I.R.E.M. DE STRASBOURG-1991

LOGIQUE

ET

RAISONNEMENT MATHEMATIQUE

DOCUMENT A L'USAGE

DES ELEVES ET ETUDIANTS SCIENTIFIQUES

PAR

EL FAQIH EL Mekki

GUIDE DE LECTURE

"La logique n'est pas plus la mathématique que les accélérateurs atomiques ne sont la physique nucléaire ; si vous êtes suffisamment inventif pour imaginer une démonstration, elle vous aidera à l'élaborer, tout comme le physicien nucléaire a besoin d'appareils complexes et coûteux pour montrer que ses idées sur la nature des forces atomiques sont correctes. Dans les deux cas, l'imagination est toujours l'irremplaçable étincelle de départ."

Jean A. DIEUDONNE

1- Pourquoi ce document ?

Votre activité mathématique ne vous sera réellement bénéfique que si vous y *participez activement.* C'est un peu comme la natation, pour apprendre à nager, il faut se mettre à l'eau. En mathématiques, *on comprend mieux ce qu'on fait soi-même et on ne découvre le plaisir que procure l'activité mathématique qu'à travers la résolution des exercices et problèmes.*

Mais, il se trouve que, par la nature même des mathématiques, ce plaisir réside dans leur difficulté : *un exercice mathématique qui ne présente aucune difficulté n'est pas un exercice !*

Ainsi, vous serez, lors de votre activité mathématique, confrontés à des difficultés diverses. Cela n'a rien d'exceptionnel. Cependant, certaines de ces difficultés pourraient provenir tout simplement de certaines lacunes dans vos connaissances. *C'est le cas, en particulier, des difficultés de type logique.*

En effet, l'activité mathématique est une sorte de jeu. *Et s'il est clair que la seule connaissance des règles du jeu ne suffit pas pour être un bon joueur, leur méconnaissance pourrait, en revanche, être un handicap.* Or, en mathématiques, certaines des règles du jeu sont fournies par la logique mathématique.

Voici un exemple simple qui rend compte de manière très claire de notre propos. Considérons l'exercice suivant :

"Soient a, b des réels. Démontrez que si ($a \neq -1$ et $b \neq -1$), alors ($a + ab + b \neq -1$)."

Cet exercice pourrait vous sembler inabordable, alors qu'il devient vraiment trivial du moment où l'on en saisit la clé logique (voir exercice 5, p. 18).

Ainsi, un minimum de connaissances en logique pourrait, dans bon nombre de *situations courantes en mathématique*, vous être d'une grande utilité.

C'est, justement, dans cette perspective que s'inscrit le présent document. Il a pour objectif de vous aider à combler vos lacunes éventuelles en logique mathématique.

2- Quel usage en faire ?

Dans ce fascicule, nous vous présentons certains éléments de logique correspondant à des *connaissances de base en logique mathématique*, et sont donc fort susceptibes de vous servir dans votre *activité mathématique courante* (en algèbre, en analyse, en géométrie,...).

D'une manière plus précise, ce document comporte deux parties :

- une partie intitulée "Eléments de logique", où l'on vous présente un certain *vocabulaire* souvent utilisé en mathématiqe (et, ou, implication, équivalence, ...) à côté d'un certain nombre de *lois logiques*, elles aussi, d'usage courant en mathématique (calcul sur la négation, échange des quantificateurs, ...).

- une deuxième partie consacrée, quant à elle, aux *méthodes de démonstration mathématique* (méthode du contre-exemple, raisonnement par récurrence, raisonnement par l'absurde,...).

Dans l'une et l'autre de ces parties, nous insistons surtout sur les *aspects pratiques* et sur le *mode de fonctionnement* des éléments de logique qui y sont présentés. Nous avons, en plus, tenu à ce que *les exemples soient d'un contenu mathématique simple.*

Ce cours n'est pas à apprendre par cœur. Voici quelques indications concernant son utilisation :

1°) Commencez par *prendre connaissance*, moyennant une première lecture, du contenu du document (quels sont les différents éléments dont on y parle).

2°) après cette première lecture, vous reviendrez sur les différents éléments, un à un, avec l'intention de *comprendre* et ce

- *en établissant le lien entre les définitions et les principes d'une part, et les exemples correspondants, d'autre part ;*

- *en lisant, attentivement, les remarques et les notes accompagnant les définitions, les principes, et les exemples ;*

- *en traitant les exercices proposés à la fin du document (pp.17-18).*

Cela dit, l'essentiel restera de *mettre en œuvre* ces connaissances en logique dans votre *activité mathématique courante*. Ainsi, vous aurez sans doute recours à ce document en *révisant vos différents cours* (d'algèbre, d'analyse,...) et en *traitant vos exercices* (TD, devoirs à la maison,...). C'est de cette manière que vous parviendrez à assimiler, de mieux en mieux, les constituants de ce cours de logique et *vous finirez par l'intégrer à vos connaissances mathématiques* (d'une manière générale, pour bien assimiler un contenu mathématique, quel qu'il soit, le mieux c'est de le *faire fonctionner* !).

Enfin, si ce document vous offre un outil susceptible de vous aider à maîtriser votre raisonnement mathématique, votre initiative et votre imagination resteront toujours la clé de votre réussite en mathématique.

***Remarque** : La partie "Exercices" commence par un commentaire d'ordre pratique, lisez-le attentivement !*

COURS DE LOGIQUE

PREMIERE PARTIE

ELEMENTS DE LOGIQUE

A- CALCUL DES PROPOSITIONS.

