INTRODUCTION

La géométrie est traditionnellement un lieu de démonstrations. Mais elle constitue également un domaine riche en acquisitions mathématiques grâce aux observations des figures, aux constructions de dessins et de modèles ; elle favorise ainsi le travail de l'imagination. C'est surtout cet aspect que la présente brochure privilégie.

Nous avons rédigé le texte en demandant peu de démonstrations. Nous savons combien d'élèves n'ont gardé de leur cours de géométrie que la crainte de ne pas savoir démontrer : inhibés par cette obligation ils n'ont pas retenu le plaisir de réaliser un beau dessin ni celui d'admirer une figure géométrique. Cependant, chaque enseignant peut demander l'une ou l'autre justification en s'adaptant au niveau de son auditoire ; il peut également proposer la lecture de l'étude de démonstrations développées dans la brochure. Il serait souhaitable d'exploiter certaines situations pour faire comprendre que l'intuition peut tromper et que seule la démonstration permet de conclure.

Les connaissances mathématiques nécessaires pour appréhender ce fascicule sont modestes. Les nombreuses constructions géométriques proposées tout au long de l'ouvrage peuvent être réalisées dès la classe de 6e et familiariser ainsi les élèves avec la géométrie et les instruments de dessin.

Selon le souhait de justifications, on pourra aller jusqu'à un niveau de mathématiques équivalent à celui des Terminales ou en rester aux possibilités offertes par les connaissances du niveau des collèges.

Cette brochure comprend neuf chapitres qui reprennent les points proposés par l'option de géométrie en Terminale A2-A3. Les mathématiques dans cette section doivent permettre à des élèves ayant perdu le goût des sciences d'acquérir des connaissances par le biais de la pluridisciplinarité (histoire, langues étrangères, dessin) et par l'étude de documents.

C'est pourquoi, nous donnons de larges extraits de livres anciens ou étrangers que nous avons commentés et complétés afin de les rendre utilisables en classe. Cet objectif nous a conduites à développer des aspects culturels, scientifiques et littéraires et à mettre en valeur l'aspect esthétique de la géométrie.

Nous remercions **Marie Paule ROMMEVAUX** et **Michel De COINTET** qui ont bien voulu relire ce travail, et **Georges GLAESER**, qui nous a suggéré de nombreuses idées. Nous remercions également le personnel de l'I.R.E.M. qui s'est occupé de la présentation matérielle de ce fascicule.

Il nous reste à souhaiter que de nombreux enseignants trouvent dans cette brochure matière à susciter un intérêt pour la géométrie chez leurs élèves.

Claudine KAHN **Odile SCHLADENHAUFEN**

S O M M A I R E

Voici les livres d'où sont tirés quelques extraits figurant dans cette brochure.

* Courbes mathématiques. Revue du Palais de la Découverte. N° 8
  (chapire I)

* Cahiers d'histoire et de Philosophie des Sciences. La Naissance du calcul infinitesimal au XVIIe siècle par Jean Pierre CLERO et Evelyne LE REST.
  (chapitre III)

* MATHEMATICS. A Human Endeavor. W.H. FREEMAN AND COMPANY. San Francisco.
  (chapitre II, chapitre V)

* Curiosités géométriques de FOURREY
  (chapitre V, chapitre VIII)

* Geometric concepts in Islamic art. Issan el Saïd & Ayse Parman
  (chapitre V)

* π Supplément du Petit Archimède. N° 64-65. Mai 1980
  (chapitre VI)

* ISTRA. Collection IREM. Mathématiques 5e et 2de.
  (chapitre VIII)

* Histoire des Mathématiques de Jean Paul COLLETTE
  (chapitre II, chapitre III)

quelques courbes

Toutes les courbes proposées dans ce chapitre sont tirées d'une revue du Palais de la Découverte : "Courbes mathématiques", mais elles ne représentent qu'une petite partie de cette brochure, qui mérite d'être contemplée.

" Ces courbes jalonnent au moins vingt siècles de mathématiques, et à travers les noms de DIOCLES, ARCHIMEDE, DESCARTES, NEWTON, LEIBNIZ, EULER etc., témoignent à l'évidence de l'ingéniosité et de l'imagination des mathématiciens.

Ainsi, chez les Grecs, le nombre des outils mathématiques disponibles est faible, les notations mal commodes, la notion de courbe rapportée à ses axes n'est pas encore explicite, bien qu'utilisée par APOLLONIUS dans ses études sur les coniques. (1) *Pourtant, on voit apparaître de nombreuses courbes destinées à résoudre des problèmes algébriques : outre les coniques, on rencontre ainsi la cissoïde de DIOCLES à propos de la duplication du cube*(2)*, la conchoïde de NICOMEDE et la trissectrice de MAC-LAURIN à propos de la trissection de l'angle* (3)*, etc.*

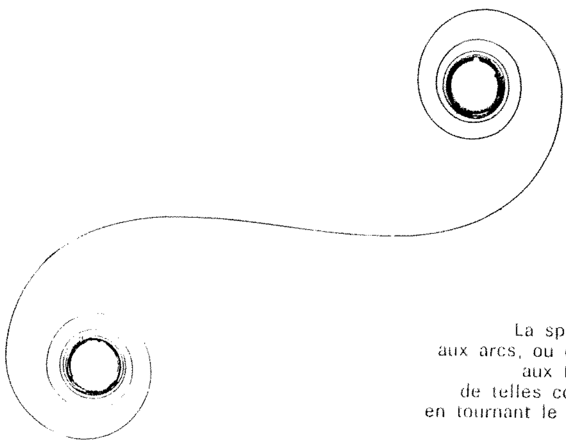
On voit apparaître également la notion de "**lieu géométrique**"*. HIPPIAS* "**invente**" *ainsi la trisectrice : lieu du point d'intersection de deux segments de droite mobiles, l'un en translation, l'autre en rotation. Cette courbe, jointe à la règle et au compas, lui permettra de diviser un angle quelconque en trois (ou plus) angles égaux. DINOSTRATE montrera ultérieurement que cette même courbe permet de résoudre la quadrature du cercle*(4)*, d'où le nom de quadratrice qui lui est resté.*

Plus tard, l'invention de la "**géométrie analytique**" *de DESCARTES et EULER puis l'éclosion du calcul infinitésimal* (5) *provoque l'apparition de toute un* "**flore**" *de courbes retenues pour leur aspect ou leurs propriétés géométriques et l'on chercherait, sûrement vainement, un mathématicien de l'époque n'ayant pas attaché son nom à une courbe particulière.*

Une remarque que l'on peut faire concerne l'origine de ces courbes. Si la plupart a une origine purement mathématique, nombre d'entre ellesont été rencontrées lors de la résolution de problèmes physiques.

Ainsi, les courbes de LISSAJOUS trouvent leur origine dans l'étude de phénoménes vibratoires, la néphroïde est une caustique par réflexion que tout le monde connait pour l'avoir observée, dessinée par les rayons du soleil dans un verre ou un bol de café au lait. D'autres courbes ont également pour origine des problèmes d'optique. comme les ovales de DESCARTES ou la spirale de CORNU, issue des travaux sur la diffraction. Cette dernière courbe se rencontre d'ailleurs très fréquemment puisqu'elle est utilisée dans le dessin des bretelles de raccordement d'autoroutes. "

Extrait de cette brochure.



La spirale de Cornu, ou radioïde aux arcs, ou clothoïde permet, appliquée aux travaux publics de négocier de telles courbles à vitesse constante en tournant le volant à vitesse constante.

(1) : voir Chapitre II

(2) : voir Remarque ci-après

(3) : idem

(4) : idem

(5) : Cette notion est abordée dans le chapitre III.

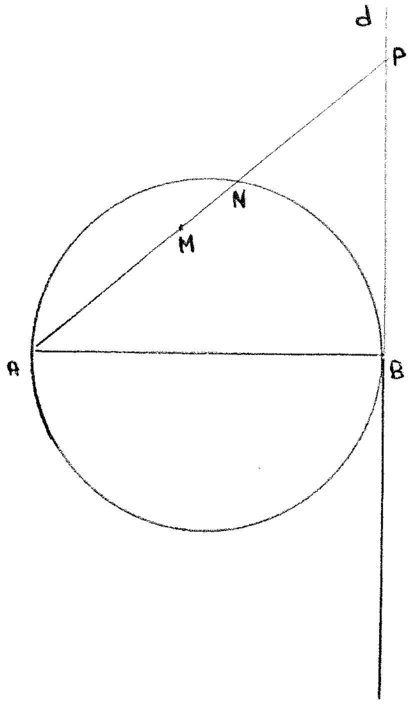
REMARQUE

Dans cette introduction sur les courbes, trois problèmes, qui ont préoccupé les Anciens et ont engendré de nombreuses recherches, sont évoqués : la duplication du cube, la trisection de l'angle, la quadrature du cercle. Voici ce qu'ils proposent :

- Duplication du cube : construire un cube ayant pour volume le double de celui d'un cube donné
- Trisection de l'angle : diviser un angle quelconque en trois parties égales
- Quadrature du cercle : construire un carré d'aire égale à celle d'un disque donné.

Les solutions semblent simples lorsqu'on fait usage des équations, les valeurs approchées de $\sqrt[3]{2}$, $\frac{1}{3}$ et π connues des Anciens étant suffisantes pour les constructions ; mais les résolutions d'équation ne se présentaient pas chez eux sous la forme que nous connaissons et leur problème était de réussir à faire la construction en utilisant uniquement la règle et le compas. Ils savaient partager un segment en deux, trois ou n parties égales à l'aide de ces seuls instruments mais ne purent résoudre les trois problèmes énoncés, de la même manière. Et la recherche a duré longtemps car ce n'est qu'au 19e siècle qu'il a été prouvé que ces problèmes ne peuvent pas être résolus à l'aide de la règle et du compas. GALOIS (1832), WANTZEL (1837) et LINDEMANN (1882) apportent les éléments qui permettent de le démontrer.
Les courbes mentionnées dans l'introduction donnent une résolution graphique mais ne donnent pas la solution cherchée.

CISSOIDE DROITE



Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre [AB] et d la tangente en B au cercle $\mathscr{C}$. Une droite d'origine A coupe le cercle $\mathscr{C}$ en un point N et la droite d en un point P ; on place sur cette droite le point M défini par AM = NP.

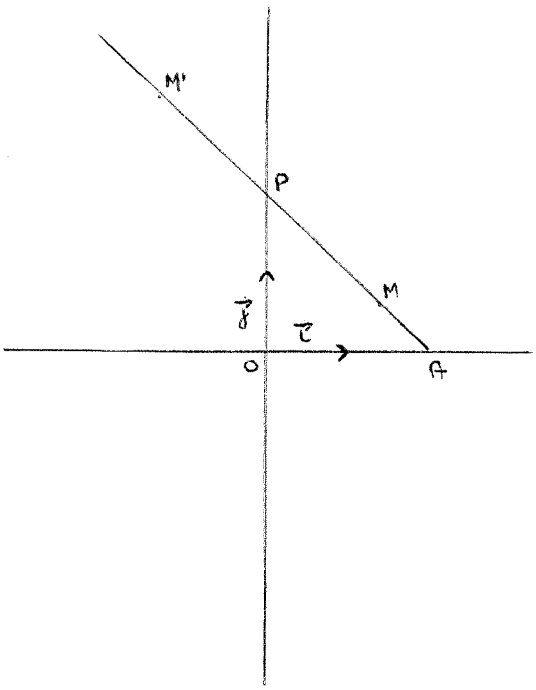
Lorsque P décrit la droite d, M décrit une cissoïde droite.

Dans un repère orthonormé d'origine A et dont l'axe des abscisses est porté par (AB), cette courbe admet pour équation cartésienne :

$x(x^2 + y^2) = ay^2$ avec $a = \overline{AB}$

Cette courbe est appelée parfois cissoïde de DIOCLES du nom du mathématicien grec qui, semble-t-il, s'en occupa au VIe siècle avant J.C.

STROPHOIDE DROITE



Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on fixe un point A sur l'axe des abscisses. Une droite passant par A coupe l'axe des ordonnées en P ; on place sur cette droite les points M et M' définis par PM = PM' = PO.

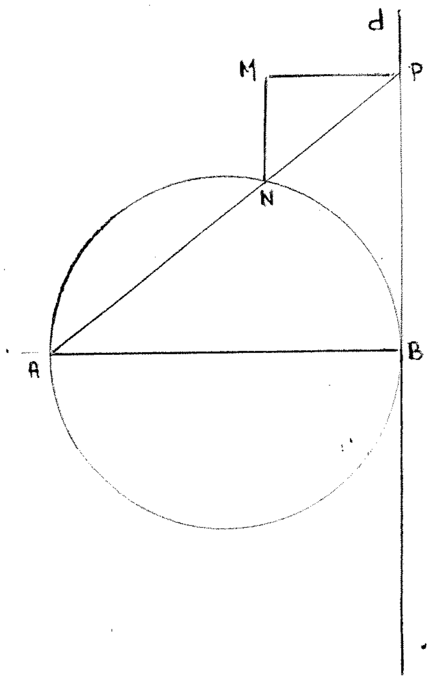
Lorsque P décrit l'axe des ordonnées, les points M et M' décrivent une strophoïde droite.

Cette courbe admet pour équation cartésienne

$x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$ avec $a = \overline{OA}$

Cette courbe fut sans doute considérée pour la première fois par ROBERVAL (1645) On l'appelait alors ptéroïde.

CUBIQUE D'AGNESI

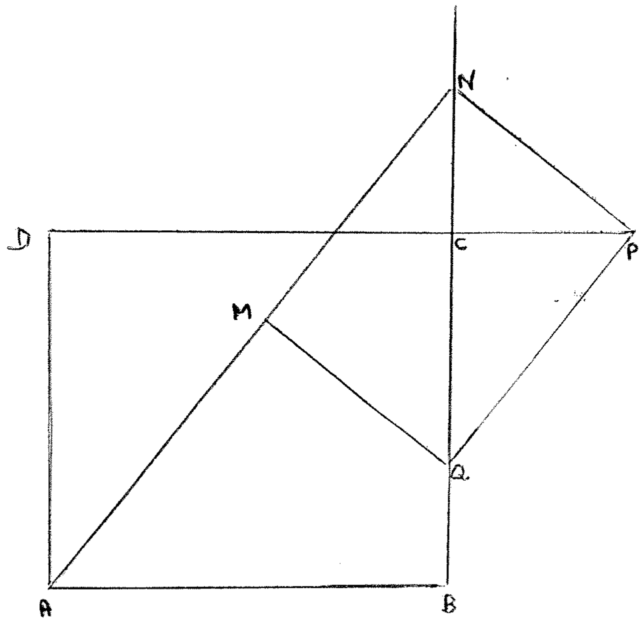


Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$ et d la tangente en B au cercle $\mathscr{C}$. Une droite passant par A coupe le cercle $\mathscr{C}$ en N et la droite d en P. La parallèle à (AB) passant par P et la parallèle à d passant par N se coupent en M.
Lorsque P décrit la droite d, M décrit une cubique d'AGNESI ou versiera.

Dans un repère orthonormé d'origine A et dont l'axe des abscisses est porté par (AB), cette courbe admet pour équation cartésienne
$$xy^2 = a^2(a - x)$$
où $a = \overline{AB}$.

Cette courbe a été étudiée par la mathématicienne italienne AGNESI qui la cita en 1748.

FOLIUM PARABOLIQUE



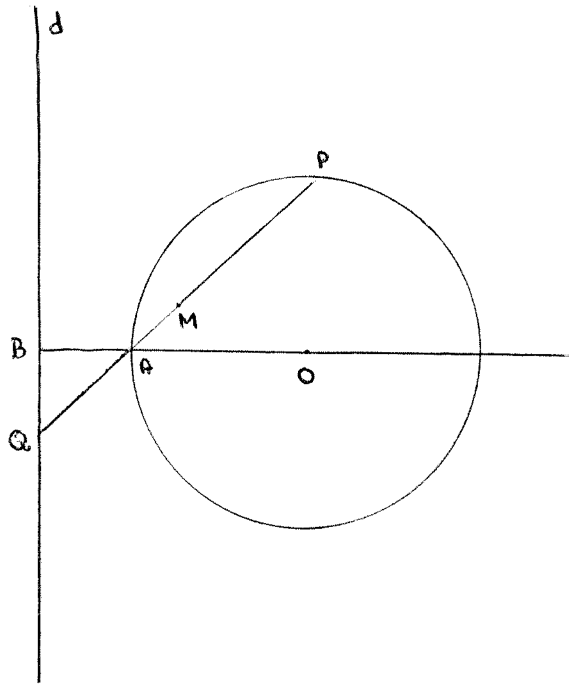
Soit ABCD un rectangle. Une droite passant par A coupe la droite (BC) en N. On construit le rectangle NPQM où P appartient à la droite (CD), Q à la droite (BC) et M à la droite (AN).

Lorsque N décrit la droite (BC), M décrit un folium parabolique.

Dans un repère orthonormé d'origine A et dont l'axe des abscisses est porté par (AB), cette courbe admet pour équation cartésienne
$$x^3 = a(x^2 - y^2) + bxy$$
où $a = \overline{AB}$ et $b = \overline{AD}$.

Cette courbe a diverses formes selon les valeurs de a et b. Elle a été étudiée par G. de LONGCHAMPS (1890)

TRISSECTRICE DE MAC-LAURIN



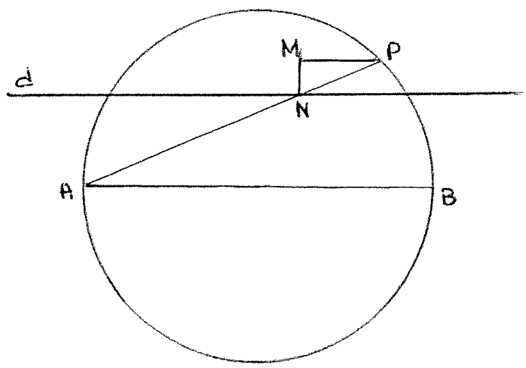
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon OA = 4a, B le point de la droite (AO) extérieur au cercle $\mathcal{C}$ et tel que AB = 2a, et d la droite passant par B et perpendiculaire à (AB). Une droite passant par A coupe le cercle $\mathcal{C}$ en un point P et la droite d en un point Q. Le point M est le milieu du segment [PQ].

Lorsque P décrit le cercle $\mathcal{C}$, M décrit une trissectrice de Mac-Laurin.

Dans un repère orthonormé d'origine A et dont l'axe des abscisses est porté par (AO), cette courbe admet pour équation cartésienne $x(x^2 + y^2) = a(3x^2 - y^2)$

Cette courbe a servi à donner des solutions graphiques du problème de la trissection de l'angle, d'où son nom.
En effet : soit $\mathcal{C}$ le point de coordonnées (2a, 0) et D le point de la courbe de coordonnées (3a, 0), pour tout M de la courbe l'angle $\widehat{DCM} = 3\ \widehat{DAM}$.

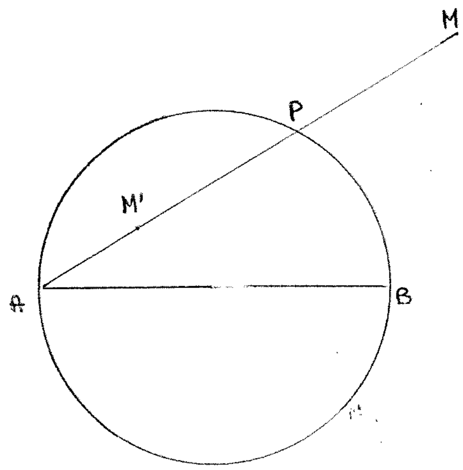
ANGUINEA



Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre [AB] et une droite d parallèle à (AB). Une droite passant par A coupe le cercle $\mathcal{C}$ en P et la droite d en N. La parallèle à (AB) passant par P et la perpendiculaire à (AB) passant par N se coupent en M.
Lorsque N décrit la droite d, M décrit une cubique serpentine ou anguinéa.
Dans un repère orthonormé d'origine A et dont l'axe des abscisses est porté par (AB), cette courbe admet pour équation cartésienne $y = \frac{ahx}{x^2+h^2}$ avec $a = \overline{AB}$ et $h = \overline{AC}$ où C est l'intersection de d et de la perpendiculaire à (AB) passant par A.

Cette courbe a été étudiée par L'HOSPITAL, HUYGHENS et NEWTON.

LIMACON DE PASCAL



Soit $\mathscr{C}$ un cercle de diamètre [AB] et soit ℓ une longueur donnée. Une droite passant par A coupe le cercle $\mathscr{C}$ en P. Sur cette droite on place les points M et M' tels que PM = PM' = ℓ.
Lorsque P décrit le cercle $\mathscr{C}$, les points M et M' décrivent un limaçon de Pascal.

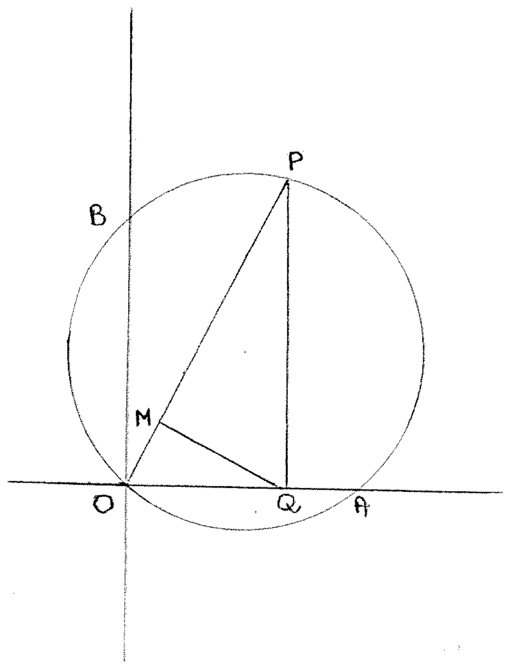
Dans un repère orthonormé d'origine A et dont l'axe des abscisses est porté par (AB), cette courbe admet pour équation cartésienne

$(x^2 + y^2 - ax)^2 = \ell^2(x^2 + y^2)$ ou $a = \overline{AB}$

Cette courbe aurait été étudiée avant 1644 par ROBERVAL. Le nom que lui a donné ce mathématicien aurait été choisi en l'honneur du père de PASCAL.

On pourra faire plusieurs dessins pour diverses valeurs de ℓ.
Remarque : pour ℓ = a on obtient une cardioïde (voir page 12)

BIFOLIUM

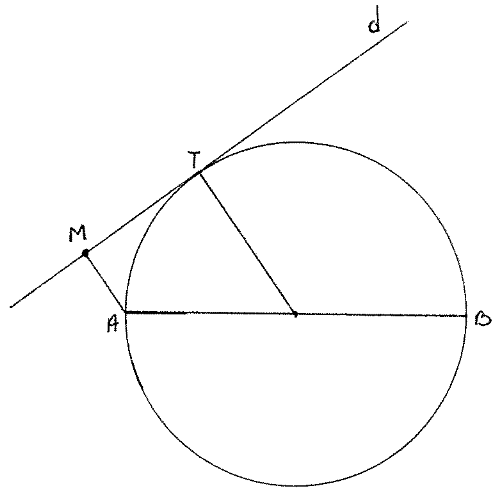


Soit $\mathscr{C}$ un cercle passant par un point O fixe. Deux droites perpendiculaires passant par O coupent le cercle $\mathscr{C}$ en A et B respectivement. Une droite passant par O coupe le cercle $\mathscr{C}$ en un point P. Soit Q le projeté orthogonal de P sur la droite (OA) et M le projeté orthogonal de Q sur la droite (OP). Lorsque P décrit le cercle $\mathscr{C}$, M décrit un bifolium.

Dans un repère orthonormé d'origine O et dont l'axe des abscisses est porté par (OA), cette courbe admet pour équation cartésienne $(x^2 + y^2)^2 = x^2(ax + by)$ où $a = \overline{OA}$ et $b = \overline{OB}$

Cette courbe a été étudiée par G. de LONGCHAMPS (1886) et par BROCARD (1897).

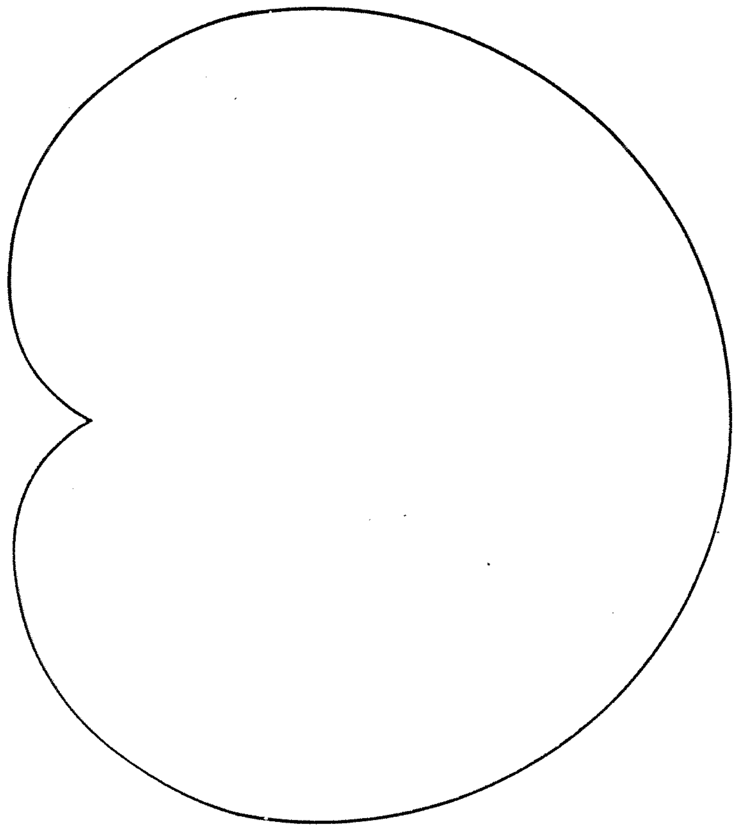
CARDIOIDE



1) Reprendre la construction de limaçon de Pascal pour $\ell = a$

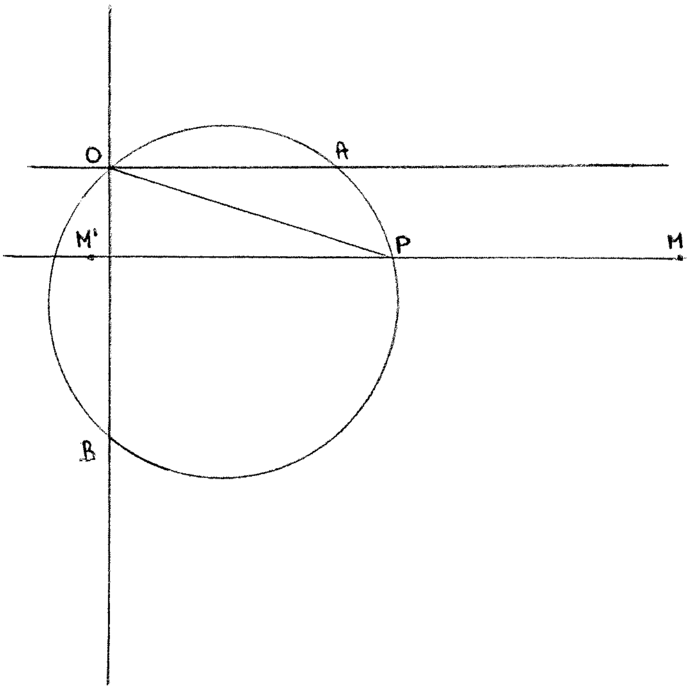
2) Soit C un cercle de diamètre [AB], et d la tangente à ce cercle en un point T et M la projection orthogonale de A sur d. Lorsque T décrit le cercle C, M décrit une cardioïde.

Le nom de cette courbe lui a été donnée par CASTILLON (1741)



cardioïde

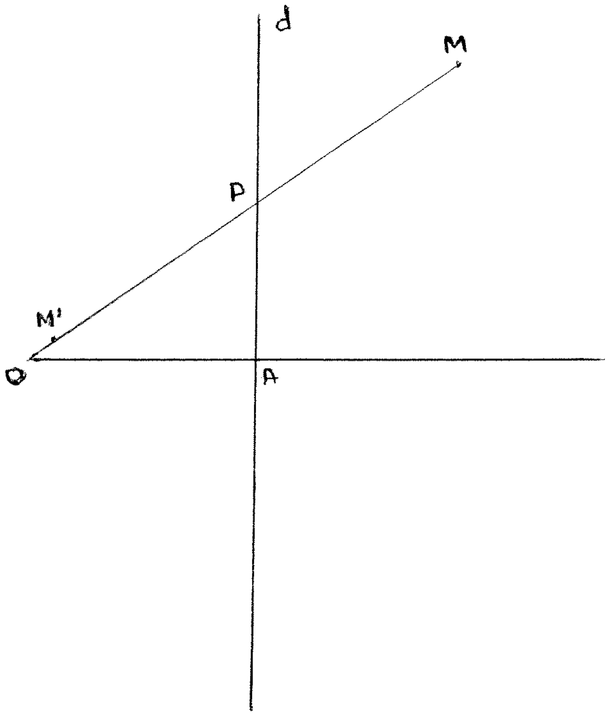
TRIFOLIUM



Soit $\mathscr{C}$ un cercle passant par un point fixe O. Deux droites perpendiculaires passant par O, coupent le cercle $\mathscr{C}$ en A et B respectivement. Une droite passant par O coupe le cercle $\mathscr{C}$ en un point P; Sur la parallèle à (OA) passant par P on place les points M et M' tels que PM = PM' = PO.
Lorsque P décrit le cercle $\mathscr{C}$, les points M et M' décrivent un trifolium.

Dans un repère orthonormé d'origine O et dont l'axe des abscisses est porté par (OA) cette courbe admet pour équation cartésienne
$(x^2 + y^2)^2 = 2ax(x^2 - y^2) - 4bx^2y$
où $a = \overline{OA}$ et $b = \overline{OB}$.

CONCHOIDE DE NICOMEDE



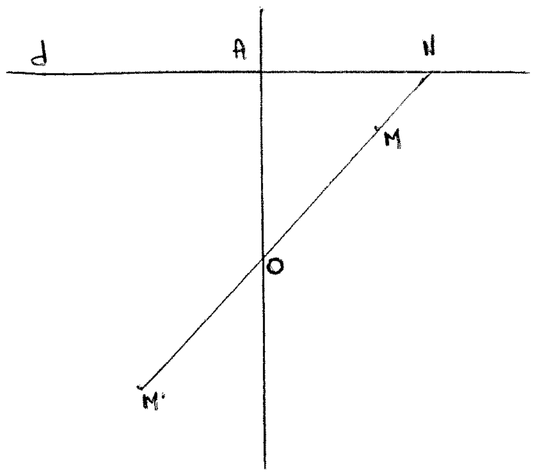
On considère deux points distincts O et A, une longueur ℓ donnée, et d une droite passant par A et perpendiculaire à (OA). Une droite passant par O coupe la droite d en P. Sur la droite (OP) on place les points M et M' tels que
$PM = PM' = \ell$.

Lorsque P décrit la droite d, M et M' décrivent une conchoïde de Nicomède.

Dans un repère orthonormé d'origine O dont l'axe des abscisses est porté par (OA), cette courbe admet pour équation cartésienne :
$y^2(x - a)^2 = x^2(\ell + a - x)(\ell - a + x)$
où $a = \overline{OA}$

Cette courbe a été étudiée par NICOMEDE géomètre grec entre 100 et 200 avant J.C.

CAPPA

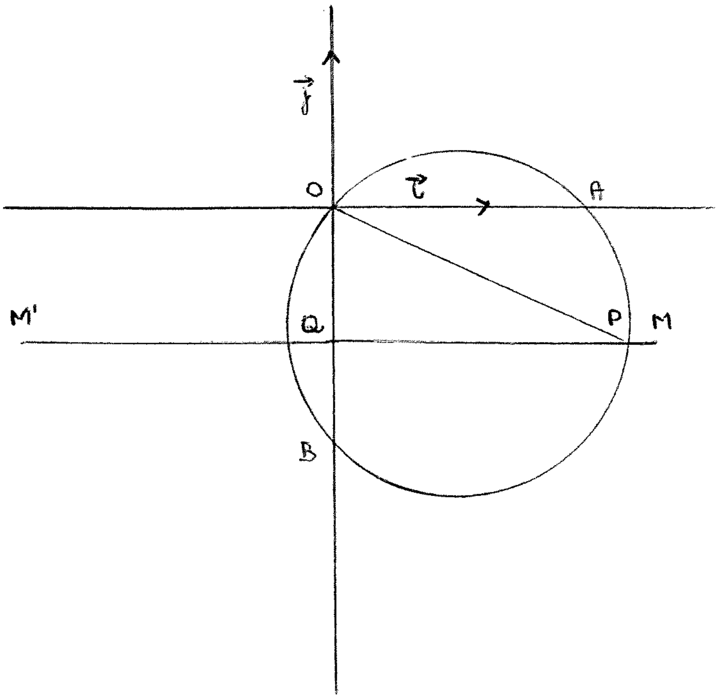


On considère deux points O et A, et la droite d perpendiculaire à (OA) passant par A. Une droite passant par O coupe d en N. Sur la droite (ON) on place les points M et M' tels que OM = OM' = AN. Lorsque N décrit la droite d, M et M' décrivent une cappa.

Dans un repère orthonormé d'origine O, dont l'axe des ordonnées est porté par (OA) cette courbe admet pour équation cartésienne $y^2(x^2 + y^2) = a^2x^2$

Cette courbe appelée autrefois courbe de GUTSCHOVEN apparaît en 1662 dans la correspondance de SLUSE à HUYGENS.

BESACE

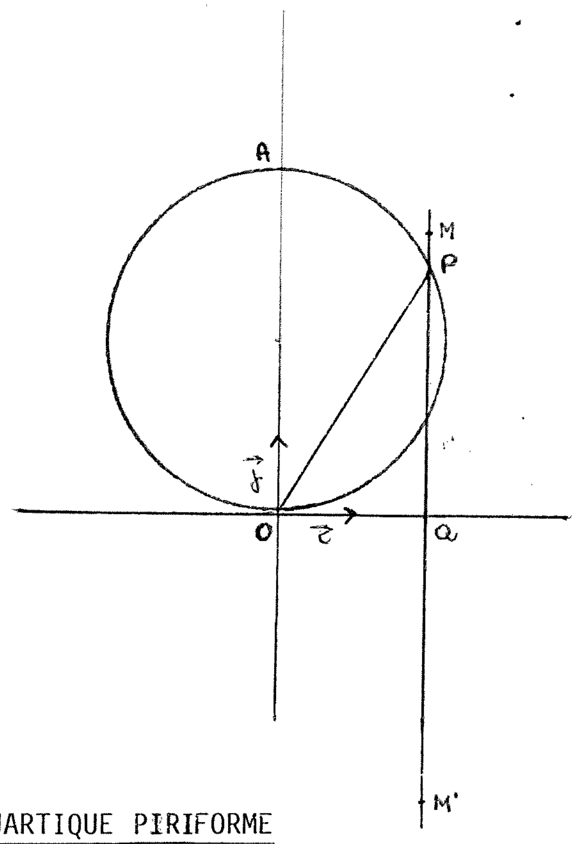


Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on fixe un point A sur l'axe des abscisses et un point B sur l'axe des ordonnées. Soit $\mathcal{C}$ le cercle passant par O, A et et B. Une droite passant par O coupe le cercle $\mathcal{C}$ en P que l'on projette orthogonalement en Q sur l'axe des ordonnées. Sur la droite (QP) on place les points M et M' tels que OP = QM = QM'.

Lorsque P décrit le cercle $\mathcal{C}$ M et M' décrivent une besace.
Cette courbe admet pour équation cartésienne :
$(x^2 - by)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Cette courbe a été étudiée par CRAMER (1750).

HUIT

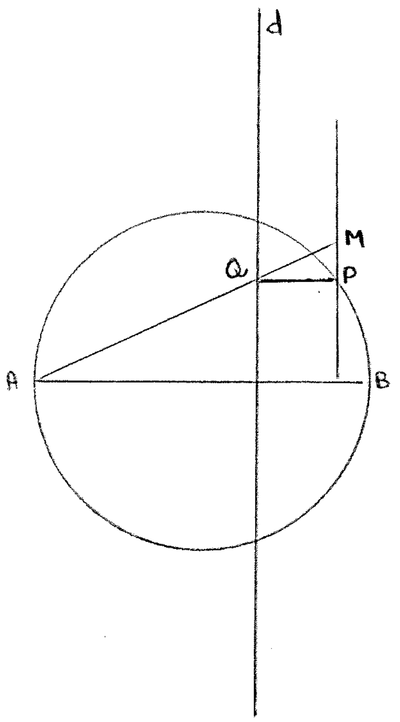


Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on fixe un point A sur l'axe des ordonnées. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [OA]. Une droite passant par O coupe le cercle $\mathcal{C}$ en P que l'on projette orthogonalement en Q sur l'axe des abscisses. Sur la droite (QP) on place les points M et M' tels que OP = QM = QM'.

Lorsque P décrit le cercle $\mathcal{C}$, M et M' décrivent un huit ou lemniscate de GERONO.

Cette courbe admet pour équation cartésienne $y^4 = a^2(y^2 - x^2)$

QUARTIQUE PIRIFORME



Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre [AB] et soit d une droite perpendiculaire à (AB). Soit P un point du cercle $\mathcal{C}$ et Q sa projection orthogonale sur la droite d. La perpendiculaire à (AB) passant par P coupe la droite (AQ) en M.

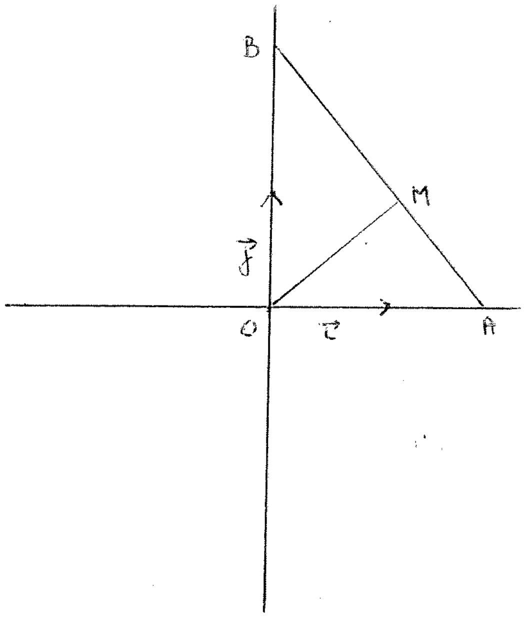
Lorsque P décrit le cercle $\mathcal{C}$, M décrit une quartique piriforme ou toupie.

Dans un repère d'origine A dont l'axe des ordonnées est porté par (AB), cette courbe admet pour équation cartésienne $y^4 - ay^3 + \ell^2x^2 = 0$ où $a = \overline{AB}$

ℓ est la distance de A à la droite d.

Cette courbe a été étudiée par WALLIS (1616-1703).

ROSACE A QUATRE BRANCHES



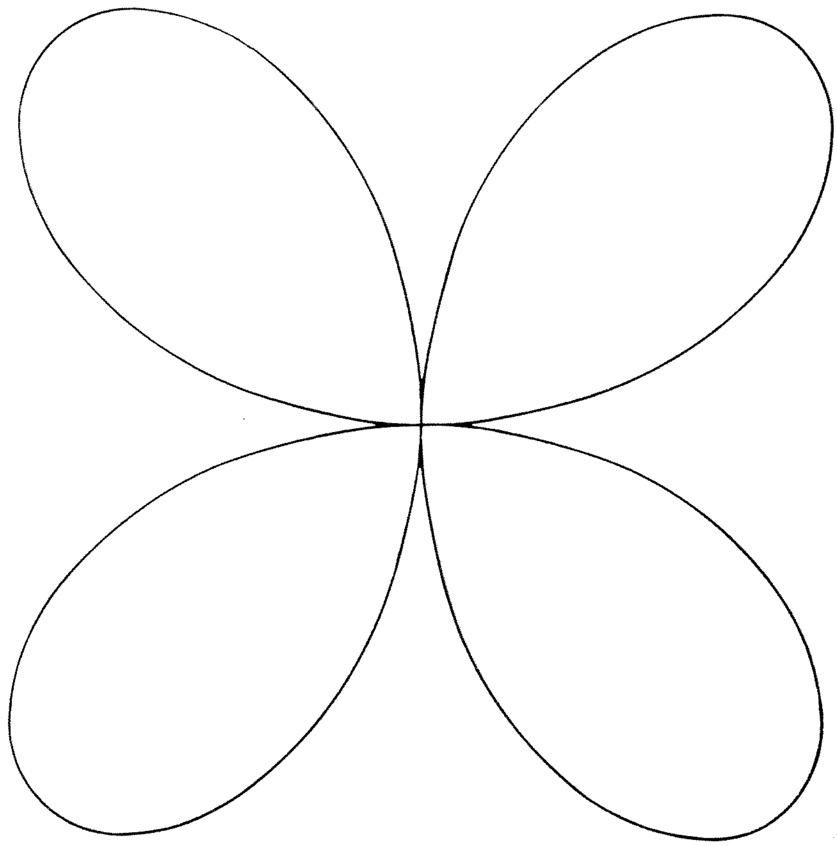
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé et ℓ une longueur donnée. Le point A sur l'axe des abscisses et le point B sur l'axe des ordonnées sont tels que $AB = \ell$

Soit M le projeté orthogonal de O sur la droite (AB).

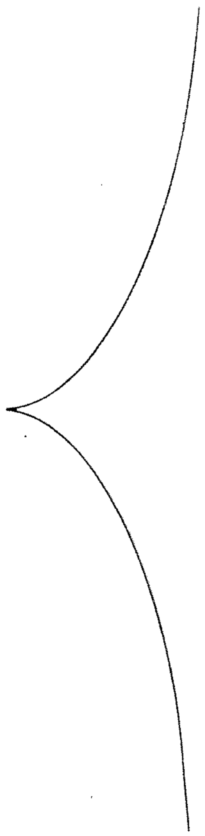
Lorsque A et B se déplacent respectivement sur les axes, M décrit une rosace à quatre branches.

Cette courbe admet pour équation cartésienne : $(x^2 + y^2)^3 = \ell^2 x^2 y^2$

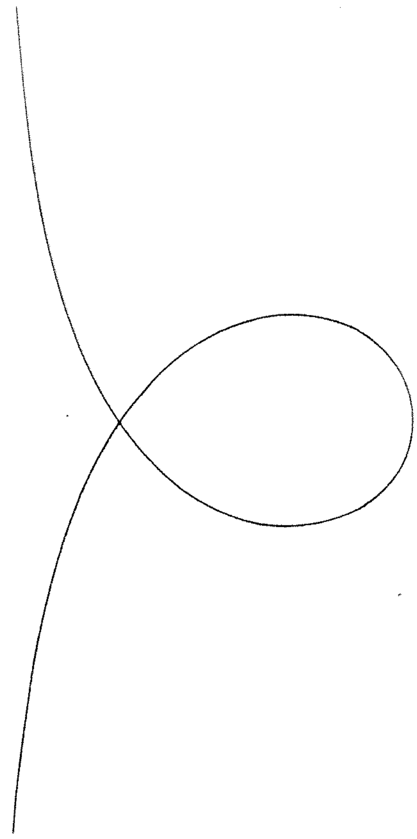
Cette courbe a été étudiée par GUIDOGRANDI (1723-1728).



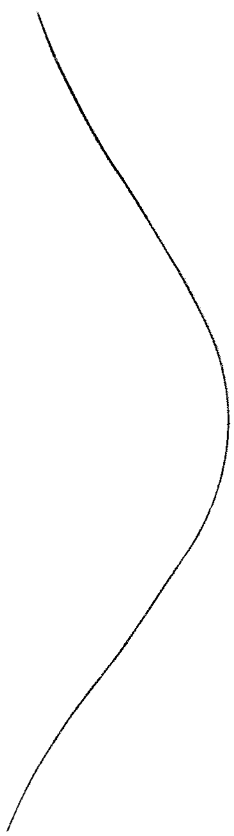
rosace à quatre branches



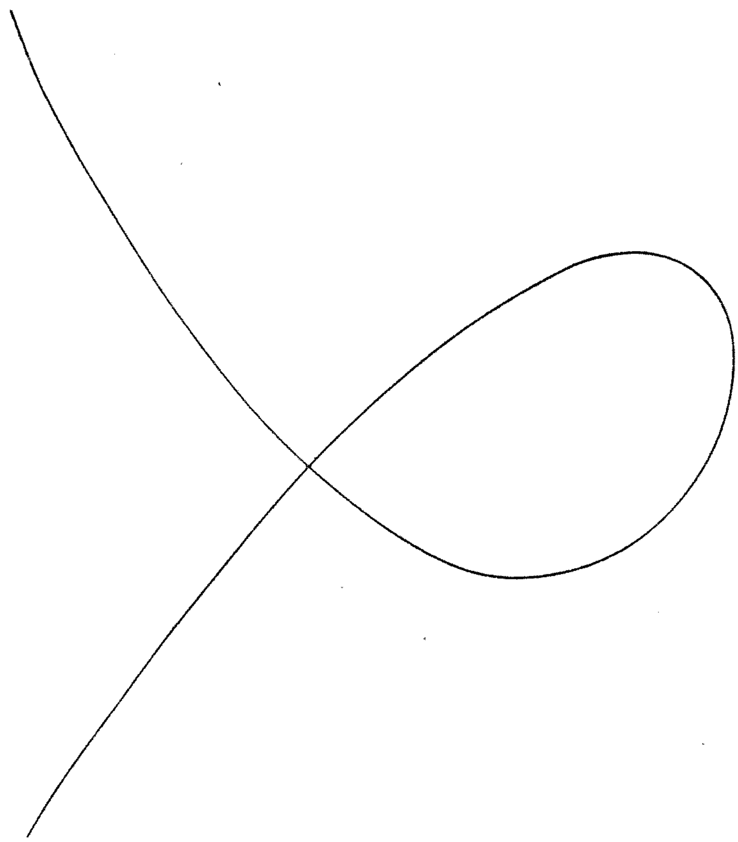
cissoïde droite



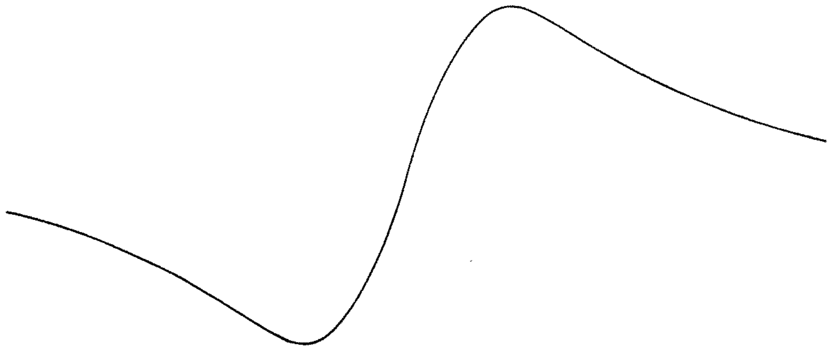
strophoïde droite



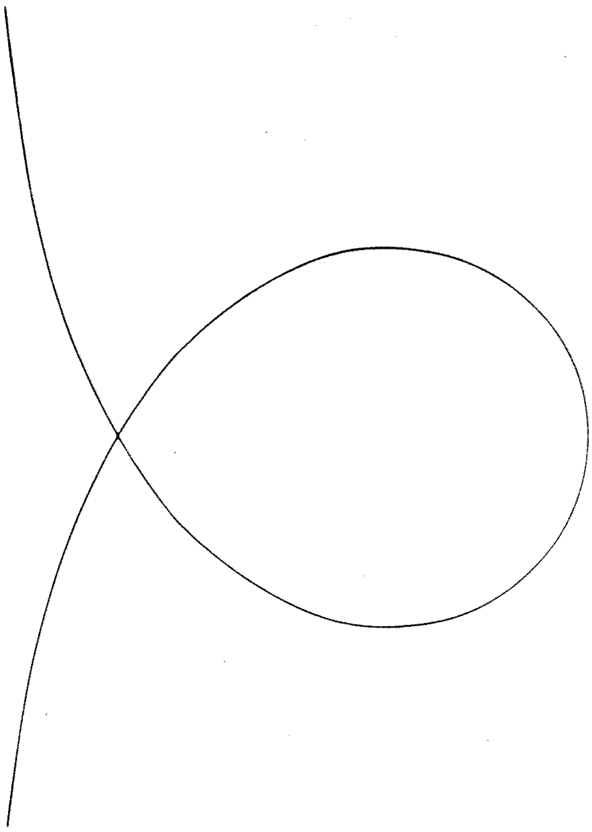
cubique d'agnesi
(ou versiera)



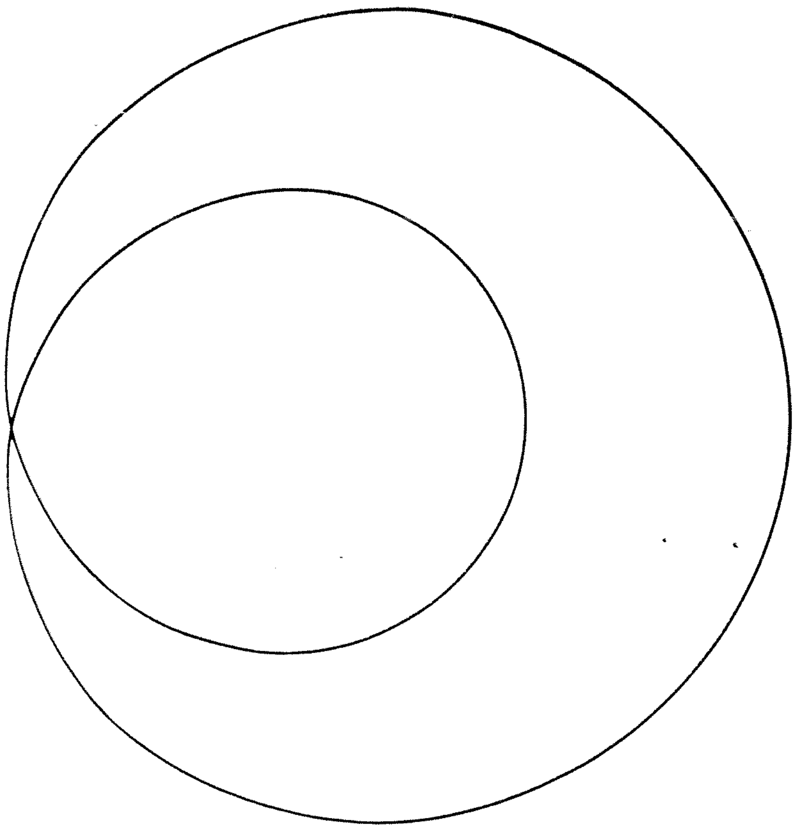
folium parabolique



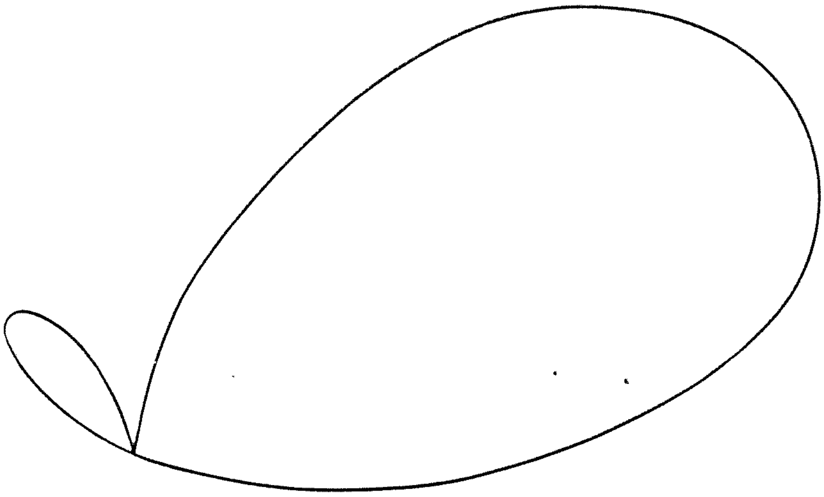
anguinéa
(ou cubique serpentine)



trisectrice de mac-laurin

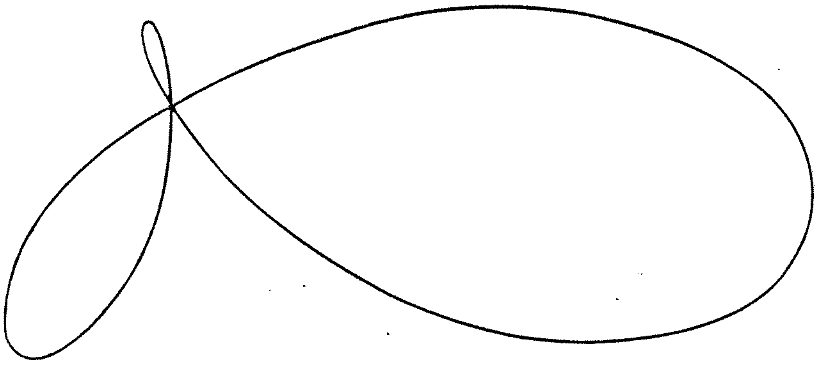


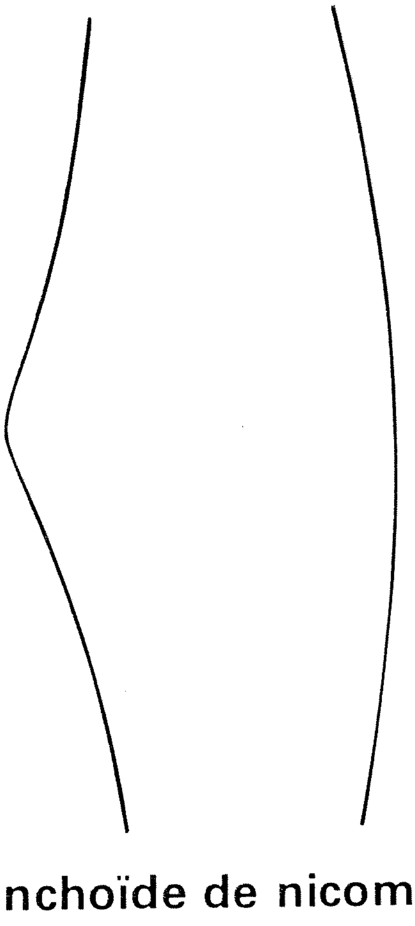
limaçon de pascal

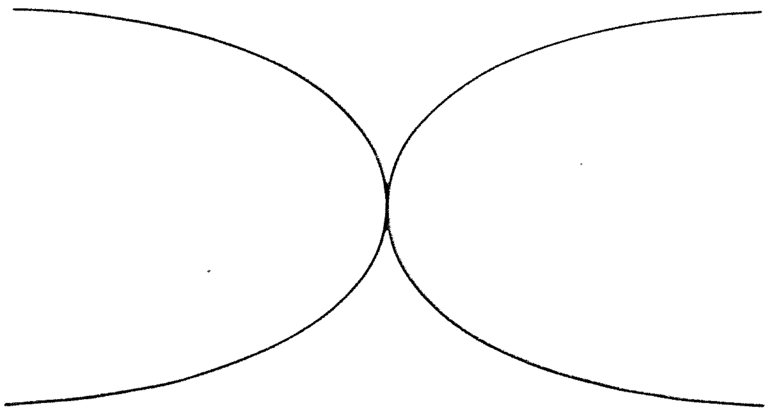


trifolium

bifolium

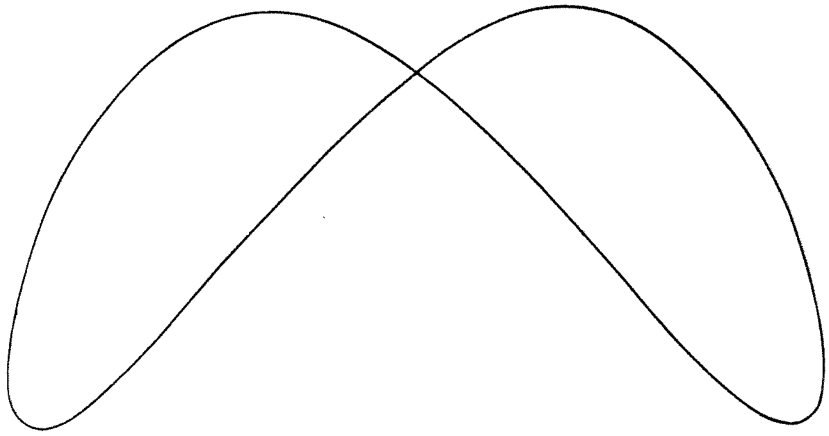




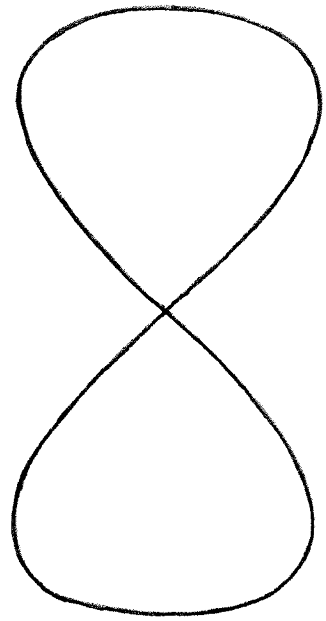


cappa

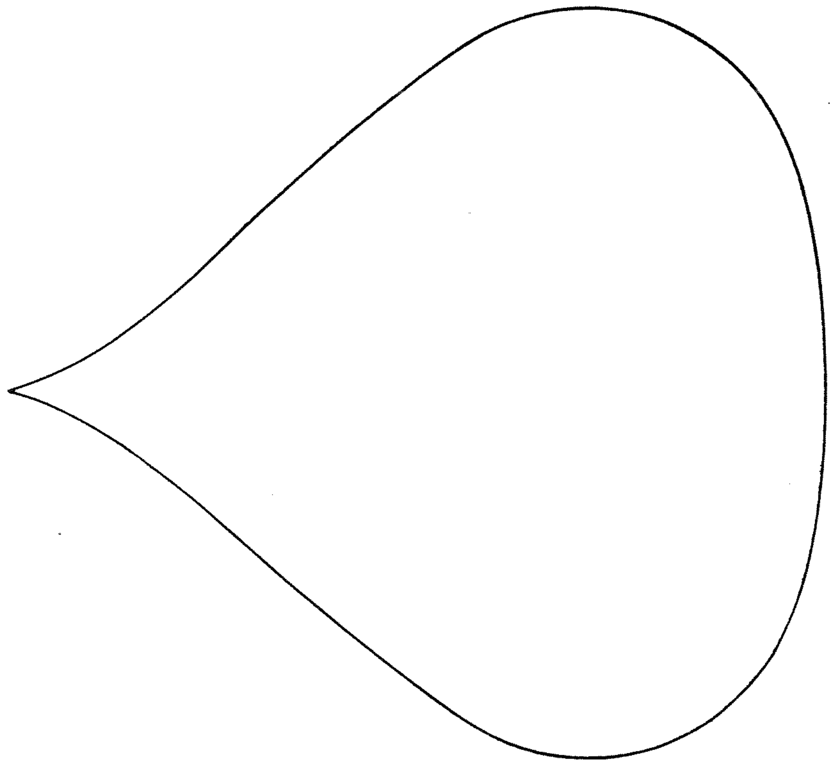
conchoïde de nicomède



besace

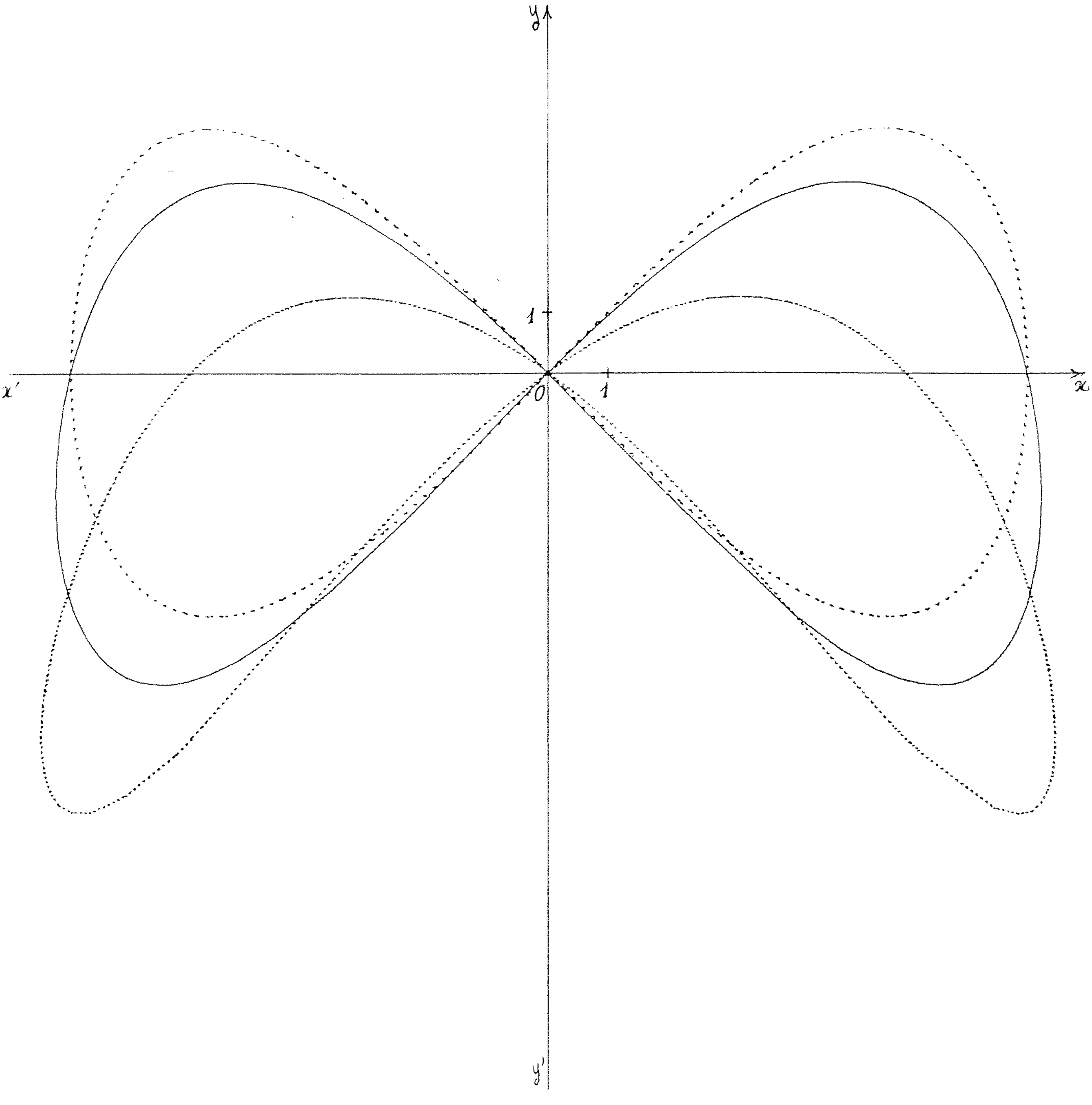


huit

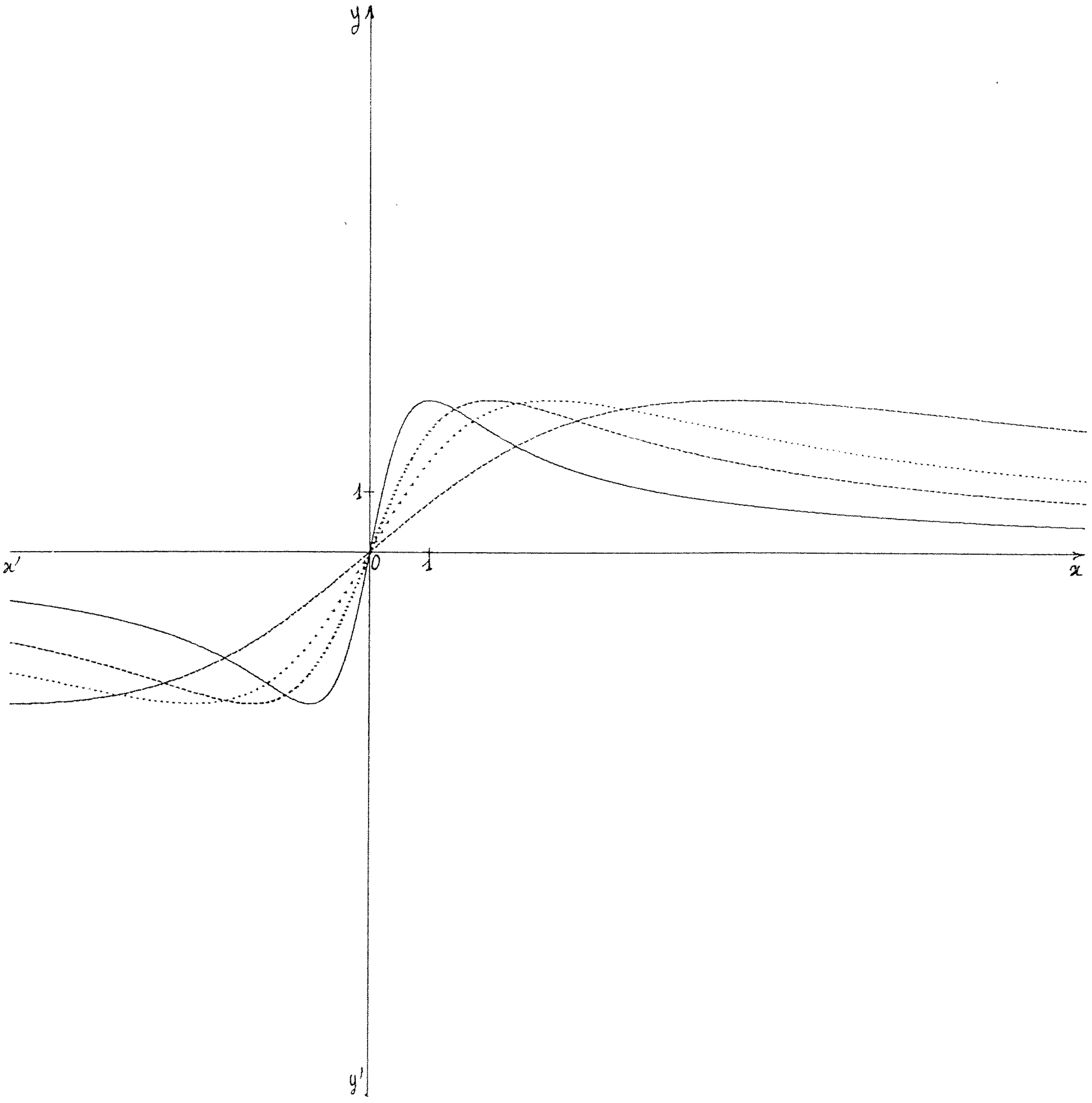


quartique piriforme

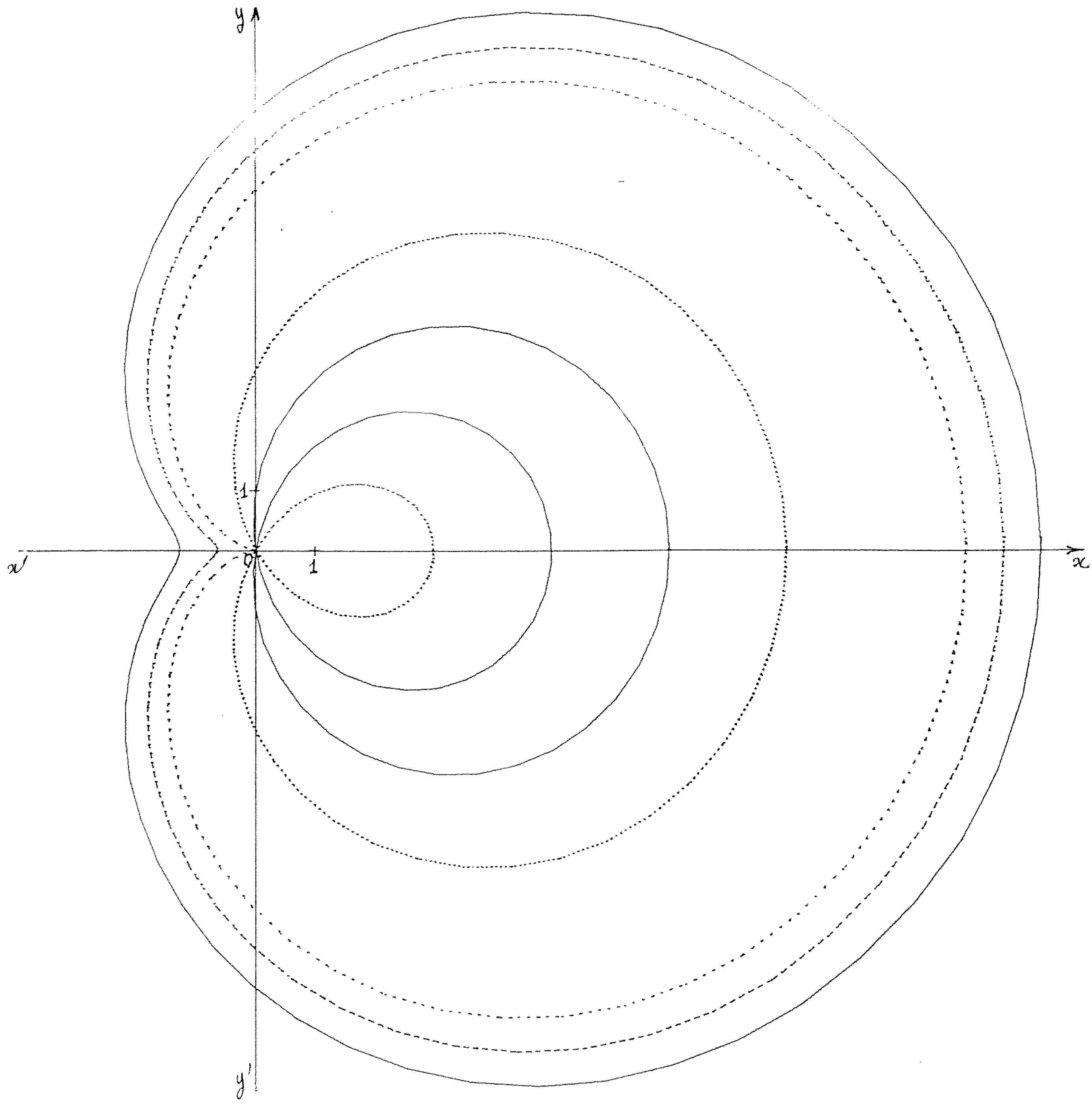
Quelques besaces obtenues pour diverses valeurs de a et b.



Quelques anguinéas obtenues pour différentes valeurs de a et h.

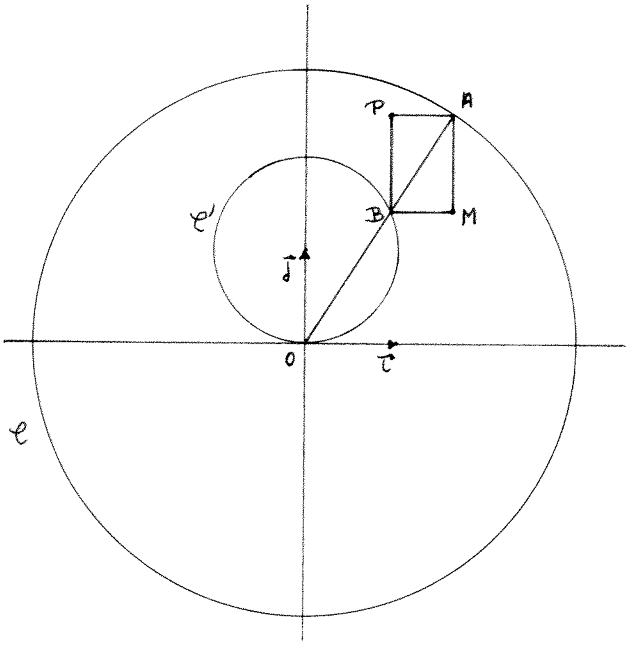


Quelques limaçons de PASCAL obtenus pour différentes valeurs de a et l.
La cardioïde figure parmi ces courbes.



E X E R C I C E S

Transformation de Newton



Dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 2cm) on considère le cercle C d'équation $x^2 + y^2 = 9$ et le cercle C' d'équation $x'^2 + (y' - 1)^2 = 1$.

Une demi-droite d'origine 0 coupe le cercle en un point A (x_A, y_A) et le cercle C' en un point $B(x_B, y_B)$. Dessiner le point $M(x_A, y_B)$ et le point $P(x_B, y_A)$

Lorsque B décrit le cercle C' les points M et P décrivent chacun une portion de courbe.
Reconnaître ces courbes.

Reconnaître la courbe

Dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ on considère l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y vérifient l'équation $y^3(y - 6) + 9x^2 = 0$ (1)

1° Peut-on trouver x vérifiant (1) et tel que $y = 7$?
Peut-on trouver x vérifiant (1) et tel que $y = -1$?

2° Donner un encadrement des valeurs possibles pour y.

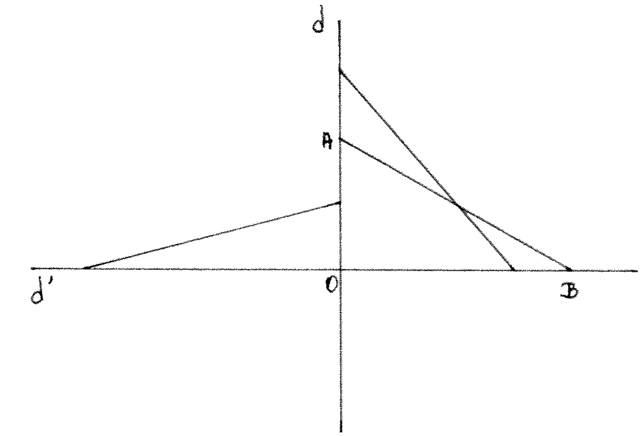
3° Pour $y = 3$ quelles sont les valeurs de x qui réalisent l'égalité (1) ?
Placer les points M de coordonnées (x ; 3) dans le repère.

4° Choisir une dizaine de valeurs pour y, calculer les x correspondant, et placer les points M(x, y) dans le repère.

5° Reconnaître la courbe obtenue.

QUELQUES ENVELOPPES

1 Astroïde



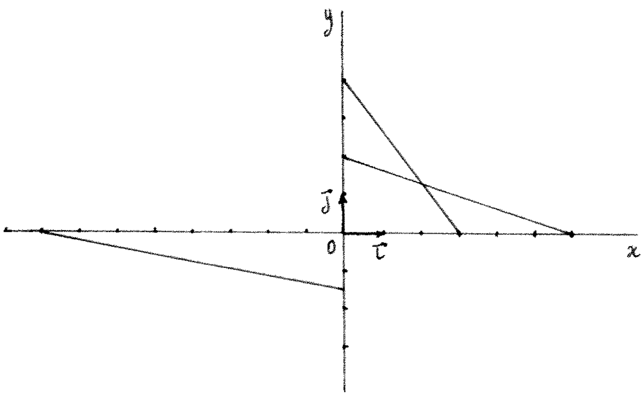
Soient deux droites d et d' perpendiculaires en O.

Dessiner un grand nombre de segments [AB] tels que A soit sur d, B sur d' et AB = ℓ

ℓ étant une longueur donnée.

Ces segments enveloppent une courbe appelée astroïde.

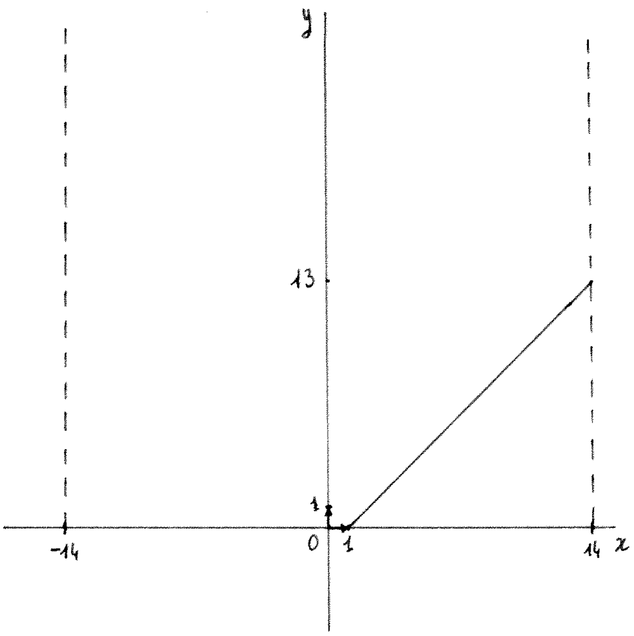
2 Hyperbole



Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dessiner une vingtaine de segments [AB] avec $A(x_A ; 0)$ et $B(0 ; y_B)$ et $x_A \times y_B = 12$.

La courbe enveloppée par ces segments est une hyperbole.

3 Parabole



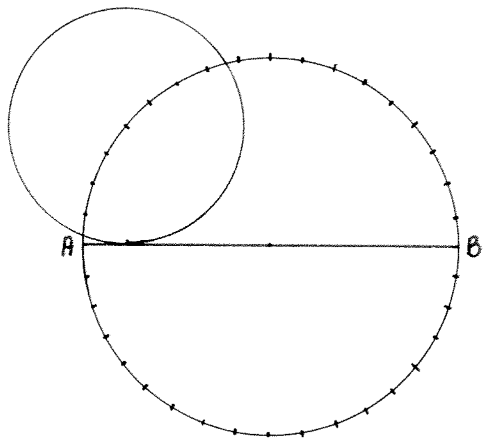
Dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité $\frac{1}{2}$ cm) on considère la portion de plan limitée par l'axe des abscisses et les demi-droites d'équations $x = 14$ et $x = -14$ contenant les points d'ordonnée positive.

Dessiner les segments portés par les droites d'équation $y = nx - n^2$, où n est un entier élément de $\mathbb{Z}$, et situés dans la portion de plan, décrite ci-dessus.

La courbe enveloppée par ces segments est une parabole.

Ces trois premières situations pourraient être matérialisées par des fils tendus entre des clous.

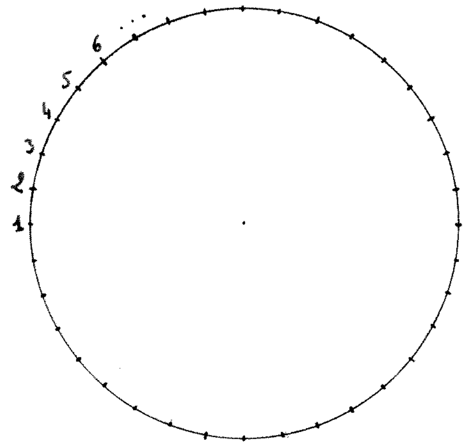
4 Néphroïde



Soit un cercle C de rayon r = 5 cm. Placer sur ce cercle les 36 sommets d'un polygone régulier (voir chapitre........) A et B étant deux de ces sommets diamétralement opposés, dessiner les 34 cercles centrés en un sommet du polygone et tangents à la droite (AB).

L'enveloppe de ces cercles est une néphroïde

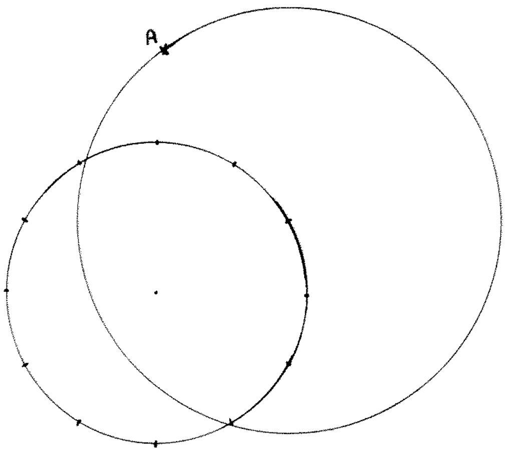
5 Cardioïde



Soit un cercle C de rayon r = 10 cm. Placer sur ce cercle les 36 sommets d'un polygone régulier (voir chapitre ....) Numéroter les sommets successivement, et dessiner les segments joignant les points 1 et 2, 2 et 4, 3 et 6, 4 et 8 ...

Ces segments enveloppent une cardioïde.

