S. 127

TRAVAUX PRATIQUES

EN

PREMIERES SCIENTIFIQUES

par

Elisabeth BUSSER

Michel de COINTET

Claudine KAHN

Jean MARTINET

Jean SAMSON

Odile SCHLADENHAUFEN

- 1986 -

I.R.E.M. de STRASBOURG

PREFACE

Les rubriques de "Travaux Pratiques" constituent une des nouveautés des programmes de Première et Terminale. Les commentaires en soulignent l'importance qualitative et quantitative dans l'apprentissage des mathématiques ; ils en précisent le but - travail personnel des élèves et rôle formateur des activités de résolution de problèmes - et le fonctionnement - mises en oeuvre de techniques, développement des savoir-faire et illustration d'idées mathématiques.

En insistant, en outre, sur la brièveté du cours, les programmes suggèrent ainsi une certaine "révolution" dans notre enseignement, surtout dans les classes scientifiques.

Vous trouverez dans cette brochure des documents

- rédigés pour des élèves ;
- directement utilisables par ceux-ci dans le cadre des travaux pratiques inscrits explicitement au programme ;
- expérimentés pour une bonne part dans une cinquantaine de classes ;
- couvrant le plus possible l'ensemble des rubriques ;
- faisant une place de choix aux activités graphiques, et aux problèmes et méthodes numériques comme le demandent les commentaires ;
- visant, pour certains, un aspect spécifiques du programme, alliant, pour les autres, plusieurs points de vue : algébrique, géométrique, historique, graphique, numérique...

Ces documents sont de difficultés et de longueurs très variées. Chacun peut être étudié partiellement ou dans sa totalité. Chacun peut être complété, modifié, amélioré, rejeté...

Mesdames Renée Rohfritsch et Rosine Flach ont mené à bien la difficile tâche de dactylographie, présentation et mise en pages, avec une bonne humeur à toutes épreuves. Qu'elles en soient ici vivement remerciées.

TABLE DES MATIERES

SOMMAIRE

----

* Ces documents se réfèrent aux alinéas des programmes et aux commentaires suivants :

- Exemples d'emplois de suites pour l'approximation d'un nombre (racine carrée d'un entier, aire, volume...)
  Sur des exemples d'approximation étudiés, on pourra mettre en évidence différentes étapes : construction d'un algorithme, étude de la suite ainsi obtenue, obtention de la prévision visée.

- Exemples de majorations, d'encadrements et d'approximations portant sur des nombres, des suites ou des fonctions sur un intervalle donné.

** Trois de ces documents (2, 3 et 4) sont consacrés à l'approximation de la racine carrée d'un nombre entier.
A ceux qui pensent que ce problème est devenu sans objet ou sans intérêt à l'âge des calculatrices, on peut :

1) Proposer l'exercice 1 qui précède ces documents ; on constatera à quelle catastrophe... numérique peut mener la confusion entre un nombre et la valeur qu'en donne une calculatrice ;

2) Faire remarquer que la racine carrée d'un nombre est définie de façon implicite, comme "le nombre positif dont le carré est ..." - ce qui, probablement, en fait la difficulté chez de jeunes élèves.-

Il est essentiel de connaître un ou des algorithmes d'approximation qui en constituent une définition explicite. Le constructeur de la calculatrice doit bien en connaître un !

3) Apprendre que : "un nombre réel n'est connu que lorsqu'on a donné un procédé de calcul approché, avec une approximation que le mathématicien désire arbitrairement petite, alors que l'utilisateur se contente de beaucoup moins." (Jean Dieudonné)

APPROXIMATIONS

* Trois méthodes qui ne sont, en réalité, que trois aspects d'un même procédé sont proposées pour approcher la racine carrée d'un entier :

1) Une méthode dûe à EULER, dont nous donnons le texte original, ce qui conduit à une lecture commentée d'un texte historique.
   Prérequis : règles de calcul sur les inégalités.
   Objectifs spécifiques : - Bonne manipulation des inégalités ;
   - Si h est suffisamment voisin de zéro, alors h^2 l'est bien davantage.
   - Intérêt historique de la méthode.

2) Une méthode graphique.
   Prérequis : construction d'une parabole
   Objectifs spécifiques : - Bonne lecture graphique
   - Si h est suffisamment voisin de zéro, alors h^2 l'est bien davantage.

3) La méthode de NEWTON
   Prérequis : - contruction d'une parabole
   - équation de la tangente à une parabole en l'un de ses points.
   Objectifs spécifiques : Visualisation du phénomène de convergence.

** Les exercices sont de difficultés variées ; leur choix dépendra du niveau de la classe.

SECOND DEGRE EN CONTINU

Ce document étudie un algorithme d'approximation de la racine positive de certaines équations du second degré, à coefficients entiers ; l'exemple historique de Neuwton, donné à la fin, montre que la validité de cet algorithme s'étend à des équations du troisième degré.

Prérequis : - Résolution d'une équation du second degré.
- $f(x) = ax^2 + bx + c$: si $f(a).f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $]a;b[$.

Objectifs spécifiques : - Calcul algébrique ;
- Encadrement par deux entiers consécutifs d'une racine non calculée d'une équation ;
- Bonne manipulation des inégalités ;
- Intérêt historique de la méthode.

IRRATIONNELS

Ici, est décrit l'algorithme d'EUCLIDE concernant l'étude du rapport de deux longueurs. Il conduit au développement en fraction continue d'un irrationnel.

Prérequis : - Règles de calcul sur les rationnels et les radicaux ;
- Les côtés de deux triangles dont les angles sont égaux, sont proportionnels ;
- Les connaissances géométriques des programmes de seconde.

Objectifs spécifiques : - Procédé d'étude explicite de quelques irrationnels ;
- Utilisation simultanée de l'analyse et de la géométrie.

ENCADREMENT PAR DICHOTOMIE

Ce document décrit un procédé de détermination approchée d'une solution d'une équation.

Prérequis : - représentations graphiques des fonctions polynômes du second degré, du troisième degré et de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$.

Objectifs spécifiques : - Première approche de programmation d'un procédé itératif avec test d'arrêt.

EXEMPLES DE CALCULS D'AIRE

Il s'agit :

1) Du calcul d'aire de quelques surfaces élémentaires ;
2) De procédés de calcul approché par encadrements de l'aire de domaines limités par des segments de droites et des arcs de courbes, dans les exemples suivants : aire du triangle, aire "sous une parabole", problème d'Archimède.

Prérequis :
- Parabole d'équation $y = x^2$;
- Tangente en l'un de ses points ;
- Somme des n premiers entiers naturels ;
- Somme des n premiers termes d'une suite géométrique.

Objectifs spécifiques : Développer les qualités de soin et de précision dans des activités graphiques.

LA SPHERE

Les formules $S = 4 \pi R^2$ et $V = \frac{4}{3} \pi R^3$ sont généralement, et pour cause, "parachutées". Le procédé d'approximation utilisé ici permet de s'assurer de leurs vraissemblances.

Prérequis : - Trigonométrie de troisième (revue en Seconde)

Objectif spécifique :
- Développer des qualités de soin dans la conduite des calculs numériques ;
- Etude de la sphère.

IL EST INUTILE DE CHERCHER UN OBJET LA OU IL N'EST PAS

Il s'agit d'un résultat qui, dans la recherche des solutions d'une équation polynomiale, permet de réduire le champ des investigations à un intervalle borné.

Prérequis : - Suites géométriques ; somme des n premiers termes.

Objectifs spécifiques :
- Apprendre à majorer ;
- Lien entre une méthode numérique et l'aspect graphique d'un problème.

9. RESOLUTION DE L'EQUATION DU SECOND DEGRE

10. LE PROBLEME DU PLI

11. A PERIMETRE EGAL

12. DEUX PROBLEMES DE MINIMUM

Ces documents illustrent les alinéas suivants du programme :

- Exemples d'étude du sens de variation d'une fonction.
- Exemples de recherche d'extremums.
- Exemples de tracé de la courbe représentative d'une fonction.
- Exemples d'étude d'équation $f(x) = \lambda$ ou d'inéquation $f(x) \leqslant \lambda$.

RESOLUTION DE L'EQUATION DU SECOND DEGRE

La méthode graphique proposée ici met, en outre, en évidence la somme et le produit des racines.

Prérequis : Parabole d'équation $y = x^2 + px$.

Objectifs spécifiques :
- Etude d'équation $f(x) = \lambda$
- Distinction de cas ;
- Soin et précision dans le tracé d'une courbe.

LE PROBLEME DU PLI

Il s'agit de deux problèmes de minimum et d'un problème de maximum qui leur est lié.

Prérequis :
- Etude de fonctions ;
- Formules de dérivation.

Objectifs spécifiques :
- Calcul de dérivées ;
- Exemples de recherche d'extremums ;
- Mathématisation d'un problème.

A PERIMETRE EGAL

On établit deux résultats :

1° Etant donné un triangle équilatéral de périmètre P, pour chaque réel positif k inférieur à son aire K, il existe deux triangles isocèles de périmètre P et d'aire k.

2° De tous les triangles ayant le même périmètre, le triangle équilatéral a la plus grande aire.

Le premier peut être établi à l'aide soit de l'étude d'une fonction du troisième degré (démonstration 1), soit de celle d'une fonction trigonométrique (démonstration 2).

Pour établir le second résultat, on utilise le premier ainsi qu'un raisonnement géométrique original.

Un exercice d'application permet de démontrer que la moyenne géométrique de trois nombres est inférieure à leur moyenne arithmétique.

Prérequis : - Etude de fonctions ;
- Formules de dérivation.

Objectifs spécifiques : - Précision et soin dans un tracé de courbe ;
- Le graphique donne des valeurs approximatives des solutions de l'équation $f(x) = \lambda$, donc du problème posé : reste à en calculer les valeurs exactes (entières dans l'application proposée en A).

3. COMBIEN DE SOLUTIONS POUR UNE EQUATION DU TROISIEME DEGRE ?

Voilà un sujet de problème qui justifie les nombreux points de vue qu'aborde ce document : historique, géométrique, algébrique, graphique et numérique ! Le sujet ne sera pas, pour autant, épuisé, puisqu'il pourra être de nouveau étudié en Terminale, à l'aide des nombres complexes.

Prérequis : - Deux triangles ayant des angles égaux ont leurs côtés proportionnels ;
- Equation du second degré ; somme et produit des racines.

Objectifs spécifiques : - Mathématisation de problèmes ;
- Intérêt historique : un problème géométrique conduit à des problèmes algébriques.
- Utilisation du second degré pour la résolution algébrique de certaines équations du troisième degré.
- Utilisation de l'analyse pour déterminer le nombre de solutions d'une équation du troisième degré, et en trouver des valeurs approchées.

14. NE SOYONS PAS AVARES D'ECONOMIE

"L'enseignement des mathématiques est à relier à celui des autres disciplines sous deux aspects principaux : étude de situations issues de ces disciplines, comprenant une phase de mathématisation et une phase d'interprétation ; organisation concertée des activités d'enseignement." (paragraphe 5 des objectifs du programme). On voudrait, ici, contribuer (modestement) à illustrer le premier aspect. Ses auteurs pensent que les situations issues de l'économie ne doivent pas nécessairement être réservées aux sections B ou G.

Prérequis : Etude de fonctions du second et troisième degré.

Objectif spécifique : - Mathématisation et interprétation d'une situation issue de l'économie.

15. PROBLEMES DU SECOND DEGRE

C'est une méthode géométrique qui est proposée ici pour résoudre une équation du second degré, avant une série de problèmes de difficultés très variées.

Prérequis : - Résolution d'une équation du second degré (sauf pour 1).
- Equations de droites, droites orthogonales (pour 1).

Objectif spécifique : Mathématisation de problèmes.

16. DES SECTIONS DU CUBE

17. LA COPIE DE BERGSON

On étudie la forme et l'aire de la section d'un cube par un plan perpendiculaire à une de ses diagonales, selon la position de celui-ci.

Les activités mises en oeuvre s'inscrivent dans le cadre des rubriques : "Exemples simples de recherches de sections planes..." "Exemples de calcul de distances et d'angles dans les configurations usuelles... et de calcul d'aires de polygones".

Prérequis : - Parallélisme, orthogonalité et incidence en géométrie dans l'espace.
- Calculs de distance (le produit scalaire peut être utile).
- Fonction trinome du second degré.

Objectifs spécifiques : - Familiariser les élèves avec la vision dans l'espace.
- Lien entre un problème typiquement géométrique et un problème d'analyse.
- Lecture et compréhension d'une démonstration (copie de Bergson).

18. PARTAGEONS

Ce document comporte deux axes directeurs :
a) l'utilisation de raisonnements de géométrie affine ;
b) une illustration géométrique de la détermination de la limite d'une suite.

Prérequis : - Géométrie de la classe de seconde ;
- Suites géométriques.

Objectifs spécifiques - Mise en oeuvre des connaissances du cours ;
- Utilisation de procédés algorithmiques.

9. AIRE ET LONGUEUR D'UNE ARCHE DE CYCLOIDE

On cherche ici la longueur d'une arche de cycloïde et l'aire comprise entre cette arche et la droite sur laquelle roule le cercle. Pour cela on construit une suite dont on cherche la limite. Les termes de cette suite sont obtenus en approchant le cercle par des polygones réguliers inscrits dans ce cercle.

Prérequis : Polygones réguliers, relations métriques d'un triangle, trigonométrie de seconde, formules trigonométriques de première (on peut se servir d'un formulaire avant d'avoir étudié le chapitre), étude de suites.

Objectifs spécifiques : - construire une suite dont la limite donne la solution du problème ;
- résoudre un problème en se servant à la fois de l'analyse, de la trigonométrie et de la géométrie.

. ETUDE D'UNE FIGURE

PLUSIEURS PISTES POUR UN MEME ALIGNEMENT

QUESTION DE MILIEUX

23. PLUSIEURS DEMONSTRATIONS POUR UN MEME ORTHOCENTRE

24. RECHERCHE D'ENSEMBLES DE POINTS

25. PROBLEMES D'ALIGNEMENT

26. ETUDE D'UNE CONFIGURATION

27. PROBLEMES DE CONCOURS

Ces documents consacrés à la géométrie plane visent essentiellement trois des quatre objectifs fixés par le programme:

- l'approfondissement de la géométrie plane à travers l'étude des configurations et de l'action des transformations sur celles-ci ;
- la pratique de l'outil vectoriel ;
- la mise en oeuvre de figures à tous les stades de la recherche et de la rédaction.

1 * Chacun des quatre premiers présente une situation géométrique simple. L'originalité de leur présentation tient à deux choses :

1- Plusieurs démonstrations sont demandées ; cela montre que plusieurs pistes efficaces sont possibles : il nous paraît important d'en persuader les élèves ; cela ne pourra que les encourager à ne pas lâcher trop tôt une piste et envisager un même problème sous différents angles.
   Ainsi espère-t-on favoriser l'apprentissage d'une méthode : traduire hypothèses, conclusion et étapes intermédiaires en fonction de l'outil choisi.

2- Des clés peuvent être, une à une, mises par le professeur à la disposition des élèves, sur leur demande. Ainsi peut-on espérer rompre avec le "tout ou rien" de la réponse à un problème de géométrie.

** En ce qui concerne la Recherche d'ensembles de points , un Mode d'emploi joint à la batterie d'exercices indique la méthode de résolution à laquelle on veut entraîner les élèves. Le dernier exercice montre que cette méthode n'est toutefois pas unique.

Prérequis : - Géométrie élémentaire ;
- Règles du calcul vectoriel ;
- Propriétés des homothéties ;
- Propriétés des barycentres.

Objectifs spécifiques : - Acquisition de méthode dans la recherche d'un problème de géométrie ;
- Utilisation des outils mis à disposition par le cours.

2 Les Problèmes d'alignement , L'étude d'une configuration et les Problèmes de concours sont constitués des acquis antérieurs. Les problèmes d'alignement sont (curieusement) plus faciles que les problèmes de concours. Les clés données ne sauraient être exhaustives.

Prérequis : - Les mêmes que ceux des documents précédents.

Objectifs spécifiques : Outre ceux des documents précédents, le choix des "outils" utilisés pour la résolution d'un problème : il sera intéressant d'exploiter la variété des solutions trouvés par les élèves.

28. UN PROBLEME DE NAPOLEON

Il s'agit de construire le centre d'un cercle donné à l'aide du seul compas.

Prérequis : - Deux triangles dont les angles sont égaux ont leurs côtés proportionnels.
- Géométrie élémentaire.

Objectifs spécifiques : - Démonstrations ;
- Justification d'un procédé de construction (trop difficile à trouver).

29. PSEUDO-CARRES

On étudie les propriétés de quadrilatères dont les diagonales sont perpendiculaires et de longueurs égales.

Prérequis : - Rotations.

Objectifs spécifiques : - Etude d'une configuration.
- Utilisation des propriétés élémentaires des rotations.

30. LES AUTOROUTES DE MONSIEUR FERMAT

Le problème est connu : étant donné un triangle, on cherche la position du point M qui réalise le minimum de la somme de ses distances aux trois sommets.

Prérequis : - Inégalité triangulaire ;
- Angles orientés, rotations et propriétés.

Objectifs : - Résolution géométrique d'un problème de minimum ;
- Géométrie métrique : utilisation de l'inégalité triangulaire, calcul d'angles, utilisation des rotations, propriétés du triangle équilatéral, concours de droites et de cercles.

31. LE PROBLEME DE FAGNANO ET QUELQUES APPLICATIONS

32. LE PROBLEME DE FAGNANO (bis)

On cherche le triangle de périmètre minimal inscrit dans un triangle donné : ses sommets sont les pieds des hauteurs.

Deux méthodes sont proposées qui peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre : la première conduit à un problème d'alignement qui se résout par des méthodes affines (homothéties - Thalès). La comparaison des périmètres du triangle obtenu et d'autres triangles inscrits permet d'obtenir des résultats métriques et trigonométriques en faisant l'objet d'exercices de calcul.

Prérequis : - Propriétés des homothéties (méthode 1)
- Propriétés des symétries (méthodes 1 et 2)
- Composées de symétries (méthode 2)
- Les formules $\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}$ et $S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$.

Objectifs : - Résolution géométrique d'un problème de minimum ;
- Géométrie des transformations ;
- Calculs métriques et trigonométriques.

33. VOIR DANS L'ESPACE

34. DESSINER L'ESPACE

35. CALCUL DE DISTANCES ET D'ANGLES EN GEOMETRIE DANS L'ESPACE

36. LES TRONCATURES DU CUBE

Ces documents se réfèrent aux trauvaux pratiques suivants :

- Exemples de problèmes d'alignement et de concours dans les tétraèdres et parallélépipèdes.
- Exemples simples de recherche de sections planes.
- Exemples de calcul de distances et d'angles dans les configurations usuelles et de calcul d'aires de polygones.

Prérequis : - La géométrie des programmes de seconde.

Objectifs : - Bonne visualisation de l'espace
- Bonne compréhension des propriétés d'incidence, de parallélisme et d'orthogonalité dans l'espace.

----

1. Aux élèves pour qui $\sqrt{3}$ est égal à 1,7320508, comme l'affiche leur calculatrice

On cherche à calculer $9x^4 - y^4 + 2y^2$ pour $x = 10864$ et $y = 18817$.

Solution 1

Calculons $\dfrac{18817}{10864}$; ma calculatrice affiche 1,7320508

j'en conclus que $\dfrac{18817}{10864} = \sqrt{3}$

donc $18817 = 10864 \times \sqrt{3}$ donc $18817^4 = 10864^4 \times 9$

donc $10864^4 \times 9 - 18817^4 = 0$

par conséquent ; pour $x = 10864$ et $y = 18817$, on a :

$9x^4 - y^4 + 2y^2 = 2 \times 18817^2 = 708158978$

Solution 2

$9x^4 - y^4 + 2y^2 = (3x^2 - y^2)(3x^2 + y^2) + 2y^2$

je calcule $3 \times 10864^2 - 18817^2$ et je trouve -1

par conséquent : pour $x = 10864$ et $y = 18817$, on a :

$9x^4 - y^4 + 2y^2 = -(3x^2+y^2) + 2y^2 = -3x^2 + y^2 = -(3x^2 - y^2) = 1$

Question :

Ces deux solutions ont été proposées par des élèves de seconde.
Qu'en pensez-vous ?

2. APPROXIMATIONS

PROBLEME : Le nombre a est un entier naturel qui n'est pas le carré d'un entier. On cherche à construire une suite de valeurs approchées de plus en plus voisines du nombre $\sqrt{a}$.

METHODE 1. (EULER)

A/ Voici un texte du mathématicien L. EULER (1707-1783) :*

Généraliſons ce que nous venons d'expoſer, en ſuppoſant que l'équation donnée ſoit $xx = a$, & qu'on ſache d'avance que x eſt plus grand que n, mais plus petit que $n+1$. Si après cela nous ſuppoſons $x = n + p$, en ſorte que p doive être une fraction, & que pp puiſſe ſe négliger comme une quantité très-petite, nous aurons $xx = nn + 2np = a$; ainſi $2np = a - nn$, & $p = \frac{a-nn}{2n}$; par conſéquent $x = n + \frac{a-nn}{2n} = \frac{nn+a}{2n}$. Or ſi n approchoit déjà de la vraie valeur, cette nouvelle valeur $\frac{nn+a}{2n}$ en approchera encore beaucoup plus. Ainſi en la ſubſtituant à n, on ſe trouvera encore plus près de la vérité ; on aura une nouvelle valeur qu'on pourra ſubſtituer de nouveau, afin d'approcher encore davantage ; & on pourra continuer le même procédé auſſi loin qu'on voudra.

Soit, par exemple, $a = 2$, c'eſt-à-dire qu'on demande la racine quarrée de 2 ; ſi on connoît déjà une valeur aſſez approchante, & qu'on l'exprime par n, on aura une valeur de la racine encore plus approchante, exprimée par $\frac{nn+2}{2n}$. Soit donc

I.) $n = 1$, on aura $x = \frac{3}{2}$,

II.) $n = \frac{3}{2}$, on aura $x = \frac{17}{12}$,

III.) $n = \frac{17}{12}$, on aura $x = \frac{577}{408}$;

& cette derniere valeur approche ſi fort de $\sqrt{2}$, que ſon quarré $\frac{332929}{166464}$ ne differe du nombre 2 que de la petite quantité $\frac{1}{166464}$, dont il le ſurpaſſe.

Question 1 : Vérifier les résultats numériques donnés par Euler dans l'exemple : $a = 2$.

B/ On applique la méthode d'Euler au calcul de valeurs approchées de $\sqrt{30}$ et on cherche à justifier la seconde partie de son texte : "Or si n approchait déjà... aussi loin qu'on voudra".

Question 2 : Calculer les premières valeurs de x et de p ($a = 30$) :

$x_0 = 5$	$p_1 =$
$x_1 =$	$p_2 =$
$x_2 =$	$p_3 =$
$x_3 =$	

Constater que les nombres x_0, x_1, x_2, x_3 sont les premiers termes de la suite ainsi construite :

* le premier terme x_0 est égal à 5 ;

** le terme x_{i+1} se déduit du terme précédent x_i à l'aide de la relation :

$$x_{i+1} = \frac{x_i^2 + 30}{2x_i}$$

<u>Question 3</u> : Montrer que pour tout réel x strictement positif,

$$\frac{x^2 + 30}{2x} \geqslant \sqrt{30}$$

En déduire que les valeurs x_1, x_2, ..., x_n, ... obtenues par la méthode d'Euler sont toutes des valeurs approchées de $\sqrt{30}$ <u>par excès</u>.

<u>Question 4</u> : On veut, à présent, démontrer que x_{i+1} est une meilleure approximation que x_i de $\sqrt{30}$: l'erreur commise en remplaçant $\sqrt{30}$ par x_i est égale à $x_i - \sqrt{30}$; on est donc amené à comparer $x_{i+1} - \sqrt{30}$ à $x_i - \sqrt{30}$.

a) Calculer $x_{i+1} - \sqrt{30}$ en fonction de x_i ;

b) Montrer que pour tout i non nul, $x_{i+1} - \sqrt{30} \leqslant \frac{1}{2}(x_i - \sqrt{30})$;

c) Interpréter cette dernière inégalité en terme d'erreurs.

d) Il y a mieux ; montrer que :
si $x_i - \sqrt{30} < 10^{-p}$ alors $x_{i+1} - \sqrt{30} < 10^{-2p}$; $(p \in \mathbb{N})$

Autrement dit, l'écart entre une valeur approchée de $\sqrt{30}$ donnée par un terme de la suite et la valeur exacte de $\sqrt{30}$ décroit rapidement : on ne s'étonnera pas d'obtenir "en quelques pas" la même valeur pour x_i que pour $\sqrt{30}$, sur l'écran de la calculatrice.

METHODE 2. (GRAPHIQUE)

A/ $x = \sqrt{a} \iff \begin{cases} x^2 = a \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - a = 0 \\ x > 0 \end{cases}$

On considère donc la fonction $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$\qquad x \longmapsto x^2 - a$

$\sqrt{a}$ est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C représenttative de f et de l'axe des abscisses. (figure 1)

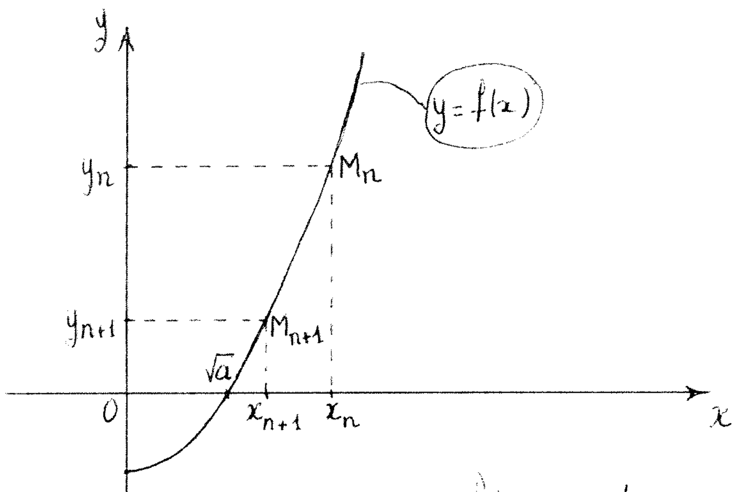


figure 1.

On construit graphiquement une suite de points $M_i(x_i,y_i)$ appartenant à la courbe C, et de plus en plus proches de $I(\sqrt{a};0)$.

Pour cela,

1. On encadre a par les carrés de deux entiers consécutifs :

$$p^2 < a < (p+1)^2$$

donc $p < \sqrt{a} < p+1$

on choisit $\underline{x_0 = p+1}$; y_0 est alors déterminé car $M_0 \in C$.

2. On cherche x_1 sous la forme : $x_1 = x_0 - h$ avec $0 < h < 1$ (figure 2)

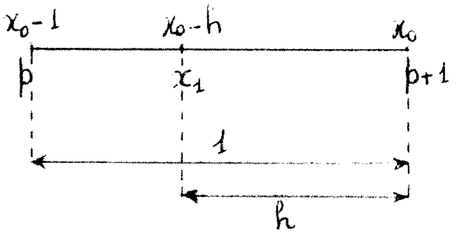


figure 2.

Question 1 : Montrer que $y_1 = y_0 - 2h\,x_0 + h^2$

On choisit h de façon que l'on ait $y_1 = h^2$

L'intérêt de ce choix est le suivant : si h est suffisamment voisin de zéro, alors h^2 est encore plus voisin de zéro.

Comme $y_1 = h^2$, $y_0 - 2h\,x_0 = 0$ donc $h = \dfrac{y_0}{2x_0}$; x_1 et y_1 sont alors déterminés.

Question 2 : Montrer que : $0 < h < 1$.

Question 3 : Montrer, en utilisant la figure 1, que :

$$\sqrt{a} < x_1 < x_0 \quad \text{et} \quad 0 < y_1 < y_0.$$

(3) On itère le procédé et on construit ainsi la suite cherchée :

a) on cherche x_2 sous la forme $x_2 = x_1 - h$ avec $0 < h < 1$

b) on choisit h de façon que $y_2 = h^2$

etc...

Question 4 : Dans le cas où $a = 30$, calculer les premières valeurs de x_i, de h et de y_i avec la précision de votre calculatrice.

B/ (1) On a : $y_1 < 1$

Question 5 : Montrer que

$$y_2 < \frac{y_1^2}{4a} < \frac{1}{4a}$$

$$y_3 < \frac{y_2^2}{4a} < \frac{1}{(4a)^3}$$

Déterminer des majorations analogues pour y_4 et y_5 et deviner les majorations que l'on obtient ainsi pour y_n.

(2) $a = 30$

Question 6 : a) Déterminer l'ordre de grandeur du majorant de y_3 ainsi obtenu ;

b) Déterminer la plus petite valeur de l'entier n pour laquelle on soit sûr que : $y_n < 10^{-8}$.

Question 7 : Montrer que : si $y_n < 10^{-p}$ alors $y_{n+1} < 10^{-2p}$; $(p \in \mathbb{N})$

Autrement dit, à chaque pas, le nombre de zéros de l'écriture décimale des nombres y_i est au moins doublé : on ne s'étonnera pas d'obtenir très rapidement 0 à l'affichage de la calculatrice.

METHODE 3 (NEWTON (1642-1727)

L'idée de départ est celle de la méthode 2. On construit la suite des points M_i de la façon suivante :

① On encadre a par les carrés de deux entiers consécutifs :

$$p^2 < a < (p+1)^2$$

donc $p < \sqrt{a} < p+1$

On choisit $x_0 = p+1$; M_0 est le point de C d'abscisse x_0.

② On construit la tangente T_0 à C en M_0 ; T_0 coupe l'axe des abscisses en $I_1(x_1 ; 0)$;

Question 1 : Calculer x_1, en fonction de x_0.
M_1 est le point de C d'abscisse x_1.

③ On itère le procédé : on construit la tangente T_1 à C en M_1 ; T_1 coupe l'axe des abscisses en $I_2(x_2, 0)$;
etc...

Question 2 : Ecrire x_{i+1} en fonction de x_i. Comparer la relation obtenue à celle donnée par la méthode d'Euler. En quoi les deux suites diffèrent-elles ?

EXERCICE 1

1) Quelle valeur votre calculatrice affiche-t-elle pour $\sqrt{30}$?
Calculer $\left(\frac{11}{2}\right)^2$, puis $11^2-30\times2^2$.

2) On définit la suite u par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{11}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{30}{u_n}\right), \text{ pour tout n, entier.} \end{cases}$$

a) On définit les suites p et q de la façon suivante :
$$\begin{cases} p_0 = 11 \\ q_0 = 2 \end{cases} \text{ et pour tout } n, \begin{cases} p_{n+1} = p_n^2 + 30q_n^2 \\ q_{n+1} = 2p_nq_n \end{cases}$$
Montrer que pour tout n, $u_n = \frac{p_n}{q_n}$.

b) On pose $r_n = p_n^2 - 30\,q_n^2$, pour tout n, entier.

Calculer r_0 ; calculer r_{n+1} en fonction de r_n ; en déduire la valeur de r_n et utiliser ce résultat pour démontrer que :

$$0 < \frac{p_n}{q_n} - \sqrt{30} < \frac{1}{10\, q_n^2}$$

c) Ecrire $\frac{p_0}{q_0}$ et donner un majorant (de la forme 10^{-p}, $p \in \mathbb{N}$) de l'erreur que l'on commet en remplaçant $\sqrt{30}$ par $\frac{p_0}{q_0}$.

Faire de même avec $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$;

d) Montrer que $q_{n+1} > 10q_n^2$.

Cette dernière inégalité justifie la rapidité de la croissance de $q_n (q > 1)$ donc la rapidité de la convergence de la suite u vers $\sqrt{30}$.

EXERCICE 2

1) Etudier la fonction φ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{2}\left(x + \frac{30}{x}\right) \end{aligned}$$

Représenter φ, graphiquement.

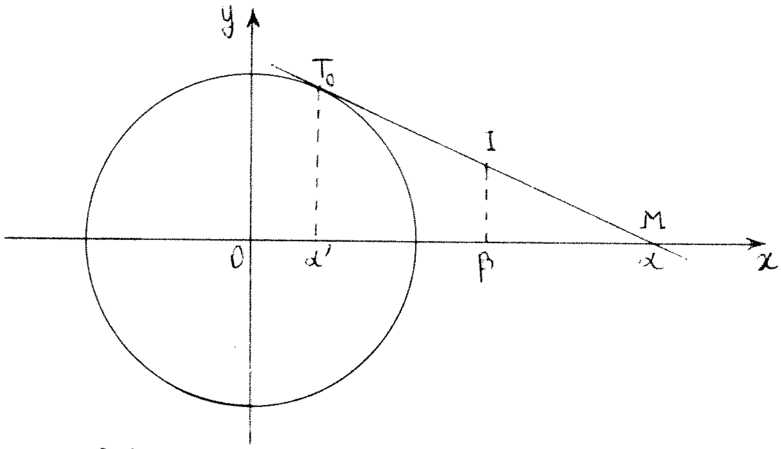
2) Représenter graphiquement les termes successifs de la suite définie par

$$\begin{cases} x_0 = \alpha & (\alpha > \sqrt{30}) \\ x_{n+1} = \varphi(x_n) \end{cases}$$

EXERCICE 3

Soit a un entier qui n'est pas le carré d'un entier.

On suppose connu le nombre $\sqrt{a}$, et on considère le cercle Γ de centre 0 et de rayon $\sqrt{a}$;



Partant de $M(\alpha\ ;\ 0)$, on fait la construction suivante :

1) on trace une tangente à Γ passant par M ; soit T_0 le point de contact

2) on prend le milieu I de $[M, T_0]$.

Question 1 : Soit α' l'abscisse de T_0 et β celle de I

Montrer que $\alpha\alpha' = a$

En déduire que si α est la valeur d'un terme de la suite donnée par Euler, β est la valeur du terme suivant.

Question 2 : Utiliser la construction géométrique précédente pour représenter les premiers termes de la suite d'Euler.

EXERCICE 4

a) Partant de $x_0 = 2$, calculer x_1, x_2, x_3 valeurs approchées de $\sqrt{1,57}$ en utilisant la méthode d'Euler.
   Combien d'itération doit-on prévoir pour donner $\sqrt{1,57}$ à 10^{-10} près ?

b) Partant de $x_0 = 2000$, calculer x_1, x_2, x_3 valeurs approchées de $\sqrt{1571234}$ en utilisant la méthode d'Euler.
   Combien d'itération doit-on prévoir pour donner $\sqrt{1571234}$ à 10^{-10} près ?

* Ce texte est dû au mathématicien suisse EULER ; il date de 1748 et est publié ici dans une réédition du 19e siècle. Il est extrait du chapitre XVI intitulé "De la résolution des équations par des approximations" de son livre "Introduction à l'analyse des infiniment petits."

Il faut avoir appris à distinguer ce qui est grand de ce qui est petit, ce qui est prépondérant de ce qui est négligeable. En d'autres termes, le calcul infinitésimal est l'apprentissage du maniement des inégalités bien plus que des égalités, et pourrait se résumer en trois mots :

MAJORER MINORER APPROCHER

Jean DIEUDONNE
Calcul infinitésimal, Hermann - 1968

3. SECOND DEGRE EN CONTINU

RAPPEL

- un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire comme quotient de deux entiers ; exemples: 2 ; -3 ; $\frac{5}{7}$.
  un nombre irrationnel est un nombre qui n'est pas rationnel.
- on sait que si l'entier naturel N n'est pas le carré d'un entier, alors $\sqrt{N}$ est un nombre irrationnel ; exemples : $\sqrt{3}$, $\sqrt{120}$.
- dans ce document on considère des équations du second degré "$Ax^2 + Bx + C = 0$" vérifiant les propriétés suivantes :
  1) A, B et C sont des nombres entiers ;
  2) $AC < 0$.

Question 0 :

a) Démontrer qu'une telle équation admet deux solutions de signes contraires ;

b) A quelle condition sur son discriminant les solutions d'une telle équation sont-elles des nombres rationnels ?

Voici une méthode de recherche de la solution positive d'une telle équation.

Elle n'utilise pas le calcul du discriminant mais le résultat suivant : une fonction polynôme qui change de signe entre deux valeurs a et b de la variable, s'annule pour une valeur de celle-ci, comprise entre a et b.
On fera fonctionner le procédé sur des exemples avant de l'examiner, puis d'en montrer l'intérêt.

I- QUELQUES EXEMPLES

EXEMPLE 1 : E désigne l'équation $6x^2 + 5x - 6 = 0$

Etape 1 : A l'équation E, on associe la fonction $f : x \longmapsto 6x^2 + 5x - 6$; $f(0) = -6$; $f(1) = 5$.
L'équation E admet donc une solution x comprise entre 0 et 1.
0 est la partie entière de x.
On pose $x = \frac{1}{x_1}$ on a alors : $0 < \frac{1}{x_1} < 1$ donc $x_1 > 1$.

Question 1 : Montrer que $6x^2 + 5x - 6 = 0 \Longleftrightarrow 6x_1^2 - 5x_1 - 6 = 0$.

Etape 2 : E_1 désigne l'équation $6x^2 - 5x - 6 = 0$.
A l'équation E_1, on associe la fonction $f_1 : x \longmapsto 6x^2 - 5x - 6$; $f_1(1) = -5$; $f_1(2) = 8$.
L'équation E_1 admet donc une solution x_1 comprise entre 1 et 2.
1 est la partie entière de x_1.
On pose $x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$; on a alors : $0 < \frac{1}{x_2} < 1$ donc $x_2 > 1$.

Question 2 : Montrer que $6x_1^2 - 5x_1 - 6 = 0 \Longleftrightarrow 5x_2^2 - 7x_2 - 6 = 0$

Etape 3 : E_2 désigne l'équation $5x^2 - 7x - 6 = 0$.
A l'équation E_2, on associe la fonction $f_2 : x \longmapsto 5x^2 - 7x - 6$; $f_2(2) = 0$.
Donc 2 est solution de E_2 et le procédé s'arrête car la solution trouvée est un nombre entier.

Conséquence : puisque 2 est solution de E_2, $1 + \frac{1}{2}$ est solution de E_1 et par conséquent $\dfrac{1}{1 + \frac{1}{2}}$ est solution de l'équation E : la solution positive de E est un nombre rationnel.

EXEMPLE 2 : E désigne l'équation : $x^2 - 2x - 2 = 0$.

Etape 1 : A l'équation E, on associe la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 2x - 2$; $f(2) = -2$; $f(3) = 1$
L'équation E admet donc une solution x comprise entre 2 et 3 ;
2 est la partie entière de x.
On pose $x = 2 + \frac{1}{x_1}$; on a donc $x_1 > 1$.

Question 3 : Montrer que $x^2 - 2x - 2 = 0 \Longleftrightarrow 2x_1^2 - 2x_1 - 1 = 0$

Etape 2 : E_1 désigne l'équation $2x^2 - 2x - 1 = 0$.
A l'équation E_1, on associe la fonction $f_1 : x \longmapsto 2x^2 - 2x - 1$;
$f_1(1) = -1$; $f_1(2) = 3$.
L'équation E_1 admet donc une solution x_1 comprise entre 1 et 2 ;
1 est la partie entière de x_1.
On pose $x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$; on a donc $x_2 > 1$.

Question 4 : Montrer que $2x_1^2 - 2x_1 - 1 = 0 \Longleftrightarrow x_2^2 - 2x_2 - 2 = 0$.
E_2 est donc l'équation E initiale : par conséquent, le procédé ne s'arrête pas ; il se répète indéfiniment.

Conséquence : Si x est la solution positive de E_2, alors $1 + \frac{1}{x}$ est solution de E_1, donc $2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ est la solution positive de E.

CONCLUSION : La solution positive de E vérifie $x = 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{x}}$, donc

vérifie $x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{x}}}}$

etc...

Question 5 : Traiter suivant le même procédé les exemples suivants :

Exemple 3 : $x^2 - x - 1 = 0$

Exemple 4 : $x^2 - 30 = 0$

Exemple 5 : A votre choix.

