UNIVERSITE
LOUIS PASTEUR
STRASBOURG

ENSEIGNER LES PROBABILITES EN CLASSE DE TERMINALE

Par un groupe de l'I. R. E. M de Strasbourg

Mars 1994

I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 Strasbourg Cédex
Tél. 88 41 63 07 Secrétariat
88 41 64 40 Bibliothèque
Telex : ULP 870 260 F
Fax : 88 41 64 49

ENSEIGNER LES PROBABILITES

EN CLASSE DE TERMINALE

Cette brochure a été rédigée par :

Claire DUPUIS
André BASTIAN
Jean-Claude KEYLING
Bernard KOCH
Dominique PERNOUX
Marie-Luce PORT
Suzette ROUSSET-BERT
Christine UNDREINER-BACH

Les illustrations sont l'oeuvre de Nicolas LAVAUD, élève de Terminale B.

Introduction

Cette nouvelle brochure est à la fois une suite et un complément de celle qui a été publiée en 1992 [1] sur l'enseignement des probabilités en classe de première.

Pour l'approche du programme des classes de Terminale, le groupe a travaillé dans le même esprit que pour celui de la classe de Première.

. Nous avons choisi de privilégier des outils tels que tableaux et arbres : l'introduction de la probabilité conditionnelle et de la notion d'indépendance s'appuie sur le savoir-faire acquis par les élèves.

. La combinatoire et les dénombrements ne sont pas considérés comme le préalable à toute activité probabiliste.

. La notion d'espérance mathématique est introduite à partir de celle de moyenne en Statistique.

Le Chapitre I traite de **probabilité conditionnelle** et de la **notion d'indépendance** liée à celle-ci.

L'identification de conceptions fausses développées par les élèves a conduit à diversifier les situations concrètes proposées pour l'introduction de ces concepts. Quatre activités sont exposées, corrigées et commentées.

Les deux parties qui suivent contiennent des réflexions à l'usage des professeurs et ne sauraient constituer une partie du cours.

La quatrième partie propose des exercices variés, pour compléter ceux que l'on peut trouver dans les manuels scolaires.

Le chapitre se termine par un T. P. construit à partir d'un texte historique dû à Huyghens.

Le Chapitre II traite des notions de **variable aléatoire** et **d'espérance mathématique**.

Il comporte six exemples corrigés et commentés pour introduire ces notions, puis cinq T. P. corrigés et commentés.

Le Chapitre III traite des **dénombrements** sous deux éclairages différents.

Les dénombrements restent un outil puissant pour calculer des probabilités. Notre ambition est de dédramatiser leur apprentissage, qui a souvent éloigné les élèves des Probabilités. Le programme précise qu'il convient d'éviter une trop grande technicité pour ce chapitre.

---

1 Irem de Strasbourg, 1992, Brochure S151

Le Chapitre IV est la conclusion, peut-être provisoire, pour les membres du groupe, de leurs recherches, discussions et expérimentations au sujet de l'outil “arbres”. Ce n'est évidemment pas un cours, mais plutôt un “essai”.

Les auteurs espèrent que les situations, exercices, T. P. et réflexions théoriques proposés dans cette brochure répondront à votre attente et vous remercient par avance pour toutes les remarques et critiques dont vous leur ferez part.

I

PROBABILITE CONDITIONNELLE

INDEPENDANCE

Situations introductives à l'enseignement des probabilités conditionnelles : quelques caractéristiques souhaitables.

Les situations introductives à l'enseignement des probabilités conditionnelles ont été choisies de façon à avoir les caractéristiques suivantes :

pouvoir être résolues AVANT l'enseignement des probabilités conditionnelles avec les outils enseignés en classe de première

pouvoir être résolues par des ARBRES, des TABLEAUX ou des PATATES, la préférence allant à des situations ou plusieurs modes de résolution sont possibles

amener à faire plusieurs arbres

ne pas être toutes des situations où l'univers est équiprobable

ne pas être toutes des situations présentant une relation de cause à effet

ne pas être toutes des situations présentant une relation temporelle

Quatre situations ont été retenues suivant ces critères, chacune ayant des qualités et les défauts de ses qualités puisqu'aucune ne peut présenter toutes les possibilités.

L'épicerie

Les urnes

Les multiples

La kermesse

Nous avons tenu compte pour présenter ces activités des travaux de recherche de André Totohasina, et notamment de sa thèse "Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle", soutenue à l'Université de Rennes 1 en 1992. Ses travaux présentent des conceptions des élèves à propos de la notion de probabilité conditionnelle.

Conceptions fausses identifiées à propos des probabilités conditionnelles

Les notions de probabilité conditionnelle et d'indépendance sont des notions délicates et il est bon d'avoir à l'esprit différentes difficultés que peuvent rencontrer les élèves dans l'apprentissage de ces notions.[1]

Tout d'abord les confusions classiques

entre la probabilité conditionnelle P(A / B) et la probabilité conjointe P (A ∩ B)

entre les notions d'indépendance et d'incompatibilité

qui sont facilement repérables dans les productions des élèves.

Plus délicates à identifier sont les conceptions fausses, accordant à la notion de probabilité conditionnelle des caractéristiques qu'elle n'a pas toujours. Ces conceptions ne se repèrent que lorsqu'elles amènent les élèves à refuser une question ou à fournir une réponse fausse. Nous en présentons trois : la conception causaliste, la conception chronologiste et la conception cardinaliste.

la conception causaliste de la probabilité conditionnelle P(A / B) est le fait d'introduire (implicitement) une relation de "cause à effets" ou de "cause à conséquences" entre l'événement conditionné A et l'événement conditionnant B.

Dans ce cas, une question où l'on demanderait de renverser cette relation et de calculer la probabilité d'une "cause" connaissant une "conséquence" peut sembler totalement aberrante à un élève.

la conception chronologiste de la probabilité conditionnelle P(A / B) est le fait de voir systématiquement une relation temporelle entre A et B : l'événement conditionnant B est considéré comme forcément antérieur à l'événement conditionné A.

Dans ce cas, une question où l'on demanderait de renverser cette relation temporelle et de calculer la probabilité d'un événement "passé" connaissant un événement "futur" peut sembler totalement aberrante à un élève.

---

[1]Ces propos s'inspirent très largement de la thèse d'André Totohasina. Nous lui empruntons notamment ses définitions des conceptions.

Prenons pour exemple un problème classique de probabilité conditionnelle.

Une usine dispose de 2 machines M1 et M2 fabriquant des boulons. La machine M1 fabrique 40% de la totalité des boulons ; 5% des boulons fabriqués par cette machine sont défectueux ; 1% des boulons fabriqués par la machine M2 sont défectueux.
On tire un boulon au hasard. L'examen du boulon montre qu'il est défectueux.
Quelle est la probabilité qu'il ait été fabriqué par la machine M1 ?

Pour certains élèves, cette question qui demande de renverser la situation, de remonter le temps, à la fois dans la fabrication et dans l'ordre de présentation des données de l'énoncé, est aberrante. Et on voit ainsi apparaître, en général après des détours, la réponse 5% qui correspond à la probabilité que le boulon soit défectueux, sachant qu'il a été fabriqué par la machine M1.

la conception cardinaliste de la probabilité conditionnelle est la tendance systématique à se représenter P(A / B) par le rapport

$$\text{Card}\,(A \cap B) \,/\, \text{Card}\,(B)$$

ce qui est correct dans les cas d'équiprobabilité ou, à tort, par le rapport

$$\text{Card}\,A \,/\, \text{Card}\,B$$

ce qui est généralement faux.