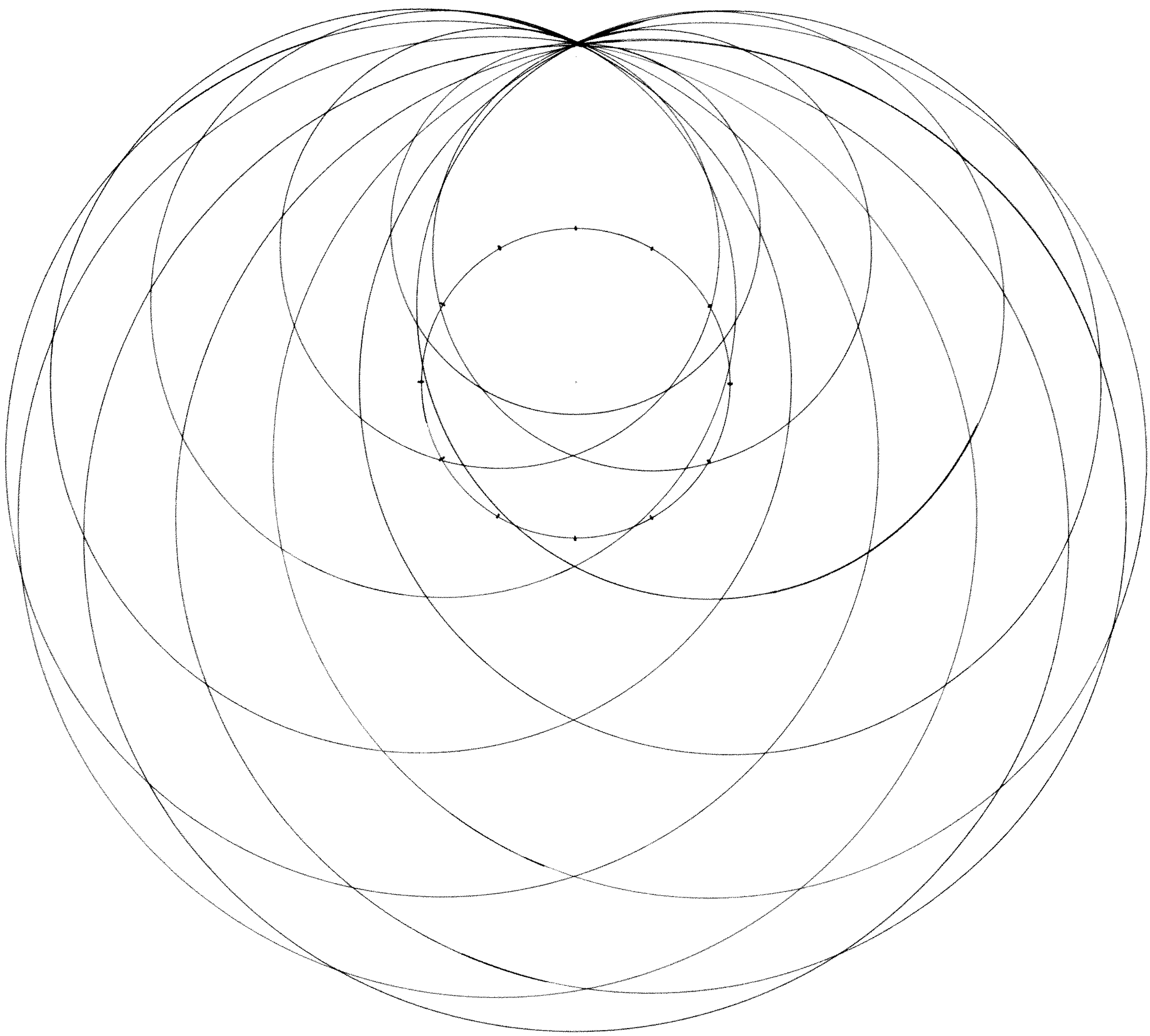
6 Autre cardioïde



Soit un cercle C de rayon r = 2,5 cm. Placer sur ce cercle les sommets d'un dodécagone régulier, et un point A extérieur au cercle.

Dessiner les douze cercles centrés en un sommet du dodécagone, et passant par A.

L'enveloppe de ces cercles est une cardioïde.



coniques

Le mot conique provient du grec κονικος et les courbes qui portent ce nom résultent de la section d'un cone par un plan ne passant pas par le sommet.

L'étude des coniques a été pendant plus de 2000 ans le terrain de prédilection des géomètres. leur découverte est due à MENECHME (vers 375-325 av. J.C.) géomètre et astronome grec. Apollonius de PERGE qui vécut peu après ARCHIMEDE et EUCLIDE (c'est-à-dire vers 200 av. J.C.) rédigea un traité complet sur les Sections Coniques, qui ne contient pas moins de 400 propositions.

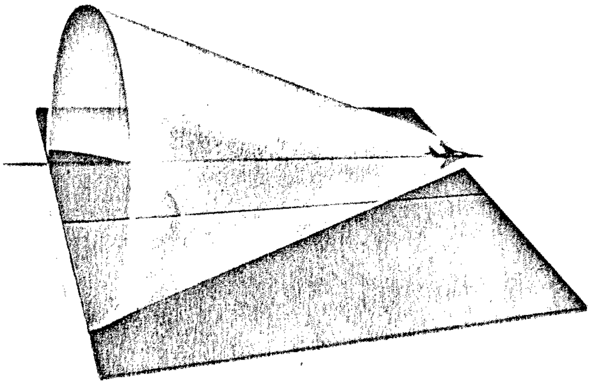
La théorie des coniques connut un nouvel essor au XVIIe siècle dans deux directions différentes. DESCARTES étudie leurs équations tandis que PASCAL* développe le point de vue géométrique dans "Essay sur les coniques" et inaugure ainsi le point de vue de la géométrie projective.

C'est à la même époque que KEPLER, en étudiant la trajectoire de Mars d'après les observations de Tycho BRAHE découvre que les trajectoires des planètes autour du soleil sont elliptiques. Et l'on sait depuis que les trajectoires des planètes sont en première approximation des ellipses, tandis que celles des comètes sont des paraboles ou des branches d'hyperbole.

* Il était alors âgé de 16 ans (voir p. 87).

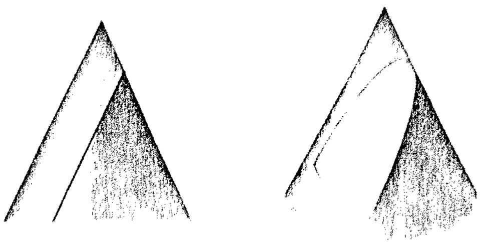
Voici en anglais un texte qui explique l'origine du mot "conique".

WHEN an airplane flies faster than the speed of sound (about 770 miles per hour), it creates a shock wave heard as a "sonic boom." This shock wave has the shape of a cone and it intersects the ground in part of a mathematical curve called a **hyperbola.**



The sonic boom hits every point on this curve at the same time, so that people in different places along the curve on the ground all hear it at once. No sound is heard outside of the curve, but the boom eventually covers every place inside it.

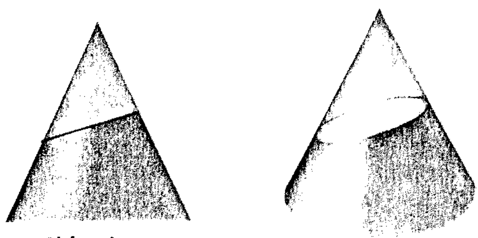
The early Greek mathematicians knew all about the hyperbola, the "sonic boom" curve. In fact, they gave the curve its name. The Greeks were equally familiar with the parabola (the "baseball" curve), as well as the ellipse. How did they happen to become acquainted with these curves so long ago? A Greek named Apollonius, who lived in the third century B.C., wrote a book in which he showed that these curves could be produced by slicing a cone in different directions. If the slice is in the same direction as the side of the cone, the curve that results is the parabola



Side view Perspective view

Parabola

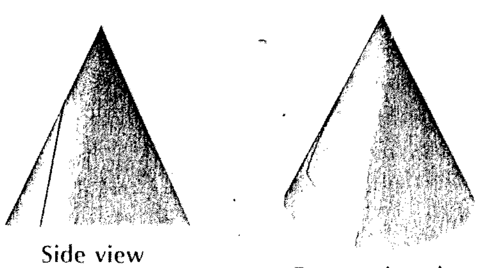
If the slice is tilted from the direction of the side of the cone toward the horizontal, the curve is an ellipse instead. If the slice



Side view Perspective view

Ellipse

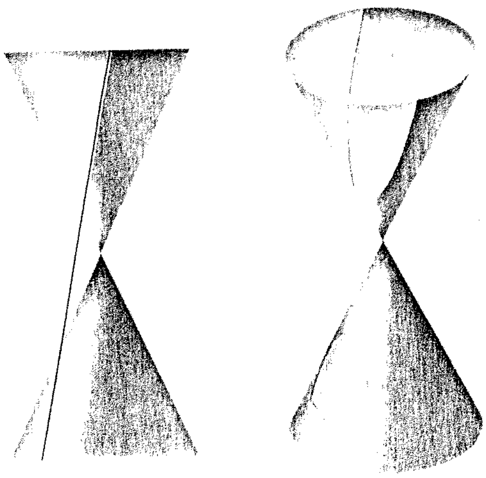
is tilted in the other direction, that is, away from the direction of the side of the cone and toward the vertical, part of a hyperbola is formed.



Side view Perspective view

Hyperbola

Look at the curve in the diagram on page 116. It is part of a hyperbola; two more hyperbolas are shown on pages 117 and 118. A hyperbola consists of two "opposite" curves, called its "branches." To see these branches as slices of a cone, imagine a pair of cones put together so that they touch at their points. A slice cutting through the two cones forms a pair of curves which are the branches of a hyperbola.



Since the parabola, ellipse, and hyperbola are formed when a cone is sliced into sections, they are called **conic sections.** Apollonius named his book *The Conics* and it has since been translated into many different languages. One of these translations was by the English astronomer Edmund Halley, for whom Halley's Comet is named. This comet travels along a path in the shape of an ellipse and Halley used this conic section to predict the time of its return.

Annexe : Les pages 116 et 117 du même ouvrage.

HOW big is the sun? It appears to be the same size as the moon and during a total eclipse of the sun, the moon is just large enough to cover it completely. The Greeks had some strange ideas about the relative sizes and distances of the sun and moon. Democritus, who lived in the fourth century B.C., thought that the sun was smaller than the earth. In fact, a century before, the people of Athens were surprised by one astronomer's suggestion that the sun might be as large as the country of Greece. We now know that the sun has a diameter of more than 100 times that of the earth; it is about 864,000 miles across. (However, even at that size, the sun is only a medium-sized star compared to others in our galaxy.)

The *apparent* size of the sun is a function of the distance from which we look at it. If the distance from the earth to the sun were half as great, the sun would appear to be twice as large. A formula for this function is

$$w = \frac{1}{d}.$$

where w is the apparent width of the sun and d is the relative distance from the sun.

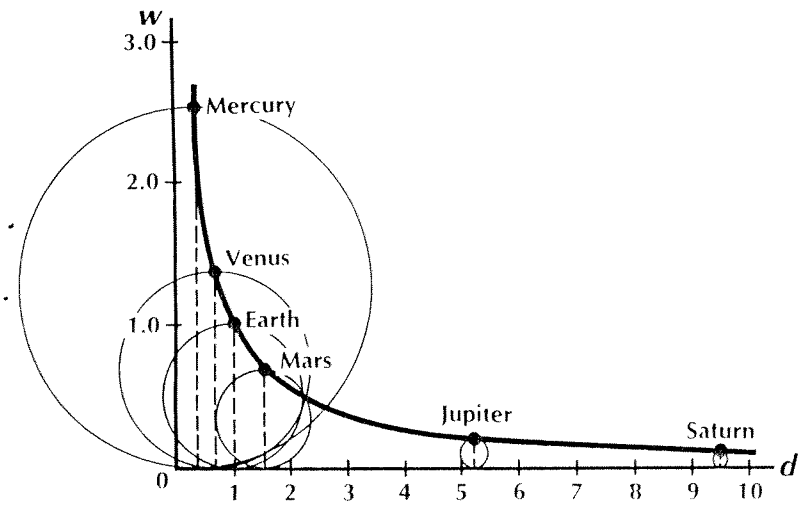
How large would the sun appear to be from some planet other than the earth? From Mercury, the closest planet to the sun, it would seem the largest and from Pluto, the most distant planet, the smallest. It would be interesting to know just how large and how small. Here is a table for some of the planets.

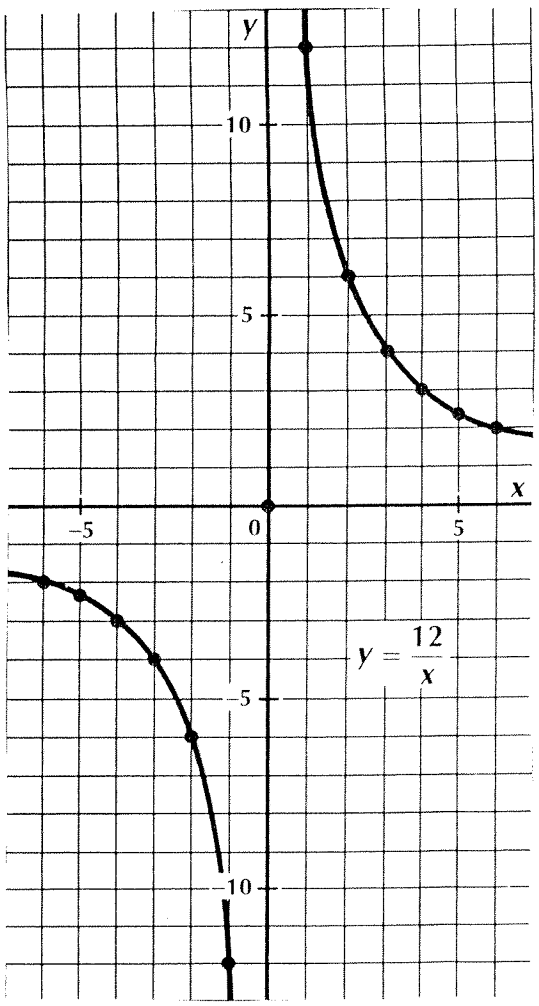
	Planet					
	Mercury	Venus	Earth	Mars	Jupiter	Saturn
Relative distance of planet from sun	0.4	0.7	1.0	1.5	5.2	9.5
Apparent width of the sun	2.5	1.4	1.0	0.7	0.2	0.1

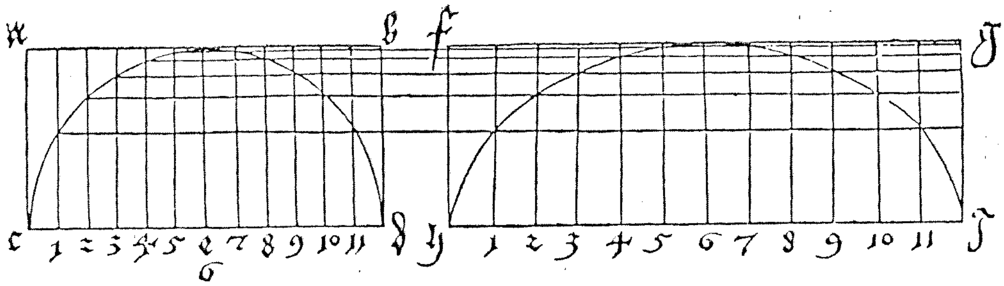
In the table, the distance of each planet from the sun is given relative to the earth's distance from the sun, chosen as 1 unit. For example, the distance of Mars from the sun is 1.5 times the earth's distance. The widths of the sun are given relative to its apparent width as seen from the earth. For example, the sun's width as seen from Mercury is 2.5 times its width as we see it.

What does the graph of this "apparent width" function look like? It is shown on the following page.

A set of circles has been added to the graph to represent the apparent size of the sun as seen from each planet. The parts of the curve between the points from the table represent apparent widths of the sun as seen from positions between the planets. Notice that the curve gets closer and closer to the distance axis as we look toward the right. If the graph were extended to include the remaining three planets, the curve would be very close to the axis by the time we got to Pluto. The apparent size of the sun as seen from Pluto is smaller than a period on this page!







Die alten haben angezeigt/das man dreyerley schnydt durch ein kegel mag thůn/die da vnderschydlich von einander sind vnnd die mit dem fuß des kegels nit ein gleyche zirckellini haben/ sonst mag man den kegel in der mit von eynnander schneiden/ der wirdt geformbt wie der kegel/des acht man auch nit/Aber die andern drey schnyt machen/ytlicher ein sondre lini/die selben linië will jch lern aufreissen/Den ersten schnyt heysen die gelerten Elipsis/ der schneidet den kegel schleyms ab/vnnd nymbt dem fuß des kegels nichtz weg / Diser schlemer schnyt mag an einer seyten höher/an der andern nydrer genůmen werden/ also das ein seyten neher vnnd die ander weyter zů jrem fuß hat/ Der ander schnyt ist jm aufreissen/ein barlini/mit der seyttenn des kegels.a.b. oder vmb kert/wie man will/den die gelerten Parabola nennen/Der dritt schnyt ist im aufreissen/ eynn aufrechte barlini/mit der lini die da auß dem Centrum des kegels fuß vbersich getzogenn wirdet/ in des kegels spitz .a. Den nennen sie Hiperbole/ diser dreyer schnydt namen weis jch auf deutzsch nit zůsagenn / wir wöllenn jn aber namen geben/dabey man sie kennen műg/Die Elipsis will jch ein eyer lini nennen/darumb das sie schyer einem ey gleich ist/Die Parabola sey genennt eyn brenn lini/darumb so man auß jrein spiegel macht so zündt sie an/Aber die Hiperbole will jch einn gabellini nennen/ Nun so jch auf reissenn will die eyer lini Elipsis / muß jch zůuor den kegel aufreissen/ vnnd den schnyt darinn antzeigenn / des gleichen den grund darunder machen dem thů jch also/Des kegels spitz sey oben/a.vnd der fuß vnden b.c.d.e.nun reiß jch auß dem.a.ein aufrechte lini herab/vnd der schlem schnyt durch den kegel sey oben f.vnden.g.disen schnyt.f.g.teil jch mit 11 puncken in 12 teyl/vnd heb die zal vnder dem.f. an. vnder disem kegel reiß jch seyn grund / so wirdt das.a.ein Centrum.vnnd .b.c.d.e. seyn zirckellini / wie das der aufrecht kegel gibt/So nun auß allen punckten aufrecht linien/von jm herab fallen in den grundt/ so durch schneyden dise linien/als.f.g.vnd die zaln die darzwischen sind.1.2.3.ꝛc den zirckelryß/ die betzeichen jch auch mit jren bustaben vnd zifern/So das gemacht ist alßdann nym jch ein zirckel/vnd setz jn im kegel mit dē ein fuß in die aufrechte lini.a.in der höch des schlemen schnydes.f.g.des punckten.1.vñ in diser höch setz jch den zirckel/mit dem andern fuß/herauß an die lini.a.d.vnnd behalt dise weyten mit dem zirckel/vnd drag sie in den nyder gedruckten grund / vñ setz den ein fuß des zirckels/in den Centrū a.vñ den andern fuß/setz jch auf die gestrackt lini.1.vñ reiß rund hynauß gegen dem.d.biß wider zů der lini.1.Darnach setz jch den zirckel wider mit dem ein fuß in dē kegel auf die aufrecht lini. a. in der höch des punckte.2.des schnydes.f.g. vñ den andern fuß setz jch in die lini.a.d. vnd trag die selb weite wider in den grund/vnd setz des zirckels einen fuß/ins Centrum.a.vnd den andern fuß auff die gerad lini 2 vnd reiß von dañ rund gegen dem.d.biß wider auff die gerad lini.2.Also thů jch im vort biß auff. 4. Darnach went jch den zirckel in der zal.5.mitt dem ein fuß auf die lini.a.b.vnd drag das herab/vnnd reiß im grund rund herum/auß dem Centrum.a.von der gestrackten.5.gegen dem/d/biß wider zů diser lini/5/Also thů jch jm darnach durch die gantzen zal/drag all ding auß dem öbern kegel in grundt/ Darnach mach jch auß disem grund die blosse lini Elipsis also /jch reiß die leng des schnydes. f. g.aufrecht/wie sie dann mit jren eilff punckten in 12 gleiche felt geteilt ist / vnnd reiß durch all punckten eylff zwerch barlinien / Darnach nym jch die breiten auß dem grund / auf der geraden lini.1.so weit sie der zirckel abschneydt/vñ drag sie zů dem schnyd.f.g.setz sie auf die lini.1.vnd punckeir die breytē/zů beiden

Traduction anglaise page suivante

CONIC SECTIONS

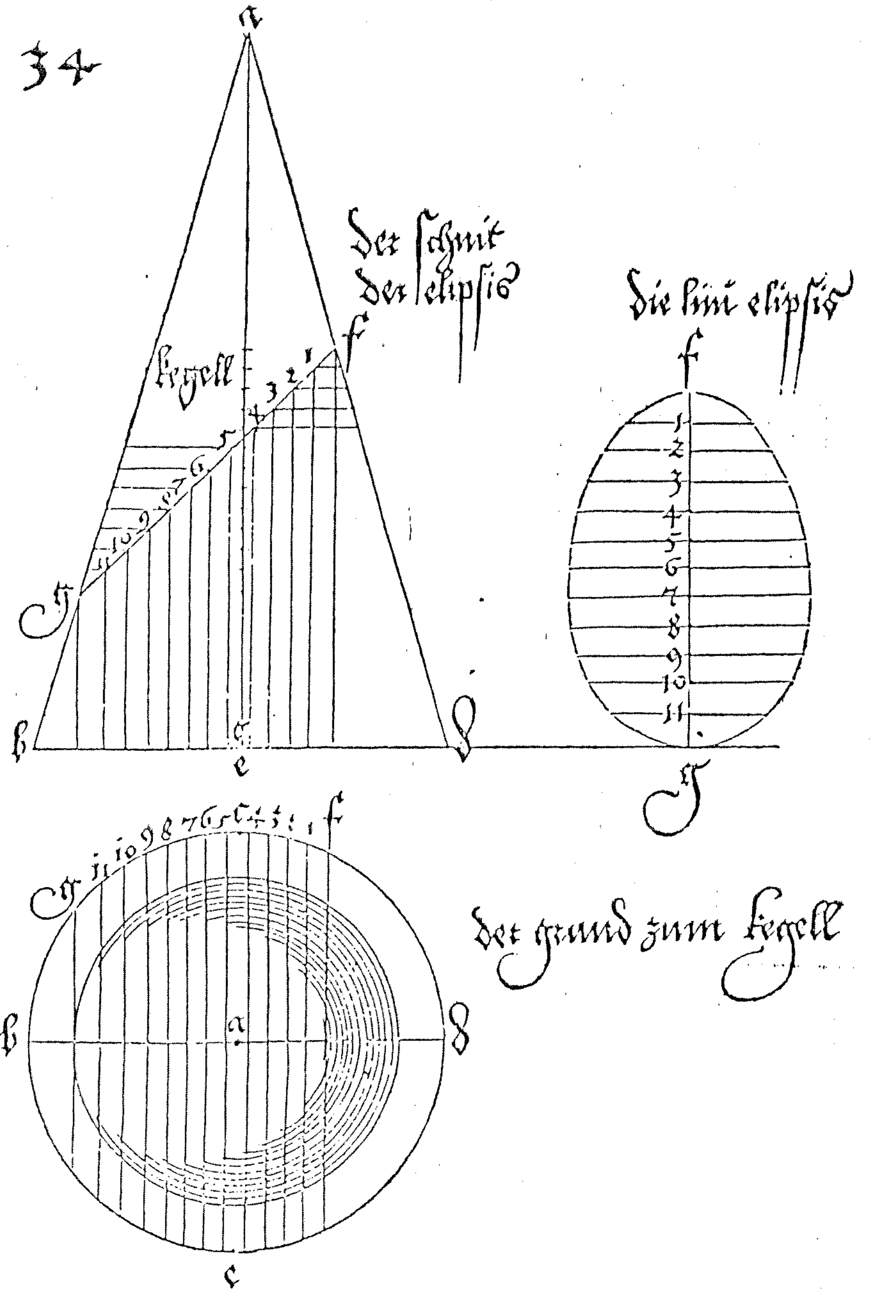
The ancients have shown that one can cut a cone in three ways and arrive at three differently shaped sections. One can also slice the cone down the center. In that case the section is shaped like the cone, but we shall not include this section. But the other three sections are each of a particular configuration, and I want to teach you how to draw them. The first of these is called "ellipse" by scholars. It results from cutting the cone at an angle without touching its base. This cut may be higher on one side and lower on the other, meaning that on one side it can be closer to the base than on the other. The second section results from cutting parallel to the side *ab* of the cone, or cutting on the opposite side. The scholars call it "parabola." The third section is represented in cross section by a vertical line, parallel to a line that extends from the center of the base of the cone to its apex *a*. They call it "hyperbola." I know of no German words for these three sections, but I want to give them names by which they can be called. The ellipse I call *eyer linie* ["egg line"] because it looks like an egg. The parabola I call *brenn linie* ["burn line"] because if a mirror is shaped according to this line, it will set things on fire. And the hyperbola I shall call *gabellinie* ["fork line"].

If I want to draw an ellipse, I will have to draw a cone first in order to show the section, and then place the ground plan below it. I proceed as follows: The apex of the cone shall be on top, marked *a*. The base on the bottom is marked *bcde*. I now draw a vertical line downward from *a*, and I cut an oblique section through the cone and mark it *f* on top and *g* on the bottom. Now I divide this section *fg* with eleven points into twelve parts and begin numbering them below *f*. Below this cone I draw the ground plan of which *a* will be the center and points *b, c, d, e* will denote its circumference, corresponding to the size of the cone. If vertical lines are then extended downward from the cone into the ground plan below, they will traverse a section of the periphery between *f* and *g* which shall be marked at the intersections of the lines 1, 2, 3, etc. After this is done, I place one leg of a compass on line *a* of the cone at the level of point 1, and the other leg at the same level on line *ad*. Then I transfer this distance to the ground plan, setting one leg of the compass on its center *a*, and I draw a curve, beginning from line 1 in the direction of *d*, and continuing down until I reach line 1 once more. I then place one leg of the compass once again on line *a* of the cone, but now at the level of point 2 of section *fg*, and the other leg on line *ad*. I transfer this distance as before to the ground plan by placing one leg of the compass on center point *a* and drawing an arc beginning at the vertical line 2 until it reaches that line a second time. I continue in this manner up to point 4. When I reach number 5, I turn the compass around and place one leg on point 5 and the other one on line *ab*. This distance I transfer down to the ground plan, where I place one leg of the compass on center point *a* and draw a circular curve from line 5 toward *d* and down until I reach line 5 a second time. I then proceed in the same manner with all the other numbers, transferring the distances from the upper cone to the ground plan below. After this has been accomplished, I can draw the ellipse without the lines of construction, as follows: I draw a vertical line *fg* corresponding to the length of the section and divide it with eleven points into twelve equal parts. Then I draw horizontal parallel lines through all these points. After this, I transfer the length of line 1 of the ground plan, as far as it is limited by the curve, to line 1 of the new diagram *fg*, and I mark its extent at both ends.

A contemporary description of conic sections appeared in Johann Werner, Libellus super virgiti duobus elementis conicis, *Nuremberg 1522. It was undoubtedly known to Dürer—Staigmüller 1891, pp. 14-16; Hofmann 1971, p. 144.*
The incorrect assymetrical ellipse continued in use for a long time; e.g., in P. Apian, Perspectiva, *Nuremberg 1535, and in D. Schwenter 1618. For* fig. 33, *see Appendix, p. 445.*

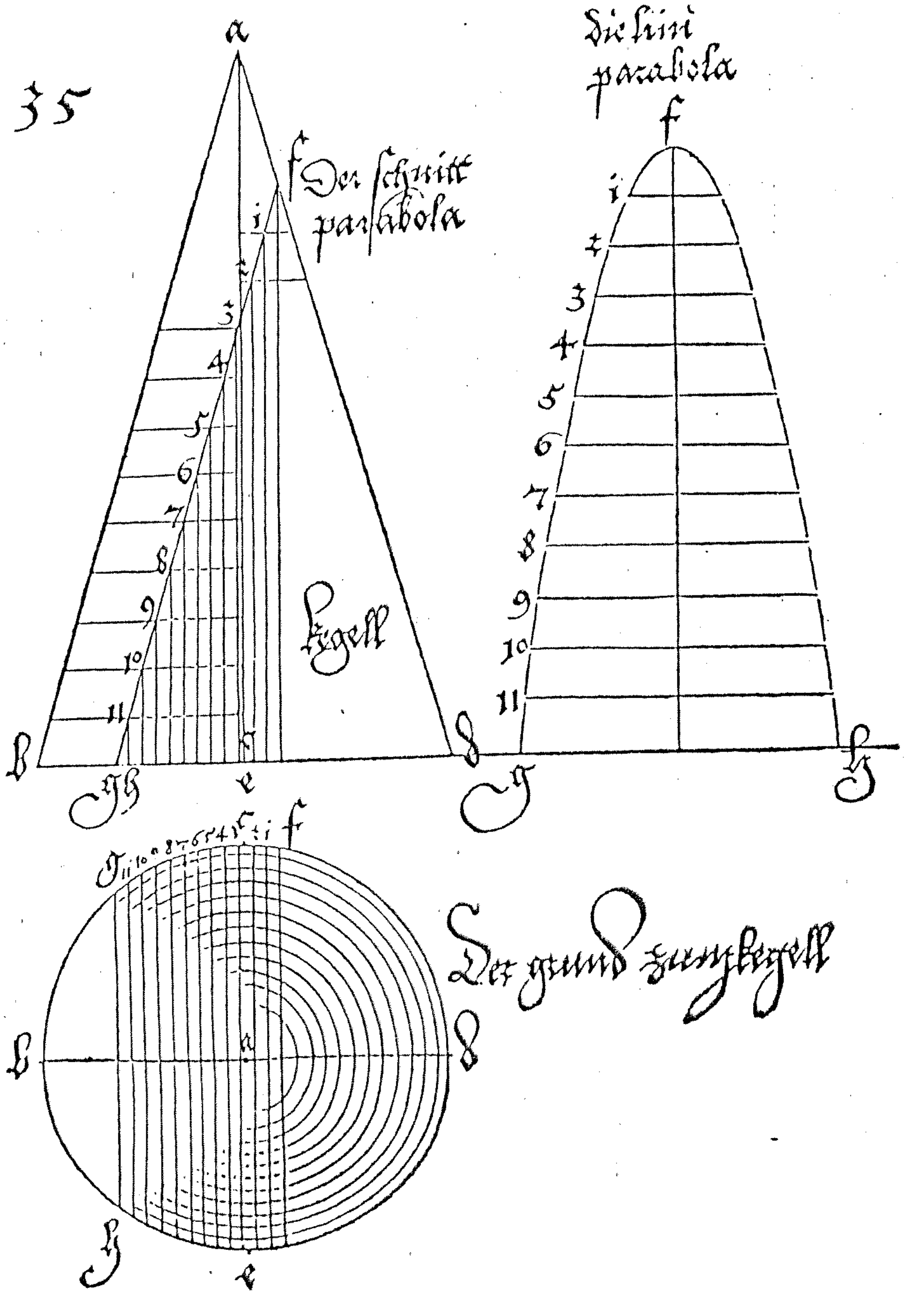
I proceed in the same manner with all the other numbers, and after all the points have been marked on both sides, I connect them and arrive at the ellipse as shown below.

seytten/Also thů ich im durch die gantzen zal/so dann dise punckten zů rings herum gemacht sind/ alß dañ zeüch ich die eyer lini Elipsis von punckt zů punckt/wie ich sölchs hie bey hab aufgerysſen.



Die Parabola ist gleicher weiß zů machẽ/als die Elipsis/Ich reiß erstlich den kegel.a.b.c.d.e.vñ darin die aufrechtlini.a. vnd schneid das parabel/von oben herab biß durch des kegels fuß/also das diser schnyt/ein barlini sey gegen des kegels seyten.a.b.vnd diser schnyt sey oben f.vnd g.h.Darnach teil ich.f.g.h.mit eylf punckten in 12/gleiche felt/vnd reiß zwerch linien durch all punckten in.f.g.h.vnd die so auf der seyten sten gegen.a.d.die selben zwerch linien zeüch ich von der aufrechten.a an des kegels lini oder seytẽ.a.d.Aber die an der andern seiten sten die zeüch ich von der aufrechtẽ a.an die seyten lini des kegels.a.b.darnach mach ich dẽ grund des kegels vnder dem kegel/des Centrũ a.vnd zirckellini.b.c.d.e.ist.Darnach laß ich auß allen punckten der zifer vnd f.g.h.gerad linien/auß dem kegel herab fallẽ/durch den rundẽ grunt/vñ betzeichen sie darin mit jren ziffern/zů gleicher weis
C iiij

Ce texte est reproduit en caractères latins après les figures wie das vor im grund der eyer lini Elipsis angezeigt ist / Dann setz jch den zirckel / mit dem ein fuß im grund ins Centrum.a.vnd den andern fuß auff die gerad lini.j. vnd reiß gegen dem.d.rund hinauß/ biß wider zů der lini.j.Das thů jch auf allen getzifferitten linien/biß das jch gar zů/g.h.kumb / so sicht man von stund an vor augen/des parabels schnyt/im nyder getruckten grund / So das als vertig ist/ so reiß jch die lini des parabels oder brenn lini/auß disem grund also/jch reiß ein zwerch lini/stel darauf aufrecht/die hőch des parabels/im kegel.f.g.h.darnach nym jch auß dem grund die breyten.g.h. vnnd stell sie auf die zwerch lini/also das die aufrecht.f.in der mitt stee/ vnd zeichen dise zween puncten mit g.h.Darnach far jch mit eylf linien durch all punckten der aufrechten.f.so weit jch der bedarff/ vnnd drag auß dem grund alle breytten durch die zal/von allen geraden linien/die durch den zirckelris abgeschnytten sind/zů der aufrechten.f. vnnd puncktir sie zů beyden seytten / das die aufrecht . f. allweg in der mitt bleib / Alßdann zeüch jch die brennlini parabola/von punckt zů punckt/wie jch das hiebey hab aufgerissen.



Die Parabel ist in der gleichen Weise herzustellen wie die Ellipse.

Ich zeichne zunächst den Kegel(aufriß) abcde, mit der aufrechten Linie (der Achse) a und schneide die Parabel aus :
von oben herab bis zum Fuß (der Basis) des Kegels in der Weise, daß dieser Schnitt parallel zur Kegelseite ab sei.

Danach teile ich fgh durch elf Punkte in zwölf gleiche Felder (Teile) und ziehe Verbindungslinien durch alle diese Punkte: von der Achse a nach ad für die Punkte, welche rechts von der Achse liegen. Aber für die Punkte, die auf der anderen Seite liegen ziehe ich die Verbindungslinien von der Aufrechten (Achse) an die Kegelseite ab.

Résumé en Allemand contemporain

Durch die Punkte werden Lote von der näher liegenden Kegelseite auf die Achse a gefällt.

Danach zeichne ich den Grund(riß) des Kegels unter dem Kegel(aufriß) mit dem Zentrum a und der Kreislinie bcde.
Nun laß ich aus allen bezifferten Punkten gerade Linien herabfallen durch den Grundkreis und bezeichne sie darin mit denselben Ziffern - wie vorher bei der Ellipse.

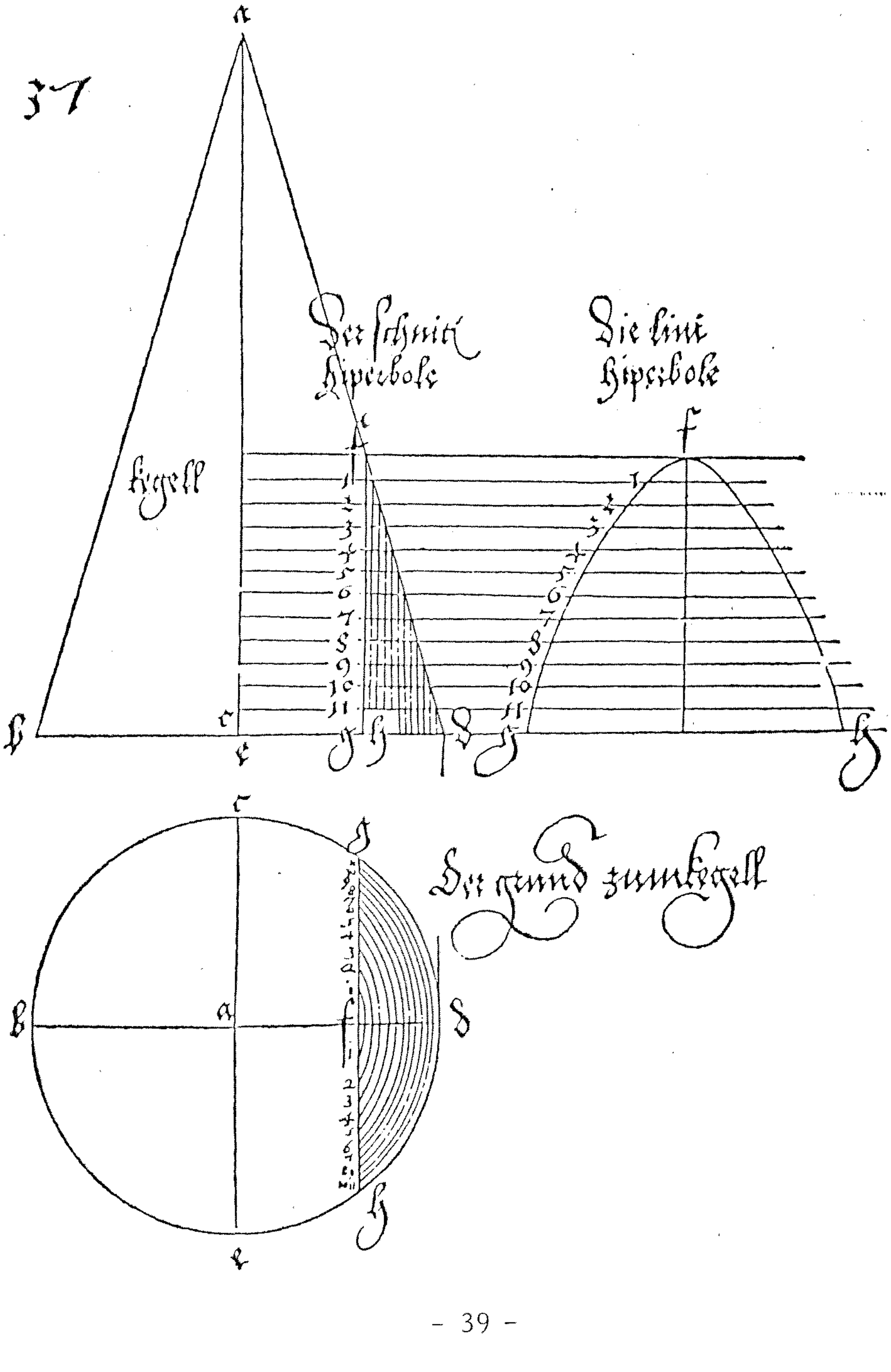
Durch die bezifferten Punkte des Aufrisses werden Parallele zur Achse gezogen. Ihre Schnittpunkte mit dem Grundriß werden mit denselben Ziffern bezeichnet.

Dann setze ich den Zirkel mit dem einen Schenkel auf a, mit dem anderen auf die gerade Linie und beschreibe eine Kreislinie bis zur anderen Seite (der Linie). Das tue ich auf allen gezifferten Linien bis ich zu gh gelange. Auf diese Weise sieht man jetzt den Parabelschnitt im Grund(riß).

Der Kegel wird in der Höhe der bezifferten Punkte durch zur Basis parallele Ebenen geschnitten. Die Radien der Schnittkreise werden im Grundriß eingetragen. Ebenso legt man durch die bezifferten Punkte Ebenen welche parallel zur Achse sind und normal zur Aufrißebene. Die Schnittpunkte ihrer Spuren im Grundriß mit den entsprechenden Kreisen ergeben Parabelpunkte.

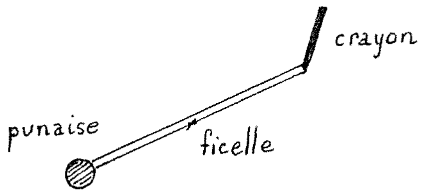
Sobald das getan ist, zeichne ich die Parabellinie (oder Brenn-linie) auf folgende Weise:
Ich zeichne eine Gerade und trage die Höhe der Parabel auf - fgh. Danach entnehme ich dem Grund(riß) die Länge gh und setze sie an die Höhe , sodaß diese normal in der Mitte (von gh) steht.
Nun ziehe ich durch alle elf Punkte der aufrecht stehenden Strecke f Parallele zu gh "soweit ich derer bedarf" und trage alle Breiten wie sie im Grund(riß) bestimmt wurden zu beiden Seiten von f auf. ~~X~~ Danach zeichne ich die parabolische Brenn-linie " von Punkt zu Punkt, wie ich das hierbei hab aufgerissen."
(Bild 3)

Nun will ich fürbaß aufreissen die gabel lini Hiperbole/ diß wirdet ebenn die vorig meynung sein/ich reiß wider den kegel.a.b.c.d.e/Darnach reiß ich in disen kegel/ein aufrechte barlini/ gegen der aufrechten.a.die sey oben.f.vnden g h damit abgeschnytten wirdt die seyten/d/disen schnyt der gabellini hiperbole/f/g/h/teyl ich mit eylf punckten in 12 felt.vnd far auß allen punctē/ von/f/g/h vnd zyfern/mit barlini vber zwerch so weit ich der bedarf/ vnd reiß auf der seytten ein aufrechte lini/f/durch all dise zwerch linien/Darnach mach ich den runden grund/ vnder dem kegel des Centrum.a.vñ zirckelryß.b.c.d.e.ist recht/vñ laß den schnyt des kegels/f/g/h/durch disen grund schneydē/ vnd setz die bustaben.g.f.h.darzů/wie sich das auß dem kegel in grund wirft/ Darnach nym ich eynn zirckel/wie ich vorn angezeigt/vnd nym mit die breyte des halben kegels/auf einer ytlichen zwerch lini/ der lini.f.g.h/vnd trag die herab in grund/vnd setz den zirckel mit dem ein fuß ins Centrum.a. vñ reiß mit dem andern fuß gegen dem/d/ all zirckelryß/die dañ ab geschnyden werden mit der lini/ g/f/h/ vñ setz jr zal darzu/ Darnach nym ich die breiten auß dem grund auf allen geraden linien/die zů beyden seyten abgeschnyden sind worden/vnd drag sie zů der aufrechten lini/ f/vnd kum mit zal auf zal/ vnd puncktir die breyten zů beyden seyten der aufrechten/f/ neben dem kegel von der zal. 1. herab byß auf/g/ h/ Darnach zeuch die gabellini Hiperbole/vonn punckt zů punckt/wie ich das hie vnden hab aufgeryssen/so eygentlich/ ob schon keyn schryft dabey wer/ vermeint ich/ diß solt alles durch sehen käntlich seyn.



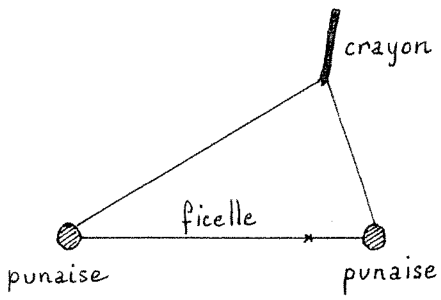
ELLIPSE

1 Construction d'un cercle avec une punaise :



Le dessin ci-contre suggère la construction d'un cercle à l'aide d'une punaise, d'une ficelle et d'un crayon.

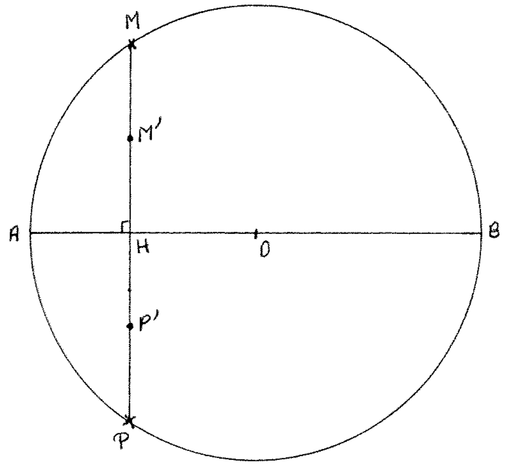
2 Construction d'une ellipse avec deux punaises :



Soit deux points F_1 et F_2 . Planter deux punaises en F_1 et F_2 dans une feuille de papier collée sur un carton. Nouer un bout de ficelle d'une longueur supérieure au double de F_1F_2 et la disposer comme l'indique la figure. Le déplacement du crayon qui garde la ficelle tendue permet de décrire une ellipse de foyers F_1 et F_2.

Cette construction est appelée méthode du jardinier.

3 Construction par affinité :



Dessiner un cercle de centre O, de diamètre [AB] et de rayon r = 8 cm. Soit H un point du diamètre [AB] . La droite perpendiculaire en H à [AB] coupe le cercle en au plus deux points M et P. Placer les points M' et P' tels que $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HP'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HP}$. Renouveler la construction pour un bon nombre de positions du point H. On voit apparaître une ellipse.

En remplaçant $\frac{1}{2}$ par d'autres valeurs, on peut obtenir des ellipses plus ou moins aplaties.

4 Analytiquement :

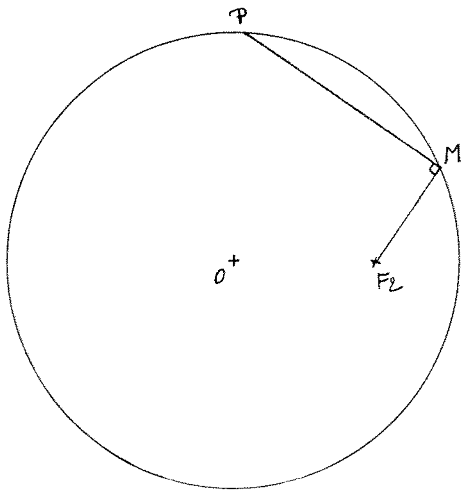
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé (unité = 2 cm)

1. On considère l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M dont les coordonnées (x,y) vérifient l'équation $x^2 + y^2 = 16$
   Vérifier par le calcul que les points M_1 (0 ; 4), M_2 (2 ; $2\sqrt{3}$) , M_3 (2 ;$-2\sqrt{3}$) , M_4 (-2 ; $2\sqrt{3}$) appartiennent à cet ensemble $\mathcal{C}$.
   Touver d'autres points qui appartiennent à cet ensemble et les placer sur le dessin.
   Vérifier que ces points appartiennent au cercle de centre O et de rayon 4.

2. On considère l'ensemble Γ_1 des points M dont les coordonnées x et y vérifient l'équation $x^2 + 2y^2 = 16$
   Placer les points de Γ_1 dont l'abscisse x est égale à :
   -4 ; -3,5 ; -3 ; -2,5 ; -2 ; -1,5 ...
   L'ensemble Γ_1 est une ellipse comme le suggère le dessin obtenu.

3. Reprendre la question 2. en remplaçant l'équation donnée par :
   a) $x^2 + 4y^2 = 16$
   b) $x^2 + 8y^2 = 16$
   c) $2x^2 + y^2 = 16$

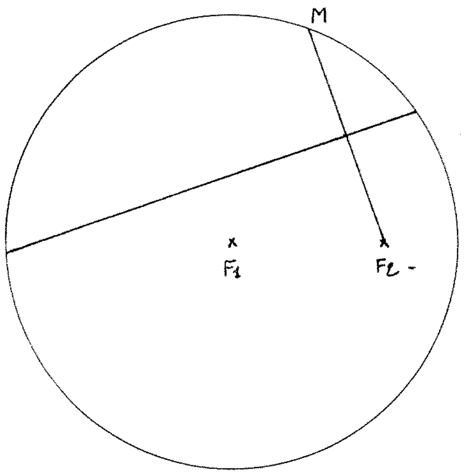
5 Une construction par tangentes :



Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon r = 8 cm. Soit F_2 un point à l'intérieur du cercle tel que OF_2 = 5 cm. Choisir un point M sur le cercle $\mathcal{C}$. Tracer le segment $[F_2M]$, puis la perpendiculaire en M à ce segment qui recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en P. Les segments $[MP]$ enveloppent une ellipse dont les foyers sont F_1 et F_2 ; F_1 est le symétrique de F_2 par rapport à O.

Faire cette construction pour une vingtaine de points. Ne pas manquer de lire l'article de M. GLAESER dans l'OUVERT n° 26, au sujet de cet exercice.

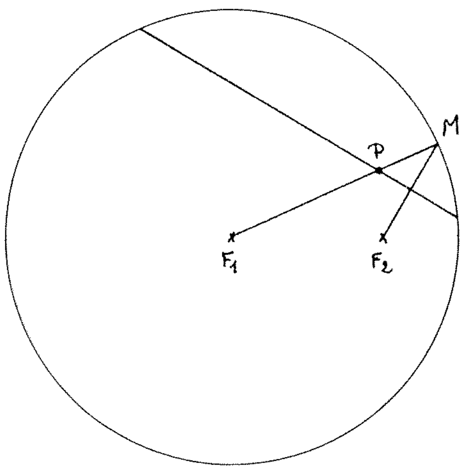
6 <u>Une autre construction d'une enveloppe par tangentes</u> :



Soient F_1 et F_2 deux points du plan tels que $F_1F_2 = 4$ cm et soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre F_1 et de rayon $r = 6$ cm. Choisir un point M sur le cercle $\mathcal{C}$ et dessiner la médiatrice de $[F_2M]$. Refaire cette construction pour une vingtaine de points régulièrement espacés sur le cercle. Toutes les médiatrices dessinées enveloppent une ellipse dont les foyers sont F_1 et F_2.

Remarque : Cette construction n'est pas étrangère à celle donnée en 5. Une transformation étudiée en seconde permet de passer de l'une à l'autre.

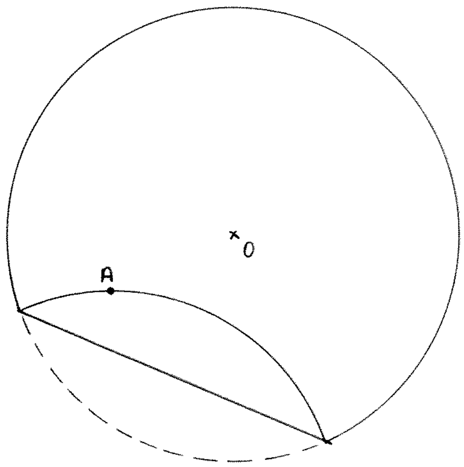
7 <u>Construction par points</u> :



Soient F_1 et F_2 deux points du plan tels que $F_1F_2 = 4$ cm, et soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre F_1 et de rayon $r = 6$ cm. Choisir un point M sur le cercle $\mathcal{C}$, dessiner la médiatrice de $[F_2M]$, et placer le point P intersection de cette médiatrice et de (F_1M). Refaire cette construction pour une vingtaine de points régulièrement espacés sur le cercle $\mathcal{C}$. Les points P appartiennent à une ellipse.

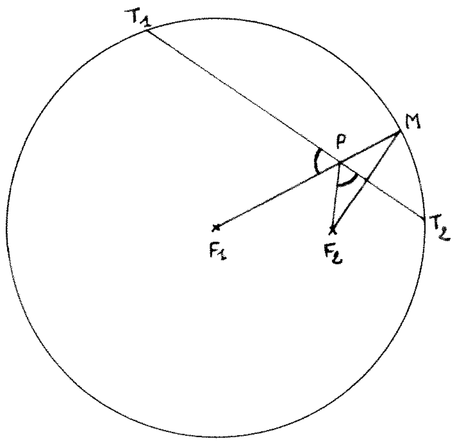
Démontrer que $PF_2 + PF_1 = r$ et comparer à la situation décrite en 2.

8 Pliage d'un cercle :



Dessiner puis découper un cercle de rayon r = 10 cm dans du papier blanc non quadrillé. Placer un point A à l'intérieur du cercle. Plier la feuille de papier suivant une corde du cercle, de façon que l'arc de cercle du rabat passe par le point A. Répéter un bon nombre de fois cette manipulation en changeant de corde. Toutes les cordes obtenues par le pliage enveloppent une ellipse. Comparer cette situation à celle décrite en 6.

9 Rebonds :

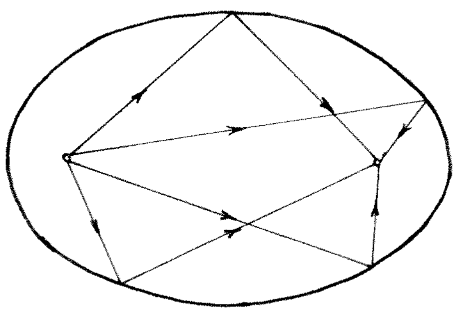


Reprendre la construction décrite en 7
Soient T_1 et T_2 les points d'intersection de la médiatrice de $[F_2M]$ avec le cercle $\mathscr{C}$.
Constater, en utilisant un rapporteur, que les angles $\widehat{F_2PT_2}$ et $\widehat{F_1PT_1}$ sont égaux.

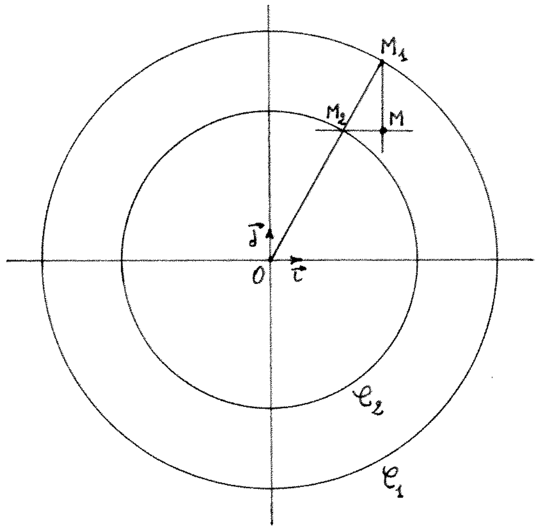
On retrouve cette propriété dans certains phénomènes physiques.

Exemple : Dans un billard elliptique une balle située à l'un des foyers et tirée vers le bord du billard rebondit de façon que sa trajectoire passe par l'autre foyer.

On retrouve cette situation en optique (rayon lumineux réfléchi sur un miroir elliptique) ou en acoustique (son réfléchi sur une paroi elliptique).



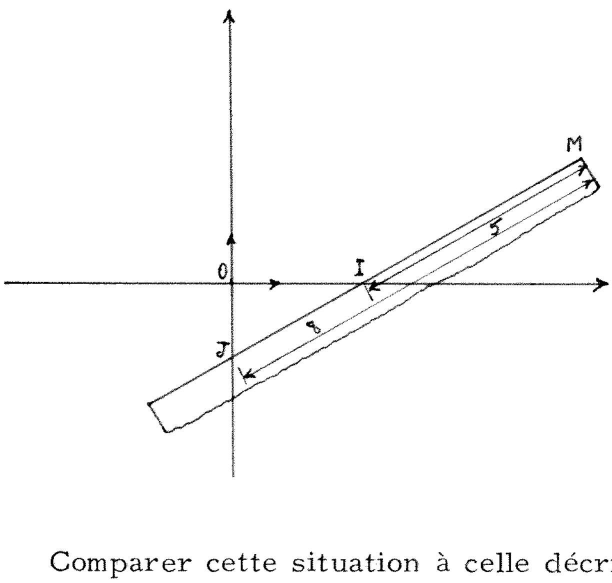
10 Construction d'une ellipse à l'aide de deux cercles :



Soit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon r = 8 cm.
Soit $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon r' = 5 cm.
Une demi-droite d'origine O coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ en M_1 et le cercle $\mathcal{C}_2$ en M_2. L'intersection de la parallèle à l'axe des abscisses passant par M_2 et de la parallèle à l'axe des ordonnées passant par M_1 est le point M.

Reprendre la construction précédente pour un certain nombre de demi-droites d'origine O. Tous les points M sont situés sur une ellipse.

11 Procédé de la bande de papier :



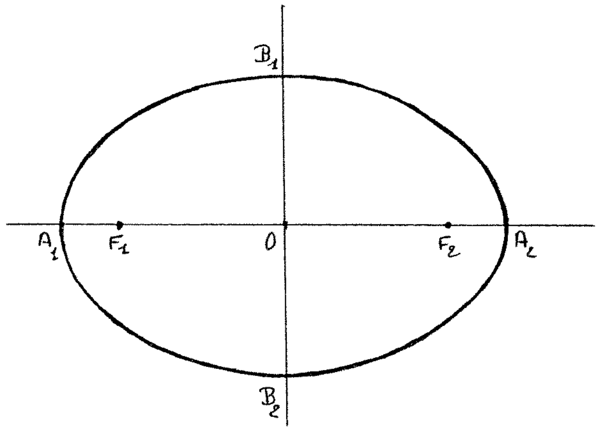
Soit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Le segment $[IJ]$ de longueur 3 cm est marqué sur la bande de papier. On déplace la bande de papier de sorte que I décrive l'axe des abscisses et J celui des ordonnées. A chaque position de la bande de papier on place le point M tel que
MI = 5 cm et MJ = 8 cm.
Le point M décrit une ellipse.

Comparer cette situation à celle décrite en 10 ; on pourra introduire les points M_1 et M_2 tels que $\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{JO}$ et $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{IO}$

Vocabulaire :

On considère une ellipse Γ de foyers F_1 et F_2.

. Le point O milieu de $[F_1F_2]$ est appelé CENTRE de l'ellipse.



. La droite (F_1F_2) est appelée AXE FOCAL ou GRAND AXE de l'ellipse.

. La médiatrice de $[F_1F_2]$ est appelée PETIT AXE de l'ellipse.

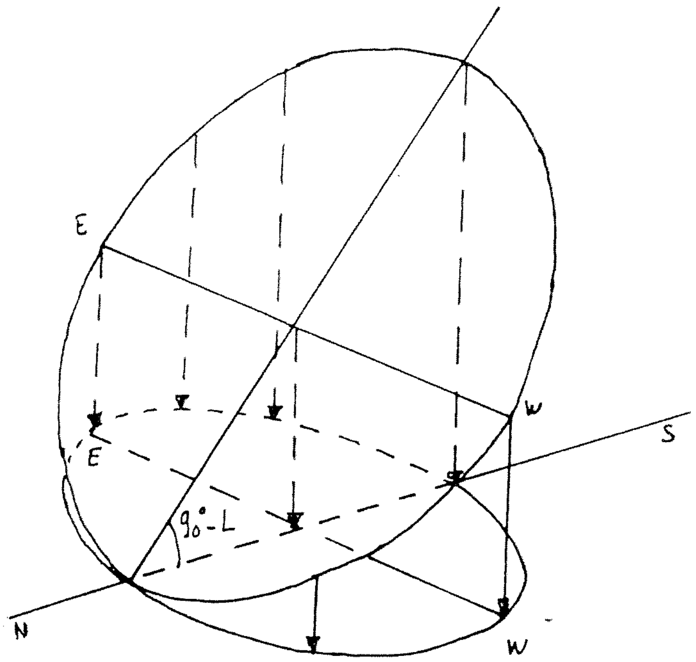
. Les intersections de l'ellipse et de ses axes sont les quatre SOMMETS de l'ellipse.

Par tradition on pose : $OA_1 = OA_2 = a$ $OB_1 = OB_2 = b$ $OF_1 = OF_2 = c$
Le théorème de Pythagore utilisé dans le triangle OB_1F_1 permet d'écrire la relation : $a^2 = b^2 + c^2$
La propriété fondamentale de l'ellipse Γ s'énonce :
Pour tout point M de Γ on a $\boxed{MF_1 + MF_2 = 2a}$
Cette propriété a été mise en évidence dans la construction 2 et elle se vérifie aisément pour les quatre sommets de l'ellipse. En outre, on appelle EXCENTRICITE de l'ellipse le nombre e égal à $\frac{c}{a}$. Ce nombre compris entre 0 et 1 mesure l'aplatissement de l'ellipse. Plus ce nombre est grand, plus l'ellipse est aplatie.

EXERCICES

Construire une ellipse connaissant :

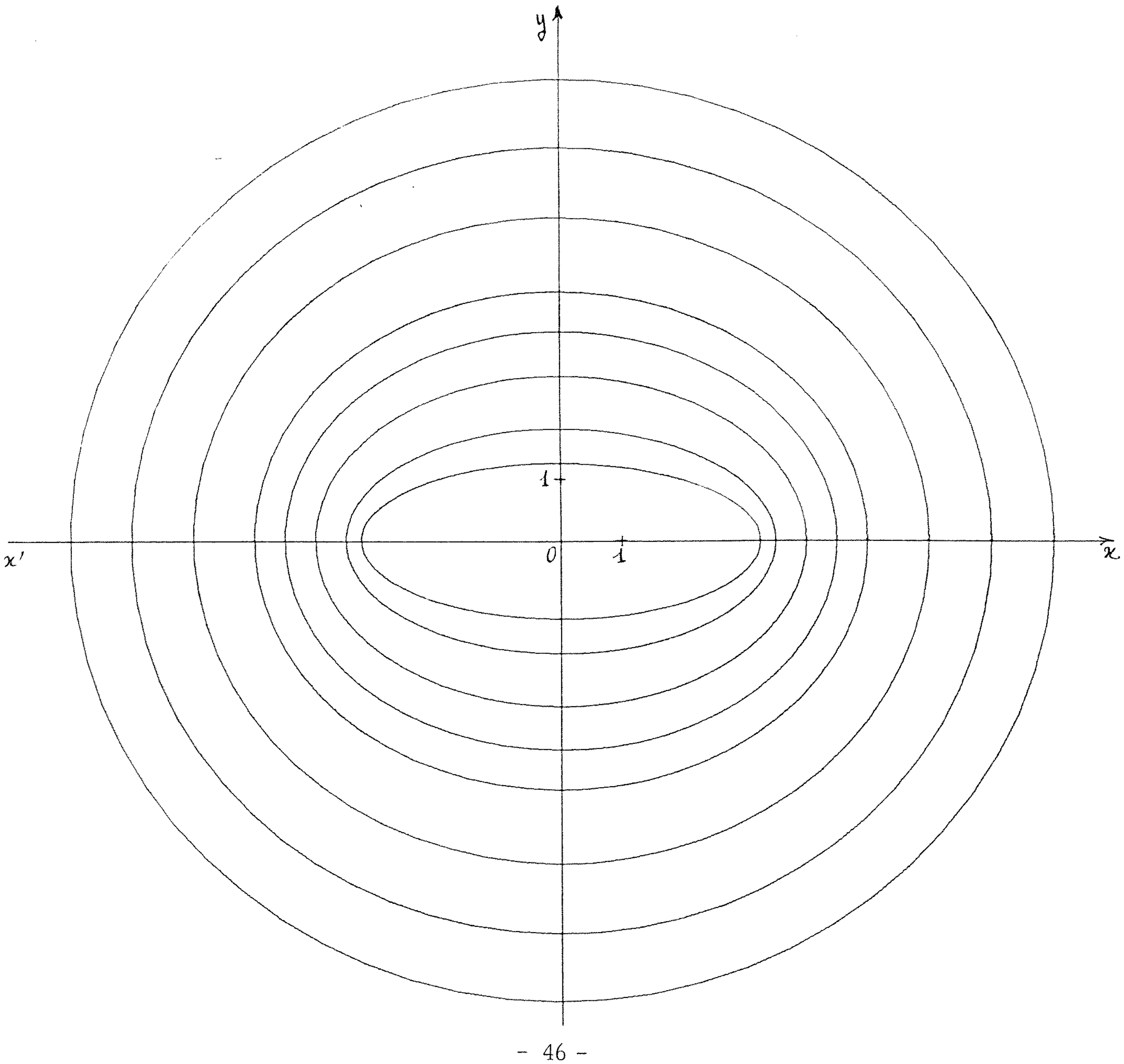
- Les deux foyers et un point
- Les deux foyers et la longueur $2b = 6$ cm
- Les deux foyers et l'excentricité $e = \frac{1}{2}$
- Les deux foyers et l'excentricité $e = \frac{3}{4}$
- Les deux foyers et l'excentricité $e = \frac{1}{4}$
- Un foyer, un point et les longueurs 2a et 2c ($2a = 14$ cm ; $2c = 6$ cm)
- Un foyer, un sommet du petit axe et un point
- Deux sommets du même axe et l'excentricité $e = 0,4$



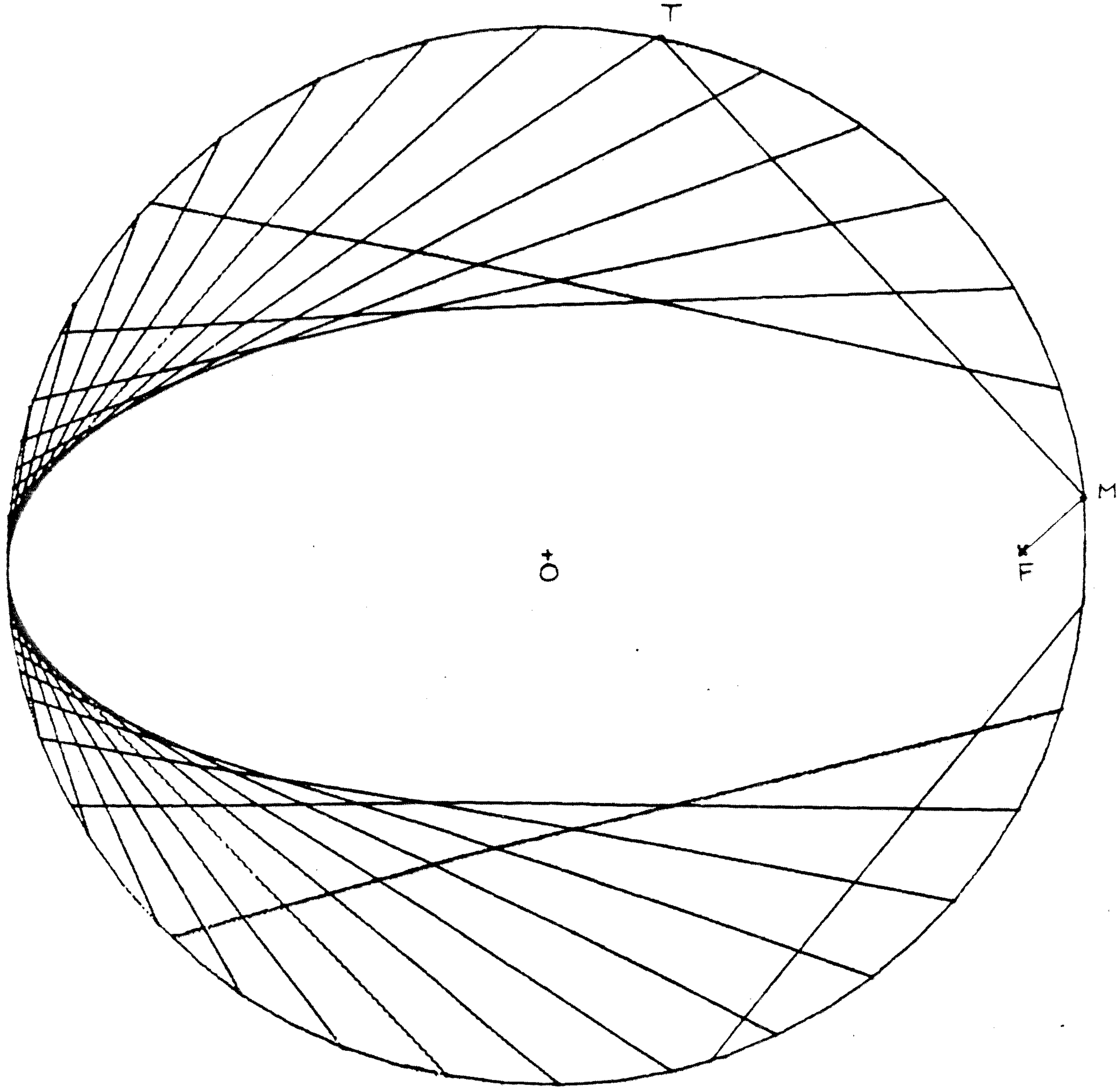
Une manière de tracer une ellipse pour la construction d'un cadran solaire analagmatique. Tracer un cercle sur une feuille de carton et orienter ce cercle suivant un angle de 90° - L par rapport à l'horizontale trace du méridien du lieu qui doit passer par le centre du cercle.
En fixant plusieurs fois sur le cercle un fil à plomb on pourra repérer sur le sol divers points de l'ellipse et la tracer par point (voir figure).

Extrait de "la pratique de l'astronomie", ed. Cédic.

Diverses ellipses de mêmes foyers



UNE ELLIPSE BIEN ENVELOPPEE



La génération tangentielle de l'ellipse a été réalisée à l'IREM sur le traceur Houston commandé par micro-ordinateur LX515 au moyen d'un programme LSE.

On trace d'abord le cercle (en fait un polygone régulier de 62 côtés).

Pour une trentaine de points de ce cercle, on calcule les coordonnées (α, β) de $\overrightarrow{FM}$, puis d'un vecteur $\lambda\vec{u}$ avec $\vec{u}\,(\beta, -\alpha)$.

Il ne reste plus qu'à déterminer λ pour que $[\,\overrightarrow{MT} = \lambda\vec{u}$ et $\|\overrightarrow{OT}\| = R\,]$.
Le traceur joint les points M et T ainsi calculés.

On dispose de procédures LSE permettant de commander le traceur :

- se déplacer du point actuel au point donné (x, y).
- abaisser la plume (pour tracer)
- relever la plume (pour se déplacer sans tracer).

KEPLER

Johann Kepler (1571-1630)

Johann Kepler (1571-1630), astronome allemand, est né à Weil (Wurtemberg). Il fréquenta l'école de grammaire de Weil, puis déménagea dans la petite localité de Leonberg où il obtint un diplôme de l'école latine à l'âge de treize ans. Après une enfance très dure, en raison de son origine modeste, il fut admis gratuitement au séminaire d'Adelbert en 1584 où la discipline rigoureuse et sa faiblesse maladive le laissèrent dans un état déplorable. Par contre, son séjour de trois ans au séminaire supérieur de Maullbronn lui fit recouvrer la santé. Ayant acquis une bonne connaissance du latin, on l'accepta à l'Université de Tübingen en 1589.

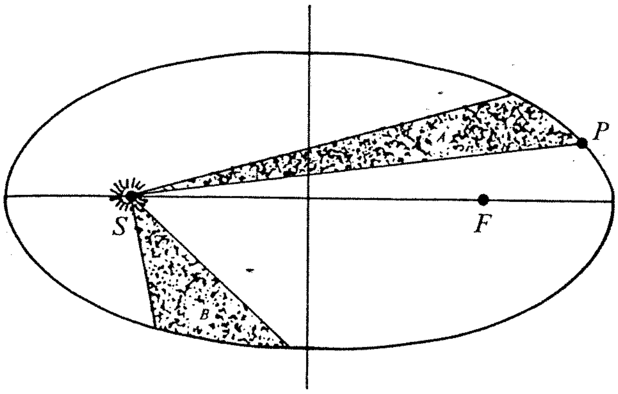
La théologie occupait la première place des sciences que le jeune Kepler se devait d'assimiler, mais le futur astronome accepta d'emblée les idées coperniciennes enseignées par son professeur d'astronomie Maestlin. A l'âge de vingt-trois ans on le recommanda comme professeur de morale et de mathématiques à l'école secondaire protestante de Graz. Chassé de l'école vers 1600 par les persécutions religieuses, il se réfugia alors à Prague, où il devint le disciple et l'assistant du célèbre astronome Tycho Brahé. En octobre 1601, Tycho Brahé meurt et l'empereur Rodolphe II nomme Kepler «Mathématicien de sa Majesté très Chrétienne». En 1612, il perd un de ses fils et sa femme meurt. Ne se plaisant plus à Prague, il accepta un poste de professeur dans un petit collège de Linz ou il demeura pendant plus de quatorze ans. Pendant les quatres dernières années de sa vie, il séjourna à différents endroits, subissant revers sur revers, comme toute sa vie durant. Finalement, il mourut le 15 novembre 1630 à Ratisbonne. Un de ses amis a écrit de lui: «Le Soleil de tous les astronomes s'est couché.»

Kepler apporta des contributions originales à plusieurs sujets mathématiques en plus d'énoncer ses trois célèbres lois du mouvement planétaire.

Dans le domaine des sections coniques, il résolut le problème de la détermination du genre de conique spécifié par un sommet donné, l'axe passant par le sommet et une tangente quelconque avec son point de contact. On lui doit aussi le mot «foyer» utilisé dans la géométrie des coniques, ainsi que le «principe de continuité». A partir d'une section conique obtenue par deux droites concourantes, dans laquelle les deux foyers coïncident au point d'intersection, on passe graduellement par une infinité d'hyperboles lorsqu'un foyer s'éloigne de plus en plus de l'autre. La parabole est obtenue alors au moment où l'un des foyers est situé pour ainsi dire à l'infini par rapport à l'autre foyer. Lorsque le foyer mobile passe au-delà de l'infini et se rapproche de l'autre côté, on passe graduellement par une infinité d'ellipses, pour atteindre le cercle lorsque les deux foyers coïncident de nouveau. Cette notion de «point à l'infini» sera reprise et enrichie en 1822 par le célèbre géomètre français Poncelet.

Dans son *Astronomia nova*, parue en 1609, Kepler énonce ses deux premières lois du mouvement planétaire:

1) Chaque planète décrit une ellipse dont un des foyers est occupé par le soleil.
2) La droite joignant la planète balaie des aires égales en des temps égaux.



Une planète P décrit une ellipse et la droite PS balaie des aires A et B égales en des temps égaux.

Kepler concevait l'aire balayée par le rayon vecteur comme constituée de triangles infiniment petits avec un sommet au soleil et les deux autres sommets sur l'orbite à une distance infiniment petite. De façon similaire, il connaissait l'aire d'une ellipse. La détermination de l'aire balayée par un rayon vecteur et de l'ellipse ne furent pas les seules contributions de Kepler au domaine du calcul différentiel et intégral. En effet, il publia en 1615 un livre, intitulé *Nova stereometria doliorum*, qui traite de la détermination du volume de certains solides générés par la révolution de courbes autour d'une corde, d'une tangente ou même d'une droite extérieure. Il ajouta ainsi quatre-vingt-dix nouveaux solides à ceux qui avaient déjà été proposés par Archimède. Dans le deuxième chapitre de ce livre, il traite du problème de la détermination du volume de tonneaux de vin et montre que, près du maximum de volume, celui-ci change très lentement. Il semble bien que Kepler fut amené à étudier les méthodes volumétriques en observant l'étrangeté des résultats obtenus par la méthode utilisée à l'époque pour mesurer le volume du vin contenu dans les tonneaux.

Pendant que Kepler étudiait le volume des tonneaux de vin, vers 1612, un savant italien, Galilée, scrutait le ciel avec son télescope et étudiait le plan incliné.

Extrait de " Histoire des Mathématiques" *de Jean-Paul COLETTE.*

PARABOLE

1 Une courbe déjà connue :

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère orthonormé (unité = 4 cm).

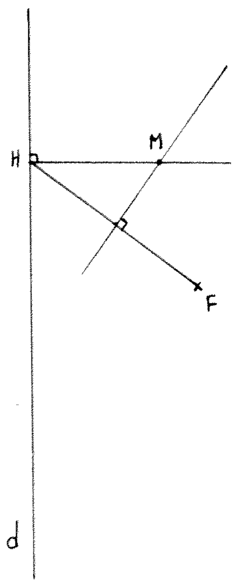
1. Soit $f_1 : x \longmapsto x^2$ et $\mathcal{P}_1$ sa représentation graphique. Placer sur le dessin une vingtaine de points de la courbe $\mathcal{P}_1$ pour x appartenant à l'intervalle $[-2,5 ; 2,5]$. Tracer la parabole $\mathcal{P}_1$. On appelle F_1 le point de coordonnées $(0,\frac{1}{4})$ d_1 la droite d'équation $y = -\frac{1}{4}$. Vérifier sur le dessin, que si M est un point de $\mathcal{P}_1$, il est à égale distance de F_1 et de d_1. Répéter l'expérience pour d'autres points de $\mathcal{P}_1$.

2. Même exercice avec $f_2 : x \longmapsto 2x^2$ et $\mathcal{P}_2$ sa représentation graphique sur un intervalle convenablement choisi. F_2 a pour coordonnées $(0; \frac{1}{2})$ et d_2 a pour équation $y = -\frac{1}{2}$.

3. Même exercice avec $f_3 : x \longmapsto 4x^2$, $\mathcal{P}_3$ sa représentation graphique sur un intervalle convenablement choisi. F_3 a pour coordonnées $(0;1)$ et d_3 a pour équation $y = -1$.

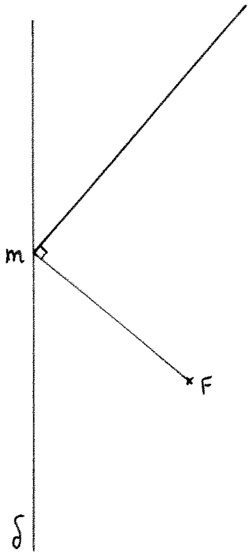
4. Chacune des courbes tracées admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie et O comme SOMMET. Reprendre la première courbe et la regarder en plaçant l'axe de symétrie horizontalement. C'est ainsi que seront disposées les paraboles étudiées dans les paragraphes suivants.
F est le FOYER de la parabole $\mathcal{P}$ et d sa DIRECTRICE .

2 Construction par points :



Soient d une droite et F un point n'appartenant pas à d. Le point M placé sur le dessin est à égale distance de d et de F. Observer la construction et placer une vingtaine de points réalisant la même condition : ils appartiennent tous à une parabole dont on donnera l'axe de symétrie et le sommet.

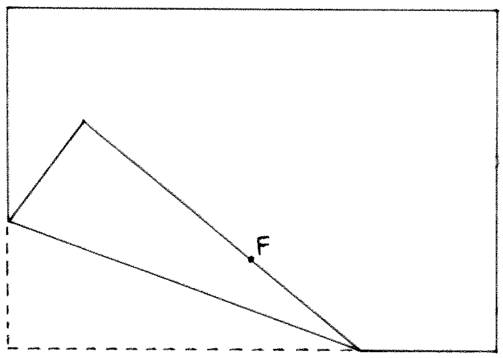
3 Construction par tangentes :



Soient une droite δ et un point F n'appartenant pas à cette droite. Soit m un point de δ . Dessiner en trait à peine visible le segment $[Fm]$ puis en trait de couleur la perpendiculaire en m à (Fm). Il suffira de dessiner une demi-droite comme le suggère le dessin. Renouveler cette construction pour une vingtaine de points choisis sur δ et régulièrement espacés.

Les droites dessinées en couleur enveloppent une parabole de foyer F.

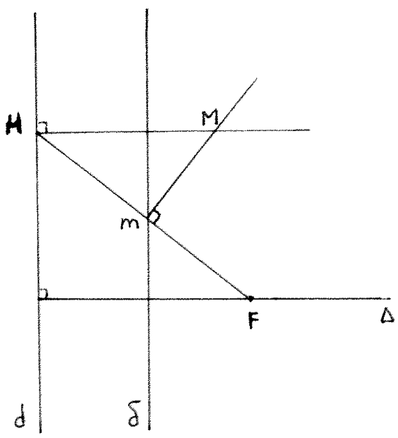
4 Pliage :



Sur une feuille de papier rectangulaire blanc non quadrillé placer un point F. Plier la feuille de papier de façon qu'un des bords passe par le point F, comme l'indique le dessin. Renouveler un bon nombre de fois cette manipulation en changeant de pliure, mais en utilisant toujours le même bord de feuille AB.

Les droites obtenues par pliage enveloppent la parabole de foyer F et de directrice (AB).

5 Points et tangentes :

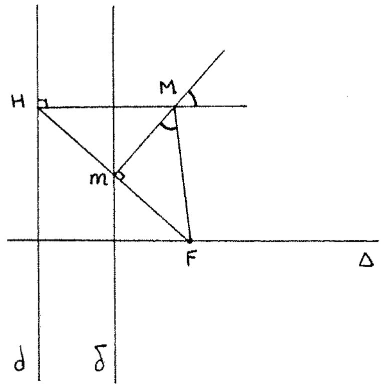


Dessiner deux droites parallèles d et δ et un point F tel que la distance de F à d soit double de la distance de F à δ. Choisir un point m sur δ et en observant la figure ci-contre construire H, puis M qui est l'intersection de deux demi-droites. Démontrer que m est le milieu de $[HF]$.