II- EXAMEN DU PROCEDE

Rappelons que E désigne l'équation "$Ax^2 + Bx + C = 0$"

1) Les coefficients A, B et C sont des nombres entiers ;

2) $AC < 0$.

Dans toute la suite du paragraphe, H désigne le discriminant de E.

Question 6 : **On suppose que la solution positive de E n'est pas un entier ; on désigne, dans ce cas, sa partie entière par a, et on pose : $x = a + \frac{1}{y}$ on a alors $0 < \frac{1}{y} < 1$ donc $y > 1$.**

a) Montrer que $Ax^2 + Bx + C = 0 \Longleftrightarrow (Aa^2 + Ba + C)y^2 + (2Aa + B)y + A = 0$

b) Calculer le discriminant de l'équation, d'inconnue y, ainsi obtenue

c) A l'aide de deux graphiques (l'un correspondant au cas où $A > 0$, l'autre à celui où $A < 0$) montrer que $Aa^2 + Ba + C$ et A sont de signes contraires ; on a donc $(Aa^2 + Ba + C)\,A < 0$.

Conséquence : le changement d'inconnue transforme l'équation E en l'équation E_1 ;
- dont les coefficients sont des entiers ;
- ayant le même discriminant que E ;
- ayant, comme E, deux solutions de signes contraires.

En itérant le procédé, il y a, a priori, les éventualités suivantes :

1° à une étape p, on obtient une équation E_p dont la solution positive est entière ; c'est le cas de l'exemple 1. Le procédé s'arrête et par conséquent la solution positive de l'équation E est rationnelle.

2° Le procédé se répète sans que l'on obtienne une équation dont la solution positive soit entière. Nous allons montrer que dans ce cas, on obtient nécessairement, à une étape p une équation E_p déjà rencontrée ; c'est ce qui se produit dans l'exemple 2.
Pour le démontrer, il suffit d'établir que les itérations successives ne peuvent conduire qu'à un nombre fini d'équations E_p différentes.
Une équation E_p s'écrit $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.
On sait que α, β et γ sont entiers

$$\left.\begin{array}{l} \text{que } \alpha\gamma < 0 \\ \text{que } \beta^2 - 4\alpha\gamma = H \end{array}\right\} \quad (*)$$

Question 7 : 1) Montrer que $\beta^2 < H$; en déduire que les valeurs que peut prendre l'entier β sont en nombre fini.

2) $\alpha\gamma = \frac{\beta^2 - H}{4}$; montrer qu'à chaque valeur de β on ne peut associer qu'un nombre fini de couples d'entiers (α, γ).

CONCLUSION : Il n' y a qu'un nombre fini de triplets (α , β , γ) vérifiant les condtions (*) donc un nombre fini d'équations E_p différentes.

III- INTERET DU PROCEDE

On considère une équation du second degré, à coefficients entiers, admettant deux solutions de signe contraire, et dont la solution positive est un nombre irrationnel.

On peut affirmer :

1) Si on applique le procédé décrit précédemment, celui-ci ne s'arrête pas.

Question 8 : **Expliquer pourquoi.**

2) Le procédé construit une suite de nombres rationnels de plus en plus proches de la solution positive irrationnelle de l'équation.
On va le vérifier sur l'exemple 2 du premier paragraphe.

On sait que la solution x_0 positive de E vérifie :

$$x_0 = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cdots}}}}}}}$$

On pose :

$$f_0 = 2$$

$$f_1 = 2 + \frac{1}{1}$$

$$f_2 = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}$$

$$f_3 = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}$$

$$f_4 = 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}$$

Question 9 : Ecrire f_o, f_1, f_2, f_3, et f_4 sous forme de fractions irréductibles $\frac{a}{b}$.
Faire de même pour f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}.
Ranger ces treize fractions par ordre croissant.

Question 10 : Vérifier que $x_0 = 1 + \sqrt{3}$ et noter la valeur approchées $\bar{x}_o$ qu'en donne votre calculatrice.
On note φ_k la valeur de f_k affichée par la calculatrice.
Remplir le tableau suivant pour k allant de 0 à 12.

f_k	φ_k	valeur de $\varphi_k - \bar{x}_o$ affichée par la calculatrice

on constate que dans un tel exemple :

> **Le procédé donne la construction d'une suite illimitée de nombres rationnels qui encadrent de mieux en mieux la racine positive irrationnelle de l'équation donnée.**

IV- COMPLEMENT

On reprend l'exemple 2 : $1 + \sqrt{3}$ vérifie $x = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}$; $2 < 1 + \sqrt{3} < 3$.

On fabrique la suite f de la façon suivante :
le premier terme noté f_o est égal à 2 ; le second noté f_1 est égal à 3 ; ensuite, chaque terme noté f_n est obtenu à partir du précédent du précédent noté f_{n-2}, par la relation : $f_n = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{f_{n-2}}}$

Question 1 : Vérifier que f est définie par $\begin{cases} f_o = 2 \ ; \ f_1 = 3 \\ \text{pour tout } n \geqslant 2, \ f_n = \dfrac{3 f_{n-2} + 2}{f_{n-2} + 1} \end{cases}$.

Calculer $f_2, f_3, \ldots, f_{12}$.

Vérifier que $x_0 = 1 + \sqrt{3}$ est solution de $x = \dfrac{3x+2}{x+1}$

Question 2 : Montrer que $f_{n+2} - f_n$ est du même signe que $f_n - f_{n-2}$.

En déduire que si n est pair : $f_0 < f_2 < \ldots < f_{n-2} < f_n < f_{n+2} < \ldots$

si n est impair : $\ldots\ldots\ldots\ldots < f_{n+2} < f_n < f_{n-2} < \ldots\ldots < f_3 < f_1$.

Question 3 : On écrit : $x_0 - f_n = \dfrac{3x_0 + 2}{x_0 + 1} - \dfrac{3f_{n-2} + 2}{f_{n-2} + 1}$.

Montrer que $x_0 - f_n$ est du même signe que $x_0 - f_{n-2}$.

En déduire que si n est pair : $f_n < x_0$;

si n est impair : $x_0 < f_n$.

Déduire des questions 2 et 3 que : Pour tout entier naturel p,

$f_0 < f_2 < \ldots\ldots < f_{2p} < \ldots\ldots < x_0 < \ldots\ldots < f_{2p+1} < \ldots < f_3 < f_1$

Question 4 : Démontrer que pour tout entier naturel p :

$x_0 - f_{2p} < \dfrac{1}{3^{2p}}$ et $f_{2p+1} - x_0 < \dfrac{1}{3^{2p}}$

V- UN TEXTE HISTORIQUE

Il s'agit d'un commentaire du mathématicien LAGRANGE (1736-1813) à propos d'un texte de NEWTON (1642-1727), que l'on trouve dans le livre de Jean ITARD : "Arithmétique et théorie des Nombres" (PUF 1963).

Lagrange explique la façon dont Newton résout l'équation :

$$x^3 - 2x - 5 = 0.$$

« ... On voit que la racine réelle de l'équation proposée sera entre les nombres 2 et 3, et qu'ainsi 2 sera la valeur entière la plus approchée de cette racine. »

« Je fais maintenant $x = 2 + \frac{1}{y}$. » Il vient

$$f(y) = y^3 - 10y^2 - 6y - 1 = 0$$
$$f(10) = -61, \quad f(11) = 54$$

« Je fais donc $y = 10 + \frac{1}{z}$. »
Il vient

$$g(z) = 61z^3 - 94z^2 - 10z - 1 = 0$$
$$g(1) = -54, \quad g(2) = 71$$

« Je fais donc

$$z = 1 + \frac{1}{u} \text{ »}$$

$$h(u) = 54u^3 + 25u^2 - 89u - 61 = 0$$
$$h(1) = -71, \quad h(2) = 293$$

donc $u = 1 + \frac{1}{t}$, etc.

« En continuant de cette manière, on trouvera les nombres 2, 10, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 1, 12, etc. » d'où l'on tirera les réduites :

$$\frac{2}{1}, \frac{21}{10}, \frac{23}{11}, \frac{44}{21}, \frac{111}{53}, \frac{155}{74}, \frac{576}{275}, \frac{731}{349}, \frac{1\,307}{624}, \frac{16\,415}{7837}$$

« La dernière fraction est plus grande que la racine cherchée ; mais l'erreur sera moindre que $\frac{1}{(7837)^2}$, c'est-à-dire moindre que 0,0000000163 ; donc, si on réduit la fraction en fraction décimale, elle sera exacte jusqu'à la septième décimale : or, en faisant la division, on trouve 2,0945514865... ; ainsi la

racine cherchée sera entre les nombres 2,094551149 et 2,094551147.

« Newton a trouvé par sa méthode la fraction 2,0945551147 (voyez sa *Méthode des suites infinies*) ; d'où l'on voit que cette méthode donne dans ce cas un résultat fort exact ; mais on aurait tort de se promettre toujours une pareille exactitude. »

... La mathématique parle des approximations, ... elle en parle même énormément, mais ... elle en parle avec rigueur.
On pourrait même dire que c'est la tâche principale de la mathématique depuis ses origines, et que c'est le moteur le plus puissant de toute son histoire.
"Parler avec rigueur de ce qui est approximatif", la formule semble paradoxale. C'est en effet une sorte de défi présenté à l'activité intelligente de l'homme :
- d'une part l'exigence de certitude et de rigueur ;
- d'autre part l'inaccessibilité de cette perfection.

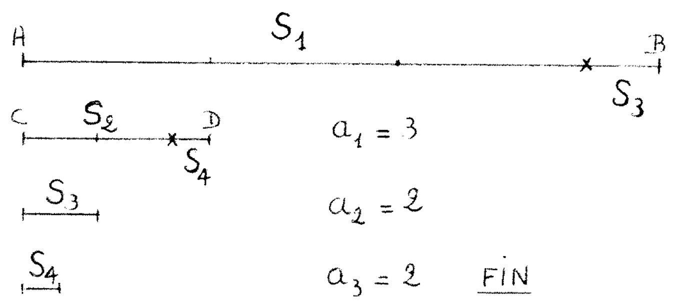
G. Th. GUILBAUD
Leçons d'A-peu-près
Christian Bourgois, 1985

4. IRRATIONNELS

I INTRODUCTION

Pour étudier le rapport AB/CD de deux segments AB et CD (on suppose toujours ici AB > CD), les mathématiciens grecs de l'antiquité procédaient ainsi :

1) On cherche combien de fois le segment AB contient le segment CD ; on obtient un nombre entier $a_1 \geqslant 1$. On écrit, en désignant désormais par S_1 le segment AB et par S_2 le segment CD (pour : segment numéro un, segment numéro deux) : $S_1 = a_1S_2 + S_3$ où S_3 désigne naturellement le reste de cette division (segment numéro trois) ; on a évidemment $S_2 > S_3$.



2) Si S_3 n'est pas nul, on cherche combien de fois S_2 contient S_3. On obtient un nombre entier $a_2 \geqslant 1$. On écrit : $S_2 = a_2S_3 + S_4$ où S_4 désigne le segment numéro quatre, reste de cette division.
On continue ainsi tant que la division faite ne "tombe pas juste", c'est-à-dire qu'elle fournit un reste. (Dans l'exemple figuré ci-dessus, la procédure s'arrête à la troisième division). On note les quotients entiers successifs $a_1, a_2, a_3 \ldots$

Question 1 : Vérifier que, sur l'exemple de la figure, on a AB/CD = 3 + 1/(2+1/2)

Indication : écrire $S_1/S_2 = 3 + S_3/S_2$; $S_2/S_3 = 2 + S_4/S_3$; $S_3/S_4 = 2$.

La procédure que nous venons de décrire s'appelle algorithme d'EUCLIDE, ou antiphérèse (vous ne trouverez ce mot dans aucun dictionnaire !).

L'algorithme d'Euclide peut aussi se pratiquer en termes <u>purement numériques</u> (sans penser nécessairement aux nombres comme à des longueurs ou rapports de longueurs). Voici un exemple :

A_1	$= 77/36$	$= 2 + 5/36$	$a_1 = 2$		$77 = 2 \times 36 + 5$		$a_1 = 2$
A_2	$= 36/5$	$= 7 + 1/5$	$a_2 = 7$		$36 = 7 \times 5 + 1$		$a_2 = 7$
A_3	$= 5$ FIN		$a_3 = 5$		$5 = 5 \times 1$ FIN		$a_3 = 5$

La colonne de droite traduit en égalités <u>d'entiers</u> les égalités de <u>fractions</u> de la colonne de gauche.

<u>Question 2</u> : **Vérifier que, dans l'exemple ci-dessus, on a :**
$A_1 = 77/36 = 2 + 1/(7 + 1/5)$

En général, si A est un nombre donné (qu'on supposera toujours positif), l'algorithme d'Euclide se pratique ainsi :

1° On écrit $A = A_1 = a_1 + \alpha_1$ où a_1 est <u>entier</u> et $0 \leqslant \alpha_1 < 1$. Autrement dit, a_1 est la <u>partie entière</u> de A_1, et α_1 sa <u>partie décimale.</u>

2° Si α_1 n'est pas nul, on pose $A_2 = 1/\alpha_1$; on a alors $A_2 > 1$. On écrit : $A_2 = a_2 + \alpha_2$ où a_2 est la <u>partie entière</u> de A_2 et α_2 sa <u>partie décimale.</u>

On continue ainsi tant qu'on n'obtient pas une partie décimale nulle.

<u>Question 3</u> : **Vérifier que, si $\alpha_5 = 0$ (par exemple), on a :**

$$A = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \cfrac{1}{a_5}}}}$$

<u>Question 4</u> : **1) Si l'algorithme d'Euclide d'un nombre A se termine au bout d'un certain nombre d'opérations, pourquoi le nombre A est-il <u>rationnel</u> ?**

2) Montrer que, si $A = p/q$ est rationnel (p et q sont des entiers), l'algorithme d'Euclide se terminera au bout d'au plus q opérations.

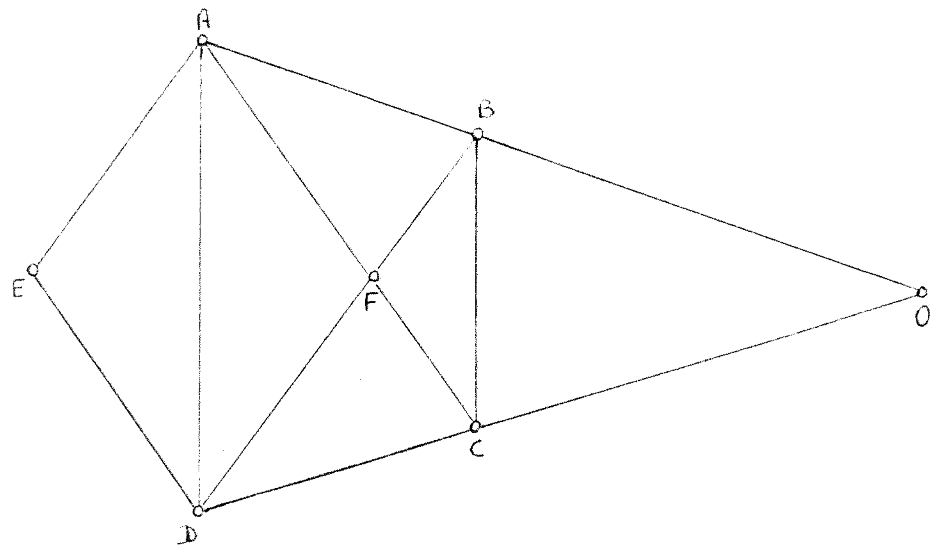
Indication : imaginer l'algorithme écrit sous forme d'égalités de nombres entiers et observer les restes des divisions successives).

Conclusion : L'antiphérèse d'un nombre A est infinie (ne se termine jamais) si et seulement si le nombre A est irrationnel.

II UN EXEMPLE HISTORIQUE D'ANTIPHERESE INFINIE (Etude géométrique)

On se propose d'étudier le rapport "diagonale/côté" dans une pentagone régulier.

Question 1 : **Pourquoi est-il inutile de préciser la taille du pentagone, la diagonale ou le côté ?**



Question 2 : Pourquoi, dans le pentagone régulier, chaque diagonale est-elle parallèle au côté qui ne lui est pas adjacent ? (Penser aux axes de symétrie). En déduire que EAFD est un parallélogramme, et que la première étape de l'antiphérèse peut s'écrire :

$$S_1 = 1 \times S_2 + S_3 \quad \text{avec} \quad S_1 = AC,\ S_2 = ED,\ S_3 = FC$$

Question 3 : Comparer les rapports ED/FC et AD/BC en utilisant, par exemple l'homothétie de centre O qui transforme B en A (image de F ? de C ?)
Remarquant que AD/BC = diagonale/côté, en déduire que l'antiphérèse est INFINIE, avec $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots\ldots\ldots$ et que ces nombres sont TOUS EGAUX A UN.
Pourquoi le rapport étudié ne peut-il être rationnel ?

Question 4 : Posant φ = AC/ED = AD/BC = ..., montrer que l'on a $\varphi = 1 + 1/\varphi$
En déduire que $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$
Ce nombre s'appelle le nombre d'or.

Remarquons que le raisonnement fait pour obtenir le résultat $a_1 = a_2 = \dots = 1$ est entièrement géométrique ; on trouvera à la fin du chapitre d'autres exemples d'études analogues.

L'exemple que nous venons d'étudier est, selon les historiens des mathématiques, la première preuve d'irrationnalité découverte par les grecs, bien avant Euclide.

III D'AUTRES EXEMPLES D'ANTIPHERESES INFINIES (étude numérique)

Traitons le cas du nombre $A = \sqrt{2}$.
Le nombre A est compris entre 1 et 2, car 1 au carré est 1, et 2 au carré est 4.
Cette seule information va nous suffire pour déterminer les entiers a_1, a_2...

1° On a $a_1 = 1$: nous venons de dire pourquoi. Donc :

$$\alpha_1 = \sqrt{2} - 1 \qquad \text{et} \qquad A_2 = 1/(\sqrt{2} - 1)$$

2° Pour calculer la partie entière de A_2, il n'est pas nécessaire de chercher une expression décimale plus précise que $\sqrt{2}$; les règles de calcul algébriques sur les radicaux sont bien plus efficaces (et ce que nous sommes en train de faire est leur principale application !) ; on a :

$$A_2 = (\sqrt{2} + 1)/(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2} + 1$$

et il est clair que : $a_2 = 2$ et $\alpha_2 = \sqrt{2} - 1$

Question 1 : En remarquant que $\alpha_2 = \alpha_1$, conclure que a_3, a_4, ... sont tous égaux à 2.
En déduire que le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 1 : Etudier de façon analogue les nombres :
$1 + \sqrt{2}$; $(1 + \sqrt{5})/2$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{7}$; $\sqrt{37}$.
(dans chaque cas, on demande la liste des entiers a_1, a_2, a_3...)

IV APPLICATION AU CALCUL NUMERIQUE

L'algorithme d'Euclide vient de nous permettre de démontrer que le nombre $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. Il permet en fait bien mieux : on peut en déduire des approximations de $\sqrt{2}$ aussi précises que l'on veut (voir aussi le T.P. : second degré en continu, où l'on utilise la même méthode pour calculer les racines d'une équation du second degré)

Faisons d'abord une expérience numérique, avec une calculette.

Exercice 2 : Déterminer les expressions décimales (à la calculette) des nombres : $1 + 1/2$, $1 + 1/(2 + 1/2)$, $1 + 1/(2 + 1/(2 + 1/2))$, etc...

Indication : pour calculer le nombre

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

(cette expression est souvent notée, plus commodément : $[a_1, \ldots, a_n]$)

on procède "en remontant", c'est-à-dire selon le "programme" :

$\boxed{a_n}\ \boxed{\tfrac{1}{x}}\ \boxed{+}\ \boxed{a_{n-1}}\ \boxed{=}\ \boxed{\tfrac{1}{x}}\ \ldots\ldots\ \boxed{a_2}\ \boxed{=}\ \boxed{\tfrac{1}{x}}\ \boxed{+}\ \boxed{a_1}\ \boxed{=}$

A partir de quelle valeur de n le nombre $[1, \underbrace{2, \ldots, 2}_{n \text{ fois}}]$ coïncide-t-il avec l'expression $\sqrt{2}$ donnée par la machine ?
Ensuite, on exécutera l'algorithme d'Euclide, à la machine, à partir de l'expression qu'elle donne de $\sqrt{2}$, selon le programme :

$\boxed{\sqrt{2}}\ \boxed{-}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{\tfrac{1}{x}}\ \boxed{-}\ \boxed{\text{partie entière}}\ \boxed{=}\ \boxed{\tfrac{1}{x}}\ \boxed{-}\ \ldots.$

A partir de quelle étape cesse-t-il de donner le résultat théorique prévu ?

Essayons maintenant de comprendre ce qui se passe.

Exercice 3 : On considère la fonction $f(x) = [a_1, a_2, \ldots, a_n, x]$ où $a_1, \ldots, a_n$ sont des entiers fixés (tous ≥ 1) et x une variable réelle positive. Montrer que f est croissante si n est pair, décroissante si n est impair.

(Indication : si x augmente, $1/x$ diminue, donc $a_n + 1/x$ diminue,...)

En remarquant que :

$$\sqrt{2} = [1,B] = [1,2,2,B] = [1,2,2,2,B] = \ldots \text{ où } B = 1 + \sqrt{2} > 2,$$

et en appliquant ce qui précède, montrer que l'on a :

$$R_1 < R_3 < R_5 < \ldots < \sqrt{2} < \ldots R_6 < R_4 < R_2$$

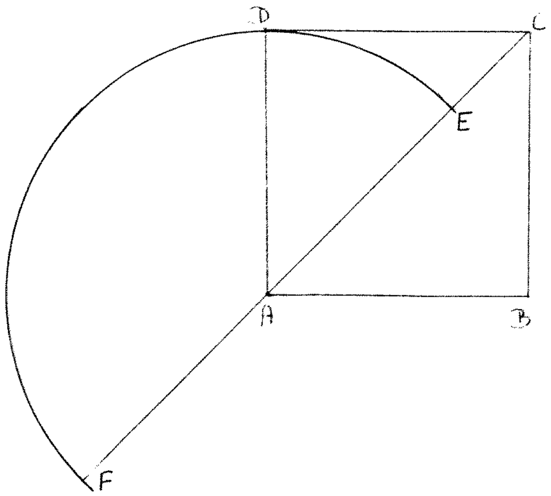
où

$$R_1 = 1,\ R_2 = [1,2],\ R_3 = [1,2,2],\ R_4 = [1,2,2,2],\ \ldots$$

Ceci montre que deux nombres consécutifs de la suite R_1, R_2, R_3... déterminent toujours un encadrement de $\sqrt{2}$. On peut aussi expliquer pourquoi la différence de deux nombres consécutifs de cette suite tend vers zéro (elle diminue même très rapidement) ; mais ceci est un peu plus difficile, et nous ne le ferons pas. Finalement, $\sqrt{2}$ est la limite de la suite de fractions R_n (que l'on appelle les réduites de $\sqrt{2}$).

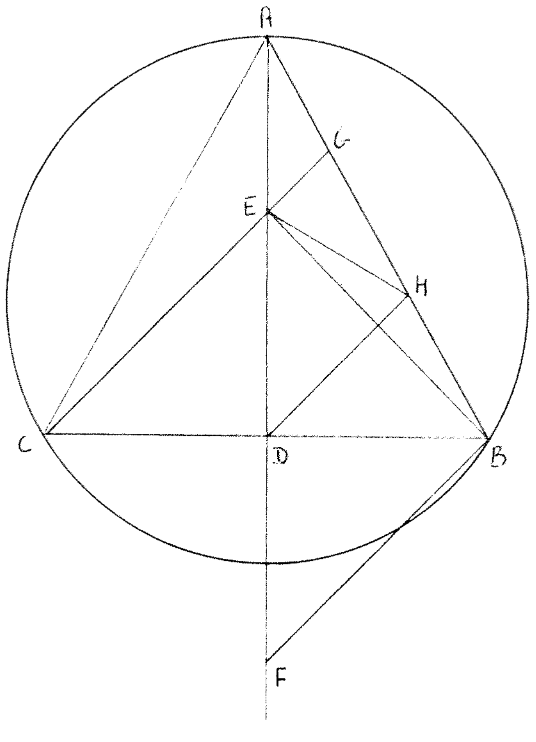
Exercice 4 : En utilisant ce procédé, calculer avec une erreur inférieure à 10^{-6} les nombres $\sqrt{5}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{37}$ (on utilisera aussi, évidemment les résultats de l'exercice 1).

V. D'AUTRES ETUDES GEOMETRIQUES D'ANTIPHERESE INFINIE



ABCD est un carré. On a AE = AF = AD.
On étudie le rapport CF/CD.

1) Quelle est la valeur de ce rapport ?
2) Montrer que la première étape de l'antiphérèse s'écrit :
   $S_1 = 2S_2 + S_3$; $S_1 = CF$, $S_2 = CD$, $S_3 = CE$
3) Montrer que CD/CE = CF/CD
   En déduire que l'antiphérèse est infinie et déterminer les nombres a_1, a_2, a_3...
   Comparer avec les résultats du § III.



ABC est un triangle équilatéral ; de plus DF = DB = DC et CE // DH // BF. On étudie le rapport AF/AB.

1) Quelle est la valeur de ce rapport ?
2) Montrer que les deux premières étapes de l'antiphérèse s'écrivent :
   $S_1 = S_2 + S_3$ avec $S_1 = AF$, $S_2 = AB$, $S_3 = AE$
   $S_2 = 2S_3 + S_4$ avec $S_4 = AG$
3) Montrer que AE/AG = AF/AB
   En déduire que l'antiphérèse est infinie et déterminer les nombres a_1, a_2, a_3 ...
4) En déduire les quotients entiers successifs obtenus dans l'antiphérèse de $\sqrt{3}$.

Complément

Voici une démonstration par l'absurde (une parmi d'autres) de l'irrationnalité de $\sqrt{a}$, lorsque a est un entier qui n'est pas un carré parfait. Mais à l'inverse de ce qui précède, cette démonstration ne permet pas de construire une suite d'approximations de $\sqrt{a}$.

Soit a un entier naturel qui n'est le carré d'aucun entier. On encadre a par les carrés de deux entiers consécutifs :

$$n^2 < a < (n+1)^2$$

On suppose que $\sqrt{a}$ est rationnel

On peut alors écrire $\sqrt{a}$ sous la forme d'une fraction irréductible c'est-à-dire le quotient de deux entiers naturels qui n'ont d'autre diviseur commun que 1.

$$\sqrt{a} = \frac{p}{q}$$

Parmi toutes les fractions d'entiers égales à $\sqrt{a}$, $\frac{p}{q}$ est celle dont le dénominateur q est le plus petit : les autres ont pour dénominateur 2q, 3q, 4q, etc...

Question 1 : $\sqrt{a} = \frac{p}{q}$ et $\sqrt{a} + n = \frac{a - n^2}{\sqrt{a} - n}$

Démontrer que $\frac{p}{q} = \frac{aq - np}{p - qn}$

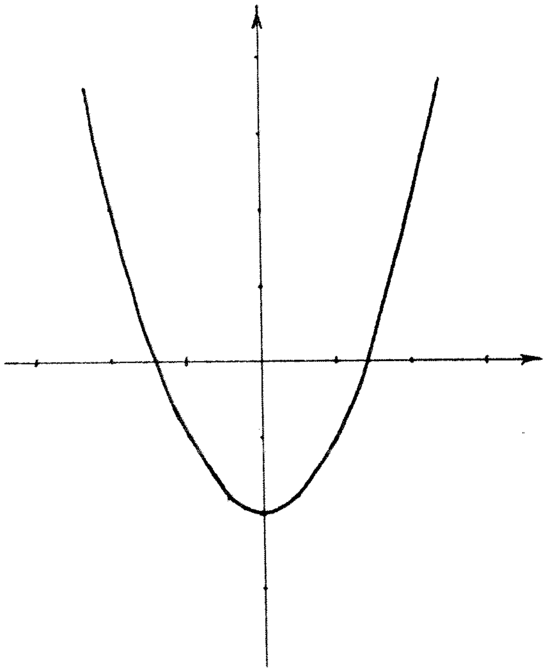
Question 2 : $n < \sqrt{a} < n + 1$

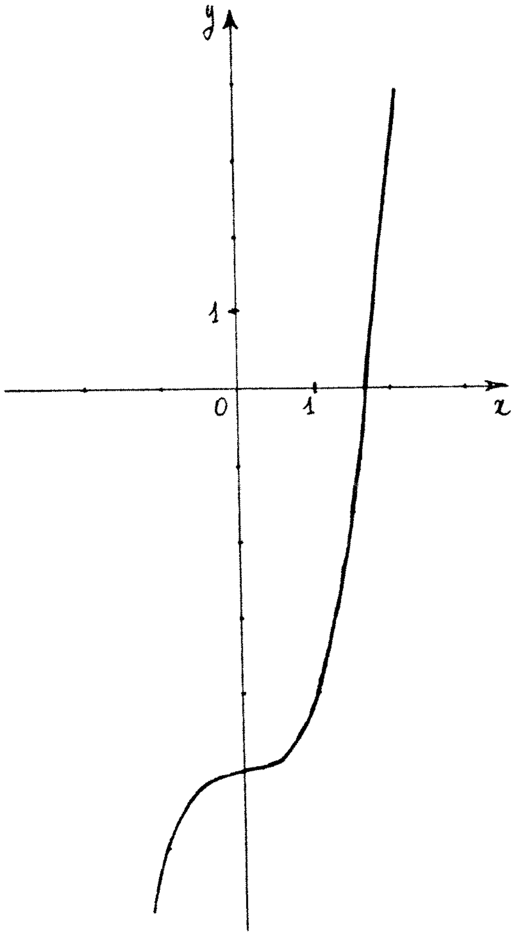
Démontrer que $0 < p - qn < q$

Question 3 : Conclure.

5. "ENCADREMENT PAR DICHOTOMIE"

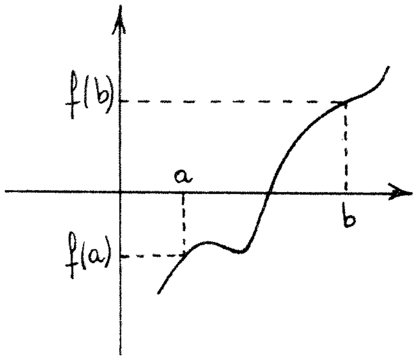
Trouver un encadrement de $\sqrt{2}$, c'est trouver un encadrement de la solution positive de l'équation $x^2 - 2 = 0$.
De même, par exemple trouver un encadrement de $\sqrt[3]{5}$ c'est trouver un encadrement de la solution de l'équation $x^3 - 5 = 0$.
Ces deux équations peuvent, en désignant leur premier membre par f(x), s'écrire $f(x) = 0$.

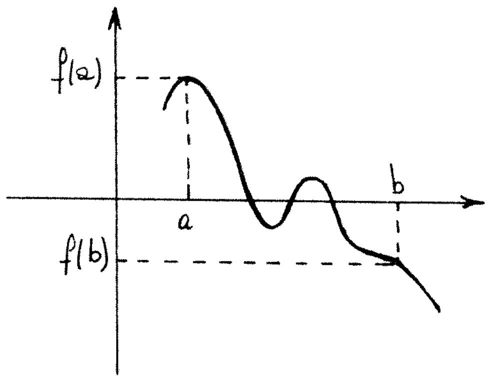




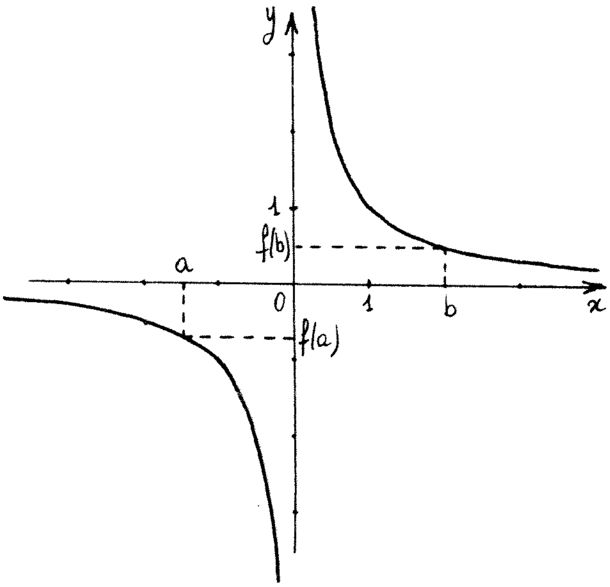
Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ peuvent s'interpréter graphiquement comme les abscisses des points d'intersection de la représentation graphique de f et de l'axe des abscisses. Une lecture permet alors un ordre de grandeur de ces solutions. Les graphiques précédents montrent que $1 < \sqrt{2} < 2$ et $1 < \sqrt[3]{5} < 2$.
On suppose dans ce qui suit que f vérifie la propriété suivante :

(P)	Quels que soient les réels a et b, si f(a) et f(b) sont de signes contraires alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[a ; b]$.





De nombreuses fonctions possèdent cette priorité, par exemple, les fonctions $x \longmapsto x^2 - 2$, $x \longmapsto x^3 - 5$ et de façon plus générale, toutes les fonction polynômes. Remarquons que la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ ne la possède pas.



Soit f une fonction possèdant la propriété (P).

On suppose que l'on connaît deux réels a et b $(a < b)$ tels que :

1) $f(a).f(b) \leq 0$
2) l'équation $f(x)$ admette une unique solution, notée c) dans l'intervalle $[a,b]$.

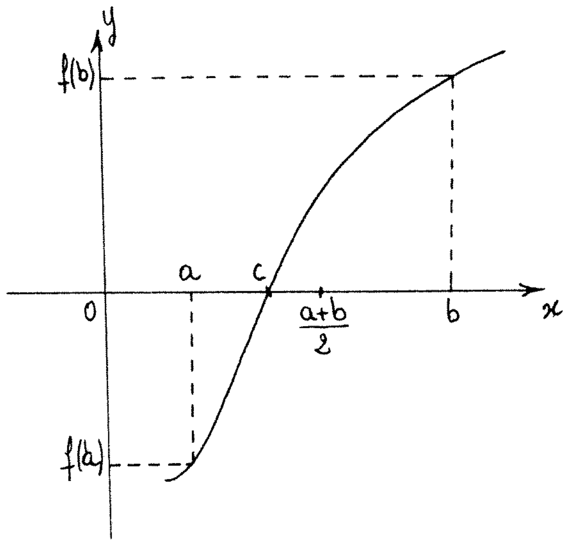
(les réels $a = 1$ et $b = 2$ font l'affaire dans les deux exemples donnés).

Question 1 : Que peut-on dire de c si 1) $f(a)\,f(b) = 0$?
2) $f(a).f(b) < 0$?

On cherche à remplacer $[a;b]$ par un intervalle plus petit contenant aussi c : on obtient ainsi un meilleur encadrement de c.

On prend pour cela, le milieu de $[a;b]$.

On regarde alors si c appartient à $\left[a\ ;\ \frac{a+b}{2}\right]$ ou à $\left[\frac{a+b}{2}\ ;\ b\right]$.



Question 2 : où est situé c, si

1° $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) < 0$?

2° $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) = 0$?

3° $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) \leq 0$?

4° $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) > 0$?

Il résulte de cette étude que si $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) \leq 0$, alors c appartient à $\left[a \,;\, \frac{a+b}{2}\right]$: il suffit, dans ce cas, de remplacer b par $\frac{a+b}{2}$ pour retrouver les hypothèses de départ avec un nouvel intervalle de longueur moitié du précédent, et de recommencer.

Question 3 : Examiner de même le cas $f(a) \cdot f(b) > 0$.
On peut traduire les réflexions précédentes par le schéma suivant :

(1)

REPETER
SI $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) \leq 0$ ALORS $b \leftarrow \frac{a+b}{2}$
SINON $a \leftarrow \frac{a+b}{2}$

On obtient ainsi des encadrements de plus en plus fins du nombre c. Mais malheureusement, un programme ainsi rédigé ne serait pas utilisable sur un ordinateur (ou une calculatrice) : il ne comporte pas d'ordre de lecture (permettant d'injecter à l'ordinateur les valeurs de a et de b), pas d'ordre d'impression et, ce qui est plus grave, il ne s'arrête pas !

Question 4 : On désigne par L, le réel b-a, longueur de l'intervalle initial [a;b].
Calculer, en fonction de L, les longueurs des intervalles [a,b] obtenus après une, deux, trois, ..., dix exécutions successives de l'ordre du schéma (1).

<u>Question 5</u> : On remarque que $2^{10} = 1024 > 10^3$; au bout de combien de passages, c'est-à-dire d'exécutions successives de (1), est-on sûr que la longueur de $[a;b]$ est inférieur à 10^{-6}. L ?

Il faut aujouter un test d'arrêt.
Pour cela, on impose la longueur du dernier intervalle $[a,b]$ obtenu, par exemple par la condition : "$b-a < 10^{-p}$" où p est un entier fixé que l'on indique à la machine.
On obtient ainsi la ligne directrice d'un programme que l'on peut suivre pas à pas à la main ou introduire dans un ordinateur ou une calculatrice programmable.

```
. LIRE  a,b, p
. TANT QUE (b-a) ≥ 10^-p              REPETER

      || SI    f(a) f((a+b)/2) ≤ 0    ALORS   b ← (a+b)/2
      ||                              SINON   a ← (a+b)/2

. ECRIRE a,b
```

Le programme ainsi amorcé peut pratiquement être transcrit tel quel, en tenant compte des modifications dues au langage de la machine utilisée.

* En LSE, "Lire" est inchangé ainsi que "Afficher" ; "Faire tant que... Refaire" s'écrit : "Faire n tant que ... Refaire" où n désigne le numéro de la ligne portant l'instruction suivante (Ici "Afficher a,b").
"Fin" se programme "Terminer"

** L'instruction "Lire" s'écrit "Read" en Pascal, "Imput" en Basic.
L'instruction "Afficher" s'écrit "Write" en Pascal, "Print" en Basic.
"Faire tant que $b-a \geq 10^{-p}$" se transcrit "While $b-a \geq 10^{-p}$ do..." en Pascal et en Basic structuré.

*** L'opération M1 $\longleftarrow$ M2 signifie "recopier le contenu de la mémoire M2 dans M1", en lieu et place du contenu actuel de cette dernière (à la manière d'une recopie de cassette magnétique).
Cette opération est notée M1 $\longleftarrow$ M2 en LSE ; M1 := M2 en Pascal ; M1 = M2 en basic.

N.B. Avec un micro-ordinateur, en simple précision, il ne faut pas espérer obtenir un intervalle $[a,b]$ de longueur inférieure à 10^{-6}. Le programme, autrement, risque de "boucler" indéfiniment, la condition $b - a < 10^{-p}$ n'étant jamais réalisée en raison du manque de précision des calculs.
Avec une calculatrice programmable (qui travaille avec davantage de chiffres qu'un micro-ordinateur) on peut espérer, selon son modèle, obtenir un intervalle $[a,b]$ de longueur inférieure à 10^{-7} (ou même 10^{-8}).

... les trois étapes de la pensée "approximative" dans le cadre des Nombres Réels. On donne 1) <u>une</u> valeur approchée
2) <u>un</u> encadrement
3) une <u>suite</u> indéfinie d'encadrements

G. Th. GUILBAUD
Leçons d'A-peu-près
Christian Bourgeois, 1985

6. EXEMPLES DE CALCULS D'AIRES

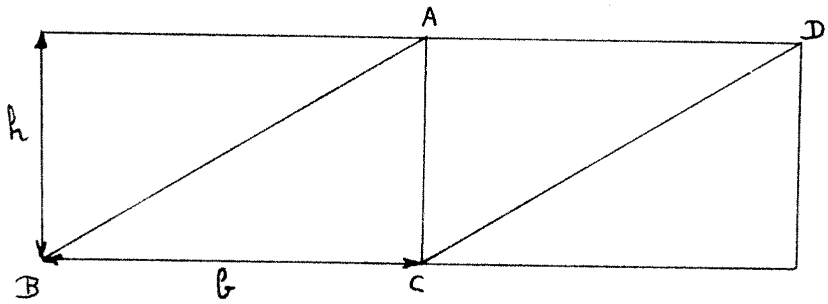
I - INTRODUCTION

Dès qu'on a choisi comme unité d'aire, celle du carré de côté 1, les aires des surfaces polygonales s'obtiennent facilement en appliquant les règles suivantes :

(1) l'aire d'un domaine n'est pas modifiée si on lui fait subir une translation, une rotation, une symétrie centrale ou une symétrie axiale.