1- Qu'est-ce qu'une proposition mathématique ?

En mathématique, on appelle *proposition* toute expression correctement formée, ayant un sens et à laquelle on peut, sans ambiguïté, attribuer la "valeur" *vrai* ou la "valeur" *faux.*

Exemples : a) "L'entier 3 est un nombre impair " est une proposition (vraie) ;
b) "Le nombre 5 divise 8" est une proposition (fausse) ;
c) "L'entier 5 est dérivable par 8" n'est pas une proposition (pas de sens).

N.B : Nous représentons souvent une proposition par une seule lettre : p, q, r ...

2- Négation d'une proposition.

*La **négation** d'une proposition p est une proposition qui est **vraie** si p est **fausse**, **fausse** si p est **vraie**.*

Notation : On désignera par "non p" la négation de p.

Exemples : a) p : "L'entier 5 divise 6"(fausse) non p : "L'entier 5 ne divise pas 6"(vraie) ;
b) q : "L'entier 2 est pair" (vraie) non q : "L'entier 2 est impair" (fausse).

Remarques : i) Ainsi, pour montrer que p est vraie (resp. fausse), il suffit de montrer que sa négation (non p) est fausse (resp. vraie).
ii) Notez que dans l'exemple b) ci-dessus, nous avons traduit la négation "L'entier 2 n'est pas pair" sous une forme positive "L'entier 2 est impair". Dans la pratique mathématique, vous aurez souvent intérêt à exprimer une négation sous forme entièrement positive.

3- Conjonction de deux propositions.

Définition : *Soient p, q deux propositions. La **conjonction** de p et de q est la proposition vraie dans le seul cas où p et q sont **toutes deux** vraies, fausse dans tous les autres cas.*

Notation : On désignera par "p et q" (ou par "$p \wedge q$") la conjonction de p et de q.

Exemples : a) p : "Le nombre 9 est premier " (fausse) q : "L'entier 2 est pair " (vraie)
p et q : "Le nombre 9 est premier et l'entier 2 est pair" (fausse).

b) (exemple tiré de l'algèbre linéaire)

Soit une famille $\mathfrak{F}$ d'éléments d'un espace vectoriel E.

p : "La famille $\mathfrak{F}$ est libre" q : "La famille $\mathfrak{F}$ est génératrice"

p et q : "La famille $\mathfrak{F}$ est une base"

N.B : Soient E un ensemble, A et B deux parties de E. L'intersection de A et B est l'ensemble

$$A \cap B = \{x \in E \; ; \; x \in A \text{ et } x \in B\}$$

4- Disjonction de deux propositions.

Définition : *Soient p, q deux propositions. La* ***disjonction*** *de p et de q est la proposition vraie si* ***l'une au moins*** *des propositions p, q est vraie, fausse si p et q sont toutes deux fausses.*

Notation : On désignera par "p ou q" (ou par "$p \vee q$") la disjonction de p et de q.

Exemples : a) p : "L'entier 7 est divisible par 2"(fausse) q : "L'entier 4 est pair"(vraie)

p ou q : "L'entier 7 est divisible par 2 ou l'entier 4 est pair" (vraie)

b) Soient A et B deux parties d'un ensemble E et $x \in E$.

p : "$x \in A$" q : "$x \in B$"

p ou q : "$x \in A \cup B$"

N.B : Soient A et B deux parties d'un ensemble E. La réunion de A et B est l'ensemble

$$A \cup B = \{x \in E \; ; \; x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

5- Quelques règles de "calcul".

Les propriétés ci-après sont très utiles pour "calculer" sur des propositions.

Soient p, q, r trois propositions. On a :

* non (p et q) $\vdash\!\!\dashv$ non p ou non q * non (p ou q) $\vdash\!\!\dashv$ (non p) et (non q)

($\vdash\!\!\dashv$ se lit :"est synonyme de")

* non(non p) $\vdash\!\!\dashv$ p

* p ou q $\vdash\!\!\dashv$ q ou p * p et q $\vdash\!\!\dashv$ q et p

* (p ou q) et r $\vdash\!\!\dashv$ (p et r) ou (q et r) * (p et q) ou r $\vdash\!\!\dashv$ (p ou r) et (q ou r)

B- LES QUANTIFICATEURS.

Soient E un ensemble et p(x) une propriété dépendant de x, $x \in E$ (on dit aussi un prédicat dans E à une variable x). Considérons le sous-ensemble suivant :

$$E_p = \{x \in E \; ; \; p(x)\}$$

(lire : «E_p est l'ensemble des éléments $x \in E$ vérifiant p(x)»).

1- Quantificateur universel

Si $E_p = E$, c'est à dire si tous les éléments de E vérifient p(x), on écrira :

$$(\forall\ x \in E)\ p(x) \quad \text{ou encore : } \forall\ x \in E,\ p(x)$$

(lire : «quel que soit $x \in E$, on a p(x)» ou : «pour tout $x \in E$, on a p(x)»)

Exemple : $(\forall\ x \in \mathbb{R})\ x^2 + x + 1 > 0$.

2- Quantificateur existentiel.

Si $E_p \neq \varnothing$, c'est-à-dire s'il existe au moins un élément $x \in E$ qui vérifie p(x) , on écrira :

$$(\exists\ x \in E)\ p(x)$$

(lire : «il existe au moins un $x \in E$ tel que p(x)» ou : «pour au moins un $x \in E$, x vérifie p(x)»).