En déduire que (mM) est médiatrice de $[HF]$ et que M est un point de la parabole de foyer F et de directrice d. La droite (mM) est tangente à cette parabole au point M.

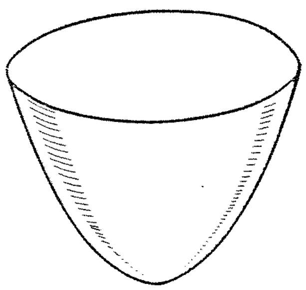
Comparer cette construction à celle du pliage et à celle donnée en 3.

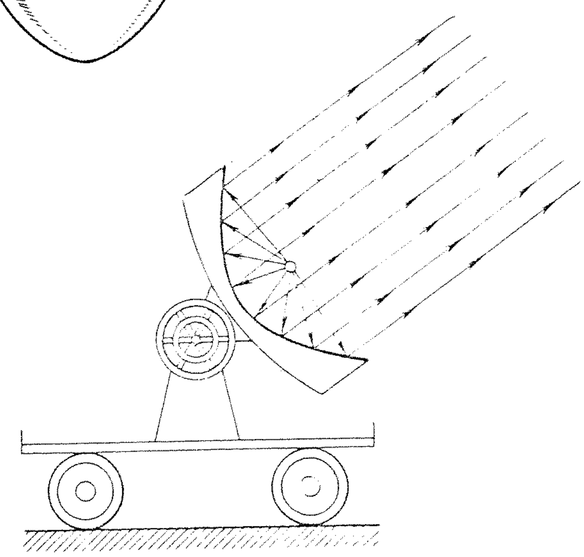
6 <u>Rebonds</u> :



Reprendre le dessin ci-dessus.
Constater, en utilisant le rapporteur, que l'angle $\widehat{FMm}$ est égal à l'angle opposé de $\widehat{mMH}$.

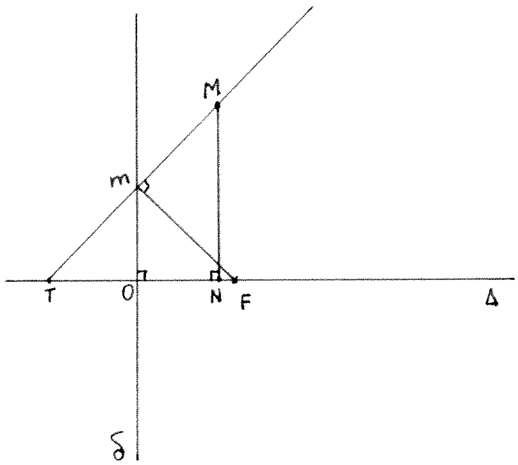
Cette propriété est utilisée en physique en particulier pour les miroirs paraboliques et les radars.





"Lorsqu'une parabole tourne autour de son axe de symétrie, elle engendre une surface appellée paraboloïde de révolution. Un faisceau de rayons lumineux parallèles à l'axe de symétrie se réfléchit sur le paraboloïde et converge en son foyer O , et inversement, si une source lumineuse est placée au foyer du paraboloïde, les rayons lumineux se réfléchissent en formant un faisceau de rayons parallèles.
C'est sur cette propriété d'une surface parabolique qu'est basée la construction des phares". (Edition de Moscou - 3 cours professés dans des cercles mathématiques près de l'Université de Moscou par BOLTIANSKI, FETISSOV et DOUBNOV).

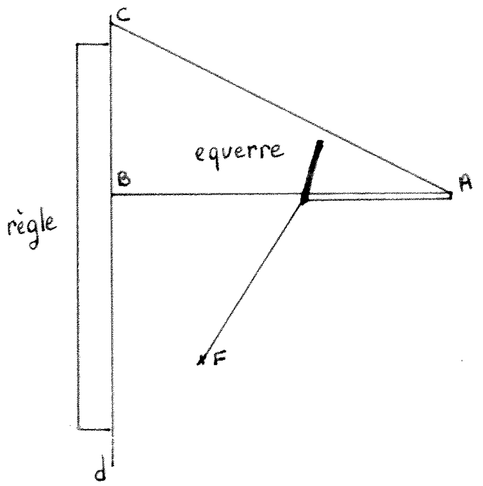
7 Construction par sous-tangente :



Reprendre en trait léger la construction indiquée en 3. En observant la figure ci-contre placer Δ, O, T puis N tel que O soit milieu de [TN] et enfin M.
Effacer les segments [mF] et [NM] et recommencer la construction par d'autres points m de δ.
Tous les points M construits appartiennent à la parabole de sommet O et de foyer F

Chaque droite (TM) est la tangente à cette parabole en M.
Question : Quelle est la directrice de cette parabole ?

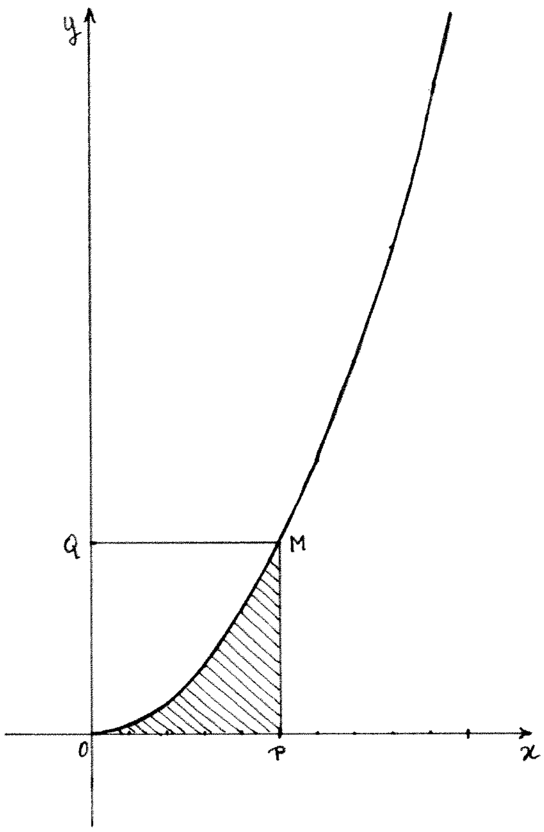
8 Tracé continu de la parabole :



Appliquer une règle sur une droite d du côté opposé à un point F fixe. Faire glisser une équerre ABC le long de cette règle ; un fil de longueur égale à AB est attaché en A à l'équerre et en F. Si l'on tend le fil avec un crayon, de manière à maintenir la portion AM du fil contre l'équerre, on a MB = MF. On obtient ainsi un arc de parabole de foyer F et de directrice d.

9 Propriété d'Archimède

Utiliser pour ce dessin une feuille de papier millimétré.
Tracer avec soin la moitié de la parabole d'équation $y = x^2$ avec $x \geqq 0$ (unité = 5 cm)



Soit M le point de la courbe d'abscisse 1, P son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et Q son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées. Calculer en mm^2 l'aire du rectangle OPMQ et évaluer en comptant les carreaux l'aire du secteur OPM situé "au-dessous de la parabole". (partie hachurée sur le dessin).

Calculer le quotient $K = \dfrac{\text{aire du rectangle OPMQ}}{\text{aire du secteur hachuré}}$

Renouveler l'expérience pour les points M de la courbe d'abscisse : 0,2 ; 0,4 ; 0,6 ; .....; 1,8 ; 2 et retrouver ainsi la propriété d'Archimède : Aire du secteur $= \frac{1}{3}$ aire du rectangle.

EXERCICES

1) Construire la directrice d'une parabole connaissant :

- le foyer et deux tangentes
- le foyer, un point et la tangente en ce point
- le foyer, un point et une tangente

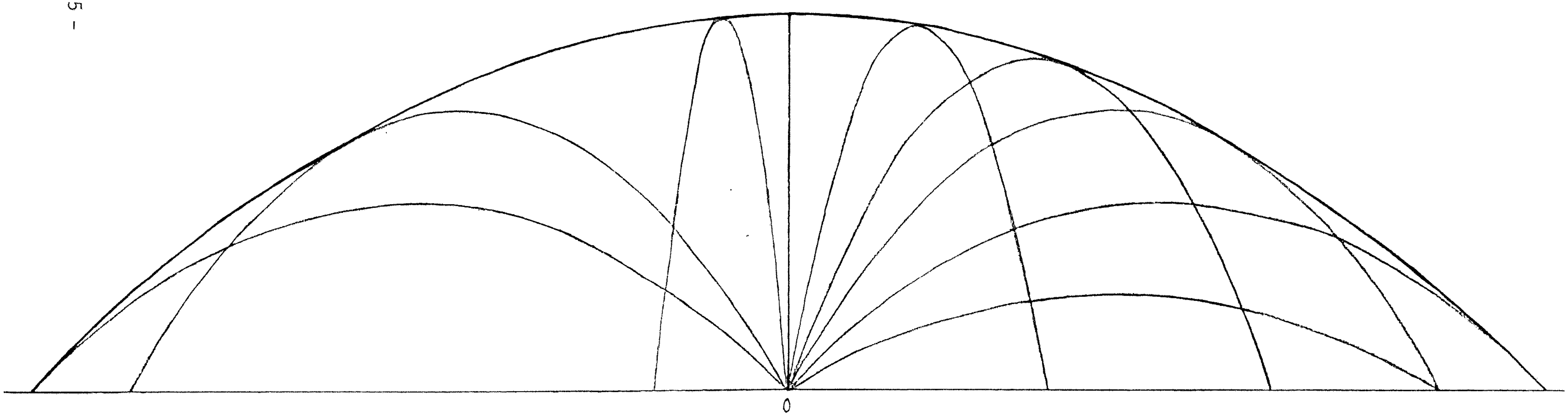
2) Construire le foyer d'une parabole connaissant :

- la directrice, un point et la tangente en ce point

3) Construire le foyer et le d'une parabole connaissant :

- la tangente au sommet et deux tangentes
- la tangente au sommet, un point et la tangente en ce point.

Le dessin ci-dessous représente des trajectoires d'obus tirés d'un point O, avec la même vitesse initiale, dans différentes directions. Ces trajectoires sont des paraboles passant par O. La parabole qui les enveloppe est la parabole de sureté au-dessus de laquelle un avion peut voler sans risquer d'être atteint.

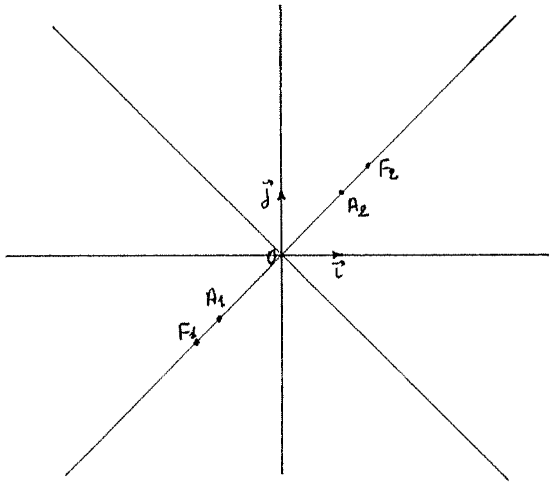


HYPERBOLE

1 Une courbe déjà connue

Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé (unité : 1 cm).

1. Soient $f_1 : x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $\mathcal{H}_1$ sa représentation graphique.



Dessiner avec soin la courbe $\mathcal{H}_1$.
Dessiner les bissectrices du repère et vérifier par pliage qu'elles sont axes de symétrie de la courbe $\mathcal{H}_1$
Placer F_1 et F_2 comme le suggère le dessin ci-contre, de manière que :
$OF_1 = OF_2 = 2$ cm.

Les intersections de la première bissectrice et de l'hyperbole $\mathcal{H}_1$ sont les SOMMETS A_1 et A_2 de la courbe. On doit avoir A_1A_2 sensiblement égal à 2,8 cm (en valeur exacte $2\sqrt{2}$ cm).
Vérifier pour un certain nombre de points M de l'hyperbole l'égalité :

$|MF_2 - MF_1| = A_1A_2$.

2. Même exercice avec $f_2 : x \longmapsto \frac{4}{x}$ et $\mathcal{H}_2$ sa représentation graphique et en prenant cette fois-ci $OF_1 = OF_2 = 4$cm. Constater que A_1A_2 est sensiblement égale à 5,6 cm (valeur exacte $4\sqrt{2}$ cm) et vérifier que :

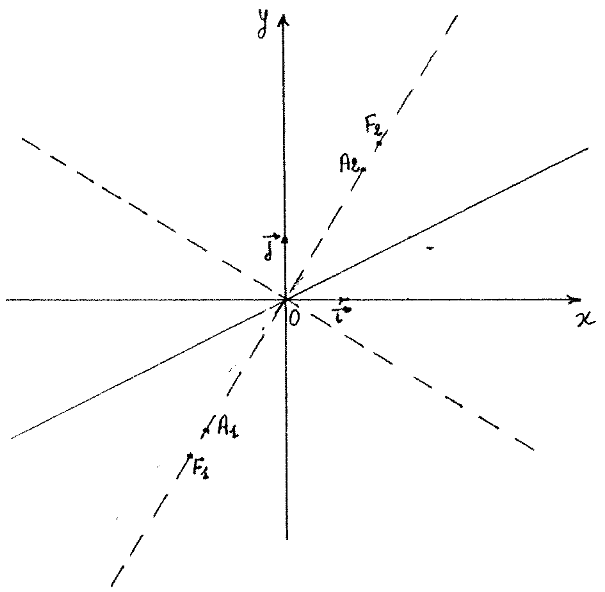
$|MF_2 - MF_1| = A_1A_2$

Les points F_1 et F_2 sont appellés FOYERS de l'hyperbole.

2 Un peu déformée, mais c'est encore une hyperbole :

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé (unité = 1 cm)

Soient $f : x \longmapsto \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ et $\mathcal{H}$ sa représentation graphique.



Dessiner avec soin la courbe $\mathcal{H}$ et la droite d d'équation $y = \frac{x}{2}$.
Vérifier, par pliage que les bissectrices de l'angle formé par la droite d et l'axe des ordonnées sont axes de symétrie de la courbe $\mathcal{H}$.
Les intersections de l'hyperbole $\mathcal{H}$ avec l'un des axes de symétrie sont les sommets A_1 et A_2 de $\mathcal{H}$.

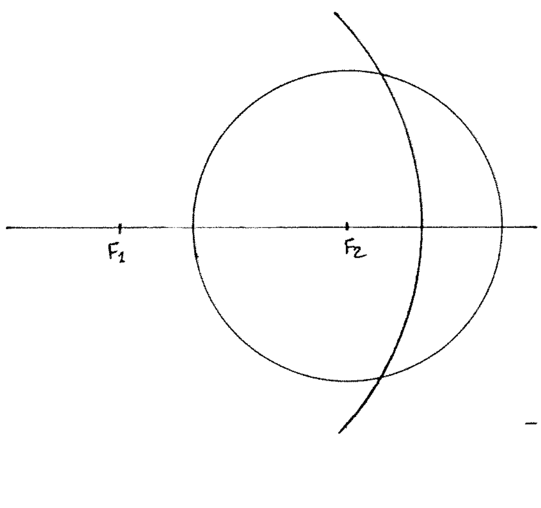
Vérifier que $A_1 A_2$ est sensiblement égal à 5,1 cm (en valeur exacte $2\sqrt{2} \quad \sqrt{\sqrt{5} + 1}$).
Placer F_1 et F_2 , comme l'indique le dessin, et sur la droite $(A_1 A_2)$ tels que : $OF_1 = OF_2 = 3$ cm.

Vérifier pour un certain nombre de points M de l'hyperbole $\mathcal{H}$ l'égalité :

$|MF_2 - MF_1| = A_1 A_2$.

3 Une construction par points :

1. Soient F_1 et F_2 deux points distincts tels que $F_1F_2 = 6$ cm.

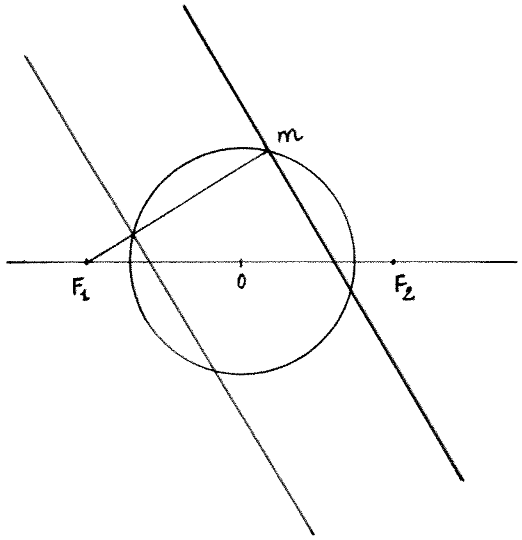


Placer les points M tels que :
$MF_1 = 8$ cm et $MF_2 = 4$ cm
$MF_1 = 7$ cm et $MF_2 = 3$ cm
$MF_1 = 9$ cm et $MF_2 = 5$ cm
$MF_1 = 7,5$ cm et $MF_2 = 3,5$ cm
$MF_1 = 5$ cm et $MF_2 = 1$ cm
$MF_1 = 4$ cm et $MF_2 = 8$ cm
$MF_1 = 3$ cm et $MF_2 = 7$ cm

et d'autres points vérifiant $|MF_2 - MF_1| = 4$ cm.
Tous ces points appartiennent à une hyperbole de foyers F_1 et F_2, dont on déterminera les sommets.

2. Même exercice avec $F_1F_2 = 6$ cm et $|MF_2 - MF_1| = 3$ cm.

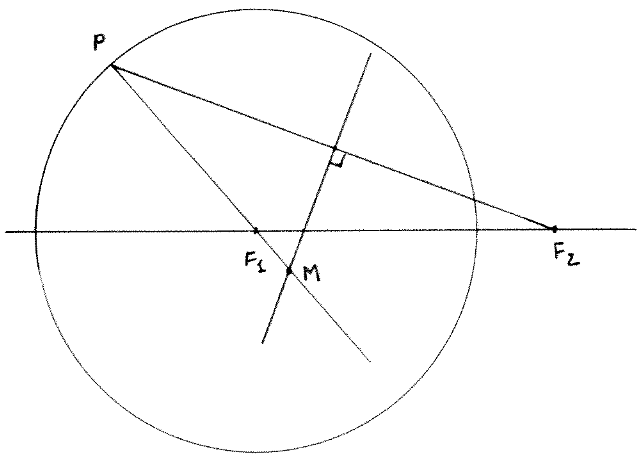
4 Construction par tangentes :



Soient F_1 et F_2 deux points distincts tels que $F_1F_2 = 8$ cm, O le milieu de $[F_1F_2]$ et $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon r = 3 cm. Pour un bon nombre de points m du cercle $\mathcal{C}$, dessiner en trait de couleur la perpendiculaire en m à (F_1m). Toutes les droites tracées en couleur enveloppent un hyperbole de foyers F_1 et F_2.

Question : Où sont les sommets de cette hyperbole ?

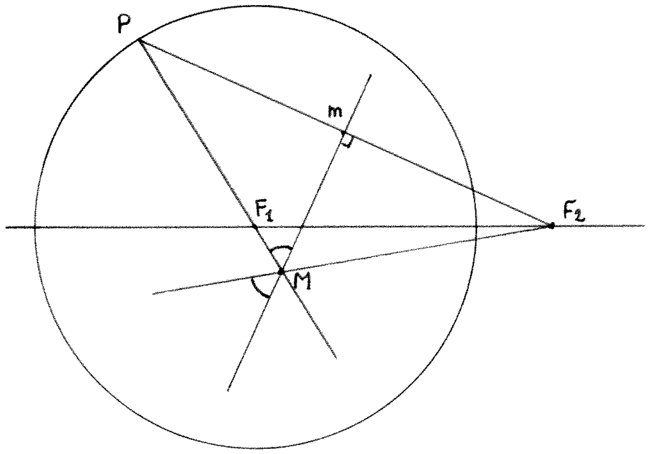
5 Dutre construction par points :



Soient F_1 et F_2 deux points distincts tels que $F_1F_2 = 8$ cm, et $\mathcal{C}$ le cercle de centre F_1 et de rayon r = 6 cm. Pour un point P quelconque du cercle construire le point M intersection de (PF_1) et de la médiatrice de $[PF_2]$.
Renouveler cette construction pour un bon nombre de points P du cercle $\mathcal{C}$.

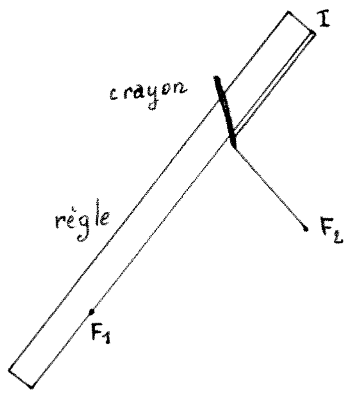
Tous les points M construits appartiennent à une hyperbole de foyers F_1et F_2, dont on déterminera les sommets. De plus pour tout point M la médiatrice de $[PF_2]$ est tangente en M à l'hyperbole.

6 Rebonds :



Reprendre la construction précédente. Soit m l'intersection de (PF_2) et de sa médiatrice. Constater, en utilisant le rapporteur que l'angle $\widehat{PMm}$ est égal à l'angle opposé de $\widehat{mMF_2}$.

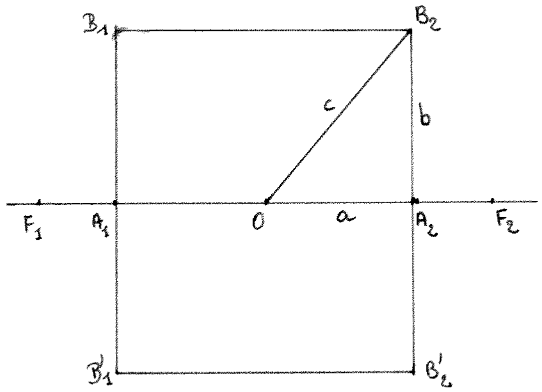
7 Tracé continu de l'hyperbole :



Soient deux points F_1 et F_2. Considérons une règle dont un côté passe constamment par le point F_1. Un fil attaché en F_2 à une épingle et en I sur la règle est tendu, avec un crayon M, de manière que la portion MI du fil reste appliquée contre la règle.

La différence $MF_1 - MF_2$ est égale à la différence entre F_1I et la longueur du fil. On obtient un arc d'hyperbole. En échangeant les rôles de F_1 et de F_2 on obtient un arc de l'autre branche.

Vocabulaire :



On considère une hyperbole $\mathcal{H}$ de foyers F_1 et F_2 .

- Le point O milieu de $| F_1$ et $F_2 |$ est le centre de l'hyperbole.
- La droite (F_1F_2) est appelée AXE FOCAL ou AXE TRANSVERSE de l'hyperbole.

. Les intersections de l'hyperbole et de l'axe transverse sont les SOMMETS de l'hyperbole : A_1 et A_2.

Par tradition on pose $OA_1 = OA_2 = a$ $\quad$ $OF_1 = OF_2 = c$
et b est défini par $b^2 = c^2 - a^2$.
Le théorème de Pythagore permet de construire le rectangle $B_1B_2B'_2B_1$ comme l'indique le dessin.
Les droites $(B'_1\ B_2)$ sont ASYMPTOTES de l'hyperbole. La propriété fondamentale de l'hyperbole $\mathcal{H}$ s'énonce : pour tout point M de $\mathcal{H}$ on a :
$|MF_2 - MF_1| = 2a$.
En outre on appelle EXCENTRICITE de l'hyperbole le nombre e égal à $\frac{c}{a}$, ce nombre est strictement supérieur à 1.

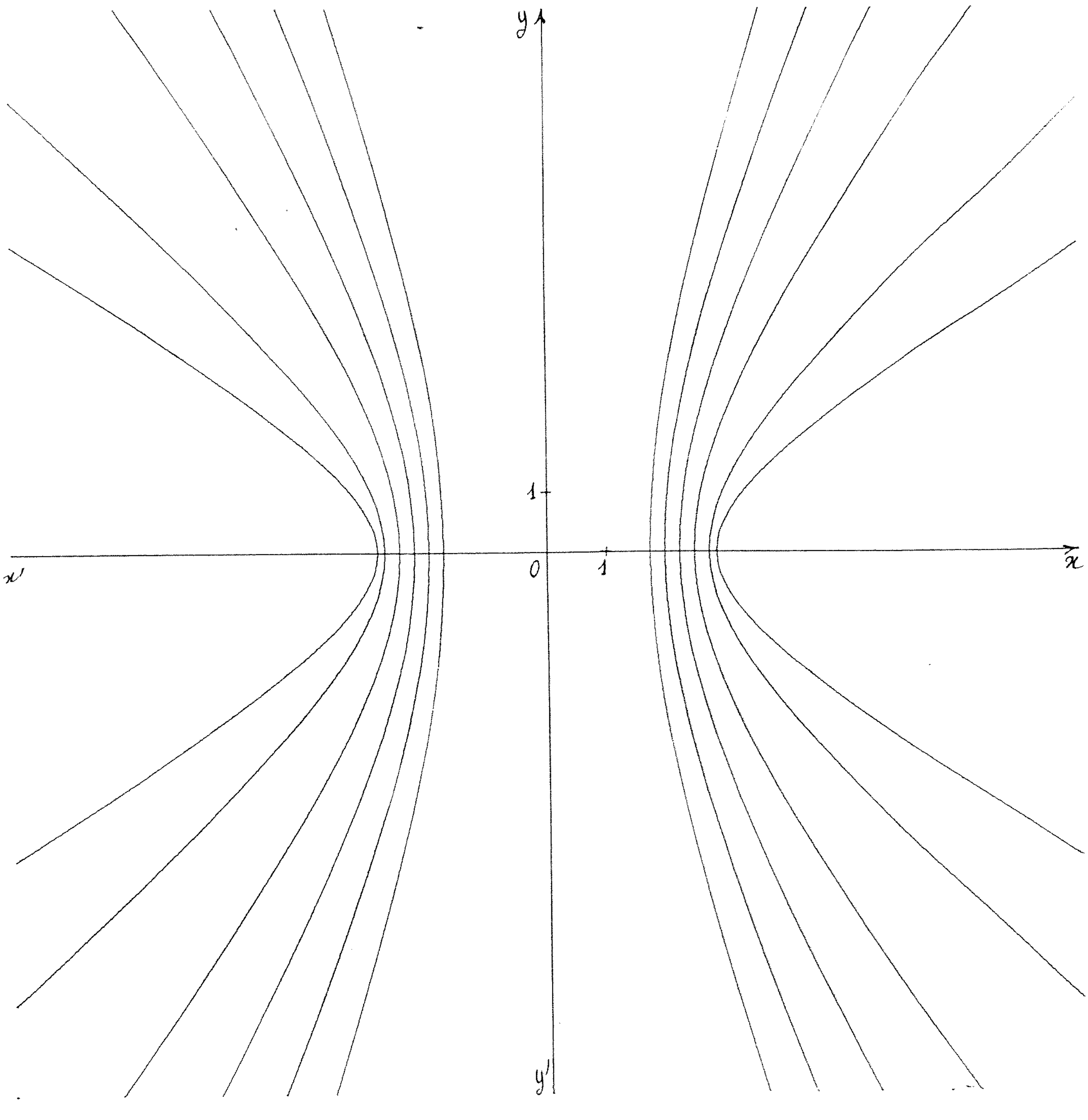
<u>Questions</u> :

1. Dans l'exercice 1 vérifier que les asymptotes de $\mathcal{H}_1$ et de $\mathcal{H}_2$ sont les axes du repère.
2. Dans l'exercice 2 vérifier que la droite d et l'axe y' o y sont les asymptotes de $\mathcal{H}$.
3. Construire les asymptotes des hyperboles tracées aux exercices 3 , 4 et 5 .

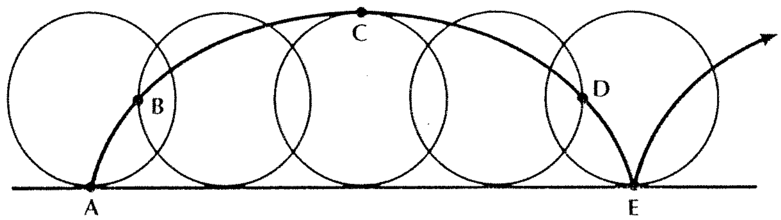
EXERCICES

Construire une hyperbole connaissant :
- les deux foyers et un point.
- les deux foyers et la longueur 2b = 6 cm
- les deux sommets et l'excentricité $e = \frac{3}{2}$
- les foyers et 1 asymptote.
- les asymptotes et la longueur 2a = 8 cm.
- les asymptotes et la longueur 2c = 4 cm.

Diverses hyperboles de même foyer.



cycloide tronchoide ou roulette



Cette courbe, qui fut l'objet de querelles et de concours, ne fut étudiée qu'à partir du XVIIe siècle. Dans son "Histoire de la Roulette", PASCAL assure que le Père MERSENNE fut le premier à l'avoir remarquée en 1615 lorsqu'il considèrait le mouvement des roues.
Mais GALILEE prétendit la connaître depuis longtemps : il l'avait même conseillée pour le profil des arches d'un pont sur l'Arno. Il trouve son aire, en pesant des plaques.

Toujours est-il que cette courbe appelée roulette par PASCAL et tronchoïde par ROBERVAL a été l'objet de recherches et de découvertes de nombreux savants du XVIIe siècle : PASCAL, WALLIS, ROBERVAL, FERMAT, LEIBNIZ, NEWTON, HUYGENS. C'est à cette époque que le calcul infinitésimal prit forme ; il intervient dans des problèmes liés à la cycloïde.

Mais, comme pour bien d'autres objets mathématiques, cette étude qui pourrait n'être que simple jeu de l'esprit, eut une application importante, qui conduit à des progrès non négligeables : la réalisation de montres fiables qui permettaient de conserver un heure juste sur des bateaux soumis à des secouses ; les navigateurs, pour faire le point sur leur longitude, devaient conserver l'heure exacte d'une ville donnée.
Cela n'empêcha pas MAGELLAN d'effectuer le tour du monde plus d'un siècle avant la découverte de la cycloïde.

Cette courbe, qui fut source de tant de querelles prit de nom de "Hélène des géomètres " (MONTUCLA, historien du XVIIe siècle).

Au XVIIIème siècle la noblesse éclairée faisait souvent appel à des savants et des artistes pour meubler des loisirs d'une façon studieuse. Un des chefs d'oeuvre de ce genre de littérature est constitué par les deux gros volumes des "Lettres d'Euler à une princesse d'Allemagne". Pendant deux ans (1760-1762), Léonard EULER (mathématicien né à Bâle en 1707 et mort en 1783) adressa tous les deux jours une chronique scientifique à une cousine du roi Frédéric II, la princesse Ludovica, alors âgée de 15 à 17 ans. Elle fut abbesse dans un couvent pour demoiselles de sang royal.

Dans cet extraordinaire cours par correspondance le savant adopte un ton juste, sans trop de flatteries inutiles. Mais il évite soigneusement tous les calculs, démonstrations et discussions qui pourraient rebuter son Altesse. Les lettres furent publiées en 1768, connurent un succès sans précédent dans le monde scientifique et furent traduites en allemand et en russe dès 1769.

LETTRE CLXIII

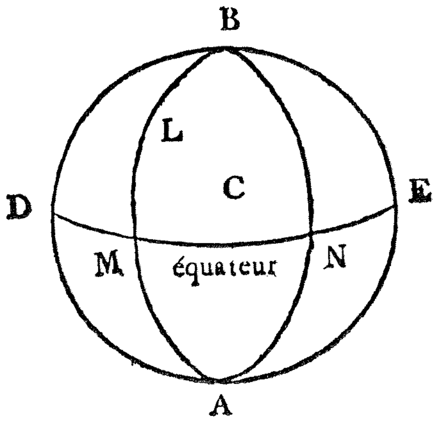
Un moyen très sûr de trouver la longitude seroit une horloge, ou montre, ou pendule si parfaite, c'est-à-dire qui marcheroit toujours si également et exactement, qu'aucune secousse, qu'elle éprouveroit en voyageant, ne seroit capable d'en alterer le mouvement.

Supposons qu'on soit parvenu à exécuter une telle horloge, et faisons voir, comment par son moyen on seroit en état de résoudre le problème des longitudes. Pour cet effet je dois retourner à la considération des méridiens, qu'on conçoit être tirés par tous les lieux de la terre.

V. A. sait, que le Soleil fait tous les jours un tour autour de la terre, et qu'il passe par conséquent successivement au dessus de tous les méridiens dans le tems de vingt-quatre heures.

Or on dit que le Soleil passe *au dessus* ou *par* un certain méridien, si la ligne droite tirée du Soleil au centre de la terre C passe précisément par ce méridien. Ainsi si, à présent, la ligne tirée du Soleil au centre de la terre passoit par le méridien $BLMA$, on diroit que le Soleil passe par ce méridien, et alors il seroit midi en tous les lieux situés sous ce méridien: mais sous tout autre méridien, il ne seroit pas midi dans ce même moment; il seroit donc ou avant, ou après midi.

Pole boréal



Pole méridional

Si le méridien BNA est situé plus vers l'orient que le méridien BMA: le Soleil en faisant son tour de l'orient à l'occident passera par le méridien BNA avant que de parvenir au méridien BMA, il sera donc plutôt midi sous le méridien BNA que sous le méridien BMA; par conséquent lorsqu'il sera midi sous ce dernier méridien, le midi sera déjà passé sous tout autre méridien situé vers l'orient, où il sera déjà après midi. Au contraire il sera encore avant midi sous tout méridien BDA situé plus vers l'occident, parceque le Soleil n'y parvient qu'après avoir déjà passé par le méridien BMA.

Ensuite comme le mouvement du Soleil se fait uniformement, et qu'il acheve le tour entier de la terre, c'est-à-dire 360 degrés, en vingt-quatre heures, il parcourrera chaque heure un arc de 15 degrés. Donc lorsqu'il est midi ici à Berlin, et à tout autre lieu situé sous ce même méridien, le midi sera déjà passé sous les méridiens situés plus vers l'orient; et en particulier sous le méridien éloigné vers l'orient de 15 degrés de celui de Berlin, il sera déjà une heure; sous le méridien éloigné de 30 degrés, deux heures; sous le méridien éloigné de 45 degrés, trois heures après midi etc. et ainsi de suite. Le contraire arrivera aux lieux situés sous des méridiens plus occidentaux que celui de Berlin: et s'il est midi ici, il ne sera que 11 heures avant midi sous le méridien éloigné de 15 degrés; 10 heures avant midi sous le méridien éloigné de 30 degrés; 9 heures avant midi sous le méridien éloigné de 45 degrés vers l'occident, et ainsi de suite; une différence de 15 degrés entre les méridiens, produisant toujours une heure de différence dans le tems.

Pour éclaircir encore mieux, ce que nous venons de dire, considérons les deux villes de Berlin et de Paris: et puisque le méridien de Berlin est de 11 degrés 7 min. 15 sec. plus vers l'orient que celui de Paris, en comptant une heure pour 15 degrés, cette différence de 11 degrés 7 min. 15 sec. donnera 44 minutes et 29 secondes de tems ou à peu près trois quarts d'heures. Donc lorsqu'il est midi à Paris, il y aura à Berlin déjà 44 min. 29 sec. après midi, et réciproquement, lorsqu'il est midi ici à Berlin, il sera encore avant midi à Paris, où l'horloge ne montrera que 11 heures 15 min. 31 sec.; de sorte que le midi n'y arrivera qu'après 44 min. 29 sec. de tems. D'où l'on voit qu'à chaque moment les horloges à Berlin doivent montrer plus qu'elles ne font à Paris, et que cette différence doit faire 44′ 29″ de tems.

La différence entre les méridiens de Berlin et de Magdebourg est d'1 degré 14 min. dont Berlin est plus oriental que Magdebourg: cette différence réduite en tems, donne 6 minutes 40 secondes, que les horloges de Berlin doivent marquer plus que celles de Magdebourg. Par conséquent s'il est midi à Magdebourg, ou si les horloges, que je suppose être bien réglées, y marquent XII heures, les horloges de Berlin doivent marquer au même instant 12 heures 6 min. 40 sec. de sorte qu'il y fasse déjà après midi.

V.A. voit de là qu'à mesure que les lieux different en longitude, ou qu'ils sont situés sous des méridiens différens, les horloges bien réglées y doivent aussi marquer des heures différentes au même instant, et que cette différence doit être d'une heure entiere, lorsque la différence en longitude est de 15 degrés: chaques 15 degrés en longitude produisant une heure de tems pour la différence que des horloges bien réglées doivent marquer dans ces différens endroits au même moment.

Si l'on vouloit donc se servir d'une horloge pour trouver la longitude des endroits par lesquels on passe, il faut d'abord la bien régler en quelque endroit qu'on se trouve: ce Réglement se fait sur l'observation du midi, qui est le moment, où le Soleil passe par le méridien de ce lieu, et alors l'horloge doit montrer précisement XII heures. Ensuite l'horloge doit être tellement ajustée, que toujours après vingt-quatre heures, lorsque le Soleil retourne au même méridien[1]), l'indice après avoir fait deux tours entiers revienne exactement sur XII heures: si cela est bien observé, de telles horloges bien réglées ne seront d'accord en différens endroits, que lorsqu'ils sont situés sous un même méridien; mais lors qu'ils sont situés sous des méridiens différens ou qu'il y a une différence entre leurs longitudes, les tems que les horloges marqueront au même moment seront aussi différens; en sorte qu'à chaque différence de 15 degrés en longitude, il réponde une heure entiere de différence dans les tems marqués par les horloges.

Donc réciproquement, en connoîssant cette différence entre les tems que des horloges bien réglées marquent en différens endroits, au même instant, on en conclura aisément la différence qui se trouve entre leurs longitudes, en comptant toujours 15 degrés pour une heure et un quart de degré pour une minute.

le 15 Septembre 1761

Les explications d'EULER font penser à deux voyages célèbres, l'un réel, l'autre imaginé :

- le tour du monde, en bateau, effectué de l'Est vers l'Ouest par l'équipage de MAGELLAN de 1518 à 1522 (lui-même est tué aux Philippines et ne fait donc pas le tour complet). Pendant tout le voyage les pilotes ont pris soin de noter les jours écoulés. Cependant, presqu'au terme de leur voyage, lors d'un arrêt dans une base portugaise le long des côtes d'afrique, ils apprennent qu'on est jeudi alors que leurs notes et leurs calculs leurs disaient qu'ils étaient à la date d'un mercredi.

- Le tour du monde en quatre vingt jours de Philéas Fogg et Passepartout, situé en l'année 1872 par l' auteur Jules VERNELe voyage se fait de l'Ouest vers l'Est.

LE TOUR DU MONDE EN 80 JOURS

« Surtout, dit-il, que je prenne bien garde de ne pas manquer le bateau !

— Vous avez le temps, répondit Fix, il n'est encore que midi ! »

Passepartout tira sa grosse montre.

« Midi, dit-il. Allons donc ! Il est neuf heures cinquante-deux minutes !

— Votre montre retarde, répondit Fix.

— Ma montre ! Une montre de famille, qui vient de mon arrière-grand-père ! Elle ne varie pas de cinq minutes par an.

— Je vois ce que c'est, répondit Fix. Vous avez gardé l'heure de Londres, qui retarde de deux heures environ sur Suez. Il faut avoir soin de remettre votre montre au midi de chaque pays.

— Moi ! toucher à ma montre ! s'écria Passepartout, jamais !

— Eh bien, elle ne sera plus d'accord avec le soleil.

— Tant pis pour le soleil, monsieur ! C'est lui qui aura tort ! »

Et le brave garçon remit sa montre dans son gousset avec un geste superbe.

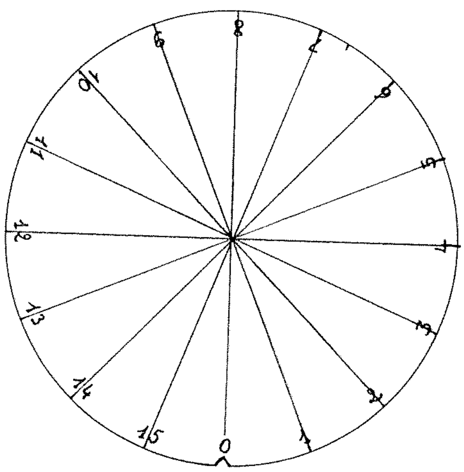
Ainsi Passepartout conserve l'heure de Londres sur sa montre, mais si celle-ci avait indiqué aussi la date, il se serait aperçu qu'ils arrivaient à temps à Londres pour gagner le pari. 79 jours s'étaient écoulés à Londres alors qu'ils avaient vécu 80 jours de voyage (journées racourcies).

CYCLOIDE

1 Définition de la cycloïde :

" La roulette est une ligne si commune, qu'après la droite et la circulaire, il n'y en a point de si fréquente; elle se décrit si souvent aux yeux de tout le monde; qu'il y a lieu de s'étonner qu'elle n'ait point été considérée par les anciens, dans lesquels on n'en trouve rien : car ce n'est autre chose que le chemin que fait en l'air le clou d'une roue, quand elle roule de son mouvement ordinaire, depuis que ce clou commence à s'élever de terre jusqu'à ce que le roulement continu de la roue l'ait rapporté à terre, àprès un tour achevé : supposant que la roue soit un cercle parfait, le clou, un point dans sa circonférence, et la terre parfaitement plane". Pascal.

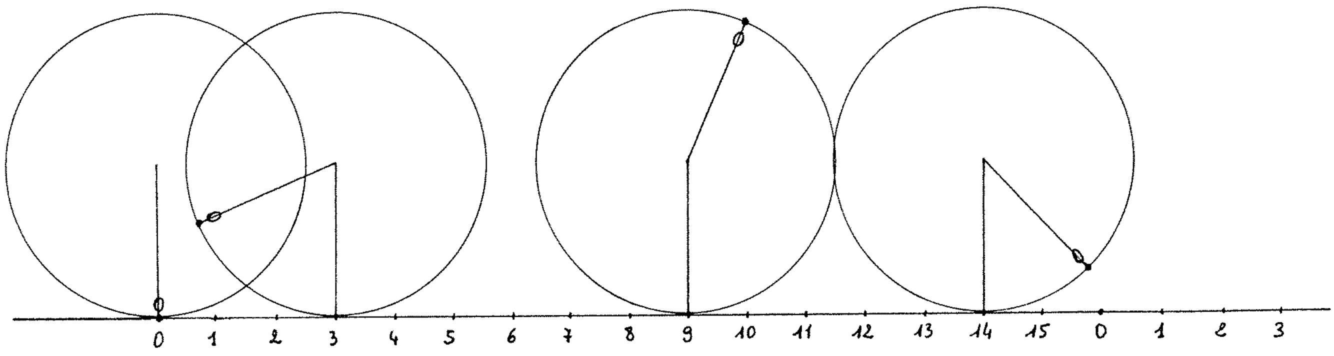
2 Construction par points :



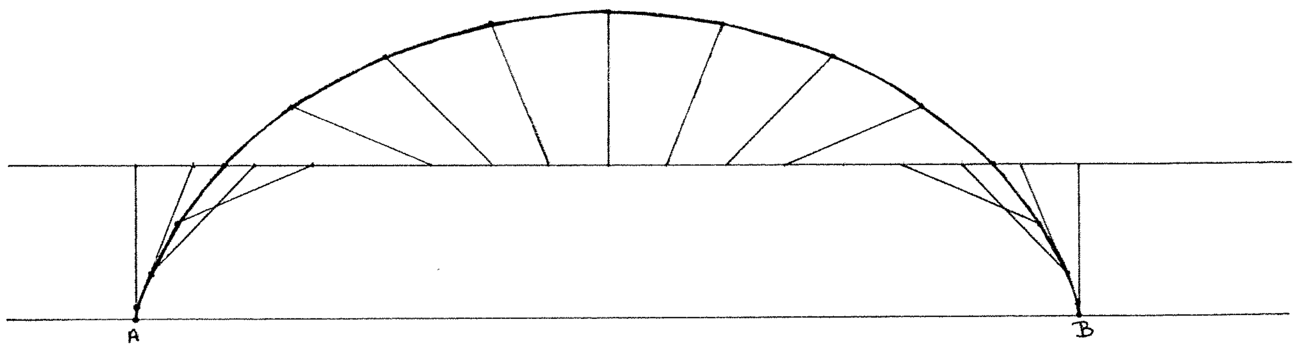
Dans un papier fort et blanc, découper un cercle de rayon r = 3 cm. Partager le cercle en 16 secteurs égaux. Tracer les rayons correspondants et numéroter les de 0 à 15. Marquer une encoche sur le rayon n° 0 au niveau de la circonférence du disque ; elle symbolise le clou de la roue.

Tracer une droite et y placer 21 points distants les uns des autres de 1,2 cm et numérotés 0,1, 2, ..., 14, 15, 0, 1, 2, 3, 4.
Ainsi la distance du point 0 au point 15 correspond approximativement à la circonférence du disque.
On se propose de faire rouler le disque le long de la droite et de noter la trajectoire de l'encoche ; on obtient ainsi **une arche** de cycloïde.
Placer le disque le long de la droite, l'encoche coïncidant avec le n° 0 de la

droite. Lorsque la roue tourne, chaque rayon tracé vient se placer en face du numéro correspondant sur la droite. A chacun de ces instants, faire un point dans l'encoche.



Observer le dessin suivant. Il correspond à une construction analogue à la précédente.



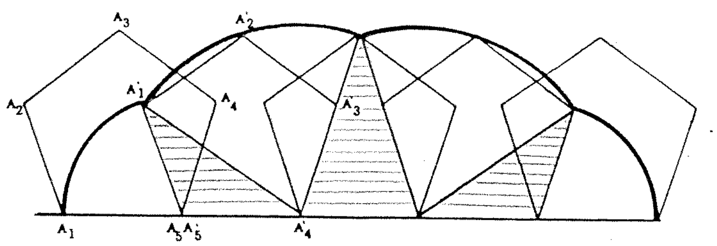
EXERCICE : Voici un exercice proposé dans le livre du problème, vol. 5 de l'IREM de Strasbourg (p. 53).

P (4.12) *Aire et longueur d'une arche de cycloïde approchée*

On sait qu'une cycloïde est la courbe décrite par un point fixé sur un cercle, lorsque ce cercle roule sans glisser sur une droite D. Si l'on remplace le cercle par un polygone régulier à n côtés, un sommet fixé de ce polygone décrit une "cycloïde approchée".

1° Calculer, en fonction de n et du rayon R du cercle circonscrit au polygone, l'aire S_n limitée par une arche de la cycloïde approchée et la droite D.
Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$?

2° Calculer de même la longueur L_n d'une arche de la cycloïde approchée, et étudier la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Effectuer le calcul de L_{18}.



On a représenté ci-dessus une arche de la cycloïde approchée dans le cas d'un pentagone.

<u>Remarque</u> : la somme des aires des triangles hachurés est égale à celle du pentagone.

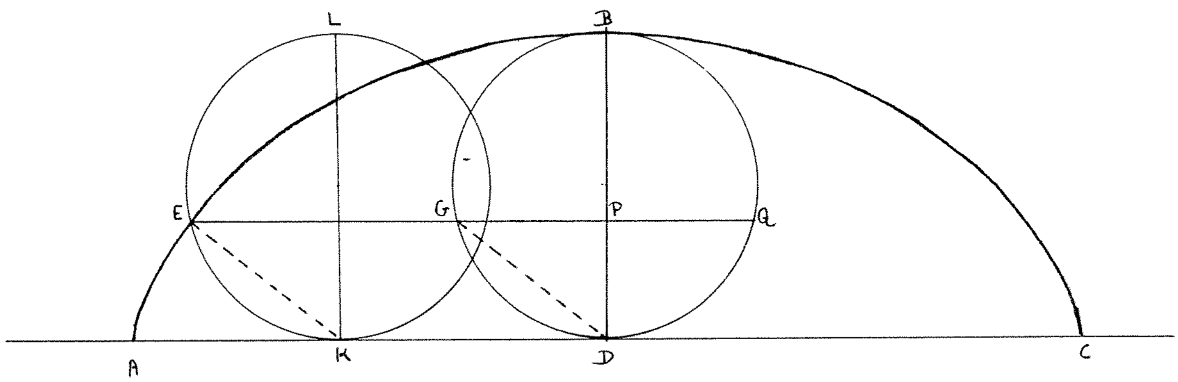
Dessiner la figure obtenue en faisant basculer un hexagone régulier au lieu d'un pentagone. R étant le rayon du cercle circonscrit à cet hexagone, calculer L_6 et S_6 en fonction de R.

Puis dessiner la figure obtenue en faisant basculer un octogone régulier.
R étant le rayon du cercle circonscrit à l'octogone, calculer la longueur d'un côté de l'octogone en fonction de R, ainsi que les longueurs des diagonales de cet octogone.
En déduire L_8 et S_8.

Le calcul est encore assez simple dans le cas d'un dodécagone.
On pourra se dispenser de faire la figure qui est alors difficile à réaliser et à exploiter.

3 Propriété spécifique de la cycloïde : (voir page 80)

Cette propriété a été considérée par FERMAT , PASCAL, WALLIS et HUYGENS comme la propriété caractéristique de la courbe. La démonstration, qui suit est attribuée à WREN ; on la trouve dans " l'horologium oscillatorium" de HUYGENS.



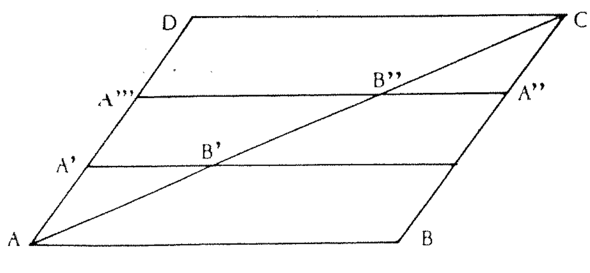
E étant un point de la cycloïde, on montre que le segment EG est égal à l'arc de cercle $\overset{\frown}{GB}$.

On sait que $AD = \overset{\frown}{KEL}$ et $AK = \overset{\frown}{EK}$ par conséquent $KD = \overset{\frown}{EL} = \overset{\frown}{GB}$.

Les segments KD et EG sont parallèles et égaux, les arcs $\overset{\frown}{EK}$ et $\overset{\frown}{GD}$ le sont aussi, donc $\boxed{EG = \overset{\frown}{GB}.}$

4 Roberval, les indivisibles et l'aire sous la cycloïde : (voir page 84)

Cavalieri, poussé par son maître Galilée, publie en 1635 une « *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova Quodam Ratione Promota* » (Géométrie des continus indivisibles suivant une nouvelle méthode). Il n'accepte pas la simplification képlérienne, mais définit une surface comme formée d'objets (segments de droite) ayant une seule dimension, de même un volume comme formé de surfaces planes (une dimension en moins par rapport à un volume). Ce sont les « indivisibles » lesquels ne sont pas des infiniment petits, mais que Cavalieri ne définit nulle part. « *Ainsi les plans constituent un volume comme les pages d'un livre forment ce livre* ». Cavalieri donne l'exemple explicatif suivant



L'aire du parallélogramme ABCD vaut deux fois celle du triangle ABC, car lorsque AA' = CA'', on a A'B' = A''B'' et donc les triangles ABC et ADC sont « composés » d'éléments égaux, donc ont une aire égale.

J.F. Montucla, le célèbre historien des mathématiques, dira :

> « On ne peut disconvenir que Cavalieri s'énonce d'une manière un peu dure pour des oreilles accoutumées à l'expression géométrique ».

Cependant, il faut bien remarquer, ce qu'on lui reprochera étourdiment, que Cavalieri n'empile pas des petites tranches, ou tranches infinitésimales, ayant la même dimension que la surface à mesurer, pour ensuite passer à la limite. C'est à priori que la surface possède les segments de droite comme éléments constitutifs et on déduit l'égalité de deux aires de l'égalité des éléments constitutifs, non pas d'un raisonnement par passage à la limite.

Une application célèbre, le premier théorème du Livre VII de son ouvrage, établit que :

> « Les figures planes, placées entre deux parallèles dans lesquelles des lignes quelconques, parallèles aux premières, découpent des segments égaux, sont égales ».

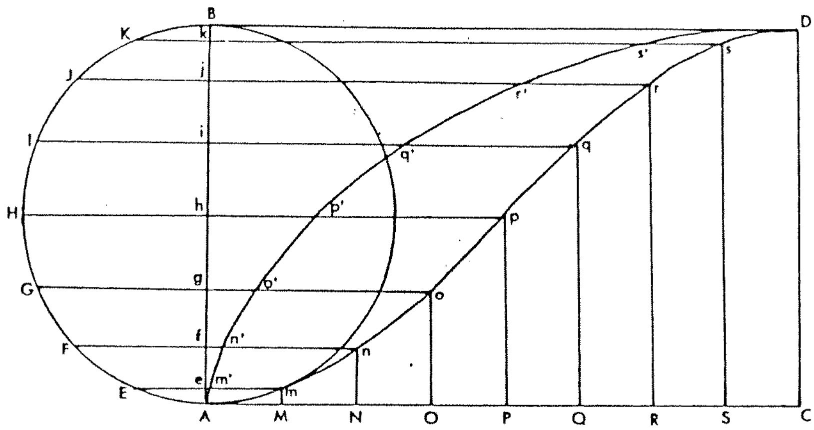
C'est ce résultat que Roberval utilisera pour carrer l'arche de cycloïde en 1634 (*Traité des indivisibles*).

Extrait de :

Nombre, mesure et continu, de Jean DHOMBRES

"Nous allons voir la méthode des indivisibles, appliquée par Roberval, à la quadrature de la cycloïde.

Considérons le segment AC égal à la demi-circonférence $\overset{\frown}{AGB}$ du cercle générateur. Partageons ce segment et cette demi-circonférence en une infinité de parties égales telles que AM = $\overset{\frown}{AE}$. Soient m, n etc.. les points d'intersection des droites Ee, Ff etc.. avec les perpendiculaires menées de M, N etc .. à la droite AC ; ces points sont les points d'une courbe appelée par Roberval, la "compagne" de la roulette. Les points m', n' etc des droites Em, Fn etc tels que Ee = m'm, Ff = n'n etc sont les points de la cycloïde ; en effet, lorsque le centre du cercle générateur est sur la perpendiculaire menée de M à AC alors $\overset{\frown}{AE}$ = $\overset{\frown}{Mm'}$ etc. La compagne



partage le rectangle ABCD en deux surfaces égales car chacun des segments Mm, Nn etc a son égal dans l'autre moitié. D'autre part, l'aire entre les deux courbes est égale à l'aire du demi-cercle AGB car la somme des segments Ee, Ff etc. est égale à la somme des segments m'm, n'n etc. Par conséquent l'aire sous la demi-cycloïde est égale à la moitié de l'aire du rectangle ABCD plus la moitié du cercle générateur, c'est-à-dire aux trois demis de l'aire du cercle générateur. L'astuce de ce calcul consiste en l'introduction de la courbe compagne qui est de toute évidence symétrique par rapport au centre du rectangle ABCD.

Annexe :

Dans une lettre de 1644 à Torricelli, Roberval prétend qu'à l'époque où Cavalieri publiait sa méthode, il était en possession d'une méthode semblable, qui lui était venue à la lecture du "*divin Archimède*" . Dans son "*Traité des indivisibles*", Roberval considère les indivisibles comme un moyen de "*tirer des conclusions*" et il explique les suppositions inhérentes aux indivisibles en leur rendant une dimension supplémentaire : "*la multitude infinie de points*" qui compose la ligne entière représente une infinité de petites lignes ; de même "*l'infinité de lignes représente l'infinité des petites superficies qui composent la superficie totale*" et "*l'infinité des superficies représente l'infinité de petits solides qui composent ensemble le solide total.*" Par conséquent, Roberval utilise et défend les indivisibles bien que sa conception diffère de celle de Cavalieri.

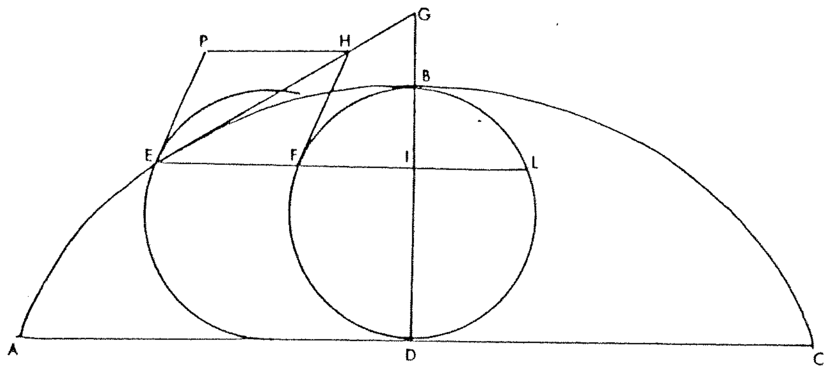
5 Méthode des tangentes de Roberval appliquée à la cycloïde :

Il n'est pas aisé de déterminer à partir de quelle date Roberval possède sa méthode pour obtenir les tangentes. Dans une lettre adressée à Fermat le 4 août 1640 il dit l'avoir "*inventée au temps même que j'inventai cette roulette, laquelle règle ou méthode je n'avais encore communiquée à personne, m'étant contenté d'en avoir démontré les effets à M. Pascal* [1] *en la tangente de la quadratrice qu'il trouvait des plus difficiles*" [2] et date par conséquent son invention de 1635. Pascal, dans son histoire de la Roulette, confirme cette date en affirmant que Roberval, à l'époque où il trouva l'aire de la cycloïde, c'est-à-dire en 1635, y ajouta "*l'invention des touchantes de cette ligne, par une méthode qu'il trouva alors, et qu'il divulgua incontinent, laquelle est si générale qu'elle s'étend aux touchantes de toutes les courbes : elle consiste en la composition des mouvements*" [3]. Pourtant, Descartes donne à Mersenne le 23 août 1638 la construction de la tangente à la cycloïde en disant que c'est une question "*que celui que vous estimez le principal de vos géomètres* [il s'agit de Roberval] *confesse ne savoir pas*" [4]. Pourquoi Roberval aurait-il caché son invention ? Nous reviendrons sur cette question car elle aborde la manière dont le savant considérait sa méthode.

Nous trouvons la méthode de Roberval dans ses "*Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes*" publié en 1693. Le concept de tangente est fondé sur l'idée de mouvement : Roberval énonce l'axiome ou principe d'observation suivant : "*La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point là*" d'où découle la règle :"*Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante : de tous ces mouvements composez en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe*" [5] La démonstration de cette règle est, dit Roberval, "*mot à mot dans le principe*"

Un point décrit une courbe dont la nature dépend du rapport des mouvements auxquels il est soumis; la méthode ne peut donc fonctionner que dans les cas où ce rapport est facile à déterminer. Dans les "*Observations*", onze courbes sont traitées dont la parabole, l'hyperbole, l'ellipse, la conchoïde de Nichomède, la spirale d'Archimède. Nous allons voir l'application de la règle à cycloïde.

Un point de la cycloïde est soumis à un mouvement droit et à un mouvement circulaire ; les directions de ces deux mouvements étant trouvées, la direction du mouvement composé sera la touchante. Considérons un point E de la cycloïde ABC de base AC et d'axe BD . La direction de la tangente FH au cercle de diamètre BD est la direction du mouvement circulaire auquel est soumis E . La direction de la droite EF est celle du mouvement droit. Soit H le point de EG tel que EF = FH , alors HE est la tangente de la cycloïde en E car sa direction est la direction composée des deux mouvements [6].



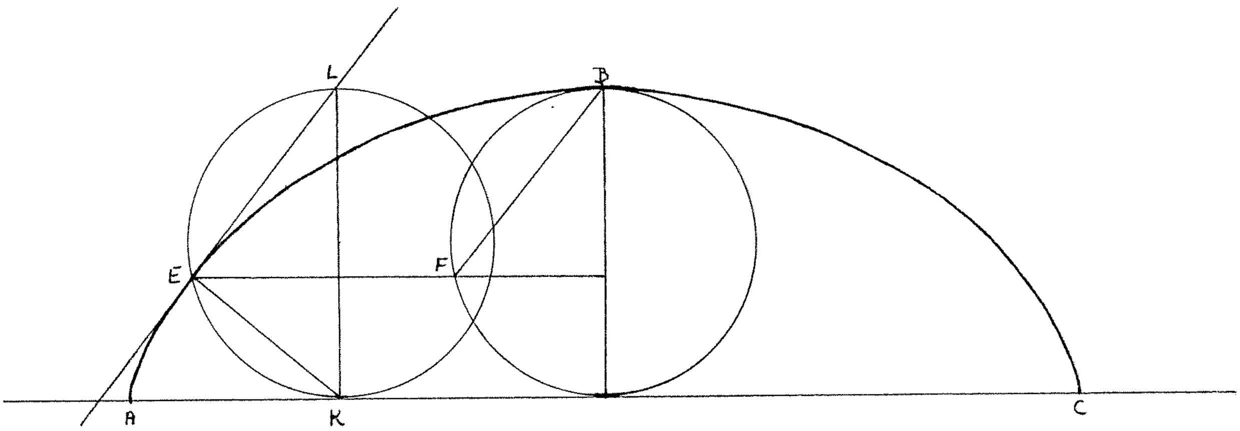
Roberval donne également la construction plus générale englobant les cas où AC n'est pas égale à la circonférence du cercle générateur.

Cette géométrie mécanique inaugurée par Roberval pouvait être féconde, comme le prouveront les travaux de Newton. Elle vaut d'être replacée dans le contexte de ses travaux sur le mouvement des projectiles; dans son Traité de Mécanique il étudie le mouvement d'un boulet de canon : "*La violence d'un boulet de canon est composée de deux impressions. L'une est purement violente, venant du canon même et de la poudre enflammée à pousser le boulet. L'autre est naturelle, étant causée par la pesanteur propre du boulet*

[...] *le mélange de ces deux impressions violente et naturelle fait que le boulet ne suit précisément ni l'une ni l'autre, mais au commencement il suit presque entièrement la violente laquelle est sans comparaison plus grande que la naturelle".* [7] Dans la méthode de Roberval, comme dans celle des Fluxions de Newton, un problème posé sur la nature des courbes se réduit à un problème sur les mouvements. Il n'est pas facile de savoir l'influence que put avoir Roberval dont les "*Observations*" ne furent publiées qu'en 1693. Il faut signaler que Torricelli publia une méthode assez semblable en 1644, ce qui fut cause de disputes entre les deux hommes... et entre les historiens.

[1] Il s'agit d'Etienne Pascal, pere de Pascal.
[2] FERMAT Oeuvres T.H. t.II p.200
[3] PASCAL Oeuvres Seuil p.118
[4] DESCARTES Oeuvres A.T. t.III p. 308
[5] ROBERVAL Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes des lignes courbes. Rec. de l'Acad. tome VI p. 25-25
[6] ROBERVAL Observations .... p. 78-81.
[7] Cité par DUGAS Histoire de la Mécanique p. 145.

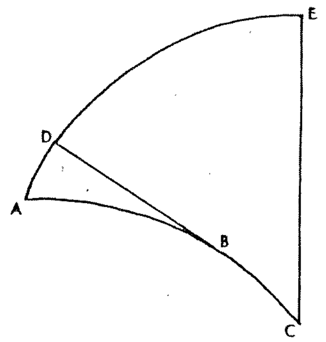
6 Tracé des tangentes et des normales :



Grâce à la méthode " d'adégalité " de FERMAT, on peut établir le résultat suivant : la tangente en E à la cycloïde est parallèle à (FB) c'est-à-dire portée par (EL).
La droite perpendiculaire en E à la tangente en E à la courbe est appelée NORMALE à la courbe au point E. Le triangle LEK étant un triangle rectangle, on en déduit que la droite (EK) est la normale à la cycloïde au point E.

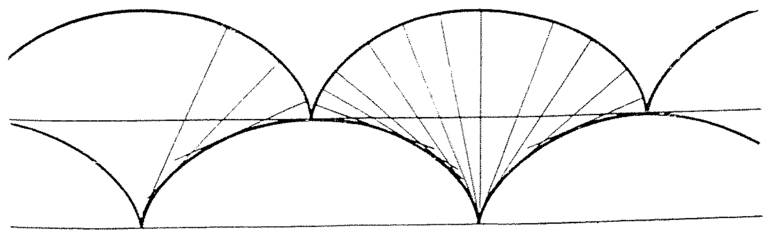
7 La méthode des développées ; le pendule cycloïdal de Huygens :

Dans la troisième partie de "*L'horologium Oscillatorium*" Huygens définit développante et développée d'une courbe : "*Si l'on considère un fil, ou une ligne flexible, enroulé sur une ligne courbée vers un seul côté, et que, une extrémité du fil demeurant attachée à la courbe, l'autre en est écartée de telle manière que la partie libre du fil reste toujours tendue, il est manifeste qu'une certaine autre courbe est décrite par une extrémité du fil. Donnons lui le nom de Développante. Et que celle sur laquelle le fil est enroulé porte le nom de Développée*". Sur la figure, ABC est la développée et ADE la développante, DB est tangente à la développée en B.

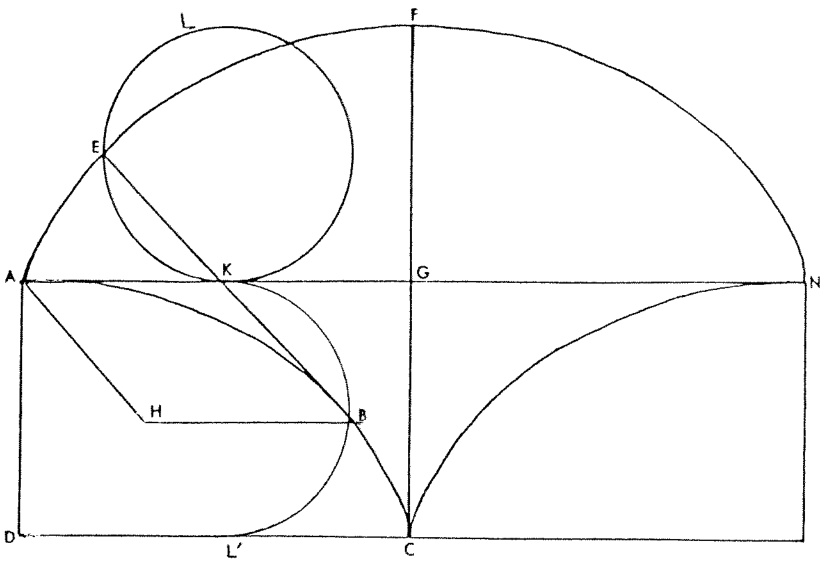


Propriété : Toute normale à la développante est tangente à la développée et inversement toute tangente à la développée est normale à la développante.

Illustration : Dessiner un cercle de cycloïde en utilisant la construction par points donnée en 2 , et pour chaque point placé dessiner la normale en ce point à la cycloïde.



Il semble que la développée de cette demi-arche de cycloïde soit constituée de deux demi-arches de cycloïde. Il suffit de le démontrer.



On peut écrire la suite d'égalités :

$\overset{\frown}{L'B} = \overset{\frown}{EL} = \pi r - \overset{\frown}{EK} = AG - AK = KG = L'C$

Donc $\overset{\frown}{L'B} = L'C$, et le point B appartient à une cycloïde définie par un cerble de rayon r.

Des propositions IV et V, Huygens déduit le résultat cherché : Proposition VI "*Par l'évolution, à partir du sommet, d'une demi-cycloïde, une autre demi-cycloïde est décrite, égale et semblable à la première, dont la base coïncide avec la droite qui touche la Cycloïde développée en son sommet*". En approchant ce résultat de la proposition XXV de la partie II, il conclut qu'"*il est clair que le pendule, suspendu et mis en mouvement entre une paire de lames courbées en forme de demi-cycloïde, décrit par son mouvement un arc de cycloïde et que par conséquent ses oscillations, quelle que soit leur amplitude, sont exécutées dans des temps égaux*".

Huygens avoue "*qu'il ignore si cette propriété remarquable est donnée à aucune autre ligne, savoir celle de se décrire soi-même par son évolution*"[38]. En 1678, de Vausmesle découvrit que la cardioïde [39] se développe en une cardioïde triple de la première et Huygens montra que l'évolution d'une épicycloïde donne une épicycloïde [39]. En 1692, Jacques Bernouilli montra la même propriété pour la spirale logarithmique. Quelques années plus tard, Herman et Craft montrèrent que la cycloïde et la spirale logarithmique [40] à angle constant de 45° sont les seules courbes engendrant des courbes égales [41].

Huygens obtient comme corollaire de la proposition VI que la longueur de la cycloïde est la longueur de l'arc AB . La longueur de la demi-cycloïde ABC est égale à FC , donc double de son axe AD . La longueur de l'arc de cycloïde AB est égale à BE, donc double de BK car EK = AH = BK . Huygens rend à Wren le mérite d'avoir découvert ce résultat puis rend hommage pour leurs travaux sur la cycloïde à Mersenne, Roberval, Pascal et Wallis. Cette phrase de Huygens sera la conclusion du chapitre : "*Pour nous, nous avons rapporté ce qui précède puisqu'il nous semblait que nous ne devions pas passer sous silence des inventions si belles par lesquelles il est arrivé que de toutes les lignes aucune n'est maintenant connue mieux et plus à fond que la cycloïde*" [42].

[38] HUYGENS Oeuvres complètes t. XVIII p. 104

[39] L'épicycloïde est la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon r roulant à l'extérieur d'un cercle de rayon R. La cardioïde s'obtient pour $r = R$.

[40] La spirale logarithmique a la propriété de couper tous ses rayons vecteurs sous un angle constant.

[41] HUYGENS Oeuvres complètes t. XVIII Avertissement p. 40

[42] HUYGENS Oeuvres complètes t. XVIII p. 204.

QUELQUES NOTES SUR LA VIE ET L'OEUVRE DE HUYGENS

Christiaan Huygens

HUYGENS

Un très grand savant de réputation internationale, mais dont les activités principales sont d'ordre mécanique, astronomique et physique, plus que d'ordre géométrique ou algébrique, voilà **Christiaan Huygens** (1629-1695). Né à La Haye, fils de Constantin Huygens, secrétaire du stathouder des Provinces-Unies, il fit ses études à l'Université de Leyde où il fut l'élève de Van Schooten. À l'âge de 22 ans, il publia un court texte pour réfuter la prétendue quadrature du cercle de Grégoire de Saint-Vincent. En 1654, il fit la preuve du procédé trigonométrique de Snell (physicien hollandais à qui nous sommes redevables de la découverte de la loi de réfraction) pour le calcul de π, et durant cette même année, son frère et lui élaborèrent une nouvelle technique de polissage du verre qui leur permit de réaliser des observations astronomiques, par exemple sur la nature des anneaux de Saturne.

Il se rendit à Paris en 1665 où il fréquenta la plupart des savants français et s'y fixa de 1666 à 1681, recevant de Louis XIV une pension de 6000 livres. Membre de l'Académie des sciences dès l'origine, il fut forcé de retourner en Hollande en 1685, à cause de la révocation de l'édit de Nantes qui obligeait tout protestant à quitter la France catholique. Professeur dès lors à Breda, il y diffusa la géométrie cartésienne et, en 1689, il se rendit en Angleterre pour faire connaissance avec Newton. Il passa ses dernières années en Hollande où il se consacra à ses études sur la propagation de la lumière.

Le plus célèbre de ses ouvrages *Horologium oscillatorium*, publié à Paris en 1673, présente ses découvertes sur le pendule qui s'étalent sur une vingtaine d'années. Il veut, en premier lieu, adapter le pendule au réglage des horloges, et ce but technique l'amènera à innover en horlogerie et, indirectement, en mathématiques.

Il constate que l'isochronisme des oscillations n'est pas absolu comme l'avait cru Galilée, car l'amplitude est non négligeable. Au moment où Huygens invente le pendule cycloïdal, Pascal lance le défi sur la roulette à tous les mathématiciens du monde. Huygens montre que si le pendule simple décrit une roulette, la courbe obtenue est isochrone. Il lui restait à trouver la forme des lamelles réglant la longueur du fil pour que la masse du pendule décrive bien la roulette. La solution consista à faire osciller la masse du pendule entre deux mâchoires cycloïdales.

Durant cette recherche sur le pendule, Huygens est amené à l'étude des développées et des développantes, théorie qu'il fonde et qui lui permet de déterminer les développées des coniques, de montrer que la développée d'une courbe géométrique est elle-même géométrique et rectifiable algébriquement, et que celle de la cycloïde est une cycloïde égale.

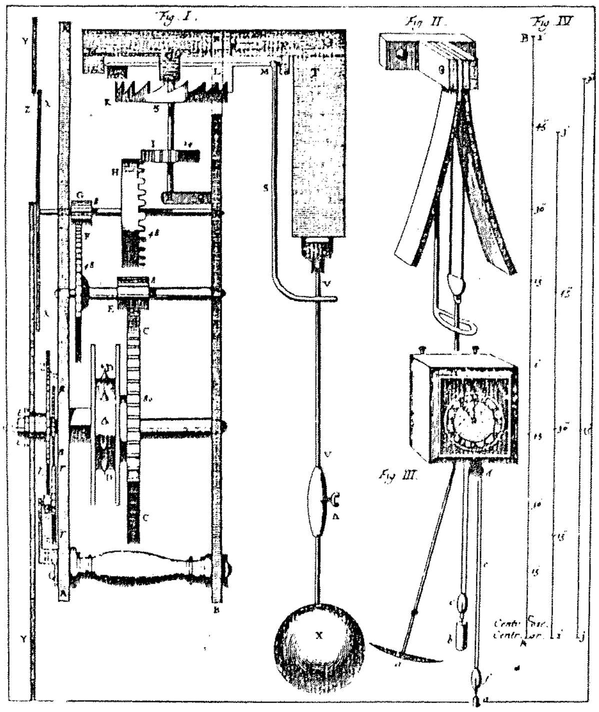


Diagramme extrait de *Horologium oscillatorium* d'Huygens (1673). La figure ci-dessus illustre les mâchoires cycloïdales qui entraînent l'oscillation du pendule selon un arc cycloïdal.

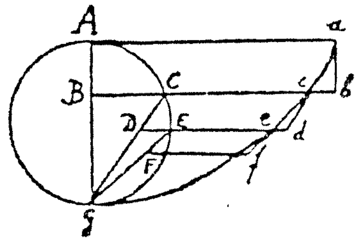
On trouve aussi dans ce traité de dynamique l'expression exacte de la force centrifuge dans un mouvement circulaire, la théorie du centre d'oscillation, les lois d'Huygens sur le mouvement du pendule, le principe de la conservation de l'énergie cinétique, la découverte de l'horloge à balancier et du mécanisme à échappement.

Parmi les autres contributions mathématiques d'Huygens, signalons un petit traité intitulé *De Ratiociniis in ludo aleae*, le premier traité qui ait paru sur les probabilités, comprenant les divers problèmes résolus par Fermat et Pascal sur le sujet et d'autres nouveaux problèmes provenant de différentes sources. Huygens rectifia aussi la cissoïde de Dioclès et la cycloïde, en plus d'écrire sur la courbe logarithmique et d'entretenir une correspondance avec les mathématiciens de son temps.

À la mort de Van Schooten, en 1660, année de fondation de la Royal Society, l'école hollandaise de mathématiques est en perte de vitesse et, après le départ de Huygens pour Paris, on peut affirmer que les mathématiciens anglais assurent à leur tour une certaine suprématie. Ces mathématiciens de talent, entre autres Wallis, Gregory et Barrow vont s'illustrer tout particulièrement dans le domaine du calcul différentiel et intégral.

Voici un extrait d'une lettre de HUYGENS à OLDENBOURG (1673).

[Fig. 8.]



„ce n'est pas grande chose .... d'avoir fait la démonstration d'une proposition desia trouvée". Cependant la démonstration de Pardies nous paraît assez remarquable. Il suppose (en observant aussi qu'on peut perfectionner le raisonnement en enfermant le temps total dont il s'agit entre deux limites) que le point pesant parcourt successivement [Fig. 8] les droites *ab*, *cd*, *ef*, etc. — tangentes à la courbe — égales et parallèles à AB, CD, EF, etc., où $AB = \frac{1}{n}$ AG, $CD = \frac{1}{n}$ CG, $EF = \frac{1}{n}$ EG, le nombre arbitraire *n* pouvant être pris fort grand. Un mobile M_1 partant de *a* parcourra l'élément *ab* dans le même temps qu'un mobile M_2, partant de *c*, parcourra *cd*, ou un mobile M_3, partant de *e*, l'élément *ef*. De plus M_1 parcourra ensuite *cd* dans un temps égal à celui nécessaire à M_2 pour parcourir *ef*, etc. Tous les mobiles, de quelque point qu'ils partent, finiront par se rejoindre au point G.

Dans l'exécution de ce calcul il faut faire usage de ce que l'accélération avec laquelle un élément tel que *cd* est parcouru, est proportionnelle à CG, donc aussi à la longueur de l'arc cG, double de CG, ou du moins d'un raisonnement qui suppose implicitement cette proportionnalité.

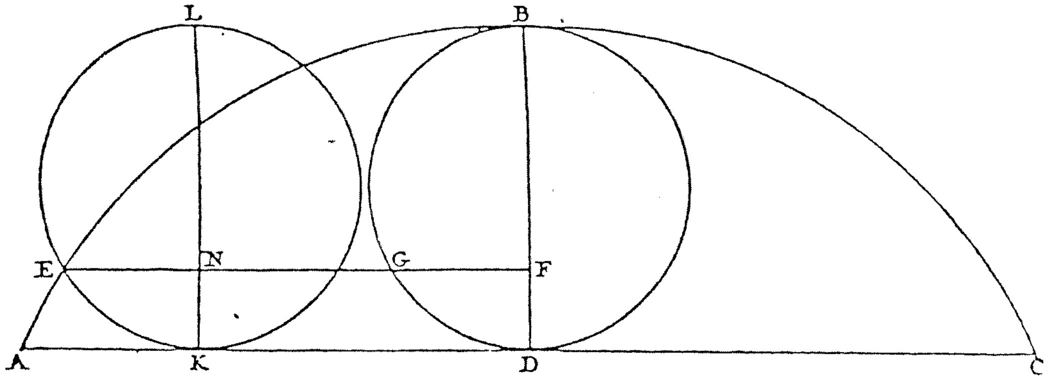
Dans ce passage il est expliqué qu'un mobile dont le support de la trajectoire est la cycloïde ag, mettra le même temps pour arriver en g, qu'il parte de a, de c ou de e... C'est ainsi que le pendule cycloïdal conservera la même période même s'il est soumis à des secousses.

De la chute des corps graves.

PROPOSITION XIV.

Soit ABC *une cycloïde* [Fig. 35], AC *sa base*, BD *son axe. Je pense qu'on voit avec évidence comment cette ligne est engendrée suivant ce qui a été exposé plus haut sur sa définition et sa description mécanique* [1]). *Soit de plus* BGD *un cercle symétrique par rapport à l'axe* BD. *Traçons* EF *parallèlement à la base* AC *par un point* E *arbitrairement choisi sur la cycloïde, laquelle parallèle coupe l'axe* BD *en* F *et la circonférence* BGD *en* G. *Je dis que la droite* GE *est égale à l'arc* GB [2]).

[Fig. 35.]



En effet, soit décrite par le point E une circonférence de cercle LEK égale à BGD et touchant la base de la cycloïde en K. Menons aussi le diamètre KL. La droite AK est donc égale à l'arc EK. Mais la longueur entière AD est égale à la demi-circonférence KEL; par conséquent KD est égale à l'arc EL ou GB. Or, KD ou NF est égale à EG, puisque EN = GF et que la partie NG leur est commune. Il est donc prouvé qu'on a aussi : GE = arc GB.

PROPOSITION XV.

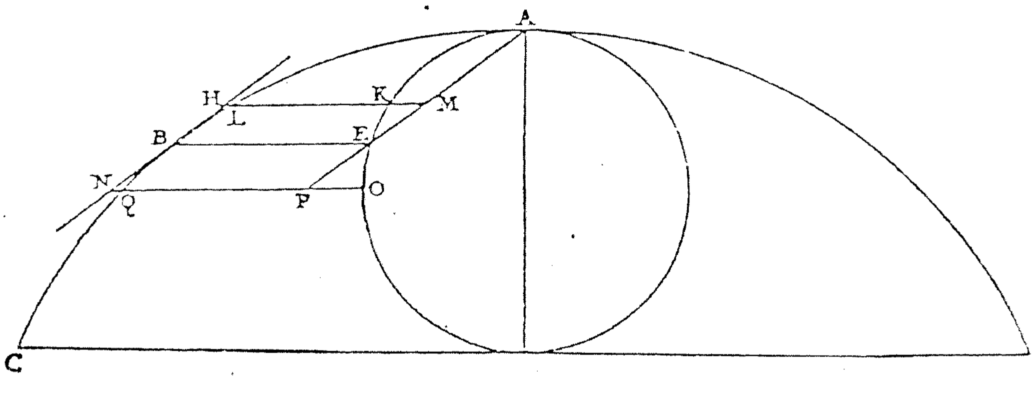
Un point sur une cycloïde étant donné, mener par lui une tangente à la cycloïde [3]).

