ACTIVITÉ HEURISTIQUE
EN CLASSE DE SIXIÈME

Tania KABBAB (*)

Une activité de construction d'un carré inscrit dans un triangle a été proposée en mai 1985 aux élèves de trois classes de sixième (âge des élèves : environ 12 ans) du collège d'Ostwald. Cette activité était présentée par un *film* de construction, analogue à un autre *film*, montrant un partage en trois d'un rectangle, antérieurement étudié. Au mois de janvier, une évaluation en géométrie avait permis d'identifier des difficultés de coordination (entre les éléments d'une instruction), de perception et de désignation. En annexe, on trouvera les énoncés.

Les élèves de sixième ne manquent ni d'initiative, ni d'intuition, comme le fait ressortir l'analyse de leurs démarches que nous avons effectuée; un bon choix d'activités heuristiques devrait suffire pour stimuler leurs aptitudes.

Une production correcte isolée ne permet pas d'être assuré que l'élève a bien atteint les objectifs visés, et l'échec demande une identification de ses causes. C'est pourquoi nous avons demandé aux élèves de fournir des explications à l'appui de leurs construction; et l'examen de ces explications s'est avéré indispensable pour identifier certaines des démarches mises en œuvre par les élèves.

Activités proposées (voir énoncés en annexe).

Dans les deux activités de construction présentées par un *film de la construction* :
— partage d'un rectangle en trois rectangles superposables,
— détermination d'un carré inscrit dans un triangle donné,
il s'agit pour les élèves de reprendre la construction dans des conditions qui leur sont données (par les figures initiales, fournies sur les feuilles-réponses). Ces activités exigent une interprétation correcte de chaque étape, une coordination entre les étapes, de l'étape initiale à l'étape finale.

Le partage en trois d'un rectangle peut être effectué de façon satisfaisante grâce à des mesures et des calculs, même si cette procédure n'est pas une construction géométrique en bonne et due forme. Il en résulte deux inconvénients : la motivation des élèves pour l'utilisation de l'algorithme de construction présenté reste limitée et il y a recours à la procédure de mesure dès que l'élève se bloque. En choisissant la construction d'un carré inscrit dans un triangle, nous avons espéré éviter ces inconvénients : en effet, il est à peu près exclu de réussir à tracer une

(*) En raison des difficultés d'expression en français de l'auteur, Monsieur F. PLUVINAGE a revu cet article.

figure satisfaisante non seulement par recours à des mesures, mais même par approximation.

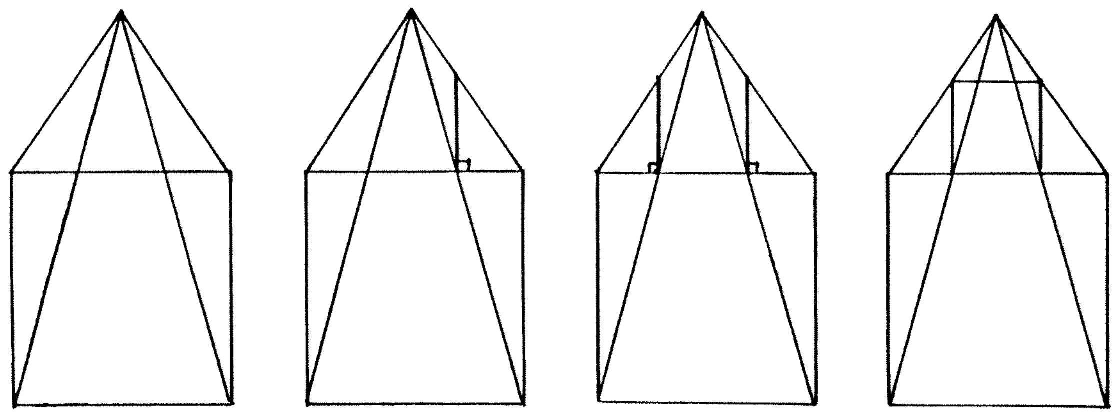
Résultats de l'analyse des démarches employées pour la construction de carré.

Nous avons été conduits à distinguer quatre principaux types de démarches utilisées par les élèves (entre parenthèses, nous indiquons l'effectif concerné, l'effectif total étant 76) :

1°. Algorithme de construction bien intégré et recours à des initiatives (36).
2°. Algorithme servant d'outil pour conduire à une construction automatisée de carré (16).
3°. Algorithme mis en œuvre sans servir à construire le carré (4).
4°. Interférences entre l'algorithme et les données (15).

