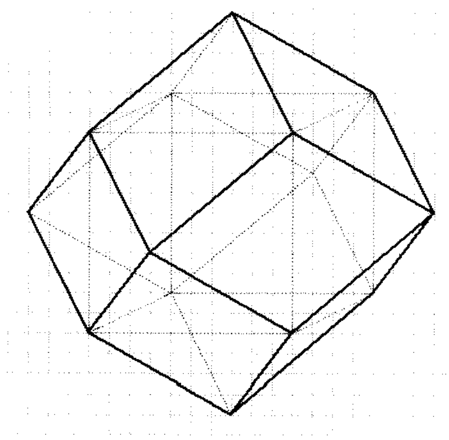
Exercice 3 : Tripli

On pourra nommer les points comme ci-contre :
Avec les triangles AIM et CIB,
Thalès donne : AI/IC = AM/CB = 1/2
Donc IC = 2 AI et AC = 3AI
Avec les triangles AIJ et ACB,

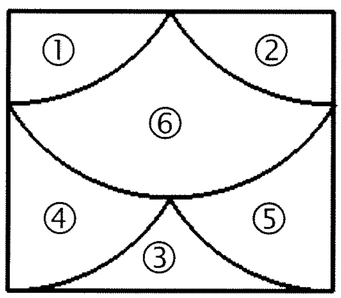
Thalès donne alors : $\boxed{\mathbf{AJ = \frac{1}{3}\ AB}}$



Exercice 4 : Rhombique



Exercice 5 : C'est pas pi



Voici le rectangle :
Sa longueur est $6 \times \sqrt{3}$ cm
Sa largeur est 1,5 × 6 = 9 cm

D'où son aire : $\boxed{\mathbf{54\ \sqrt{3}\ cm^2}}$

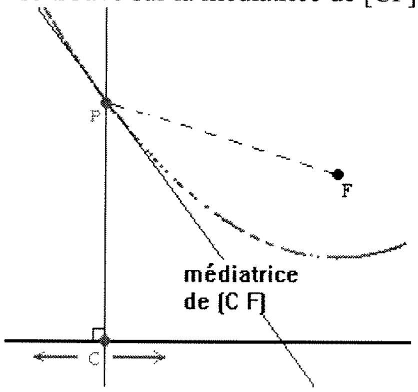
Exercice 6 : Le 11 gagnant… **est 9876524130** .

Pour le trouver, on remarque d'abord que 9876543210 n'est pas un multiple de 11, car 9 – 8 + 7 – 6 + 5 – 4 + 3 – 2 + 1 = 5, puis on le modifie le moins possible, en partant de la droite… du bon bricolage !

Exercice 7 : A la ficelle

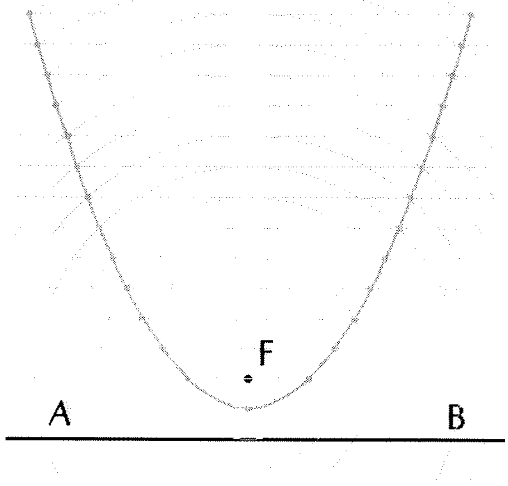
- D'une part **PF = 14 – DP** puisque la ficelle est tendue
- et d'autre part **PC = 14 – DP** puisque les points D, P et C sont alignés

d'où l'égalité **PF = PC**
Cette égalité peut être exploitée pour le tracé : P se trouve sur la médiatrice de [CF]



Autres méthodes :

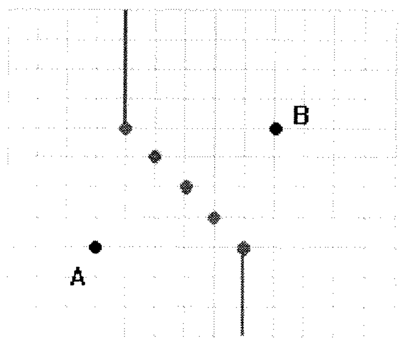
- Choisir les points convenables dans un réseau de cercles et de droites.



- Se débrouiller avec une ficelle etc.. comme Kepler !

Exercice 8 : Police Geometry

Dans cette géométrie, on obtient une curieuse *médiatrice*, constituée de deux demi-droites et 3 points isolés.



Exercice 10 : Black blanc bloque

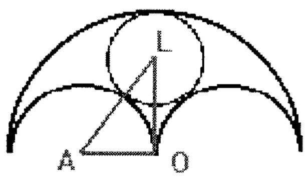
2	⊗⊗
3	○⊗⊗
4	○⊗⊗○
5	pas de solution
6	⊗⊗○○⊗⊗
7	○⊗⊗○○⊗⊗
8	○⊗⊗○○⊗⊗○
9	pas de solution
10	⊗⊗○○⊗⊗○○⊗⊗
11	○⊗⊗○○⊗⊗○○⊗⊗
12	○⊗⊗○○⊗⊗○○⊗⊗○
13	pas de solution
14	⊗⊗○○⊗⊗○○⊗⊗○○⊗⊗
15	○⊗⊗○○⊗⊗○○⊗⊗○○⊗⊗

Il semble que les alignements n'ayant pas de solution soient ceux dont le nombre de jetons est de la forme 4n + 1, mais c'est assez difficile à démontrer.

Par contre, il est plus facile d'établir qu'un alignement de 2003 jetons peut être retourné : on commence par la gauche, on retourne les 2000 premiers jetons **par groupes de 4** suivant la solution ligne 4, puis on retourne les 3 derniers suivant la solution ligne 3.

Exercice 9 : Cadran lunaire :

Le disque lunaire est tangent aux 3 demi-cercles. Soit R son rayon. Alors, dans le triangle AOL :
OA = ½ : AL = ½ + R et
OL = 1 – R.



Ce triangle étant rectangle pour des raisons de symétrie, Pythagore donne :
$(\frac{1}{2} + R)^2 = (\frac{1}{2})^2 + (1-R)^2$
d'où $\boxed{\mathbf{R = 1/3}}$

Exercice 11 : Les voyages forment la jeunesse :

La formule $T_A = T_B \times \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ donne $20 = 40 \times \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ alors $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = ½$

donc : $1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{4}$ et $v^2 = \frac{3c^2}{4}$.

Finalement : $\boxed{v = \frac{c\sqrt{3}}{2}}$ soit **environ 260 000 km/s.**

Exercice n° 12 : Partie de Boule

Si on note a l'arête du cube, sa grande diagonale est a $\sqrt{3}$.
Elle est aussi égale au diamètre de la boule d'où : $a = 74 / \sqrt{3} = 74 \sqrt{3} / 3$
Le diamètre des cercles égale la diagonale des faces du cube, c'est à dire :

$$d = a \times \sqrt{2} = 74 \times \sqrt{6} / 3$$

Alors le rayon de ces cercles est , en millimètres : $\boxed{R = \frac{37\sqrt{6}}{3}}$

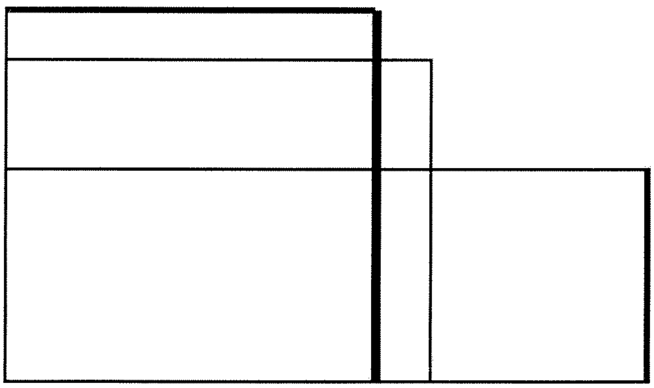
Exercice n° 13 : Quadrature

Notons (L_n) la suite des longueurs et (l_n) la suite des largeurs.
On a $L_0 = 9$, $l_0 = 3$ l'aire du premier rectangle est $9 \times 3 = 27$.

Alors : $L_1 = \frac{9+3}{2} = 6$ $\qquad l_1 = \frac{27}{6} = \frac{9}{2} = 4{,}5$

$$L_2 = \frac{6+\frac{9}{2}}{2} = \frac{21}{4} = 5{,}25 \qquad l_2 = \frac{27}{\frac{21}{4}} = \frac{36}{7} \simeq 5{,}1428$$

$$L_3 = \frac{\frac{21}{4}+\frac{36}{7}}{2} = \frac{291}{56} \simeq 5{,}1964 \qquad l_3 = \frac{27}{\frac{291}{56}} = \frac{504}{97} \simeq 5{,}1958\ldots$$



Les 2 derniers rectangles sont presque confondus.
Le rectangle se rapproche vite d'un carré.
La longueur et la largeur se rapprochent d'une valeur commune qui serait le côté de ce carré, soit $\sqrt{27}$.
La calculatrice donne $\sqrt{27} = 3\sqrt{3} \simeq 5{,}1961$.

Ein Klassenwettbewerb für die Jahrgangsstufen 10 und 11

Mathematik ohne Grenzen

ACADEMIE DE STRASBOURG

- Mit *Ausnahme* der *Aufgaben 4, 6 und 8 muss die Lösung stets begründet werden.*
- *Auch Teillösungen werden berücksichtigt.*
- *Die Sorgfalt der Darstellung wird mitbewertet.*
- *Für jede Aufgabe, auch für nicht gelöste, ist ein gesondertes Blatt mit der Bezeichnung von Schule und Klasse abzugeben.*

13. März 2003

Aufgabe 1
7 Punkte

Kaffeepause

Die Lösung muss in einer der vier Fremdsprachen verfasst werden und mindestens 30 Wörter umfassen.

Quatre étudiants souhaitent chacun prendre un café pendant leur pause et n'ont que très peu de monnaie. Un café coûte 35 centimes d'euros. La machine à café n'a plus de monnaie, les responsables viennent de la vider.

Albert a une pièce de 1 euro et une de 5 centimes.

Bernard a une pièce de 50 centimes et une de 5 centimes.

Claudia a une pièce de 20 centimes et deux de 10 centimes.

Danièle a deux pièces de 20 centimes.

Chacun veut son café et sa monnaie. La machine ne sert qu'une personne à la fois et ne rend la monnaie que quand elle en a.

Comment vont-ils s'arranger ?

Cuatro estudiantes desean cada uno tomar un café durante el recreo y sólo tienen poca moneda. Un café cuesta 35 centimos de euros. La maquina de café ya no tiene cambio. Los responsables vienen para vaciarla.

Alberto tiene una moneda de 1 euro y una de 5 centimos.

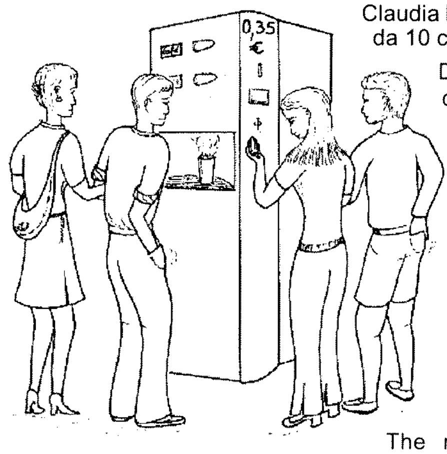
Bernardo tiene una moneda de 50 centimos y una de 5 centimos.

Claudia tiene una moneda de 20 centimos y dos de 10 centimos.

Daniela tiene dos monedas de 20 centimos.

Cada uno quiere su café y la vuelta de su moneda. La maquina sólo sirve a una persona a la vez y sólo vuelve monedas cuando las tiene.

¿ Como se las van a arreglar ?



Quattro studenti desiderano bere un caffè durante l'intervallo delle lezioni e possiedono solo della moneta. Un caffè costa 35 centesimi di euro. La macchinetta non ha più moneta dato che i manutentori l'hanno appena svuotata.

Alberto ha una moneta da 1 euro e una da 5 centesimi.

Bernardo ha una moneta da 50 centesimi ed una da 5 centesimi.

Claudia ha una moneta da 20 centesimi e due da 10 centesimi.

Daniela ha due monete da 20 centesimi.

Ognuno desidera il suo caffè e vuole il suo resto. La macchinetta serve una sola persona per volta e fornisce il resto quando ha moneta.

Come possono organizzarsi ?

Four students wish to have a cup of coffee during their break and have very little change. A cup costs 35 euro cents.

The machine has no change left, the people in charge have just come to empty it.

Albert has a 1 euro coin and a 5 cents coin.

Bernard has a 50 cents coin and a 5 cents coin.

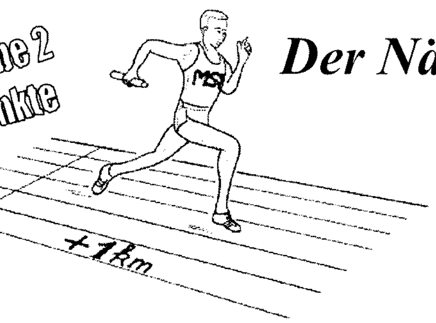
Claudia has a 20 cents coin and two 10 cents coins.

Daniela has two 20 cents coins.

Each of them wants his coffee and his change. The machine serves one person at a time and gives back change only when it has some.

How are they going to manage ?

Aufgabe 2
5 Punkte



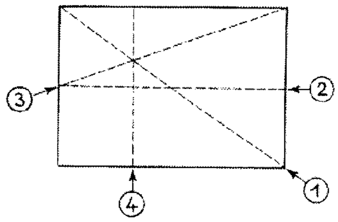
Der Nächste bitte!

Bei einem Staffellauf wird die Gesamtstrecke von 40 km so durchlaufen, dass jeder Läufer 1km weiter laufen muss als sein Vorgänger. Außerdem muss jeder Läufer ein ganzzahliges Vielfaches der Streckelänge 1 km zurücklegen.

Gib für jedes Mitglied einer Staffelmannschaft an, welche Strecke es zurücklegen muss.

Vierfältig gedrittelt

Dies ist ein Verfahren, welches allein durch Falten ermöglicht, die Länge eines rechteckigen Blatt Papiers zu dritteln:



Falte das Blatt zunächst entlang der Diagonalen (1) und entlang der Längsachse (2).

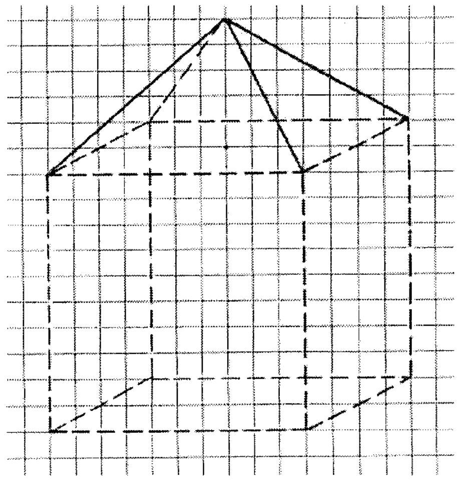
Danach faltest du das Blatt längs der Linien (3) und (4) gemäß der Abbildung.

Die Faltlinie (4) markiert nun ein Drittel der Blattlänge.

Begründe, warum dieses Verfahren zum Erfolg führt.

Aufgabe 4
5 Punkte

Rhombisch

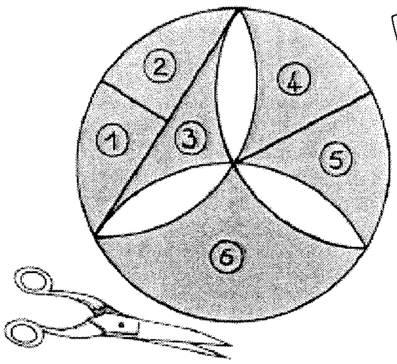


Die abgebildete Figur zeigt einen Würfel, auf dessen einer Seitenfläche eine regelmäßige Pyramide errichtet wurde. Ihre Höhe ist halb so lang wie eine Würfelkante.

Errichtet man auf jeder der sechs Würfelflächen eine solche Pyramide, so stellt man fest, dass je zwei Seitenflächen der Pyramiden in einer Ebene liegen und eine Raute bilden. Diese zwölf Rauten sind die Seitenflächen eines Körpers, der rhombisches Dodekaeder genannt wird.

Die 14 Ecken des Körpers werden von den acht Ecken des Würfels und den sechs Spitzen der Pyramiden gebildet.

Zeichne, ausgehend vom abgebildeten Schrägbild, ein Schrägbild des rhombischen Dodekaeders auf das Lösungsblatt. Schraffiere die sichtbaren Seitenflächen farbig.



Aufgabe 5
7 Punkte

Ohne π

Ausgehend von den Eckpunkten eines regelmäßigen Sechsecks wurde die abgebildete Figur konstruiert.

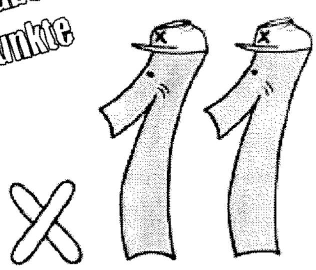
Um den Inhalt der graugetönten Fläche zu bestimmen, kann man diese, wie in der Figur angegeben, in sechs Teile zerschneiden. Diese sechs Teile lassen sich lückenlos zu einem Rechteck zusammenfügen.

Stelle dieses Puzzle aus einer Kreisscheibe mit dem Radius $r = 6$ cm her.