Cette conception se repère plus facilement même lorsqu'elle ne conduit pas à des erreurs mais parfois seulement à des détours. Ainsi pour la question 2 de L'épicerie, on peut voir des élèves faire le détour suivant :
A = { cartons contenant une boîte Rouge et marqué M }
Ω = { univers des boîtes Rouges }

$$\text{Card}\,\Omega = \frac{25\,n}{100}$$

$$\text{Card}\,A = \frac{45}{100} \times \frac{25\,n}{100} = \frac{9\,n}{80}$$

$$P(A) = \frac{\text{Card}\,A}{\text{Card}\,\Omega} = \frac{9n}{80} \times \frac{100}{25n} = \frac{9}{20} = 0{,}45$$

réponse correcte, qui est une donnée de l'énoncé.

Si nous gardons en mémoire ces conceptions fausses ou au moins dangereuses, nous pouvons veiller dans le choix des activités introductives et dans les exemples et exercices que nous donnerons aux élèves à respecter des équilibres et ne pas renforcer l'une ou l'autre de ces conceptions.

Situations introductives : scénario d'utilisation

Distribuer l'énoncé du problème.

Laisser du temps aux élèves pour chercher (environ une heure scolaire)

Mettre en parallèle les différentes solutions des élèves..

Faire expliciter les raisonnements et les représentations utilisées : tableaux, arbres, et autres représentations (pertinentes ou non)

Faire éventuellement travailler sur une ou plusieurs autres situations à ce moment suivant les difficultés des élèves

Introduire la notion de probabilité conditionnelle.

On pourra, dans un premier temps, préférer la notation indicielle $p_B(A)$

(La situation de l'épicerie a été expérimentée en 2 heures scolaires jusqu'à ce point)

Faire travailler sur une ou plusieurs autres situations

L'épicerie[2]

Un magasin stocke un certain produit dans des boîtes.
Ces boîtes sont de 2 couleurs : rouge dans la proportion 25%, bleue dans la proportion 75%. Elles sont protégées par des cartons identiques entre eux. Chaque carton ne contient qu'une seule boîte. Certains cartons portent, en dessous et à l'extérieur, la marque M, les autres ne portent aucune marque.
On précise d'autre part que

parmi les cartons contenant une boîte rouge, 45% portent la fameuse marque M

parmi ceux qui contiennent une boîte bleue, 60% portent la marque M.

On prend au hasard un carton dans le magasin.

1.
Définir un univers des possibles.

2.
On ouvre le carton tiré. On remarque qu'il contient une boîte rouge. Quelle est la probabilité p_1 que le carton porte la marque M ?
Si la boîte contenue dans le carton était bleue, quelle serait la probabilité p_2 que le carton porte la marque M ?

3.
Quel est le pourcentage de cartons qui portent la marque M ?
En déduire la probabilité p_3 qu'un carton tiré porte la marque M.

4.
On n'ouvre pas le carton tiré. On remarque toutefois qu'il porte la marque M. Quelle est la probabilité p_4 que ce carton marqué M contienne une boîte rouge ?

On adoptera les notations suivantes :
M : " obtenir un carton marqué M "
R : " obtenir un carton contenant une boîte rouge "
B : " obtenir un carton contenant une boîte bleue "

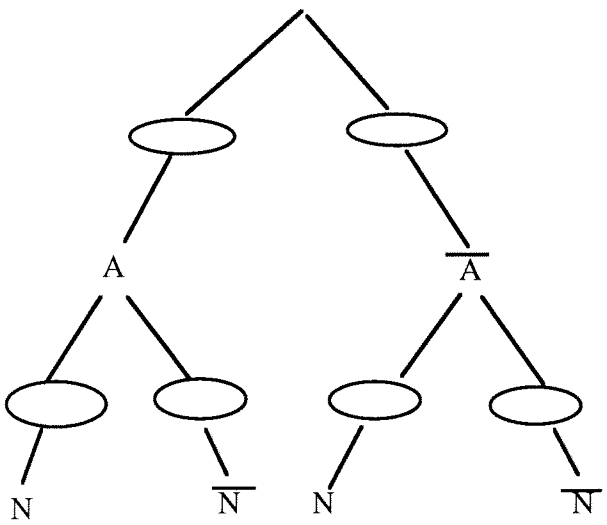
---

[2]André Totohasina, Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnnelle, Université de Rennes 1, 1992.

Les urnes

<table>
<tr><th>Situation 1</th><th>Situation 2</th></tr>
<tr><td>

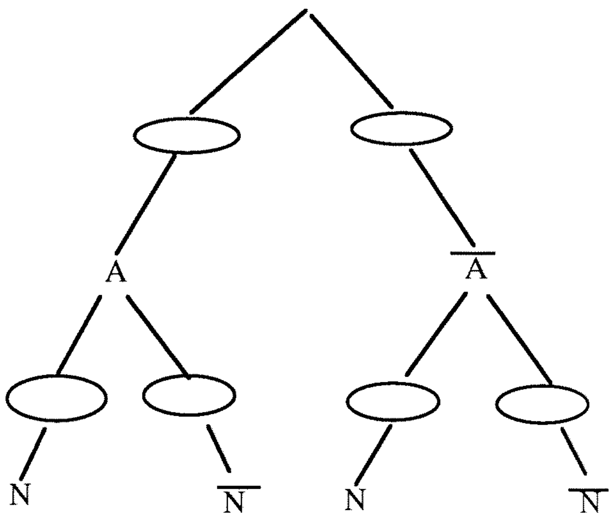
Dans une urne 1, il y a **quatre** boules noires et **six** boules blanches.
Dans une urne 2, il y a **trois** boules noires et **sept** boules blanches.
On choisit une urne au hasard puis on choisit une boule au hasard dans cette urne.
Soient les événements :
A : "on choisit l'urne n°1"
N : " la boule tirée est noire"
1.
Compléter



2.
Compléter
P (A) =
P (A et N) =
P ($\overline{A}$ et N) =
P (N) =

</td><td>

Dans une urne 1, il y a **quatre** boules noires et **huit** boules blanches.
Dans une urne 2, il y a **trois** boules noires et **six** boules blanches.
On choisit une urne au hasard puis on choisit une boule au hasard dans cette urne.
Soient les événements :
A : "on choisit l'urne n°1"
N : " la boule tirée est noire"
1.
Compléter



2.
Compléter
P (A) =
P (A et N) =
P ($\overline{A}$ et N) =
P (N) =

</td></tr>
</table>

Notations nouvelles : (probabilités conditionnelles)

On note $P_A(N)$ la probabilité de tirer une boule noire quand on sait qu'on a choisi l'urne n°1

On définit de même $P_{\bar{A}}(N)$, $P_A(\bar{N})$, $P_{\bar{A}}(\bar{N})$.

3.

Compléter :

$P_A(N) =$

$P_A(\bar{N}) =$

$P_{\bar{A}}(N) =$

$P_{\bar{A}}(\bar{N}) =$

4.

Vérifier que :

$P_A(N) \neq P(N)$

$P(A \text{ et } N) \neq P(A) \times P(N)$

5.

A votre avis, dira-t-on que A et N sont dépendants ou indépendants ?

3.

Compléter :

$P_A(N) =$

$P_A(\bar{N}) =$

$P_{\bar{A}}(N) =$

$P_{\bar{A}}(\bar{N}) =$

4.