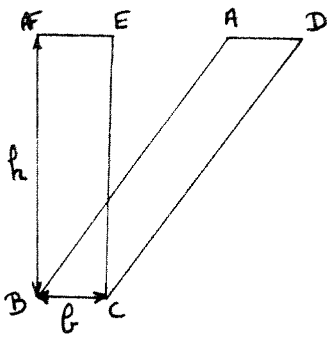
(2) Si deux surfaces n'ont en commun qu'un point ou un segment, alors l'aire de leur réunion est égale à la somme de leurs aires.

Ainsi, connaissant l'aire $S_1 = b.h$ d'un rectangle, les règles (1) et (2) permettent d'en déduire facilement l'aire S_2 d'un parallélogramme.



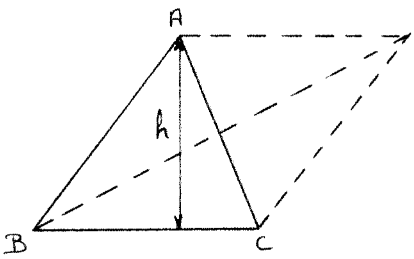
Question 1 : Démontrer, en utilisant les règles (1) et (2) que l'aire du parallélogramme ABCD est $S_2 = b \times h$.

Question 2 : En réalité, le raisonnement précédent est trop simpliste pour être honnête, comme le montre la figure suivante :

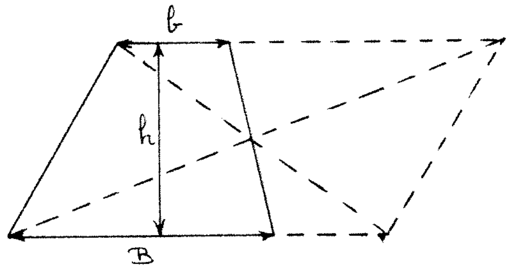


Il est cependant possible (avec un peu d'imagination) de démontrer que l'aire du parallélogramme ABCD est celle du rectangle BCEF. Chercher.

De l'aire du parallélogramme, on déduit immédiatement celle d'un triangle ou d'un trapèze :



$$S_3 = \frac{bh}{2}$$



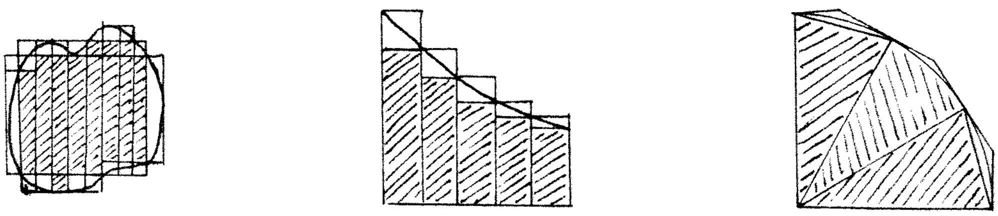
$$S_4 = \frac{(B+b)h}{2}$$

L'aire d'un domaine polygonal s'obtient alors en décomposant ce polygone en triangles (ou en triangles et trapèzes).

<u>Question 3</u> : **En utilisant les règles (1) et (2) expliquer les constructions effectuées justifier les résultats obtenus pour l'aire d'un triangle et celle d'un trapèze.**

II - AIRE D'UN DOMAINE LIMITE PAR DES SEGMENTS DE DROITES ET DES ARCS DE COURBES

On a, si le domaine étudié n'est pas trop compliqué, une idée intuitive de l'aire limitée par ce domaine. Pour en déterminer des valeurs approchées par défaut et par excès, on inscrit dans ce domaine et on circonscrit à ce domaine des polygones.



Ce sont là quelques procédés d'approche possibles

Pour pouvoir aller plus loin, on appliquera deux règles intuitivement évidentes :

(3) Si le domaine $\mathcal{D}_1$ est contenu dans le domaine $\mathcal{D}_2$, alors l'aire de $\mathcal{D}_1$ est inférieure ou égale à l'aire de $\mathcal{D}_2$.

(4) Une homothetie de rapport k transforme un domaine d'aire $\mathcal{A}$, en un domaine d'aire $k^2\mathcal{A}$.

III - APPLICATIONS

a) Un procédé pour retrouver l'aire d'un triangle.

Soit un triangle ABC de hauteur $AH = h$. On pose $BC = b$. On subdivise le segment $[AH]$ en n segments de même longueur : $\frac{h}{n}$:
$[AH_1]$, $[H_1H_2]$, ... $[H_{n-1}H_n]$; $(H_n = H)$

Les parallèles à (BC) menées par H_1, H_2..., H_n coupent (AB) en B_1, B_2,...,B_n $(B_n = B)$ et (AC) en C_1, C_2, ..., C_n $(C_n = C)$.
On construit les rectangles comme sur la figure. On encadre ainsi l'aire du triangle ABC par celles de deux réunions de rectangles.
On obtient par homothétie de centre A :

$$\frac{B_1C_1}{AH_1} = \frac{B_2C_2}{AH_2} = \ldots\ldots = \frac{B_nC_n}{AH_n} = \frac{b}{h}$$

par conséquent : $B_1C_1 = \frac{b}{h} \times AH_1 = \frac{b}{h} \times \frac{h}{n} = \frac{b}{n}$

de même, $B_2C_2 = \frac{2b}{n}$, $B_3C_3 = \frac{3b}{n}$, ..., $B_nC_n = \frac{nb}{n} = b$.

L'aire de la réunion des rectangles inscrits dans le triangle ABC est alors :

$$a_n = \frac{h}{n}\left[\frac{b}{n} + \frac{2b}{n} + \frac{3b}{n} + \ldots\ldots + \frac{(n-1)b}{n}\right]$$

L'aire de la réunion des rectangles circonscrits au triangle ABC est :

$$\mathcal{A}_n = \frac{h}{n}\left[\frac{b}{n} + \frac{2b}{n} + \frac{3b}{n} + \ldots\ldots + \frac{(n-1)b}{n} + \frac{nb}{n}\right]$$

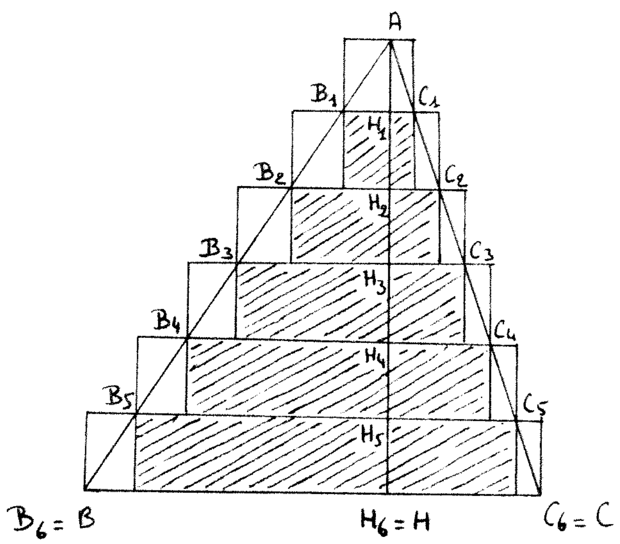


figure faite pour $n = 6$

Question 4 : Expliquer comment obtenir les égalités précédentes et démontrer que l'on a :

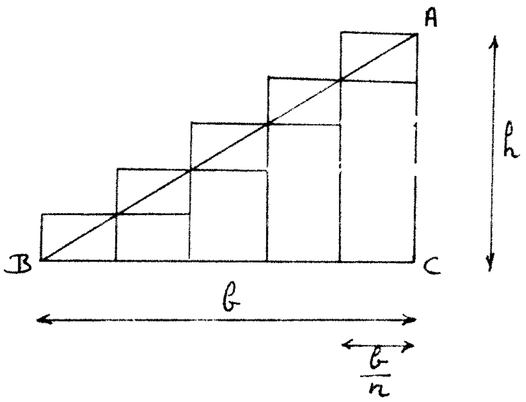
$$a_n = \frac{n-1}{2n}\,bh = \frac{bh}{2} - \frac{bh}{2n} \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_n = \frac{n+1}{2n}\,bh = \frac{bh}{2} + \frac{bh}{2n}\ ;$$

puis que : $a_n < \frac{bh}{2} < \mathcal{A}_n$

Question 5 : On suppose $b = 5$, $h = 4$.
A partir de quelle valeur de l'entier n, est-on sûr que $\mathcal{A}_n - a_n < 10^{-20}$? $\mathcal{A}_n - a_n < 10^{-p}$ (entier positif donné) ?

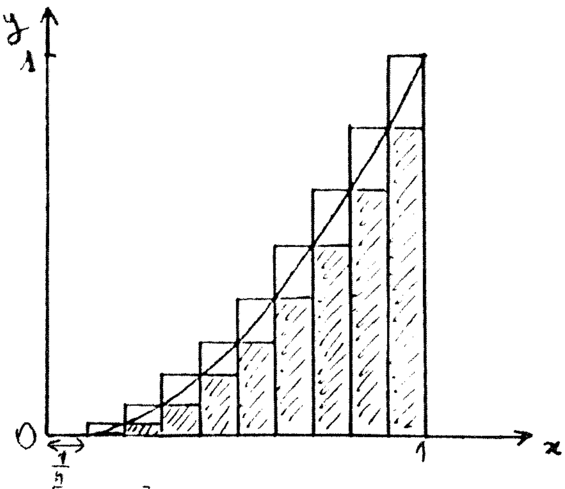
L'étude précédente montre que si n est suffisamment grand alors a_n et $\mathcal{A}_n$ sont aussi voisins qu'on le désire de $\frac{bh}{2}$.
On retrouve ainsi l'aire $\frac{bh}{2}$ du triangle ABC, obtenue autrement.

Question 6 : Retrouver en utilisant les découpages suggérés par la figure suivante, l'aire du triangle ABC rectangle en C.



b) Aire d'un domaine limité par une parabole

Soit la parabole P d'équation $y = x^2$, et la droite d d'équation $x = 1$.
On cherche l'aire du domaine Δ limité par P, l'axe x'ox, l'axe y'oy, et d.
(le repère x'ox, y'oy est orthonormé).



On divise le segment $[0\ ;\ 1]$ en n segments de longueur $\frac{1}{n}$.

Question 7 : Calculer la somme a_n des aires des rectangles inscrits et la somme $\mathcal{A}_n$ des aires des rectangles circonscrits.
Etablir que :

$$a_n = \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2\right] \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_n = \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \dots + n^2\right]$$

Calculer en fonction de n, la différence $\mathcal{A}_n - a_n$.

On se propose, maintenant de trouver une expression de $1^2 + 2^2 + \dots + p^2$:
En développant $(x+1)^3$ et en remplaçant x successivement par 1, 2, ...,p)
on obtient :

$$2^3 = 1^3 + 3 \times 1^2 + 3 \times 1 + 1$$
$$3^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 + 3 \times 2 + 1$$
$$4^3 = 3^3 + 3 \times 3^3 + 3 \times 3 + 1$$

....

....

$$(p+1)^3 = p^3 + 3 \times p^2 + 3 \times p + 1$$

Question 8 : Démontrer que : $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + p^2 = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{6}$

En déduire que l'on a : $a_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{6n^2}$

et : $\mathcal{A}_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{6n^2}$

Vérifier que pour tout entier strictement positif, on a :
$a_n < \frac{1}{3} < \mathcal{A}_n$.

A partir de quel entier x est-on sûr que $\mathcal{A}_n - a_n < 10^{-20}$?
$\mathcal{A}_n - a_n < 10^{-p}$ (p, entier positif donné) ?

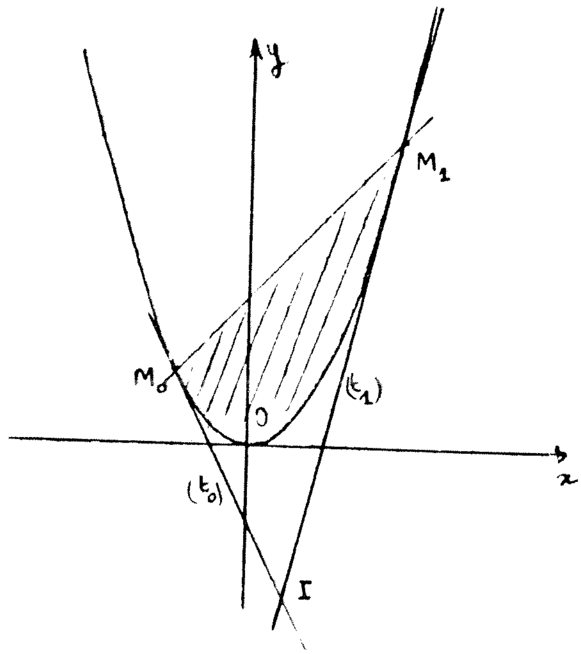
Les suites (a_n) et $(\mathcal{A}_n)$ admettent une limite commune qui est $\frac{1}{3}$.

> On convient alors d'attribuer à l'aire des domaines limité par la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x = 1, la valuer $\frac{1}{3}$.

<u>Remarque</u> : On désigne par A le point de coordonnées $(1,1)$. L'étude précédente montre que l'aire du domaine limité par la parabole d'équation $y = x^2$ et la droite (OA) est égale à $\frac{1}{6}$. (Le vérifier).
Ce résultat est un cas particulier d'un résultat plus général obtenu par Archimède.

IV - AIRE DU DOMAINE LIMITE PAR UNE PARABOLE ET L'UNE DE SES CORDES

Soit une parabole P, deux points M_0 et M_1 de P. On trace les tangentes à P en M_0 et M_1. Ces tangentes se coupent en I.



Le résultat établi par Archimède est le suivant :

L'aire du domaine limité par la parabole P et la corde (M_0M_1) est égale aux deux tiers de celle du triangle M_0M_1I.

<u>Question 9</u> : Utiliser le résultat d'Archimède pour retrouver le résultat donné dans la remarque précédente.

On se propose d'établir le résultat d'Archimède pour la parabole d'équation $y = x^2$:

* Question 10 : Soit P la parabole d'équation $y = x^2$ dans un repère orthonormé d'axes x'Ox, y'Oy.

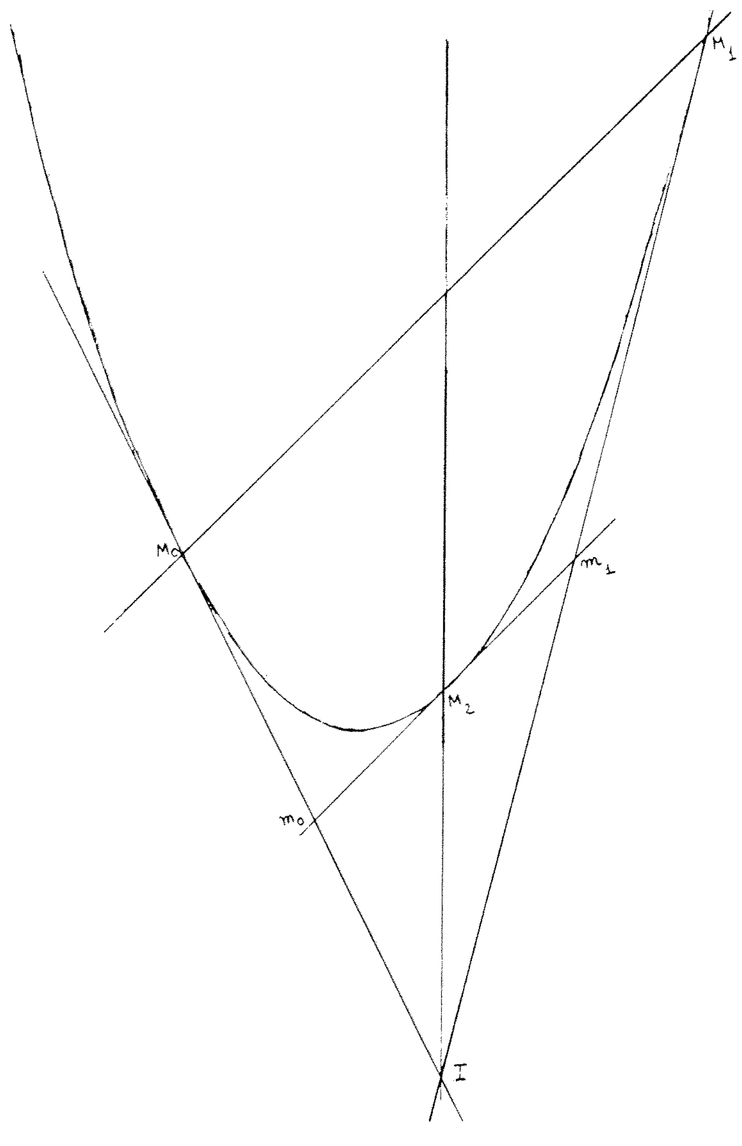
Soient M_0 et M_1 deux points de P d'abscisses respectives x_0 et x_1. Les tangentes t_0 et t_1 à P en M_0 et M_1 se coupent en I.

a) Cacluler les coordonnées de I.

b) La parallèle à y'Oy passant par I coupe P en M_2.
Démontrer que la tangente en M_2 à P passe par les milieux des segments $[M_0I]$ et $[M_1I]$.

c) La droite qui passe par les milieux m_0 et m_1 des côtés $[M_0I]$ et $[M_1I]$ est tangente à P en M_2.
Démontrer que M_2 est milieu de $[m_0m_1]$.

d) On désigne par S l'aire du triangle IM_0M_1.
Calculer les aires des triangles $M_0M_1M_2$, $M_0M_2m_o$, $M_2M_1m_1$ et celle du trapèze $M_0m_om_1M_1$.



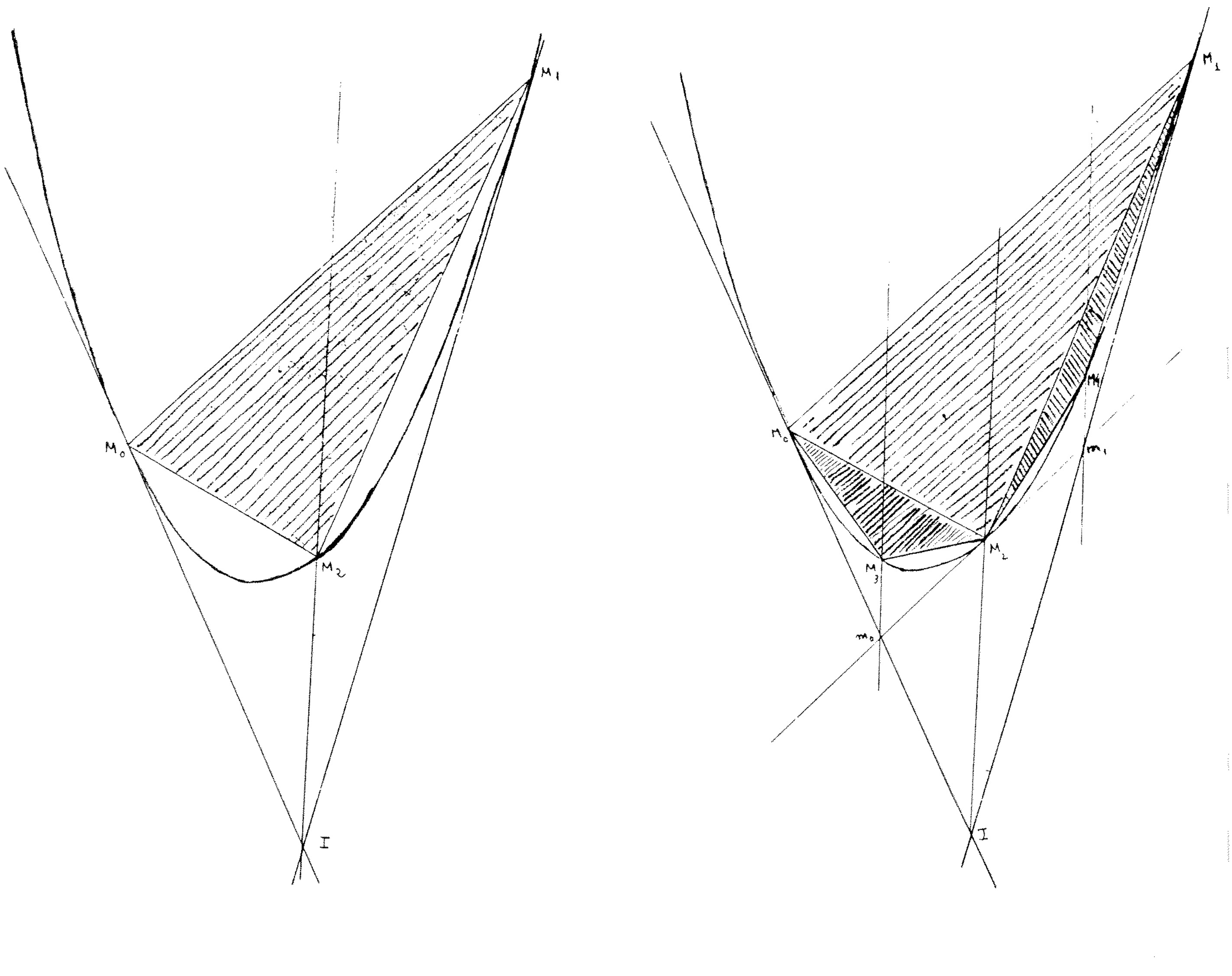
** On désigne par $\sum$ l'aire du domaine limité par la parabole P et la corde (M_0M_1).
Le procédé utilisé par Archimède est le suivant : on détermine des valeurs approchées par défaut et par excès de $\sum$, en construisant des polygones inscrits et des polygones circonscrits au domaine étudié.

(1) Polygones inscrits

Première étape : on inscrit le triangle $M_0M_1M_2$ dont l'aire α_1 est une valeur approchée par défaut de $\sum$.

Question 11 : Démontrer que $\alpha_1 = \frac{S}{2}$

Deuxième étape : on procède comme dans l'étape 1, en remplçant le triangle M_0IM_1 par les triangles $M_om_0M_2$ puis $M_2m_1M_1$.



Première étape

Deuxième étape

Question 12 : Etablir que l'aire du polygone $M_0M_3M_2M_4M_1$ inscrit ainsi obtenu est $\alpha_2 = \frac{S}{2}\left[1 + \frac{1}{4}\right]$.

Troisième étape : on procède comme pour la première étape en remplaçant M_0M_1 successivement par M_0M_3, M_3M_2, M_2M_4, M_4M_1.

On obtient ainsi une valeur approchée par défaut de $\sum$ qui est

$$\alpha_3 = \frac{S}{2}\left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right]$$

On continue ainsi.

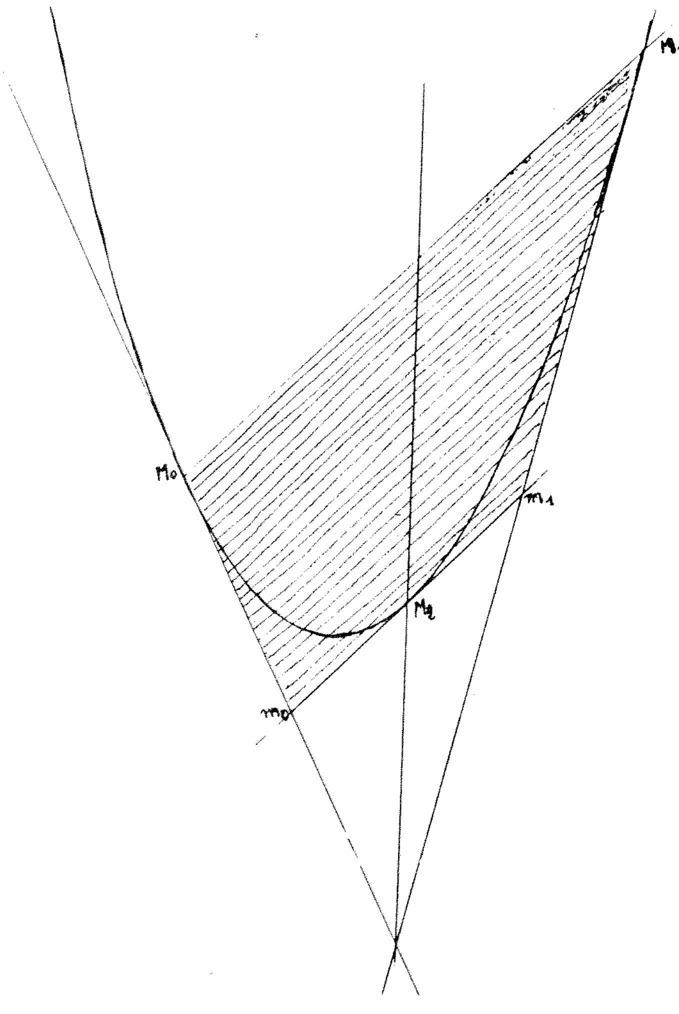
A l'étape n, on obtient une valeur approchée par défaut de $\sum$ qui est :

$$\alpha_n = \frac{S}{2}\left[1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]$$

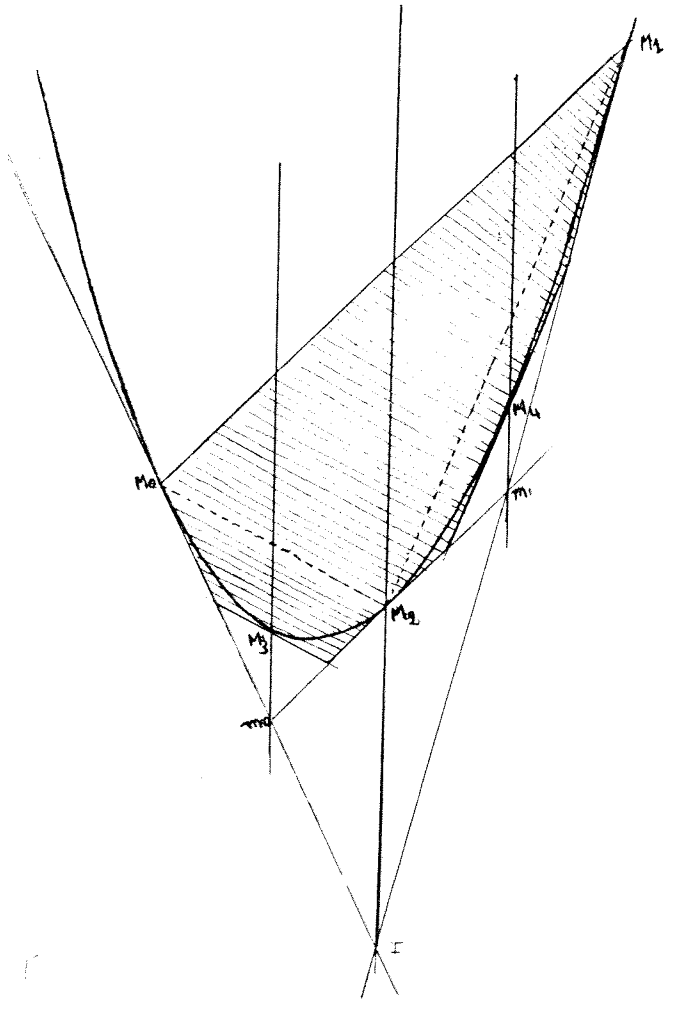
Question 13 : Montrer que : $\alpha_n = \frac{2S}{3} - \frac{2S}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

(2) Polygones circonscrits

Question 14 : En s'inspirant des dessins qui suivent, établir les valeurs approchées par excès β_1, β_2, ..., β_n de $\sum$ indiquées.



Première étape



Deuxième étape

$$\beta_1 = S - \frac{S}{4} \qquad \text{(étape 1)}$$

$$\beta_2 = S - \frac{S}{4} - \frac{S}{4^2} \qquad \text{(étape 2)}$$

....

$$\beta_n = S - \frac{S}{4} - \frac{S}{4^2} \ldots\ldots - \frac{S}{4^n} \qquad \text{(étape n)}$$

Montrer que : $\beta_n = \frac{2S}{3} + \frac{S}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

Question 15 : a) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a :

$$\alpha_n < \frac{2S}{3} < \beta_n$$

b) Calculer en fonction de n et de S la longueur de l'intervalle $[\alpha_n \ ; \ \beta_n]$

c) On suppose $S = 10$. En utilisant la calculatrice, trouver à partir de quel entier n, la longueur de $[\alpha_n \ ; \ \beta_n]$ est inférieure à 10^{-6}

L'étude précédente montre qui n est suffisamment grand, alors α_n et β_n sont aussi voisins qu'on le désire de $\frac{2S}{3}$, ce qui conduit au résultat dû à Archimède.

----

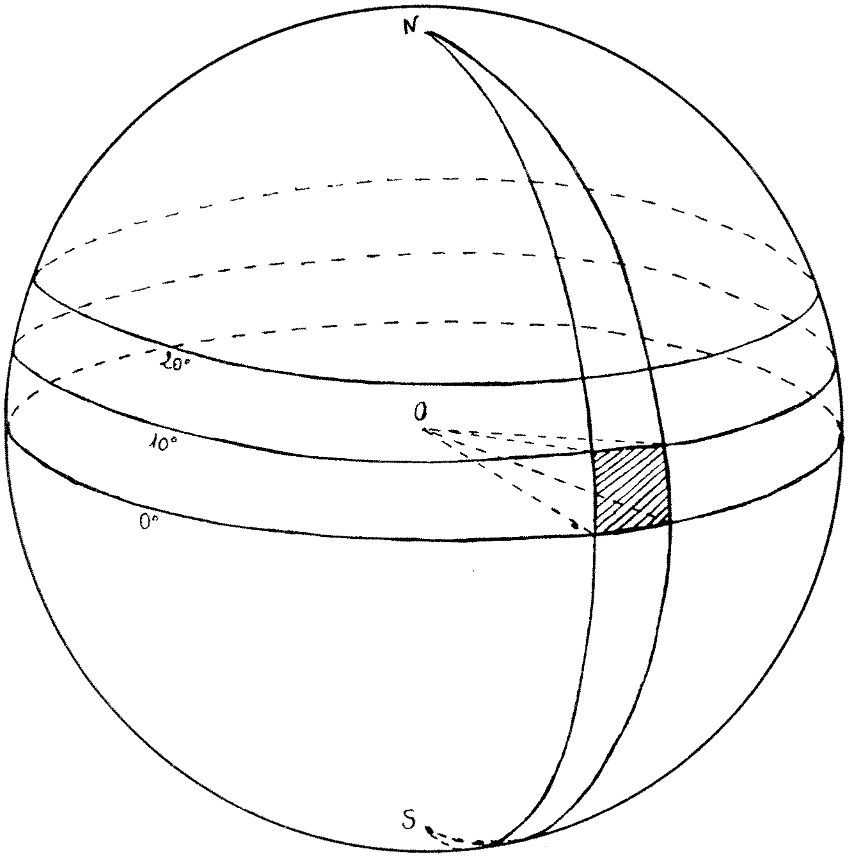
7. LA SPHERE

Les formules qui permettent de calculer la surface d'une shère de rayon R et son volume sont :

$$S = 4\pi R^2 \qquad \text{et} \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Si vous avez une calculatrice avec la touche "cos" vous pouvez retrouver ces formules avec une approximation d'autant meilleure que vous aurez plus de patience.

Un dessin à bien observer :



Si ce dessin vous suffit pour calculer une approximation de S et de V, alors à vos calculs, mais il vous est permis de chercher quelques indications dans la suite.

Sinon, voici nos suggestions :

1° En s'inspirant de la Terre, cette sphère peut être découpée par des méridiens et des parallèles

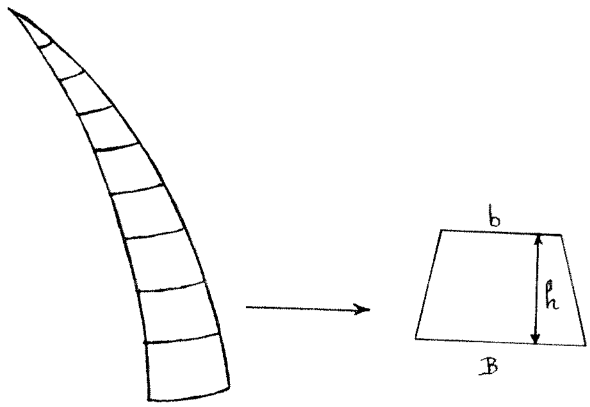
- les 24 tranches (fuseaux horaires) délimitées par les méridiens ont des surfaces d'aires égales ;
- la demi tranche de l'hémisphère nord et la demi tranche de l'hémisphère sud ont des surfaces d'aires égales

$$\text{d'où } S = 24 \times 2 \times s$$

Que représente s ?

- pour estimer l'aire s on assimile à un trapèze chacune des 9 surfaces délimitées par les parallèles consécutifs. On confondra cordes et arcs de cercle pour les calculs.

Rappel : l'aire d'un trapèze est $\frac{(B+b)h}{2}$

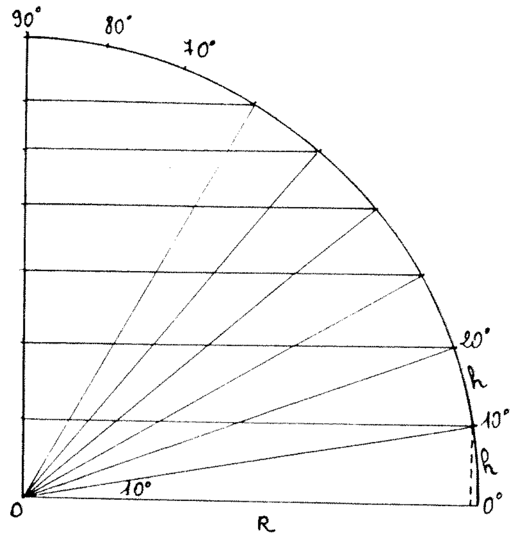


2° Voici un autre dessin pour trouver comment obtenir B,b et h.

<u>Question 1</u> : Quelle fraction de son parallèle représente une base de trapèze ?

<u>Question 2</u> :

- Quel est le rayon de l'équateur ?
- Quel est le rayon du parallèle 10° ?
- Quel est le rayon du parallèle 20° ?
- etc ? ...



Question 3 :

Quelle fraction d'un grand cercle représente h ?

Question 4 :

Donner la formule permettant de calculer l'aire de chacun des trapèzes (le dernier n'est plus qu'un triangle) en fonction de π, de R, et d'un cosinus.

Question 5 :

En déduire s puis S.

Question 6 :

Avec la calculatrice qu'obtenez-vous comme coefficient à la place du coefficient 4 dans la formule $S = 4\pi R^2$?

Question 7 :

Vous pouvez maintenant prendre des parallèles allant en 5° en 5° en vous concentrant bien sur vos calculs, ou en utilisant un programme.

3° Pour obtenir le volume, on peut découper la shère en pyramides - comme le suggère le 1er dessin - dont les bases seront pour notre approximation considérées comme planes.

Rappel : le volume d'une pyramide est donné par la formule $\frac{B \times h}{3}$ où B représente cette fois-ci l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.

Question 8 :

Quelle valeur donner à h pour notre calcul ?

Question 9 :

Comment passe-t-on de S à V ?

8. "IL EST INUTILE DE CHERCHER UN OBJET LA OU IL N'EST PAS"

La résolution d'équations algébriques de degré n

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0.$$

ne peut en général pas s'effectuer en "utilisant des formules".

Il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques qui donnent des valeurs approchées des racines de l'équation avec une précision qu'on s'est fixée à l'avance.
On perd malencontreusement du temps si on cherche des racines là où elles ne sont pas.
Une recette, utilisée en informatique, que l'on va énoncer et qu'il faudra justifier permet, par exemple, de savoir que l'équation $8x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$ a toutes ses racines dans l'intervalle $]-1,625 \; ; \; 1,625[$

ENONCE DE LA RECETTE

Soit l'équation $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$ (1) avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$

On calcule $\left|\frac{a_1}{a_0}\right|$, $\left|\frac{a_2}{a_0}\right|$, ..., $\left|\frac{a_n}{a_0}\right|$

Soit M le plus grand de ces nombres.

L'équation (1) n'admet pas de racine à l'extérieur de l'intervalle $]-1-M \, , \, 1+M[$

EXERCICE 1

Retrouver, en appliquant l'énoncé de la recette, l'intervalle $]-1,625 \; ; \; 1,625[$

EXERCICE 2

Montrer que si $a_n = 0$ alors on connaît une racine de (1) et on peut se ramener à une équation de degré plus petit.

EXERCICE 3

Vérifier qu'avec les hypothèses $a_0 \neq 0$, $a_n \neq 0$ le réel 0 n'est pas solution de (1).

DEMONSTRATION DE LA RECETTE

Soit l'équation (1) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots\dots\dots + a_n = 0$ avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.

On désigne par M le plus grand des nombres $\left|\frac{a_1}{a_0}\right|$, $\left|\frac{a_2}{a_0}\right|$, ..., $\left|\frac{a_n}{a_0}\right|$.

On se propose de démontrer que si le réel x est extérieur à $]-1-M, 1+M[$ alors il n'est pas solution de (1).

Question 1 : Démontrer que (1) a les mêmes solutions que

$$\frac{a_1}{a_0x} + \frac{a_2}{a_0x^2} + \frac{a_3}{a_0x^3} + \dots\dots + \frac{a_n}{a_0x^n} = -1 \qquad (1')$$

Question 2 : Etablir que x est extérieur à $]-1-M, 1+M[$ si et seulement si $|x| \geqslant 1+M$.

Question 3 : On pose $g(x) = \dfrac{a_1}{a_0x} + \dfrac{a_2}{a_0x^2} + \dots\dots + \dfrac{a_n}{a_0x^n}$.

Démontrer que $|g(x)| \leqslant \left|\dfrac{a_1}{a_0}\right| \cdot \dfrac{1}{x} + \left|\dfrac{a_2}{a_0}\right| \dfrac{1}{|x|^2} + \dots\dots + \left|\dfrac{a_n}{a_0}\right| \cdot \dfrac{1}{|x|^n}$

En déduire que $|g(x)| \leqslant M \left[\dfrac{1}{|x|} + \dfrac{1}{|x|^2} + \dots\dots + \dfrac{1}{|x|^n}\right]$

puis que $|g(x)| \leqslant M \left[\dfrac{1}{1+M} + \dfrac{1}{(1+M)^2} + \dots\dots + \dfrac{1}{(1+M)^n}\right]$

Etablir alors que $|g(x)| < 1$.

En déduire que x ne peut pas être solution de (1') donc de (1).

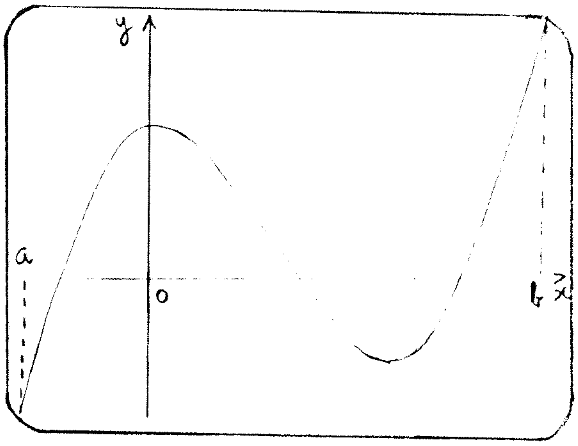
APPLICATION DE LA RECETTE

Soit f une fonction polynôme de degré n : si on veut résoudre l'équation $f(x) = 0$, un procédé consiste à représenter graphiquement f et étudier les intersections de cette représentation graphique et de l'axe des abscisses.

