UNIVERSITE
LOUIS PASTEUR
STRASBOURG

I.R.E.M.
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG
Tél. : 03 88-41-64-40
Fax : 03 88-41-64-49
E.mail : bibirem@math.u-strasbg-fr
http://irem.u-strasbg.fr

ENSEIGNER LES PROBABILITÉS EN CLASSE DE PREMIÈRE

(PROGRAMMES 1991)

PAR UN GROUPE DE L'I.R.E.M. DE STRASBOURG

3e édition.
(2000)

ENSEIGNER LES PROBABILITÉS
EN CLASSE DE PREMIÈRE

(PROGRAMMES 1991)

Cette brochure a été rédigée par :

Claire DUPUIS
Jean-Claude KEYLING
Bernard KOCH
Dominique PERNOUX
Marie-Luce PORT
Suzette ROUSSET-BERT
Christine UNDREINER-BACH.

INTRODUCTION

QUELQUES RÉFLEXIONS SUR LE NOUVEAU PROGRAMME DE PROBABILITÉ EN PREMIERE

LA CONTINUITE DANS LES PROGRAMMES

Le programme des collèges aborde l'organisation et la gestion des données.

Le programme de seconde reprend et complète l'étude des séries statistiques qui étaient auparavant enseignées en première.

Le programme de première introduit un premier contact avec les probabilités, sans recours aux techniques classiques de dénombrement et en continuité avec la notion de fréquence étudiée en statistique.

Le programme de terminale poursuit l'étude de phénomènes aléatoires (dans des ensembles finis) et introduisant quelques outils combinatoires; il introduit la notion de variable aléatoire et de probabilité conditionnelle, ce qui permet d'approcher les concepts de base en probabilité et l'idée de loi en vue des classes ultérieures.

Le programme des sections de techniciens supérieurs aborde les notions de : variable aléatoire, loi binomiale, loi de Poisson, loi de Gauss, loi des grands nombres, estimation d'une moyenne, d'un écart-type et d'un pourcentage, tests d'hypothèse.

L'ESPRIT DU NOUVEAU PROGRAMME DE PREMIÈRE

Le programme précise :

“L'objectif est d'entraîner les élèves à décrire quelques expériences aléatoires simples et à calculer des probabilités. On évitera tout développement théorique. Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'étude de séries statistiques obtenues par la répétition d'une expérience aléatoire, en soulignant les propriétés des fréquences et la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque cette expérience est répétée un grand nombre de fois ...”

La probabilité apparaît dans cette approche comme un **outil mathématique de modélisation** de l'expérience sensible.

Le point de vue adopté ici est celui d'une approche par les fréquences de la notion de probabilité.

Cette conception est différente d'une approche basée sur l'équiprobabilité des événements élémentaires posée a priori pour des raisons de symétrie (anciens programmes de terminale).

Nous allons souligner quelques points importants dans cette nouvelle approche et les choix que nous avons été amenés à faire dans les activités proposées.

Choix des expériences :

La probabilité est conçue comme étant la "limite" de la fréquence quand on répète une expérience "un nombre suffisant de fois".

Pour introduire la probabilité comme limite de la fréquence, on peut étudier avec les élèves plusieurs types de phénomènes :

*** des phénomènes pour lesquels on ne dispose pas a priori d'un modèle théorique**; c'est alors l'observation de séries statistiques qui va conduire à proposer un modèle théorique , par exemple :

- Lancer d'un dé pipé.
- Naissance d'un enfant :
probabilité pour que ce soit un garçon : $p(G) = 0,52$, une fille : $p(F) = 0,48$ car il naît en moyenne 52 garçons pour 48 filles.
- Jet d'une punaise et observation du côté où elle tombe (à plat ou sur le côté et la pointe).

*** des phénomènes pour lesquels on dispose d'un modèle théorique** qui va s'imposer par exemple pour des raisons de symétrie (dé équilibré, pile ou face ...). On peut alors **faire émettre des conjectures** aux élèves **sur le modèle théorique** et **vérifier la "conformité" avec les résultats de l'expérience**.

Ce travail est particulièrement intéressant pour l'expérience "jet de deux pièces de monnaie" pour laquelle bon nombre d'élèves ne vont pas proposer le même modèle suivant qu'on lance :
a) les deux pièces successivement
b) simultanément,
c) une pièce de 1 F et une pièce de 20 c,
d) deux pièces de 1 F.
Dans les cas b) et d) on trouvera chez certains élèves le modèle :
proba(pile pile) = proba(face face) = proba(pile face) = 1/3.

Dans les deux types de phénomènes, on va étudier la série statistique des résultats obtenus par répétition de l'expérience aléatoire et constater qu'il y a une relative stabilité de la fréquence d'un phénomène observé quand on répète l'expérience suffisamment de fois.

On peut commencer ainsi à approcher intuitivement l'idée de la loi des grands nombres dont on peut, en première, donner l'énoncé naïf suivant :
"la probabilité pour que la fréquence d'apparition d'un phénomène s'écarte de la valeur théorique de plus d'une certaine valeur (0,1 par exemple) devient très faible lorsqu'on répète l'expérience un grand nombre de fois".

En introduisant ainsi la notion de probabilité, on n'échappe pas au problème difficile de la "circularité de la définition" puisque la définition de la convergence utilise la notion de probabilité qu'elle est censée définir en même temps. Ce point sera développé plus précisément à la page 69.

Choix d'un outil privilégié

L'optique choisie nous a conduits à utiliser assez rapidement des arbres pondérés. Ces arbres, différents des arbres de dénombrement, fonctionnent selon le "principe multiplicatif" (on effectue des produits de probabilité le long des branches).

L'introduction des "arbres" a été préparée par un travail sur les fréquences et les pourcentages. Les expérimentations en classe, faites par nous mêmes ou par les enseignants qui ont participé aux stages du plan académique de formation, semblent montrer qu'il n'y a pas eu dans l'ensemble de gros problèmes de compréhension. Mais ces expériences ont été réalisées en nombre trop limité pour qu'on puisse conclure.

Le travail sur les arbres se fait sans parler de probabilité conditionnelle ni d'événements indépendants qui sont au programme de terminale.

Les probabilités sont introduites avant le dénombrement : quel est le sort réservé à l'équiprobabilité?

Bien qu'on ne dispose pas d'études didactiques à ce sujet, notre expérience d'enseignant nous laisse penser que la notion de probabilité est beaucoup plus proche de l'intuition de l'élève que celle de dénombrement. Il s'agit en effet de chances de gagner au loto, de nombres de fois où on va amener le 6 sur un nombre total de lancers, de la probabilité d'avoir un bébé du sexe féminin ...

Le dénombrement au contraire constitue un tri à plat des possibilités dans lequel il n'y a pas d'enjeu de gain.

L'introduction du dénombrement avant les probabilités incitait tout naturellement dans les anciens programmes à traiter par la suite des cas d'équiprobabilité. Dans cette optique, la probabilité apparaissait bien évidemment comme :

nombre de cas favorables / nombre de cas possibles.

Or l'équiprobabilité n'est pas l'outil par excellence dans les cas de modélisations d'expériences concrètes (calcul de probabilité dans les assurances ou en biologie ...).

Nous avons donc choisi de présenter dans les exercices des exemples où l'équiprobabilité n'est pas systématique.
Les cas d'équiprobabilité ne sont bien sûr pas interdits mais ils deviennent des exemples parmi d'autres.

En conclusion

Dans un domaine tel que celui des probabilités (destinées à modéliser un grand nombre de phénomènes concrets en biologie, sciences économiques, problèmes de contrôle de qualité, problèmes d'assurances ...) il nous paraît important que le problème de la modélisation soit posé d'emblée, même si au niveau de la classe de Première il n'est possible d'y apporter que des réponses très partielles.

Dans cette initiation aux probabilités les élèves ont été amenés à modéliser et à contrôler par l'expérience un modèle théorique. Cela leur sera bien plus profitable qu'une agilité technique dans les calculs de dénombrement.

LES PROGRAMMES DE STATISTIQUES EN 4e, 3e ET SECONDE ET DE PROBABILITES EN PREMIERE ET TERMINALE

STATISTIQUES - PROGRAMME DE 4e

Organisation et gestion de données. Fonctions

1. Applications linéaires et proportionnalité : ...

2. Exploitation de données statistiques :
Fréquences relatives et leur expression en "pour cent".
Effectifs cumulés, fréquences cumulées.

3. Application aux pourcentages et aux indices (base 100 pour ...)

STATISTIQUES - PROGRAMME DE 3e

Organisation et gestion de données. Fonctions

1. Applications affines : représentation graphique d'une application affine.

2. Exploitation de données statistiques : moyenne; moyennes pondérées; médiane.

STATISTIQUES - PROGRAMME DE SECONDE

Le chapitre complète les acquis du collège. Il présente un triple intérêt. D'abord la lecture pertinente de tableaux statistiques est nécessaire à la compréhension des **phénomènes économiques et sociaux**. Ensuite, c'est un excellent terrain pour des **activités interdisciplinaires** où les élèves peuvent faire preuve d'initiative et développer leurs méthodes de travail. En outre, savoir **organiser, représenter et traiter des données** fournies à l'état brut, savoir apprécier l'intérêt et les limites d'un processus de mathématisation d'une situation est un élément majeur de toute formation scientifique.

On entraînera les élèves à la pratique de la **démarche propre à la statistique** :
– lecture de données recueillies sur les individus d'une population;
– choix des résumés (regroupements en classes, indicateurs ...) à mettre en œuvre pour décrire cette population;
– exécution des calculs à la machine (calculatrice, ordinateur);

– présentation des résultats (histogrammes, graphiques, ...);
– contrôle et analyse critique de ces résultats.

Les documents nécessaires seront proposés en liaison avec les enseignements de sciences biologiques, économiques et humaines ou empruntés à l'environnement de l'élève. Il est souhaitable que ces documents soient authentiques et motivants.

Organisation et exploitation de données statistiques

Séries statistiques à une variable :
– répartition d'une population en classes,
– effectifs, fréquences.
Séries statistiques à une variable quantitative :
– effectifs cumulés, fréquences cumulées,
– caractéristiques de position et de dispersion : moyenne, écart-type.

Il s'agit ici de s'assurer que les notions déjà étudiées au collège sont acquises.

Ces notions ne doivent pas faire l'objet d'un exposé général : leur mise en place s'effectue à travers l'étude, en travaux pratiques, de **quelques** situations propices à leur approche. En particulier, les élèves doivent apprendre à calculer une moyenne et un écart-type; ces notions étant acquises, ils pourront utiliser les fonctions statistiques de leur calculatrice.
L'écriture de formules employant la notation Σ n'est pas au programme.

Travaux pratiques

– Exemples d'organisation de données statistiques (calcul d'effectifs, de fréquences, élaboration de tableaux, de diagrammes, regroupement en classes, ...).
– Lecture et exploitation de données statistiques mises sous forme de tableaux ou de diagrammes d'effectifs ou de fréquences (calcul et interprétation d'une moyenne, d'un écart-type, emploi de tels indicateurs pour comparer des séries statistiques.

Les activités mettront en évidence à partir d'un tableau de fréquences cumulées l'intérêt de notions telles que médiane et quartiles, mais aucune connaissance sur ces notions n'est exigible des élèves.
Grâce à l'étude d'exemples bien choisis, on montrera l'intérêt d'un regroupement en classes pour le calcul de moyennes et d'écart-type et on mettra en valeur la signification de la moyenne $\bar{x}$ et de l'écart-type σ. On observera par exemple que, dans de nombreuses séries statistiques, le pourcentage d'éléments n'appartenant pas à l'intervalle $[\bar{x}2\sigma, \bar{x}+2\sigma]$, ou $[\bar{x}-3\sigma, \bar{x}+3\sigma]$, est voisin de 5 % ou de 1 %.

PROBABILITES - PROGRAMME DE PREMIERE

Classes de premières A1, B, S, E, F ([3])

Au collège et en seconde, les élèves ont étudié la description de séries statistiques à une variable. Le programme des Premières S et E comporte un premier contact avec les probabilités. L'objectif est d'entraîner les élèves à *décrire quelques expériences aléatoires* simples, et à *calculer des probabilités. On évitera tout développement théorique*. Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'étude de séries statistiques obtenues par répétition d'une expérience aléatoire, en soulignant les propriétés des fréquences et la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque cette expérience est répétée un grand nombre de fois. La description d'expériences aléatoires amène aussi à organiser des données : on se limitera à *quelques* exemples permettant de mettre en valeur les idées, mais ne comportant pas de difficultés combinatoires.

Il est important que les élèves puissent se familiariser avec les probabilités pendant une durée suffisante : l'étude de ce chapitre ne doit pas être bloquée en fin d'année.

Evénement, événements élémentaires; la probabilité d'un événement est définie par addition de probabilités d'événements élémentaires. Evénements disjoints (ou incompatibles), événement contraire, réunion et intersection de deux événements. Cas où les événements élémentaires sont équiprobables.	Seul est au programme le cas où l'ensemble des événements élémentaires est fini. Les élèves doivent savoir calculer la probabilité de la réunion d'événements disjoints, d'un événement contraire $\overline{A}$, et savoir utiliser la formule reliant les probabilités de $A \cup B$ et de $A \cap B$. Les notions de probabilité conditionnelle, d'indépendance, de probabilité produit et de variable aléatoire ne sont pas au programme.

([3]) Les programmes des premières A2, A3, F7, F8, F12, G et H sont quasiment identiques, avec en moins la réunion et l'intersection de deux événements, et la compétence de savoir utiliser la formule reliant les probabilités de $A \cup B$ et de $A \cap B$.

Travaux pratiques

Exemples simples d'emplois de partition et de représentations (arbres, tableaux ...) pour organiser et dénombrer des données relatives à la description d'une expérience aléatoire.

Exemples simples d'étude de situations de probabilités issues d'expériences aléatoires (modèles d'urnes, jeux ...).

L'étude du dénombrement des permutations, arrangements et combinaisons est hors programme.

On s'attachera à étudier des situations permettant de bien saisir la démarche du calcul des probabilités, et non des exemples comportant des difficultés techniques de dénombrement.

Dans certaines situations, par exemple l'étude de caractères d'une population, les événements élémentaires ne sont pas donnés a priori; on les construit en effectuant une partition de la population.

PROBABILITES - PROGRAMME DE TERMINALES

Quelques notions de calcul des probabilités ont été introduites en Première; en Terminale, on poursuit l'étude de *phénomènes aléatoires*, en disposant de quelques outils combinatoires (*arrangements, combinaisons*) et de nouveaux concepts probabilistes (*variables aléatoires, conditionnement*). Comme en Première, on s'attachera à étudier des situations permettant de bien saisir la démarche du calcul des probabilités et non des exemples comportant des difficultés techniques de dénombrement.

Le programme se limite à des ensembles *finis*; toute théorie formalisée est exclue. Les notions de probabilité produit et d'indépendance de deux variables aléatoires sont hors programme. Aussi bien pour les variables aléatoires que pour les probabilités conditionnelles, *le programme ne porte que sur l'étude d'exemples.*

a) Variable aléatoire (réelle) prenant un nombre fini de valeurs et loi de probabilité associée ; fonction de répartition, espérance mathématique, variance, écart-type.

On prendra un point de vue très simple : certaines situations de probabilité s'expriment commodément par l'affectation de probabilité $p_1, p_2, \ldots, p_n$ aux valeurs $x_1, x_2, \ldots x_n$ d'une grandeur numérique X associée à une expérience aléatoire; on dit alors que X est une variable aléatoire. Les événements $(X = x_1), (X = x_2), \ldots (X = x_n)$ sont les événéments élémentaires de la loi de probabilité de X. Pour la fonction de répartition, on emploiera la convention $F(x) = p(X \leq x)$.

b) probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à un événement de probabilité non nulle; relation $p(A \cap B) = p(A|B)p(B)$.

Indépendance de deux événements.

Formule des probabilités totales : étant donné des événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$ constituant une partition de E, pour tout événement A, $p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \cdots + p(A \cap B_n)$ et, pour tout k : $p(A \cap B_k) = p(A|B_k)p(B_k)$.

L'étude d'expériences aléatoires bien choisies (situations d'équiprobabilité, ...) amène à définir la probabilité de A sachant que B est réalisé, notée $p_B(A)$ ou encore $p(A|B)$, par la relation

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Tout développement théorique sur cette notion est exclu. On mettre en évidence son utilité en observant que, dans de nombreuses situations, on connaît les probabilités conditionnelles de A par rapport aux événements B_k, ce qui permet de calculer $p(A)$ grâce à la formule des probabilités totales. La formule de Bayes est hors programme.

Travaux pratiques

Exemples simples d'emploi de partitions et de représentations (arbres, tableaux ...) pour organiser et dénombrer des données.
Exemples d'étude de situations de probabilités issues d'expériences aléatoires (modèles d'urnes, jeux, schéma de Bernoulli, ...).
Exemples simples de description et d'étude d'expériences aléatoires à l'aide d'une variable aléatoire.

Lorsque l'étude d'une situation nécessite l'emploi d'une variable aléatoire ou de probabilités conditionnelles, des indications doivent être données sur la méthode à suivre. En outre, pour l'exploitation des probabilités conditionnelles on se bornera à des exemples où la partition $(B_1, B_2, \ldots B_N)$ utilisée comporte au plus quatre éléments.

ACTIVITES D'INTRODUCTION AUX PROBABILITES

Les activités ont été testées dans des classes de première de types différents. Nos observations nous ont conduits à modifier certaines parties ou à les présenter différemment. La version présente doit rester pour vous un support, une idée de ce que l'on peut faire. A vous d'en utiliser tout ou partie, de la modifier, de la compléter. Toutes les remarques que vous voudrez bien nous faire parvenir seront les bienvenues.

Ces activités visent un double objectif :
1) Proposer une expérience aléatoire, réalisable dans une classe un grand nombre de fois pour observer la stabilité de la fréquence d'un événement donné quand ce nombre de fois augmente.
2) Introduire un outil nouveau : l'arbre pondéré.
Chaque activité conduira à proposer un modèle théorique et à confronter celui-ci avec les résultats de l'expérience.

Quelles activités proposer aux élèves?

A1 et A2 sont précédées d'un préambule : exercices sur les proportions.
Il est important de ne pas brûler cette étape.

Outre la révision du calcul des pourcentages et de ses propriétés, le préambule vise l'objectif n° 2 : mettre en évidence le principe multiplicatif et **introduire les arbres pondérés avec multiplication des pourcentages le long des branches.**

Le préambule peut être traité seul, hors du contexte des probabilités. Il peut être suivi des deux activités ou de l'une seulement.

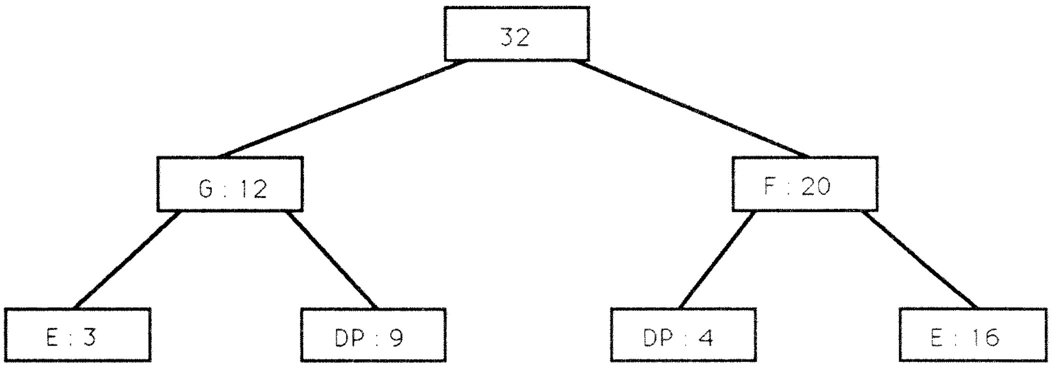
Chacune des activités A1 et A2 comporte :
- une phase de jeu,
- une phase de collecte de données,
- une phase de modélisation.

– La phase de **jeu** est facilement réalisable à la maison. Les résultats obtenus sont fiables si la règle du jeu a été bien comprise par tous les élèves et si ceux-ci ont envie de jouer.
– La **collecte de données** peut s'avérer délicate si l'on veut atteindre l'objectif n° 1. On trouvera dans le commentaire de chaque activité des indications à ce sujet.
– La **modélisation** est facile pour A1 (surtout après le préambule), plus difficile pour A2. Dans une classe où les élèves ont des difficultés d'abstraction il sera peut-être périlleux de traiter d'emblée A2.

PRÉAMBULE :
EXERCICES SUR LES PROPORTIONS

Dans une classe il y a 32 élèves. Parmi ces élèves il y a 12 garçons. Parmi les garçons il y a 3 externes, les autres sont des demi-pensionnaires. Parmi les filles il y a 16 externes, les autres sont des demi-pensionnaires.

Ce qu'on peut représenter par le **schéma n° 1**



1) Répondre aux questions suivantes :
(Donner les résultats sous forme d'une fraction, puis d'un pourcentage, puis d'un nombre compris entre 0 et 1.)

a) Parmi les élèves de la classe, quelle est la proportion de garçons?

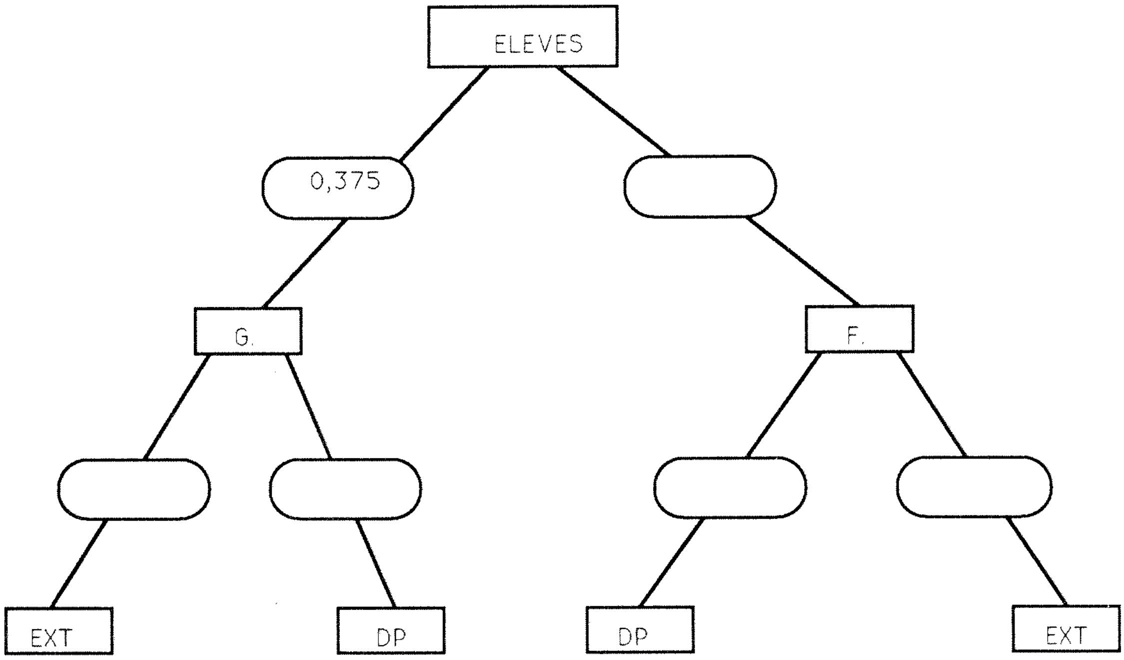
b) Parmi les élèves de la classe, quelle est la proportion de filles?

c) Parmi les garçons, quelle est la proportion d'externes? La proportion de demi-pensionnaires?

d) Parmi les filles, quelle est la proportion d'externes? La proportion de demi-pensionnaires?

2) Compléter le schéma n° 2 à l'aide des six résultats du 1° *en faisant figurer la proportion "correspondant à chacune des branches" (un résultat est déjà indiqué).*

Schéma n° 2



3) Calculer en utilisant uniquement les six résultats du 1°
(figurant sur le schéma n° 2)

a) La proportion de garçons demi-pensionnaires parmi les élèves de la classe.

b) La proportion de filles demi-pensionnaires parmi les élèves de la classe.

c) La proportion de demi-pensionnaires parmi les élèves de la classe.

d) La proportion d'externes parmi les élèves de la classe.

ACTIVITE A1

TOURN' EN ROND

I. DÉROULEMENT DE L'ACTIVITÉ

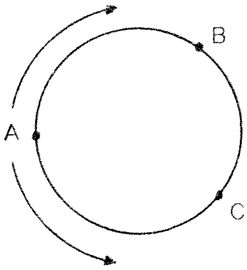
1ère séance (1/2 h) :

Buts :

. Expliquer le jeu.
. Motiver les élèves.
. Organiser le travail.

1) Présenter oralement le jeu n° 1 (voir III Documents-élèves) et faire jouer une ou deux parties à la classe, en notant les résultats, **de manière à faire bien comprendre la règle à tous les élèves.**

2) Présenter alors le 2^e jeu :
La règle est la même, mais cette fois on a comme plateau :



Demander aux élèves de choisir le jeu qui leur paraît être le plus favorable au joueur et noter leurs réponses.

3) Distribuer aux élèves la première feuille de l'activité, avec les consignes pour remplir, chez eux, le tableau 1.

Un ou deux élèves reçoivent un exemplaire du tableau 2 et sont chargés de collecter les talons réponses de leurs camarades et de retranscrire dans le tableau 2 l'ensemble des résultats. Ils sont aussi chargés de faire les sommes partielles. Ainsi rempli, le tableau 2 est photocopié pour chaque élève.

2^e séance (2 h) :

But :

Exploitation des résultats expérimentaux.

1) Chaque élève reçoit un tableau 2 et achève de le compléter en remplissant les colonnes des fréquences (se mettre d'accord sur le nombre de chiffres après la virgule : 3 semble raisonnable ...).

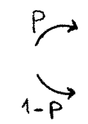
2) On distribue la 2^e feuille de l'activité : "Mise en commun des résultats des expériences", et on la traite avec la classe.

3) Pour vérifier la bonne compréhension des techniques proposées, on fait faire l'arbre pondéré pour le jeu n° 2.
On peut alors confronter les calculs et les réponses de la première séance.

II. COMMENTAIRES

. Des prolongements sont possibles, en exercice ou en contrôle :

1) Demander aux élèves de choisir eux-mêmes les faces du dé qui mènent en C et faire les calculs pour leur jeu.

2) Faire constater que deux jeux "symétriques" (

et 

) semblent donner la même probabilité de gagner.
On peut démontrer cette propriété facilement (identités remarquables).

3) On peut chercher aussi pour quelle valeur de p le jeu donne une probabilité de gagner minimale : on recherche alors le minimum d'un trinôme.

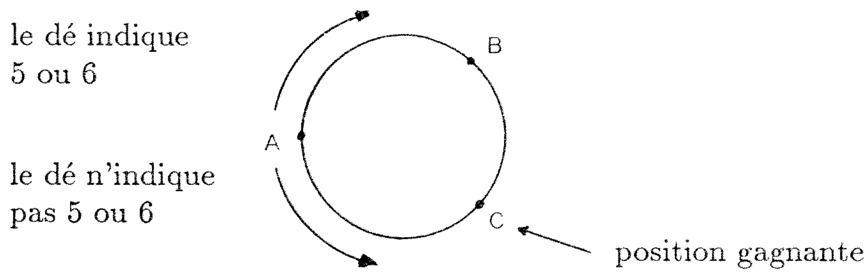
. La stabilisation autour de la fréquence théorique est relativement lente. Selon l'effectif de la classe, on peut être un peu déçu, même pour la probabilité de gagner en un coup, que les élèves devinent facilement.

III. DOCUMENTS - ELEVES

Feuille 1

Jeu n° 1

Munissez-vous d'un dé et d'un jeton. Placez le jeton sur le point A du dessin ci-dessous.



On vous propose le jeu suivant :

1) Lancer le dé.
2) Si le résultat n'est pas un 5 ou un 6, déplacer le jeton en C. Vous avez gagné!
3) Si le résultat est un 5 ou un 6, déplacer le jeton en B et relancer le dé.
Si le nouveau résultat est un 5 ou un 6, déplacer le jeton en C : vous avez gagné!
Si le nouveau résultat n'est pas un 5 ou un 6, déplacer le jeton en A. Vous avez perdu!