Vérifier que :

$P_A(N) = P(N)$

$P(A \text{ et } N) = P(A) \times P(N)$

5.

A votre avis, dira-t-on que A et N sont dépendants ou indépendants ?

6.

Vous n'étiez pas là au moment du choix de l'urne et du tirage de la boule, mais je vous dis que la boule tirée est noire.

Quelle est la probabilité que vous attribuez à l'événement " la boule provient de l'urne n° 1

Indication : on cherche $P_N(A)$

Calcul de $P_N(A)$

Calcul de $P_N(A)$

Les multiples

On tire un nombre au hasard parmi les 10 premiers entiers naturels : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

1.

Quel est l'ensemble des résultats possibles Ω ?

Considérons les événements suivants :

A : le résultat est un multiple de 2

B: le résultat est un multiple de 5

C : le résultat est un multiple de 10

D : le résultat est un multiple de 3

E : le résultat est un multiple de 6

2.

Représenter les événements A, B, C, D et E comme sous - ensembles de Ω .

3.

Calculer les probabilités P(A), P(B), P(C).

A quel événement est égal l'événement A et B , noté $A \cap B$?

Montrer que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

4.

Calculer P (D).

A quel événement est égal l'événement A et D , noté $A \cap D$?

Calculer $P(A \cap D)$

Montrer que $P(A \cap D) \neq P(A) \times P(D)$

5.

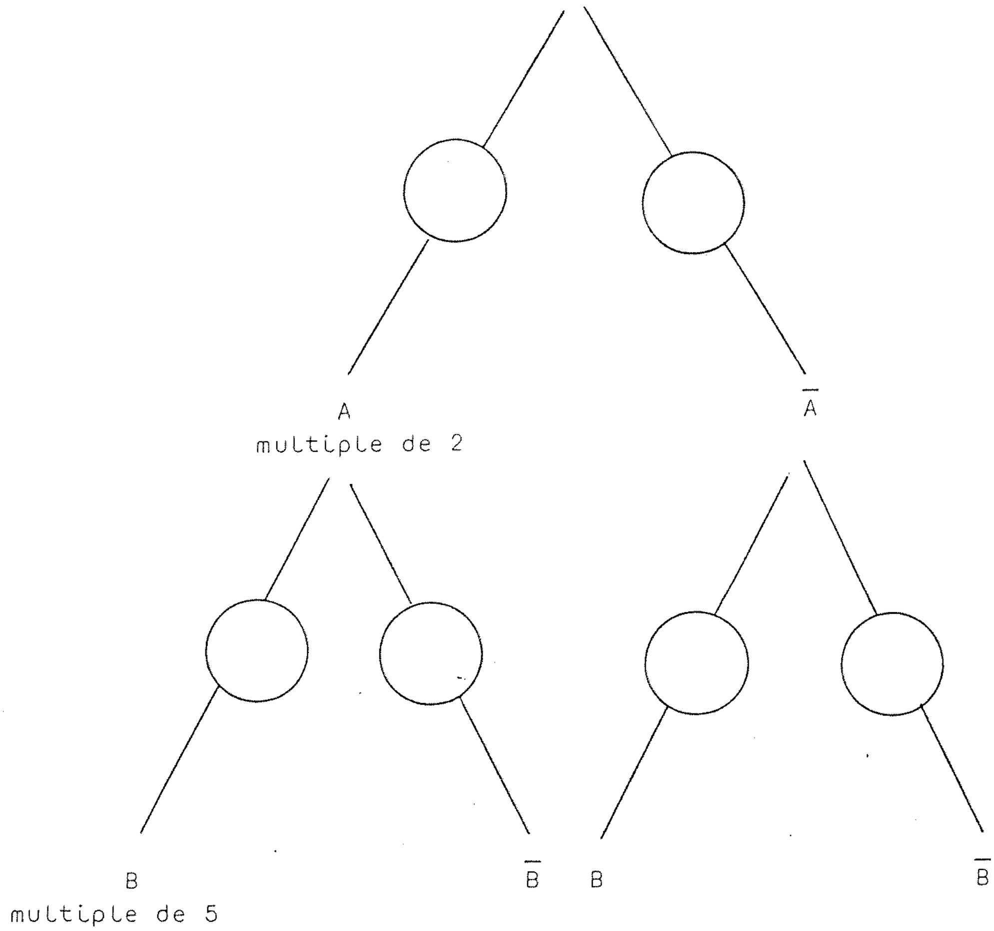
Compléter les 4 arbres pondérés ci-contre.

Quelles différences peut-on observer entre ces arbres ? A quelles propriétés correspondent-elles?

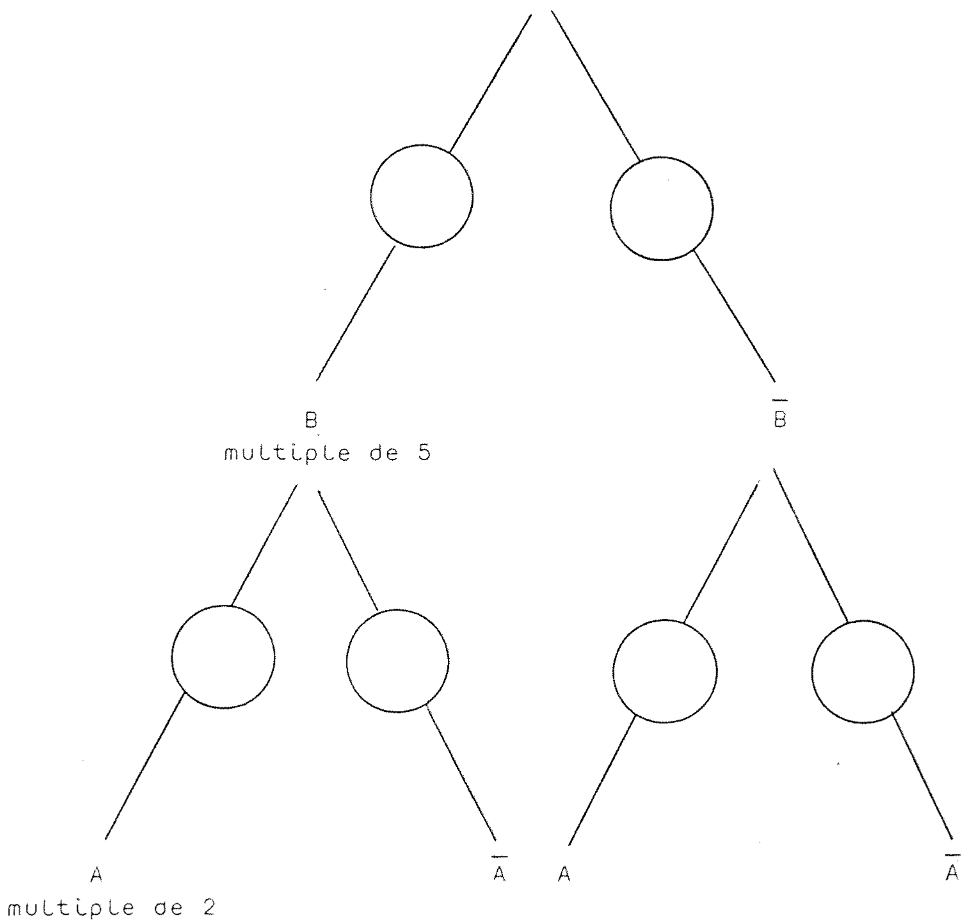
Comment interpréter les probabilités qui figurent sur les branches ?

