Université Louis Pasteur
I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG Cédex

1986

CALCULS NUMÉRIQUES

EN CLASSE DE QUATRIÈME

Elèves d'environ 13 ans

Calcul mental, calcul écrit, calcul machine

Etude faite par Bernard BLOCHS

pour le Diplôme d'Etudes Approfondies

de Didactique des Mathématiques

C A L C U L S N U M E R I Q U E S E N 4 E M E

CALCUL MENTAL, MACHINE, CRAYON PAPIER

1. UN SCENARIO POUR LE CALCUL NUMERIQUE EN CLASSE DE QUATRIEME

INTRODUCTION

Quelques chiffres : sur 122 élèves (de 4ème, 3ème, 2de), en 84, 96 % ont une machine à calculer, 9 % ont appris en classe à l'utiliser D'autre part 30 % ont eu un entraînement plus ou moins important au calcul mental.

Ces faits semblent indiquer que le calcul machine et le calcul mental sont des parents pauvres par rapport au calcul papier-crayon.

Nous pouvons cependant émettre l'hypothèse suivant :

"Si le fait de savoir mettre en oeuvre une technique de calcul renvoie à une formation qui reste étroitement limitée, celui de choisir entre plusieurs techniques, pour appliquer celles qui sont le plus efficaces pour traiter des calculs donnés, correspond à une formation mathématique réelle" (F. Pluvinage).

Ce rapport présente un scénario qui amène les élèves à utiliser les trois techniques de calcul en essayant de les entraîner à mieux faire leur choix parmi celles-ci.

Ce scénario est précédé de quelques remarques rapides sur le calcul numérique, les trois techniques de calcul et leurs limites.

LE CALCUL NUMERIQUE

Le calcul numérique occupe une place importante dans les programmes et instructions (3). Nous pouvons souligner que la résolution d'un calcul comporte plusieurs phases : recherche d'une procédure ou stratégie, exécution du calcul, vérification du résultat.

Dans la recherche d'une procédure, plusieurs facteurs inter-agissent : connaissance (ou pas) d'une définition, d'une propriété d'une "astuce", souvenir d'une situation comparable... etc, et conditionnent le choix d'une technique (machine, mental, papier-crayon).

Exemples : les exécutions des calculs suivants dépendent des connaissances :

* **définitions** : 3^5;$\sqrt{9}$; 4 ! ; cos 30°

(cf paragraphe machine à calculer)

* **des propriétés** : $\frac{7^3}{21^3}$; $\frac{7}{9} \times \frac{3}{14}$

* **des savoirs de base** : 12,4 + 0,013 ; 17 x 8

(certains élèves, de CCPN par exemple, ne savent pas poser l'addition à cause des virgules).

* d'une formule, par exemple : 1 + 2 + ... + 99 + 100

on peut avoir oublié la formule mais savoir la retrouver

$$S = 1 + 2 + \ldots + 100$$

$$2\,S = 100.101$$

$$S = 100 + \ldots + 1$$

Nous pouvons différencier deux niveaux dans le traitement d'un calcul : si l'exécution est au niveau de l'activité, la recherche d'une procédure et la vérification sont plutôt au niveau de maîtrise de l'activité de contrôle. Ceci nous conduit au schéma suivant :

niveau activité : lire l'énoncé → exécution → écrire le résultat

niveau contrôle : recherche de procédure ← vérification
(avec le choix de
la technique)

- - - - - - → retours éventuels

Essayons de voir sur des exemples comment un calcul peut être différent suivant que l'on a une technique, le cp* ou les trois à notre disposition.

<u>a = 42 700,38 x 3</u>

1ère possibilité : calcul cp je pose l'opération et je l'effectue

2ème possibilité : je vérifie l'ordre de grandeur

à≃40 000 x 3 = 120 000 (me)* il y a 6 chiffres avant la virgule comme il y en a 2 après, cela fait 8. Je peux effectuer ce calcul à la machine et terminer en vérifiant que le résultat (128 101,14) est proche de 120 000.

<u>b = 307 020 x 409 500</u>

1ère possibilité : calcul cp

2ème possibilité :

b ≃ 300 000 x 400 000 = 12.10^{10} (me) nous "attendons" 12 chiffres, les 8 premiers peuvent être trouvés avec une calculette, les autres mentalement.

me

307 020 x 409 500 = 12572469 0 000

machine

me

Ces exemples montrent que l'utilisation de différentes techniques peut "enrichir" une simple multiplication. En effet, dans les 2èmes possibilités, plusieurs parties des calculs comme arrondir les nombres, prévoir le nombre de chiffres des résultats, tenir compte de la capacité de la machine etc... sont plutôt au niveau du contrôle.

Il est bien-sûr recommandé de vérifier l'ordre de grandeur d'un résultat dans un calcul cp mais l'expérience montre que les élèves le font peu ou pas.

* cp : crayon-papier   me : mental   ma : machine

LA MACHINE A CALCULER

Avec une machine (ayant les touches correspondantes) un élève peut calculer $\sqrt{144}$; 7! ; 3^8 ; sin 45°... etc sans connaître les définitions correspondantes, en lisant le livret d'utilisation ou si une personne lui indique la marche à suivre.

Un élève peut calculer 23,8 x 3,55 sans connaître les tables de multiplication... etc.

La machine peut donc donner l'illusion que l'on peut se passer de "savoirs mathématiques".

Cette illusion est savamment entretenue par les publicités comme le montrent ces quelques slogans :

"Elles (les calculatrices) maths comme le prof"

Casio

"Les calculatrices c'est fait pour le calcul ; pour les maths voici la Math-Machine la TI 30 Galaxy"

Texas Instruments

"L'incroyable TI 57 LCD programmable, si les maths vous posaient des problèmes c'était avant de la connaître"

Texas Instruments

Ces publicités montrent qu'il est important de démystifier les machines, les meilleures façons étant de les utiliser pour en montrer les limites et les possibilités.

Une machine possède 2 types de limitations : une porte sur les nombres, l'autre sur la précision des résultats.

*Les nombres utilisés :

La capacité limitée d'une machine fait qu'elle ne permet que des calculs approchés sur les nombres non décimaux et elle est donc peu adaptée aux calculs où interviennent des fractions (non décimales) et des irrationnels si le résultat demandé est un résultat exact.

Dans ① les nombres utilisés sont aussi soumis à des contraintes :

sur une calculette $10^{-7} \leq |d| < 10^{8}$

sur une scientifique $10^{-99} \leq |d| < 10^{100}$

Dans ce dernier cas le nombre de chiffres non nuls est limité à 5 (ou 8) en écriture scientifique.

Une caractéristique des machines scientifiques est l'existence de chiffres de garde (en général 2 ou 3) : un résultat est affiché à 8 chiffres, la machine en utilisant 11 le plus souvent dans les calculs.

Une manipulation simple permet de vérifier l'existence et le nombre de ces chiffres :

exemple : appuyer sur la touche π, soustraire 3,14 (pour "faire de la place", à l'affichage), multiplier par 1000.

Cette manipulation peut bien sûr être utilisée pour augmenter la précision de tout résultat approché.

Précision des résultats

Dans un résultat approché, la précision fournie par une machine est en général (plus ou moins 1) sur le dernier chiffre, mais il peut arriver à des résultats catastrophiques (4.10^{8} au lieu de 1 cf activité 8).

($\pm$)

Cadre mathématique

Dans un calcul machine, l'écriture utilisée pour les nombres est une écriture décimale avec virgule flottante (la place de la virgule n'est pas fixe dans les nombres comme, par exemple, lorsque l'on demande un résultat au centième près) ce qui permet d'écrire ces nombres sous la forme :

$$d = \pm \underbrace{\sum_{n=0}^{N} a_n . 10^{-n}}_{\text{mantisse}} . 10^{p}$$

p : exposant

$a_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$

pour une calculette $N < 8$ $\quad 0 < p \leq 7$

scientifique $\begin{cases} N < 8 & |p| \leq 7 \text{ en nombre normal (pour une 8 chiffres)} \\ N < 5 & |p| \leq 99 \text{ en nombre scientifique (pour une TI 30)} \end{cases}$

Cette écriture mantisse - exposant permet le calcul suivant (mantisse limitée à 2 chiffres) :

$100 = 1.\ 10^2 \rightarrow \boxed{1}\ \ \boxed{2} \leftrightarrow \boxed{1}\ \ \boxed{2}$

$99 = 9{,}9\ 10 \rightarrow \boxed{9{,}9}\ \ \boxed{1} \leftrightarrow \boxed{0{,}9}\ \ \boxed{2}$

$100 - 99 \rightarrow \boxed{1}\ \ \boxed{2}\ \ -\ \ \boxed{0{,}9}\ \ \boxed{2} \leftrightarrow \boxed{0{,}1}\ \ \boxed{2}$

ce qui donne $100 - 99 = 0{,}1\ .\ 10^2 = 10$ (!)

LE CALCUL MENTAL

"Calcul mental, calcul royal" écrivait Alain.

Ce mode de calcul présente, en effet, beaucoup d'intérêt (le développer sortirait du cadre de ce scénario) mais ses limites sont difficiles à déterminer. Les performances réalisées par des calculateurs prodiges comme Klein, Inaudi, (8) montrent les possibilités de cette technique utilisée par des gens exceptionnels. Nous pouvons seulement dire qu'elles dépendent de chaque individu et en particulier de son entraînement, de ses connaissances (identités remarquables par exemple) de son goût ou pas pour ce type de calcul, de sa mémoire...etc.

LE CALCUL PAPIER-CRAYON

Contrairement aux autres techniques, ce mode de calcul ne possède pas de limitations et en 4ème un élève peut (théoriquement) effectuer tout calcul entièrement au crayon-papier.
(on peut bien sûr se demander si effectuer 1^{50} au crayon-papier présente beaucoup d'intérêt...)

RISQUE D'ERREUR ET COUT

Suivant la technique utilisée, un calcul n'aura pas la même sûreté ni le même coût. Considérons par exemple 7 x 12 et imaginons qu'un élève hésite entre le calcul mental et le calcul machine. Il est amené à comparer :

*les coûts :

machine : l'allumer, appuyer sur les touches, lire le résultat

mental : l'effort intellectuel nécessaire

(les coûts ne sont pas de la même nature : dans un cas le travail est manuel, dans l'autre intellectuel).

*la sûreté de 2 techniques :

Ainsi, un élève sera peut-être amené à faire le calcul à la machine même si le coût est pour lui plus élevé, si celui-ci est compensé par le gain en sûreté.

L'utilisation simultanée des 3 techniques, si elle amène l'élève à travailler davantage au "niveau contrôle" dans un calcul, lui donne aussi l'occasion de gérer un rapport de type gain (sûreté) / dépense (coût).

CHOIX DE LA TECHNIQUE :

Nous pouvons, pour terminer, nous intéresser plus particulièrement au choix de la technique.

. Les élèves n'étant pas entraînés, le choix de la technique la mieux adaptée à chaque cas n'est sans doute pas évident. Cette étude présente volontairement des énoncés qui peuvent paraître "pathologiques" parce qu'ils visent à minimiser le coût à l'emploi d'une des trois techniques par rapport aux deux autres, ceci pour aider les élèves dans leurs choix.

Exemples de calculs s'effectuant au moindre coût :

mentalement : 1^{10} ; 8×5 ; $-3 - 11$; $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}$

machine : 371×504 ; 7^5

au crayon-papier : $\frac{2}{3} - \frac{4}{7} + \frac{1}{2}$; $\frac{7 \times 36 \times 13 \times 5}{65 \times 9 \times 14}$

Bien sûr, le plus grand nombre de calculs à effectuer ne rentre pas dans des catégories aussi tranchées et cette étude présente des calculs où le choix de la technique et de la procédure est plus "ouvert". Il est parfois difficile de savoir à priori, si un calcul est à choix "ouvert" ou "étroit" ; ce sont alors les comportements des élèves qui l'indiquent.

Activité numéro 1

Une interrogation écrite de calcul avec autorisation d'utiliser des calculettes.

Consigne donnée aux élèves : "vous allez avoir vingt calculs à effectuer. Pour chacun d'eux vous pouvez vous servir de celles des trois techniques : calcul mental, calcul crayon-papier, calcul machine qui vous paraissent les plus efficaces.
Vous aurez simplement à entourer, à côté du résultat, la ou les techniques utilisées ; les abréviations utilisées sont les suivantes : calcul mental me ; calcul crayon papier : cp ou pc calcul machine : ma.
Il est précisé, pour la correction, que seront comptées comme réussites uniquement les résultats exacts, pas de valeurs approchées".

Conventions :

Calcul mental : vous n'écrivez que le résultat

Calcul crayon-papier : vous écrivez autre chose que le résultat (un résultat intermédiaire, une retenue, vous posez une opération)

Calcul machine : vous utilisez une machine (même pour une partie seulement du calcul).

Durée : jusqu'à la fin de la séquence scolaire.
Les feuilles distribuées aux élèves laissent une place pour écrire les calculs.

9°) $$\frac{\cancel{14} \times \overset{5}{\cancel{25}} \times \cancel{9}}{\underset{9}{\cancel{45}} \times \underset{2}{\cancel{28}} \times \underset{2}{\cancel{18}}} = \frac{5}{9 \times 2 \times 2} = \frac{5}{36}$$

Technique(s) utilisée(s)
me (pc) ma

Contenu de l'interrogation
Elle comporte vingt questions. Les nombres en jeu sont soit des entiers, soit des décimaux, soit des fractions, éventuellement négatifs. Chaque calcul ne propose qu'une seule opération éventuellement répétée. Par rapport au caluc1 machine il n'y a aucun problème d'introduction ni aucun dépassement de capacité. En revanche pour quelques uns des calculs, la calculette ne donne pas le résultat exact demandé mais arrondi.

Exemple d'interrogation

1) 41^2 2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ 3) $8,64 \times 3$ 4) $0,6^2$

5) $-3-8$ 6) $0,632^2$ 7) $\frac{2}{5}-\frac{7}{5}$ 8) $\frac{-21}{4} : \frac{35}{20}$

9) $\frac{14 \times 25 \times 9}{45 \times 28 \times 18}$ 10) 2^{10} 11) $8,7654321 \times 9$ 12) $9,87 \times 6,543$

13) $0,2 \times 0,1$ 14) 9^3 15) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$ 16) 15×230

17) $2,712 \times 7,2121$ 18) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$ 19) $2197 + \frac{1}{4}$

20) $0,5 \times 0,25$

Correction des copies

Pour chaque élève et chaque question on pourra relever :

1) Réussite : R   Arrondi : A   Faux ou non réponse : E (échec)

2) Relever la technique en hiérarchisant Me < Pc < Ma

Remarques :

Les élèves auront certainement des attitudes très différentes les uns des autres pour le choix des tehniques ; mais un grand nombre risque de ne pas tenir compte de la capacité limitée des machines aux calculs n°11 et 17 où les résultats ont 9 chiffres.

Ces deux calculs ainsi que le n°12 n'auraient probablement pas été donnés dans une interrogation sans machine. Leur intérêt est de pouvoir amener une question spécifique à l'utilisation des machines : le résultat aura-t-il ou pas plus de 8 chiffres ?

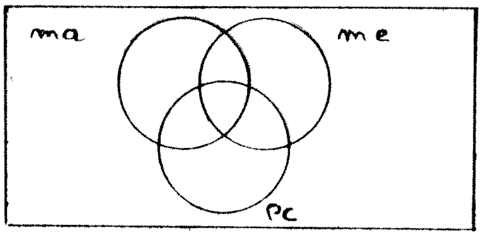
Cette question peut amener par exemple l'élève à suivre le raisonnement suivant : 2,712 x 7,2121 ; il y aura 7 (4 + 3) chiffres après la virgule ; 2 x 7 = 14 cela fait 2 chiffres avant ; nous avons 9 chiffres en tout, la machine donne les 8 premiers, le dernier est 2 x 1 = 2.

ACTIVITE N° 2

Corrigé suivi de propositions faites par les élèves

Le corrigé est aussi un compte-rendu :

Nombres d'erreurs rapportés aux différentes techniques de calcul, techniques plutôt utilisées pour les divers exercices. On essaie, lors de cette séance d'environ la moitié d'une séquence scolaire, de situer chaque énoncé dans le schéma ci-dessous.



Nous pouvons, à cette occasion, relever les calculs ou une technique s'est la plus imposée aux élèves et au contraire ceux qui se répartissent le plus sur 2 techniques (ou 3 s'il en existe).

Deuxième partie de la séquence : il est demandé à chaque élève de trouver :

quatre calculs bien adaptés au calcul mental
quatre calculs bien adaptés au calcul machine
quatre calculs bien adaptés au calcul papier-crayon

Remarques :

Il est possible que les élèves, proposent, en calcul mental, des calculs simples et que denombreux calculs machine dépassent la capacité de 8 chiffres.

ACTIVITE n° 3 :

Interrogation analogue à celle de l'activité numéro 1 et compte rendu des propositions d'élèves de l'activité numéro 2.

Interrogation :

La consigne est la même que dans l'activité numéro 1. Les feuilles fournies aux élèves ont la même organisation. La durée est d'une moitié de séquence scolaire (environ 25 minutes).

Contenu des exercices :

L'interrogation comporte dix questions. A la différence de la première fois, il apparaît des calculs conduisant à des problèmes d'introduction des données et à des dépassements de capacité des calculettes. Certains exercices peuvent être choisis parmi ceux que les élèves ont proposés pour l'activité numéro 2.

Exemple d'interrogation :

1) 6^{10} 2) 0,002 X 2,002 3) 17 000 X 780 000

4) 1^{35} 5) 647 800 000 : 79 000 6) 0,0005 : 19

7) 307 020 X 409 500 8) 10,987 654 321 234 567 8 X 3 9) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

10) $1{,}5^{2}$

Dans cette interrogation les calculs 3), 5) et 7) ont été choisis pour les problèmes d'introduction des données et des dépassements de capacité, déjà évoqués, qu'ils amènent. Les autres calculs sont des propositions d'élèves de l'activité numéro 2.

Ici aussi plusieurs calculs n'auraient peut-être pas été donnés sans machine n° 1, 3, 5, 6, 7, 8.
Leur intérêt est de pouvoir amener des questions inhabituelles :
le résultat a-t-il plus de 8 chiffres ? (cf activité n° 1)
certains nombres d'un énoncé ont plus de 8 chiffres, comment faire ?
Un élève peut résoudre ce problème en choisissant une autre technique (cp).

Il peut réduire le nombre de chiffres pour rendre possible l'introduction dans la machine (647 800 000 : 79 000).

Il peut aussi imaginer une procédure pour utiliser malgré tout la machine (calcul n° 8 ; cf activité n° 4).

Remarque :

Il est probable que plusieurs élèves fassent des erreurs de "manipulation de zéros" aux numéros 3), 5) ou 7) et que peu d'élèves arrivent au bout du numéro 6) où la période compte 18 chiffres.

Compte-rendu des propositions d'élèves de l'activité numéro 2 :

On essaiera de classer les propositions. Par exemple, on pourra relever différentes sortes d'obstructions en calcul machine : présence de fractions, de racines carrées, de variables, ou problèmes de gestion : pas ou capacité.

ACTIVITE n° 4

"Corrigé" de l'activité numéro 3 et calcul mental.

Correction d'interrogation

Les mêmes éléments de compte-rendu que pour la première interrogation seront donnés. L'attention pourra être attirée sur l'évaluation d'ordre de grandeur qui permet d'effectuer un calcul machine.

Exemple : le calcul de 17 000 x 780 000 revient à celui de 17 x 78 si l'on sait que le résultat, soit 1 326 est à faire suivre de sept zéros.

On pourra montrer aux élèves comment effectuer les calculs suivants avec une machine :

* 10,987 654 321 234 567 8 x 3

1 234 567 8 x 3 = 3 703 703 4

654 32 x 3 = 1 962 96 (le 1 est une retenue)

10,987 x 3 = 32,961

d'où le résultat : 32,962 962 96 3 703 703 4

Il est aussi, bien sûr, possible de commencer les tranches par la gauche en veillant toujours aux retenues.