Effectuer 30 parties et noter dans le tableau 1 ci-dessous :

1) Le nombre de parties gagnées à l'aide d'un seul lancer
2) le nombre de parties gagnées en deux lancers
3) le nombre de parties perdues
4) le nombre total de parties gagnées.

Vérifier que case 1 + case 2 = case 4; case 1 + case 2 + case 3 = 30; case 3 + case 4 = 30).

Tableau 1

NOM :

parties gagnées en un seul coup 1	parties gagnées en deux coups 2	parties perdues 3	total des parties gagnées 4

Tableau 2 : Récapitulatif des résultats

Nom de l'élève	Cumul des parties jouées	Parties gagnées en un seul coup			Parties gagnées (en un ou deux coups)		
		Résultat individuel	Cumul	Fréquence	Résultat individuel	Cumul	Fréquence

Feuille 2

MISE EN COMMUN DES RÉSULTATS DES EXPÉRIENCES

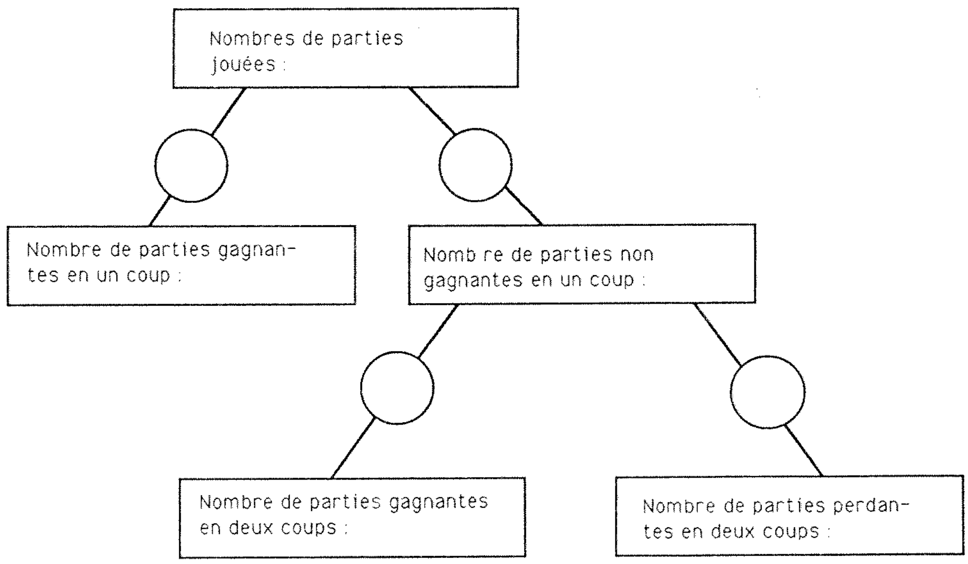
Nous allons nous intéresser à la proportion de parties gagnées parmi les parties jouées, que nous appellerons **la fréquence des parties gagnées**.

Nous utiliserons le **tableau 2 des résultats**.

1) Monsieur Hasardus, savant probabiliste bien connu, jette un coup d'œil rapide sur notre tableau de résultats et affirme : "*les résultats de la cinquième colonne ne me surprennent pas car, bien évidemment,* **la probabilité** *de gagner en un seul coup est exactement de 2/3*".
Et vous, qu'en pensez-vous?

2) Consultez les résultats de la dernière colonne, et **proposez une valeur pour la probabilité de gagner** *(que ce soit en un seul coup ou en deux coups).*

3) Utilisez les résultats des expériences réalisées par tous les élèves de la classe pour compléter le **schéma** ci-dessous. Remplissez les rectangles et indiquez **les fréquences** correspondant "à chacune des branches du schéma".



4) Comment peut-on retrouver **la fréquence de parties gagnantes** *(que ce soit en un seul coup ou en deux coups)* en utilisant uniquement **les quatre fréquences** figurant dans ce schéma?

5) Monsieur Hasardus prétend qu'il n'était pas nécessaire de réaliser les expériences car "*il est évident que la probabilité de gagner est de 7/9*", "*il suffit de réaliser le même schéma que ci-dessus, mais avec des* **probabilités** *à la place des* **fréquences**".
Saurez-vous faire aussi bien que lui?

ACTIVITE A2
LA CASE TROIS FATALE

I.— DÉROULEMENT DE L'ACTIVITÉ

1) Phase de jeu

Les élèves font 40 parties chez eux. Les expériences réalisées ont montré que la règle du jeu est parfois mal comprise. Il vaut mieux faire plusieurs parties en classe avant les 40 parties individuelles. Le tableau 1 contenant tous les résultats des jets, permet de contrôler a posteriori la validité des parties.

A partir de son tableau 1, chaque élève organise ses résultats dans l'arbre 1.

Si la classe a déjà travaillé l'activité A1, il est possible d'amener les élèves à trouver eux-mêmes la structure de cet arbre.

2) Phase de collecte des données

La réalisation du tableau 2 (cumul des effectifs et calcul des fréquences) est une étape capitale de cette activité. Elle permet de suivre l'évolution de la fréquence d'un événement donné (par exemple "la partie est gagnée"), au fur et à mesure de la prise en compte des résultats de chaque joueur (voir à ce sujet dans l'introduction page 3, la remarque concernant la loi des grands nombres).

Parallèlement au tableau 2, on peut tracer au fur et à mesure le graphique de la fréquence en fonction du nombre de parties et observer son comportement asymptotique.

La réalisation du tableau peut être faite pour un seul événement si l'on a déjà proposé A1.

Pour remplir l'arbre 2 (qui prépare la modélisation), il faut recueillir 11 cumuls. On peut soit partager le travail entre les élèves, soit relever tous les arbres 1 et faire le total soi-même, soit utiliser un tableur, soit ...

3) Modélisation

On donne l'arbre du Professeur Hasardus, qu'on fait compléter.

II.— DOCUMENTS-ÉLÈVES

Dans un jeu analogue au jeu de l'oie, la case trois est fatale au joueur c'est-à-dire qu'elle entraîne la perte de la partie.

DEPART >>	1	2	3	G	A G	N E	....	

Le joueur part de la case départ, il lance un dé cubique non truqué et avance du nombre de cases indiquées. Le joueur gagne dès qu'il a dépassé la case trois fatale, il perd s'il tombe sur cette case, il relance le dé dans les autres cas. Après trois jets du dé au maximum, le joueur est ainsi fixé sur son sort.

I. Jouons et comptons!

1) Munissez-vous d'un dé et tentez votre chance 40 fois à ce jeux. Notez, pour chaque partie, la suite des nombres de points obtenus dans le tableau 1.

2) Réorganisez les résultats plus précisément en les reportant dans l'arbre 1.

3) En utilisant le tableau ou l'arbre, calculer votre fréquence de parties gagnées (c'est-à-dire le rapport du nombre de parties gagnées au nombre de parties jouées).

II. Totalisons!

4) Regroupez l'ensemble des résultats de la classe en utilisant le tableau 2. Calculez, après la prise en compte des résultats de chaque joueur, la fréquence de parties gagnées. Que remarquez-vous?

5) Regroupez également l'ensemble des résultats de la classe dans l'arbre 2.

6) Inscrire sur chaque branche de l'arbre, la proportion de l'effectif de la case de départ que l'on retrouve dans la case d'arrivée. Vérifiez vos calculs en totalisant les proportions des branches issues d'une même case.

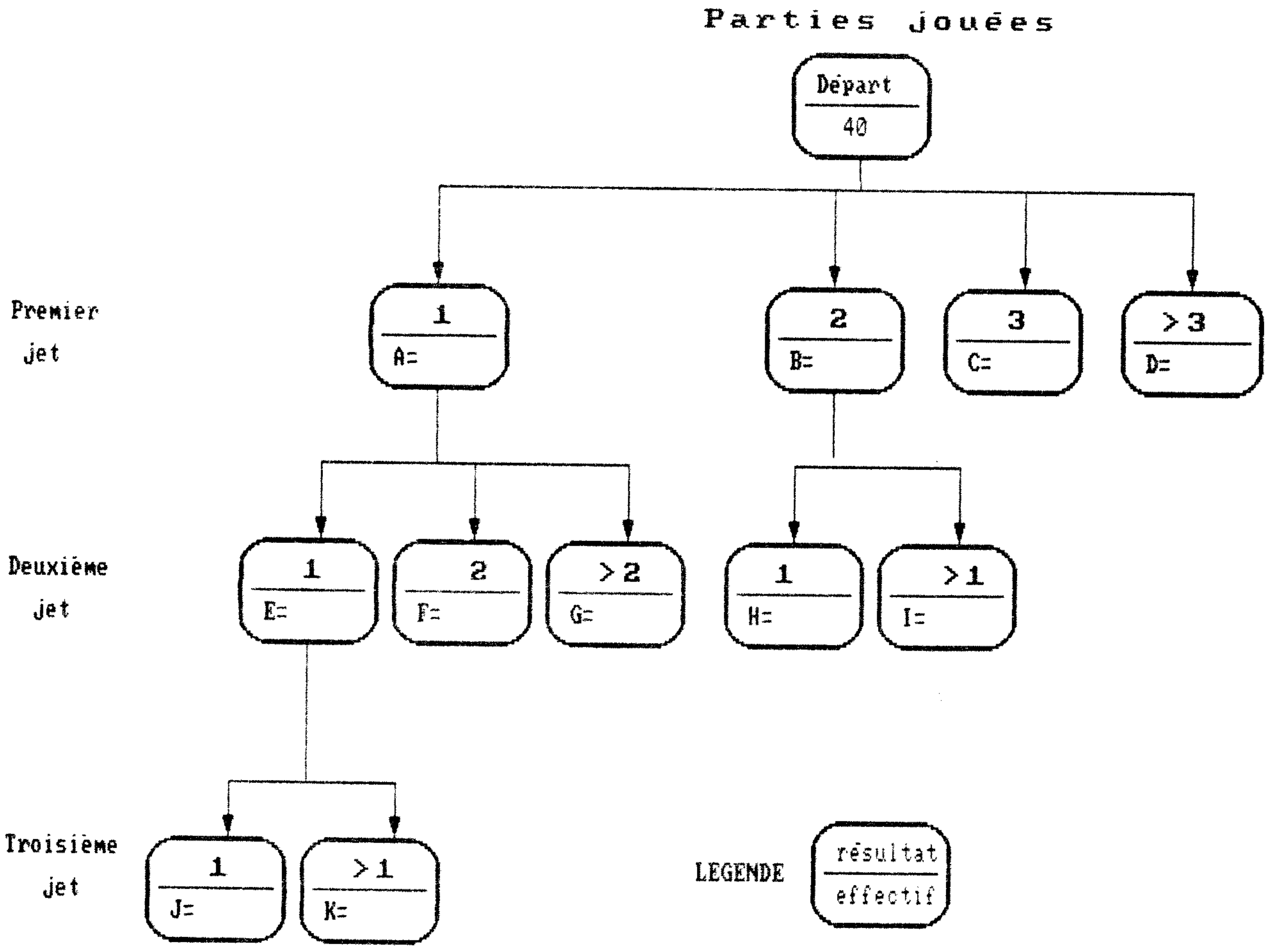
III. Réfléchissons!

7) Le célèbre professeur Hasardus, après un rapide examen de notre arbre affirme : "les résultats ne me surprennent pas, car, lorsqu'on lance un dé, la probabilité d'obtenir chaque face est évidemment 1/6".
Que pensez-vous de cette affirmation?

8) Le professeur Hasardus remplace les proportions inscrites sur les branches de notre arbre par des nombres qu'il appelle probabilités (voir l'arbre du professeur Hasardus) et en déduit la probabilité de gagner ... sauriez-vous en faire autant?

La case trois fatale - Tableau 1

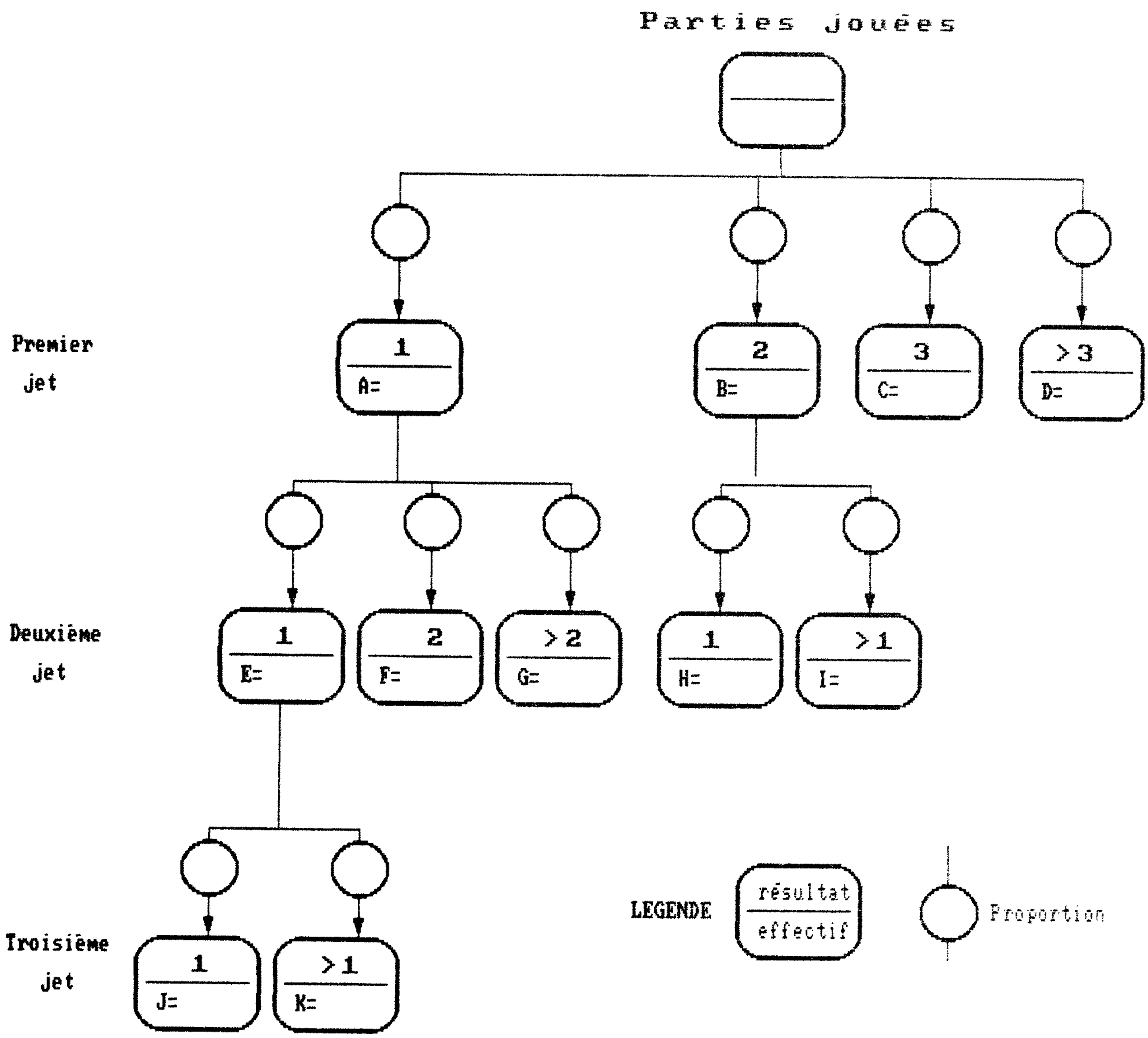
Partie	Premier jet	Deuxième jet (éventuel)	Troisième jet (éventuel)	TOTAL FINAL
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				
30				
31				
32				
33				
34				
35				
36				
37				
38				
39				
40				


Parties jouées
Départ
40
Premier
jet
1
A=
2
B=
3
C=
>3
D=
Deuxième
jet
1
E=
2
F=
>2
G=
1
H=
>1
I=
Troisième
jet
1
J=
>1
K=
LEGENDE
résultat
effectif

ARBRE 1

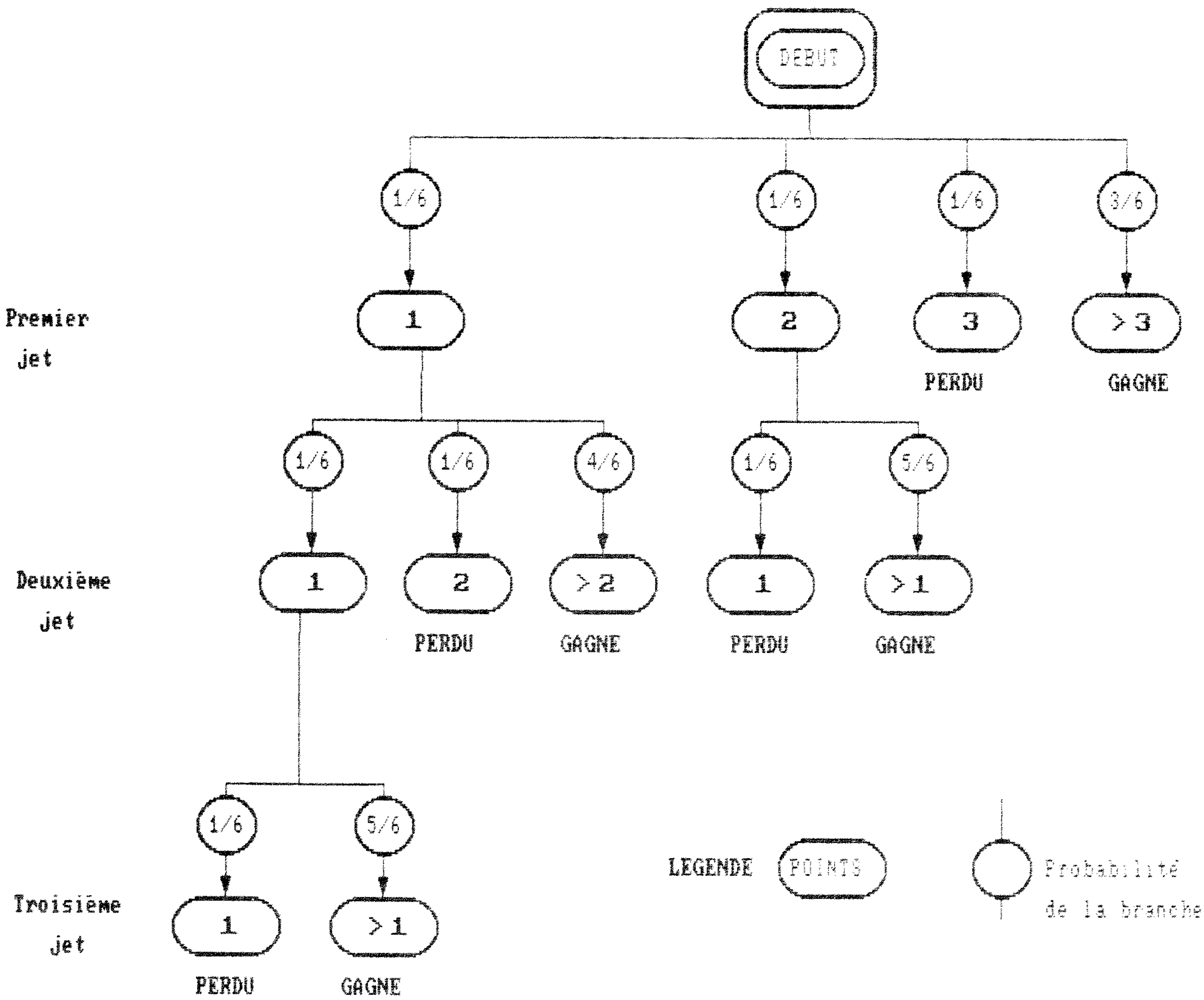
La case trois fatale - Tableau 2

NOM Prénom	Total N des parties jouées	CUMULS DES EFFECTIFS											Fréquence de gain $\frac{(D+G+I+K)}{N}$
		A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	


Parties jouées
Premier jet
1
A=
2
B=
3
C=
>3
D=
Deuxième jet
1
E=
2
F=
>2
G=
1
H=
>1
I=
Troisième jet
1
J=
>1
K=
LEGENDE
résultat
effectif
Proportion

ARBRE 2

L'arbre du professeur Hasardus



UNE PROPOSITION DE PLAN DE COURS

I. Notion d'expériences aléatoires

Après avoir cité des exemples de telles expériences (jeux, tir sur une cible, sexe d'une naissance ...), on introduira une partie du vocabulaire des probabilités (l'impossible, le certain, le "probable" ...). On choisira, de préférence, des exemples où la probabilité n'est pas intuitivement évidente et où l'hypothèse d'équiprobabilité ne s'impose pas d'emblée (dés truqués, astragales, contrôle de fabrication, dates d'anniversaires, etc ...).

II. Des fréquences statistiques aux probabilités

a) Calculs sur des tableaux statistiques, calculs de fréquences, mise en évidence des **propriétés des fréquences** :

$0 \leq \text{freq}(A) \leq 1$
$\text{freq}(A \cup B) = \text{freq}(A) + \text{freq}(B)$ si A et B disjoints
$\text{freq}(A \cup B) = \text{freq}(A) + \text{freq}(B) - \text{freq}(A \cap B)$
$\text{freq}(\text{non } A) = 1 - \text{freq}(A)$.

Traduites sous une forme moins abstraite, ces propriétés de la fréquence statistique sont faciles à faire constater, puis à établir.

b) Réalisation et répétition d'expériences permettant de mettre en évidence intuitivement la **convergence des fréquences**. Exemples : pile ou face, dé, punaise, jeux, activités comme "La case trois fatale" et "Tourn' en rond". Eventuellement, simulations (à l'aide de calculatrices ou d'ordinateurs) pour étayer l'impression de convergence. Les tables de nombres au hasard étant passées de mode, voici un exemple de générateur de nombres au hasard facile à mettre en œuvre même avec des calculatrices très rudimentaires :

1 - choisir une valeur de départ comprise entre 0 et 1 (au moins six chiffres, par exemple 0, votre date de naissance ou celle de votre petit(e) ami(e) ...),
2 - multiplier par 147,
3 - retrancher la partie entière du résultat,
4 - noter le nombre obtenu,
5 - retourner en 2, tant qu'il vous faut des nombres au hasard.

Ce procédé fournit une suite de nombres "assez uniformément" répartis dans l'intervalle $]0,1[$.

III. Le modèle théorique (axiomatique)

Le vocabulaire (ensemble des possibles, événements, probabilité ...). Pour introduire cette dernière notion, les activités d'approche précédentes, éclairent le fait que l'on considère les fréquences comme des valeurs approchées de nombres théoriques appelés probabilités. **On admet que les probabilités vérifient les mêmes propriétés que les fréquences.**

IV. Des outils efficaces

a) Les arbres : à titre d'aide méthodologique, on précisera que :

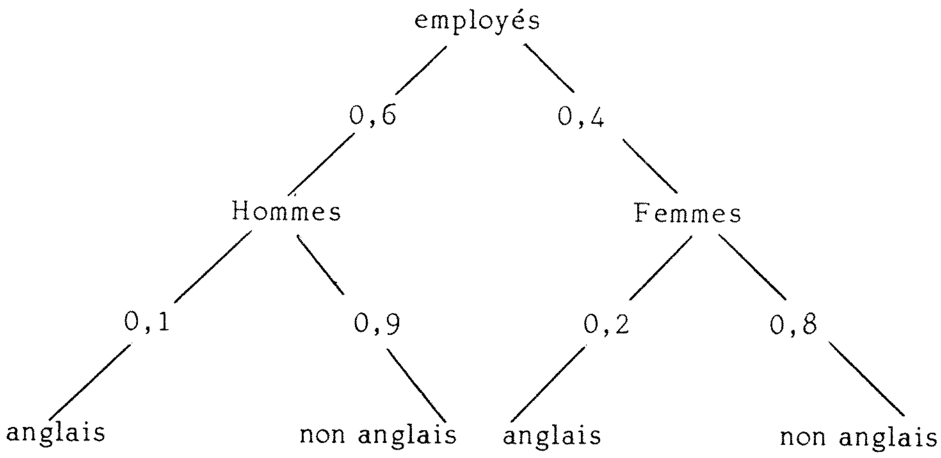
— chaque branche a une probabilité,
— la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud de l'arbre est 1,
— la probabilité d'atteindre une feuille donnée est le produit des probabilités des branches qui y mènent.

Donnons, à titre d'exemple, un exercice qui se résout aisément à l'aide d'un arbre :
On considère une société comprenant 60 % d'hommes et 40 % de femmes. On sait que 20 % des femmes et 10 % des hommes de cette société savent parler l'anglais. On désigne au hasard un employé de cette société.

Quelle est la probabilité pour que la personne choisie soit :

— un homme parlant l'anglais,
— un homme ne parlant pas anglais,
— une femme parlant anglais,
— une femme ne parlant pas anglais?

Pouvait-on prévoir ce dernier résultat connaissant les trois premiers?



b) Les tableaux

Ils sont commodes tant qu'ils ne sont qu'à double entrée. L'aide méthodologique consistera à faire remarquer que :

— les marges droites et basses contiennent, respectivement, les sommes des lignes et des colonnes,
— la somme de la marge droite est égale à 1, ainsi que celle de la marge basse (si toutefois, on fait un tableau de fréquences ou de probabilités). C'est aussi la somme de toutes les cases "intérieures" du tableau.

Un exemple d'exercice pour la résolution duquel un tableau est efficace :
Un appareil fabriqué en très grande série peut être défectueux à cause de deux défauts seulement désignés par A et B.

Dans un lot de 10000 appareils prélevés, on a constaté que 1000 appareils présentaient le défaut A (et peut-être le défaut B), 800 appareils présentaient le défaut B (et peut-être le défaut A) et 400 présentaient simultanément les défauts A et B.

Un client achète l'un des appareils produits.
Quelle est la probabilité :

— que l'appareil ne présente aucun défaut ?
— qu'il présente le défaut A seulement ?
— qu'il présente le défaut B seulement ?

	B	non B	
A	0,04		0,10
non A			
	0,08		1

V. Le cas de l'équiprobabilité

Cette situation sera présentée comme un cas (très) particulier où les calculs sont parfois un peu plus simples grâce à LA formule pas si "magique" que l'on croit :
nombre de cas favorables / nombre de cas possibles.

EXERCICES

Voici une liste d'exercices qui nous paraissent conformes à l'esprit du nouveau programme de 1ère. Un nombre important de ces exercices ont été testés dans différentes classes. Nous sommes conscients de ce que peut avoir malgré tout d'un peu arbitraire la classification proposée. Pour chacun des exercices nous avons indiqué **des éléments** pour une solution.

I.— EXERCICES "DE RÉFÉRENCE"

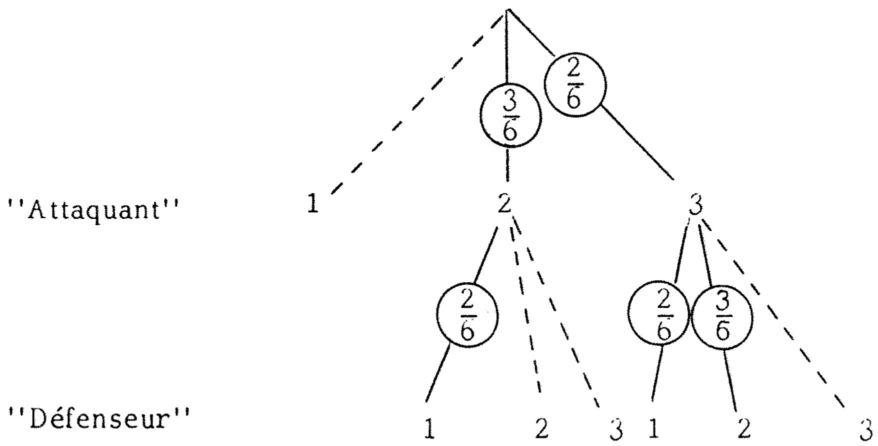
Ces exercices permettent de bien acquérir le maniement des différents outils. Ils pourront être utilisés pour les devoirs en temps limité (à condition bien sûr de tenir compte de la série et du niveau des élèves, par exemple en ajoutant des indications pour une solution ...).

Exercice 1

On dispose de deux dés équilibrés. Le dé noir porte les numéros 1, 2, 3, 2, 2, 3 et le dé rouge les numéros 1, 2, 3, 1, 2, 2.