Soit ABC [Fig. 36] la cycloïde et B le point donné sur lui par lequel il faut mener la tangente.

Construisons autour de l'axe AD de la cycloïde le cercle générateur AED et menons BE parallèlement à la base de la cycloïde, laquelle parallèle coupe la circonférence du cercle nommé en E. Joignons les points A et E par une droite et tirons enfin par B une parallèle HBN à cette dernière. Je dis que cette parallèle touche la cycloïde en B.

En effet, prenons sur la parallèle un point H quelconque différent de B, d'abord

[Fig. 36.]



vers le haut, et menons par H une droite parallèle à la baſe de la cycloïde, coupant celle-ci en L, la circonférence AED en K et la droite AE en M. Comme KL eſt alors égale à l'arc KA et que la droite KM eſt plus petite que l'arc KE, la droite ML ſera inférieure à l'arc AE, c.à.d. à la droite EB ou MH; d'où il apparaît que le point H eſt ſitué en dehors de la cycloïde.

Voir proposition 13.

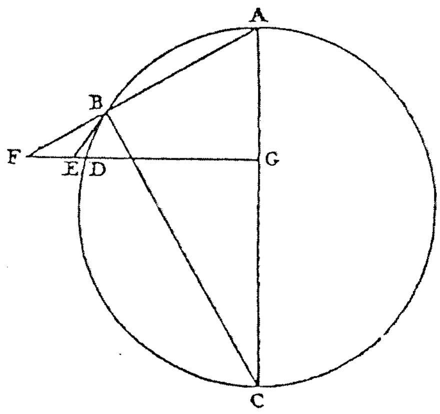
Prenons en ſecond lieu ſur la droite HN un point N ſitué au-deſſous de B et menons, comme plus haut, par N une droite parallèle à la baſe, coupant la cycloïde en Q, la circonférence AED en O, et le prolongement de la droite AE en P. Comme OQ eſt alors égale à l'arc OA et que OP eſt plus grande que l'arc OE, PQ ſera inférieure à l'arc EA, c.à.d. à la droite EB ou PN. D'où il apparaît de nouveau que le point N ſe trouve en dehors de la cycloïde. Puiſque tous les points pris ſur la droite HBN, excepté B, ſont donc ſitués en dehors de la cycloïde, il eſt établi que cette droite touche la cycloïde en B. C. Q. F. D.

Voir proposition 12.

PROPOSITION XII

Conſidérons un cercle ABC [Fig. 33] *de diamètre* AC, *auquel la droite* FG *eſt perpendiculaire. Suppoſons que cette dernière ſoit coupée en dehors du cercle par* AF *émanant de l'extrémité* A *du diamètre et coupant néceſſairement la circonférence, par exemple en* B. *Je dis que l'arc* BD, *intercepté par les lignes* GF *et* AF, *eſt inférieur à la droite* DF.

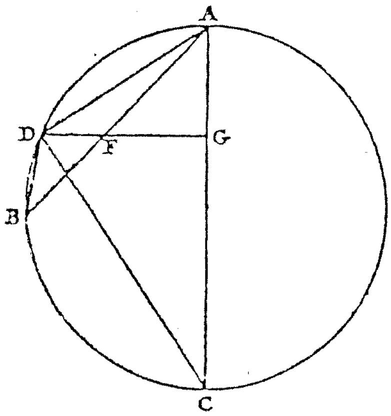
[Fig. 33.]



Joignons en effet les points B et C par une droite et tirons du point B une tangente BE à la circonférence, laquelle rencontrera néceſſairement la droite FG entre F et D. L'angle BAC intérieur au cercle eſt donc égal à l'angle EBC [1]). Par conſéquent auſſi l'angle FBE qui forme avec EBC l'angle droit FBC ſera égal à BCA. Or, comme les triangles ABC et AGF ſont ſemblables, l'angle F lui auſſi ſera égal à l'angle ACB. Le même angle F eſt donc égal à l'angle FBE. Par conſéquent le triangle FEB eſt iſoſcèle, ayant les côtés égaux FE et EB. En ajoutant à chacun d'eux la droite ED, on aura donc l'égalité FD = BE + ED. Or, il eſt certain que l'enſemble de ces deux dernières droites eſt plus grand que l'arc BD ayant les mêmes extrémités et concave dans le même ſens. Par conſéquent FD ſera auſſi plus grand que le même arc BD. La propoſition eſt donc démontrée.

PROPOSITION XIII

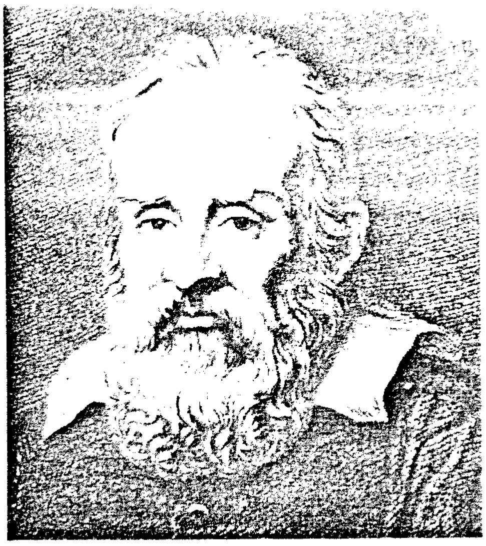
[Fig. 34.]



Si, dans les mêmes hypothèſes, la droite AB *coupe* DG *à l'intérieur du cercle* [Fig. 34], *je dis que l'arc* BD, *intercepté entre les droites* GD *et* AB, *eſt plus grand que la droite* DF.

En effet, joignons par une droite les points D et C et traçons la corde correſpondant à l'arc DB. Comme l'angle ABD eſt alors égal à ACD, c.à.d. à l'angle ADG, et que l'angle DFB eſt plus grand que l'angle ADF ou ADG, le même angle DFB ſera plus grand que DBF. Par conſéquent dans le triangle DFB le côté DB eſt plus grand que le côté DF. A-fortiori l'arc DB ſera plus grand que la même droite DF. La propoſition eſt donc démontrée.

UN PEU D'HISTOIRE SUR LES INDIVISIBLES ET LES TANGENTES


Galileo Galilei (1564-1642)

GALILÉE

Galileo Galilei (1564-1642) est né à Pise d'un gentilhomme florentin peu fortuné mais instruit, qui avait écrit un ouvrage sur l'histoire de la musique. Il fit des études de médecine à Pise, mais ne tarda pas à s'intéresser particulièrement aux sciences, plus précisément à la mécanique et à ses applications. Encore étudiant en médecine, il aurait fait une découverte dont l'exactitude historique est fort douteuse. C'est dans la cathédrale de Pise que Galilée, observant l'oscillation d'une lampe suspendue à la voûte, aurait eu l'idée que le mouvement d'un pendule est isochrone, il montrera un peu plus tard que la période d'un pendule est aussi indépendante du poids de ce pendule.

Galilée, qui avait étudié avec attention les œuvres des grands savants de l'Antiquité, entre autres, Euclide et Archimède, avait acquis très tôt une certaine notoriété comme mathématicien, si bien que, en 1589, à l'âge de 25 ans seulement, il devenait professeur de mathématiques à l'université de Pise. En 1592, on le retrouve à Padoue, car il avait quitté sa chaire de Pise à cause de controverses locales. Occupant une chaire analogue, Galilée continue à Padoue ses travaux de mécanique. Il étudie les aimants et commence à s'intéresser aux lunettes astronomiques. A partir de 1609, il devient en quelque sorte le conseiller scientifique du duc de Toscane et fait de nombreux voyages à Rome tout en devenant membre de l'Académie des Lincei. C'est à cette époque qu'il invente la lunette qui porte son nom et qu'il met au point ses observations astronomiques. Celles-ci l'ont probablement amené à adhérer graduellement et ouvertement aux idées de Copernic. Toutefois, il dut se montrer prudent car, en 1615, l'Inquisition romaine condamna les idées coperniciennes et déclara hérétiques ceux qui les propageaient.

Il se retire à cette époque dans une petite villa, à Arcetri aux environs de Florence. Il va consacrer une quinzaine d'années de sa vie à poursuivre, dans le silence et la méditation, ses recherches sur la mécanique et sur l'astronomie. En 1632, Galilée publie son fameux *Dialogue sur les deux systèmes du monde*, où les thèses coperniciennes étaient réaffirmées avec vigueur. Le tribunal des inquisiteurs fit, en 1633, comparaître Galilée et l'obligea à renier publiquement ses doctrines sur le mouvement de la terre. Les dernières années de sa vie furent consacrées à un travail acharné pour faire progresser ses conceptions scientifiques, bien qu'il soit devenu aveugle en 1637. Il mourut dans sa villa, en 1642 à l'âge de 78 ans.

Ses principales conclusions et découvertes scientifiques se trouvent dans deux ouvrages écrits en italien, l'un sur l'astronomie et l'autre sur la physique. On lui est redevable d'avoir mis sur pied la mécanique de la chute des corps et la dynamique. Il fut le premier à prendre conscience de la nature parabolique de la trajectoire d'un projectile dans le vide et il étudia les lois sur le momentum ainsi que sur la résistance des matériaux.

C'est en 1632 qu'il révéla au monde son premier grand traité, dont le titre français est *Dialogue sur les deux systèmes du monde, celui de Ptolémée et celui de Copernic.* Cet ouvrage revêt la forme d'un dialogue entre trois personnages: Salviati, qui personnifie Galilée, Sagredo, qui est un ami à l'esprit ouvert, et Simplicio, l'homme têtu et raisonneur qui symbolise la scolastique et l'aristotélisme.

En 1638, alors qu'il est soumis à une stricte surveillance, comme suite à sa condamnation, Galilée publie une nouvelle mise au point de ses idées sur la mécanique, sous le titre *Discours et démonstrations mathématiques relatives à deux nouvelles sciences*, qui revêt aussi la forme du traité précédent.

Ces deux traités de Galilée contiennent plusieurs points de physique ou d'astronomie qui font appel aux mathématiques et fréquemment aux propriétés de l'infiniment grand et de l'infiniment petit.

On peut virtuellement affirmer que Galilée connaissait bien les travaux d'Oresme sur la latitude de formes et, en plusieurs occasions dans les *Deux nouvelles sciences*, il emploie un diagramme de vitesses similaire au graphique triangulaire d'Oresme et le complète. Dans le dialogue de la première journée, Galilée élabore une longue discussion au sujet de l'infini, de l'infinitésimal et de la nature du continu.

Salviati admet clairement la possibilité de l'infini actuel, mais à cause de nombreux paradoxes soulevés par cette conception, il conclut que l'infini et l'indivisibilité sont par nature incompréhensibles à l'homme. Un peu plus loin, Galilée, sous le personnage de Salviati, affirme que les attributs «plus grand que», «plus petit que», et «égal à» ne doivent pas être utilisés pour comparer des quantités infinies entre elles ou dans la comparaison entre l'infini et des quantités finies.

Dans la même ligne de pensée, il faut souligner l'assertion de Galilée que l'ensemble de tous les entiers positifs pairs peut-être mis en correspondance un à un avec un sous-ensemble de cette classe, par exemple l'ensemble de tous les carrés parfaits. Toutefois, il ne développe pas cette idée et on devra attendre les travaux de Bolzano et de Cantor, au XIX^e siècle, avant que cette idée ne soit pleinement exploitée.

Pendant que Galilée employait la notion subtile d'indivisibilité dans ses explications physiques, son ami et élève, Cavalieri, l'utilise comme la pierre angulaire d'une méthode géométrique de démonstration qui obtient un succès remarquable.

CAVALIERI

Bonaventura Cavalieri (1598-1647), né à Milan, religieux jésuate, fut un des meilleurs élèves de Galilée. Il professa les mathématiques à Bologne, de 1629 à sa mort. Il écrivit des ouvrages sur les mathématiques, l'optique, l'astronomie et fut en grande partie l'artisan de l'introduction rapide des logarithmes en Italie. Mais il doit sa célébrité à un traité, publié dans sa première version en 1635, consacré à la méthode des indivisibles.

Le *Traité des indivisibles* de Cavalieri est verbal et pas très clair. L'auteur ne dit nulle part, dans son ouvrage, ce qu'il entend précisément par le terme «indivisible», qui caractérise les éléments infinitésimaux utilisés dans sa méthode. Cavalieri concevait une surface comme constituée d'un nombre indéfini de droites parallèles équidistantes, et un solide comme composé de plans parallèles équidistants.

ROBERVAL

Gilles Personne de Roberval (1602-1675) est né le 10 août 1602 dans le village de Roberval, près de Beauvais, de parents cultivateurs. Il aurait été le seul de ses frères et sœurs à recevoir une instruction élevée et un jour, dans sa jeunesse, pourvu d'un fort bagage scientifique et de bonne connaissances en latin et même en grec, Gilles Personne quitta son village et sa famille et parcourut le royaume de France. Pendant cette vie errante, il vécut, dit-on, de leçons particulières, tout en s'instruisant dans le domaine des mathématiques. En 1627, on le retrouve au siège de La Rochelle, puis il se fixa à Paris en 1628.

Roberval ne tarda pas à entrer en relations avec les savants parisiens, et Mersenne — religieux de l'ordre des Minimes — frappé par la vive intelligence de son jeune ami, lui proposa la résolution du célèbre problème d'Archimède. Mais, après examen, Gilles Personne estima cette question au-dessus de ses forces et pendant 6 ans, il se consacra plutôt à une étude approfondie des œuvres d'Archimède. En 1632, il obtint une chaire de philosophie au collège de Maistre Gervais; il y élut domicile et y prépara le concours à la chaire de Ramus au Collège royal de France. Il triompha au concours de l'année 1634 et demeura titulaire de cette chaire jusqu'à sa mort, survenue le 27 septembre 1675. Il fut membre de l'Académie des sciences dès sa fondation en 1666.

Le règlement du Collège royal exigeait que le poste de titulaire d'une chaire fut soumis, tous les trois ans, à un concours préparé par le titulaire en place, le poste devant revenir à celui qui était déclaré vainqueur. C'est ainsi que Roberval resta continuellement candidat et, pour conserver une supériorité sur ses rivaux, il fut bien obligé de cacher les résultats de ses travaux pour s'en servir, tous les trois ans, à chaque concours. Il ne faut donc pas s'étonner qu'il n'ait presque rien fait imprimer de son vivant et c'est bien à tort qu'on lui a attribué la réputation d'un homme dissimulé. Toutefois, de son vivant, il perdit le crédit attaché à la majorité de ses découvertes et, ayant par surcroît un caractère entier, il fut impliqué dans de nombreuses querelles de priorité.

Bien qu'il fit ajouter à son nom de famille celui de son village, ce titre nobiliaire ne le rendit point homme du monde. Célibataire impénitent, on dit qu'il parlait avec brutalité et violence, sans se soucier de rester courtois quand il défendait ses idées et, faute d'une éducation première, on le connaissait à Paris pour ses manières rustres et pédantes. Descartes et Roberval ne s'accordèrent jamais, tant sur le plan de la personnalité qu'au niveau des idées que chacun professait. Notons que Mersenne resta toute sa vie l'ami de Roberval et partagea souvent ses idées.

Sa géométrie des indivisibles

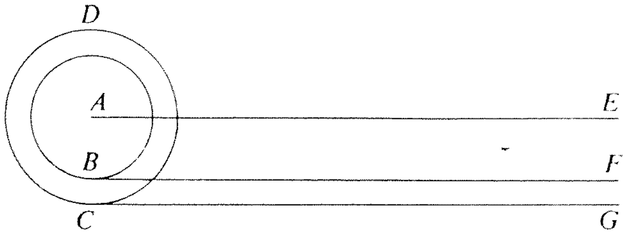
Les méthodes des indivisibles utilisées par les géomètres du XVII^{e} siècle traduisaient des conceptions issues de considérations sur la constitution de la matière et de la question du continu. Les uns soutenaient que la matière pouvait être divisée à l'infini en particules de plus en plus petites, sans pouvoir assigner de terme à cette décomposition. De plus, chaque particule infiniment petite gardait les propriétés de la matière sans aucune altération. Cette conception transportée dans le domaine des mathématiques caractérise la méthode des indivisibles de Roberval.

D'autres philosophes scolastiques pensaient, eux, que la décomposition de la matière était limitée, étant composée de particules insécables (atomes) dont la nature diffère de celle de la matière. La matière était donc constituée de l'agglomération de ces atomes indivisibles et la méthode des indivisibles de Cavalieri traduisait, elle, cette dernière conception

C'est dans une lettre à Torricelli, en 1647, que Roberval déclare avoir utilisé les « indivisibles », cinq ans avant la publication de la *Geometria* de Cavalieri, mais il attribue à ce dernier l'invention de « cette sublime doctrine ». Toutefois, Roberval fait remarquer que sa propre méthode ne compare pas les hétérogènes, car il considère ces indivisibles comme des éléments infiniment petits comparables entre eux, puisqu'une ligne, par exemple, est composée de lignes indéfinies en nombre, de même une surface, un solide, etc.

Roberval et la cycloïde

La question de la cycloïde (appelée trochoïde par Roberval) provient de l'étude infructueuse du paradoxe d'Aristote: pourquoi deux cercles concentriques l'un ayant un diamètre inférieur à l'autre, parcourent-ils une distance égale s'ils sont tournés suivant un cercle, et pourquoi une fois séparés, parcourent-ils des distances proportionnelles à leurs diamètres?



Pendant que le point C parcourt en une révolution la distance CG, A parcourt AE de façon que $CG = AE$.

Nous avons déjà dit que Gilles Personne échoua dans sa tentative de trouver la forme et de calculer la quadrature de la cycloïde, problème qui lui fut présenté par Mersenne dès son arrivée à Paris. Mais dès 1634, Roberval parvint à déterminer la forme de la courbe et, entre 1634 et 1637, il trouva la quadrature et le volume engendré par la rotation d'un arche de la courbe autour de sa base, en plus d'expliquer la façon de la construire par points. À cette occasion, le professeur du Collège royal inventait la sinusoïde ou, pour lui, la « compagne de la trochoïde ».

Mersenne signala ces résultats à Fermat et aussi à Descartes, en particulier dans une lettre en date du 28 avril 1638, mais Descartes ne semble pas avoir été impressionné plus qu'il ne faut, à en juger par sa réponse pour le moins vexante. Après quelques doutes, Fermat justifie Roberval contre la censure trop précipitée qu'il avait faite de ses propositions de la « roulette » (nom de la cycloïde attribuée par Descartes et Pascal). À leur tour, Descartes et Fermat donnèrent leurs propres solutions à la quadrature d'une arche de la cycloïde et, vers cette même année, ils trouvèrent une méthode algébrique pour déterminer la tangente à la roulette, alors que Roberval utilise un procédé mécanique.

La méthode des tangentes de Roberval

On trouve la méthode des tangentès de Roberval dans un manuscrit qui fut imprimé avec plusieurs autres œuvres dans les *Mémoires de l'Académie des sciences* en 1693 et dont le contenu fut professé, semble-t-il, au Collège royal en 1636.

Son célèbre principe d'invention repose sur l'affirmation « qu'en toutes les autres lignes courbes, quelles qu'elles puissent être, leur touchante, en quelque point que ce soit, est la ligne de direction du mouvement qu'a en ce même point le mobile qui les décrit ». Et son principe est ainsi formulé:

> « *La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.* »

Puis, c'est la règle suivante qui permet, selon Roberval, de mener cette tangente à une courbe donnée:

> « *Par les propriétés spécifiques de la ligne courbe (qui vous seront données) examinez les divers mouvements qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvements composés en un seul, tirez la ligne de direction du mouvement composé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.* »

Avec cette méthode, Roberval est parvenu à mener des tangentes aux coniques et aux conchoïdes, et à différentes courbes comme la quadratrice, la cissoïde, la spirale et la cycloïde. À l'occasion de la détermination de la tangente à la conchoïde, Roberval soulève la question du point d'inflexion et avait remarqué deux points par lesquels on ne pouvait mener des tangentes. Ce sont les points d'inflexion qui font d'ailleurs l'objet d'une lettre adressée à Fermat le 22 novembre 1636.

TORRICELLI

Evangelista Torricelli (1608-1647), physicien et mathématicien italien est né le 15 octobre 1608 à Faenza, près de Ravenne. Il étudia d'abord au collège des jésuites de sa ville natale, puis à vingt ans, fut envoyé à Rome où il reçut une formation mathématique. En 1638, Torricelli prit contact avec les travaux de Galilée et il en fut profondément impressionné. En 1641, il attira l'attention de Galilée par un travail sur le mouvement des corps pesants, et ce dernier l'invita à Florence. Torricelli s'empressa de répondre à cette invitation et devint à la fois le secrétaire et l'ami de Galilée pendant trois mois. Il succéda à Galilée comme mathématicien du grand duc de Toscane. Torricelli entretint une correspondance importante avec les mathématiciens de son époque, en particulier avec Roberval et Mersenne. La publication, en 1644, de son *Opere geometrica* fut l'origine d'une longue querelle qui l'affecta beaucoup. Il mourut le 25 octobre 1647 à Florence.

Torricelli et l'analyse

Torricelli connaissait bien les travaux d'Archimède, de Galilée et la méthode des indivisibles de Cavalieri.

Nous savons que Cavalieri s'était peu préoccupé de la rigueur mathématique des indivisibles et des difficultés logiques encourues par sa méthode. Par contre, son jeune ami Torricelli, élève de Galilée, semble être conscient de ces difficultés et réalise pleinement les avantages et inconvénients de la méthode. Aussi, n'étant pas satisfait des démonstrations par la méthode de Cavalieri, il élabore des preuves à la manière d'Archimède (méthode d'exhaustion) en guise de supplément à ces démonstrations. C'est ainsi, par exemple, que dans son *De dimensione parabolæ*, Torricelli présente vingt et une démonstrations de la quadrature de la parabole, dix d'entre elles élaborées par la méthode des anciens, et les onze autres par l'usage des indivisibles. De plus, Torricelli et Cavalieri savaient pertinemment que la méthode des indivisibles conduisait parfois à des résultats absurdes et ces deux disciples de Galilée imaginèrent même quelques exemples de cette nature, afin de réfuter ceux que d'autres avaient trouvés ou pour approfondir davantage la question. De toute évidence, Torricelli surpassa nettement son maître Cavalieri en flexibilité et en perspicacité dans l'usage qu'il fit des indivisibles pour faire de nouvelles découvertes.

Ses travaux sur la tangente

Torricelli s'est intéressé au problème de la cycloïde, soit dans sa correspondance avec Mersenne, soit par les travaux de Galilée. En 1643, Mersenne reçoit de Torricelli la quadrature de la cycloïde, et en 1644, ce résultat, accompagné de la construction des tangentes, est publié dans un texte inclus dans ses *Opere*.

La méthode des tangentes de Torricelli repose essentiellement sur une conception dynamique de la tangente, laquelle résulte de la composition de deux mouvements d'un point mobile qui trace la courbe. Tracer la tangente à une courbe qui est décrite par le mouvement d'un point résultant de la composition de deux mouvements consiste donc à déterminer la résultante des vitesses des deux mouvements qui, elle, repose sur la tangente à la courbe en ce point mobile.

Torricelli ne mentionne pas dans son exposé que Roberval a obtenu des résultats tout à fait analogues avant lui et selon un principe mécanique pratiquement identique. Roberval, dès 1646, accuse Torricelli de plagiat et une querelle s'ensuivit. Roberval a indiscutablement découvert la méthode avant le mathématicien italien, mais ce dernier publia ses découvertes avant le professeur du Collège royal. Cependant, les deux auteurs utilisèrent la composition de mouvements qui rappelle la tangente à la spirale d'Archimède. D'ailleurs, la composée de mouvements fut utilisée par Archimède, Galilée, Descartes et d'autres. De plus, Torricelli appliqua ce principe à la cycloïde et à d'autres courbes.

En se servant de la méthode d'exhaustion des Anciens, de la méthode des indivisibles de Cavalieri, et probablement de la composition des mouvements de Galilée, Torricelli est parvenu à un certain nombre d'anticipations remarquables qu'on retrouve dans le calcul. Mentionnons de nombreux théorèmes sur les quadratures et les tangentes et quelques rectifications de courbes.

De toute évidence, Torricelli fut un des mathématiciens les plus prometteurs du XVII^{e} siècle et, grâce au travail de Mersenne, il put correspondre et échanger des idées avec les grands mathématiciens français de cette époque. Aujourd'hui, Torricelli est probablement mieux connu comme physicien, car, jeune élève de Galilée, son intérêt pour la physique l'a conduit en particulier à l'invention du baromètre.

Il meurt à 39 ans, en pleine possession de ses capacités intellectuelles et, si le destin avait voulu prolonger sa vie d'une durée normale, peut-être que les titres de gloire de Torricelli se seraient multipliés d'autant.

Blaise Pascal d'après Philippe de Champaigne

PASCAL

Blaise Pascal (1623-1662), né à Clermont-Ferrand en 1623, était le second enfant d'Étienne Pascal, président à la Cour des Aides. Celui-ci perd sa femme en 1626 et décide, en 1631, de s'installer avec son fils et ses deux filles à Paris, afin de se consacrer à l'éducation de Blaise. Étienne Pascal est lui-même un mathématicien amateur qui, se tenant au courant des principales activités mathématiques du temps, est capable de mener à bien certaines études de nature mathématique. D'ailleurs, le « limaçon de Pascal » a été ainsi nommé en l'honneur d'Étienne et c'est Gilles Personne de Roberval qui suggéra cette dénomination. De plus, Mersenne nous parle de propositions admirables qu'il aurait démontrées sur les triangles et Fermat dit quelques mots sur le même sujet.

En 1634-1635, Blaise s'initie aux mathématiques contre la volonté de son père qui, dit-on, craignant que cette étude ne le passionne au point de nuire à sa frêle constitution et de le distraire de celle du latin ou des langues, avait interdit qu'on lui enseignât la géométrie et même que son fils puisse avoir accès à des ouvrages de mathématiques. Pourtant, sur la base d'une information qui ramenait la géométrie à une science consistant à tracer des figures justes, le jeune Pascal entreprend un jour, à l'âge de douze ans, de démontrer la trente-deuxième proposition d'Euclide et son père le surprend dans ce travail. Étonné par la précocité de son fils, Etienne lève l'interdiction, lui donne les *Éléments* et Blaise peut maintenant laisser libre cours à son génie. Après avoir lu Euclide, le jeune Pascal se plonge dans les travaux de Désargues.

A l'âge de quatorze ans il est admis, aux côtés de son père, à l'Académie de Mersenne qui regroupe des hommes tels que Mersenne, Désargues, Roberval, Mydorge et autres. Dès l'âge de seize ans, il y expose des théories intéressantes, dont la découverte d'une propriété fondamentale des coniques appelée par la suite « hexagone de Pascal ». En 1640, il publie un petit ouvrage intitulé *Essay pour les coniques* dont il nous reste seulement deux exemplaires, l'un à Paris, l'autre à Hanovre. Ce petit essai, très court, se termine par la promesse d'un travail plus étendu et il semble en effet que Pascal ait poursuivi cette étude tout au long de sa vie, rédigeant un traité d'ensemble sous forme manuscrite vers 1654.

Mais Pascal, tout en restant géomètre, consacrera plusieurs années, à partir de 1640, à la construction d'une machine arithmétique, destinée à simplifier les calculs fastidieux que son père devait effectuer à titre de commissaire pour la levée des impôts en Normandie. Sa santé commença à être altérée dès qu'il eut atteint dix-huit ans, mais cela ne l'empêcha pas d'inventer sa machine à calculer à l'âge de dix-neuf ans seulement. Puis, à Rouen, dans sa vingt-troisième année, à la suite d'une visite de Pierre Petit qui répéta devant lui les expériences de Torricelli sur la pesanteur, il s'empressa de mettre tout en œuvre pour vérifier les conclusions du physicien italien, ce qu'il fit avec succès.

En 1647, gravement malade, Blaise Pascal se fixe à Paris avec sa sœur Jacqueline et prépare, après une rencontre avec Descartes, son expérience du Puy de Dôme, car il ne fut pas entièrement satisfait des expériences de Rouen. Et le 19 septembre 1648, l'expérience sur la pesanteur réalisée sur le Puy de Dôme (1465 m) fut un succès complet. En 1651, Étienne Pascal meurt et, une année plus tard, Jacqueline, la plus jeune sœur de Blaise, entre au couvent de Port-Royal. C'est ainsi que de 1652 à 1654 il vit seul à Paris et entreprend la rédaction du *Traité du vide,* fait une mise au point du *Traité de l'équilibre des liqueurs* et du *Traité de la pesanteur*, présente une « Adresse à l'Académie parisienne » où il énumère ses projets scientifiques, échange des lettres sur le problème des partis et le calcul des probabilités avec Fermat, rédige le *Traité du triangle arithmétique* et divers travaux annexes.

Le lundi 23 novembre 1654, c'est la « Nuit de feu », au cours de laquelle Pascal, qui s'était converti partiellement au jansénisme en 1646, vécut une extase religieuse intense qui l'amena à tout abandonner pour suivre les jansénistes. Il rejoint sa jeune sœur à Port-Royal et, pendant quatre années, il se consacrera à la religion. Les jésuites ayant attaqué les jansénistes, Pascal leur répondit, en 1656-1657, par dix-huit lettres appelées *Lettres Provinciales* qui constituent un monument de la littérature française. Entre-temps, il entretient une correspondance mathématique avec Fermat, Huygens et de Sluse.

Un soir de l'année 1658, Pascal souffre terriblement d'un mal de dents, et par distraction semble-t-il, il s'attaque à l'étude de la cycloïde. C'est le retour de Pascal aux mathématiques et le défi lancé aux mathématiciens dans une lettre circulaire anonyme qui contient six propositions sur la roulette. Puis, sous le nom de Amos Dettonville, transparente anagramme de Louis de Montalte (rendu célèbre dans les *Lettres Provinciales*), il publia, en décembre 1658, sous forme de neuf fascicules, ses méthodes et ses résultats qui sont considérés comme les travaux mathématiques les plus significatifs publiés durant sa vie. Vers la fin de 1659, Pascal, gravement malade, abandonne tout travail scientifique et consacre ses dernières années à ses *Pensées* et à l'établissement d'une ligne d'omnibus, communément appelée « entreprise des carrosses à cinq sols ». Le 19 août 1662, Pascal meurt à l'âge de 39 ans.

LETTRE
DE
A. DETTONVILLE
A MONSIEVR
DE CARCAVY,
EN LVY ENVOYANT
Vne Methode generale pour trouuer les Centres de grauité de toutes sortes de grandeurs.
Vn Traitté des Trilignes & de leurs Onglets.
Vn Traitté des Sinus du quart de Cercle.
Vn Traitté des Arcs de Cercle.
Vn Traitté des Solides circulaires.
Et enfin vn Traitté general de la Roulette,
Contenant
La solution de tous les Problemes touchant LA ROVLETTE qu'il auoit proposez publiquement au mois de Iuin 1658.

A PARIS,
M. DC. LVIII.

Page de titre du premier recueil des écrits de Blaise Pascal sur la roulette (décembre 1658).

L'*Essay pour les coniques*

Première œuvre imprimée de Pascal, cet essai est aussi la seule étude de géométrie publiée de son vivant par l'auteur. L'*Essay pour les coniques*, dont il nous reste encore deux exemplaires, se présente sous la forme d'une petite affiche de format

35 cm × 43 cm

imprimée d'un seul côté, avec un nombre inusité de fautes d'impression ou typographiques et qui fut tirée à 50 exemplaires.

Le texte lui-même se compose de trois définitions suivies de trois lemmes qui doivent servir de base au futur traité des coniques, puis d'un programme d'ensemble schématique d'où l'auteur extrait cinq énoncés de propriétés fondamentales et quelques exemples de problèmes qu'il doit traiter.

Les travaux ultérieurs de Pascal en géométrie projective sont décrits et commentés dans son « Adresse à l'Académie parisienne » et dans une lettre de Leibniz à Étienne Périer, le 30 août 1676. En ce qui a trait au grand *Traité des coniques*, il ne fut pas édité et son manuscrit semble définitivement perdu. L'évaluation de l'œuvre géométrique de Pascal n'est pas chose facile à cause de l'insuffisance des renseignements, aussi nous préférons citer l'opinion de l'historien René Taton qui est le spécialiste de la question:

« *En révélant la richesse d'une pensée profondément consciente de la puissance des méthodes projectives, cette analyse nous conduit à considérer l'œuvre géométrique de Pascal, malencontreusement disparue, comme l'une des créations mathématiques les plus originales du XVII^e siècle. Elle nous confirme également dans l'opinion que la géométrie fut l'un des domaines de la science où le génie pascalien s'exerça avec le plus de fécondité.* »

Pascal et l'analyse infinitésimale

Pascal s'est refusé à utiliser l'algèbre développée par ses devanciers et, de ce fait, il s'est privé d'outils fort efficaces pour développer sa pensée mathématique. Les travaux de Désargues en géométrie projective ainsi que l'appréciation mitigée de Descartes sur son *Essay* ont pu inciter Pascal à rester attaché au langage géométrique et même mécanique, ce qui l'obligea à des énoncés lourds et souvent complexes pour traduire des pensées qu'il considérait probablement claires et limpides.

Les études de Pascal en analyse ont porté à peu près exclusivement sur les sommations, les intégrations nécessaires pour évaluer des arcs, des surfaces, des volumes, et pour déterminer des centres de gravité. Par contre, il ne s'occupe pas du tout du problème des tangentes.

Pascal connaît les indivisibles et il est au courant des discussions sur le manque de rigueur et les défaillances observées chez certains auteurs. Aussi, tirant profit des mises en garde exprimées par certains critiques de la méthode, il prend le parti d'user quand même des indivisibles, car il voit dans ce langage une manière brève et élégante d'exprimer ses idées.

En faisant intervenir dans le *Traité des sinus du quart de cercle* la notion de triangle caractéristique, Pascal est venu remarquablement près de la découverte du calcul différentiel. En effet, Leibniz déclare que c'est la lecture de ce traité, et particulièrement l'usage du triangle caractéristique, qui ont inspiré son invention du calcul différentiel.

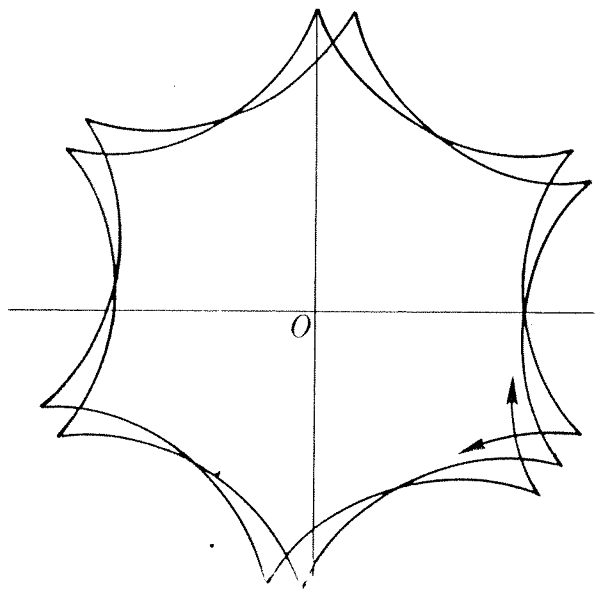
Pascal ne se considérait pas d'abord comme un mathématicien, il ne croyait donc pas nécessaire d'être au courant des activités mathématiques de son époque. Il était non seulement un virtuose en mathématiques, mais aussi un dilettante qui se permettait de choisir des sujets pour lesquels il consacrait son temps. Pascal fut en effet un génie pour saisir rapidement l'essentiel d'une idée et pour l'injecter parfois dans des situations tout à fait nouvelles.

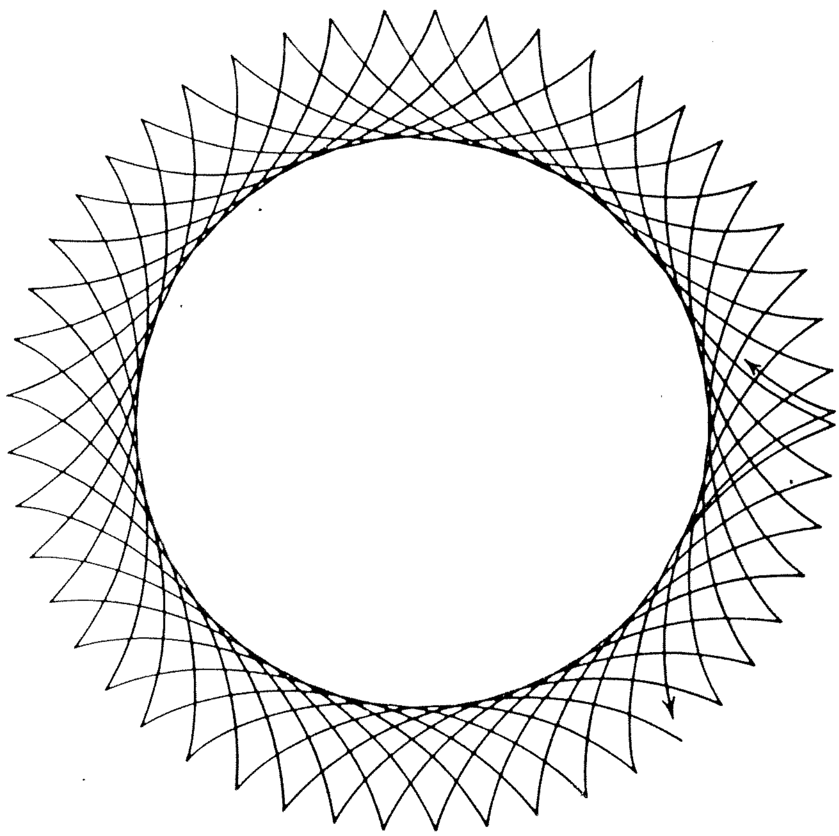
Ses travaux ont exercé une influence certaine sur le développement des mathématiques. Soulignons entre autres, la stimulation exercée par la publication des *Lettres* de Dettonville sur l'étude de la cycloïde, l'influence qu'il a exercée sur Huygens, avec le concours de Fermat, à propos du calcul des probabilités. Ses contributions originales au domaine des mathématiques sont diversifiées et nombreuses, mentionnons seulement la géométrie projective, l'induction mathématique, l'intégration des sinus et le calcul des probabilités.

EPICYCLOIDES ET HYPOCYCLOIDES

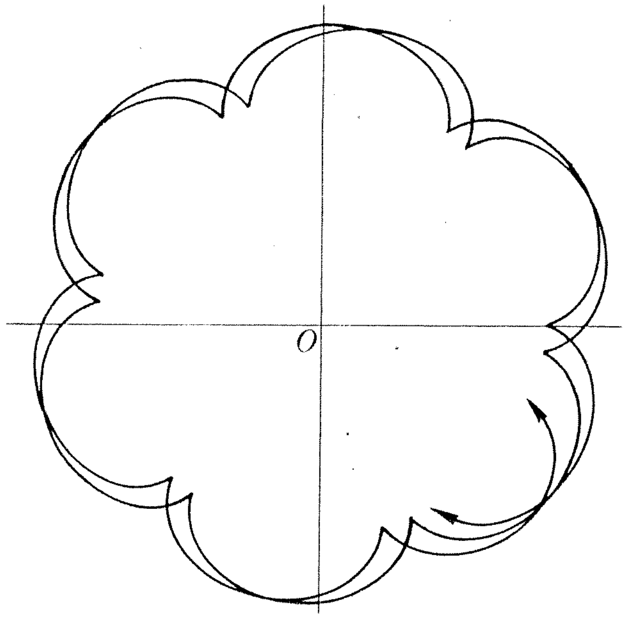
Au lieu de faire rouler le cercle le long d'une droite, on peut le faire rouler le long d'un cercle soit à l'intérieur soit à l'extérieur.

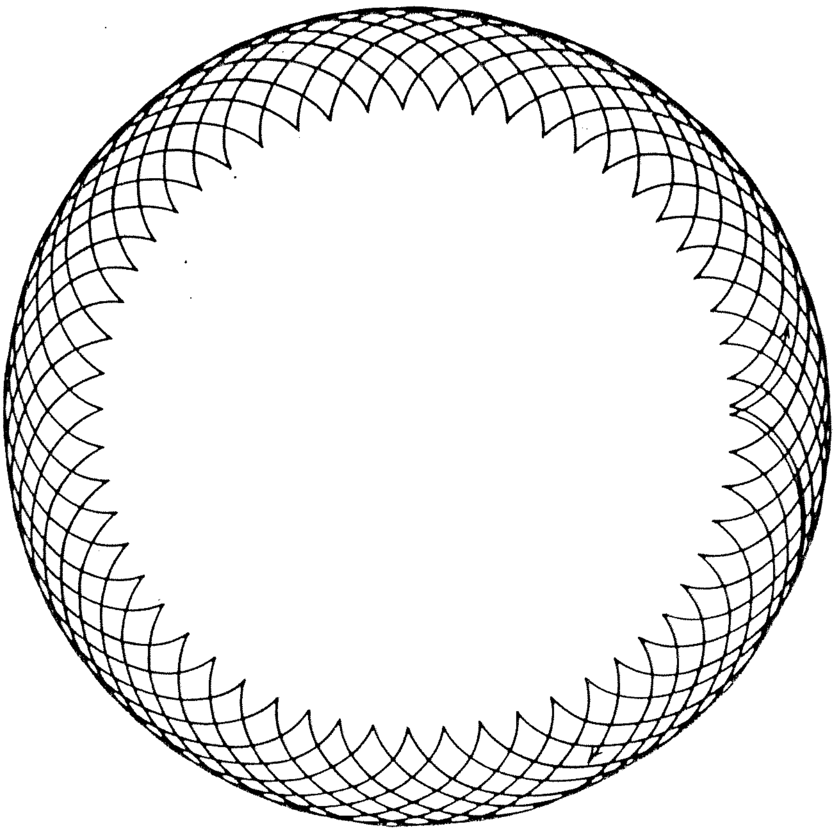
Lorsque le cercle roule à l'intérieur, un point fixé sur sa circonférence décrit une HYPOCYCLOIDE.





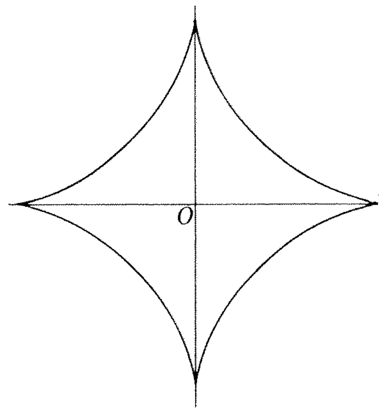
Lorsque le cercle roule à l'extérieur, un point fixé sur sa circonférence décrit une EPICYCLOIDE.



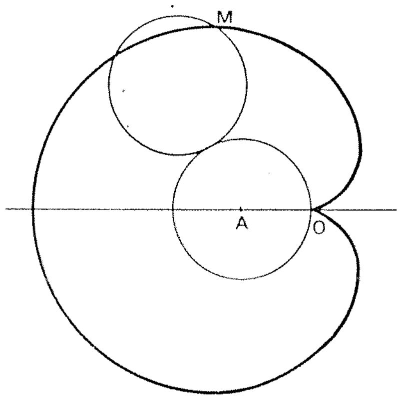


Si le rapport des rayons de deux cercles est rationnel, la courbe se ferme.

L'astroïde est une hypocycloïde telle que le rapport des rayons soit égal à 4.



La cardioïde est une épicycloïde telle que les rayons des cercles soient égaux.



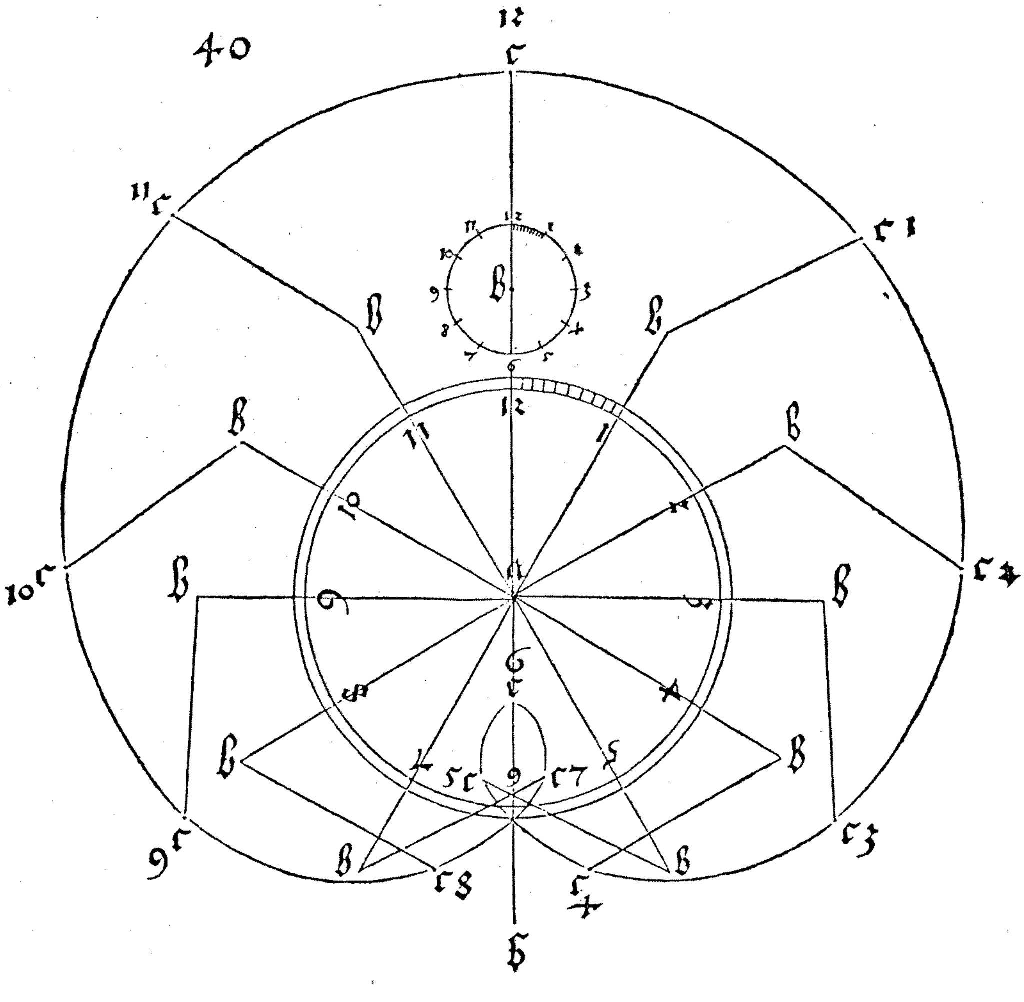
Remarque : Jusqu'à l'adoption du système de COPERNIC, les astronomes (à quelques exceptions près), ont considéré que le soleil et les autres planètes du système solaire (Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne) tournaient autour de la terre. Les observations laissaient penser que les trajectoires n'étaient pas circulaires. Dans le système de PTOLEMEE, la planète tourne sur un cercle dont le centre décrit un cercle centré en la Terre : cette trajectoire est donc une épicycloïde. En effet, à la suite des Grecs et jusqu'à Képler seuls des cercles ou des combinaisons de cercles décrits d'un mouvement uniforme semblaient aptes à représenter le mouvement des planètes ; le cercle et la sphère de par leurs régularités et symétries étaient l'apanage des dieux.

EXERCICE

En s'inspirant du tracé de la cycloïde comprendre ce dessin et réaliser de la même manière le tracé d'une cardïoïde.
(extrait de "Underweysung der Messung ..." de DÜRER).

ABer ein andre lini/die sey genant ein spiñen lini/darum dz sie im aufreissen/dardurch mans macht scheir einer spinnen enlich ist/die mach ich durch ein zwifache bewegung also/Jch reis eyn aufrechte lini.a.b.daran setz ich ein andre lini der end sey.c.vñ die lini.a.b.laß ich im end a stet bleiben/Aber das end.b.für ich in zirckels weis herumb/wie ich dañ der end im umblauf uberal mit b.vertzeichent hab/ Darnach soll im end.b.die ander daran gestossen lini.c. mit jrem hyndern ende im punckten.b.auch stett bleiben/aber das förder end.c.soll in zirckels weiß herum gefürt werden/ So dañ die erst lini umgefürt/und die ander anstosset auch sonderlich herum gefürt wirdet/so zeichent das end c.ein sonderliche lini/damit aber dise lini gewyß gefürt werd/so setz ich eyn zirckel mit dem ein fuß in dē punckte.a.vñ reiß mit dem andern fuß eyn zirckellini under dem/b/die gradir ich auch in theyl mit ziffern/dardurch die lini.a.b.von punckt zu punckt gewyß gee/Des gleichē thu ich jm auch im punckte.b. unnd so offt ich mit der lini.a.b .eyn grad gee / so oft gee ich auch ein grad im zirckel.b.mit der lini.c.so zeichnet das end.c.die punckten zwischen den jr lini zusamen soll getzogen werden/die ich uberall mit.c verzeichent hab/wie das nachfolgett aufgerysen ist.

40



Ce texte est reproduit en caractères latins à la page suivante.

Aber eine andere Linie (Kurve) sei Spinnenlinie genannt, weil sie aufgezeichnet einer Spinne ähnlich ist.
Ich erzeuge sie durch eine doppelte Bewegung in der folgenden Weise:
Ich zeichne eine Gerade ab, daran setze ich eine Gerade deren Ende mit c bezeichnet sei.

Résumé en Allemand contemporain

Gerade ab, in b die dazu Normale bc

Die Gerade ab wird in a festgehalten, doch das Ende b führe ich im Kreis. Die Punkte des Umlaufs habe ich überall mit b bezeichnet.

Ich beschreibe einen Kreis mit Mittelpunkt a und Radius ab

Danach soll im Ende b die andere daran gefügte Linie (Gerade) bc mit ihrem hintern Ende im Punkte b fest bleiben , doch das vordere Ende c soll einen Kreis beschreiben.

Zugleich beschreibt c einen Kreis um b mit dem Radius bc

Wird die erste Linie "herumgeführt" und die andere anstoßende (zugleich) auch"herumgeführt" so beschreibt das Ende c eine merkwürdige Linie (Kurve)
Damit aber diese Linie sicher gezeichnet werden kann, setze ich den Zirkel mit dem einen Schenkel in a und ziehe mit dem anderen Schenkel die Kreislinie der b. Diese unterteile ich und bezeichne die (Teilungs)punkte mit Ziffern.
Desgleichen tue ich auch im Punkte b.
Und sooft ich mit der Linie ab "einen Grad" vorrücke, so rücke ich auch"einen Grad" im Kreis um b mit der Linie bc vor.

Auf diese Weise beschreibt das Ende c Punkte, die zusammen eine Kurve ergeben "die ich überall mit c verzeichnet hab/ wie das nachfolgend aufgerissen ist".

Der Punkt b beschreibt um a einen Kreis mit dem Radius ab.
Zugleich beschreibt c um b einen Kreis .

Beide Kreisbewegungen geschehen im positiven Umlaufssinn und mit derselben Winkelgeschwindigkeit.

Die "Spinnenlinie" ist die solcherart von c mechanisch erzeugte Kurve.

éléments de géométrie de Clairaut

Les pages qui suivent contiennent quelques extraits du livre "Eléments de Géométrie" d'Alexis-Claude CLAIRAUT, relatifs aux polygones, aux solides et à la sphère.

Alexis-Claude CLAIRAUT fut initié aux mathématiques, dès son plus jeune âge par son père, maître de mathématiques de Paris et membre de l'Académie de Berlin. Il apprit à lire à l'âge de 4 ans directement dans les Eléments d'Euclide. A 19 ans, l'âge où d'autres collégiens apprenaient à poser des additions avec virgule, il est élu à l'Académie des Sciences, pour un mémoire sur les courbes. Ce record de précocité n'a jamais été battu depuis.

En 1736, il participe à l'expédition en Laponie consacrée à la mesure de la longueur d'un degré de méridien ; les résultats obtenus confirment une étude théorique de NEWTON, c'est-à-dire l'applatissement de la terre aux deux pôles.

Son expédition au pôle nord lui donne l'occasion de briller dans les salons littéraires et scientifiques qu'il fréquente assidûment. Sa réputation lui valut de donner des leçons de mathématiques à la Marquise du Châtelet qu'il conseillait dans sa traduction des Principes de Newton. C'est pour cette brillante élève qu'il rédige les Eléments de Géométrie (1741) ; à cette époque les mathématiques n'étaient généralement pas enseignées dans des classes, à des élèves de moins de 19 ans. Le livre de Clairaut n'est pas un manuel scolaire, au sens où nous l'entendons aujourd'hui.

PREFACE

Quoique la Géométrie soit par elle-même abstraite, il faut avouer cependant que les difficultés qu'éprouvent ceux qui commencent à s'y appliquer, viennent le plus souvent de la manière dont elle est enseignée dans les Eléments ordinaires. On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes, et de principes préliminaires qui semblent ne promettre rien que de sec au Lecteur. Les propositions qui viennent ensuite ne fixant point l'esprit sur des objets intéressants, et étant d'ailleurs difficiles à concevoir, il arrive communément que les Commençants se fatiguent et se rebutent, avant que d'avoir aucune idée distincte de ce qu'on voulait leur enseigner.

Il est vrai que, pour sauver cette sècheresse, naturellement attachée à l'étude de la Géométrie, quelques Auteurs ont imaginé de mettre à la suite de chaque proposition essentielle, l'usage qu'on en peut faire pour la pratique ; mais par là ils prouvent l'utilité de la Géométrie, sans faciliter beaucoup les moyens de l'apprendre. Car chaque proposition venant toujours avant son usage, l'esprit ne revient à des idées sensibles, qu'après avoir essuyé la fatigue de saisir des idées abstraites.

Quelques réflexions que j'ai faites sur l'origine de la Géométrie, m'ont fait espérer d'éviter ces inconvénients, en réunissant les deux avantages d'intéresser et d'éclairer les Commençants. J'ai pensé que cette Science, comme toutes les autres, devait s'être formée par degrés ; que c'était vraisemblablement quelque besoin qui avait fait faire les premiers pas, et que ces premiers pas ne pouvaient pas être hors de la portée des Commençants, puisque c'étaient des Commençants que les avaient faits.

Prévenu de cette idée, je me suis proposé de remonter à ce qui pouvait avoir donné naissance à la Géométrie ; et j'ai tâché d'en développer les principes, par une méthode assez naturelle, pour être supposée la même que celle des premiers inventeurs, observant seulement d'éviter toutes les fausses tentatives qu'ils ont nécessairement dû faire.

La mesure des Terrains m'a paru ce qu'il y avait de plus propre à faire naître les premières propositions de la Géométrie ; et c'est, en effet, l'origine de cette Science, puisque Géométrie signifie *mesure de terrain*. Quelques Auteurs prétendent que les Egyptiens, voyant continuellement les bornes de leurs Héritages détruites par les débordements du Nil, jetèrent les premiers fondements de la Géométrie, en cherchant les moyens de s'assurer exactement de la situation, de l'étendue et de la figure de leurs domaines. Mais quand on ne s'en rapporterait pas à ces Auteurs, du moins ne saurait-on douter que dès les premiers temps, les hommes n'aient cherché des méthodes pour mesurer et partager leurs terres. Voulant dans la suite perfectionner ces méthodes, les recherches particulières les conduisirent peu à peu à des recherches générales ; et s'étant enfin proposé de connaitre le rapport exact de toutes sortes de grandeurs, ils formèrent une Science d'un objet beaucoup plus vaste, que celui qu'ils avaient d'abord embrassé, et à laquelle ils conservèrent cependant le nom qu'ils lui avaient donné dans son origine.

Afin de suivre dans cet Ouvrage une route semblable à celle des Inventeurs, je m'attache d'abord à faire découvrir aux Commençants les principes dont peut dépendre la simple mesure des Terrains, et des distances accessibles ou inaccessibles, etc. De là je passe à d'autres recherches qui ont une telle analogie avec les premières, que la curiosité naturelle à tous les hommes, les porte à s'y arrêter ; et justifiant ensuite cette curiosité par quelques applications utiles, je parviens à faire parcourir tout ce que la Géométrie élémentaire a de plus intéressant.

On ne saurait disconvenir, ce me semble, que cette méthode ne soit au moins propre à encourager ceux qui pourraient être rebutés par la sècheresse des vérités géométriques, dénuées d'applications ; mais j'espère qu'elle aura encore une utilité plus importante, c'est qu'elle accoutumera l'esprit à chercher et à découvrir ; car j'évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorèmes ; c'est-à-dire, de ces propositions, où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir.

Si les premiers Auteurs de Mathématiques ont présenté leurs découvertes en théorèmes, ç'a été, sans doute, pour donner un air plus merveilleux à leurs productions, ou pour éviter la peine de reprendre la suite des idées qui les avaient conduits dans leurs recherches. Quoi qu'il qu'il en soit, il m'a paru beaucoup plus à propos d'occuper continuellement mes Lecteurs à résoudre des problèmes ; c'est-à-dire, à chercher les moyens de faire quelque opération, ou de découvrir quelque vérité inconnue, en déterminant le rapport qui est entre des grandeurs données et des grandeurs inconnues, qu'on se propose de trouver. En suivant cette voie, les Commençants aperçoivent, à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'Inventeur ; et par là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention.

On me reprochera peut-être, en quelques endroits de ces Eléments, de m'en rapporter trop au témoignage des yeux, et de ne m'attacher pas assez à l'exactitude rigoureuse des démonstrations. Je prie ceux qui pourraient me faire un tel reproche, d'observer que je ne passe légèrement, que sur des propositions dont la vérité se découvre, pour peu qu'on y fasse attention. J'en use de la sorte, surtout dans les commencements, où il se rencontre plus souvent des propositions de ce genre, parce que j'ai remarqué que ceux qui avaient de la disposition à la Géométrie, se plaisaient à exercer un peu leur esprit ; et qu'au contraire, ils se rebutaient, lorsqu'on les accablait de démonstrations, pour ainsi dire, inutiles.

Qu'Euclide se donne la peine de démontrer, que deux cercles qui se coupent n'ont pas le même centre, qu'un triangle renfermé dans un autre, a la somme de ses côtés plus petite que celle des côtés du triangle dans lequel il est renfermé ; on n'en sera pas surpris. Ce Géométre avait à convaincre des Sophistes obstinés, qui se faisaient gloire de se refuser aux vérités les plus évidentes : il fallait donc qu'alors la Géométrie eût, comme la Logique, le secours des raisonnements en forme, pour fermer la bouche à la chicane. Mais, les choses ont changé de face. Tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'à obscurcir la vérité, et à dégoûter les Lecteurs.

Un autre reproche qu'on pourrait me faire, ce serait d'avoir omis différentes propositions, qui trouvent leur place dans les Eléments ordinaires, et de me contenter, lorsque je traite des propositions, d'en donner seulement les principes fondamentaux.

A celà je réponds qu'on trouve dans ce Traité tout ce qui peut servir à remplir mon projet, que les propositions que je néglige sont celles qui ne peuvent être d'aucune utilité par elles-mêmes, et qui d'ailleurs ne sauraient contribuer à faciliter l'intelligence de celles dont il importe d'être instruit : qu'à l'égard des proportions, ce que j'en dis doit suffire pour faire entendre les propositions élémentaires qui les supposent. C'est une matière que je traiterai plus à fond dans les Eléments d'Algèbre, que je donnerai dans la suite.

Enfin, comme j'ai choisi la mesure des Terrains pour intéresser les Commençants ne dois-je pas craindre qu'on ne confonde ces Eléments avec les Traités ordinaires d'Arpentage ? Cette pensée ne peut venir qu'à ceux qui ne considèrent pas que la mesure des Terrains n'est point le véritable objet de ce Livre, mais qu'elle me sert seulement d'occasion pour faire découvrir les principales vérités, en faisant l'Histoire de la Physique, de l'Astronomie, ou de toute autre partie des Mathématiques que j'aurais voulu choisir mais alors la multitude des idées étrangères, dont il aurait fallu s'occuper, aurait comme étouffé les idées géométriques auxquelles seules je devais fixer l'esprit du Lecteur.

IV

Le rectangle est une figure de quatre côtés perpendiculaires les uns aux autres, et le carré est un rectangle dont les quatre côtés sont égaux.

On avait encore besoin d'en tracer dans uneinfinité d'autres occasions. On sait par exemple, que la régularité des figures telles que ABCD, FGHI (fig.2 et 3), appelées rectangles, et composées

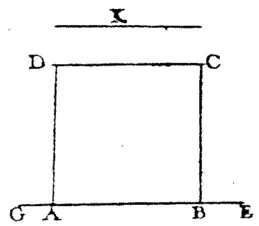


Fig. 2

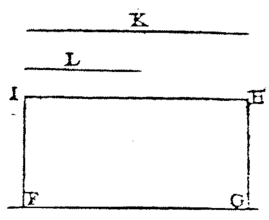


Fig 3

de quatre côtés perpendiculaires les uns aux autres, engage à donner leurs formes aux maisons, à leurs dedans, aux jardins, aux chambres, aux pans de murailles, etc.

La première ABCD de ces figures, dont les quatre côtés sont égaux, s'appelle communément carré. L'autre FGHI, qui n'a n'a que ses côtés opposés égaux, retient le nom de rectangle.

V

Manière d'élever une perpendiculaire.

Dans les différentes opérations qui demandaient qu'on mène des perpendiculaires, il s'agit, ou d'en abaisser sur une ligne, d'un point pris au dehors, ou d'en élever d'un point placé sur la ligne même.

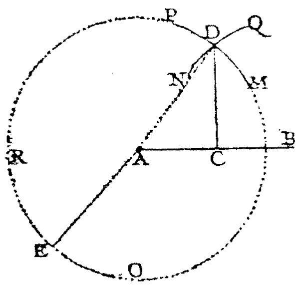


Fig. 4.

Que du point C (fig.4), pris dans la ligne AB, on veuille élever la ligne CD perpendiculaire à AB, il faudra que cette ligne ne penche ni vers A, ni vers B.

Supposant donc d'abord que C soit à égale distance de A et de B, et que la droite CD ne penche d'aucun côté, il est clair que chacun des points de cette ligne sera également éloigné de A et de B ; il ne s'agira donc plus que de trouver un point quelconque D, tel que sa distance au point A soit égale à la distance au point B : car alors tirant par C, et par ce point une ligne droite CD, cette ligne sera la perpendiculaire demandée.

Pour avoir le point D, on pourrait le chercher en tâtonnant ; mais le tâtonnement ne satisfait pas l'esprit, il veut une méthode qui l'éclaire. La voici.

Prenez une commune mesure, une corde, par exemple, ou un compas d'une ouverture déterminée, suivant que vous travaillerez, ou sur le terrain, ou sur le papier.

Cette mesure prise, vous fixerez au point A, ou l'extrémité de la corde, ou la pointe du compas, et, faisant tourner l'autre pointe, ou l'autre extrémité de la corde, vous tracerez l'arc PDM. Puis, sans changer de mesure, vous opérerez de même par rapport au point B, et vous décrirez l'arc QDN, qui, coupant le premier au point D, donnera le point cherché.

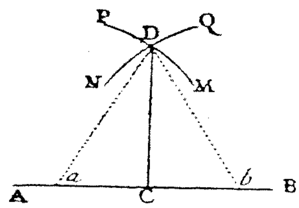


Fig.5

Car puisque le point D appartiendra également aux deux arcs PDM, QDN décrits par le moyen d'une mesure commune, sa distance au point A égalera sa distance au point B. Donc cette ligne sera perpendiculaire sur AB.

si le point C ne se trouve pas à égale distance de A et de B (fig.5) il faut prendre deux autres points a et b, également éloignés de C, pour décrire les arcs PDM et QDN.

VI

Le cercle est la trace entière que décrit la pointe mobile d'un compas pendant qu'elle tourne autour de l'autre pointe - Le centre est le lieu de la pointe fixe - Le rayon est l'intervalle dont le compas est ouvert - Le diamètre est le double du rayon.

Si une des traces, telle que PDM (fig.4), était continuée en O, en E, en R, etc, jusqu'à ce qu'elle revint au même point P, la trace entière s'appelerait circonférence de cercle, ou simplement cercle.

Qu'on ne trace qu'une partie PDM de la circonférence, cette partie sera appelée arc de cercle.
Le point fixe A, son centre ou celui du cercle.
Et l'intervalle AD, son rayon.
Toute ligne, comme DAE, qui passe par le centre A, et qui se termine à la circonférence, est appelée diamètre ; il est évident que cette ligne est double du rayon, ce qui fait que le rayon est quelquefois nommé demi-diamètre.

VII

Manière d'abaisser une perpendiculaire.

La manière d'élever une perpendiculaire sur une ligne AB (fig.6), fournit celle d'en abaisser une d'un point quelconque E, pris hors de cette ligne ; car, plaçant en E, ou l'extrémité d'un fil, ou la pointe du compas, et d'un même intervalle Eb, marquant deux points a et b sur la ligne AB on cherchera, comme dans l'article précédent, un autre point D, dont la distance, au point a et au point b, soit la même, et par ce point et par E, on mènera la droite DE, qui, ayant chacune de ses extrémités également éloignée de a et de b, et ne penchant pas

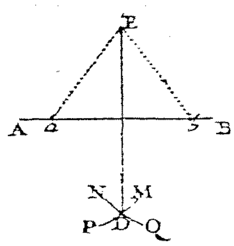


Fig. 6.

plus vers l'un de ces points que vers l'autre, sera perpendiculaire sur AB.

IX

Faire un carré ayant son côté.

La manière de tracer des perpendiculaires étant trouvée, rien n'était plus aisé que de s'en servir pour faire des figures qu'on appelle rectangles et carrés, dont on a parlé dans l'article IV. On voit que pour faire un carré ABCD (fig.2), dont les côtés soient égaux à la ligne donnée K, il faut prendre sur la droite GE, un intervalle AB, égal à K, puis élever (art.V) aux points A et B, les perpendiculaires AD, BC, chacune égale à K, ensuite tirer DC.

La diagonale d'un rectangle est la ligne qui le partage en deux triangles égaux - Les triangles rectangles sont ceux qui ont deux de leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre - Un triangle est la moitié du rectangle qui a même base, et même hauteur ; donc sa mesure est la moitié du produit de sa hauteur par sa base.

Il ne s'agira donc plus que d'avoir la mesure des triangles qu'on aura formés. Or on sait que pour trouver ce qu'on ignore, le moyen le plus sûr est de

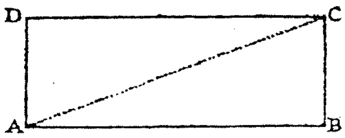


Fig. 12.

chercher si dans ce qu'on connait, rien ne se rapporterait à ce qu'on veut connaître ; mais on a déjà vu que tout rectangle ABCD (fig.12), est égal au produit de sa base AB par sa hauteur CB. D'ailleurs, il est aisé de s'apercevoir que cette figure coupée transversalement par la ligne AC, nommée diagonale, se trouve partagée en deux triangles égaux, et de là on infère que chacun de ces triangles égalera la moitié du produit de leur base AB ou DC, par leur hauteur CB ou DA.

Il est vrai qu'il n'arrive guère que les triangles à mesurer, aient deux de leurs côtés perpendiculaires l'un à l'autre, comme les triangles ABC, ADC, qu'on appelle triangles rectangles ; mais rien n'empêche qu'on ne les réduise tous à des triangles de cette espèce.

Car que du point A, sommet d'un triangle quelconque ABC (fig.3), on abaisse la perpendiculaire AD, sur la base BC, le

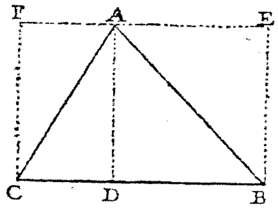


Fig. 13.

triangle ABC se trouvera partagé en deux triangles rectangles ABD, ADC.

Reprenant donc ce qui vient d'être dit, il est évident que comme les deux triangles ABD, ADC, seront les moitiés des rectangles AEBD, ADCF, le triangle proposé ABC, sera de même, la moitié du rectangle EBCF, qui aura BC pour base, et AD pour hauteur: mais puisque la surface du rectangle EBCF égalera le produit de la hauteur EB ou AD par la base BC, le triangle ABC aura pour mesure la moitié du produit de la base BC par la perpendiculaire AD, hauteur du triangle.

On a donc la manière de mesurer tous les terrains terminés par des lignes droites, puisqu'il ne s'en trouve aucun qu'on ne puisse réduire à des triangles, et que des sommets de ces triangles, on sait abaisser des perpendiculaires sur leurs bases.

XV

les triangles qui ont même hauteur et même base, ont des superficies égales.

De ce que dans la méthode que nous venons de donner, pour mesurer l'aire ou la superficie des triangles, on n'emploie que leur base et leur hauteur, sans égard à la longueur de leurs côtés on tire cette proposition, ou ce théorème, que tous les triangles, tels que ECB, ACB (fig.14), qui ont une base

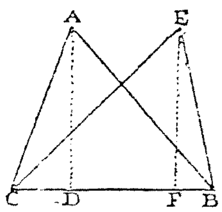


Fig. 14.

commune CB, et dont les hauteurs EF, AD, sont égales, ont la même superficie.

XX

Les polygones réguliers sont des figures que terminent des côtés égaux, et également inclinés les uns sur les autres.

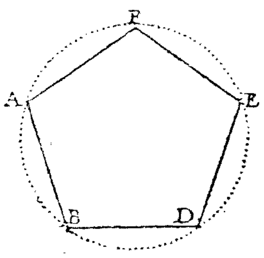


Fig.20

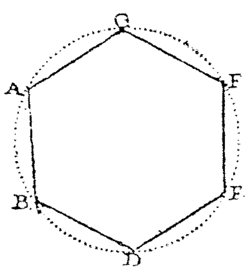


Fig.21

Il y a d'autres figures rectilignes qu'il est aisé de mesurer, et qu'on nomme polygones réguliers, figures que terminent des côtés égaux, qui ont tous la même inclinaison les uns sur les autres. Telles sont les figures ABDEF, ABDEFG, ABDEFGH (fig.20, fig.21 et 22).

Comme on a coutume de donner la forme symétrique de ces figures, aux bassins, aux fontaines, aux places publiques, etc, je crois qu'avant que d'apprendre à les mesurer, il faut voir de quelle manière on les trace.

XXI

Manière de décrire un polygone d'un nombre déterminé de côtés - Le pentagone a 5 côtés, l'Hexagone 6, l'Heptagone 7, l'Octogone 8, l'Ennéagone 9, le Décagone 10, etc.

Qu'on décrive une circonférence de cercle, qu'on la partage en autant de parties égales qu'on voudra donner de côtés au polygone, qu'ensuite on mène les lignes AB, BD, DE, etc, par les points A, B, D, E, etc, qui partageront la circonférence, on aura le polygone cherché, qu'on nommera, ou pentagone, ou hexagone, ou heptagone, ou octogone, ou ennéagone, ou décagone, etc, suivant qu'il aura ou cinq ou six ou sept ou huit ou neuf ou dix, etc, côtés.

XXII

Mesure de la surface d'un polygone régulier - L'apothème est la perpendiculaire abaissée du centre de la figure sur un de ses côtés.

Pour avoir la mesure d'un polygone régulier, on pourrait employer la méthode qu'on a déjà donnée (art.XIII) pour toutes les figures rectilignes ; mais on s'aperçoit aisément que le plus court est de partager le polygone en triangles égaux, qui aient tous le centre C pour sommet. Car prenant un de ces triangles CBD par exemple (fig.22), et tirant sur la base BD la perpendiculaire CK, qui pour lors sera nommée l'apothème du polygone, comme l'aire du triangle vaudra le produit de la base BD, par la moitié de CK, ce produit, pris autant de fois que le polygone aura de côtés, donnera l'aire de la figure entière.

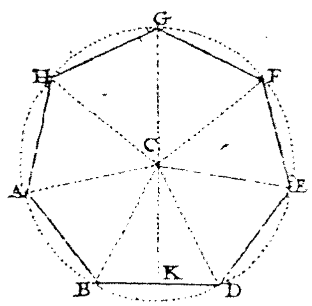


Fig. 22

XXIII

Le triangle équilatéral est celui dont les trois côtés sont égaux - Manière de le décrire.

Qu'on ne partageât la circonférence du cercle qu'en trois parties égales, on formerait un triangle nommé communément triangle équilatéral; qu'on pargeât cette circonférence en quatre parties égales, on formerait un carré ; mais ces deux figures, les plus simples de tous les polygones, peuvent aisément se tracer, sans qu'il soit nécessaire d'avoir recours à la division du cercle, c'est ce qu'on a déja vu (art. IX) pour le carré . A l'égard du triangle équilatéral, il est aisé de s'apercevoir que pour le décrire sur une base donnée AB (fig. 23), il faut que des points A et B comme centres, et d'une ouverture de compas égale à AB, on trace les arcs DCF et GCH, qu'ensuite des points A et B on

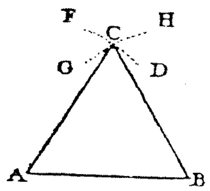


Fig 23

mène des lignes AC, BC, au point C, section commune des deux arcs DCF, GCH, et sommet du triangle.

XXIV

A la méthode de décrire géométriquement le triangle équilatéral et le carré les premiers de tous les polygones, je pourrais joindre celle de tracer géométriquement un pentagone, comme plusieurs Auteurs l'on fait dans les Eléments qu'ils nous ont donnés; mais parce que les Commençants, pour qui seuls nous travaillons ici, n'apercevraient qu'avec peine la route qu'a dû suivre l'esprit, en cherchant la manière de tracer cette figure, route que l'Algèbre nous met à portée de découvrir, nous nous croyons obligés de renvoyer la description du pentagone au traité qui suivra celui-ci, et dans lequel on joindra cette description à celle de tous les autres polygones qui auront un plus

grand nombre de côtés, et qui sans le secours de l'Algèbre, ne pourraient être décrits géométriquement.
Des polygones qui ont plus de cinq côtés, et que je dis ne pouvoir être décrits que par le moyen du calcul algébrique, il en faut excepter ceux de 6, de 12, de 24, de 48 etc. côtés, et ceux de 8, de 16, de 32, de 64, etc. côtés, qu'on peut aisément décrire par les méthodes que fournit la Géométrie élémentaire, comme on le verra à la fin de cette première partie.

LII

Un angle a pour mesure l'arc de cercle qu'interceptent ses côtés.

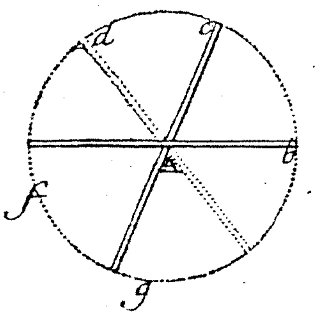


Fig.45

Il était donc nécessaire de chercher une mesure fixe pour les angles, comme on en avait déjà une pour les longueurs. Or cette mesure qu'il fallait avoir, il a été facile de la trouver. Car que Ab (Fig.45) restant fixe, on lui applique d'abord le côté Ac, qu'ensuite on fasse tourner ce côté autour de A, il est clair que si on adapte à l'extrémité c de la branche mobile Ac, ou une plume, ou un crayon qui donne moyen de rendre sensible la trace du point c, cette trace, qui formera un arc de cercle, donnera exactement la mesure de l'angle, pour chaque ouverture particulière des côtés Ab, Ac, c'est-à-dire, qu'à cause de l'uniformité de la courbure du cercle, il arrivera nécessairement qu'à une ouverture double, triple, quadruple de cAb, répondra un arc double, triple, quadruple de cb.

LIII

Le cercle est partagé en 360 dégrés ; chaque degré en 60 minutes, etc.

Supposant donc que la circonférence bcdfg (fig. 45), décrite par la révolution entière du point c, soit divisée en un nombre quelconque de parties égales, le nombre des parties contenues dans l'arc qu'intercepteront les lignes Ac et Ab, mesurera exactement l'ouverture de ces lignes, ou l'angle cAb qu'elles formeront.

Les Géomètres sont convenus de diviser le cercle en 360 parties, qu'on appelle degrés, chaque degré en 60 minutes, chaque minute en 60 secondes, etc. Ainsi, un angle bAc, par exemple, aura 70 degrés 20 minutes, si l'arc bc, qui lui servira de mesure, a 70 des 360 parties du cercle, et de plus 20 soixantièmes parties d'un degré.

LXX

Les angles d'un triangle équilatéral sont chacun de 60 degrés.

Comme un triangle équilatéral n'est autre chose qu'un triangle isocèle auquel chacun de ses côtés peut également servir de base, il est clair que ses trois angles sont nécessairement égaux, et qu'ils valent chacun

60 degrés, tiers de 180 degrés.

LXXI

Description de l'Hexagone

De là se tire aisément la description de l'hexagone ou polygone de six côtés, que nous avions promise (article XXIV).

Car pour trouver une ligne qui partage la circonférence en six parties égales, il faudra que cette ligne soit la corde d'un arc de 60 degrés, sixième partie de 360 dégrés, valeur de la circonférence entière. Supposant donc que AB soit cette corde (fig. 56), et du centre I menant aux extrémités A et B les rayons AI et IB, l'angle AIB vaudra 60 degrés, et parce que les deux côtés AI et IB seront égaux,

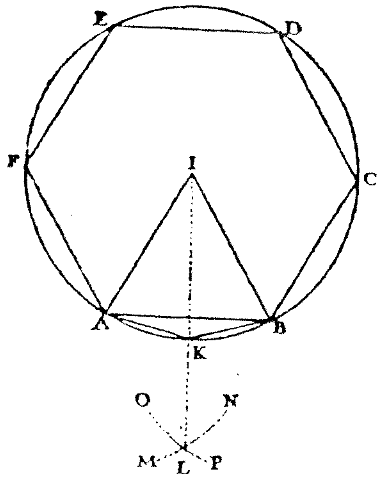


Fig. 56

le triangle AIB sera isocèle. Donc l'angle au sommet étant de 60 degrés, chacun des deux autres angles vaudra aussi 60 degrés, moitié de 120. Donc (article LXX) le triangle AIB sera équilatéral. Donc AB égalera le rayon du cercle. D'où il suit que, pour décrire un hexagone, il faudra ouvrir le compas d'un intervalle égal au rayon, et le porter six fois de suite sur la circonférence, et l'on aura les six côtés de l'hexagone.

LXXII

La moitié de l'angle au centre de l'hexagone donne l'angle au centre du dodécagone.

L'hexagone ABCDEF décrit, on décrira facilement le dodécagone, ou polygone de douze côtés.

Pour cela, on divisera l'arc AKB (fig. 56), ou l'angle AIB, en deux parties égales, et AK, corde de la moitié de l'arc AKB, sera un des côtés du dodécagone.

LXXIII

Partager un angle en deux également.

Or, pour partager l'arc AKB, en deux arcs égaux AK et KB, on fera la même opération que s'il s'agissait de couper la corde AB en deux parties égales, c'est-à-dire, que des points A et B, comme centres et d'un intervalle quelconque, on décrira les arcs MLN, OLP, ensuite par le point L section des deux arcs, et par le centre I on mènera la ligne LI qui divisera en deux, et l'arc AKB et la corde AB.

LXXIV

Description des Polygones de 24, 48 etc... côtés.

Qu'on suive la méthode précédente, et qu'on partage l'arc AK en deux arcs égaux, la corde de l'un ou de l'autre de ces arcs sera le côté du polygone de 24 côtés. On aura de même les polygones de 48, 96, 192, etc. côtés.

LXXV

Description de l'octogone et des polygones de 16, 32, etc. côtés.

Maintenant, pour décrire un octogone, c'est-à-dire un polygone de 8 côtés, on commencera par tracer un carré dans le cercle ; ce qu'on fera, si, après avoir mené deux diamètres AIB et CIE (fig. 57), qui se

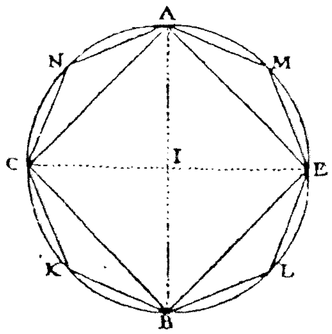


Fig. 57

coupent à angles droits, on joint leurs extrémités par les lignes AC, CB, BE, AE.