Exemple : $(\exists\ n \in \mathbb{N})\ 2^n < n^2$ (n = 3, par exemple).

NOTE : Dans un texte mathématique, "**il existe un...**" signifie "**il existe au moins un ...**"

3- Interversion de quantificateurs.

On ne change pas le sens d'une expression en intervertissant deux quantificateurs de *même nature consécutifs*.

En général, si on intervertit deux quantificateurs de *natures différentes*, le sens de l'expression change.

Exemples : Echange de quantificateurs de même nature :

$$((\forall\ x \in \mathbb{R})\ (\forall\ y \in \mathbb{R})\ x + y = y + x\ ) \longleftrightarrow ((\forall\ y \in \mathbb{R})\ (\forall\ x \in \mathbb{R})\ x + y = y + x\ )$$

$$((\exists\ n \in \mathbb{N})\ (\exists\ m \in \mathbb{N})\ n + m = 1) \longleftrightarrow ((\exists\ m \in \mathbb{N})\ (\exists\ n \in \mathbb{N})\ n + m = 1\ )$$

Echange de quantificateurs de natures différentes :

$(\forall\ x \in \mathbb{R})\ (\exists\ y \in \mathbb{R})\ x + y = 0$ est vraie, alors que $(\exists\ y \in \mathbb{R})\ (\forall\ x \in \mathbb{R})\ x + y = 0$ est fausse.

Dans la première proposition, y dépend de x, mais dans la seconde, y doit être **indépendant** de x.

4- Négation et quantificateurs.

La négation de :	$(\forall\ x \in E)\ p(x)$	est :	$(\exists\ x \in E)$ (non p(x)),
la négation de :	$(\exists\ x \in E)\ p(x)$	est :	$(\forall\ x \in E)$ (non p(x)).

Exemple. Soient E et F deux ensembles, f et g deux applications de E dans F. On sait que

$$f = g \longleftrightarrow (\forall\ x \in E)\ f(x) = g(x).$$

On en déduit que

$$f \neq g \longleftrightarrow (\exists\ x \in E)\ f(x) \neq g(x).$$

C- IMPLICATION LOGIQUE - EQUIVALENCE LOGIQUE

1- Implication logique.

Définition : *Soient p, q deux propositions quelconques. L'implication "p ⇒ q" est, par définition, la proposition "(non p) ou q".*

La table suivante (dite table de vérité de l'implication p ⇒ q) vous permettra de voir dans quels cas la proposition "p ⇒ q" est vraie et dans quels cas elle est fausse :

p	q	non p	p ⇒ q
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

(V = Vraie, F = Fausse)

Ainsi, on constate que "p ⇒ q" est fausse dans le seul cas où p est vraie et q est fausse, et qu'elle est vraie dans tous les autres cas (**en particulier si p est fausse**).

Remarques : i) p ⇒ q se lit «p implication q» ou encore « si p, alors q»

ii) La négation de " **p ⇒ q** " est la proposition " **p et (non q)** ". En effet :

$p \Rightarrow q \dashv\vdash$ (non p) ou q

d'où : non (p ⇒ q) $\dashv\vdash$ p et (non q) (appliquez les règles de calcul)

Exemple en algèbre linéaire. : Soit E un espace vectoriel et u_1 , u_2 , ..., u_s des vecteurs de E. On dit que les vecteurs u_1, u_2 , ..., u_s sont linéairement indépendants si :

$(\forall(\alpha_1, \alpha_2 ,..., \alpha_s)\in\mathbb{R}^s)\ (\alpha_1 u_1 + \alpha_2\ u_2 +.. + \alpha_s u_s = 0_E \Rightarrow (\alpha_1 =0)\wedge(\alpha_2 =0)\wedge...\wedge(\alpha_s = 0))$

Il s'en suit que u_1 , u_2 , ..., u_s seront linéairement dépendants si :

$(\exists(\alpha_1, \alpha_2 ,..., \alpha_s)\in\mathbb{R}^s)\ (\alpha_1 u_1 + \alpha_2\ u_2 +.. + \alpha_s u_s = 0_E$ et $(\alpha_1\neq 0)\vee(\alpha_2 \neq 0) \vee...\vee(\alpha_s\neq 0))$

iii) **Dans la pratique, pour démontrer qu'une implication "p ⇒ q" est vraie, il suffit de supposer que p est vraie et de démontrer alors que q est vraie aussi (l'écriture sous la forme «(non p) ou q » est souvent inutile dès lors que l'on sait nier "p ⇒ q")**

iv) En mathématiques, les expressions "**Pour que p, il faut q**" et "**pour que q, il suffit que p**" expriment toutes deux la même implication "**p ⇒ q**" (notez l'ordre des propositions p et q).

v) A partir d'une implication "p ⇒ q" on peut construire :

- sa réciproque "q ⇒ p" (à ne pas confondre avec"p ⇒ q")
- sa contraposée: "non q ⇒ non p"

Et on démontre que : q ⇒ p $\dashv\vdash$ non q ⇒ non p

Ainsi, il revient au même de démontrer une implication ou sa contraposée (voir : méthodes de démonstration)

vi) Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Démontrer que A ⊂ B revient à établir la proposition : $(\forall\ x\in E)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$

2- *Equivalence logique.*

Définition : *Soient p, q deux propositions. On définit l'équivalence logique de p et de q comme étant la conjonction de "$p \Rightarrow q$" et de sa réciproque "$q \Rightarrow p$".*

Notation : On notera $p \Leftrightarrow q$ l'équivalence de p et q.