Au cours d'un jeu de société, les combats se règlent à l'aide des deux dés : l'attaquant lance le dé noir et gagne si son dé marque plus de points que le dé rouge lancé par son adversaire. A qui ce jeu est-il favorable?

Arbre pour calculer la probabilité que l'attaquant gagne



Probabilité que l'attaquant gagne :

$$\frac{3}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

Le jeu est favorable à celui qui est attaqué.

A propos des arbres

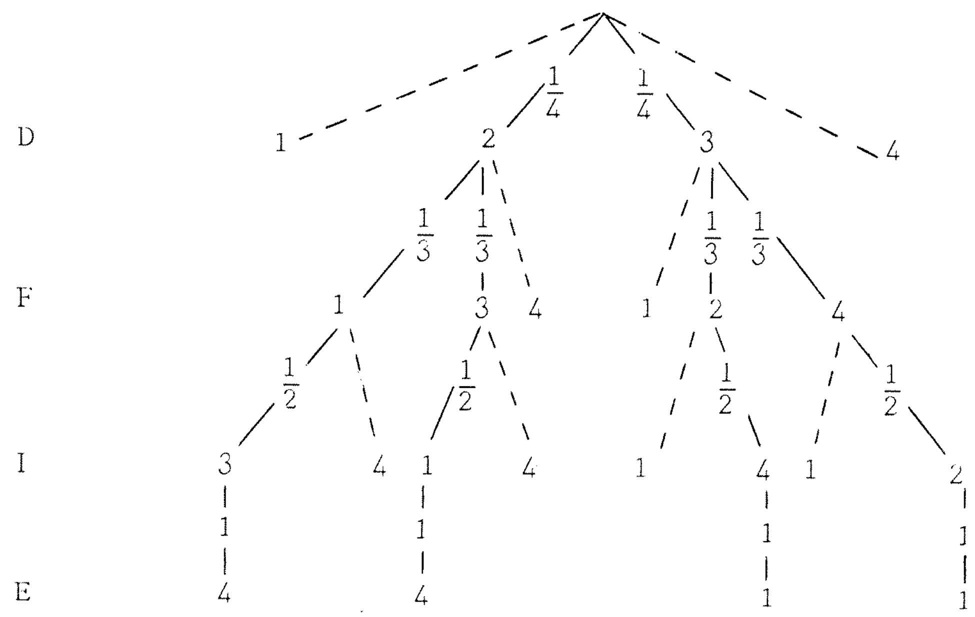
Nous avons utilisé des arbres ici pour présenter, en peu de place, des éléments de solution pour collègues avertis.

La seule convention que nous avons respectée est de mettre en pointillés les branches inutiles pour le calcul de la probabilité recherchée. Vous verrez donc des arbres de différentes formes, verticaux souvent, horizontaux parfois, et plus ou moins explicites suivant les circonstances ...

Exercice 2

Les drapeaux français, allemand, italien et espagnol sont hissés en haut de quatre mats alignés, dans un ordre tiré au sort. Quelle est la probabilité que le drapeau allemand soit entre le drapeau français et le drapeau italien?

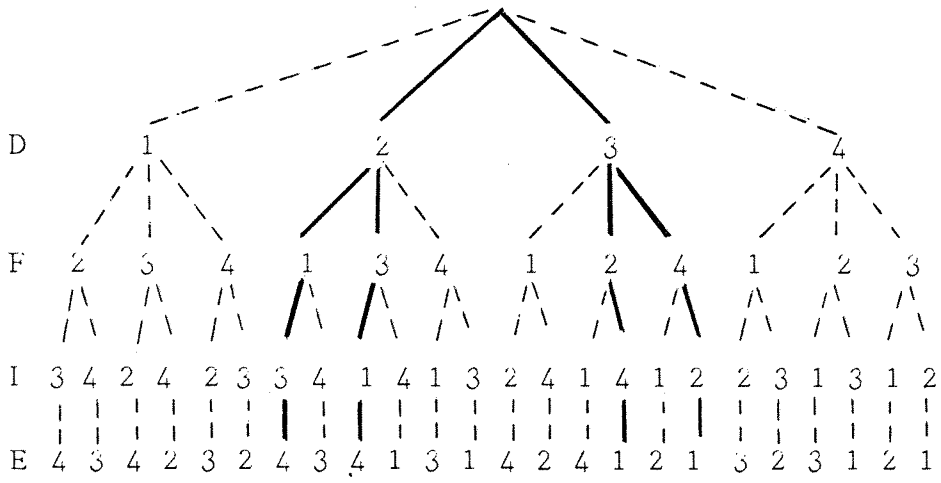
1ère méthode : utilisation d'un arbre pondéré



D'où :

$$p(A) = 4 \times (\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1) = 4 \times \frac{1}{24} = \frac{1}{6}.$$

2ème méthode : utilisation d'un arbre "de dénombrement" :



D'où :

$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{4}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}.$$

On remarquera l'économie réalisée en utilisant un arbre pondéré (1ère méthode).

Exercice 3

On lance un dé, bien équilibré, deux fois de suite.

Calculer :

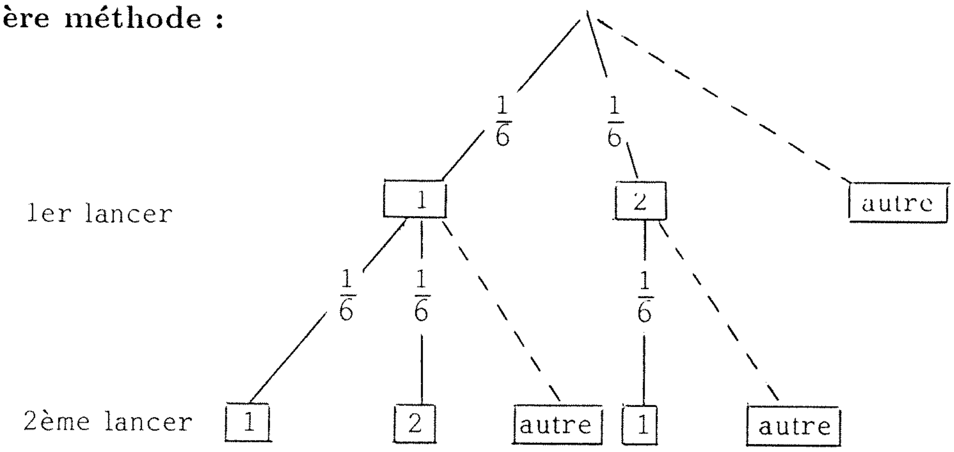
1) La probabilité que la somme des résultats obtenus aux deux lancers soit supérieure ou égale à 4.

2) La probabilité que le résultat obtenu au 2ème lancer soit supérieur à celui obtenu au 1er lancer.

---

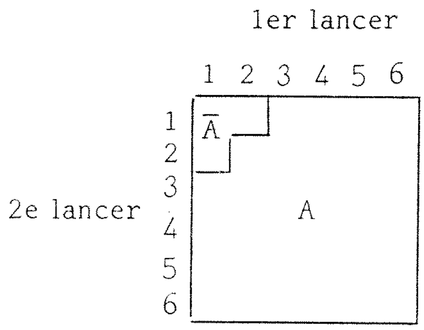
1)

1ère méthode :



$$p(\overline{A}) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \qquad p(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}.$$

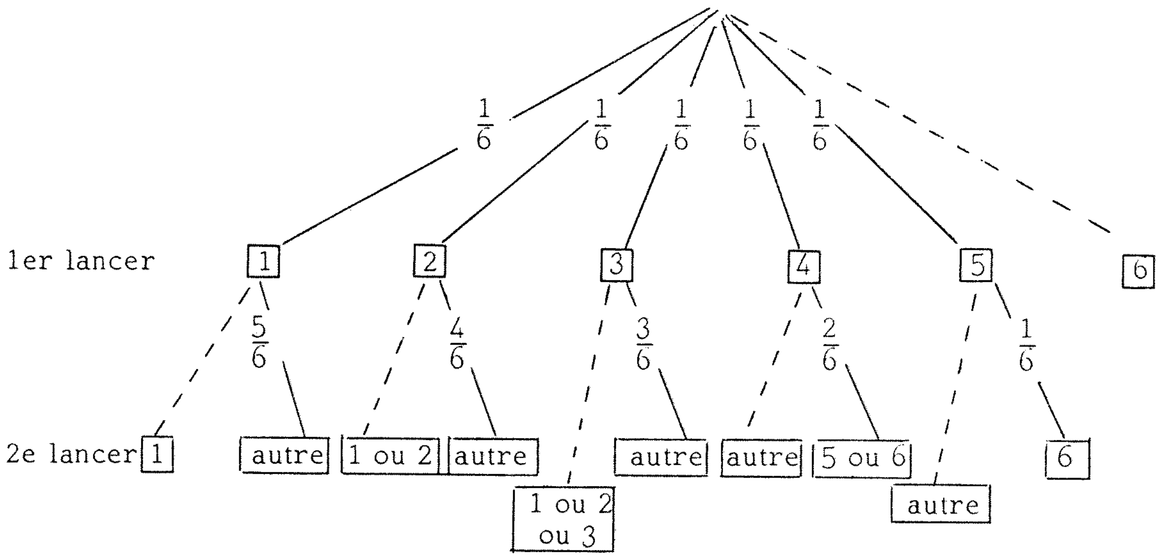
2ème méthode :



$$p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \frac{33}{36} = \frac{11}{12}.$$

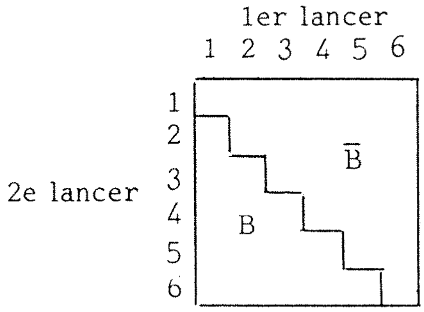
2)

1ère méthode :



$$p(B) = \frac{5}{36} + \frac{4}{36} + \frac{3}{36} + \frac{2}{36} + \frac{1}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

2ème méthode :

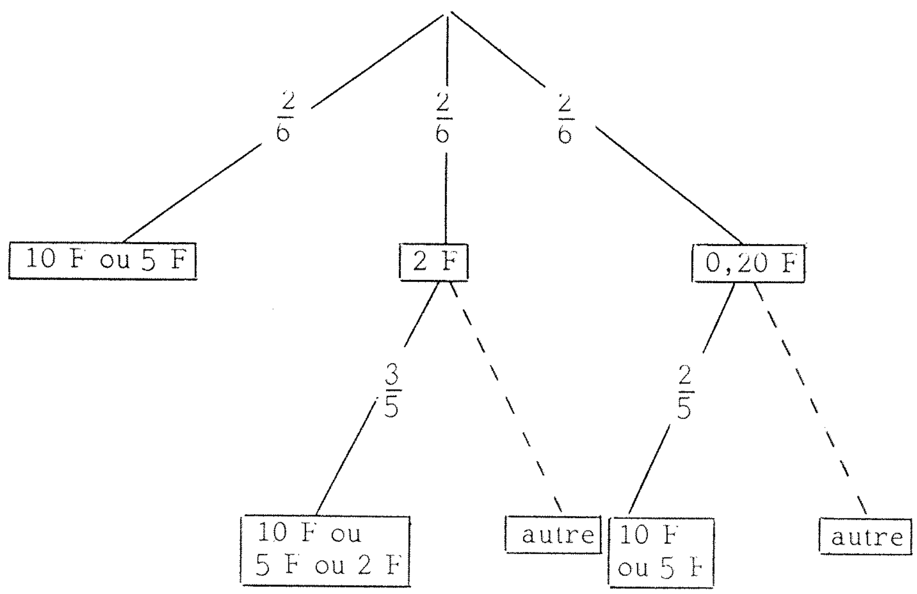


$$p(B) = \frac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

Exercice 4

On veut régler un achat de 4 F. On a en poche :
1 pièce de 10 F
1 pièce de 5 F
2 pièces de 2 F
2 pièces de 0,20 F.

On en tire une première pièce au hasard puis une deuxième si nécessaire. Quelle est la probabilité de pouvoir, avec ces deux pièces, régler son achat ?



$$p(A) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{3}.$$

Exercice 5

Dans une urne il y a 15 boules identiques numérotées de 1 à 15. On tire une boule au hasard et on appelle N son numéro. Soient les événements

A : "N est divisible par 2"
B : "N est divisible par 3".

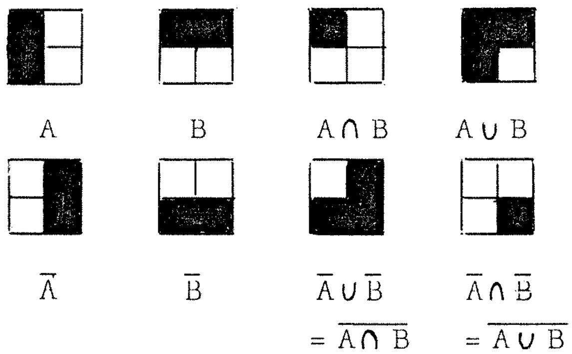
Calculer les probabilités des événements

$$A, B, A \cap B, A \cup B, \overline{A}, \overline{B}, \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Rappels :
$A \cap B$ est l'événement A et B.
$A \cup B$ est l'événement A ou B.
$\overline{A}$ est l'événement contraire de A.

	A	$\overline{\text{A}}$
B	6 12	3 9 15
$\overline{\text{B}}$	2 4 8 10 14	1 5 7 11 13

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$ et il y a équiprobabilité.



$$p(A) = \frac{7}{15} \quad p(B) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \quad p(A \cap B) = \frac{2}{15} \quad p(A \cup B) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

(on peut vérifier que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$).

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A) = \frac{8}{15} \quad p(\overline{B}) = 1 - p(B) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

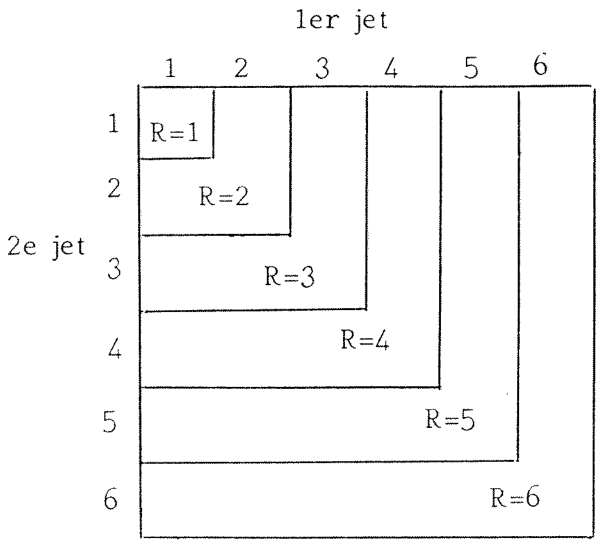
$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - p(A \cup B) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

$$p(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - p(A \cap B) = \frac{13}{15}.$$

Exercice 6

On jette deux fois de suite un dé équilibré. Le résultat R est le plus grand des deux nombres obtenus. Calculer les probabilités des événements :

$$R = 1, \quad R = 2, \quad R = 3, \quad R = 4, \quad R = 5, \quad R = 6.$$



$p(R = 1) = \frac{1}{36}$

$p(R = 2) = \frac{3}{36}$

$p(R = 3) = \frac{5}{36}$

$p(R = 4) = \frac{7}{36}$

$p(R = 5) = \frac{9}{36}$

$p(R = 6) = \frac{11}{36}$

Exercice 7

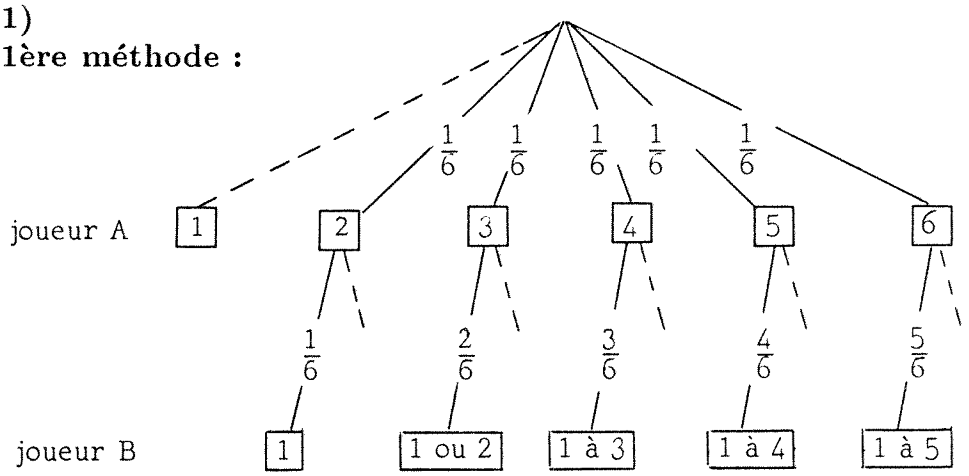
Deux joueurs s'affrontent aux dés selon la règle suivante :
A lance son dé une première fois. Il choisit de s'arrêter là ou de relancer son dé. Le résultat de A est le résultat du dernier lancer.
Ensuite B lance son dé. B gagne s'il a un résultat au moins égal à celui de A.

1) Calculer la probabilité pour que A gagne en ne lançant son dé qu'une fois.

2) Si au premier lancer A a jeté un 3, a-t-il intérêt à relancer son dé ? Et s'il a jeté un 4 ?

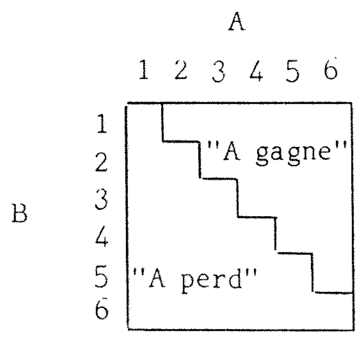
---

1)
1ère méthode :



$$p\,(\text{“}A\text{ gagne”}) = \tfrac{1}{6}\times\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{6}\times\tfrac{2}{6}+\tfrac{1}{6}\times\tfrac{3}{6}+\tfrac{1}{6}\times\tfrac{4}{6}+\tfrac{1}{6}\times\tfrac{5}{6}=\tfrac{15}{36}=\tfrac{5}{12}.$$

2ème méthode :



$p\,(\text{“}A\text{ gagne”}) = \frac{15}{36}$.

2)

- Si au premier lancer A a jeté un 3, la probabilité qu'il gagne s'il ne relance pas est $\frac{2}{6}$ alors que s'il relance elle est égale à $\frac{5}{12}$ comme dans la première question.
A a intérêt à relancer son dé.

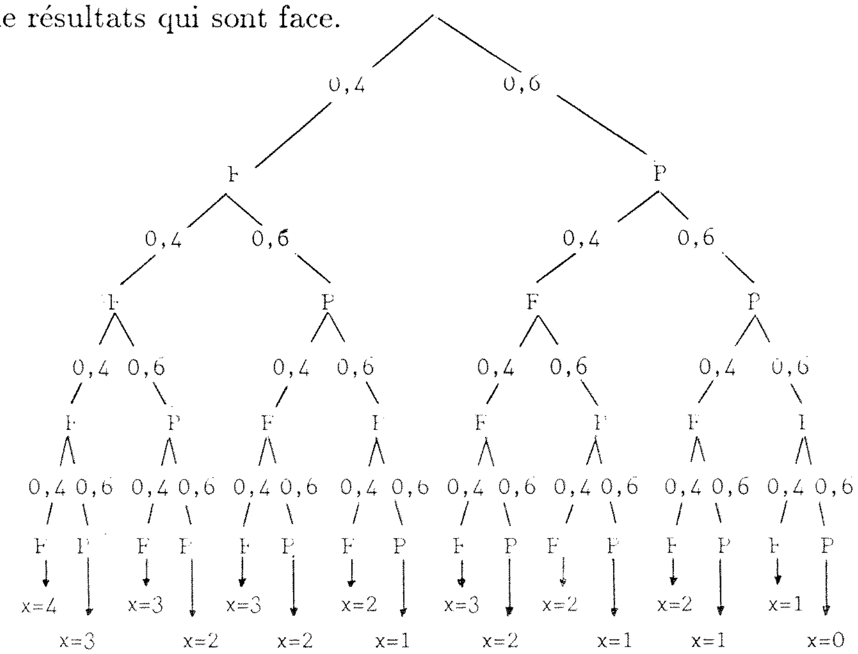
- Si au premier lancer A a jeté un 4, la probabilité qu'il gagne s'il ne relance pas est $\frac{3}{6}$ alors que s'il relance elle est égale à $\frac{5}{12}$.
A n'a pas intérêt à relancer son dé.

Exercice 8

Après avoir lancé de très nombreuses fois une pièce on en a conclu qu'elle était truquée et qu'on pouvait attribuer à la probabilité qu'elle "tombe sur face" la valeur 0,4. On lance la pièce quatre fois de suite. Calculer les probabilités des événements suivants :

1) "aucun des quatre résultats n'est face"
2) "un et un seulement des quatre résultats est face"
3) "deux et deux seulement des quatre résultats sont face"
4) "trois et trois seulement des quatre résultats sont face"
5) "les quatre résultats sont face".

Soit X le nombre de résultats qui sont face.



1) $p(X=0) = 0,6^4$.
2) $p(X=1) = 4 \times 0,6^3 \times 0,4$.
3) $p(X=2) = 6 \times 0,6^2 \times 0,4^2$.
4) $p(X=3) = 4 \times 0,6 \times 0,4^3$.
5) $p(X=4) = 0,4^4$.

Remarques :

1) On pourra vérifier que :

$$p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)+p(X=4)$$
$$= 0,6^4 + 4\times 0,6^3 \times 0,4 + 6 \times 0,6^2 \times 0,4^2 + 4 \times 0,6 \times 0,4^3 + 0,4^4 = (0,6+0,4)^4 = 1$$

2) X suit une loi binomiale ...

Exercice 9

Tu as la possibilité de participer à deux jeux de "roulette".

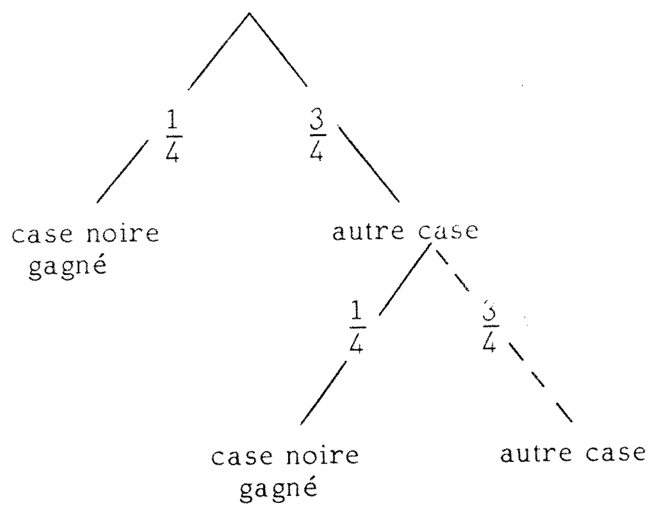
a) Dans le jeu A tu gagnes si la boule s'arrête sur une case noire. 50 % exactement des cases sont noires.

b) Dans le jeu B tu gagnes si lors du premier essai, ou lors du deuxième essai ou lors des deux, la boule s'arrête sur une case noire. 25 % exactement des cases sont noires.

Quel jeu choisis-tu?

Au jeu A la probabilité de gagner est de $\frac{1}{2}$.

Au jeu B :



La probabilité de gagner est de

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16}.$$

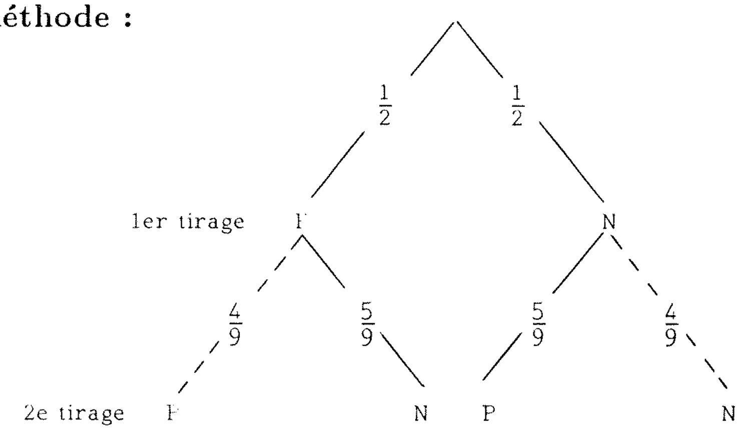
On a intérêt à choisir le jeu A.

Exercice 10

On dispose de dix cartons. Sur chacun figure un nombre. 5 de ces nombres sont positifs, les 5 autres sont négatifs.

On tire successivement sans remise deux cartons. Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres dont le produit est négatif ?

1ère méthode :



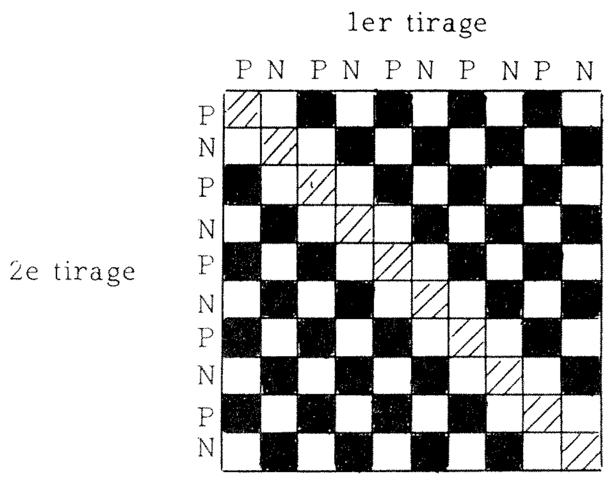
$$p(A) = \frac{5}{18} + \frac{5}{18} = \frac{5}{9}.$$

2ème méthode :

: le produit est positif

: le produit est négatif

: ce produit n'existe pas



card $\Omega = 90$ card $A = 50$ $p(A) = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$

II.— EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Exercice 11

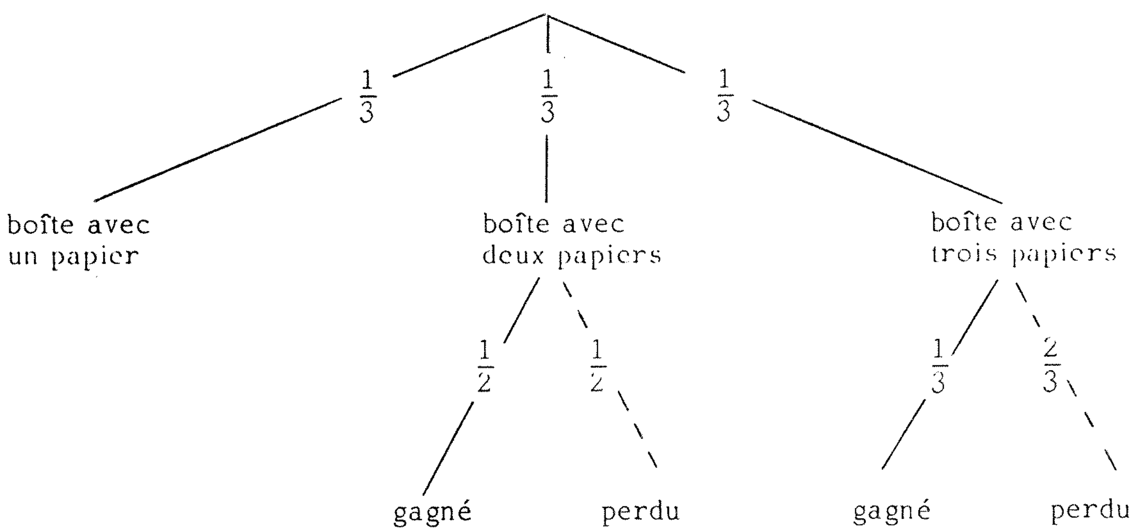
Dans un jeu forain on dispose de trois boîtes d'apparence identique. Elles contiennent respectivement un, deux et trois papiers; dans chacune des boîtes un seul papier est marqué. Une partie consiste pour un joueur à désigner au hasard une boîte et à tirer également au hasard un papier dans cette boîte. Si le papier tiré est marqué, le joueur reçoit un bon. Le papier tiré est remis dans la boîte à la fin de la partie.