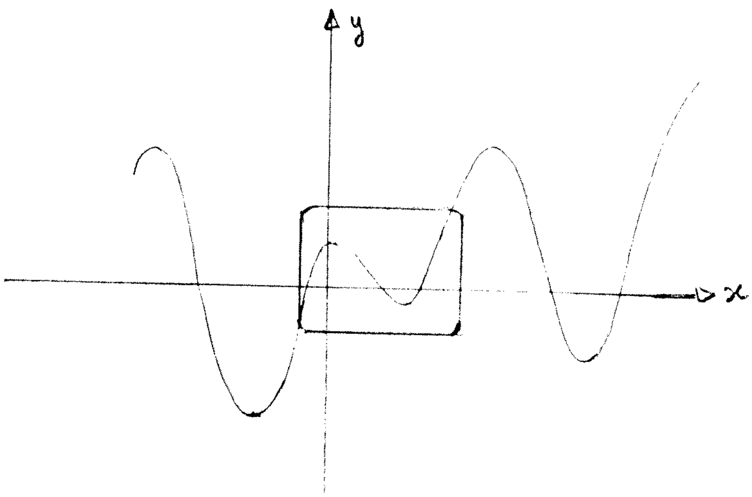
Malheureusement l'étude des variations de f conduit à la résolution d'inéquations qui ne sont pas plus accessibles que l'équation proposée.

Un procédé vient alors immédiatement à l'esprit : la représentation graphique de f à l'aide d'un ordinateur. Malheureusement l'écran graphique possède une dimension limitée et il serait vain de tenter de représenter graphiquement f en faisant varier x de $-\infty$ à $+\infty$!

On peut alors décréter de faire varier x dans un intervalle donné [a,b] et de regarder, dans cet intervalle, les intersections de la représentation graphique de f et de l'axe des abscisses.
On peut, par exemple, obtenir le dessin suivant et conclure hâtivement !



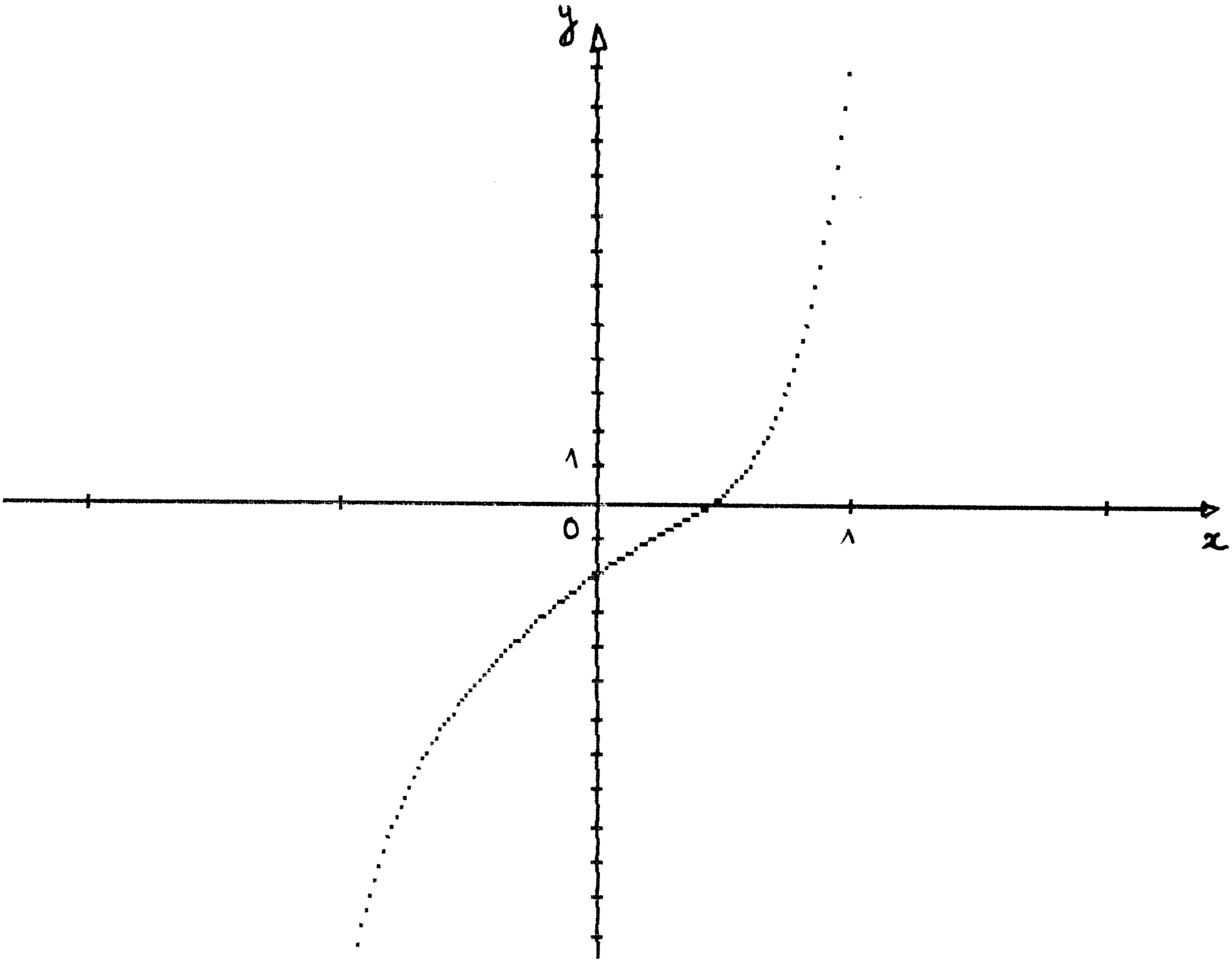
Alors qu'une représentation graphique dans un intervalle plus grand que [a,b] aurait peut - être conduit à la courbe suivante :



encore n'est-on pas sûr d'avoir ainsi obtenu toutes les intersections de la représentation graphique de f et de l'axe des abscisses.
Le "petit jeu" ainsi amorcé pourrait durer longtemps !
La recette, démontrée ici, montre que la représentation grphique de f ne peut pas couper l'axe des abscisses à l'extérieur de l'intervalle]-1-M, 1+M[.

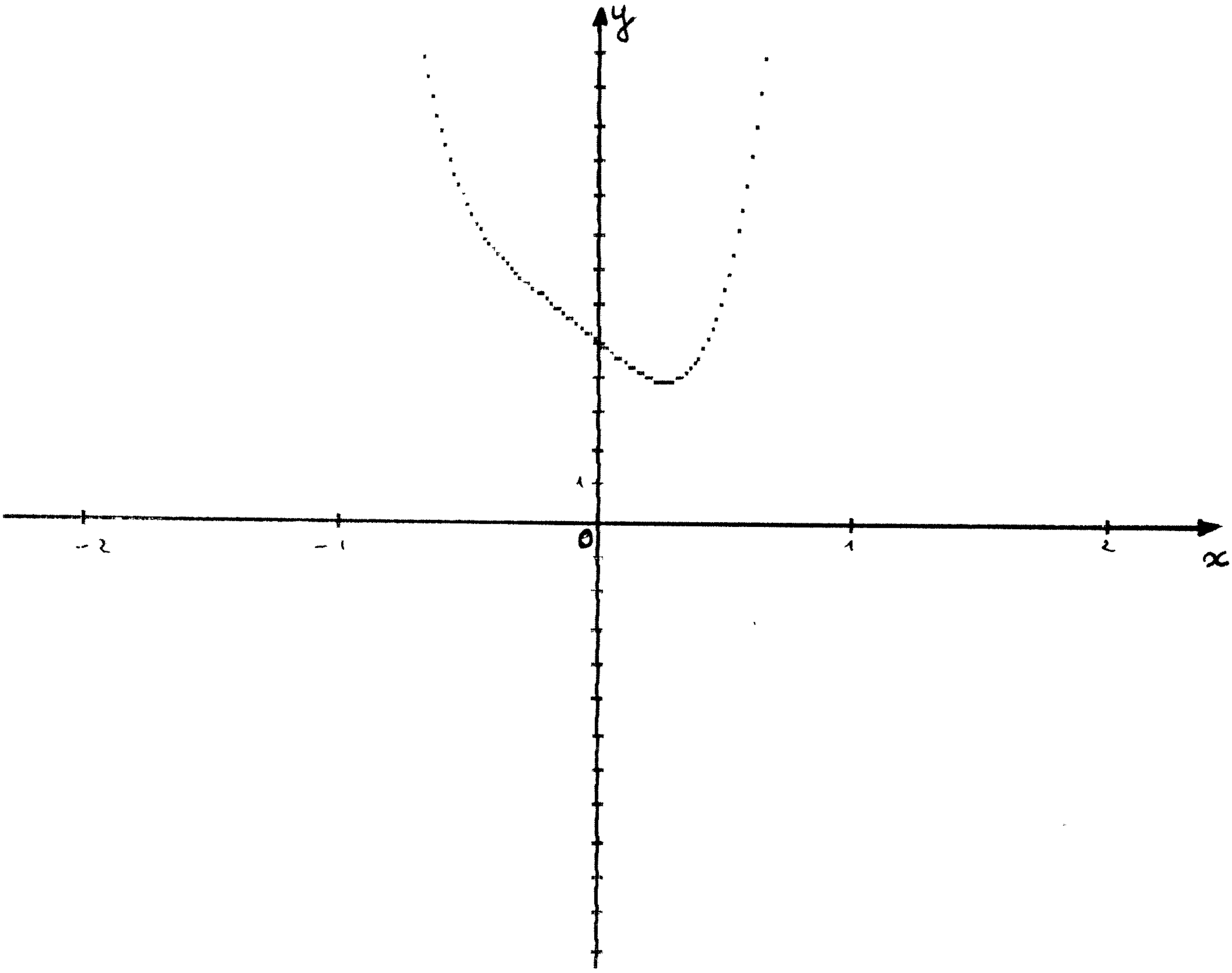
Remarque : **Des études plus fines que la précédente permettent de trouver des intervalles plus petits que]-1-M, 1+M[contenant toutes les racines de l'équation f(x) = 0.**

Annexe : Pour étudier les racines de l'équation $8x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 5x - 2 = 0$, on a représenté par points la fonction $f : x \longmapsto 8x^5 + 4x^4 - 3x^2 + 5x - 2$, en faisant décrire à x l'intervalle $[-2,2]$ avec un incrément de 0,0175. (l'intervalle proposé contient bien sûr $]-1,625, 1,625[$!).



puis, avec le même incrément et sur le même intervalle, on a représenté par points la fonction dérivée f'.
Sans prétendre à la "certitude mathématique" ces deux "expériences" permettent de penser, sans gros risque de se tromper, que l'équation proposée admet une racine unique.

$f' : x \longmapsto 40x^4 + 16x^3 - 6x + 5$



9. RESOLUTION DE L'EQUATION DU SECOND DEGRE

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$

METHODE :

Soit $x \in \mathbb{R}$; $ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

On pose $\frac{b}{a} = p$ et $\frac{c}{a} = q$ et on résout l'équation : $x^2 + px + q = 0$

La ou les racines de l'équation $x^2 + px + q = 0$ sont, si elles existent, les abscisses des points d'intersection de :

- la parabole P représentative de la fonction $f : x \longmapsto x^2 + px$
- la droite D représentative de la fonction $g : x \longmapsto -q$.

QUESTIONS :

1. Représenter P. Quelles sont les abscisses des points d'intersection de P et de l'axe des abscisses ? Quel est son axe de symétrie ? Quelles sont les coordonnées de son sommet ?

2. Discuter suivant les valeurs du couple (p,q) du nombre de points d'intersection de P et de D.

3. Dans le cas où P et D ont deux points d'intersection A et B, on appelle x_1 et x_2 les abscisses de A et de B.

   a) De l'égalité "$f(x_1) = f(x_2)$" déduire géométriquement la valeur de $x_1 + x_2$

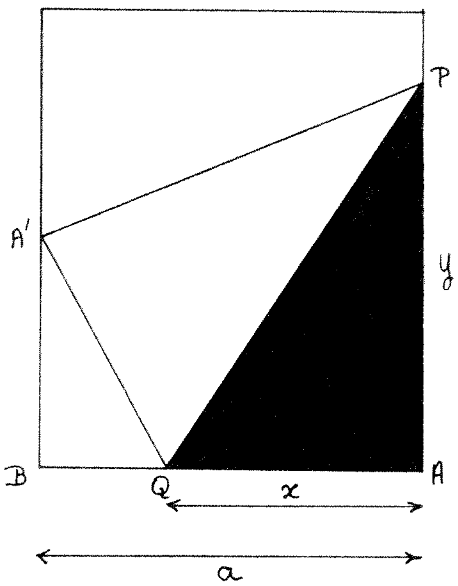
   b) De l'égalité "$f(x_1) = g(x_1)$" déduire alors, algébriquement, la valeur de x_1x_2.

   c) On pose $x_1 = -\frac{p}{2} - d$ et $x_2 = -\frac{p}{2} + d$ avec $d > 0$.
   Faire apparaître d sur le graphique.
   De l'une des égalités "$f(x_1) = g(x_1)$" ou "$f(x_2) = g(x_2)$" déduire alors, algébriquement, les valeurs x_1 et x_2 en fonction de p et de q.

   d) Terminer la résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, par ce procédé.

4. Que se passe-t-il dans le cas où P et D ont un seul point commun ?

10. PROBLEME DU PLI



Le coin inférieur d'une feuille de papier de largeur a est replié de façon à toucher le bord intérieur de la page.

a) Trouver la largeur x de la partie repliée quand la longueur l du pli est minimum.

b) Trouver la largeur x qui rende la surface repliée minimum.

a) On pose $x = AQ$, $y = AP$ et $l = PQ$

1° Montrer, en calculant de deux manières différentes l'aire du trapèze APA'B, que l'on a : $a[y + \sqrt{a(2x-a)}] = 2xy + (a-x)\sqrt{a(2x-a)}$ avec $x > \frac{a}{2}$

2° Déduire de la relation précédente y en fonction de x et de a.

3° Démontrer que $l^2 = \frac{2x^3}{2x-a}$

4° Etablir que l^2 passe par un minimum ; en déduire que l passe par un minimum égal à $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$

b) Soit S la surface repliée

1° Montrer que $S = \frac{x^2\sqrt{a}}{2\sqrt{2x-a}}$

2° Pour étudier les variations de S, il suffit de connaître celles de S^2. (car $S \geq 0$).

Démontrer que S^2 passe par un minimum pour $x = \frac{2a}{3}$ et que la surface minimale de la partie repliée est $\frac{2a^2\sqrt{3}}{9}$.

3° On pose s l'aire du triangle A'BQ. Exprimer s en fonction de x et démontrer que s passe par un maximum lorsque S est minimum.

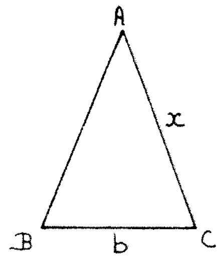
11 A PERIMETRE EGAL ...

A Le but de ce travail est de démontrer le résultat suivant :

> On donne un triangle équilatéral de périmètre P ; soit K son aire. Il existe pour chaque réel k compris entre 0 et K ($0<k<K$) exactement deux triangles isocèles de périmètre P, et d'aire k.

Remarque : P étant donné, K est connu : que vaut K en fonction de P ?

Démonstration 1 :



Les données sont le périmètre P et l'aire k ($0 < k < K$) du triangle isocèle ABC de base b. Les inconnues sont x et b, longueurs respectives du côté et de la base.

1. Calculer K en fonction de P.
2. Ecrire le système d'équations que doivent vérifier x et b ; En déduire une équation dont b est solution.
3. Cette équation peut s'écrire : $f(b) = 0$, où f est une fonction polynome. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $\left[0 ; \frac{P}{2}\right]$ et démontrer que f s'annule pour deux valeurs de cet intervalle.
4. Conclure.

* Application : $P = 98$; $k = 420$

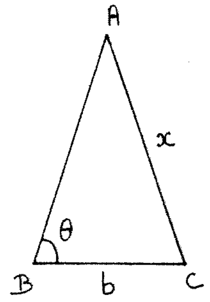
Donner les dimensions des deux triangles isocèles obtenus, et les représenter.

Démonstration 2 :

(1) ABC est un triangle isocèle de périmètre P.
On appelle θ un angle de base de ce triangle.
Calculer l'aire $A(\theta)$ du triangle ABC en fonction de P et de θ.

Indications :

On pose $AB = AC = x$; $BC = b$
Calculer P en fonction de x et de b,
b en fonction de x et de θ pour en déduire
b et x en fonction de P et de θ
On trouvera $A(\theta) = \frac{P^2}{4} \cdot \frac{\sin\theta\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}$



(2) Etudier les variations de la fonction : $\theta \longmapsto A(\theta)$, pour θ variant de 0 à $\frac{\pi}{2}$; représenter graphiquement ces variations.

(3) Conclure

* Application : $P = 98$; $k = 420$.
Donner les dimensions des deux triangles isocèles obtenus, et les représenter.

Question complémentaire

Comparer les avantages et inconvénients des deux méthodes (démonstration et application).

B Supplément

De tous les triangles ayant un même périmètre, le triangle équilatéral a la plus grande aire.

Démonstration :

(1) Soit MBC un triangle et ABC un triangle isocèle, de base [BC], ayant le même périmètre.

Démontrer que l'aire du triangle ABC est supérieure à celle du triangle MBC.

Indication : Utiliser le triangle PBC, où P est le projeté orthogonal de M sur la médiatrice de [BC]

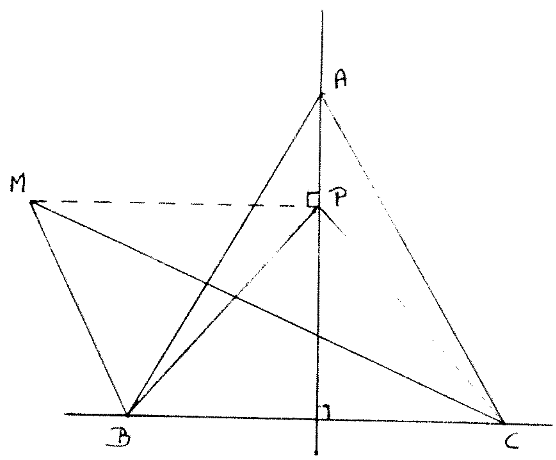
a) Comparer périmètres et aires de MBC et PBC ;

b) comparer les aires des triangles PBC et ABC ;

c) conclure.

2 L'étude des variations de la fonction A de la démonstration 2 démontre le résultat suivant :
Parmi tous les triangles isocèles de même périmètre, celui qui a la plus grande aire est équilatéral.

3 Conclure.



* Application :

Soit 2p le périmètre d'un triangle MBC et du triangle équilatéral ABC.

1. Calculer l'aire du triangle ABC en fonction de p ;

2. On utilise la formule de Héron pour calculer l'aire S du triangle MBC :

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Le théorème précédent permet alors d'écrire une inégalité.

3. On pose $p - a = x$, $p - b = y$, $p - c = z$;
Démontrer que

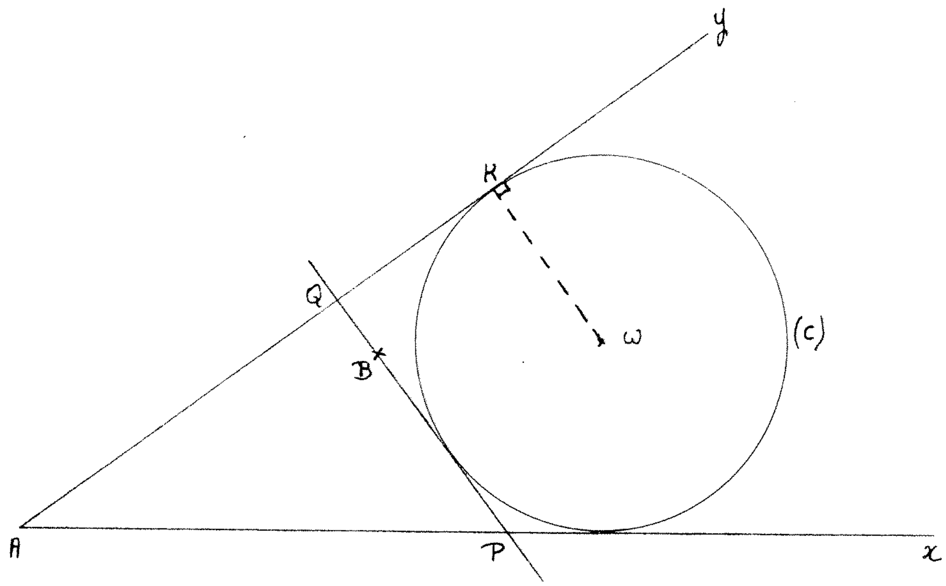
$$\sqrt[3]{xyz} \leqslant \frac{x + y + z}{3}$$

Enoncer le résultat ainsi démontré.

12. DEUX PROBLEMES DE MINIMUM

I PERIMETRE MINIMUM

B est un point appartenant au secteur angulaire xAy.
Chercher une droite contenant B et déterminant avec Ax et Ay un triangle de périmètre minimum.

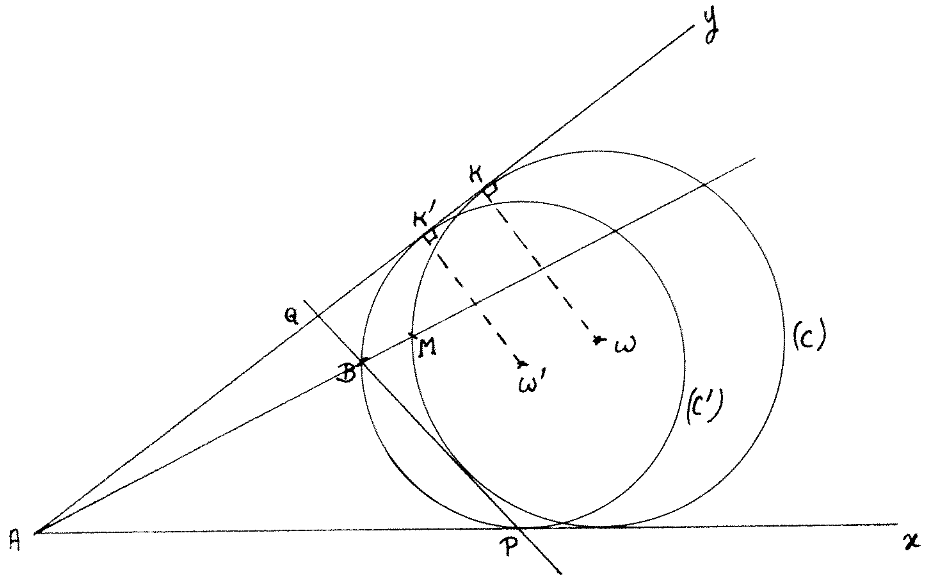


On considère une droite passant par B qui coupe Ax en P et Ay en Q, et le cercle (C) exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$ du triangle APQ. Soit K le point de contact de ce cercle et de la demi-droite Ay.

Question 1 :

Montrer que le périmètre du triangle APQ est égal à 2AK.

Le cercle (C) coupe la droite (AB) en deux points. On désigne par M celui des deux points qui est le plus proche de A, et par (C') l'image du cercle (C) dans l'homothétie de centre A qui transforme M en B.



Question 2 :

Montrer que le rapport $\frac{AM}{AK}$ est constant c'est-à-dire indépendant de la droite (PQ) passant par B.

D'après la question 1, minimiser le périmètre du triangle APQ revient à minimiser AK, et d'après la question 2, minimiser AK revient à minimiser AM.

Question 3 :

1° A quelle position du point M ce minimum correspond-il ?

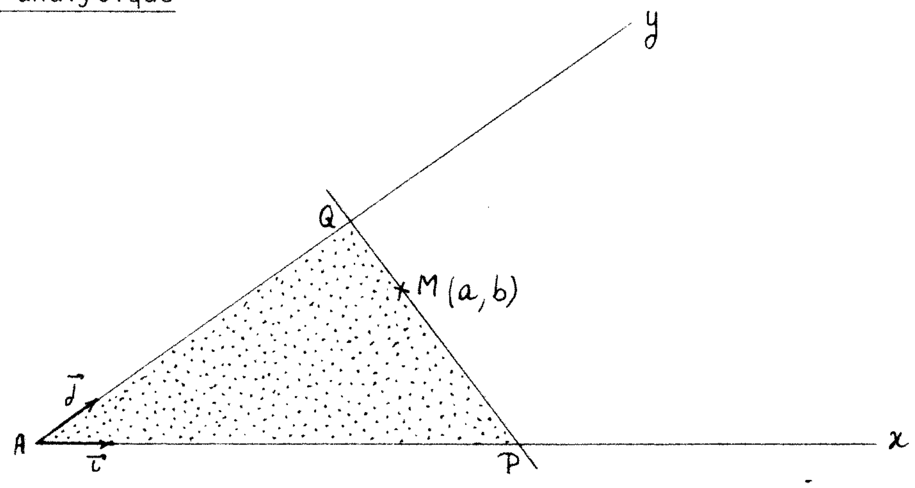
2° Construire le cercle (C) et la droite (PQ) dans ce cas là.

3° Conclure.

II AIRE MINIMUM

M est un point appartenant au secteur angulaire xAy.
Chercher une droite contenant M et déterminant avec
Ax et Ay un triangle d'aire minimum

A Solution analytique



On choisit comme repère normé $(A,\vec{i},\vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, et on pose $(\vec{i},\vec{j}) = \alpha$, où α est un angle donné.
On désigne par (a,b) les coordonnées de M.

1° Exprimer l'ordonnée de Q en fonction de l'abscisse x de P et des réels a et b.

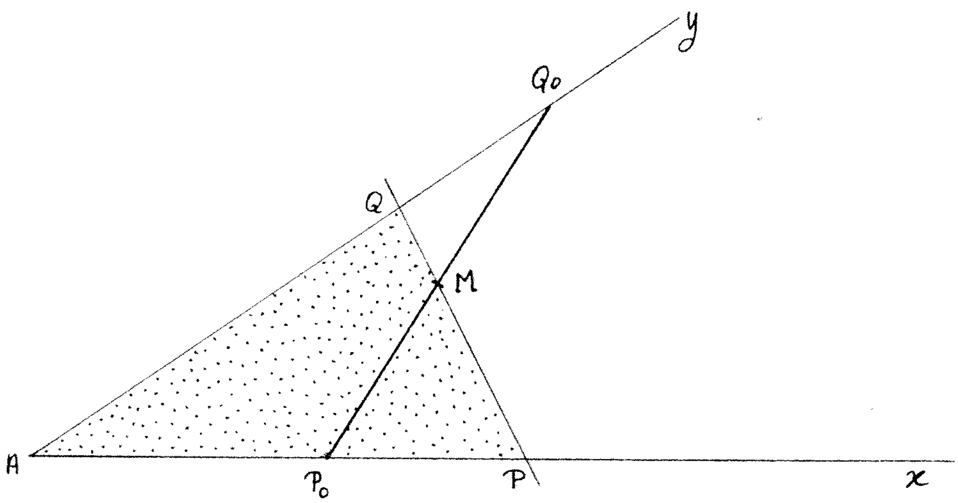
2° Exprimer l'aire S du triangle APQ en fonction de x et de α .

3° - Etudier les variations de la fonction $S : x \longmapsto S(x)$, et en déduire la valeur de x pour laquelle S(x) est minimale.

- Quelle est la valeur de ce minimum ?

- Quelle est alors la disposition des points M,P,Q ?

B Solution géométrique



1° Le point M étant donné, construire les points $P_\circ$ de Ax et $Q_\circ$ de Ay tels que M soit milieu de $[P_\circ Q_\circ]$

2° Pour démontrer que l'aire du triangle $AP_\circ Q_\circ$ est minimum, considérons une autre sécante $[PQ]$ passant par M.

- soit Q_1 le quatrième sommet du parallélogramme $P_\circ PQ_\circ Q_1$. (On envisagera deux cas selon la disposition des points $A, P_\circ, P$).

  Utiliser le point Q_1 pour montrer que l'aire du triangle $AP_\circ Q_\circ$ est inférieure à celle de APQ.

13. COMBIEN DE SOLUTIONS POUR UNE EQUATION DU TROISIEME DEGRE

I INTRODUCTION

Vous avez déjà appris à résoudre une équation du second degré ; mise sous la forme

(1) $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$

ses solutions sont celles de l'équation

$$a\left[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = 0.$$

Ainsi lorsque les coefficients a,b et c sont tels que $b^2 - 4ac > 0$, l'équation (1) admet deux solutions x_1 et x_2 qui sont :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Question 1 : Que se passe-t-il lorsque $b^2 - 4ac < 0$?
et lorsque $b^2 - 4ac = 0$?

Une telle équation est déjà moins simple à résoudre qu'une équation du 1er degré -qui peut être mise sous la forme $ax + b = 0$ avec $a \neq 0$ - et la difficulté va croître avec le degré de l'équation.

Nous allons nous accuper ici de la résolution des équations polynomiales de degré 3. Une telle équation peut être écrite sous la forme

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{avec} \quad a \neq 0.$$

II HISTORIQUE

* Le premier problème célèbre, conduisant à la résolution d'une équation du troisième degré, qui fut posé est celui de la "duplication du cube" :
  - Un cube servant de piédestal pour une statue est estimé trop petit. Il faut construire un autre cube dont le volume soit double du premier.

  Ainsi, avec nos notations actuelles, A étant l'arête du premier cube il s'agit de trouver x tel que $x^3 = 2A^3$.

* MENECHME, élève de PLATON (vers -350), a été amené à résoudre une telle équation à propos d'un autre problème :

- Etant donnés deux nombres A et B, déterminer deux nombres x et y tels que : $\frac{A}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{B}$. x et y vérifient donc : $x^2 = Ay$ et $xy = AB$, et x est alors solution de $x^3 = A^2B$.

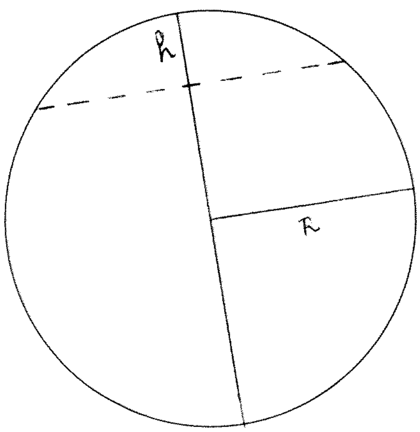
Question 2 : Pour quelle valeur de B retrouve-t-on l'équation relative au problème de la duplication du cube ?

Pour résoudre le problème Menechme a utilisé l'intersection de deux courbes géométriques. Ainsi, en considérant la parabole d'équation $y = \frac{1}{A} x^2$ et l'hyperbole d'équation $y = \frac{AB}{x}$, l'abscisse du point d'intersection de ces courbes est solution de l'équation $x^3 = A^2B$.

* **ARCHIMEDE** (vers -250) a posé le problème suivant :

- Partager, à l'aide d'une découpe plane, une sphère pleine en deux parties telles que les volumes obtenus soient dans un rapport donné.

Archimède est alors amené à résoudre une équation de la forme $x^3 + 4a = 3x^2$ (en utilisant nos notations actuelles). Son exposé conduisant à cette relation est trop long pour être donné ici mais en voici une autre explication :



Si l'une des parties a pour hauteur $h \leqslant R$ l'autre a pour hauteur $h' = 2R - h \geqslant R$. Soit V_1 le volume de la portion de hauteur h et V_1' celui de la portion de hauteur h'. Il s'agit donc de déterminer h tel que $\frac{V_1}{V_1'} = k$ $(k \leqslant 1)$.

Si V désigne le volume de la sphère $k = \frac{V_1}{V - V_1}$ donc $\frac{V_1}{V} = \frac{k}{k+1}$

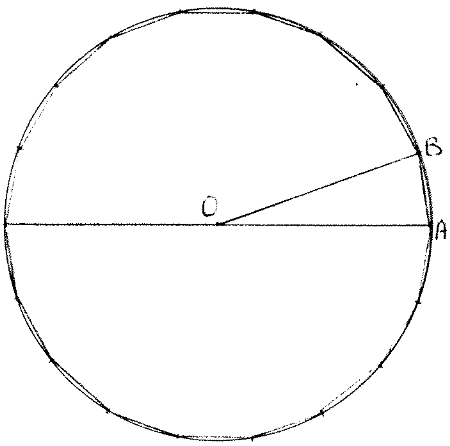
Or $V_1 = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$, (à admettre), et $V = \frac{4\pi R^3}{3}$ donc $\frac{h^2(3R-h)}{4R^3} = \frac{k}{k+1}$

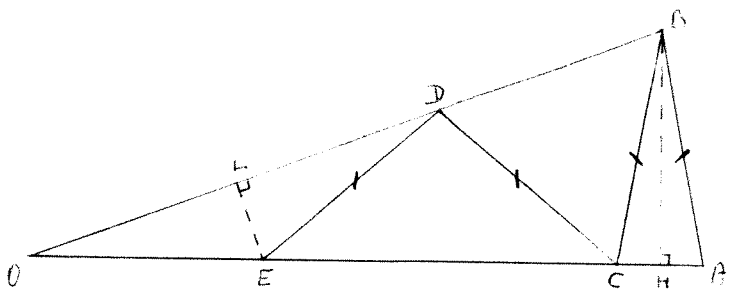
c'est-à-dire $h^3 + 4 \frac{k}{k+1} R^3 = 3Rh^2$

En se référant de préférence à la sphère on peut poser $x = \frac{h}{R}$ et $\frac{V_1}{V} = \frac{k}{k+1} = a$.
On obtient l'équation : $x^3 + 4a = 3x^2$.

* Dans les écrits des Chinois, des Hindous, des Arabes, on rencontre bien d'autres équations du troisième degré avec un procédé pour résoudre chacune d'elles. Dans chacune de ces équations les coefficients sont des nombres précisés et positifs.

Exemple : ABU - L - GUD (fin du Xe siècle) ramène le problème de la connaissance du côté d'un polygone régulier de 18 côtés inscrit dans un cercle de rayon unité à celui de la résolution de l'équation : $x^3 + 1 = 3x$.





Voici sa méthode : dans le triangle élémentaire OAB, il inscrit une ligne brisée ABCDE comme l'indique la figure et telle que AB = BC = CD = DE.

<u>Exercice 1</u> : 1° Calculer les angles du triangle OED.
Que peut-on en déduire pour OE ?

2° En considérant les triangles OAB et BCA démontrer l'égalité
(1) $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{OA}$

3° Démontrer l'égalité (2) $\frac{OH}{OB} = \frac{OL}{OE}$

4° Exprimer OH et OL en fonction de OA et AB.
(Indication : $OH = OA - \frac{1}{2} AC$)

5° On pose $OA = 1$ et $AB = x$
Démontrer que x vérifie l'égalité $x^3 + 1 = 3x$

Exercice 2 : Dessiner un polygone régulier de 18 côtés inscrit dans un cercle ayant un rayon de 1 dm (on pourra utiliser le rapporteur). Mesurer un côté x de ce polygone et exprimer sa mesure en dm. Comparer $x^3 + 1$ et $3x$.

Mais c'est Omar AL-KHAYYAM (XIe siècle) qui donne la méthode de résolution de chacune des équations du troisième degré en utilisant l'intersection d'une parabole avec une hyperbole ou avec un cercle. Comme à cette époque on ne considérait que des nombres positifs, il y avait 14 équations distinctes. En voici quelques unes : $x^3 = c$, $x^3 + bx = c$, $x^3 + c = bx$, $x^3 = bx + c$, $x^3 + ax^2 = c$, $x^3 + ax^2 + bx = c$.

Exercice 3 : Trouver les autres formes d'équation.

Exercice 4 : 1° Dessiner la parabole d'équation $y = x^2 + 1$ et l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$

2° Trouver une valeur approchée à 10^{-1} près de l'abscisse x_0 d'un point d'intersection de ces deux courbes.

3° Donner une équation du troisième degré dont x_0 est solution.

Exercice 5 : Soit à résoudre l'équation $2x^3 + x^2 - x - 3 = 0$.
Proposer une méthode pour obtenir une valeur approchée à 10^{-1} près d'une solution de cette équation.

Ce sont les Italiens qui ont pris la succession des Arabes dans cette étude. Nicolo TARTAGLIA (1500-1557), Girolamo CARDANO (ou Jérôme CARDAN 1501-1576) et Rafaele BOMBELLI (vers 1526-1573) ont abouti à la résolution algébrique des équations du troisième degré et à l'écriture avec radicaux des solutions d'une telle équation.

III FORMULE DE TARTAGLIA - CARDAN.

En 1530 Tartaglia réussit à résoudre un certain nombre d'équations du troisième degré que Johanes COLLA lui avait proposé. Cardan demanda à Tartaglia de lui communiquer sa découverte, ce dernier lui donna la clef sous forme d'un poème de trois srophes dont voici la première.

Quando che'l cubo le cose appresso	
Se aggualia a qualche numero discreto	$x^3 + cx = d$
Trova mi due altri differente in esso	$a,b : a - b = d$
Dappoi terrai questo per consulto	
Che'l lor produtto sempre sia eguale	$ab = \frac{c^3}{3^3}$
Al terzo cubo delle cose netto	
El residuo poi suo generale	
Delli lor lati cubi ben sostratti	$x = \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}$
Varra la tua cosa prinzipale	

Jerôme Cardan donne une étude complète de la résolution algébrique des équations du troisième degré dans l'Ars Magna publié en 1545. Il traite les 13 équations, autres que $x^3 = c$, que vous avez écrites dans l'exercice 3.

Considérons l'équation $x^3 + cx = d$ $(c > 0$ et $d > 0)$
Voici -quelque peu modifiée pour en simplifier l'exposé- la façon dont Cardan la résout.

Méthode : On pose $x = u + v$
L'équation $x^3 + cx = d$
s'écrit $(u^3 + v^3) + (u + v)(3uv + c) = d$
Si deux nombres u et v sont tels que $3uv + c = 0$ et $u^3 + v^3 = d$ alors ils vérifient $(u^3 + v^3) + (u + v)(3uv + c) = d$
et $u + v$ est une solution de l'équation $x^3 + cx = d$.
On est donc amené à chercher deux nombres u et v tels que $\begin{cases} u^3 + v^3 = d \\ uv = -\frac{c}{3} \end{cases}$

Si u et v existent u^3 et v^3 vérifient : $\begin{cases} u^3 + v^3 = d \\ u^3v^3 = -\frac{c^3}{27} \end{cases}$
et sont donc solutions de l'équation $y^2 - dy - \frac{c^3}{27} = 0$.
Le discriminant de cette équation est $\Delta = d^2 + \frac{4c^3}{27}$.

Il est strictement positif donc cette équation admet deux solutions distinctes u^3 et v^3.

Exercice 6 : Calculer u^3 et v^3 en fonction de c et d. En déduire x.

Voici la règle énoncée par CARDAN et sa traduction algébrique en vis à vis (extrait d'une brochure de l'I.R.E.M. de Toulouse).

Règle	
	$x^3 + cx = d \quad (1)$
Le tiers du nombre de la chose au cube étant obtenu on y ajoute le carré de la moitié du nombre de l'équation et du tout on extrait la racine que l'on met de côté.	$\frac{c}{3}$; $\frac{d}{2}$ $(\frac{c}{3})^3$; $(\frac{d}{2})^2$ $(\frac{c}{3})^3 + (\frac{d}{2})^2$ $\sqrt{(\frac{c}{3})^3 + (\frac{d}{2})^2}$
Le demi-nombre que l'on a déjà élevé au carré, tu ajoutes ou tu enlèves à l'autre ; tu as le binôme avec son apotome.	$\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{c^3}{27} + \frac{d^2}{4}}$ $-\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{c^3}{27} + \frac{d^2}{4}}$
En extrayant la racine cubique de l'apotome et celle de son binôme, le résidu de leurs différences est la valeur de la chose.	$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{c^3}{27} + \frac{d^2}{4}}} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{c^3}{27} + \frac{d^2}{4}} - \frac{d}{2}}$

Remarque : Cardan fait les calculs en ayant $x = u - v$, et dans le poème de Tartaglia u correspond à $\sqrt[3]{a}$ et v correspond à $\sqrt[3]{b}$.