Füge die Teile zu einem Rechteck zusammen und klebe es auf das Antwortblatt.

Berechne den exakten Inhalt der grau getönten Fläche.

Aufgabe 6
5 Punkte



11 gewinnt

Eine ganze Zahl ist durch 11 ohne Rest teilbar, wenn der Betrag ihrer **alternierenden Quersumme** ein Vielfaches von 11 ist oder Null ist.

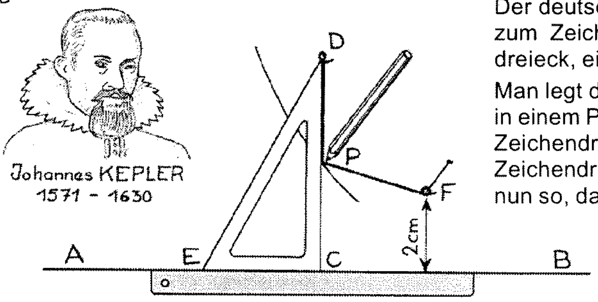
Beispiele:

- **1958** ist Vielfaches von 11, es gilt $1 - 9 + 5 - 8 = -11$
- **2002** ist Vielfaches von 11, es gilt $2 - 0 + 0 - 2 = 0$
- **94 919** ist Vielfaches von 11, es gilt $9 - 4 + 9 - 1 + 9 = 22$
- **1989** ist **kein** Vielfaches von 11, es gilt $1 - 9 + 8 - 9 = -9$

Finde das größte Vielfache von 11, das aus 10 Ziffern besteht, welche alle verschieden sind.

Aufgabe 7
7 Punkte

Mit Nadel und Faden



Der deutsche Astronom Johannes Kepler überlieferte ein Verfahren zum Zeichnen einer Parabel. Man verwendet dazu ein Zeichendreieck, ein Lineal, einen Faden, eine Nadel und einen Stift.

Man legt das Lineal entlang einer Geraden (AB) und sticht die Nadel in einem Punkt F ein. Der Faden wird im Punkt F und im Punkt D des Zeichendreiecks befestigt. Er ist so lang wie die Seite CD des Zeichendreiecks. Mit der Spitze P des Stiftes spannt man die Schnur nun so, dass der Abschnitt PD an der Seite CD anliegt.

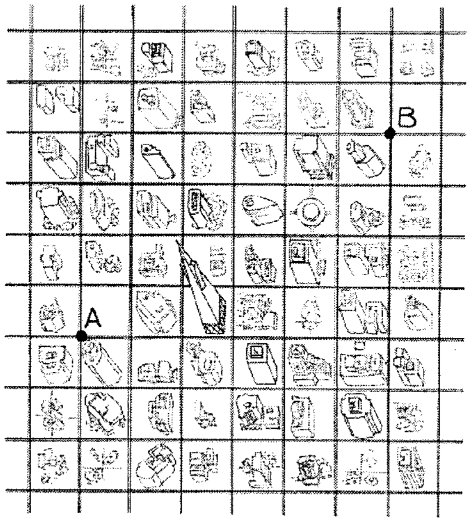
Gleitet nun die Seite EC des Zeichendreiecks entlang der Geraden (AB), so bewegt sich die Stiftspitze P auf einer Parabel.

Zeige zunächst, dass $\overline{PF} = \overline{PC}$ gilt.

Zeichne dann punktweise eine solche Parabel, bei welcher der Abstand von F zu (AB) 2cm beträgt und die Strecke CD 14cm lang ist.

Aufgabe 8
5 Punkte

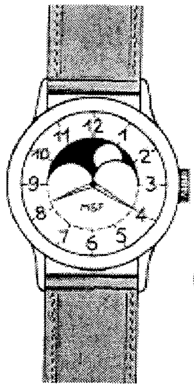
Polizeigeometrie

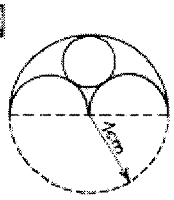


In manchen Städten, zum Beispiel in New York oder in Mannheim, bilden Straßen ein quadratisches Gitter.

Jules und Jim sind die Chefs zweier Polizeistationen in einer solchen Stadt. Im abgebildeten Stadtplan sind diese Stationen mit A und B bezeichnet.

Zeichne das Quadratgitter auf das Antwortblatt. Markiere nun farbig die Straßenpunkte, für welche ein Streifenwagen jeweils die gleiche Fahrtstrecke zurücklegen müsste, um die Station von Jules oder die von Jim zu erreichen.





Aufgabe 9
7 Punkte

Monduhr

Die abgebildete Uhr zeigt angenähert die Phasen des Mondes an.

Der Mond wurde vor dunklem Hintergrund auf eine drehbare, kreisrunde Scheibe gemalt, deren Drehachse mit der Drehachse der Zeiger übereinstimmt. Das Mondbild zeigt sich nun in einem Fenster des Zifferblattes, welches von drei Halbkreisen begrenzt wird.

Bei Vollmond ist das Bild des Mondes vollständig im Fenster zu sehen.

Berechne den Durchmesser des Mondbildes, wenn der Radius des großen Halbkreises 1cm beträgt und der Mond möglichst groß erscheinen soll.

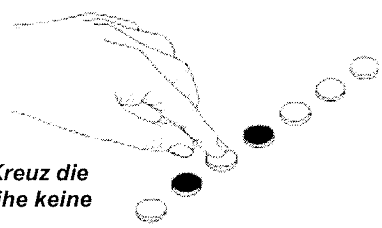
Aufgabe 10
10 Punkte

Wie man es dreht und wendet

Bei einem Spiel verwendet man Spielsteine mit jeweils einer schwarzen und einer weißen Seite, die man zu einer Reihe aneinanderlegt. Zunächst sind nur die weißen Seiten sichtbar.

Ziel des Spiels ist es, die Steine zu wenden, so dass am Ende alle schwarzen Seiten oben liegen. Dabei muss folgende Regel eingehalten werden:

Man blockiert mit dem Finger einen der Steine und dreht die unmittelbar benachbarten Steine um. Je nach dem, welcher Stein blockiert wurde, müssen dazu ein oder zwei Steine gewendet werden. Dies setzt man fort, bis alle schwarzen Seiten oben liegen.



Zeichne Reihen von 2 Steinen, 3 Steinen usw. bis zu 15 Spielsteinen.

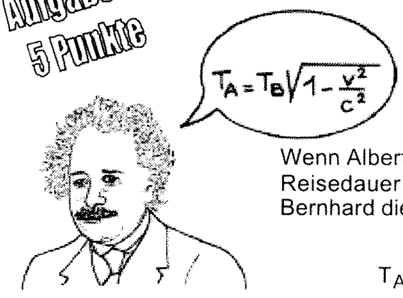
Markiere nun bei jeder Reihe, für die das Spiel durchführbar ist, mit einem Kreuz die Steine, welche nacheinander blockiert werden müssen. Gibt es für eine Reihe keine Lösung, so notiere dies ebenfalls.

Prüfe, ob es eine Lösung für eine Reihe von 2003 Spielsteinen gibt. Begründe deine Antwort.

nur für Klassenstufe 11

Aufgabe 11
5 Punkte

Reisen hält jung



Albert EINSTEIN
1879 – 1955

Wie Albert Einstein feststellte, ist die Zeit keine absolute Größe. Vielmehr verläuft sie für einen Reisenden, welcher sich mit sehr großer Geschwindigkeit bewegt, anders, als für jemanden, der relativ zu ihm in Ruhe bleibt.

Wenn Albert sich relativ zu Bernhard mit der Geschwindigkeit v bewegt, werden beide für die Reisedauer verschiedene Zeiten messen. Misst Albert für die Reisedauer die Zeit T_A und Bernhard die Zeit T_B, so gilt nach Einstein der Zusammenhang

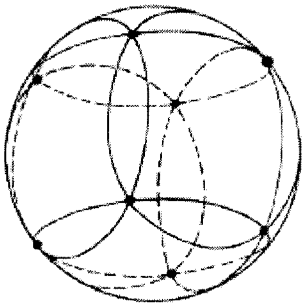
$$T_A = T_B \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$, wobei c die Lichtgeschwindigkeit ($\approx 300000\frac{km}{s}$) bedeutet.

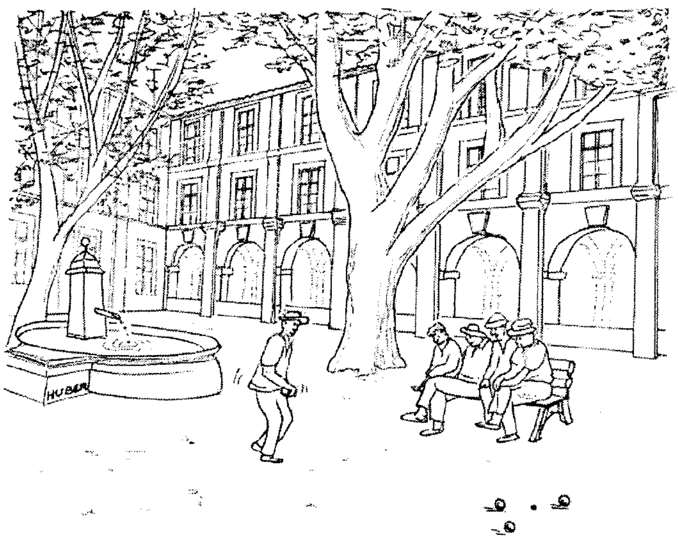
Als Albert seine Reise antritt ist er 40 Jahre und Bernhard 20 Jahre alt. Bei Alberts Rückkehr sind beide 60 Jahre alt.

Mit welcher Geschwindigkeit hat sich Albert fortbewegt? Gib die Antwort in km/s an.

Aufgabe 12
7 Punkte

Kugelspuren





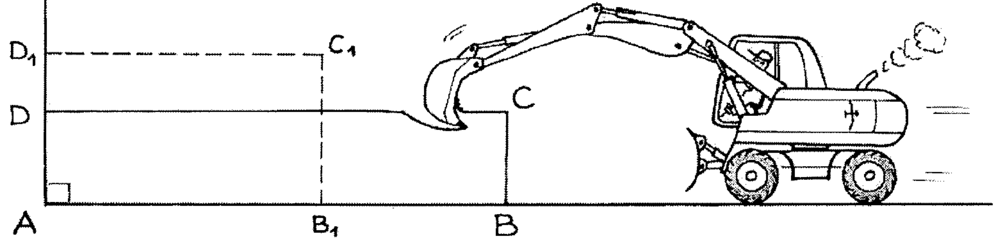
Auf einer Boule-Kugel mit dem Radius 37 mm sollen, wie in der Abbildung zu sehen, sechs gleich große Kreise eingraviert werden.

Ihre acht Schnittpunkte bilden die Ecken eines Würfels.

Berechne den Radius dieser Kreise.

Aufgabe 13
10 Punkte

Mittelmaß



Zeichne ein Rechteck ABCD mit $\overline{AB} = 9cm$ und $\overline{AD} = 3cm$.

Markiere auf AB einen Punkt B_1 derart, dass $\overline{AB_1}$ das arithmetische Mittel von $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ ist.

Zeichne nun das Rechteck A $B_1C_1D_1$, das den selben Flächeninhalt wie das Rechteck ABCD haben soll.

Man wiederholt dieses Verfahren mit dem Rechteck $AB_1C_1D_1$ und erhält so das Rechteck A $B_2C_2D_2$ und so fort.

Zeichne auf diese Weise die ersten vier Rechtecke.

Wie entwickeln sich bei diesem Verfahren die Längen der Rechtecksseiten?

Mathematik ohne Grenzen
Lösungshinweise zum Wettbewerb am 13. März 2003

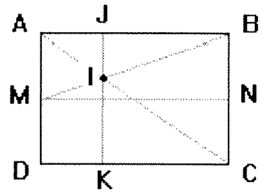
Aufgabe 1: Kaffeepause

Am einfachsten ist es, alle Münzen zusammenzulegen. Man hat **1€ + 50ct + 3× 20ct + 2× 10ct + 2× 5ct.** Zuerst kauft man zwei Kaffees für 2 × (20ct + 10ct + 5ct). Dann wirft man für den dritten Kaffee 50ct ein, worauf der Automat 10ct und 5ct zurückgibt. Für den vierten Kaffee wirft man 1€ ein. Es kommen 50ct, 10ct und 5ct zurück. Am Ende haben die vier **50ct + 20ct + 2×10ct + 2× 5ct**. Davon erhält A 70ct, B 20ct, C 5ct und D ebenfalls 5ct zurück. So hat schließlich jeder seinen Kaffee und sein Wechselgeld.

Aufgabe 2: Der Nächste bitte!

Die einzige Lösung ist **6 + 7 + 8 + 9 + 10**. Der Nachweis der Eindeutigkeit ist nicht verlangt.

Aufgabe 3: Vierfältig gedrittelt



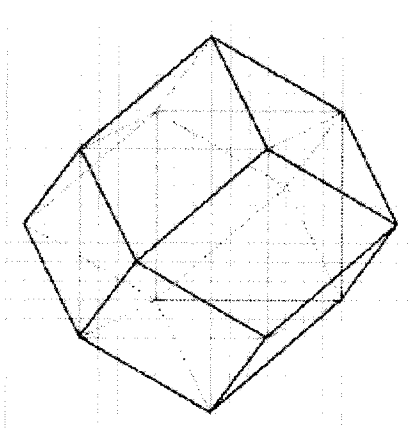
Für die Dreiecke AMI und CBI erhält man mit dem zweiten Strahlensatz

$\frac{\overline{AI}}{\overline{IC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{CB}} = \frac{1}{2}$. Damit ist $\overline{IC} = 2\overline{AI}$ und $\overline{AC} = 3\overline{AI}$.

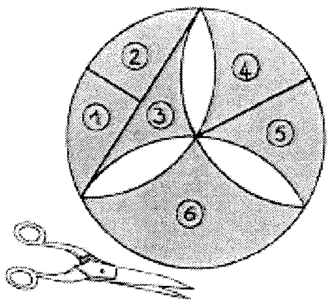
Mit den Dreiecken AIJ und ACB erhält man nun nach dem ersten Strahlensatz

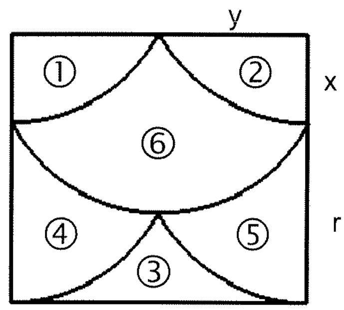
$\overline{AJ} = \frac{1}{3}\overline{AB}$

Aufgabe 4 Rhombisch



Aufgabe 5: Nicht π





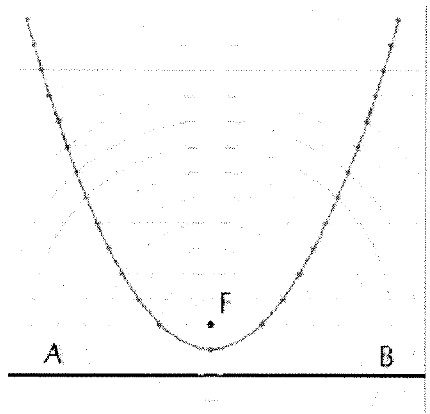
y ist Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge $r = 2x$.

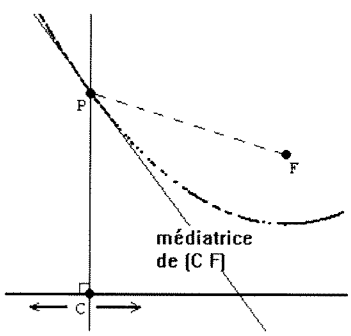
$A = 2y\cdot(x+r) = 2\cdot\frac{r}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{3}{2}r = \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$. $r = 6\,cm \Rightarrow A = 54\cdot\sqrt{3}cm^2$

Aufgabe 6: 11 gewinnt Die Lösung lautet **9876524130**

Aufgabe 7: Mit Nadel und Faden:

Da die Fadenlänge gleich der Länge von CD ist, gilt $\overline{DP}+\overline{PF} = \overline{DP}+\overline{PC}$ und damit $\overline{PF} = \overline{PC}$.
Die Parabelpunkte P liegen somit auf der Mittelsenkrechten von CF und der Lotgeraden von (AB) durch C. Damit lassen sich die Punkte P konstruieren (siehe unten stehende Abbildung).



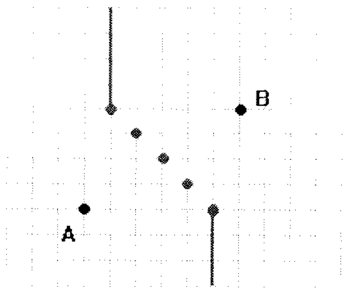


Wegen $\overline{PF} = \overline{PC}$ ist P von (AB) und F gleich weit entfernt.
Diese Eigenschaft wurde bei der oben stehenden Konstruktion benützt.

Als dritte Möglichkeit kann man sich natürlich auch, wie Kepler, mit Nadel und Faden behelfen.

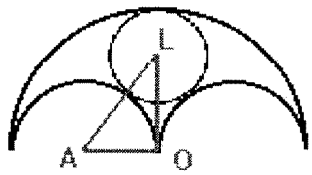
Mathematik ohne Grenzen
Lösungshinweise zum Wettbewerb am 13. März 2003

Aufgabe 8: Polizeigeometrie



Der geometrische Ort der gesuchten Punkte besteht aus zwei Halbgeraden und drei isolierten Punkten.