1) Lors d'une partie, calculer la probabilité pour que le papier tiré soit marqué.

2) Un joueur joue successivement cinq parties. Sachant que quatre bons donnent droit à un lot, quelle est la probabilité que le joueur gagne un lot ?

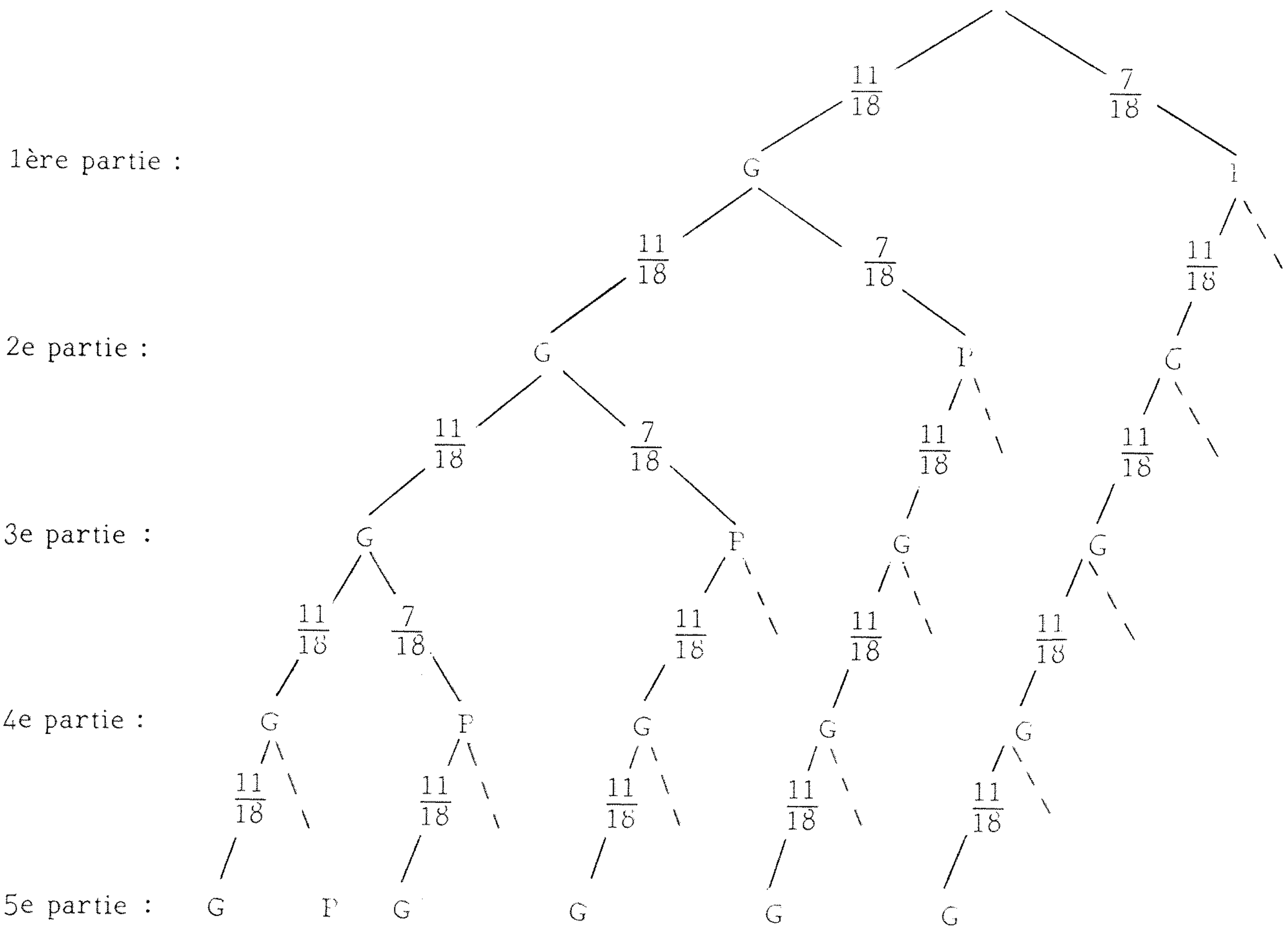
---

1)



$$p\,(\text{“Gagné”}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}.$$

2)

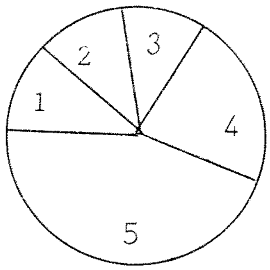


$$p\,(\text{“Gagner un lot”}) = \left(\frac{11}{18}\right)^5 + 5\left(\frac{11}{18}\right)^4 \times \frac{7}{18} \simeq 0,36.$$

Remarque : si on appelle X le nombre de bons obtenus en jouant cinq parties, X suit une loi binomiale …

Exercice 12

1) Une roue de loterie est divisée en 5 secteurs, portant les numéros 1, 2, 3, 4 et 5 et tels que :



Les numéros 1, 2, 3 ont la même probabilité. La probabilité du n° 4 est double de celle des n° 1, 2 et 3 et celle du n° 5 est double de celle du n° 4.

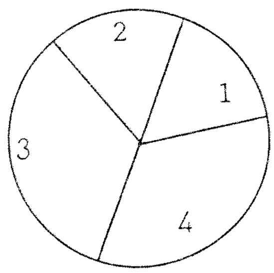
Calculer la probabilité de chaque numéro.

2) Une seconde roue de loterie est divisée en 4 secteurs circulaires portant les numéros 1, 2, 3 et 4.
Les numéros 1 et 2 ont la même probabilité.
Les numéros 3 et 4 ont la même probabilité, double de celle des n° 1 et 2.
Construire, en justifiant, une telle roue.

3) On fait tourner ces deux roues. On gagne lorsque la somme des numéros obtenus est 8 ou 9.
Quelle est la probabilité de gagner?

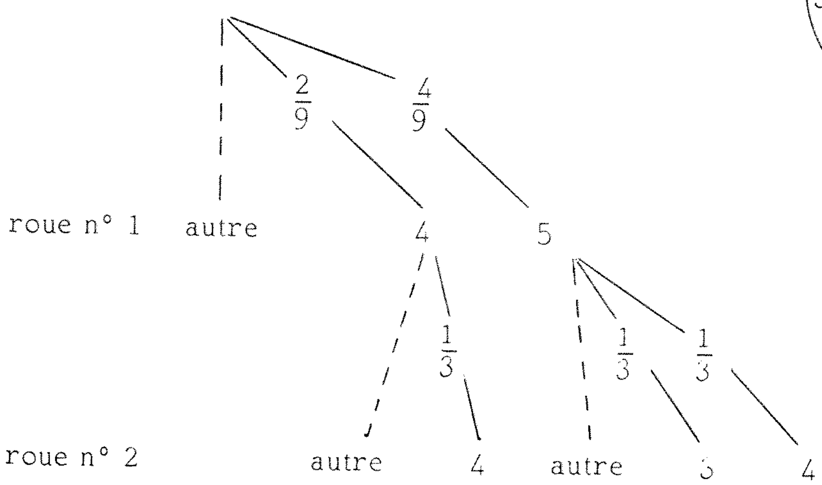
---

1) $p(\{1\}) = p(\{2\}) = p(\{3\}) = \frac{1}{9}$; $p(\{4\}) = \frac{2}{9}$; $p(\{5\}) = \frac{4}{9}$.



2) $p(\{1\}) = p(\{2\}) = \frac{1}{6}$ $\qquad p(\{3\}) = p(\{4\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

3)



$$p\,(\text{“Gagné”}) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{10}{27}.$$

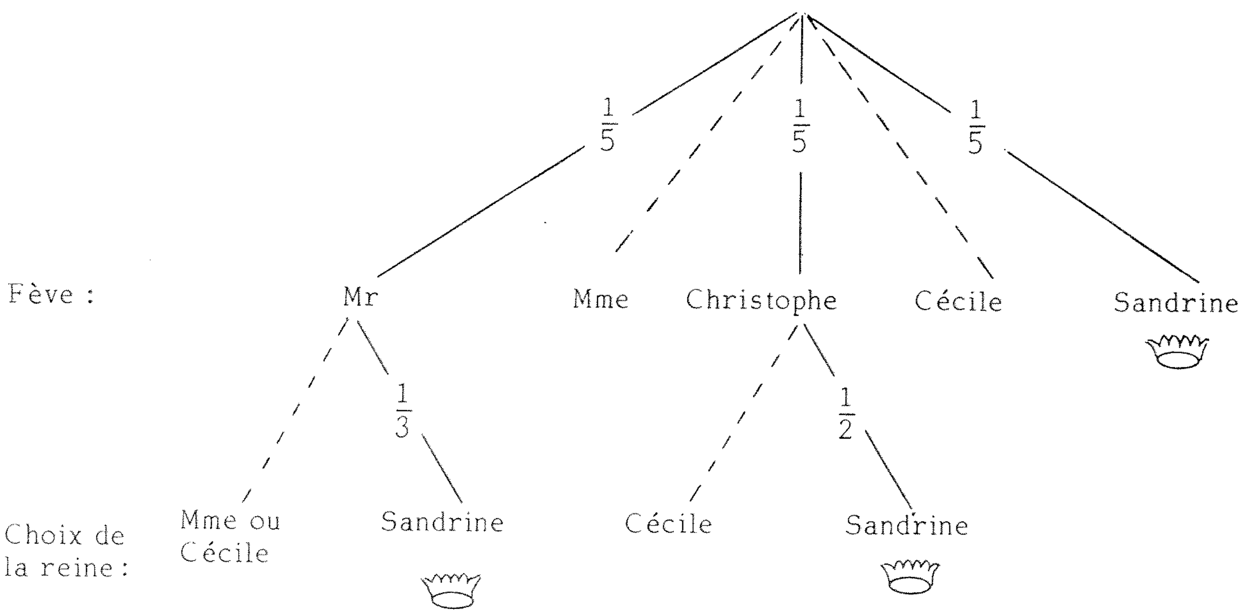
Exercice 13

1) Mr et Mme Dupond et leurs trois enfants Christophe, Cécile et Sandrine tirent les rois. La galette a été partagée en 5 parts égales. Sandrine peut être reine si elle obtient elle-même la fève ou bien si un roi la choisit pour reine. Mr Dupond choisira sa reine en tirant un nom dans un chapeau contenant les noms des trois reines possibles et Christophe choisira entre Cécile et Sandrine en jouant à pile ou face.
Quelle probabilité a donc Sandrine d'être reine?

2) Aujourd'hui, lors d'un autre tirage des rois, la galette a été malencontreusement partagée en 6 parts égales. Il a été convenu de donner une part à chacun des membres de la famille Dupond et de partager la 6^e part équitablement entre les enfants. Pour le reste, le choix de la reine se fait suivant la règle du 1).
Quelle probabilité a aujourd'hui Sandrine d'être reine?

---

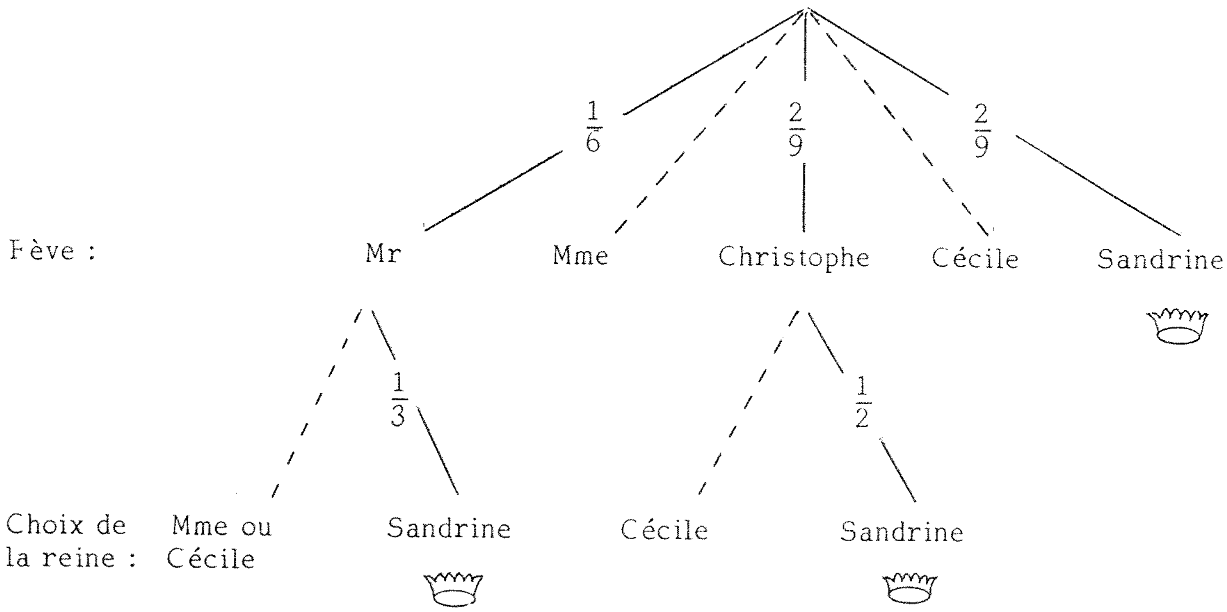
1)



La probabilité cherchée vaut :

$$\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{2+3+6}{30}=\frac{11}{30}\simeq 0,37.$$

2) $\frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$. D'où



La probabilité cherchée vaut :

$$\frac{1}{18} + \frac{2}{18} + \frac{2}{9} = \frac{7}{18} \simeq 0,39.$$

Exercice 14

On lance un dé bien équilibré jusqu'à l'obtention d'un six.

a) Quelle est la probabilité qu'il faille plus de deux jets?

b) Quelle est la probabilité qu'il faille plus de 3, 4, 5, ... n jets?

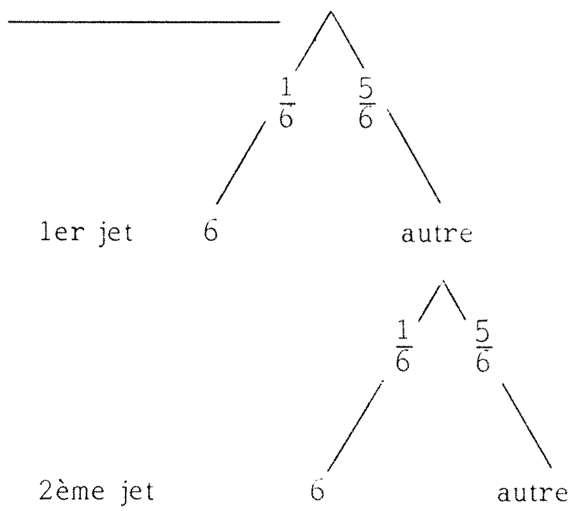
c) Quelle est la probabilité p_n d'obtenir au moins un six en lançant n fois un dé?

d) Quelle est la limite de la suite (p_n) lorsque n tend vers l'infini?

e) Montrer que la suite (p_n) est croissante. A partir de quelle valeur de n la probabilité p_n est-elle supérieure à 0,99?

---

a)



Probabilité qu'il faille 1 ou 2 jets :

$$\frac{1}{6} + \frac{5}{36} = \frac{11}{36}.$$

Probabilité qu'il faille plus de 2 jets :

$$\frac{25}{36} = (\frac{5}{6})^2.$$

b) Probabilité qu'il faille plus de n jets : $(\frac{5}{6})^n$.

c) $p_n = 1 - (\frac{5}{6})^n$.

d) $\lim(\frac{5}{6})^n = 0$ donc $\lim p_n = 1$.

e) $(\frac{5}{6})^n$ décroît donc p_n augmente.

$$p_n > 0,99 \Longleftrightarrow (\frac{5}{6})^n < 0,01 \Longleftrightarrow n \geq 26.$$

Exercice 15

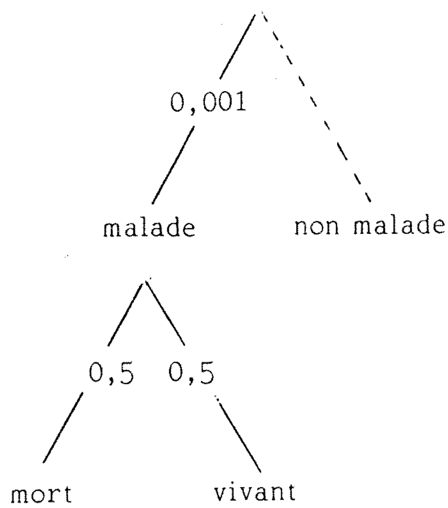
Dans la population de Papirémie sévit une maladie mystérieuse appelée toxoprobamathose. La probabilité, pour un papirémien, d'en être atteint est de 0,001. La toxoprobamathose est mortelle, avec une probabilité de 0,5 pour tout individu atteint et non traité et avec une probabilité de 0,1 pour tout individu atteint, dépisté et traité. Le seul test de dépistage disponible permet de détecter 80 % des personnes atteintes, mais désigne aussi à tort comme malades 2 % des personnes non atteintes. Le traitement utilisé est mortel pour 1 % des personnes traitées à tort.

a) Si on décide de ne procéder à aucun dépistage ni traitement, quelle sera, pour un papirémien, la probabilité de mourir de toxoprobamathose?

b) On décide un dépistage et un traitement systématique des personnes ainsi désignées. Quelle est alors la probabilité pour un papirémien, de mourir de toxoprobamathose ou de son traitement?

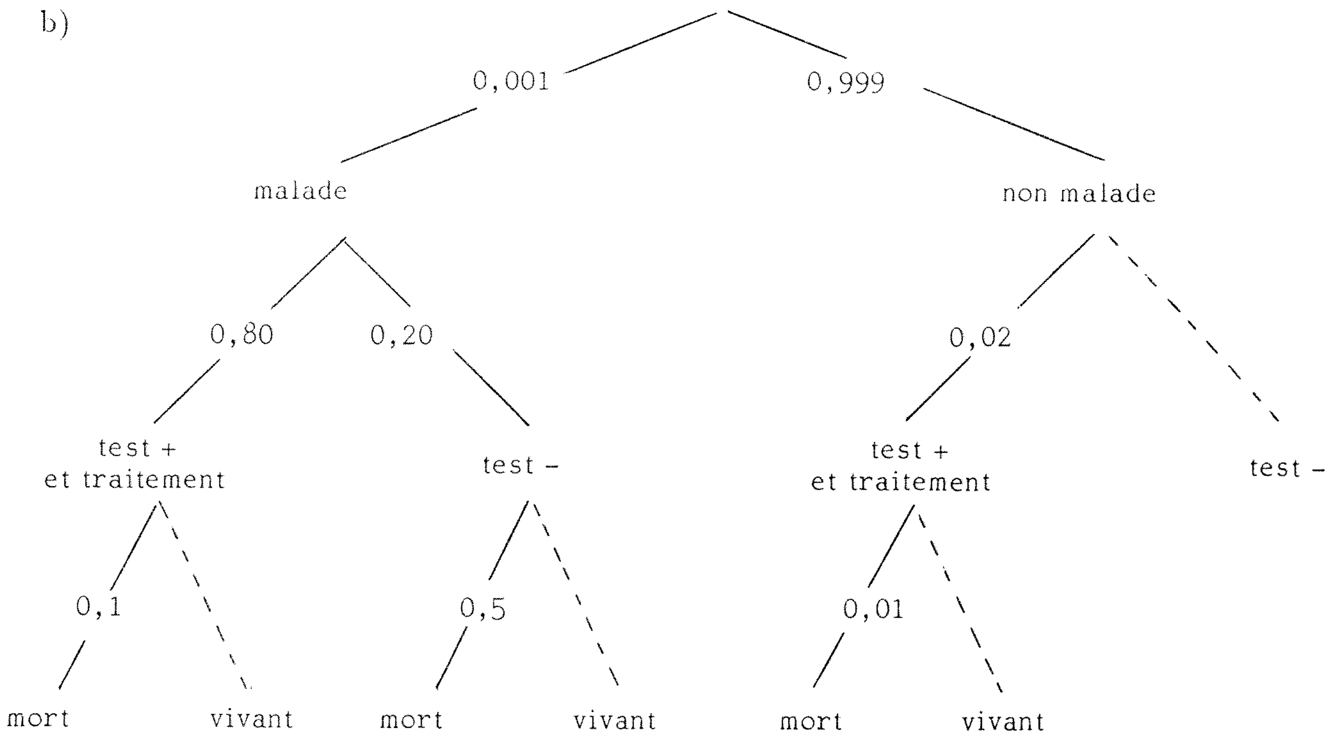
---

a)



La probabilité cherchée vaut : $0,001 \times 0,5 = 0,0005$.

b)



La probabilité cherchée vaut :

$$(0,001 \times 0,80 \times 0,1) + (0,001 \times 0,20 \times 0,5) + (0,999 \times 0,02 \times 0,01) \simeq 0,00038.$$

Exercice 16

A l'entrée d'une salle de classe se trouvent 4 interrupteurs identiques, un pour chacune des 4 lampes de la classe.

A votre arrivée, vous constatez que le tableau est encore éclairé, et qu'une des trois autres lampes est allumée également.

1) Vous actionnez au hasard l'un des interrupteurs.
Calculez la probabilité qu'après cela

a) le tableau soit encore éclairé,

b) il y ait trois lampes allumées dans la salle.

2) Vous actionnez cette fois successivement deux interrupteurs différents.
Calculez la probabilité qu'après cela

a) le tableau ne soit plus éclairé,

b) l'une au moins des deux lampes allumées à votre arrivée le soit encore,

c) les quatre lampes soient allumées.

---

1)

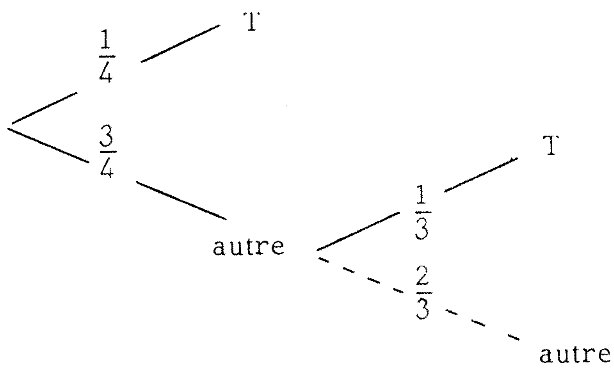
a) La probabilité cherchée est de $\frac{3}{4}$.

b) La probabilité cherchée est de $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2) **1ère méthode :**

On notera T, L_1, L_2, L_3 les 4 interrupteurs, T étant celui du tableau, L_1 celui de la lampe qui est allumée au départ.

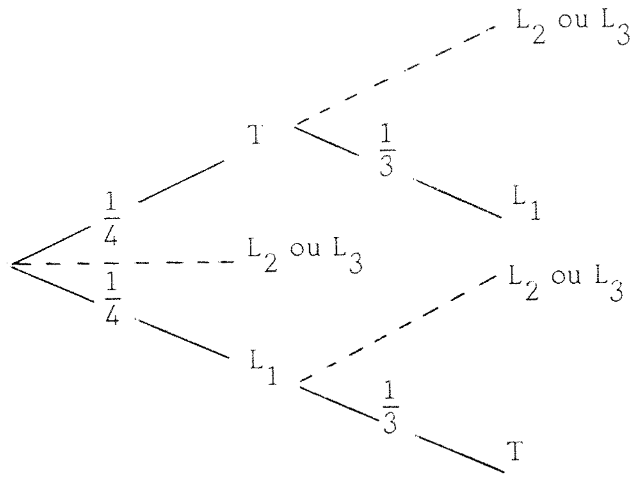
a) Le tableau n'est plus éclairé si on a actionné T



La probabilité cherchée est donc égale à :

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

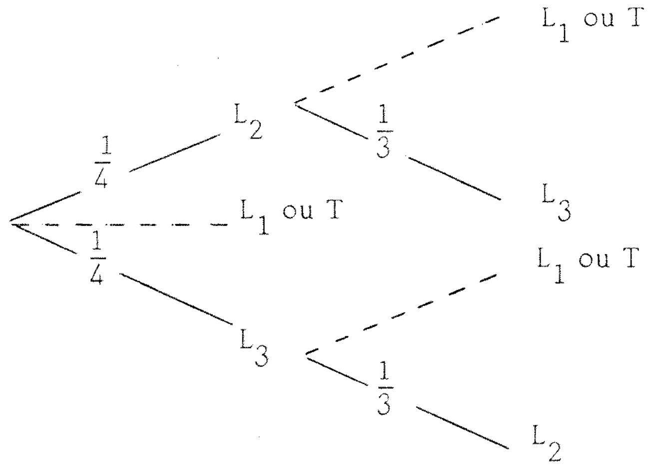
b) L'événement contraire est : "on a actionné T et L_1" ; l'arbre dessiné correspond à cet événement contraire.



La probabilité demandée vaut :

$$1 - (\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}) = \frac{5}{6}.$$

c) L'événement est réalisé si on actionne L_2 et L_3.

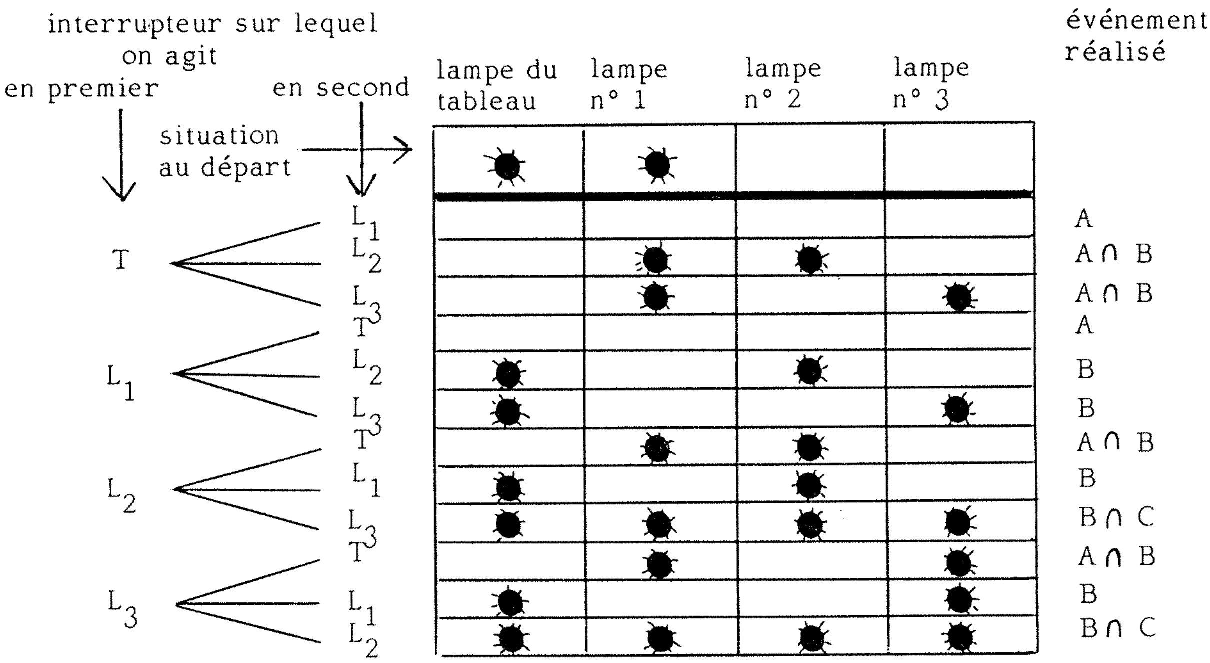


La probabilité d'avoir 4 lampes allumées vaut

$$\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

2ème méthode :

A est l'événement : "le tableau n'est plus éclairé".
B est l'événement : "l'une au moins des deux lampes allumées à votre arrivée l'est encore".
C est l'événement : "les quatre lampes sont allumées".



a) $p(A) = \dfrac{\text{card } A}{\text{card } \Omega} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$

b) $p(B) = \dfrac{\text{card } B}{\text{card } \Omega} = \dfrac{10}{12} = \dfrac{5}{6}$

c) $p(C) = \dfrac{\text{card } C}{\text{card } \Omega} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$

Exercice 17

Un damier comporte quatre cases numérotées de 1 à 4. Un joueur dispose de quatre jetons, numérotés également de 1 à 4 qu'il place au hasard sur le damier à raison d'un jeton par case.
Quelle est la probabilité pour que le joueur place les jetons de telle sorte que le nombre de jetons situés sur les cases portant leurs numéros soit égal à

1) quatre ? 2) trois ? 3) deux ? 4) un ? 5) zéro ?