Car, à cause de la régularité du cercle, et de l'égalité des quatre angles que forment les perpendiculaires AIB, CIE, les quatre côtés AC, CB, BE, EA, seront nécessairement égaux, et se trouveront également penchés les uns sur les autres ce qui ne pourra convenir qu'au carré.

Le carré ainsi décrit, on divisera, par la méthode précédente, chacun des arcs CKB, BLE, etc., en deux parties égales ; ce qui donnera l'octogone CKBLEMAN.

Qu'on partageât de même chacun des arcs CK, KB, etc. en 2, en 4, en 8, etc. parties égales, on aurait des polygones de 16, 32, 64, etc. côtés.

I

La mesure du cercle est le produit de sa circonférence par la moitié de son rayon.

Supposons d'abord qu'on ait l'aire du cercle X à mesurer (fig. 3). On observera qu'en lui inscrivant un polygone régulier BCDE, etc., plus ce polygone aura de côtés, plus il approchera d'être égal au cercle. Or on a vu que l'aire de cette figure (1ère partie, article XXII) est égale à autant de fois le produit du côté BC par la moitié de l'apothème AH, que le polygone a de côtés ; ou, ce qui revient au même,

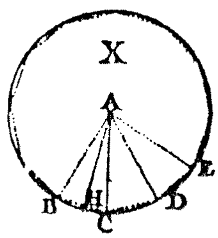


Fig. 3

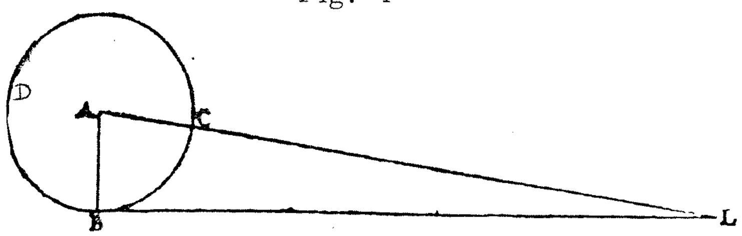
que cette aire a pour mesure le produit du contour entier BCDE, etc. par la moitié de l'apothème. Donc, puisqu'en poussant jusqu'à l'infini le nombre des côtés du polygone, son aire, son contour, son apothème, égaleront l'aire, le contour et le rayon du cercle, la mesure du cercle sera le produit de la circonférence par la moitié de son rayon.

II

L'aire du cercle est égale à un triangle dont la hauteur est le rayon, et la base une droite égale à la circonférence.

Il suit de là que la superficie d'un cercle BCD (fig. 4), est égale à celle d'un triangle ABL, dont la hauteur serait le rayon AB, et la base une droite BL égale à la circonférence.

Fig. 4



III

Il ne s'agit donc que d'avoir le rayon et la circonférence. A l'égard du rayon, il est aisé de le mesurer ; il n'en est pas de même de la circonférence : cependant, pour avoir sa mesure, on peut envelopper le cercle d'un fil ; ce qui, dans beaucoup d'occasions, suffit pour la pratique.

Mais, jusqu'à présent, on n'a pu parvenir à mesurer géométriquement la circonférence du cercle, c'est-à-dire, à déterminer exactement le rapport qu'elle a avec le rayon. On trouve ce rapport à des cent millièmes, à des millionièmes près, et même on en approche tant qu'on veut, sans que pour cela, on puisse le déterminer rigoureusement.

IV

Le diamètre d'un cercle ayant 7 parties, la circonférence en a près de 22.

L'approximation la plus simple qu'on ait trouvée, est celle qu'on tient d'Archimède. Le diamètre ayant 7 parties, ce que la circonférence contient de ces parties est entre 21 et 22 ; et l'on sait qu'elle approche beaucoup plus de 22 que de 21.

V

Les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons.

Au reste, il est clair que si on savait exactement le rapport d'une seule circonférence à son rayon, on saurait celui de toutes les autres circonférences à leurs rayons ; ce rapport devant être le même dans tous les cercles. Cette proposition paraît si simple, qu'elle n'a pas besoin d'être démontrée, puisqu'on sent que quelles que fussent les opérations qu'on aurait faites pour mesurer une circonférence, en se servant des parties de son rayon, il faudrait qu'on fît les mêmes opérations, pour mesurer toute autre circonférence ; qu'ainsi on lui trouverait le même nombre de parties de son rayon.

VI

Les aires des cercles sont proportionnelles aux carrés de leurs rayons.

Il est évident que les cercles ont encore la propriété générale de toutes les figures semblables (1re partie, article XLVII), je veux dire, que leurs surfaces sont en même proportion que les carrés de leurs côtés homologués ; mais comme, pour appliquer cette proposition aux cercles, on ne pourra prendre leurs côtés, il faudra se servir des rayons, alors on verra que les cercles auront leurs aires proportionnelles aux carrés de leurs rayons.

S'il ne paraissait pas d'abord que cette proposition dut suivre de ce qui est dit dans l'article XLVII de la première

Fig. 8.

Partie, et qu'on voulût en avoir une démonstration particulière, on ferait attention qu'il reviendrait absolument au même, de comparer les aires de deux cercles BCD, EFG (fig. 4 et 5), ou celles des triangles ABL, AEM, qui leur seraient égaux (article II), en supposant que leurs bases BL et EM, fussent les développements des circonférences BCD et EFG, et que leurs hauteurs fussent les rayons AB et AE. Or par l'article précédent, ces triangles seraient semblables ; donc leurs aires seraient en même proportion que les carrés de leurs côtés homologues AB, AE, rayons des cercles BCD et EFG. Donc, etc.

VII

Des trois cercles qui ont pour rayons les trois côtés d'un triangle rectangle, celui que donne l'hypoténuse vaut les deux autres pris ensemble.

Les cercles, à cause de leur similitude, auront aussi, de même que les figures semblables, cette propriété, que si, en prenant les trois côtés d'un triangle rectangle pour rayons, on décrit trois cercles, celui dont le rayon sera l'hypoténuse, égalera les deux autres pris ensemble.

Ainsi, on pourra toujours trouver un cercle égal à deux cercles donnés, et cela sans prendre la peine de mesurer chacun de ces cercles. Qu'on veuille, par exemple, faire un bassin qui contienne autant d'eau que deux autres, la profondeur étant la même, qu'on veuille trouver l'ouverture d'un tuyau de fontaine, par lequel il s'écoule autant d'eau que par deux tuyaux donnés : on y réussira sans peine, en prenant la voie que nous venons d'indiquer.

DE LA MANIERE DE MESURER LES SOLIDES, ET LEURS SURFACES

Les Principes que nous avons établis dans les trois premières Parties de cet ouvrage, pourraient nous suffire pour résoudre des problèmes beaucoup plus difficiles que ceux que nous allons nous proposer ; mais il est plus dans l'ordre que nous avons suivi précédemment, de passer maintenant à la mesure des solides, c'est-à-dire, des étendues terminées, qui ont à la fois trois dimensions, longueur, largeur et profondeur.

Cette recherche a été, sans doute, un des premiers objets qui ait pu fixer l'attention des Géomètres. On aura voulu savoir, par exemple, combien il y avait de pierres de taille dans un mur dont la hauteur AD, la largeur AB, et la profondeur ou épaisseur BG étaient connues (fig. 34). On se sera proposé de déterminer la quantité d'eau que contenait un fossé, ou un réservoir ABCD (fig. 35) ; on aura voulu trouver la solidité d'une tour, d'un obélisque, d' une maison, d'un clocher, etc.

Pour traiter les figures qui ont les trois dimensions, de la même manière que nous avons traité celles qui n'en ont que deux, nous commencerons par examiner les solides qui sont terminés par des plans.

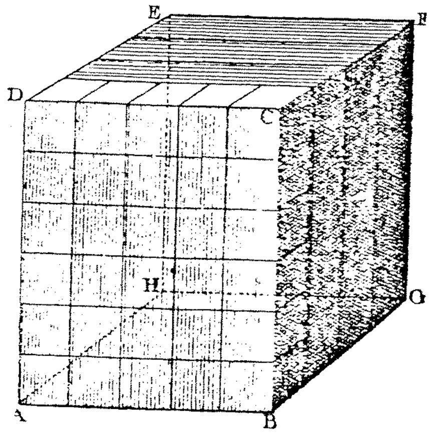


fig. 34

Nous n'aurons pas besoin de parler de la manière de mesurer les surfaces de ces corps, elles ne peuvent être que

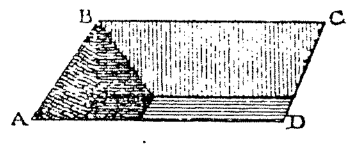


fig. 35

des assemblages de figures rectilignes et par conséquent, leur mesure dépend de ce qui a été dit dans la première Partie.

I

Le cube est une figure solide terminée par six carrés. C'est la mesure commune des solides.

Pour mesurer la solidité des corps, il est naturel de les rapporter tous au solide le plus simple, ainsi que pour mesurer les surfaces, on les a toutes rapportées au carré. Or le solide le plus simple, c'est le cube, qui, en effet, est en solide, ce que le carré est en superficie ; c'est-à-dire que c'est un espace tel que abcdefgh (fig. 36), dont la longueur, la largeur et la profondeur

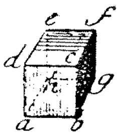


fig. 36

sont égales, ou ce qui revient au même, c'est une figure terminée par six faces égales qui sont des carrés.

On appelle côté du cube le côté des carrés qui lui servent de faces.

Par un pied cube, on entend un cube dont le côté est d'un pied ; de même un pouce cube, est un cube dont le côté est d'un pouce, etc.

V

La ligne perpendiculaire à un plan est celle qui ne penche d'aucun côté sur ce plan - Il en est de même du plan perpendiculaire à un autre plan.

Il est presque inutile d'avertir que par une ligne perpendiculaire à un plan, nous entendons une ligne qui ne penche d'aucun côté sur ce plan, et de même qu'un plan qui ne penche pas plus d'un côté que d'un autre sur un second plan, est dit perpendiculaire à ce second plan ; ces deux définitions sont analogues à celle que nous avons donnée d'une ligne perpendiculaire à une autre ligne.

VI

La ligne qui est perpendiculaire à un plan, est perpendiculaire à toutes les lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe.

Or il suit de là que la ligne AB, qui est perpendiculaire au plan X (fig. 37), doit être perpendiculaire à toutes les lignes

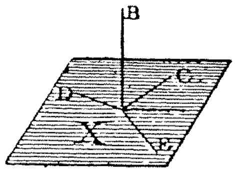


fig. 37

AC, AD, AE, etc., qui partent du pied A de cette ligne, et qui sont dans ce plan. Car il est évident que si elle penchait sur une de ces lignes, elle serait inclinée vers quelque côté du plan. Donc elle ne lui serait pas perpendiculaire.

VII

Pour se représenter d'une façon bien sensible, comment la ligne AB peut être perpendiculaire à toutes les lignes qui partent de son extrémité A, on n'aura qu'à faire une figure en relief de la manière suivante.

On construira de quelque manière unie et facile à plier, comme du carton, un rectangle FGDE (fig. 38) partagé en deux parties égales par la droite AB, perpendiculaire aux côtés ED, FG ; on pliera ensuite ce rectangle, en sorte que le pli

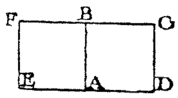


fig. 38

soit le long de la ligne AB, et on le portera tout plié sur le plan X (fig. 39). Il est évident que quelle que soit l'ou-

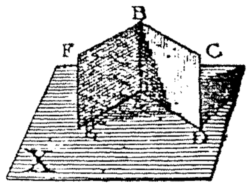


Fig. 39.

verture qu'on donne aux deux parties FBAE, GBAD du rectangle plié EADGBF ces deux parties resteront toujours appliquées sur le plan X, sans que la ligne AB change de position par rapport à ce plan ; cette droite AB sera donc perpendiculaire à toutes les lignes qui partent de son pied, et qui seront dans le plan X, puisque les côtés AE, AD du rectangle plié s'appliqueront successivement sur chacune de ces lignes par le mouvement que nous venons de décrire.

VIII

Pratique simple pour élever ou pour abaisser des lignes perpendiculaires à des plans.

On tire de la construction précédente une pratique bien commode, pour élever d'un point donné sur un plan, une ligne perpendiculaire à ce plan, ou pour abaisser d'un point pris hors d'un plan, une ligne qui soit perpendiculaire à ce plan. Car que le point proposé soit dans le plan, en A par exemple (fig. 40)

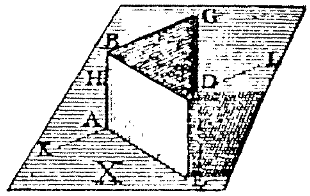


fig. 40

ou qu'il soit hors du plan, comme en H, on pourra toujours faire avancer le rectangle EFBGDA sur le plan X, jusqu'à ce que le pli AB touche le point donné, et AB deviendra, dans les deux cas, la perpendiculaire demandée.

IX

Une ligne sera perpendiculaire à un plan, si elle est perpendiculaire à deux lignes de ce plan, qui partent du point où elle tombe.

Il suit aussi de là qu'une ligne AB sera perpendiculaire à un plan X, toutes les fois qu'elle sera perpendiculaire à deux lignes AE et AD de ce plan. Car alors AB pourra être regardée comme le pli d'un rectangle dont l'un des côtés pliés s'appliquerait sur AE, et l'autre sur AD. Or ce pli ne pourrait manquer d'être perpendiculaire au plan X.

XXVI

Les pyramides sont des corps renfermés par un certain nombre de triangles qui partent tous d'un même sommet et qui se terminent à une base polygone quelconque.

Ayant vu ce qui concerne les parallélipipèdes et les prismes, examinons maintenant les pyramides, c'est-à-dire, les corps tels que ABCDEFG (Fig. 19), renfermés dans un certain nombre de triangles qui partent tous d'un même sommet A, et qui se terminent à une base polygone quelconque BCDEFG. Il est nécessaire de considérer ces sortes de solides, non seulement parce qu'on en rencontre dans les bâtiments et dans les autres ouvrages à construire, mais parce que tous les solides terminés par des plans, sont des assemblages de pyramides,

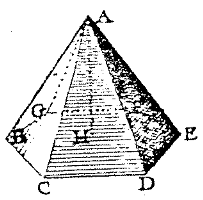


Fig. 49

ainsi que les figures rectilignes sont des assemblages de triangles.
Il ne faut pour s'en assurer, que tirer d'un point pris où l'on voudra dans l'intérieur du corps proposé, des lignes à tous les angles de ce corps.

XXVII

On distingue les pyramides les unes des autres ainsi que les prismes, par le nom de la figure qui leur sert de base.

XXVIII

Lorsque la pyramide a pour base une figure régulière et que son sommet répond perpendiculairement au centre H de sa base, ainsi que dans la Fig.49, la pyramide est alors appelée pyramide droite ; elle est nommée, au contraire, pyramide oblique, lorsque le sommet n'est pas perpendiculairement au-dessus du centre, ainsi que dans la Fig.51.

XXIX

Pour découvrir la manière de mesurer toutes sortes de pyramides, tant droites qu'obliques, nous commencerons par faire sur ces figures,quelques réflexions générales, auxquelles on est conduit par la connaissance des propriétés des prismes. Lorsqu'on fait attention à l'égalité des prismes, qui ont même base et même hauteur, il est naturel qu'on se rappelle que les parallélogrammes sont aussi égaux entre eux , lorsqu'ils ont ces mêmes conditions, et qu'il en est encore de même des triangles. Ces trois vérités se présentant à la fois à l'esprit, l'analogie doit porter à croire que les propriétés qui sont communes aux parallélogrammes et aux triangles, peuvent l'être aussi aux prismes et aux pyramides ; on doit donc soupçonner que les pyramides qui ont même base et même hauteur, ont la même solidité.

XXX

Les réflexions suivantes confirmeront ce soupçon. Soient ABCDE, a b c d e (Fig.50 et 51), deux pyramides, dont les hauteurs AH, ah, soient les mêmes, et dont les bases soient deux figures égales par exemple, deux carrés égaux BCDE, bcde ; si on conçoit que ces deux pyramides soient coupées par une infinité de plans parallèles à leurs bases on imaginera, sans peine, que ces coupes de pyramide donneront des carrés égaux IKLM, iklm, et par conséquent, que les deux pyramides peuvent être regardées comme des assemblages d'un même nombre de tranches, qui dans ces deux pyramides seront égales

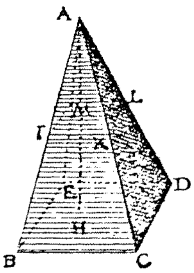


Fig. 50

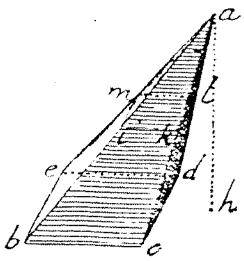


Fig. 51.

chacune à sa correspondante. Donc, conclura-t-on, la somme des tranches est la même, de part et d'autre, c'est-à-dire, que les deux pyramides ont la même solidité.

voir "les indivisibles" p. 64.

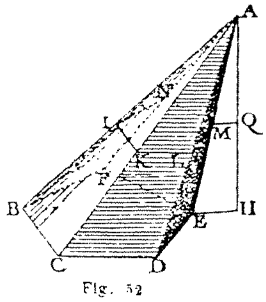


Fig. 52

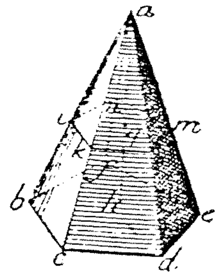


Fig. 53.

XL

Ayant découvert que les pyramides qui ont même hauteur sont en même raison que leurs bases, on doit sentir que la mesure de leur solidité ne renferme plus que très peu de difficulté.
Car il s'agit plus que de savoir mesurer une seule pyramide, pour mesurer toutes les autres. Supposons, par exemple, que nous sachions mesurer la pyramide ABCDE (Fig. 56) et qu'on nous demande la mesure

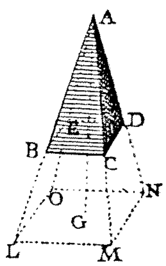


Fig. 56

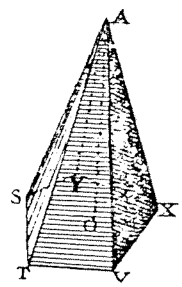


Fig. 57

de la pyramide ASTVXY (Fig.57) qui n'a ni la même base, ni la même hauteur que la première : nous commencerons par faire une pyramide semblable à la pyramide

ABCDE, et qui ait la hauteur de la pyramide ASTVXY, ce qui sera bien aisé, car il suffira (Art. XXXV) de prolonger les côtés AB, AC, AD, AE, et de les couper par le plan LMNO, dont la distance AG au sommet A, soit égale à la hauteur AQ.

Celà fait, puisque par la supposition nous savons mesurer la pyramide ABCDE, il est évident que nous saurons mesurer aussi la pyramide ALMNO, qui lui est semblable ; car quelles que soient les opérations par lesquelles on mesure la pyramide ABCDE, on pourra toujours faire les mêmes opérations pour mesurer la pyramide semblable ALMNO, à celà près qu'on emploiera dans celle-ci une échelle différente.

Supposons donc que la pyramide ALMNO soit mesurée, sa mesure déterminera aussi celle de la pyramide proposée ASTVXY ; car par l'article précédent, ces deux pyramides sont entre elles comme leurs bases LMNO, STVXY, et nous avons d'ailleurs enseigné dans la seconde partie à trouver le rapport de ces deux bases.

XLI

Puisqu'il ne s'agit donc que de mesurer une seule pyramide, pour savoir mesurer toutes les autres pyramides imaginables, proposons-nous en une extrêmement simple, qu'on peut former en tirant des quatre angles A, B, C, H (Fig. 58), d'une des faces d'un cube ABCDEFGH, quatre lignes au point O, centre de ce cube ; c'est-à-dire, le point également distant de A, D, B, E etc.

On voit, sans peine, que la pyramide est la sixième partie du cube, puisqu'on peut décomposer le cube en six pyramides pareilles, en prenant chaque face pour base. Or, la valeur du cube est le produit de la hauteur AF par la base ABCH. Donc, pour avoir la valeur de la pyramide, il faudra partager le produit de AF par ABCH, en six parties égales, ou ce

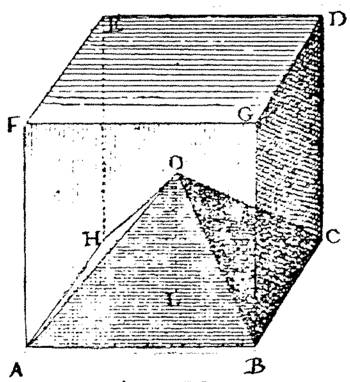


Fig. 58

qui revient au même, il faudra multiplier la sixième partie de la hauteur AF par la base ABCH ; et comme la sixième partie de la hauteur AF est le tiers de la hauteur OL de la pyramide OABCH, puisque sa hauteur OL est la moitié du côté du cube, il s'ensuit que la mesure de la pyramide OABCH est le produit du tiers de sa hauteur par sa base.

XLII

La solidité d'une pyramide quelconque est le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.

Supposons présentement qu'on ait à mesurer une pyramide quelconque OKMNSTV (Fig.59), on imaginera un cube dont le côté AB ou

AE soit le double de la hauteur OL de la pyramide proposée, et on concevra dans ce cube, une pyramide OABCH, dont la pointe soit au centre, et qui ait pour base une des faces ABCH du cube. Cette nouvelle pyramide aura même hauteur que la première, et par conséquent (art. XXXIX), la solidité de OABCH sera à celle de OKMNSTV comme

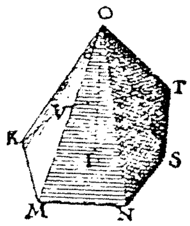


Fig. 59

la base ABCH à la base KMNSTV, or par l'article précédent, le produit du tiers de la hauteur commune OL par la base ABCH, est la valeur de la pyramide OABCH ; donc le produit du tiers de la même hauteur commune OL par la base KMNSTV, sera la valeur de la pyramide proposée OKMNSTV. Et par là, on découvre ce théorème général, qu'une pyramide a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.

LI

Le cône est une espèce de pyramide dont la base est un cercle, on le distingue en cône droit et en cône oblique.

Le cône est le solide courbe le plus simple après le cylindre ; c'est une figure comme ABCDE (Fig.62 et 63), dont la base est un cercle, et dont la surface est composée d'une infinité de lignes

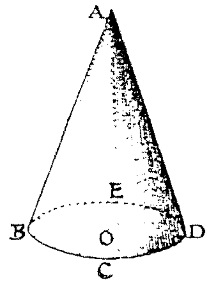


Fig. 62

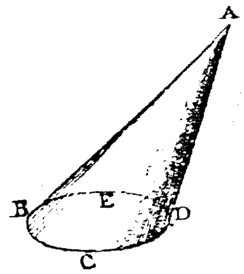


Fig. 63

droites, qui aboutissent toutes du sommet A à la circonférence BCDE de ce cercle. On peut regarder ce solide comme une pyramide dont la base serait un cercle.

LII

Si comme dans la figure 62, la pointe ou sommet A du côté répond perpendiculairement au-dessus du centre O de la base, le cône est nommé cône droit ; et il est nommé oblique, si le sommet répond à un point différent du centre de la base, ainsi que dans la figure 63.

LX

La sphère est le corps dont la surface a tous ses points également éloignés du centre.

Le dernier des corps solides que nous traiterons, se nomme sphère ou globe ; c'est celui dont la surface a tous ses points également éloignés d'un même point qui est le centre. On a souvent besoin de mesurer cette surface ; on voudra savoir, par exemple, ce qu'il faudrait de dorure pour une boule, combien on devrait prendre de lames de plomb pour couvrir un dôme etc.

LXI

Soit X(fig.67) la sphère dont on veut mesurer la superficie, il est évident qu'on peut concevoir ce solide comme

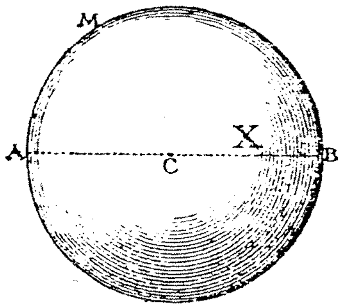
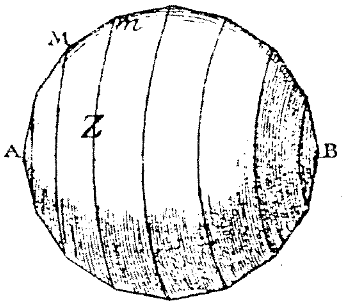


Fig.67

produit par la révolution d'un demi-cercle AMB, autour de son diamètre AB. Supposons d'abord qu'au lieu de la demi-circonférence, nous ayons un polygone régulier d'un nombre infini de petits côtés ; et proposons-nous seulement de mesurer la surface Z (fig. 68), produite par la révolution de ce polygone. Il sera facile de passer ensuite



de la mesure de cette surface à la mesure de la surface de la sphère, ainsi que nous avons passé de la mesure des figures rectilignes à celle du cercle.

LXII

Pour mesurer la surface du solide Z, examinons la petite partie de cette surface, que produit un seul côté quelconque Mm du polygone inscrit, pendant qu'il tourne autour du diamètre AB. Il est évident que ce côté Mm décrit dans ce mouvement une surface de cône tronqué V (fig. 69). Car, en prolongeant la droite Mm jusqu'à ce qu'elle rencontre en T le

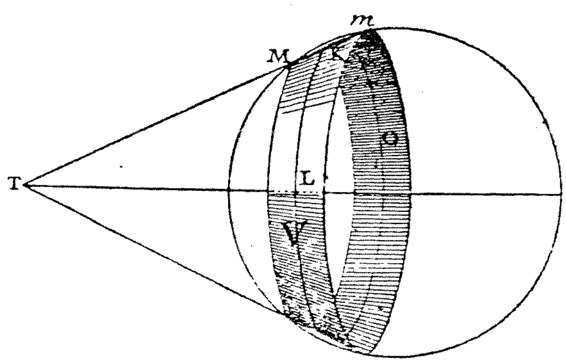


Fig. 69

diamètre ou axe de révolution AB, si cette ligne TMm tourne en même temps que le demi-cercle AMB, elle décrira visiblement un cône droit, dont le sommet sera T et la base, le cercle décrit par le point m, en sorte que la surface V, produite par le mouvement de Mm, sera une tranche de ce cône enfermée entre les plans des cercles que les points M et m décrivent en tournant. Mais, selon que nous l'avons vu (article LIX), la surface V est égale à un rectangle dont Mm est la hauteur, et la base une ligne égale à la circonférence KLO, décrite par le point K, milieu de Mm. Donc la surface produite par la révolution du polygone est égale à la somme d'autant de rectangles de cette nature, qu'il y a de côtés dans ce polygone, tels que Mm. Or, comme tous les côtés Mm, hauteurs de ces rectangles, sont supposés égaux, on pourrait regarder la surface cherchée comme un rectangle total qui aurait la hauteur Mm, avec une base égale à la somme de toutes les circonférences, telles que KLO, c'est-à-dire, décrites par le point de milieu de chaque petit côté.

Mais le polygone inscrit dans le demi-cercle AMB, ayant un très grand nombre de côtés, la petitesse de la hauteur Mm, et la grandeur excessive de la base, rendent ce rectangle inconstructible.

Pour remédier à cet inconvénient, il est bien aisé d'imaginer de changer tous ces petits rectangles en d'autres qui auraient toujours une même hauteur, non pas imperceptible comme Mm, mais assez grande pour que chacune des bases devint fort petite ; moyennant celà, l'addition de toutes ces petites bases ne fera plus qu'une longueur comparable à la hauteur.

LXIII

Voyons donc si nous ne pourrons point changer de cette sorte nos petits rectangles. Supposons d'abord, pour simplifier le problème, que nos rectangles, au lieu d'avoir pour bases des lignes égales aux circonférences KL, n'aient pour bases que les rayons KI de ces circonférences (fig.70). Il ne nous sera pas difficile ensuite d'appliquer ce que nous aurons trouvé pour ces derniers rectangles, à ceux dont nous avons affaire.

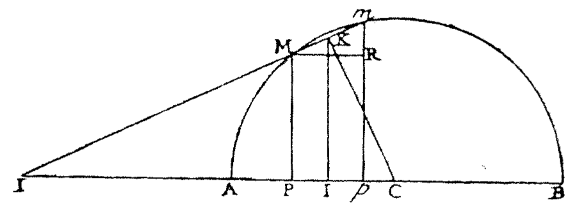


Fig. 70

Il s'agit donc de trouver un rectangle qui ait pour mesure le produit de Mm par KI, et qui ait pour hauteur quelque ligne incomparablement plus grande que Mm, et qui soit la même en quelque endroit que soit placé ce petit côté Mm. Choisissons, par exemple, la droite CK, qui est l'apothème du polygone dont Mm est le côté et qui, par conséquent, est toujours la même à quelque côté du polygone qu'elle appartienne. Nous devons donc chercher une ligne dont le produit par CK soit égal au produit de KI par Mm, c'est-à-dire(IIe partie, art.VII), qu'il faut trouver une quatrième proportionnelle aux trois lignes KC, KL, Mm. Or, nous savons que c'est par le moyen des triangles semblables qu'on découvre les lignes proportionnelles dans les figures, il faut donc former des triangles semblables, dont les côtés homologues soient les figures en question : c'est ce qu'on fera en abaissant MR, perpendiculaire à mp. On aura alors les triangles MmR, KIC, qui seront semblables ; car ils seront chacun rectangles, l'un en R, l'autre en I, de plus, ils auront les angles mMR, IKC égaux entre eux, à cause que le premier fait un angle droit avec l'angle MmR, égal à l'angle MKI, et que l'autre IKC fait aussi un angle droit avec MKI.

De là on peut conclure facilement que KC est à KI, comme Mm à MR ; c'est-à-dire, que MR est la quatrième proportionnelle cherchée : ou, ce qui revient au même, que le rectangle de KC par MR ou par Pp, est égal au rectangle de Mm par KI. Mais comme le rectangle que nous nous étions d'abord proposé de changer, n'était pas celui de Mm par KI, que c'était celui de Mm par le circonférence dont KI est le rayon, nous nous rappellerons ici que les circonférences sont entre elles comme les rayons ; ce qui fait que l'égalité qui est entre le rectangle de Mm par KI, et celui de Pp par CK, entraine nécessairement l'égalité du rectangle de Mm, par la circonférence de KI, au rectangle de Pp, par la circonférence de CK. Car on sent facilement que si deux rectangles sont égaux, et que conservant leurs hauteurs on augmente proportionnellement leurs bases, ces rectangles demeureront encore égaux.

LXIV

Ayant découvert dans les deux articles précédents que toutes les petites surfaces coniques tronquées telles que V (fig. 69) sont égales à autant de rectangles qui auraient tous pour hauteur une même droite égale à la circonférence, dont KC serait le rayon, et dont chacun aurait pour base une petite droite Pp, correspondant à chaque côté Mm, on en déduira qu'une somme quelconque de ces petites surfaces, prise depuis A jusqu'à p, par exemple, sera égale à un rectangle qui aurait pour hauteur une droite égale à la circonférence de CK, et pour base la somme de toutes les lignes telles que Pp, prises depuis A jusqu'en p, c'est-à-dire, la droite Ap.

Donc pour avoir la surface totale produite par la révolution du polygone entier, il faudra faire un rectangle dont la base soit égale à la circonférence décrite du rayon CK, et qui ait une hauteur égale au diamètre AB.

LXV

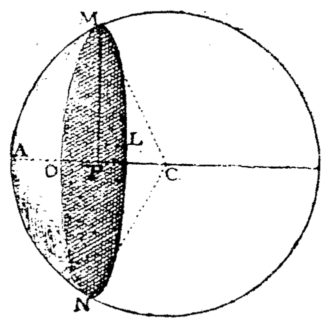
La surface de la sphère a pour mesure le produit de son diamètre par la circonférence de son grand cercle.

Il est bien aisé maintenant de mesurer la surface de la sphère. Car il est clair que plus il y aura de côtés dans le polygone, plus le solide produit par sa révolution approchera d'être égal à la sphère, et plus aussi l'apothème CK approchera d'être au rayon , en sorte que si on peut imaginer que le polygone soit devenu un cercle, l'apothème CK sera le rayon même , et la surface de la sphère aura la même étendue qu'un rectangle dont la hauteur et la base seraient, l'une le diamètre, et l'autre une ligne égale à la circonférence du cercle qui l'a produite, et qu'on appelle ordinairement le grand cercle de la sphère.

LXVI

Ce que c'est qu'un segement de sphère ; comment on mesure sa surface.

Quant à la surface courbe d'un segment de sphère ALMNO (fig. 71), c'est-à-dire de la partie de la sphère qu'on en



retranche, lorsqu'on la coupe par un plan MLNO perpendiculaire au diamètre, elle a pour mesure le produit de son épaisseur ou flèche AP par la circonférence du grand cercle AMBN. La raison en est la même que celle par laquelle on a prouvé (art. LXIV) que la somme des surfaces de tous les petits cônes tronqués, compris depuis A jusqu'en m (fig.70), est égale au rectangle dont la hauteur est Ap, et la base une ligne égale à la circonférence dont CK est le rayon.

LXVII

La surface de la sphère est égale à celle du cylindre circonscrit.

La mesure précédente de la surface de la sphère apprend que si on fait tourner le rectangle ABDE, en même temps que le demi-cercle AMNB autour de AB, la surface courbe du cylindre droit EFGIKDH (fig. 72) produit par la révolution de ce rectangle,

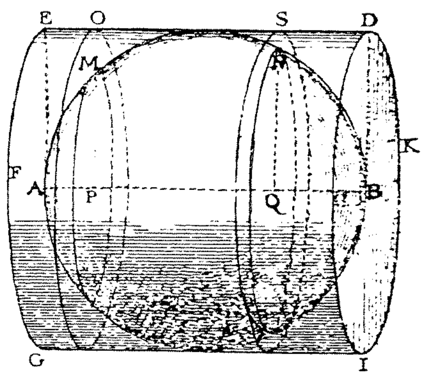


Fig. 72

sera égale à celle de la sphère décrite par le demi-cercle ; ce qu'on exprime ordinairement ainsi : la surface de la sphère est égale à celle du cylindre circonscrit.

LXVIII

Les tranches du cylindre et de la sphère ont la même superficie.

Et si on coupe, tant le cylindre, que la sphère, par deux plans quelconques perpendiculaires au diamètre AB, en P et en Q, les tranches du cylindre et de la sphère qui seront produites par le mouvement de la droite OS, et de l'arc MN, seront égales en superficie.

LXIX

La surface de la sphère est égale à quatre fois celle de son grand cercle.

On voit encore, par ce qui précède, que la surface de la sphère est égale à quatre fois l'aire de son grand cercle ; car la surface de son grand cercle a pour mesure le produit de la moitié du rayon ou du quart du diamètre par la circonférence, et la superficie de la sphère est égale au produit du diamètre entier par la même circonférence.

LXX

La solidité de la sphère est le produit du tiers du rayon par quatre fois l'aire du grand cercle.

La mesure de la surface de la sphère étant trouvée, il est bien aisé de mesurer sa solidité ; car on peut considérer la sphère comme l'assemblage d'une infinité de petites pyramides, dont les sommets sont à son centre, et dont toutes les bases couvrent sa surface entière. Or, chacune de ces pyramides ayant pour mesure le produit du tiers de sa hauteur, c'est-à-dire du rayon,par sa base, leur somme totale ou la solidité de la sphère se mesurera en multipliant le tiers du rayon par sa surface, c'est-à-dire, par quatre fois l'aire du grand cercle.

LXXI

La solidité de la sphère est les deux tiers de celle du cylindre circonscrit.

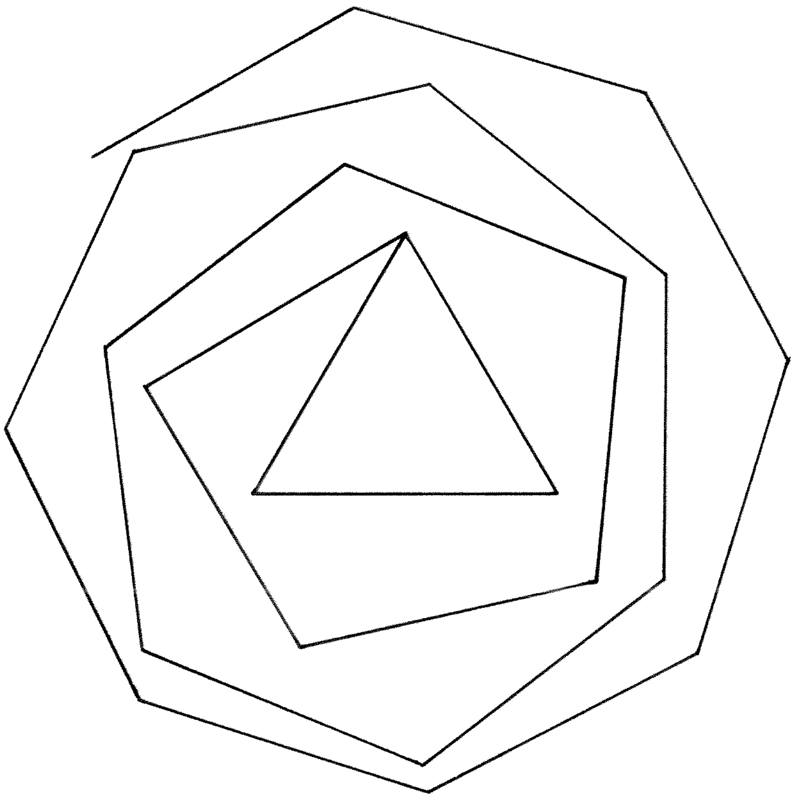
Comme le produit du tiers du rayon par quatre fois le grand cercle, est la même chose que le produit de quatre fois le tiers du rayon, c'est-à-dire, des deux tiers du diamètre par le grand cercle et que la solidité du cylindre EFGIKDH a pour mesure le produit du diamètre par le même grand cercle qui lui sert de base, il s'ensuit que la solidité de la sphère est les deux tiers de celle du cylindre circonscrit.

LXXII

Mesure de la solidité d'un segment de sphère.

Si on se proposait de mesurer la solidité d'un segment de sphère AMLNO (fig.71), il est évident qu'il faudrait d'abord mesurer la portion de sphère produite par la révolution du secteur CAM ; ce qui se ferait en multipliant le tiers du rayon par la surface du segment de sphère proposé AMLNO ; ensuite on retrancherait de cette mesure celle du cône produit par la révolution du triangle CPM, c'est-à-dire, le cône dont la base est le cercle MLNO, et CP la hauteur, et le reste serait la valeur demandée du segment.

polygones reguliers

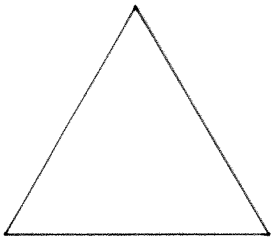


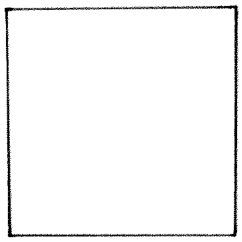
Dessin inspiré de tableaux de Max BILL

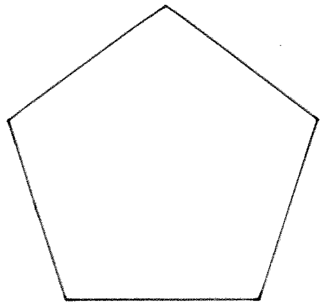
Reproduire ce dessin après avoir étudié les deux premiers paragraphes de ce chapitre.

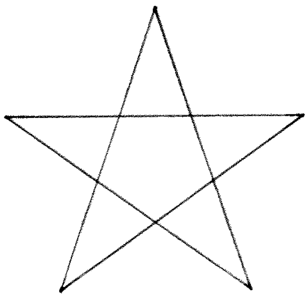
1 Observation de quelques figures

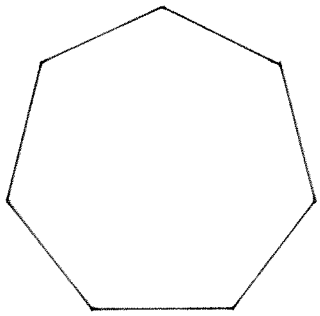
Vérifier avec des instruments de géométrie que chacune des figures suivantes a ses côtés égaux et ses angles au sommet égaux. Indiquer dans chacun des cas les éléments de symétrie (axe ou centre).

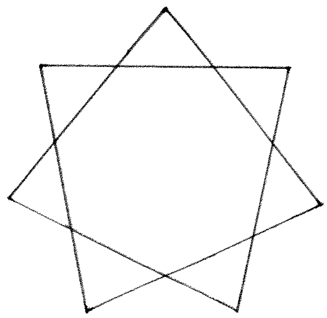

triangle équilatéral

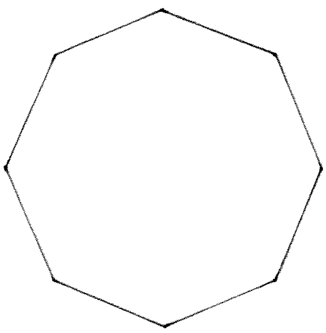

carré

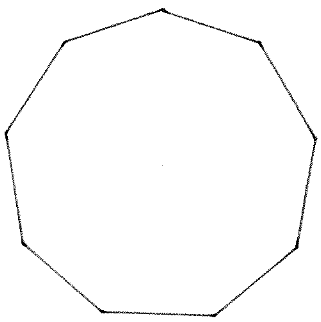

pentagone

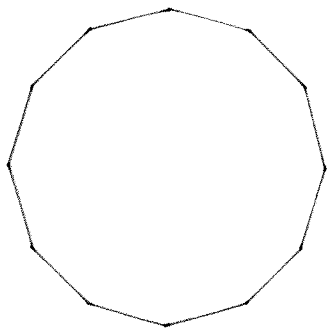

pentagone étoilé


heptagone


heptagone étoilé


octogone


énnéagone

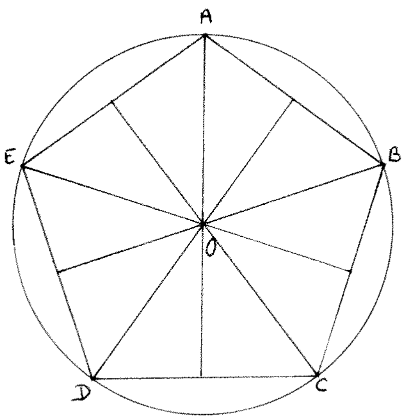

dodécagone

Chacune de ces figures est un polygone régulier.

2 Construction :

Les observations précédentes ont conduit au résultat (qu'il est possible de démontrer) : si m est le nombre de côtés du polygone régulier convexe, la somme des angles au sommet du polygone est $(m - 2)\pi$; chaque angle au sommet mesure $\frac{m - 2}{m}\pi$.
Utiliser cette propriété pour dessiner un hexagone régulier, un heptagone régulier convexe ainsi qu'un heptagone régulier étoilé différent de celui de la page précédente, et un ennéagone régulier convexe.

3 Polygone régulier inscrit dans un cercle :



Dessiner un pentagone régulier convexe ABCDE. Tracer les médiatrices de chacun des côtés, et vérifier sur le dessin qu'elles se coupent toutes en un point O. Le point O est à égale distance de ABCDE. Tracer le cercle de centre O et passant par ABCDE : c'est le cercle CIRCONSCRIT au pentagone régulier.
Que peut-on dire des angles au centre $\widehat{AOB}$, $\widehat{BOC}$, $\widehat{COD}$, $\widehat{DOE}$, $\widehat{EOA}$?
Calculer la somme de ces angles .

Conclusion : On peut démontrer que tout polygone régulier est inscriptible dans un cercle. S'il est convexe à m côtés, chaque angle au centre mesure $\frac{2\pi}{m}$.

En utilisant la conclusion précédente, dessiner :

- un hexagone régulier
- un dodécagone régulier convexe
- un dodécagone régulier étoilé
- un octogone régulier convexe
- un octogone régulier étoilé
- un hexagone non régulier ayant tous ses côtés égaux.

Avec les notations actuelles, si A est un nombre non carré parfait, a une valeur approchée de sa racine, la méthode de Héron revient à prendre pour $\sqrt{A}$ la nouvelle valeur approchée

$$a_1 = 1/2\left(\frac{A}{a} + a\right),$$

Voir livre de Seconde - Collection ISTRA page 273.

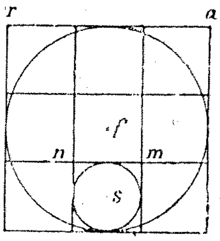
2. Aire du carré

Carré. — De même que pour le rectangle, on a su calculer l'aire du carré à une époque très reculée.

Dans le *Manuel égyptien* d'AHMÈS (2000 av. J.-C.), un carré de 9 perches de côté a pour aire $9 \times 9 = 81$ perches carrées.

L'auteur hindou ARYABHATTA, dans ses *Leçons de Calcul* (6ᵉ s.), donne la règle sous la forme laconique que voici : « Un carré est un équi-quadrilatère ; sa surface est le produit de deux nombres égaux ».

3. Deux démonstrations dues à Léonard de Vinci



I. « *Le cercle s entre 9 fois dans le cercle f ; la preuve en est que le carré mn entre 9 fois dans le carré ar* » (LÉONARD DE VINCI, 15ᵉ-16ᵉ s., *Manuscrit* A).

Si l'on désigne par d et d' les diamètres des cercles s et f, diamètres qui sont aussi les côtés des carrés mn et ar, les aires des deux cercles sont en effet dans le rapport $\frac{d^2}{d'^2}$, c'est-à-dire dans le même rapport que les aires des deux carrés.

II. « *Si tu tires la ligne ab (fig. a) aux points d'intersection du grand cercle par les diagonales du carré [circonscrit] et que là où cette ligne ab est coupée par le diamètre ef, au point n, tu commences et tu finisses un cercle, celui-ci contiendra autant d'étendue que celle qui s'enferme entre l'un et l'autre cercle et sera une fois plus petit que le grand* » (LÉONARD DE VINCI, *Manuscrit* A).

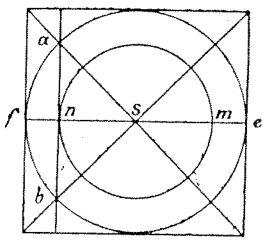
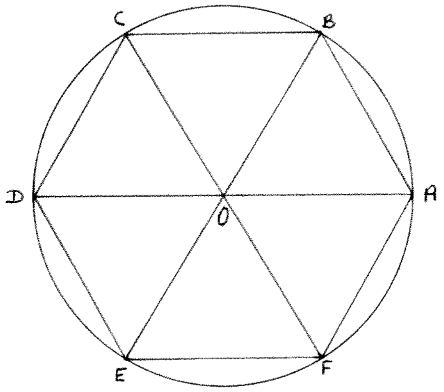
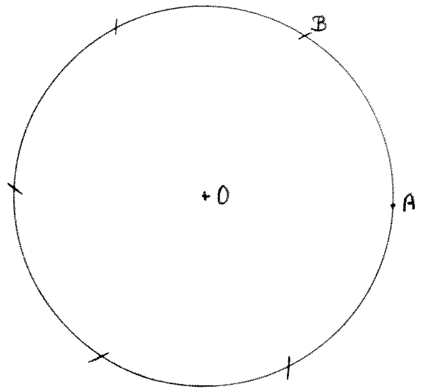


Fig. a.

Voici à quelques détails près, la démonstration de l'artiste italien.

Remarque sur la construction de l'hexagone régulier :





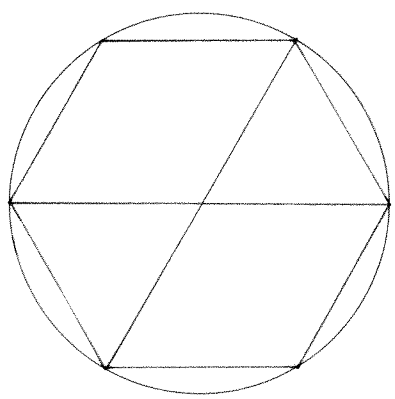
Soit un hexagone régulier ABCDEF. Quelle est la nature des triangles OAB, OBC, OCD, ODE, OFA ? Si r est le rayon du cercle circonscrit à l'hexagone, calculer la longueur d'un des côtés de l'hexagone. Le résultat permet d'utiliser la construction suivante de l'hexagone régulier.
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon r : A étant un point quelconque de $\mathcal{C}$, dessiner une intersection de $\mathcal{C}$ et du cercle de centre A et de rayon r, que l'on appelle B.
Poursuivre la construction pour obtenir l'hexagone.

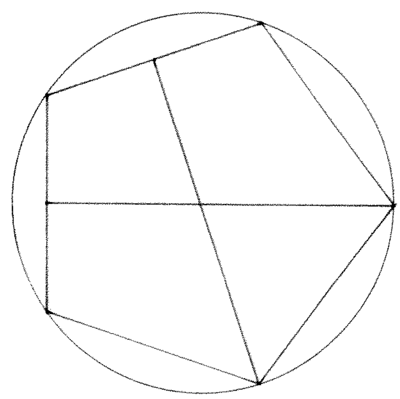
Question : En joignant les points placés sur le cercle $\mathcal{C}$ de 2 en 2, on obtient une autre figure. Quelle est sa nature ?

4 Cercle circonscrit au polygone régulier :

Construire, pour chacune des figures observées en 1, son cercle circonscrit.

Question : Lorsque le polygone admet un centre de symétrie, que constate-t-on ?





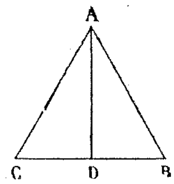
Question : Quel procédé simple peut-on utiliser pour construire le cercle circonscrit d'un polygone régulier convexe

- lorsque le nombre de côtés est pair
- lorsque le nombre de côtés est impair ?

5 Quelques notes historiques :

1. Aire du triangle équilatéral

Triangle équilatéral. — **Métriques de Héron (1er s. ?).** — « Soit un triangle équilatéral dont chaque côté est égal à 10. Trouver son aire. »



L'auteur procède ainsi. AD étant la hauteur relative au côté BC et T l'aire du triangle, on a successivement

$$\overline{BC}^2 = 4\,\overline{BD}^2,$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 = 3\,\overline{BD}^2,$$

d'où
$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AD}^2} = \frac{4}{3},$$

$$\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AD}^2} = \frac{\overline{BC}^4}{\overline{BC}^2 \times \overline{AD}^2} = \frac{4}{3} = \frac{16}{12},$$

ou encore
$$\frac{\overline{BC}^4}{(2T)^2} = \frac{16}{12}.$$

On en tire

$$T^2 = \frac{3}{16}\,\overline{BC}^4 = \frac{3}{16} \times 10\,000 = 1875.$$

T est alors donné par la racine carrée de 1875, qui est approximativement 43 1/3.

Remarque. — On a ignoré pendant longtemps comment les anciens Grecs extrayaient les racines carrées. Paul Tannery a mis au jour en 1894 un passage inédit indiquant le procédé suivi par Héron et qui fut vraisemblablement le seul classique chez les Grecs. La découverte du manuscrit des *Métriques* est venue confirmer le fait.

Appliquons ce procédé à l'exemple ci-dessus. Le carré le plus voisin de 1875 étant 1849, dont la racine est 43, on divise 1875 par 43 ; le quotient est $43 + \frac{26}{43}$, soit environ $43\frac{2}{3}$. On y ajoute 43, il vient $86\frac{2}{3}$; on en prend la moitié, ce qui donne 43 1/3 : c'est la racine approchée. Si l'on voulait obtenir une plus grande approximation, on opérerait sur 43 1/3 comme on l'a fait sur 43.

La demi-diagonale *sa* du carré circonscrit au cercle *mn* (*fig. a*) est égale à *sf*, demi-côté du carré circonscrit au cercle *ef*. Or (*fig. b*) le carré *fcel* qui joint les milieux des côtés du carré *hgij* a précisément pour demi-diagonale *sf* : *fcel* est donc le carré circonscrit au cercle *mn*. Mais le carré *fcel* est la moitié du carré *hgij*, puisque le premier contient 4 triangles égaux à *fgc* et que le second en contient 8 ; donc le cercle *mn* est la moitié du cercle *ef*.

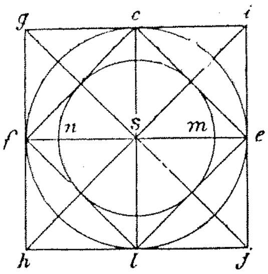
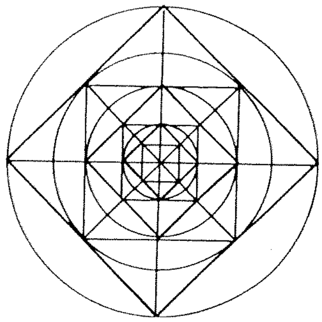
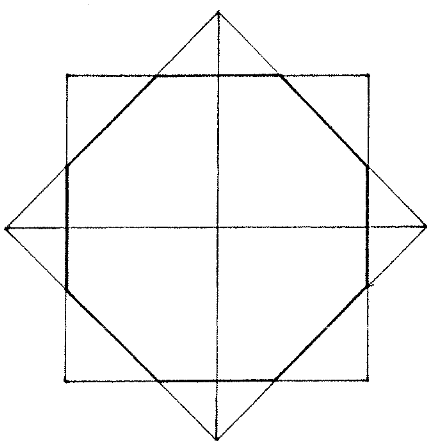


Fig. b.



6 Quelques exercices :

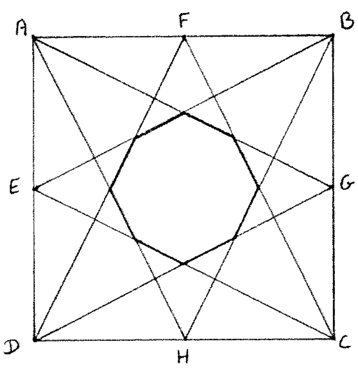
1. Construction de l'octogone régulier convexe



Observer le dessin suivant et le reproduire.

On peut démontrer que la figure obtenue est un octogone régulier convexe.

2. Construction d'un autre octogone



Observer le dessin suivant et le reproduire.

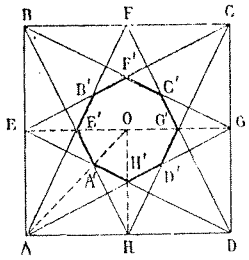
ABCD est un carré.
E, F, G, H sont les milieux des côtés.

Phil et Sophie ont observé ce dessin. Phil annonce que l'octogone obtenu est sûrement régulier. Sophie est persuadée du contraire.
Qui a raison ?

3 Une propriété démontrée dans l'octogone précédent

Dans un carré ABCD, *on joint le milieu de chaque côté aux extrémités du côté opposé; l'octogone intérieur convexe ainsi formé a pour aire le sixième de celle du carré* (*Jal de Vuibert*, 1891).

Pour prouver que les aires de l'octogone A'E' ... H' et du carré ABCD sont dans le rapport de 1 à 6, il suffit de montrer qu'il en est de même des aires des triangles A'OH' et AOH, O désignant le centre du carré.



Or puisque $OH' = H'H$, on a aussi

$$\text{tri. } A'OH' = 1/2 \text{ tri. } A'OH.$$

D'autre part, dans le triangle AEG, les médianes AO et EH' se coupent au tiers de leur longueur à partir de la base ;

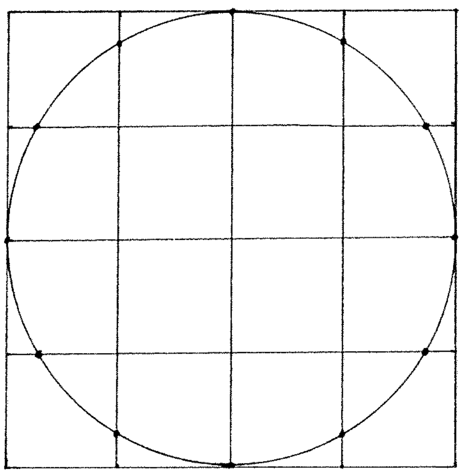
on a donc $$OA' = 1/3\ OA$$

et $$\text{tri. } A'OH = 1/3 \text{ tri. } AOH.$$

Par suite

$$\text{tri. } A'OH' = 1/6 \text{ tri. } AOH.$$

4 Quadrillage



Reproduire le dessin suivant .

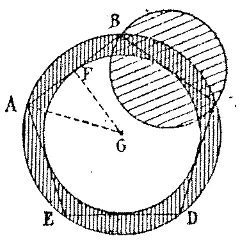
Les points d'intersection du cercle et du quadrillage sont les sommets d'un dodécagone régulier.

Joindre ces points de 2 en 2, puis de 3 en 3 , de 4 en 4, de 5 en 5.

Quelles sont les figures obtenues ?

5 Aire d'une couronne

III. *Si deux cercles sont l'un inscrit, l'autre circonscrit à un polygone régulier, l'aire de la couronne qu'ils comprennent est égale à l'aire du cercle dont le diamètre est le côté du polygone régulier.*



En effet, soient ABCDE le polygone donné de centre O, OA le rayon du cercle circonscrit, OF le rayon du cercle inscrit. Le triangle rectangle OFA donne

$$\overline{OA}^2 - \overline{OF}^2 = \overline{AF}^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\overline{AB}^2}{4}$$

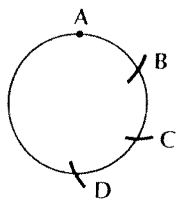
On en déduit

$$\pi(\overline{OA}^2 - \overline{OF}^2) = \pi\frac{\overline{AB}^2}{4},$$

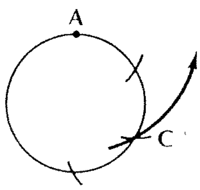
ce qui démontre la proposition.

6 Napoléon

MATHEMATICS was one of the hobbies of the French general and emperor Napoleon. He was especially interested in geometry, and some of the problems he studied were about regular polygons.*

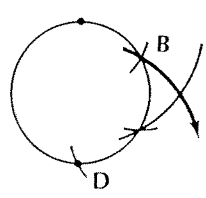


One of the problems that interested Napoleon was: is it possible to mark the corners of a square on a circle using *only a compass?* The answer is yes, and the construction works like this.

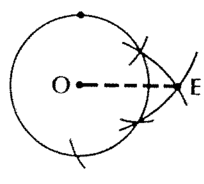


a) Draw a circle, mark a point on the top of it, and, leaving the distance between the metal point and the pencil point of the compass equal to the radius of the circle, draw 3 arcs like those shown in the first figure. Label the points A, B, C, and D.

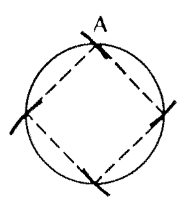
b) Adjust the compass so that the metal point is on A and the pencil point is on C and draw an arc like the one shown in the second figure.



c) Now put the metal point on D and the pencil point on B and draw another arc crossing the previous one as shown in the third figure.



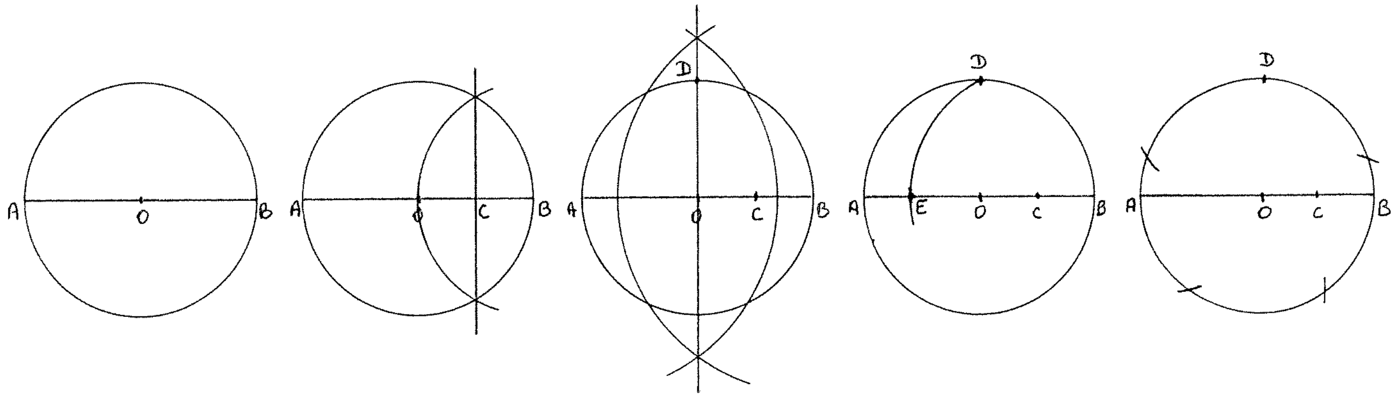
d) Label the point where the arcs cross E. Adjust the compass so that the metal point is at the center of the circle, O, and the pencil point is on E. The distance between these 2 points is equal to the length of the side of the square.



e) Now pick the compass up and, starting at A, draw 4 arcs around the circle, as shown in the fifth figure. The points where they intersect the circle are the corners of the square and we used just a compass to find them. Of course, to draw the sides of the square you will need to use your straightedge.

Remarque : Les sommets d'un carré et d'un hexagone peuvent se construire uniquement à l'aide d'un compas. Pour construire un pentagone, il est préférable mais non nécessaire d'utiliser une règle (non graduée) *

7 Construction à la règle et au compas du pentagone régulier

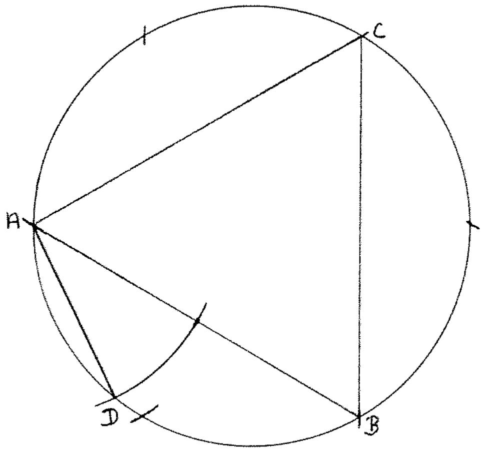


Légende : [AB] est un diamètre de cercle de centre O
C est le milieu de [OB]
(DO) est médiatrice de [AB]
E est l'intersection de [AB] et du cercle de centre C passant par D.
Les côtés du pentagone ont pour longueur DE

On peut démontrer que la figure obtenue est un pentagone régulier.

8 Méfions-nous des dessins

Un disciple de Pythagore vient un jour, tout heureux, lui annoncer une découverte : "Je viens, lui dit-il, d'inventer une construction à la règle et au compas de l'heptagone régulier. Voici mon procédé : Je trace un cercle $\mathcal{C}$ et un triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle; je construis le milieu de [AB], puis à partir de A comme centre, je mène un arc de cercle de rayon égal à la moitié de la longueur AB. Cet arc vient couper $\mathcal{C}$ en D. Je dis que AD est le côté d'un heptagone régulier convexe inscrit dans $\mathcal{C}$ ".



Faire la construction complète.

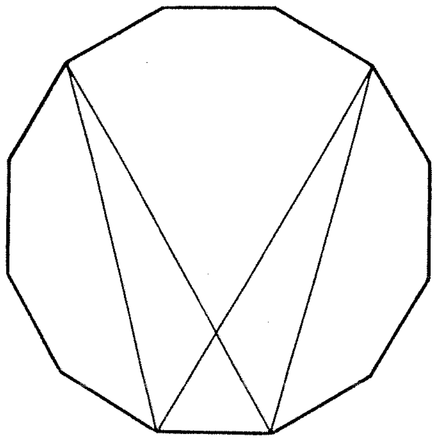
* Voir livre de géométrie, classe de première, Collection ISTRA, page 205.

On peut démontrer que le disciple de Pythagore est dans l'erreur mais que cette construction est une très bonne approximation (Rallye Mathématique d'Alsace 1977).

9. Puzzle

Here is an interesting puzzle. It is called a *dissection* puzzle and the problem is to cut a regular dodecagon up into pieces that can be rearranged to form a square. Some dissection puzzles were discovered by the Greeks, and in the 10th century a Persian mathematician wrote an entire book about them. Another book has been written recently by the world's current expert on dissection puzzles, a man who lives in Australia.*

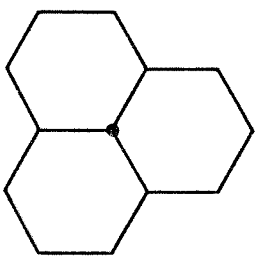
Place a sheet of paper underneath the large dodecagon you constructed in Set I and poke a hole with the metal point of your compass at each of the 12 corners. Now join the 12 holes on your new sheet of paper to form another dodecagon and then



draw in 4 more line segments like those shown in the figure at the top of this page to divide it into 6 parts. Notice that the resulting figure has line symmetry and that one of the 6 parts seems to be an equilateral triangle.

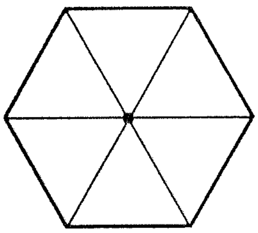
Cut the 6 pieces apart with scissors and try to rearrange them to form a square. If you can, make a sketch to show what the arrangement of the pieces looks like.

7 Carrelages et abeilles



DID you know that bees are expert mathematicians when it comes to building honeycombs? The Greek mathematician, Pappus, who lived in the fourth century A.D., said: "Though God has given to men the best and most perfect understanding of wisdom and mathematics, He has allotted a partial share to some of the unreasoning creatures as well. . . . This instinct is specially marked among bees. They prepare for the reception of the honey the vessels called honeycombs, with cells all equal, similar and adjacent, and hexagonal in form."*

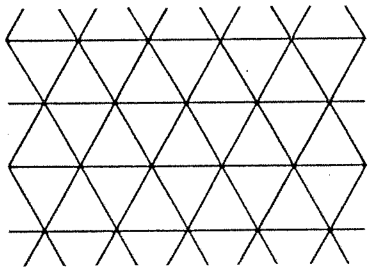
Pappus had observed that the bees use the regular hexagon exclusively for the shape of the cells in the honeycomb. The photograph shows what the arrangement of the cells looks like. Each corner point in the honeycomb is surrounded by exactly 3 hexagons, and there is no space wasted between the cells.



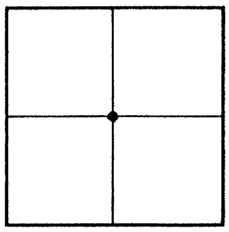
Is this hexagonal arrangement of cells the most efficient one? Or would other regular polygons work just as well? Let's try some of them and see.

The simplest regular polygon is the equilateral triangle. The angles of an equilateral triangle are smaller than those of a regular hexagon and so more than 3 equilateral triangles will fit around a point. In fact, there is room for exactly 6.

If the bees used equilateral triangles, their honeycomb would look like this.

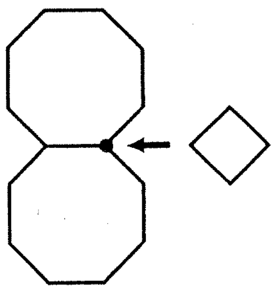


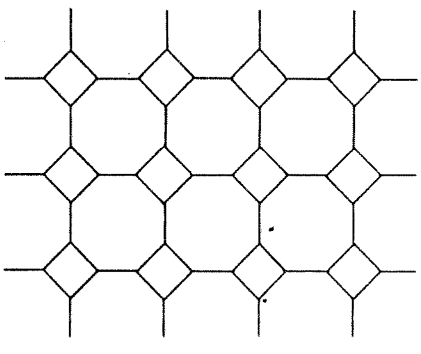
This arrangement, however, wastes wax, because if the cells are to be the same size as in the hexagonal honeycomb, more material is needed to form them.



Another possibility is the square. Each angle of a square is a right angle and exactly 4 will fit around a point. A honeycomb having square cells requires, as does the one with triangular cells, more material for the walls and so it also would waste wax.

Suppose the bees used a regular polygon having *more* sides than a hexagon instead of fewer sides. How would, say, regular octagons work? The angles of a regular octagon are larger than those of a hexagon, so that there is room for only 2 around a point, leaving some space unfilled. However, there is just the right amount of room for a square in this space and so 2 regular octagons and 1 square surround a point exactly. If this pattern is repeated, the honeycomb would look like this.





This design has the disadvantage of being more complicated than the simple hexagonal pattern and it also would require more wax.

► Each of the designs we have considered might be called a **mathematical mosaic.** By a mathematical mosaic, we mean an arrangement of regular polygons in which every corner point is surrounded exactly by the same number of polygons of each kind.

To represent the honeycomb arrangement, we will use the symbol 6-6-6 to indicate that each point is surrounded by 3 regular hexagons (6-sided polygons). The symbols for the other mosaics we have considered are:

3-3-3-3-3-3 (6 equilateral triangles surround each point),
4-4-4-4 (4 squares surround each point), and
4-8-8 (1 square and 2 regular octagons surround each point).

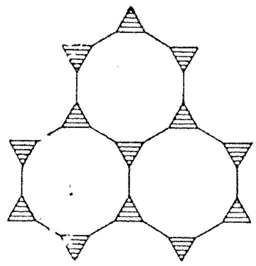


Fig. *f* — I. 3, 12, 12.

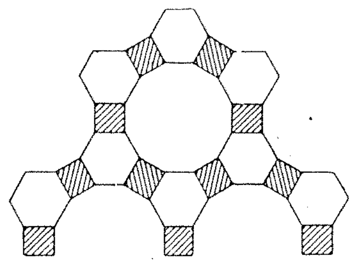


Fig. *g*. — II. 4, 6, 12.

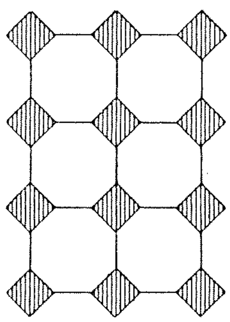


Fig. *h*. — III. 4, 8, 8.

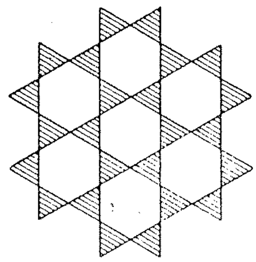


Fig. *i*. — IV. 3, 3, 6, 6.

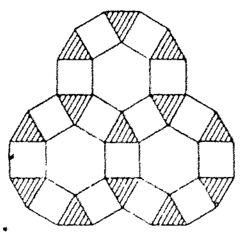


Fig. *j*. — V. 3, 4, 4, 6.

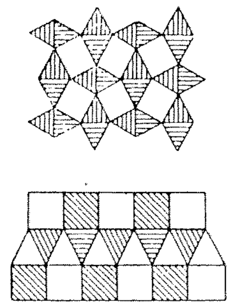


Fig. *k*. — VI. 3, 3, 3, 4, 4.

Description. — Lorsqu'on examine un gâteau de cire construit par les abeilles pour y déposer leur miel, on constate qu'il est constitué par des alvéoles juxtaposés dont l'axe est horizontal et dont l'ouverture a la forme d'un hexagone régulier (*fig. a*). Il existe deux séries de ces cellules qui se rejoignent par leurs fonds au milieu du gâteau et dont les ouvertures se trouvent sur les faces opposées de ce dernier.

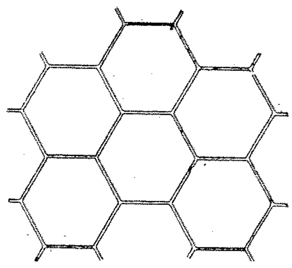


Fig. *a*. — Disposition des ouvertures

Le corps de l'alvéole se compose d'un prisme hexagonal droit. Le fond n'est pas un plan, mais une surface concave formée par 3 losanges égaux SABC, SCDE et SEFA ayant un sommet commun S (*fig. c*) ; à chaque cellule peuvent ainsi être adossées trois cellules de la série opposée ayant chacune avec la première un losange commun (*fig. b* et *d*). Les angles ABC et SCB des losanges ont respectivement pour valeur 109°28′ et

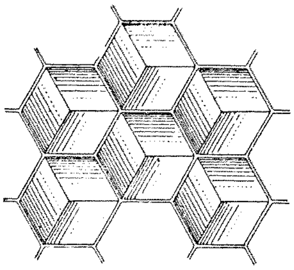


Fig. *b*. — Disposition des fonds.

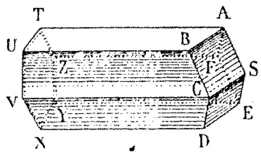


Fig. *c*. — Alvéole isolé.

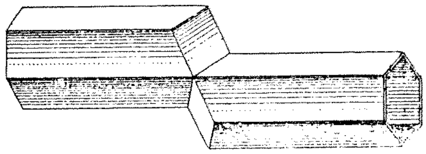


Fig. *d*. — Adossement des fonds.

70°32′ ; le côté de l'hexagone mesurant en moyenne 1 ligne 1/5 ($2^{mm},71$) et la profondeur de l'alvéole 5 lignes ($11^{mm},3$), le rapport $\frac{AT}{TU}$ est de $\frac{25}{6}$. Quant à l'épaisseur des parois et du fond, elle est à peine le tiers de celle d'une feuille de papier ordinaire ; l'ouverture de la cellule est d'ailleurs renforcée par un rebord de cire. Cette ouverture est enfin fermée au moyen d'une plaque hexagonale de même nature pour empêcher le miel de couler.

Avantage de ces dispositions. — Nous savons (3e Partie. Chap. 2, § 2) que le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone sont les seuls polygones réguliers qui puissent se juxtaposer sans vides. Les deux premiers présenteraient trop d'espaces angulaires non utilisés pour les larves ; l'hexagone, au contraire, se rapproche davantage du cercle et offre à cet égard plus de commodité.

Mais le but de l'abeille paraît être surtout de chercher à épargner la cire, qui est un produit perdu pour l'insecte. L'adossement des cellules permet déjà de supprimer un fond : de plus l'hexagone, comme nous le démontrerons bientôt, est, des trois polygones réguliers qui peuvent se juxtaposer sans laisser de vides, celui qui pour une surface donnée a le plus petit périmètre et qui par conséquent exige le moins de cire pour les parois. Enfin, la section hexagonale étant admise pour les raisons qui précèdent, les dimensions adoptées par les abeilles pour le fond rhomboïdal correspondent à la plus petite surface totale pour l'alvéole et par suite à la plus petite quantité de cire, ainsi que nous le montrerons dans le prochain paragraphe. L'instinct des abeilles les conduit donc à résoudre deux intéressants problèmes de minimum.

Historique. — On avait remarqué dans l'Antiquité la forme hexagonale des alvéoles des abeilles. ARISTOTE (4^e s. av. J.-C.) dans son *Histoire des Animaux* (Liv. IX, Chap. XXVII) et PLINE L'ANCIEN (1^{er} s.) dans son *Histoire Naturelle* (Liv. XI, Chap. XII) en font mention.

PAPPUS (4^e s.) paraît avoir été le premier à traiter géométriquement la question. Au début du livre V de ses *Collections*, il considère cette forme de la section des alvéoles comme étant motivée par la double condition de recouvrir le plan et de correspondre au périmètre minimum pour une surface donnée.

Mais il ne semble pas qu'on ait remarqué la forme rhomboïdale du fond avant le 18^e siècle. Un neveu de Cassini, MARALDI, astronome à l'Observatoire de Paris, détermina expérimentalement avec précision les angles des losanges ; il trouva 109°28′ et 70°32′ pour les valeurs de ces angles (1712). RÉAUMUR, soupçonnant que les abeilles devaient être guidées dans la construction du fond par la raison d'économie, proposa au géomètre allemand KŒNIG, sans lui faire connaître au préalable les résultats de Maraldi, la résolution du problème suivant : « Entre toutes les cellules hexagonales à fond composé de trois rhombes égaux, déterminer celle qui peut être construite avec le moins de matière. » Kœnig traita la question par le calcul différentiel et trouva que les angles des losanges de la cellule minimum devaient être 109°26′ et 70°34′ (1739).

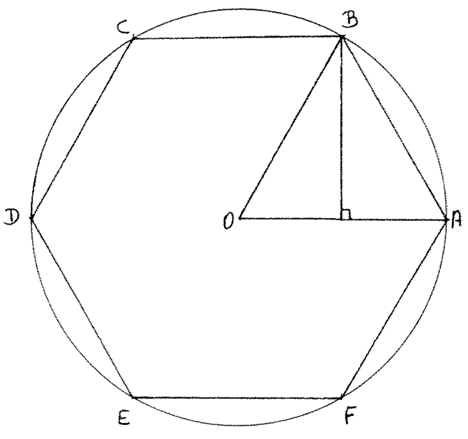
La concordance avec les mesures de Maraldi était déjà surprenante ; mais il y a mieux. MAC LAURIN prouva en 1743 que Kœnig avait commis une erreur dans ses calculs et que *les véritables valeurs des angles auxquelles on était conduit en résolvant ce problème étaient précisément celles indiquées par Maraldi, soit* 109°28′ *et* 70°32′.

Voir note page 96.

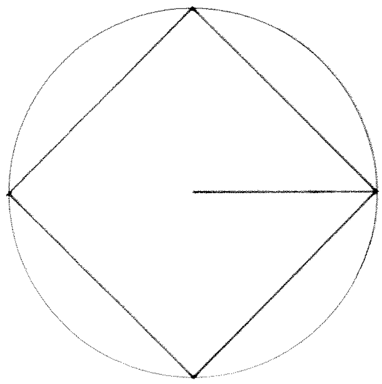
La question a été reprise depuis au point de vue géométrique par divers mathématiciens, parmi lesquels LHUILLIER (1781), LALANNE (1840), BROUGHAM (1858), HENNESSY (1885-86) qui ont confirmé ou complété les résultats antérieurs.

Exercices : Essayer de construire un pavage régulier à l'aide de pentagones réguliers convexes et de pentagones réguliers étoilés.

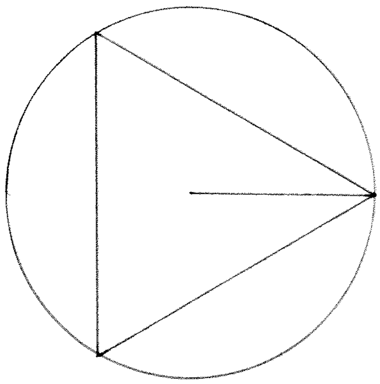
Quelques compléments mathématiques sur le travail économique des abeilles.



Dessiner un hexagone régulier ABCDEF inscrit dans un cercle de centre O et de rayon r_1. Le triangle OAB est équilatéral et la hauteur issue de B a pour pied le milieu de OA. A l'aide du théorème de Pythagore, on établit que cette hauteur mesure $r_1 \frac{\sqrt{3}}{2}$. En déduire que l'aire du triangle OAB est $\mathcal{A} = \frac{r_1^2\sqrt{3}}{4}$.
Calculer l'aire S_1 de l'hexagone et le périmètre P_1 de l'hexagone.



Dessiner un carré inscrit dans un cercle de rayon r_2. Démontrer que l'aire du carré est égale à $S_2 = 2\,r_2^2$.
Calculer le périmètre P_2 du carré.