Aufgabe 9: Monduhr



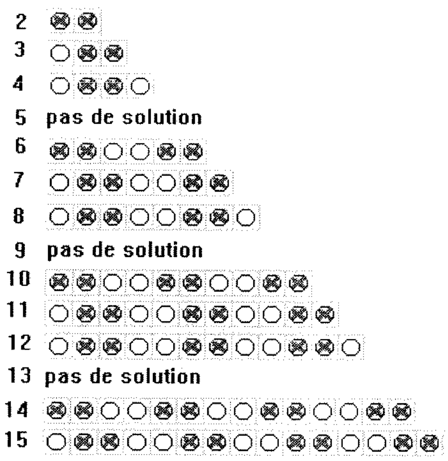
Sei r der Radius der Mondscheibe und R der Radius des großen Halbkreises. Dann ist $\overline{AO} = \frac{1}{2}R$, $\overline{AL} = \frac{1}{2}R + r$ und $\overline{OL} = R - r$.

Aus Symmetriegründen ist das Dreieck AOL rechtwinklig.

Somit gilt $\left(\frac{R}{2}\right)^2 + (R-r)^2 = \left(\frac{R}{2}+r\right)^2$.

Daraus erhält man $r = \frac{1}{3}R$ bzw. $r = \frac{1}{3}\text{cm}$.

Aufgabe 10: Wie man es dreht ...



Eine Reihe von 2003 Spielsteinen lässt sich in 500 Gruppen zu vier und eine Gruppe zu drei Steinen aufteilen. Da man jede dieser Gruppen wenden kann, ist dies auch für alle 2003 Steine möglich.

Aufgabe 11: Reisen hält jung

Es gilt $T_A = 20a$ und $T_B = 40a$.

$$T_A = T_B \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{v^2}{c^2} = \frac{3}{4}$$

und damit $v = \frac{1}{2}c\cdot\sqrt{3}$.

Mit $c = 300000\frac{\text{km}}{\text{s}}$ ergibt sich $v \approx 260000\frac{\text{km}}{\text{s}}$.

Aufgabe 12: Kugelspuren

Da die sechs Kreise durch die Ecken eines Würfels gehen, ist der Durchmesser der Kreise gleich der Länge der Flächendiagonalen des Würfels.
Der Kugeldurchmesser ist gleich der Raumdiagonalen des Würfels.
Sei a die Kantenlänge des Würfels und R der Kugelradius.
Dann gilt: $2R = a\cdot\sqrt{3}$ und damit $a = \frac{2R}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}R\sqrt{3}$.

Für den Kreisradius r gilt $2r = a\cdot\sqrt{2} \Rightarrow r = \frac{R}{3}\sqrt{6}$.

Aus $R = 37\,\text{mm}$ folgt $r \approx 30\,\text{mm}$.

Aufgabe 13: Mittelmaß

Sei (a_n) die Folge der Rechteckslängen und (b_n) die Folge der Breiten.

Dann gilt $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ und $b_{n+1} = \frac{a_1 \cdot b_1}{a_{n+1}}$.

Für die ersten vier Rechtecke ergeben sich folgende Seitenlängen:

n	a_n	b_n
1	9	3
2	6	4,5
3	5,25	5,1428
4	5,1964	5,1958

In der Zeichnung unterscheiden sich das dritte und das vierte Rechteck kaum noch. Die Seitenlängen nähern sich dem selben Wert. Für unser Rechteck ist dies $\sqrt{27}$.

ACADEMIE DE STRASBOURG

Matematica senza frontiere

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
Ufficio Scolastico per la Lombardia

Prova
13 Marzo 2003

- Per tutti gli esercizi, tranne per i numeri 4, 6 e 8, sono richieste spiegazioni, giustificazioni o illustrazioni
- Sarà esaminata ogni risoluzione, anche parziale.
- Si terrà conto dell'accuratezza.
- Ogni foglio-risposta deve essere utilizzato per un singolo esercizio per il quale deve essere riportata una sola soluzione, pena l'annullamento.

Esercizio n°1
7 punti

Pausa caffé

Soluzione da redigere con un minimo di 30 parole in francese o inglese o spagnolo o tedesco.

Cuatro estudiantes desean cada uno tomar un café durante el recreo y sólo tienen poca moneda. Un café cuesta 35 centimos de euros. La maquina de café ya no tiene cambio. Los responsables vienen para vaciarla.

Alberto tiene una moneda de 1 euro y una de 5 centimos.

Bernardo tiene una moneda de 50 centimos y una de 5 centimos.

Claudia tiene una moneda de 20 centimos y dos de 10 centimos.

Daniela tiene dos monedas de 20 centimos.

Cada uno quiere su café y la vuelta de su moneda. La maquina sólo sirve a una persona a la vez y sólo vuelve monedas cuando las tiene.

¿ Como se las van a arreglar ?

Quatre étudiants souhaitent chacun prendre un café pendant leur pause et n'ont que très peu de monnaie. Un café coûte 35 centimes d'euros. La machine à café n'a plus de monnaie, les responsables viennent de la vider.

Albert a une pièce de 1 euro et une de 5 centimes.

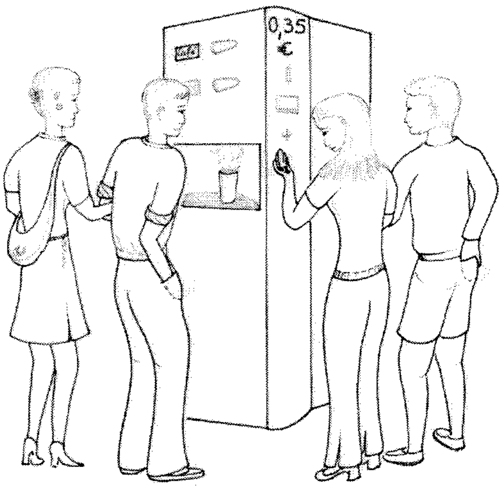
Bernard a une pièce de 50 centimes et une de 5 centimes.

Claudia a une pièce de 20 centimes et deux de 10 centimes.

Danièle a deux pièces de 20 centimes.

Chacun veut son café et sa monnaie. La machine ne sert qu'une personne à la fois et ne rend la monnaie que quand elle en a.

Comment vont-ils s'arranger ?



Vier Studenten haben Kaffeedurst, aber leider zu wenig Kleingeld. Ein Kaffee kostet 35 Cent. Der Kaffeeautomat kann im Moment kein Wechselgeld zurückgeben, weil er eben erst geleert wurde.

Albert hat eine 1-Euro-Münze und ein 5-Cent-Stück.

Bernhard hat eine 50-Cent- und eine 5-Cent-Münze.

Claudia hat eine Münze zu 20 Cent und zwei zu 10 Cent.

Daniela hat zwei 20-Cent-Münzen.

Jeder möchte seinen Kaffee und sein Wechselgeld. Der Automat kann nur eine Person auf einmal bedienen und kann nur Wechselgeld herausgeben, wenn er welches hat.

Wie gehen sie vor ?

Four students wish to have a cup of coffee during their break and have very little change. A cup costs 35 euro cents. The machine has no change left, the people in charge have just come to empty it.

Albert has a 1 euro coin and a 5 cents coin.

Bernard has a 50 cents coin and a 5 cents coin.

Claudia has a 20 cents coin and two 10 cents coins.

Daniela has two 20 cents coins.

Each of them wants his coffee and his change. The machine serves one person at a time and gives back change only when it has some.

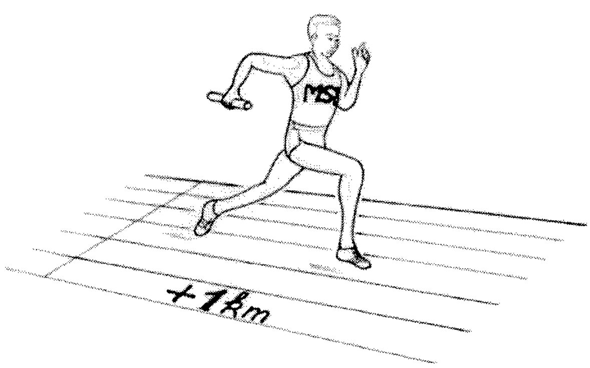
How are they going to manage ?

Esercizio n°2
5 punti

Avanti un altro!

Una corsa a staffetta di 40 km è praticata in modo che ciascun membro della squadra percorra un numero intero di kilometri. Inoltre, allorché un corridore riceve il testimone, deve correre 1 km in più di quello che glielo consegna.

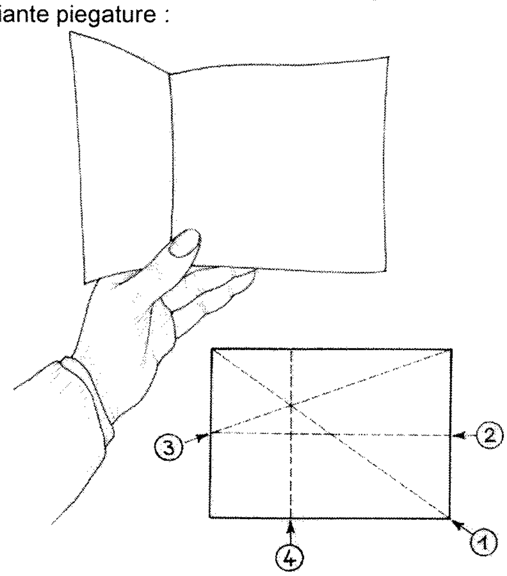
Determinare la distanza percorsa da ciascun membro della squadra.



Esercizio n°3
7 punti

Chi fa da sé...fa in tre

Ecco un metodo che permette di determinare un terzo della lunghezza di un foglio di carta rettangolare unicamente mediante piegature :



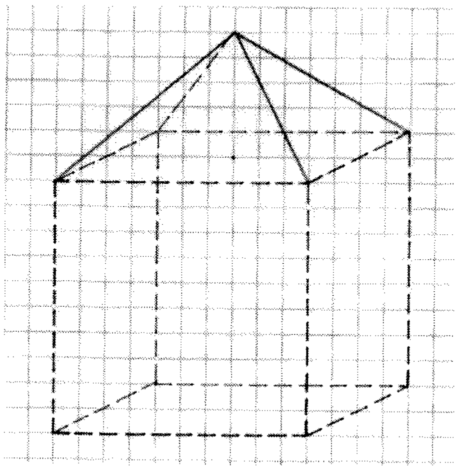
Piegare successivamente il foglio secondo la diagonale 1, la mediana 2, poi secondo le pieghe 3 e 4 come indicato in figura. La piega 4 fornisce, quindi, un terzo della lunghezza.

Giustificare questo metodo.

Esercizio n°4
5 punti

A rombi

La figura rappresenta un cubo sormontato da una piramide regolare a base quadrata di altezza uguale alla metà dello spigolo del cubo.



Se si costruisce una piramide di questo tipo su ciascuna faccia del cubo, si osserva che le facce di questa piramide sono a due a due sullo stesso piano e si uniscono per formare delle losanghe. Queste 12 losanghe sono facce di un solido chiamato dodecaedro rombico.

I suoi 14 vertici sono gli 8 del cubo e i 6 della piramide.

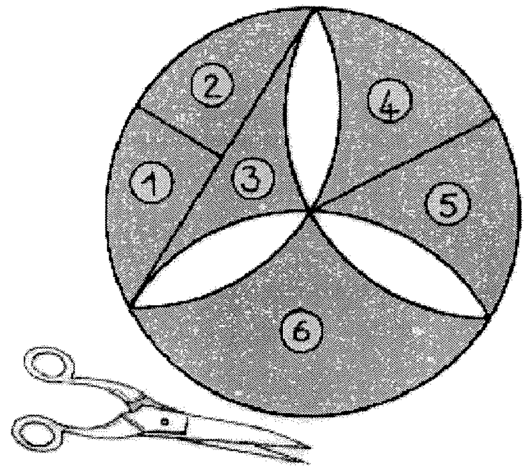
Disegnare il dodecaedro rombico ottenuto a partire da un cubo uguale a quello della figura. Colorare le facce visibili del dodecaedro

Esercizio n°5
7 punti

Non è π

Qui sotto è disegnato un rosone costruito a partire da un esagono regolare.

Per calcolare l'area della superficie grigio scuro, si può tagliarlo in 6 pezzi come indicato nel disegno.Con questi 6 pezzi si può comporre un rettangolo.



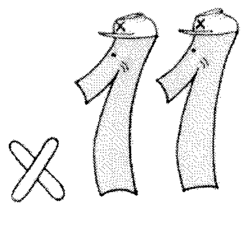
Realizzare il puzzle a partire da un cerchio di raggio 6 cm. Incollare il rettangolo sul foglio risposta. Calcolare l'area della superficie grigio scuro.

Esercizio n°6
5 punti

Alla conquista dell' 11

Un intero è multiplo di 11 se e solo se la somma algebrica alternata delle sue cifre è essa stessa un multiplo di 11, eventualmente negativo o nullo. Ad esempio:

- **1 958** è un multiplo di 11 perché 1 – 9 + 5 – 8 = **–11**
- **2 002** è un multiplo di 11 perché 2 – 0 + 0 – 2 = **0**
- **94 919** è un multiplo di 11 perché 9 – 4 + 9 – 1 + 9 = **22**
- ma **1 989** non è un multiplo di 11 perché 1 – 9 + 8 – 9 = **–9**.



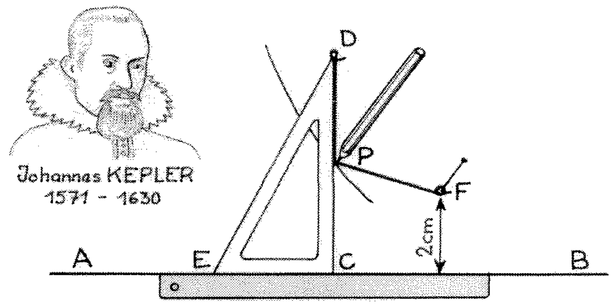
Determinare il massimo multiplo di 11 scritto con 10 cifre diverse.

Esercizio n°7 7 punti

Alla corda

L'astronomo tedesco Keplero ha pubblicato un metodo che permette di tracciare una parabola utilizzando un righello, una squadra, una cordicella, uno spillo e una matita. .

Si posa il righello lungo una retta (AB) e si punta lo spillo in un punto F. Scelta una cordicella di lunghezza uguale allo spigolo della squadra CD, se ne fissa una estremità in D e l'altra in F. La punta P della matita mantiene la cordicella tesa lungo la squadra il più lontano possibile, come mostra il disegno.



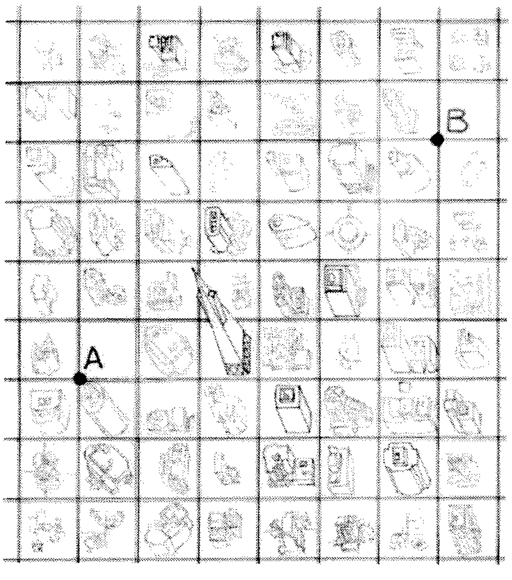
Se si fa scivolare il lato EC della squadra sulla retta (AB), il punto P descrive allora una parabola.

Giustificare l'uguaglianza PF = PC.
Disegnare punto per punto una tale parabola sapendo che CD = 14 cm e che F si trova a 2 cm dalla retta (AB).

Esercizio n°8 5 punti

Geometria poliziesca

In alcune città, come per esempio New York o Torino, le strade formano una quadrettatura regolare. Jules e Jim sono a capo di due posti di polizia in una città di questo tipo: le loro posizioni sono chiamate A e B nella mappa seguente:

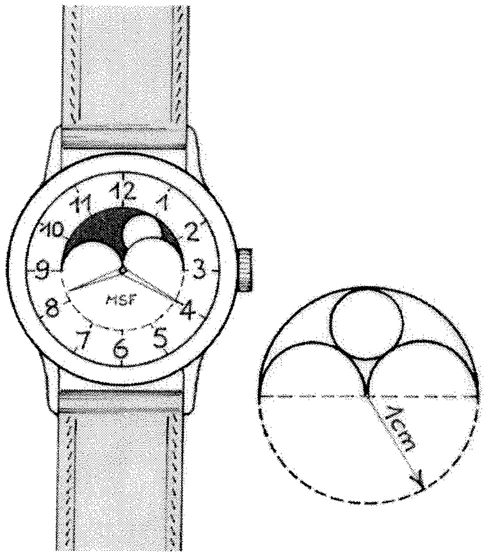


Riprodurre la quadrettatura sul foglio risposta. Colorare i punti della strada per i quali la distanza minimale da percorrere in auto per raggiungere il posto di Jules o il posto di Jim è la stessa.

Esercizio n°9 7 punti

Quadrante lunare

Un orologio indica meccanicamente le fasi lunari nel modo seguente :



la luna è rappresentata da un disco. Questo è disegnato su una lamina circolare scura che ruota attorno allo stesso asse delle lancette e che si scorge in un'apertura delimitata da 3 semicerchi. Il diametro della luna è il massimo possibile perché la si veda interamente nell'apertura,

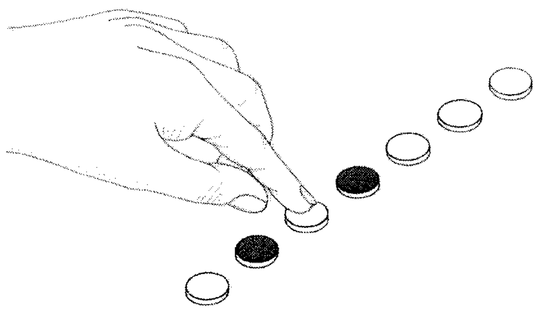
Calcolare tale diametro sapendo che il raggio del grande semicerchio è 1 cm.