* 0,0005 : 19

0,0005 : 19 ⟶ 0,000 026 3 1re

0,000 026 3 x 19 = 0,000 499 7 d'où un reste de 3

3 : 19 ⟶ 0,157 894 7 2e

0,157 894 7 x 19 = 2,999 999 3 d'où un reste de 7

7 : 19 0, 368 421 0 3e ... etc

ce qui permet d'obtenir facilement le résultat

période

0,000 026 315 789 473 684 210 526 315 7 .....

1re 2e 3e 4e

Ce calcul doit être fait différemment avec une scientifique :

0,000 5 : 19 ⟶ 0,000 026 3

0,000 026 3 x 19 = 0,000 5 car une scientifique arrondit ; il suffit d'utiliser la méthode précédente en laissant la dernière décimale de chaque tranche.

$\underbrace{0{,}000\ 026}_{1^{er}}$ x 19 = 0,000 494 d'où un reste de 6

6 : 19 $\qquad$ $0{,}\underbrace{315789\ 5}_{2^{ème}}$ ... etc

Calcul mental : calcul d'ordre de grandeur

Huit calculs sont proposés. Il ne s'agit pas de trouver le résultat, mais seulement le nombre de chiffres avant la virgule que comporte le résultat. La méthode est imposée : calcul mental. Les huit calculs présentent des décimaux, avec une seule opération (multiplication ou division) chaque fois.

Exemple d'interrogation :

1) 42 700,38 x 3	2) 32 x 181,3
3) 31,003 x 35,007	4) 171 358 : 20
5) 139,36 : 0,5	6) 32,75 : 0,187
7) 73 x 0,029	8) 73 : 0,029

Exemple de résolution : (n° 8)

73 : 0,029 $\simeq$ 70 : 0,03 = 7 000 : 3 d'où la réponse : 4

Remarque :

La difficulté de ces exercices est d'arrondir les nombres ni trop ni trop peu. Considérons par exemple 31,003 x 35,007. Arrondir trop largement peut conduire à un résultat faux 31,003 x 35,007 $\simeq$ 30 x 30 = 900 réponse : 3

Ne pas arrondir suffisamment peut amener des difficultés 31,003 x 35,007 $\simeq$ 31 x 35. Les élèves peuvent avoir du mal à terminer mentalement ce calcul. Dans ce cas il est possible d'aider les élèves en modifiant la consigne : essayez d'obtenir les résultats mentalement ; si vous n'y arrivez pas, vous pourrez poser sur la feuille des opérations dans lesquelles les nombres sont arrondis.

ACTIVITE NUMERO 5

Enchaînement de calculs, correction de l'activité n° 4

Consigne : On demande d'utiliser au mieux la calculette pour répondre aux cinq questions posées.

Contenu : Les exercices proposés ici ont été choisis chacun pour correspondre à un problème particulier de procédure machine.

Il est bien sûr possible de substituer des variantes.

1° Calculer :

$13\,! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 12 \times 13$

Le problème est la saturation de l'affichage en cours de calcul (11 ! = 39 916 800). Mais si l'on remarque que l'affichage se termine par des zéros, il est possible de diviser par 100 et ensuite terminer le calcul à la machine pour n'avoir plus qu'à recopier le résultat et lui rajouter en le recopiant les zéros manquants.

Plusieurs élèves certainement termineront ce calcul au crayon-papier.

Variante : Calculer 2 x 5 x 8 x 11 x 14 x 17 x 20 x 23 x 26

$$\frac{17\,!}{8\,!}$$

2° Calculer :

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$

Ici le calcul mental est possible et peut permettre de tester une procédure machine utile pour l'exercice suivant.

3° Calculer, avec précision permise par la calculette :

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4,79}}} + 0,3$$

Variantes :

Remplacer 4,79 par un autre nombre compris entre 0,3 et 9. L'énoncé oblige à introduire d'abord 4,79, c'est à dire presque le nombre qui se lit en dernier, et à savoir l'inverse (1/x n'est pas une touche de calculette).

Remarque :

Il est possible que de nombreux élèves fassent un calcul de type pc (avec la machine) : réduction au même dénominateur et qu'ils aient des difficultés à terminer ce calcul. A signaler l'oubli classique de 0,3.

4° calculer

-387 x (20 450 + 0,00045) + 386 x 20 503

Variante :

Calculer 18817 x 7552,5 - 241,2 x 7552,5 - 18817 x 7434,87

Le but de l'exercice est d'amener à appliquer la distributivité de la multiplication sur l'addition. Dans l'énoncé proposé, le calcul est possible sous la forme donnée, mais l'erreur est grossière si l'on n'applique pas la distributivité.

Ce genre d'exercices est très important pour mettre en évidence que le signe " = " sépare des expressions qui ont, bien sûr, même valeur mathématique, mais pas même "valeur" pour ce qui est des traitements (on ne peut pas toujours substituer une expression à l'autre dans un calcul effectif).

C'est le cas ici pour a x (b + c) = ab + ac
Dans la variante, le calcul n'est possible qu'en regroupant le premier et le 3ème termes (suggestion : pour la variante retourner la machine pour lire un commentaire, après le calcul exact).

5° En prévoyant une quantité moyenne de 125 g de pâtes par personne et par jour, remplir le tableau ci-dessous, prévu pour une colonie de 28 enfants :

Nombre de jours	1	2	3	4	5	6	7
Quantité de pâtes							

Il s'agit ici d'avoir recours au facteur constant pour éviter une manipulation fastidieuse.

Remarque : En fait parmi les élèves qui feront ce calcul avec une machine, certainement peu d'entre eux utiliseront ce facteur constant.

Correction de l'activité n° 4

Cette correction donne l'occasion de revoir certaines notions que tous les élèves ne maitrisent peut-être pas correctement :

arrondir un nombre $0{,}029 \simeq 0{,}03$

$32 \times 181{,}3 \simeq 30 \times 200$

"manipuler les zéros " $72\,000 \times 8\,000 = 72 \times 8 \times 1\,000\,000$

$72\,000 : 8\,000 = 72 : 8$

Ces notions sont très utiles pour utiliser pleinement les machines à calculer comme dans 647 800 000 : 79 000

ACTIVITE NUMERO 6 :

Séance de travail sur calculatrices scientifiques et "corrigé" de l'activité numéro 5.

La séance de type "travaux dirigés", introduite par la correction de l'activité numéro 5 sur l'enchaînement des calculs et la reprise des exercices avec cette fois-ci des calculatrices scientifiques a pour but de mettre en évidence les nouveautés des calculatrices scientifiques par rapport aux calculettes :

- puissances de 10
- priorités opératoires et parenthésage
- touche 1/x et autres fonctions
- existence de chiffre de garde non visible à l'affichage
- arrondi des résultats.

Exemple * $8 \times (5 + 4)^3 - 2 + 9 : \frac{1}{3}$

* $3 \ . \ 10^5 \times 8 \ . \ 10^4$ (utilisation de la touche EE ou EXP suivant les marques)

Conversions forme scientifique - forme "normale" (sur TI)

* 7 . 10 x 1 INV EE
* 800 000 x 1 10°
* Le calcul de Bombelli :

$$f_1 = 1 + \frac{1}{2} \qquad f_2 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} \qquad f_3 = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

Calculler $f_1, \ldots\ldots, \ f_8$ comparer les résultats avec $\sqrt{2}$

* si une machine affiche M = 3,1415927
  cela signifie $3{,}14159265 \leqslant M < 3{,}14159275$... etc.

ACTIVITE NUMERO 7 :

Interrogation de calcul mental et correction

Contenu :

vingt exercices sont proposés, chaque énoncé est lu une fois, les élèves écrivant seulement le résultat. Certains exercices amènent à appliquer les identités remarquables, d'autres proposent des calculs sur les fractions, les puissances :

Exemple

1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$	2) $3 : \frac{1}{4}$	3) $\frac{2}{9} : 6$	4) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$
5) 8^{-2}	6) $10^{6} .\ 10^{-4}$	7) $3ab .\ 4a$	8) $3ab - 4a$
9) 101^{2}	10) 18×22	11) 51^{2}	12) $(a + 2)^{2}$
13) $(3 - b)^{2}$	14) $(x - 3)(x + 3)$	15) $5\ !$	16) $0,03^{2}$

Conversions forme scientifique forme "normale" :

17) 12 000 000	18) 0,000 6	19) $7.\ 10^{-5}$	20) $3.\ 10^{8}$

Bien d'autres exercices peuvent bien sûr être proposés en calcul mental par exemple, en écrivant l'énoncé au tableau, des résolutions d'équations ou d'inéquations :

$8x - 5 = -3x + 6$ $\qquad\qquad$ $2x + 5 \geqslant x - 8 + x$

Durée :

L'interrogation et sa correction durent environ 30 minutes

ACTIVITE n° 8

Interrogation analogue à l'activité numéro 1 mais avec des calculatrices scientifiques.

Exemple d'interrogation

1) 41^2

2) 83700^2

3) $\left(3 + \frac{1}{2}\right)^2$

4) 1,999 99 X 2,000 01

5) $\left(7{,}809 - \frac{3{,}920\ 99}{4{,}027\ 5 - 2{,}57}\right)^3$

6) 18 X 22

7) $83\ 000{,}75^2$

8) $17{,}000\ 1^2$

9) et 10) $P = 9x^4 - y^4 + 2y^2$

x	1	10 864
y	1	18 817
P		

Pour tous les exercices, le résultat exact est demandé sauf pour l'exercice n° 5 (il est possible d'obtenir cinq chiffres après la virgule en utilisant les chiffres de garde).

Plusieurs calculs peuvent être faits en utilisant les égalités remarquables.

Le calcul n° 10 est particulièrement spectaculaire, si l'on n'utilise pas l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ pour les deux premiers termes de P une calculatrice scientifique est très loin de fournir le résultat qui est 1.

Variantes : $P = x^4 - 25y^4 + 2x^2$ pour x = 12 238 et y = 5 473 (P = − 1)

$P = 25x^4 - y^4 + 2y^2$ pour x = 23 184 et y = 51 841 (P = 1)

Remarques :

* Le calcul 41 est à rapprocher de 51 qui se trouvait dans le calcul mental (activité n° 7).

Le calcul 18 x 22 se trouvait aussi dans ce calcul. On peut observer combien d'élèves, parmi ceux qui ont réussi ces exercices en calcul mental vont ici "assurer" en calcul machine.

* Il peut être intéressant de noter combien d'élèves vont utiliser les identités remarquables aux calculs n° 4, 7 et 8. Ce dernier calcul peut aussi être trouvé à la machine en utilisant les chiffres de garde : un calcul mental simple montre que le résultat compte 11 chiffres.

* Il est vraissemblable qu'aucun élève ne trouvera la bonne réponse au calcul n° 10.

* Dans cette interrogation 6 calculs n'auraient sans doute pas été donnés sans machine, les n° 2, 4, 5, 7, 8, 10. Le n° 5 amène l'élève à "rentrer" dans la machine une expression assez difficile qui demande à connaître les règles de priorité de sa machine ainsi qu'à utiliser les touches parenthèses à bon escient. Le n° 10 montre bien les limites d'une machine (ou d'un micro-ordinateur).

** Les numéros 2, 4, 7, 8 posent des problèmes déjà rencontrés dans les activités précédentes.

PROLONGEMENT :

Si ce scénario propose 8 activités, c'est bien sûr uniquement à titre indicatif. Il est possible de reprendre des activités comme l'activité numéro 2 (les propositions des élèves), ce qui permet de contrôler l'évolution des élèves dans la connaissance de la spécificité de chacune des trois techniques.

Il est aussi possible d'imaginer des activités faisant appel à des problèmes de la vie courante.

SYNTHESE :

Au fur et à mesure du déroulement des activités, un classeur rasssemblant les sujets, les résultats d'ensemble et les observations pourra être constitué.

Une synthèse peut terminer ce travail où il sera dégagé et mis en évidence les connaissances, règles pratiques acquises par les élèves

2. RESULTATS OBTENUS

Nous avons utilisé ce scénario au Collège François VILLON de Mulhouse :
dans une 4ème de 24 élèves appelée 4ème 5 pendant l'année 83/84 dans une autre 4ème de 24 élèves également appelée 4ème 1 pendant l'année 84/85.

Cette 2ème partie présente les résultats obtenus avec la 4ème 5, ils sont souvent suivis à titre d'illustration de quelques extraits de passations individuelles d'élèves de 4ème 1.

Ces deux classes étaient considérées comme des classes hétérogènes dans la plupart des matières(dont les mathématiques).
Ces élèves étaient entraînés au calcul mental avec une séance de 30 minutes par semaine mais pas au calcul machine.

Dans certaines activités nous avons fait quelques croisements de questions pour cela nous avons utilisé le test exact Fischer, (l'effectif étant insuffisant pour utiliser le test de khi-deux), c'est à dire la probalité exacte (loi hypergéométrique) d'obtenir à marges constantes un tel tableau ou un tableau meilleur (encore plus extrême) (4).

ACTIVITE N° 1

Sujet :

1) $41^2 =$ (1 681)

2) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} =$ ($\frac{13}{12}$)

3) $8,64 \times 3 =$ (25,92)

4) $0,6^2 =$ (0,36)

5) $-3-8 =$ (−11)

6) $0,632^2 =$ (0,399 424)

7) $\frac{2}{5}-\frac{7}{5} =$ (−1)

8) $\frac{-21}{4} : \frac{35}{20} =$ (−3)

9) $\frac{14 \times 25 \times 9}{15 \times 28 \times 18} =$ ($\frac{5}{36}$)

10) $2^{10} =$ (1 024)

11) $8,765\,432\,1 \times 9 =$ (78,888 888 9)

12) $9,87 \times 6,543 =$ (64,579 41)

13) $0,2 \times 0,1 =$ (0,02)

14) $9^3 =$ (729)

15) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} =$ ($1/8$)

16) $15 \times 230 =$ (3 450)

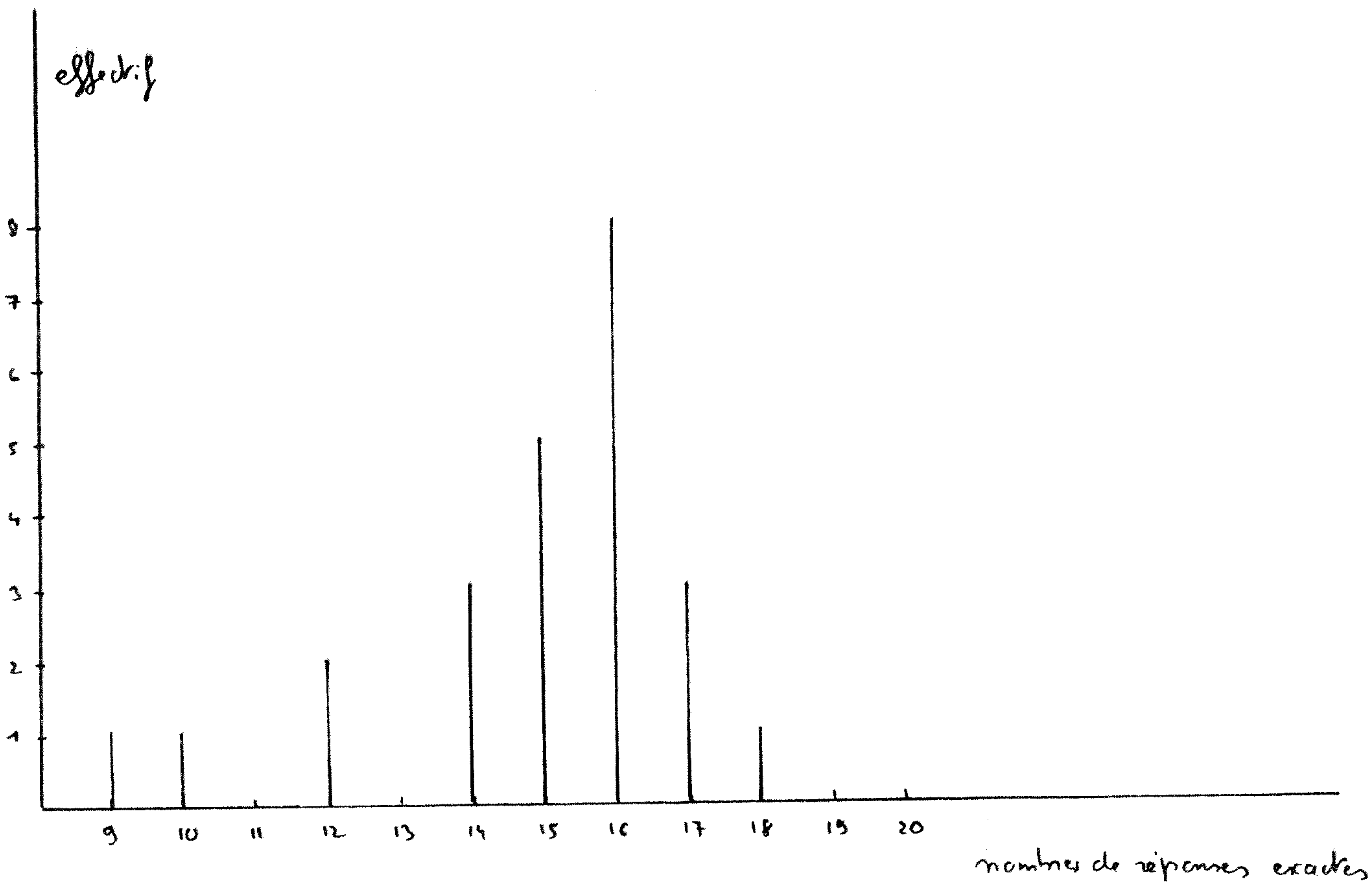
17) $2,712 \times 7,212\,1 =$ (19,559 215 2)

18) $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 =$ (720)

19) $2\,197 + \frac{1}{4} =$

20) $0,5 \times 0,25 =$ (0,125)