Exemple :

Un cube et 6 positions égale 20	$x^3 + 6x = 20$
2 est le tiers de 6	$2 = \frac{6}{3}$
son cube est 8	$2^3 = 8$
10 est la moitié du nombre	$10 = \frac{20}{2}$
10 par lui-même donne 100	$10^2 = 100$
100 plus 8 donne 108	$100 + 8 = 108$
extrait la racine de 108 : ℞ 108	$\sqrt{108}$
En ajoutant, en soustrayant le demi-nombre 10 on obtient	
le binôme ℞ 108 p 10	$\sqrt{108} + 10$
l'apotome ℞ 108 m 10	$\sqrt{108} - 10$
La ℞ v:cu. de l'apotome est inférieure à celle du binôme, leur différence est la valeur de la chose :	Comme $\sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} < \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10}$
℞ v:cu. ℞ 108p10 m ℞ v:cu. ℞ 108m10	$x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$

Mais considérons maintenant l'équation $x^3 = cx + d$ $(c > 0$ et $d > 0)$.
La formule de Cardan va devenir :

$$x = \sqrt[3]{\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}} - \sqrt[3]{-\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{c^3}{27}}}$$

Exercice 7 : Utiliser cette formule dans le cas de l'équation $x^3 = 9x + 12$

Exercice 8 : 1° Que se passe-t-il dans le cas de l'équation $x^3 = 19x + 30$

2° Résoudre cette équation après en avoir trouvé une racine évidente.

Ainsi certaines équations qui admettent pourtant une solution positive, ne peuvent être résolues par la méthode de Cardan.
C'est Bombelli, avec l'introduction des nombres imaginaires qui permit de mener à son terme la résolution algébrique des équations du troisième degré. Mais ceci dépasse le niveau des connaissances de Première. Par contre, de nouvelles connaissances en Analyse vous permettent de résoudre avec très bonne approximation, les équations du troisième degré et bien d'autres.

IV RESOLUTION PAR VALEURS APPROCHEES

Soit à résoudre dans R l'équation:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad , a \neq 0$$

a étant non nul ses solutions sont celles de l'équation

$$x^3 + \frac{b}{a} x^2 + \frac{c}{a} x + \frac{d}{a} = 0.$$

Première étape. On pose $x = X + \alpha$ et on cherche α de telle sorte que le monôme du second degré soit annulé. On obtient alors une équation, dont l'inconnue est X, de la forme :

$$X^3 + p X + q = 0$$

Exercice 9 : Trouver la valeur de α et les coefficients p et q dans le cas de l'équation

$$2x^3 + 3x^2 - 4x - 5 = 0.$$

Nous sommes maintenant en présence du problème : résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation de la forme $X^3 + p X + q = 0$.

Deuxième étape. On considère la fonction $f : X \longrightarrow X^3 + p X + q$

Exercice 10 : Etudier les variations de f. (Deux cas se présentent. Donner le tableau de variations de f dans chacun de ces deux cas).

Question 3 : Lorsque $p \geqslant 0$, que peut-on dire du nombre de solution de l'équation $f(X) = 0$?

Exercice 11 : Donner la représentation graphique de la fonction $f : X \longrightarrow X^3 + X + 3$, et une valeur approchée à 10^{-1} près de la solution de l'équation $f(X) = 0$.

Question 4 : Lorsque $p < 0$, quelle va être l'allure de la courbe ? Combien de solutions voyez-vous pour l'équation $f(X) = 0$?

Exercice 12 : 1° Quelle conclusion donner dans le cas où

$$f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \times f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) > 0\ ?$$

2° Quelle conclusion donner dans le cas où

$$f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \times f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = 0\ ?$$

3° Quelle conclusion donner dans le cas où

$$f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \times f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) < 0\ ?$$

Exercice 13 : Calculer $f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) \times f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$

A quelle condition une équation de la forme $X^3 + pX + q = 0$ admet-elle trois solutions distinctes ?

Exercice 14 : Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune des solutions de l'équation $x^3 - 6x + 1 = 0$.

Exercice 15 : Donner une valeur approchée à 10^{-1} près de chacune des solutions de l'équation : $2x^3 - 12x^2 + \frac{21}{2}x + 14 = 0$

Exercice 16 : 1° Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de chacune des solutions de l'équation $x^3 - 7x^2 + 14x - 7 = 0$

2° Les solutions x_1, x_2 et x_3 -dans l'ordre croissant- de cette équation sont positives.
Donner une valeur approchées de $\alpha = \sqrt{x_1}$, $\beta = \sqrt{x_2}$, $\gamma = \sqrt{x_3}$.

3° Inscrire dans un cercle de rayon 1 dm, un heptagone (7 côtés) régulier convexe ABCDEFG.
Donner une valeur approchée de la mesure en dm de AB, de AC, et de AD. Comparer ces valeurs à α , β et γ .

14. NE SOYONS PAS AVARE D'ECONOMIE

I- UN PEU DE TERMINOLOGIE

1° Le coût total

La production d'une quantité q d'un certain produit entraîne dans une entreprise une série de dépenses (salaires du personnel, matières premières, frais d'entretien, frais généraux, etc...). La somme de toutes ces dépenses est appelée "coût total" de production. On note $C(q)$ le coût total de production d'une quantité q. Dans ce coût total interviennent deux sortes de coûts :

- les coûts fixes qui ne dépendent pas de la quantité produite q (frais d'assurances, de location de locaux etc...).
- les coûts variables qui en dépendent (matières premières,...) on note $c(q)$ la somme des coûts variables correspondants à la quantité q produite.

Exemple 1 : Pour une imprimerie, l'impression et la reliure de livres entraîne des frais fixes de 4000 F et des frais proportionnels de 16 F par livre fabriqué.

Question 1 : Calculer le coût total $C(q)$ de la production d'une quantité q.

Exemple 2 : Dans la pratique il est fréquent que le coût total soit une fonction polynôme du troisième degré de la quantité produite.
En voici une : $C(q) = 0{,}001\, q^3 - 0{,}03\, q^2 + 0{,}4q$.

2° Le coût moyen

On utilise aussi en économie la notion de coût moyen (ou prix de revient unitaire) : le "coût moyen" pour la production d'une quantité q, est égal par définition à $C_m(q) = \frac{C(q)}{q}$

Question 2 : Calculer $C_m(q)$ dans chacun des deux exemples précédents.

3° Le coût marginal

Une entreprise a aussi souvent besoin de savoir ce que lui coûterait la fabrication d'une unité supplémentaire, c'est-à-dire ce que coûterait la production d'une $(q + 1)^{\text{ème}}$ unité alors qu'elle a déjà produit q unités. C'est ce qu'on appelle le "coût marginal". Il est égal à :

$$C_{ma}(q) = C(q + 1) - C(q)$$

on a donc

$$C_{ma}(q) = \frac{C(q + 1) - C(q)}{(q + 1) - q}$$

On reconnaît ici le taux de variation de la fonction coût total entre q et (q+1). Pour plus de commodités de calcul, on confond ce coût marginal avec la dérivée $C'(q)$.

Question 3 : **Calculer $C_{ma}(q)$ et $C'(q)$ en fonction de q dans les deux exemples précédents.**

4° Remarques

* la variable q désigne une quantité positive ; le coût total, le coût moyen et le coût marginal sont positifs. Les représentations graphiques se feront donc dans le premier quadrant ($x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$)
* le coût moyen et le coût marginal sont des coûts unitaires (rapport d'un coût à une quantité produite).

II- DEUX PROBLEMES

Problème 1 : La fonction de coût total d'une usine électrique est :

$$C(q) = 16{,}68 + 0{,}125\ q + 0{,}00439\ q^2$$

(laissons de côté les unités qui deviendraient intéressantes pour une étude économique)

1° Déterminer la fonction de coût moyen C_m et la fonction de coût marginal C'.

2° Donner une représentation graphique de chacune de ces deux fonctions ($q \geqslant 0$) dans un même repère en choisissant convenablement l'unité de façon qu'on observe les variations des fonctions et qu'on puisse faire une lecture correcte au voisinage du minimum de C_m.

3° Pour quelle valeur de q a-t-on $C'(q) = C_m(q)$?

4° Quel est le sens de variation de $C_m(q)$ lorsque $C'(q) < C_m(q)$?

Quel est le sens de variation de $C_m(q)$ lorsque $C'(q) > C_m(q)$?

Problème 2 : Une entreprise a observé que pour un produit donné le coût total C (en milliers de francs) de la production variait en fonction de la quantité produite q (en milliers de pièces) de la façon suivante :

$$C(q) = q^3 - 3q^2 + 10{,}48\ q$$

1° Quelle doit être la production q si l'entreprise cherche à minimiser le coût moyen ?

2° Vérifier que pour la valeur q qui minimise le coût moyen, le coût marginal est égal au coût moyen (minimum).

3° Construire les deux courbes : "coût moyen" et "coût marginal" dans un même repère.

4° Comment varie C_m lorsque $C'(q) < C_m(q)$?

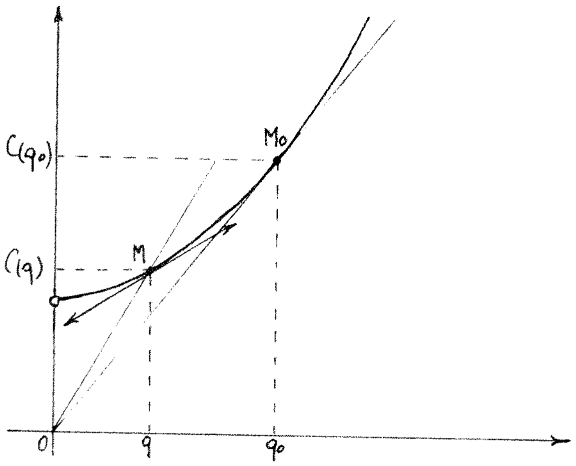
Comment varie C_m lorsque $C'(q) > C_m(q)$?

5° L'entreprise vend l'article au prix unitaire $p = 11{,}8$ F.
Exprimer le bénéfice B en fonction de q. Quelle doit être la production q si l'entreprise cherche à maximiser ce bénéfice ? Est-ce la même valeur de q qui minimise le coût moyen ?

III- QUELQUES RESULTATS GENERAUX

1) Etudier le signe de $C'_m(q)$ dans le cas général, c'est-à-dire en prenant $C_m(q) = \dfrac{C(q)}{q}$.
En déduire que C_m décroît lorsque le coût marginal est inférieur au côut moyen et que C_m croît dans le cas contraire.
Que se passe t-il pour C_m lorsque le coût marginal est égal au coût moyen ?

2) La figure qui suit représente le graphe C d'une fonction coût total.



On y a placé d'autres éléments géométriques :
- la droite OM joignant l'origine à un point M de C d'abscisse quelconque q ;
- la tangente en M à C ;
- la droite particulière OM_0.

Le coût moyen $C_m(q)$, le coût marginal $C'(q)$, le coût moyen minimum s'interprètent comme <u>pentes</u> de ces diverses droites : quelle droite correspond à l'interprétation géométrique de chaque nombre ?

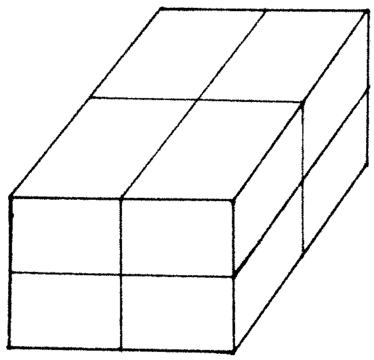
3) On suppose que, pour des raisons économiques, le coût total augmente d'une valeur proportionnelle à la quantité q : le coût total pour la quantité q produite passe de $C(q)$ à $C_1(q) = C(q) + aq$.
Comparer les valeurs de q qui minimisent les coûts moyens dans les deux cas.

15 PROBLEMES DU SECOND DEGRE

1- Le cadeau

On dispose d'une boîte parallélipipédique non cubique de volume 1dm^3 et d'une ficelle de 12 dm de longueur.

Peut-on ficeler la boîte comme ci-dessous. (On ne tient pas compte des noeuds).



(1) On appelle x, y, z les trois dimensions de la boîte. Montrer que le problème revient à résoudre le système

$$\begin{cases} x + y + z \leqslant 3 \\ xyz = 1 \\ x > 0\ ,\ y > 0,\ z > 0 \end{cases}$$

(2) Démontrer que le système précédent implique :

$yx^2 + (y^2 - 3y)x + 1 \leqslant 0$

(3) Considérer le trinôme du second degré en x :

$P(x) = yx^2 + (y^2 - 3y) + 1$

et démontrer qu'il ne peut prendre des valeurs négatives que si son discriminant Δ est positif ou nul.

(4) Démontrer que $\Delta = y(y - 4)(y - 1)^2$
Conclure.

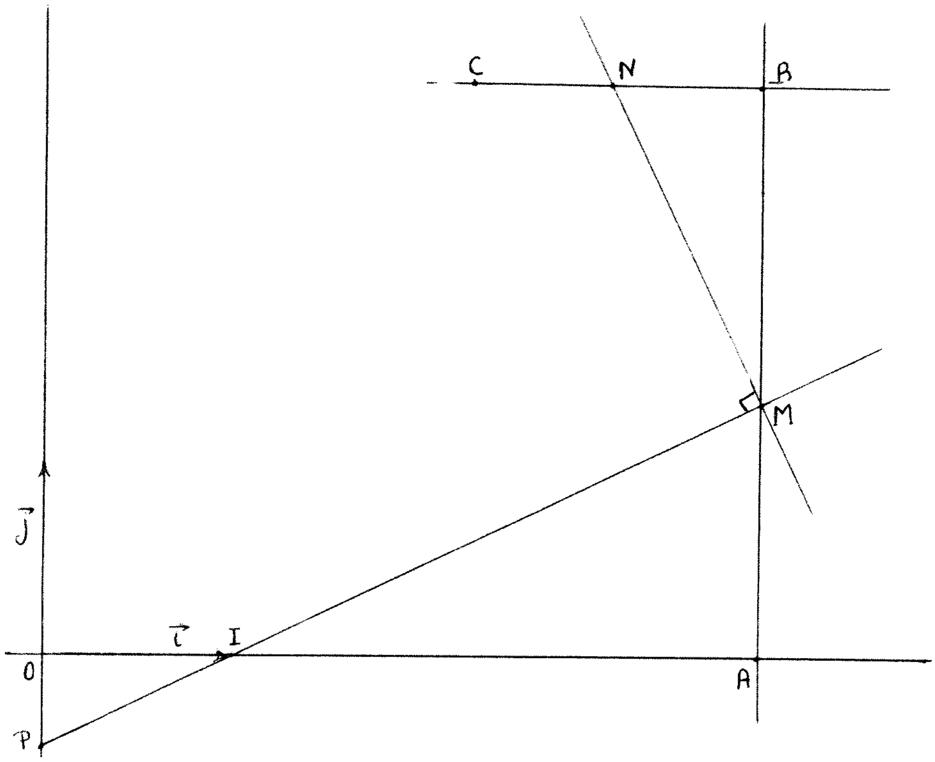
*****

2- L'orthogone de Lill

On se propose de résoudre graphiquement toute équation du second degré, soit :

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Dans un repère othonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ on place les points I,A,B et C définis par :
$\vec{OI} = \vec{i}$; $\vec{IA} = a.\vec{i}$; $\vec{AB} = b.\vec{j}$ et $\vec{BC} = c.\vec{i}$.



A tout point P de coordonnées $(0, \alpha)$ on associe le point N de la droite BC par la construction indiquée.

1° Calculer les coordonnées de M, puis de N.

2° Montrer que, pour que N soit en C, il faut et il suffit que $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.

3° En déduire une construction géométrique permettant de résoudre graphiquement une équation du second degré.

4° Appliquer cette méthode pour résoudre
$8x^2 - 2x - 3 = 0$; $3x^2 - 4x + 2 = 0$; $9x^2 - 12x + 4 = 0$.

5° Retrouver géométriquement la condition d'existence des racines d'une équation du second degré.

*****

3- Modeste et Prudence

Voici deux solutions différentes d'un même exercice. Corrigez les deux devoirs proposés en justifiant la note attribuée à chacun.

Enoncé : p et q étant deux réels non nuls, on considère l'équation $x^2 + px + q = 0$ (1)
Trouver les valeurs de p et q pour lesquelles p et q sont solutions de l'équation (1)

Solution de Modeste :

Pour que p soit solution de (1), il faut et il suffit que : $p^2 + p \cdot p + q = 0$
Pour que q soit solution de (1), il faut et il suffit que : $q^2 + p \cdot q + q = 0$.

Donc, pour que p et q soient solutions de (1) il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} p^2 + p^2 + q = 0 \\ q^2 + pq + q = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2p^2 + q = 0 & (3) \\ q(q + p + 1) = 0 & (4) \end{cases}$$

Comme $q \neq 0$,

$$(4) \Rightarrow q + p + 1 = 0 \iff q = -p - 1$$

En portant la valeur trouvée pour q dans (3) on obtient :

$$2p^2 - p - 1 = 0 \qquad (5)$$

(5) est une équation du second degré en p dont le discriminant Δ est égal à :

$$\Delta = 1 + 4 \times 2 = 9$$

Les solutions de (5) sont alors : $p' = 1$ et $p'' = -\frac{1}{2}$.

Si $p = 1$ alors $q = -p - 1 = -2$.
Si $p = -\frac{1}{2}$ alors $q = -p - 1 = -\frac{1}{2}$.

Finalement :

$$\boxed{\begin{array}{lll} p = 1 & \text{et} & q = -2 \\ p = -\frac{1}{2} & \text{et} & q = -\frac{1}{2} \end{array}}$$

ou

Solution de Prudence :

Soit (1) : $x^2 = px = q = 0$

Si cette équation admet des racines x' et x" alors :

$$\begin{cases} x' + x'' = -p \\ x'x'' = q \end{cases}$$

Donc, pour que (1) admette p et q comme racines, il faut et il suffit que :

$$\begin{cases} p + q = -p \\ pq = q \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 2p + q = 0 \\ pq = q \end{cases}$$

Comme $q \neq 0$, $(pq = q) \Rightarrow p = 1$

Si $p = 1$ alors $2p + q = 0 \Leftrightarrow 2 + q = 0 \Leftrightarrow q = -2$

Ainsi : $\boxed{p = 1 \quad \text{et} \quad q = -2}$

*****

4- "Quelques classiques"

Un problème d'organisation du travail

Deux ouvriers doivent effectuer un travail ; le premier en fait la moitié puis le second fait le reste. Le travail est ainsi terminé en 25 jours. Si les deux ouvriers avaient travaillé ensemble, ils auraient fini en 12 jours. Combien chacun d'eux mettrait-il pour effectuer tout le travail ?

Un problème de mélange

Un récipient contient 250 litres d'eau. On prélève x litres que l'on remplace par x litres d'alcool. Du mélange on prélève x litres que l'on remplace par x litres d'alcool. Le mélange obtenu contient de l'eau et de l'alcool dans la proportion de $\frac{16}{9}$. Trouver x et la quantité d'eau prélevée à la deuxième fois.

Sans oublier les balances

Un épicier possède une balance à plateaux, fausse, dont il se sert pour l'achat et la vente de ses marchandises, de façon à réaliser un bénéfice surpassant de 11 % le gain légitime qu'il aurait réalisé si la balance était juste. Si on intervertissait l'ordre des plateaux dans lesquels les marchandises sont achetées et vendues, le bénéfice serait nul. Déterminer le bénéfice légitime pour 100 F.

*****

5- Excursion

La compagnie IREM (Internationale Rhénane des Exploitations Mercantiles) a décidé d'organiser une excursion en bateau pour récompenser les animateurs les plus méritants de la société (20 % du personnel est concerné).

Le bateau part à 9h15 min. d'Amontville pour Avalstadt (distante de 12 km par le chemin fluvial). Le retour est prévu pour 18h30 min. après une escale de 8 h à Avalstadt. La vitesse du courant est constante et égale à 4 km/h.

Quelle est la vitesse propre (supposée constante) du bateau ?

*****

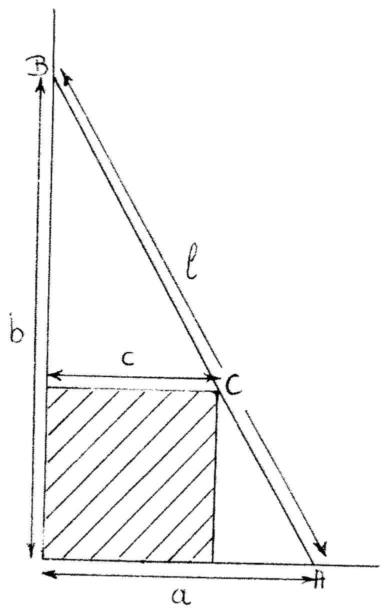
6- L'échelle

Une échelle de longueur 1 s'appuie comme l'indique la figure, en A au sol, en B à un mur vertical et en C sur l'arête d'un bloc cubique de côté c.

Calculer a en fonction de 1 et c.
(Discuter suivant les valeurs de 1 et de c)

Application numérique : 1 = 7m et c = 2,4m.

Indication : on peut prendre comme inconnues auxiliaires S = a+b et p = ab.



*****

7- Histoire de billes

Un récipient cylindrique de 10 cm de rayon et de 20 cm de hauteur contient une bille métallique de rayon r.
On verse de l'eau dans le récipient jusqu'à recouvrir exactement la bille. On retire la bille du récipient (sans enlever d'eau). On y met une autre bille de rayon R, et l'on s'aperçoit que l'eau recouvre encore exactement cette deuxième bille !

Exprimer R en fonction de r et discuter suivant les valeurs de r.

- Volume d'une sphère de rayon R : $V = \frac{4}{3} \pi R^3$.
- Volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon ρ : $V' = \pi \rho^2 h$

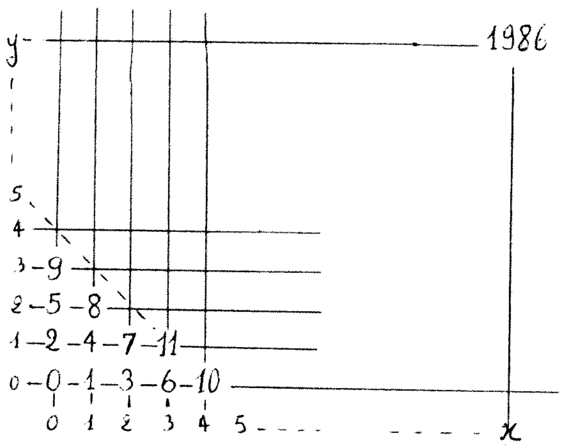
*****

8- Bijection $N \to N^2$

La première question met en évidence la "méthode de Gauss" permettant de calculer la somme des n premiers naturels. On se sert de ce résultat dans la deuxième question où l'on est amené à résoudre des inéquations du second degré. La méthode décrite permet de démontrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

1° On se propose de calculer la somme $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$
En écrivant $S = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$ calculer 2S puis S.

2° On numérote les éléments de N^2 comme l'indique la figure.
Déterminer le couple (x,y) de N^2 qui porte le numéro 1986.



*****

9- Suite et Fin

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & . & . & . & . & . & . & 100\,000
\end{array}
$$

$$
1 \quad \underbrace{2 \quad 2}_{2} \quad \underbrace{3 \quad 3 \quad 3}_{3} \quad \underbrace{4 \quad 4 \quad 4 \quad 4}_{4} \quad \underbrace{5 \quad . \quad . \quad . \quad .}_{5} \quad . \quad . \quad \boxed{} \ ?
$$

*****

16. DES SECTIONS DU CUBE

On se propose d'étudier les sections d'un cube par un plan orthogonal à une de ses diagonales, selon la position de ce plan.
On considère la diagonale (AA') et on s'intéresse aux plans perpendiculaires à cette diagonale.

A/ EXAMEN DE CAS PARTICULIERS

1) Démontrer que le plan (BCD) est orthogonal à (AA') (il y a de nombreuses démonstrations possibles). Quelle est la section du cube par ce plan ? Mêmes questions en remplaçant le plan (BCD) par le plan (B'C'D').

2) On prend le plan ADA'D' comme plan de figure. Construire les intersections H et H' de (AA') avec les plans (BCD) et (B'C'D') et étudier la disposition des points AHH'A'. Démontrer que $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AA'}$.

B/ CALCUL DE LA DIAGONALE AA'

Montrer que $AA' = a\sqrt{3}$.

C/ COMMENT VARIE LA SECTION

1) Si $0 < d \leqslant AH$ ou $AH' \leqslant d < AA'$ c'est-à-dire si $0 < d \leqslant \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ou $\frac{2a\sqrt{3}}{3} \leqslant d < a\sqrt{3}$, montrer que la section est un triangle équilatéral. On a représenté une telle section MNP (figure 2).

2) Si $AH < d < AH'$ c'est-à-dire si $\frac{a\sqrt{3}}{3} < d < \frac{2a\sqrt{3}}{3}$, montrer que la section est un hexagone.

   a) La figure 3 est faite dans le cas où $AH < d \leqslant AO$. On a représenté la section LVTSRQ. Les Points M, N, P sont les intersections du plan de section et des droites (AB), (AC), (AD). Dans ce cas on montrera que VPT, RSN et LMQ sont équilatéraux, de même côté.

   b) On a représenté figure 4 le cube de la figure 3 et les points M, N, P en le projetant orthogonalement dans un plan perpendiculaire à (AA') et en utilisant les règles habituelles de ponctuation.
   Construire sur cette figure la section du cube par le plan MNP.
   (Dans cette représentation la section sera vue en "vraie grandeur").

c) Remarquer que le cas $AO \leq d < AH'$ s'obtient en échangeant les rôles des points ABCD et A'B'C'D'.

d) Montrer que le périmètre de la section reste constant, et le calculer en fonction de a.

3) Cas particulier d'une section hexagonale régulière.

a) Montrer que l'hexagone LVTSRQ est régulier dans le cas où L,V,T,S,R,Q sont les milieux des arêtes [BC'], [C'D], [DB'], [B'C], [CD'], [D'B].

b) Montrer que le plan de section passe alors par le centre O du cube .

En résumé,

. Si $0 < d \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ou $\frac{2a\sqrt{3}}{3} \leq d < a\sqrt{3}$: la section est un triangle équilatéral
. Si $\frac{a\sqrt{3}}{3} < d < \frac{2a\sqrt{3}}{3}$: la section est un hexagone

Cas particulier : si $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ la section est un hexagone régulier.

D/ ETUDE DES VARIATIONS DE L'AIRE DE LA SECTION EN FONCTION DE LA POSITION DU PLAN SECANT

Désignons par $S : d \longmapsto S(d)$ la fonction qui à d fait correspondre l'aire S(d) de la section.

. Question préliminaire : Comme $S(a\sqrt{3} - d) = S(d)$, montrer que la courbe représentative de S sera symétrique par rapport à la droite (Δ) d'équation $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, et qu'il suffira donc d'étudier S sur $\left[0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right]$, puis d'effectuer la symétrie de la courbe par rapport à (Δ).

. Si $0 < d \leq \frac{a\sqrt{3}}{3}$, la section est un triangle équilatéral MNP

Si k désigne le rapport de l'homothétie h transformant le triangle BCD' en triangle MNP, on sait que

$$\frac{\text{aire MNP}}{\text{aire BCD'}} = k^2 = \left(\frac{d}{AH}\right)^2$$

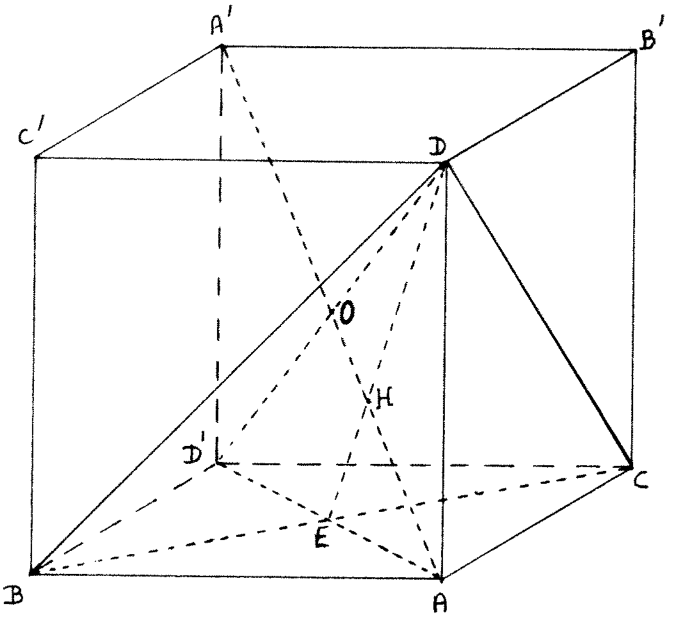


Fig. (1)

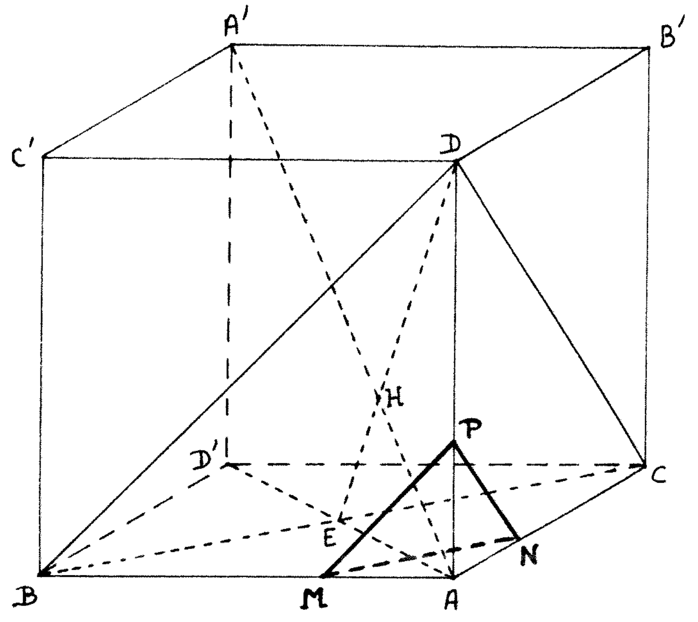


Fig. (2)

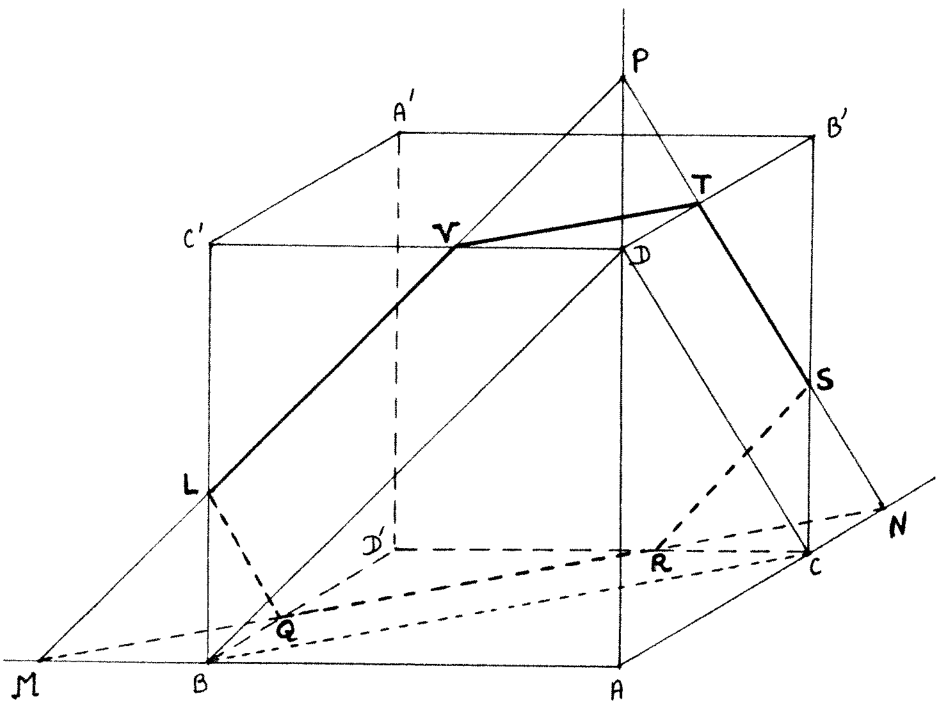


Fig. (3)

1° Calculer l'aire MNP.

. Si $\frac{a\sqrt{3}}{3} < d < \frac{a\sqrt{3}}{2}$, la section est un <u>hexagone</u> QRSTVL

Alors S(d) = aire MNP - 3 aire RSN

2° Montrer que $S(d) = \frac{\sqrt{3}}{4}(MN^2 - 3\ RN^2)$; utiliser le fait que MR = BC pour évaluer RN, et terminer le calcul de S(d).

3° Etudier les variations de $S : d \longmapsto S(d)$ sur $\left[0, \frac{a\sqrt{3}}{2}\right]$, puis construire sa représentation graphique sur $[0, a\sqrt{3}]$.

4° En déduire la section d'aire maximale.

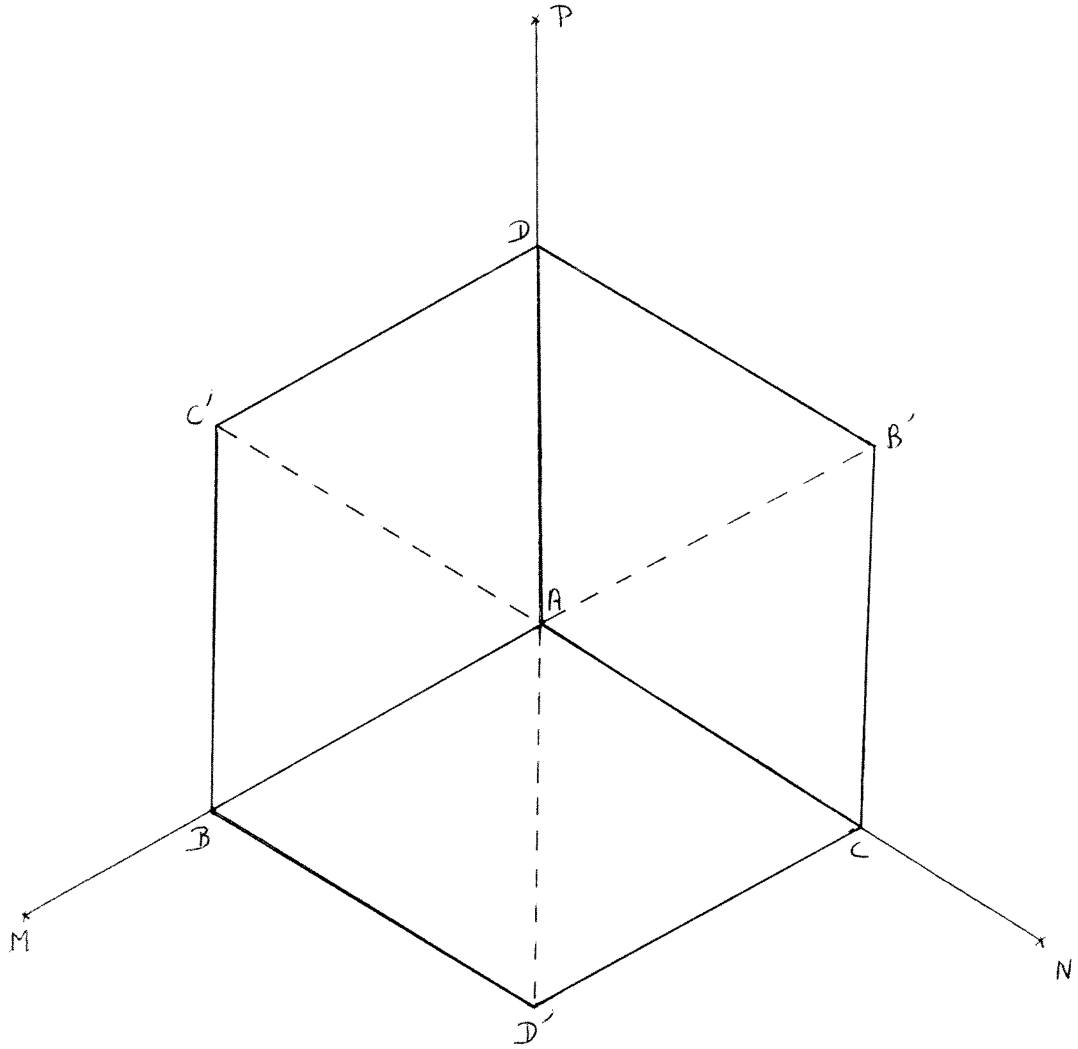


Fig (4)

17. LA COPIE DE BERGSON

La photocopie qui suit reproduit la solution donnée par Monsieur Henri BERGSON à un exercice dont l'énoncé est inscrit en début. (Photocopie tirée de l'OUVERT n° 24).

Au lieu de proposer le même énoncé aux élèves, il est possible de leur fournir cette photocopie et de leur demander de lire le raisonnement, de le comprendre et de voir s'ils donneraient, avec les connaissances qu'ils ont, les mêmes explications que Monsieur BERGSON.

L'exercice comprend deux parties :

- pour la première partie on pourra demander aux élèves de donner un résumé des diverses situations qui se présentent dans cette coupe d'un cube par un plan avec un dessin qui illustre chacune de ces situations ;

- la résolution de la deuxième question fait référence aux résultats obtenus dans la première. On pourra demander aux élèves de donner une représentation graphique de la fonction qui à d fait correspondre S(d), pour laquelle il faut tenir compte d'une définition par intervalles, d'une symétrie, et d'un bon choix des unités (le résultat du maximum est là pour prévoir).

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

JOURNAL paraissant le 1er et le 15 de chaque mois

JUSQU'AU 15 JUILLET INCLUSIVEMENT

PRIX DU NUMÉRO. . .	Paris et Départements .	0f 30
	Belgique, Suisse	0 35
ABONNEMENT ANNUEL .	Paris et Départements .	5f
	Belgique, Suisse	6

Pour tout ce qui concerne la Rédaction et les Abonnements, s'adresser à M. VUIBERT, 22, rue des Fossés-St-Bernard, à Paris.

Les Abonnements peuvent se payer en timbres-poste, mais on préfère des mandats.

PREMIÈRE PARTIE

Concours Général de 1876.

Philosophie.

Solution de M. Henri Bergson, élève du lycée Fontanes, lauréat du Concours (1er Prix).

N° 155. Dans un cube dont l'arête est a, on mène une diagonale AA', puis on coupe le solide par un plan mené perpendiculairement à la diagonale et à une distance d du sommet A.

1° On demande la figure de la section qui correspond aux diverses valeurs de d;

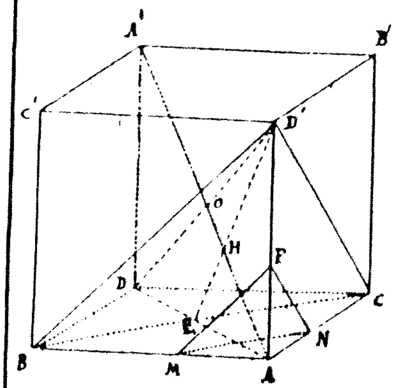
2° On demande l'aire de la section et les limites entre lesquelles elle varie lorsque le plan sécant se déplace.

I.

Tirons les trois droites $D'B$, $D'C$, BC. Je dis que le plan $D'BC$ est l'un des plans considérés, c'est-à-dire est perpendiculaire à AA'.

En effet, la projection AD de la droite AA' étant perpendiculaire à BC, la droite AA' elle-même est orthogonale à BC, en vertu du théorème des trois perpendiculaires. On démontrerait de même que AA' est orthogonale à BD' ou à CD'. La droite AA', étant alors orthogonale à deux droites du plan BCD' est perpendiculaire à ce plan.

Cela posé, soit H le point où AA' coupe le plan BCD'. Je dis que HA est égal à la moitié de HA'.