La table de vérité de "$p \Leftrightarrow q$" montre qu'elle est vraie si p et q sont toutes deux vraies ou si p et q sont toutes deux fausses, et qu'elle est fausse dans les autres cas.

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

(table de vérité de : $p \Leftrightarrow q$)

Remarques : i) Souvent, dans les textes mathématiques, on exprime l'équivalence "$p \Leftrightarrow q$" par : "p si et seulement si q" ou encore par "pour que p, il faut et il suffit que q".
(Voir aussi le paragraphe sur les conditions nécessaires et suffisantes dans "Méthodes de démonstration")

ii) Soient p, q deux propositions, on a : $p \Leftrightarrow q \longmapsto q \Leftrightarrow p$

iii) Soient A et B deux parties d'un ensemble E. Par définition

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ et } B \subset A$$

Ainsi, démontrer que A = B revient à établir les deux propositions :

$$(\forall x \in E)\ (x \in A \Rightarrow x \in B), \quad (\forall x \in E)\ (x \in B \Rightarrow x \in A)$$

IMPORTANT !

L'emploi des symboles logiques ($\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$) est soumis à des règles. Ainsi, il faut éviter de mélanger, n'importe comment, texte en langue courante et symboles.
Par exemple, une écriture du type :

« $\exists$ un entier naturel n tel que $\forall$ l'entier naturel m, on ait : $n \leq m$.»

est à proscrire. Une écriture correcte serait :

"Il existe un entier naturel n tel que pour tout entier naturel m on ait : $n \leq m$."

Ou bien : "$(\exists\, n \in \mathbb{N})\ (\forall\, m \in \mathbb{N})\ n \leq m$"

En revanche, on peut écrire des phrases telles que :

- On sait que: $(\exists\, n \in \mathbb{N})\ (\forall\, m \in \mathbb{N})\ n \leq m$.
- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que : $(\forall\, x \in \mathbb{R})\ f^3(x) = 1$.

DEUXIEME PARTIE

METHODES DE DEMONSTRATION

En mathématiques, déduire (ou démontrer) un certain résultat C (habituellement appelé conclusion) à partir d'un certain autre résultat H (habituellement appelé hypothèse) revient à montrer que C est vrai dès que H est vrai (on dira alors que «C se déduit de H» ou que «C résulte de H» ou encore que «C est une conséquence de H»...etc).
Or, la déduction mathématique s'effectue conformément à des règles de logique et on dispose d'un certain nombre de méthodes de démonstration qui permettent de maîtriser le raisonnement mathématique.

A- Méthodes usuelles de démonstration :

- *Règle du détachement ;*
- *Règle du syllogisme ;*
- *Implication directe ;*
- *Règle de la contraposition ;*
- *Méthode du contre-exemple ;*
- *Règle de la disjonction des cas ;*
- *Raisonnement par l'absurde ;*
- *Raisonnement par récurrence.*

Nous allons, dans ce qui suit, vous indiquer le principe de chacune de ces méthodes suivi, à chaque fois, d'exemples d'illustration.

1- Règle du détachement.

Principe : *Soient p, q deux propositions telles que $(p \Rightarrow q)$ soit vraie. Si de plus p est vraie, alors q est vraie (vérifiez le sur la table de vérité de $(p \Rightarrow q)$).*

Exemple : Admettez que vous travaillez dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de *dimension n* et que vous ayez à démontrer qu'une certaine famille $\mathfrak{F}$, à *n éléments*, est une base de E.
Sachant, d'après un théorème du cours (dont les hypothèses sont, ici, satisfaites), que :

$$\text{“}\mathfrak{F} \text{ est libre} \Rightarrow \mathfrak{F} \text{ est une base”}$$

il vous suffirait de démontrer que la famille $\mathfrak{F}$ en question est libre, et vous en déduirez, en vertu de la règle du détachement, que $\mathfrak{F}$ est une base de E.

Application : Soit $E = \mathbb{R}^3$, $\mathfrak{F} = \{ u = (1, 1, 0) ; v = (0, 1, 1) ; w = (1, 0, 1) \}$
Montrez que $\mathfrak{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (il vous suffit de montrer que les vecteurs u, v, w sont linéairement indépendants car $\mathrm{Card}(\mathfrak{F}) = \dim\mathbb{R}^3$).

Note : Dans un exercice, avant d'appliquer un théorème, on commence par s'assurer– à l'aide d'un examen des données de l'exercice– que les conditions de son application sont toutes remplies.

2- *Règle du syllogisme.*

Principe : *Soient H_1, H_2, H_3 trois propositions quelconques. Si "$H_1 \Rightarrow H_2$" et "$H_2 \Rightarrow H_3$" sont vraies, alors "$H_1 \Rightarrow H_3$" est vraie (résultat démontrable à l'aide des tables de vérité).*

Exemple : Soient $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ et f une application de $I = [a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On sait que :
"f est dérivable sur I $\Rightarrow$ f est continue sur I" et "f est continue sur I $\Rightarrow$ f est intégrable sur I"
On en déduit alors que : *"f est dérivable sur I $\Rightarrow$ f est intégrable sur I"*

Note : De même, on démontre que si $p \Leftrightarrow q$ et $q \Leftrightarrow r$, alors $p \Leftrightarrow r$.
En outre, pour démontrer que $p \Leftrightarrow q \Leftrightarrow r$ (qui veut dire $p \Leftrightarrow q$ et $q \Leftrightarrow r$), il suffit d'établir les trois implications : $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow r$, $r \Rightarrow p$.