Avant d'entrer dans le détail de ces démarches, il convient de remarquer que la construction exige une assez bonne précision du tracé, faute de quoi l'obtention d'un carré inscrit dans le triangle est problématique.

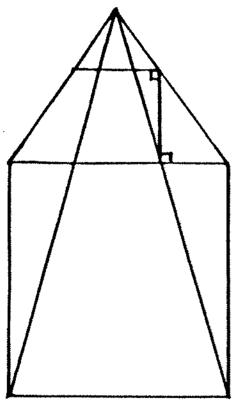
1°. La première catégorie est celle des élèves qui ont été les plus sensibles aux contraintes de la situation, et c'est justement par rapport au respect de ces contraintes qu'ils ont fait preuve d'initiative. A l'exception d'un élève, ils ont procédé comme suit pour tracer le carré :



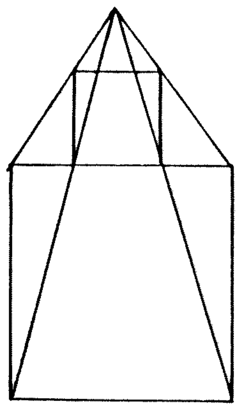
Situation après le tracé des obliques — 1eétape — 2eétape — 3eétape

L'élève qui fait exception a procédé par perpendiculaires et intersections avec les côtés du triangle, comme illustré ci-contre (les deux premières figures sont les mêmes que ci-dessus). Il s'agit donc d'un parcours du carré, sommet après sommet.

On peut parler pour les élèves de cette première catégorie de comportement heuristique, aboutissant à un algorithme bien adapté aux contraintes de la situation.



2^{e}étape



3^{e}étape

En effet, le tracé usuel d'un carré se fait en prenant en compte la longueur du côté. Ici, les élèves ont réussi à ne pas faire intervenir cette longueur mais uniquement des tracés de perpendiculaires et des déterminations de points d'intersection. L'exercice a donc déterminé un changement de stratégie de construction; la part d'initiative des élèves a consisté en l'obtention d'un nouvel algorithme de construction du carré, adapté à l'objectif final à atteindre.

2°. Pour les élèves de la deuxième catégorie, la construction usuelle d'un carré reste présente, et prioritaire par rapport à la condition d'inscription dans le triangle. C'est ainsi qu'après le tracé des obliques, ces élèves, ayant la possibilité de mesurer le côté du futur carré, vont faire intervenir cette mesure de longueur (éventuellement arrondie lors de la lecture sur la graduation de la règle) ainsi que des tracés de perpendiculaires pour se ramener à la construction habituelle. Le tracé ainsi obtenu peut être correct ou approximatif et le carré inscrit ou non dans le rectangle.

3°. La troisième catégorie est constituée de quatre élèves qui, après l'obtention correcte des obliques qu'il fallait tracer, n'ont pas découvert qu'ainsi se trouve déterminé un côté du carré.

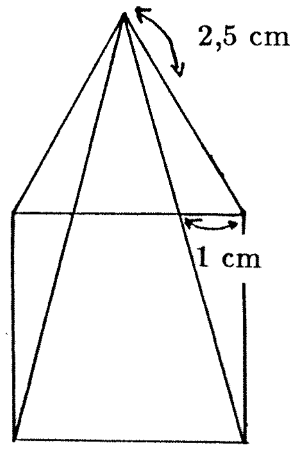


Figure réduite dans le rapport 3/5

Comme le triangle de la feuille-réponse se trouvait être équilatéral, trois de ces élèves ont été attirés par la symétrie de la figure. Par exemple, l'un d'eux dit : "*J'ai pris 2,5 cm de chaque côté du triangle et j'ai pris 1 cm de chaque côté du carré*". Le dernier élève a procédé par tâtonnement : "*J'ai mesuré plusieurs fois et j'ai trouvé 2,4 cm pour faire le carré qui est dans le triangle*".