6.

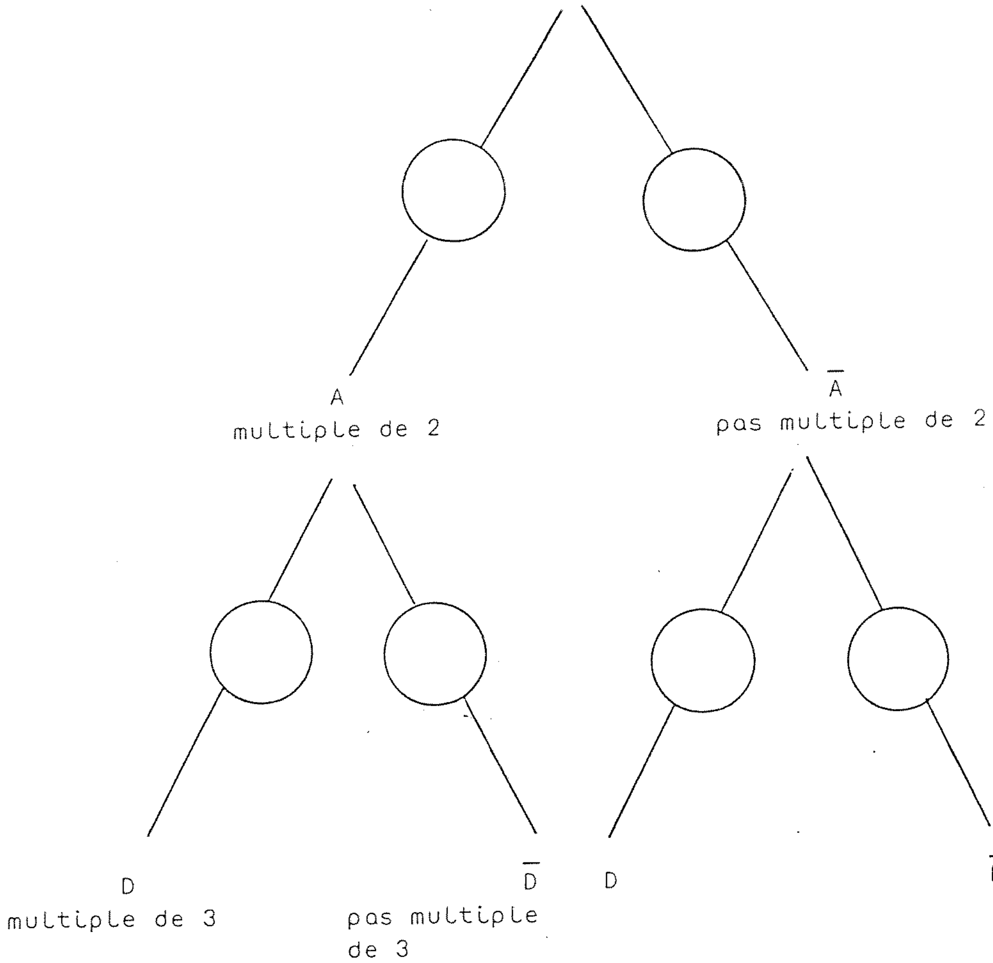
Compléter les tableaux de probabilité ci-contre.



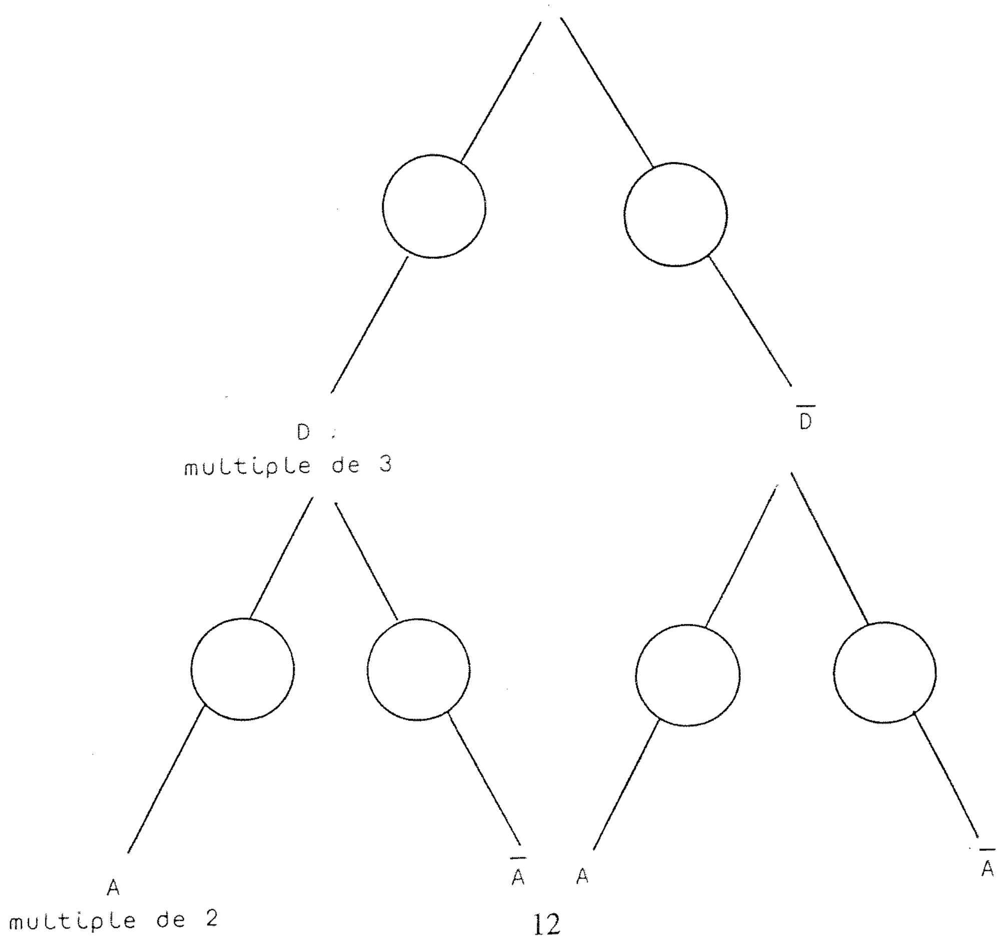
A
multiple de 2
$\overline{A}$
B
multiple de 5
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$



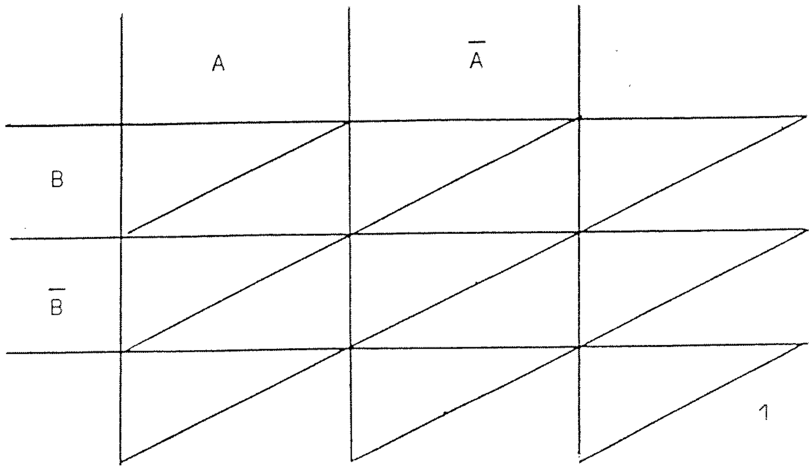
B
multiple de 5
$\overline{B}$
A
multiple de 2
$\overline{A}$
A
$\overline{A}$