Plus généralement, Soient $p_1, p_2, ..., p_n$ n propositions ; $n\in\mathbb{N}$. Pour démontrer la chaîne d'équivalences : $p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow ...\Leftrightarrow p_n$
il suffit d'établir, par exemple, la chaîne d'implications : $\mathbf{p_1} \Rightarrow p_2 \Rightarrow ...\Rightarrow p_n \Rightarrow \mathbf{p_1}$
où $\mathbf{p_1} \Rightarrow p_2 \Rightarrow ...\Rightarrow p_n \Rightarrow \mathbf{p_1}$ signifie $\mathbf{p_1} \Rightarrow p_2, p_2 \Rightarrow p_3$, ... et $p_n \Rightarrow \mathbf{p_1}$.

3- *Méthode de l'implication directe.*

Principe : *Nous avons déjà remarqué (dans "Eléments de Logique") que pour démontrer qu'une implication "$H \Rightarrow C$" est vraie, il suffit de supposer que H est vraie et de démontrer alors que C est vraie aussi.*
Cette méthode consiste à déduire C (la conclusion) de H (l'hypothèse) moyennant une suite d'implications :

$$H \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow ... \Rightarrow C_n \Rightarrow C$$

où $C_1, C_2, ..., C_n$ sont des conclusions intermédiaires (ce schéma se trouve justifié grâce à la règle du syllogisme appliquée de proche en proche à (H, C_1, C_2), (H, C_2, C_3),..., (H, C_n, C)).

Exemple : Admettez que vous ayez à démontrer le résultat suivant :

"Pour tout $n\in\mathbb{N}$, si n est pair, alors n^2 est pair."

(qui peut aussi s'écrire : $(\forall n\in\mathbb{N})$ (n pair $\Rightarrow n^2$ pair))

N.B : Vous pouvez très bien vérifier que cette propriété est vraie pour des valeurs particulières de n, mais il est clair qu'il vous est impossible de la vérifier pour tous les entiers un à un.D'où la nécessité et l'importance de disposer de méthodes de démonstration !

Il s'agit, ici, de partir de l'hypothèse “n est pair”, et d'arriver, au bout d'un certain nombre d'étapes, à la conclusion “n^2 est pair”.

Etapes de la démonstration :

1) Traduire le fait que n est pair (n est pair signifie qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$) ;

2) Exprimer n^2 (en fonction de p) et remarquer qu'il est bien pair.

Rédaction de la démonstration :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que n est pair. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$.

On aura alors : $n^2 = 4p^2$, ou encore : $n^2 = 2(2p^2)$. Ce qui prouve que n^2 est pair.

Et la démonstration est, ainsi, achevée.

4- *Règle de la contraposition.*

Principe : *Soient H et C deux propositions. Il est alors aisé de démontrer que :*

$$(H \Rightarrow C) \longmapsto\!\!\!\!\!\dashv (\text{non } C \Rightarrow \text{non } H)$$

Par conséquent, $(H \Rightarrow C)$ et (non $C \Rightarrow$ non H) sont ou bien toutes deux vraies, ou bien toutes deux fausses. Mais parfois, il est plus facile de démontrer l'une plutôt que l'autre !

Exemple : *Démontrez que :* $(\forall n \in \mathbb{N})$ *(n^2 pair $\Rightarrow$ n pair)*.

D'après la règle de la contraposition, cela revient à démontrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \ (n \text{ impair} \Rightarrow n^2 \text{ impair}).$$

ce qui se fait sans aucune difficulté (écrire $n = 2k + 1$, puis...).

N.B : Pour mieux vous rendre compte de l'utilité de la contraposition dans certains cas, essayez de refaire cette démonstration sans passage à la contraposition.

5- *Méthode du contre-exemple.*

Principe : *Soit p(x) une propriété définie sur un ensemble E.*

On sait que la négation de : $(\forall x \in E)\, p(x)$ *est :* $(\exists x \in E)\ (\text{non } p(x))$.

Il s'en suit que pour démontrer qu'une propriété n'est pas toujours vraie, il suffit d'exhiber au moins un cas où elle est fausse, c'est à dire où sa négation est vraie (on dit alors qu'on donne un contre-exemple).

Exemple 1 : *A-t-on :* $(\forall n \in \mathbb{N})\ 2^n > n^2$?

La réponse est non, et voici un contre-exemple : pour $n = 3$, on a : $2^3 \leq 3^2$ (remarquez que, dans $\mathbb{R}$, la négation de “$a > b$” est “$a \leq b$”).

Exemple 2 : *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. La réunion de deux sous-espaces de E est-elle (toujours) un sous-espace vectoriel de E ?*

Ici, donner un contre-exemple consiste à trouver un espace vectoriel E (bien précis) puis à en exhiber deux sous-espaces vectoriels A et B(tous deux bien déterminés) tels que leur réunion $A \cup B$ ne soit pas un sous-espace vectoriel de E.