Damier :

1	2
4	3

On dresse la liste des événements élémentaires :

$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&2\\\hline 4&3\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&3\\\hline 4&2\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&4\\\hline 2&3\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1&4\\\hline 3&2\\\hline\end{array}$
X = 2	X = 4	X = 1	X = 2	X = 2	X = 1
$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 2&1\\\hline 3&4\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 2&1\\\hline 4&3\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 2&3\\\hline 1&4\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 2&3\\\hline 4&1\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 2&4\\\hline 1&3\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 2&4\\\hline 3&1\\\hline\end{array}$
X = 0	X = 2	X = 0	X = 1	X = 1	X = 0
$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 3&1\\\hline 2&4\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 3&1\\\hline 4&2\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 3&2\\\hline 1&4\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 3&2\\\hline 4&1\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 3&4\\\hline 1&2\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 3&4\\\hline 2&1\\\hline\end{array}$
X = 0	X = 1	X = 1	X = 2	X = 0	X = 0
$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 4&1\\\hline 2&3\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 4&1\\\hline 3&2\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 4&2\\\hline 1&3\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 4&2\\\hline 3&1\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 4&3\\\hline 1&2\\\hline\end{array}$	$\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 4&3\\\hline 2&1\\\hline\end{array}$
X = 1	X = 0	X = 2	X = 1	X = 0	X = 0

$$1)\ p(X=4) = \frac{1}{24}$$

$$2)\ p(X=3) = 0$$

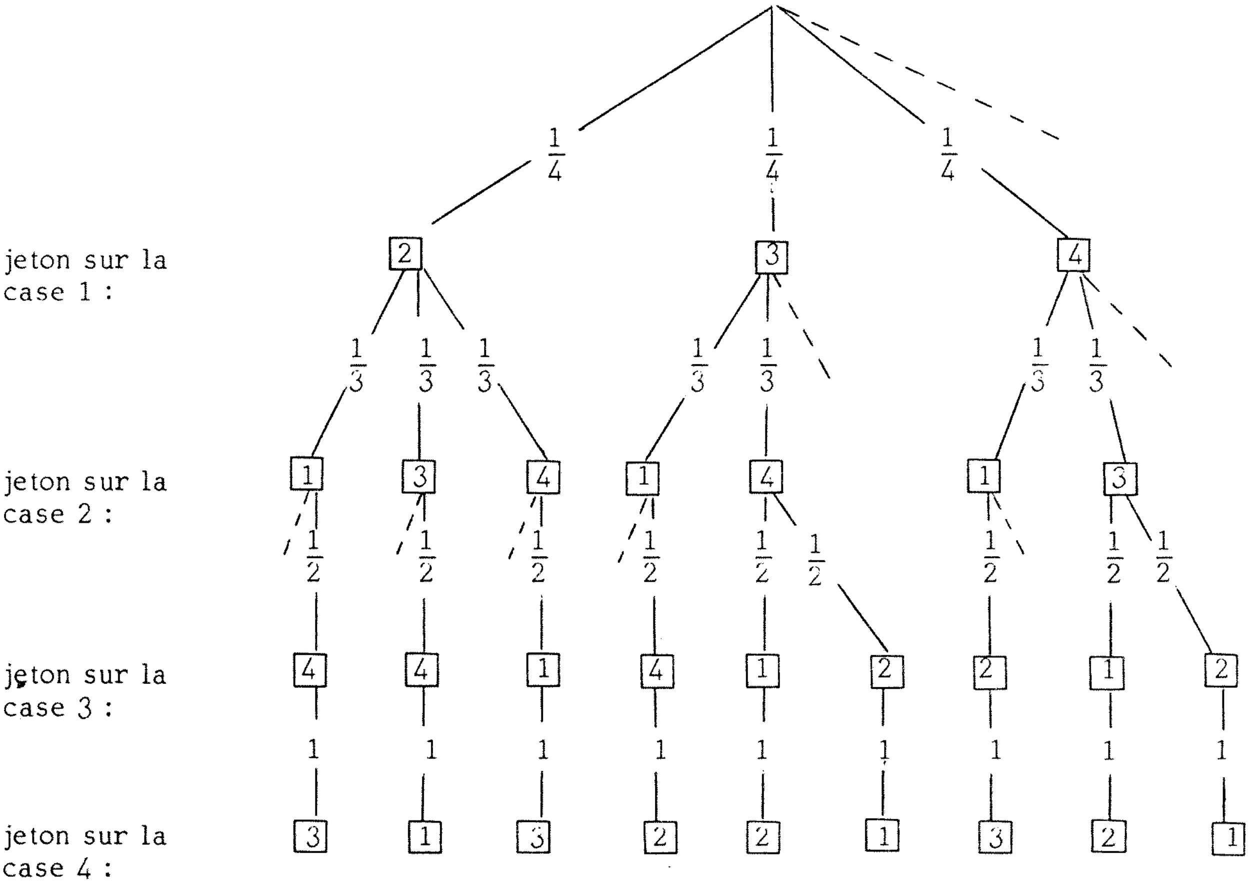
$$3)\ p(X=2) = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

$$4)\ p(X=1) = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

$$5)\ p(X=0) = \frac{9}{24}.$$

Remarques :

1) On peut aussi utiliser des arbres.
Exemple pour le 5) :



2) Il s'agit de compter ici le nombre X de points fixes d'une permutation de n éléments.
On démontre que

$$p(X = s) = \frac{1}{s!}\Big(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-s}}{(n-s)!}\Big).$$

Exercice 18

Une urne contient deux boules rouges et une boule noire. Deux joueurs extraient tour à tour, sans remise, une boule de cette urne. Celui des joueurs qui, le premier, tire la boule noire gagne.

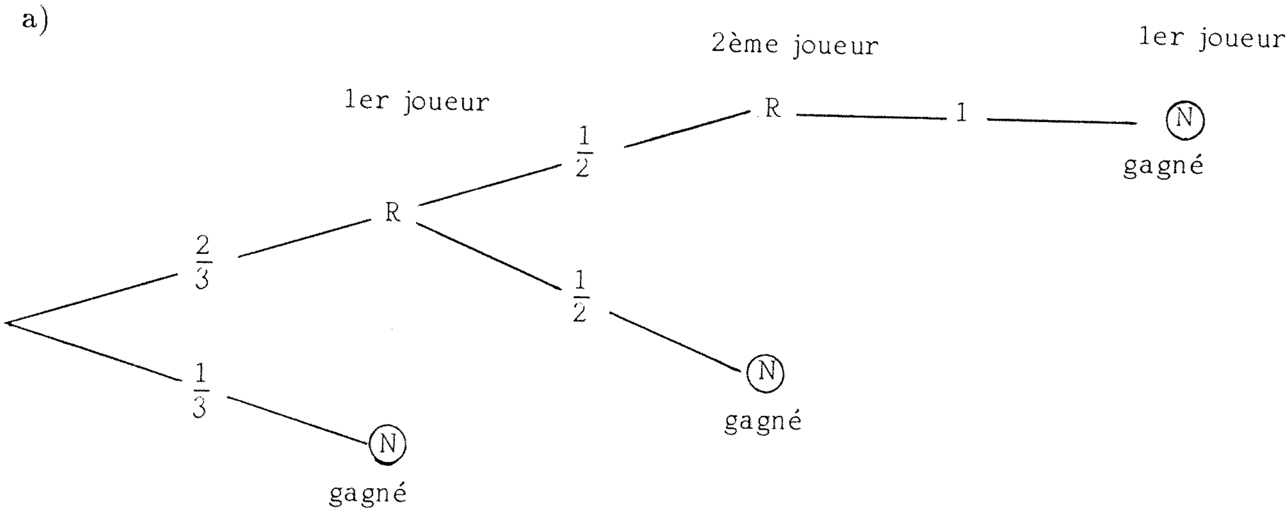
a) Vaut-il mieux jouer en premier ou en second ? Quelle est la probabilité de gagner de chacun des joueurs ?

b) Mêmes questions si l'urne contient trois boules rouges et une boule noire.

c) Mêmes questions si l'urne contient n boules rouges et une boule noire.

---

a)

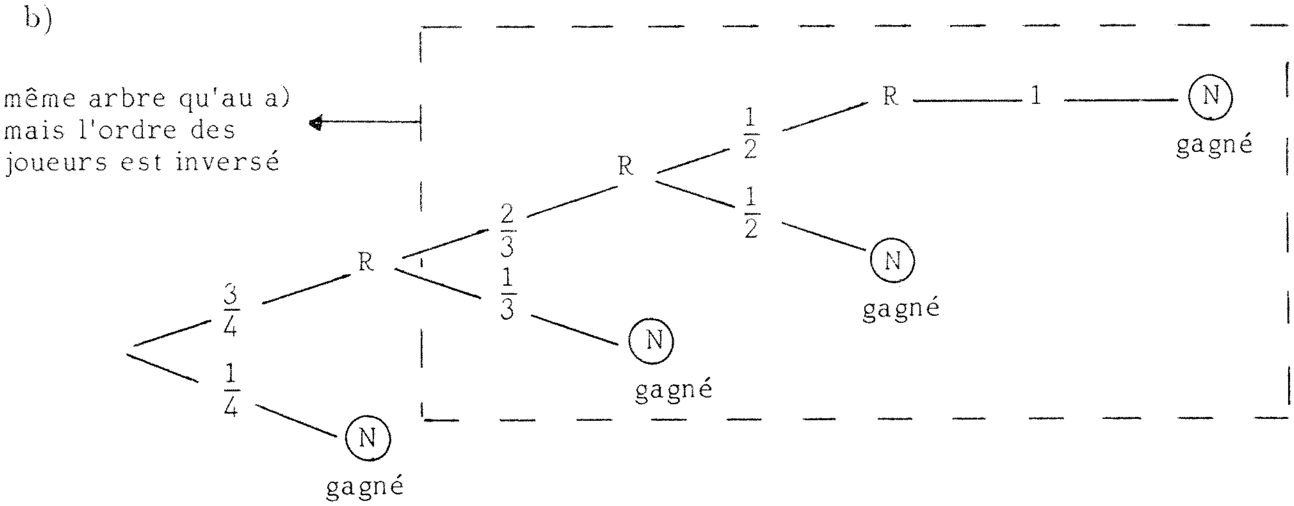


$$p\,(\text{“le premier gagne”}) = \tfrac{1}{3} + (\tfrac{2}{3} \times \tfrac{1}{2} \times 1) = \tfrac{2}{3}.$$

$$p\,(\text{“le second gagne”}) = \tfrac{2}{3} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{3}.$$

Il vaut mieux jouer en premier.

b)

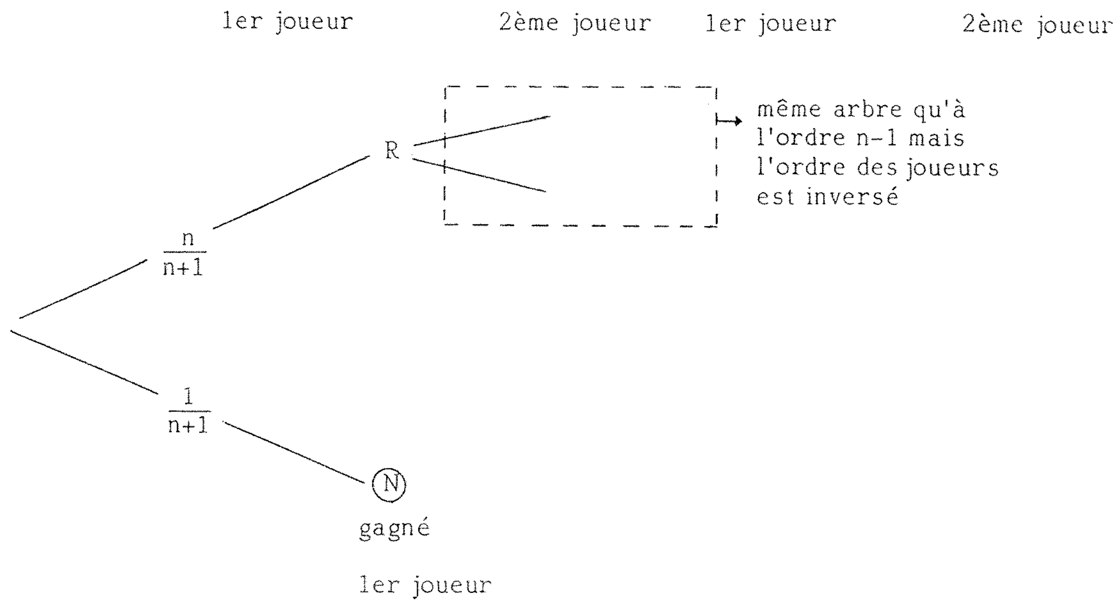


$$p\,(\text{"le premier gagne"}) = \tfrac{1}{4} + (\tfrac{3}{4} \times \tfrac{2}{3} \times \tfrac{1}{2}) = \tfrac{1}{2}.$$

$$p\,(\text{"le second gagne"}) = (\tfrac{3}{4} \times \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{3}{4} \times \tfrac{2}{3} \times \tfrac{1}{2} \times 1) = \tfrac{1}{2}.$$

Les probabilités sont égales.

c) **1ère méthode :**



Donc si on note p_n la probabilité que le premier gagne

$$p_n = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}(1 - p_{(n-1)}) = 1 - \frac{n}{n+1}p_{(n-1)}.$$

On peut calculer alors de proche en proche $p_3, p_4, p_5, \ldots$. On constatera que $p_n = \frac{1}{2}$ dès que n est impair. Dans une très bonne classe on pourra le démontrer par récurrence :

$$
\begin{aligned}
\text{si } p_{(n-1)} = \frac{1}{2} \text{ alors } p_{(n+1)} &= 1 - \frac{n+1}{n+2}[1 - \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{2}] \\
&= 1 - \frac{n+1}{n+2} + \frac{n}{2(n+2)} = 1 - \frac{2n+2-n}{2(n+2)} \\
&= 1 - \frac{n+2}{2(n+2)} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Du coup, si n est pair,

$$p_n = 1 - \frac{n}{n+1} \times \frac{1}{2} = \frac{n+2}{2n+2}.$$

C'est une suite décroissante (sens de variation de $f : x \longmapsto \frac{x+2}{2x+2}$) et de limite $\frac{1}{2}$.

En conclusion tous les p_n sont supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2}$. Le premier n'est jamais défavorisé.

2ème méthode :

On imagine qu'on tire les $n+1$ boules l'une après l'autre sans s'arrêter à la boule noire. La boule noire se trouvera à la place k avec une probabilité égale à $\frac{1}{n+1}$.

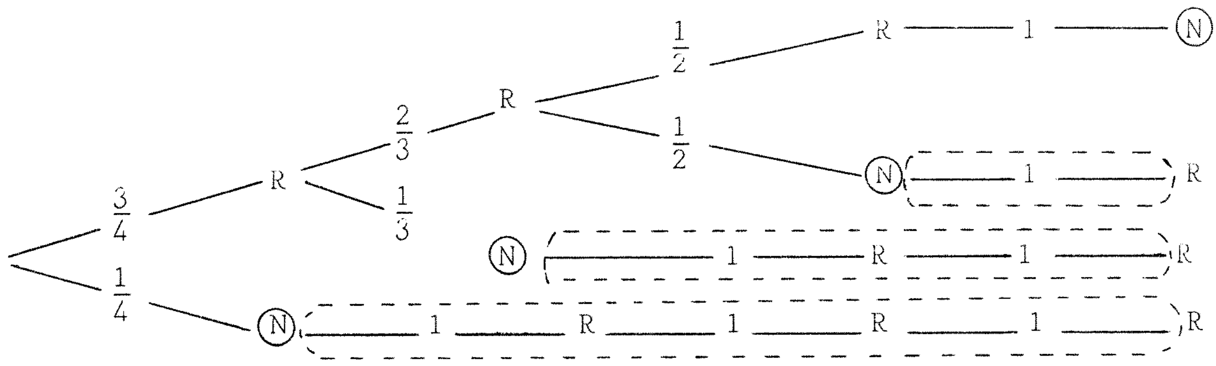
Si n est impair, donc si $n+1$ est pair, le premier joueur a une probabilité de gagner égale à

$$\frac{\frac{n+1}{2}}{n+1} = \frac{1}{2}.$$

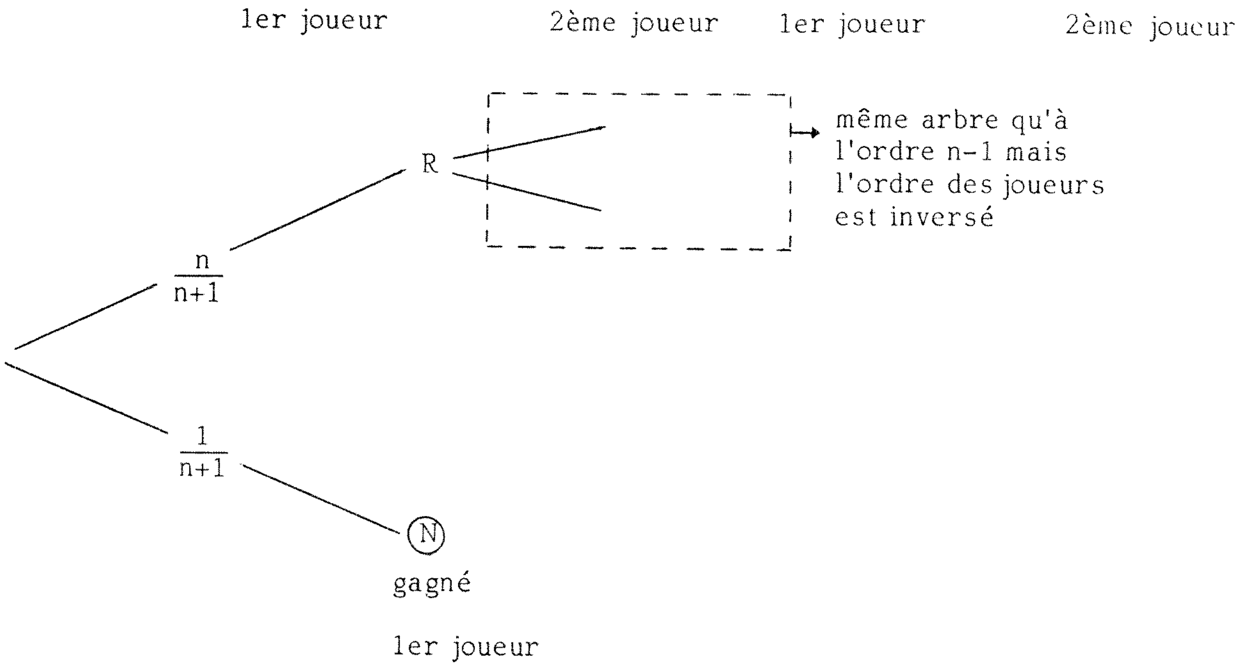
Si n est pair, donc si $n+1$ est impair, le premier joueur a une probabilité de gagner égale à

$$\frac{\frac{n}{2}+1}{n+1} = \frac{n+2}{2n+2}.$$

Pour convaincre les élèves qu'on peut, pour calculer p_n, imaginer qu'on tire les $n+1$ boules l'une après l'autre, on pourra, par exemple, construire l'arbre suivant :



et le comparer à l'arbre construit au b).



Exercice 19

Nous disposons de trois roues de loterie A, B, C divisée chacune en 32 secteurs égaux ainsi distribués :

Roue A :

7 secteurs marqués du chiffre 6
25 secteurs marqués du chiffre 3.

Roue B :

16 secteurs marqués du chiffre 2
16 secteurs marqués du chiffre 5.

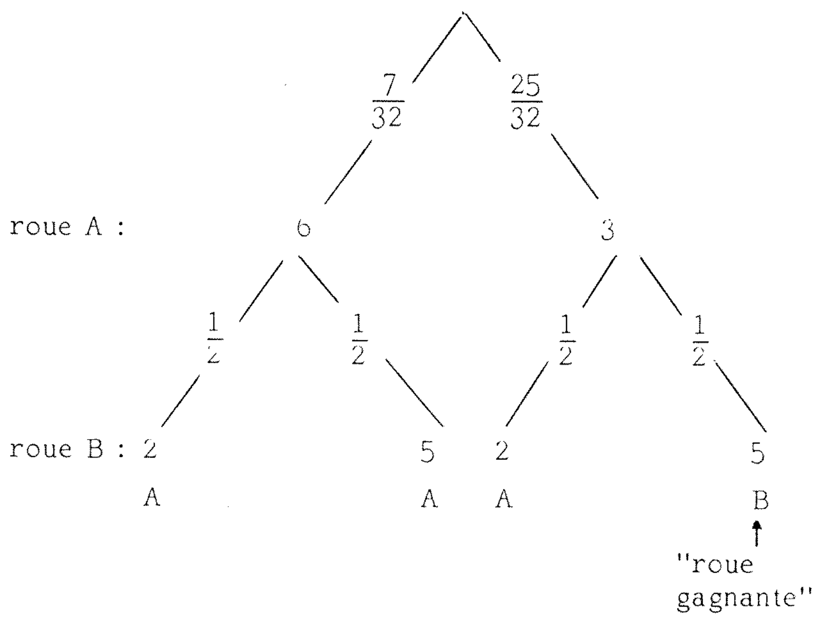
Roue C :

25 secteurs marqués du chiffre 4
7 secteurs marqués du chiffre 1.

Un premier joueur choisit une des trois roues et son adversaire une des roues restantes. On fait alors tourner les deux roues choisies. Le gagnant est celui qui obtient le résultat le plus grand.

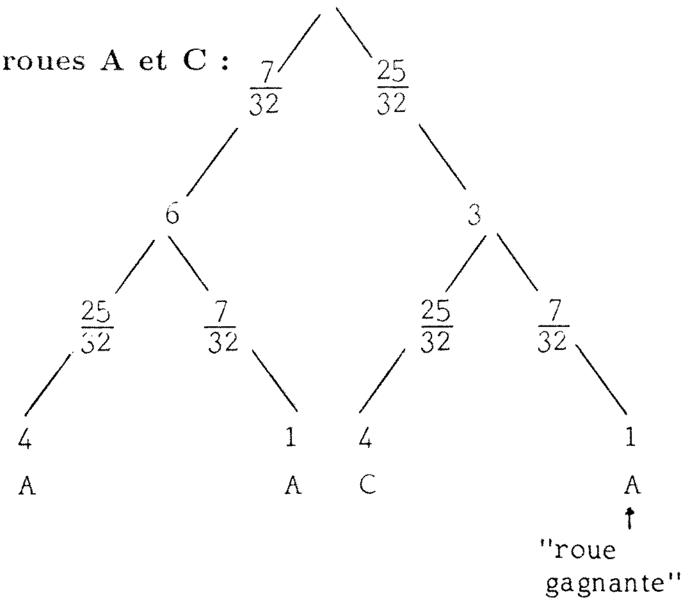
Vaut-il mieux choisir en premier ou en second?

- **Si on fait tourner les roues A et B :**



$$p\,(\text{“joueur ayant choisi } A \text{ gagne”}) = \tfrac{7}{32} + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{25}{32} = \tfrac{39}{64} \simeq 0,61$$
$$p\,(\text{“joueur ayant choisi } B \text{ gagne”}) = \tfrac{25}{64} \simeq 0,39.$$

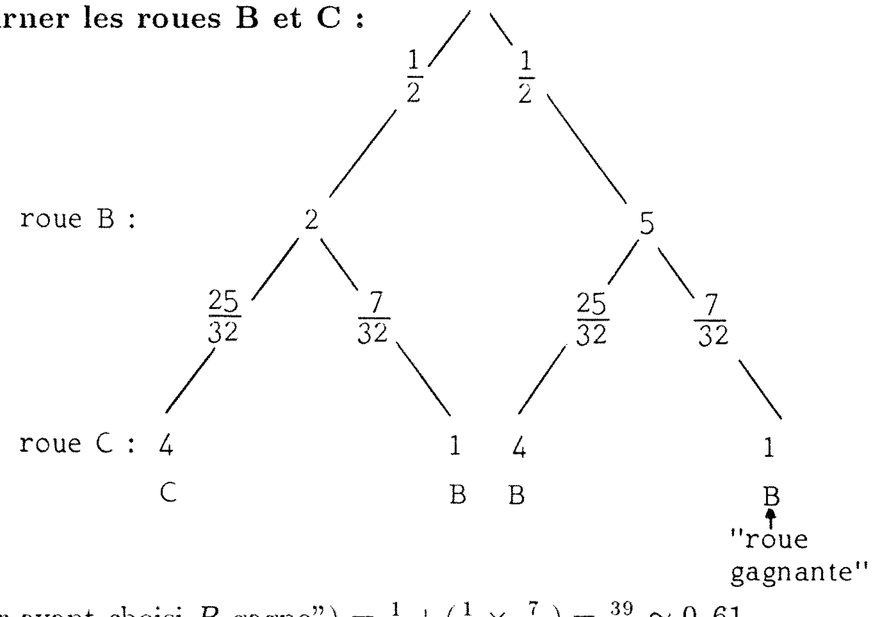
- **Si on fait tourner les roues A et C :**



$$p\,(\text{“joueur ayant choisi } A \text{ gagne”}) = \frac{7}{32} + \frac{25}{32} \times \frac{7}{32} = \frac{399}{1024} \simeq 0,39.$$

$$p\,(\text{“joueur ayant choisi } C \text{ gagne”}) = (\tfrac{25}{32})^2 \simeq 0,61.$$

- **Si on fait tourner les roues B et C :**



$$p\,(\text{“joueur ayant choisi } B \text{ gagne”}) = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2} \times \frac{7}{32}) = \frac{39}{64} \simeq 0,61.$$

$$p\,(\text{“joueur ayant choisi } C \text{ gagne”}) = \frac{1}{2} \times \frac{25}{32} = \frac{25}{64} \simeq 0,39.$$

En conclusion il y a une probabilité supérieure à $\frac{1}{2}$ que :

“A l'emporte sur B”
“B l'emporte sur C”
“C l'emporte sur A”.

Il vaut donc mieux choisir en second car, quel que soit le choix du premier joueur, le second joueur peut s'arranger pour avoir une probabilité de gagner supérieure à $\frac{1}{2}$.

Exercice 20

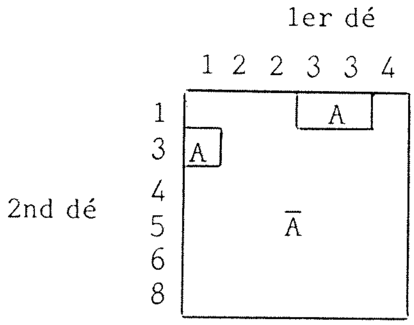
On donne deux dés cubiques dont les faces sont respectivement numérotées :
1, 2, 2, 3, 3 et 4 pour le premier;
1, 3, 4, 5, 6 et 8 pour le second.
On les lance ensemble et on fait la somme des points obtenus.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme de 4?

b) Ces deux dés lancés ensemble pour faire la somme des points obtenus présentent en fait une propriété remarquable. Laquelle?

---

a)
Si on appelle S la somme des points obtenus :
$p(S=4) = \frac{3}{36}$.



A correspond à l'événement "S = 4".

b) On trouve :

$$\begin{array}{ll}
p(S=2) = \frac{1}{36} & p(S=7) = \frac{6}{36} \\
p(S=3) = \frac{2}{36} & p(S=8) = \frac{5}{36} \\
p(S=4) = \frac{3}{36} & p(S=9) = \frac{4}{36} \\
p(S=5) = \frac{4}{36} & p(S=10) = \frac{3}{36} \\
p(S=6) = \frac{5}{36} & p(S=11) = \frac{2}{36} \\
 & p(S=12) = \frac{1}{36}
\end{array}$$

Ce qui est remarquable c'est qu'on obtiendrait exactement les mêmes résultats en lançant deux dés "normaux"...