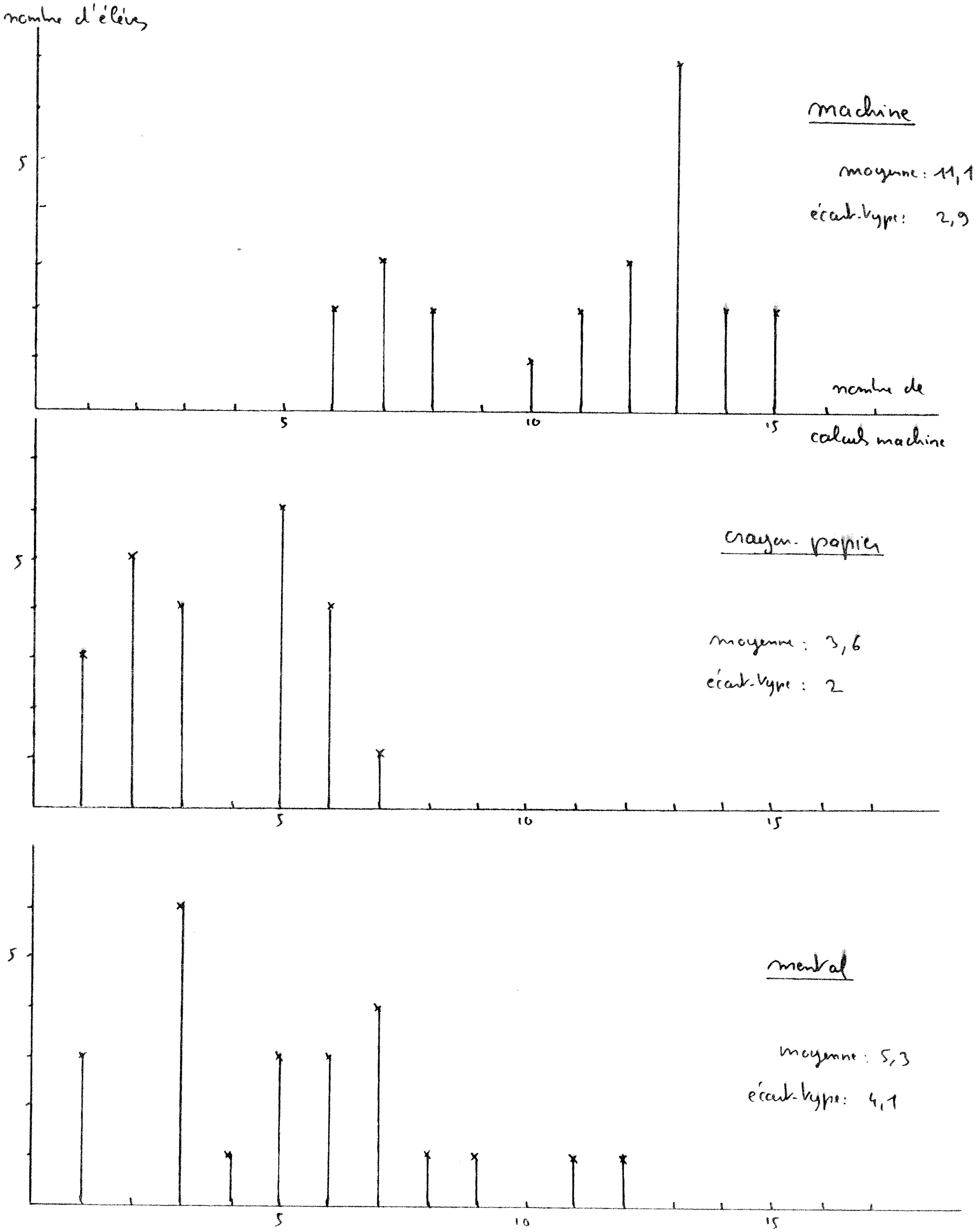
① Résultats des élèves



moyenne ≃ 15

écart-type ≃ 2,1

② Choix des différentes techniques



3. Erreurs les plus fréquentes :

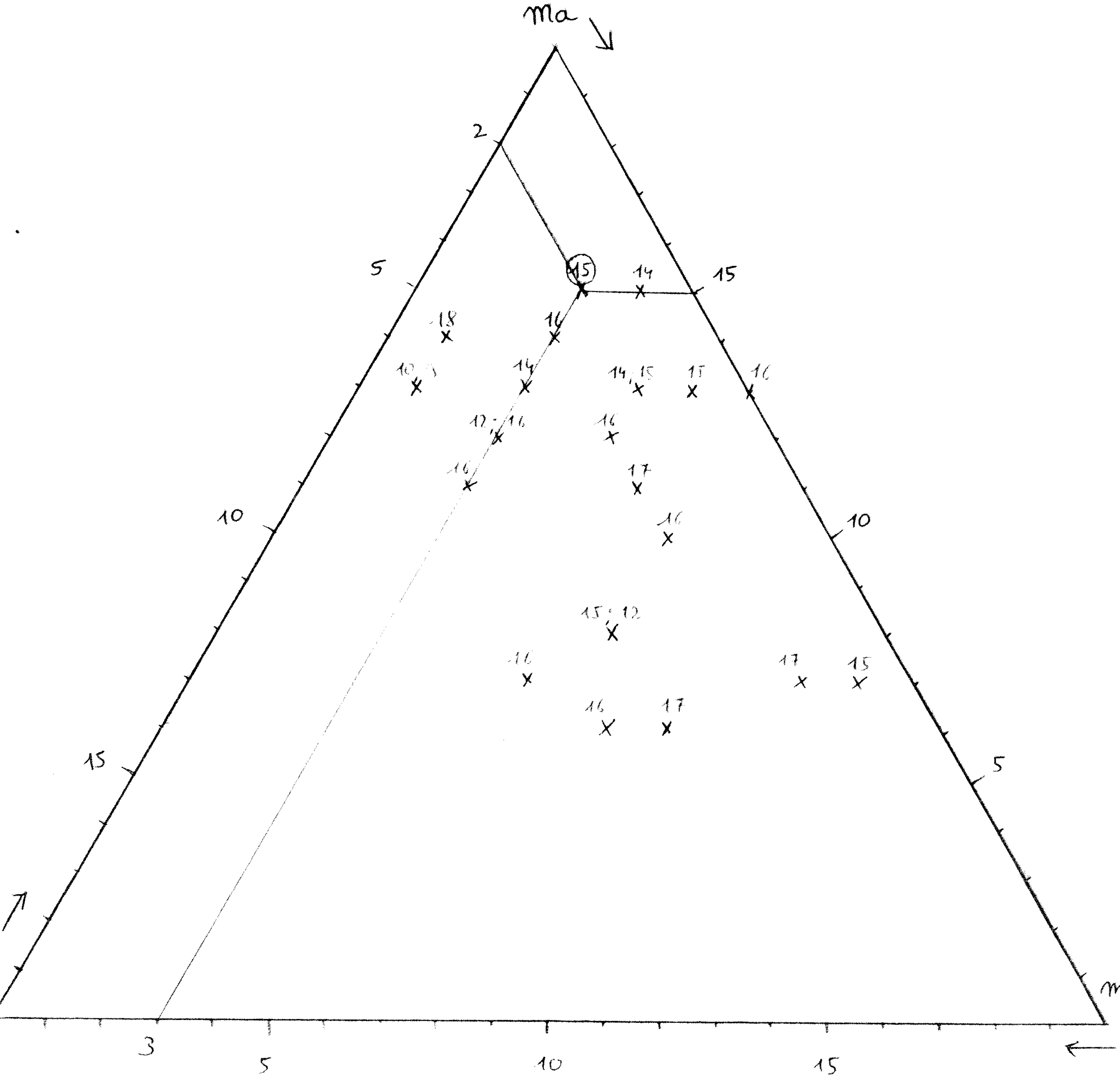
Si un élève a effectué plusieurs fois la même erreur, elle n'a été comptée qu'une fois.

erreurs	ma	me	cp	total
. erreurs de signe (oubli du signe -)	4	1	10	15
. erreur de calcul concernant les fractions	3	4	3	10
. erreur sur l'exposant (un de plus ou un de moins)	2	1	1	4
. autres erreurs sur les les puissances	4	4		8
. nombre mal lu ou mal rentré	6			6
. erreur en transformant 78,888... en fraction (*)	5			5
réussite faible : résultats à 8 chiffres au lieu de 9 (calculs n° 11 et 17)	21			21

(*) Au calcul n° 11 : 8, 7654321 x 9 la réponse est 78,888 888 9
Ces élèves ayant vu 78,888 888 sur leur calculatrice ont cru reconnaître une suite décimale illimitée périodique et, peut-être parce qu'il était demandé un résultat exact et non approché, ont cherché à transformer ce résultat en fraction (exercice étudié en classe).

④ Rapport notes / choix des techniques

exemple d'utilisation : la note 15 entourée dans le triangle a été obtenue avec 15 calculs ma ; 2 calculs cp , 3 calculs me



Ces tableaux de résultats appellent quelques remarques :

* Le calcul machine a été, et de loin, le plus choisi, le calcul cp étant le moins choisi.

* Les élèves ont eu des comportements très différents devant le choix des techniques, en particulier pour le calcul mental choisi entre 1 et 12 fois (écart-type : 4,1).

* **Calculs à dominante** :

Pour certains calculs, une technique a eu la préférence d'au moins 75 % des élèves :

6 calculs machine :

41^2 ; $8,64 \times 3$; $0,632^2$; $8,7654321 \times 9$; $987 \times 6,543$; $2,712 \times 7,2121$

1 calcul crayon / papier :

$\frac{2}{8} - \frac{7}{5}$

2 "calcul mental" :

$-3 - 8$; $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$

* Certains calculs se répartissent assez nettement sur 2 techniques :

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$	14 cp	8 me
$0,6^2$	13 ma	10 me
$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6$	13 ma	10 me
$-\frac{21}{4} : \frac{35}{20}$	9 ma	13 cp

Aucun calcul ne se répartit assez règulièrement sur les 3.

Il ne semble pas y avoir de rapport entre la note et le choix des techniques, comme l'indique le tableau (4) où l'on voit par exemple que les notes 16 (note la plus obtenue) se répartissent sur tout le nuage.

La plupart des erreurs ne viennent pas de la technique mais d'une mauvaise connaissance ou pratique de calcul lui-même ; nous pouvons cependant remarquer comme une erreur spécifique les 6 élèves qui ont mal lu ou mal rentré un nombre en machine.

Nous pouvons rapprocher 2 calculs

n° (15) $\frac{1}{2} \times \frac{2}{4}$

n° (20) 0,5 x 0,25

Nous avons deux fois le même calcul, les nombres étant une fois sous forme de fraction, une fois sous forme décimale. Les élèves n'ont pas eu le même comportement :

- ni pour le choix des techniques :

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$: 18 me   0,5 x 0,25 : ma

- ni en ce qui concerne la réussite :

20 / 15	j	f	
j	16	5	21
f	2	1	3
	18	6	24

j : juste

f : faux

0,5 x 0,25 étant un peu mieux réussi que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$: 21 j contre 18

Deux calculs étaient "piégés" :

8,7654321 x 9 et 2,712 x 7,2121 ces nombres ont 8 chiffres au plus mais les résultats en ont 9.

21 élèves n'ont pas tenu compte de la capacité limitée d'une machine et ont donné des résultats approchés à 8 chiffres, un seul a les 2 réponses justes avec un calcul cp (les 2 autres ont ces calculs faux).

Nous pouvons en déduire que si les élèves ont beaucoup utillisé la machine, ils ne la connaissent pas beaucoup.

Quelques conclusions d'élèves (après la correction) :

"Les calculs du type de ceux du Lundi (jour du cm) sont à faire en cm, ceux qui sont plus durs, avec plus de chiffres à la machine ; ceux qui ont trop de chiffres après la virgule au cp"

"Il n'y a pas de méthode meilleure que les autres"

"Toutes ont leurs inconvénients et leurs avantages"

"Ceux qui les font (les calculs) à la machine parlent toujours de vitesse et de sûreté, ce qui prouve qu'ils ont pas assez confiance en eux ; sans machine, ils ne savent plus rien faire".

Comme illustration nous pouvons citer quelques extraits de deux passations individuelles celles d'Eric et de Joseph, deux élèves calmes et attentifs ayant quelques difficultés en mathématique.

Eric effectue $\frac{-21}{4} : \frac{35}{20}$ il trouve successivement

$\frac{-21}{4} \times \frac{20}{35} = \frac{420}{140} \overset{*}{=} \frac{\quad}{35}$ calcul cp sauf 140 : 2 (me) * $\frac{420}{140} = \frac{210}{70} = \frac{\quad}{35}$

Eric pose 210 : 2 trouve 10,5 et dit "Ca va pas"

- Pourquoi ?
- Il y a une virgule, je me suis trompé, j'aurais dû le faire à la machine... Mais ça donner le même résultat, j'en suis sûr.

Il effectue ce calcul à la machine et dit affolé "C'est pas possible" et me montre le résultat : 0,5. Il recommence (ma) trouve 105 en redisant "C'est pas possible !" Il recalcule (ma) retrouve 105 et écrit $\frac{105}{35}$ "On peut encore diviser, à partir de maintenant je fais que des machines" Il termine en écrivant $\frac{21}{7}$

Lorsque Eric se trouve en difficulté son premier réflexe est de dire "J'aurais dû le faire à la machine" Il réalise ensuite que le résultat vient de l'opération, du calcul et pas de la technique employée (il ne semble pas penser que son calcul peut être faux). Lorsqu'il a enfin trouvé la bonne réponse il conclut "à partir de maintenant je ne fais que des machines" Comme si dans ce cas il n'aurait plus de difficultés.

Joseph calcul 2 il écrit

$$\underbrace{2\ \ 2}\quad \underbrace{2\ \ 2}\quad \underbrace{2\ \ 2}\quad \underbrace{2\ \ 2}\quad \underbrace{2\ \ 2}$$
$$= \underbrace{4\qquad 4}\qquad \underbrace{4\qquad 4}\qquad 4$$
$$= \quad 16 \quad \times \quad 16 \quad \times \quad 4 = 1024 \text{ (ma)}$$

Il me demande si c'est vrai si en fait les calculs à la suite (2x2x2x....) à la machine.

- "Comment peut-on faire autrement ?
- J'aurais voulu mettre = (2x2 = x2... ect)
- Et tu ne sais pas si c'est pareil ?
- Non mais sur ma machine quand le résultat est vrai, il y a écrit M
- Alors bon, et si c'est pas juste ?
- Je ne sais pas, je crois qu'il y a MK"

(la machine enregistre en mémoire tout résultat obtenu après avoir appuyé sur $\boxed{=}$ d'ou le signal M. Le K indique la présence d'un facteur constant)

Ainsi Joseph explique « qu'il ne comprend pas : l'apparition du M et du K, en donnant à la machine un pouvoir inattendu.

Pour ces deux élèves en début d'apprentissage, la machine semble donc placée sur un piédestal.

ACTIVITE 2

Sujet :

Trouve 4 calculs bien adaptés au calcul machine
" crayon-papier
" mental

Bilan de l'exercice

Calcul mental :

Sur les 92 calculs (23 x 4) un seul est plutôt inadapté par sa difficulté : 10×11^4

Les autres calculs sont souvent très faciles, exemple : 20 + 20 ; 140 + 20 ; 200 + 99... etc

Quelques élèves ont proposé des calculs littéraux : 10b + 25b ou un peu "originaux" : 1^{36} ; 199 999 999 999 + 1... etc

Nombres proposés :

Légende : 7 élèves sur 23 ont proposé des calculs avec au moins 1 décimal (non entier)

Remarque : parmi les fractions comptées dans $\mathbb{Q}$ certaines étaient des entiers $\left(\frac{6}{2} \ldots \text{etc}\right)$

Opérations proposées :

+	−	X	:	Puissances
20	12	17	5	14

Conclusion : le calcul mental n'a pas été "poussé" par les élèves, mais les calculs proposés sont bien à leur place dans ce paragraphe.

Calcul machine :

* Nombres proposés :

IN	Z	ID	Q	π
23	/	19	4	3

* Opérations proposées :

+	−	X	:	puissance	√
6	4	22	12	16	1

* Dans 15 copies sur 23, certains calculs étaient impossibles à faire car ils dépassaient la capacité des machines, par exemple :

54 ; 3 ; 0,735 X 3 ; 2, 9532103 X 7,00025791 ... etc

* Dans 3 copies certains calculs étaient peu adaptés au calcul machine exemple : 1 895 + 200 (plutôt c me)

$$\frac{5 \times 14 \times 9 \times 3 \times 1 \times 2}{15 \times 2 \times 3 \times 6 \times 6 \times 5} \quad \text{(plutôt cp)}$$

Conclusion : les limites des machines n'ont pas été bien comprises par les élèves, malgré le corrigé de la 1ère interrogation.

Calcul crayon-papier :

* Nombres proposés :

* Opérations proposées :

* Dans 21 copies des calculs étaient bien adaptés à ce type de calcul : des résultats à plus de 8 chiffres, des calculs littéraux, des calculs sur des fractions non décimales

ex. : $\frac{2}{7} + \frac{1}{8}$; 2,87654321 X 8 ; $\frac{2 \times 3 \times 9 \times 15 \times 12}{8 \times 9 \times 11 \times 3}$

(3 + 7 − y) (y − z) ;

Cependant dans 18 copies un ou plusieurs calculs étaient peu adaptés au calcul mental : 7 777 − 2 222 ; 154 X 2 ; 160 + $\frac{16}{2}$

D'autres pouvant être effectués facilement à la machine ne peuvent être qualifiés de bien adaptés au crayon-papier :

628 x 558 ; 8 ; 754 : 8 ... etc

Conclusion : Pour arriver à 4 calculs comparables ou inadaptés ; 2 élèves seulement ont trouvé 4 calculs bien adaptés et "différents".

Nombres proposés : Toujours beaucoup d'entiers naturels. Les élèves ont compris que les machines conviennent peu aux calculs dans ∅ contrairement au cp et (pour les calculs simples) au me.

Opérations proposées :

Nous pouvons souligner que certaines opérations sont peu proposées

me : divisions
ma : additions, soustractions
cp : puissances

ILLUSTRATION (4ème 1)

Ce devoir n°2 est complété par le travail de 3 élèves.

Joseph et Eric, les mêmes élèves que pour le devoir n°1 : ils étaient volontaires.

Comme ils n'ont pas bien compris la consigne j'ai recommencé avec une 3ème élève Anne.

JOSEPH	COMMENTAIRE DE L'ELEVE (FEVRIER 85)
	Calcul mental
3 ab. 6 ab	Pour le cme des lettres ça va
$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$	les fractions ça va
	- n'importe lesquelles ?
	- non des simples $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$
- 6,2 - 886	des grands chiffres ça va
	- pourquoi ?
	- il faut pas prendre toujours des petits
42 x 8	pour la mémoire ça va
	Calcul machine
787,2 x 18 - 3 - 4 + 86 - 7	Je mets des chiffres plus compliqués
18^3	Je mets des puissances même s'il n'y a pas les puissances sur la machine on fait "fois"
0,5 : 0,005	C'est compliqué ; pour voir si tous les élèves ont la même réponse
	- "Et sinon ?"
	- "Les piles marchent pas"
	Calcul crayon - papier
	Ca va
2^6	- "Ca va aussi pour la machine ?"
18^7	Oui mais c'est plus long, plus intéressant au cp
8,975 x 3,7156 18,560 : 813,12	Ca fait réviser les tables de multiplication travailler la mémoire

Eric

Calcul mental

	Il faut varier les calculs pour s'entraîner aux exercices qu'on fera plus tard
$4a^2b.3a$	Il faut utiliser des lettres pour faire des démonstrations
$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 3$	
$\frac{1}{30} : \frac{1}{2}$	Les fractions ça sert beaucoup
4^3	Les puissances pour voir la mémoire jusqu'où elle va

Calcul machine

12x29x45 36x38x27	Pour voir si l'élève sait s'y prendre facile
360^6 1,2345679x7,2	Pour vérifier les piles, la réponse est 8,888 888 8 - "Comment sais-tu cela ?" - C'était dans le manuel
576,43..x54,547	- "Tu utilises un nombre qui se termine pas ?" - "Oui, je fais 576,434343 tant qu'elle peut et je pense qu'elle arrive à voir que ça continue pareil" - "Et elle en tient compte pour faire le calcul" - "Oui"

Calcul crayon-papier

3,467x67 646,45x63	Plutôt en cp parce-qu'il est assez simple pour un élève sérieux... même s'il est pas trop sérieux, ce serait trop facile à la machine.
$2^3 x 5^2 x 3^4$	Les puissances, faciles je les multiplie entre elles pour combiner le tout.
$\frac{9}{3} : \frac{3}{9} \times \frac{6}{7}$	Pour qu'il apprenne les leçons.

"Avez-vous quelque chose à ajouter ?"

Eric : - "il faut varier les calculs, il faut aider les élèves à ne pas trop se pencher sur la machine."

Joseph : - " Le plus important c'est le calcul me et cp la machine donne le résultat, c'est tout. Je me demande si plus tard un élève se sert toujours de la machine, parce-qu'il y en a de plus en plus. Ce qui est indispensable c'est le cp et le cme.
Pus tard il y aura plus de machine et on n'utilisera plus la tête."

Eric : - "Et si l'ordinateur tombe malade... enfin en panne on ne saura rien faire. On est les derniers rescapés."

Joseph : - "La machine est une bonne invention (par exemple pour les comptables), mais j'aimerais qu'il y ait plus de chiffres (à l'affichage) ; il ne faudrait pas trop s'y fier."

La première chose que l'on peut remarquer c'est que Joseph et Eric n'ont pas compris ce qui était demandé, pour eux les calculs étaient donnés, non pour eux-mêmes, mais pour atteindre des objectifs : apprendre les leçons, entraîner la mémoire, vérifier les piles, préparer les démonstrations.

On peut aussi souligner le rapport assez passionnel de ces élèves avec les machines qui semblent, en les lisant, être des objets dangereux et (comme au devoir n°1) surestimés :
Une machine reconnaît une écriture décimale illimitée périodique !