Voici un tel contre-exemple :
Soient $E = \mathbb{R}^2$, $A = \{(x, 0) ; x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{(0,y) ; y \in \mathbb{R}\}$.
- Vérifiez que A et B sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$.
- Pour prouver que $A \cup B$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, il suffit de remarquer que $A \cup B$ n'est pas stable pour l'addition.
En effet, on a : $u = (1,0) \in A \cup B$ et $v = (0,1) \in A \cup B$ mais $u + v = (1, 1) \notin A \cup B$ (car $(1,1) \notin A$ et $(1,1) \notin B$. D'ailleurs, il est facile de voir que : $A \cup B = \{(x, y) ; xy = 0\}$

6- Règle de la disjonction des cas.

Principe : *Soient p, q deux propositions. Si "$p \Rightarrow q$" et "$(\text{non}p) \Rightarrow q$" sont vraies, alors q est vraie.*

Exemple 1 : *Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n^2 + n$ est pair.*

Remarquons, tout, d'abord que : $n^2 + n = n(n + 1)$, puis distinguons deux cas :
- Si n est pair, alors $n(n + 1)$ est pair (un produit d'entiers est pair dès qu'un des facteurs l'est) ;
- Si n est impair, alors $n + 1$ est pair et par conséquent $n(n + 1)$ est pair.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + n$ est pair.

Exemple 2 : *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Montrons que :*

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\forall u \in E)\ (\lambda . u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E)$$

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in E$ tels que : $\lambda . u = 0_E$
- si $\lambda = 0$, alors l'implication ci-dessus est vérifiée ;
- si $\lambda \neq 0$, alors λ sera inversible et soit λ^{-1} son inverse.
On aura : $\lambda^{-1} .(\lambda . u) = \lambda^{-1} . 0_E = 0_E$ c'est à dire : $(\lambda^{-1}\lambda).u = 0_E$ et donc : $u = 0_E$ (du fait que E est un espace vectoriel et que $\lambda^{-1}\lambda = 1$).
Conclusion : *Dans tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel E on a la propriété :*

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R})\ (\forall u \in E)\ (\lambda . u = 0_E \Rightarrow \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E)$$

Exemple 3 : voir exercice n° 10.

7- *Démonstration par l'absurde.*

Principe : *Soit à démontrer qu'une certaine proposition p est vraie. Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que p est fausse et de montrer que cela conduit à une certaine contradiction (on ne sait pas, a priori, ce que pourrait être une telle contradiction), ce qui nous autorise à conclure que p est vraie.*

Exemple 1 : *Soit à démontrer que* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, on peut alors écrire $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec $(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ et a, b premiers entre eux(c'est à dire que 1 est leur unique diviseur commun).

Il s'en suit que : $2b^2 = a^2$, ce qui signifie que a^2 est pair, et donc a est pair(déjà vu).

Soit alors $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $a = 2k$, on aura : $2b^2 = 4k^2$ puis $b^2 = 2k^2$, par conséquent b est pair.

Mais alors a et b sont tous deux divisibles par 2, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que a et b sont premiers entre eux.

Conclusion : $\sqrt{2}$ *n'est pas rationnel.*

Exemple 2 : *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *tel que :* $(\forall \ \alpha > 0) \ |x| \leq \alpha$. *Démontrez que* $x = 0$.

Procédons par l'absurde et supposons que $x \neq 0$.

Soit alors $\alpha = \frac{|x|}{2}$ (par exemple). On aura $|x| \leq \frac{|x|}{2}$ (car par hypothèse : $(\forall \ \alpha > 0) \ |x| \leq \alpha$).

Par suite $1 \leq \frac{1}{2}$ (car $x \neq 0$), ce qui est évidemment faux.

D'où : $x = 0$ (l'hypothèse $x \neq 0$ étant à rejeter).

N.B : Ce résultat intervient dans la démonstration de l'unicité de la limite, en un point, d'une fonction numérique.

8- *Démonstration par récurrence.*

Principe : *Soit* $p(n)$ *;* $n \in \mathbb{N}$*, une propriété dépendant de n. Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$.

Si

1°) $p(n_0)$ *est vraie*

2°) pour tout $n \geq n_0$ *l'implication* $(p(n) \Rightarrow p(n+1))$ *est vraie,*

alors

pour tout $n \geq n_0$, $p(n)$ *est vraie.*

Ce qui peut aussi s'énoncer

$$[p(n_0) \text{ et } (\forall \ n \geq n_0) \ (p(n) \Rightarrow p(n+1))] \Rightarrow (\forall \ n \geq n_0) \ p(n)$$

Pratiquement, un raisonnement par récurrence comporte deux étapes principales :

1ère étape : on vérifie que $p(n_0)$ est vraie ;

$2^{ème}$ étape : Soit $n \geq n_0$, on suppose que p(n) est vraie, et on montre alors que p(n + 1) est vraie aussi (autrement dit, on montre que si la propriété en question est vraie à l'ordre n, alors elle est nécessairement vraie à l'ordre (n + 1) aussi).
Cela fait, on conclut alors que pour n'importe quel $n \geq n_0$, la propriété p(n) est vraie.

Exemple : *Soit à établir que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Considérons pour $n \geq 1$, la propriété p(n) : $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, puis raisonnons par récurrence (sur n).

- Pour n = 1, on a : $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$. Donc p(1) est bien vraie.
- Soit maintenant $n \geq 1$ tel que p(n) soit vraie, c'est à dire tel que : $1 + 2 \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

On aura : $1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = (1 + 2 + \ldots + n) + (n+1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \text{ (d'après l'hypothèse de récurrence)}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

ce qui signifie que p(n + 1) est vraie.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Remarques :

1) Au niveau de la $2^{ème}$ étape du raisonnement par récurrence, on est amené, dans certaines situations, à supposer que la propriété dont il s'agit est vraie jusqu'à l'ordre n (et non seulement à l'ordre n comme nous l'avons fait dans l'exemple ci-dessus car cela nous suffisait), puis on démontre qu'elle est, alors, vraie à l'ordre (n + 1).