Remarque : Sicherman (nom prédestiné pour un probabiliste) a démontré qu'il s'agissait des deux seuls dés possédant cette propriété. L'idée de la démonstration est la suivante : à chaque dé on associe le polynôme $\Sigma a_i x^i$ où a_i est la probabilité d'apparition de i. Par exemple, à un dé normal, on associe

$$\sum_{i=1}^{i=6} \frac{1}{6} x^i.$$

Si on calcule

$$\underset{\substack{\text{polynôme}\\ \text{associé à}\\ \text{un dé n° 1}}}{\sum a_i x^i} \times \underset{\substack{\text{polynôme}\\ \text{associé à}\\ \text{un dé n° 2}}}{\sum b_j x^j}$$

on trouve un polynôme $\Sigma c_k x^k$ où c_k est la probabilité que la somme des points vale k. Si on lance deux dés normaux on trouve le polynôme

$$\Big(\sum_{i=1}^{i=6} \frac{1}{6} x^i\Big)^2$$

égal à $\frac{1}{36}x^2 + \frac{2}{36}x^3 + \ldots + \frac{2}{36}x^{11} + \frac{1}{36}x^{12}$. Sicherman démontre ensuite que si on essaie de factoriser $\frac{1}{36}x^2 + \frac{2}{36}x^3 + \ldots + \frac{2}{36}x^{11} + \frac{1}{36}x^{12}$ en un produit de deux polynômes à coefficients rationnels tels que la somme des coefficients de chacun des polynômes vale 1 alors la seule solution non triviale est :

$$(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^4) \times (\frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^5 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{6}x^8).$$

Exercice 21

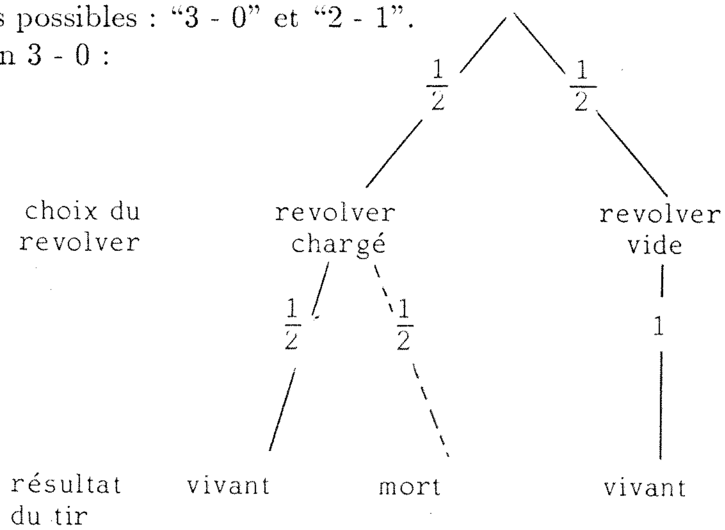
a) Dans une variante de la cruelle "roulette russe", le "joueur" choisit d'abord au hasard une arme parmi les deux revolvers disponibles puis presse une fois la détente. Chaque arme est munie de 6 chambres. On doit répartir trois balles dans les 2 revolvers. Existe-t-il une répartition des balles qui assure une plus grande probabilité de survie?

b) Dans une autre variante, le joueur doit utiliser successivement trois revolvers dans lesquels quatre balles ont été réparties. Quelle répartition assure la meilleure probabilité de survie?

---

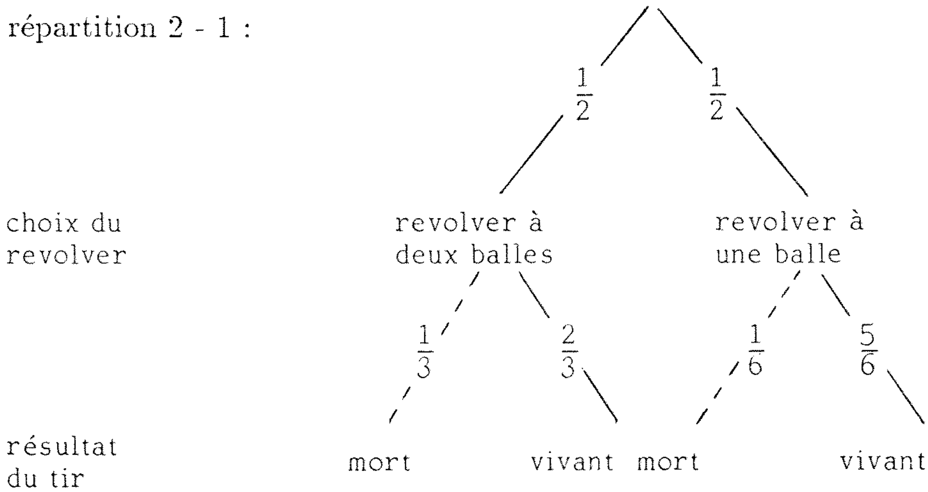
a) **1ère méthode :**
Il y a deux répartitions possibles : "3 - 0" et "2 - 1".

- Pour une répartition 3 - 0 :



$$p\,(\text{"vivant"}) = (\tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{4}.$$

- Pour une répartition 2 - 1 :



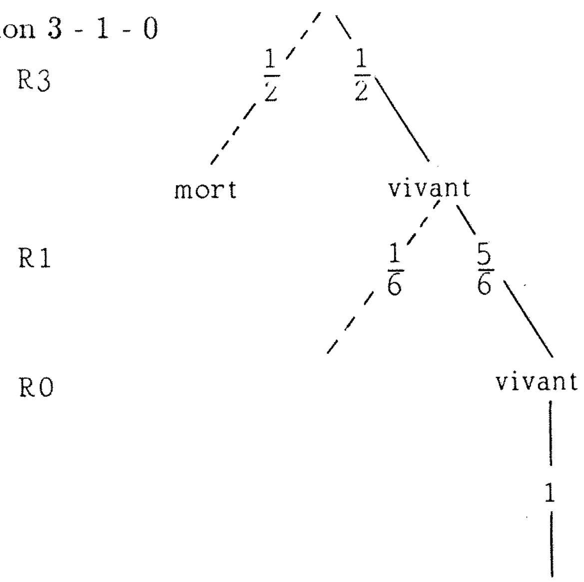
$$p\,(\text{"vivant"}) = (\tfrac{1}{2} \times \tfrac{2}{3}) + (\tfrac{1}{2} \times \tfrac{5}{6}) = \tfrac{9}{12} = \tfrac{3}{4}.$$

Conclusion : quelle que soit la répartition des balles la probabilité de survie est égale à $\frac{3}{4}$.

2ème méthode : Les deux revolvers ayant le même nombre de chambres, la répartition n'a pas d'importance car dans tous les cas la probabilité de survie est de $\frac{9}{12}$. En effet cela revient à répartir au hasard trois balles dans 12 chambres puis à choisir une chambre au hasard...

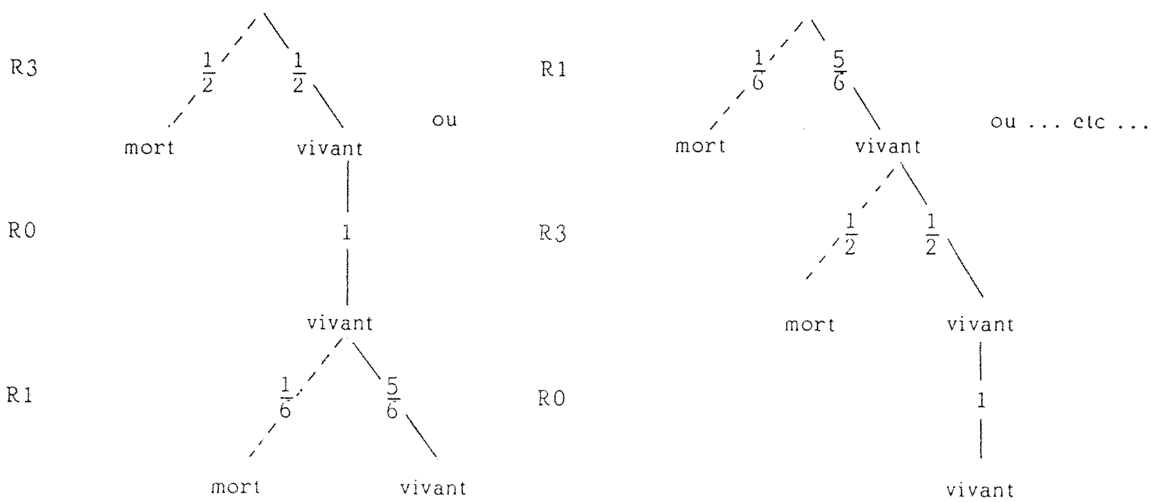
b) Il y a quatre répartitions possibles ...

- Pour une répartition 4 - 0 - 0 $\quad p\,(\text{“vivant”}) = \frac{1}{3} \simeq 0,33.$
- Pour une répartition 3 - 1 - 0



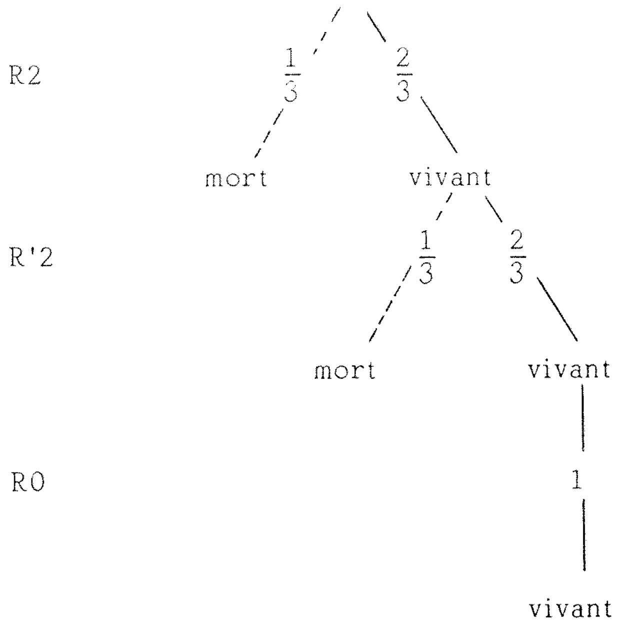
$p\,(\text{“vivant”}) = \frac{5}{12} \simeq 0,42.$

Remarque : l'arbre précédent sous-entend qu'on utilise d'abord le revolver à 3 balles (R3), puis celui à une balle (R1) puis le revolver vide (R0). On trouve d'autres arbres dans les autres cas. Par exemple :



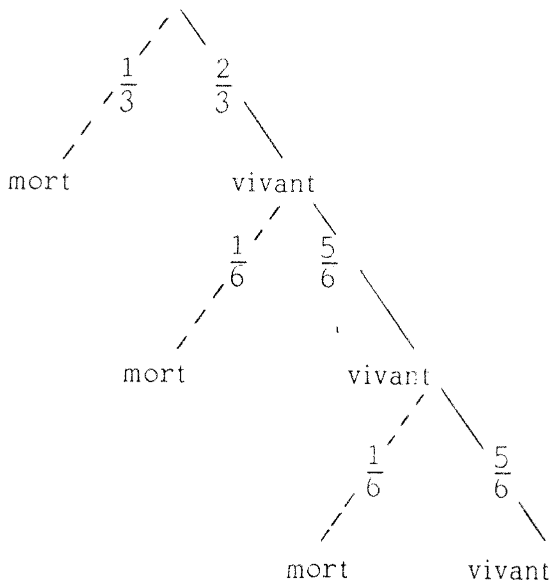
On a bien toujours $\quad p\,(\text{“vivant”}) = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{12} \simeq 0,42.$

- Pour une répartition 2 - 2 - 0



p ("vivant") $= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{4}{9} \simeq 0,44.$

- Pour une répartition 2 - 1 - 1



$$p \text{ ("vivant")} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$$
$$= \frac{50}{108} \simeq 0,46.$$

Conclusion : la répartition 2 - 1 - 1 assure la meilleure probabilité de survie.

RÉFLEXIONS SUR LA NOTION DE PROBABILITÉ

L'approche fréquentiste

Dans les programmes 1991 pour les classes de première, c'est l'approche fréquentiste de la notion de probabilité qui a été choisie.

En jetant un très grand nombre de fois une pièce bien équilibrée, la fréquence d'apparition de PILE tend à se stabiliser autour de 1/2. C'est cette valeur limite qu'on appelera la probabilité d'apparition de PILE

$$\boxed{\text{Probabilité} = \text{fréquence limite.}}$$

Néanmoins cette définition pose un problème.

Essayons de formaliser en quel sens la probabilité est une fréquence limite.

Expérience aléatoire

Dans les programmes, il est question de répétitions d'une expérience aléatoire. Nous avons adopté dans cette brochure la définition ci-dessous, cohérente avec une approche fréquentiste de la probabilité.

On appelle expérience aléatoire, une expérience qui vérifie deux conditions :
— on ne peut prévoir à l'avance son résultat ; si on la répétait dans des conditions identiques, on pourrait obtenir un résultat différent *(l'emploi du conditionnel signale que l'expérience peut être unique, mais elle est au moins reproductible par la pensée)* ;
— l'ensemble de tous les résultats possibles de l'expérience est connu.

Formalisons

Jeter une pièce est une expérience aléatoire qui a deux résultats possibles appelés Pile ou Face.

Soit $X_n(\omega)$ un codage du résultat de la n^{ieme} répétition de cette expérience aléatoire.

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ si le résultat est Pile} \\ \quad 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$S_n(\omega) = X_1(\omega) + X_2(\omega) \ldots + X_n(\omega)$ est le nombre de fois où on a obtenu Pile au cours des n premières répétitions de l'expérience aléatoire.
$\frac{S_n(\omega)}{n}$ est donc la fréquence d'apparition de Pile. La probabilité d'apparition de Pile peut être définie comme la limite, quand n tend vers l'infini, de $\frac{S_n}{n}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{2}.$$

Mais le mot limite dans cette phrase, n'a pas de sens du point de vue de l'analyse mathématique. Il n'y a pas de "voisinage" au sens topologique du terme qui permette de donner un sens formel à cette limite.

En fait la convergence de $\frac{S_n}{n}$ vers $\frac{1}{2}$, que tout le monde admet comme évidente, peut être définie de différentes manières :
- convergence en probabilité
- convergence presque sûre
- convergence en loi ...

Nous en donnons plus loin les définitions.

Dans tous les cas **la définition de la convergence de $\frac{S_n}{n}$ vers $\frac{1}{2}$ utilise la notion de probabilité qu'elle est censée définir en même temps.**

Probabilité et circularité

Toutes les tentatives de définition de la probabilité à partir de la réalité butent sur cet écueil de "l'auto-référence" dans la définition (ou de circularité). Ainsi on peut aussi être tenté de définir la probabilité par ... l'équiprobabilité.

Supposons qu'une expérience aléatoire comporte n résultats également possibles (équiprobables); appelons a le nombre de résultats qui appartiennent à l'événement A. Alors

$$P(A) = \frac{a}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

On voit que cette définition n'échappe pas à la circularité puisqu'une notion d'équiprobabilité est nécessaire pour définir ce qu'est une probabilité.

La définition axiomatique classique

La seule échappatoire possible semble être une théorie axiomatique (l'axiomatique de Kolmogorov). On pose a priori qu'une probabilité est une application P d'un certain type d'espace dans $[0,1]$ et qui vérifie un certain nombre de conditions.

"Dans un tel modèle mathématique,on ne fait aucune tentative pour dire ce qu'est en **réalité** la probabilité. On ne fait que poser les règles (axiomes).

L'exemple du **jeu d'échec** permet de mieux comprendre. Prenons la reine par exemple : on n'essaye pas de définir ce qu'est une reine **en réalité**. Elle est caractérisée par un ensemble de règles (axiomes) auxquels elle doit obéir : elle peut se déplacer d'un nombre quelconque de cases en ligne droite ou en diagonale. Elle n'est rien moins que cela. Des règles analogues (axiomes) s'appliquent aux autres pièces du jeu et forment la règle du jeu des échecs. Il est alors possible d'en tirer des conclusions (démontrer des théorèmes) du genre : un roi et une tour peuvent gagner contre un roi seul, mais un roi et un cavalier ne le peuvent pas.

La théorie axiomatique des probabilités est analogue au jeu d'échecs : elle se fonde sur des concepts et axiomes desquels elle tire un certain nombre de conclusions (démontre des théorèmes)" (T. Wonnacott, R. Wonnacott, 1988)

Diverses expériences faites avec de jeunes élèves ont montré que, lorsque des questions de probabilité leur étaient posées en termes de "chances de gagner ou de perdre", **avant tout enseignement des probabilités**, les élèves ne refusaient jamais de répondre sous prétexte que cela ne leur avait pas été enseigné.

Autrement dit, la plupart des élèves que l'on prétend initier aux probabilités ont une **conception a priori** de la probabilité. Or, cette conception, issue de la vie courante et des jeux de hasard, **n'est souvent pas remise en cause** par une définition axiomatique de la notion de probabilité. De plus, cette définition axiomatique n'offre aux élèves aucun moyen de contrôle expérimental de leurs calculs de probabilité.

Ainsi, on peut observer des élèves ayant eu une définition axiomatique de la notion de probabilité soutenir que, lorsqu'on jette un dé, puisqu'on peut obtenir 1 ou ne pas l'obtenir, il y a 2 possibilités et donc chaque possibilité a 1 chance sur 2 de se produire d'où

$$\text{probabilité d'obtenir } 1 = \text{probabilité de ne pas obtenir } 1 = \frac{1}{2}$$

De plus, certains auteurs soutiennent que même dans le cas d'une définition axiomatique, on n'échappe pas à une certaine circularité, par exemple dans la définition du concept de hasard.

"Toutes les tentatives pour donner une définition précise du concept de hasard(...) ont abouti au résultat que ce concept ne pouvait pas être compris a priori d'une manière nette et formelle. Il n'y a que des descriptions relatives du hasard, cela veut dire, qu'il est seulement possible de décider suivant le niveau du développement de la théorie, si une suite de variables aléatoires est vraiment aléatoire ou non. On a besoin de tests statistiques élaborés par la théorie pour analyser la suite des variables aléatoires. Alors la fondation du concept d'aléa ou de hasard dépend du niveau de développement de la théorie des probabilités; on ne saurait définir a priori la signification du concept de hasard dans sa complexité." (H. Steinbring, 1989)

Les débats philosophiques sur les concepts probabilistes durent encore. Nous n'avons pas la prétention de conclure ici. Pourtant, nous savons bien que le modèle probabiliste a prouvé son efficacité dans de nombreuses situations. Comme tout modèle mathématique, ce n'est qu'une représentation simplifiée de la réalité. Nous l'utiliserons comme tel.

CONVERGENCES DIVERSES ET VARIÉES

Dans les pages précédentes, nous avons évoqué les différents types de convergence. Les définitions que nous rappellons ici ne sont évidemment pas destinées aux élèves mais aux collègues que ces questions intéressent.

Définition axiomatique d'une probabilité

Considérons un ensemble Ω non vide. On notera $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des sous-ensembles ou parties de Ω.

Définition d'une tribu

Soit $\mathcal{A}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(\Omega)$.
On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu si
• $\mathcal{A}$ n'est pas vide $\mathcal{A} \neq \emptyset$
• • $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire
$\forall\ A \in \mathcal{A},\ A^c \in \mathcal{A}$
• • • $\mathcal{A}$ est stable par réunion au plus dénombrable
$\forall\ (A_i)_{i \geq 1} \in \mathcal{A}, \qquad \cup_{i \geq 1} A_i \in \mathcal{A}$.

Exemple de tribu

Si $\Omega = \mathbb{R}$, la tribu borélienne est engendrée par les intervalles ouverts. Elle contient tous les intervalles ouverts et les réunions au plus dénombrables d'intervalles ouverts (et juste ce qu'il faut en plus pour vérifier les conditions de stabilité d'une tribu).

Un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ est un couple formé d'un ensemble Ω et d'une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω. Comme son nom l'indique, tout est prêt pour y définir une probabilité.

Définition d'une probabilité

Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable et P une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$
P est une probabilité si
• P est à valeurs dans $[0, 1]$
• • $P(\Omega) = 1$
• • • P est $\sigma-$ additive, c'est-à-dire pour toute suite $(A_i)_{i \geq 1}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints (ou incompatibles) la probabilité de leur réunion est la somme des probabilités

$$\forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset,$$
$$P(\cup_{i \geq 1} A_i) = \sum_{i \geq 1} P(A_i).$$

On dit que $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est un **espace probabilisé**. Un élément de $\mathcal{A}$ est appelé un événement.

Définition d'une variable aléatoire réelle
Une variable aléatoire réelle X est une application d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ dans $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne et telle que l'image réciproque de tout borélien soit un événement.

Pour tout borélien B on peut donc définir sa probabilité par

$$P_X(B) = P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B)).$$

P_X, qui est la mesure "image" de P par X, est appelée la **loi de probabilité** de X.

Nous pouvons maintenant donner du sens à la convergence de $\frac{S_n}{n}$ vers 1/2.

La convergence en probabilité (loi faible des grands nombres)

Pour tout ε aussi petit que l'on veut, il existe un rang à partir duquel la **probabilité** que $\frac{S_n}{n}$ appartienne à l'intervalle $]1/2 - \varepsilon \,;\, 1/2 + \varepsilon[$ est très grande.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \qquad \exists\, N(\varepsilon, \eta) \quad \forall n > N \quad P(|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}| > \varepsilon) < \eta$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} P(|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}| > \varepsilon) = 0$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to \infty} P(|\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}| \leq \varepsilon) = 1.$$

La convergence en probabilité donne un sens à la limite de $\frac{S_n}{n}$. Mais la circularité est ici flagrante puisqu'on utilise la probabilité définie axiomatiquement pour donner un sens à l'approche fréquentiste du concept de probabilité.

La convergence en probabilité peut bien entendu être définie pour d'autres variables que $\frac{S_n}{n}$ et pour une limite qui est, elle aussi, une variable aléatoire.

La convergence presque sûre

La convergence presque sûre ressemble à la convergence simple de l'analyse mathématique sauf en quelques points ω appartenant à un ensemble de probabilité nulle [c'est en ce sens qu'on est "presque" sûr].
Soient (X_n) une suite de variables aléatoires réelles et X une variable aléatoire réelle. Les X_n et X sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On dira que X_n tend vers X presque sûrement si :

$$\exists\, A \in \mathcal{A} \quad P(A) = 1 \quad \forall \omega \in A \quad \lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega).$$

Cette définition, aussi, peut donner un sens à la convergence de $\frac{S_n}{n}$ vers $\frac{1}{2}$.

Pour dire que $\frac{S_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{2}$, on parlera de "loi forte des grands nombres"

Les lois forte et faible des grands nombres tiennent compte des éléments ω de Ω. Tel n'est pas le cas pour la convergence en loi.

La convergence en loi

Soit X une variable aléatoire réelle.
Sa fonction de répartition F est définie par

$$F(x) = P(X \leq x).$$

La suite $(X_n)_{n>1}$ de variables aléatoires réelles de fonctions de répartition F_n converge en loi vers X si

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$$

en tout point x où F est continue.

Lien entre ces convergences

convergence presque sûre	$\Longrightarrow$	convergence en probabilité	$\Longrightarrow$	convergence en loi

La convergence en loi implique la convergence en probabilité si la limite X est une constante.

Références

T. Wonnacott et R. Wonnacott : STATISTIQUE, 1988,3ème édition (traduction en français), Economica, Paris.

H. Steinbring : La relation entre modélisations mathématiques et situations d'expérience pour le savoir probabiliste, Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, Vol. 2, p. 191-215, 1989, IREM de Strasbourg.

PETIT HERBIER DE LOIS

Dans ce chapitre aussi, nous sortons volontairement du programme de première pour vous proposer un bref aperçu des lois de probabilité les plus fréquentes ainsi que des approximations qui existent entre elles.

Ces notions seront enseignées dans certains BTS et certains DEUG à l'Université aux élèves que nous initions aux probabilités en première. Il n'est donc pas inutile d'en avoir un aperçu.

Loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$

Vous connaissez tous la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ qui est la loi de la variable aléatoire Sn correspondant au nombre de boules blanches obtenues lors de n tirages d'une boule, au hasard et avec remise, dans une urne contenant une proportion p de boules blanches. Autrement dit, on peut considérer que Sn correspond au nombre de "succès" lors de n répétitions indépendantes d'une même expérience de Bernoulli $\mathcal{B}(1,p)$. Le paramètre p désigne la probabilité de "succès" à chaque expérience de Bernoulli.

Rappelons que :

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$
$$E(S_n) = np \qquad \text{Var }(\text{S}_n) = np(1-p).$$

Loi hypergéométrique $\mathcal{H}(n, N_1, N)$

$\mathcal{H}(n, N_1, N)$ est la loi du nombre S'_n de boules blanches obtenues lors de n tirages successifs d'une boule au hasard et sans remise, ou un tirage simultané de n boules dans une urne contenant N_1 boules blanches et N_2 boules non-blanches parmi N boules ($N = N_1 + N_2$).

$$P(S'_n = k) = \frac{C_{N_1}^k C_{N_2}^{n-k}}{C_N^n}.$$

Posons $p = \frac{N_1}{N}$:

$$E(S'_n) = np \qquad \text{Var }(S'_n) = np(1-p)(1 - \frac{n-1}{N-1}).$$

Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

$\mathcal{P}(\lambda)$ est, fréquemment, la loi du comptage du nombre d'unités arrivant dans un système durant un intervalle de temps. C'est aussi la loi des "événements rares", comme loi limite d'une loi binomiale sous certaines conditions.

Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, si, pour tout entier naturel k :

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

$E(X) = \text{Var}(X) = \lambda.$

Approximation binomiale

Si n est petit par rapport à N (par exemple : $n \leq \frac{N}{10}$), la loi hypergéométrique peut être assimilée à une loi binomiale.

$$\mathcal{H}(n, N_1, N) \simeq \mathcal{B}(n, p) \text{ où } p = \frac{N_1}{N}.$$

Approximation de Poisson

Si n est grand et p petit, la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut être assimilée à une loi de Poisson, ceci pouvant être admis, par exemple, dès que $n \geq 50$ et $np \leq 10$.

$$\mathcal{B}(n,p) \simeq \mathcal{P}(np).$$

Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

Disons simplement qu'il s'agit de la loi d'une variable aléatoire continue X définie à partir d'une fonction de densité f par :

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx.$$

On utilise aussi très souvent la fonction de répartition F, qui est une primitive de la densité f

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

La densité d'une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, dite aussi loi standard, est :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La densité d'une loi normale générale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ d'espérance μ et d'écart-type σ, est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Propriété de standardisation des lois normales

$$\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(\mu, \sigma) \Longleftrightarrow \mathcal{L}(X^*) = \mathcal{L}(\frac{X-\mu}{\sigma}) = \mathcal{N}(0, 1).$$

C'est cette propriété qui permet de calculer les probabilités d'une loi normale quelconque à partir des valeurs (tabulées) de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Propriétés de la famille des lois normales

1) Si $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, alors :

$$\mathcal{L}(aX + b) = \mathcal{N}(a\mu + b, |a|\sigma)$$

où a et b sont des constantes réelles.

2) Si $\mathcal{L}(X_1) = \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$, $\mathcal{L}(X_2) = \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ et si de plus X_1 et X_2 sont indépendantes, alors :

$$\mathcal{L}(X_1 + X_2) = \mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}).$$

3) Si $\mathcal{L}(X_i) = \mathcal{N}(\mu, \sigma)$ pour $i = 1, \ldots, n$ et si de plus les X_i sont indépendantes, alors :

$$\mathcal{L}(\Sigma_{i=1}^n X_i) = \mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$
$$\mathcal{L}(\overline{X}) = \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \text{ où } \overline{X} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^n X_i.$$

Théorème central limite

Cette expression désigne en fait, toute une famille de théorèmes affirmant que, sous certaines conditions et notamment l'indépendance, la loi de probabilité d'une somme de n variables aléatoires, individuellement petites par rapport à la somme, converge vers une loi normale lorsque n tend l'infini.

Ainsi, si les X_i, pour $i = 1 \ldots, n$, sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi quelconque, d'espérance μ et d'écart-type σ, alors, lorsque n est grand :

$$\mathcal{L}(\Sigma_{i=1}^n X_i) \simeq \mathcal{N}(n\mu, \sigma\sqrt{n})$$
$$\mathcal{L}(\overline{X}) \simeq \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Approximation normale de la loi binomiale

Si $\mathcal{L}(S_n) = \mathcal{B}(n,p)$, S_n peut être considérée comme la somme de n variables aléatoires X_i indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$.