J'ai ensuite demandé le même travail à Anne la "bonne" élève de la classe ; en tenant compte de l'expérience précédente j'ai insisté sur la consigne de calculs bien adaptés, en lui disant que, par exemple, lorsqu'elle propose un calcul mental il faudrait que si l'on donne ce calcul aux autres élèves de la classe, le plus possible et si possible tous l'effectuent mentalement.

<u>Calcul mental</u>

140 x 0,5	
2^8	2^8 : il est simple de multiplier par 2
450 : 2	les autres : il suffit de prendre la moitié
50 % de 440	

<u>Calcul cp</u>

45,26 x 4,1	
589 : 3	Ces trois calculs sont vite faits en étant posés
798,67	
+ 58,692	
+ 169,698	

<u>Calcul machine</u>

$\sqrt{5}$	Ce calcul ne se finit pas s'il fallait le poser, cela prendrait beaucoup de temps (j'avais appris aux élèves à extraire une racine carrée au cp)
1512 : 7802	Ce calcul serait long à poser
18^7	Il faudrait poser 7 fois ce calcul
448 X 78,78 %	Ce calcul est difficile

J'ai demandé à Anne pourquoi ses calculs cp sont mieux au cp qu'à la machine.

Après avoir réfléchi longuement (plusieurs minutes) elle répond :

- "Je peux faire une erreur en tapant un chiffre"
- "Ce n'est pas très convaincant, tu es d'accord ?"
- "Oui"
- "Si c'était à refaire tu proposerais les mêmes ?"
- "Non !"

Je lui ai alors demandé de réécrire (chez elle) des calculs cp.

Voici ses nouvelles propositions :

$789\,113\,451 \times 41$	Parce qu'il y a trop de chiffres pour une machine ordinaire
$\dfrac{2\times 6\times 7\times 8\times 5}{2\times 8\times 7\times 4\times 3}$	Parce qu'on peut facilement simplifier le calcul
$\dfrac{27}{35}\times\dfrac{8}{3}$	Parce que la machine ferait les divisions
$787{,}237\times 758{,}9587$	Parce que le calcul ne va pas sur la machine

Anne a proposé des calculs bien adaptés et souvent originaux (pourcentages, racine carrée) en calcul mental et calcul machine.

Par contre ses calculs crayon papier du premier essai étaient mal placés.

Le résultat pour Anne (qui est rappelons le une "bonne" élève) s'accorde tout à fait avec les résultats de la 4ème 5 :

c'est au crayon papier qu'il y a le plus de calculs inadaptés.

ACTIVITE N° 3

10 calculs à effectuer

même présentation que pour l'épreuve n° 1

Remarque : 7 calculs ont été proposés par les élèves à l'épreuve n° 2.

3 calculs (n° 3 ; 5 ; 7) ne pouvant être effectués directement à la machine, pour des raisons de capacité, ont été ajoutés.

Sujet :

1) 6^{10} $(60\ 466\ 176)$

2) $0{,}002 \times 2{,}002$ $(0{,}004\ 004)$

3) $17\ 000 \times 780\ 000$ $(13\ 260\ 000\ 000)$

4) 1^{36} (1)

5) $647\ 800\ 000 : 79\ 000$ $(8\ 200)$

6) $0{,}0005 : 19$

$(0{,}000\ 026\ 315\ 789\ 473\ 684\ 210\ 52\ldots)$

7) $307\ 020 \times 409\ 500$

$(125\ 724\ 690\ 000)$

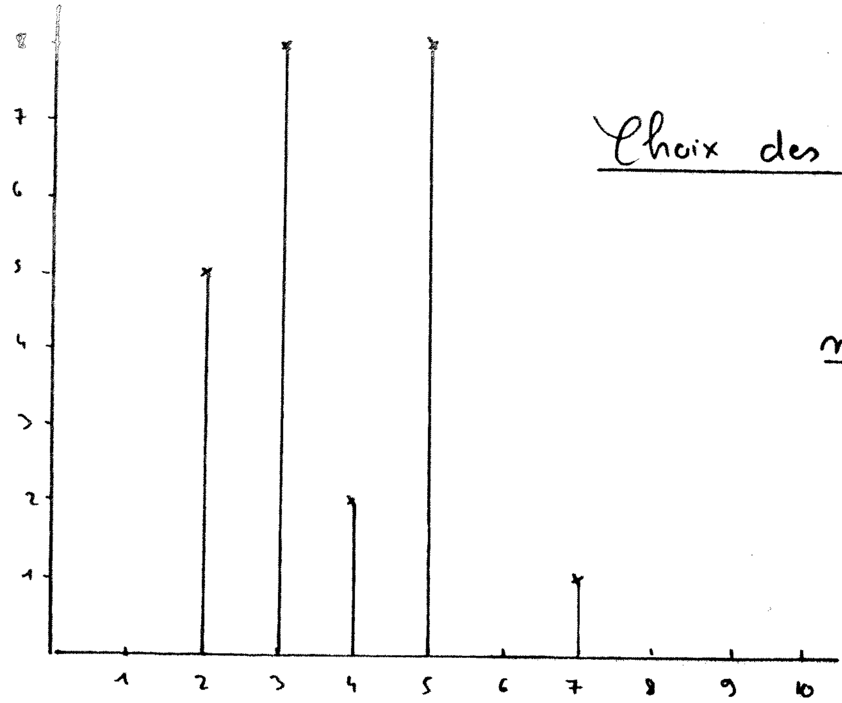
8) $10{,}987\ 654\ 321\ 234\ 567\ 8 \times 3$

$(32{,}962\ 962\ 963\ 703\ 703\ 4)$

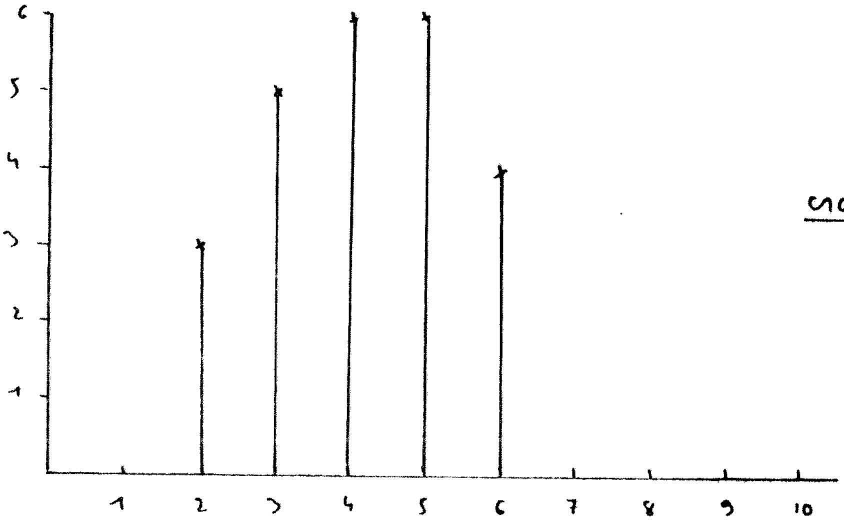
9) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ $\left(\frac{13}{12}\right)$

10) $1{,}5^2$ $(2{,}25)$

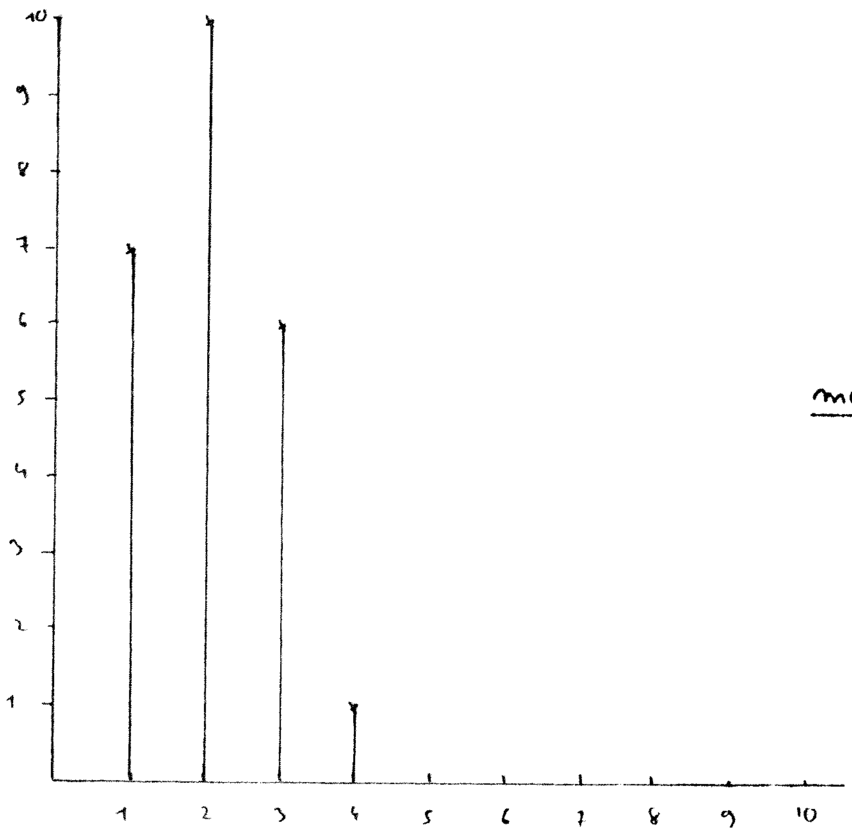
Choix des différentes techniques



machine : moyenne : 3,7
écart-type : 1,3



crayon-papier : moyenne : 4,1
écart-type : 1,3



mental : moyenne : 2
écart-type : 0,8

Erreurs les plus fréquentes

erreurs	ma	me	cp	total
en effectuant une multiplication ou une division		1	14	15
lors de la "manipulation" des zéros	4		3	7
machine sans précaution	4			4
erreurs d'énoncé x au lieu de % ÷ x				3
nombre mal lu ou mal rentré	2			2

Nous pouvons, pour commencer nous intéresser, aux trois techniques de calcul.

<u>Le calcul mental</u> :

Les élèves, étant entraînés, auraient pu en faire 3 ou 4 (n° 2 ; 4 ; 9 ; 10) ils en ont fait en moyenne 2 (écart-type = 0,8). Cette technique reste peu utilisée, mais elle est sûre : un seul calcul mental faux (au n° 8) sur les 49 effectués par l'ensemble de la classe (répartis bien sûr irrégulièrement sur les élèves).

<u>Le calcul machine</u> :

Devant des calculs plus difficiles qu'à l'interrogation n° 1, la machine a été beaucoup moins utilisée (proportionnellement, les deux épreuves n'ayant pas le même nombre de calculs).

Le pourcentage de calculs machine est en baisse pour 20 élèves, stable pour 2, en augmentation pour 2.

A titre de référence pourtant pour 2 collègues et moi-même le mouvement est différent :

n° 1	30 :	20 :	30	(pourcentages de calcul machine)
n° 2	50 :	60 :	60	

La machine a été peu utilisée dans plusieurs calculs n° 3 : 11 ma ; n° 7 : 3 ma ; n° 8 : 0 ma, là où son utilisation demandait un peu de réflexion.

Un progrès : 2 nombres mal lus ou mal rentrés contre 6.

<u>Le crayon-papier</u> :

"Profite" du repli de la machine mais il reste peu sûr dans les longs calculs (multiplications ou divisions) où 15 élèves ont fait une erreur ou plus.

* Nous trouvons <u>5 calculs à dominante</u>

(rappelons qu'il s'agit de calculs où une technique a eu la préférence d'au moins 75 % des élèves) :

1 machine : 6^{10}

1 mental : 1^{36}

3 cp : 307 020 x 409 500 ; 10, 987 654 321 234 567 8 x 3

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

* 3 calculs se répartissent assez nettement sur 2 techniques

. 17 000 x 780 000	11 ma	13 cp
. 647 800 000 : 79 000	13 ma	9 cp
. 0,0005 : 19	15 ma	9 cp

* Comme au n° 1, aucun calcul ne se répartit assez régulièrement sur les 3 techniques.

Plusieurs calculs appellent des remarques

n° 6 0,000 5 : 19 Ce calcul est particulièrement difficile, la période comptant 18 chiffres !

Il y a eu :

9 cp
- . 2j
- . 2 ont arrêté avant la période complète
- . 5 erreurs de calcul

15 ma
- 14 ont posé le calcul ---> 0,000 0263 ou 0,000 02632 (suivant les machines)
- 1 a posé 50 : 19 ce qui lui a permis de trouver 0,000 026 315 789

n° 9 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ Ce calcul figurait dans l'interrogation n° 1

	interrogations	
	n°1	n°3
ma	2	0
cp	14	19
me	8	5

Ce tableau montre quelques changements, la disparition des calculs machine peut être considérée comme un progrès, la machine étant peu adaptée à ce calcul (si l'on veut un résultat exacte).

3) 17 000 x 780 000 5) 647 800 : 79 000 7) 307 020 x 409 500

Les exercices avaient été donnés pour voir si les élèves tenaient davantage compte de la capacité limitée d'une machine.

Les calculs se prêtent bien à une manipulation des zéros :

n° 3 : on peut effectuer 17 x 78 et rajouter les 7 zéros
n° 5 : " 647 800 : 79
n° 7 : " 30 702 x 4 095 et rajouter les 3 zéros

Ce calcul est plus compliqué, le résultat comptant 12 chiffres, la seule manipulation des zéros ne permet pas d'avoir directement le résultat avec une machine.

58 59 60

Si l'on examine les résultats nous voyons d'abord que 4 élèves ont effectué un calcul -ou plus- sans précaution et ont trouvé par exemple :

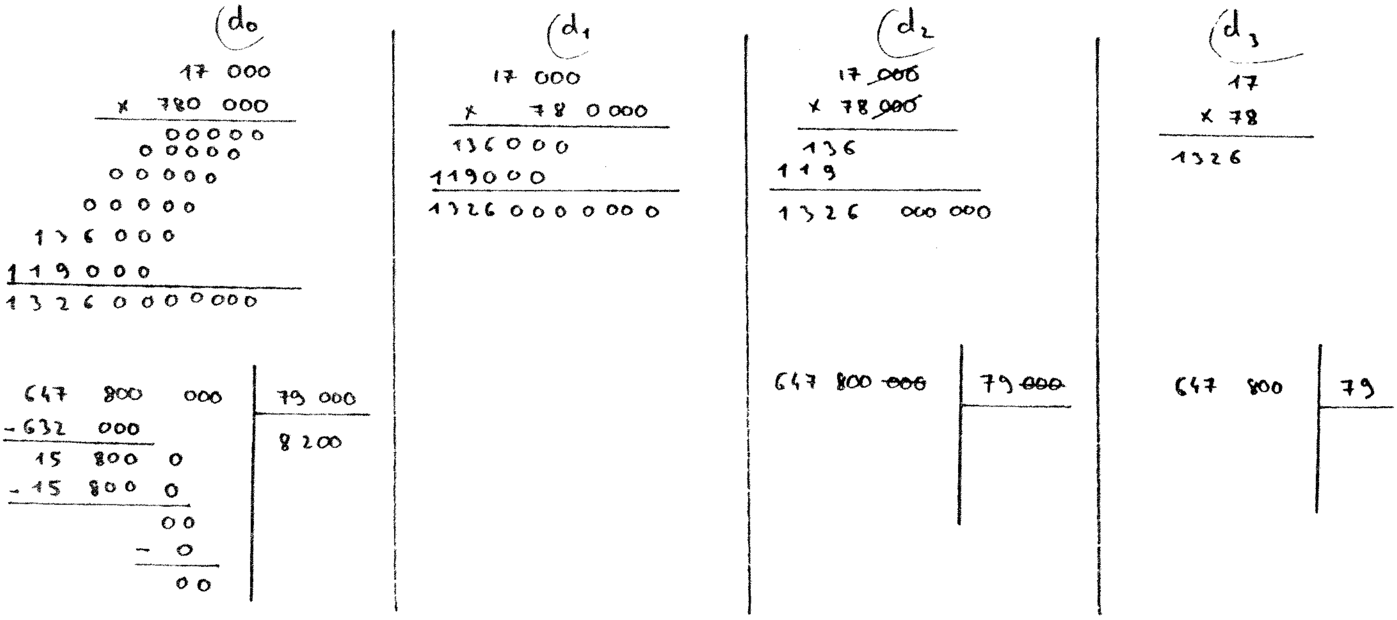
[1 326 (n° 3)
820 (n° 5)
[1 257.2469 (n° 7)

[: Signe de dépassement de la capacité de la machine.

Ceci indique un net progrès par rapport aux 21 élèves du devoir n° 1

Une difficulté est de définir l'expression "manipulation de zéros".

Nous trouvons en effet plusieurs degrés de manipulations :



* Dans 11 copies nous trouvons des multiplications (cp) avec au moins une ligne de zéros !

Ce nombre me paraît élevé en 4ème !

* Comme on ne peut pas barrer les zéros d'un nombre rentré dans une machine les manipulations de degré 3 semblent bien adaptées à un calcul machine ; pour le vérifier, examinons les tableaux suivants :

3)

	m3	$\overline{m3}$	
ma	7	3	10
cp	1	10	11
	8	13	21

p = 0,006

Légende : m3 manipulation de degré 3

$\overline{m3}$ " " " " " " 0,1 ou 2

5)

	m3	$\overline{m3}$	
ma	10	1	11
cp	0	5	5
	10	6	16

p = 0,001

Remarque : l'effectif n'est pas égal à 24 car il y a des non-réponses, des erreurs d'énoncés (x au lieu de :) et quelques élèves n'ayant pas posé l'opération sur la feuille, je n'ai pas pris leur calcul en compte.

Pour ces deux exercices

presque
Le calcul machine suppose en préalable la manipulation m3 (ce presque disparaît si la manipulation aboutit à un résultat correct).

Ces "élèves m3" sont-ils plus sûrs que les autres ?

n° 3

	m3	$\overline{m3}$	
j	7	8	15
f	1	5	6
	8	13	21

p = 0,22

$\frac{7}{8} \rightarrow 87\ \%$ $\frac{8}{13} \rightarrow 61\ \%$

n° 5

	m3	$\overline{m3}$	
j	9	4	13
f	1	2	3
	10	6	16

p = 0,3

$\frac{9}{10} \rightarrow 90\ \%$ $\frac{4}{6} \rightarrow 66\ \%$

D'une part certains "élèves m3" commettent des erreurs (au n° 3 celui qui s'est trompé est l'élève ayant posé 17 x 78 (cp)) ; au n° 5 l'élève a effectué 647 800 : 79 (ma) et a ajouté les zéros); d'autre part, certains "élèves m3" ont (heureusement !) le calcul juste ; ceci explique les probabilités élevées.
La manipulation m3 s'accompagne cependant d'une augmentation importante de la réussite.

ILLUSTRATION

Pour ce numéro 3 en 4ème j'ai choisi Halima et Estelle, 2 élèves calmes, discrètes, dont les résultats sont moyens.

Plusieurs calculs sont "bien passés" :

1^{36} ; $1,5^2$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$. Elles ont fait les mêmes erreurs à

$6^{10} = 60\ 000\ 000\ 000$ (me)

$0,002 \times 2,002 = 2,004$ (me)

Les parcours sont ensuite différents.

Halima

Elle possède une calculette

Trois calculs sont intéressants : n° 3 ; 5 ; 7

n° 7 307020 x 409500

Elle trouve E 1257,24469

- "Il y a marqué erreur et je suis sûre de ne pas m'être trompée"
  Elle refait 2 fois ce calcul.
  Après avoir réfléchi longtemps (2mn) elle refait ce calcul et écrit le résultat 125 724,69 qu'elle m'explique :

"Avant j'avais pas mis les points, j'ai tout collé ensemble et c'est pour ça que ça m'a mis erreur et maintenant j'ai séparé les chiffres"

– Tu as rentré 307.020 x 409.500 la machine a sorti 125 724.69 et ça va bien ?

- Oui c'est juste.