4°. La dernière catégorie est constituée des élèves qui ont cherché à faire intervenir non seulement l'algorithme de construction, mais des données de l'exemple qui était montré dans le *film*. Neuf d'entre eux ont procédé ainsi dès la première étape : le carré de la première étape de l'exemple ayant un côté de 4 cm, ils ont reporté 4 cm perpendiculairement à la base du triangle équilatéral; mais comme la base du triangle équilatéral a une longueur de 5cm, le résultat qu'ils obtiennent est un rectangle (qu'ils disent être un carré). Les quadrilatères construits dans le triangle à la suite de cela sont souvent des rectangles, prétendus carrés. Les six autres élèves effectuent les étapes 1 et 2 de l'algorithme présenté, de façon correcte, mais utilisent ensuite la distance qui sépare, dans l'exemple, le sommet du triangle de l'un des sommets supérieurs du carré inscrit; ils doublent (?) cette distance pour effectuer alors le report.

Pour les cinq élèves non pris en compte dans les catégories précédentes, les tracés qui succèdent aux deux premières étapes (correctement effectuées) sont entachés de divers défauts : orthogonalité ou mesure sont erronées ou *oubliées*.

Dans cette présentation succinte, nous espérons avoir mis en évidence qu'il existe déjà pour le professeur le moyen de repérer certaines compétences (ou incompétences) en géométrie, sur des exercices qui, pour beaucoup, ne font pas encore partie de la panoplie de *vraies* questions de géométrie.

ANNEXE

Janvier 1985

Un programme de construction

Sur la feuille jointe, on a tracé un cercle $\mathcal{V}$ de centre J et on a placé un point I.

1°. Tracer le cercle de centre I et de rayon 58 mm (ou : 5,8 cm). Désigner par $\mathcal{U}$ ce cercle.

2°. Construire la perpendiculaire en I à la droite (IJ) et la perpendiculaire en J à la droite (IJ).

3°. Noter K et L les points d'intersection du cercle $\mathcal{U}$ et de la perpendiculaire en I à (IJ); placer L au dessus de K sur la feuille.
Noter M et N les points d'intersection du cercle $\mathcal{V}$ et de la perpendiculaire en J à (IJ); placer N au dessus de M sur la feuille.
Noter O le point d'intersection des droites (KM) et (LN).

4°. Tracer le cercle de diamètre $[IO]$; noter A et B ses points d'intersection avec le cercle $\mathcal{U}$.

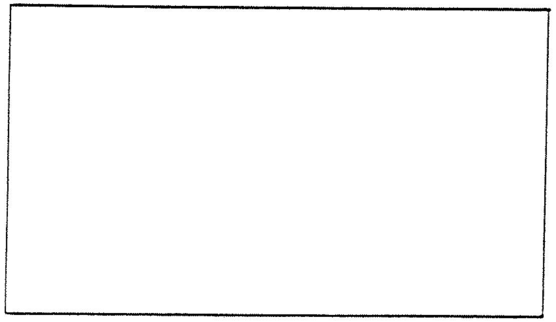
5°. Tracer les droites (OA) et (OB).

Au bas de la feuille de construction, une place a été prévue pour écrire tes observations sur les droites (OA) et (OB).

Nom : ____________________

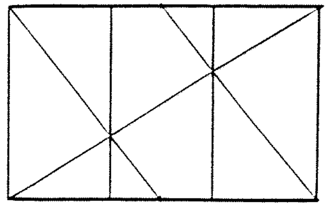
Prénom : ____________________

1°. Partage le rectangle ci-dessous en trois rectangles de mêmes dimensions, en suivant la construction illustrée.



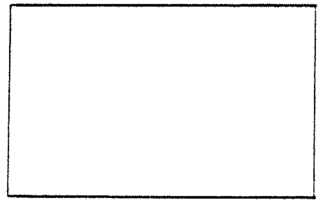
2°. Explique comment tu as fait.

Partage d'un rectangle en trois rectangles

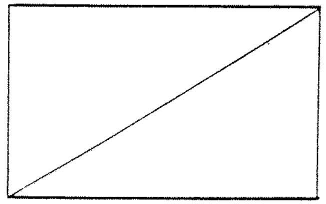


Le rectangle partagé

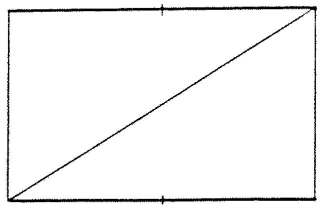
Et les étapes de la construction :



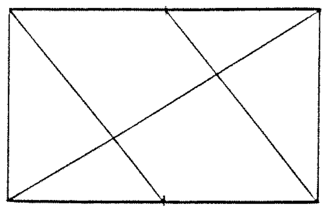
Le rectangle de départ



Etape 1



Etape 2



Etape 3

Etape 4 : le rectangle partagé (figure du haut)