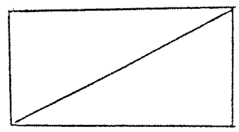


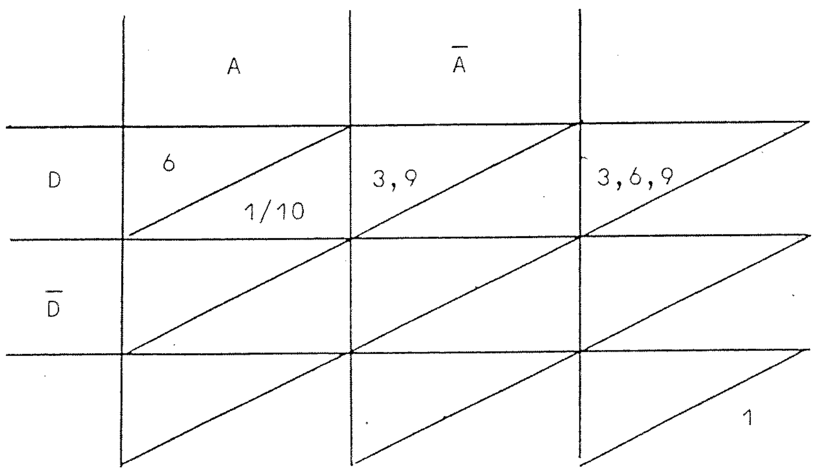
A
multiple de 2
$\overline{A}$
pas multiple de 2
D
multiple de 3
$\overline{D}$
pas multiple
de 3
D
$\overline{D}$

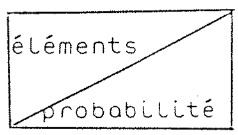


D
multiple de 3
$\overline{D}$
A
multiple de 2
$\overline{A}$
A
$\overline{A}$


A
$\overline{A}$
B
$\overline{B}$
1




A
$\overline{A}$
D
6
1/10
3, 9
3, 6, 9
$\overline{D}$
1


éléments
probabilité


ALLONS REPRENNEZ VOUS, CE N'EST QU'UN JEU...
TRICHEUR PRO. NIV: 200
TRICHEUR CONFIRMÉ NIV: 150
SUPER TRICHEUR NIV: 180
AMATEUR NIV 1
NIV 0.5
LOTERIE
LAVAUD.

LA KERMESSE.

La kermesse

Dans une kermesse, une loterie a été organisée avec une roulette comprenant 30 numéros. Le jeu consiste à parier sur un numéro. Le croupier lance alors la roulette puis la bille : on gagne si la bille s'arrête sur le numéro joué(si le numéro joué sort).

Mais parmi les 120 personnes qui se présentent pour jouer (chacune une fois), 100 sont d'honnêtes amateurs et 20 sont des tricheurs qui ont acheté la complicité du croupier de sorte que les amateurs ont 1 chance sur 30 de gagner alors que les tricheurs ont (en moyenne) 1 chance sur 3 de gagner.

En résumé

120 joueurs :

100 amateurs

20 tricheurs

Chaque amateur a 1 chance sur 30 de gagner (gagne avec une probabilité de 1 / 30)

Chaque tricheur a 1 chance sur 3 de gagner (gagne avec une probabilité de 1 / 3)

Questions :

1.

Une personne prise au hasard parmi les 120 joueurs (et dont on ne sait rien) se présente pour jouer. Quelle est la probabilité qu'elle gagne ?

2.

Une personne joue et gagne ;

quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?

quelle est la probabilité que ce soit un amateur ?

3.

Une personne joue et perd ;

quelle est la probabilité que ce soit un tricheur ?

quelle est la probabilité que ce soit un amateur ?

CORRIGES ET COMMENTAIRES SUR LA SITUATION L'EPICERIE

Dans un premier temps, on attend de la part des élèves des raisonnements sur les pourcentages, les proportions de proportions. Les élèves peuvent traiter l'exercice entièrement ainsi, sans introduire la notion de probabilité conditionnelle. Un premier corrigé est donné ainsi.

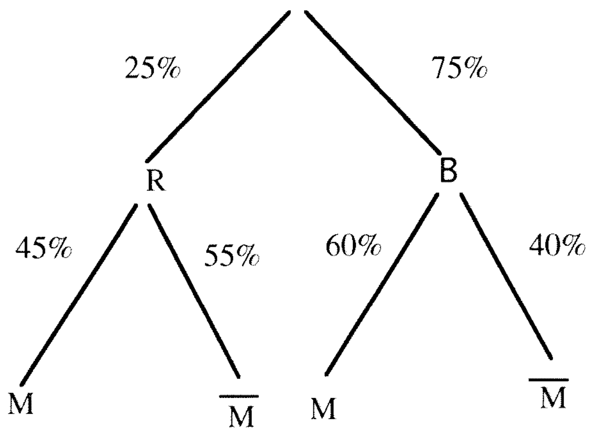
Le professeur peut se servir de cette activité pour introduire les notions (il s'agit alors de formaliser des fonctionnements sur un arbre utilisés implicitement depuis la classe de 1ère), ou bien attendre l'activité suivante .

q.1 Les élèves proposent souvent comme univers des possibles

$\{$ B et M ; B et $\overline{M}$; R et M ; R et $\overline{M}$ $\}$

Pour développer la suite du cours sur les proba conditionnelles il convient de prendre
Ω = "ensemble des boîtes" ou Ω = "ensemble des cartons" (les deux ensembles ont le même nombre d'éléments)

Les deux modélisations le plus souvent proposées pour résoudre l'ensemble des questions qui vont suivre sont de type arbre ou tableau.



	R	B	
M	11,25 %	45 %	56,25 %
$\overline{M}$	13,75 %	30 %	43,75 %
	25 %	75 %	100 %

L'arbre se construit directement en reportant les données (et en complétant à 100 %)
Le tableau nécessite des calculs. Seules les cases 25 % et 75 % sont des données de l'énoncé.

q:2 P_1 et P_2 sont en fait des probabilités conditionnelles. On les déduit directement des données de l'énoncé.

$P_1 = 0{,}45 \qquad P_2 = 0{,}60$

On observe dès cette question la confusion possible chez les élèves entre P_R (M) et P (M∩R).

q.3 $\frac{45}{100} \times \frac{25}{100} + \frac{60}{100} \times \frac{75}{100} = \frac{56{,}25}{100}$

d'où $P_3 = 0{,}5625$

q.4 Cette question est difficile car elle nécessite un retournement de point de vue dans l'arbre initialement construit. Elle est rarement résolue sans l'aide du professeur.

Les solutions exactes proposées par les élèves sont assez souvent du type tableau de proportionnalité

56,25	------->	100
11,25	------->	x

$x = \frac{20}{100}$ d'où $p_4 = 0{,}2$

La représentation en tableau permet plus directement de résoudre cette question par un rapport de %, ou un rapport de cardinaux d'ensembles en se ramenant à 1 000 boîtes.