Esercizio n°10 10 punti

Tasto nero Tasto bianco

Per giocare a questo gioco, si allineano dei gettoni con una faccia bianca e una nera. All'inizio, tutte le facce visibili sono bianche. Lo scopo del gioco è avere tutte le facce nere visibili rispettando la seguente regola:

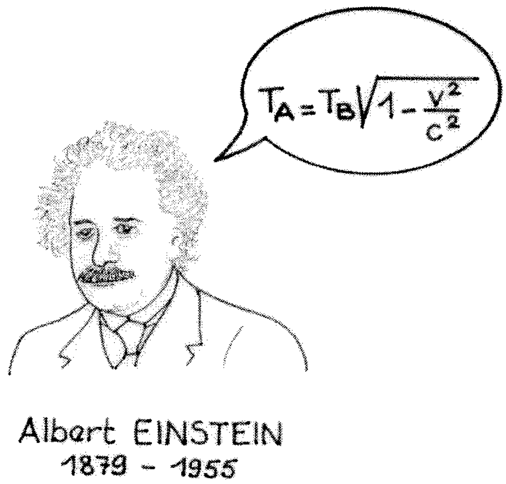
" Si blocca un gettone con un dito e si rivolta il gettone vicino se è uno solo, altrimenti i due vicini. Si ricomincia quante volte è necessario. "



Disegnare gli allineamenti di 2 gettoni, 3 gettoni, ecc fino a 15 gettoni. Per ogni allineamento che ha una soluzione, segnare con una croce i gettoni che devono essere bloccati. Altrimenti scrivere che quell'allineamento non ha soluzione. C'è una soluzione per un allineamento di 2003 gettoni? Giustificare la risposta.

Esercizio n°11 5 punti

I viaggi ringiovaniscono



Albert Einstein ha stabilito che il tempo non è una grandezza assoluta e che non scorre nello stesso modo per un viaggiatore che si sposta a grande velocità e per un suo amico che rimane fermo.Se Alberto fa un viaggio nello spazio alla velocità **v** e se Bernardo resta fermo, Bernardo misurerà una durata $\mathbf{T_B}$ per questo viaggio, mentre Alberto registrerà un'altra durata $\mathbf{T_A}$ per lo stesso viaggio.

Secondo Einstein,si ha la relazione $\mathbf{T_A = T_B}\sqrt{\mathbf{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ dove **c** è la velocità della luce, cioè circa 300 000 km/s.

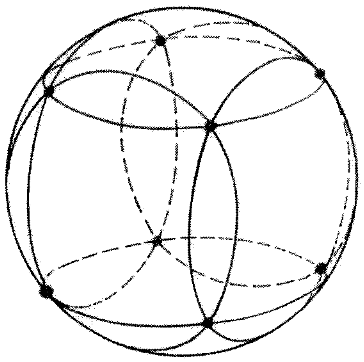
Alberto parte per un viaggio nello spazio all'età di 40 anni, quando suo figlio *Bernardo ha 20 anni.* Al ritorno tutti e due si ritrovano all'età di 60 anni.

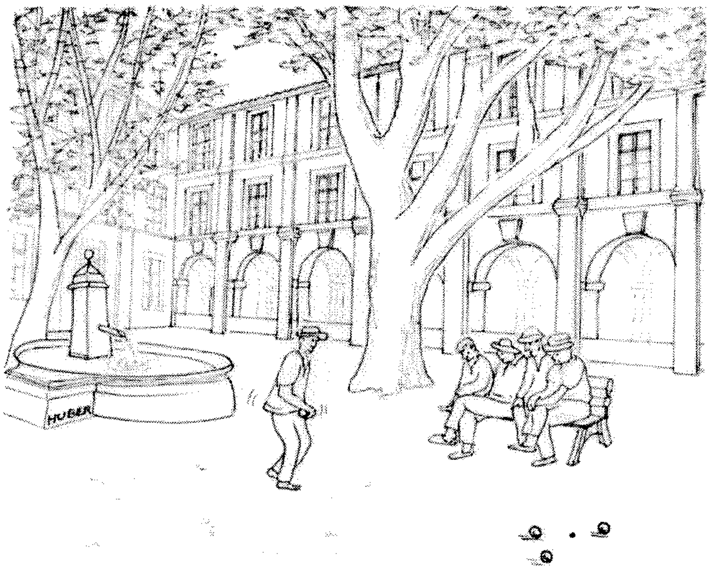
A quale velocità Alberto si è spostato? Fornire la risposta in km/s.

Esercizio n°12 7 punti

Partita di bocce

Su una boccia di raggio 37 mm si vogliono tracciare 6 circonferenze come indicato in figura. Gli 8 punti di intersezione sono i vertici di un cubo.





Calcolare il raggio delle circonferenze.

Esercizio n°13 10 punti

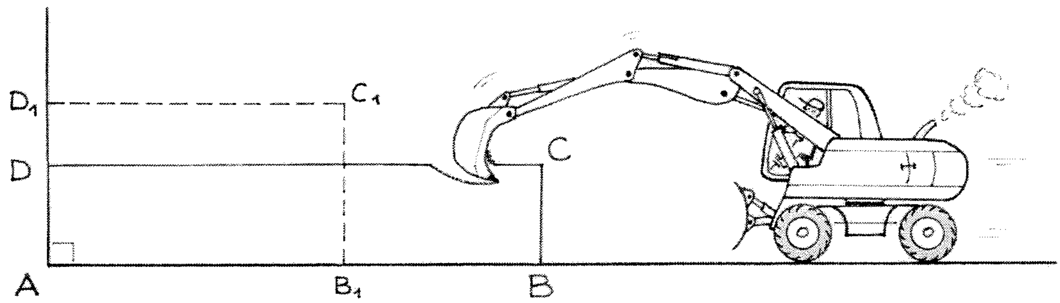
Quadratura

Ecco un programma di costruzione:

- disegnare un rettangolo ABCD di lato AB = 9 cm e AD = 3 cm;
- fissare su [AB] il punto B_1 in modo che la lunghezza AB_1 sia la media tra AB e AD;
- disegnare il rettangolo $AB_1C_1D_1$ in modo che sia equivalente al rettangolo ABCD.

Ripetere questa costruzione a partire dal rettangolo $AB_1C_1D_1$ per ottenere il rettangolo $AB_2C_2D_2$ equivalente e così di seguito.

Disegnare sul foglio risposta i primi 4 rettangoli. Come cambiano le dimensioni di tali rettangoli?



ACADEMIE DE STRASBOURG

Mathématiques sans frontières

March 2003

- Explanations are needed for all the questions except 4, 6 and 8.
- An attempt at an answer will get some marks.
- Careful working is taken into account.
- Each class should put in only one answer sheet per question

Question 1
7 marks

Coffee break

Answer this question in French, German, Spanish or Italian in a minimum of 30 words.

Quatre étudiants souhaitent chacun prendre un café pendant leur pause et n'ont que très peu de monnaie. Un café coûte 35 centimes d'euros. La machine à café n'a plus de monnaie, les responsables viennent de la vider.

Albert a une pièce de 1 euro et une de 5 centimes.

Bernard a une pièce de 50 centimes et une de 5 centimes.

Claudia a une pièce de 20 centimes et deux de 10 centimes.

Danièle a deux pièces de 20 centimes.

Chacun veut son café et sa monnaie. La machine ne sert qu'une personne à la fois et ne rend la monnaie que quand elle en a.

Comment vont-ils s'arranger ?

Vier Studenten haben Kaffeedurst, aber leider zu wenig Kleingeld. Ein Kaffee kostet 35 Cent. Der Kaffeeautomat kann im Moment kein Wechselgeld zurückgeben, weil er eben erst geleert wurde.

Albert hat eine 1-Euro-Münze und ein 5-Cent-Stück.

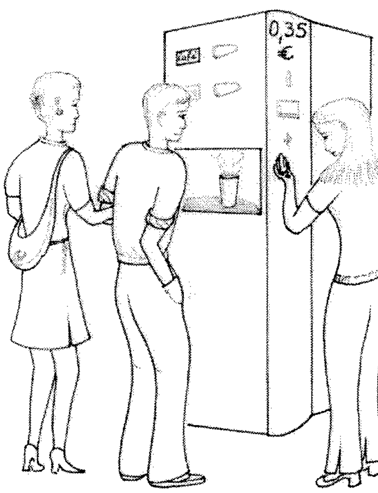
Bernhard hat eine 50-Cent- und eine 5-Cent-Münze.

Claudia hat eine Münze zu 20 Cent und zwei zu 10 Cent.

Daniela hat zwei 20-Cent-Münzen.

Jeder möchte seinen Kaffee und sein Wechselgeld. Der Automat kann nur eine Person auf einmal bedienen und kann nur Wechselgeld herausgeben, wenn er welches hat.

Wie gehen sie vor ?



Cuatro estudiantes desean cada uno tomar un café durante el recreo y sólo tienen poca moneda. Un café cuesta 35 centimos de euros. La maquina de café ya no tiene cambio. Los responsables vienen para vaciarla.

Alberto tiene una moneda de 1 euro y una de 5 centimos.

Bernardo tiene una moneda de 50 centimos y una de 5 centimos.

Claudia tiene una moneda de 20 centimos y dos de 10 centimos.

Daniela tiene dos monedas de 20 centimos.

Cada uno quiere su café y la vuelta de su moneda. La maquina sólo sirve a una persona a la vez y sólo vuelve monedas cuando las tiene.

¿ Como se las van a arreglar ?

Quattro studenti desiderano bere un caffè durante l'intervallo delle lezioni e possiedono solo della moneta. Un caffè costa 35 centesimi di euro. La macchinetta non ha più moneta dato che i manutentori l'hanno appena svuotata.

Alberto ha una moneta da 1 euro e una da 5 centesimi.

Bernardo ha una moneta da 50 centesimi ed una da 5 centesimi.

Claudia ha una moneta da 20 centesimi e due da 10 centesimi.

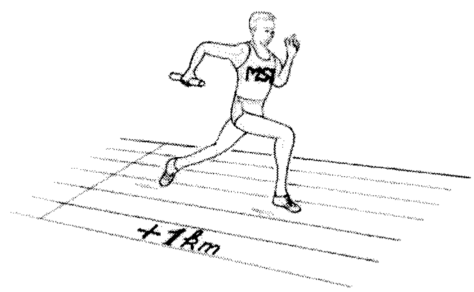
Daniela ha due monete da 20 centesimi.

Ognuno desidera il suo caffè e vuole il suo resto. La macchinetta serve una sola persona per volta e fornisce il resto quando ha moneta.

Come possono organizzarsi ?

Question 2
5 marks

Really !

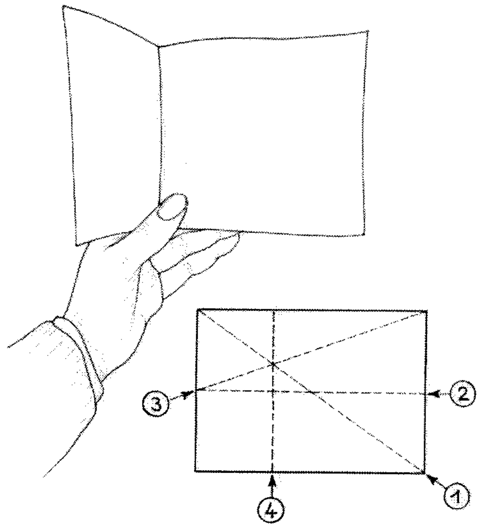


A relay race of 40 km is organised so that each member of the team runs a whole number of kilometres. As well as that, when a runner is given the baton he has to run 1 kilometre further than the team member who gave it to him.

Find the distance run by each member of the relay team.

Question 3 7 marks — In thirds

Here is a method that allows you to find the third of the length of a rectangular piece of paper. The method involves folding the paper and nothing else.

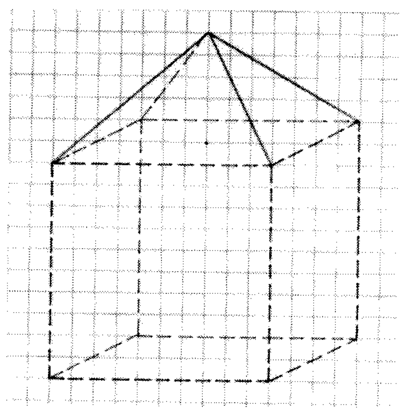


Fold the paper successively along the diagonal 1, then the median 2. The third and fourth folds are as shown in the figure. Fold number 4 divides the length in ratio 1 :2 so you have found a third of the length.

Explain why this method works.

Question 4 5 marks — Rhombic

The diagram shows a regular square-based pyramid on top of a cube. The pyramid's height is half the length of the edge of the cube.

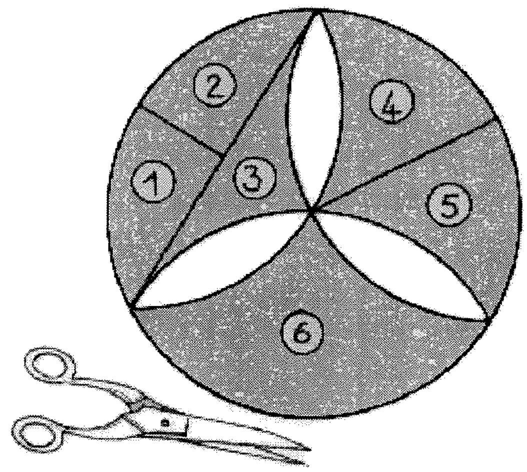


If you construct such a pyramid on each of the 6 faces of the cube you notice that the faces of these pyramids link up and you have two faces in the same plane forming a rhombus. These 12 rhombuses are the faces of the solid known as the rhombic dodecahedron. Its 14 vertices are the 8 vertices of the cube and the 6 vertices of the pyramids.

Draw a perspective diagram of the rhombic dodecahedron formed when you start with the cube given below. Colour the visible faces of your dodecahedron.

Question 5 7 marks — Not π

The diagram shows a rose based on the regular hexagon. To calculate the shaded area you can cut it into 6 pieces as shown.
With the 6 pieces you can make a rectangle.



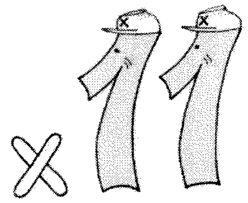
Make the puzzle using a circle of radius 6 cm.
Stick your rectangle onto your answer sheet.
Calculate the shaded area.

Question 6 5 marks — 11 times

A whole number is a multiple of 11 if (and only if) the algebraic sum of its digits, alternately positive and negative, is a multiple of 11. (It can be negative or zero)

For example

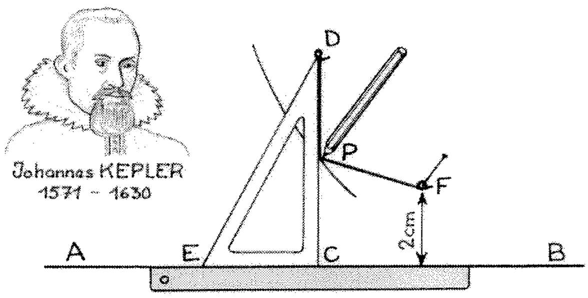
- 1958 is a multiple of 11 because
  $1-9+5-8=-11$
- 2002 is a multiple of 11 because $2-0+0-2=0$
- 94919 is a multiple of 11 because
  $9-4+9-1+9=22$
- but 1989 is not a multiple of 11 because
  $1-9+8-9=-9$.



Find the biggest multiple of 11 that has 10 different digits.

Question 7 — 7 marks
Losing the thread

The famous German astronomer Johannes Kepler discovered a method of drawing a parabola using a ruler, a set square, a thread, a needle and a pencil.
You place the ruler along the straight line AB and stick the pin at F. The length of the thread is the same as the side CD of the set square. You fix one end of the thread at D and the other at F. The point of the pencil keeps the thread stretched out tightly along the side CD set square as shown.

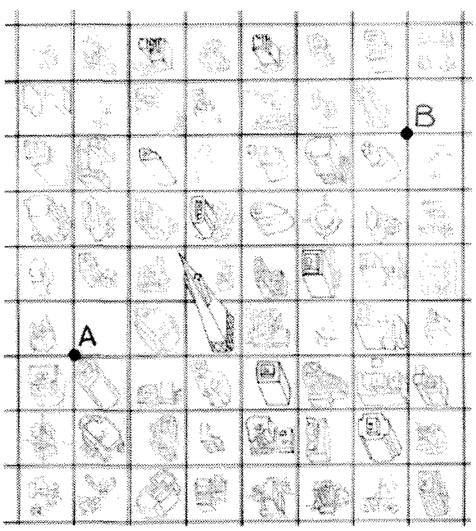


If you slide the side EC of the set square along the line AB, the point P then traces out a parabola.

Show that PF = PC
Draw a parabola by this method by marking enough points. Take CD = 14 cm and the point F 2 cm from AB.