Donc si n est assez grand :

$$\mathcal{L}(S_n) = \mathcal{L}(\Sigma_{i=1}^n X_i) \simeq \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)}).$$

On peut admettre que cette approximation est acceptable par exemple dès que $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$. Il faudra tenir compte du fait que l'on approche une loi discrète par une loi continue :

$$P(S_n = k) = P(S_n \in [k - \frac{1}{2}; k + \frac{1}{2}[).$$

Approximation normale de la loi de Poisson

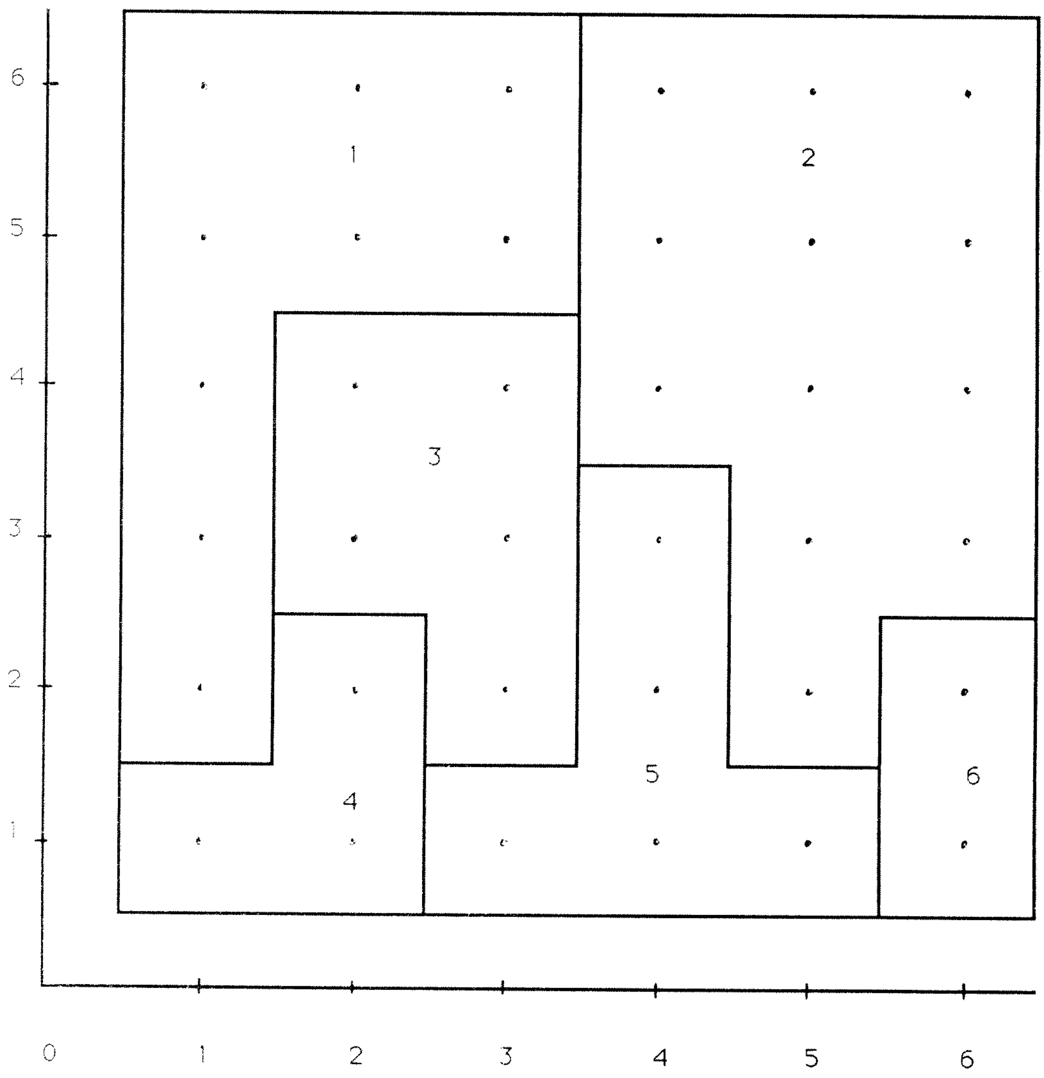
Si $\lambda \geq 10$, on peut admettre $\mathcal{P}(\lambda) \simeq \mathcal{N}(\lambda, \sqrt{\lambda})$.

COMMENT CHOISIR SON HASARD?

Cette activité a pour but d'illustrer les éventuelles ambiguïtés de l'expression "choisir au hasard". Elle montre que, lorsque les conditions expérimentales ne sont pas précisées il y a souvent plusieurs tirages "au hasard" possibles.

Situation

Six régions ont été matérialisées sur le quadrillage ci-dessous. Elles sont numérotées de 1 à 6. Les points représentent les nœuds du quadrillage. Ils peuvent être repérés par une abscisse x et une ordonnée y toutes deux entières et comprises entre 1 et 6.



Problème

Choisir une région "au hasard". A votre avis, quelle est la région qui a le plus de chances d'être choisie?

Premier tirage au hasard

Jeter un dé (bien équilibré) et choisir la région correspondant au nombre obtenu. Quelle est la probabilité de chacune des six régions?

Deuxième tirage au hasard

Jeter un dé une première fois : le nombre obtenu est une abscisse x.
Jeter le dé une deuxième fois : le nombre obtenu est une abscisse y.
Choisir la région contenant le point de coordonnées (x, y).
Quelle est la probabilité de chacune des six régions?

Troisième tirage au hasard

Fixer au milieu du carré l'axe d'une aiguille de longueur 3 unités, qui peut pivoter autour de cet axe.
Faire tourner l'aiguille : la région choisie est celle où la pointe de l'aiguille s'immobilisera.
Quelle est la probabilité de chacune des six régions?

Imaginer d'autres types de tirage, par exemple
– fermer les yeux et pointer avec un crayon,
– demander à chaque élève de choisir un nombre parmi les six et choisir la région correspondant au nombre le plus fréquemment cité ...
Quelle est la probabilité de chacune des six régions?

Commentaires

La modification des conditions de l'expérience modifie de façon évidente les probabilités des régions. On peut néanmoins considérer que l'ensemble Ω des résultats possibles reste le même : c'est l'ensemble des 6 régions dessinées. Les 36 coordonnées du deuxième tirage au hasard peuvent être considérées comme un résultat intermédiaire.
Par contre, les probabilités associées aux 6 éléments de Ω ne sont pas les mêmes. Dans le troisième tirage, il y a même un élément de probabilité nulle!

Ce type de situation permet de mettre en évidence le fait que la probabilité dépend des conditions de l'expérience, des conditions du "tirage au hasard" et n'est pas attachée à l'élément en tant que tel : on peut munir un même ensemble Ω de plusieurs probabilités.

Variantes de la situation

Les régions choisies ici forment une partition du carré et une partition de l'ensemble des 36 nœuds du quadrillage. Leurs formes sont telles que dans le deuxième tirage au hasard, les probabilités sont proportionnelles aux surfaces des régions.

On peut modifier ces caractéristiques pour obtenir d'autres variantes de la situation, en respectant un principe : il ne faut pas qu'une même expérience puisse avoir deux résultats, ce qui serait le cas par exemple dans le deuxième tirage au hasard si un nœud était inclus dans deux régions.

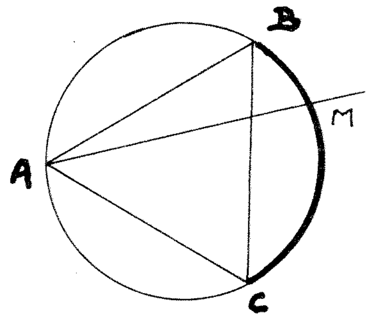
On peut ainsi réaliser des expériences de même type avec des cercles de différentes tailles. On peut aussi demander aux élèves de réaliser une situation vérifiant des contraintes (probabilités des régions définies a priori, ...).

NE CHOISISSONS PAS NOTRE HASARD AU HASARD

Le problème posé par **Joseph Bertrand** (1822-1900) est le suivant :
On choisit au hasard une corde d'un cercle. Quelle est la probabilité que sa longueur soit supérieure à celle du côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle?

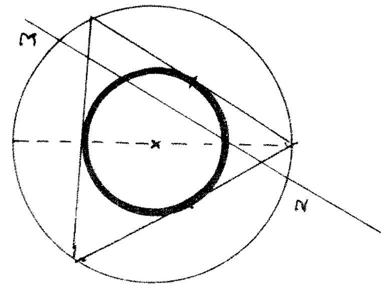
Solution 1 :

On choisit au hasard l'une des extrémités de la corde, puis la seconde. Si A est la première extrémité et ABC un triangle équilatéral inscrit dans le cercle, la corde sera d'une longueur supérieure à celle du côté du triangle, si on choisit la seconde extrémité sur le petit arc BC. La probabilité de choisir M sur cet arc est de $1/3$ car sa longueur est le tiers de la longueur du cercle.



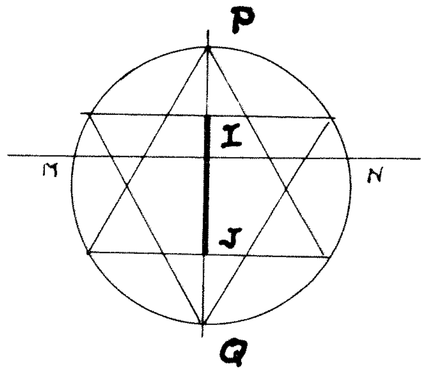
Solution 2 :

Une corde d'un cercle est entièrement déterminée dès que l'on connaît son milieu. Pour choisir une corde au hasard, choisissons un point au hasard dans le cercle. La longueur de la corde correspondante sera supérieure à celle du côté du triangle équilatéral inscrit si le point choisi est à l'intérieur du cercle de même centre et dont le rayon est la moitié du rayon. Le rapport des aires des deux cercles est de $1/4$. La probabilité cherchée est $1/4$.



Solution 3 :

On choisit au hasard la direction de la corde. Il suffit ensuite de choisir un point sur le diamètre $[PQ]$ perpendiculaire à cette direction. La corde correspondante aura une longueur supérieure à celle du côté du triangle équilatéral inscrit si le point choisi sur $[PQ]$ est à l'intérieur du segment $[IJ]$. Le rapport des longueurs des deux segments concernés est 1/2. La probabilité cherchée est 1/2.



Les trois solutions sont correctes et décrivent trois manières de procéder, dans la pratique, pour choisir "au hasard" une corde d'un cercle. Elles correspondent à trois mesures de probabilité distinctes, mais cette interprétation ne deviendra vraiment possible qu'avec l'axiomatique de Kolmogoroff c'est-à-dire vers 1930. Le problème de Bertrand a, de ce fait, longtemps été présenté comme un paradoxe du calcul des probabilités.

UN APERCU HISTORIQUE

LE PROBLEME DES PARTIS :

La correspondance entre Blaise PASCAL et Pierre de FERMAT

Ce problème des partis dont l'énoncé est donné un peu plus loin a fait l'objet d'une longue correspondance entre Pascal et Fermat. Nous disposons seulement d'une partie de cette correspondance. Les lettres que nous vous proposons ici sont extraites du document suivant

"Les cahiers de Fontenay n° 32 : La correspondance de Blaise Pascal et de Pierre de Fermat", E.N.S. Fontenay aux Roses (sept. 1983).

> ENONCE DU PROBLEME DES PARTIS (proposé à Pascal par le chevalier de MERE en 1654).
>
> Dans sa forme la plus générale, on peut le résumer ainsi : dans tel jeu de hasard qu'on voudra deux joueurs jouent ensemble une partie en un nombre donné de points. Ayant des acquis inégaux, ils décident de s'arrêter sans avoir terminé la partie et de se répartir équitablement les mises initiales. Comment faire le partage?
>
> Pascal propose de raisonner d'abord sur un exemple simple :
>
> Deux joueurs misent chacun 32 pistoles qu'ils décident de jouer en trois parties, avec cette convention que le premier à avoir gagné trois parties gardera la totalité des mises. Soit alors le cas où l'un des joueurs ayant gagné deux parties et l'autre une, tous deux décident d'arrêter le jeu. Comment faire le partage?
>
> On peut ensuite se poser la même question si le premier n'a gagné qu'une partie et l'autre aucune.

CETTE CORRESPONDANCE EST INTERESSANTE A ETUDIER DANS LE CADRE DE L'ENSEIGNEMENT ACTUEL DES PROBABILITES.

La lecture de ces lettres nous permet en effet de confronter deux démarches, deux regards différents, deux façons de saisir un même problème de probabilité.

On peut dire que le raisonnement de Pascal est un raisonnement progressif et récurrent. Il suit les étapes effectives du jeu. Le raisonnement de Fermat est plus "combinatoire", il constitue "une mise à plat" de toutes les solutions possibles y compris de solutions "fictives". En effet Fermat est amené à envisager des parties qui ne seront pas jouées effectivement par les joueurs.

NOUS VOUS PROPOSONS DEUX PISTES DE TRAVAIL POUR EXPLOITER CETTE CORRESPONDANCE

Ⓐ Un excellent TD se trouve dans la brochure de l'I.R.E.M. de Paris VII : M:A.T.H. Mathématiques, approche par des textes historiques.

Ce TD propose les différentes approches historiques du problème des partis (de Pacioli à Pascal et Fermat (1494-1654)).
Faites vite acheter cette brochure par votre centre de documentation, elle est passionnante!

Ⓑ La deuxième piste de travail que nous vous proposons ici, a pour objectif de faciliter la tâche à ceux qui voudraient étudier avec leurs élèves de 1ère ou Terminale, la correspondance de Pascal et Fermat. Nous avons constaté (durant les stages) que la lecture des lettres n'était pas toujours facile au premier abord, et nécessitait bien souvent plusieurs changements de registres (lecture du texte, traduction avec des arbres ...ou des tableaux ...).

Nous avons repris ici chacune des lettres dont le texte (emprunté à la revue des Cahiers de Fontenay) figure sur la page de droite.

En regard, sur la page de gauche, nous avons mis une traduction possible du texte à l'aide de l'outil des arbres, ou bien des commentaires.

L'ensemble de cette lecture s'adresse aux enseignants. On peut n'en étudier qu'une petite partie avec les élèves. Les pages 90 à 93 et 102 à 104 nous paraissent plus faciles à étudier avec les élèves. Les autres permettront aux enseignants qui le souhaitent d'avoir une vision plus précise de l'ensemble des arguments développés dans la correspondance.

Quelques remarques sur les expérimentations avec les élèves

- Le problème proposé dans le TD Ⓐ était présenté sous la forme suivante :

> PROBLEME
> Ariane et Bernard jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de "pile ou face".
> Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne.
> Le premier qui a 8 points (c'est-à-dire qui a gagné 8 parties) est le vainqueur du jeu, et il gagne 84 francs (on appelle cette somme : la mise).
> Seulement, Ariane et Bernard sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu.
> Quand ils s'arrêtent, Ariane a gagné 7 parties (elle a donc 7 points), et Bernard 5 parties (il a donc 5 points).

Avant de se séparer, ils veulent se partager la mise puisque personne ne l'a complètement gagnée (aucun d'eux n'a 8 points).
Mais alors, comment partager la mise, c'est-à-dire que donner à Ariane et que donner à Bernard pour que le partage soit juste?
Quel partage proposez-vous, et pourquoi?

Rappel de la situation :
Le vainqueur est celui qui obtient le premier 8 points.
Quand ils s'arrêtent de jouer :
Ariane a 7 points,
Bernard a 5 points.
La mise totale est de 84 francs.

Question supplémentaire :
Quel partage proposeriez-vous, et pourquoi, si la situation, pour le même jeu, était la suivante :
Le vainqueur est celui qui obtient le premier 8 points.
Quand ils s'arrêtent de jouer :
Ariane a 7 points,
Bernard a 0 point.
La mise est toujours de 84 francs.

Les compte-rendus d'expériences proposés dans la brochure de l'I.R.E.M. de Paris VII, ainsi que les quelques expériences que nous avons réalisées nous-mêmes en classe de 1ère S, montrent que la plupart des élèves résolvent ce problème au moyen de la proportionnalité :
"12 parties ont été jouées. Ariane remporte donc $\frac{7}{12}$ de la mise et Bernard $\frac{5}{12}$.

La question supplémentaire, destinée à déstabiliser le raisonnement proportionnel suscite des débats passionnés dans les classes, et certains élèves commencent à envisager l'idée qu'il faut partager "autrement", et que le sort peut à nouveau favoriser Bernard.

Mais il semble qu'il y ait dans ce problème un obstacle difficile à surmonter : l'idée d'un partage qui tienne compte des parties non encore jouées.

Or il est intéressant de constater que les premières solutions historiques proposées à ce problème sont des solutions de type proportionnel (par exemple Pacioli 1494), qu'elles ont été l'objet de nombreuses contreverses et qu'il a fallu attendre 1654 (correspondance Pascal-Fermat) pour disposer d'une "bonne solution".

• Signalons enfin que la lecture des textes de lettres proposées en B peut paraître rébarbative . Elle est intéressante à plus d'un titre. Ce n'est pas si souvent en effet que les élèves sont amenés à étudier une correspondance épistolaire entre mathématiciens et cet aspect insolite peut les intéresser dès qu'ils ont réussi (avec l'aide des enseignants) à dépasser le simple stade de la difficulté de lecture.

Quelques repères historiques et références bibliographiques

• Le problème des partis est abordé par Luca Pacioli de manière marginale dans la Suma de arithmetica geometria proportioni et proportionalita (1494).
Ce problème fait ensuite l'objet de nombreuses critiques (Tartaglia, Forestiani, Cardan). Nous renvoyons ici à la brochure de l'I.R.E.M. de Paris VII précédemment citée.

• Le problème des partis, dans la forme exposée dans la correspondance a été proposé à Pascal par le chevalier de Méré, homme de lettres et philosophe (1607-1684).

Le chevalier de Méré était un passionné du jeu et quelques anecdotes amusantes (pouvant faire l'objet de problèmes pour les élèves) concernant sa ruine ou sa fortune se trouvent dans : "La probabilité, le hasard et la certitude", de Paul Deheuvels, coll. "Que sais-je" n° 3 pp. 14–16.

Sur le problème des partis on peut lire avec profit le livre du groupe inter-I.R.E.M. épistémologie et histoire : "Mathématiques au fil des âges".

Sur la vie et les écrits de Pascal et Fermat, on trouve des renseignements abondants dans l'Encyclopédia Universalis.

• La notion d'espérance mathématique (sous-jacente dans toute cette correspondance mais non formalisée) sera introduite par Huygens en 1657 dans son traité "De ratiocinus in aleae ludo".

Plus généralement c'est encore Huygens qui le premier va quantifier la notion de chances alors que Pascal et Fermat semblent l'un et l'autre s'attacher plus à déterminer des gains que des chances.

Chaque fois que le hasard apparaît dans la correspondance, il n'est l'objet de calcul que dans sa relation à la détermination des partis. Il n'y a aucun calcul sur les probabilités.

Les documents qui vous sont proposés sont les suivants :
— La lettre de Pascal du 29 juillet où il expose sa méthode,
— La lettre de Pascal du 24 août. Pascal expose la méthode de Fermat pour 2 joueurs (la lettre de Fermat, antérieure au 29 Juillet, où Fermat expose lui-même sa méthode ne nous est pas parvenue. Nous ne connaissons donc que la version qu'en donne Pascal).
Pascal répond à l'objection faite par Roberval sur les "parties fictives". Il critique cette méthode pour 3 joueurs, mais il semble bien qu'il y ait là une erreur d'interprétation de la part de Pascal.

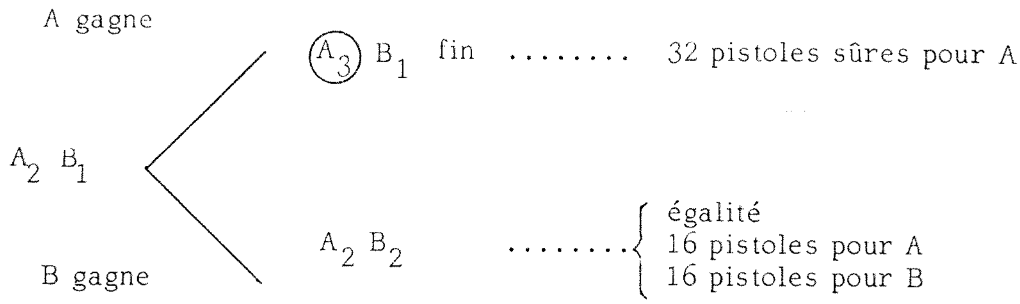
Ⓑ

LETTRES ET COMMENTAIRES

Commentaire de la lettre de Pascal à Fermat du 29 juillet 1654

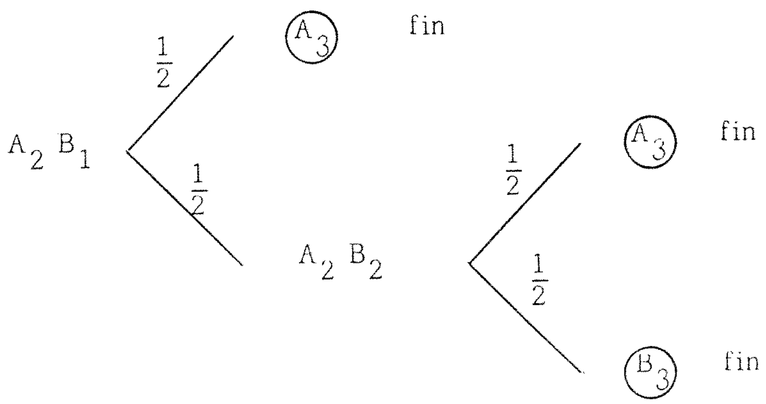
Deux joueurs jouent en 3 parties et chacun a mis 32 pistoles au jeu.

Cas où A a gagné 2 parties et B une seule. On emploiera alors le symbolisme A_2 B_1. Dès qu'un joueur a gagné trois parties on écrira A_3 B_i ou A_i B_3.
Voici une transcription possible à l'aide d'un arbre de la méthode décrite par Pascal.



somme à donner à A : $32 + 16 = 32 + \frac{32}{2} = 48$.

On traduirait aujourd'hui avec l'arbre de probabilité suivant :



somme à attribuer à A : $64(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) = 48$.

Bien entendu cette présentation va au délà de ce que Pascal décrit puisqu'elle utilise déjà un calcul formalisé des probabilités.

LETTRE DE PASCAL À FERMAT DU 29 JUILLET 1654

Varia Opera Mathematica D. Petri de Fermat (Toulouse 1679) pp. 179-183

Oeuvres de Blaise Pascal, G.E., pp. 381-393

Monsieur,

L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que je ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés; j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval : mais M. de Méré n'avoit jamais pu trouver la juste valeurs des parties ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eûsse connu cette proportion.

Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche; mais, parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrois vous pouvoir dire ici en peu de mots : car je voudrois désormais vous ouvrir mon cœur, s'il se pouvoit, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

Posons que le premier en ait deux et l'autre une; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que, si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc, s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : "Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le hasard est égal. Partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela mes 32 qui me sont sûres". Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Cas où A a gagné 2 parties et B aucune.

Voici une transcription possible de la lettre de Pascal

A gagne

$A_2\ B_0$ — A_3 fin .... - 64 pistoles pour A

$A_2\ B_0$ — $A_2\ B_1$ .... on est ramené au cas précédent
48 pour A
16 pour B

Somme à attribuer à A : $48 + \frac{16}{2} = 48 + 8 = 56$.
48 représente la somme qui est sûre pour A quelle que soit l'issue.

Cas où A a gagné une partie et B aucune.

Voici encore une transcription possible

$A_1\ B_0$ — $A_2\ B_0$ on est ramené au cas n° 2 56 pour A

$A_1\ B_0$ — $A_1\ B_1$ égalité 32 pour A

Somme à attribuer à A : $32 + (\frac{56-32}{2}) = 32 + 12 = 44$.
32 représente la somme qui est sûre pour A quelle que soit l'issue.

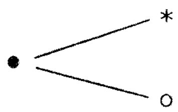
Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient, à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : "Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines, au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi". Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles. Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56; s'il la perd, ils sont partie à partie : donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : "Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12 et moi 12, qui, avec 32, font 44".

Or, par ce moyen, vous voyez, par les simples soustractions, que, pour la première partie, il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles; pour la seconde, autres 12; et pour la dernière 8.

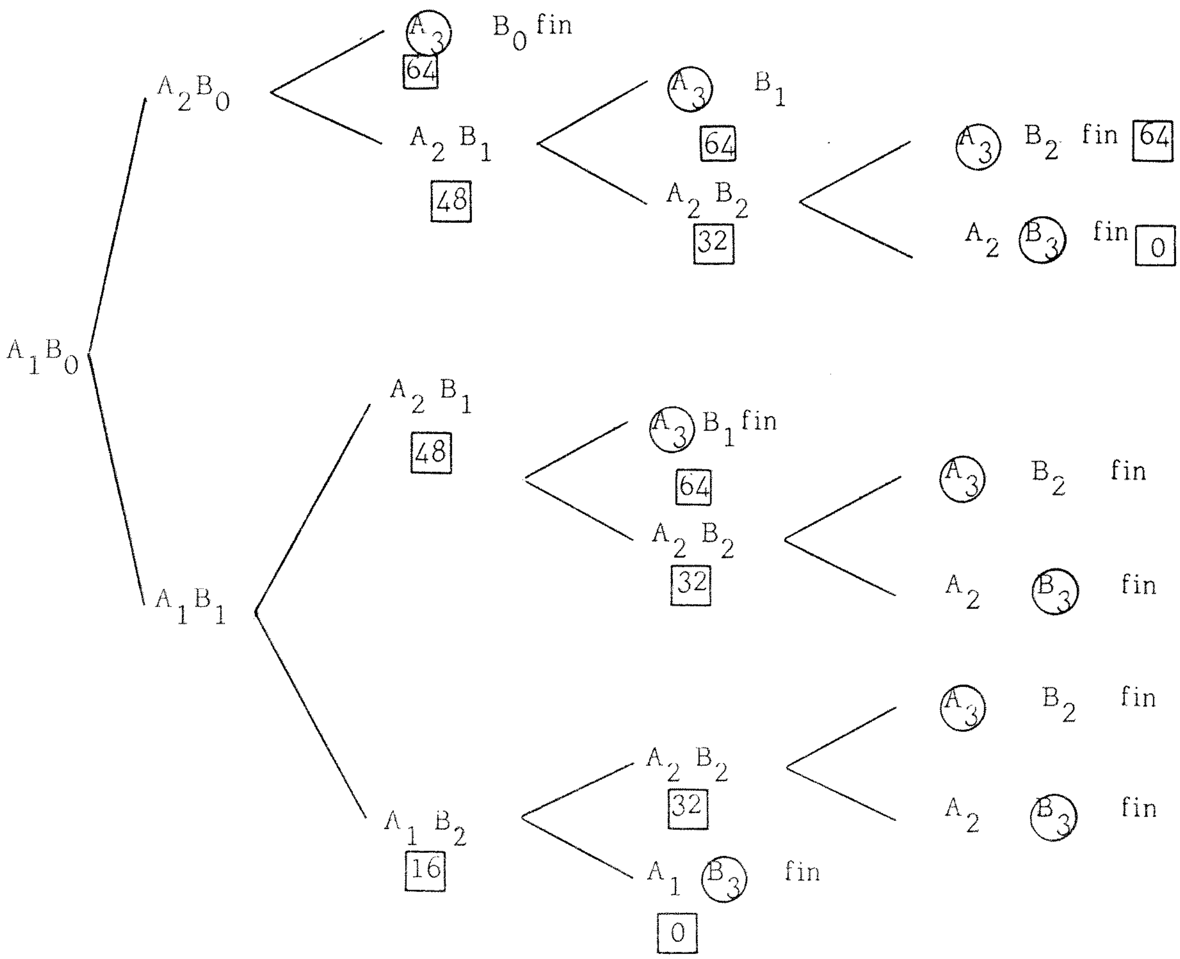
Commentaire allant au delà de la lettre de Pascal

On peut arriver par une analyse à rebours à trouver la somme qu'on doit attribuer à A en utilisant la règle :

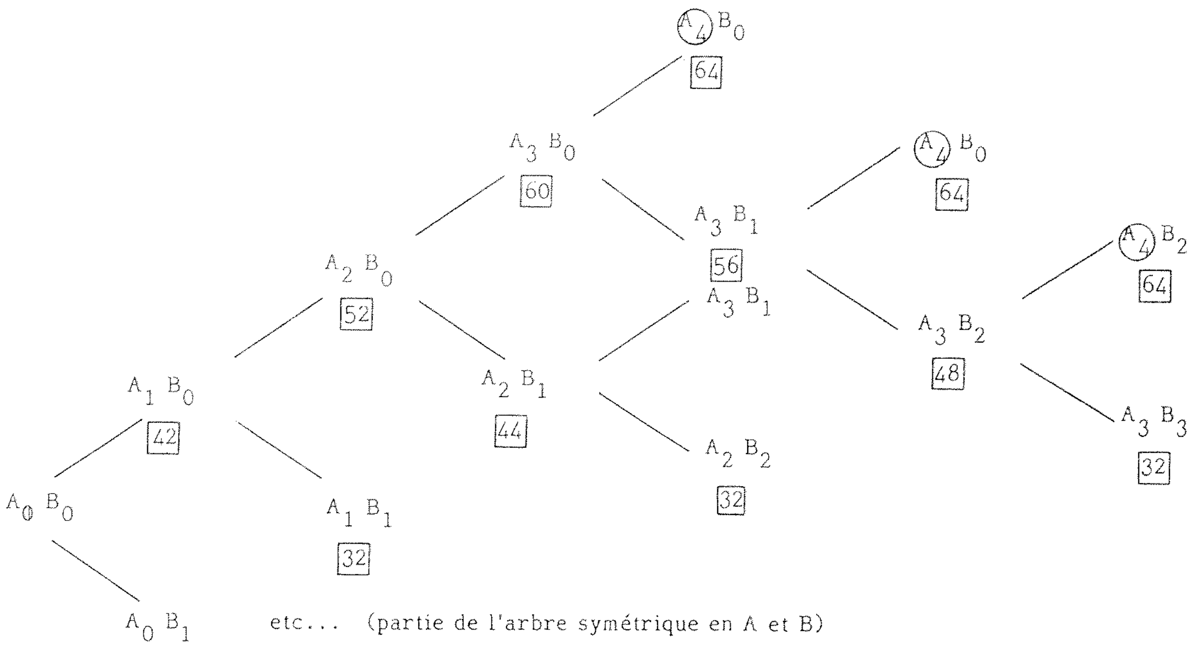


somme • $=\frac{1}{2}$ (somme * + somme o)

L'arbre suivant se remplit de droite à gauche pour reconstituer les sommes à attribuer à A (que l'on lit dans le carré $\boxed{}$)



Voici encore à titre d'exemple, l'arbre qu'on peut faire construire dans le cas où le 1er joueur à avoir gagné 4 parties est le vainqueur.