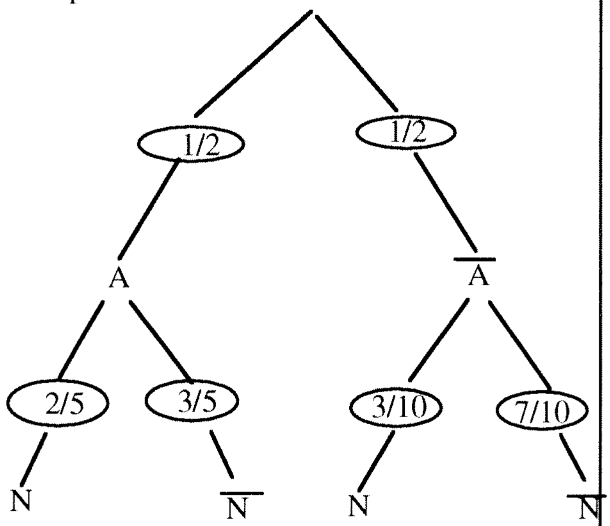
*Remarque sur les données numériques

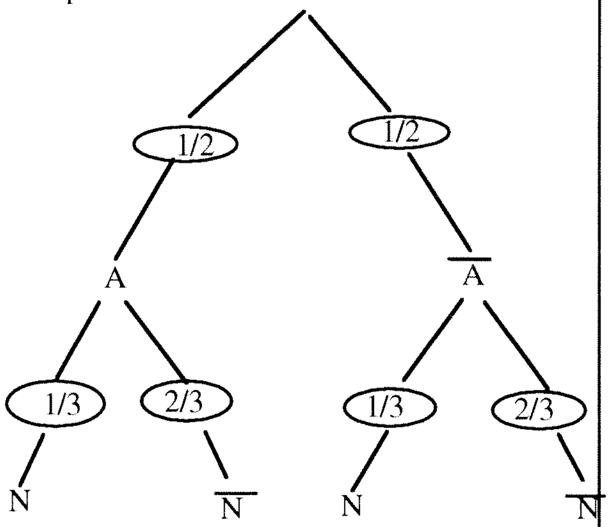
Le choix a été fait pour que la proba P_4 soit un décimal et soit donc plus facile à appréhender par les élèves. On peut traduire ainsi "La proportion de boîtes rouges, parmi les marquées est de 20 % "

CORRIGES ET COMMENTAIRES SUR LA SITUATION LES URNES

Dans cet exercice, l'outil des arbres est imposé aux élèves.
L'arbre est le bon outil pour introduire les probabilités conditionnelles car elles ont une place naturelle sur les branches.
Cette présentation peut renforcer la conception chronologiste mais les activités qui suivent permettent de corriger cette tendance.

Utiliser un tableau d'effectifs pour résoudre ce problème peut être efficace dans la situation 1 (les urnes contiennent le même nombre de boules) mais pas dans la situation 2. On pourrait le résoudre en construisant des tableaux de probabilités ; mais cette construction nous semble moins proche de l'énoncé.

<table>
<tr>
<td>
Situation 1
Dans une urne 1, il y a quatre boules noires et six boules blanches.
Dans une urne 2, il y a trois boules noires et sept boules blanches.
On choisit une urne au hasard puis on choisit une boule au hasard dans cette urne.
Soient les événements :
A : “on choisit l'urne n° 1”
N : “la boule tirée est noire”
1.
Compléter


</td>
<td>
Situation 2
Dans une urne 1, il y a quatre boules noires et huit boules blanches.
Dans une urne 2, il y a trois boules noires et six boules blanches.
On choisit une urne au hasard puis on choisit une boule au hasard dans cette urne.
Soient les événements :
A : “on choisit l'urne n° 1
N : “la boule tirée est noire”
1.
Compléter


</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>2.
Compléter
$P(A) = \frac{1}{2}$
$P(A \text{ et } N) = \frac{1}{5}$
$P(\overline{A} \text{ et } N) = \frac{3}{20}$
$P(N) = \frac{1}{5} + \frac{3}{20} = \frac{7}{20}$</td>
<td>2.
Compléter
$P(A) = \frac{1}{2}$
$P(A \text{ et } N) = \frac{1}{6}$
$P(\overline{A} \text{ et } N) = \frac{1}{6}$
$P(N) = \frac{1}{3}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Notations nouvelles : (probabilités conditionnelles)
On note $P_A(N)$ la probabilité de tirer une boule noire quand on sait qu'on a choisi l'urne n° 1
On définit de même $P_{\overline{A}}(N)$, $P_A(\overline{N})$, $P_{\overline{A}}(\overline{N})$.</td>
</tr>
<tr>
<td>3.
Compléter :
$P_A(N) = \frac{2}{5}$
$P_A(\overline{N}) = \frac{3}{5}$
$P_{\overline{A}}(N) = \frac{3}{10}$
$P_{\overline{A}}(\overline{N}) = \frac{7}{10}$

4.
Vérifier que :
$P_A(N) \neq P(N)$
$P(A \text{ et } N) \neq P(A) \times P(N)$

5.
A votre avis, dira-t-on que A et N sont dépendants ou indépendants ?</td>
<td>3.
Compléter :
$P_A(N) = \frac{1}{3}$
$P_A(\overline{N}) = \frac{2}{3}$
$P_{\overline{A}}(N) = \frac{1}{3}$
$P_{\overline{A}}(\overline{N}) = \frac{2}{3}$

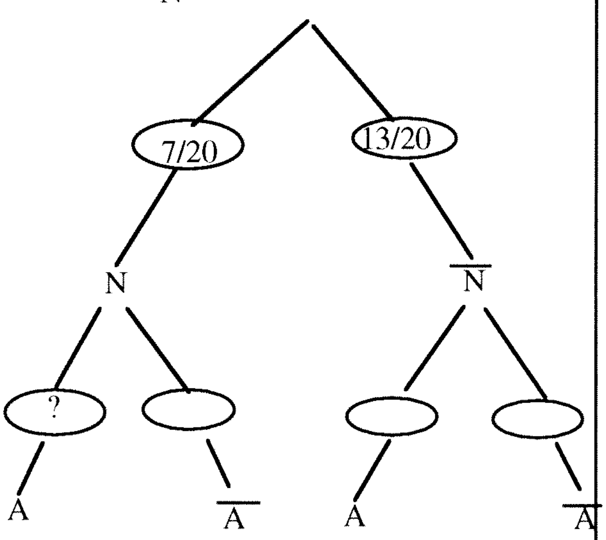
4.
Vérifier que :
$P_A(N) = P(N)$
$P(A \text{ et } N) = P(A) \times P(N)$

5.
A votre avis, dira-t-on que A et N sont dépendants ou indépendants ?</td>
</tr>
</table>

A ce niveau les élèves ont compris la différence entre les deux situations (même proportion de boules noires dans les deux urnes dans la situation 2, ce qui n'est pas le cas dans la situation 1), mais ne savent quel vocabulaire employer. Cette question est donc destinée à faire le point.