Question 8 — 5 marks
Police chase

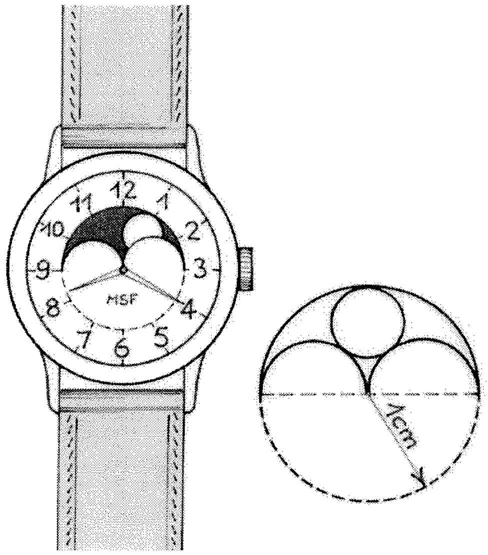
In some cities, like New York or Mannheim, the streets are laid out in a rectangular grid.
Jules and Jim are in charge of two police stations in a town like that. Their stations are marked A and B on the diagram.



Draw the grid on your answer sheet. Show in colour the points where the shortest distance in a car to reach Jules's police station is the same as the distance to Jim's.

Question 9 — 7 marks
Moon walk

A watch shows the phases of the moon in the following way :



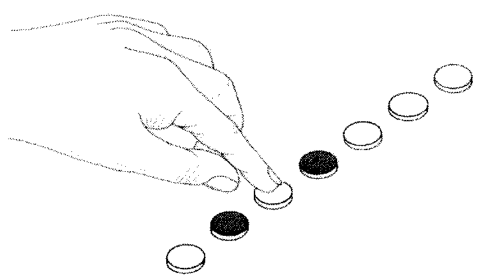
The moon is represented by a white circle which is drawn on a dark circular background which turns in the same way as the hands. The dark background can be seen in the space bounded by the three semi-circles as shown.
The circle representing the moon has the biggest diameter which still allows it to be seen as a whole in the space bounded by the semi-circles.

Calculate its diameter given that the radius of the big semi-circle is 1 cm

Question 10 — 10 marks
Black and white

To play this game, you set out tokens which have one white face and one black face. At the start all the white faces are showing.
The aim of the game is to have all the black sides showing. The rule is

You touch a token with your thumb and you then turn over its 1 or 2 neighbouring tokens. You keep doing this as often as needed.

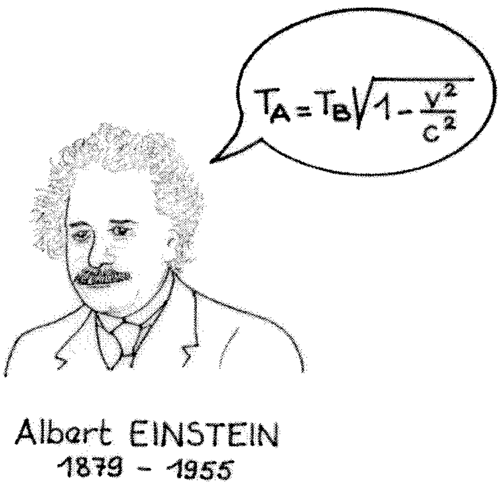


Draw a line for 2 tokens, 3 tokens ... etc ... up to 15 tokens. For each line where there is a way of doing it, mark the tokens which are touched with a cross. If there is no solution say so.

Senior classes only

Question 11
5 marks

Travel keeps you young



Albert Einstein found that time does not have an absolute value and that it isn't the same for someone travelling at a really high speed compared to his friend who stays stationary.
If Albert travels in space at speed v and if Bernard is stationary, then Bernard measures a time Tb for the journey while Albert measures a different time Ta.

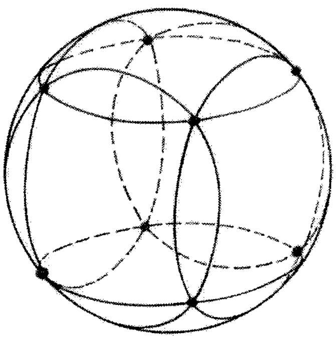
According to Einstein the relationship is $T_A = T_B\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ where **c** is the speed of light, approximately 300,000 km/s.
Albert leaves for his journey into space at the age of 40, while his son Bernard is aged 20. When Albert comes back they are both 60 years old.

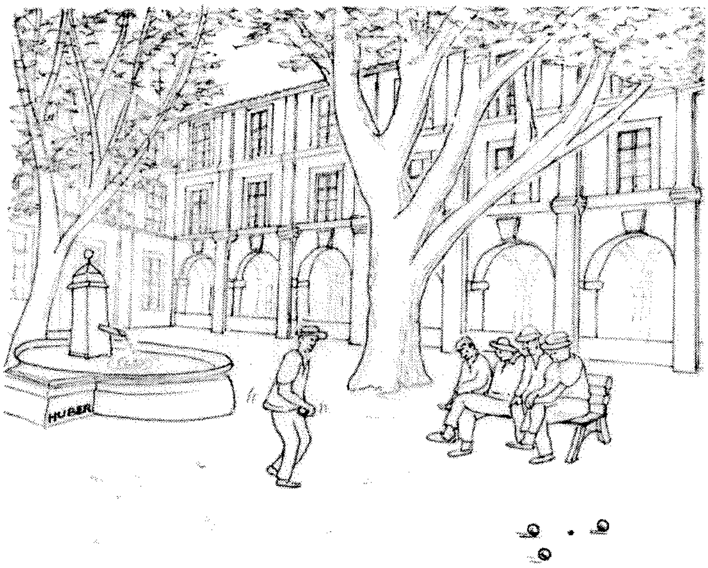
What speed did Albert travel at ? Give your answer in km/s.

Question 12
7 marks

Game of Bowls

On a petanque ball of radius 37 mm you can draw 6 circles as shown. The 8 points of intersection are the vertices of a cube.





Work out the radius of these circles.

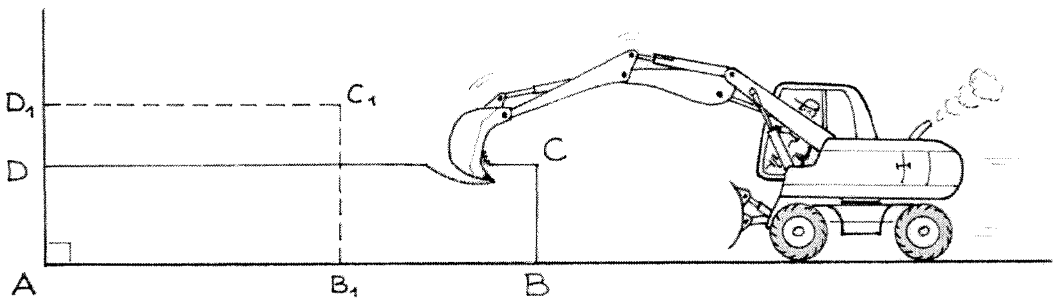
Question 13
10 marks

Here are the instructions for a geometrical construction :

- Draw a rectangle ABCD with sides AB = 9 cm and AD = 3 cm.
- Mark B1 on AB so that the length of AB1 is the average of the lengths of AB and AD.
- Draw the rectangle A1B1C1D1 so that it has the same area as ABCD.

Repeat these instructions with the rectangle A1B1C1D1 to obtain the rectangle A2B2C2D2 which still has the same area as ABCD. The process continues like that.

Draw the first 4 rectangles on your answer sheet.
How do the dimensions of the rectangles change as the process continues ?



2003. MÁRCIUS 12.

MATEMATIKA HATÁROK NÉLKÜL

MATHÉMATIQUES SANS FRONTIÈRES

A VERSENYT MAGYARORSZÁGON
A MATEMATIKAHATÁROK NÉLKÜL ALAPÍTVÁNY RENDEZI

Támogatóink :

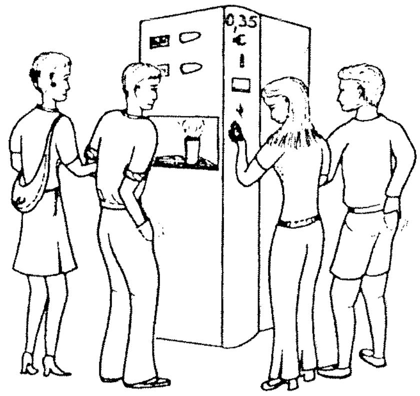
Budapest Főváros Önkormányzata
Safaripark Gänserndorf
OTP RT.
Berzsenyi Dániel Gimnázium
Lichtbogen BT.
Nemzeti Tankönyvkiadó RT.
Magyar Követeléskezelő RT.

Gänserndorf SAFARIPARK

1. feladat :

PAUSE CAFÉ

A megoldást franciául, spanyolul, angolul, németül vagy olaszul adjátok meg legalább 30 szóban ! - 7 pont



Quatre étudiants souhaitent chacun prendre un café pendant leur pause et n'ont que très peu de monnaie. Un café coute 35 centimes d'euros.
La machine à café n'a plus de monnaie, les responsables viennent de la vider.
Albert a une pièce de 1 euro et une de 5 centimes.
Bernard a une pièce de 50 centimes et une de 5 centimes.
Claudia a une pièce de 20 centimes et deux de 10 centimes.
Danièle a deux pièces de 20 centimes.
Chacun veut son café et sa monnaie. La machine ne sert qu'une personne à la fois et ne rend la monnaie que quand elle en a.

Comment vont-ils s'arranger ?

Cuatro estudiantes desean cada uno tomar un café durante el recreo y sólo tienen poca moneda. Un café cuesta 35 centimos de euros.
La maquina de café ya no tiene cambio. Los responsables vienen para vaciarla.
Alberto tiene una moneda de 1 euro y una de 5 centimos.
Bernardo tiene una moneda de 50 centimos y una de 5 centimos.
Claudia tiene una moneda de 20 centimos y dos de 10 centimos.
Daniela tiene dos monedas de 20 centimos.
Cada uno quiere su café y la vuelta de su moneda.
La maquina sólo sirve a una persona a la vez y sólo vuelve monedas cuando las tiene.

¿ Como se las van a arreglar ?

Four students wish to have a cup of coffee during their break and have very little change.
A cup costs 35 euro cents. The machine has no change left, the people in charge have just come to empty it.
Albert has a 1 euro coin and a 5 cents coin.
Bernard has a 50 cents coin and a 5 cents coin.
Claudia has a 20 cents coin and two 10 cents coins.
Daniela has two 20 cents coins.
Each of them wants his coffee and his change.
The machine serves one person at a time and gives back change only when it has some.

How are they going to manage ?

Vier Studenten haben Kaffeedurst, aber leider zu wenig Kleingeld. Ein Kaffee kostet 35 Cent.
Der Kaffeeautomat kann im Moment kein Wechselgeld zurückgeben, weil er eben erst geleert wurde.
Albert hat eine 1-Euro-Münze und ein 5-Cent-Stück.
Bernhard hat eine 50-Cent- und eine 5-Cent-Münze.
Claudia hat eine Münze zu 20 Cent und zwei zu 10 Cent.
Daniela hat zwei 20-Cent-Münzen.
Jeder möchte seinen Kaffee und seinWechselgeld.
Der Automat kann nur eine Person auf einmal bedienen und kann nur Wechselgeld herausgeben, wenn er welches hat.

Wie gehen sie vor ?

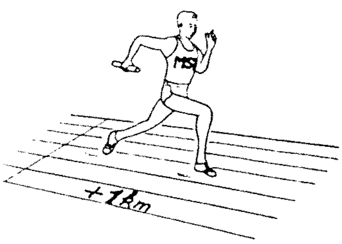
Quatro studenti desiderano bere un caffè durante l'intervallo delle lezioni e possiedono solo della moneta.
Un caffè costa 35 centesimi di euro.
La macchinetta non ha più moneta dato che i manutentori l'hanno appena svuotata.
Alberto ha una moneta da 1 euro e una da 5 centesimi.
Bernardo ha una moneta da 50 centesimi ed una da 5 centesimi.
Claudia ha una moneta da 20 centesimi e due da 10 centesimi.
Daniela ha due monete da 20 centesimi.
Ognuno desidera il suo caffè e vuole il suo resto.
La macchinetta serve una sola persona per volta e fornisce il resto quando ha moneta.

Come possono organizzarsi ?

2. feladat :

KÉREM A KÖVETKEZŐT !

- 5 pont

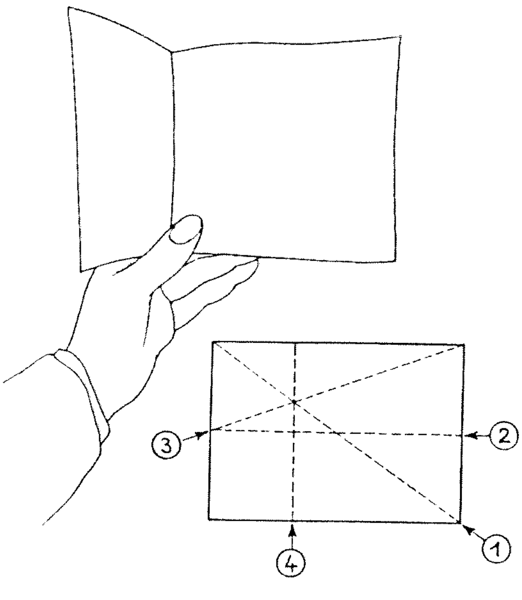


Egy 40 km-es stafétafutás során minden versenyző egész számú km-t tesz meg. Mindenki 1 km-rel többet fut annál, akitől a stafétabotot átveszi. Hány km-t tesz meg egy-egy futó ?

3. feladat :

HAJTÁS !

- 7 pont



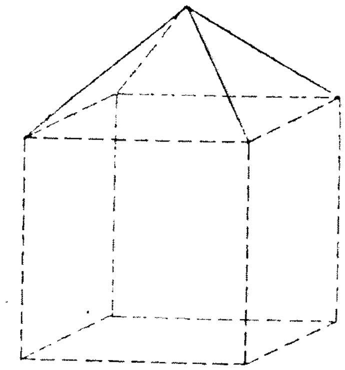
A következő módszer segítségével csak hajtogatással egy téglalap hosszabbik oldalát harmadolni tudjuk : hajtsuk be a lapot egymás után először az 1-es átló, majd a 2-es középvonal, utána az ábrán jelzett 3-as és végül a 4-es vonal mentén. Igazold, hogy a 4-es vonal az oldalt annak harmadoló pontjában metszi !

4. feladat :

TESTÉPÍTÉS

- 5 pont

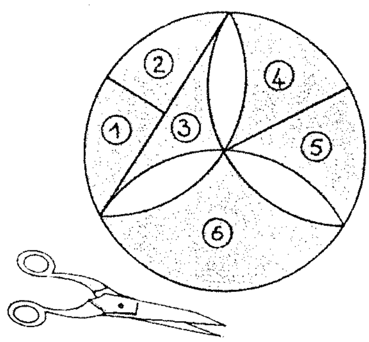
Az ábrán egy kocka és rajta egy olyan négyoldalú szabályos gúla látható, amelynek magassága a kocka élének felével egyenlő. Illesszünk a kocka minden lapjára ilyen módon egy-egy gúlát. Az így kapott testet rombdodekaédernek nevezzük. Másoljátok le az ábrát a válaszlapra és egészítsétek ki a hiányzó gúlákkal ! Húzzátok ki különböző színessel a kapott test látható éleit !



5. feladat :

EZ NEM SEMMI... SE π ...

- 7 pont

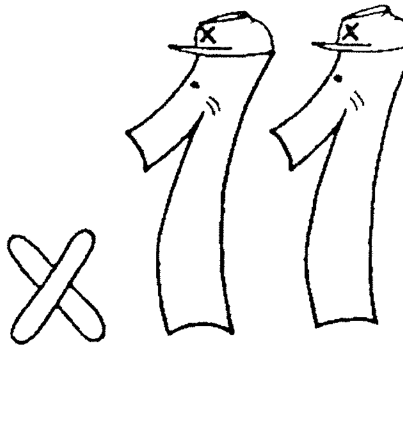


Az ábrán látható „rózsaablak"-ot egy szabályos hatszögből kiindulva szerkeszthetjük meg. A szürkére satírozott rész területét kiszámíthatjuk, ha a rajzon látható módon szétvágjuk, majd a hat darabból téglalapot rakunk össze. Készítsétek el a „puzzle"-t egy 6 cm sugarú körből kiindulva ! Ragasszátok fel a válaszlapra a téglalapot ! Számítsátok ki a szürke rész területét !

6. feladat :

11 A NYERŐ !

- 5 pont



Egy egész szám akkor és csak akkor osztható 11-gyel, ha a számjegyeit váltakozó előjellel összeadva a kapott összeg maga is osztható 11-gyel.
Például :
·1958 osztható 11-gyel, hiszen 1-9+5-8= -11
·2002 osztható 11-gyel, hiszen 2-0+0-2= 0
·94 919 osztható 11-gyel, hiszen 9-4+9-1+9=22
·de 1989 nem osztható 11-gyel, hiszen 1-9+8-9=9
Keressétek meg 11-nek azt a legnagyobb tízjegyű többszörösét, amelynek a számjegyei mind különbözőek!

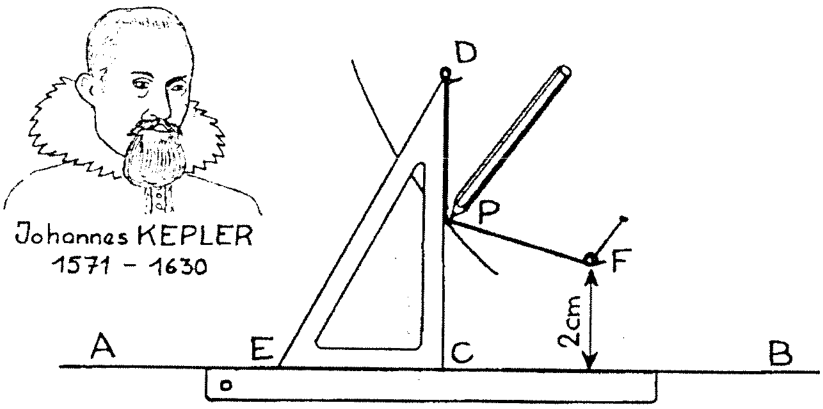
A VERSENYT MAGYARORSZÁGON A MATEMATIKA HATÁROK NÉLKÜL ALAPÍTVÁNY RENDEZI.