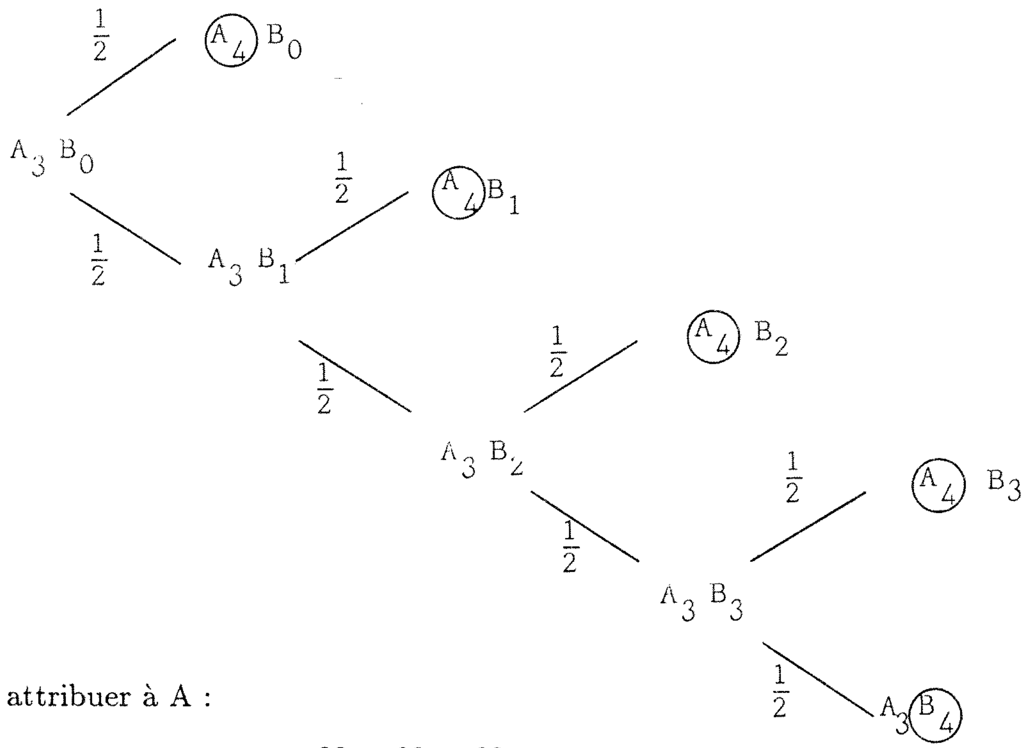


etc... (partie de l'arbre symétrique en A et B)

Pascal, contrairement à Fermat ne dispose pas d'une règle simple permettant de trouver d'emblée la valeur à attribuer au 1er parti. Il décompose donc le problème ainsi :

Tout d'abord, il cherche à trouver le parti (la somme) à attribuer à A juste avant le coup qui pourraît décider du résultat définitif.

Par exemple dans le cas suivant : trouver le parti à attribuer à A dans le cas A_3B_0 sachant que le premier à avoir gagné 4 parties gagne.



parti à attribuer à A :

$$32 + \frac{32}{2} + \frac{32}{4} + \frac{32}{8} = 60 \text{ pistoles}$$

fraction de la mise de l'adversaire qu'à chaque partie nouvellement gagnée le sort lui accorde.

On peut ainsi généraliser (mais ceci n'est pas démontré chez Pascal, c'est du langage moderne).

M est la mise initiale de chaque joueur. Le premier à avoir gagné $(n+1)$ parties remporte la mise.

On se place dans le cas A_nB_0.

Le parti à attribuer à A est

$$M + \frac{M}{2} + \frac{M}{2^2} + \cdots \frac{M}{2^n} = 2M(1 - \frac{1}{2^{n+1}}).$$

Or, pour ne plus faire de mystère, puisque vous voyez aussi bien tout à découvert et que je n'en faisois que pour voir si je ne me trompois pas, la valeur (j'entends sa valeur sur l'argent de l'autre seulement) de la dernière partie de deux est double de la dernière partie de trois et quadruple de la dernière partie de quatre et octuple de la dernière partie de cinq, etc.

Pascal précise ensuite que "la proportion des parties n'est pas aisée à trouver".

Pascal expose une sorte de "truc" qu'il ne démontre pas (il dit que la démonstration se fait à l'aide des combinaisons) dans cette lettre et qui lui permet de trouver la fraction de la mise (sur l'argent de l'autre) qui revient au gagnant.

Voici une traduction en langage moderne :
on se place dans le cas suivant : le 1er à avoir gagné $(n+1)$ parties est le vainqueur. On cherche le parti à attribuer à A dans la situation A_1B_0, donc dans le cas où il manque n parties à A pour gagner. On peut alors montrer que le jeu est définitivement décidé en $2n$ parties.

Dans ce cas la somme à attribuer à A est :

$$32 + 32 \times \frac{1 \times 3 \times 5 \ldots (2n-1)}{2 \times 4 \times 6 \ldots \times 2n}$$

La fraction représente la fraction de la mise de B qu'il faut attribuer à A.

Exemple : cas A_1B_0. le 1er à avoir gagné 3 parties est le vainqueur (voir arbre de la page 92).
Il manque 2 parties à A donc $n = 2$. Le jeu est décidé en 4 parties définitivement.
Valeur du parti pour A : $32 + 32 \times \frac{1\times3}{2\times4} = 44$.

Autre exemple : cas A_1B_0 dans le cas où le 1er à avoir gagné 4 parties est le vainqueur.
Il manque 3 parties à A : $n = 3$.
Valeur du parti pour A : $32 + 32 \times \frac{1\times3\times5}{2\times4\times6} = 42$.
Voir arbre de la page 95.

Mais la proportion des premières parties n'est pas si aisée à trouver : elle est donc ainsi, car je ne veux rien déguiser, et voici le problème dont je faisois tant de cas, comme en effet il me plait fort :

Etant donné tel nombre de parties qu'on voudra, trouver la valeur de la première.

Soit le nombre des parties donné, par exemple 8. Prenez les huit premiers nombres pairs et les huit premiers nombres impairs, savoir :

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16$$

et

$$1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.$$

Multipliez les nombres pairs en cette sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, le produit par le quatrième, le produit par le cinquième, etc.; multipliez les nombres impairs de la même sorte : le premier par le second, le produit par le troisième, etc.

Le dernier produit des pairs est le dénominateur et le dernier produit des impairs est le numérateur de la fraction qui exprime la valeur de la première partie de huit : c'est-à-dire que, si on joue chacun le nombre de pistoles exprimé par le produit des pairs, il en appartiendroit sur l'argent de l'autre le nombre exprimé par le produit des impairs.

Ce qui se démontre, mais avec beaucoup de peine, par les combinaisons telles que vous les avez imaginées, et je n'ai pu le démontrer par cette autre voie que je viens de vous dire, mais seulement par celle des combinaisons. Et voici les propositions qui y mènent, qui sont proprement des propositions arithmétiques touchant les combinaisons, dont j'ai d'assez belles propriétés :

La lecture des deux pages suivantes, sans commentaires, est réservée à ceux qui veulent vraiment approfondir la méthode exposée par Pascal ...

Si d'un nombre quelconque de lettres, par exemple de 8 :

$$A, B, C, D, E, F, G, H$$

vous en prenez toutes les combinaisons possibles de 4 lettres et ensuite toutes les combinaisons possibles de 5 lettres, et puis de 6, de 7 et de 8, etc., et qu'ainsi vous preniez toutes les combinaisons possibles depuis la multitude qui est la moitié de la toute jusqu'au bout, je dis que, si vous joignez ensemble la moitié de la combinaison de 4 avec chacune des combinaisons supérieures, la somme sera le nombre tantième de la progression quaternière à commencer par le binaire, qui est la moitié de la multitude.

Par exemple, et je vous le dirai en latin, car le français n'y vaut rien :
Si quotlibet litterarum, verbigratio octo : (30)

$$A, B, C, D, E, F, G, H$$

sumantur omnes combinationez quaternarii, quinquenarii, senarii, etc., usque ad octonarium, dico, si jungas dimidium combinationis, nempe 35 (dimidium 70), cum omnibus combinationibue quinquenarii, nempe 56, plus omnibus combinationibus senarii, nempe 28, plus omnibus combinationibus septenarii, nempe 8, plus omnibus combinarionibus octonarii, nempe 1, factum esse quartum numerum progressionis quaternarii cujus origo est 2 : dico quartum numerum, quia 4 octonerii diminium est.
Sunt enim progressionis quaternarii, cujus origo est 2, isti :

2,8,32,128,512,etc.,

quorum 2 primus est, 8 secundus, 32 tertius et 128 quartus : cui 128 œquanture
+ 35 dimidium combinationis 4 litterarum
+ 56 combinationis 5 litterarum
+ 28 combinationis 6 litterarum
+ 8 combinationis 7 litterarum
+ 1 combinationis 8 litterarum.

Voilà la première proposition qui est purement arithmétique; l'autre regarde la doctrine des parties et est telle :
Il faut dire auparavant : si on a une partie de 5, par exemple, et qu'ainsi il en manque 4, le jeu sera infailliblement décidé en 8, qui est double de 4.

La valeur de la première partie de 5 sur l'argent de l'autre est la fraction qui a pour numérateur la moitié de la combinaison de 4 sur 8 (je prends 4 parce qu'il est égal au nombre des parties qui manque, et 8 parce qu'il est double de 4) et pour dénominateur ce même numérateur plus toutes les combinaisons supérieures.

Ainsi, si j'ai une partie de 5, il m'appartient, sur l'argent de mon joueur $\frac{35}{128}$: c'est-à-dire que, s'il a mis 128 pistoles, j'en prends 35 et lui laisse le reste, 93.

Or cette fraction $\frac{35}{128}$ est la même que celle-là : $\frac{105}{384}$, laquelle est faite par la multiplication des pairs pour le dénominateur et la multiplication des impairs pour le numérateur.

Vous verrez bien sans doute tout cela, si vous vous en donnez tant soit peu la peine : c'est pourquoi je trouve inutile de vous en entretenir davantage.

Je vous envoie néanmoins une de mes vieilles Tables; je n'ai pas le loisir de la copier, je la referai.

Vous y verrez comme toujours que la valeur de la première partie est égale à celle de la seconde, ce qui se trouve aisément par les combinaisons.

Vous verrez de même que les nombres de la première ligne augmentent toujours; ceux de la seconde de même; ceux de la troisième de même.

Mais ensuite ceux de la quatrième diminuent; ceux de la cinquième, etc. Ce qui est étrange.

Il m'appartient, sur les 256 pistoles de mon joueur, pour la	Si on joue chacun 256 en					
	6 parties	5 parties	4 parties	3 parties	2 parties	1 partie
1ère partie	63	70	80	96	128	256
2e partie	63	70	80	96	128	
3e partie	56	60	64	64		
4e partie	42	40	32			
5e partie	24	16				
6e partie	8					

Il m'appartient sur les 256 de mon joueur, pour	Si on joue 256 chacun en					
	6 parties	5 parties	4 parties	3 parties	2 parties	1 partie
la 1ère partie	63	70	80	96	128	256
les 2 premières parties	126	140	160	192	256	
les 3 premières parties	182	200	224	256		
les 4 premières parties	224	240	256			
les 5 premières parties	248	256				
les 6 premières parties	256					

Commentaire de la lettre de Pascal à Fermat du 24 août

Il s'agit ici de la méthode de Fermat exposée par Pascal (on ne dispose pas de la lettre de Fermat exposant lui-même sa méthode).

On se place dans le cas où il manque 2 parties à A et 3 à B pour gagner.

On peut reprendre par comparaison le même cas que celui traité par la méthode de Pascal. Voir page 90.

Cas A_2B_1 : le vainqueur est le 1er qui a gagné 4 parties.

Le jeu sera décidé définitivement en 4 parties (on peut faire un arbre pour s'en convaincre (voir page 90).

Il y a 16 ($= 2^4$) façons de "combiner" ces 4 parties entre les 2 joueurs (voir le tableau dans la lettre). 11 cas sont favorables à A, 5 à B.

A aura donc $\frac{11}{16}$ de la mise soit 44 pistoles et B $\frac{5}{16}$ de la mise soit 20 pistoles.

Il est intéressant de constater qu'avec la méthode de Fermat, il faut raisonner sur des parties "fictives".

En effet dans la solution codée $\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}$ ou $\begin{matrix} a \\ a \\ b \\ a \end{matrix}$ par exemple, il est inutile de jouer 4 parties puisque le jeu s'arrête dès que a a gagné 2 parties. Cette objection historique à la méthode de Fermat était celle faite par Roberval et Pascal développe ici les arguments qu'il emploie pour convaincre Roberval.

Certains élèves font le même "blocage" sur la solution proposée par Fermat car elle suppose de raisonner "au delà" des parties qui seront effectivement jouées.

LETTRE DE PASCAL À FERMAT DU 24 AOÛT 1654

Varia Opera Mathematica P. de Fermat, pp. 184-188

Oeuvres de Blaise Pascal, G.E. III pp. 401-412

Monsieur,

Je ne pus vous ouvrir ma pensée entière touchant les partis de plusieurs joueurs par l'ordinaire passé, et même j'ai quelque répugnance à le faire, de peur qu'en ceci cette admirable convenance, qui étoit entre nous et qui m'étoit si chère, ne commence à se démentir, car je crains que nous ne soyons de différents avis sur ce sujet. Je vous veux ouvrir toutes mes raisons, et vous me ferez la grâce de me redresser, si j'erre, ou de m'affermir, si j'ai bien rencontré. Je vous le demande tout de bon et sincèrement, car je ne me tiendrai pour certain que quand vous serez de mon côté.

Quand il n'y a que deux joueurs, votre méthode, qui procède par les combinaisons, est très sûre; mais, quand il y en a trois, je crois avoir démonstration qu'elle est mal juste, si ce n'est que vous y procédiez de quelque autre manière que je n'entends pas. Mais la méthode que je vous ai ouverte et dont je me sers partout est commune à toutes les conditions imaginables de toutes sortes de partis, au lieu que celle des combinaisons (dont je ne me sers qu'aux rencontres particulières où elle est plus courte que la générale) n'est bonne qu'en ces seules occasions et non pas aux autres.

Je suis sûr que je me donnerai à entendre, mais il me faudra un peu de discours et à vous un peu de patience.
Voici comment vous procédez quand il y a deux joueurs :

Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque deux parties au premier et trois au second, pour trouver le parti, il faut, dites-vous, voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.

Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours-là, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant : aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties); et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes.

Cela est aisé à supputer : ils en peuvent avoir seize qui est le second degré de quatre, c'est-à-dire le quarré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée a, favorable au premier joueur, et l'autre b, favorable au second; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces seize assiettes :

a	a	a	a		a	a	a	a		b	b	b	b		b	b	b	b
a	a	a	a		b	b	b	b		a	a	a	a		b	b	b	b
a	a	b	b		a	a	b	b		a	a	b	b		a	a	b	b
a	b	a	b		a	b	a	b		a	b	a	b		a	b	a	b
1	1	1	1		1	1	1	2		1	1	1	2		1	2	2	2

et, parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux a le font gagner : donc il en a 11 pour lui : et parce qu'il y manque trois parties au second, toutes les faces où il y a trois b le peuvent faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5.

Voilà votre méthode quand il y a deux joueurs; sur quoi vous dites que, s'il y en a davantage, il ne sera pas difficile de faire les partis par la même méthode.

Sur cela, Monsieur, j'ai à vous dire que ce parti pour deux joueurs, fondé sur les combinaisons, est très juste et très bon : mais que, s'il y a plus de deux joueurs, il ne sera pas toujours juste et je vous dirai la raison de cette différence.

Je communiquai votre méthode à nos Messieurs, sur quoi M. de Roberval me fit cette objection :
Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en quatre parties, vu que, quand il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue quatre parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que deux ou trois, ou à la vérité peut-être quatre.

Et ainsi qu'il ne voyait pas pourquoi on prétendoit de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on jouera quatre parties, vu que la condition naturelle du jeu est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'étoit faux, cela n'étoit pas démontré, de sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme.

Je lui répondis que je ne me fondois pas tant sur cette méthode des combinaisons, laquelle véritablement n'est pas en son lieu en cette occasion, comme sur mon autre méthode universelle, à qui rien n'échappe et qui porte sa démonstration avec soi, qui trouve le même parti précisément que celle des combinaisons; et de plus je lui démontrai la vérité du parti entre deux joueurs par les combinaisons en cette sorte :

N'est-il pas vrai que, si deux joueurs, se trouvant en cet état de l'hypothèse qu'il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue quatre parties complètes, c'est-à-dire qu'on jette les quatre dés à deux faces tous à la fois, n'est-il pas vrai, dis-je, que, s'ils ont délibéré de jouer les quatre parties, le parti doit être, tel que nous avons dit, suivant la multitude des assiettes favorables à chacun?

Il en demeura d'accord et cela en effet est démonstratif; mais il nioit que la même chose subsistât en ne s'astreignant pas à jouer les quatre parties. Je lui dis donc ainsi :

N'est-il pas clair que les mêmes joueurs, n'étant pas astreints à jouer les quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un auroit atteint son nombre, peuvent sans dommage ni avantage s'astreindre à jouer les quatre parties entières et que cette convention ne change en aucune manière leur condition? Car, si le premier gagne les deux premières parties de quatre et qu'ainsi il ait gagné, refusera-t-il de jouer encore deux parties, vu que, s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné, et s'il les perd, il n'a pas moins gagné? Car ces deux que l'autre a gagné ne lui suffisent pas, puisqu'il lui en faut trois, et ainsi il n'y a pas assez de quatre parties pour faire qu'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il est aisé de considérer qu'il est absolument égal et indifférent à l'un et à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui est de finir dès qu'un aura son compte, ou de jouer les quatre parties entières : donc, puisque ces deux conditions sont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre. Or, il est juste quand ils sont obligés de jouer quatre parties, comme je l'ai montré : donc il est juste aussi en l'autre cas. Voilà comment je le démontrai et, si vous y prenez garde, cette démonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions, vraie et feinte, à l'égard de deux joueurs, et qu'en l'une et en l'autre un même gagnera toujours et, si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre et jamais deux n'auront leur compte.

BIBLIOGRAPHIE

OUVRAGES

DROESBEKE (Jean-Jacques).– *Eléments de statistiques.*– Editions Ellipses (1988).–

Un tour d'horizon assez complet des techniques statistiques (présentation des données, estimation, tests, analyse bivariée ...) et des notions de probabilités qui sous-tendent ces démarches. Ecrit par un statisticien pour des utilisateurs (ne démontre pas tous les résultats mais s'efforce de les éclairer).

ENCYCLOPEDIAE UNIVERSALIS (1990).– *(Calcul des) Probabilités* : in corpus 18, pp. 1018–1028.
L'introduction et le § 1 montrent bien la problématique des probabilités et expliquent les éclairages différents donnés à celles-ci en particulier dans les programmes scolaires.
Les § 2 à 10 sont très théoriques et ardus.
Le § 11 propose des problèmes "classiques".

ENGEL (Arthur).– *Les certitudes du hasard.*– Lyon, Editions Aléas (1990).–
A. Engel aborde les probabilités en lien étroit avec les statistiques. L'utilisation des arbres et des graphes y est codifiée et clairement expliquée.
L'ouvrage traite des probabilités de niveau lycée dans les premiers chapitres, puis aborde les notions de distributions, binomiales, de Poisson, normale ..., les problèmes de corrélation et d'intervalles de confiance.
Beaucoup d'exercices, tous corrigés.

ENGEL (Arthur).– *L'enseignement des probabilités et de la statistique.*– Paris, Cédic (1975).–
Un livre bien écrit et original. On peut y découvrir les probabilités et la statistique, notamment les tests d'hypothèse. Il présente le test de Fisher, basé sur la loi hypergéométrique : c'est rare et fort utile.

PAULOS (John Allen).– *La peur des chiffres.*– Ergo Press (1989).–
Réflexion et démystification (par une présentation mathématique accessible à tous) d'un certain nombre de superstitions et croyances. Deux chapitres concernent plus directement les probabilités et la statistique :
– 2 : Probabilités et coïncidences,
– 5 : Statistiques, trafics et société.

PUBLICATIONS DES I.R.E.M.

Les publications des I.R.E.M. dans ce domaine sont nombreuses et variées. Nous ne pouvons donc toutes les citer ici.

Concernant l'aspect historique :

GROUPE INTER-I.R.E.M. "EPISTEMOLOGIE ET HISTOIRE".– *Mathématiques au fil des âges.*– Paris, Gauthier-Villars (1987).–
Un chapitre consacré à des textes historiques liés aux probabilités. Parmi ceux-ci :
– le problème des partis (Pascal - Fermat),
– la loi des grands nombres (Bernoulli),
– les paradoxes du calcul des probabilités (Borel).

IREM DE PARIS VII.– *Mathématiques, approches par des textes historiques.*– (Tome 1 : 1986 - Tome 2 : 1990).–
Le tome 1 propose un TD pour les élèves à partir des différentes solutions historiques au problème "des partis".

Pour les articles récents parus dans des revues éditées par les I.R.E.M., citons :

HENRY (Annie et Michel).– *L'enseignement des probabilités dans le programme de première* in : "Repères I.R.E.M." n° 6 (janv. 1992), pp. 27–53.–
Réflexions, propositions et expérimentation.

MAA (Abderrazzak).– *Pour une approche "fréquentielle" des probabilités.*– in; "L'Ouvert" (Journal de l'A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'I.R.E.M. de Strasbourg) n° 65 (déc. 1991), pp. 38–44.
Encore des propositions d'activités dans le cadre du nouveau programme.

BULLETIN DE L'A.P.M.E.P.

PARZYSZ (Bernard).– *Un outil probabiliste sous-estimé : l'arbre probabiliste* in : "Bulletin de l'A.P.M.E.P.", n° 372 (fév. 1990).–
Les arbres pondérés constituent un outil efficace pour résoudre les exercices de probabilité liés au conditionnement, mais aussi, avant toute définition formalisée, permettent une première approche de ces situations probabilistes, en lien avec le calcul des fréquences.

ARTICLES PUBLIES DANS DES REVUES

Il s'agit de quelques articles parus dans diverses revues mais qui sont plus orientés vers la recherche en didactique des mathématiques.

LECOUTRE (Marie-Paule).– *Effet d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur les jugements probabilistes* in : "Recherche en didactique des mathématiques", Vol. 6/2.3 (1985).–

LECOUTRE (Marie-Paule).– *Jugement probabilistes chez des adultes* in : "Bulletin de psychologie", Vol. 38, n° 372, pp. 891–899 (1985).–

MAURY (Sylvette).– *La quantification des probabilités : analyse des arguments utilisés par les élèves de classe de seconde.*– in "Recherches en didactique des mathématiques", Vol. 5/2, pp. 187–214.–

MAURY (Sylvette).– *Influence de la question dans une épreuve relative à la notion d'indépendance.*– in :"Educational studies in mathematics", Vol. 16, pp. 283–301.–

STEINBRING (Heinz).– *L'indépendance stochastique.*– in : "Recherche en didactique des mathématiques", Vol. 7/3, pp. 5-50 (1986).–

STEINBRING (Heinz).– *La relation entre modélisations mathématiques et situations d'expérience pour le savoir probabiliste.*– in : "Annales de didactique et de sciences cognitives", Ed. I.R.E.M. de Strasbourg, Vol. 2, pp. 191-215 (1989).–

ZAKI (Moncef).– *Typologie des situations probabilistes et démarches de réponses.*– in : "Annales de didactique et de sciences cognitives", Ed. I.R.E.M. de Strasbourg, Vol. 1, pp. 203–216 (1988).–

ZAKI (Moncef) - PLUVINAGE (François).– *Démarches de résolution et de simulation face au problème de la ruine d'un joueur.*– in : "Educational studies in mathematics", n° 22, pp. 149–181 (1991).–

THESES

ALARCON (Jésus).– *L'appréhension des situations probabilistes chez des élèves de 12-14 ans.*– Thèse de 3e cycle de didactique des mathématiques, IRMA - ULP Strasbourg (1982).–

MAURY (Sylvette).– *Contribution à l'étude didactique de quelques notions de probabilité et de combinatoire à travers la résolution de problèmes.*– Thèse d'Etat, USTL Montpellier (1986).–

ZAKI (Moncef).– *Traitement de problèmes de probabilité en situation de simulation.*– Thèse de Doctorat, IRMA - ULP Strasbourg (1990).–

SOMMAIRE

ENSEIGNER LES PROBABILITÉS EN CLASSE DE PREMIÈRE

(Programmes 1991)

Titre : Enseigner les probabilités en classe de Première.

Auteurs : Claire DUPUIS, Jean-Claude KEYLING, Bernach KOCH, Dominique PERNOUX, Marie-Luce PORT, Suzette ROUSSET-BERT, Christine UNDREINER-BACH.

Mots-clés : Enseignement - Probabilités.

Résumé : Cette brochure est conçue dans l'esprit du nouveau programme de première (1991). Nous proposons plusieurs activités d'introduction aux probabilités, de nombreux exercices avec des éléments de solution, quelques réflexions sur la notion de probabilité et les choix au hasard, ainsi qu'une activité à partir de la correspondance de Blaise Pascal et Pierre de Fermat sur le problème des partis.

Public concerné : Professeurs des lycées.

Editeur : I.R.E.M. de Strasbourg (Brochure S. 151).