En effet, tirons les droites $D'D$, $D'E$. La ligne AA' rencontre évidemment $D'E$; car ces deux droites sont situées dans un même plan déterminé par les parallèles AD', $A'D$. Mais la droite $D'E$, contenue dans le plan BCD', ne peut rencontrer AA' qu'à la condition de passer par le point H où AA' coupe le plan. Dès lors, dans le triangle ADD' les droites AO, $D'E$ étant deux médianes, on a $AH = \frac{2}{3} AO = \frac{1}{3} AA' = \frac{1}{2} HA'$. Le point H partage donc bien AA' en deux parties dont l'une est moitié de l'autre.

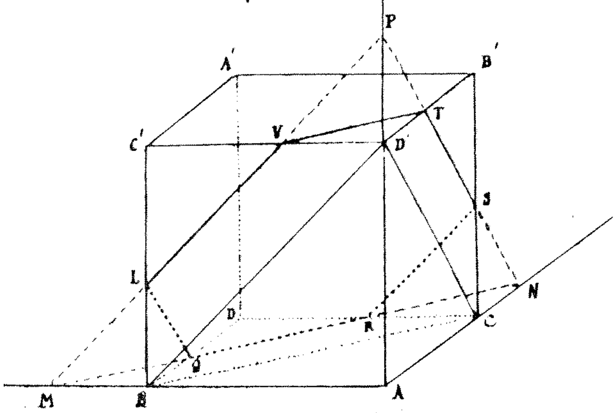
Il est maintenant facile d'étudier comment varie la forme de la section. Le côté du cube étant désigné par a, sa diagonale est égale à $a\sqrt{3}$.

1° Supposons d'abord que le point de la diagonale par lequel on élève le plan perpendiculaire soit situé entre le point A et le point H, c'est-à-dire que l'on ait $d < \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Soit MNP la section ainsi déterminée. Le plan MNP, perpendiculaire à AA', est parallèle au plan BCD'.

Par conséquent dans le tétraèdre ABCD' le plan MNP est un plan mené parallèlement à la base BCD'. Donc, en vertu d'un théorème connu, la section MNP est un polygone semblable à celui de la base, c'est-à-dire un triangle équilatéral.

Ainsi, quand on a $d < \frac{a\sqrt{3}}{3}$, la section est un triangle équilatéral

2° _ Supposons maintenant que le point par lequel on élève le plan perpendiculaire soit situé entre le point H et le point O. Je dis que la section est un hexagone (figure 2)



En effet, si l'on suppose prolongées les faces du trièdre A, le plan perpendiculaire, en les rencontrant, détermine une section MNP qui est, comme précédemment, un triangle équilatéral. Mais ce triangle équilatéral est maintenant coupé suivant les droites LQ, RS, VT, par trois faces du cube. La section est donc un hexagone. Reste à déterminer la forme particulière de cet hexagone. — D'abord, il est évident que les triangles VPT, LQM, RSN sont équilatéraux. En effet, considérons VPT par exemple : les droites VT, MN, intersections de deux plans parallèles par un troisième sont parallèles ; le triangle VPT est donc semblable à MNP, et par suite équilatéral. — De plus, il est facile de voir que ces trois triangles équilatéraux sont égaux. Comparons en effet LQM et RSN, par exemple. On a

$$\frac{RN}{RQ} = \frac{RC}{RD} = \frac{QB}{QD} = \frac{QM}{RQ}$$

d'où $\frac{RN}{RQ} = \frac{QM}{RQ}$ ou $RN = QM$

et par suite les triangles LQM, RSN, ayant leurs côtés égaux, sont égaux

On voit dès lors que l'hexagone LVTSRQ n'est autre chose que la figure obtenue en détachant d'un triangle équilatéral trois triangles équilatéraux égaux. De là résultent diverses conséquences : 1° les angles de l'hexagone sont égaux à 120° ; 2° les côtés non consécutifs de l'hexagone sont égaux trois à trois ; 3° l'hexagone est circonscriptible. Cette dernière conséquence se démontrerait facilement.

Enfin, je dis que le périmètre de la section est constant. En effet, ce périmètre est égal à $3QR + 3RS$, ou $3(QR+RS)$, ou $3(QR+RN)$ ou enfin $3QN$. Mais si l'on remarque qu'on a $QN = BC = a\sqrt{2}$, on voit que le périmètre est égal à $3a\sqrt{2}$ et, par suite, constant.

A mesure que le plan perpendiculaire s'éloigne de sa position primitive BCD', la ligne MN s'éloigne de BC. Mais à mesure que MN s'éloigne de BC, QR diminue et RN augmente. Il arrivera donc un moment où l'on aura $QR = RN$, et par conséquent $QR = RS$. La section sera alors un hexagone régulier et les points L, Q, R, S, T, V seront les milieux des côtés du cube. Les droites VR, TQ, LS, joignant les milieux de côtés opposés du cube, passent par le centre de ce solide. Donc, quand le plan perpendiculaire est élevé au centre O du cube, la section est un hexagone régulier.

On voit donc, en résumé, que lorsque d est compris entre $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, la section est un hexagone, qui tend à devenir régulier à mesure que d augmente, et qui devient régulier pour $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Le plan perpendiculaire dépassant le point O, les mêmes circonstances se présenteront en sens inverse, l'hexagone tendra à devenir un triangle équilatéral.

La discussion toute entière se résume donc ainsi :

Si d est inférieur à $\frac{a\sqrt{3}}{3}$, la section est un triangle équilatéral; -

Si d est compris entre $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$, la section est un hexagone ;

Si d est compris entre $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ et $a\sqrt{3}$, la section est encore un triangle équilatéral.

II.

1° – Supposons d'abord que l'on ait $d < \frac{a\sqrt{3}}{3}$. La section est alors un triangle équilatéral MNP (figure 1), et l'on a

$$\frac{MNP}{BCD'} = \frac{d^2}{\overline{AH}^2} = \frac{3d^2}{a^2}$$

Mais BCD' est un triangle équilatéral dont le côté est $a\sqrt{2}$ et par conséquent la surface $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. On a donc

$$\frac{2MNP}{a^2\sqrt{3}} = \frac{3d^2}{a^2} \quad \text{d'où } MNP = \frac{3d^2\sqrt{3}}{2}$$

On voit que la surface du triangle ne dépend pas du côté du cube ~~et qu'~~elle est proportionnelle au carré de d.

2° – Supposons maintenant d compris entre $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. La section est alors un hexagone dont nous désignerons la surface par S. On a (figure 2)

$$S = MNP - 3RSN = \frac{\sqrt{3}}{4}(\overline{MN}^2 - 3\overline{RN}^2)$$

Calculons séparément MN et RN. On a d'abord

$$\frac{MN}{BC} = \frac{d}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{a}$$

d'où, en remplaçant BC par $a\sqrt{2}$

$$MN = d\sqrt{2}\sqrt{3} \quad \text{et } \overline{MN}^2 = 6d^2$$

D'autre part, on a

$$RN = MN - MR = MN - BC = MN - a\sqrt{2} = d\sqrt{2}\sqrt{3} - a\sqrt{2}$$

d'où $\overline{RN}^2 = 6d^2 + 2a^2 - 4ad\sqrt{3}$

Substituant à MN et à RN, dans l'expression de S, les valeurs trouvées, il vient $S = \frac{3\sqrt{3}}{2}(2ad\sqrt{3} - 2d^2 - a^2)$

Pour étudier les variations de S, il suffit d'étudier les variations du trinôme $-(2d^2 - 2a\sqrt{3}\,d + a^2)$

On sait que le trinôme du second degré passe par un minimum pour $x = -\frac{B}{2A}$. Donc S passera par un maximum pour $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Le maximum de S aura donc lieu quand la section passera par le centre du cube, c'est-à-dire quand l'hexagone sera régulier. Si l'on substitue à d la valeur $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ dans l'expression de S, on trouve que la surface de l'hexagone est alors $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. C'est ce que l'on pouvait trouver directement en calculant la surface d'un hexagone régulier dont le côté est $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Dès lors, on voit comment varie la surface de la section : elle croît depuis le point A où elle est nulle, jusqu'au point O où elle atteint son maximum $\frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. A partir de ce point elle décroît et reprend en ordre inverse les mêmes valeurs.

On pourrait trouver le maximum de S par d'autres méthodes. D'abord, remarquons que le maximum de S a lieu en même temps que celui de la quantité $2ad\sqrt{3} - 2d^2$, ou, en supprimant le facteur constant 2, $d(a\sqrt{3} - d)$. Or, la somme de ces deux facteurs étant constante, le maximum de leur produit a lieu quand ils sont égaux, c'est-à-dire quand on a $d = a\sqrt{3} - d$, ou $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Enfin, on peut trouver directement le maximum en s'appuyant sur la remarque précédemment faite que la somme de deux côtés consécutifs est constante. Désignons par x et y les côtés QR et RS par exemple. La surface S est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}(\overline{MN}^2 - 3\overline{RN}^2)$, ou $\frac{\sqrt{3}}{4}[(x+2y)^2 - 3y^2]$ ou enfin $\frac{\sqrt{3}}{4}[(x+y)^2 + 2xy]$. Or la quantité $x + y$ est constante et le produit $2xy$ sera maximum quand on aura $x = y$. Le maximum aura donc lieu lorsque l'hexagone sera régulier.

(Ont résolu la même question MM : A. Leinekugel, lycée de Do[uai] ; L. Meriadier, lycée de Constantine ; Ch. Mirguet, collège Chaptal ; M. Rouaud, collège de Béziers)

N.B. Il s'agit du Concours Général de Philosophie, lequel comprenait une épreuve de mathématiques. Les meilleurs élèves choisissaient la section littéraire, les "humanistes" ayant à cette époque bien plus de prestige que les disciplines scientifiques. Aussi, peut-on penser que le niveau des épreuves en section mathématique n'était pas beaucoup plus élevé.

18. PARTAGEONS

PROBLEME : p est un nombre impair ; [AB] est un segment.
Le but est de partager [AB] en p segments de même longueur.

METHODE 1

Le nombre p est impair ; donc on peut écrire : $p = 2n-1$, avec n entier, n 1.
On marque un point C_1 non aligné avec A et B ;
On construit sur la droite (BC) les points C_2, C_3, ..., C_n, tels que :

$$\overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{C_1C_2} = \ldots\ldots = \overrightarrow{C_{n-1}\,C_n}\ .$$

On construit le symétrique D_n de C_n par rapport à A ;
On marque l'intersection M de (D_nC_{n-1}) et (AB).

QUESTION : Démontrer que $AB = p.AM$

Indication : On peut tracer la parallèle à (BC) passant par A et on pourra utiliser soit le théorème de Thalès soit des homothéties. On peut aussi utiliser le calcul barycentrique.

METHODE 2

Etape 1 : Partage de [AB] en trois segments de même longueur.
On marque un point C non aligné avec A et B ;
On marque D_1 milieu de [BC]
E_1 défini par l'égalité : $\overrightarrow{AE_1} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD_1}$
On marque l'intersection M_1 de (CE_1) et (AB).

QUESTION : Démontrer que $AB = 3\ AM_1$.

Etape 2 : Partage de [AB] en cinq segments de même longueur.
On utilise la figure précédente ;
On marque D_2 milieu de $[BD_1]$
E_2 défini par l'égalité : $\overrightarrow{AE_2} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD_2}$;
On marque l'intersection M_2 de (CE_2) et (AB).

QUESTION : Démontrer que $AB = 5\ AM_2$.

Etape 3 : Partage de [AB] en "?" segments de même longueur.
On utilise la figure précédente ;
On marque D_3 milieu de $[BD_2]$
E_3 défini par l'égalité : $\overrightarrow{AE_3} = \frac{1}{8}\ \overrightarrow{AD_3}$;
On marque M_3 intersection de (CE_3) et (AB).

QUESTION : En combien de segments égaux à $[AM_3]$ est partagé [AB] ?

*** On passe de l'étape k à l'étape k + 1 de façon analogue à celle dont on est passé de l'étape 1 à l'étape 2, ainsi que de l'étape 2 à l'étape 3.

QUESTION : En combien de segments égaux à $[AM_k]$ est partagé [AB] ?

METHODE 3

(1) Etape 1 On marque M_1 un point arbitraire de [AB] ;
On construit les points suivants :

I_1, milieu de $[BM_1]$;
J_1, milieu de $[BI_1]$;
K_1, milieu de $[AJ_1]$;
M_2, milieu de $[AK_1]$.

Si $M_2 = M_1$, on s'arrête
Si $M_2 \neq M_1$, on passe à l'étape suivante :

Etape 2 On construit M_3 à partir de M_2, comme l'on a construit M_2 à partir de M_1.
Si $M_3 = M_2$, on s'arrête
Si $M_3 \neq M_2$, on passe à l'étape suivante.

*** De façon générale, l'étape k permet de construire le point M_{k+1} à partir du point M_k, comme l'étape 1 permettait de construire M_2 à partir de M_1.

QUESTION 1 : Matérialiser le segment [AB] par une bande de papier et construire les différents points M_k par pliage : on marquera au crayon les points A et B, ainsi que les points M_k au fur et à mesure de leur obtention. En combien de segments égaux, ce procédé semble-t-il permettre de partager [AB] ?

QUESTION 2 : Imaginer un procédé analogue pour partager par pliages une bande de papier en trois parties égales.

(2) ETUDE MATHEMATIQUE DE LA METHODE 3 :

On choisit (A,B) comme repère de la droite (AB)

QUESTIONS

a) Compléter le tableau suivant :

POINTS	A	B	M_k	I_k	J_k	K_k	M_{k+1}
ABSCISSES			x_k				

On obtient ainsi l'abscisse x_{k+1} de M_{k+1} en fonction de l'abscisse x_k de M_k.

b) Calculer $x_{k+1} - \frac{1}{5}$ en fonction de $x_k - \frac{1}{5}$

Calculer $x_{k+1} - x_k$ en fonction de $x_k - x_{k-1}$

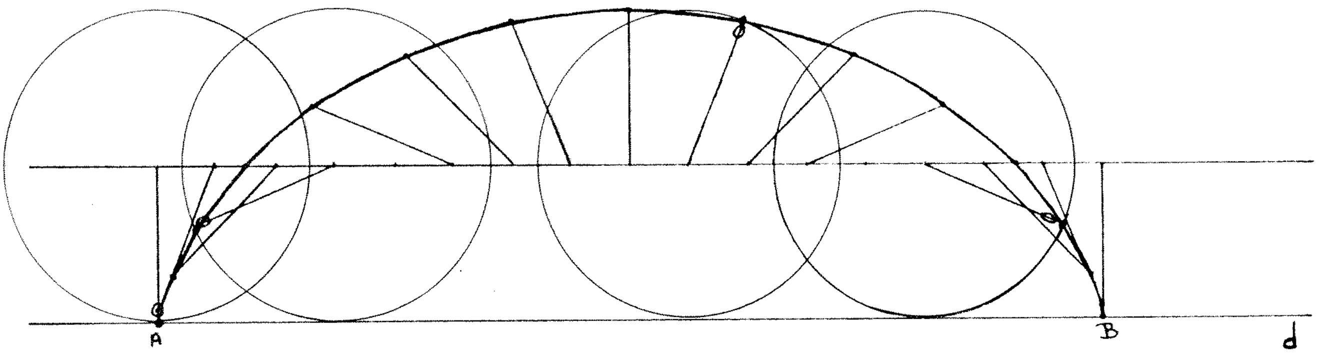
Interpréter les résultats obtenus.

c) Une bande de papier mesure 297 mm de long. La manipulation précédente ne permet pas de distinguer deux plis distants de moins d'un mm. En combien d'étapes obtient-on deux plis indiscernables ?

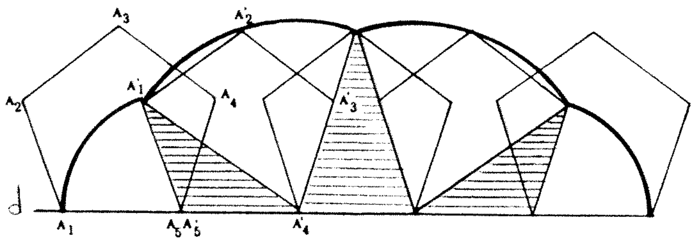
19 AIRE ET LONGUEUR D'UNE ARCHE DE CYCLOIDE

I Introduction

Une cycloïde est la courbe décrite par un point fixé sur un cercle, lorsque ce cercle roule sans glisser sur une droite d. Une arche de cycloïde est la portion de la courbe décrite par ce point entre deux contacts cercle-droite au point qui nous intéresse.



Si l'on remplace le cercle par un polygone régulier à n côtés, un sommet fixé de ce polygone décrit une "cycloïde approchée".



On a représenté ci-dessus une arche de la cycloïde approchée obtenue en faisant basculer un pentagone régulier.

Questions : 1. Quel est l'angle de la rotation de centre A_5 qui donne de $A_1A_2A_3A_4A_5$ l'image $A'_1A'_2A'_3A'_4A'_5$?

2. Vérifier que la somme des aires des triangles hachurés est égale à celle du pentagone.

Problème : La cycloïde approchée étant décrite par un polygone régulier à n côtés, calculer en fonction de n et du rayon R du cercle circonscrit au polygone, la longueur L_n d'une arche de la cycloïde approchée, et l'aire S_n limitée par une arche de la cycloïde approchée et la droite d.

II Approche

1. Hexagone

Dessiner la figure obtenue en faisant basculer un hexagone régulier au lieu d'un pentagone. R étant le rayon du cercle circonscrit à cet hexagone calculer L_6 et S_6 en fonction de R.

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de R dans L_6 et du coefficient de R^2 dans S_6.

2. Octogone

Rappel préliminaire : dans un triangle ABC quelconque on a la relation :
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$

avec la notation : a = BC, b = CA, c = AB.

Dessiner la figure obtenue en faisant basculer un octogone régulier au lieu d'un hexagone.
R étant le rayon du cercle circonscrit à l'octogone régulier, calculer en fonction de R la longueur d'un côté de l'octogone ainsi que les longueurs de chacune des diagonales.
En déduire L_8 et S_8.
Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de R dans L_8 et du coefficient de R^2 dans S_8.

3. Dodécagone

On se dispensera de faire la figure de l'arche de cycloïde approchée obtenue dans le cas d'un dodécagone car elle est difficile à réaliser et à exploiter.

Dessiner un dodécagone régulier inscrit dans un cercle de rayon R. Calculer en fonction de R la longueur d'un côté du dodécagone ainsi que les longueurs de chacune des diagonales.

En déduire L_{12} et S_{12}.

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près du coefficient de R dans L_{12} et du coefficient de R^2 dans S_{12}.

III Cas général

Soit $A_1A_2...A_n$ un polygone régulier ayant n côtés, et soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre O et de rayon R circonscrit à ce polygone.

1. Calcul de S_n

a) Démontrer que l'on a :

$$S_n = S_{pol} + \frac{\pi}{n} \times 2R^2 \left[1 - \cos\frac{2\pi}{n} + 1 - \cos 2\cdot\frac{2\pi}{n} + 1 - \cos 3\cdot\frac{2\pi}{n} + \dots + 1 - \cos(n-1)\frac{2\pi}{n} \right] \quad \text{où}$$

S_{pol} désigne l'aire du polygone régulier $A_1A_2...A_n$

b) Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de sens direct, où $\vec{i}$ est le vecteur unitaire colinéaire au vecteur $\overrightarrow{OA_1}$ et de même sens que $\overrightarrow{OA_1}$, quelles sont les abscisses des vecteurs $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, ..., $\overrightarrow{OA_n}$?

c) Que peut-on dire, pour n pair, de la somme $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$? en déduire une expression simplifiée de S_n dans ce cas.

2. Calcul de L_n

a) Démontrer que l'on a :

$$L_n = \frac{2\pi}{n} \times R\sqrt{2} \left[\sqrt{1-\cos\frac{2\pi}{n}} + \sqrt{1-\cos 2\cdot\frac{2\pi}{n}} + \sqrt{1-\cos 3\cdot\frac{2\pi}{n}} + \dots + \sqrt{1-\cos(n-1)\frac{2\pi}{n}} \right]$$

b) Exprimer $(1 - \cos k \cdot \frac{2\pi}{n})$ en fonction de $\sin k \cdot \frac{\pi}{n}$.

Transformer L_n.

c) Soit $A = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin px$

Calculer $A \cdot \sin\frac{x}{2}$. (Après calculs $A \cdot \sin\frac{x}{2}$ peut s'exprimer simplement comme un produit de deux sinus).

d) Quelles sont les valeurs de x et de p dans L_n ?
En déduire une expression simplifiée de L_n.

IV Cycloïde

Le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon R peut être considéré comme limite de la suite des polygones réguliers, ayant n côtés, incrits dans ce cercle, lorsque n tend vers $+\infty$.

1. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{pol}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Quelle est l'aire de la surface comprise entre l'arche d'une cycloïde décrite par un cercle de rayon R, et la droite d sur laquelle roule ce cercle ?

2. Sachant que $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{\alpha}{\sin\alpha} = 1$ et $\lim\limits_{\alpha \to 0} \cos\alpha = 1$, calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n$

Quelle est la longueur d'une arche de cycloïde décrite par un cercle de rayon R ?

<u>Remarque à l'attention des professeurs</u>

$$L_n = 2R \left[\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right]$$

Or $\dfrac{2\pi}{n}\left[\sin\dfrac{\pi}{n} + \sin\dfrac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}\right]$ correspond à une somme de Riemann relativement à la fonction $\sin\dfrac{x}{2}$ pour le pas $\dfrac{2\pi}{n}$ (avec $\sin\dfrac{n\pi}{n} = 0$)

Au lieu de penser comme tout le monde :
"une approximation, c'est ce qui n'est pas exact"
il faudrait répliquer, en renversant les termes :
"qu'est-ce qu'un calcul exact ?
-un calcul où l'on n'a pas besoin d'approximation"
Et l'on pourrait, à la manière des linguistes, dire :
le calcul exact n'est que le <u>"Degré Zéro de l'Approximation"</u>

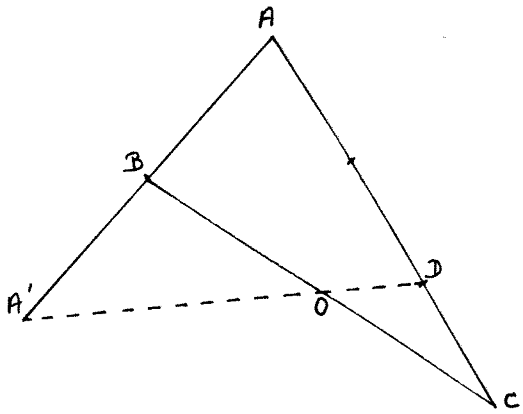
G. Th. GUILBAUD
Leçons d'A-peu-près
Christian Bourgois, 1985

20. ETUDE D'UNE FIGURE

Soit un triangle ABC. Soit D le point défini par $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ et A' le symétrique de A par rapport à B.

Les droites (A'D) et (BC) se coupent en O.

Le but de cet exercice est de démontrer par plusieurs procédés différents que O est le milieu de [BC].



Procédé 1 : **Utilisation du parallélisme et des projections.**

Indication : utiliser deux projections successives.

Procédé 2 : **Utilisation du calcul vectoriel**

Indication : Le point O étant l'intersection des droites (BC) et (A'D) exprimer $\overrightarrow{AO}$ de deux façons différentes en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Procédé 3 : **Utilisation du calcul barycentrique.**

Indication : le point O étant l'intersection des droites (BC) et (A'D) interpréter O comme barycentre de (A, α), (B, β), (c, γ) où α, β, γ sont des coefficients convenablement choisis, puis utiliser l'associativité des barycentres.

Procédé 4 : **Utilisation d'homothéties.**

Indication : trouver deux homothéties dont on précisera le centre et le rapport de façon à compléter le schéma suivant :

$$C \xrightarrow[\text{hom}(\ldots,\ldots)]{} A \xrightarrow[\text{hom}(\ldots,\ldots)]{} B$$

puis étudier la composée de ces deux homothéties.

Procédé 5 : **Géométrie analytique.**

Indication : choisir un repère et calculer les coordonnées de O, intersection de (BC) et (A'D).

CLES POUR LE DOCUMENT

Procédé 1 : clé 1 : projeter B sur (AC) parallèlement à (A'D)
clé 2 : projeter D sur (BC) parallèlement à (A'D)

Procédé 2 : clé 1 : écrire $\vec{AO} = \vec{AB} + k\vec{BC} = \ldots \vec{AB} + \ldots\vec{AC}$
clé 2 : écrire $\vec{AO} = 2\vec{AB} + k'\vec{A'D} = \ldots \vec{AB} + \ldots\vec{AC}$
clé 3 : les coordonnées de O dans le repère $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$ sont uniques donc k et k' vérifient deux égalités : on trouve ainsi k et k' donc $\vec{AO}$.

Procédé 3 : clé 1 : le point B est le barycentre de (A, α), et (A', β) : quelles valeurs peut-on donner à α et β ?
Quelle valeur donner alors à γ pour que D soit barycentre de $A(\alpha)$ et $C(\gamma)$.

Procédé 4 : clé 1 : les centres des homothéties cherchées sont deux des cinq points A, B, A', D, C.
clé 2 : le centre de la composée $h_2 \circ h_1$ de deux homothéties est aligné avec les centres des homothéties h_1 et h_2.

21. PLUSIEURS PISTES POUR UN MEME ALIGNEMENT

On donne :	- Deux droites Δ_1 et Δ_2 sécantes en I
	- A et C deux points de Δ_1 ;
	B et D deux points de Δ_2 tels que (AB) // (CD)
	- J intersection de (AD) et (BC)
	- K (resp. L) milieu de (A,B) (resp. (C,D))
A démontrer :	Les points I, J, K, L sont alignés.

1 PAR CALCUL VECTORIEL

a/ Traduire la conclusion et l'hypothèse par des égalités vectorielles entre vecteurs d'origine I, et montrer que (I,K,L) sont alignés.

b/ Montrer que (J,K,L) sont alignés.

c/ Conclure quant à l'alignement (I,J,K,L)

2 PAR CALCUL BARYCENTRIQUE

a/ Faire une figure.

b/ K milieu de (A,B), est barycentre du système de points $\{(A,\alpha)\ ;\ (B,\beta)\}$; de même I, milieu de (C,D), est barycentre du système de points $\{(C,\beta)\ ;\ (D,\beta)\}$. Montrer qu'on peut choisir les réels α et β pour que I soit barycentre du système $\{(A,\alpha)\ ;\ (B,\alpha)\ ;\ (C,\beta)\ ;\ (D,\beta)\}$.

c/ En déduire que I appartient à (KL).

d/ Démontrer que J appartient à (KL).

e/ Conclure quant à l'alignement (I,J,K,L).

3 EN TERMES D'HOMOTHETIE

a/ Faire la figure

b/ Montrer qu'il existe une homothétie de centre I qui transforme K en L, et conclure à l'alignement de I, K, L.

c/ Démontrer l'alignement de J, K, L.

d/ Conclure quant à l'alignement de I, J, K,L.

4 EN TERMES D'HOMOTHETIES

a/ Faire la figure.

b/ Utiliser deux homothéties, l'une h_1, l'autre h_2, que l'on composera, pour conclure à l'alignement I,J,K.

c/ Démontrer l'alignement I,J,L.

d/ Conclure quant à l'alignement I,J,K,L.

5 PAR L'ANALYTIQUE

a/ Faire une figure.

b/ Choisir comme repère $(I, \vec{IA}, \vec{IB})$.
Désigner par c l'abscisse de C, et montrer que les points K et L sont sur (IJ)

6 EN TERMES DE SYMETRIE OBLIQUES

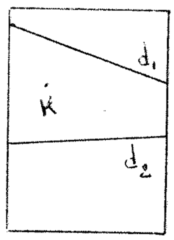
a/ Faire la figure.

b/ Prouver que I appartient à (KL) en utilisant une symétrie S d'axe (KL).

c/ Prouver que J appartient à (KL).

d/ Conclure quant à l'alignement I,J,K,L.

Application



Deux droites tracées sur une feuille de papier se coupent en dehors de cette feuille ; K est un point de la feuille.
On demande de tracer la droite passant par K et par le point d'intersection des deux droites.

Indication : A partir du point K et des deux droites, reconstituer la figure étudiée précédemment.

CLES POUR LE DOCUMENT

Clefs pour (1)

Clef (1) $\vec{IA} + \vec{IB} = 2\vec{IK}$ traduit que K est milieu de (A,B) (penser à la "règle du parallélogramme")

Clef (2) Penser à utiliser le théorème de Thalès

Clef (3) Penser à effectuer des additions d'égalités vectorielles

Clefs pour (2)

Clef (1) La projection concerve le barycentre

Clef (2) Utiliser "l'associativité" du barycentre

Clefs pour (3)

Clef (1) Toute homothetie "conserve les barycentres" donc les milieux.

Clef (2) Utiliser la position particulière du point I et le parallélisme (AB) // (CD) pour définir l'homothetie de centre I.

Clefs pour (4)

Clef (1) Utiliser la position particulière du point I, ainsi que le parallélisme (AB) // (CD) pour définir h_1.

Clef (2) Ecrire les points et leurs images de manière à pouvoir aisément composer h_1 et h_2.

Clef (3) Quelle est en fait la transformation $h_2 \circ h_1$?
Utiliser l'alignement des centres d'homothéties pour conclure.

Clefs pour (5)

Clef (1) Exprimer en fonction de c les coordonnées des divers points de la figure.

Clef (2) Ecrire une équation de (IJ), puis montrer que K et L la vérifient.

Clef (3) Pour trouver les coordonnées de J, écrire une équation des droites (BC) et (AD).

Clefs pour 6

Clef (1) Utiliser le fait qu'une droite et son image se coupent sur l'axe de symétrie.

Clef (2) Un choix "évident" pour la direction de S est celui de la direction de (AB).

22. QUESTION DE MILIEUX

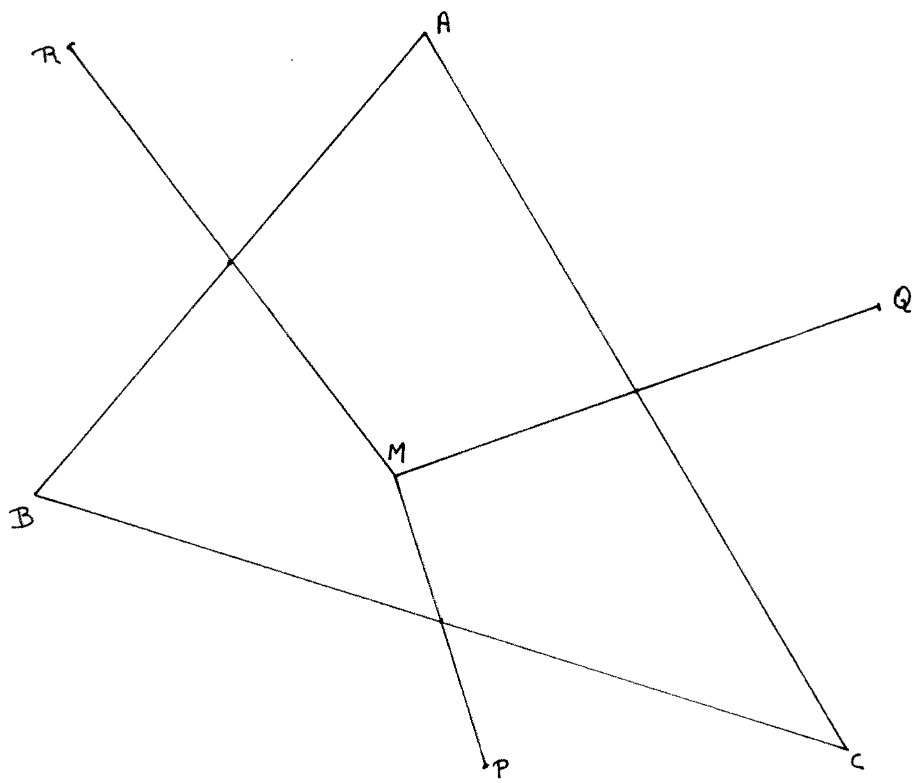
ENONCE

ABC est un triangle. M est un point quelconque du plan (ABC).
On appelle P, Q et R les symétriques de M par rapport aux milieux des segments [BC] , [CA] et [AB] ; G est le centre de gravité du triangle ABC, et K est celui du triangle PQR.

a) Montrer que [AP], [BQ] et [CR] ont même milieu ; on le note L.

b) Quel est le milieu de [GK] ?

c) Quel est le milieu de [MK] ?



Sur la figure initiale, placer les points G,K,L sans faire apparaître les lignes de construction (pour ne pas surcharger la figure). Deviner les réponses aux questions b) et c).

Méthode 1 : Utilisation des parallélogrammes.

La définition du point P suggère un parallélogramme : le représenter en couleur sur la figure initiale. Dessiner en utilisant des couleurs différentes les parallélogrammes analogues correspondants aux points Q et R. Démontrer alors la question a).

Méthode 2 : Utilisation du calcul vectoriel.

1) Démontrer le résultat préliminaire suivant :
   [XY] et [ZT] ont même milieu si et seulement si $\vec{OX} + \vec{OY} = \vec{OZ} + \vec{OT}$
   (O désignant un point quelconque).

2) Traduire hypothèses et conclusions de l'énoncé en utilisant uniquement des vecteurs d'origine O et en se servant du résultat préliminaire, chaque fois que cela est possible.

3) Démontrer les résultats demandés.

Méthode 3 : Utilisation des homothéties.

Reprendre la figure initiale et tracer en couleurs les triangles ABC, PQR, et A'B'C', où A',B' et C' désignent les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].
Montrer qu'il existe une homothétie h_1 qui transforme le triangle ABC en le triangle A'B'C' et une homothétie h_2 qui transforme le triangle A'B'C' en le triangle PQR.

Etudier $h_2 o h_1$. Etudier les images de G par ces différentes homothéties. Répondre alors aux questions posées.

METHODE 4 : Utilisation des barycentres.

On affecte A, B, C de coefficients égaux à 1.
De quel coefficient m faut-il affecter M pour que P soit barycentre de $\{(B,1) ; (C,1) ; (M,m)\}$? Montrer que pour cette valeur de m, Q est barycentre de $\{(C,1) ; (A,1) ; (M,m)\}$ et R barycentre de $\{(A,1) ; (B,1) ; (M,m)\}$.
Répondre alors aux questions a) b) et c)

CLES POUR LE DOCUMENT

Méthode 2

Clé 0, pour la question préliminaire : donner un milieu de [XY] et [ZT]

Clé 1, pour a) : il y a deux égalités vectorielles ; les démontrer l'une après l'autre.

Clé 2, pour a) : l'égalité $\overrightarrow{OX} + \overrightarrow{OY} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OT}$ est équivalente à l'égalité $\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OY}$.

Clé 3, pour b) : Calculer $\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OK}$ ... ou $3\overrightarrow{OG} + 3\overrightarrow{OK}$, et utiliser a)

Clé 4, pour c) : Calculer $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OK}$ ... ou $3\overrightarrow{OM} + 3\overrightarrow{OK}$.

Méthode 3

Clé 1 : Si h_1 existe et transforme A en A', B en B' et C en C', son centre est intersection de ... et son rapport est égal à ...
Vérifier. Même raisonnement pour h_2.

Clé 2 : $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport ... donc une ...
son centre est donc...

Clé 3 : Une homothétie conserve le centre de gravité d'un triangle.

Méthode 4

Clé : Utiliser et réutiliser "l'associativité" des barycentres.

23 PLUSIEURS DEMONSTRATIONS POUR UN MEME ORTHOCENTRE

La rédaction de chaque partie est "classique", en ce sens que la nième question est posée pour faciliter la réponse à la (n+1)ème.
L'intérêt réside dans la diversité des outils permettant de démontrer un même résultat, et dans la même démarche nécessaire pour conclure dans (1) (2) (4) et (5).

On sait que les médiatrices et les médianes d'un triangle sont concourantes ; on veut montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes, et ceci de différentes façons.

(1) ABC est un triangle.

On mène par A une droite d_1 parallèle à (BC), par B une droite d_2 parallèle à (CA) et par C une droite d_3 parallèle à (AB).
d_1 et d_2 se coupent en C', d_2 et d_3 se coupent en A', d_3 et d_1 se coupent en B'.

Questions : 1) Faire la figure ;
2) Démontrer que A est milieu de [B'C'] ;
3) Que représentent dans le triangle A'B'C', les hauteurs du triangle ABC ?
4) Conclure.

(2) ABC est un triangle.

O est le point de concours des médiatrices.

Questions : 1) Faire la figure ;
2) On pose $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{OI} + \vec{OC} = \vec{OS}$;
construire I et montrer que S appartient à la hauteur issue de C ;
3) S'inspirer de 2) pour conclure

(3) ABC est un triangle.

G est le point de concours des médianes.

Questions : 1) Faire la figure ;
2) Quelles sont les images des médiatrices par l'homothétie de centre G et de rapport -2 ?
3) Conclure.

④ ABC est un triangle.

Aa est la hauteur issue de A, A' est le milieu de [BC].

Questions : 1) Faire la figure ;

2) Soit M un point et m sa projection othogonale sur (BC) ; justifier les égalités : $MB^2 - MC^2 = 2\vec{MA'}.\vec{CB} = 2\vec{mA'}.\vec{CB}$.

3) Montrer que : $M \in (Aa) \Leftrightarrow MB^2 - MC^2 = AB^2 - AC^2$ (on utilisera 2))

4) Utiliser 3) pour montrer que le point d'intersection de deux hauteurs appartient à la troisième.

⑤ ABC est un triangle dont les angles sont aigus.

Aa est la hauteur issue de A

Questions : 1) Calculer $\frac{aC}{aB}$ en fonction des lignes trigonométriques de $\hat{B}$ et $\hat{C}$.

2) Déterminer β et γ. tels que a soit barycentre de (B, β) et (C, γ).

3) S'inspirer de 2) pour conclure.

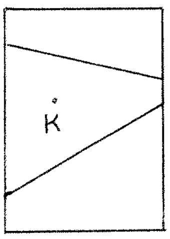
⑥ Soient A,B,C,D quatre points du plan.

Questions : 1) Démontrer que :

$\vec{AB} . \vec{CD} + \vec{AC} . \vec{DB} + \vec{AD} . \vec{BC} = 0$

2) Utiliser le résultat précédent pour conclure.

Application



Deux droites tracées sur une feuille de papier se coupent en dehors de cette feuille ; K est un point de la feuille. On demande de tracer la droite passant par K et par le point d'intersection des deux droites.

Indication : Considérer K comme l'orthocentre d'un triangle dont un sommet est le point d'intersection des deux droites.

24. RECHERCHE D'ENSEMBLES DE POINTS

I- MODE D'EMPLOI

(1) UN CERTAIN NOMBRE D'ENSEMBLES SONT CONSIDERES COMME CONNUS :

a) L'ensemble des points équidistants de deux points A et B est la médiatrice du segment [AB]. (droite perpendiculaire à [AB] en son milieu).

b) L'ensemble des points dont la distance à un point I est un nombre positif R, est le cercle de centre I et de rayon R.

c) L'ensemble des sommets M des triangles MAB rectangles en M, est le cercle de diamètre [AB].

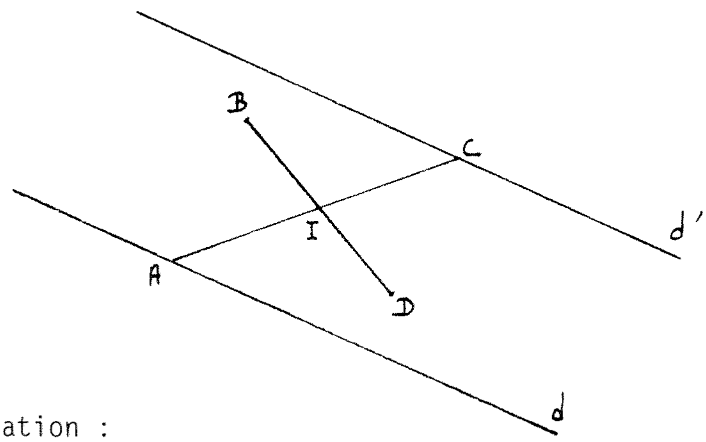
d) Etant donnés une droite d et un point H de d, l'ensemble des points qui se projettent orthogonalement en H sur d, est la droite perpendiculaire à d en H.