7. feladat :

MIRE JÓ A SPÁRGA !

- 5 pont

A híres német csillagász Johannes Kepler egy szerkesztési módszert publikált, amelynek alapján egyenes és derékszögű vonalzó, spárga, gombostű és ceruza segítségével parabolát rajzolt meg.
Letesszük az egyenes vonalzót az AB egyenesre, majd az F pontba beszúrjuk a gombostűt. A spárga hossza egyezzen meg a derékszögű vonalzó CD élének hosszával, s a két végpontját rögzítsük F-ben és D-ben. A ceruza hegyét – P pont - úgy helyezzük el a derékszögű vonalzó CD éle mentén, hogy eközben a spárga feszüljön.
Ha a derékszögű vonalzó EC élét csúsztatjuk az AB egyenesen, a P pont egy parabola mentén fog mozogni.
Igazoljátok, hogy a PF és PC szakaszok egyenlők !
Rajzoljátok meg pontonként a parabola egy darabját úgy, hogy CD=14 cm és F pont 2 cm távolságra van az AB egyenestől !

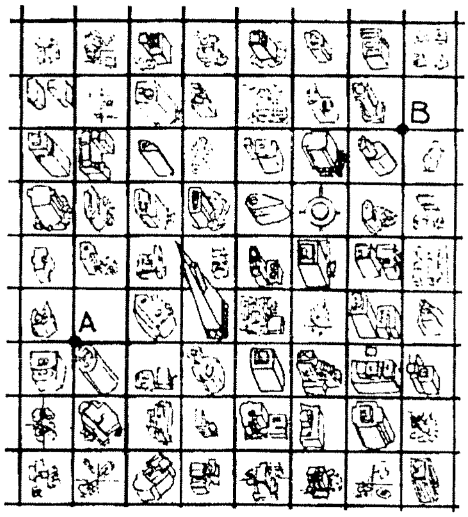


8. feladat :

POLICE GEOMETRY

- 7 pont

Néhány városban, mint például New Yorkban vagy Mannheimben, az utcák szabályos négyzetrácsot alkotnak. Jules és Jim valamelyik ilyen városban egy-egy rendőrörs parancsnoka. Az ábrán A és B pont jelöli az örs épületét. Rajzoljátok le a négyzethálót ! Jelöljétek be színessel azokat a pontokat, amelyekből autóval a legrövidebb úton haladva Jules és Jim rendőrörse egyenlő távolságra van !

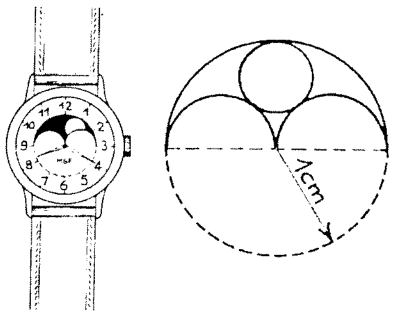


9. feladat :

HOLDÓRA

- 7 pont

Egy bizonyosfajta karóra az alábbi módon képes mutatni a Holdfázisokat.
A Holdat egy korong szemlélteti, amelyet a számlap alatt elhelyezett fekete fémlapra festettek, s ugyanazon tengely körül forog, mint a mutatók. Három félkör határolja azt a rést, amelyen keresztül láthatjuk a fekete lemezt a Holddal.
Mekkora a Holdat jelképező korong átmérője, ha a legnagyobb félkör sugara 1 cm ?

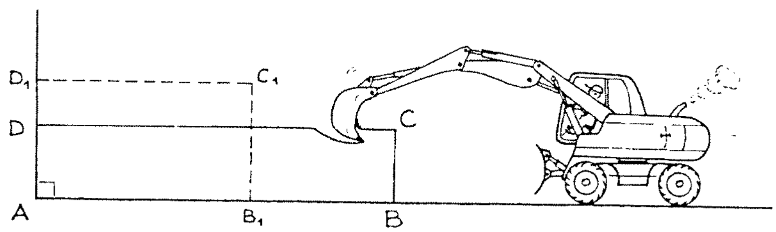


10. feladat :

QUO VADIS ?

- 7 pont

Íme egy szerkesztési program:
· Szerkesszetek egy ABCD téglalapot AB= 9 cm és AD= 3 cm oldalakkal !
· Jelöljétek be az AB szakaszon a B_1 pontot úgy, hogy az AB_1 szakasz hossza az AB és AD szakaszok hosszának számtani közepe legyen !
· Rajzoljátok meg az $AB_1C_1D_1$ téglalapot úgy, hogy területe egyenlő legyen az ABCD téglalap területével !
· Ismételjétek meg ezt az eljárást az $AB_1C_1D_1$ téglalapból kiindulva, így $AB_2C_2D_2$ téglalapot kapjuk még mindig ugyanakkora területtel, stb.
Hogyan változnak a téglalapok méretei ?
Rajzoljátok le a sorozatból az első 4 téglalapot !



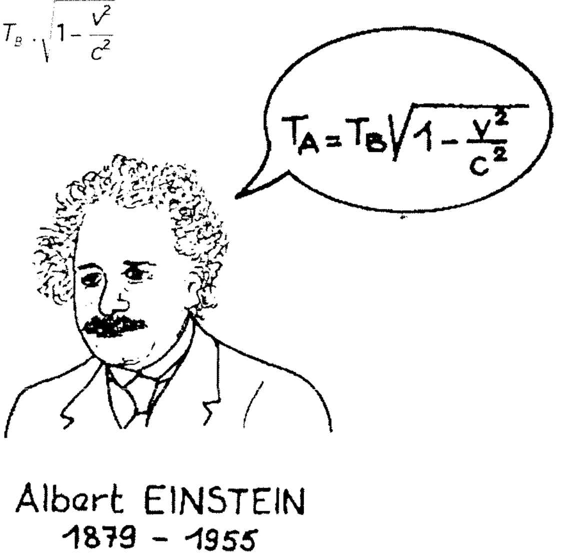
11. feladat :

AZ UTAZÁS FIATALÍT ...

- 5 pont

Albert Einstein rájött arra, hogy az idő nem abszolút mennyiség, nem ugyanúgy telik a nagyon nagy sebességgel utazó számára, mint a helyben maradó barátja számára.
Ha Albert egy **v** sebességgel utazik a világűrben és eközben Bernard helyben marad, Bernard az utazás időtartamát T_B-nek méri,mialatt Albert számára ugyanez az utazás T_A ideig tart.
Einstein elmélete szerint a következő összefüggés érvényes:

$$T_A = T_B \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$



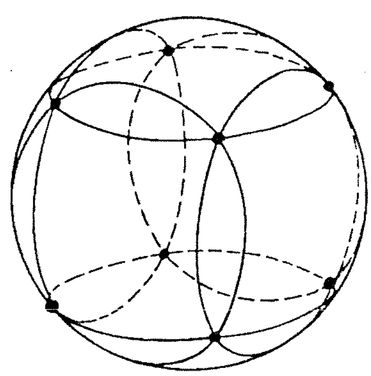
ahol c a fény sebességét jelöli, amely kb. 300 000 km/s-mal egyenlő.
Albert elutazásakor 40 éves, fia Bernard ekkor 20 éves.
A visszatéréskor mindketten 60 évesek.
Milyen **v** sebességgel utazott Albert ?
A választ km/s-ban adjátok meg !

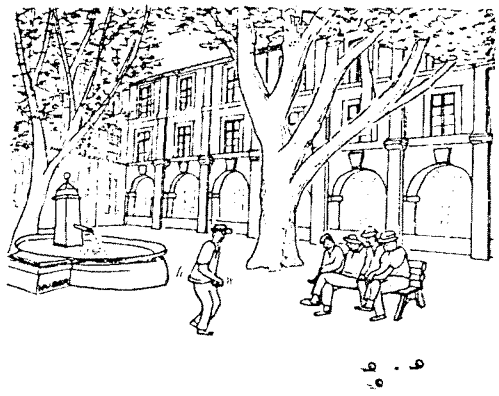
12. feladat :

EGY PARTI BOULE

- 7 pont

A boule Dél-Franciaország közkedvelt játéka, amelyet 37 mm sugarú golyókkal játszanak.
Mindegyik felületére 6 kört karcoltak az ábrán látható módon.
A bejelölt metszéspontok egy kocka csúcsaival esnek egybe.
Számítsátok ki a körök sugarát !



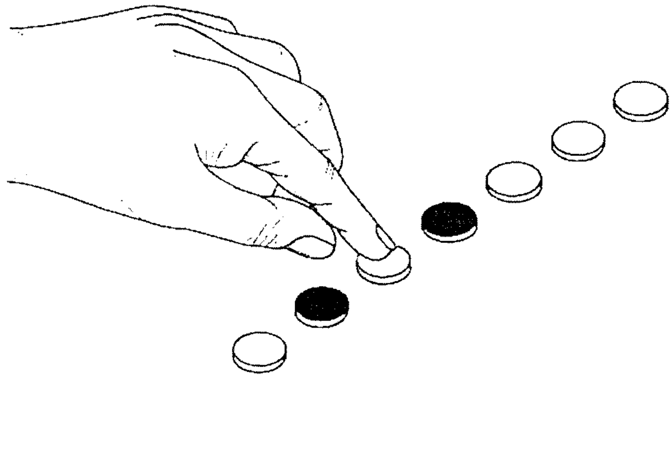


13. feladat :

FEKETE-FEHÉR BLOKÁD

- 10 pont

A játékot egy sorban elhelyezett korongokkal játsszák, amelyek egyik oldala fekete, a másik fehér. Induláskor minden korongot a fehér oldalával fölfelé helyezzük el.
A játék célja az, hogy minden korong a fekete oldalával felülre kerüljön. A játékszabály a következő :
egy lépés : kiválasztjuk az egyik korongot, egyik ujjunkkal „blokkoljuk", majd ennek mindkét szomszédját megfordítjuk.
(Ha csak egy szomszédja van, akkor azt fordítjuk meg.)
Ezt a lépést annyiszor ismételjük meg, ahányszor szükséges.
Rajzoljátok le a játékot 2, 3, ..., 15 kezdő koronggal.
Mindegyik esetben, amennyiben van „megoldása" a játéknak, jelöljétek kereszttel a blokkolt korongokat a blokkolás sorrendjében. Amelyik esetben nincs megoldás, ott ezt jelezzétek!
Van-e megoldás, ha 2003 koronggal játszunk ?
Indokoljátok a választ !



Międzynarodowy Konkurs Matematyczny

Matematyka bez granic

ACADEMIE DE STRASBOURG

13 marca 2003

- *W rozwiązaniach zadań 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12 i 13 konieczne jest uzasadnienie.*
- *Częściowe rozwiązania zadań też będą uwzględniane w punktacji*
- *Oceniana będzie również strona graficzna przedstawionych rozwiązań.*
- *Rozwiązanie każdego zadania będzie prezentowane na oddzielnej kartce.*
- *Do każdego zadania, (także do zadań, które nie zostały rozwiązane), należy oddać osobny arkusz z kodem szkoły i klasy.*

Zadanie 1
7 punktów

Przerwa na kawę

Rozwiązanie musi być napisane w jednym z czterech języków obcych i zawierać przynajmniej 30 słów.

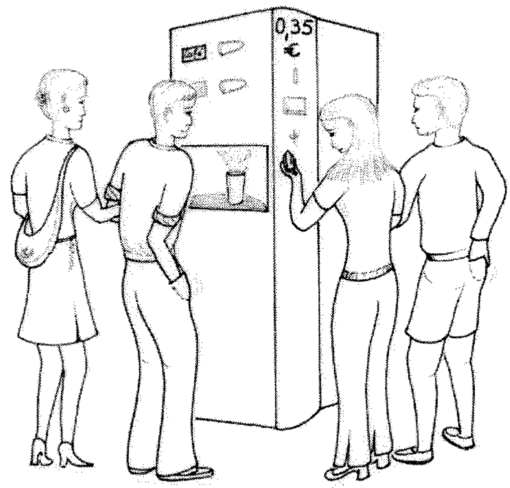
Czworo studentów chce napić się kawy. Jedna kawa kosztuje 35 cents. Automat wydaje resztę, ale właśnie został opróżniony i nie ma żadnych monet.
Albert ma jedną monetę 1 euro i jedną 5 cents.

Bernard ma jedną monetę 50 cents i jedną 5 cents.

Claudia ma jedną monetę 20 cents i dwie monety po 10 cents.

Daniele ma dwie monety po 20 cents.

Jak powinni postąpić aby każdy dostał kawę i swoją resztę?



Quatre étudiants souhaitent chacun prendre un café pendant leur pause et n'ont que très peu de monnaie.
Un café coûte 35 centimes d'euros. La machine à café n'a plus de monnaie, les responsables viennent de la vider.

Albert a une pièce de 1 euro et une de 5 centimes.

Bernard a une pièce de 50 centimes et une de 5 centimes.

Claudia a une pièce de 20 centimes et deux de 10 centimes.

Danièle a deux pièces de 20 centimes.

Chacun veut son café et sa monnaie. La machine ne sert qu'une personne à la fois et ne rend la monnaie que quand elle en a.

Comment vont-ils s'arranger ?

Four students wish to have a cup of coffee during their break and have very little change. A cup costs 35 euro cents. The machine has no change left, the people in charge have just come to empty it.
Albert has a 1 euro coin and a 5 cents coin.

Bernard has a 50 cents coin and a 5 cents coin.

Claudia has a 20 cents coin and two 10 cents coins.

Daniela has two 20 cents coins.

Each of them wants his coffee and his change. The machine serves one person at a time and gives back change only when it has some.

How are they going to manage ?

Vier Studenten haben Kaffeedurst, aber leider zu wenig Kleingeld. Ein Kaffee kostet 35 Cent. Der Kaffeeautomat kann im Moment kein Wechselgeld zurückgeben, weil er eben erst geleert wurde.

Albert hat eine 1-Euro-Münze und ein 5-Cent-Stück.

Bernhard hat eine 50-Cent- und eine 5-Cent-Münze.

Claudia hat eine Münze zu 20 Cent und zwei zu 10 Cent.

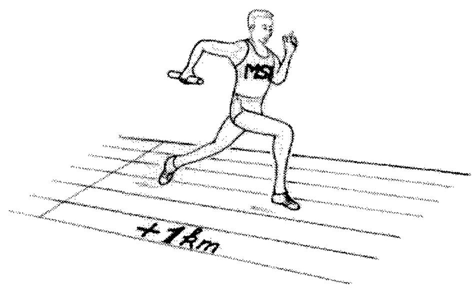
Daniela hat zwei 20-Cent-Münzen.

Jeder möchte seinen Kaffee und sein Wechselgeld. Der Automat kann nur eine Person auf einmal bedienen und kann nur Wechselgeld herausgeben, wenn er welches hat.

Wie gehen sie vor ?

Zadanie 2
5 punktów

Następny proszę !



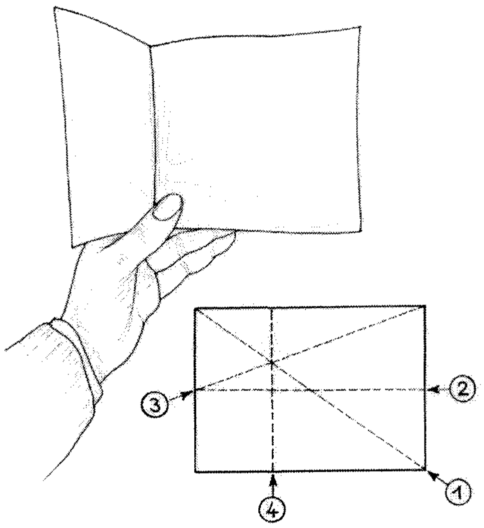
Podczas biegu sztafetowego zawodnicy pokonują odcinek długości 40 km.
Każdy biegacz musi przebiec 1 km dalej niż jego poprzednik.

Podaj dla każdego członka drużyny sztafetowej, jaki odcinek musi przebiec.

Zadanie 3 7 punktów

Dzielenie na trzy części

Rysunek przedstawia proces dzielenia dłuższego boku prostokątnej kartki na trzy równe części przez jej zginanie.



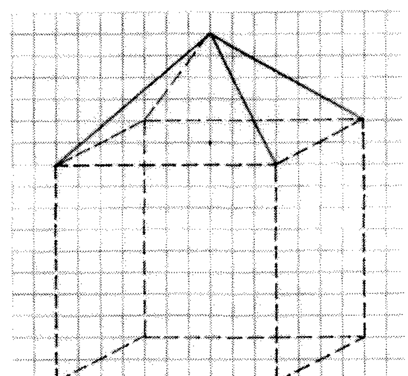
Zagnij kartkę wzdłuż przekątnej (1), a następnie wzdłuż osi (2), a potem wzdłuż linii (3) oraz (4) zgodnie z rysunkiem. Zaznacz linię zagięcia (4) i jedną trzecią długości kartki.

Uzasadnij, że linia (4) wyznacza jedną trzecią długości kartki.