2) Lors d'un raisonnement par récurrence, tâchez :

– de préciser la propriété p(n), objet de la démonstration,
– de préciser le rang de départ n_0 ,
– de formuler avec précision l'hypothèse de récurrence,
– d'indiquer, le moment venu, l'endroit d'utilisation de l'hypothèse de récurrence.

B- Conditions nécessaires- Conditions suffisantes (étude d'exemples).

Exemple 1 : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On sait que :

"si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0"

Cela signifie : pour que f soit continue en x_0, il *suffit* que f soit dérivable en x_0,
ou encore : pour que f soit dérivable en x_0, il *faut* que f soit continue en x_0.
Ainsi, on dira, indifféremment, que la dérivabilité de f en x_0 est une *condition suffisante* pour la continuité de f en x_0, ou que la continuité de f en x_0 est une *condition nécessaire* pour la dérivabilité de f en x_0 (dans le sens : f ne peut être dérivable en x_0 sans être continue en x_0).

Intérêt pratique : La connaissance du théorème ci-dessus est d'un double intérêt :

- d'une part, il nous autorise à déduire "gratuitement" la continuité de f en x_0 si on sait, par ailleurs, que f est dérivable en x_0 (grâce à la règle du détachement).

- d'autre part, et en passant à la contraposée :

"si f n'est pas continue en x_0, alors f n'est pas dérivable en x_0"

il nous permet d'affirmer que f n'est pas dérivable en x_0 dès lors que l'on sait que f n'est pas continue en x_0 (en appliquant la règle du détachement à la contraposée).

Remarque : La continuité de f en x_0 est une condition nécessaire mais non suffisante pour la dérivabilité de f en x_0 (soit f : $f(x) = | x |$; f est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0). **Ainsi, et d'une manière générale, une condition nécessaire peut ne pas être suffisante et il convient donc de ne pas confondre ces deux notions (ce qui revient à ne pas confondre une implication et sa réciproque).**

Exemple 2 : Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A un sous-ensemble de E. On sait que :

A est un sous-espace vectoriel de E $\Rightarrow 0_E \in A$

Par contraposition, on obtient : $0_E \notin A \Rightarrow$ *A n'est pas un sous-espace vectoriel de E*

Sous cette forme, ce résultat est très commode dans certains cas (voir TD).

Attention ! La condition $0_E \in A$ est nécessaire pour que A soit un sous espace vectoriel de E mais elle n'est pas suffisante (le seul fait que $0_E \in A$ ne permet pas de conclure).

Exemple 3 : Soient a, b deux nombres réels. On sait que : $(ab = 0) \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$.
Ici, la condition "$a = 0$ ou $b = 0$" est nécessaire (et suffisante) pour que $ab = 0$. Mais ni "$a = 0$", ni "$b = 0$" ne sont nécessaires pour que $ab = 0$ (l'implication "$ab = 0 \Rightarrow a = 0$" est fausse ainsi que "$ab = 0 \Rightarrow b = 0$"). En revanche, chacune des conditions "$a = 0$", "$b = 0$" est suffisante pour que $ab = 0$ (chacune des implications "$a = 0 \Rightarrow ab = 0$", "$b = 0 \Rightarrow ab = 0$" étant vraie).

IMPORTANT !

- Pour établir une équivalence "$p \Leftrightarrow q$", il est souvent plus facile et plus prudent d'établir les deux implications "$p \Rightarrow q$" et "$q \Rightarrow p$" séparément (dans l'ordre de votre choix).

- Dans des questions du type "Déterminez une condition nécessaire et suffisante pour que..." il est souvent commode de commencer par chercher une condition nécessaire puis d'examiner si la condition ainsi obtenue est suffisante.

EXERCICES

(Logique et démonstration)

Pour répondre à une question mathématique, il est toujours recommandé de lire attentivement l'énoncé et de le comprendre(bien saisir l'objet de la question, distinguer les hypothèses et la conclusion, situer la question par rapport à vos connaissances mathématiques antérieures) puis de réfléchir la démarche de résolution et la(les) méthode(s) de démonstration adéquates(il ya parfois des indices orientant vers le choix de telle ou telle méthode, sinon ce choix pourrait être le fruit d'un tâtonnement !)

1- Pour chacune des propositions suivantes,

1°) dire si elle est vraie ou si elle est fausse 2°) exprimez sa négation

a) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ (x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$.

b) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ (x < y \Rightarrow x \leq y)$.

c) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists\ y \in \mathbb{R})\ (|x| = |y| \text{ et } x \neq y)$.

d) $(\forall n \in \mathbb{N})\ (\exists\ m \in \mathbb{N})\ n \leq m$.

e) $(\exists\ m \in \mathbb{N})\ (\forall n \in \mathbb{N})\ n \leq m$.

f) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ ((x < y \text{ et } y < x) \Rightarrow x = y)$.

2- Quelle est la négation de chacun des énoncés suivants :

a) Tous les étudiants du groupe sont présents ?

b) Aucun bureau n'est ouvert ?

c) Chaque université a au moins une filière où tous les étudiants étudient l'anglais ?