* Application : Exercice N° 0

(2) EXERCICE RESOLU ET COMMENTE :

a) Enoncé (A,B,C,D) est un parallélogramme. B et D sont deux points fixes. A décrit une droite d. Quel est l'ensemble des points C ?

b) Solution 1) Figure :



2) Démonstration :

I milieu de [BD] est fixe car B et D le sont. La symétrie centrale de centre I transforme A en C car (A,B,C,D) est un parallélogramme. Cette symétrie transforme d en d', droite parallèle à d. A décrit la droite d, donc C décrit la droite d'. L'ensemble des points C est donc la droite d' symétrique de d par rapport au centre du parallélogramme (A,B,C,D).

c) Commentaires

* Une telle question est résolue lorsqu'on a réussi à déterminer une TRANSFORMATION :

1/ qui transforme le point "mobile " (ici A) qui décrit un ensemble donné (ici d) en le point (ici C) dont on demande l'ensemble décrit.

2/ qui soit définie uniquement à partir des éléments "fixes" de la figure : ici, par exemple, l'utilisation d'une translation de vecteur $\vec{AC}$ n'aurait aucun sens.

** C'est une telle méthode de résolution que l'on emploiera sytématiquement dans les exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8 et 9.
Les transformations à utiliser seront des translations, ou des symétries centrales, ou des symétries axiales ou des homothéties.

*** La figure n'est pas toujours aussi "simple" :

1/ une étude approfondie (observation et démonstration) des propriétés de la figure est nécessaire ;

2/ la construction graphique de plusieurs positions du point dont on demande l'ensemble peut permettre de deviner et faciliter la résolution de l'exercice.

3 POUR TERMINER

Nous vous proposons un exercice : l'énoncé 10,

- qui utilise d'abord les résultats de 1 et la méthode de 2 ,
- qui demande ensuite un ensemble de points dont la recherche nécessite une autre méthode, laquelle est indiquée.

II- EXERCICES

EXERCICE 0 Soient A et B deux points fixes. Un cercle $\mathscr{C}$ passe par A et B, ω est le centre de ce cerle et D est le point diamétralement opposé à A sur $\mathscr{C}$.

Quels sont les ensembles des points ω et D, lorsque $\mathscr{C}$ varie ?

EXERCICE 1 (A,B,C,D) et (A,D,B,E) sont des parallélogrammes. Les points B et D sont fixes. Le point A décrit un cercle $\mathscr{C}$ de centre D.

Trouver l'ensemble des points C et l'ensemble des points E.

EXERCICE 2 ABC est un triangle ; B' et C' sont les milieux de (A,C) et (A,B). On suppose les points B et C fixes, et les médianes (BB') et (CC') perpendiculaires.

On demande l'ensemble des points A.

EXERCICE 3 Soient A,B,C trois points alignés tels que $\vec{AC} = 3\ \vec{AB}$. Un point M décrit le cercle de diamètre [BC]. On mène pas B la parallèle à (CM) qui coupe la droite (AM) en P.

Quel est l'ensemble des points ?

EXERCICE 4 ABC est un triangle, B' et C' sont les milieux de [AC] et de [AB]. G est le centre de gravité du triangle. Les points B et C sont fixes.

Déterminer les ensembles des points B', C' et G dans les cas suivants :

1° Le pied H de la hauteur issue de A est fixe
2° H varie, mais la hauteur [AH] garde une longueur constante.

EXERCICE 5 Soient quatre points alignés A,B,C,D tels que [AB] et [CD] aient même milieu. Soit E un point de la perpendiculaire en A à (AB), O le milieu de [EB] et K celui de [EC]. On suppose que A et O sont fixes et que D décrit une droite d donnée ne passant ni par O ni par A.

Déterminer l'ensemble des points K.

EXERCICE 6 (A,B,C,D) est un parallélogramme. Le point A est fixe. B et D décrivent le cercle de centre O et de rayon OA, privé du point A. La longueur BD est constante. On désigne par I le milieu de [BD], par K et H les orthocentres des triangles BDC et ABD.

1° Montrer que le point K est fixe.
2° Trouver les ensembles des points I, C et H.

***EXERCICE 7** ABC est un triangle isocèle (AB = AC). Le sommet B est fixe et le point mobile C appartient à une droite fixe d passant par B.
Le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC est un nombre R constant. On appelle O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Trouver :

a) l'ensemble des points O
b) l'ensemble des points C
c) l'ensemble des points A.

***EXERCICE 8** ABC est un triangle et $\mathscr{C}$ son cercle circonscrit, de centre O. Les points B et C sont fixes ; le point A décrit le cercle $\mathscr{C}$ privé des points B et C. On appelle H l'orthocentre du triangle ABC.

On demande l'ensemble des points H.

***EXERCICE 9** Soient O,A et B trois points fixes alignés, et $\mathscr{C}$ un cercle de centre O ne passant ni par A ni par B. Une droite variable passant par O mais non par A coupe $\mathscr{C}$ en P et Q. Les droites (AP) et (BQ) se coupent en M.

Quel est l'ensemble des points M ?

***EXERCICE 10** On donne deux points A et O. Soit M un point du plan distinct de A. On désigne par I le milieu de [AM], par d la médiatrice de [AM] et par K le projeté orthogonal de O sur d. Le point K est dit "associé à M".

1° Quel est l'ensemble des points M dont l'associé est O ?
2° Soit K un point qui n'appartient pas au cercle de diamètre [AO].
  a/ - démontrer que K est l'associé d'un point M distinct de A.
  - construire M connaissant K.
  b/ - que se passerait-il si K appartenait au cercle de diamètre [AO] ?

3° Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O ne passant pas par A. On désigne par R son rayon.

a/ - Quel est l'ensemble $\mathscr{C}'$ des points I lorsque M décrit $\mathscr{C}$?

b/ - Démontrer que si M appartient à $\mathscr{C}$, alors son associé K appartient à $\mathscr{C}'$.

c/ - Démontrer que tout point K de $\mathscr{C}'$ est l'associé d'un point M de $\mathscr{C}$.

d/ - Trouver l'ensemble des points K lorsque M décrit $\mathscr{C}$.

"Clés" pour certains des exercices indiqués par un astérisque.

EXERCICE 7 **Clé pour b)** : Trouver l'ensemble des points A', A' étant milieu de (B,C).

EXERCICE 8 **1ère méthode** :

Soit D, le point diamétralement opposé au point A sur le cercle $\mathcal{C}$.

. Démontrer que (B,C) et (H,D) ont même milieu

. Trouver l'ensemble des points H.

2e méthode :

Utiliser la relation $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (voir fiche d'activités : "Plusieurs démonstrations pour un même orthocentre").

3e méthode :

Considérer le point H' symétrique du point H par rapport à la droite (BC).

EXERCICE 9 **Clé** :

La parallèle à (PQ) passant par M coupe (AB) en O'.

Montrer que O' est fixe.

25. PROBLEMES D'ALIGNEMENT

(1) a) Dans le plan muni d'un repère, on considère les points $A(3,5)$ et $B(-3,4)$ et $C(6,\frac{11}{2})$.

Les points A, B, C sont-ils alignés ?

b) Soit le point $D(6, \frac{16}{3})$. Les points A, B, D sont-ils alignés ?

(2) Etant donné un triangle ABC, on définit le point D tel que (A,B,D,C) soit un parallélogramme, et le point E tel que (A,B,C,E) soit un parallélogramme.
Démontrer l'alignement C, D, E.

(3) Soit un parallélogramme (A,B,C,D) et I le milieu de (A,D).
Soit O le symétrique de I par rapport à A. Soit K le point défini par $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Démontrer l'alignement O,K,C.

(4) Soit un triangle ABC, et I le barycentre du système de points $\big(A(2)$; $B(1)\big)$; soit J le milieu de (B,C), et K le milieu de (A,J).
Démontrer l'alignement C,K,I.

(5) (C) est un cercle de centre O, (C') un cercle de centre O'. (C) et (C') se coupent en A et B ; E est le point diamétralement opposé à B sur (C) et F le point diamétralement opposé à B sur (C').
Démontrer que les points A, E, F sont alignés.

(6) Soient A, B, C, D, quatre points du plan. G est le barycentre des points pondérés A(1), B(2), C(2), D(1).
Démontrer l'alignement du milieu de (A,D), du milieu de (B,C), et de G.

(7) Soit un triangle ABC, et un point K défini par $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.
Soit également un point D tel que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.
Démontrer que les points A, K, D sont alignés.

(8) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 3. Soient A et B deux points du plan, ayant respectivement pour images par h les points A' et B'. Le point I est défini par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, et le point J par $\overrightarrow{A'J} = \overrightarrow{AB}$. Démontrer l'alignement des points O, I, J.

(9) (A,B,C,D) est un carré de centre O. Soit E le point intérieur au carré, tel que le triangle CDE soit équilatéral. Soit F le point extérieur au carré tel que le triangle BCF soit équilatéral. Soit G le point extérieur au carré tel que le triangle ADG soit rectangle isocèle en G.

a) F, G, O sont alignés. Pourquoi ?

b) Démontrer que les points A, E, F sont alignés.

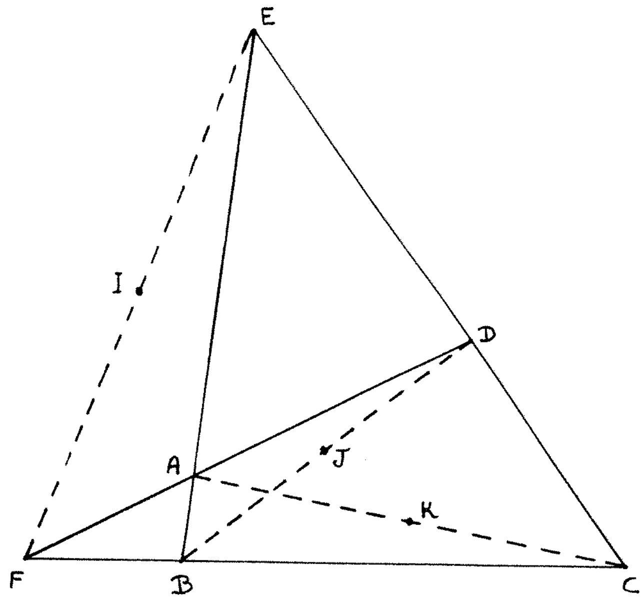
c) Les points B, E, G sont-ils alignés ?

(10) Soient A, B, C trois points d'une droite d tels que $\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. Par A, B et C on mène trois droites parallèles d_1, d_2 et d_3, distinctes de d.
Soit P un point de d_1. La parallèle à (CP) issue de A coupe d_2 en M et d_3 en N.
O étant le milieu de [BM], démontrer que les points P,O et N sont alignés.

"Pour moi, si j'ai trouvé quelques vérités dans les sciences je puis dire que ce ne sont que des suites et des dépendances de cinq ou six principales difficultés que j'ai surmontées et que je compte pour autant de batailles où j'ai eu l'heur de mon côté."

René DESCARTES
"Discours de la Méthode"

26. ETUDE D'UNE CONFIGURATION



Soit un triangle EBC.
Soit A un point de [EB] et D un point de [EC].
On suppose que la droite (AD) coupe (BC) en F.
On désigne par I,J,K les milieux respectifs des segments [EF], [BD] et [AC].
Le but de ce problème est de démontrer que les points I, J et K sont alignés.

Pour résoudre ce problème un procédé consiste à construire les images de I,J et K dans l'homothétie H de centre A qui transforme K en C, et de démontrer que les images de I,J et K par cette homothétie sont trois points alignés.

1° Construire les points S et T, images respectives de I et J par H et étudier les quadrilatères AFSE et ABTD.

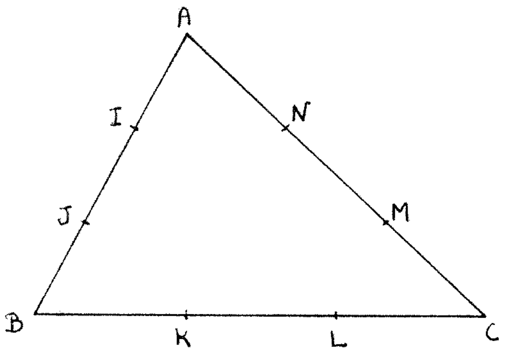
2° Les droites (BT) et (DT) coupent respectivement (CE) et (BC) en H et L.
On désigne par h_1 l'homothétie de centre C qui transforme L en B et par h_2 l'homothétie de centre C qui transforme H en D.

a) Trouver le point $h_1(D)$ ainsi que le point $h_2(B)$.
b) Etablir que $h_1 \circ h_2 = h_2 \circ h_1$
c) Soit h l'homothétie $h = h_1 \circ h_2$ (on a aussi $h = h_2 \circ h_1$) trouver les points h(L) et h(H).

En déduire les transformées des droites (BH) et (DL) par h puis démontrer que h(T) = S.

3° Démontrer que les points S,C,T sont alignés puis que les points I,J,K sont alignés.

27. ACTIVITES SUR LES PROBLEMES DE CONCOURS



(1) Soit ABC un triangle. Chacun de ses côtés est partagé en trois segments de même longueur. Les points I,J,K, L,M et N sont définis par le dessin ci-contre.
Montrer que les droites (IL), (JM) et (KN) sont concourantes.

(2) Soit ABC un triangle et M le milieu de [BC]. Soient A' le symétrique de A par rapport à la droite (BC) et A" le symétrique de A par rapport au point M.

Montrer que les droites (CA') et (BA") d'une part, (BA') et (CA") d'autre part se coupent sur la médiatrice de [BC].

(3) Soit ABC un triangle. Les points A', B' et C' sont les milieux des côtés [BC], [CA] et [AB], et le point E est défini par $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}$.

Montrer que les droites (AA'), (B'C') et (CE) sont concourantes.

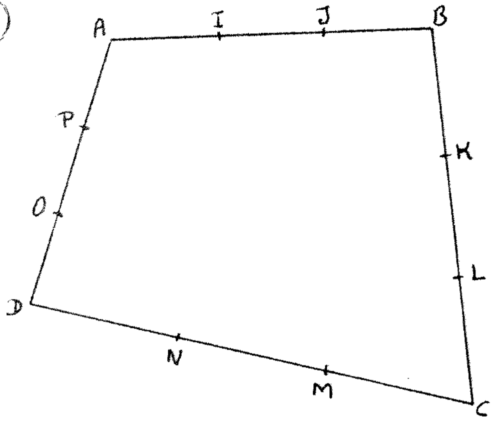
(4) Soit ABC un triangle.
1° Placer les points I, J et K tels que :

* $I \in (BC)$ et $\dfrac{\overline{IB}}{\overline{IC}} = -\dfrac{1}{2}$
* $J \in (CA)$ et $\dfrac{\overline{JA}}{\overline{JC}} = -\dfrac{2}{3}$
* $K \in (AB)$ et $\dfrac{\overline{KB}}{\overline{KA}} = -\dfrac{3}{4}$

2° Démontrer que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

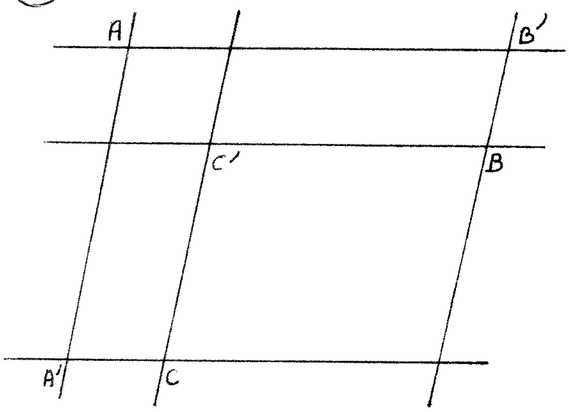
(5) Soient A,B,C et D quatre points non alignés.
On appelle G le centre de gravité du triangle ABC, I le milieu de [AB], J le milieu de [BC], K le point défini par $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{4}\,\overrightarrow{CD}$, et L le point défini par $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{4}\,\overrightarrow{DA}$.

6) On donne quatre points A,B,C et D sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Montrer que les six droites passant par le milieu d'une corde et perpendiculaire à la corde opposée sont concourantes.

7) 

Soit ABCD un quadrilatère. Chacun de ses côtés est partagé en trois segments de même longueur. Les points I,J,K,L,M,N,O et P sont définis par le dessin ci-contre.

Comment faut-il choisir le quadrilatère ABCD pour que les quatre droites (IM), (JN), (KO) et (LP) soient concourantes ?

8*) 

<u>HYPOTHESES</u> : (AB')//(BC')//(CA')
(AA')//(BB')//(CC')

1. Montrer que dans le cas où (AC') et (BA') ont un point commun I (cas de la figure) les droites (AC'), (BA') et (CB') sont concourantes.

<u>Indication</u> :

Soient h_1 l'homothétie de centre I qui transforme C' en A
et h_2 l'homothétie de centre I qui transforme A' en B.

Justifier dans ce cas l'égalité $h_2 o h_1 = h_1 o h_2$ et montrer que cette homothétie transforme C en B'.

2. Faire une figure illustrant le cas où (AC') et (BA') sont parallèles.
Que peut-on dire alors de (CB') ? Justifier.

CLES POUR LE DOCUMENT : PROBLEMES DE CONCOURS

1) Clé 1 : Reconnaître des parallélogrammes dans cette figure.
Clé 2 : N'utiliserque des parallélogrammes dont les sommets sont à choisir parmi les points I, J, K, L, M, N.

2) Clé : Utiliser une symétrie axiale.

3) Clé 1 : Montrer que le point S d'intersection de (AA') et de (B'C') appartient à la droite (CE).
Clé 2 : Trouver le nombre réel a tel que S soit barycentre du système A(a), B(1), C(1).
Clé 3 : Utiliser l'associativité du barycentre pour montrer que le point S appartient à (CE).

4) Clé 1 : Traduire les trois hypothèses en termes de barycentre.
Clé 2 : Utiliser l'associativité du barycentre.
Clé 3 : Montrer que le point de concours cherché est le barycentre du système A(3), B(4), C(2).

5) Clé : Affecter A, B, C, D de coefficients convenables pour que le barycentre du système obtenu soit le point de concours cherché.

6) <u>Méthode 1</u> : Calcul vectoriel

Clé 1 : Tracer deux des six droites. Désigner par S leur point d'intersection. Calculer le vecteur $\overrightarrow{OS}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD}$.
Clé 2 : Remarquer que le point S ne dépend pas du choix des deux droites précédentes et conclure.

<u>Méthode 2</u> : Transformations

Clé : Soit ω le centre du parallélogramme dont les sommets sont les milieux des côtés du quadrilatère ABCD. Utiliser la symétrie de centre ω

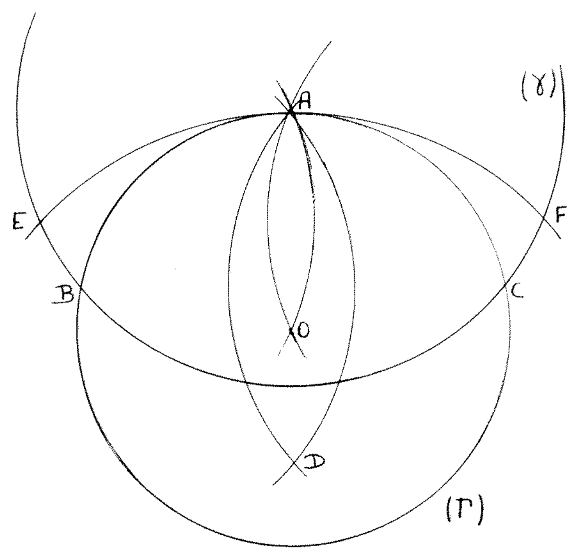
7) Clé : Utiliser des parallélogrammes.

28. UN PROBLEME DE NAPOLEON

(Γ) est un cercle dont on a "perdu" le centre : on cherche à le retrouver à l'aide d'un compas, à l'exclusion de tout autre instrument de dessin.
Voici la solution qu'en donna l'abbé Mascheroni en 1797, à Bonaparte lors d'un de ses voyages en Italie. Depuis, ce problème porte - curieusement - le nom de problème de Napoléon.

On procède comme suit :

- on trace un cercle (γ) centré en un point A quelconque de (Γ) : (γ) coupe le cercle (Γ) en B et C.
- on trace les cercles de centres B et C passant par A : ils se coupent en D.
- on trace le cercle de centre D passant pas A : il coupe (γ) en E et F.
- on trace les cercles de centres E et F, passant par A : ils se recoupent en O.



Questions :

1. Démontrer que $\dfrac{AE}{AO} = \dfrac{AD}{AE}$

   En déduire que $\dfrac{AB}{AO} = \dfrac{AD}{AB}$

2. Utiliser ce dernier résultat pour démontrer que le triangle AOB est isocèle

3. Conclure que O est le centre de (Γ)

4. Est-on sûr que le cercle de centre D passant par A coupe (γ) en deux points ?

29. PSEUDO-CARRES

① Soit ABCD un carré. On sait que ses diagonales [AC] et [BD] vérifient les propriétés suivantes :

(1) AC = BD

(2) (AC) $\perp$ (BD)

(3) [AC] et [BD] se coupent en leur milieu

Question 1 : Démontrer qu'un quadrilatère ABCD dont les diagonales [AC] et [BD] possèdent les propriétés (1) (2) et (3), est un carré.

② On considère désormais des quadrilatères ABCD dont les diagonales [AC] et [BD] vérifient les propriétés (1) et (2) mais non la propriété (3).

Question 2 : Représenter un tel quadrilatère.

Définition : un tel quadrilatère s'appelle un pseudo-carré.

③ Soit ABCD un pseudo-carré.
Soit I le point d'intersection de ses diagonales [AC] et [BD].
On appelle K, L, M, N, P, Q, les milieux respectifs de [AB], [BC], [CA], [DB], [DC], [DA].

Question 3 : a) Les médiatrices des côtés opposés [AB] et [CD] se coupent en E, celles des côtés opposées [BC] et [DA] se coupent en F. Démontrer que les triangles EAB et ECD sont rectangles isocèles.

Indication : On pourra considérer une rotation qui transforme le segment [AC] en le segment [BD].

Enoncer un résultat analogue pour deux triangles dont F est un sommet.

b) Démontrer que (IE) et (IF) sont les bissectrices de l'angle formé par les deux diagonales (AC) et (BD).

c) Que peut-on dire du quadrilatère EMFN ?

d) 1° Que peut-on dire du quadrilatère KLPQ ?

2° Réciproquement, soit STUV un carré, et A un point quelconque, On appelle B le symétrique de A par rapport à S, C celui de B par rapport à T, D celui de C par rapport à U.
Que peut-on dire du quadrilatère ABCD ?

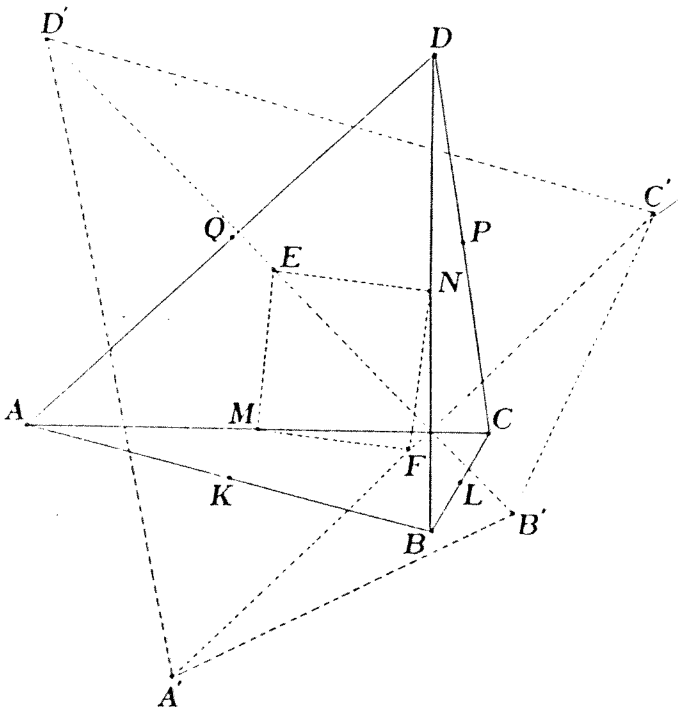
e) Démontrer que les droites (EF), (MN), (KP), et (QL) sont concourantes.

f) On appelle A' le symétrique de E par rapport à K ; B' celui de F par rapport à L ; C' celui de E par rapport à P ; D' celui de F par rapport à Q.

Démontrer que A'B'C'D' est un pseudo-carré.

Dans le pseudo-carré ABCD, E et F sont les intersections des médiatrices des côtés opposés, M et N sont les milieux des diagonales qui se coupent en I.

Démontrer que dans le pseudo-carré A'B'C'D', E et F sont les milieux des diagonales qui se coupent en I, et que M et N sont les intersections des médiatrices des côtés opposés.



30. LES AUTOROUTES DE MONSIEUR FERMAT

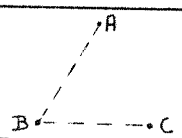
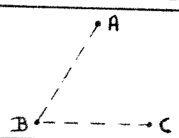
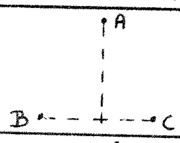
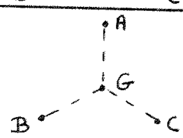
Imaginons 3 villes, aux sommets d'un triangle. Comment construire une autoroute, de longueur totale minimum, et qui permette de se rendre de l'une quelconque des villes à chacune des 2 autres.

Une première idée consiste à construire l'autoroute en suivant les côtés du triangle ; mais, en supprimant l'un des côtés, on peut quand même passer d'une ville à l'autre, et l'autoroute ainsi construite sera plus courte que la précédente.

On peut encore faire mieux :

Question 1

Calcul de quelques longueurs d'autoroutes possibles dans le cas d'un triangle équilatéral (on prendra comme unité le côté du triangle).

Tracé	longueur	
		(1)
		(2)
		(3)
		(4)

Si on construit 3 tronçons d'autoroute présentant un noeud au centre de gravité du triangle, on obtient une longueur totale de réseau routier égale à GA+GB+GC, inférieure aux trois autres.

On peut alors se poser la question :

Etant donné un triangle, trouver le point qui réalise le minimum de la somme des distances aux trois sommets.

Ce problème a été posé par Pierre FERMAT, mathématicien français du XVIIe siècle et résolu par l'italien Evangelista TORICELLI, contemporain de FERMAT, élève de GALILEE et inventeur du baromètre.

Résolution du problème

On appelle A,B et C les sommets du triangle de telle façon que :

$$\hat{A} \geqslant \hat{B} \geqslant \hat{C}$$

On supposera, pour des raisons que l'on découvrira en cours d'étude, que la mesure de $\hat{A}$ est au plus égale à 120°.

Question 2

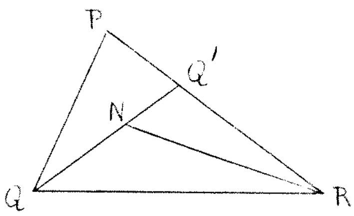
On pose BC = a, CA = b, AB = c - Montrer que $a \geqslant b \geqslant c$.

Nous allons étudier la fonction $f : M \mapsto f(M) = MA + MB + MC$

1 Le point M est un point extérieur au triangle ABC

A. Nous utiliserons le résultat préliminaire suivant :

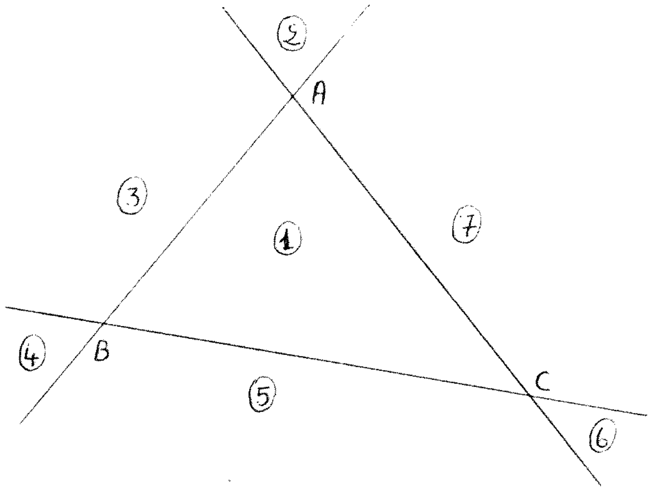
On considère un triangle PQR et un point N à l'intérieur de ce triangle. On a :
$NQ + NR < PQ + PR$



Question 3

Démontrer ce résultat. On pourra pour cela introduire le point Q', intersection de (QN) et (PR) et montrer d'abord que $NQ + NR < QQ' + Q'R$, à l'aide de l'inégalité triangulaire.

B. Les droites (AB), (BC) et (CA) partagent le plan en sept régions dont elles sont les frontières.
(Voir dessin page suivante).



Question 4 :

Montrer que :

1) Si M est situé dans la région 2 , alors $f(M) > f(A)$

2) Si M est situé dans la région 3 , alors $f(M) > f(I)$
   où I est le point d'intersection de [MC] et [AB]

Noter les résultats concernant les autres régions extérieures au triangle ABC.

Conclusion

Le point cherché ne peut être extérieur au triangle ABC.

2 Le point M est un point intérieur au triangle ABC ou appartenant à l'un de ses côtés.

A.* On construit à l'extérieur du triangle ABC les triangles équilatéraux ACB' et CBA', et on appelle T le point d'intersection des droites (AA') et (BB')

Question 5 :

Expliquer pourquoi T est intérieur au triangle ABC.

** On considère la rotation r de centre C qui transforme B en A'.

Question 6 :

a) Quel est l'image par r du point B' ?

b) On désigne par T' l'image de T par r.
   1° Montrer que T' appartient à [AA'] puis que $T' \in [TA']$;
   2° Quelle est la nature du triangle CTT' ?

Question 7 :

a) Calculer les angles $(\widehat{\vec{TA},\vec{TB}})$, $(\widehat{\vec{TB},\vec{TC}})$ et $(\widehat{\vec{TC},\vec{TA}})$: on montrera que chacun d'eux est égal à 120° (en supposant que ABC est direct).

Indication : pour le calcul de $(\widehat{\vec{TB},\vec{TC}})$ on utilisera la rotation r et les résultats acquis à la question précédente.

b) En déduire que si BAC' est le triangle équilatéral construit à l'extérieur du triangle ABC, alors T appartient à $[CC']$.

Ce point T, point de concours des droites (AA'), (BB') et (CC'), s'appelle le point de TORICELLI du triangle ABC.

Question 8 :

Quel est le point de Toricelli d'un triangle équilatéral ?

Quel est le point de Toricelli d'un triangle dont un angle est égal à 120° ?

B. On construit le triangle $A_1B_1C_1$ dont les côtés B_1C_1, C_1A_1 et A_1B_1 sont respectivement perpendiculaires en A,B et C aux droites (TA) (TB) et (TC).

Question 9 :

Démontrer, par des considérations d'angles, que le triangle $A_1B_1C_1$ est équilatéral .

Question 10 :

a) Représenter un triangle équilatéral PQR. On appelle h, sa hauteur. Soit M un point intérieur au triangle et M_1, M_2, M_3 ses projetés orthogonaux sur PQ, QR et RP. Montrer que $MM_1 + MM_2 + MM_3 = h$. (Théorème de VIVIANI, XVIIe siècle).

Indication :

On peut écrire que l'aire du triangle PQR est la somme des aires de trois triangles de sommet M.

b) En déduire que f(T) est égal à la hauteur du triangle $A_1B_1C_1$.

Question 11 :

Soit M un point intérieur au triangle ABC ou appartenant à l'un de ses côtés ; on appelle α, β et γ les projetés orthogonaux de M sur (B_1C_1), (C_1A_1) et (A_1B_1).

Montrer que $MA + MB + MC \geqslant M\alpha + M\beta + M\gamma$

En déduire que $f(M) \geqslant f(T)$

Question 12 :

Enoncer le résultat démontré dans cette étude.

3 Complément : Encore un "problème de Napoléon"

On construit extérieurement au triangle ABC, les triangles équilatéraux BCA', ACB' et ABC'.

Soient X,Y,Z les centres respectifs de ces trois triangles.

Le résultat suivant est connu sous le nom de "théorème de Napoléon" :

XYZ est un triangle équilatéral

Pour le démontrer, on peut répondre aux questions suivantes :

1° Construire les droites (QR), (RP) et (PQ) respectivement perpendiculaires à (TA) en A, à (TB) en B et à (TC) en C. Que peut-on dire des cercles circonscrits aux triangles ABR BCP et CAQ ?

2° Calculer les angles du triangle PQR

3° Considérer une homothétie de centre T.

"L'un des principaux objectifs de l'enseignement mathématique, doit être de développer chez l'élève l'aptitude à poser et résoudre des problèmes...
L'essentiel est, pour le maître, de perdre la regrettable habitude de révéler la réponse. L'élève doit acquérir progressivement le goût de chercher seul, dût-il réfléchir un mois ou deux avant d'arriver à une réponse."

Georges GLAESER
"Mathématiques pour l'élève professeur"

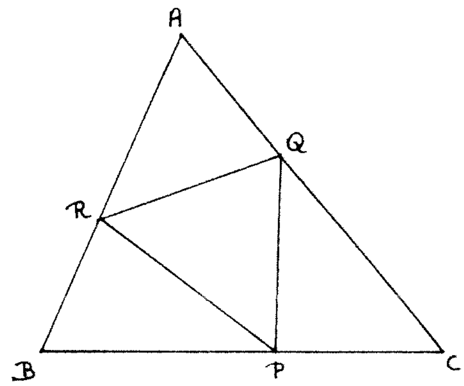
31. LE PROBLEME DE FAGNANO ET QUELQUES APPLICATIONS

En 1775 le comte Giulio Cesare FAGNANO DEI TASCHI a posé le problème suivant :

- ABC est un triangle dont les angles sont aigus. Est-il possible de choisir les points P,Q et R respectivement sur [BC], [CA] et [AB] de sorte que le périmètre du triangle PQR soit minimum ?-

I Une résolution de ce problème

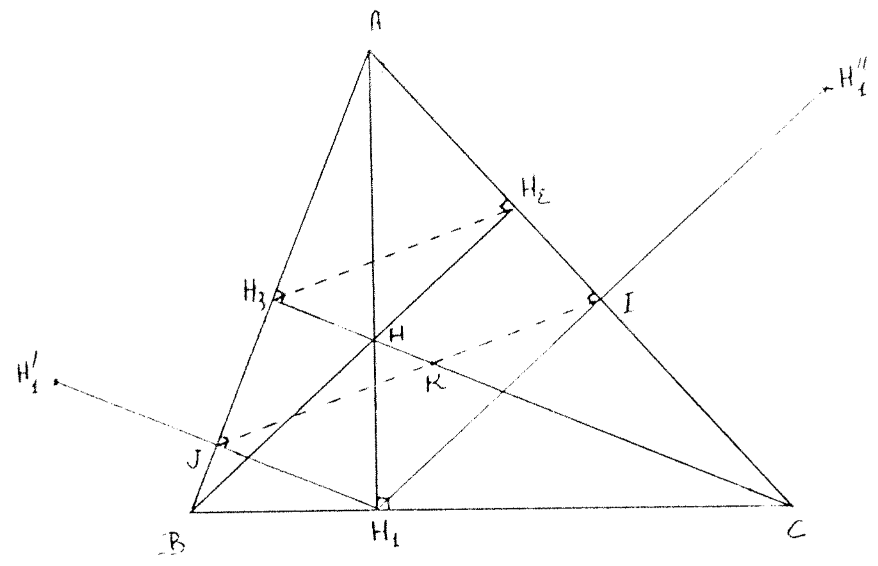
A/1° Soient ABC un triangle dont les angles sont aigus, P un point de [BC], Q un point de [AC], et R un point de [AB].
On désigne par P_1 le symétrique de P par rapport à (AB) et par P_2 le symétrique de P par rapport à (AC). Montrer que le périmètre du triangle PQR est égal à la longueur de la ligne brisée P_1RQP_2.



2° On se donne un point P de [BC] ; construire les points Q et R pour que la longueur de la ligne P_1RQP_2 soit minimale.

3° Calculer la longueur P_1P_2 en fonction de la longueur AP et de sin $\hat{A}$.
En déduire la position P_o du point P puis les positions Q_o et R_o des points Q et R pour que le périmètre de triangle PQR soit minimum.

B/ Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus. On désigne par :
- H_1, H_2, H_3 les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C
- I, J les projetés orthogonaux de H_1 sur (AC) et (AB) respectivement
- K le point d'intersection de (CH_3) et (IJ)
- H'_1 et H''_1 les symétriques de H_1 par rapport à (AB) et (AC).



1° Démontrer que les droites (IJ) et (H_2H_3) sont parallèles.

2° Soit h l'homothétie de centre C qui transforme H_1 en B.
Quelle est l'image de I par h ?
Quelle est l'image de la droite (IJ) par h ?
Quelle est l'image de K par h ?
Quelle est l'image de la droite (KH_1) par h ?

3° En déduire que H_1KH_3J est un parallélogramme.

4° En déduire le rapport de l'homothétie de centre H_1 qui transforme la droite (IJ) en la droite (H_2H_3).

5° Que peut-on alors dire des points H'_1, H_3, H_2, H''_1 ?

C/ Que représentent les points P_o, Q_o et R_o trouvés dans la partie A/ pour le triangle ABC ?

II Des applications

Notations : ABC est un triangle. On désigne par :

* a,b,c les longueurs des côtés opposés à $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$;
* $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ son demi-périmètre ;
* S son aire ;
* R et r les rayons des cercles circonscrits et inscrits ;
* A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [CA], et [AB] ;
* H_1, H_2 et H_3 les pieds des hauteurs issues de A,B et C.

Préliminaire : On rappelle que :

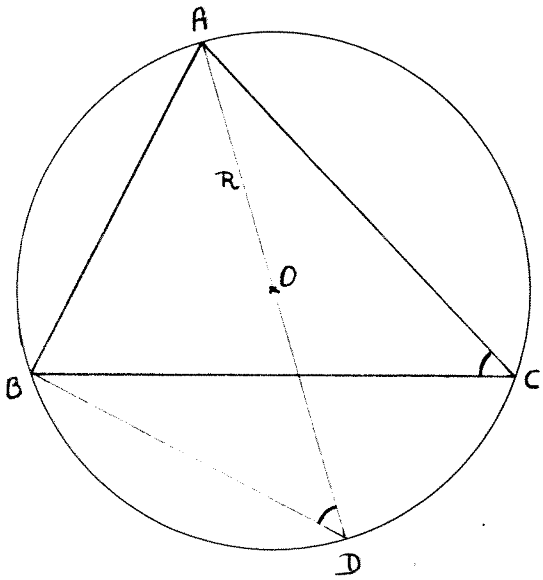
$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} \quad \text{et} \quad S = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

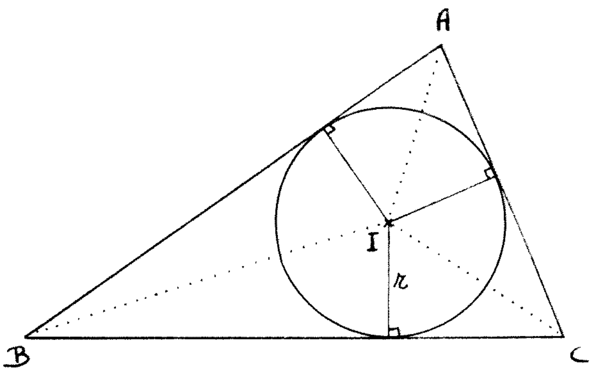
En vous inspirant des dessins ci-dessous en déduire les résultats suivants :

1 $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$

2 $S = \frac{abc}{4R}$

3 $S = pr$





Application 1 :

On note 2p' le périmètre du triangle $H_1H_2H_3$.
Démontrer à l'aide de ce qui a été fait à la question I.A/ que :

$2p' = 2AH_1 \times \sin \hat{A}$

En déduire que $2p' = \frac{2S}{R}$ et $\boxed{\frac{2p'}{r} = \frac{2p}{R}}$

Application 2 : On compare le périmètre de $H_1H_2H_3$ à celui de A'B'C'

D'après la conclusion du problème de Fagnano, on sait que

$$A'B' + B'C' + C'A' \geqslant \frac{2S}{R}$$

En utilisant une des formules préliminaires en déduire que :

$$\boxed{R \geqslant 2r}$$

Existe-t-il un triangle ABC pour lequel on ait l'égalité : R = 2r ?