6. Vous n'étiez pas là au moment du choix de l'urne et du tirage de la boule, mais je vous dis que la boule tirée est noire.
Quelle est la probabilité que vous attribuez à l'événement "la boule provient de l'urne n° 1
Indication : on cherche P N (A)

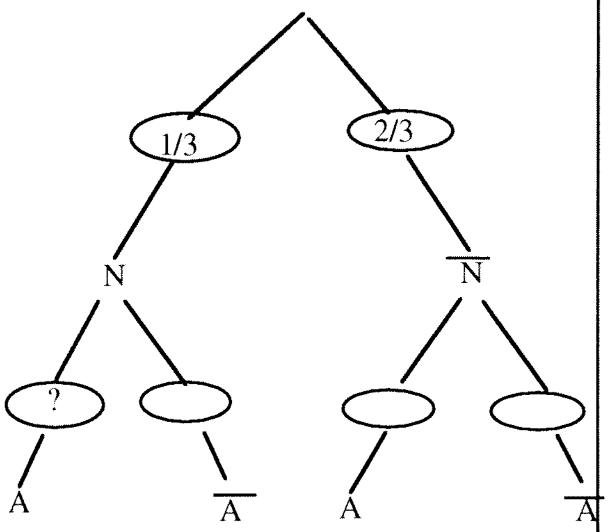
Calcul de $P_N(A)$



$P(A \cap N) = \frac{1}{5}$

$P_N(A) = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{7}{20}} = \frac{4}{7}$

Calcul de $P_N(A)$

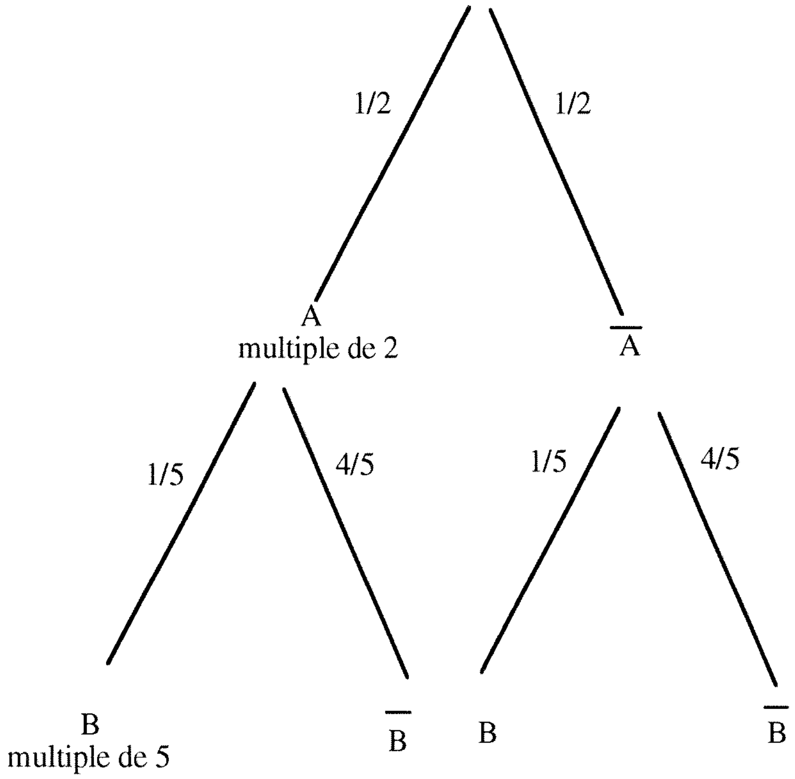


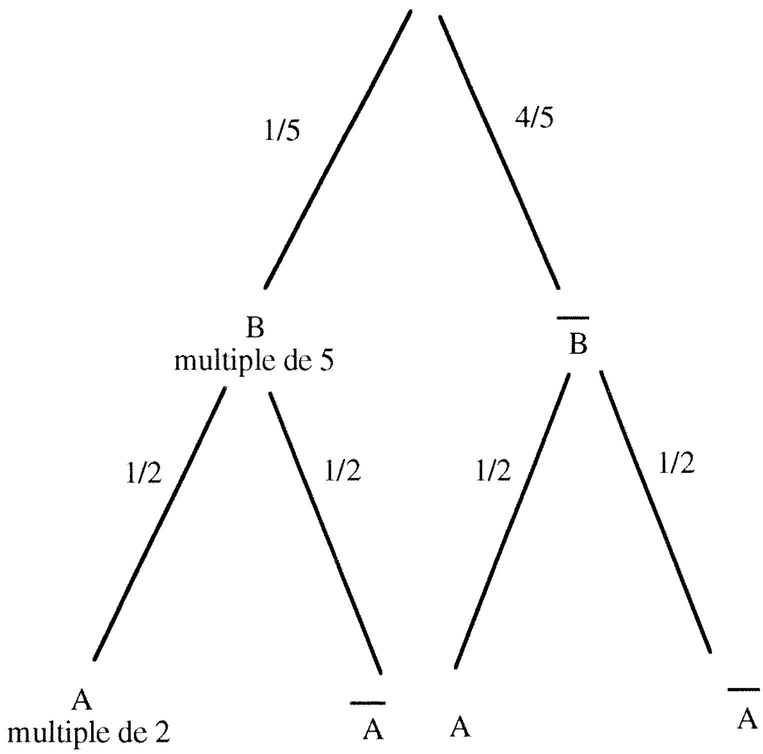
$P(A \cap N) = \frac{1}{6}$

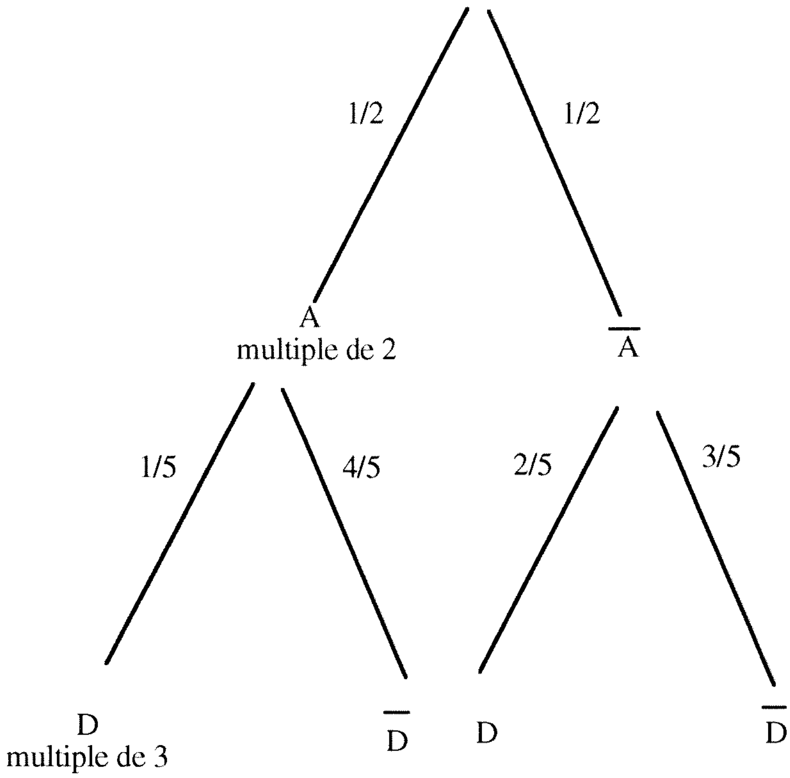
$P_N(A) = \dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$