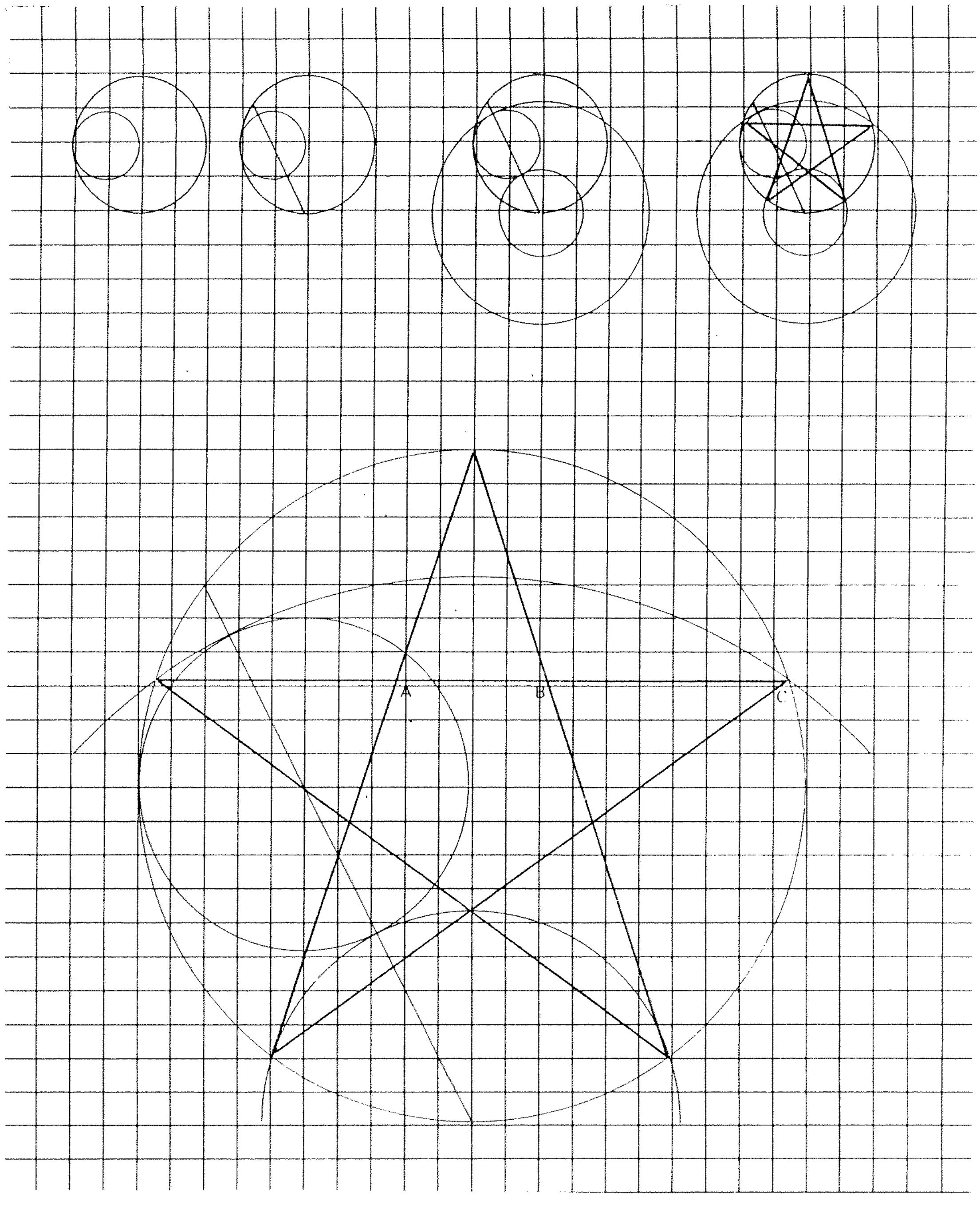


Dessiner un triangle équilatéral dans un cercle de rayon r_3.
Démontrer que l'aire de ce triangle est égale à $S_3 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,r_3^2$. Calculer le périmètre P_3 du triangle.

Ce travail économique des abeilles s'énonce de la manière suivante :
pour un même aire, l'hexagone est le polygone régulier de plus petit périmètre.

Poser $S_1 = S_2$, exprimer r_1 en fonction de r_2 et vérifier que $P_1 < P_2$
Poser $S_1 = S_3$, exprimer r_1 en fonction de r_3 et vérifier que $P_1 < P_3$

Note : C'est à la suite d'une collision entre deux navires que l'on se rendit compte, lors du procès, que les tables de logarithmes utilisées pour la navigation comportaient une erreur ; ce sont ces tables qui avaient servi à Koenig.


A
B
C

Les pages qui suivent et qui donnent des patrons de dessins arabes sont extraites de "Geometric Concepts in Islamic Art" dont voici l'introduction.

This book by Issam El-Said and Ayşe Parman throws much light on an aspect of Islamic art which is little known and rarely studied but which is none the less fundamental. It is true that the use of particular geometric schemas as a basis of composition is not the exclusive prerogative of Islamic art, for it is found to a greater or lesser extent in all traditional art, in the West no less than in the East, and this principle shines out as clearly in the windows of Gothic cathedrals as it does in the *mandalas* that lie at the root of sacred architecture in India. But it is in Islamic art that this 'sacred geometry' is developed with the greatest inner logic and amplitude. This means that Islamic art is far less a way of expressing emotion than a science and that a Muslim artist will willingly subordinate his individuality to the, as it were, objective and impersonal beauty of his work.

Europeans of our day are distrustful of any canon that is imposed upon art and they are all too ready to regard it as an obstacle to 'creativity', especially when this canon can be translated into mathematical formulae. Now the geometric models used in traditional art have nothing to do with a rational, or even a rationalistic, systematization of art; they derive from a geometry which is *a priori* non-quantitative and which is itself creative because it is linked to data inhering directly in the mind. At the basis of this geometry there lies the circle which is an image of an infinite whole and which, when it is evenly divided, gives rise to regularly shaped polygons which can, in their turn, be developed into star-shaped polygons elaborated indefinitely in perfectly harmonious proportions.

Issam El-Said and Ayşe Parman are careful to trace the use of these geometric patterns back to the very earliest methods used in architecture for the measurement of space. In fact, in the absence of exact units of measurement, it was possible to transpose a plan from one scale to another by reference to a geometric pattern inscribed within a 'guiding circle' of variable size. A large circle would be traced out by means of a cord on the site of the proposed building and, after the division of this circle into a fixed number of segments, the geometric figure which had served as the outline for the original plan would then be superimposed upon it. Now the important thing from an aesthetic point of view is the qualitative, and non-quantitative, nature of such a procedure in which the implicit presence of the circle guarantees a harmonious relation between the parts and the whole. Once this framework had been laid down, the artist could place within it the various elements of the work in hand, giving full play to his imagination which was thus guided but not suffocated; a perfect rule inspires, it does not deaden.

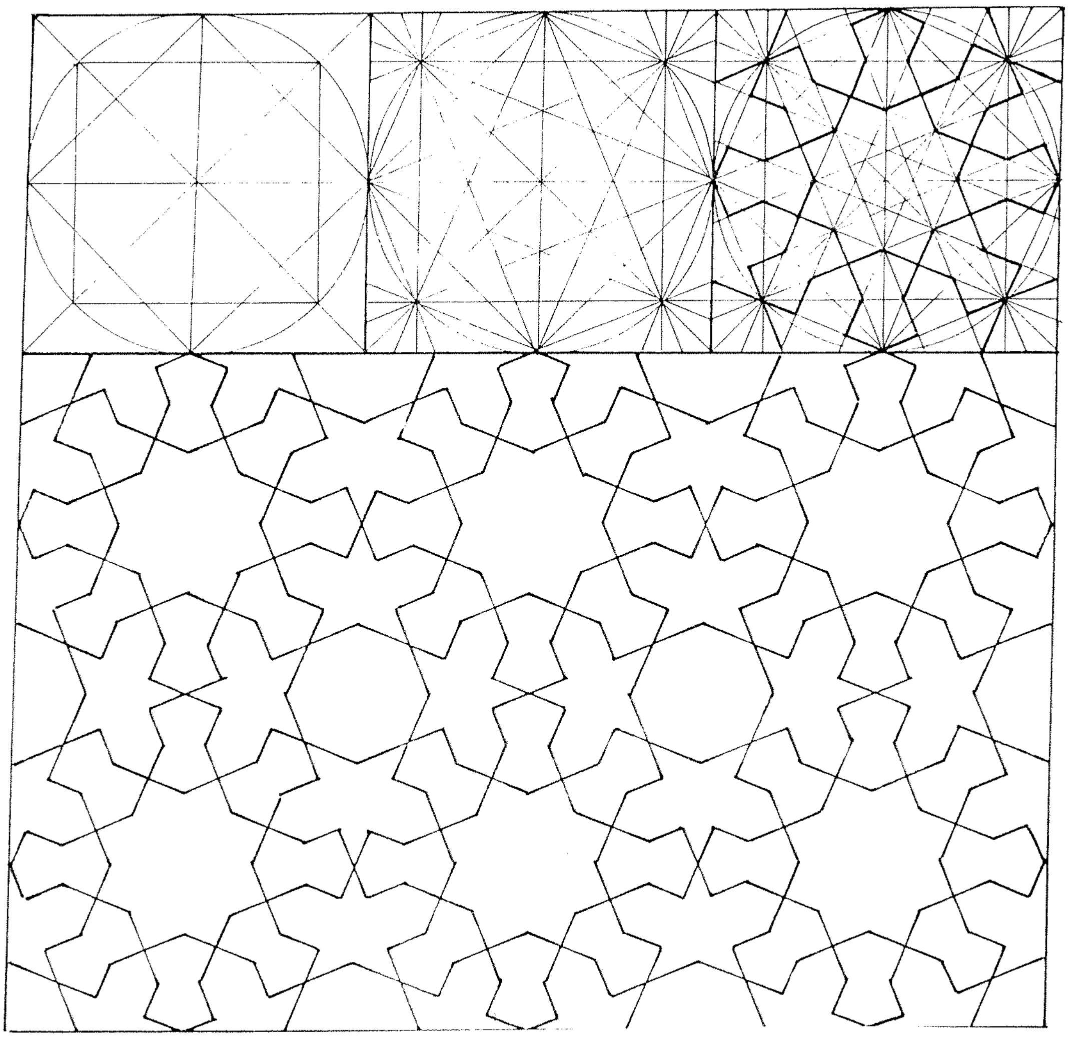
In the Islamic perspective, this method of deriving all the vital proportions of a building from the harmonious division of a circle is no more than a symbolic way of expressing Tawhīd, which is the metaphysical doctrine of Divine Unity as the source and culmination of all diversity. It is not surprising, therefore, that Muslim artists should have explored all the geometric systems that depend upon the regular division of the circle. In its purest form, this geometrical 'speculation' can be seen in the art of decoration, whether this be ornamentation in ceramic mosaics or a relief covering the surface of a dome.

The science of proportions doubtless goes back to remote antiquity and even to prehistory. Moreover, there is an analogy to proportion in the realm of metre, namely rhythm and, again, in music, in the form of the interval. From another point of view, rhythm is involved indirectly in the visual order; it governs in particular the flow of the arabesque. Lastly, proportion and rhythm come together to determine the art of Arabic calligraphy, which plays a leading role in the world of Islam.

Islamic art has been extensively studied in relation to its history; but the study of its artistic methods, which comprise both a science and craftsmanship, has been broached by only a few enquiring minds. Issam El-Said and Ayşe Parman's book provides a starting-point for investigation of this latter category. More than that, it contains a message which is in singular contrast to a certain modern conception of art which is assessed by purely psychological and subjective criteria. The traditional science of proportion affirms, in short, that beauty is not a matter of traditional taste; whilst having unlimited possibilities, it has laws; it is objectively true.

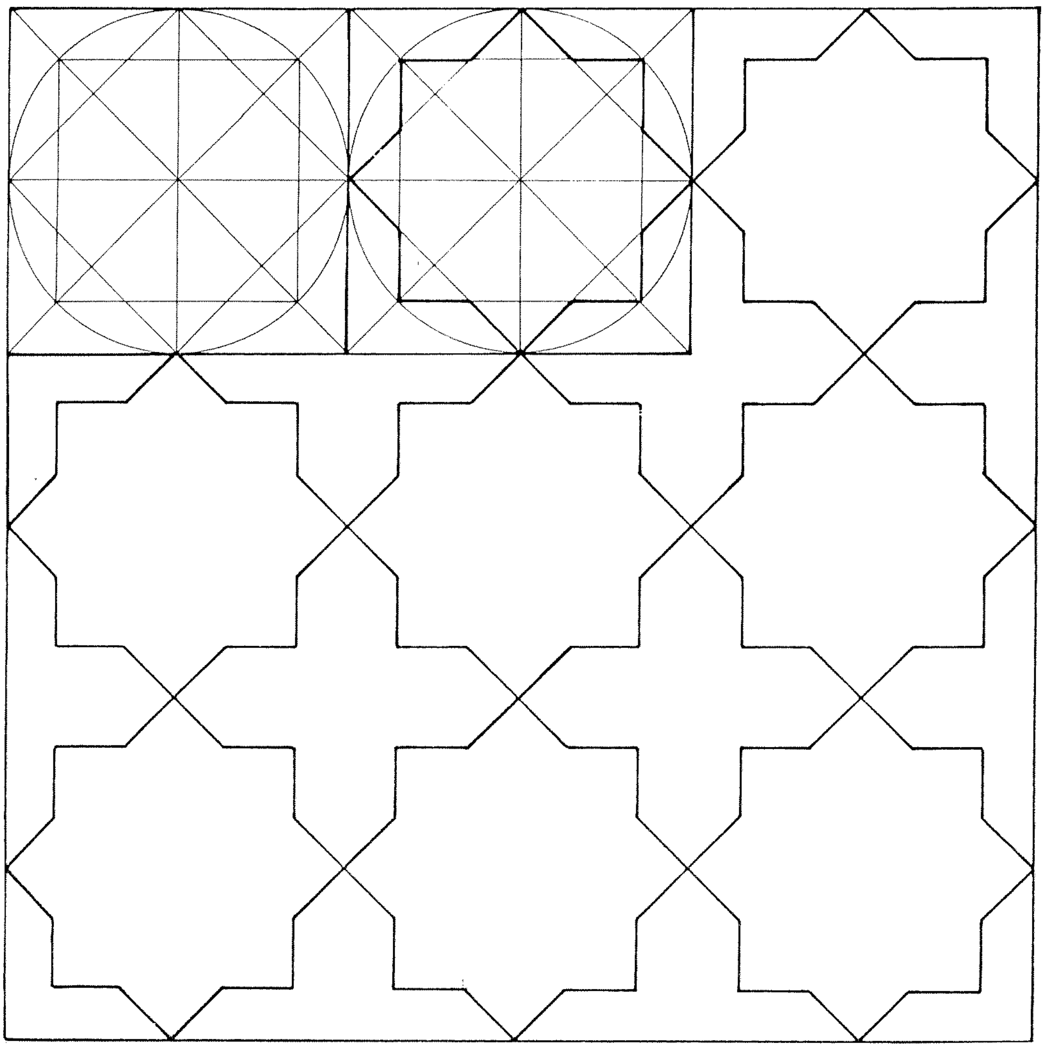
Titus Burckhardt
Fez
October, 1975

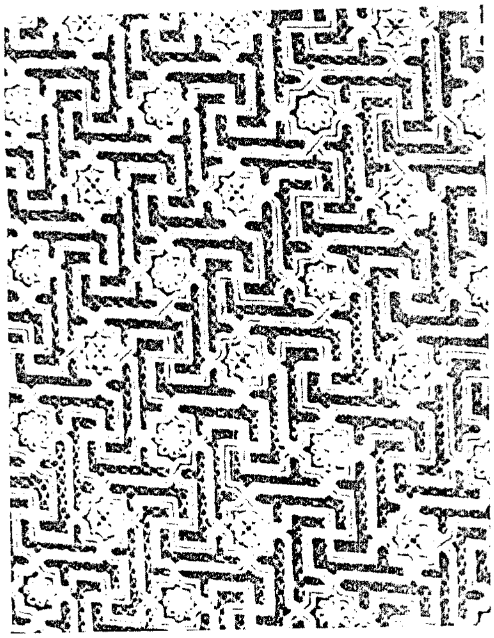
In the following sections of this chapter, detailed illustrations will show how the shape of the repeat unit of a design is determined by use of a circle. The basic or unit measure is taken as the radius. The initial divisions of the circumference of the circle (described by the unit radius) into 4, 6 or 5 equal sections (or multiples of these sections) determine the system of proportioning used to generate the repeat unit of the design. Although the analyses of the repeat units based on 7, 9, 11 (etc.)-sided regular polygons and their stars, or combinations of these polygons, have not been included, the principles of their construction are the same as those described in this book.

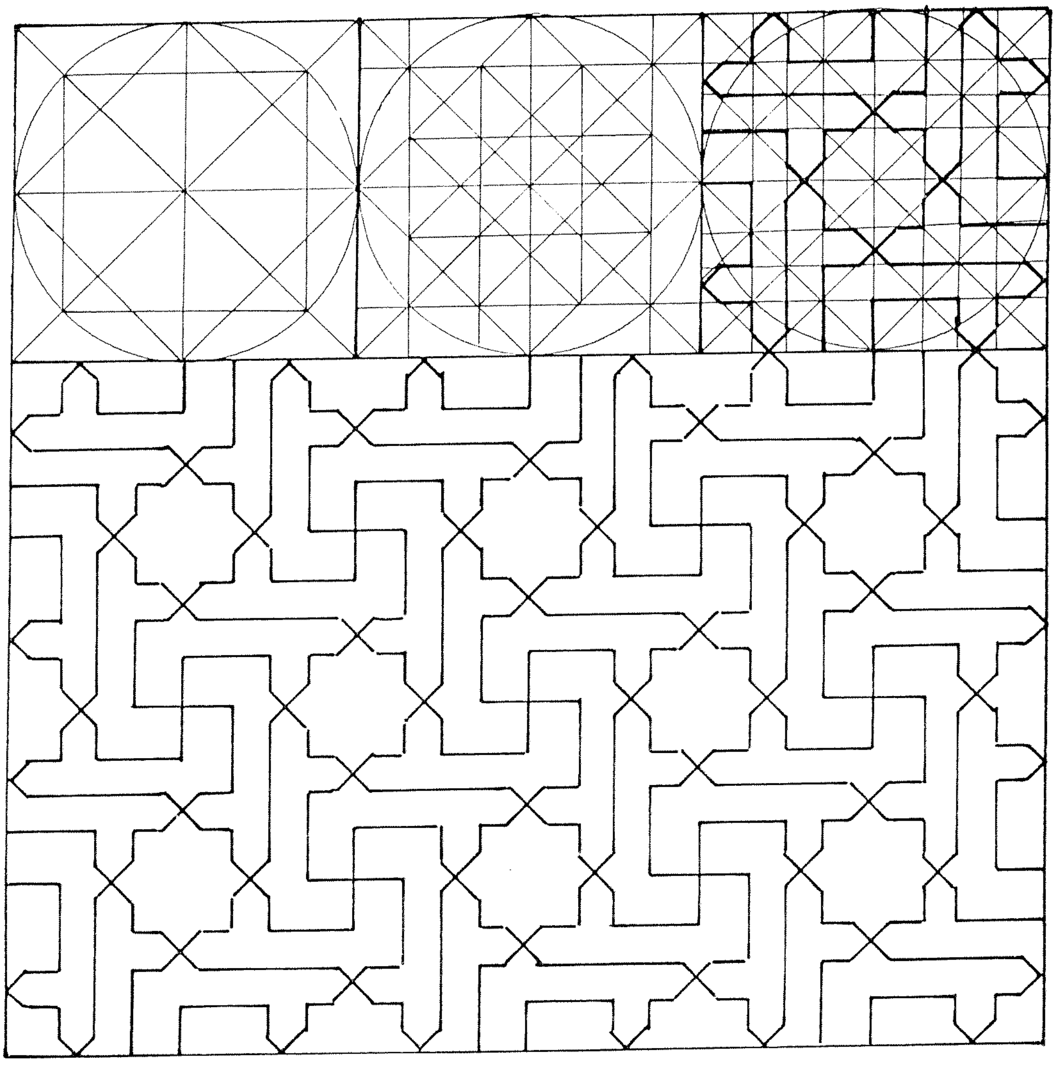


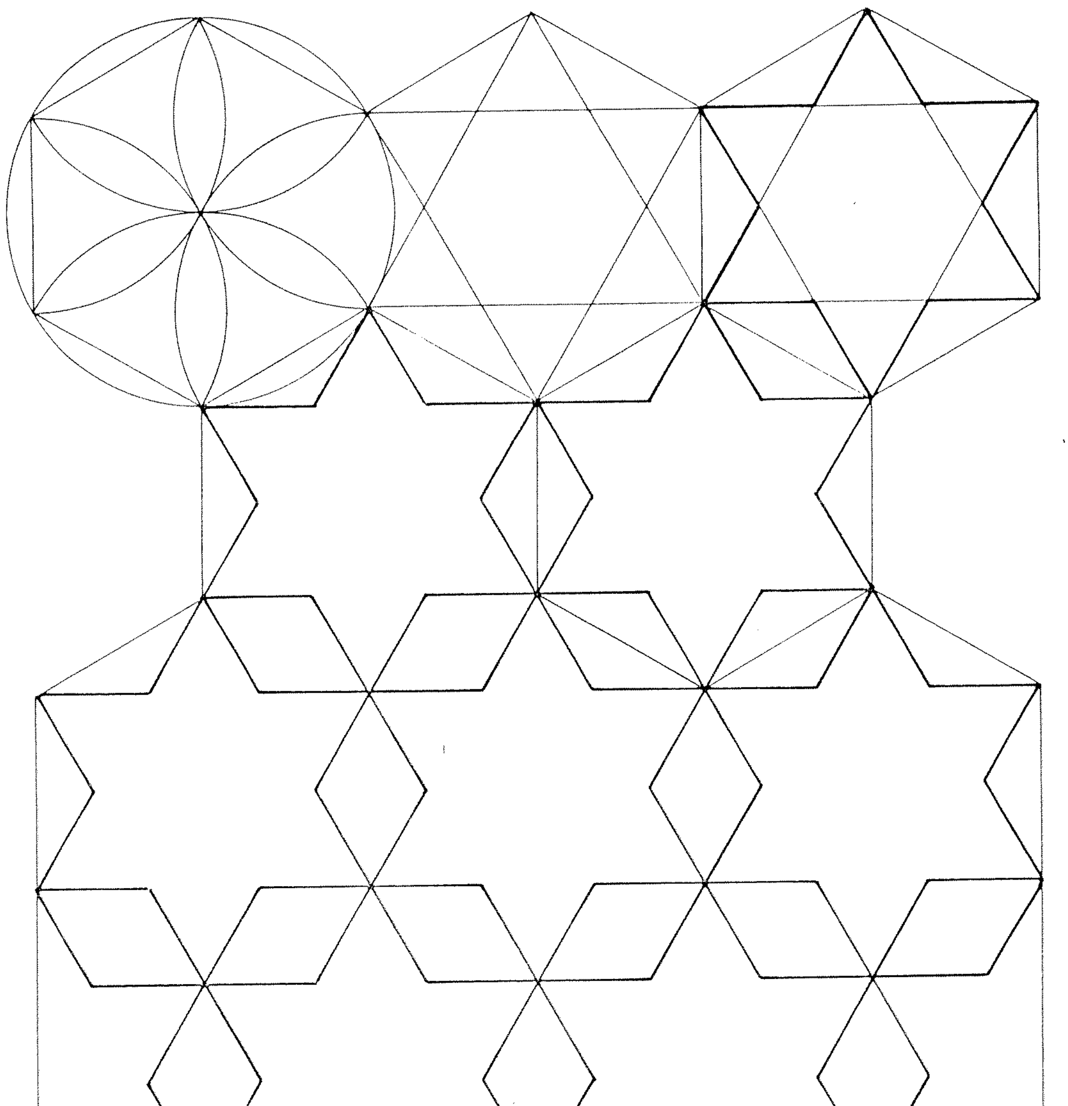
To our knowledge, no record has survived to instruct us in the theory of designing Islamic geometric patterns. In this chapter, we will attempt to illustrate how the craftsmen at different times and places in the Muslim world proceeded to apply the geometric principles to the practical problems of making geometric patterns. Although others[1] have tried to describe the construction of these patterns, their works involved incomplete or unsatisfactory explanations. In our opinion, these works lack the fundamental concept of what we will call the 'repeat unit' of a design. It is the systematic arrangement of the repeat unit which produces the overall design.

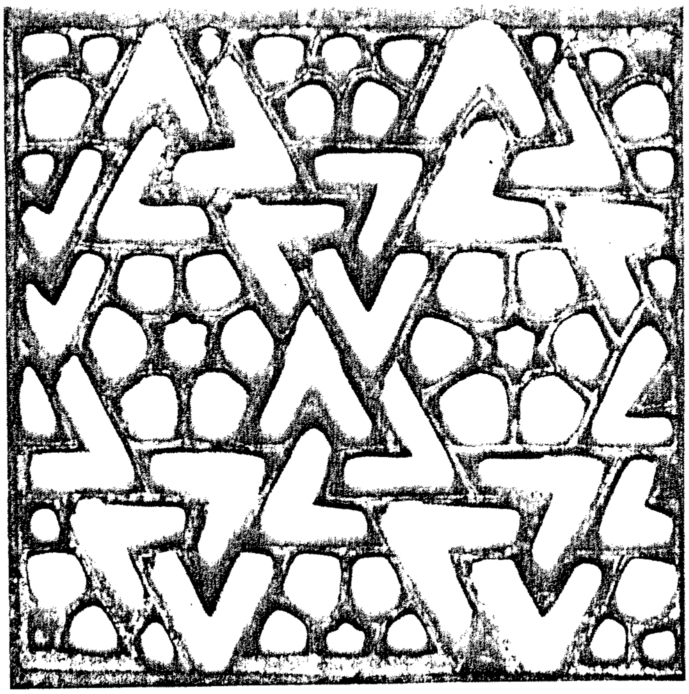
In the Muslim world today, the craftsmen engaged in making geometric patterns on wood, marble, metal, ceramics, etc., employ the traditional tools of compasses and rule. The geometric method, applied, developed and perfected by unknown masters of the past, is no longer a device for generating new designs, but one for reproducing the old.











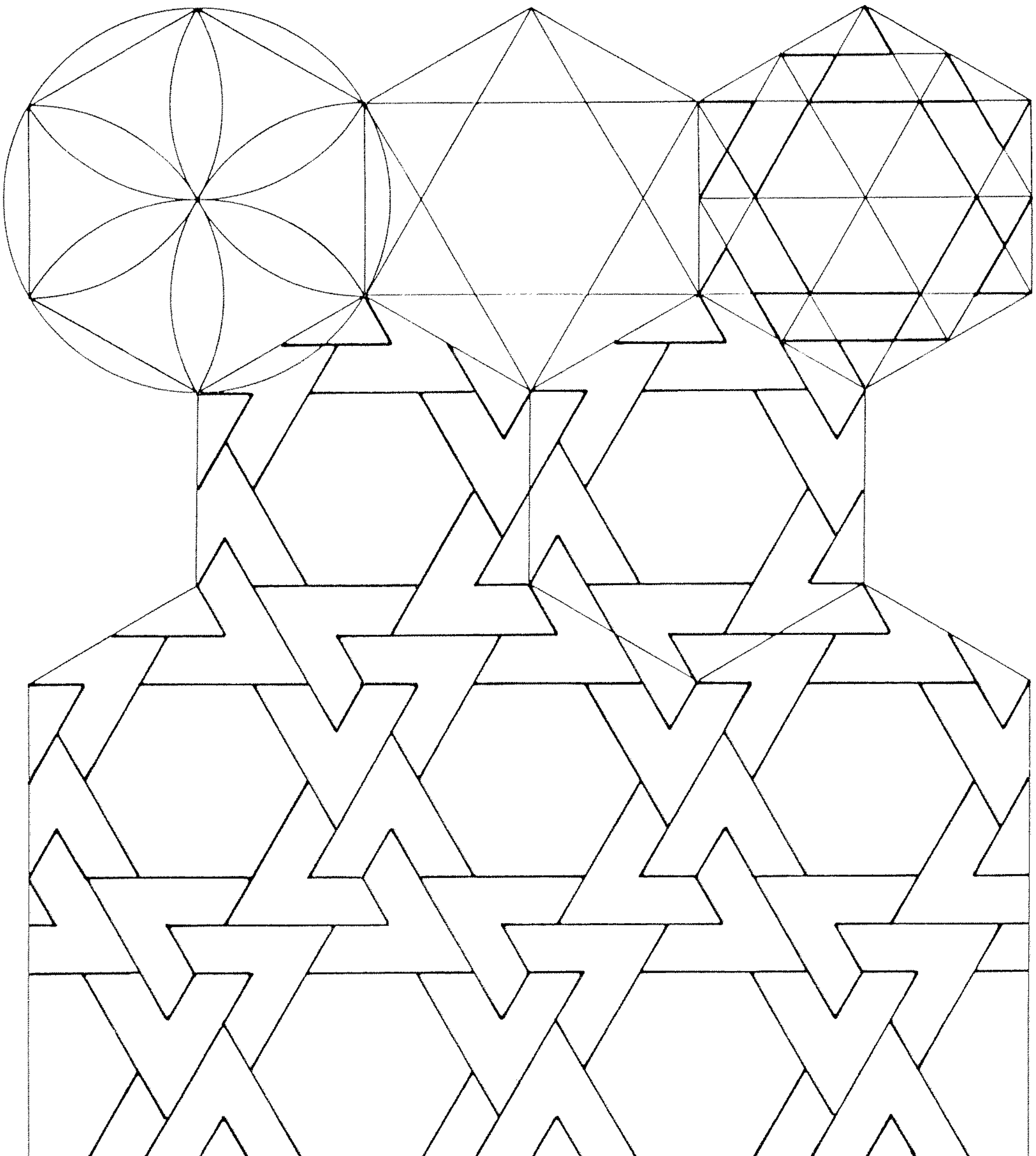
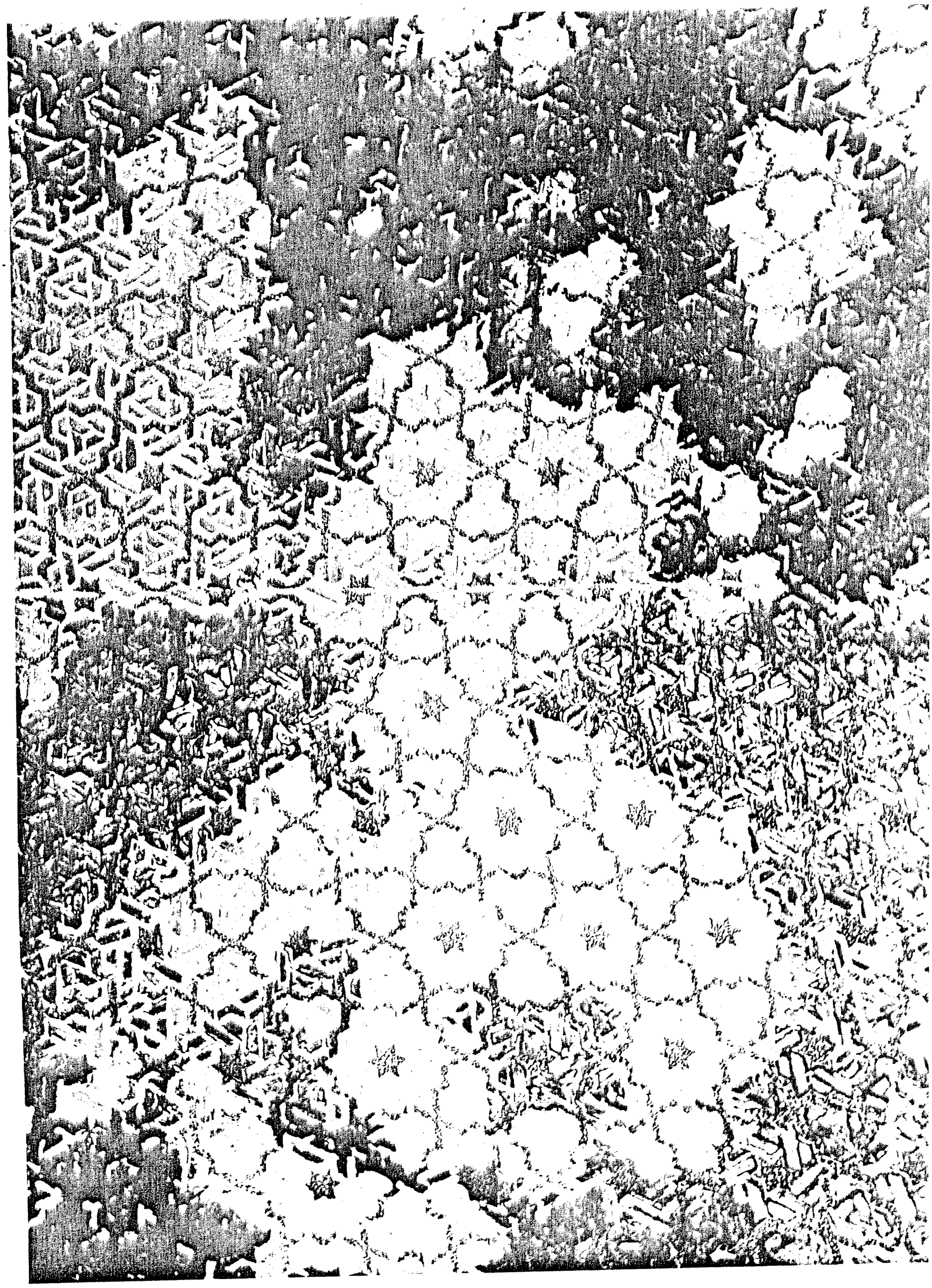
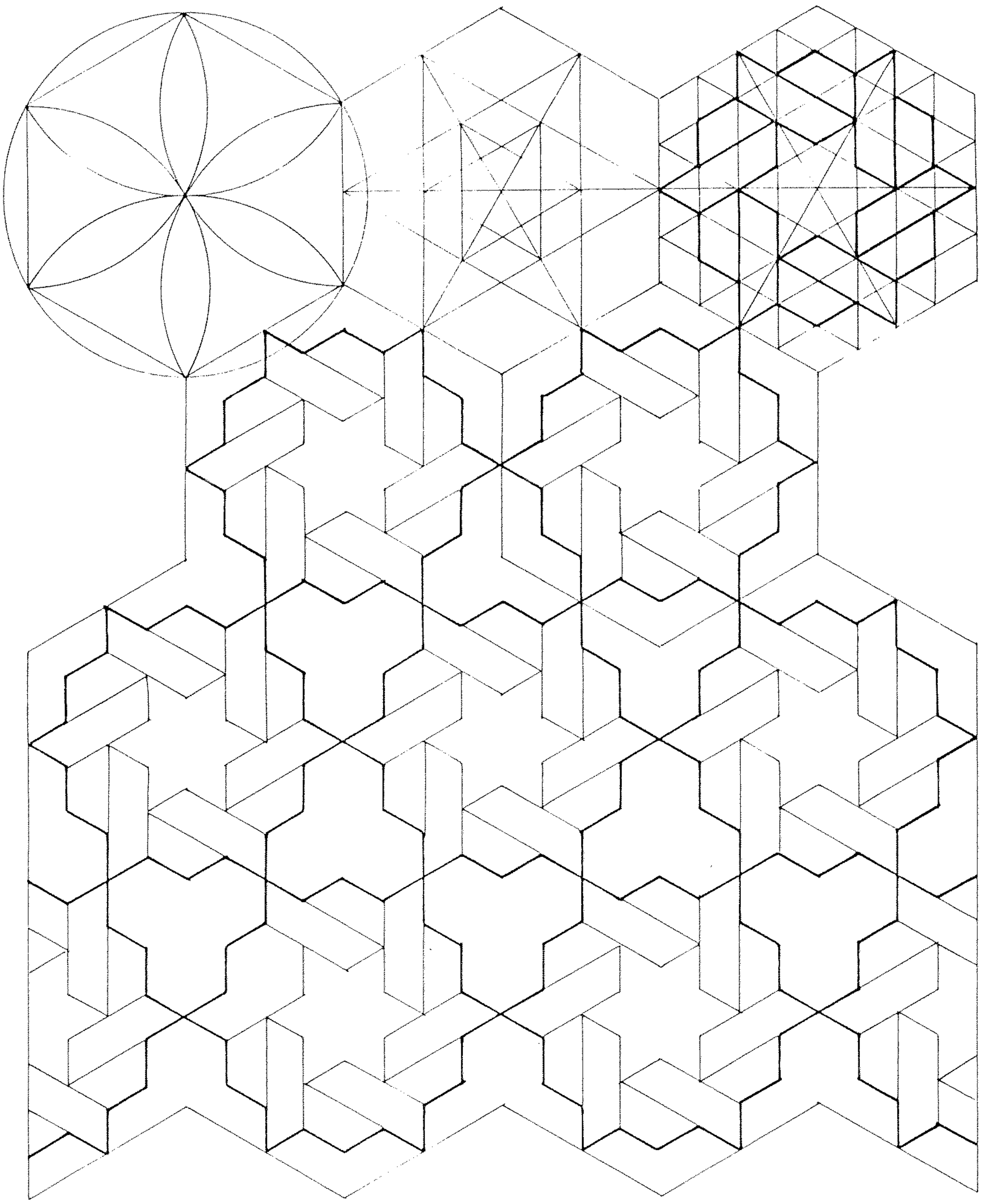
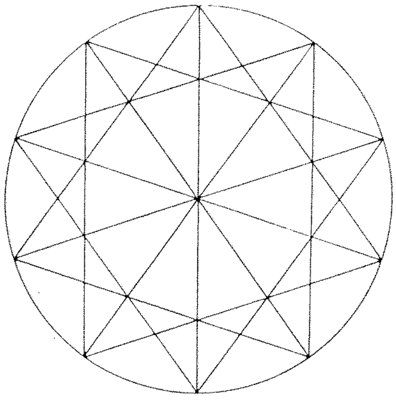
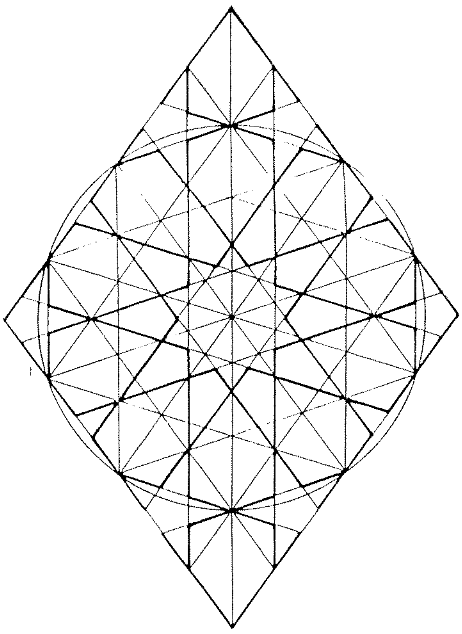


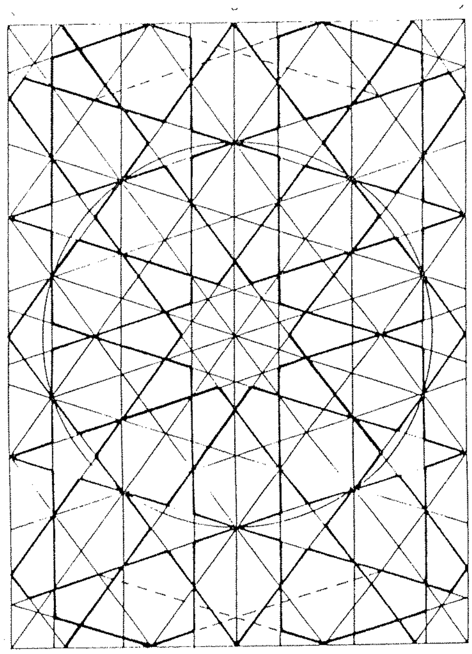
Plate 30. Mustanṣiriyyah Madrasah, Baghdad

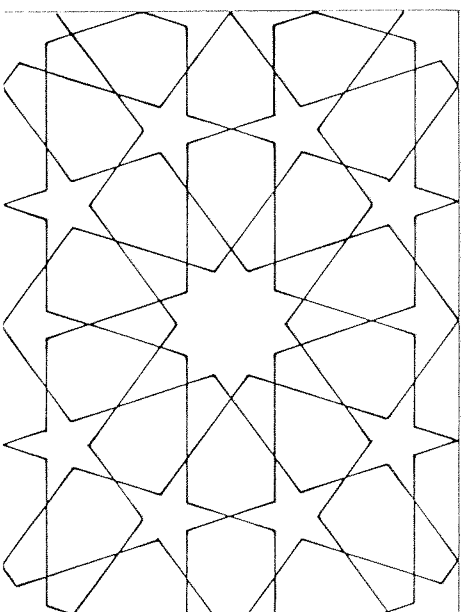


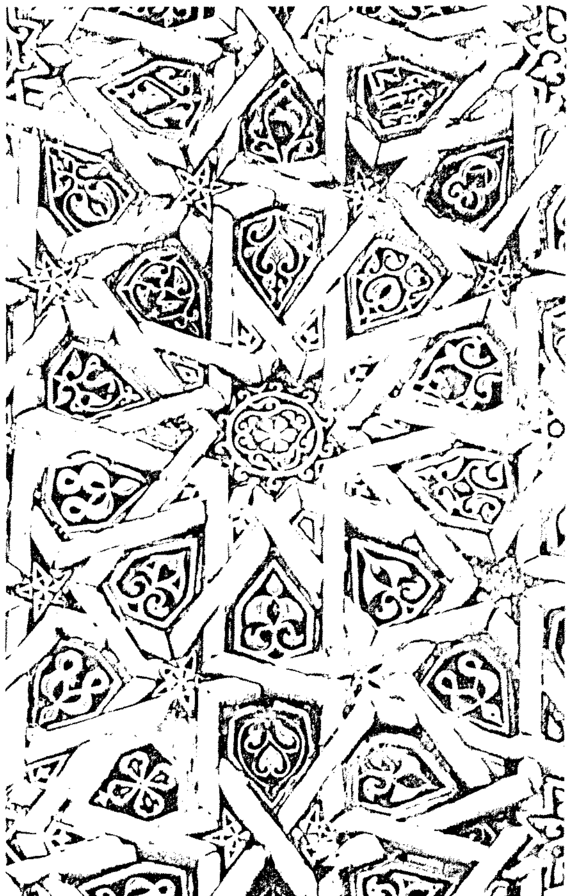


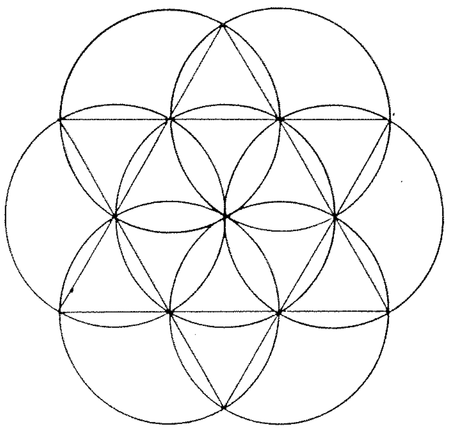


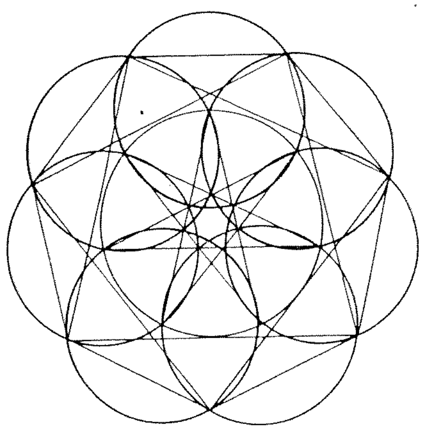


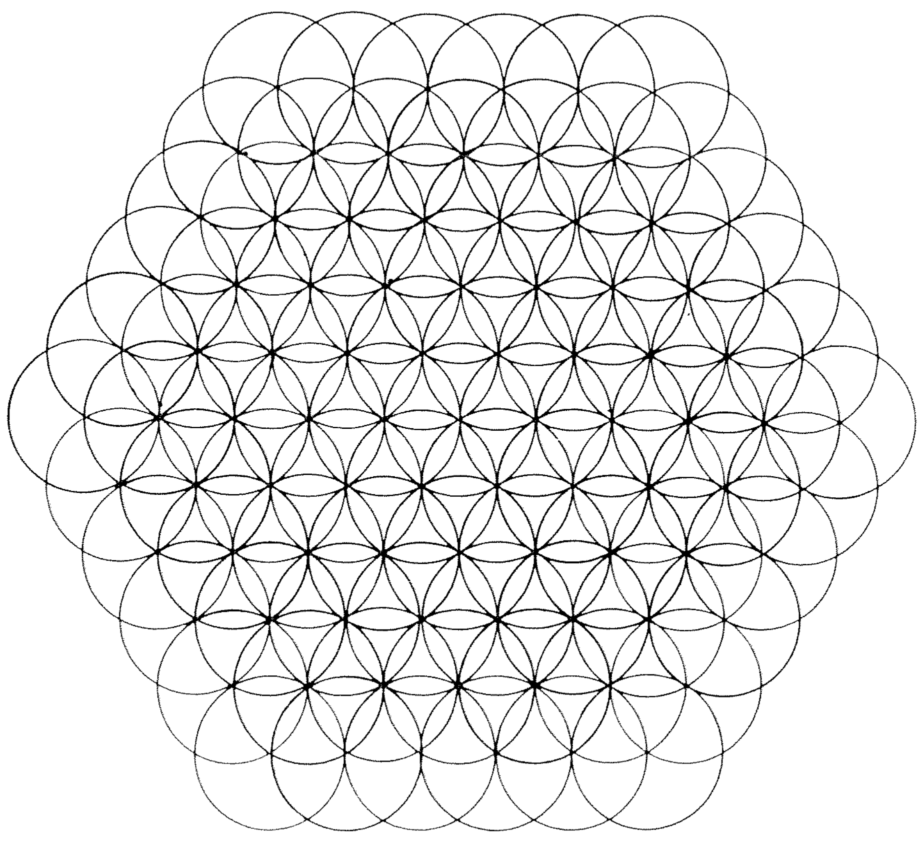


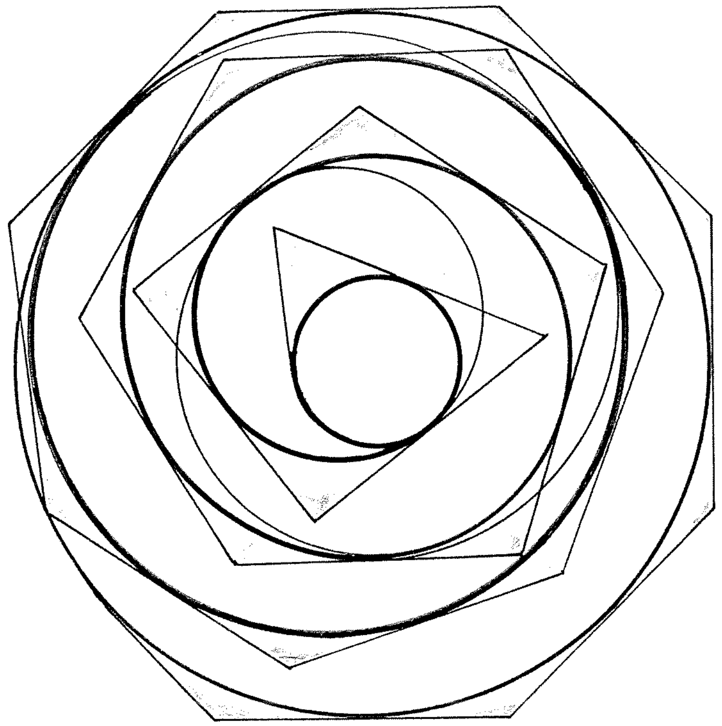


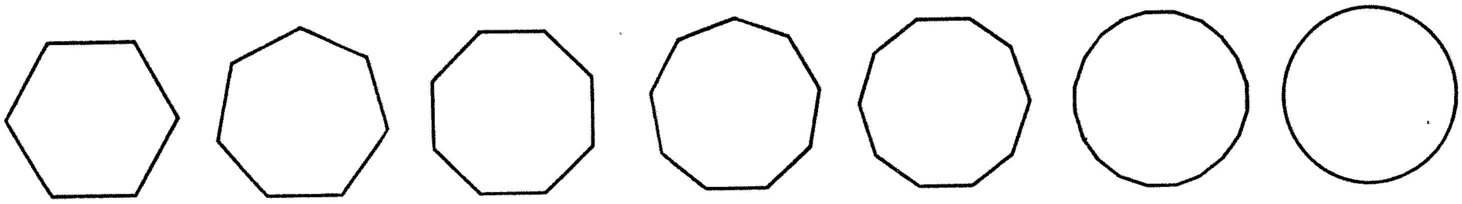












π

3,

14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288 41971 69399 37510
58209 74944 59230 78164 06286 20899 86280 34825 34211 70679

82148 08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172 53594 08128
48111 74502 84102 70193 85211 05559 64462 29489 54930 38196

44288 10975 66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120 19091
45648 56692 34603 48610 45432 66482 13393 60726 02491 41273

72458 70066 06315 58817 48815 20920 96282 92540 91715 36436
78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841 46951 94151 16094

33057 27036 57595 91953 09218 61173 81932 61179 31051 18548
07446 23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381 83011 94912

98336 73362 44065 66430 86021 39494 63952 24737 19070 21798
60943 70277 05392 17176 29317 67523 84674 81846 76694 05132

HISTORIQUE

Si l'on excepte les quelques valeurs empiriques données pour π par les Babyloniens, les Egyptiens ou mentionnées dans la Bible ou le Talmud, l'histoire de π se divise en trois périodes.

Durant la première, approximativement des Grecs au milieu du XVII^e^ siècle, les recherches trouvent leur origine dans le célèbre problème de la quadrature du cercle : comment construire un carré dont l'aire soit égale à celle d'un cercle donné à l'avance, cette construction ne nécessitant que l'usage de la règle et du compas. L'approche est donc essentiellement géométrique et la méthode utilisée consiste à évaluer l'aire, ou la longueur du périmètre, d'un cercle en utilisant des polygones réguliers inscrits ou circonscrits à ce cercle. Il est d'ailleurs tout à fait remarquable, vu l'absence de système de numération commode, que l'on ait pu obtenir par ce moyen une précision appréciable. Plus tard le système décimal permet l'obtention de 34 décimales exactes par Ludolph Van Ceulen vers 1600 en utilisant un polygone à 60×2^{29} côtés.

La seconde période coïncide avec la découverte d'un outil mathématique nouveau : le calcul infinitésimal. Grâce à l'usage des fonctions trigonométriques, il conduit à des approximations comportant une infinité de termes tels que des séries, des produits infinis ou des fractions continues. Cela permet d'augmenter la précision mais ne résout pas le problème de la quadrature : en effet, de telles "formules" conduiraient à utiliser la règle ou le compas une infinité de fois. En un mot, on améliore de beaucoup la connaissance quantitative de π mais on n'éclaircit pas sa nature ; à tel point qu'on ne sait même pas, à la fin de cette période, si π est rationnel ou non. C'est d'ailleurs la raison pour laquelle on s'acharne alors à calculer les décimales de π : on garde l'espoir de découvrir une période dans ces décimales ; π serait alors susceptible d'être rationnel (seulement susceptible puisqu'on ne connaîtrait qu'un nombre fini de périodes) et connaissant le nombre rationnel candidat, il serait peut-être plus facile de *démontrer* que c'est bien exact. On verra plus tard que cet espoir était vain. Pourtant cette période extrêmement riche permet de faire une découverte inattendue : Euler établit un lien entre π et une autre constante mathématique importante, e, base des logarithmes népériens. C'est de là que jaillira la lumière.

La troisième période commence à la fin du XVIII^e^ siècle, en 1766, date à laquelle Lambert pourve que π est irrationnel ; Legendre prouve un peu plus tard que c'est également le cas de π^2 et les travaux de Wantzel sur la trisection de l'angle et la duplication du cube, autres problèmes antiques célèbres, montrent qu'on saura résoudre la quadrature du cercle si π est solution d'un certain type d'équations algébriques. Un pas supplémentaire est fait en 1840 par Liouville qui prouve l'existence de nombres transcendants, c'est-à-dire qui ne sont solutions *d'aucune* équation algébrique à coefficients entiers. Un autre pas a été fait par Hermite : en 1873, il montre que e est transcendant, et finalement c'est Lindemann en 1882 qui prouve la transcendance de π : π n'est solution d'aucune équation algébrique à coefficients entiers ; a fortiori, il n'est pas solution d'équations envisagées par Wantzel. Le problème est donc résolu : la quadrature du cercle est impossible ; il aura fallu près de 25 siècles pour le montrer. Comme le remarque Hobson : "la qualité essentielle de l'humanité, c'est sa colossale patience".

Il ne faudrait pourtant pas croire que l'histoire de π s'arrête en 1882. D'une part, l'avènement des grands ordinateurs a provoqué une nouvelle course aux décimales justifiant la recherche de nouvelles méthodes de calcul. D'autre part, les mathématiciens continuent de préciser la place de π parmi les nombres transcendants, comme en témoignent les travaux de Mahler et, plus récemment, ceux de Mignotte.

PREMIÈRE PÉRIODE : LE RÈGNE DE LA GÉOMÉTRIE

La plus ancienne approximation connue de π est mentionnée dans le papyrus Rhind, conservé au British Museum et qui date de – 1800 environ. Le scribe Ahmès y indique le moyen de calculer l'aire d'un cercle de diamètre d :

On l'assimile à un carré de côté $a = \frac{8}{9} d$, ce qui donne :

$$\frac{\pi d^2}{4} = \frac{8^2}{9^2} d^2 \quad \text{ou encore} \quad \pi = \frac{256}{81} = 3 + \frac{13}{81} \cong 3{,}16 \ldots$$

On ignore comment ce résultat a été obtenu et nous verrons plus loin plusieurs hypothèses séduisantes liées notamment aux pavages du plan, malheureusement elles ne sont guère susceptibles d'être généralisées dans le sens d'une précision croissante.

Cette approximation appelle deux remarques :

La première est que le scribe Ahmès ne nous dit pas "voici une valeur approchée de π" ; il décrit une approximation de type *métrologique* permettant d'évaluer l'aire d'un cercle de diamètre donné. π, quel que soit le nom qu'on lui donne, n'est pas reconnu comme un nombre, ce qui n'aura lieu que bien tard. C'est donc un abus de notre part (mais bien pratique) de dire : "pour les Egyptiens, π est approximativement égal à ...". Cette remarque vaut également pour les évaluations données dans la Bible.

En second lieu, notons avec Dedron et Itard [DED], que la précision atteinte est, en un certain sens, la meilleure possible pour les Egyptiens. En effet, ceux-ci calculaient par quantièmes, c'est-à-dire à l'aide de fractions de numérateur 1.

Cherchons donc le meilleur rapport approchant $\frac{a}{d}$.

$$\text{On a} \quad a^2 = \frac{\pi d^2}{4} , \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{a}{d} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

On sait aujourd'hui que $\frac{\sqrt{\pi}}{2} = 0{,}88624\ldots$

Or $1 - \frac{1}{8} = 0{,}875$; $1 - \frac{1}{9} = 0{,}8888\ldots$; $1 - \frac{1}{10} = 0{,}9$.

Le meilleur est donc bien $1 - \frac{1}{9}$

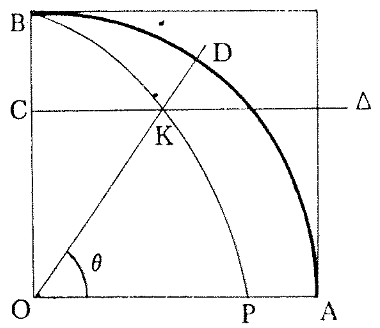
On peut noter qu'à ces époques reculées, d'autres valeurs étaient adoptées pour π .

Ainsi, la Bible note (1 Rois 7,2,3 et 2 Chronique 4,2)

"Il fit aussi, en métal fondu, la grande cuve, qui avait dix coudées de diamètre et qui était complètement ronde ; elle avait cinq coudées de haut, et un cordon de trente coudées en mesurait la circonférence". D'où $\pi = 3$, ce qui revient à confondre le cercle et l'hexagone inscrit. Cette valeur a longtemps été attribuée aussi aux Babyloniens. Cependant, en déchiffrant les tablettes de Suse, E.M. Bruins a montré en 1950 que ceux-ci utilisaient la valeur $\pi = 3 + \frac{7}{60} + \frac{1}{120} = 3 + \frac{1}{8} = 3{,}125$.

Là encore, on ignore par quelles méthodes ce résultat a été acquis. Toutefois, notons que les Babyloniens et les Egyptiens admettent implicitement ce que les Grecs démontreront ultérieurement : l'aire du cercle et celle du carré circonscrit sont proportionnelles. Ici finit la préhistoire de π.

L'histoire, d'après Plutarque (*De exilio*), commence avec Anaxagore de Clazomène (500-428 avant J.-C.) qui, durant un séjour en prison pour impiété, se serait occupé de la quadrature du cercle. On ne possède pas d'autres indications, si bien que le premier travail sérieux sur la question peut être, quoiqu'indirectement, attribué à Hippias d'Elis qui, en −420, invente une courbe appelée trisectrice. Cette courbe avait pour but initial de résoudre le problème de la division d'un angle en un nombre quelconque d'angles égaux. Voici le principe de construction :



Considérons l'arc de cercle AB, un point C se déplaçant à vitesse constante de B en O, et D se déplaçant également à vitesse constante sur l'arc AB, de façon à atteindre le point A lorsque C atteint le point O. La trisectrice est le lieu du point d'intersection K de OD et de △, parallèle à OA, passant par C.

Pour diviser un angle quelconque θ en trois parties égales par exemple, il suffit de diviser le segment OC en trois segments égaux, ce qui peut se faire à l'aide de la règle, du compas et du théorème de Thalès. On peut de la même façon diviser l'angle θ en un nombre quelconque d'angles égaux. Quel rapport avec la quadrature du cercle, direz-vous ? C'est Dinostrate qui le révéla quelque temps plus tard : le segment OP a pour longueur $2\ OA/\pi$. Or, si l'on connaît OP, on peut construire un segment de longueur π et par conséquent résoudre la quadrature. Malheureusement, le point P ne peut pas être déterminé à l'aide de la règle, du compas et d'un nombre fini d'étapes.

On doit également mentionner une tentative intéressante d'Antiphon, améliorée par Bryson, tous deux contemporains de Socrate. Antiphon inscrit dans le cercle un carré, puis double le nombre de côtés jusqu'à ce que le polygone soit indiscernable du cercle. Comme on sait construire un carré de même aire qu'un polygone régulier donné, la "quadrature est résolue" (du moins avec une précision aussi grande qu'on le veut).

Bryson améliore la méthode en utilisant des polygones inscrits et circonscrits et en prenant la moyenne des aires correspondantes.

Bien que ces deux méthodes ne semblent pas avoir conduit à une valeur numérique de π, et bien qu'elles ne répondent pas exactement au problème posé (elles nécessitent un nombre infini d'étapes), elles révèlent cependant implicitement une notion importante : celle d'encadrement.

Nous verrons plus loin l'usage qu'en fera Archimède, mais nous devons dire quelques mots du travail d'Hippocrate de Chio, qui vivait à Athènes dans la seconde moitié du V[e] siècle avant J.-C.

Hippocrate (à ne pas confondre avec Hippocrate de Cos, le médecin) est le premier à avoir réalisé la quadrature de figures curvilignes, c'est-à-dire limitées par des arcs de cercles.

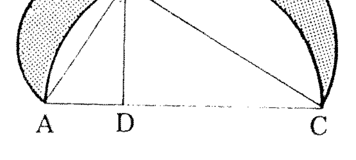


Fig. 2

Sur les côtés d'un triangle rectangle ABC, il construit les demi-cercles ABC, AMB et BNC et montre que la somme des aires des lunules AMB et NBC est égale à celle du triangle ABC.

Si le triangle est en plus isocèle, les lunules sont égales et par conséquent chacune d'elles est d'aire égale à celle de ADB. L'idée de quarrer des lunules était excellente et aurait permis la quadrature du cercle qui n'est qu'une lunule particulière. Malheureusement, Hippocrate ne réussit que pour des lunules très particulières. La question de déterminer les lunules quarrables fut reprise bien plus tard par Th. Clausen en 1840, qui découvrit quatre cas supplémentaires (Landau devait d'ailleurs montrer que deux des lunules de Clausen étaient déjà connues d'Hippocrate).

Notons au passage que c'est aussi à cette époque que le problème de la quadrature apparaît dans la littérature sous la plume d'Aristophane.

MÉTON. — Je veux toiser l'air et vous le diviser en arpents.

PISTHÉTAIROS. — Au nom des dieux, quel homme es-tu?

MÉTON. — Qui je suis? Méton, connu dans l'Hellade... et à Colone[1].

PISTHÉTAIROS. — Dis-moi, et ces affaires que tu portes-là, qu'est-ce?

MÉTON. — Des règles, pour l'air. Et d'abord sache que l'air est pour la forme, pris dans son entier, pareil à un étouffoir ou à peu près[2]. Moi donc, appliquant par en haut cette règle courbe et y insérant un compas... Tu comprends?

PISTHÉTAIROS. — Je ne comprends pas.

MÉTON. — ... Je prendrai mes dimensions avec une règle droite que j'applique, de manière que le cercle devienne carré[3]. Au centre il y aura une place publique, où aboutiront des rues droites convergeant vers le centre même, et comme d'un astre lui-même rond, partiront en tous sens des rayons droits[4].

PISTHÉTAIROS. — Cet homme est un Thalès[5]!... Méton..

MÉTON. — Qu'y a-t-il?

PISTHÉTAIROS. — Sache que je t'aime. Eh bien, crois-moi, écarte-toi doucement du chemin.

MÉTON. — Qu'y a-t-il à craindre?

PISTHÉTAIROS. — Ici, comme à Lacédémone, on chasse

[1] Méton, si renommé, croit-il, s'étonne de n'être pas tout de suite reconnu. Qu'il s'agisse du bourg de Colone situé au nord d'Athènes ou de la place de Colone Κολωνός ἀγοραῖος voisine de l'Agora (cf. Hippocration s. v. Κολωνίτας), la chose est de peu d'importance. Ce qui intéresse ici, c'est la façon plaisante de citer de pair l'Hellade et une petite localité, *orbem et urbem !*

[2] Aristophane se moque à nouveau des théories du philosophe pythagoricien Hippon déjà raillées dans les *Nuées* 96 et suivants.

[3] C'est-à-dire j'inscrirai ce cercle dans un carré.

[4] « Comparez le plan de Thurii, dessiné par Hippodamos de Milet (Curtius *Histoire Grecque*, tome I p. 546, traduction Bouché-Leclercq). » (Note de Willems.)

[5] Le plus fameux des Sept Sages.

Mais revenons à la détermination de π.

Dans son traité "sur la mesure du cercle", Archimède démontre les trois théorèmes suivants :

1) L'aire d'un cercle est égale à celle d'un triangle rectangle dont l'un des côtés de l'angle droit est égal au rayon et l'autre au périmètre du cercle.

2) L'aire du cercle est au carré de son diamètre environ comme 11 est à 14.

3) Le périmètre de tout cercle est supérieur au triple du diamètre et l'excède d'une longueur inférieure à la septième partie du diamètre mais supérieure à dix soixante et onzièmes.

Le premier est démontré par l'absurde en considérant des polygones inscrits et circonscrits. Le second est conséquence des deux autres. Enfin le dernier, au prix d'un laborieux calcul, permet l'encadrement en partant d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle, en doublant le nombre des côtés et en calculant les périmètres et les aires des polygones inscrits et circonscrits.

La valeur obtenue pour π — qui n'est pas considéré comme un nombre, mais comme un rapport — servira longtemps de contrôle pour ses successeurs. Ainsi, Ptolémée (vers 90-vers 168) qui, à partir de ses tables trigonométriques, attribue à π la valeur sexagésimale

$$3 + \frac{8}{60} + \frac{30}{3600} = 3{,}14166\ldots,$$

remarque qu'elle est très voisine de la moyenne arithmétique des valeurs données par Archimède.

Après Archimède et pendant un millénaire et demi, c'est la nuit en Occident. Aussi, en profiterons-nous pour dire quelques mots des lieux où l'on ne passait pas uniquement son temps à guerroyer et à mettre le feu.

En Inde, Aryabhatta (environ 500 après J.-C.) donne

$$\pi = \frac{62832}{20000} = 3{,}1416$$

à l'aide de polygones à 12, 24, 48, 96, 192, 284 côtés, dont il calcule le périmètre en utilisant la relation liant les côtés de deux polygones successifs $a_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_n^2}}$.

Avec 384 côtés et un diamètre 100, il obtient $P = \sqrt{98694}$.

Brahmagupta (environ 600) indique pour sa part :

$$\pi = \sqrt{10}$$

valeur qui était déjà donnée en Chine par Chang Hing vers 120 après J.-C., et Wang Fau ne faisait guère mieux en indiquant $\frac{142}{45} = 3{,}1555$ (on ignore de quelle façon).

Chez les Arabes, Alkharizmi, vers 830, mentionne 22/7 et $\frac{62832}{20000}$, cette dernière étant utilisée par les astronomes.

Nous reviendrons en Europe avec Léonard de Pise, dit Fibonacci (1180-1250), qui reprend la méthode d'Archimède avec cependant un net avantage : il dispose de la numération décimale. Il obtient $\pi = 3{,}1418$.

Au XV[e] siècle, Nicolas de Cues, cardinal de son état, propose $\frac{3}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{6})$. Cette valeur sera démontrée erronée par Regiomontanus.

Une amélioration notable sera apportée par Adrian Anthonisz, qui indique 6 décimales exactes avec $\frac{355}{113}$. Cette valeur sera publiée par son fils Adrien Métius en 1625, qui explique que son père a obtenu par la méthode d'Archimède $\frac{333}{106} < \pi < \frac{377}{120}$ et qu'il a fait la moyenne des numérateurs et des dénominateurs.

Le progrès suivant est réalisé par François Viète (1540-1603). Il utilise toujours la méthode des polygones, mais part du carré et travaille uniquement sur les aires. Il établie entre l'aire d'un polygone à n côtés et celle du polygone à 2n côtés la relation :

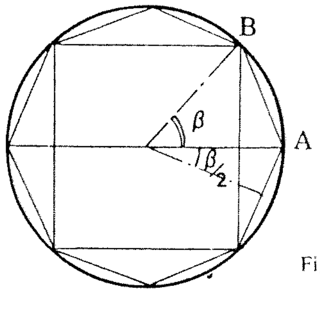


Fig. 3

$$\frac{A(n)}{A(2n)} = \cos\beta \quad \text{d'où}$$

$$\frac{A(n)}{A(2n)} \times \frac{A(2n)}{A(4n)} = \cos\beta \cos\frac{\beta}{2}$$

ce qui lui permet d'obtenir la valeur :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \ldots}$$

où le dénominateur est le produit d'une infinité de termes. Notons que cette formule n'est d'aucune utilité pratique sur le plan du calcul, car elle converge beaucoup trop lentement. Notons également que Viète ne se préoccupe pas de la convergence du produit : il suppose implicitement qu'il tend vers une limite finie non nulle. Ajoutons enfin qu'en considérant un polygone à 393216 côtés et la méthode traditionnelle, il obtient 9 décimales exactes :

$$3{,}1415926535 < \pi < 3{,}1415926537$$

C'est à cette époque que commence la course aux décimales qui s'explique en partie par l'attrait tout nouveau des fractions décimales.

Adrien Romain (1561-1615) calcule 15 décimales (polygone à 15. 2^{24} côtés) et Ludolph von Ceulen (1539-1610) — Ludolph de Cologne — obtient en 1609 35 décimales et la gloire : en Allemagne, π porte aussi le nom de "nombre de Ludolph".

On voit que la performance est intéressante sur le plan sportif et qu'on pourrait l'améliorer en augmentant encore le nombre des côtés. Pourtant, et c'est heureux pour les mathématiques, les recherches s'orientent vers l'économie des moyens.

En 1621, Willebrod Snellius (1580-1626) montre dans son ouvrage "Cyclometricus" que des précisions du même ordre peuvent être obtenues en utilisant pour la mesure d'un angle les approximations

$$\frac{2 \sin \theta + \operatorname{tg} \theta}{3} < \theta < \frac{3}{2 \operatorname{cosec} \theta + \operatorname{cotg} \theta},$$

approximations qui furent démontrées par Huygens.

Le progrès est de taille puisqu'à l'aide des seuls hexagones Snellius obtient une précision supérieure à celle d'Archimède (96 côtés), et Huygens obtient le même résultat à l'aide du triangle équilatéral.

Parallèlement à ces progrès réels, le problème de la quadrature devient à la mode et fait l'objet de publications farfelues ; on engage des paris en argent. Charles Quint crée un prix de mille écus, on assiste à des procès. Ainsi, un homme de condition proposa 10 000 francs pour réfuter sa solution (dont il déduisait de plus la preuve palpable de la Sainte Trinité où le carré était le père, le cercle le fils et une troisième figure le Saint-Esprit ; il en déduisait aussi l'explication du péché originel, la déclinaison de l'aiguille aimantée, etc. Il n'y manquait qu'une demi-douzaine de ratons laveurs). Toujours est-il que les candidats ne manquèrent pas, une femme plaida, mais le Châtelet jugea que la fortune d'un homme ne devait pas souffrir des erreurs de son esprit lorsqu'elles ne sont pas nuisibles à la société (ROU-1, p. 318).

La palme en ce domaine revient à un nommé Liger qui commençait par démontrer que $\sqrt{25} = \sqrt{24}$, le reste suit.

Rappelons au passage que l'expression "quadrature du cercle" désigne, d'une part le problème géométrique cité plus haut, et d'autre part, et c'est dans ce sens que les mathématiciens l'utilisent, la détermination de l'aire du cercle : c'est-à-dire, en fait, un problème d'intégration. C'est dans ce sens que l'on parle également de "quadrature de la cycloïde", ou de "résolution d'une équation différentielle par des quadratures".

Revenons aux choses sérieuses avec les travaux de Gregory (1638-1675), professeur à l'Université d'Edimbourg et dont nous reparlerons dans la seconde partie. Il est le premier à tenter de démontrer que la quadrature du cercle est impossible. Pour cela, il montre qu'il est impossible de quarrer un secteur de cercle quelconque, et comme le cercle est un secteur... Malheureusement, cette preuve est réfutée par Huygens qui, lui aussi, est quand même persuadé de l'impossibilité et qui remarque qu'on ne sait même pas si π est rationnel (commensurable) ou non. Notons toutefois que cette idée avait déjà été présentée par Michael Stifel en 1544. Les idées mettent parfois longtemps à faire leur chemin !

Nous terminerons cette période géométrique avec les travaux de Descartes, qui prend le problème à l'envers. Il se donne un segment dont la longueur est celle du périmètre d'un cercle et il se propose d'en déterminer le diamètre. Cette méthode, connue sous le nom de méthode des isopérimètres, sera reprise plus tard par Schwab.

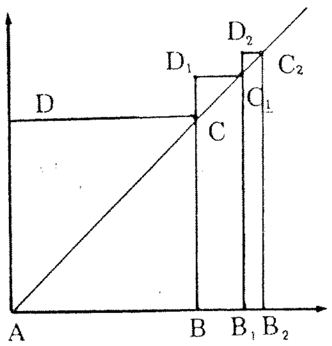
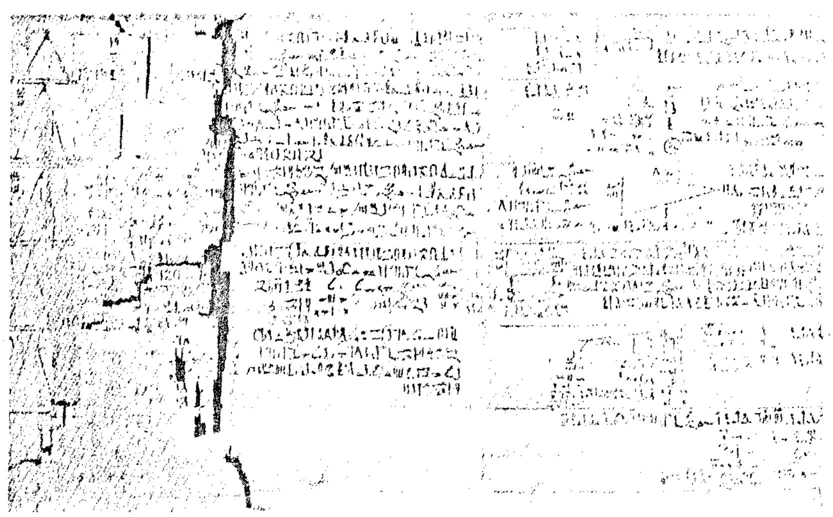


Fig. 4

Soit AB le quart du périmètre et ABCD un carré. Il construit le rectangle $BB_1C_1D_1$ dont l'aire est le quart de celle du carré, puis $B_1B_2C_2D_2 = \frac{1}{4} BB_1C_1D_1$ et ainsi de suite. Le diamètre cherché est le segment $\lim_{n \to \infty} AB_n$.

On peut s'en convaincre en montrant que AB_1 est le double de l'apothème (voir § XXII des "Eléments de géométrie" de CLAIRAUT) de l'octogone ayant même périmètre que le carré initial. Plus généralement AB_m est le double de l'apothème du 2^{n+2}-gone ayant même périmètre que le carré initial (voir brochure Numéro spécial II , p.55).

L'AFFAIRE DU PAPYRUS ou LA DIMINUTION DU NEUVIÈME



British Museum - Archives Edena

Le déchiffrement du papyrus qu'on appelle "Rhind", et la publication de traductions et commentaires, d'abord par Eisenlohr en 1877 (et plusieurs fois depuis), a beaucoup impressionné les historiens de la science mathématique, les mathématiciens, et quelques autres.

Mais faut-il, à ce sujet, parler de "la valeur de pi que connaissaient les anciens Egyptiens" ? Je ne le crois pas.

La façon commune, en la matière, est bien dite par Paul Dubreil dans *Les grands courants de la pensée mathématique* : "en Egypte, le papyrus Rhind, copié par Ahmès (1700 avant J.C.) donne

$$\pi = (16/9)^2 = 3{,}1604".$$

Ce n'est pas que ce soit faux, à strictement parler, mais le lecteur, s'il s'arrête là, manquera l'essentiel.

Allons voir, en effet, sinon le texte, du moins les traductions et commentaires en langues modernes.

*

* *

Il s'agit, d'une règle, d'un algorithme, d'un programme de calculs, et ça commence comme ceci :

"si tu veux calculer l'aire circulaire ..."

Au fait, qui a envie ? qui a besoin ? de calculer une aire circulaire. Des surfaces agricoles ? des tombes ? des temples ? Peut-être aussi des puits. Et quelle est la précision requise ? (ce qui est la question fondamentale).

Que dirions-nous, aujourd'hui ? L'écolier récite : "Pi Erre Deux".

Mais si, comme c'est plus naturel, on donne le diamètre ? Tu commences par diviser par deux, formule : $\pi.(D/2)^2$ ou bien, c'est équivalent : $(D)^2.(\pi/4)$ avec $\pi/4 = 0{,}785398 \ldots$

Mais encore, tout aussi bien :

$$(D \,.\, \sqrt{\pi/4})^2$$

c'est-à-dire tu multiplies le diamètre par $\sqrt{\pi/4} = 0{,}886226 \ldots$ et tu élèves au carré le résultat.

Tout ça c'est pareil ? mais non, pas pour le calculateur attentif aux opérations et à leur précision.

Pour un même problème, plusieurs calculs possibles ; logiquement équivalents, mais algorithmiquement différents.

Or, l'algorithme du papyrus est très clair. Bien entendu les nombres n'y sont pas "représentés" par des lettres (D, R, π comme nous, ci-dessus), les nombres sont de vrais nombres, et on nous donne deux exemples : $D = 9$ et $D = 10$. Le tout tient en trois lignes.

Il est indiqué :

1. d'ôter un neuvième au diamètre. Nous dirions aujourd'hui : calculez d'abord

$$(D - D/9) = D.(8/9)$$

2. de multiplier le résultat par lui-même. Ce qui peut se faire en multipliant d'abord par D, puis en ôtant un neuvième du produit.

Il suffit donc de savoir faire les deux opérations :
— diminution du neuvième
— multiplication.

Admirable simplicité ! Peut-être pas tellement pour les calculateurs égyptiens d'il y a une quarantaine de siècles : comme le diamètre ne sera pas toujours un multiple de 9, il y aura forcément des fractions. Or, à part "deux-tiers" les calculateurs de cette époque et de ce pays ne manipulaient que les "fractions" de la forme $1/n$. Ainsi

dix moins le neuvième de dix

devait donner, pour eux :

huit plus deux tiers plus un sixième plus un dix-huitième

Et ce que nous appellerions le carré de ce dernier nombre :

$$79 + 1/108 + 1/324$$

C'est ce qu'on peut lire sur le papyrus ; le nommé Ahmès (ou Ahmesu) qui signe la chose, était, comme vous voyez, un fin calculateur !

On peut donc dire sans erreurs ni anachronismes, qu'en Egypte, à cette époque (savoir : il y a plus de trente-six siècles d'après les savants égyptologues), on possédait un algorithme du type suivant :

Aire circulaire = carré du diamètre corrigé

$$A = (D - f.D)^2$$

f étant une fraction simple (ici $f = 1/9$).

Aujourd'hui s'il fallait donner une règle de ce genre, on dirait plutôt quelque chose comme ceci :

1. Diminuer le diamètre de 11,4 %
2. Elever au carré le résultat.

Mais les pourcentages n'étaient pas à la mode en ces temps-là et les fractions préférées étaient les inverses des naturels. Il peut être amusant, et instructif, de se demander, aujourd'hui qu'on "sait tout" sur pi, comment on peut choisir la fraction f .

De nos jours, on préfère l'écriture décimale ; et l'on écrit

$$\sqrt{\pi/4} = 0{,}886226925 \ldots$$

donc $$f = 0{,}113773075 \ldots$$

On voit que $1/9 < f < 1/8$ (première approximation)
et aussi que 1/9 est la meilleure valeur approchée.

La formulation qu'a retenu notre vieux scribe était (est) donc bel et bien *la meilleure de son espèce.*

On pourrait d'ailleurs s'amuser à perfectionner, tout en gardant le style égyptien ; on aura, par exemple, en seconde approximation

$$(1 - 1/9) . (1 - 1/334)$$

(deux corrections successives à faire subir au diamètre pour trouver le bon carré).

On a envie alors de poser quelques questions.

1. Les contemporains du papyrus savaient-ils que la règle ne donne qu'une approximation ? et s'il se trouvait parmi eux des savants assez savants pour le penser, comment auraient-ils pu le *dire* ?

2. Comment étaient-ils arrivés à choisir ce "coefficient" de "un neuvième" ?

Il n'y a guère de chances que personne réponde jamais de façon sérieuse à ces deux premières questions. Mais ça n'empêche pas de rêver, ni d'écrire des romans d'histoire-fiction.

3. Est-ce que cette règle a été répandue, et comment ?

Ici la réponse relève d'une enquête historique possible, difficile et utile (pour qui veut suivre, à travers les siècles, l'évolution de l'idée d'approximation) ; entre 1877 avant J.C. et 1877 après, qui donc a pratiqué cet algorithme si simple et si commode ?

D'après des résumés que j'ai lus dans *Math. Reviews* (52,5277 et 53,10527) il semblerait, selon Radha Charan Gupta, qu'en Inde aussi, il y a des siècles, on trouve trace de la diminution du neuvième.

La pièce la plus curieuse de mon maigre dossier est un petit texte latin (B.N. ms. lat. 1044, Fol.60)

"circumducto quantolibet circulo..." étant donné un cercle quelconque ...

C'est la même idée, mais avec le secours du langage graphique et sans exemple numérique.

On a un cercle ; on le contracte d'un neuvième, d'où un second cercle intérieur au premier
"alterum circulum interiorem
exteriori circulo nona parte contractiorem ..."

Alors on peut dire que le carré circonscrit au cercle intérieur a une surface égale à celle du cercle extérieur primitif :
"aequos habebis quadratum et circulum ..."

La copie que conserve la Bibliothèque nationale semble être du douzième siècle, mais le texte remonterait peut-être à 1050.

Mais cette diminution du neuvième, pourtant si simple et si commode, on n'en trouve pas de traces qui marqueraient les intermédiaires entre nos deux témoins : le papyrus et le manuscrit médiéval. Voici ce qu'en dit le sage et savant Paul Tannery : "... il faut simplement conclure qu'un Lotharingien du onzième siècle a rencontré de lui-même ce que trois mille ans auparavant on avait inventé sur les bords du Nil".

(Une correspondance d'écolâtres du XI^{e} siècle, Notices et extraits des mss de la B.N., XXXVI, 2^{e} partie, p. 487, Paris 1901).

En commençant, j'ai posé, en langage d'aujourd'hui, le problème dont nos deux témoins donnent une solution : de quelle fraction faut-il réduire le diamètre pour qu'en élevant au carré on trouve l'aire circulaire?

Soit, en écriture familière : $A = (D - f\tilde{D})^2$.

Choisir f . Comme on sait (maintenant) que $A = \dfrac{\pi D^2}{4}$, on a $f = 1 - \sqrt{\pi/4}$ et de la connaissance qu'on a du nombre π on peut conclure au choix de f . En particulier on a $1/9 < f < 1/8$.

1/9 est une meilleure approximation que 1/8, et c'est justement celle que donnent nos deux textes. Mais on trouve aussi des écrits anciens qui parlent de la contraction de un huitième. Sans quitter le onzième siècle lotharingien, on peut en trouver un. Il s'agit d'un petit traité dont on connaît trois copies. (Une édition dans les Archives internationales d'histoire des sciences, vol. 26, n° 98, juin 1976, p. 65 : a treatise on the squaring of the circle by Franco of Liege of about 1050).