3) <u>17 000 x 780 000</u>

Elle rentre 17 000 x 780.000 et trouve 13 260 000

5) <u>647 800 000 x 79 000</u>

-"Comme la machine ne porte que 8 chiffres j'ai pensé qu'on pouvait supprimer un zéro à chaque nombre"

- "Qu'est ce que ça donne ?"
- "0,082, ça m'étonne, je croyais qu'il irait plusieurs fois"
- "Qu'as-tu rentré ? "
- 647.800.000 : 79 000
- A 79 000 tu ne mets pas de point ?
- Il faut mettre un point tous les 3 rangs ; ça ma paraît bizarre ça donnerait que 79.

  Je pense qu'il faut supprimer les 3 zéros là et là.

(Ca donne 647.800 : 79)

Elle fait l'opération et trouve 8,2

- "J'ai fait la preuve 8,2 x 79 et ça m'a donné 647.800.

ESTELLE

Estelle possède une scientifique, je lui demande combien de chiffre elle a à l'affichage

- "Je ne sais pas, c'est celle de mon frère"

(La machine a 8 chiffres)

Elle trouve 3 17 000 x 780 000 = 1,326 10

7 307 020 x 409 500 = 3,85999 16

Nous n'avions pas étudié les puissances de dix aussi elle ne pouvait pas comprendre les résultats machine mais aurait pu remarquer les virgules.

Deux calculs lui ont posé des problèmes

<u>0,0005 :19</u>

- "Ca m'a donné à la machine un résultat bizarre 2,63157 -05 il y a zéro dans l'énoncé ça devrait pas donner des positifs (elle veut dire un résultat supérieur à 1)"

- "Et alors ?"

- "Il faudrait alors le faire au cp pour voir ce que ça donne"

Elle pose la division (cp) trouve 0,00002

- "Je continue la division pour voir si ça donne à peu près les mêmes chiffres"

Pour continuer la division elle pose 120 (reste) : 19 à la machine trouve 6,23157

- "Ca c'est difficile à mettre dans une division, ça va donner un résultat approché je pense.

Elle reprend 120 : 19 à "la main" et continue la division sans machine

- "J'essaye de voir pourquoi la machine n'a pas rentré le zéro"
- "Tu sais pas ?"
- "Non"
- "Que signifie -05 ?"

- "Je sais pas, je continue à faire la division je m'apperçois que c'est exactement comme sur la machine, je comprend toujours pas pourquoi elle a enlevé les zéros : Je vais continuer peut-être que ça s'arrête et que la machine voulait tout donner".

Elle arrive à 0,0000263157 compare avec la machine :

- " Elle s'est arrêtée, moi je continue, je sais toujours pas ce que veut dire le 05 derrière".

Elle passe au calcul suivant :

- "Tu t'arrêtes là ?"

- " Oui si la division s'arrête pas onest encore là longtemps et puis j'ai remarqué que les restes d'abord diminuent (120 ; 60 ; 30) puis ils augmentent de nouveau (110 ; 150 ; 170)

- " Tu veux dire qu'ils pourraient augmenter longtemps ?"

- "Oui"

647 800 000 : 79 000

" On peut pas le faire à la machine il y a trop de zéros, à moins qu'on puisse enlever zéro, zéro, zéro aux 2 nombres, je vais essayer".

"Là je pense que pou avoir le vrai résultat il faut rajouter les 6 zéros... non je crois qu'il faut seulement rajouter les 3. C'est compliqué. Je vais essayer de le faire au cp"

Elle pose la division de l'énonce, soupire devant, Estelle n'a manifestement pas envie de faire le calcul.

"Non je pense que c'est juste : j'ai rajouté les trois zéros que j'ai enlevés du dividende au quotient. Elle écrit comme résultat

8 200 000 (f)

Nous pouvons pour conclure ce devoir n°3 souligner les faits suivants Les "grandes" multiplications ou divisions sont peu sûres en cp (cf le tableau des erreurs) ; la machine peut-être là très utile mais son utilisation nécessite une bonne connaissance et pratique de la manipulation des zéros or ce n'est pas le cas pour de nombreux élèves.

Activité n° 4

Sans effectuer le calcul, indique le nombre de chiffres avant la virgule qu'aura le résultat :

1) 42 700,38 x 3

2) 32 x 181,3

3) 31,003 x 35,007

4) 171 358 : 20

5) 139,36 : 0,5

6) 32,75 : 0,187

7) 73 x 0,029

8) 73 : 0,029

Cet exercice se voulait un entraînement à la recherche mentale de l'ordre de grandeur d'un résultat.

Exemple de résolution :

$73 : 0{,}029 \rightarrow 70 : 0{,}03 = 7\ 000 : 3$

Ce qui donne un résultat à 4 chiffres avant la virgule.

	D		M		D		M	
	8	6	3	7	4	5	2	1
8	19	50	50	25	100	75	50	100
6		29	33	17	83	67	83	83
3			33	43	43	43	71	100
7				48	40	60	90	100
4					52	73	73	91
5						57	66	92
2							71	93
1								95

D : division M : multiplication

exemples d'utilisation du tableau :

diagonale : 19 19 % des élèves ont réussi la question 8

autres nombres 50 (à droite du 19) parmi les 19 % qui ont réussi la question 8 50 % ont réussi la question 6.

La diagonale du 2ème tableau, donnant le pourcentage de réussite à chaque question, nous permet de les classer de la plus difficile à la plus facile :

73 : 0,029	32,75 : 0,187	31,003 x 35,007	73 x 0,029
171 358 : 20	139,36 : 0,5	32 x 181,3	42 700,38 x 3

Le tableau n° 2 nous montre également que la réussite d'une des 2 divisions difficiles (n° 8 et 6) s'accompagne d'une réussite sensiblement supérieure à la moyenne aux autres divisions mais pas pour les multiplications. Même chose pour les 2 multiplications difficiles (n° 3 et 7) :
elles s'accompagnent d'une meilleure réussite que la moyenne aux autres multiplications mais pas aux divisions.

Olivier, qui était volontaire pour ce devoir, est un redoublant de la classe qui nous pose quelques problèmes : c'est un élève assez agité, qui a beaucoup de mal à rester attentif et concentré plus de quelques minutes. En mathématiques ses résultats sont irréguliers, assez faibles en moyenne (il travaille assez peu) ses meilleures notes étant en calcul mental.

Voici quelques indications sur chacun des 8 calculs (dans l'ordre où Olivier les a traités).

---

(1) 42 700,38 x 3 (30 s)

4 x 3 = 12 "ça fait un chiffre de plus" (6) j
(que dans 42 700)

---

(2) 32 x 181,3 (30 s)

181 x 10 = 1 810 1 810 x 3 = 54 000 (5) f

---

(4) 171 358 : 20 (2 mn 30 s)

Olivier commence par diviser 170 350 par 2 (me) trouve 85 171, multiplie par 10 (me) 851 750
"Ca va plus ! Le résultat est plus grand que ce que je veux trouver ; il faudrait que je divise par 10 d'abord et après que je multiplie par 2
170 350 : 17 035 (me) 17 035 x 2 (cp) = 34 074 (5) f

---

(5) 139,36 : 0,5 (8 mn)

Olivier a eu des difficultés à ce calcul "comme 0,5 est la moitié de 1 et que diviser par 1 ne change rien, il suffit de diviser 140 par 2, ça donne 70". Il semblerait que l'erreur d'Olivier soit la suivante :

$$140 : 0,5 = (140 : 2) : \underbrace{(0,5 \times 2)}_{1}$$

c'est à dire : $\frac{a}{b} = \frac{a:c}{b \times c}$

Olivier a beaucoup de mal à justifier son raisonnement (et moi à le comprendre) et passe plusieurs minutes à essayer de l'expliquer :
"Ca me parait logique"

Il pose la division (cp) trouve 280, enlève le zéro "puisque j'ai multiplié 140 et 0,5 par 10" Ca donne <u>28</u>

Olivier est ennuyé devant ses résultats (70 et 28)

"Je me sens bloqué"

Il revient au 1er raisonnement qu'il essaye de justifier et marque comme résultat (2) f

Olivier indique que son raisonnement est comme par les fractions $\left(\frac{a}{b} = \frac{a \times c}{b \times c}\right)$

N° 8 73 : 0,029 (3 mn 30 s)

Olivier pose (cp) 75 000 : 29 trouve 2586, et marque la réponse 4 j

---

N° 7 73 x 0,029 (5 mn)

Olivier pose 0,030 x 75 trouve 0,02250 (il compte 75 avec 030 pour placer la virgule dans le résultat)

"Ca va pas (le résultat est trop petit) ça devrait donner 73, quelque chose". Il pense que multiplier augmente un nombre.

Olivier pose 75 000 x 29 trouve 2 575 000 enlève les zéros.

"J'avais multiplié par 1000" trouve 2 575

Il trouve le résultat trop grand.

"J'ai trouvé ça va faire 73,2575 parce que en multipliant 29 par 75 c'est 29 qui est derrière la virgule ce sera ça (2575).

Olivier attendait dès le début 73,.... aussi il s'accomode du résultat 2575 en pensant que cette multiplication lui a simplement donné la partie décimale du résultat demandé.

Il marque 2 f

N° 3 31,003 x 35,007 (5 mn)

Olivier pose 32,000 x 35,000 (cp) trouve 1120

Il contrôle 32 x 35 1120

"Je vais faire ce qui est derrière la virgule"

Il pose 003 x 008 "ca va pas ! les zéros servent à rien".

Il effectue (cp) 31,005 par 35,008 trouve 1705,423040

marque 4 j

De proche en proche Olivier a finalement posé une opération proche de celle du départ.

32,75 : 0,187 (3 mn 30 s)

Olivier pose 32 750 par 187 trouve 175 (quotient entier j)

"Comme j'avais multiplié par 1000 je divise par 1000"
Il trouve 0,0175 (erreur d'un rang) et marque 1 f

Cette séance amène plusieurs remarques :

* L'ordre d'Olivier est proche du "classement par difficulté" de la 4ème 5 :

1 2 4 5 8 7 3 6	Olivier
1 2 5 4 7 3 6 8	4ème 5

Olivier simplifie de moins en moins les nombres :
au n°1 il tient seulement compte du 4 de 42 700,38
au n°2 il pose 181 x 30 au lieu de 181,3 x 32
par contre au n°3 (avant dernier calcul) il pose 31,005 x 35,008 au lieu de 31,003 x 35,007 et il termine en posant au n°6 l'opération demandée

* Nous retrouvons avec Olivier les erreurs de manipulation des zéros dans les multiplications et divisions.

* Pour que cette séance soit mieux réussie par Olivier (et certainement par d'autres élèves...), il aurait fallu la faire précéder par un travail plus élémentaire comme :
arrondir un nombre ex. : 83 125 ≃ 80 000
arrondir un calcul ex. : 73,7 x 108 ≃ 70 x 100
manipuler les zéros ex. : 800 x 900 (me) 75 000 : 25 000 (me)
856 000 000 x 3 200 (cp) etc...
et rappeler sur des exemples qu'une multiplication n'augmente pas toujours un nombre et qu'une divisin ne le diminue pas toujours.

ACTIVITE N° 5

5 calculs à effectuer.

La présentation aux élèves a été presque la même que celle de l'épreuve n° 1.
Seule différence : le résultat demandé était un résultat exact si c'était possible ou sinon un résultat approché.

SUJET

1) Calculer 13 ! = 1 X 2 X .... X 12 X 13

2) Calculer $$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}$$

3) Calculer avec la précision permise par la calculette

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4,79}}} + 0,3$$

4) Calculer - 387 X (20450 + 0,00045) + 386 X 20503

5) En prévoyant une quantité moyenne de 125 g de pâtes par personne et par jour, remplis le tableau ci-dessous, prévu pour une colonie de 28 enfants.

Nombre de jours	1	2	3	4	5	6	7
Quantité de pâtes							

Quelques élèves avaient une calculatrice scientifique.

Erreurs les plus fréquentes	ma	me	cp	total
. erreur de calcul concernant des fractions (n° 2 ou 3)				15
. non respect de priorité opération (n° 4)	9			9
. erreur en effectuant une x		1	6	7
. erreur n° 5 (raisonnement ou énoncé mal lu)	4			4
. oubli du signe -	5			5
. oubli de 0,3 (n° 3)	3			3
. 20 450 + 0,00045 = 20 450 (n° 4)	4			4
. calculs non faits ou non terminés				7

Un simple coup d'oeil à la feuille des ennoncés nous montre que ces calculs sont plus complexes que les précédents. Ils se composent tous d'une suite d'opérations et demandent un travail plus important au niveau de la recherche d'une procédure.

Etudions les ; un après l'autre.

1 13 ! = 6 227 020 800

(J'avais écrit au tableau 13! = 1 * 2 * 3 *... * 13)

Les élèves ont effectué les multiplications dans l'ordre ou en effectuant des regroupements.

Dans les 2 cas on pouvait éviter le crayon de papier, bien que le résultat ait 10 chiffres, en supprimant les deux zéros.

* calculs dans l'ordre 13

- 3 arrivés à 11 ! ont supprimé les zéros et continué à la machine ma + me
- 9 arrivés à 11 ! (ma) ont terminé au crayon de papier ma + cp
- 1 a tout fait au cp "il y a trop de chiffres pour la machine" cp

* calculs avec regroupements 8 $\left\{\begin{array}{l}6 \text{ ma} + \text{cp} \\ 2 \text{ ma} + \text{me}\end{array}\right.$

14 élèves ont le calcul juste (sur 21, une élève ayant une machine à 10 chiffres à l'affichage je n'ai pas tenu compte de son calcul)

la réussite est de 80 % chez les élèves n'ayant pas utilisé le cp
" 62 % ayant "

n° 2 et 3 Les élèves avaient déjà effectué des calculs de ce type cette année au cp (avec seulement des entiers) aussi il n'est pas étonnant qu'ils aient tous fait un calcul de type cp ; réduction au même dénominateur... etc (éventuellement avec une machine) sauf un élève qui utilise la touche $\frac{1}{x}$

n° 2 : 12 j n° 3 : 4 j ou approché

De nombreux élèves (9) n'ont pas effectué, ou terminé, le n° 3.

A la correction j'ai montré aux élèves comment obtenir facilement un résultat approché avec la touche $\frac{1}{x}$.

n° 4 Ce calcul pouvait être effectué simplement en utilisant la distributivité de la multiplication sur l'addition et la commutativité de l'addition :

- 387 . (20450 + 0,00045) + 386 . 20503 =
- 387 . 20450 - 387 . 0,00045 + 386 . 20503 =
- 7914158 - 7914150 - 0,17415 = 7,82585 (ma)

Un seul élève trouve le bon résultat !

En utilisant de manière intuitive la distributivité :

20 450 + 0,000 45 = 20 450,000 45

387 . 20 450,000 45 = 387 . 20 450 + 387 . 0,000 45... ETC

4 élèves écrivent 20 450 + 0,000 45 = 20 450 (machine) !!

Ce qui indique une absence d'attention dans un calcul machine.

Nous pouvons aussi souligner que 9 élèves n'ont pas respecté les priorités opératoires.

Ce calcul est l'occasion de montrer une nouvelle fois la nécessité d'être attentif dans un calcul machine (comme dans les autres calculs bien sûr, mais une erreur de ce type a + b = a avec b $\neq$ 0 serait-elle possible dans un calcul cp ou me.?). Il montre également qu'il ne suffit pas d'avoir une machine et de savoir s'en servir, dans cet exercice nous avons besoin d'un savoir mathématique.

n° 5 Ce calcul assez bien réussi (17 j) donne l'occasion d'utiliser la touche constante des machines.

Aucun élève n'utilise cette touche parmi les 20 qui ont utilisé une machine.

Quelques conclusions des élèves :

"C'était nouveau" intéressant pour les techniques de la machine"
"il faut se rappeler des astuces" "on apprend à mieux utiliser, mieux connaître la machine" "on a besoin de toutes nos connaissances".

Ces calculs, peu habituels pour les élèves (à part le n° 2) remettent en évidence des faits déjà signalés :

- peu de manipulation de zéros (n° 1)
- sous-utilisation des machines (touches $\frac{1}{x}$; K)
- des lacunes dans les connaissances : priorités opératoires.

Ce devoir souligne aussi un autre point faible chez les élèves : le peu de vérification de l'ordre de grandeur du résultat. Un seul élève vérifie cet ordre de grandeur au n° 1. Aucun élève ne le vérifie au n° 4 où 17 élèves ont trouvé un résultat supérieur à 10^7 - en valeur absolue - alors qu'une estimation facile indique qu'il est proche de zéro !

ILLUSTRATION : JOSE

José, volontaire pour ce devoir, est un élève qui obtient de bons résultats en mathématiques où il participe beaucoup. Au devoir n°1 il a effectué 17calcùls mentalement et justes !

Il a effectué les 5 calculs dans l'ordre sans avoir d'abord lu les 5 énoncés.

1) 13! (10 mn)

José commence mentalement 1*2*3*4*5 et continue ensuite à la machine. A 12! la machine affiche 4,79 08 qu'il lit 4,79 exposant 8.

"Je crois qu'il faut reculer la virgule de 8 rangs". Il calcule $4,79^8$ (ma) trouve 277 130,36.

"C'est impossible il y avait 8 chiffres à 11! et il me revient à 6 chiffres !"

Il calcule 4,79 08 (nombre qu'il sait introduire dans sa machine)x 13 trouve : 6,227 09

Il calcule $6,227^9$ trouve 14 076 990 qu'il écrit sur la feuille, vérifie en effectuant 6,227*6,227*...

"Ca va quand même pas"

Il reste silencieux (1 mn) "Il va pas ce calcul c'est trop petit il doit y avoir une suite"

Je lui précise que faute d'avoir un résultat exact on se contente d'un résultat approché.

Il effectue le calcul approché suivant :

11! = 39 916800≃40 000 000 x 10 x 10 x 5 = 20 000 000 000

- "Je fais x 10 x 10 et multiplie par 5 ; 2 et 3 ça fait 5"
- Comment tu justifies ça"
- "Au lieu de faire x 12 x 13 on peut faire x 25"

① $1 \times 2 \times 3 \ldots 13$.

$1\times 2 = 2\times 3 = 6\times 4 = 24\times 5 = 120\times 6 = 720\times 7 = 5040\times 8$
$= 40320\times 9 = 362880\times 10 = 3628800\times 11 = 39916800$
$\times 12 = 4{,}79^{08} \times 13 = 6{,}227^{09} = 14076990$ ~~2000000~~

~~2000000000000~~ $= 6227020800$

② $$1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}} = \frac{1{,}5+1}{1{,}5}\frac{1}{1{,}5} = \frac{2{,}5}{1{,}5} = 2{,}5\times 0{,}6\ldots$$
$= 1{,}66\ldots$
$= \frac{5}{3}$

③ $$2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4{,}79}}} + 0{,}3 = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+0{,}208\ldots}}$$

$$= 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3{,}208\ldots}} = 2 + \frac{1}{1+0{,}3116\ldots} = 2 + \frac{1}{1{,}3116\ldots}$$

$$= 2 + 0{,}7624008 = 2{,}7624008\ldots$$

④ $-387\times(20450 + 0{,}00045) + 386\times 20503 =$
$-387\times 20450{,}00045 + 7914158 =$
$(-7914150 + (-0{,}17415)) + 7914158 =$
$-7914150{,}17415 + 7914158 = 15828308{,}17415$

$1 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}$ (5mn) ne sachant pas calculer $\cfrac{1}{\frac{3}{2}}$ José

essaye avec les décimaux, trouve $\frac{2,5}{1,5}$ (cf sa feuille)

"Je vois pas comment on peut le mettre en fraction"
"Si on divise par 1,5 on peut multiplier par l'inverse de 1,5"
Il calcul l'inverse de 1,5 en faisant 1 : 1,5
Il trouve comme résultat 1,66... = $\frac{5}{3}$ après avoir essayé $\frac{2}{3}$ puis $\frac{4}{3}$ sur la machine.

$2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4,79}}} + 0,3$ (3mn)

A part l'oubli (classique) du 0,3 José effectue correctement ce calcul, nous pouvons remarquer qu'il n'utilise pas la touche $\frac{1}{x}$ mais place le nombre en mémoire et effectue 1 : RM (rappel mémoire).