3- Soit E l'ensemble des élèves de Lycée, S l'ensemble des élèves de Seconde de Lycée, L l'ensemble des langues prévues au Lycée. On notera $x \in \ell$ le fait que l'élève x étudie la langue ℓ.

1°) Exprimez, en langage symbolique, les propositions suivantes :

a) Chaque élève du Lycée étudie au moins une langue.

b) Toute langue prévue est effectivement étudiée.

c) Tous les élèves de Seconde suivent l'enseignement d'une même langue.

d) Tout élève de Seconde suit l'enseignement d'une seule langue.

2°) Exprimez la négation de chacune de ces propositions.

4- Soit E et F deux ensembles et soit f une application de E dans F. On vous rappelle les définitions suivantes :

f est *surjective* de E sur F $\longmapsto$ $(\forall y \in F)\ (\exists\ x \in E)\ y = f(x)$.

f est *injective* de E dans F $\longmapsto$ $(\forall x_1 \in E)\ (\forall x_2 \in E)\ (f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$.

f est *bijective* de E sur F $\longmapsto$ f est surjective et injective.

Que signifie : *f n'est pas surjective ? f n'est pas injective ? f n'est pas bijective ?*

(Notez que : f est *injective* de E dans F $\longmapsto$ $(\forall x_1 \in E)\ (\forall x_2 \in E)\ (x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$)

5- On considère la proposition (P) : $(\forall x \in [1, 2])\ (\exists\ y \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right])\ xy - x + 2y = 1$.

Montrez que P est fausse(on exprimera la négation de (P)).

6- Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E. On vous rappelle que :
$A \subset B$(lire : A est inclus dans B) $\longmapsto (\forall x \in E)\ (x \in A \Rightarrow x \in B)$; $A = B \longmapsto A \subset B$ et $B \subset A$
Que signifie : $A \not\subset B$? $A \neq B$? $A \subset B$ et $A \neq B$?

7- Soient a, b des réels. Démontrez que : $(a \neq -1$ et $b \neq -1) \Rightarrow (a + ab + b \neq -1)$.

8- Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel . Démontrez chacune des propriétés suivantes :

a) Pour tout $u \in E$, la famille $\{u\}$ est libre *si et seulement si* $u \neq 0_E$

b)Toute famille contenant une famille liée est elle-même liée.

c) Toute famille contenue dans une famille libre est elle-même libre.

9- Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , A et B deux sous-espaces vectoriels de E.
Démontrez que pour que $A \subset B$, il suffit que B contienne une partie génératrice de A.

10- Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que $n^3 - n$ est un est multiple de 3 (on distinguera le cas où n est un multiple de 3 et le cas contraire).

11- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f^3(x) = 1$(avec $f^3(x) = f(f(f(x)))$).
Déterminez f(1).

12- Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, croissante et telle que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f^3(x) = x$.
Démontrez que : $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = x$ (on pourra raisonner par l'absurde).

13- 1°) Démontrez que : $(\forall\ n \in \mathbb{N})$ (9 divise $10^n + 1 \Rightarrow$ 9 divise $10^{n+1} + 1$)

2°) Déterminez l'ensemble $K = \{n \in \mathbb{N}$; 9 divise $10^n + 1\}$

14- Démontrez (par récurrence sur n) que : $(\forall\ n \in \mathbb{N})\ (\forall a \in \mathbb{N})\ (1 + a)^n \geq 1 + na$.

15- On considère la relation de récurrence : $f(n) = af(n-1) + bf(n-2)$ (*) où a,b sont deux réels *donnés* et f une fonction *inconnue* de l'entier n.
1°) Montrez que l'ensemble des solutions de (*) constitue un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .
2°) Montrez que f est entièrement déterminée par la donnée de f(0) et f(1).
3°) En déduire que toute solution f de (*) est définie par $f(n) = \alpha f_1(n) + \lambda f_2(n)$ où f_1 et f_2 sont deux solutions particulières de (*) linéairement indépendantes et α, λ deux réels.

16-Soient E un ensemble, A et B deux sous-ensembles de E.
Démontrez que si $A \subset B$, alors $A \cap \complement_E^B = \varnothing$ où $\complement_E^A = \{x \in E\ ;\ x \notin A\}$ (lire : *complémentaire* de A dans E. A ne pas confondre avec *supplémentaire* d'un sous-espace vectoriel).

LOGIQUE ET RAISONNEMENT MATHEMATIQUE

Ce document s'adresse aux élèves et aux étudiants des sections et filières scientifiques, lesquels auront certainement besoin au cours de leur activité mathématique d'un certain minimum de connaissances en logique mathématique. Ils y trouveront un cours de logique comportant tous les éléments jugés utiles pour une meilleure maîtrise de leur raisonnement mathématique. Ces éléments vont d'une simple précision du vocabulaire logico-mathématique à un exposé assez complet sur les méthodes de démonstration.

Les exemples qui y sont traités sont généralement d'un contenu mathématique simple, ce qui les rend facilement accessibles de sorte à mettre particulièrement l'accent sur les aspects purement logiques. En outre, nous y insistons beaucoup sur les aspects d'ordre pratique et qui font objet d'une série de remarques, nous incitons le lecteur à les lire très attentivement.

Mots clés : Connaissances de base en logique- Activité mathématique- Lois logiques- Méthodes de démonstration.

PUBLIC CONCERNE : Elèves et étudiants des sections et filières scientifiques

EDITEUR : I.R.E.M. de Strasbourg (Brochure S 142)