Zadanie 4 5 punktów

Dwunastościan rombowy

Narysowana figura przedstawia sześcian z foremną piramidą wykonaną na jednej ze ścian. Wysokość tej piramidy jest równa połowie długości krawędzi sześcianu.



Wykonując na każdej z sześciu ścian sześcianu taką piramidę można zauważyć, że dwie ściany boczne piramid leżą na jednej płaszczyźnie i tworzą romb. Tych 12 rombów to ściany boczne bryły, która zwana jest rombowym dwunastościanem. 14 kątów bryły jest utworzonych przez 8 kątów sześcianu i 6 wierzchołków piramid.

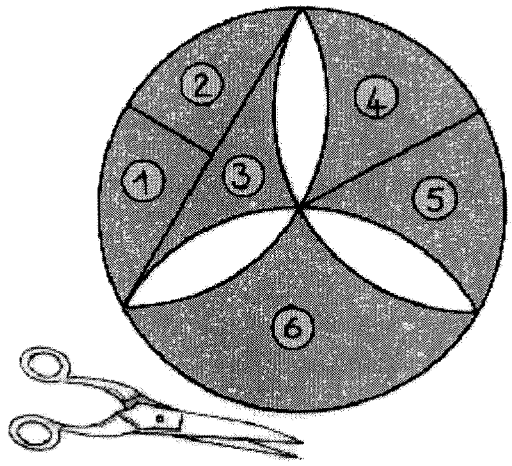
Narysuj na karcie odpowiedzi dwunastościan rombowy. Zacznij od rysunku takiego jak obok. Zaznacz na kolorowo widoczne ściany boczne.

Zadanie 5 7 punktów

Bez π

Korzystając z konstrukcji sześciokąta foremnego w kole wykonano figurę widoczną na obrazku.

Aby obliczyć pole zaznaczonej na szaro powierzchni, można ją przeciąć na 6 części, tak jak pokazano na rysunku. Następnie z wyciętych kawałków ułożyć prostokąt bez żadnych przerw między poszczególnymi częściami.



Zrób takie puzzle z koła o promieniu r=6 cm. Połącz części w prostokąt i naklej na kartę odpowiedzi. Oblicz dokładnie pole tej figury.

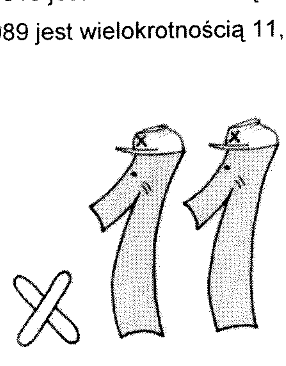
Zadanie 6 5 punktów

11 wygrywa

Liczba jest podzielna przez 11 bez reszty, gdy odejmując i dodając na przemian jejcyfry otrzymamy wielokrotność 11 lub 0.

Przykład :

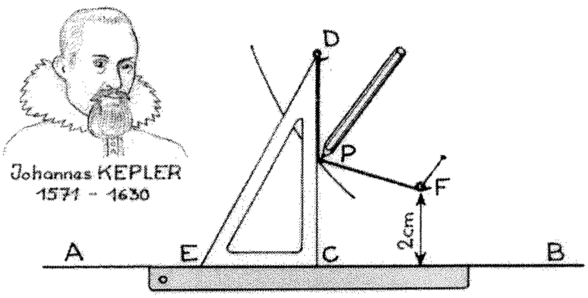
- 1958 jest wielokrotnością 11, bo 1-9+5-8=-11
- 2002 jest wielokrotnością 11, bo 2-0+0-2=0
- 94919 jest wielokrotnością 11, bo 9-4+9-1+9=22
- 1989 jest wielokrotnością 11, bo 1-9+8-9=-9



Znajdź największą wielokrotność 11, która składa się z 10 różnych cyfr.

Zadanie 7 – 7 punktów
Z ołówkiem i nitką

Niemiecki astronom Jan Kepler podał metodę rysowania paraboli przy pomocy ekierki, igły, nitki i ołówka.
Kładzie się linijkę wzdłuż prostej AB, a jeden koniec nitki przymocowuje się igłą w punkcie F. Drugi koniec nitki mocujemy w punkcie D ekierki. Długość nitki jest równa długości boku CD ekierki. Wierzchołkiem P ołówka napina się tak nitkę, że przylega ona do boku CD ekierki na odcinku DP. Gdy przesuwa się ekierkę wzdłuż prostej AB, to koniec ołówka P porusza się po paraboli.

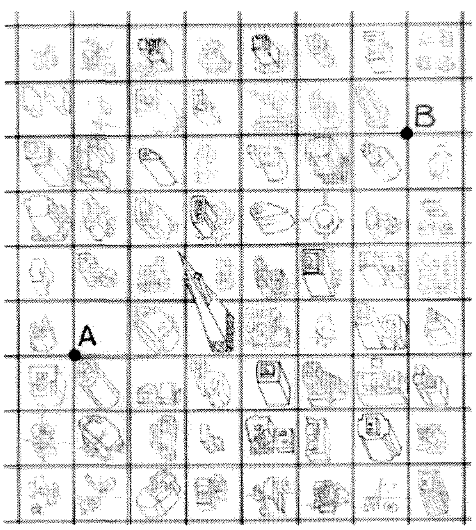


Pokaż najpierw, że PF=PC.

Narysuj taką parabolę przyjmując, że odcinek CD ma długość 14 cm, a punkt F jest oddalony od prostej AB o 2 cm.

Zadanie 7 – 7 punktów
Geometria policji

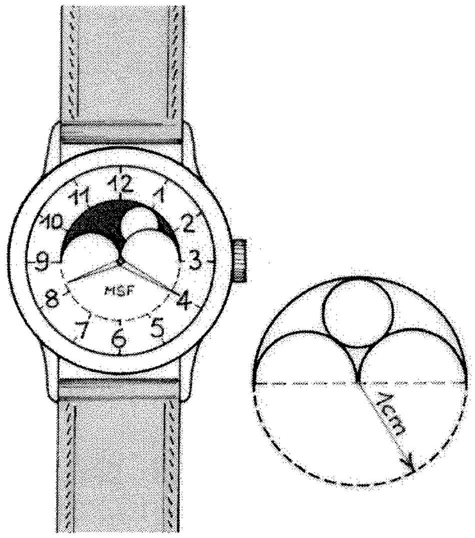
W niektórych miastach, na przykład w Nowym Jorku lub Mannheim, tak się buduje ulice, żeby tworzyły kwadratową sieć.
Jules i Jim są szefami dwóch posterunków policji w takim mieście. Na rysunku są te posterunki oznaczone literami A i B.



Narysuj taką kwadratowa sieć na karcie odpowiedzi. Zaznacz na ulicach na kolorowo takie miejsca, z których jest tak samo daleko do obu posterunków.

Zadanie 9 – 7 punktów
Zegar księżycowy

Narysowany zegar pokazuje przybliżone fazy księżyca.



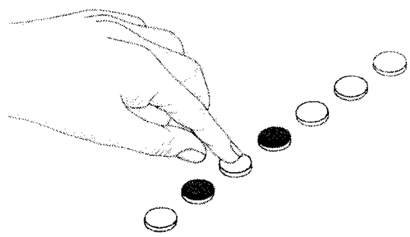
Księżyc znajduje się na ciemnym tle okrągłej tarczy, której oś obrotu zgadza się z osią obrotu wskazówek. Pokazuje się on w okienku zegarka, które jest ograniczone przez 3 półkola. Przy pełni księżyca można go zobaczyć w całości w okienku.

Oblicz średnicę księżyca, gdy promień dużego półkola wynosi 1 cm, a księżyc można zobaczyć w całości.

Zadanie 10 – 10 punktów
Biało-Czarne

W czasie gry używa się żetonów, które są z jednej strony czarne, a z drugiej białe. Układa się je w rzędzie białymi stronami do góry. Celem gry jest odwrócenie żetonów czarną stroną do góry. W grze obowiązują następujące zasady :

- blokuje się palcem żeton i obraca na drugą stronę żetony leżące bezpośrednio obok zablokowanego,
- w zalezności od tego, który żeton blokujemy odwracamy jeden lub dwa sąsiednie,
- blokując żetony można poruszać się tylko w jednym kierunku.



Narysuj rząd 2 żetonów, potem 3 itd. Aż do 15 żetonów do gry.
Zaznacz w każdym rzędzie krzyżykami kolejno blokowane żetony (od lewej do prawej). Jeżeli dla pewnej ilości żetonów nie istnieje rozwiązanie, to napisz „brak rozwiązania”.
Sprawdź czy istnieje rozwiązanie dla 2003 żetonów. Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 11
5punktów

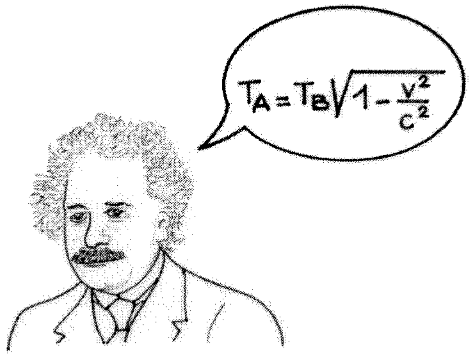
Podróż czyni młodym

Jak Albert Einstein stwierdził czas nie jest absolutną wielkością. Co więcej przebiega on dla podróżującego, który porusza się z bardzo dużą szybkością (porównywalną z szybkością światła w próżni) inaczej niż dla podróżnika, który porusza się z małą predkością.
Kiedy Albert porusza się z pewną prędkością względem Bernarda, wtedy mierzą obydwaj różny czas trwania podróży. Albert wymierzy dla dla swojej podróży czas T_A, a Bernard czas T_B wtedy wynika według Einsteina związek :

$T_A = T_B \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, przy czym c jest prędkością światła ($\approx$ 300000 km/s).

Gdy Albert rozpoczyna podróż ma 40 lat, a bernard 20 lat. Gdy Albert powraca mają obydwaj 60 lat.

Z jaką prędkością porusza się Albert? Podaj odpowiedź w km/s.

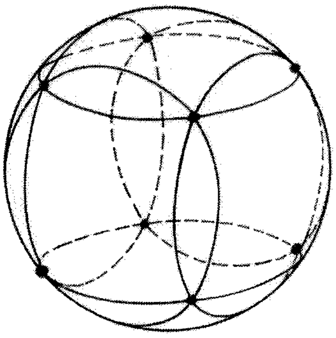


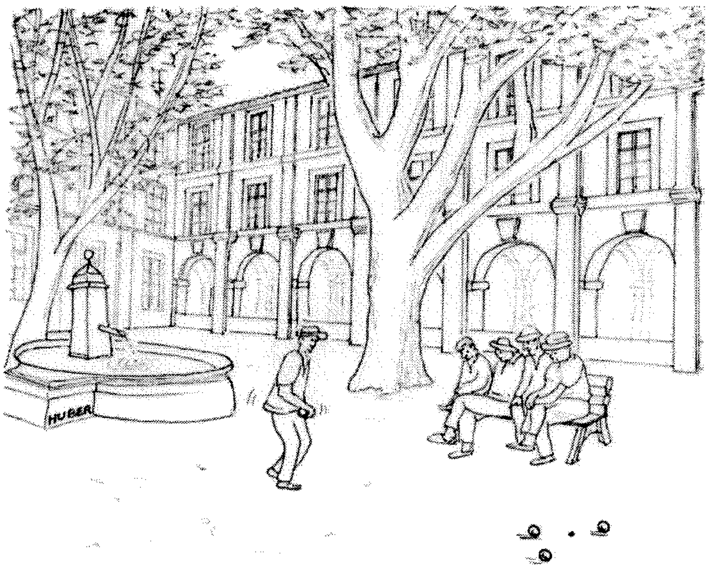
Albert EINSTEIN
1879 - 1955

Zadanie 12
7 punktów

Po śladach kuli

Na kuli Boulego o promieniu 37 mm powinno być, jak to przedstawiono na rysunku, 6 równych dużych okręgów. Ich 8 punktów przecięcia tworzy wierzchołki sześcianu.





Oblicz promień tych okręgów.

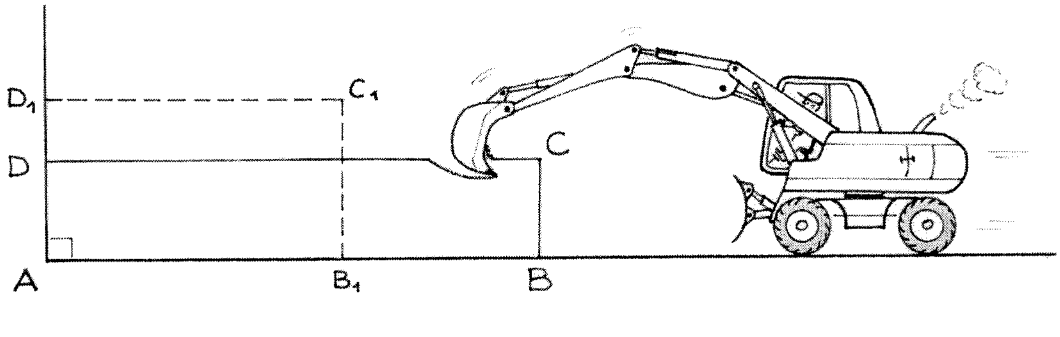
Zadanie 13
10 punktów

Średnio wymierzone

Narysuj prostokąt ABCD przy czym AB = 9 cm i AD = 3 cm. Zaznacz na odcinku AB punkt B_1 w takim miejscu, żeby długość odcinka AB_1 była średnią arytmetyczną długości odcinków AB i AD.

Potem narysuj prostokąt $AB_1C_1D_1$ tak, aby miał to samo pole powierzchni jak prostokąt ABCD. Powtórz to samo z prostokątem $AB_1C_1D_1$, a otrzymany prostokąt oznacz $AB_2C_2D_2$ i tak dalej.

Narysuj w ten sposób pierwsze 4 prostokąty. Przedstaw, jak zmieniają się długości boków kolejnych prostokątów.



ACADEMIE
DE STRASBOURG

Matemáticas sin fronteras

Marzo 2003

Ejercicio nº1
7 puntos

Pause café

Quatre étudiants souhaitent chacun prendre un café pendant leur pause et n'ont que très peu de monnaie. Un café coûte 35 centimes d'euros. La machine à café n'a plus de monnaie, les responsables viennent de la vider.

Albert a une pièce de 1 euro et une de 5 centimes.

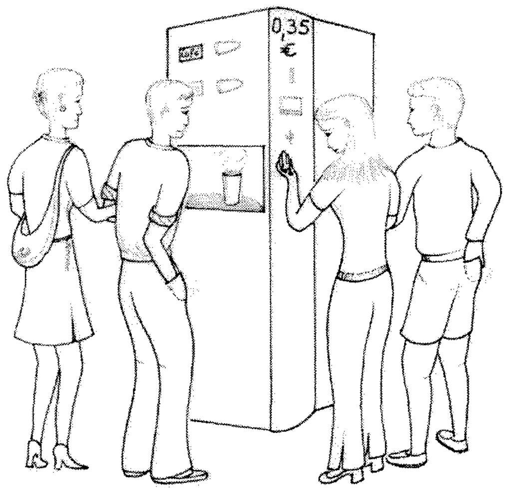
Bernard a une pièce de 50 centimes et une de 5 centimes.

Claudia a une pièce de 20 centimes et deux de 10 centimes.

Danièle a deux pièces de 20 centimes.

Chacun veut son café et sa monnaie. La machine ne sert qu'une personne à la fois et ne rend la monnaie que quand elle en a.

Comment vont-ils s'arranger ?



Four students wish to have a cup of coffee during their break and have very little change. A cup costs 35 euro cents. The machine has no change left, the people in charge have just come to empty it.

Albert has a 1 euro coin and a 5 cents coin.

Bernard has a 50 cents coin and a 5 cents coin.

Claudia has a 20 cents coin and two 10 cents coins.

Daniela has two 20 cents coins.

Each of them wants his coffee and his change. The machine serves one person at a time and gives back change only when it has some.

How are they going to manage ?

Vier Studenten haben Kaffeedurst, aber leider zu wenig Kleingeld. Ein Kaffee kostet 35 Cent. Der Kaffeeautomat kann im Moment kein Wechselgeld zurückgeben, weil er eben erst geleert wurde.

Albert hat eine 1-Euro-Münze und ein 5-Cent-Stück.

Bernhard hat eine 50-Cent- und eine 5-Cent-Münze.

Claudia hat eine Münze zu 20 Cent und zwei zu 10 Cent.

Daniela hat zwei 20-Cent-Münzen.

Jeder möchte seinen Kaffee und sein Wechselgeld. Der Automat kann nur eine Person auf einmal bedienen und kann nur Wechselgeld herausgeben, wenn er welches hat.

Wie gehen sie vor ?

Quattro studenti desiderano bere un caffè durante l'intervallo delle lezioni e possiedono solo della moneta. Un caffè costa 35 centesimi di euro. La macchinetta non ha più moneta dato che i manutentori l'hanno appena svuotata.

Alberto ha una moneta da 1 euro e una da 5 centesimi.

Bernardo ha una moneta da 50 centesimi ed una da 5 centesimi.

Claudia ha una moneta da 20 centesimi e due da 10 centesimi.

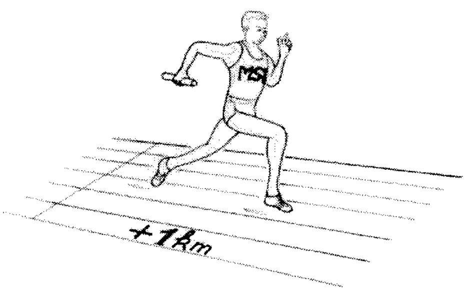
Daniela ha due monete da 20 centesimi.