"(quadraturam circuli) ... quidam ita constituunt ut a puncto diametrum in viij dividant portiones demptaque portione viija latus quadrati ducant ..."

c'est-à-dire : certains (pour quarrer le cercle) divisent le diamètre en huit parties, enlèvent la huitième, et prennent cela pour côté du carré.

Mais l'auteur ajoute :

"hi omnes a veritate longe absunt"

pour dire qu'il récuse la méthode. Il a bien choisi la façon de le dire : *"longe"*, c'est trop loin, ce n'est pas assez près. Il s'agit bien d'approximations

ΠΑΝΤΟΣ ΚΥΚΛΟΥ Η ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΣ
ΤΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ ΤΡΙΠΛΑΣΙΩΝ
ΕΣΤΙ ΚΑΙ ΕΤΙ ΥΠΕΡΕΧΕΙ
ΕΛΑΣΣΟΝΙ ΜΕΝ
Η ΕΒΔΟΜΩΙ ΜΕΡΕΙ ΤΗΣ ΔΙΑΜΕΤΡΟΥ
ΜΕΙΖΟΝΙ ΔΕ
Η ΔΕΚΑ ΕΒΔΟΜΗΚΟΣΤΟΜΟΝΟΙΣ

o o o

Pour tout cercle
le périmètre dépasse
le triple du diamètre
de moins d'un septième
mais de plus de dix
septante et unièmes
Archimède.

$$3+\frac{1}{7} > \pi > 3+\frac{1}{7+\frac{1}{10}}$$

ARCHIMÈDE
(287-212 AVANT J.-C.)

(Archimède) ... "n'a pas donné de batailles pour les yeux, mais il a fourni à tous les esprits ses inventions. O qu'il a éclaté aux esprits !

......

Il eût été inutile à Archimède de faire le prince dans ses livres de géométrie, quoiqu'il le fût."

Pascal : L'Ordre et la Charité, in : *Les œuvres complètes de Pascal* Collection La Pléiade, pages 1341, 1342

Avant de faire une présentation rapide des œuvres d'Archimède, en particulier au sujet de ce que nous appelons le nombre π , quelques mots doivent être dits sur l'œuvre et la personnalité du "plus grand génie scientifique de l'antiquité grecque".

Qui était Archimède, quelle fut son œuvre ?

Nous ne répondrons à ces questions d'apparence si simple qu'avec une infinité de précautions. Fort heureusement, une grande partie de l'œuvre d'Archimède nous est parvenue ; hélas, pas tout ! Quant aux témoignages historiques, s'il convient de les prendre tous en considération, il convient d'analyser et de comparer entre elles toutes ces productions postérieures à Archimède de quelquefois plusieurs siècles.

Nous avons donc travaillé avec le plus grand intérêt quelques ouvrages soigneusement choisis traitant de notre sujet après avoir contrôlé que les sources citées avaient dans tous les cas été effectivement consultées et étudiées ; et nous ne citerons pas ici la pléiade de textes et écrits dits scientifiques d'auteurs plus enclins à affirmer péremptoirement n'importe quoi ou presque sur un sujet si délicat qu'à reconnaître leur inculture et en conséquence se taire !

Mais je vous renvoie (voir bibliographie) à quelques sources faciles à trouver en bibliothèque ; j'entends essentiellement Dedron et Itard, l'article d'Itard : "Archimède" dans *Encyclopaedia Universalis*, "Archimède" dans la collection des Universités de France (il s'agit ici d'une édition bilingue, principal intérêt de l'ouvrage) et "Les œuvres complètes d'Archimède" chez Vaillant-Carmanne (*) traduites par P. Ver Eecke avec une longue introduction et des notes du traducteur. Puisse la multitude de précautions de cet érudit face aux références multiples citées et par lui manifestement vérifiées engager notre lecteur à une prudente et saine attitude en matière de recherches historiques ou d'affirmations dans ce domaine. Mieux vaut retourner aux sources, les étudier, les comparer et les critiquer que de se fier d'une manière ingénue à X qui prend ses connaissances chez Y, lui-même d'après une traduction de ... Dans cet ouvrage sur π si riche en notices historiques il nous a semblé utile qu'au moins une fois ces choses soient dites.

Mais revenons à Archimède.

Qui était-il donc ? Quelle fut son œuvre ? Depuis un an, j'ai posé cette question cent fois à des amis, des étudiants, des ingénieurs, des professeurs. Les réponses les plus souvent obtenues sont : un mathématicien, un ingénieur ou un physicien, un patriote. Très souvent les précisions apportées relèvent plus du folklore ou de la légende que de la réalité historique. Etudions rapidement si vous voulez ces trois types de réponses qui recouvrent bien le génie d'Archimède.

Le mathématicien a laissé nombre d'études qui nous sont parvenues telles : "De l'Equilibre des plans"... "Sur la Sphère et le Cylindre"... "L'Arénaire", où Archimède expose un système de numération des grands nombres (calcul des grains de sable pouvant être enfermés dans la Sphère du Monde ; mais calculs limités à un ensemble fini), le "Traité de la méthode" (texte retrouvé en 1906 où Archimède communique à Eratosthène comment il conduit ses recherches ; ce palimpseste découvert parmi les manuscrits du Patriarcat grec de Jérusalem, reconnu puis traduit par Heiberg comme fragment de l'œuvre d'Archimède, contient la majeure partie du texte grec sur ce Traité de la méthode), "Des corps flottants" où apparaît le très célèbre "Principe d'Archimède" et qui peut toujours être considéré comme le manuel de base de tout ingénieur naval, et essentiellement pour ce qui nous intéresse "La mesure du cercle" (voir suite) où Archimède exhibe l'encadrement célèbre $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Il serait téméraire cependant de vouloir absolument séparer les divers aspects de ce génie, ici les Mathématiques, là la Physique,... C'est bien par exemple le Physicien, le Mécanicien parfaitement au courant des lois du levier connues depuis Aristote et de celles de la balance, qui fournit au mathématicien ses plus belles intuitions qui feront l'objet ensuite de démonstrations rigoureuses ; tout corps pesant a un centre de gravité où la masse complète du corps est supposée concentrée et la détermination du dit centre pour des corps homogènes de formes diverses (segments de paraboles, sphère, sphéroïdes (ellipsoïdes de révolution) polygones simples, cylindres,...) ne sera pas un des moindres titres de gloire d'Archimède.

Mais celui qui a excellé dans l'étude des figures et qui dit y avoir trouvé "des propriétés inhérentes à leur nature, y existant de tout temps et cependant ignorées de ceux qui m'ont précédé" a aussi exercé son génie en bien d'autres domaines plus concrets.

Plutarque (I^er siècle après J.-C.) nous dit dans "La vie des hommes illustres" qu'à la demande du roi Hiéron, Archimède déplace sur le sol à l'aide d'une simple machine à plusieurs poulies une galère lourdement chargée et que le roi émerveillé lui demande alors de construire de nombreux engins d'attaque et de défense. Parlons donc du patriote qui réussit à repousser pendant plus de trois années les attaques de Marcellus. Nous y retrouverons l'ingénieur (mot à prendre au sens militaire ; ainsi furent Vauban,...).

L'ingénieur en chef de Syracuse sut en effet merveilleusement défendre sa ville assaillie par les Romains (2ème guerre punique). Divers historiens : Polybe (II^e siècle avant J.-C.), Tite-Live (I^er siècle avant J.-C.) ou Plutarque (I^er siècle après J.-C.), nous rapportent (voir Ver Eecke qui nous fournit des extraits significatifs de ces auteurs) avec une grande précision les inventions toujours renouvelées d'Archimède : balistes ou catapultes permettant aux Syracusains de "bombarder" la flotte ennemie depuis le haut des murailles, mains de fer attachées à une chaîne et qui jetées sur les navires ennemis les saisissent alors par la proue, les élèvent à la verticale en utilisant un levier et un énorme contrepoids pour les laisser brutalement retomber,...

Il s'agit, observons-le, de textes postérieurs à Archimède d'au moins trois siècles !

Mais que penser alors de cette "histoire" des miroirs ardents qui ont ou auraient permis à Archimède d'incendier à distance la flotte de Marcellus ? Polybe qui a pu connaître quelques contemporains du siège de Syracuse est muet sur ce sujet. De même Tite-Live et Plutarque. Il faut attendre Lucien de Samosate (II^e siècle après J.-C.) pour qu'il en soit fait — et non explicitement — mention. Depuis bien des travaux ont été faits sur ce sujet, bien des écrits publiés. Descartes en 1630, puis en 1637, fustige les "demi-savants en l'optique" capables de croire en ces fables. Mais Buffon réussit en 1747 grâce à un miroir composé de 138 petites glaces à enflammer des pièces de bois situées à bonne distance. D.L. Simms, en 1977 [SIMM], avec des preuves techniques irréfutables "prouve" l'impossibilité de ces incendies commandés à distance par utilisation de miroirs et ipso facto prouve l'impossibilité de l'expérience effectivement réalisée par Buffon ! Quant à Pierre Thuillier [THU], en nous proposant une étude historique complète (et récente : 1979) et en fustigeant Simms,... il nous semble bien prêt lui aussi à parler de ces "demi-savants" si chers à Descartes et de reprendre à son compte peut-être la réponse de l'historien Anglais Gibbon (1776) : "Puisque la chose est possible, je préfère encore accorder cette habileté technique aux plus grands mathématiciens de l'antiquité plutôt qu'à attribuer le mérite de ces histoires à l'imagination dévergondée d'un moine ou d'un sophiste."

Alors qui es-tu Archimède ? Est-ce bien toi l'inventeur de l'appareil que l'on appelle encore vis d'Archimède et qui permettait aux Egyptiens de faire monter l'eau du Nil ? Est-il vrai qu'à la suite d'une découverte célèbre qui porte encore le nom de "Principe d'Archimède" tu courais à moitié habillé dans les rues de la ville en criant "Eurêka, eurêka !" ? Etais-tu bien parent du roi Hiéron ? As-tu incendié la flotte de Marcellus ?...

Je ne répondrai pas : "Que m'importe !"

Non, mais les écrits mathématiques qui nous sont heureusement parvenus témoignant magistralement d'un génie exceptionnel. Le "Traité des corps flottants" ("Les grandeurs plus denses qu'un fluide abandonnées dans ce fluide sont portées vers le bas jusqu'à ce qu'elles soient au fond ; et elles sont allégées, dans le fluide, d'un poids du volume de fluide équivalent au volume de la grandeur solide", Proposition VII, Livre I) m'importe plus que l'historiette qui l'accompagne. La capacité et la compétence prouvées d'Archimède rendent souvent crédibles pour l'époque les exploits qu'on lui attribue et qui assurément font l'objet de surenchères.

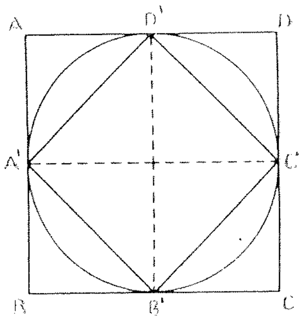
Des doutes subsisteront vraisemblablement toujours quant aux événements divers tous probables rapidement décrits ici. Mais l'œuvre écrite qui nous est parvenue suffit à installer Archimède sur le plus haut trône : oui, un très, très grand savant. Et le consensus général quant au caractère exceptionnel de l'œuvre d'Archimède, aussi ancien que sa légende, ne semble pas devoir souffrir d'attaques.

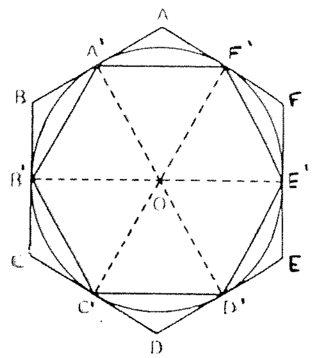
LES TRAVAUX D'ARCHIMEDE

Nous ignorons comment les premiers mathématiciens grecs ont procédé pour encadrer le nombre π. C'est dans un traité d'Archimède : " la mesure du cercle" que nous trouvons les premières démonstrations relatives au calcul effectif de ce nombre.

Nous ne possédons d'ailleurs de ce traité qu'une copie relativement tardive et la pensée du savant syracusain nous est certainement parvenue déformée.

Pour calculer la longueur c d'un cercle de diamètre unité, Archimède eut l'idée d'inscrire et de circonscrire au cercle les polygones réguliers. Les périmètres de ces polygones donnent des approximations de c.

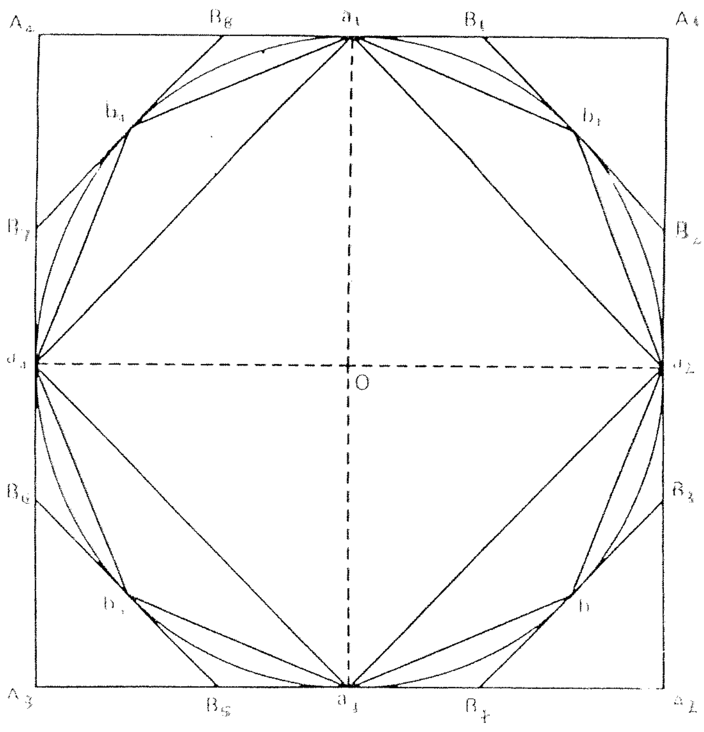




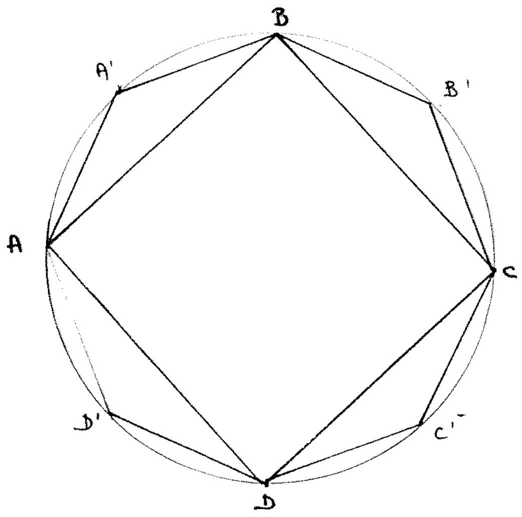
Le carré A'B'C'D' est inscrit dans le cercle : son périmètre est inférieur à c. Le carré ABCD est exinscrit au cercle : son périmètre est supérieur à c.

L'hexagone A'B'C'D'E'F' est inscrit dans le cercle : son périmètre est inférieur à c. L'hexagone ABCDEF est exinscrit au cercle : son périmètre est supérieur à c.

Archimède exploite cette idée pour construire deux suites de nombres, l'une constituée des périmètres de polygones inscrits dans le cercle, l'autre constituée des périmètres de polygones exinscrits au cercle. Les deux suites se rapprochent de la longueur c du cercle.

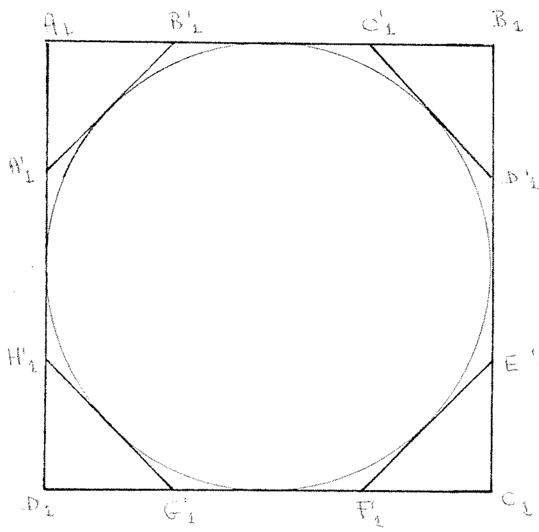


Il construit un carré inscrit dans le cercle et un carré exinscrit au cercle et à l'étape suivante il double le nombre de côtés afin d'obtenir deux octogones, l'un inscrit l'autre exinscrit au cercle.



Construire un cercle de diamètre unité égale à 20 cm. Inscrire dans le cercle le carré ABCD. Mesurer un côté du carré, en déduire le périmètre P_4 du carré. Construire A',B',C',D', milieux respectifs des arcs $\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CD}$, $\widehat{DA}$. Dessiner l'octogone régulier AA' BB' CC' DD'. Mesurer un côté de l'octogone, en déduire son périmètre P_8.

Réitérer la construction et dessiner le polygone régulier à 16 côtés inscrit dans le cercle dont l'un des sommets est A. Evaluer son périmètre P_{16}. De la même manière après avoir effectué la construction, évaluer P_{32}. Constater que : $P_4 < P_8 < P_{16} < P_{32}$. On pourrait, si la lisibilité de la figure le permettait, réitérer l'opération : on construit une suite de nombres croissante, mais dont tous les termes sont inférieurs à c.



Construire un cercle de diamètre unité égale à 20 cm. Circonscrire au cercle le carré $A_1B_1C_1D_1$. Remarquons que les quatre côtés de ce carré sont les tangentes au cercle aux points A,B,C,D de la figure précédente. Mesurer un côté du carré, en déduire son périmètre q_4. Construire les tangentes au cercle aux points A', B', C', D'. Dessiner l'octogone régulier A'_1, B'_1, C'_1, D'_1, E'_1, F'_1, G'_1, H'_1 circonscrit au cercle. Mesurer un de ses côtés. En déduire son périmètre q_8.

Réitérer la construction deux fois, afin d'évaluer q_{16} et q_{32}. Constater que : $q_4 > q_8 > q_{16} > q_{32}$. On construit ainsi une suite décroissante, dont tous les termes sont supérieurs à c.

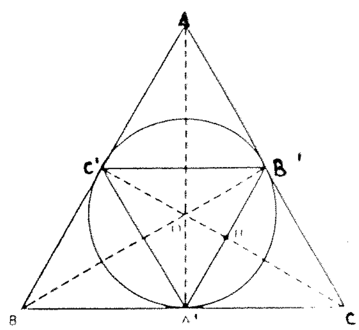
Il est possible par des moyens moins expérimentaux de calculer les périmètres de ces polygones, mais cela nécessite des connaissances de géométrie sur les triangles qu'il est hors de propos d'exposer ici.
Donnons cependant les résultats obtenus.

Nombre des côtés	Périmètre des polygones inscrits	Périmètre des polygones circonscrits
8	3,06146	3,31370
16	3,12144	3,18259
32	3,13654	3,15172
64	3,14033	3,14411
128	3,14127	3,14222
256	3,14151	3,14175
512	3,14157	3,14162
1024	3,14159	3,14160

Les calculs effectués sur HP 97 nous obligent à nous arrêter à ce rang ; en effet, nous trouvons $P_{2048} > P_{1024}$. Cette anomalie est due à un usage hors limite, à des effets de bords, des débordements de capacité : les erreurs font boule de neige par itération.

On aurait pu faire le même raisonnement en partant, comme Archimède, d'un triangle équilatéral inscrit et d'un autre exinscrit. On aurait trouvé :

Nombre des côtés	Périmètre des polygones inscrits	Périmètre des polygones circonscrits	Moyenne arithmétique
3	2,5980762	5,1961524	3,8971143
6	3,0000000	3,4641016	3,2320508
12	3,1058265	3,2151900	3,1606082
24	3,1326325	3,1596673	3,1461499
48	3,1393546	3,1460919	3,1427232
96	3,1410369	3,1427201	3,1418785
192	3,1414569	3,1418776	3,1416672
384	3,1415625	3,1416675	3,1416150
768	3,1415883	3,1416153	3,1416018
1536	3,1415918	3,1415946	3,1415932
....	....	....	....
En continuant indéfiniment	3,1415927	3,1415927	3,1415927



Archimède, dans le texte que nous avons, poussa les calculs jusqu'à la sixième ligne et, d'après Héron d'Alexandrie, il alla même plus loin.

DESCARTES
(1596-1650)

Né à La Haye, en Touraine, le 31 mars 1596, Descartes est sans doute le philosophe français le plus célèbre.

Après ses études au collège royal de La Flèche, puis à Poitiers où il obtient une licence de droit en 1616, il choisit le métier des armes, tout d'abord en Hollande, puis chez le Duc de Bavière jusqu'en 1620. Rentré en France en 1625, il y rédige le début des "Règles pour la direction de l'esprit", recueil de préceptes assez généraux par lesquels "... on sera certain de ne jamais prendre le faux pour le vrai ... (Règle IV)" et dans lequel Descartes rêve d'une sorte de science universelle dont il convient de découvrir les lois : "Toutes les sciences ne sont rien d'autre que la sagesse humaine, qui demeure toujours une et toujours la même, si différents que soient les objets auxquels elle s'applique ... (Règle I)".

Cette phrase justifie, à côté de ses travaux philosophiques trop connus pour qu'on y revienne ici, la parution de travaux scientifiques comme la Dioptrique, où il expose la loi sur les sinus des angles d'incidence et de réfraction des rayons incidents et réfractés. En Astronomie, il propose l'hypothèse des "tourbillons" pour justifier les mouvements des planètes, hypothèse qui sera contestée, puis battue en brèche moins d'un siècle plus tard par les partisans de Newton. Descartes, en effet, n'admettait pas la notion d'action à distance et ne supposait que des actions de contact, de chocs ou de pression.

En Biologie, il admet la circulation sanguine, mais refuse le rôle des contractions cardiaques, préférant penser que le mouvement sanguin est dû à l'ébullition du sang lors de son passage dans le cœur.

Mais revenons aux Mathématiques : en 1631 il publie sa "Géométrie". Il y définit ce que nous appelons les coordonnées cartésiennes d'un point :

"... Je choisis une ligne droite comme AB, pour rapporter à ses divers points tous ceux de cette ligne courbe EC ; et en cette ligne AB je choisis un point A, pour commencer par lui ce calcul. Je dis que je choisis et l'un et l'autre, à cause qu'il est libre de les prendre tels qu'on veut ; car encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'équation plus courte et plus aisée, toutefois en quelle façon qu'on les prenne, on peut toujours faire que la ligne paroisse de même genre, ainsi qu'il est aisé de le démontrer. Après cela, prenant un point à discrétion sur la courbe, comme C, sur lequel je suppose que l'instrument qui sert à le décrire est appliqué, je tire de ce point C la ligne CB parallèle à GA, et pour ce que CB et BA sont deux quantités indéterminées et inconnues, je les nomme l'une y et l'autre x ; mais afin de trouver le rapport de l'une à l'autre, je considère aussi les quantités connues qui déterminent la description de cette ligne courbe comme GA que je nomme a, KL que je nomme b ... et ainsi l'équation qu'il fallait trouver est $y^2 = cy - \frac{cx}{b} y + ay - ac$ dans laquelle on reconnaît que la ligne EC est du premier genre, comme en effet elle n'est autre qu'une hyperbole".

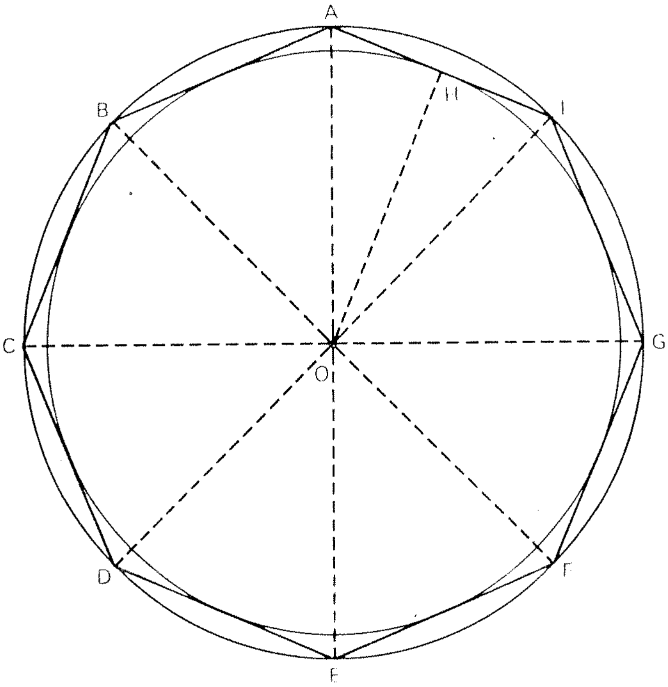
Notons au passage que c'est à Descartes que l'on doit l'habitude de représenter les quantités connues par les premières lettres de l'alphabet a,b,c,d et les inconnues par x,y,z. Notons aussi que Descartes n'attache pas une importance extrême à cette représentation : il n'y voit qu'un procédé opératoire pratique permettant de ramener à des calculs algébriques la géométrie des Anciens. Au reste, il n'insiste guère et passe immédiatement à la résolution du problème qui le préoccupe.

En ce qui concerne π et les problèmes de quadrature ou de rectification du cercle on trouvera dans ses papiers, après son décès, la méthode suivante, appelée "méthode des isopérimètres" : elle consiste à déterminer le rayon d'un cercle dont le périmètre est fixé à l'avance. Pour cela il part d'un carré, cherche le rayon du cercle inscrit dans l'octogone régulier de même périmètre puis recommence en doublant le nombre des côtés.

MÉTHODE DES ISOPÉRIMÈTRES

Cette méthode, attribuée à Descartes, est plus simple et plus précise que la précédente. Elle s'inspire de la même idée : inscrire et circonscrire des polygones réguliers à un cercle, mais cette fois-ci, les polygones ont un **périmètre constant** p (on choisira $p = 2$).

Il s'agit donc plutôt d'inscrire et de circonscrire des cercles à un polygone régulier à n côtés de périmètre donné $p = 2$.



Appelons a_n le rayon du cercle inscrit et r_n le rayon du cercle circonscrit au polygone régulier à n côtés.

Dans le cas de cette figure, $a_8 = \text{OH}$ et $r_8 = \text{OA}$ $\left(\text{AB} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}\right)$.

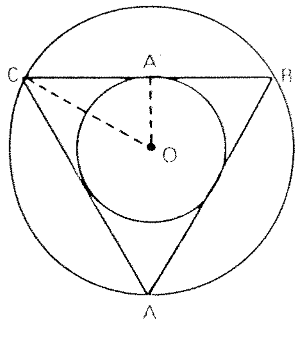
Les longueurs des deux cercles encadrent le périmètre p du polygone d'où :

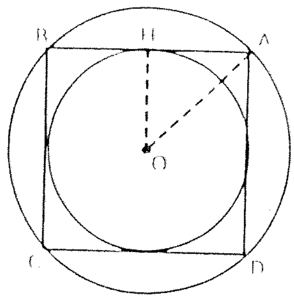
$$2\pi a_n < p < 2\pi r_n \quad \text{et lorsque} \quad p = 2 \ : \ a_n < \frac{1}{\pi} < r_n$$

$$\text{ou bien : } \frac{1}{r_n} < \pi < \frac{1}{a_n}$$

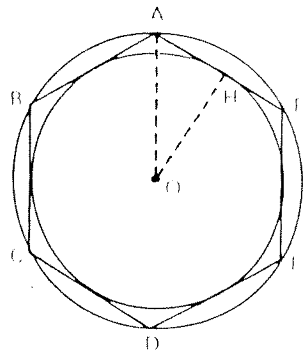
Ici aussi, l'encadrement est d'autant plus fin que n est plus grand.

Pour les exemples qui suivent, on choisit p = 2
et l'unité égale à 20 cm.
Tracer un triangle équilatéral de périmètre p = 2.
Dessiner les cercles inscrit et circonscrit au triangle.
Mesurer a_3 et r_3.





De la même manière tracer un carré, un hexagone régulier, un octogone régulier, un polygone régulier à 16 côtés de périmètre p = 2. Evaluer a_4, r_4, a_6, r_6, a_8, r_8, a_{16}, r_{16}.
Constater que l'encadrement obtenu pour π est de plus en plus fin.



L'utilisation de connaissances géométriques et d'une calculatrice permet d'établir le tableau suivant :

VALEUR NUMÉRIQUE DE $\frac{1}{\pi}$
DÉDUITE DE LA MÉTHODE DES ISOPÉRIMÈTRES

Polygone	Nombre de côtés	Rayon a_n
P_0	4	0,25
P_1	8	0,301776695..
P_2	16	0,314208718..
P_3	32	0,317286575..
P_4	64	0,318054182..
P_5	128	0,318245969..
P_6	256	0,318293109..
P_7	512	0,318305896..
P_8	1024	0,318308895..
P_9	2048	0,318309656..
P_{10}	4096	0,318309844..

Une des valeurs approchées de $\frac{1}{\pi}$ est 0,318309886..

DEUXIÈME PÉRIODE : L'ANALYSE

Avec l'invention du calcul infinitésimal par Leibniz et Newton durant la seconde moitié du XVII^e siècle, l'étude de π change d'aspect. L'étude géométrique (ou numérique) des polygones a produit l'essentiel de ses résultats, et les raffinements de Snellius ou de Huygens semblent être le maximum que ces méthodes peuvent fournir.

L'analyse, outil nouveau sur lequel s'exercent les plus grands mathématiciens du temps : Pascal, Fermat, Cavalieri, Gregory, etc., va conduire à de nombreuses expressions de π sous forme de séries.

Les premiers travaux dans ce sens sont ceux de John Wallis (1616-1703) qui cherche lui aussi l'aire d'un demi-cercle. A la différence de ses prédécesseurs, il part de l'équation cartésienne du cercle et cherche à en évaluer l'aire en considérant la juxtaposition de petits rectangles. Il obtient ainsi la valeur :

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.....}{1.3.3.5.5.7.7.9.....}$$

expression qui a l'avantage sur celle de Viète de n'utiliser que des opérations rationnelles.

LA DEMARCHE DE WALLIS

John Wallis (1616-1703) tient dans l'histoire des sciences au XVII^e siècle une place importante, surtout parce qu'il contribue au transfert en Grande-Bretagne de la prééminence scientifique dont avait joui l'Italie (avec Galilée (1584-1642), Cavalieri (1598-1647) ...) puis la France avec Viète (1540-1603), avec Descartes (1596-1650) et surtout Fermat (1601-1660), Roberval (1602-1675) et Pascal (1623-1662) auxquels nous joignons le Hollandais Huygens (1629-1695). Après l'ère de Newton (1642-1727), le prééminence retournera sur le continent avec Leibniz (1646-1716), les Bernoulli, Euler, etc.

A l'époque troublée de la guerre civile (1642), suivie de la restauration des Stuart, politique, théologie, sciences interféraient. Chapelain des "têtes rondes", Wallis eut le courage de protester contre l'exécution de Charles I^{er}, ce qui lui valut, après la restauration, de conserver sa charge de professeur à Oxford.

Il s'était fait connaître comme mathématicien en 1642 en décryptant la correspondance diplomatique étrangère, comme l'avait fait Viète en 1590. Fondateur avec son collègue Wren (géomètre, astronome, architecte cité avec éloge par Pascal) de la Royal Society, avec sa prestigieuse publication "Philosophical Transactions", il réorganisa les archives scientifiques détruites par l'incendie de Londres, publia pour ses compatriotes les grandes œuvres classiques de l'antiquité, celles des Arabes du XIII^e siècle ainsi que les travaux de ses précédesseurs. Ces œuvres, ainsi que celles de Wallis lui-même, furent les sources où puisa le génie du jeune Newton.

Malgré la partialité de Wallis pour ses compatriotes, il sut reconnaître la valeur de Leibniz, rival de Newton.

Ce qui caractérise l'école anglaise sous l'impulsion de Wallis, c'est la hardiesse de novateurs plus tentés par l'investigation de méthodes nouvelles que par la rigueur des démonstrations. C'était l'époque des grands défis lancés entre savants et Wallis y intervient avec violence.

Contre Thomas Hobbes (1588-1679), sans juger les doctrines théologiques et politiques qui conduisirent le vieux savant au pied du bûcher en 1660, il est certain que celui qui proclamait avoir résolu *la quadrature du cercle* ne pouvait rivaliser en mathématique avec Wallis. Celui-ci montra les erreurs de Hobbes, mais il faut se souvenir qu'à l'époque l'impossibilité d'une solution algébrique n'était pas démontrée.

Contre Fermat, au contraire, Wallis se montra incapable, comme presque tous les contemporains, de comprendre la vraie nature de la nouvelle "théorie des nombres" de l'illustre toulousain. Mais dans la célèbre dispute de 1658 avec Pascal, il y eut injustice et incompréhension réciproque. On y voit combien les bases de la nouvelle "analyse des infiniment petits" étaient peu claires. Ainsi, en décembre 1658, au sujet des "lignes courbes", Pascal, voulant trancher entre des résultats contradictoires de divers savants (y compris Hobbes), "pour que la chose put être désormais ferme et sans dispute", décida de ne suivre "ni la méthode des mouvements, ni celle des indivisibles", mais "celle des anciens", c'est-à-dire celle d'Archimède. C'est celle que venait d'utiliser Guldin (1577-1643) pour la détermination *des centres de gravité des lignes et surfaces de révolution*. Notons que Pascal annonce qu'il l'utilise "en supposant la quadrature du cercle quand il le faut".

Lorsque Wallis conçoit l'analyse, non plus comme basée sur la géométrie, mais comme traduisant une continuité dans un ensemble de fonctions, quand il utilise des "produits infinis" et des "séries" à une époque où aucune étude sérieuse de la convergence n'était concevable, il s'aventurait dans les voies de l'avenir avec une intuition et une imagination remarquables.

Signalons qu'en dehors de travaux de théologie et de grammaire, il participa à l'étude de la phonétique qui le conduisit à l'acoustique des harmoniques. Il soutint la doctrine de la circulation de William Harvey (1578-1657). L'astronomie lui fit étudier la géométrie sphérique et la projection stéréographique avec sa conservation des angles. En mécanique, il conçoit le principe de la conservation de la "quantité de mouvement" qui sera repris par Newton. Les traités d'arithmétique et d'algèbre innovent en ce qui concerne la résolution approchée d'équations et seront utilisés par Newton, comme Euler développera son étude de l'équation indéterminée $ax + by = c$ en nombres entiers. Wallis entrevoit aussi la représentation géométrique des imaginaires. Il est le premier nommé dans la liste des savants qui étudièrent les fonctions elliptiques (cf. J. Dieudonné, Abrégé d'histoire des Math.)...

Eclipsé par la gloire de Newton, le nom de Wallis reste attaché à une formule et à un type d'intégrales. On sait moins qu'il s'efforça de faire adopter un symbolisme universel pour les sciences ; il nous en reste le signe $\times$ de multiplication, les signes $<$ et $>$ d'inégalité (dont le dessin a peu varié), la notation n^k pour le nombre de combinaisons (devenu C_n^k puis $\binom{n}{k}$) et surtout le signe ∞ de l'infini.

John Wallis, né à Ashford en 1616, fut un esprit brillant porté à des disciplines diverses. Outre les mathématiques, il étudia la philologie, la philosophie, la théologie et soutint une thèse de doctorat en médecine.

Il fut professeur à Oxford après avoir été élève de Cambridge. On lui doit nombre de découvertes mathématiques, mais son nom est surtout resté attaché à la formule permettant de calculer π qu'il a présentée dans son ouvrage *Arithmetica infinitorum* (L'Arithmétique des Infinis), publié en 1655.

Cette formule est la suivante :

$$\frac{2.2.4.4.6.6.8.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7.9\ldots} = \frac{\pi}{2}.$$

On prend autant de facteurs au numérateur qu'au dénominateur. Evidemment, plus grand est ce nombre de facteurs et meilleure est l'approximation, ainsi qu'en témoigne le tableau suivant, dont les résultats ont été obtenus avec 9 chiffres décimaux arrondis, sur une HP29C.

m	$W_m = \dfrac{2.2.4.4\ldots(2m)(2m)}{1.3.3.5\ldots(2m-1)(2m+1)}$
1	1,333 333 333
2	1,422 222 222
3	1,462 857 143
4	1,486 077 098
5	1,501 087 978
6	1,511 585 097
7	1,519 336 815
8	1,525 294 999
9	1,530 017 274
10	1,533 851 904
20	1,551 758 479
30	1,557 947 140
40	1,561 130 158
50	1,563 039 443
100	1,566 893 739

Formule de Wallis

Rappelons que $\frac{\pi}{2} \simeq 1,570\,796\,327\ldots$

On voit que cette formule est peu précise : on ne s'étonnera pas de ce que sa découverte n'ait produit aucun progrès notable dans le calcul pratique du nombre π.

LEIBNIZ
(1646-1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz est né à Leipzig en 1646. Le milieu universitaire aisé où il vit facilite de solides études.

Les travaux de F. Bacon, de Képler, de Galilée et de Descartes lui sont familiers. Un séjour à Iéna le met au contact des mathématiques de haut niveau.

En 1666, le titre de docteur en droit ne lui est refusé qu'à cause de son âge. Dès ce moment, il publie des ouvrages dans des domaines variés :

— mathématiques : "De arte combinatoria", où s'affirment déjà les préoccupations qui le mèneront à ses plus belles découvertes ;
— mécanique : études sur le mouvement, présentées à la Royal Society et à l'Académie des Sciences Française ;
— théologie.

Son souverain le charge de missions diplomatiques :

A Paris, en 1672, il suggère à Louis XIV la conquête de l'Egypte, plus sans doute pour éloigner de l'Europe Centrale les forces turques, que pour faire rêver le Roi-Soleil aux empires du Soleil Levant.

Plus tard, il prend contact avec Charles XII, puis avec Pierre-le-Grand. Entre temps, il s'est occupé de Fondations scientifiques : une Société des Sciences à Berlin (1700). Il voit de temps à autre le physicien R. Boyle, il sait ainsi ce qui se dit à Londres, et élabore une théorie proche de celle de Newton. A Paris, les neveux de Pascal lui montrent les notes de l'oncle décédé, où il aurait pu puiser des idées conduisant à la notion de différentielle.

Leibniz n'est pas pour autant un plagiaire ; on peut regretter que les questions de priorité pour certaines découvertes aient gâté la vie et la santé de Newton et de Leibniz.

Quelle qu'ait été l'importance en quantité et en qualité de l'œuvre philosophique et théologique de Leibniz, il n'en sera pas question ici, si ce n'est pour dire que moins d'un siècle auparavant, on tenait encore des raisonnements comme : "Ce que fait Dieu est parfait, et vous voudriez qu'il y ait des taches sur le soleil ?" ou bien "Ce que fait Dieu est parfait, le mouvement parfait est le mouvement circulaire, les trajectoires des planètes ne peuvent être que des cercles". Pour Leibniz, qui n'en est plus là, Dieu néanmoins a "choisi celui des mondes possibles qui est le plus parfait".

Il n'est pas impensable que son idée de Dieu l'ait accompagné dans l'emploi qu'il fait de l'infini. Les infiniment petits qu'il considère sont des "fictions", "ne pouvant être présentées dans la nature des choses, sans avoir rien d'absurde ou de contradictoire".

Leibniz dépasse Cavalieri, avec ses indivisibles, Wallis, avec ses recours à l'infini. Pour lui, les passages à la limite sont chose courante, l'infini entre dans les calculs.

Il n'a pas, bien sûr, tout créé, mais il a marqué tous les domaines des mathématiques de son empreinte. Avant lui s'opposaient le nombre et l'étendue. Il met en évidence leur parenté grâce aux extensions de la notion de nombre. Après les entiers, les nombres qualifiés (nous disons Z), les nombres rompus (... Q), les nombres sourds (... R), les nombres imaginaires, qu'il n'a pas non plus créés, mais par lesquels il étonne Huygens avec :

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$$

Il découvre des analogies entre les opérations d'addition et de multiplication, parlant de leur "similitude" (où nous disons "homomorphie"). Ses notations (dx, dy, le signe somme $\int$) lui ont survécu.

Les mathématiques pour lui traitent des homogènes qui s'occupent des positions : l'*Analysis situs* dans la qualité, l'Algèbre et l'Arithmétique dans la quantité, et des homogones relatives aux transitions, comme la géométrie infinitésimale.

Pour notre sujet,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

qu'il serait juste d'appeler série de Gregory-Leibniz.

Les sociétés savantes de Londres et de Berlin ont ignoré sa mort. A Paris, au contraire, Fontenelle fit son éloge.

L'AIGUILLE DE BUFFON

Georges Louis Leclerc, comte de Buffon (1707-1788) est connu essentiellement pour son œuvre de naturaliste. L'"Histoire naturelle générale et particulière" (15 volumes), l'"Histoire naturelle des oiseaux" (9 volumes), le "Supplément à l'histoire naturelle" (7 volumes), l'"Histoire naturelle des minéraux et traité de l'aimant" (5 volumes) lui vaudront la plus grande célébrité. Georges Louis Leclerc deviendra, par la grâce de Louis XV, comte de Buffon. Cet excellent administrateur (Buffon enrichira et agrandira le jardin du Roi), membre de l'Académie Française et de toutes les grandes académies européennes, fut aussi philosophe et mathématicien.

Ses œuvres mathématiques comprennent :
— une traduction de la *Méthode des fluxions et des suites infinies* de Newton, augmentée d'une *Préface* de 26 pages ;
— trois notes critiquant une proposition de Clairaut visant à ajouter au terme en $1/x^2$ de l'attraction de Newton un terme en $1/x^4$;
— *Des probabilités de la durée de la vie* (175 pages) ;
— *Etat général des naissances, des mariages et des morts.*

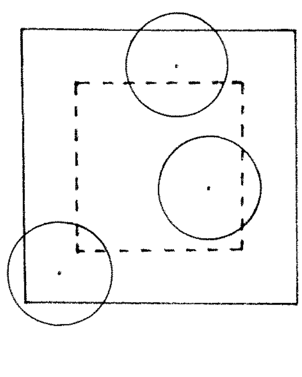
C'est dans son "Essai d'arithmétique morale" publié en 1777 [BUF] que l'on peut trouver le "Mémoire sur le jeu de franc carreau" qui contient le fameux problème de l'aiguille si souvent cité et pourtant si peu lu ...

S'interrogera-t-on sur le plus grand plaisir rencontré en découvrant ce texte : vient-il du ton, du style de l'auteur ou bien de la démarche mathématique, de l'éventail des cas étudiés ? Nous ne saurions, quant à nous, le dire. Mais laissons la parole à M. de Buffon.

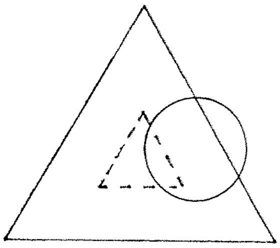
"L'Analyse est le seul instrument dont on se soit servi jusqu'à ce jour dans la science des probabilités, pour déterminer et fixer les rapports du hasard ; la Géométrie paraissait peu propre à un ouvrage aussi délié ; cependant si l'on y regarde de près, il sera facile de reconnaître que cet avantage de l'Analyse sur la Géométrie est tout à fait accidentel, et que le hasard selon qu'il est modifié et conditionné, se trouve du ressort de la géométrie aussi bien que de celui de l'analyse ; pour s'en assurer, il suffira de faire attention que les jeux et les questions de conjecture ne roulent ordinairement que sur les rapports de quantités discrètes ; l'esprit humain plus familier avec les nombres qu'avec les mesures de l'étendue les a toujours préférés ; les jeux en sont une preuve, car leurs lois sont une arithmétique continuelle ; pour mettre donc la Géométrie en possession de ses droits sur la science du hasard, il ne s'agit que d'inventer des jeux qui roulent sur l'étendue et sur ses rapports, ou calculer le petit nombre de ceux de cette nature qui sont déjà trouvés ; le jeu du franc-carreau peut nous servir d'exemple : voici ses conditions qui sont fort simples.

"Dans une chambre parquetée ou pavée de carreaux égaux, d'une figure quelconque, on jette en l'air un écu ; l'un des joueurs parie que cet écu après sa chute se trouvera à franc-carreau, c'est-à-dire sur un seul carreau ; le second parie que cet écu se trouvera sur deux carreaux, c'est-à-dire qu'il couvrira un des joints qui les séparent ; un troisième joueur parie que l'écu se trouvera sur deux joints ; un quatrième parie que l'écu se trouvera sur trois, quatre ou six joints : on demande le sort de chacun de ces joueurs.

"Je cherche d'abord le sort du premier joueur et du second : pour le trouver, j'inscris dans l'un des carreaux une figure semblable, éloignée des côtés du carreau, de la longueur du demi-diamètre de l'écu ; le sort du premier joueur sera à celui du second comme la superficie de la couronne circonscrite est à la superficie de la figure inscrite : cela peut se démontrer aisément, car tant que le centre de l'écu est dans la figure inscrite, cet écu ne peut être que sur un seul carreau, puisque par construction cette figure inscrite est partout éloignée du contour du carreau, d'une distance égale au rayon de l'écu ; et, au contraire, dès que le centre de l'écu tombe au dehors de la figure inscrite, l'écu est nécessairement sur deux ou plusieurs carreaux, puisque alors son rayon est plus grand que la distance du contour de cette figure inscrite au contour du carreau ; or, tous les points où peut tomber ce centre de l'écu sont représentés dans le premier cas par la superficie de la couronne qui fait le reste du carreau ; donc le sort du premier joueur est au sort du second, comme cette première superficie est à la seconde : ainsi pour rendre égal le sort de ces deux joueurs, il faut que la superficie de la figure inscrite soit égale à celle de la couronne, ou, ce qui est la même chose, qu'elle soit la moitié de la surface totale du carreau.



"Je me suis amusé à en faire le calcul, et j'ai trouvé que pour jouer à jeu égal sur des carreaux carrés, le côté du carreau devait être au diamètre de l'écu, comme $1 : 1 - \sqrt{\frac{1}{2}}$; c'est-à-dire à peu près trois et demie fois plus grand que le diamètre de la pièce avec laquelle on joue.



"Pour jouer sur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme

$$1 : \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{3+3\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

c'est-à-dire presque six fois plus grand que le diamètre de la pièce.

" Sur des carreaux en losange, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme

$$1 : \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$$

c'est-à-dire presque quatre fois plus grand.

"Enfin, sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme

$$1 : \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1+\sqrt{\frac{1}{2}}} ,$$

c'est-à-dire presque double.

" Je n'ai pas fait le calcul pour d'autres figures, parce que celles-ci sont les seules dont on puisse remplir un espace sans y laisser des intervalles d'autres figures ; et je n'ai pas cru qu'il fût nécessaire d'avertir que les joints des carreaux ayant quelque largeur, ils donnent de l'avantage au joueur qui parie pour le joint, et que par conséquent l'on fera bien, pour rendre le jeu encore plus égal, de donner aux carreaux carrés un peu plus de trois et demie fois, aux triangulaires six fois, aux losanges quatre fois, et aux hexagones deux fois la longueur du diamètre de la pièce avec laquelle on joue.

" Je cherche maintenant le sort du troisième joueur qui parie que l'écu se trouvera sur deux joints ; et, pour le trouver, j'inscris dans l'un des carreaux une figure semblable, comme j'ai déjà fait ; ensuite je prolonge les côtés de cette figure inscrite jusqu'à ce qu'ils rencontrent ceux du carreau, le sort du troisième joueur sera à celui de son adversaire, comme la somme des espaces compris entre le prolongement de ces lignes et les côtés du carreau est au reste de la surface du carreau. Ceci n'a besoin, pour être pleinement démontré, que d'être bien entendu.

"J'ai fait aussi le calcul de ce cas, et j'ai trouvé que pour jouer à jeu égal sur des carreaux carrés, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire plus grand d'un peu moins d'un tiers.

"Sur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{1}{2}$, c'est-à-dire double.

"Sur des carreaux en losange, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme

$$1 : \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

c'est-à-dire plus grand d'environ deux cinquièmes.

"Sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{1}{2}\sqrt{3}$, c'est-à-dire plus grand d'un demi-quart.

"Maintenant, le quatrième joueur parie que, sur des carreaux triangulaires équilatéraux, l'écu se trouvera sur six joints : que sur des carreaux carrés ou en losanges, il se trouvera sur quatre joints, et sur des carreaux hexagones, il se trouvera sur trois joints ; pour déterminer son sort, je décris de la pointe d'un angle du carreau, un cercle égal à l'écu, et je dis que sur des carreaux triangulaires équilatéraux, son sort sera à celui de son adversaire comme la moitié de la superficie de ce cercle est à celle du reste du carreau ; que sur des carreaux carrés ou en losanges, son sort sera à celui de l'autre comme la superficie entière du cercle est à celle du reste du carreau ; et que sur des carreaux hexagones, son sort sera à celui de son adversaire comme le double de cette superficie du cercle est au reste du carreau. En supposant donc que la circonférence du cercle est au diamètre, comme 22 sont à 7 ; on trouvera que pour jouer à jeu égal sur des carreaux triangulaires équilatéraux, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce comme $1 : \frac{\sqrt{7\sqrt{3}}}{\sqrt{22}}$, c'est-à-dire plus grand d'un peu plus d'un quart.

"Sur des carreaux en losanges, le sort sera le même que sur des carreaux triangulaires équilatéraux.

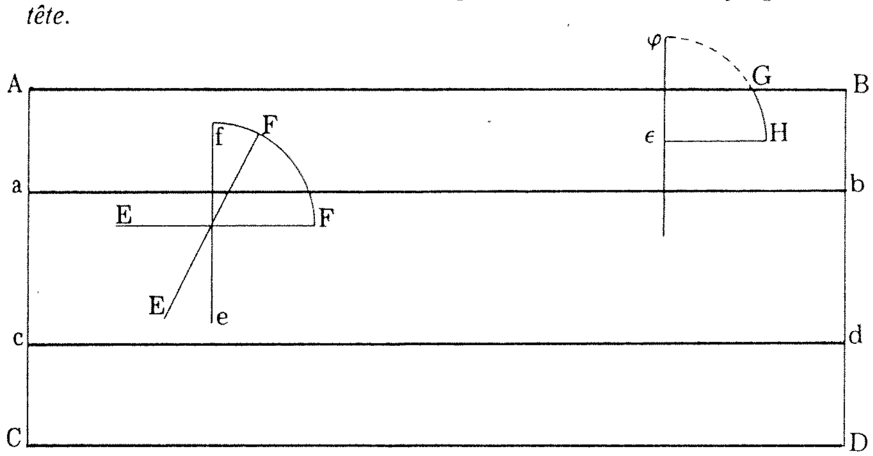
"Sur des carreaux carrés, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \sqrt{\frac{7}{11}}$, c'est-à-dire plus grand d'environ un cinquième.

"Sur des carreaux hexagones, le côté du carreau doit être au diamètre de la pièce, comme $1 : \frac{\sqrt{21\sqrt{3}}}{\sqrt{44}}$, c'est-à-dire plus grand d'environ un treizième.

"J'omets ici la solution de plusieurs autres cas, comme lorsque l'un des joueurs parie que l'écu ne tombera que sur un joint ou sur deux, sur trois, etc. Ils n'ont rien de plus difficile que les précédents ; et d'ailleurs on joue rarement ce jeu avec d'autres conditions que celles dont nous avons fait mention.

" Mais si au lieu de jeter en l'air une pièce ronde, comme un écu, on jetait une pièce d'une autre figure comme une pistole d'Espagne carrée, ou une aiguille, une baguette, etc., le problème demanderait un peu plus de géométrie, quoiqu'en général il fût toujours possible d'en donner la solution par des comparaisons d'espaces, comme nous allons le démontrer.

" Je suppose que dans une chambre, dont le parquet est simplement divisé par des joints parallèles, on jette en l'air une baguette, et que l'un des joueurs parie que la baguette ne croisera aucune des parallèles du parquet, et que l'autre au contraire parie que la baguette croisera quelques-unes de ces parallèles ; on demande le sort de ces deux joueurs. *On peut jouer ce jeu sur un damier avec une aiguille à coudre ou une épingle sans tête.*



C'est dans la seconde partie du texte de Buffon que l'on trouve ce célèbre problème : il s'agit donc de lancer une aiguille (ou "baguette") de longueur 2b sur un parquet formé de lames de largeur 2a et d'estimer la probabilité pour que l'aiguille coupe l'une des raies de ce parquet.

On voit que Buffon montre que les chances d'intersection ou non de l'aiguille avec une raie de parquet sont égales si

$$``a = \frac{bb}{\frac{1}{2}c}"$$

(c désignant le quart de circonférence du cercle de rayon b).
En d'autres termes, puisque $c = \frac{\pi}{2} . b$:

La probabilité d'intersection est 1/2 si $a = \frac{4b}{\pi}$.

Il est aisé de voir que pour une longueur de l'aiguille égale à 2b (avec $b \leq a$*) la probabilité d'intersection est* $\frac{2b}{\pi a}$.

" Ces exemples suffisent pour donner une idée des jeux que l'on peut imaginer sur les rapports de l'étendue. L'on pourrait se proposer plusieurs autres questions de cette espèce, qui ne laisseraient pas d'être curieuses et même utiles : si l'on demandait, par exemple, combien l'on risque à passer une rivière sur une planche plus ou moins étroite ; quelle doit être la peur que l'on doit avoir de la foudre ou de la chute d'une bombe, et nombre d'autres problèmes de conjecture, où l'on ne doit considérer que le rapport de l'étendue, et qui par conséquent appartiennent à la géométrie tout autant qu'à l'analyse . "

LA CHASSE AUX DÉCIMALES

A ce jour (25.2.80) le développement décimal du nombre π est connu avec la précision assez étonnante de 1 000 000 de décimales. Par ailleurs, la meilleure précision des mesures, en physique, n'excède pas 10^{-12}, il est donc évident qu'une telle précision, pour π, n'a pas pour objet l'exploitation physique. On peut donc légitimement se poser la question de l'intérêt d'une telle quête et des motivations des "chasseurs de décimales".

Durant la première période, géométrique, il s'agit de préciser la valeur de π, disons par désir de connaissance. Une fois démontrée la constance du rapport du périmètre au diamètre on conçoit aisément que la détermination effective de ce "rapport" devenait un objectif de choix.

A ce propos, signalons que si les sujets d'étude des mathématiciens ont changé, les réflexes demeurent les mêmes qu'il y a trois mille ans et que les travaux actuels ne manquent pas dans ce sens.

Ainsi, en algèbre, de nombreux mathématiciens "chassent"* les groupes sporadiques avec une ardeur étonnante. Il est vrai que c'est une question importante de la théorie des groupes finis.

** Cette chasse est fermée depuis 1980 (voir l'article de G. Glaeser dans l'Ouvert n° 24 et celui de Borel dans l' Ouvert n° 25).*

Revenons à π. Une des raisons de la quête aux décimales était sans doute l'espoir de la découverte d'une périodicité dans son développement. Ajoutons également que les sujets de recherche étaient peu nombreux et que la découverte d'une nouvelle méthode (celle d'Archimède) poussait les mathématiciens à en tirer la subtantifique moëlle. Ainsi, en raffinant l'estimation de la mesure d'un arc en fonction de la mesure de l'angle, Huygens obtient avec un triangle équilatéral le même résultat qu'Archimède avec un polygone à 96 côtés.

Ce progrès est un progrès essentiellement théorique qui améliore plus les connaissances sur les fonctions circulaires que sur les décimales de π.

C'est d'ailleurs un des derniers travaux sérieux sur π utilisant la méthode des polygones, la palme revenant dans ce domaine à Ludolf Van Ceulen qui obtient 20 décimales en 1596. Sa femme publiera en 1615 un ouvrage posthume "De Aritmetische en Geometrische fondamenten" où Ludolf donne 32 décimales exactes. Cette performance est sans doute à la base des désirs de records ultérieurs car elle valut à Ludolf d'attacher son nom à π, du moins en Allemagne.

π SUR PIERRE TOMBALE

Les travaux d'Archimède auraient légitimé que π soit appelé le nombre d'Archimède. Il n'en est rien. Mais π sera appelé nombre de Ludolf. Citons Minois [MIN].

"En 1596, Ludolf van KEULEN (= Louis de Cologne) calcule 20 chiffres décimaux. Sa renommée est tellement grande qu'en Europe Centrale, π est appelé le nombre de Ludolf et la découverte est tellement admirée qu'une copie de ce π l'accompagne sur son tombeau, à Leyde :

HIC IACET SEPULTUS MR. LUDOLFF VAN CEULEN, PROFESSOR BELGICUS, DUM VIVERET MATHEMATICARUM SCIENTIARIUM IN ATHENAEO HUIUS URBIS, NATUS HILDESHILMIA ANNO 1540, DIE XXVIII IANUARII, ET DENATUS XXXI DECEMBRIS, 1610, QUI IN VITA SUA MULTO LABORE CIRCUMFERENTIAE CIRCULI PROXIMAM RATIONEM AD DIAMETRUM INVENIT SEQUENTEM. QUANDO DIAMETER EST 1, TUM CIRCULI CIRCUMFERENTIA PLUS EST QUAM

314159265358979323846264338327950288
100000000000000000000000000000000000

ET MINUS QUAM
314159265358979323846264338327950289
100000000000000000000000000000000000;

SED QUANDO DIAMETER EST
100000000000000000000000000000000000,

TUM EST CIRCULI CIRCUMFERENTIA PLUS QUAM
314159265358979323846264338327950288

& MINUS QUAM
314159265358979323846264338327950289."

La chasse reprend donc avec la découverte du calcul infinitésimal et des séries. Nouvel outil, nouvelles méthodes : les mathématiciens se font les dents sur π: Newton, Gregory, Euler et bien d'autres apporteront leur pierre à l'édifice

Un développement très astucieux avait d'ailleurs permis au même Euler de calculer, à la main et en 30 minutes 20 décimales.

Les records suivants sont dus à Dase (200 décimales en 2 mois), puis Clausen (248 décimales), puis en 1853 Rutherford (440 décimales), en 1855 Richter (500) et enfin W. Shanks (707 décimales) en 1873-74.

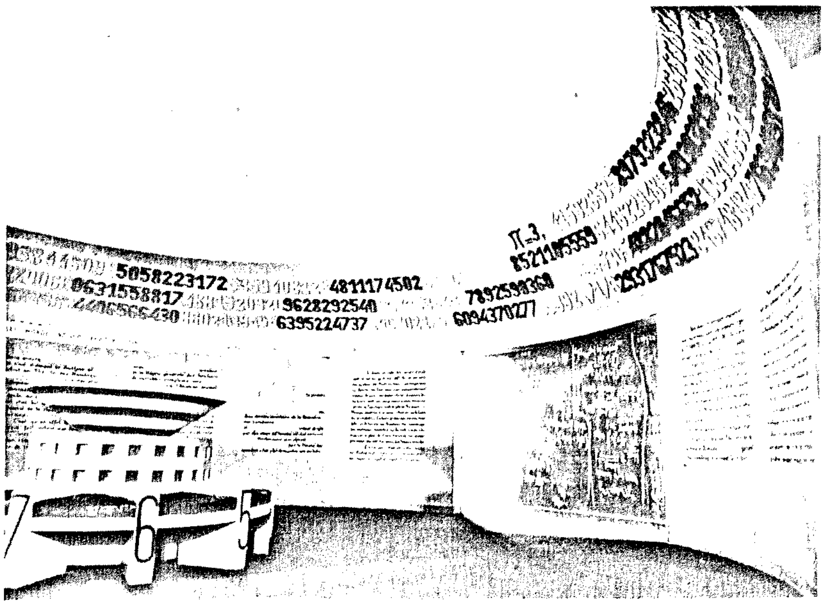
Ferguson vérifiera en 1947, à l'aide d'un calculateur de bureau, que seules 527 sur 707 étaient justes.

. Après Ferguson, le premier calcul sur ordinateur fut mené en 1949 sur Eniac (Electronic Numerical Integrator and Computer) ; il permit d'obtenir 2037 décimales en 70 heures en utilisant la formule de Machin.

Chronologie des calculs du nombre π

– 2000 Babyloniens	$3\frac{1}{8}$
– 2000 Egyptiens	$\left(\frac{16}{9}\right)^2$
– 1200 Chine	3
– 500 Bible (I Rois VII)	3
– 300 Archimède	$3\frac{10}{71}$ $\quad 3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$
+ 2e siècle Ptolémée	$\frac{377}{120}$
3e siècle Chung Hing	$\sqrt{10}$
Wang Fau	$\frac{142}{45}$
263 Lui Hui	157/50
5e siècle Tsu Chung Chi	$3.1415926 < \pi < 3{,}1415927$
Arijabhatta	$\frac{62\,832}{2000}$

1414 Al-Kashi's	16 décimales
1596 Ludolph Van Ceulen	35
1699 Abraham Sharp	72
1719 Fautet de Lagny	127
1794 Baron Georg Von Vega	136
1844 Zacharias Dahse	200
1847 Thomas Clausen	248
1853 W. Lehmann	261
1873 William Shanks (*)	707
1947 D.F. Ferguson et J.W. Wrench Jr	808 (Machine de bureau)
1949 Smith et J.W. Wrench Jr	1.120 (Machine de bureau)
1949 Georges W. Reitwiesner	2.037 (ENIAC)
1954 S.C. Nicholson et J. Jeenel	3.089 (NORC)
1958 (janvier) F. Genuys	10.000 (IBM 704 / Paris)
1958 (mai) G.E. Felton	10.021 (Pegasus / Londres)
1961 (août) D. Shanks et J.W. Wrench Jr	100.265 (IBM 7090 / Washington)
1966 (février) J. Guilloud et J. Filliatre	250.000 (IBM 7030 / Paris)
1967 (février) J. Guilloud et M. Dichampt	500.000 (CDC 6600 / Paris)
1976 J. Guilloud et M. Bouyer	10^6 décimales



Collection Palais de la Découverte, cliché R 13

(1) Les décimales obtenues par Shanks ornaient en 1937 la coupole de la salle π du Palais de la Découverte. Les décimales erronées furent corrigées dès la publication de Ferguson quoi que l'on puisse lire encore aujourd'hui dans la littérature.

MOYENS MNEMOTECHNIQUES

Que j'aime à faire connaître un nombre utile aux sages !
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

Immortel Archimède, artiste ingénieur,
8 9 7 9

Qui de ton jugement peut priser la valeur ?
3 2 3 8 4 6 2 6

Pour moi ton problème eut de pareils avantages.
4 3 3 8 3 2 7 9

Tirez circonférence au diamètre etcetera.
5 0 2 8 8

Autre texte tout aussi connu :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages !
3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

Glorieux Archimède, artiste ingénieux,
8 9 7 9

Toi de qui Syracuse aime encore la gloire,
3 2 3 8 4 6 2 6

Soit ton nom conservé par de savants grimoires !
4 3 3 8 3 2 7 9

Jadis, mystérieux, un problème bloquait
5 0 2 8 8

Tout l'admirable procédé, l'œuvre grandiose
4 1 9 7 1 6 9

Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.
3 9 9 3 7 5

O quadrature ! vieux tourment du philosophe !
1 0 5 8 2 0

Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez
9 7 4 9 4 4

Défié Pythagore et ses imitateurs.
5 9 2 3 0

Comment intégrer l'espace plan circulaire ?
7 8 1 6 4 0

Former un triangle auquel il équivaudra ?
6 2 8 6 2 0

Nouvelle invention : Archimède inscrira
8 9 9 8

Dedans un hexagone ; appréciera son aire
6 2 8 0 3 4

Fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra :
8 2 5 3 4 2 1 1 7

Dédoublera chaque élément antérieur ;
0 6 7 9

Toujours de l'orbe calculée approchera ;
8 2 1 4 8 0

Définira limite ; enfin, l'arc, le limiteur
8 6 5 1 3 2 8

De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle !
2 3 0 6 6 4 7

Professeur, enseignez son problème avec zèle !...
0 9 3 8 4 4

Voici quelques textes en langue anglaise

Yes, I have a number
3 1 4 1 6

How I wish I could recollect of circle round
3 1 4 1 5 9 2 6 5
The exact relation Archimede unwound
3 5 8 9 7

(13 décimales exactes)

Ces deux textes nous fournissent chacun trente décimales

Sir, I send a rhyme excelling
3 1 4 1 5 9
In sacred truth and rigid spelling
2 6 5 3 5 8
Numerical sprites elucidate
9 7 9
For me the lexicon's dull weight
3 2 3 8 4 6
If nature gain
2 6 4
Not you complain
3 3 8
Tho'' Dr Johnson fulminate
3 2 7 9

Now, I show a spell unfailing
3 1 4 1 5 9
An artful charm, for tasks availing
2 6 5 3 5 8
Intricate results entailing
9 7 9
Not in too exacting mood
3 2 3 8 4
Poetry is pretty good
6 2 6 4
Try the talisman. Let be
3 3 8 3 2
Adverse ingenuity
7 9

How I want a drink alcoholic of course
3 1 4 1 5 9 2 6
after the heavy chapters involving
5 3 5 8 9
quantum mechanics
7 9

Et en langue allemande

Dir, o Held, o alter Philosoph, du Riesen-Genie !
3 1 4 1 5 9 2 6 5
Wie viele Tausende bewundern Geister
3 5 8 9 7
Himmlisch wie du und göttlich !
9 3 2 3 8
Noch reiner in Aeonen
4 6 2 6
Wird das uns Strahlen,
4 3 3 8
Wir im lichten Morgenrot !
3 2 7 9
(texte lu dans Beutel, 1913)

diocre, servez-vous du rapport d'Archimede, qui a démontré que le diametre étoit à la circonférence à très-peu près comme 1 à $3\frac{1}{7}$, ou comme 7 à 22.

Faites donc cette proportion, comme 7 à 22, ainsi le diametre donné est à un quatrieme terme; ou bien triplez le diametre, & ajoutez-y un septieme: vous aurez à peu de chose près la circonférence.

On trouveroit ainsi la circonférence d'un cercle du diamette de 100 pieds, égale à 314 pieds 3 pouces 5 lignes & $\frac{1}{7}$: l'erreur seroit d'environ 1 pouce 6 lignes.

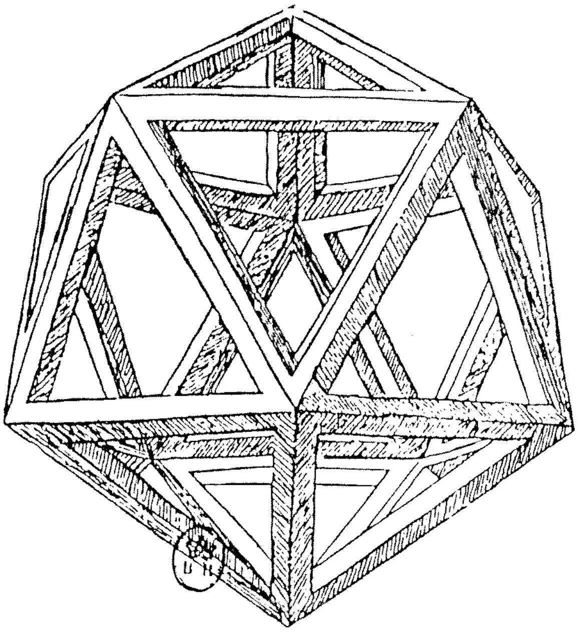
Voulez-vous approcher davantage de la vérité, servez-vous du rapport de Métius, sçavoir, de celui de 113 à 355; c'est-à-dire, faites comme 113 à 355, ainsi le diametre donné à la circonférence cherchée.

Même supposition que ci-dessus, on trouveroit la circonférence de 314 pieds 1 pouce 10 lignes & $\frac{106}{113}$, dont la différence avec la véritable circonférence est moindre qu'une ligne.

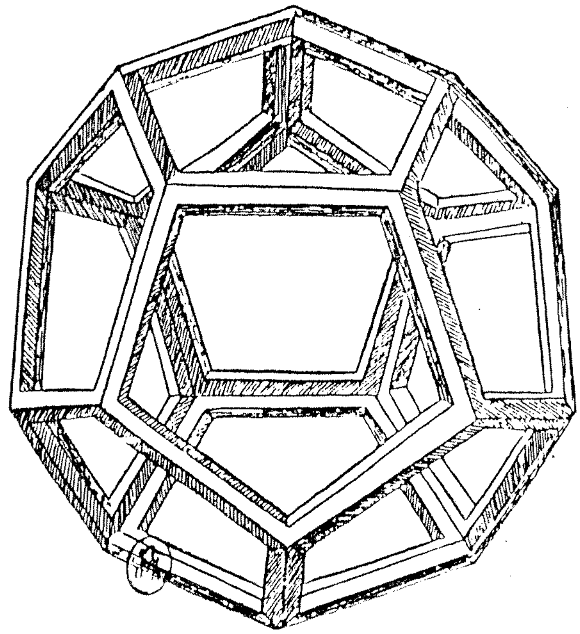
Si l'on veut une exactitude encore plus grande, il n'y a qu'à se servir du rapport de 10000000000 à 31415926535: l'erreur, sur la circonférence d'un cercle grand comme l'équateur de la terre, seroit au plus d'une demi-ligne.

S'il s'agit de trouver le diametre, la circonférence étant donnée, il est clair qu'il faut prendre la proportion inverse; ainsi l'on fera cette proportion, comme 22 est à 7, ou comme 355 à 113, ou comme 314159 à 100000, ou comme 31415926-535 à 10000000000, ainsi la circonférence donnée à un quatrieme terme, qui sera le diametre cherché.

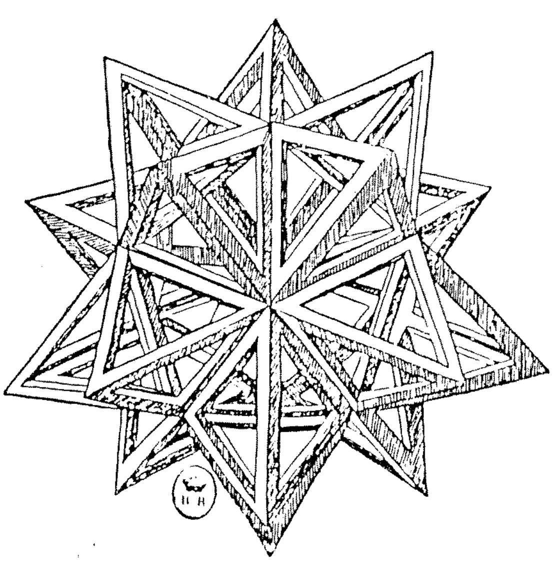
polyèdres réguliers



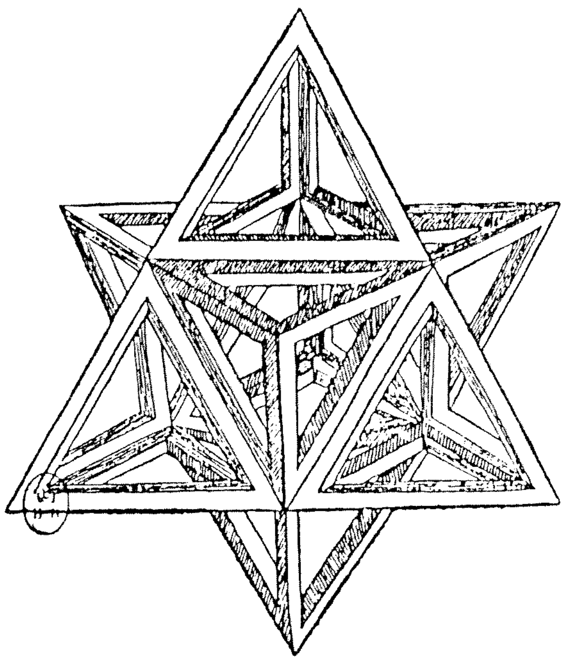
Icosaèdre dessiné par Léonard de Vinci



Dodécaèdre dessiné par Léonard de Vinci



Dodécaèdre étoilé dessiné par Léonard de Vinci



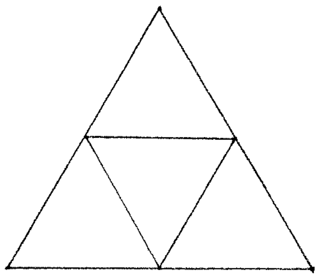
Stella octangula dessiné par Léonard de Vinci

composé de deux tétraèdres réguliers

POLYEDRES DE PLATON

Matériel pour la construction de ces polyèdres :
2 chemises de carton mince, scotch, règle, crayon, compas, rapporteur, ciseaux.

1 Le tétraèdre régulier :



Voici le patron d'un tétraèdre. Redessiner cette figure sur du carton mince en prenant 5 cm pour les côtés des triangles équilatéraux. Découper la figure, plier le carton selon les côtés, refermer et scotcher bord à bord.
Le solide ainsi formé est un tétraèdre régulier.

Un tétraèdre est un polyèdre ayant quatre faces (de quatre, et face).

Définition : Un polyèdre est un solide limité par des faces planes. Un polyèdre de Platon est un polyèdre convexe et régulier.

- convexe : il est entièrement situé d'un même côté du plan contenant l'une quelconque de ses faces ;
- régulier : toutes ses faces sont des polygones réguliers de même dimension (isométriques), et en chaque sommet du polyèdre se rejoignent le même nombre de faces.

Vérifier que les conditions imposées par la définition sont vraies pour le tétraèdre construit.

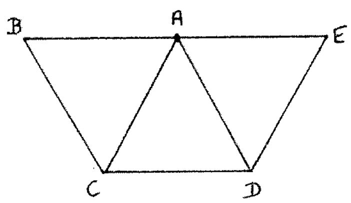
Question : Combien de faces aboutissent en un même sommet pour ce tétraèdre ?

2 Le cube :

Questions : Quel est le polygone régulier correspondant à chacune des faces d'un cube ?
Combien de faces a un cube ?
Combien de faces aboutissent en un même sommet d'un cube ?

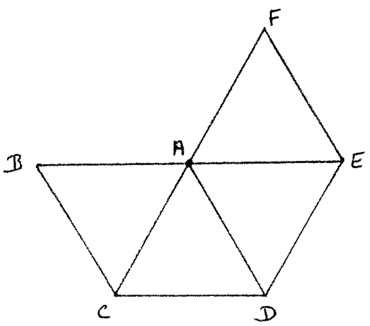
Dessiner le patron d'un cube de 5 cm de côté et construire ce cube.

3 Faces triangulaires :



1. Trois triangles équialtéraux isométriques sont ici réunis en un même sommet A. Découper cette figure, plier selon les côtés AC et AD, rassembler bord à bord les côtés AB et AE et scotcher. L'objet obtenu est un toit à trois pentes. Il suffit de découper un quatrième triangle équilatéral de même dimension que ABC pour fermer le solide.

Quel est le polyèdre régulier ainsi obtenu ?

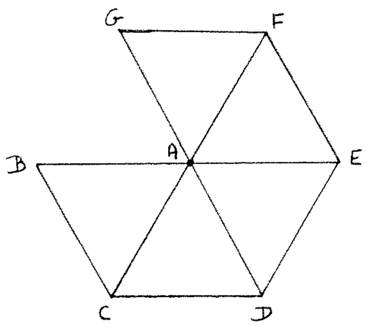


2. Quatre triangles équilatéraux isométriques sont maintenant réunis au sommet A. Découper la figure, plier le long des côtés AC, AD et AE, réunir les bords AB et AF et scotcher.

Questions : Peut-on fermer le solide à l'aide d'un triangle équilatéral ? Peut-on fermer le solide à l'aide d'une figure fermée de triangles équilatéraux?

Reconnaître en page 178 le polyèdre régulier dont la construction a été ici amorcée et le patron qui permet de le construire. En construire un dont les faces ont 5 cm de côté.

3. Cinq triangles équilatéraux isométriques sont réunis en un même sommet A. Découper la figure, plier le long des côtés AC, AD, AE et AF, réunir les bords AB et AG et scotcher.



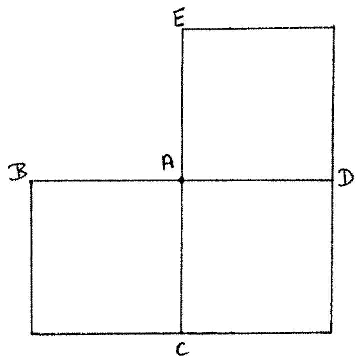
Questions : Quel est le polygone régulier base de ce toit à cinq pentes ?
En accolant deux toits à cinq pentes identiques à celui obtenu, le polyèdre construit est-il un polyèdre de Platon ?

Reconnaitre en page 178 le polyèdre régulier dont la construction a été amorcée, et le patron qui permet de le construire. En construire un dont les faces ont 5 cm de côté.

5. Que se passe-t-il lorsqu'on veut commencer la construction en utilisant six triangles équilatéraux réunis en un même sommet A ?

Peut-on construire un polyèdre de Platon tel qu'en un même sommet aboutissent plus de cinq triangles équilatéraux ?

4 Faces carrées :

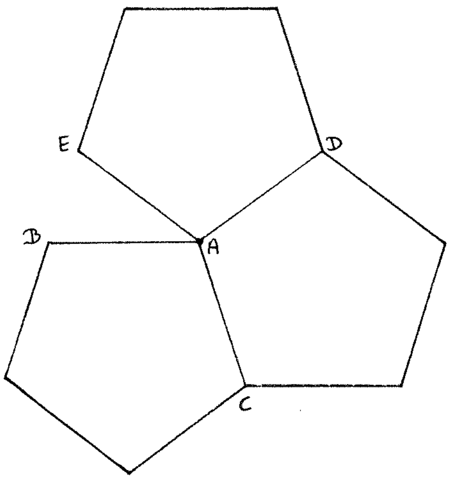


1. Trois carrés isométriques sont ici réunis en un même sommet A. Découper cette figure, plier selon les côtés AC et AD, réunir bord à bord les côtés AB et AE et scotcher.

Questions : Comment fermer le solide en utilisant des carrés de même dimension que ceux déjà choisis ?
Quel est le polyèdre obtenu ?

2. Réunir quatre carrés de même dimension en un même sommet A. Que se passe-t-il ? Peut-on construire un polyèdre de Platon ayant des faces carrées et tel que plus de trois faces aboutissent en un même sommet ?

5 Faces pentagonales :



1. Trois pentagones réguliers convexes et isométriques sont ici réunis en un même sommet A. Redessiner la figure.

Questions : Pour pouvoir obtenir un polyèdre régulier, combien de pentagones devront aboutir au sommet B ? au sommet C ? au sommet D ?
Dessiner ces pentagones avant de découper la figure, de plier et de scotcher.

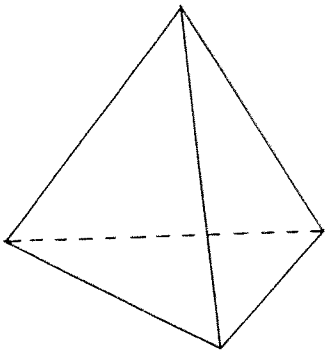
Peut-on fermer cette figure de façon à obtenir un polyèdre de Platon ?
Lequel des polyèdre dessinés en page 188 est ainsi obtenu et quel est le patron qui lui correspond ?
Construire un dodécaèdre de 5 cm de côté.

2. Que se passe-t-il lorsqu'on veut commencer la construction en utilisant quatre réguliers réunis en un même sommet A ?

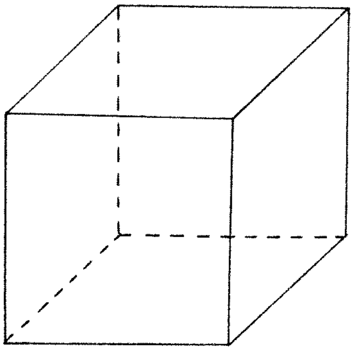
6 Polyèdre de Platon :

Peut-on obtenir un polyèdre de Platon ayant des faces hexagonales ? octogonales ?
Quels sont les seuls polyèdres de Platon ?

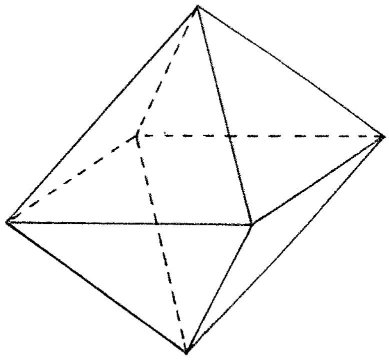
Les polyèdres de Platon sont représentés ici en observant les règles de la perspective cavalière.