4 (5mn) José utilise la distributivité mais pas la commutativité et fait une erreur dans la dernière ligne.
(- a + b =-(a + b) a et b positifs)

5 (3mn) Aucune difficulté, les calculs sont faits mentalement.

- " Quelles sont tes impressions sur ces calculs ? "
- " Les 4 et 5 sont assez simples "
- " Les 3 premiers, tu les as trouvés durs ? "
- " Non pas durs, par exemple le 1 je peux le faire mais pas à la machine, au cp "

José alors effectue 39 916 800 (11 !) * 12 * 13 et trouve le bon résultat.

Activité n° 6

Les calculs proposés devenant plus difficiles il m'a paru souhaitable de donner aux élèves quelques indications pour mieux utiliser leur machine.

Les élèves n'ayant pas de "scientifiques" avaient à leur disposition les TI 30 du collège.

Remarquess sur le déroulement de la séance

*Beaucoup d'intérêt de la part des élèves (le côté nouveauté **y** est sans doute pour beaucoup...)

*Comme pour les séances d'exercices certains élèves avaient terminés quand d'autres avaient à peine commencés.

*Un tel travail est assez difficile et fatiguant (pour le professeur...) avec une classe entière.

Voici les titres des paragraphes :

1 Quelle est sa capacité ?

2 Arrondi ou troncature

3 Priorités dans les calculs

4 Facteur constant automatique ou pas ?

5 Touche pourcentage

6 Touches mémoires

7 Puissances de 10

8 Le calcul de Bombelli (7)

(approximation de $\sqrt{2}$ $\quad s_1 = 1 + \frac{1}{2} \quad s_2 = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}$ ... etc)

9 Approximation d'un nombre célèbre (7)

($a = 3 + \frac{1}{7} \quad b = 3 + \frac{1}{7 + \frac{1}{15}}$ ... etc)

10 Précision des résultats

Interrogation de calcul mental

Activité n° 7

* Calcul sur des fractions:

1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{5}$	$(\frac{7}{10})$	
2) $3 : \frac{1}{4}$	(12)	9 erreurs dues à une mauvaise connaissance des règles de calcul
3) $\frac{2}{9} : 6$	$(\frac{2}{54} = \frac{1}{27})$	

* Calcul sur des puissances :

4) $(\frac{1}{3})^{-3}$	(27)	
5) 8^{-2}	$(\frac{1}{64})$	10
6) $10^6 . 10^{-4}$	(100)	

* Calculs littéraux :

7) 3ab.4a	($12\ a^2b$)	
8) 3ab-4a	(/)	peu d'erreur (5)

* Calculs numériques pouvant utiliser des id remarq :

9) 101^2	(10 201)	
10) 18 x 22	(396)	14 erreurs
11) 51^2	(2 601)	

* Calculs littéraux utilisant des id remarq :

12) $(a+2)^2$	$(a^2 + 4a + 4)$	10 mauvaises applications ou mauvaises connaissances des formules
13) $(3-b)^2$	$(9 - 6b + b^2)$	
14) $(x-3).(x+3)$	$(x^2 - 9)$	

* conversions formes scient. — formes "normales

15) 12 000 000	$(12\ 10^6 = 1{,}2 10^7$	oubli du a (ds a. 10^n) 4 10 3
16) 0,000 6	$(6\ 10^{-4})$	
17) $7.\ 10^{-5}$	(0,000 07)	erreur sur le chiffre non nul 2
18) $3.\ 10^8$	(300 000 000)	erreur sur l'exp. 4 erreur sur le nb de zéros 2

* divers :

19) 5!	(120)	oubli d'un facteur : 3
20) $0{,}03^2$	(0,000 9)	erreur sur le nb de zéros : 7

Nous pouvons pour commercer ranger les calculs suivant le degré de réussite :

calculs				% de réussite
$\frac{1}{2}+\frac{1}{5}$	$3ab \cdot 4a$			90
$3 : \frac{1}{4}$	$3ab-4a$	$3 \cdot 10^8$	$(x-3)(x+3)$	76
51^2				71
$7 \cdot 10^{-5}$	$10^6 \cdot 10^{-4}$	$5!$		66
$0{,}000\,6$	$\frac{2}{9} : 6$			62
$\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}$				57
18×22	$(a+2)^2$	8^{-2}		52
$12\ 000\ 000$	$(3-5)^2$	$0{,}03^2$		48
101^2				43

Nous pouvons aussi rapprocher quelques calculs deux à deux.

Identités remarquables :

51^2 est beaucoup mieux réussi que 101^2, les comportements n'étant pas homogènes :

51^2

101^2	R	E	
R	8	1	9
E	7	5	12
	15	6	21

$p \simeq 0{,}15$

Les comportements de réussite/échec sont proches à $(a+2)^2$ et $(3-5)^2$

$(a+2)^2$

$(3-5)^2$	R	E	
R	9	1	10
E	2	9	11
	11	10	21

$p \simeq 0{,}002$

mais pas pour un de ces deux calculs et $(x-3)(x+3)$

$(3-b)^2$

	$(x-3)(x+3)$ R	E	
R	9	1	10
E	7	4	11
	16	5	21

$p \simeq 0{,}18$

Conversions forme scientifique, forme normale

7.10^{-5}

	0,000 6 R	E	
R	12	2	14
E	1	6	7
	13	8	21

$p \simeq 0{,}003$

$3 \cdot 10^8$

	12 000 000 R	E	
R	9	7	16
E	1	4	5
	10	11	21

$p \simeq 0{,}18$

Si l'on regroupe ces calculs deux à deux, (un calcul et son "contraire") nous voyons que curieusement les élèves ont eu des comportements "homogènes" pour le 1er tableau mais pas pour le second

Fractions

$\frac{2}{9} : 6$

	$3 : \frac{1}{4}$ R	E	
R	11	2	13
E	5	3	8
	16	5	21

Pour les élèves ces 2 calculs ne sont pas "équivalents" $3 : \frac{1}{4}$ étant pour eux plus facile.

Une "curiosité" : Deux calculs de type pourtant différents ont amené des comportements de réussite/échec presque identiques

$(a+2)^2$

8^{-2}

	R	E	
R	10	1	11
E	1	9	10
	11	10	21

$p \simeq 0,0003$

Cette activité est une des séances hebdomadaires de calcul mental, elle permet de comparer l'attitude des élèves s'ils ont une seule technique (calcul mental) à leur disposition et s'ils ont les trois (cf activité n°8)

ACTIVITE N° 8

9 calculs à effectuer.

Même présentation qu'à l'épreuve n°5.

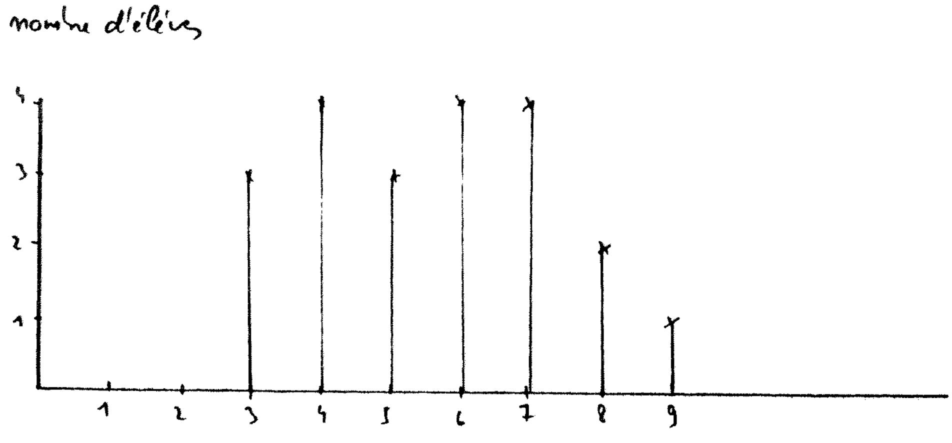
Plusieurs calculs pouvaient être faits en utilisant les identités remarquables qui venaient d'être étudiées en classe.

1) $41^2 = (1\ 681)$	2) $83\ 700^2 = (7\ 005\ 690\ 000)$
3) $\left(3 + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{49}{4} = 12{,}25\right)$	4) $1{,}999\ 99 \times 2{,}000\ 01 =$ $(3{,}999\ 999\ 999\ 9)$
5) $\left(7{,}809^2 - \frac{3{,}920\ 99}{4{,}0275 - 2{,}57}\right)^3 =$ $(\simeq 198\ 056{,}037\ 58)$	6) $18 \times 22 = (396)$
7) $83\ 000{,}75^2 =$ $(6\ 889\ 124\ 500{,}562\ 5)$	8) $17{,}000\ 1^2 = (289{,}003\ 400\ 01)$

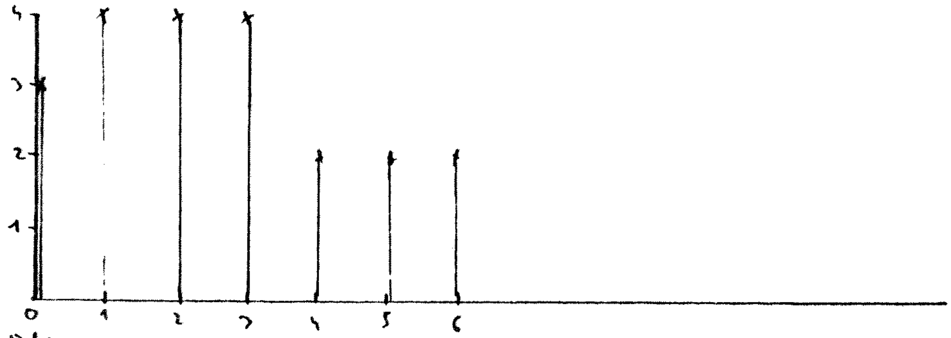
9) $P = 9x^4 - y^4 + 2y^2$

x	1	10 864
y	1	18 817
P	(10)	(1)

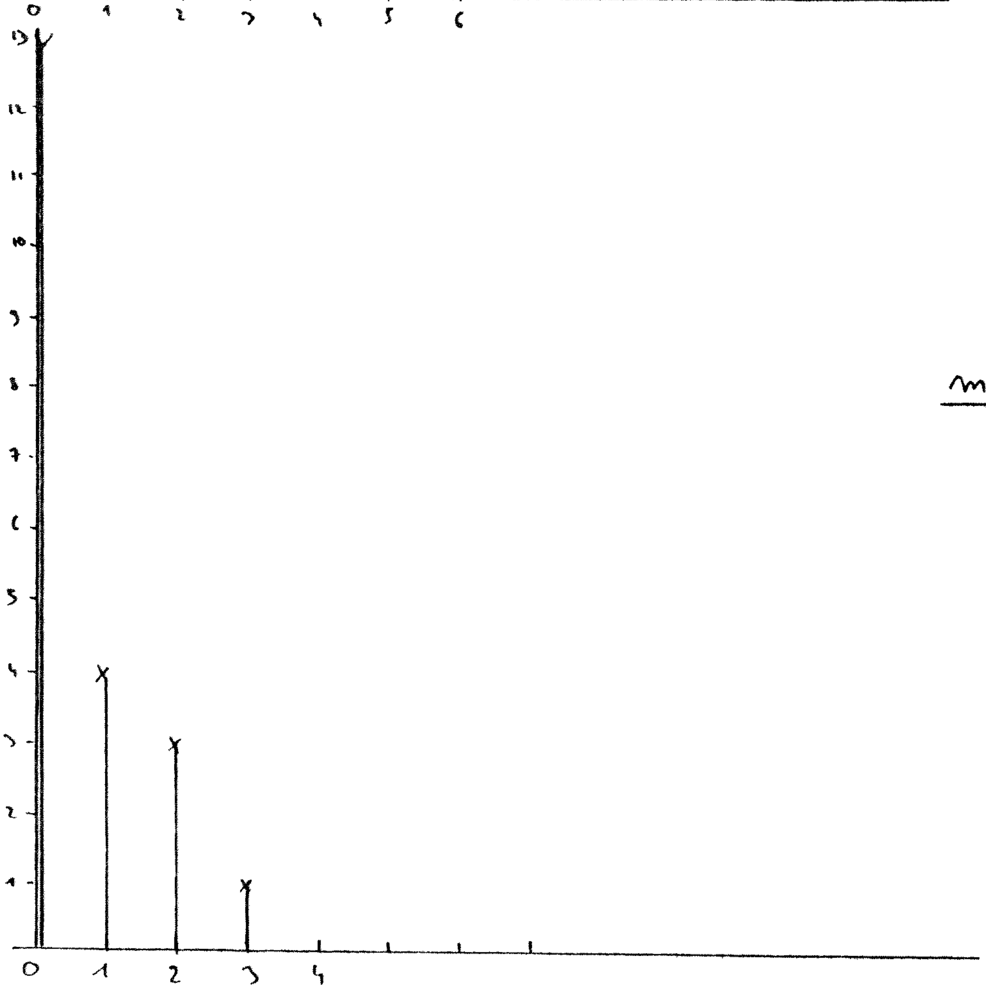
Choix des différentes techniques



machine moyenne : 5,6
écart-type : 1,7



crayon-papier moyenne 2,6
écart-type 1,8



mental moyenne 0,9
écart-type 0,6

Nous pouvons d'abord donner quelques indications pour chaque calcul :

① 41^2

	ma	me	cp	
R	15	2	4	21
E				

les 4 élèves cp utilisent l'identité remarquable

rappel devoir n°1 même calcul

	ma	me	cp	
R	19	2	1	22
E	2			2

la connaissance des identités remarquables a amené une augmentation des calculs cp

Rappelons que 15 élèves avaient réussi 51^2 dans l'activité calcul mental précédente, seulement 2 calculs me ici.

---

② $83\,700^2$

	ma	cp	
R	8	6	14
A	3		3
E	2	2	4
	13	8	

A : résultat approché

2 élèves effectuent le calcul à la machine puis vérifient au cp

---

③ $\left(3+\frac{1}{2}\right)^2$

	ma	cp	nr	
R	14	1		15
E	2	3	1	6
	16	4	1	

nr : non réponse

les erreurs viennent d'une mauvaise connaissance des formules sur les puissances ou les identités remarquables.

---

④ $1,999\,99 \times 2,000\,01$

	ma	cp	
R		7	7
A	10	3	13
E		1	1
	10	11	

3 élèves cp utilisent l'identité remarquable

3 élèves effectuent le calcul ma puis au cp

(5) $\left(7{,}809^2 - \dfrac{3{,}920\,99}{4{,}0275 - 2{,}57}\right)^3$

	ma	nr	
A	9		9
E	11	1	12
	20	1	

2 élèves donnent un résultat à 11 chiffres en utilisant les chiffres de garde

(6) 18×22

	ma	me	cp
R	11	5	5

12 élèves avaient ce même calcul juste dans le devoir de calcul mental

(7) $83\,000{,}75^2$

	ma	cp	
R		4	4
A	8		8
E	5	4	9
	13	8	

1 élève utilise $(a+b)^2$

ex. d'erreurs (machine) :

$83\ 000,\ 75^2 = 83\ 000^2 + 0{,}75^2$

$6{,}8891\ 10^9$ confondu avec 6,889109

(8) $17{,}0001^2$

	ma	cp	n2	
R	3	4		7
A	11			11
E	2		1	3
	16	4	1	

3 élèves effectuent le calcul ma puis cp

1 élève utilise (a+b)

3 élèves trouvent le résultat avec les chiffres de garde

(9) 1ère partie $x = 1$ $y = 1$

	ma	cp	me	
R		6	8	14
E	3	4		7
	3	10	8	

2ème partie $x = 10\,864$ $y = 18\,817$

	ma	n2
E	18	3

Le calcul n° 9 est proposé dans un numéro "La Gazette des mathématiciens". La première partie x = y = 1 est seulement une introduction. Le résultat obtenu avec une machine est faux (ex. 4,1 10^8 avec une TI 30). Le résultat juste - qui est 1 - ne peut être obtenu qu'en factorisant $9x^4 - y^4$.
Le calcul est une très bonne illustration des limites des machines. Les élèves, (qui n'ont pas pensé à factoriser), ont trouvé des résultats très variables (de 10^3 à 10^{18}).

* Les tableaux des choix des différentes techniques montrent que les élèves ont toujours des comportements très variés surtout pour le cma et le cp avec des écarts-type d'environ 1,8 pour 9 calculs.

* Confirmation du fait que les élèves "assurent" en calcul mental (n° 1 et n° 6). Ce mode est peu choisi mais sûr (aucune erreur parmi les 13 calculs mentaux répartis une fois de plus irrégulièrement sur les élèves de la classe).

* Peu d'utilisation des identités remarquables (n° 1, 4, 7, 8 et 9).

* Plusieurs élèves vérifient le calcul machine par un calcul crayon-papier (n° 2, 4, 7 et 8). Ces élèves ont dit qu'ils n'étaient pas sûrs du résultat machine ; par exemple ils ont été surpris par l'écriture scientifique 7,0057 09 avec laquelle ils n'étaient pas familiarisés.

* Les élèves ont souvent dans un même calcul des attitudes différentes, qui n'apparaissent pas dans les tableaux précédents :

Reprenons par exemple $83\ 700^2$

(une TI 30 donne 7.0057 09)

Voici les différentes procédures :

- calcul machine, le résultat est non compris par les élèves :

  ils recopient 7.005709

  ou

  ils doublent par un calcul cp

- calcul machine, le résultat est compris :

  ils recopient 7.0057 10^9

  ou

  doublent par un calcul cp

- calcul cp

- calcul ma : $(837)^2 .(100)^2$

Aussi pour mettre en évidence non seulement les résultats mais encore les moyens d'y arriver, j'ai relevé plusieurs procédures intéressantes :

(1) $83\ 700^2 = (837)^2 \cdot (100)^2$ (n°2)

(2) utilisation des identités remarquables (n° 4, 7, 8)

(3) utilisation des chiffres de garde (n° 2, 5, 8)

5 élèves ont utilisé au moins 2 de ces procédures dans leur devoir.

Il m'a semblé intéressant de faire le rapprochement avec leur note obenue à une intérrogation de géométrie qui portait sur des démonstrations (niveau fin de 4ième) :

- Jean François : 13,5 meilleur note
- Bruno : 12,5
- Marc : 12,5 2ième note
- Pascal : 8 6ième note
- Frédéric : 3,5

Le rapprochement semble indiquer que les élèves qui trouvent les procédures les plus intéressantes sont aussi à une exception près ceux qui réussissent le mieux les démonstrations en géométrie.

Quelques conclusions des élèves :

" On est plus sur dans l'utilisation de la machine qu'au début de ce travail "

" On ne la connait pas assez pour pouvoir vraiment s'y fier "

Ces propos ont recueillis l'adhésion de l'ensemble de la classe.

3. SUIVIS DE QUELQUES ELEVES

Cette troisième partie présente quelques indications sur l'ensemble du travail effectué par 6 élèves (25 % de la classe).

Ces indications sont suivies par un entretien, que j'ai eu avec chacun des élèves, après les huit activités du scénario.

-1- BRUNO

Bruno est un bon élève de la classe en mathématique : ses moyennes trimestrielles sont toujours parmi les 3 meilleures, en géométrie c'est un des élèves qui réussit le mieux les démonstrations.

Nous allons nous intéresser au travail qu'il a fait lors de cette enquête.

. En ce qui concerne <u>la machine</u> Bruno semble avoir très vite compris que la capacité est limitée : il est le seul a avoir réussi 8,76543219 et 2,712 x 7,2121 au n°1 et un des rares qui ont proposé des calculs machine sans dépassement de capacité au n°2, pourtant Bruno a <u>peu</u> utilisé la machine <u>au début</u> (6 fois au n°1 nombre minimum) mais <u>davantage à la fin</u> (7 fois au n°8 pour 9 calculs).

. Une de ses caractéristiques est la <u>rapidité</u> :

.10 mn 3ème temps au n°1

21 mn 2ème temps au n°3

35 mn 1er temps au n°5

. Si Bruno a de nombreuses "réussites" (2ème note au n°1, 1ère note au n°7, seul élève a avoir trouvé - 387 x(20450 + 0,00045) + 386 x 20503 (n°5)...)