Ognuno desidera il suo caffè e vuole il suo resto. La macchinetta serve una sola persona per volta e fornisce il resto quando ha moneta.

Come possono organizzarsi ?

Ejercicio nº2
5 puntos

Al siguiente



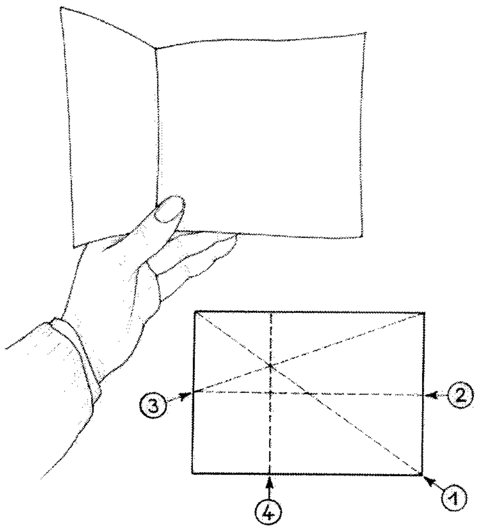
Una carrera de relevos de 40 km es recorrida de manera que cada compañero de equipo complete un número entero de km. A demás cuando un corredor recibe el testigo, debe correr 1 km más que aquel que se lo da.

Dar la distancia recorrida por cada miembro del equipo.

Ejercicio n° 3
7 puntos

Tres pliegue

He aqui un método que permite encontrar un tiercio del largo de una toja de papel rectangular, unicamente por plieques.



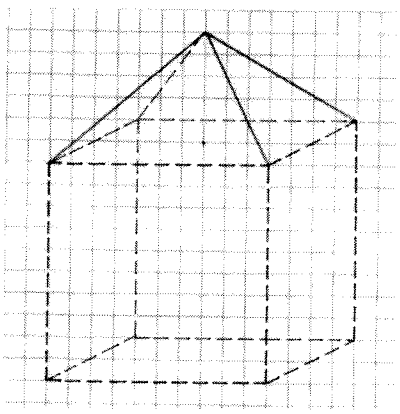
Plegar sucesivamiente la toja siguiendo la diagonal 1 , la mediana 2 , despuès siguiendo los plieques 3 y 4 , coma se indica en la figura de amiba. El pliego 4 da el tercio del largo.

Justifica el método.

Ejercicio n°4
5 puntos

Rombico

La figura del abajo representa un cubo coronado por una pirámida regular con base cuadrada cuya altura es igual a la mitad de la arista del cubo.



Si han construido tal pirámida sobre cada una de las bases del cubo , observamos que las caras de estas piramidas estan dos a dos dentro de un mismo plano y se juntan para formar rombos.

Estos 12 rombos son las caras de un sólido llamado dodecaedro rómbico.

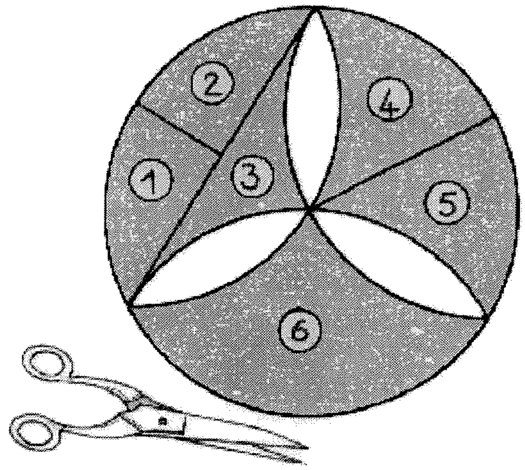
Sus 14 sumas son las 8 sumas del cubo y las 6 de las pirámidas.

Dibujar en perspectiva pareja el dodecaedro rómbico obtenido a partir de un cubo semejante al de la figur de arriba. Colorear las caras visibles del dodecaedro.

Ejercicio n°5
7 puntos

No es π

Abajo esta dibujara una rosacea construida a partir de un hexágono regular.
Para calcular el aire de la superficie gris podemos cortarla en 6 trozos como se indica en el dibujo.Con estas 6 piezas podemos hacer un rectángulo .



Realizar el puzzle a partir de un disco de radio 6 cm.
Pegar el rectángulo sobre la toja respuesta.
Calcular el aire de la superficie gris.

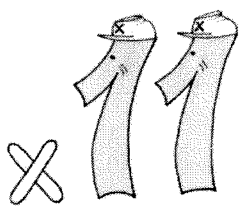
Ejercicio n°6
5 puntos

EL 11 gan

Un entero es múltiplo de 11 si y solamente si la suma algebraica alterdada de sus cifras es un múltiplo de 11 , eventualmente negativo o cero.

Ejemplos :

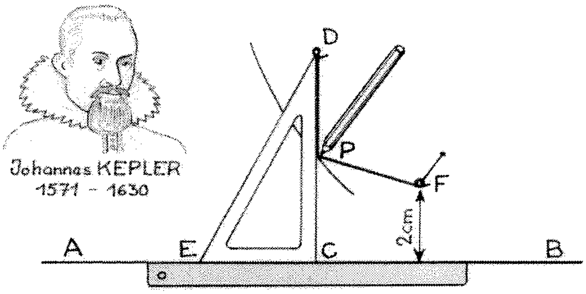
- 1958 es múltiplo de 11 porque $1 - 9 + 5 - 8 = -11$.
- 2002 es múltiplo de 11 porque $2 - 0 + 0 - 2 = 0$.
- 94919 es múltiplo de 11 porque $9 - 4 + 9 - 1 + 9 = 22$.
- Pero 1989 no es múltiplo de 11 porque $1 - 9 + 8 - 9 = -9$.



Encontrar el múltiplo más grande de 11 escrito con 10 cifras diferentes.

Ejercicio n°7 — 7 puntos — En la cuerda fina

El astrónomo alemán Johannes Kepler publicó un método que permite trazar una parabola utilizando una regla , una escuadra , una cuerda fina , un alfiler y un lápiz.
Colocamos la regla a lo largo de una recta (AB) y clavamos la alfiler en un punto F .
El largo de la aaguja es igual al lado CD de la escuadra , fijamos una extremidad en D y la otra en F. La punta P del lápiz mantiene la cuerda fina tensa a lo largo de la escuadra la más lejos posible, como lo muestra el dibujo de aqui abajo.

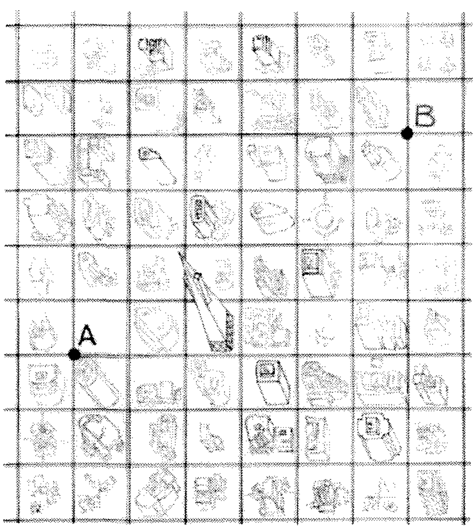


Si hacemos deslizarse el lado EC de la escuadra sobre la recta (AB) , entonces el punto P se desplazará sobre una paráboma.

Justificar la igualdad PF = PC .
Dibujar punto por punto una parábola sabiendo que CD = 14 cm y que F se encuentra a 2 cm de la recta (AB).

Ejercicio n°8 — 5 puntos — Policia geometrica

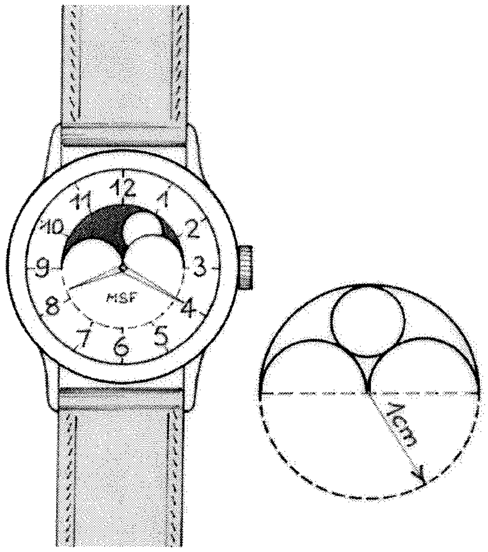
En ciertas ciudades como por ejemplo New York o Mannheim, las calles forman un cuadriculado regular.
Jules y Jim son jefes de dos puestos de policia en la ciudad . Sus puestos estan marcados A y B en el plano de abajo.



Reproducir el cuadriculado sobre la hoja-respuesta . Marcar en color los puntos de las calles para los cuales la distancia minima a reconer en coche para juntar el puesto de Jules o de Jim es la misma.

Ejercicio n°9 — 7 puntos — Esfera lunar

Un reloj indica mecanicamente las fazes de la luna, de la manera siguiente :

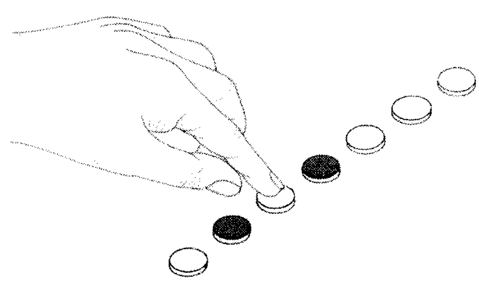


La luna es representada por un disco. Este es dibujado sobre una placa oscura circular que gira alrededor del mismo eje que las agujas y al cual percibimos en una apertura delimitada por 3 semi-circulos.
La luna tiene el diámetro más grande permitiendo mostrarse entera en la apertura.

Calcular este diámetro sabiendo que el radio del gran semi-circulo es 1 cm.

Ejercicio n°10 — 10 puntos — Negro, blanco, bloque

Para jugar a este juego, alineamos las fichas teniendo una cara negro y otra blanca.
AL comienzo todas las caras visibles son blancas.
La meta del juego es encontrar todas las caras negras visibles respectando la regla siguiente :
« Bloqueamos una ficha con un dedo y entonces damos la vuelta a la ficha vecina si no hay más que una y a las dos fichas vecinas si hay dos. Recomenzando tantas veces como sea necesario.



Dibujar las alineaciones de 2 fichas , 3 fichas ...... hasta 15 fichas.
Para cada alineación eniendo una solución, marcar con una cruz las fichas que han sido bloqueados. Si no , escribir que esta alineación no tiene solución.
¿ Hay alguna solución para una alineación de 2003 fichas ? Justifica la repuesta.

Especial segundo

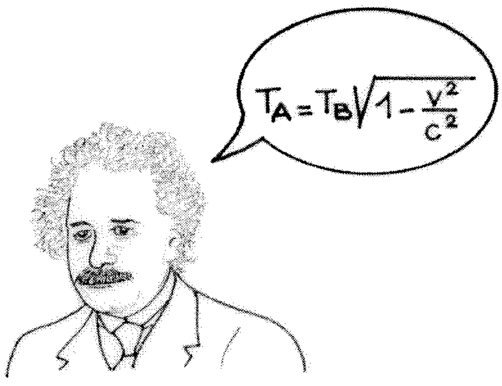
Ejercicio n°11
5 puntos

Los viajes forman la juventud

Albert Einstein estableció que el tiempo no es una magnitud absoluta y que no transcurre de la misma manera por un viajante que se desplaza a gran velocidad que por su amigo que se queda immóbil.
Si Alberto hace un viaje por el espacio a velocidad V y si Bernardo se queda immóbil, éste medirá una dureción T_B para este viaje asi como Alberto medirá otra duración T_A para este mismo viaje.

Según Einstein, tenemos la relación : $\mathbf{T_A = T_B \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ donde **c** es la velocidad de la luz , alrededar de 300 000 km / s .
Alberto parte de viaje al espacio a la edad de 40 años , cuando su hijo Bernardo tiene 20 años. A la vuelta, los dos se encuentran con 60 anos cada uno.

¿A qué velocidad Alberto se deplaza ? Dar la repuesta en km.

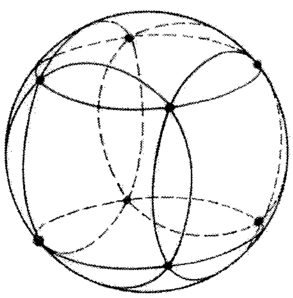


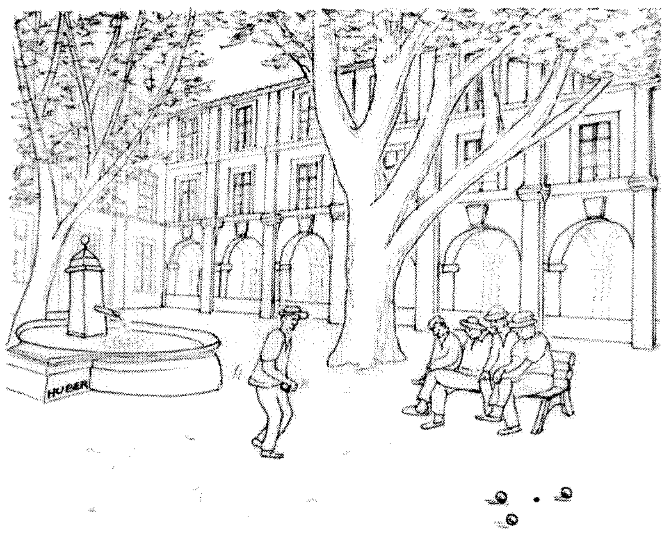
Albert EINSTEIN
1879 - 1955

Ejercicio n°12
7 puntos

Parte de la bola

Sobre una bola de petanca de radio 37 mm queremos trazar 6 circulos como se indica en la figura de abajo. Sus puntos de intersección son la suma de un cubo.





Calcular el radio de los circulos.

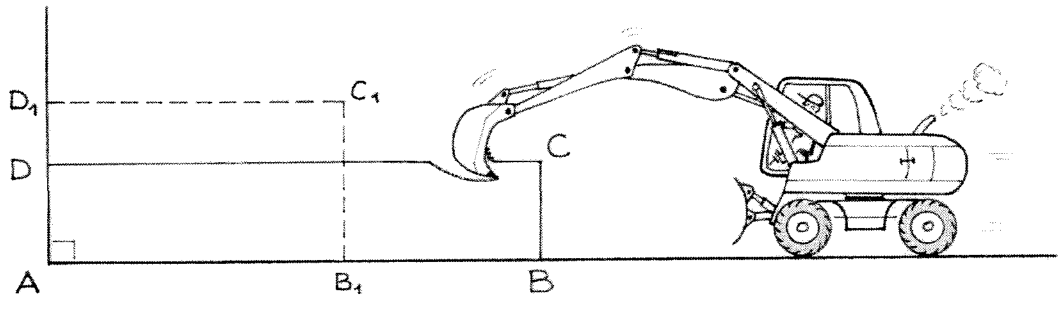
Ejercicio n°13
10 puntos

Cuadratura

He aqui un programa de construcción :
- Dibujar un rectángulo ABCD de lados AB = 9 cm y AD = 3 cm.
- Situar sobre [AB] el punto B_1 de manera que AB_1 sea la media de
- Trazar el rectángulo $AB_1C_1D_1$ de iqual área que ABCD.

Repetir este programa de construccion a partir del rectángulo $AB_1C_1D_1$ para obtener el rectángulo $AB_2C_2D_2$ siempre de iqual area , y asi sucesivamente.

Trazar sobre la hoja-respuesta los 4 primeros rectángulos.
¿Cómo evolucionen las dimensiones de estos rectángulos ?



TITRE :	**Les Etoiles de « Mathématiques sans frontières » 2000-2003** – Fascicule 8 – **Edition internationale** (français, allemand, italien, anglais, hongrois, polonais, espagnol).
Présentées par :	L'Inspection Pédagogique, les Equipes de Professeurs, l'**I**nstitut de **R**echerche sur l'**E**nseignement des **M**athématiques de Strasbourg.
Auteurs :	L'équipe de conception de la compétition « Mathématiques sans frontières » : Jérôme AUDEOUD, Michel BARTHELET, Michel BURET, Jacques FREYBURGER, Pierre HUBER, Gérard KERNEIS, Nicole KRÄMER, Jacques MERTZEISEN, Germain REHLINGER, Pierre SCHWARTZ, Erich STROBEL ainsi que tous les collègues qui ont donné des idées d'exercices.
Mise en page :	Eliane LEGRAND et Jacques FREYBURGER.
Dessins :	Pierre HUBER.
Mots-clés :	Troisième – Seconde – Rallye.
Date :	Octobre 2004.
Nombre de pages :	186 pages.
Editeur :	IREM de Strasbourg (**S. 191**) 7, rue René Descartes F – 67084 STRASBOURG CEDEX
Pour commander :	http://irem.u-strasbg.fr Tél. : 03 90 24 01 61 Fax : 03 90 24 01 65 e-mail : bibirem@math.u-strasbg.fr
ISBN :	2-911446-26-7.
Public concerné :	Professeurs et élèves des classes de Troisième et Seconde.
Résumé :	Le fascicule présente les sujets en six langues de la compétition « Mathématiques sans frontières » des années 2000 à 2003 : les épreuves d'entraînement et les épreuves définitives, avec leurs corrigés. Plus de 5 000 classes de Troisième et de Seconde ont concouru en 2003. Près de 128 000 élèves de 15 à 17 ans ont ainsi découvert des mathématiques ludiques et attirantes, grâce au travail d'une trentaine d'équipes d'organisation, dans une vingtaine de pays différents.
Prix :	14 € (+ 5 € de port).