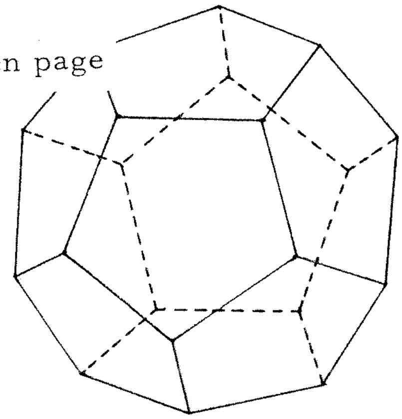
Tétraèdre



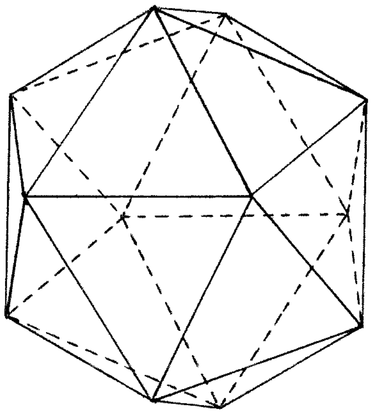
Cube



Octogone

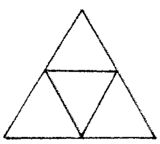


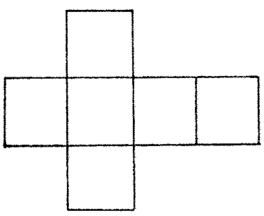
Dodécaèdre

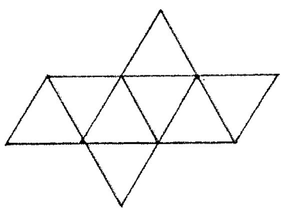


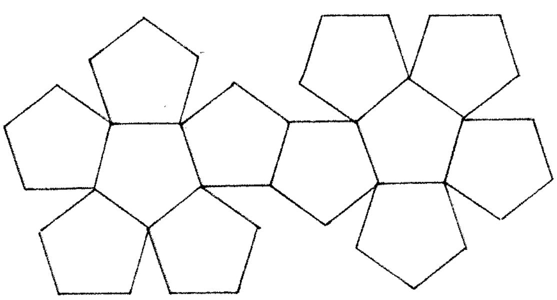
Icosaèdre

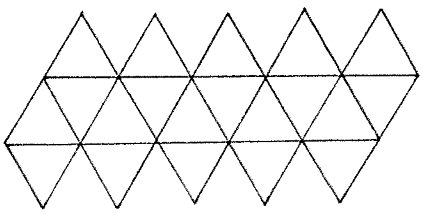
Voici des patrons possibles pour ces polyèdres, mais il ne faudra pas les utiliser dans la dimension donnée.



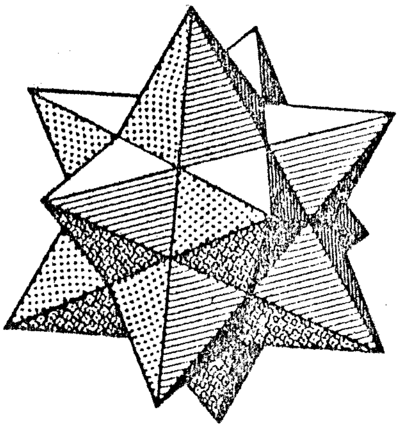




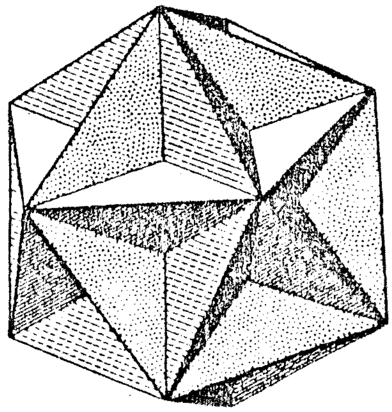




Voici deux des polyèdres réguliers non convexes : ils sont au nombre de quatre et ont été découverts par KEPLER et POINSOT.



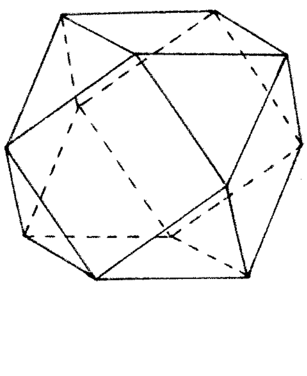
Petit dodécaèdre étoilé

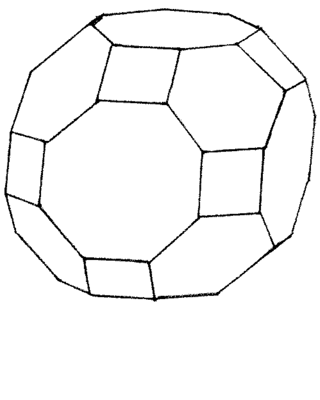


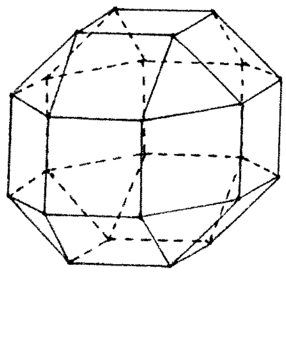
Grand dodécaèdre

QUELQUES POLYEDRES SEMI-REGULIERS

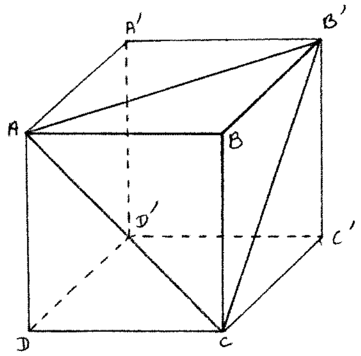
Les polyèdres semi-réguliers ou polyèdres archimèdiens ont pour faces des polygones réguliers, mais ces polygones ne sont pas tous de la même sorte. Toutefois, la même disposition de ces polygones doit se retrouver autour de chaque sommet.
En voici quelques-uns. Dessiner le patron de l'un de ces polyèdres et le construire.





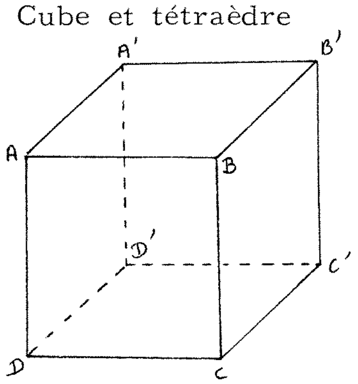


1) Cube et tétraèdre



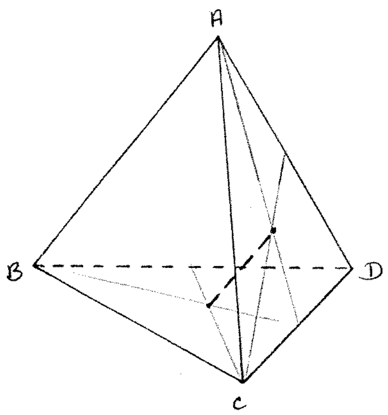
Soit ABCD A'B'C'D' un cube. AB', B'C et AC sont les diagonales de faces du cube. Ont-elles même longueur ?
Le tétraèdre ABCB' est-il un tétraèdre régulier ?

2) Cube et tétraèdre



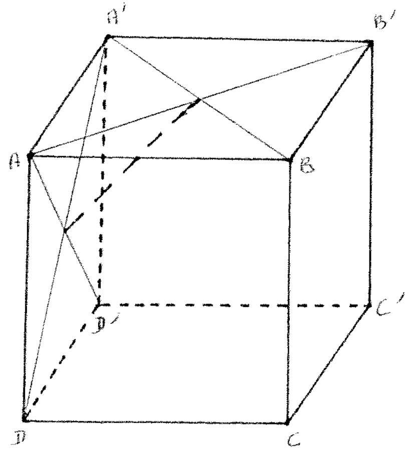
Soit ABCD A'B'C'D' un cube. AB', B'C, CA, AD', D'B' et D'C sont des diagonales de faces du cube. Le tétraèdre ACB'D' est-il un tétraèdre régulier ?

3) Tétraèdre



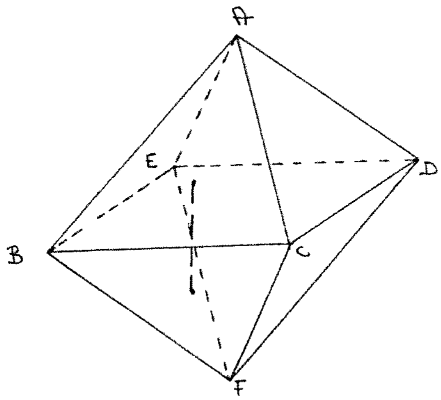
Soit ABCD un tétraèdre. Placer des faces de ce tétraèdre : le centre d'un triangle équilátéral est point d'intersection des médianes du triangle.
Dessiner les segments joignants les centres de ces faces. Quelle figure obtient-on ?

4) Cube et octaèdre



Soit ABCDA'B'C'D' un cube. Placer les centres des faces du cube (le centre d'un carré est le point d'intersection des diagonales de ce carré). Joindre deux à deux ces centres de faces, sauf ceux qui appartiennent à deux faces opposées du cube.
Quelle figure obtient-on ?

5) Octaèdre et cube *



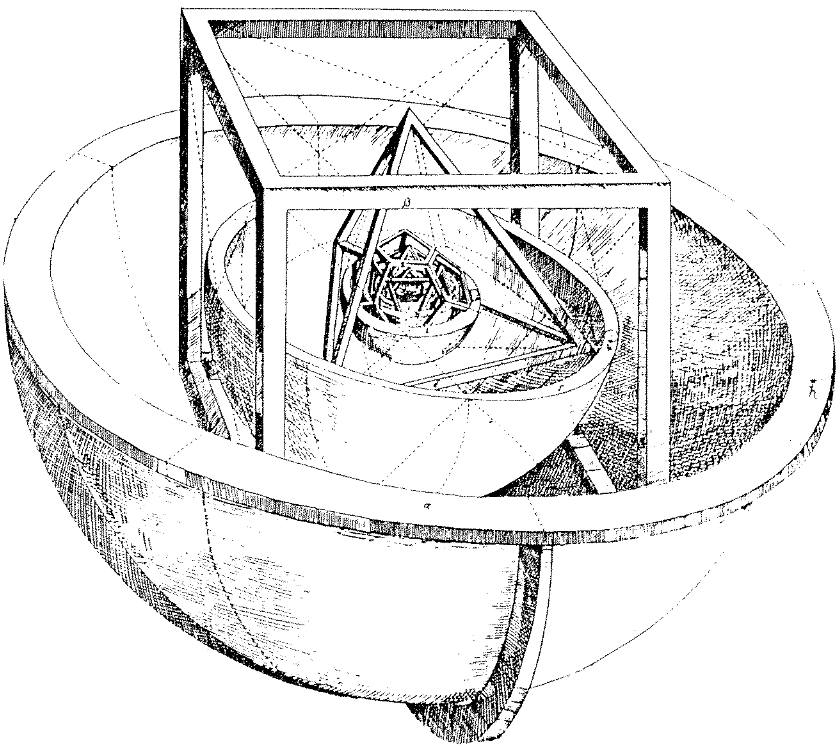
Soit ABCDEF un octaèdre régulier. Placer les centres des faces de cet octaèdre. Dessiner tous les segments joignant les centres de deux faces adjacentes.

Quelle figure obtient-on ?

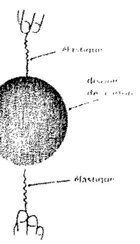
6) Observer un ballon de foot-ball

* * * * *
* * * *
* * *
* *
*

Kepler imagined a series of six spheres, one for each planet, with the sun at their center. These spheres were separated by the five regular polyhedra, as this drawing by Kepler shows. Can you identify all five, naming them in order from largest to smallest?



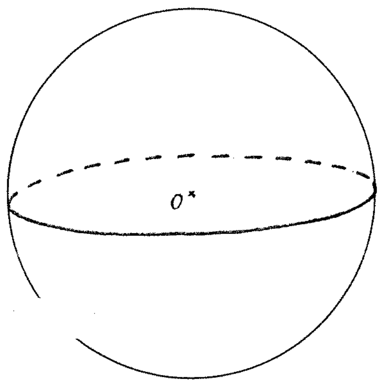
autour de la sphère



1. Manipulation.

Découper un disque de carton. Le percer en deux points alignés avec son centre. Y passer des élastiques. Faire tourner. Qu'obtient-on ainsi ?
(Un effet amusant peut être obtenu de cette manière : on écrit une partie des lettres d'un mot sur une face du disque, et le reste sur l'autre face. C'est illisible au repos, mais, si on a bien disposé les signes, le mot apparaît quand le disque tourne.)

Tous les points du cercle étant à la distance R au centre O, la sphère obtenue est l'ensemble des points de l'espace qui se trouvent à la distance R du point O.



Le cercle utilisé dans la manipulation est un GRAND CERCLE de la sphère. Tout cercle dessiné sur la sphère et situé dans un plan passant par O est un grand cercle de la sphère.

Questions :

1) Quel est le rayon d'un grand cercle de la sphère ?

2) Comment obtenir un cercle sur la sphère qui ne soit pas un grand cercle ?

2. Aire et volume de la sphère.

— **Archimède.** — Chez aucun peuple, antérieurement à ARCHIMÈDE (3^e s. av. J.-C.), on ne trouve de document où la mesure de la sphère soit traitée, même simplement au point de vue pratique. L'illustre géomètre syracusain a montré une fois de plus l'originalité de son génie en établissant dans son ouvrage *Sur la sphère et le cylindre* les propositions suivantes :

« La surface d'une sphère quelconque est quadruple d'un de ses grands cercles.

Une sphère quelconque est quadruple d'un cône qui a une base égale à un grand cercle de cette sphère et une hauteur égale au rayon de cette même sphère.

Le cylindre qui a une base égale à un grand cercle d'une sphère et une hauteur égale au diamètre de cette sphère est égal à trois fois la moitié de cette sphère, et la surface du cylindre, les bases étant comprises, est aussi égale à trois fois la moitié de la surface de cette même sphère. »

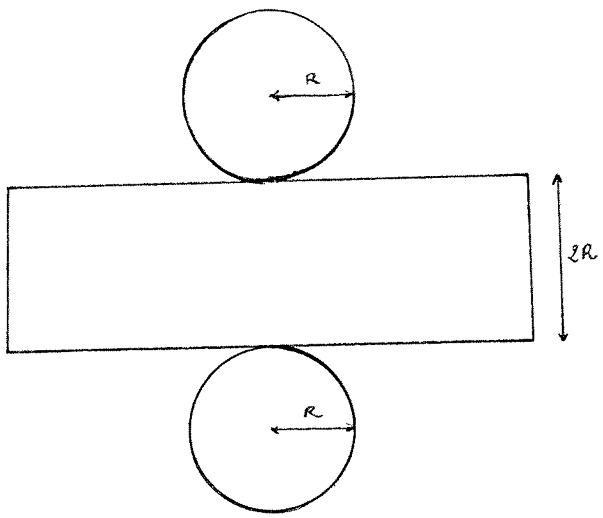
<u>Questions</u> :

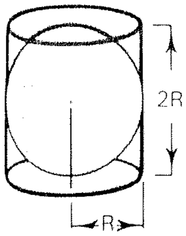
1) Quelle est l'aire d'un cercle de rayon R ? En déduire l'aire ou la surface de la sphère. Comparer ce résultat à celui énoncé par Clairaut au § LXV (page 78).

2) Au § XLII Clairaut énonce la propriété : " la solidité (à savoir le volume) d'une pyramide quelconque est le produit de sa base (aire de sa base) par le tiers de sa hauteur".
Or "le cône est une espèce de pyramide dont la base est un cercle" (voir page 76).
Calculer le volume d'un cône dont la base est un grand cercle de la sphère et dont la hauteur est égale au rayon de la sphère. En déduire le volume de la sphère. Comparer le résultat obtenu à celui énoncé par Clairaut au § LXX (page 79).

3) Calculer le volume d'un cylindre de base un grand cercle de la sphère et de hauteur un diamètre de la sphère. Vérifier l'affirmation d'Archimède.

4) Voici le patron du cyclindre (et de ses bases) considéré par Archimède.
Calculer la surface du cylindre, bases comprises.
Vérifier l'affirmation d'Archimède.



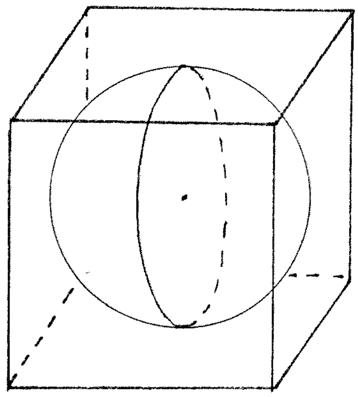


La sphère a même aire que le cylindre qui la contient.

5) Vérifier l'énoncé de Clairaut au § LXVII (page 78) ; le cyclindre considéré est bases non comprises.

C'est de cette dernière découverte qu'Archimède parait avoir été le plus fier. Plutarque (1er s.) *(Vie des hommes illustres)* nous apprend en effet que le savant grec avait prié « ses amis et ses parents de placer sur son tombeau, après sa mort, un cylindre renfermant une sphère et, pour suscription, le rapport du solide contenant au solide contenu ».

Cicéron (1er s. av. J. C.) mentionne également le fait dans un passage des *Tusculanes* resté célèbre. « Pendant que j'étais questeur en Sicile, dit-il, je fus curieux de m'informer du tombeau d'Archimède à Syracuse où je trouvai qu'on le connaissait si peu, qu'on disait qu'il n'en restait aucun vestige ; mais je cherchai avec tant de soin que je le déterrai enfin sous des ronces et des épines. Je fis cette découverte à la faveur de quelques vers que je savais avoir été gravés sur son monument et qui portaient qu'on avait placé au-dessus une sphère et un cylindre. M'étant donc transporté hors de l'une des portes de Syracuse, dans une campagne couverte d'un grand nombre de tombeaux, et regardant de toutes parts avec attention, je découvris, sur une petite colonne qui s'élevait par-dessus les buissons le cylindre et la sphère que je cherchais. Je dis aussitôt aux Syracusains qui m'accompagnaient que c'était sans doute le monument d'Archimède. En effet, sitôt qu'on eut fait venir des gens pour couper les buissons et nous faire un passage, nous nous approchâmes de la colonne et lûmes sur la base l'inscription dont les vers étaient encore à demi-lisibles, le reste ayant été effacé par le temps. »



Au sujet de cette découverte d'Archimède, nous citerons une inscription grecque, trouvée dans les ruines de Pergame, qui donne les nombres 42, 33 et 22 comme représentant les volumes relatifs et les surfaces totales relatives du cube, du cylindre et de la sphère inscrits dans le cube. Si l'on suppose en effet le côté du cube égal à 2 et $\pi = \frac{22}{7}$, les volumes de ces trois corps sont respectivement représentés par $8 = \frac{168}{21}$, $\frac{44}{7} = \frac{132}{21}$, $\frac{88}{21}$, ou encore sont proportionnels à 42, 33 et 22. Dans la même hypothèse, les surfaces seront représentées respectivement par $24 = \frac{168}{7}$, $\frac{132}{7}$, $\frac{88}{7}$, ou seront proportionnelles à 42, 33 et 22.

Questions : On considère un cube de côté 2, un cylindre dont la base a pour diamètre 2 et de hauteur 2. Une sphère de rayon 2.

Calculer les volumes et les surfaces de ces trois solides, en prenant pour approximation de π le nombre $\frac{22}{7}$, et vérifier l'affirmation de l'inscription grecque trouvée dans les ruines de Pergame.

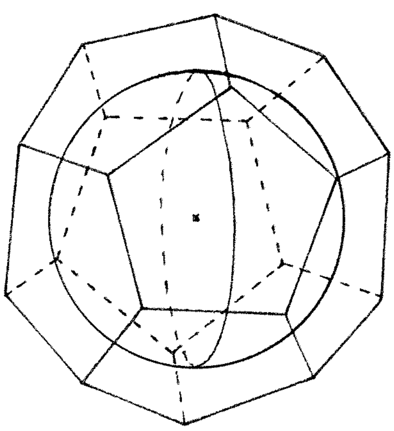
Enfin, à propos de la propriété du cylindre circonscrit à la sphère, Montucla signale que le problème suivant fut posé en 1773 dans un numéro du *Mercure de France* :

> Réponds-moi, d'Alembert, qui découvre les traces
> Des plus sublimes vérités,
> Quels sont les corps dont les surfaces
> Sont en même rapport que leurs solidités ?

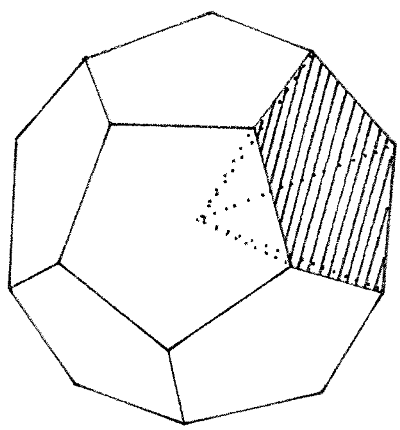
Comme bien on pense, d'Alembert ne se hâta pas de répondre ; le numéro suivant du *Mercure* contenait une des solutions du problème, celle correspondant à la sphère et au cylindre circonscrit.

La question comporte en effet une infinité de solutions ; en particulier, tous les corps réguliers ou non circonscrits à la sphère répondent à la question. Soient par exemple deux polyèdres réguliers circonscrits à la sphère. Chacun d'eux peut être décomposé en pyramides ayant pour bases les faces du polyèdre considéré et pour sommet le centre de la sphère : le volume de chacun des polyèdres sera donc le produit de sa surface par le tiers du rayon. Par suite, en désignant par V et V′, S et S′ les volumes et les surfaces des polyèdres, par r le rayon de la sphère, on a bien

$$\frac{V}{V'} = \frac{1/3\,Sr}{1/3\,S'r} = \frac{S}{S'}.$$



Un polyèdre régulier circonscrit à une spère



une des pyramide considéré dans le texte

Remarquer, pour expliquer le texte précédent, que le volume d'un polyèdre est la somme des volumes des pyramides considérées, chacune ayant pour hauteur r.

Époque postérieure à Archimède. — HÉRON, dans ses *Métriques* (1er s.), donne pour le calcul du volume de la sphère deux règles qui se traduisent par la formule suivante, où d représente le diamètre :

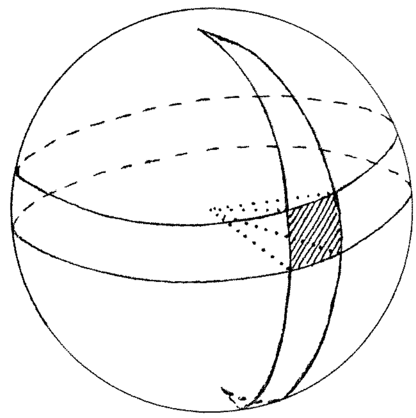
$$V = d^3 \times \frac{11}{21}.$$

Cette formule, qui suppose $\pi = \frac{22}{7}$, se rencontre également dans les écrits des agrimenseurs romains et dans la Collection héronienne.

Les Hindous — BHÂSKARA tout au moins — savent que l'aire de la sphère est égale à celle de quatre grands cercles et que son volume est le produit de cette aire par le sixième du diamètre.

<u>Question</u> : Vérifier la dernière affirmation.

Voici comment GANESA (16e s.) démontre cette dernière proposition. La surface de la sphère étant supposée divisée en autant d'éléments égaux qu'il y a d'unités dans l'expression numérique A de l'aire (le nombre A étant supposé entier), chacun de ses éléments est pris (approximativement) comme base d'une pyramide ayant son sommet au centre de la sphère. d représentant le diamètre, le volume d'une de ces pyramides a pour expression numérique $1/3 \times 1 \times \frac{d}{2} = \frac{d}{6}$; le volume de la sphère est par suite $\frac{Ad}{6}$. Il est probable que ce mode de démonstration, parfois employé encore aujourd'hui, est bien d'origine hindoue.



BHÂSKARA donne enfin, dans sa *Lîlâvatî* (12e s.), cette règle simple qui suppose $\pi = \frac{22}{7}$: « La moitié du cube du diamètre ajoutée à la 21e partie de cette moitié est le volume contenu dans la sphère. » Ce volume a en effet pour expression

$$\frac{d^3}{2} + \frac{1}{21}\left(\frac{d^3}{2}\right) = \left(1 + \frac{1}{21}\right)\frac{d^3}{2} = \frac{22}{7}\frac{d^3}{6}.$$

Voici enfin, à $\boxed{\text{titre de curiosité,}}$ comment ÉDOUARD LAGOUT, dans ses leçons de « tachymétrie » (1876), arrive à déterminer le volume de la sphère : son procédé est inspiré de celui de BHÂSKARA. « Une graine de platane est formée d'une grande quantité de pyramides hérissées autour du noyau central. De la réalité à la science, on doit supposer ce noyau très petit, se réduisant à un point invisible dans lequel se joindraient tous les sommets des pyramides.

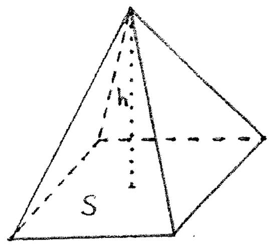
L'enveloppe de la sphère, étant égale à 4 cercles faits sur le rayon, sera uniformisée par un plateau formé de 4 planches jointives égales chacune à l'aire d'un cercle. Il ne restera plus qu'à uniformiser toutes les pyramides en hérisson, et pour cela je les implante sur le plateau. Elles seront jointes par les bases et ne laisseront aucun vide.

Ainsi implantées, elles présentent l'aspect d'une mâchoire de crocodile sur laquelle il faut hardiment mettre la main (de l'esprit) pour les aplatir uniformément au *tiers de la hauteur*. Alors la mâchoire, c'est-à-dire la sphère, est changée en un plateau, et ce plateau a pour hauteur le tiers du rayon. On aura donc par les opérations de l'*Algèbre tachymétrique* :

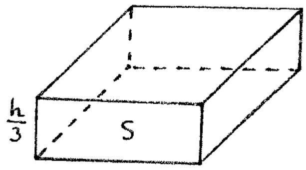
$$\text{Sphère, volume} \begin{cases} = \text{plateau} \times 1/3 \text{ du rayon} \\ = 4 \text{ aires de cercle} \times 1/3 \text{ rayon} \\ = 1/3 \times (4 \text{ aires de cercle} \times \text{rayon}). \end{cases}$$

N'oubliez pas les 4 planches faisant chacune l'aire du cercle ; la mâchoire de crocodile vous fera souvenir des pointes que l'on uniformise en les aplatissant au tiers. »

Pyramide de base S, de hauteur h, de volume V

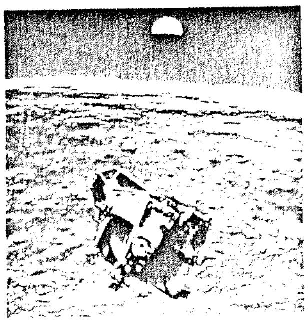


Parallélépipède de base S, de hauteur $\frac{R}{3}$, de même volume V.



le globe terrestre

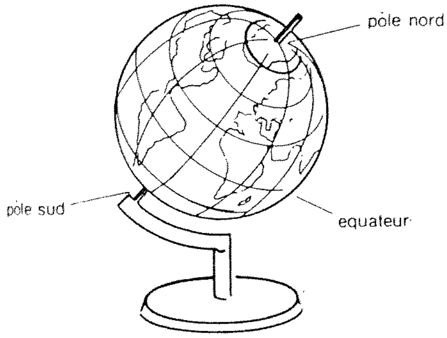
1. Forme de la terre



Clair de terre sur la lune

- Dans notre système solaire neuf planètes gravitent autour du Soleil ; dans l'ordre : Mercure, Vénus, La Terre, Mars, Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune, Pluton. La terre occupe donc le 3[e] rang. Comme la plupart des corps célestes elle a sensiblement la forme d'une sphère.

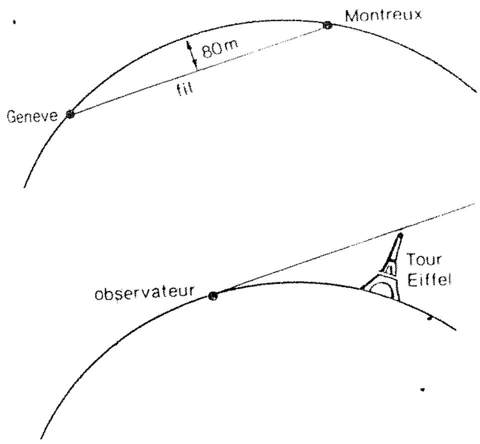
Des mesures ont permis de déterminer la grandeur de cette sphère.



☐ **Question 1** : La circonférence terrestre (longueur de l'équateur) est de 40 000 km *. Utiliser ce résultat pour calculer avec plus de précision le rayon de la terre.

Evidemment la terre n'est pas une sphère parfaite : Elle est légèrement aplatie aux pôles. De plus il y a les montagnes. Mais si nous imaginons la terre réduite à la taille d'une orange, le mont Everest (8 882 m) dépassera à peine 1/10 de mm, c'est-à-dire beaucoup moins que les inégalités de la peau de l'orange.

* Le mètre a d'abord été défini par la Convention comme la dix millionième partie du quart de la circonférence terrestre. Un modèle en platine (le mètre étalon) a été déposé au pavillon de Breteuil. Ce modèle s'écarte (peu) de la définition. Aujourd'hui, ce sont des longueurs d'onde de radiations qui servent d'étalon.

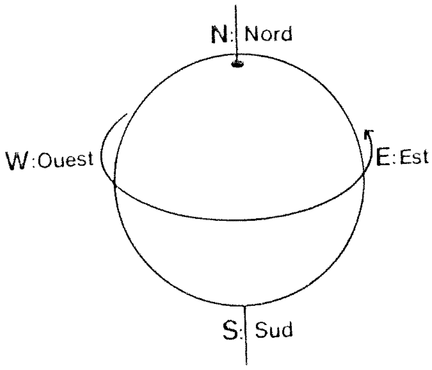


Malgré la grandeur de la terre, la forme sphérique est sensible. Voici deux exemples calculés, qui sont spectaculaires.

1. Si on pouvait tendre un fil de Genève à Montreux (distance 65 km), ce fil serait en son milieu à 80 m sous la surface du lac Léman.

2. A 65 km de Paris, un observateur au sol ne peut plus apercevoir le sommet de la tour Eiffel (même si le temps est clair et s'il dispose d'un télescope).

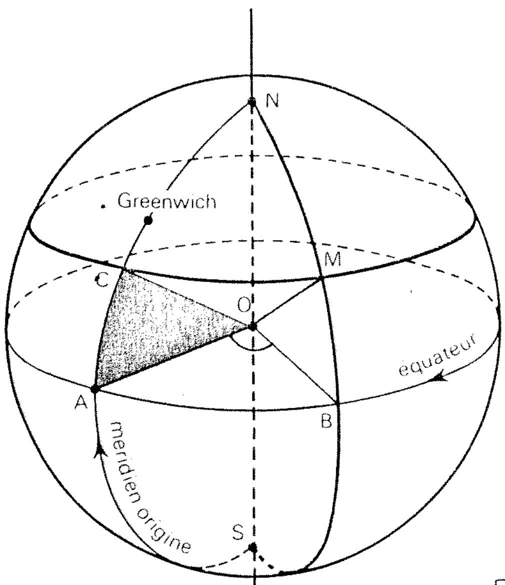
2. *Coordonnées géographiques*



Longtemps, les hommes croyaient que le soleil tourne autour de la terre. Nous savons maintenant que ce mouvement apparent, cause du jour et de la nuit, est dû en réalité au mouvement de rotation de la terre sur elle-même.

La terre tourne sur elle-même autour de l'axe des pôles en 24 heures.

La terre tourne vers l'Est (voir la figure).



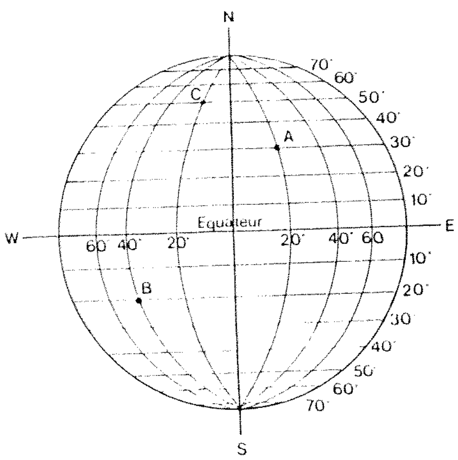
Méridiens, parallèles:

Un plan passant par l'axe coupe la sphère terrestre suivant un cercle qui détermine deux **méridiens**: les deux demi-cercles limités par les pôles.

Un plan perpendiculaire à l'axe coupe la sphère terrestre suivant un **parallèle.**

On choisit un méridien origine : le méridien de Greenwich.

☐ **Question 2:** Quelle est la longueur d'un méridien.



La figure ci-contre montre comment sont numérotés les parallèles et les méridiens.

Prenons par exemple le point A.

Il se trouve sur le parallèle marqué 30° dans l'hémisphère nord; on dit: la latitude de A est 30° Nord.

De plus il se trouve sur le méridien marqué 20° à l'est du méridien origine; on dit: la longitude de A est 20° Est.

Les numérotations vont de 0 à 90 (N et S) pour les parallèles et de 0 à 180 (E et W) pour les méridiens.

☐ **Exercice 1** : Donner les coordonnées géographiques (latitude et longitude) des points marqués B et C sur la figure.

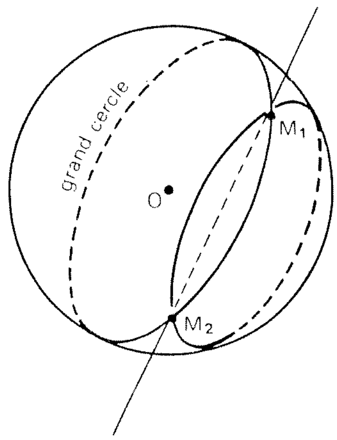
☒ **Exercice 2** : Donner les coordonnées géographiques des antipodes des points A, B et C.

☐ **Question 3** : Quelle est la latitude du pôle nord ? A-t-il une longitude ?

☐ **Exercice 3** : Un avion vole en ligne directe du point A au pôle nord. Quelle distance parcourt-il ? Si une galerie souterraine allait tout droit du point A au pôle nord, quelle serait sa longueur ? (Prendre pour rayon de la terre 6 400 km).

☒ **Exercice 4** : Trouver la latitude d'un parallèle ayant pour longueur 20 000 km (la moitié de l'équateur).

3. A la surface de la sphère.

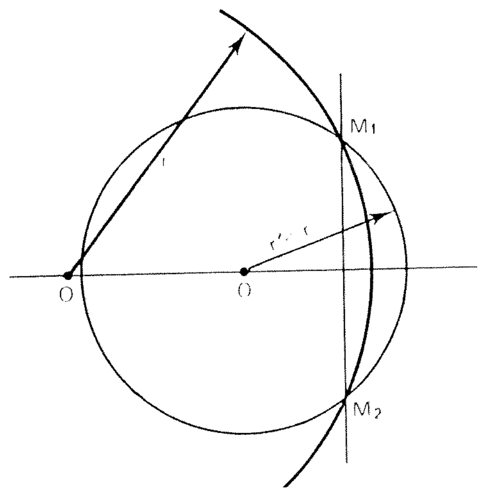


Si on veut aller d'un point M_1 à un autre point M_2 à la surface d' une sphère S par le plus court chemin, il semble naturel (pour des raisons de symétrie) de rester dans un même plan contenant M_1 et M_2 et par conséquent de décrire un arc de cercle.

Ce cercle aura un rayon au plus égal au rayon r de la sphère.

La figure ci-contre montre que parmi les cercles contenant M_1 et M_2, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{M_1M_2}$ est d'autant plus petite que le rayon est plus grand.

En conséquence, c'est avec le grand cercle contenant M_1 et M_2 qu'on réalise la plus courte distance entre M_1 et M_2.



Questions : 1) Quelle est la distance en mètres de deux points situés à 1° (respectivement 1') sur une sphère de rayon r mètres ? Etudier le cas $r = 6\,366\,000$ m.

2) On appelle **nautique** (on disait autrefois : mille marin), la longueur d'un arc de grand cercle de 1'. Sachant que le rayon moyen de la Terre est de 6 366,2 km, calculer en kilomètres la longueur d'un nautique (voir exercice 3. du § 1.4.). On appelle **nœud** la vitesse correspondant à un parcours de un nautique en une heure.

3) Pourquoi les lignes aériennes Paris-Tokyo survolent-elles les régions polaires ?

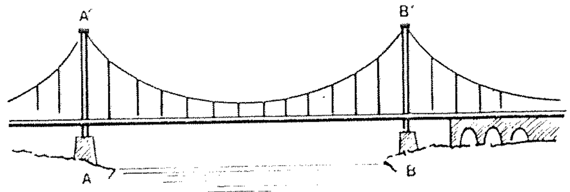
4) Un chasseur fait 5 km vers le sud, 5 km vers l'ouest, tue un ours, puis, en marchant 5 km vers le nord, se retrouve à son point de départ. Quelle est la couleur de l'ours ?

5) Trouver tous les points de la surface terrestre tels qu'en effectuant 5 km vers le sud puis 5 km vers l'ouest et enfin 5 km vers le nord on se retrouve au point de départ.

4. Verticales en un point du globe

deux droites verticales ne sont jamais parallèles puisqu'elles se rencontrent au centre de la terre.

Cependant si elles sont suffisamment voisines elles sont presque parallèles.

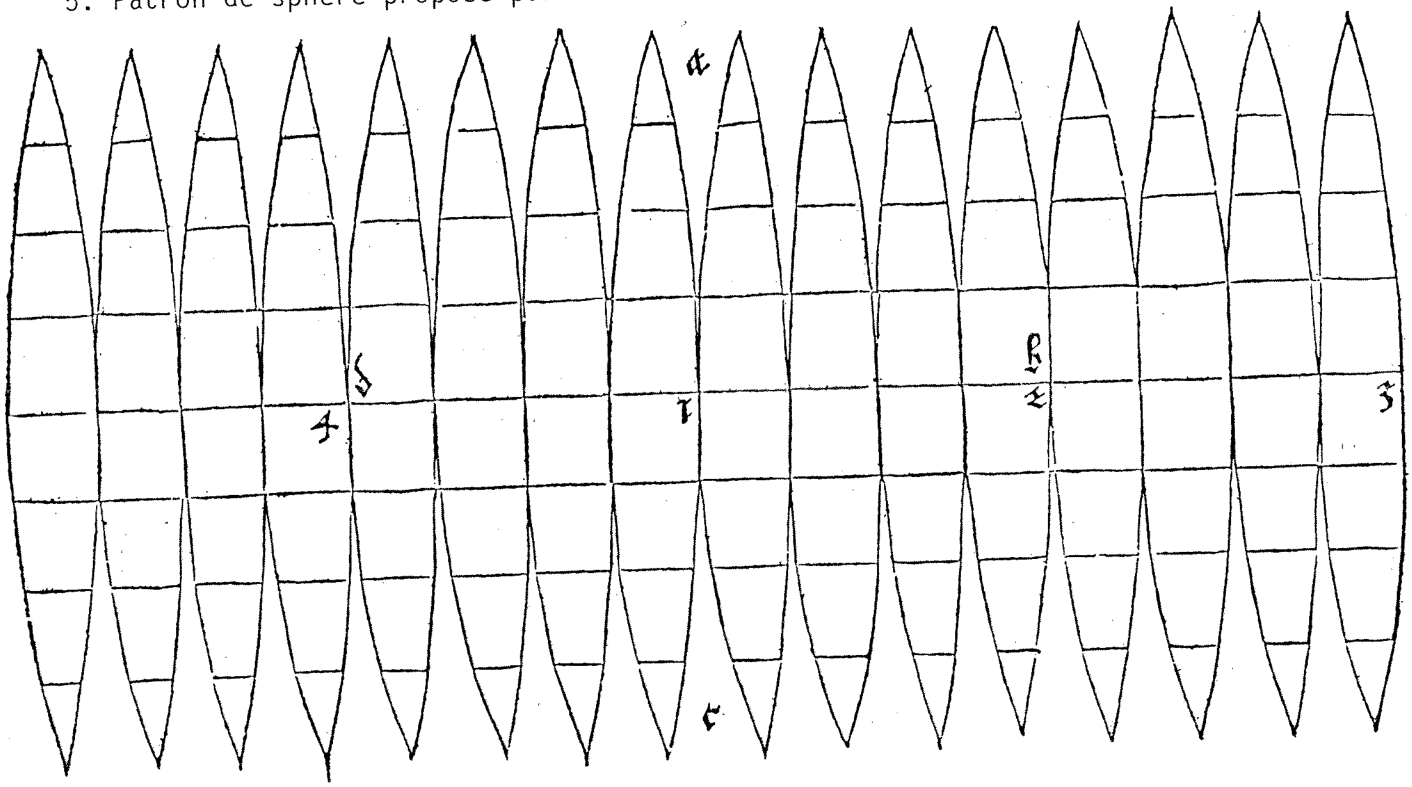


Pont de Tancarville sur la Seine entre Le Havre et Rouen

Prenons comme exemple les deux pylônes du pont de Tancarville qui sont distants de 600 m environ et qui ont 120 m de haut. Le calcul montre que la différence entre les segments AB et A'B' (voir figure) est de 1 cm environ. C'est imperceptible.

Conclusion : A l'échelle humaine *, nous ne commettons pas d'erreur sensible en admettant que deux verticales sont parallèles. De la même façon, nous pouvons admettre, à l'échelle humaine, que des plans horizontaux sont parallèles.

5. Patron de sphère proposé par Albrecht DÜRER



Géométrie Hugodomoïdale.

Le comte Léopold Hugo, neveu de notre grand poète, a publié dans plusieurs brochures, de 1867 à 1875, diverses recherches sur une catégorie de solides qu'il avait été amené à étudier par des considérations de minéralogie et qu'il a en conséquence dénommés « cristalloïdes ». Bien que ces recherches présentent un certain intérêt théorique et pratique, elles n'ont été signalées dans aucun ouvrage de géométrie. du moins à notre connaissance. Il convient de dire d'ailleurs que l'originalité — pour ne pas dire pis — du style de l'auteur, dont nous avons donné en épigraphe quelques échantillons, et qui dans son esprit devait attirer l'attention sur ses études, a plutôt nui à leur diffusion.

« L'équidomoïde, dompteur de sphéres. »
« L'équidomoïde est comme le soleil : aveugle qui ne le voit pas ! »
« L'École hugodomoïdale est vraiment l'École romantique de la Géométrie. »
« La sphère n'a plus qu'à se dégonfler... ou à se résigner au rôle d'Équidomoïde limite. »
« Analyste ! rends hommage à la Vérité, sinon l'Équidomoïde vengeur viendra peser, la nuit, sur ta poitrine anxieuse. »

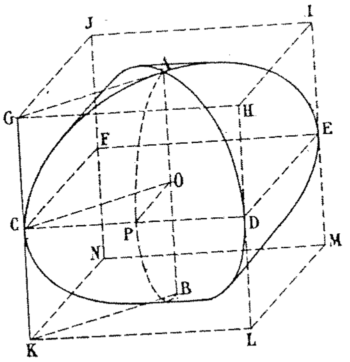
Projet d'affiche :

« Jeunes élèves !
N'écoutez pas ce farceur d'Équidomoïde
Lequel prétend démolir notre sphère et veut [dégommer Archiméde !
Sans craindre ses onglets, courons sus à l'Équido... [géométrique.
Tombons tous sur l'excentrique
A coups de trique !
Muera ! »

Cte Léopold Hugo.

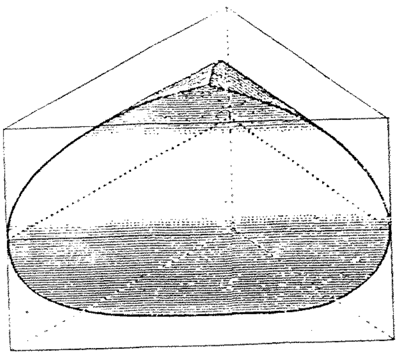
Contrairement à ce qu'il pensait, Léopold Hugo n'est pas le premier qui se soit occupé de cette nature de solides ; lui, qui, en apparence tout au moins, avait déclaré la guerre à la géométrie dite « archimédienne », eût sans doute été fort marri d'apprendre qu'un mathématicien — non des moindres — s'en était déjà occupé avant lui, et que ce mathématicien était précisément... ARCHIMÈDE. La publication récente des Métriques de Héron d'Alexandrie a en effet permis de constater que le géomètre syracusain s'était occupé au moins d'un cas particulier de la question dans ses *Éphodiques*.

Équidomoïdes. — Considérons un cube GHIJ... ; soit APB une demi-circonférence dont le diamètre est la droite AB joignant les centres des deux bases du cube et dont le plan est perpendiculaire à l'arête KL. Admettons maintenant qu'une droite CP se déplace parallèlement à KL de telle sorte que son extrémité P reste sur la demi-circonférence APB. Dans son mouvement, cette droite engendre une surface cylindrique qui, limitée aux plans APB et ACB, est un *onglet*. Si l'on réunit 8 onglets identiques, on forme le solide de la figure,

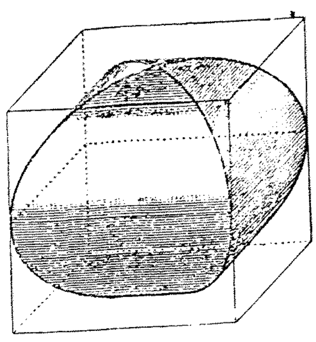


qui est un *équidomoïde* à base carrée CDEF ; ce solide coupé par le plan CDEF donne le contenu d'une voûte dite en « arc de cloître ».

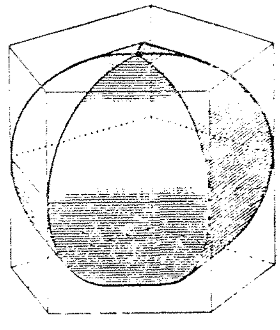
On peut obtenir d'une manière analogue un équidomoïde ayant pour base un polygone régulier quelconque. Nous donnons ci-après la série des équidomoïdes ayant pour base un triangle équilatéral, un carré, un pentagone, ..., et un cercle ayant même rayon que la demi-circonférence directrice ; dans ce dernier cas, le solide engendré devient une sphère. On peut donc considérer la sphère comme un équidomoïde limite.



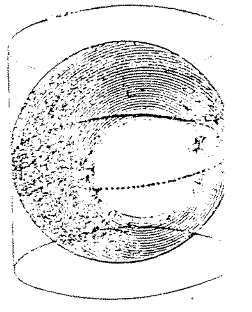
Base triangulaire.



Base carrée.



Base pentagonale.



Base circulaire (sphère

Extrait de "Oeuvre complète d'Archimède" - Ed. Blanchard

DE LA SPHÈRE ET DU CYLINDRE

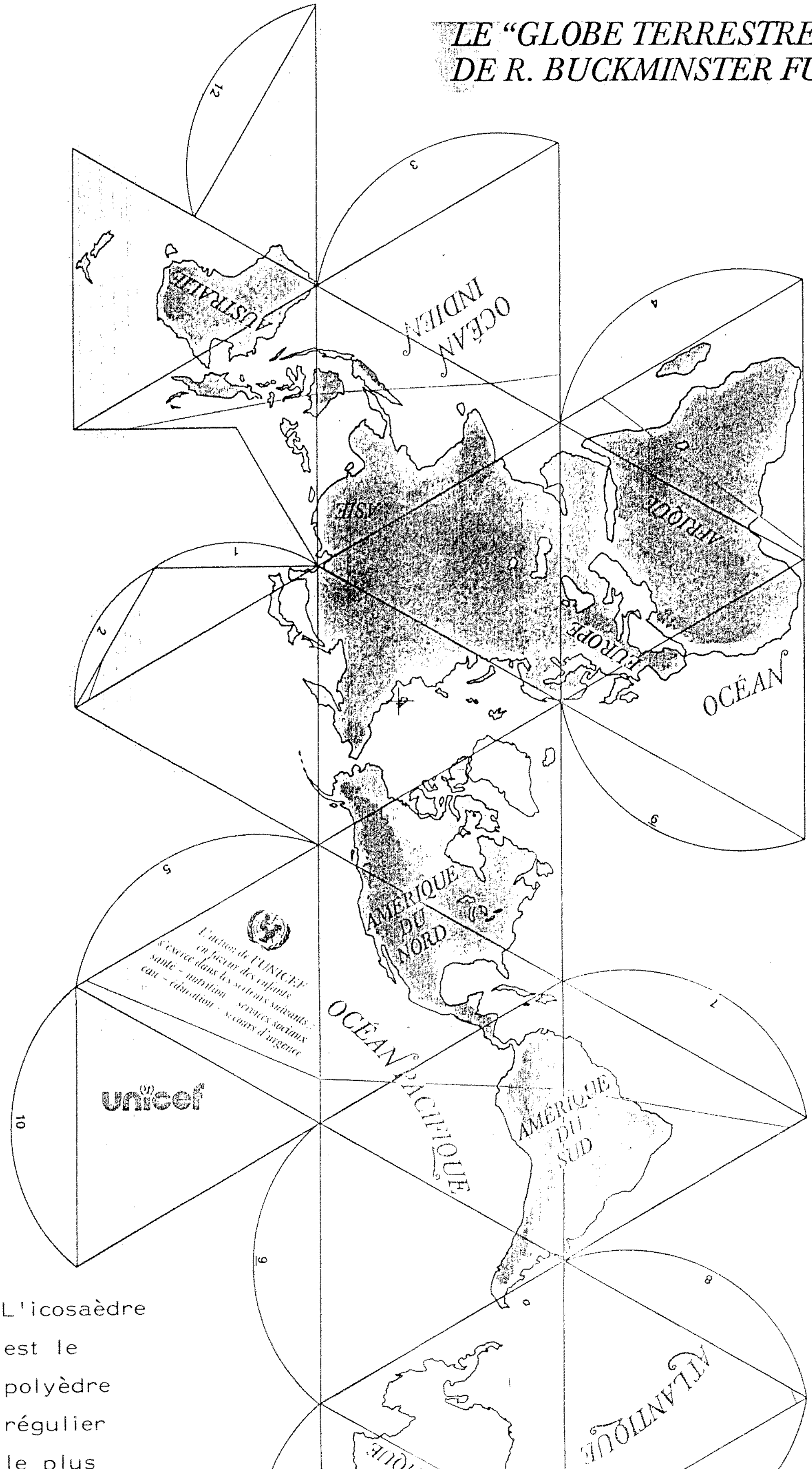
LIVRE I

Archimède à Dosithée, Salut !

Parmi les propositions que je t'ai envoyées précédemment comme ayant été examinées par moi-même, j'avais écrit la suivante, accompagnée de sa démonstration : Tout segment délimité par une droite et par une section de cône rectangle (1) vaut les quatre tiers du triangle ayant même base que le segment et une hauteur égale. Ayant rencontré depuis lors des théorèmes qui méritent d'être signalés, je me suis occupé de leurs démonstrations. Ce sont les suivants : d'abord, l'aire de toute sphère est quadruple de son plus grand cercle ; ensuite, l'aire de tout segment de sphère vaut le cercle dont le rayon (2) est égal à la droite menée du sommet du segment à la circonférence du cercle qui est la base du segment (3) ; en outre, pour toute sphère, le cylindre ayant la base égale au plus grand cercle de la sphère et la hauteur égale au diamètre de la sphère vaut une fois et demie cette sphère, et son aire vaut une fois et demie celle de cette sphère.

Ces propriétés, d'un caractère primordial dans les figures dont nous venons de parler, ont cependant été ignorées par ceux qui se sont occupés de géométrie avant nous, et aucun d'eux n'avait discerné que ces figures avaient une commune mesure. Aussi, n'ai-je pas hésité à mettre ces propriétés en parallèle avec celles qui ont été traitées par les autres géomètres, ainsi qu'avec celles, relatives aux figures solides, examinées par Eudoxe, qui paraissent être beaucoup plus importantes; notamment que toute pyramide vaut le tiers du prisme ayant même base que la pyramide et hauteur égale, et que tout cône vaut le tiers du cylindre ayant même base que le cône et hauteur égale. Or, bien que ces propriétés eussent aussi un caractère primordial dans ces figures, il se fait cependant que tous les géomètres qui, avant Eudoxe, furent nombreux et dignes d'être mentionnés, les ont ignorées, et qu'aucun d'eux ne les a discernées. Il sera d'ailleurs loisible d'examiner mes propositions à ceux qui en seront capables. Il eût fallu toutefois qu'elles fussent publiées du vivant de Conon, car j'estime que lui surtout aurait été à même de les comprendre et capable de donner une appréciation à leur sujet. Cependant, estimant qu'il y a avantage à les porter à la connaissance de ceux auxquels les mathématiques sont familières, je t'envoie les démonstrations que j'en ai écrites ; il sera loisible de les examiner à ceux qui sont habiles en mathématiques. Sois en bonne santé.

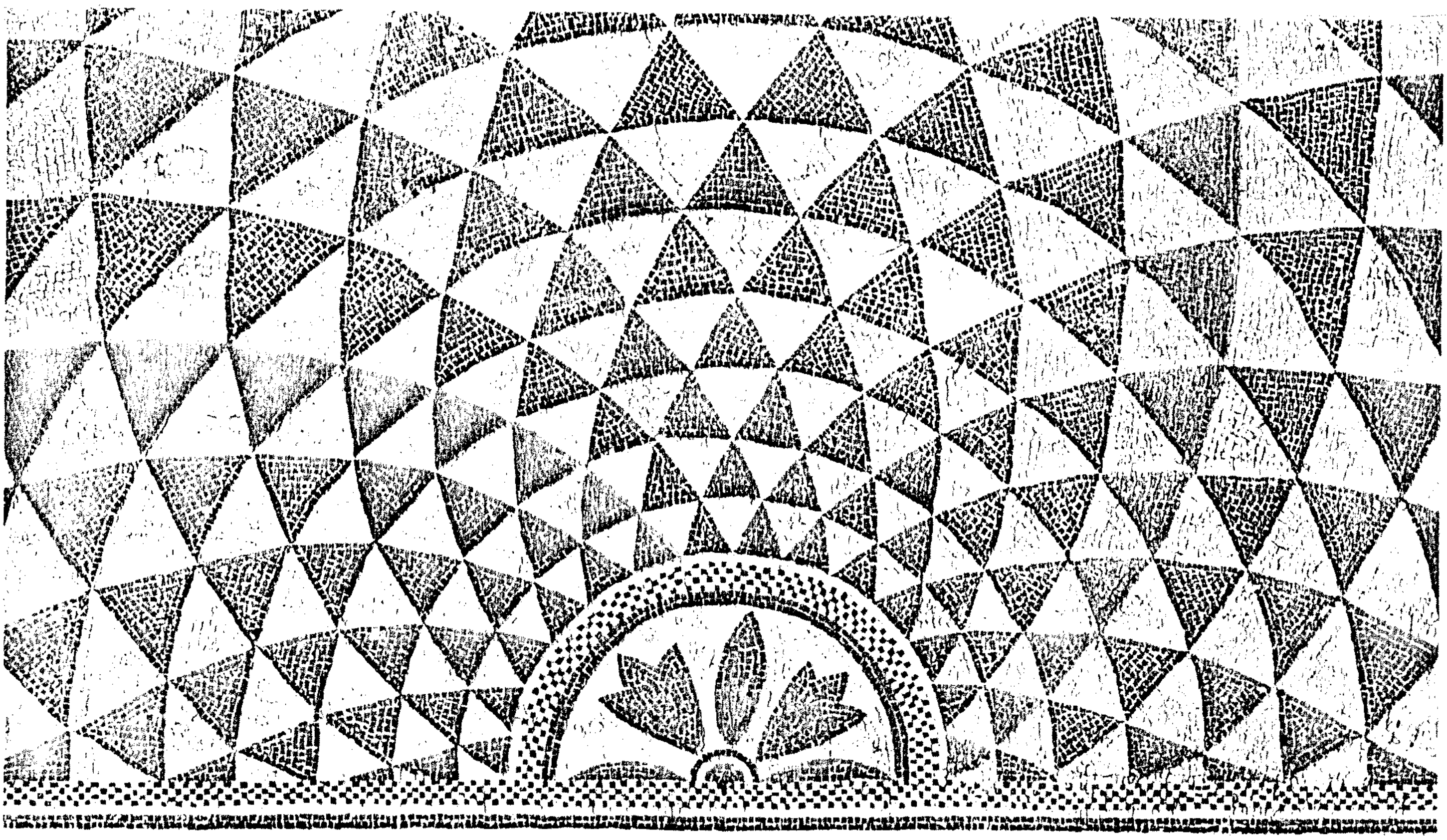
LE "GLOBE TERRESTRE" DE R. BUCKMINSTER FULLER.



L'icosaèdre est le polyèdre régulier le plus proche de la sphère

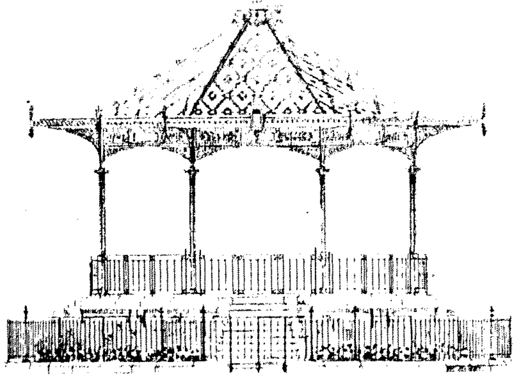
observations en architecture

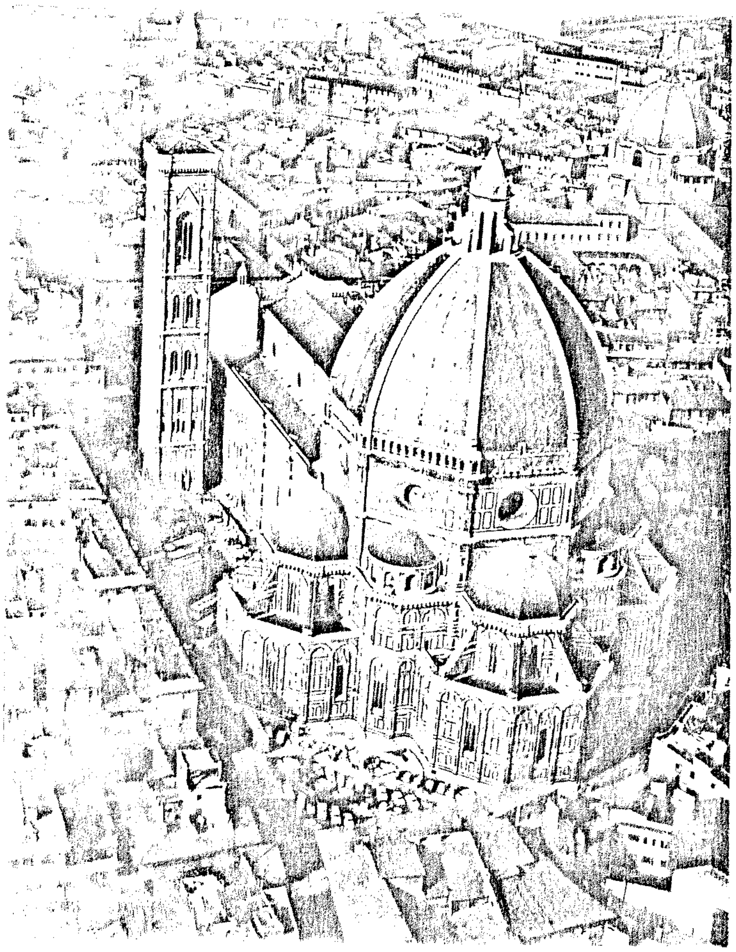
La géométrie est partout parmi vous. Regardez et retrouvez les formes connues.



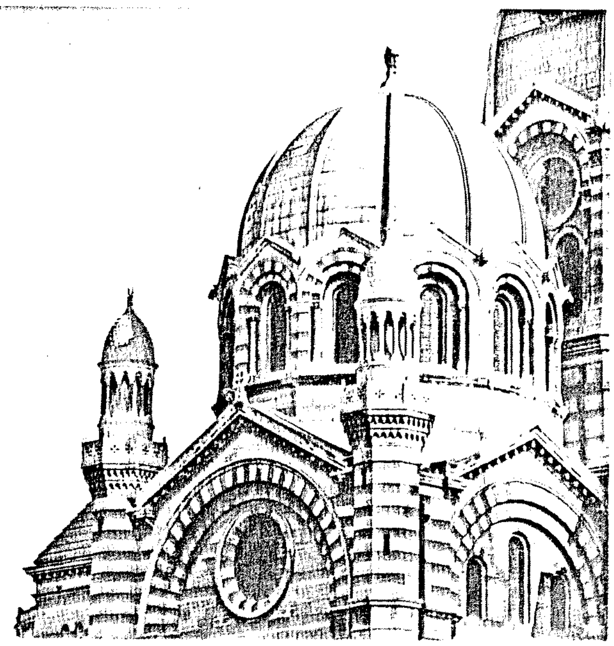
Mosaïque d'El-Jem

Kiosque à musique

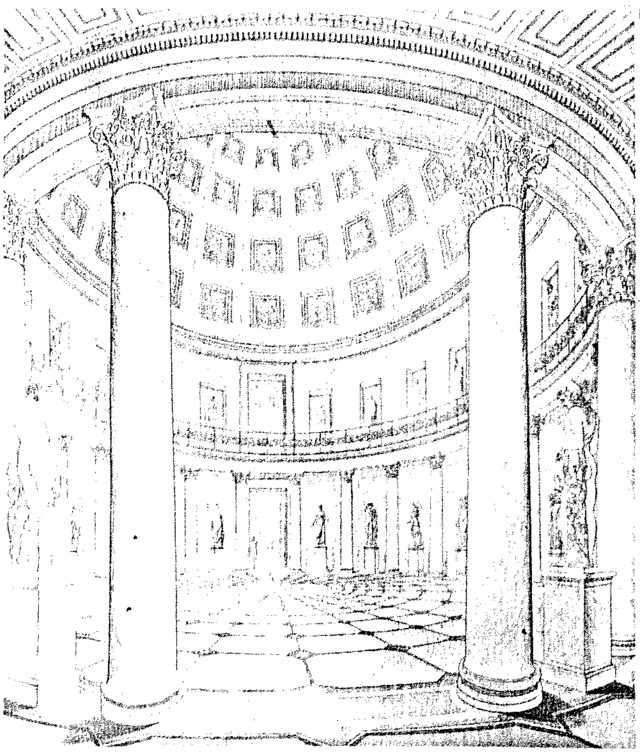




Coupole de Ste Marie des
Fleurs - Florence



Cathédrale de Marseille
Coupole



Altes Museum de Berlin - Rotonde

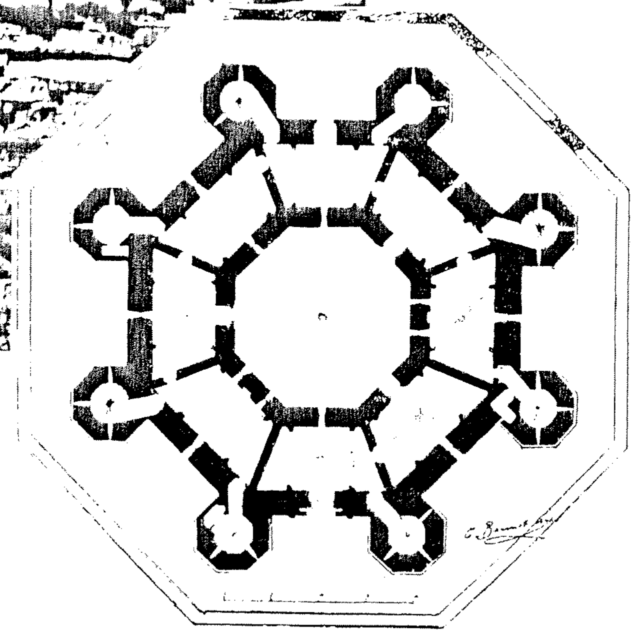
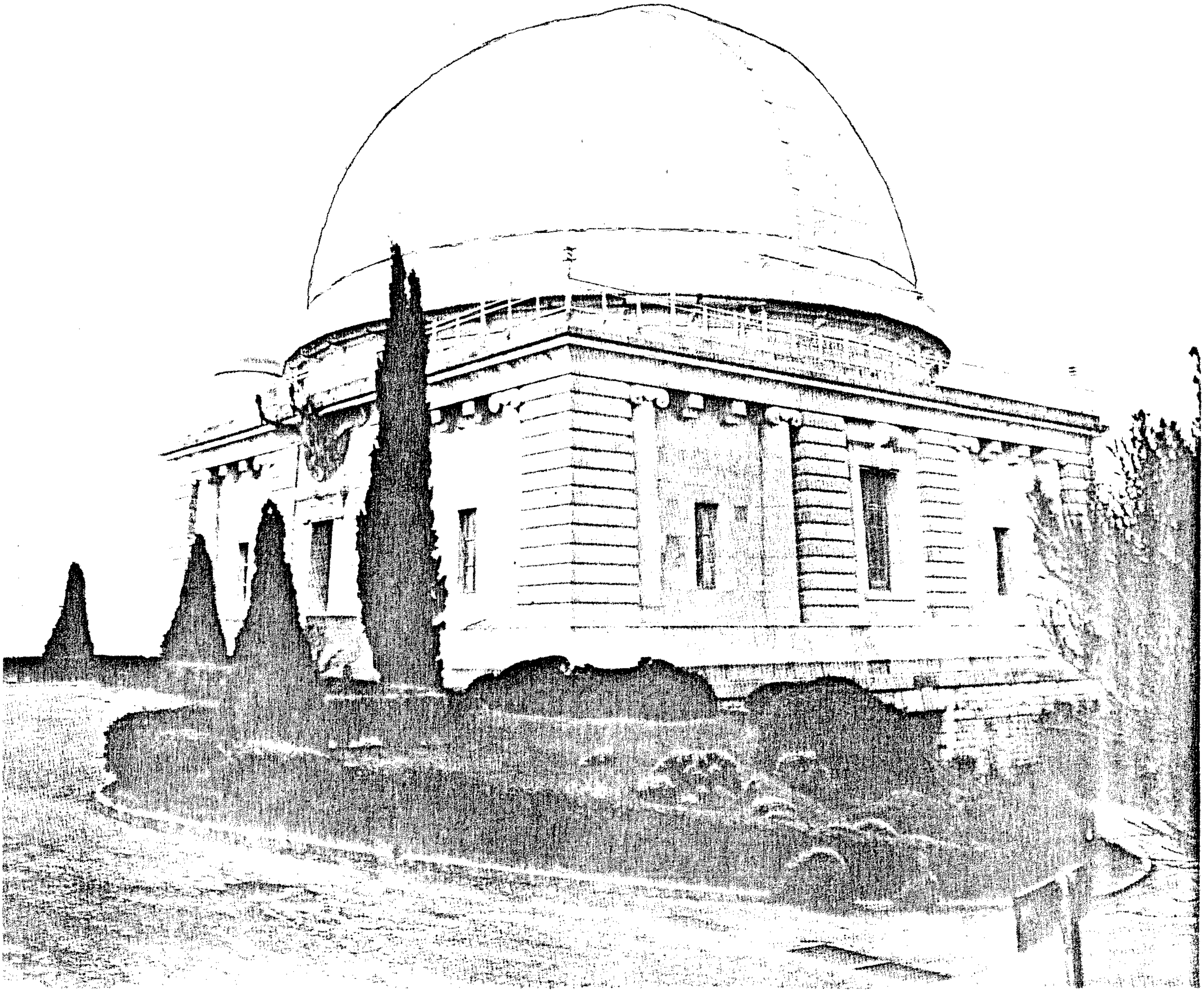
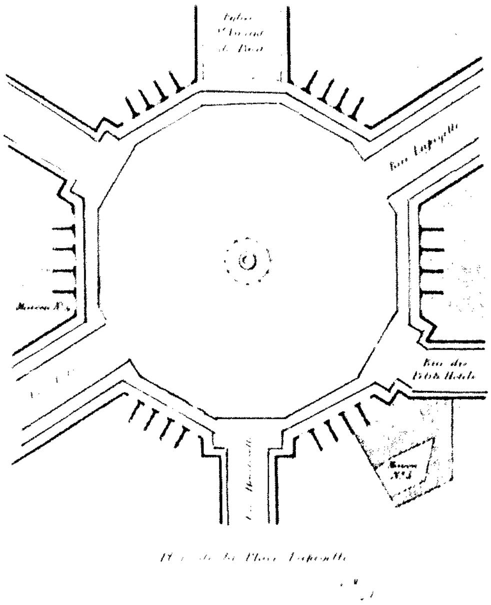


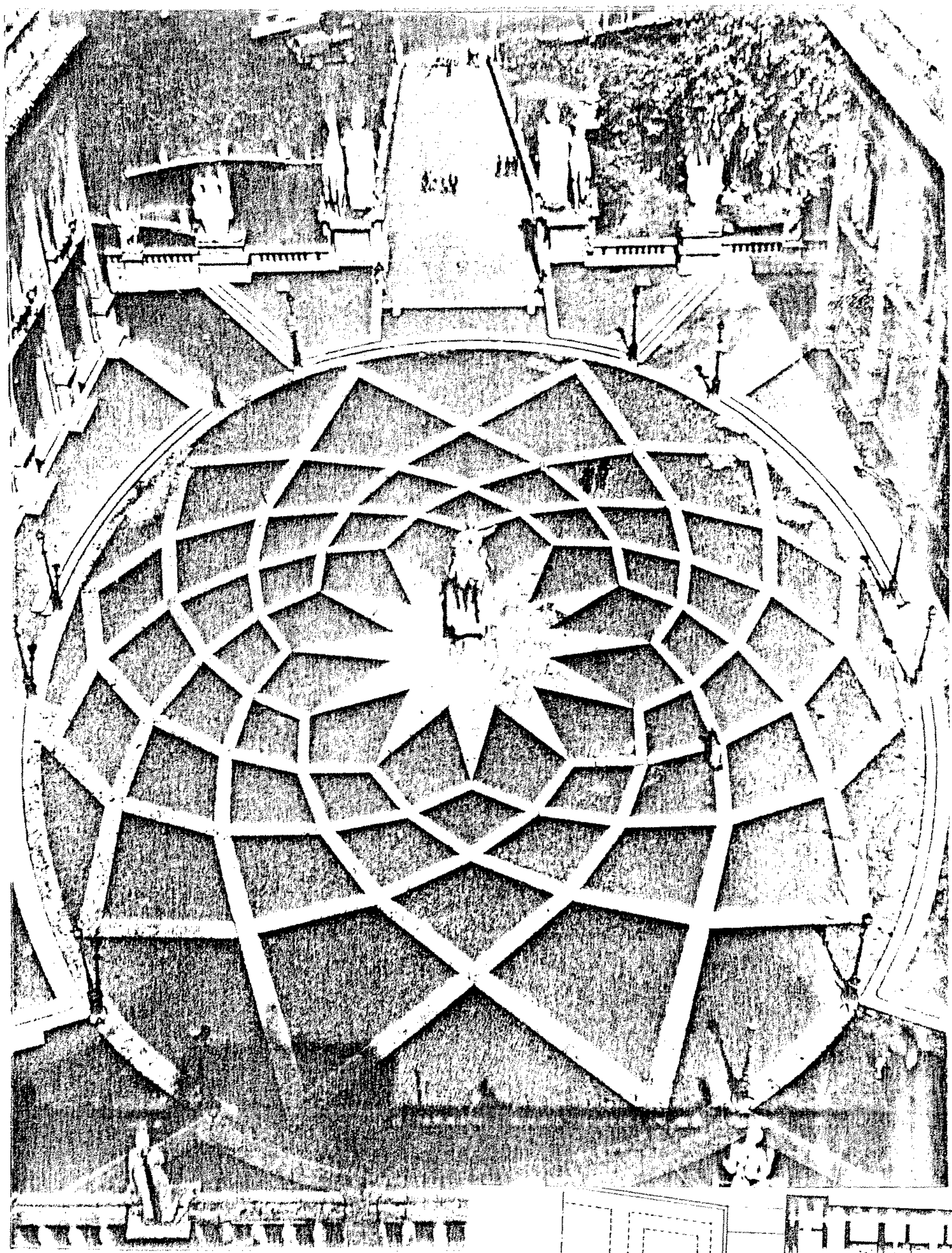
Photo et plan de
Castel del Monte
Sud de l'Italie



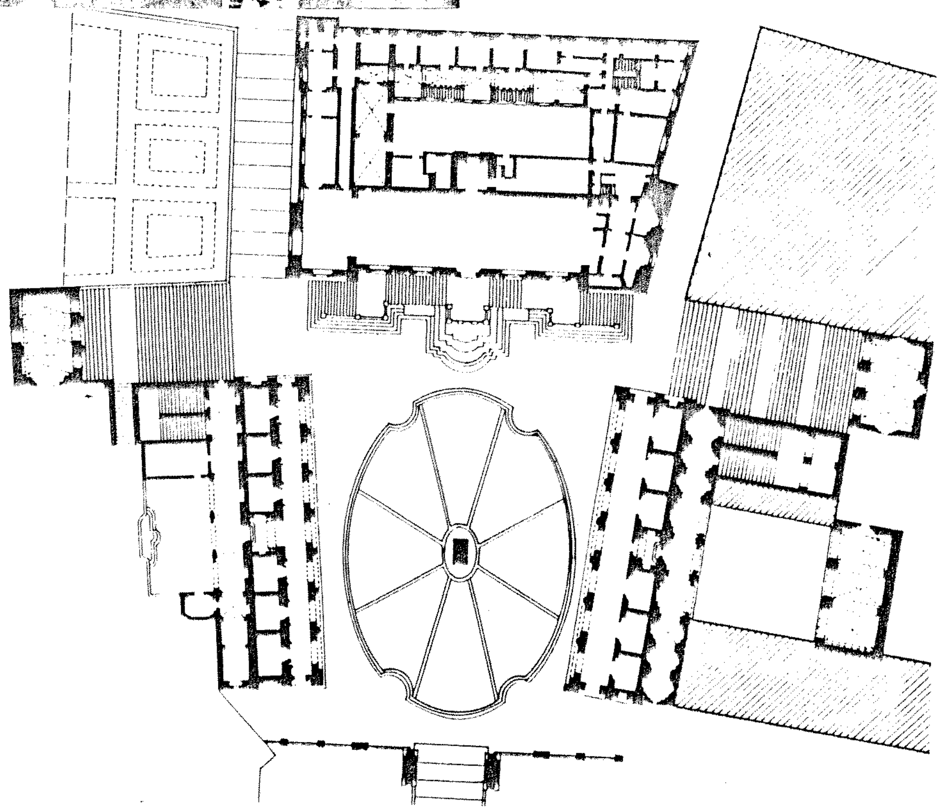
Observatoire de Nice



Plan de la Place Lafayette - Paris

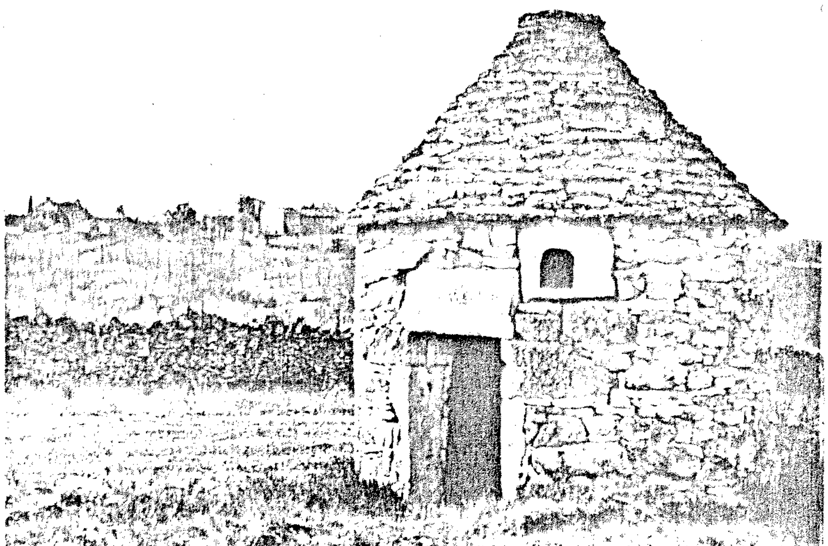


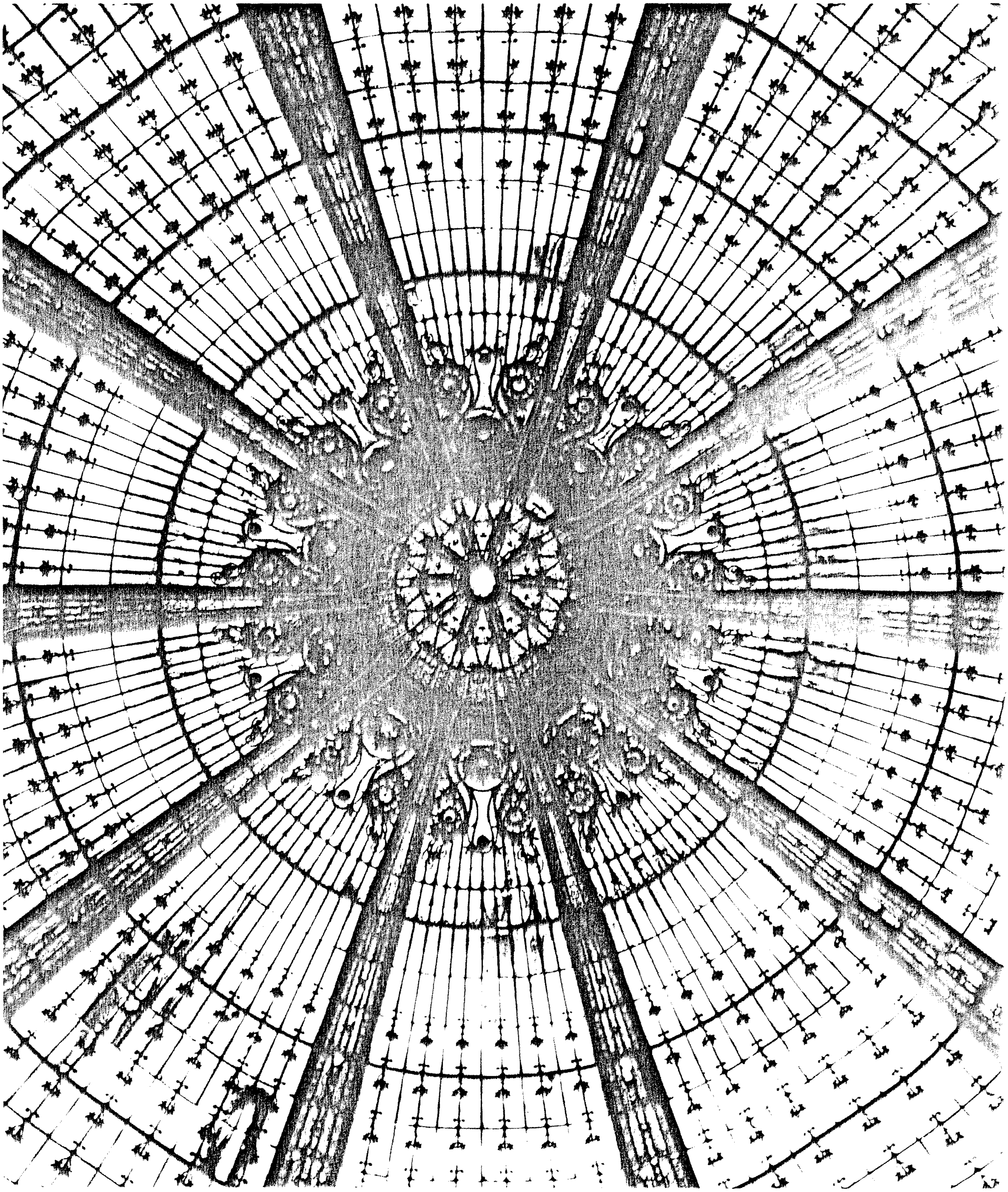
Place du Capitole - Rome
forme elliptique
Photo : pavement de Michel-Ange
Plan : ancien pavement



Londres

Garriotte d'Esclauzels





Paris - Galeries Lafayette - Verrière de la Coupole