Nous trouvons beaucoup d'erreurs qui pouvaient être évitées avec un peu plus d'attention.

Ex. : . $0{,}6^2 = 3{,}6$

. x au lieu de :

. 0,125 x 28 = 20 où il a fait 0,125 x 8 x 20 ie $a(b+c) = a \cdot b \cdot c$

. 1,999 99 x 2,000 01 = 3,999 99 x 0,0001 ie $a. (b+c) = (a+b) \cdot c$

. une erreur cp à 0,0005 : 19

. une chiffre mal recopié

En résumé, Bruno est un élève qui calcul vite (peut-être un peu trop), semble bien maîtriser la machine, il utilise souvent des propriétés dans ses calculs (parfois fausses...) où il recherche des procédures qui lui paraissent intéressantes mais il commet pas mal d'erreurs d'inattention.

Au cours d'un entretien j'ai d'abord demandé à Bruno ce qu'il pensait des 3 techniques de calcul :

- Je préfère le cma pour la plupart des calculs, c'est plus rapide et on n'a pas souvent des calculs qui ne tombent pas exacts ou alors ça ne dépasse que de 1 ou 2 chiffres la capacité de la machine et il y a les chiffres de garde. Le calcul mental est assez limité.

Le calcul cp a une plus grande marge d'erreurs que les 2 autres. Je préfère de beaucoup le calcul ma et me ou cp c'est celui que je prends en dernier ressort.

- Devant un calcul comment fais-tu ? tu as un ordre pour choisir la technique ou pas ?

- Ca dépend de l'apparence du calcul. S'il a l'air assez simple je le fais mentalement et c'est alors assez sûr. Les plus compliqués à la machine et ça ne donne rien (avec des grands nombres) je prends le cp en dernier.

- J'ai remarqué qu'au début tu as peu utilisé la machine et beaucoup plus après.

- Au début je ne connaissais que les touches + - x : après j'ai appris les touches y^x $\frac{1}{x}$ etc... et ça m'ouvre beaucoup plus de possibilités.

- J'ai aussi remarqué que tu fais beaucoup d'erreurs d'inattention.

- Mes parents disent que je vais trop vite quand j'ai fait mon calcul j'ai plus envie de revenir. Dans la première interrogation j'ai fait beaucoup de fautes, j'ai fait un exercice à la place d'un autre, c'est parce que je fais pas attention.

- Tu avais fait une multiplication à la place d'une division.

- Je ne suis pas assez attentif.

- Puisque tu le sais que tu as tendance à être inattentif comment tu expliques ?

- C'est dans mon caractère.

- Tu ne vois pas la nécessité de vérifier tout en sachant que tu fais des erreurs.

- Je ne suis pas assez attentif, quand je relis je vois des petites fautes et pas des grosses ou le contraire quand je relis je vérifie pas tellement.

- Tu as l'air de dire que c'est un état d'esprit je suis comme ça et pas autrement ça changera pas.

- Ca fait pas mal de temps, 6ème, 5ème, c'était comme ça, j'essaie de réfléchir sur un calcul mais j'aime pas.

- C'est un effort qui te pèse ?

- Je trouve ça relativement inutile car si plus tard il faut que je fasse des calculs j'aurai un temps fini j'essaye de faire moins d'erreurs sans relire.

- Ton objectif est de faire moins d'erreurs au 1er coup ?

- Quand je reprends mon interro la 2ème fois je suis pas vraiment précis car j'ai fait tel calcul, je pense que mon raisonnement est bon alors je veux pas revenir sur ce que j'ai déjà dit ; par exemple quand j'ai fait un calcul ça me parait relativement bon j'ai pas envie de revenir là-dessus.

- Qu'est ce qui te parait bon, la méthode ou le résultat ?

- Si la méthode donne un résultat qui me parait exact, c'est qu'elle est bonne.

- Tu peux faire des erreurs d'étourderies ça ne remet pas en cause la méthode.

- C'est des fautes que j'arrive pas à m'empêcher de faire, desfois en rédaction j'écris son sont des erreurs idiotes, je relis mais je fais pas attention aux fautes, ça attire pas mon attention, quand j'ai fini. J'arrive pas à saisir les fautes j'ai pas assez d'attention pour les trouver.

- Est-ce qu'on peut dire que quand c'est fini tu es déconcentré ?

- Oui, c'est un peu ça, j'ai plus assez d'attention je ne suis plus attentif, j'ai plus envie d'y retrouver, j'ai pas envie de revenir sur ma parole si je l'ai dit, je pense que c'est vrai.

- Corriger serait te contredire ?

- Je préfère que ce soit quelqu'un d'autre, si je corrige tout seul, j'ai envie de tricher.

- Pourquoi tricher ?

- Si je corrige cette faute je me dis que c'est tricher parce que c'est pas ce que j'ai pensé au début.

- Tricher par rapport à qui ?

- Par rapport à moi je me dis que j'ai fait quelque-chose de faux au début, je me dis que je serais pas capable de dire un truc juste tout de suite, il faut que je m'y reprenne plusieurs fois ça me gêne de changer quelque chose. Donner un résultat exact au premier coup c'est important quand même puisqu'on a plus confiance en ce qu'on dit si à chaque fois qu'on fait un calcul on voit que c'est faux et qu'on le refait.

Il faut avoir le temps.

- Si le prof te montre que le calcul est faux c'est pas pareil ?

- C'est une faute que j'ai pas vue, même en relisant comme quand je relis j'ai pas tellement d'attention c'est tout le temps comme ça, je sais que cette faute peut-être que je l'aurais vue si j'avais plus d'attention mais comme j'en n'ai pas assez ça me gêne pas.

- Mais si tu concevais un pont, là c'est pas le prof qui corrige, c'est le pont qui s'écroule alors qu'est ce que tu préfèrerais ?

- Je préfère que le pont soit debout du premier coup s'il faut qu'il s'écroule 4, 5 fois... Il faut réussir du premier coup, il faut faire des tests.

- Mais là tu vérifieras les calculs

- Oui là, mais quand je fais un calcul je suis énervé je n'ai plus autant envie que ce soit juste que la 1ère fois. Si le pont tient, je dis ça doit faire tant et tant et que quelqu'un me dit que ça s'écroule, je suis d'accord pour vérifier et à tête reposée.

- Et si les interrogations tu dois les rendre plusieurs jours après est-ce que tu peux les reprendre ?

- Oui les devoirs : je fais un exercice je le fais 2 ou 3 jours après

- Et là c'est pas tricher ?

- Là on a le temps, dans les interros on est pressés, on est pressé par le temps.

- Mais tout ce que tu disais : corriger c'est tricher... etc le temps n'intervient pas, c'est un point de vue moral en quelque sorte et là tu dis si on a le temps c'est pas pareil...

- Quand j'ai un calcul que je pense vrai que je vérifie un petit peu que ça a l'air de coller, je relis, je vérifie en me disant que c'est vrai, et si je me dis que c'est vrai je ne trouverai pas que c'est faux.

En rédaction si je pense que ce que j'ai fait est bon, je peux pas en me relisant me dire que c'est mauvais.

- L'idée ou l'orthographe ?

- Surtout l'idée, j'aime pas ... j'aime pas ... même en faisant pas attention je vois un calcul que je crois vrai et je vois par hasard que c'est faux ça me fait mal au coeur si je peux dire, un calcul qui me parait louche, ça me gêne pas de le corriger, même si ça me gêne un peu de l'avoir vu au premier coup.

- Ca a toujours été comme ça ?

- En 6ème, 5ème j'avais beaucoup de fautes d'innatention ça a un peu diminué avec l'âge. Mes parents me reprochent de ne pas être assez attentif de dire n'importe quoi de ne pas réfléchir.

- Tu te vois changer ou pas ?

- Je crois qu'avec l'âge, cette part d'inattention va diminuer mais qu'il y en aura toujours, je pense que c'est dans mon caractère.

- D'être inattentif ?

- Et d'aller le plus vite possible.

- De laisser tombre un peu les vérifications ?

- C'est voir qu'on n'a pas confiance en soi en vérifiant

- Pour toi, vérifier c'est voir qu'on n'a pas confiance en soi ?

- Oui, même si ça peut aider.

- Alors aller à la porte en ouvrant les yeux ça prouve qu'on n'a pas confiance en soi sinon on irait les yeux fermés sans vérifier sa trajectoire ?

- Voilà, ça veut dire que je suis sûr d'y arriver indemne.

- Et là, ça te gêne pas ?

- Non, là c'est naturel.

- Qui te dit que pour un calcul c'est pas pareil : vérifier, modifier, etc...

- Non, parce que ça joue pas vraiment sur le caractère. Pour le calcul, c'est avoir confiance avec le tête, pour aller à la porte, c'est avec le corps.

- Dans un calcul est-ce que tu préfères donner ton premier résultat en prenant le risque qu'il soit faux ou avoir changé trois fois le résultat ?

- Je préfère prendre le risque pour comprendre l'erreur que j'ai faite, si le calcul est faux et que le professuer me dit qu'il faut faire ça.
Si j'ai un calcul faux et que je relis, si je le vois pas, ça veut dire que j'ai pas eu l'attention suffisante pour le voir, si le prof le voit, je suis pas vraiment déçu. Si je relis 4, 5 fois, et que je trouve le calcul juste,ça m'a semblé une perte de temps.

- Tu profites pas des expériences passées car tu sais que tu fais des erreurs et ça ne t'empêche pas de faire les mêmes erreurs. Par exemple, si dans un devoir tu fais une erreur d'énoncé, est'ce qu'au devoir suivant tu fais attention à ce type d'erreur ?

- Oui, dans ce devoir je ferai d'autres erreurs parce que je pense qu'à ça (aux erreurs d'énoncés).

- Par exemple dans une rédaction si je pense qu'au pluriel il y a un s je ne fais plus attention aux autres fautes.
Dans un livre si on cherche tous les noms propres on fait pas attention aux verbes. Je trouve que c'est dans ma nature.

- Est-ce que tu as un objectif n° 1 ? Essayer de faire le moins de fautes possibles ?

- Réussir au premier coup, ça peut montrer qu'on a une assurance que ce qu'on dit est à tous les coups juste, tandis que celui qui fait tout faux au 1er coup et tout juste en relisant il faudra qu'il ait tout le temps deux fois avant de dire quelque chose de vrai.

- Mais dans la vie, dans un travail quelconque, d'après toi, on a le temps ou pas de vérifier ?

- Si on a le temps, il faut vérifier, mais s'il faut prendre une décision rapide, celui qui au premier coup dit souvent des impressions fausses, il aura des problèmes.

COMMENTAIRE : Ce long échange - Bruno a été, et de loin, l'élève le plus "bavard" - évoque la notion de résultat juste, de vérification et ce que cela peut signifier pour un élève.
Bruno a un objectif "réussir au premier coup" et c'est pour lui un enjeu important : "ça peut montrer qu'on a de l'assurance" "C'est avoir de l'assurance" "on a plus confiance en ce que l'on dit". Cette réussite devrait se passer de vérifications : "vérifier ça veut dire qu'on n'a pas confiance en soi".

Mais alors Bruno qui, comme tout le monde, fait des erreurs, manquerait-il d'assurance, de confiance en lui ?

Il se justifie alors en évoquant son manque d'attention : nous trouvons onze fois des phrases comme "je ne fais pas attention", "je ne suis pas assez attentif", "je n'ai pas eu l'attention "... etc comme si c'était pour lui inévitable : "c'est mon caractère", cela n'indique donc pas un manque d'assurance.

Il lui arrive pourtant de trouver une erreur (sans le faire exprès serait-on tenté de dire) : "j'aime pas ... J'aime pas même en faisant pas attention je vois un calcul que je crois vrai et je vois par hasard que c'est faux ça me fait mal au coeur si je peux dire..."

Cet entretien montre que pour un élève avoir un résultat juste ou pas peut aller bien au-delà de la note (le mot n'est même pas évoqué) et que des erreurs qualifiées d'inattention ne sont pas toujours anodines (on peut se référer à l'article de M Glaeser "La bonne explication" où se trouve un paragraphe "Diversité de l'incompréhension superficielle" [6])

Ainsi un devoir de mathématique peut amener certains élèves à avoir plus ou moins confiance en eux et il ne faut peut être pas s'étonner qu'il ne suffise pas de rappeler aux élèves de penser à vérifier pour qu'ils le fassent efficacement.

-2- S A N D R A

Sandra est une élève attentive en classe mais qui a quelques difficultés (des moyennes trimestrielles assez faibles, devoir de démonstrations peu réussi : 3,5)

Je l'ai choisie car elle a eu une bonne note au n° 1 ce qui m'a étonné vu ses autres résultats.

Sandra a beausoup utilisé la machine au n°* : 14 fois (max.15)
Au n° 2, 2 de ses calculs machine dépassent la capacité : 279 et 24 598, un 3eme est peu adapté : $\dfrac{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{7 \times 8 \times 9 \times 10 \times 11}$

Elle a une note moyenne au n° 3 avec 5 calculs machine (moyenne 3,7) dont un sans précaution (17 000 X 780 000) un calcul approché (0,0005 : 19) un calcul non effectué : 647 800 000 : 79 000

Sandra a 3 réponses justes au n° 4 (les 3 plus faciles)
Au n° 5 Sandra ne termine pas 2 calculs sur les 5 (les n°2 et 3) en indiquant qu'elle ne sait pas les faire.

Pour l'interrogation n° 8 elle effectue 7 calculs sur 9 à la machine (moyenne 5,5) où elle recopie le résultat machine de $83\,700^2$ probablement sans le comprendre (7 00 57 09 pour $7{,}0057\ 10^9$) et obtient un résultat approché de $17{,}0001^2$, elle qualifie pourtant de faciles ces calculs.

Sandra est une élève qui utilise beaucoup la machine et qui semble souvent se "reposer" sur elle en effet il y a peu de contrôle des résultats (des chiffres attendus après la virgule par exemple, il n'y a pas de trace d'un calcul machine doublé par un calcul cp).

Sandra ne fait jamais appel à des propriétés, "astuces" et contrairement à Bruno, elle ne semble pas une battante (plusieurs non-réponses).

J'ai demandé à Sandra ce qu'elle avait retenu du travail sur les techniques de calcul :

-"La machine c'est bien, c'est plus pratique, ça va plus vite. Mental : c'est plus risqué, j'ose pas tellement. Crayon papier c'est ce que j'aime le mieux."

-"Qu'est-ce que tu aimes mieux au cp qu'à la machine ?"

- "Quand je fais un calcul machine j'aime mieux vérifier avec le cp et pareil pour le cp j'aime mieux vérifier à la machine."

- "Tu n'es pas sûre de toi ?"

- "Non même avec la machine."

- "Ce travail, que t'a-il le plus apporté ?"

- "J'ai appris à mieux me servir de la machine parce qu'avant je ne savais faire que + -et X, maintenant c'est bon."

-3 - FREDERIQUE

Comme Sandra, Frédérique a quelques difficultés en maths mais contrairement à Sandra elle a eu la plus mauvaise note au 1er devoir, c'est pour cela que je l'ai choisie.

. Frédérique utilise beaucoup la machine (13 fois au n° 1, 8 fois au n° 3 - c'est le maximum -) mais moins à la fin (5 au n° 8 c'est la moyenne).

. Frédérique commet beaucoup d'erreurs :
au n° 1 les puissances sont fausses avec un de plus à l'exposant, un nombre mal lu 22 600 au lieu de 22 680.
Au n° 3 elle recopie [132,6 [1257,2469 (signe de dépassement de capacité).
Au n° 5 elle calcule 13 ! entièrement à la main et trouve à la machine
20 450 + 0,000 45 = 20 450

Quelques exemples d'erreurs au n° 8

$83\ 700^2 = 83^2 + 700^2$

$83\ 000,75^2$: $83,75^2 = 7\ 014,0625$ d'où le résultat

$000^2 = 000\ 000$ 7 014 000 000,0625

A son actif on remarque qu'au n° 2 tous les calculs qu'elle propose sont à leur place.

Meme à la fin de ce travail Frédérique ne "maitrise" pas très bien la machine.

Au n° 8 elle indique par exemple qu'elle ne sait pas faire $\left(3 + \frac{1}{2}\right)^2$ à la machine et que pour $17,0001^2$ il n'y pas trop de chiffres pour la machine

Le bilan est comparable à celui de Sandra :
beaucoup de machine en général assez peu maitrisé, peu de controle une différence : Frédérique essaye d'utiliser des propriétés plus souvent (mais elles sont souvent fausses).

ENTRETIEN

- Peux-tu me dire ce que tu as retenu, ce que tu penses des 3 techniques de calcul ?

- Quand on a un calcul, c'est bien de savoir si on peut le faire à la machine, à l'écrit ou à l'oral.

- Comment choisis-tu ?

- Ca dépend, s'il y a trop de nombres je ne peux pas les mettre dans la machine alors je le fais à l'écrit,... si c'est par exemple 1 jè peux le faire à l'oral.

- Est-ce qu'il y a des techniques que tu préfères ?
- La machine, car je suis sûre de ne pas me tromper et ça va plus vite.

- Et le calcul mental ?

- Il y a plutôt des inconvénients, j'ai peur de me tromper, je préfère les autres.

- Et le calcul au crayon de papier ?

- Il n'y pas vraiment d'avantages, ni d'inconvénients... quand il y a une suite de calculs avec des signes je préfère le faire à l'écrit, à la machine j'ai peur de ma tromper.

- Tu avais calculé 13 ! tout à la main, ferait-tu pareil maintenant ?

- Oui, je ferais pareil, (silence) enfin je ne sais pas (silence).

- As-tu l'habitude de contrôler tes résultats ?
- Non, je n'ai pas l'habitude, je ne le fais pas, je n'y pense pas.

-4- FREDERIC

Frédéric est un élève ayant des résultats moyens que j'ai choisi car, parmi ceux qui ont trouvé des procédures interessantes au n°8, c'est le seul qui avait une mauvaise note au devoir de géométrie portant sur les démonstrations (ch. II 8 p).

.Dans ce travail Frédéric est caractérisé par une certaine lenteur dans plusieurs devoirs :

- Classement (pour la durée) :	n°1	24ème sur 24
	n°3	11ème sur 24
	n°5	21ème sur 22
	n°8	14ème sur 21

Dans l'ensemble il y a peu d'autres particularités. Il n'y a pas de sur ou de sous-utilisation d'une des 3 techniques (par rapport aux utilisations moyennes).

Les ennuis sont"classiques"

exemple : n°1 calculs approchés aux opérations "piégées"

n°2 dépassement de capacité pour les calculs machine

n°3 dans une multiplication cp

Seul le n°8 se détache de l'ensemble des copies par une importante utilisation des identités remarquables.

Exemple : $1,99999 \,.\, 2,00001 = (2 - 0,00001) \,.\, (2 + 0,00001)$

$41^2 = (40 + 1)^2$ ...... etc

En résumé Frédéric a effectué un travail où j'ai pu simplement relever une certaine lenteur et un devoir n°8 cmprenant quelques procédures interessantes.

FREDERIC (ENTRETIEN)

- Que penses-tu du travail de l'année dernière ?

- Ca été bien de faire une comparaison entre les 3 techniques. J'arrive mieux à classer quand j'ai une feuille avec des calculs, je vois mieux ce que je peux faire de tête, ce que je dois poser ou faire à la machine.
Ca m'a appris beaucoup de choses sur la machine, que je ne connaissais pas.

- Peux-tu préciser ce que tu penses des 3 techniques ?

- Les techniques de calculs mental que vous nous avez fait faire en cours ça va bien, y'a des trucs, sur les quotients tout ça, que je retiens par coeur.

- Tu as des exemples ?

- Non

- Et la machine ?

- Je m'en sers mieux, ça va mieux pour les touches. Le calcul crayon de papier (cp) je l'utilise plutôt en physique.

- Dans quels types de calculs ?

- Quand on a des exercices où on doit calculer avec des puissances de dix, ça j'aime pas tellement à la machine.