Application 3 :

On appelle I le centre du cercle inscrit ; D,E et F sont les points de contact de ce cercle avec [AB], [BC] et [CA].

On compare le périmètre de $H_1H_2H_3$ à celui de DEF.

On sait d'après la conclusion du problème de Fagnano que :

$$DE + EF + FD \geqslant \frac{2S}{R}$$

Faire une figure et calculer DE en fonction de r et $\frac{\widehat{B}}{2}$

En déduire DE + EF + FD et démontrer que :

$$\boxed{\cos\frac{\widehat{A}}{2} + \cos\frac{\widehat{B}}{2} + \cos\frac{\widehat{C}}{2} \geqslant \sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} + \sin\widehat{C}}$$

Existe-t-il un triangle ABC pour lequel on ait l'égalité :

$$\cos\frac{\widehat{A}}{2} + \cos\frac{\widehat{B}}{2} + \cos\frac{\widehat{C}}{2} = \sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} + \sin\widehat{C} \ ?$$

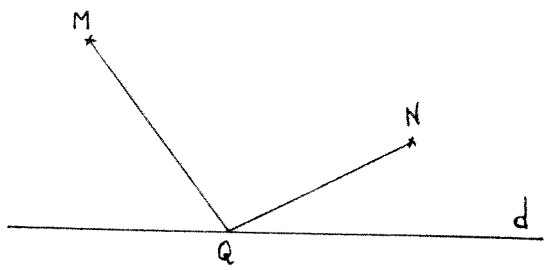
32. LE PROBLEME DE FAGNANO (bis)

En 1775 le comte Giulio Cesare FAGNANO DEI TASCHI a posé le problème suivant :

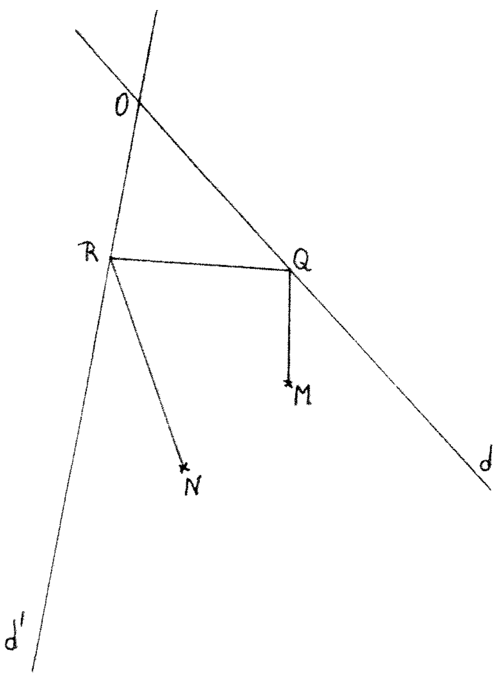
> ABC est un triangle dont les angles sont aigus. Est-il possible de choisir les points P,Q et R respectivement sur [BC], [CA] et [AB] de sorte que le périmètre du triangle PQR soit minimum ?

Une méthode de résolution de ce problème a été donnée dans la fiche précédente. En voici une autre.

1° Soient M et N deux points situés dans le même demi-plan de frontière d. Trouver le chemin MQ + QN minimum, Q étant un point de la droite d.
(Indication : utiliser le point N' image de N dans la symétrie d'axe d).



2° Soient d et d' deux droites sécantes en O, et M et N deux points situés dans l'un des secteurs angulaires aigus formé par les deux droites d et d'.

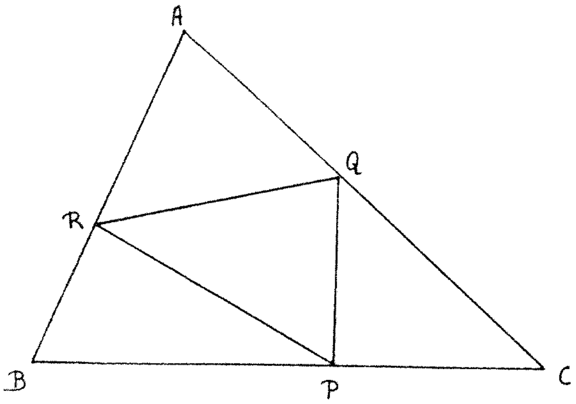


a - Trouver le chemin MQ + QR + RN minimum, M étant un point de la droite d et N un point de la droite d'.

b - Démontrer que ce trajet minimum a la longueur MN" où N" est l'image de N dans la transformation $S_d \circ S_{d'}$ (S_d désigne la symétrie d'axe d et $S_{d'}$ la symétrie d'axe d').

c - Quelle est la transformation $f = S_d \circ S_{d'}$?

3° Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus. On se donne un point P du côté [BC]. Trouver les points Q de [AC] et R de [AB] tels que le périmètre du triangle PQR soit minimum.



(Indication : le point P prend la place des points M et N de la question 2°).

4° a - Calculer en fonction de AP le périmètre du triangle PQR obtenu à la question 3°.

b - Quel est le point P_o de [BC] et quels sont les points Q_o et R_o qui correspondent au triangle $P_oQ_oR_o$ de périmètre minimum ?

5° De tous les triangles PQR, il y en a un qui réalise le minimum du périmètre : $P_oQ_oR_o$.

a - Quelle est la place du point P_o ?

b - En imaginant qu'on reprenne la démonstration en partant du point Q, quelle est la place du point Q_o ?

c - En imaginant qu'on reprenne la démonstration en partant du point R, quelle est la place du point R_o ?

<u>Remarque</u> : l'explication donnée dans cette question n°5 pourrait remplacer le I.B/ de la fiche précédente.

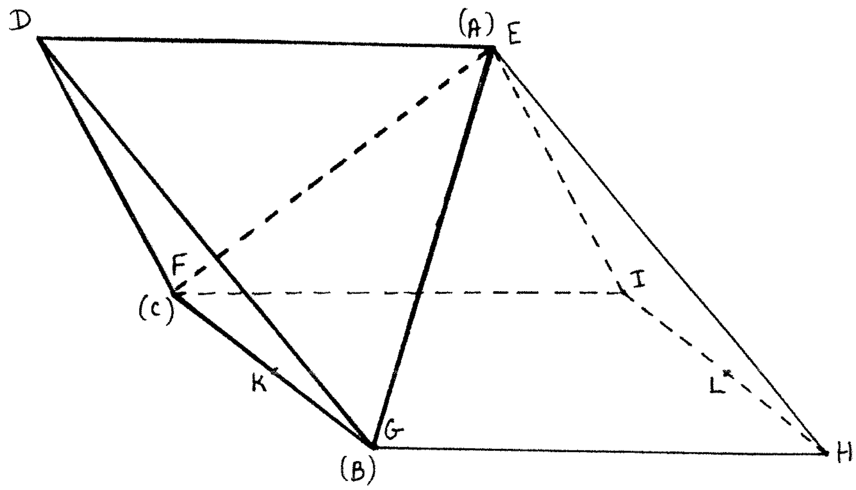
33. "VOIR DANS L'ESPACE"

Enoncé On dispose d'un tétraèdre régulier et d'une pyramide à base carrée, d'arête a. On colle ces deux solides de manière à faire coïncider deux de leurs faces égales.

On fabrique ainsi un nouveau polyèdre.

Combien a-t-il de faces ?

K est milieu de [CB] , et L milieu de [IH] .



- Couper le polyèdre obtenu par le plan médiateur de [IH].

  1° Enumérer tous les points de la figure qui appartiennent à ce plan, et représenter, en géométrie plane, la section du polyèdre par ce plan.

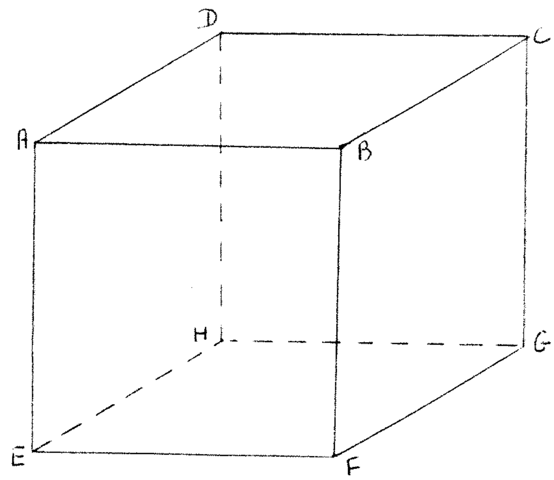
  2° Montrer que cette section est en fait un parallélogramme et en déduire que E, D, G, H d'une part, E, D, F, I d'autre part, sont coplanaires.

  - Quel est alors le nombre de faces du polyèdre obtenu ?

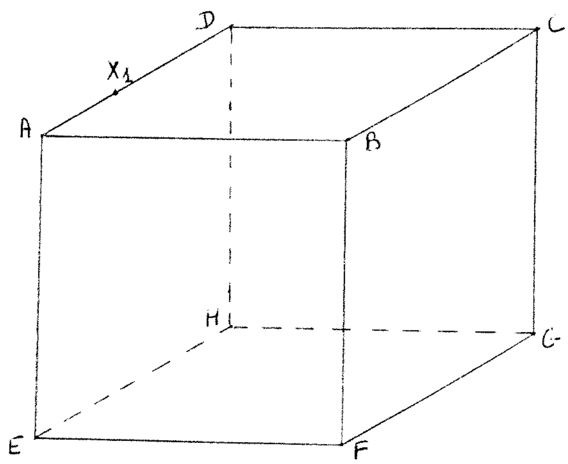
  3° Mettre en évidence (refaire une figure au besoin) la nature de ce polyèdre, ainsi que la nature de chacune de ses faces.

34. DESSINER L'ESPACE

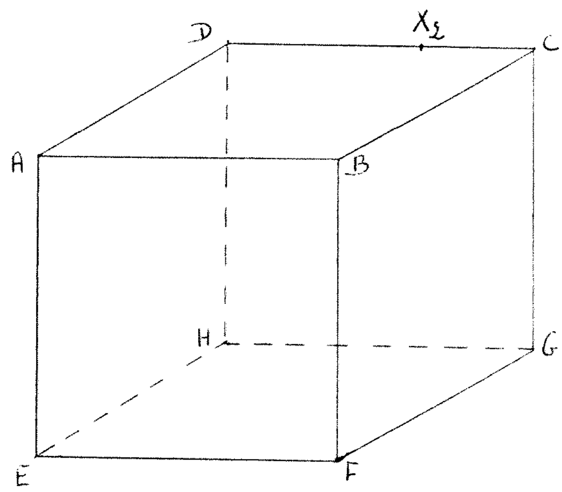
(1) Dessiner l'intersection des plans (DBE) et (CDHG)



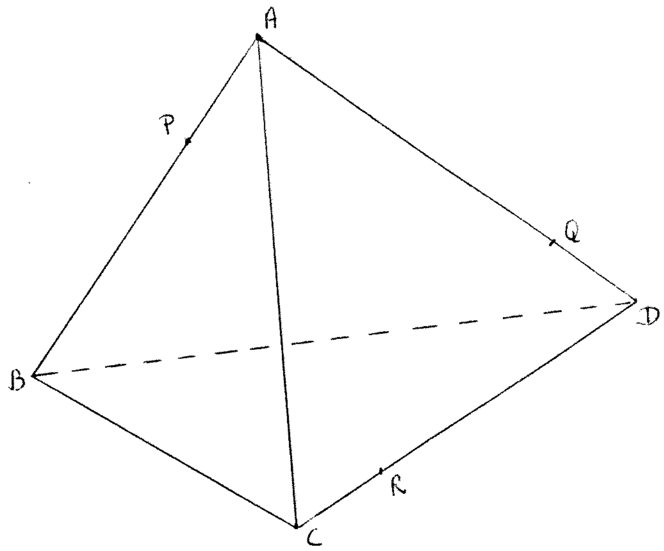
(2) Dessiner les contours de l'intersection du cube avec le plan parallèle à (DBE) passant par X_1.



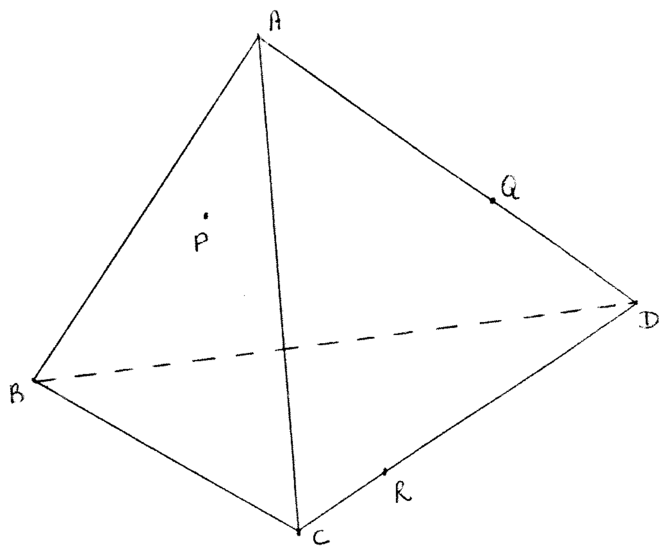
(3) Dessiner les contours de l'intersection du cube avec le plan parallèle à (DBE) passant par X_2.



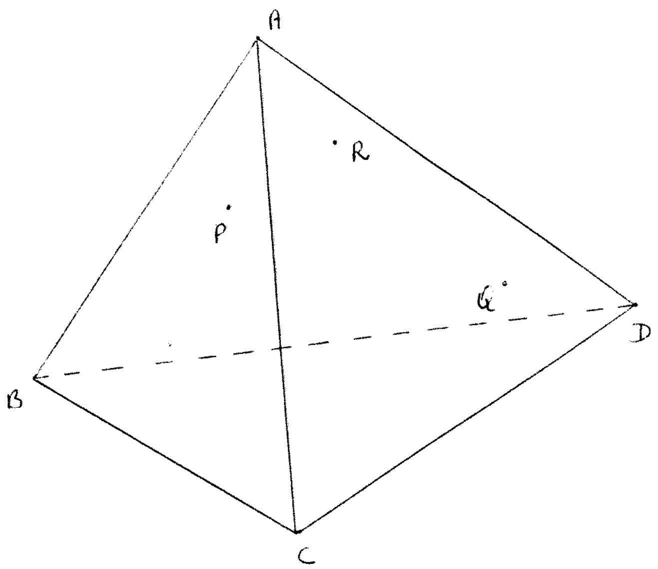
(4) Dessiner les contours de l'intersection du plan (PQR) et du tétraèdre ABCD.



(5) P est sur la face (ABC). Dessiner les contours de l'intersection du plan (PQR) et du tétraèdre ABCD.

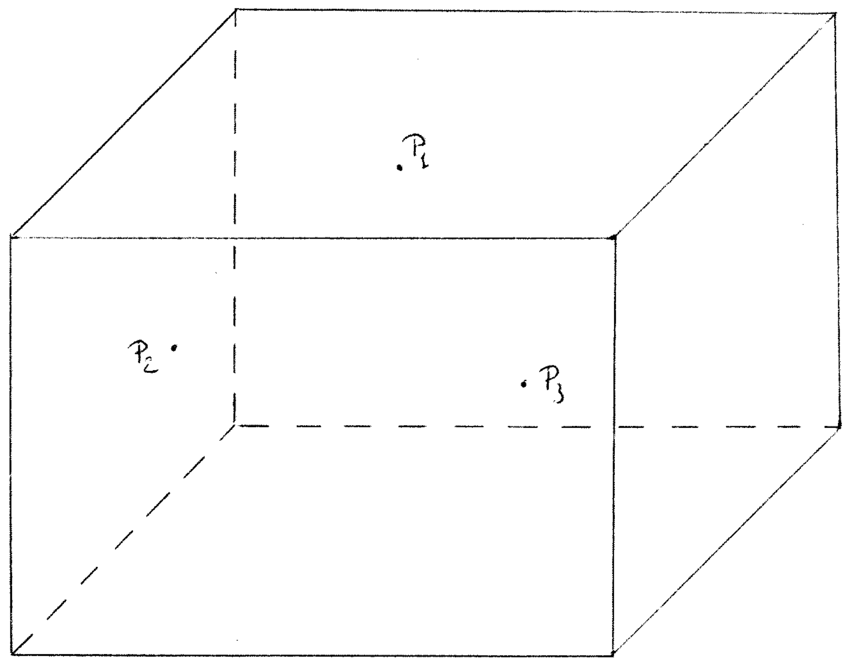


(6) P est sur la face ABC, Q est sur la face ACD, R est sur la face ABD. Dessiner les contours de l'intersection du plan (PQR) et du tétraèdre ABCD.



(7) Un bloc de bois a la forme d'un pavé. Sur 3 de ses faces ayant un sommet commun, on marque un point. On se propose de scier le bloc de bois suivant le plan passant par ces 3 points.

Trouver une construction géométrique du contour de la section sur le parallélépipède.



Soient P_1, P_2, P_3 les points marqués respectivement sour les faces notées F_1, F_2, F_3. On désigne par le plan $(P_1\ P_2\ P_3)$.

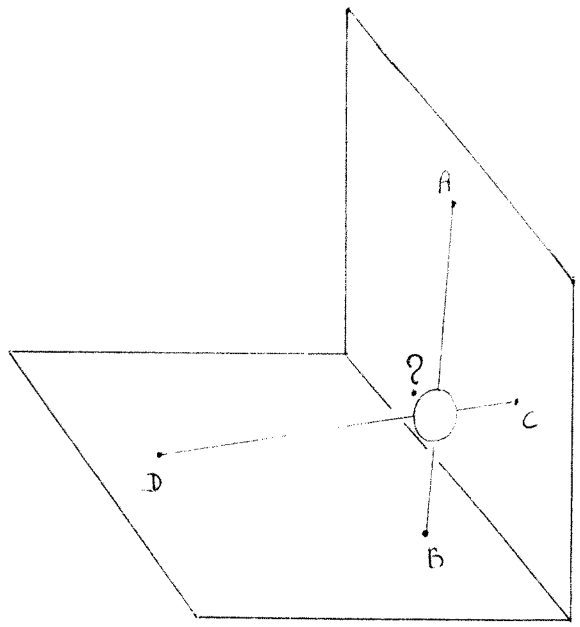
1° En supposant par exemple que $(P_1\ P_3)$ n'est pas parallèle à F_2, rechercher rechercher une construction de $(P'_1\ P'_3)$, image de $(P_1\ P_3)$ par projection orthogonale sur F_2.

En déduire l'intersection R de $(P_1 P_3)$ et F_2.

2° Terminer la construction de la section du parallélépipède par le plan

3° Comment résoudre le problème si $(P_1 P_3)$ est parallèle à F_2 ?

(8) Compléter le dessin de manière à indiquer clairement quelle droite se trouve devant l'autre.

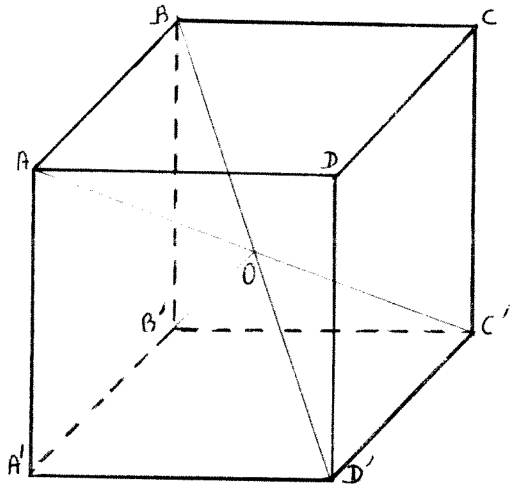


35 CALCULS DE DISTANCES ET D'ANGLES EN GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Problème : Trouver pour chacun des polyèdres réguliers de PLATON le centre de la sphère circonscrite à ce polyèdre ainsi que son rayon, les angles au centre définis par deux sommets du polyèdre, consécutifs ou non, et l'angle de deux faces adjacentes du polyèdre.

1 LE CUBE

On prend comme unité la longueur de l'arête.



Le point d'intersection des diagonales du cube est centre de la sphère circonscrite à ce cube.

Question 1 : Le démontrer et en déduire le rayon R de cette sphère.

* Les angles au centre à calculer sont : $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$, $\widehat{AOC'}$

Question 2 : Calculer l'angle $\widehat{AOB}$. (Indication : On peut déterminer cos $\widehat{AOB}$ en se plaçant dans le triangle AOB dont les côtés sont connus). En déduire l'angle $\widehat{AOC}$. Que vaut l'angle $\widehat{AOC'}$?

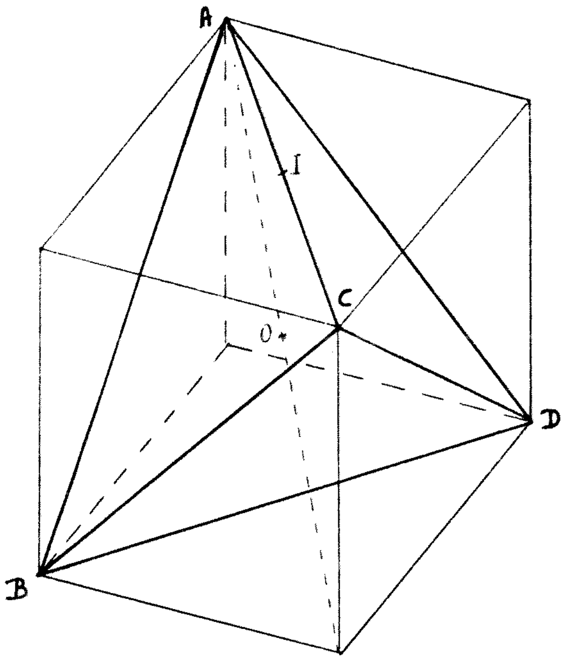
* L'angle de deux faces adjacentes du cube est l'angle obtenu en menant par un point de l'arête commune les perpendiculaires à cette arête dans les plans des faces.

Question 3 : Montrer que l'angle BAA' correspond à l'angle des faces ABCD et AA'D'D.

Quel est cet angle ?

2 LE TETRAEDRE

On prend comme unité la longueur de l'arête. Le problème peut être traité directement dans un tétraèdre régulier ABCD, mais on se simplifie la tâche en considérant ce tétraèdre inscrit dans un cube comme l'indique la figure ci-dessous.



* Le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre est celui de la sphère circonscrite au cube. Soit O ce centre.

Question 1 : Calculer l'arête du cube et en déduire le rayon R_2 de la sphère circonscrite au tétraèdre.

* Les angles au centre ont tous même mesure :

$$\widehat{AOB} = \widehat{AOC} = \widehat{AOD} = \widehat{BOC} = \widehat{BOD} = \widehat{COD}$$

Question 2 : Calculer $\widehat{AOB}$

(Indication : on peut déterminer cos $\widehat{AOB}$ en se plaçant dans le triangle AOB ou en calculant $(\vec{OA} + \vec{OB})^2$.

* L'angle de deux faces adjacentes du tétraèdre est l'angle obtenu en menant par un point d'une arête les perpendiculaires à cette arête dans les plans des faces.

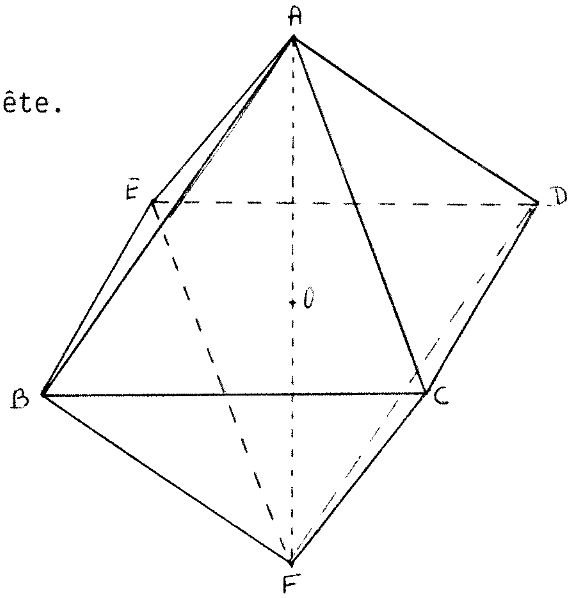
Question 3 : Soit I le milieu de [AC]

1° Montrer que l'angle $\widehat{BID}$ correspond à l'angle des faces ABC et ADC.

2° Calculer l'angle $\widehat{BID}$.

3 L'OCTAEDRE

On prend comme unité la longueur de l'arête.



Question 1 Démontrer que les points B,C,D et E appartiennent au plan médiateur de [AF] , puis que les quadrilatères BCDE et ACFE sont les carrés.

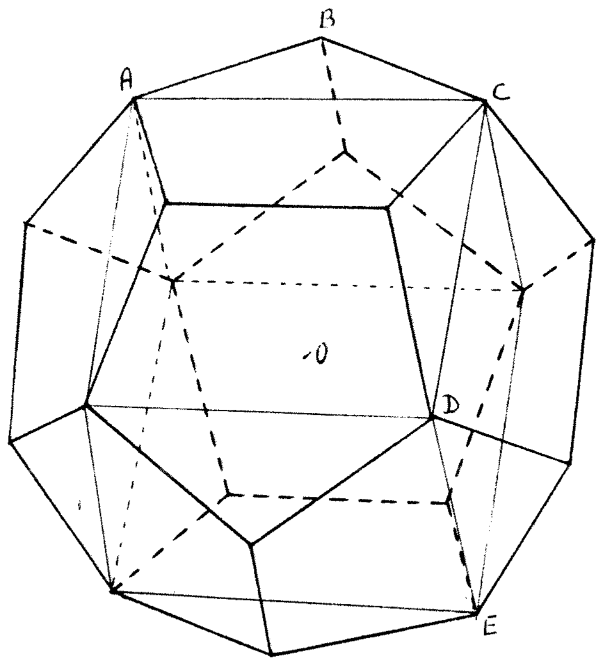
Question 2 : Quel est le centre de la sphère circonscrite à l'octaèdre ? Calculer le rayon R_3 de cette sphère.

Question 3 : Calculer les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOD}$.

Question 4 : Calculer l'angle de deux faces adjacentes de l'octaèdre.

4 LE DODECAEDRE

On prend comme unité la longueur de l'arête



* On peut inscrire dans le dodécaèdre un cube d'arête d, diagonale d'une des faces, et on sait que $d = \Phi$ (Φ = nombre d'or). Le dodécèdre et le cube ont la même sphère circonscrite.

Question 1 : Calculer le rayon R_4 de la sphère circonscrite au dodécaèdre en fonction de Φ .

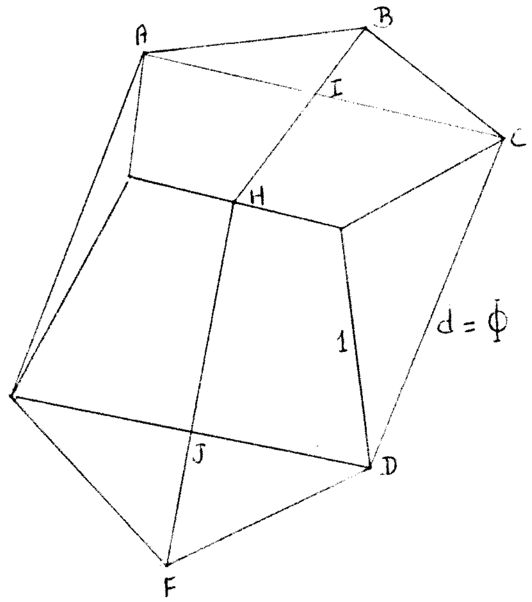
* Les angles au centre à calculer sont :

$\widehat{AOB}$, $\widehat{AOC}$, $\widehat{AOD}$ et $\widehat{AOE}$

Question 2 : Calculer les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{AOC}$.
En déduire $\widehat{AOD}$ et déterminer $\widehat{AOE}$.

* Pour le calcul des angles de deux faces adjacentes, on considérera que le dodécaèdre est la réunion d'un cube d'arête $d = \Phi$ et de six "toits" (voir dessin).
Ainsi, l'angle de deux faces adjacentes sera :

$$\widehat{BHF} = \widehat{IHJ}$$



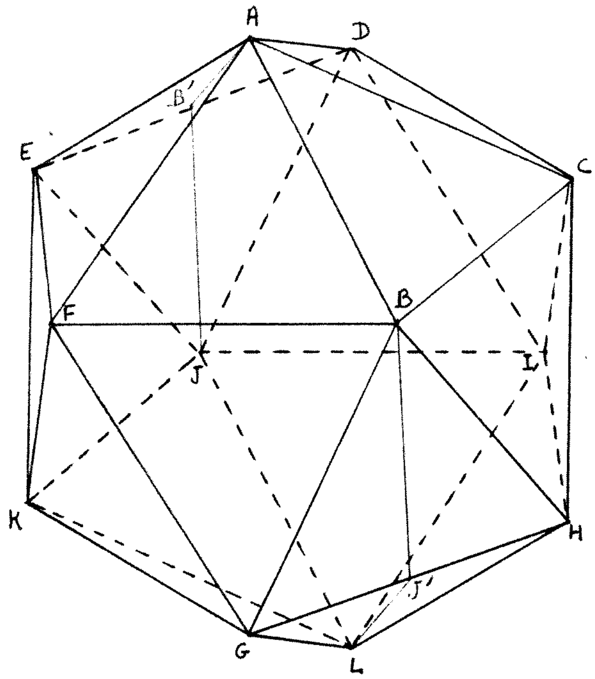
Question 3 : Montrer en utilisant la relation $\Phi^2 = \Phi + 1$, que

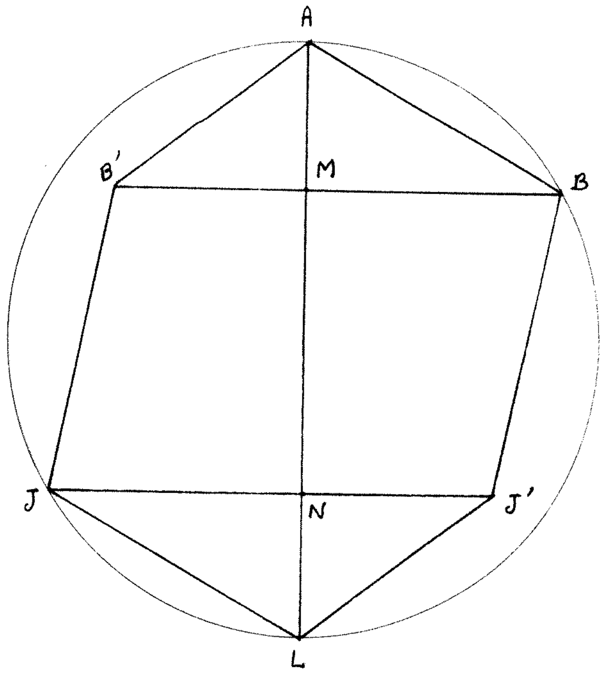
$$IH^2 = 1 - \left(\frac{\Phi - 1}{2}\right)^2 = \frac{\Phi^2 + 1}{4}$$

Question 4 : En déduire que $\cos \widehat{IHJ} = \left(1 - \frac{2\Phi^2}{1 + \Phi^2}\right) = \frac{1 - \Phi^2}{1 + \Phi^2}$

Déterminer alors $\widehat{IHJ}$.

5 L'ICOSAEDRE





. Il est réunion de 20 tétraèdres, chacun d'eux ayant pour base une face de l'icosaèdre et pour 4ème sommet le centre de la sphère circonscrite.

. La section de l'icosaèdre par un plan de symétrie est un hexagone dont deux côtés sont des arêtes de l'icosaèdre, et les quatre autres des hauteurs de triangles équilatéraux.

. Le cercle intersection de la sphère circonscrite à l'icosaèdre et du plan de symétrie a pour diamètre [AL] , la droite (AL) coupant le plan du pentagone BCDEF en M et celui de GHIJK en N.

Question 1 : Calculer les longueurs AM, MN et NL.

En déduire que le rayon de la sphère circonscrite est :

$$R_5 = \frac{1}{2} \times \frac{3\Phi + 1}{\sqrt{4\Phi + 3}}$$

. Pour le calcul des angles, il faudra déterminer $\widehat{AOB}$, $\widehat{AOH} = \widehat{BOL}$, et $\widehat{AOL}$.

<u>Question 2</u> :

- Montrer que $\cos \widehat{AOB} = 1 - \dfrac{1}{2R_5^{\,2}}$, et en déduire $\widehat{AOB}$.
- En déduire $\widehat{AOH}$
- Calculer $\widehat{AOL}$

<u>Question 3</u> :

- Vérifier que l'angle de deux faces adjacentes est $\widehat{BJ'L}$, et montrer que :

  $\cos \widehat{BJ'L} = 1 - \dfrac{2}{3}\,(4R_5^{\,2} - 1)$

- Déterminer ainsi $\widehat{BJ'L}$

36 LES TRONCATURES DU CUBE

Quand on coupe les "coins" du cube initial d'arête a, par un plan perpendiculaire à une diagonale du cube, on "remplace" chaque sommet par un petit triangle équilatéral, ou éventuellement par un hexagone (voir fiche précédente).

On ne s'intéressera ici qu'aux cas où la section est un triangle.

C'est cette opération qu'on appellera "tronquer" le cube (troncature)
On ne retiendra désormais que le cas où les polyèdres obtenus ont des arêtes de même longueur.

1° Le premier polyèdre obtenu est le **cube tronqué**

- a - Dans ce polyèdre, que sont devenus les "restes" des faces carrées du cube ?

- b - Dessiner un de ces polygones et calculer en fonction de a la longueur de l'arête du cube tronqué.

- c - Calculer le volume du cube tronqué en fonction du volume V_0 du cube initial.

2° En coupant davantage les "coins", vous faites grandir les triangles équilatéraux. Il arrive un moment où les triangles correspondant à deux sommets consécutifs du cube ont un sommet commun : c'est le **cuboctaèdre**

- a - Calculer son arête en fonction de l'arête a du cube initial.

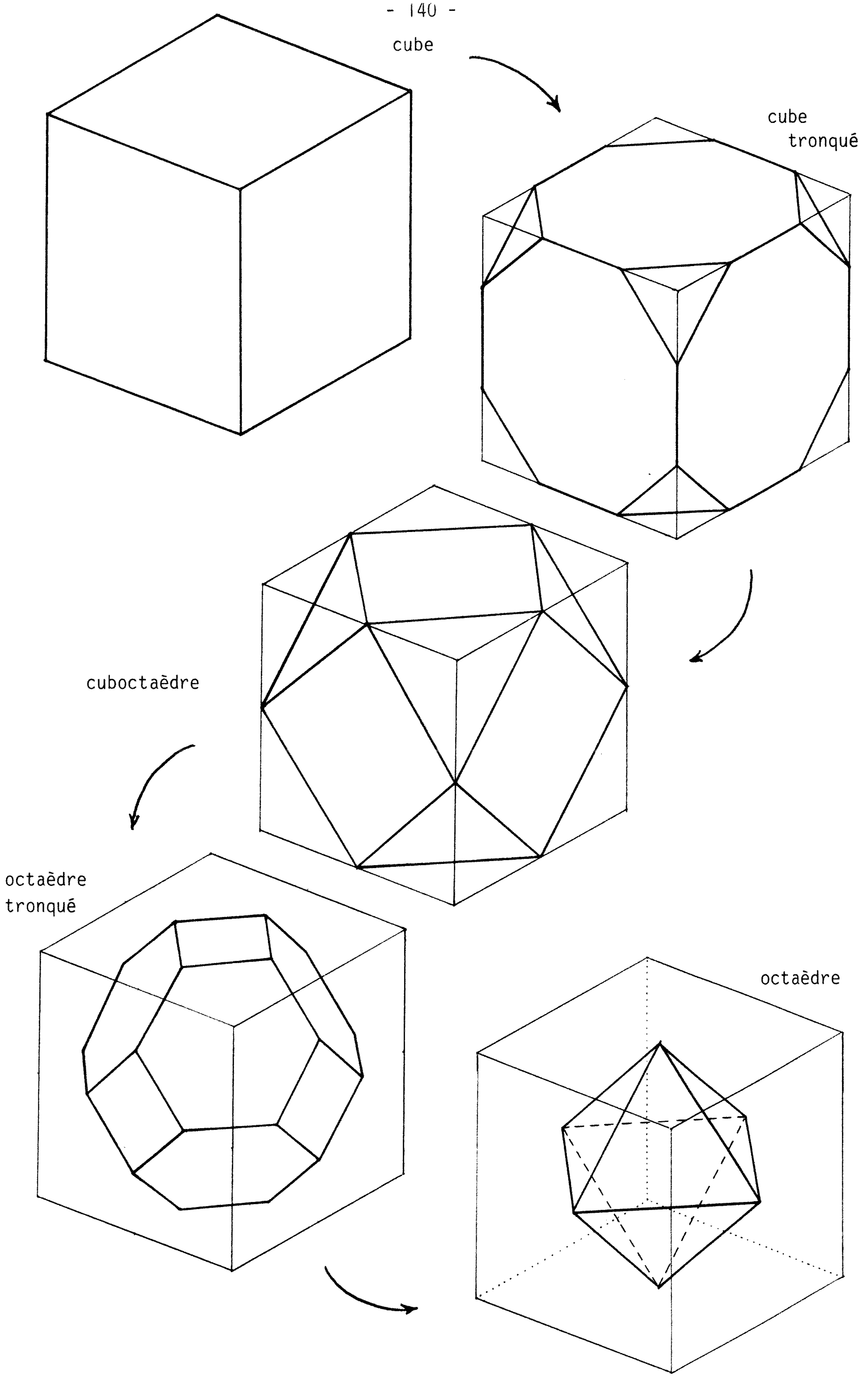
- b - Calculer son volume en fonction du volume V_0 du cube initial.

3° En coupant plus avant les coins du cube, les carrés restant sur les faces du cube s'amenuisent et les milieux des arêtes sont remplacés par des segments.

- a - Quelle est la nature des faces du polyèdre obtenu ?
  Ce polyèdre est un **octaèdre tronqué**

- b - Calculer son arête

- c - Calculer son volume en fonction de V_0 .


cube
cube
tronqué
cuboctaèdre
octaèdre
tronqué
octaèdre

4° Lorsque les restes des faces carrées du cube initial "disparaissent", il reste $\boxed{\text{l'octaèdre régulier}}$

- a - Quelle est la nature de ses faces ?

- b - Quelle est son arête ?

- c - Quel est son volume en fonction de V_o ?

5° Compléter le tableau suivant :

Polyèdres	F nombre de faces	A nombre d'arêtes	S nombre de sommets	nom des faces	code sommet	arête	volume
cube					4-4-4	a	
cube tronqué							
cuboctaèdre							
octaèdre tronqué							
octaèdre							

Remarque : le code sommet donne le nombre de côtés de chaque face en tournant autour d'un sommet.

6° Reprendre le cuboctaèdre obtenu au 2° et démontrer qu'il est possible :

1) de placer douze sphères de même rayon, chacune ayant son centre à un sommet du cuboctaèdre et étant tangente à ses quatre voisines

2) de placer au centre une autre sphère ayant même rayon que les douze précédentes et tangente à chacune d'entre elles.

Remarques :

- En 1952, Von der Woerden et Schütte ont démontré qu'on ne peut pas entourer une boule de treize autres boules de sa taille qui la touchent.

- La disposition donnée ci-dessus n'est pas la seule permettant de placer douze boules de même taille que la boule centrale et qui l'entourent et la touchent.

3) Donner la coupe du cuboctaèdre et des 13 sphères par le plan (ADHL), puis celle par le plan (BDI).