- Quels sont pour toi les avantages et les inconvénients de chacune des 3 techniques ?

- Le calcul mental je suis le plus habitué, ça va plus vite, il y a une économie de temps, les inconvénients : je me trompe des fois comme c'est pas écrit, tout ne se garde pas (dans la tête) et bien des fois je me trompe.

- A la machine le risque d'erreur est très faible

- Pas nul ?

- Non, sur la mienne des fois quand je tape sur 0 elle marque 2 au lieu d'1. Ca prend du temps aussi

- Et le calcul cp ?

- Après ,souvent, je les vérifie à la machine, la machine c'est sécurisant.

Dans le travail de l'année dernière ce que j'ai surtout retenu c'est comment on peut utiliser ces 3 techniques, sur un calcul je vois mieux celle que je peux utiliser.

- Ce qui m'avait un peu étonné c'est qu'à ce devoir (le n°8) tu t'étais pas mal débrouillé alors qu'en géométrie pour les démonstrations c'était moins bien.

- Pour les démonstrations j'ai des problèmes, j'ai tous les ingrédients, ce qu'il me faut et après je ne sais pas comment il faut que je les utilise. Quand il faut penser à l'enchainement logique, ça je vois pas souvent, j'ai ce qu'il faut et après pour bien les mélanger... C'est le parcours à suivre que j'ai du mal à cerner.

- Tu vois bien le parcours en calcul ?

- Oui ça c'est des choses qu'on avait fait avant, on a bien travaillé dessus. C'est plus visible en calcul. Une démonstration pour moi c'est plus dur, il y a une espèce de blocage, quand je vois démonstration je me dis attention, il va falloir penser à ça, ça je panique un peu.

- Dès les premières démonstrations ?

- Oui au départ j'ai pas bien compris et depuis ça c'est pas arrangé.

5°) Olivier

Olivier est un élève attentif, qui participe au cours, dont les résultats en mathématiques sont en général moyens (mais parfois irréguliers) avec des notes moins bonnes en calcul mental (c'est pour cela que je l'ai choisi).

La principale caractéristique de cet élève est sa lenteur : il est toujours parmi les derniers à rendre sa feuille : n° 1 : 21 ème ; n° 3 : 23 ème ; n° 5 : 16 ème ; n° 8 : 21 ème.

La répartition des calculs dans les 3 techniques est proche des moyennes : Olivier ne délaisse pas le calcul mental (n° 1 : 7 moyenne 5,3 ; n° 3 : 2 moyenne 2,04 ; n° 8 : 1 moyenne 0,6).
Au n° 1 nous trouvons une erreur curieuse : $0,632^2 = 0,4$ mental

- "Je ne me souviens pas de ce que j'ai fait".

Olivier donne trois résultats avec seulement deux décimaux
Ex. : 9,87 x 6,543 = 64,57

Olivier : "Je pensais que les chiffres derrière étaient inutiles"

- Pourquoi 2 ?

- Je ne sais pas, j'aurais pu m'arrêter à 1, 3, 4

- C'est peut-être parce que dans les "petites" classes, on demande souvent d'arrêter les divisions 2 chiffres après la virgule

- Ah, peut-être

Au n° 2 les 4 calculs cp sont mal placés :

$\frac{1}{6} \times \frac{3}{3}$; $0,19 \times 0,2$; $160 + \frac{16}{2}$; $100 - \frac{300}{10}$

N° 3 : 3 307 020 x 409 500 = 125724 11

- Tu croyais que le 11 étaient des décimales ?

- Oui je comprenais pas.

Au calcul 10,98 765... x 3 il donne la bonne réponse suivie de points de suspensions .

- Je croyais que ça continuait.

n° 5 Assez bon devoir : les calculs 1,2,5, sont justes, n° 4 une erreur de virgule dans un calcul cp

n° 7 7 erreurs concernant des calculs sur des fractions ou des puissances
avec parmi 2 calculs sans réponse

n° 8 Du bon et du moins bon :
.. $83\,700^2 = 837^2 \times 100^2$ (j)
.. deux calculs approchés $1{,}999\,99 \times 2{,}000\,01 = 4$
$17{,}000\,1^2 = 289{,}0034$

Nous pouvons donc souligner, pour Olivier sa lenteur et le fait qu'il ne délaisse pas le calcul mental bien qu'il y soit assez faible

ENTRETIEN

- "Alors que te reste-t-il de ce travail ?"
- On aurait appris pas mal de choses, je les ai pas toutes retenues j'ai retenu par exemple comment on doit se servir du calcul me, ma, cp mais les méthodes avec le calcul ma sont approximatives.
- Tu ne les a pas bien retenues ?
- Non
- Qu'est ce qu'il t'a apporté ce travail ?
- Au début je ne connaissais pas le calcul ma, ça m'a appris à connaître mieux ma machine et puis il y a l'histoire des zéros (les manipulations) que j'ai pas tellement compris autrement ça va.
- Et la calcul mental ?
- J'aime bien mais il faut que se soit des petits calculs sinon je suis dépassé.

Cp c'est là où je suis le plus à l'aise

ma : ça commence à venir petit à petit, j'aime bien calculer avec la machine à cause de la vitesse, de la capacité.

- Tu as une préférence, ou pas ?
- Si je préfére quand même le cp, je suis plus sur de moi la machine ça risque de venir, c'est elle que je prendrais le plus si je continue.
- Tu ressens le besoin de plus de pratique ?
- Je trouve qu'on n'en fait pas assez.

- Et les vérifications, tu en fait ?
- Non je ne pense pas que j'en fais, j'ai pas l'habitude, quitte à faire le calcul une 2ème fois mais je ne vérifie pas en faisant d'autres méthodes.
- Comme vérification tu refais le calcul de la même manière ?
- C'est un réflexe ?
- Non quand je suis pas sur de mon calcul.
- L'ordre de grandeur, surveiller la place de la virgule ?
- Non ça je ne le fait pas, j'oublie de le faire
- Vérifier le signe
- Si, ça quand même j'essaye de le faire
- Pour en revenir au calcul me tu te sens faible ? Pas faible ?, comment ?
- Je me sens assez faible
- Comment tu explique ça ?
- Il y a une question de vitesse, je suis assez lent au niveau mental, je me sens lent, parce-que j'essaye de vérifier les calculs des fois quand je ne suis pas sur c'est pour ça aussi
- Pour toi je ne laisse pas assez de temps ?
- D'abord j'essayerai de le faire correctement et si j'en étais pas sur je recommencerai
- Tu te souviens de l'énoncé pour recommencer ?
- Oui, ça dépend, quand vous allez trop vite
j'ai encore un calcul dans la tête et je ne me souviens plus de l'énoncé suivant
- Et tu ne répond pas au calcul suivant ?
- Oui ça m'arrive souvent.
- Les calculs tu les comprend ?
- Oui.

6) **Myriam**

Pour compléter cette "collection" j'ai demandé aux élèves un volontaire et c'est Myriam qui s'est proposée en premier.

Myriam est une élève attentive en classe, qui se situe pour les résultats dans la première moitié de la classe.

La répartition des calculs dans les 3 techniques est toujours proche (à 1 calcul près) des moyennes de la classe sauf au n° 8 où elle utilise beaucoup le machine (8 fois). Regardons son travail étape par étape :

1 nous trouvons 2 résultats approchés aux calculs "pièges" et 2 erreurs : oubli du signe – à $-\frac{21}{4} : \frac{35}{10}$ et $9^3 = 243$ (= 9 x 9 x 3 ma) 2 une seule proposition mal placée 25 (ma)

3 meilleur temps, 8 calculs justes avec des manipulations de zéros (n° 3,5,7), un calcul approché à 0,0005:19 (ma) et une erreur au n° 8 (me)

5) Pour calculer 13! Myriam éffectue 9! d'une part 10. 11. 12. 13. d'autre part à la machine et termine ce calcul au cp. Elle est la seule a avoir utilisé cette procédure

2 calculs justes, n° 2 et 5 sur 5. Mon respect des priorités opé-ratoires au n°4

8) Myriam éffectue $83\ 700^2$ et $83\ 000,75^2$ à la machine et convertit le résultat machine sous forme "normale" :

$7,00569\ 10^9$ = 7 005 30 000 Résultat exact.

$6,889\ 12\ 10^9$ = 6889 120 000 " approché.

" 7 virgule quelque chose j'aime pas, 10^9 : je savais qu'il fallait bouger la virgule"

Elle effectue aussi $17,000\ 1^2$ et 1,99999 x 2,00001 à la machine puis après avoir vu les résultats refait ces calculs au cp.

" La machine arrondit à 4 ce qui me parait bizarre car nous attendons 10 chiffres après la virgule"

Myriam est une élève assez sure dans les calculs, le devoir le moins bon étant le n° 5 (3 f. sur 5 calculs)

Nous pouvons remarquer qu'au n° 8 elle éffectue beaucoup de calculs d'abord à la machine (avant ou de les transformer ou de les doubler par un cp) son "contrôle" s'effectuant au vu du résultat et non au vu de l'énoncé, le fait qu'elle éffectue un calcul machine en écrivant "nous attendons 10 chiffres après la virgule" en est un exemple.

ENTRETIEN

- Que penses-tu du travail de l'année dernière ?

- Au début on ne savait pas quelle méthode de travail prendre pour un calcul maintenant on sait mieux. Dès que je vois un certain calcul je sais si je dois ou pas prendre la machine... etc.

- Tu n'hésites jamais ?

- Si quand je vois des calculs et que c'est assez vague, j'essaye d'abord une méthode et puis si ça ne va pas une autre.

- Que signifie vague ?

- Par exemple dans 0,0004 : 17 (ce calcul a été donné après les 8 scéances du scénario), j'ai essayé au cp puis ça ma rebuté parce que j'arrivais pas et que c'était infini ; j'ai essayé à la machine puis en fin de compte je suis revenu au cp parce que à la machine j'arrivais pas, je ne me rappelais plus des méthodes.

- Que penses-tu de chacune des 3 techniques ?

- Mentalement ça me déplait pas, ça fait fonctionner la mémoire alors qu'on est plus porté vers la machine ou le cp quand on voit certains calculs et les méthodes que l'on a apprises pour les faire mentalement c'est même plus rapide. Cp j'aime bien, enfin je suis contre aucune des 3 méthodes ça dépend des calculs.

- Y-a-t-il des inconvénients ou avantages dans chaque technique ?

- A la machine il y a 8 chiffres, au début je m'arrêtais là et c'était un calcul vite fait et pour moi c'était bien maintenant je vois que la machine ne sert pas à grand chose pour ces calculs infinies. Le cp c'est bien quand ça dépasse les 8 chiffres mais c'est long ;

.../...

il faut faire les étapes s'il y a des zéros il faut mettre les petits points (dans les multiplications) me : si on fait une faute, si on oublie une retenue on ne s'en rappelle pas, le calcul est faux alors que la méthode est juste.

- Ca peut être pareil au cp.

- Oui mais au cp j'oublie pas beaucoup les retenues. Si le calcul est long on a du mal à retenir les chiffres mentalement.

- Quand devant un calcul tu as choisi une des 3 techniques, y-en-a-t-il une plus sûre ?

- Pour moi le plus sur est le cp, on peut tout vérifier par ce que tout est écrit.

- Et les vérifications tu y penses ou pas ?

- Si j'ai le temps je vérifie, quand il y a quelque chose de flagrant... et encore je les vois presque jamais j'ai beau vérifier. A la dernière interrogation par exemple j'ai vérifié pour x2 = 9 j'ai mis x = 3 et c'est seulement après avoir rendu la feuille que je me suis rappelée qu'il y a 2 solutions. Je suis pas assez attentive pour vérifier, je survole peut-être.

- En français c'est pareil ?

- Je vérifie et là je vois tout de suite, si quand je relis ça ne me parait pas juste je corrige, en math ça ne me fait pas ça, en anglais non plus, je ne vois pas les fautes.

- Qu'est-ce que tu peux ajouter sur ce travail ?

- Ca nous a quand même appris quelque chose ; en 6ème c'était "Est-ce qu'on peut prendre la machine ?" et c'était pour tous les calculs ; c'était vraiment bien quand on pouvait l'avoir et on s'étonnait qu'on ait faux avec la machine.

Cette 3ème partie met en évidence de nombreuses différences de comportement entre les élèves :

* pour la rapidité, ce qui pose un problème lors des séances de calcul mental comme l'indique Olivier.

* devant les 3 techniques
Bruno utilise peu la machine au début, beaucoup à la fin, pour Fréderique c'est plutôt le contraire, Olivier, Frédérique eux restent dans la moyenne... etc
* devant la machine
Pour Myriam la machine semble être placée au même niveau que les autres techniques.
"(avant) c'était bienquand on pouvait l'avoir et on s'étonnait qu'on ait faux... Je suis maintenant contre aucune des méthodes ça dépend des calculs... Une machine ne sert pas à grand chose pour ces calculs infinis"

Frédérique elle indique qu'elle préfère la machine "car je suis sure de ne pas me tromper". C'est pourtant ce qu'elle a souvent fait (exemple : 20 450 + 0,00045 = 20 450).

Si la machine semble bien démystifiée pour certains élèves, cet objectif n'est pas atteint pour d'autres.

Par contre les devoirs comme les entretiens soulignent la faiblesse des élèves dans les vérifications et plus généralement le contrôle des calculs et des résultats.

Bruno exprime un certain refus des vérifications, en étant très lucide comme l'indique sa phrase "je vérifie en me disant que c'est vrai et si je me dis que c'est vrai je ne vois pas que c'est faux".

- Frédérique dit ne pas y penser

- Sandra dit qu'elle aime mieux vérifier mais elle ne semble pas le faire

- Olivier "j'ai pas l'habitude" "quitte à faire le calcul une 2ème fois".

Pour lui refaire le calcul ne semble pas être une vérification. Myriam (désabusée) "et encore je les vois presque jamais (les erreurs) j'ai beau vérifier".

Myriam dans l'entretion cite 0,0004 : 17 ce qui nous permet d'évoquer ce calcul que j'avais proposé aux élèves environ 9 mois après les 8 activités du scénario (aucun élève n'a su retrouver la procédure machine - cf activité 3 -)

procédure		exécution
"J'ai essayé au cp"	→	"ça m'a rebuté"
"j"ai essayé à la machine...	←	
↓		
je ne me rappelais plus les méthodes"		
↓		
elle pose 0,0004 : 17 (ma)	→	2,35294 -05
déplacer la virgule	← →	0,000 023 529 4

Elle commence par la "facilité" au niveau de la procédure mais l'exécution est alors pénible elle essaie alors en vain de retrouver la procédure machine, elle "s'en sort" alors en utilisant des étapes plus faciles mais qui ne lui permettront pas d'obtenir la période.

Ce calcul par les aller-retour qu'il amène entre les activités de contrôle et d'exécution illustre, je crois, l'enrichissement apporté par l'utilisation simultanée de plusieurs techniques de calcul.

4. CONCLUSION

Les publicitaires ont beau jeu de valoriser la machine à calculer : les élèves, s'ils en ont une, la connaissent mal (capacité, touches) et ont tendance à la surestimer. La démystifier n'est pas une chose facile.

Une machine est un outil très utile, mais avec des contraintes et des limites : même avec une TI 57 LCD les élèves auront (heureusement) des problèmes en mathématiques !

Ce sont aussi ces contraintes qui en font l'intérêt : les élèves sont amenés à effectuer tout un travail de contrôle "puis-je utiliser ou pàs la machine ? elle indique ce résultat, qu'est-ce que ça veut dire ? quelle technique est la plus indiquée pour ce calcul ?..."etc.

Avoir les 3 techniques amène les élèves à moins subir les calculs mais à être plus actif, à prendre des initiatives. Nous pouvons citer comme exemple une anecdote.

Un élève vient me voir à la fin d'un cours en me disant : "J'ai refais les calculs à la maison, j'ai calculé 6^{10} et j'ai trouvé 60 466 200 (avec la touche y^x) il me semblait me souvenir que c'était pas ça, alors j'ai fait 6 x 6 x 6... et j'ai trouvé 60 466 176"

Je lui demande quel résultat est juste "le second à mon avis car en faisant 6 x 6 x 6 ... on ne peut pas avoir 0 à la fin, la machine doit arrondir dans le premier cas".

C'était la première fois que cet élève par ailleurs peu passionné par les cours restait à la fin de l'heure pour parler mathématiques !

Pour ces raisons et bien d'autres la question n'est pas de savoir si l'on est pour ou contre l'utilisation des machines en classe (une brochure de l'APMEP (1) énonce toute une série d'arguments pour et d'arguments contre receuillis aux Etats-Unis en 1976) mais plutôt comment utiliser "au mieux" ces trois techniques de calcul en cours de mathématiques ?

Une utilisation des trois techniques ne supprime pas les connaissances mathématiques au contraire !

Un travail de ce type sur le calcul numérique met à jour de nombreuses lacunes des élèves sur : la notion d'ordre de grandeur, les manipulations des zéros, priorités opératoires, utilisation insuffisante de la commutativité, distributi vité... etc notions pourtant bien utiles ou même indispensables en calcul.

Il me semble également important de faire un éducation, un travail sur la vérification des résultat. Pour de nombreux élèves la vérification est ce qui intervient, éventuellement, quand le calcul est fini, si on a le temps et équivaut à une simple relecture du devoir Ils ne semblent pas voir que la vérification doit être une partie intégrante de calcul lui-même.

Nous pouvons pour terminer souligner que ce travail était situé en marge du cours (des séances lui étant réservées) ce qui se justifie par sa spécificité. Il semblerait intéressant de le compléter par un travail comparable qui serait intégré dans les leçons de calcul numérique, du début à la fin de l'année, les trois techniques agrandissant le champs d'application des propriétés et permettant de mieux les assimiler.

Le travail des professeurs serait facilité si les manuels scolaires proposaient dans les chapitres de calcul des exercices de calcul adaptés à chacune des trois techniques et d'autre part des exercices un peu plus compliqués utilisant simultanément de ces techniques.

BIBLIOGRAPHIE

(1)	APMEP	*Calculatrices 4 opérations*	n° 31
(2)	CNDP	*Contenus de formation à l'école élémentaire*	1980
(3)	CNDP	*Mathématiques, classe du 1er cycle*	1978
(4)	Fischer	*L'enfant et le comptage*	Thèse du doctorat IREM Strasbourg 1982
(5)	Glaeser Georges	*L'entraînement méthodique au calcul algébrique*	Brochure IREM Strasbourg
(6)	Glaeser	*La bonne explication*	Brochure IREM Strasbourg Janvier 1977
(7)	Missenard	*Histoire des mathématiques par les collèges*	Cédic IREM Paris
(8)	Taton René	*Le calcul mental*	Que sais-je ? n° 605

Auteur :
Bernard Blochs

Titre :
Calculs numérique en classe de quatrième (élèves d'environ 13 ans) calcul mental, calcul écrit, calcul machine.
Etude pour l'obtention du Diplôme d'Etudes Approfondies de Didactique des Mathématiques.

AMS :
Sujet classification (1970) 97 G 05

Mots clés :
Calcul numérique, didactique, calculatrices, classes de collège.

Résumé :
Le travail a été conduit sous l'hypothèse suivante : si le fait de savoir mettre en oeuvre **une** technique de calcul n'est l'aboutissement que d'une formation étroitement limitée, celui de choisir entre **plusieurs** techniques, la plus efficace pour un traitement donné, est la marque d'une formation mathématique réelle. On présente un scénario d'enseignement construit à partir de cette hypothèse, et l'observation de la mise en oeuvre de ce scénario dans une classe de collège français, auprès d'élèves de 13 à 14 ans environ. La crainte fréquente que l'usage de machines n'aille à l'encontre de l'acquisition des techniques de calcul numérique apparaît comme injustifiée, mais l'idée que cet usage puisse se passer d'apprentissage systématique est tout aussi injustifiée. L'étude faite est une contribution à la mise au point d'un enseignement mathématique intégrant cet apprentissage, parmi d'autres, et non en le détachant d'autres acquisitions.