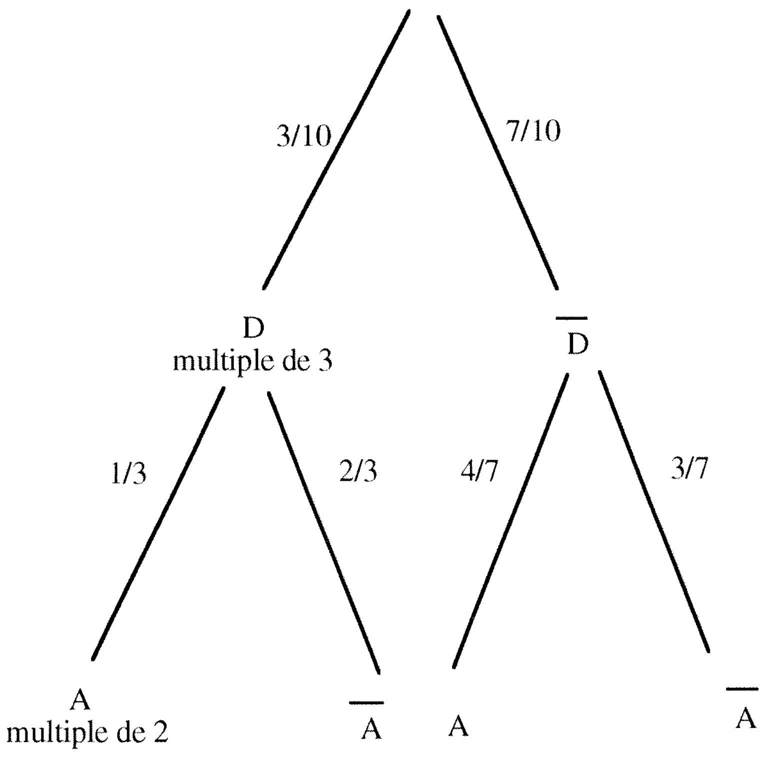
CORRIGES ET COMMENTAIRES SUR LA SITUATION : LES MULTIPLES

Cette situation ne contient ni "chronologie" ni "causalité". En effet, à partir d'une même propriété "être multiple de" on peut fabriquer des événements dépendants ou indépendants en choisissant bien Ω. C'est une situation d'équiprobabilité qui risque de favoriser une conception cardinaliste si elle est la seule situation proposée.






1/2
1/2
A
multiple de 2
$\overline{A}$
1/5
4/5
2/5
3/5
D
multiple de 3
$\overline{D}$
D
$\overline{D}$


3/10
7/10
D
multiple de 3
$\overline{D}$
1/3
2/3
4/7
3/7
A
multiple de 2
$\overline{A}$
A
$\overline{A}$

L'indépendance ? il suffit de secouer les arbres

L'indépendance de A et B se "lit" sur les arbres de deux façons, toutes deux suffisantes pour établir l'indépendance.

Si, sur un arbre, on voit que les 2 sous-arbres de 2è niveau sont identiques, cela suffit à établir l'indépendance : c'est le cas pour les deux arbres de la page 21.

Si on compare les 2 arbres de la page 21, on voit que le sous arbre de 1er niveau de chaque arbre se retrouve dupliqué, au 2è niveau de l'autre arbre. Cela suffit aussi à établir l'indépendance des événements A et B (et de leurs complémentaires).

Des tableaux

Dans les tableaux qui suivent, on a fait figurer à la fois les éléments appartenant aux événements et les probabilités des dits événements.

éléments probabilité

	A	$\bar{A}$	
B	10 $\frac{1}{10}$	5 $\frac{1}{10}$	5 ; 10 $\frac{2}{10}$
$\bar{B}$	2 ; 4 ; 6 ; 8 $\frac{4}{10}$	1 ; 3 ; 7 ; 9 $\frac{4}{10}$	1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 $\frac{8}{10}$
	2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 $\frac{1}{2}$	1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 $\frac{1}{2}$	1

	A	$\overline{A}$	
D	6 $\frac{1}{10}$	3 ; 9 $\frac{2}{20}$	3 ; 6 ; 9 $\frac{3}{10}$
$\overline{D}$	2 ; 4 ; 8 ; 10 $\frac{4}{10}$	1 ; 5 7 $\frac{3}{10}$	2 ; 4 ; 8 ; 10 1 ; 5 ; 7 $\frac{7}{10}$
	2 ; 4 ; 6 8 ; 10 $\frac{1}{2}$	1 ; 3 ; 5 7 ; 9 $\frac{1}{2}$	1

CORRIGES ET COMMENTAIRES SUR LA SITUATION LA KERMESSE

1 Solution en termes d'événements

L'univers Ω est l'ensemble des 120 personnes. Cet univers est équiprobable puisque l'expérience aléatoire consiste à prendre une personne au hasard parmi les 120 personnes.
On peut définir les événements

G = "la personne gagne"
P = "la personne perd"
A = "la personne est un amateur"
T = "la personne est un tricheur"

Les données du problème se traduisent donc par

$$P(A) = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$$
$$P(T) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$$
$$P(G/A) = \frac{1}{30} \quad P(G/T) = \frac{1}{3}$$

Question 1

$$P(G) = P(G/A)\,P(A) + P(G/T)\,P(T)$$

$$= \frac{1}{30} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}$$

$$p(G) = \frac{1}{12}$$

Question 2

$$P(T \cap G) = P(G/T) \times P(T) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

$$P(T / G) = \frac{P(T \cap G)}{P(G)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{12}} = \frac{2}{3}$$

donc $P(A/G) = \dfrac{1}{3}$

P (A/G) peut aussi se calculer par $\dfrac{\dfrac{1}{30} \times \dfrac{5}{6}}{\dfrac{1}{12}} = \dfrac{1}{3}$

Question 3

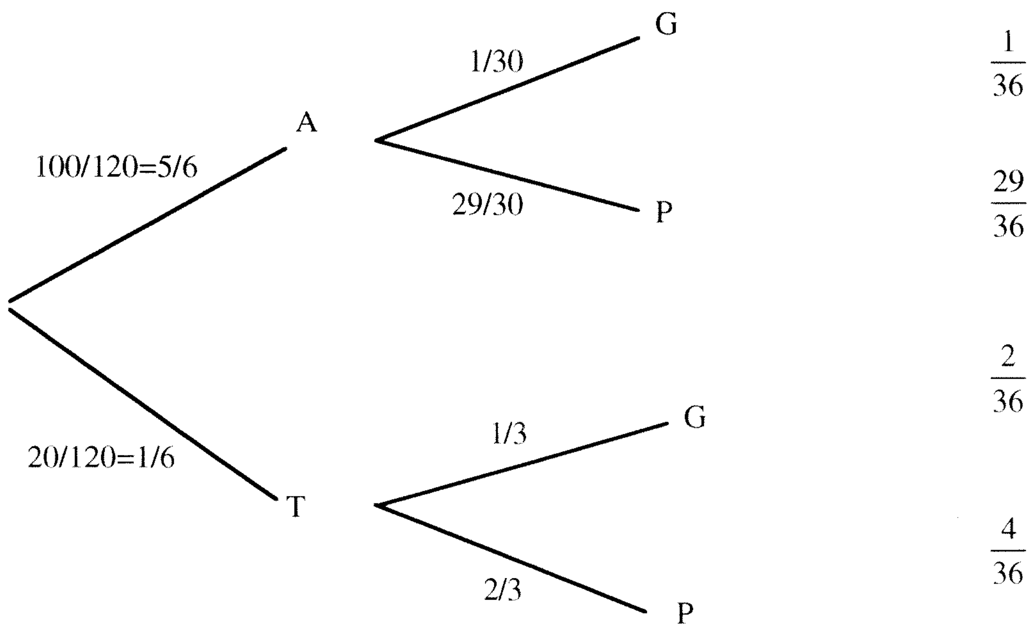
$$P(T / P) = \frac{P(T \cap P)}{\dfrac{11}{12}} = \frac{P(P / T)P(T)}{\dfrac{11}{12}} = \frac{\dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{6}}{\dfrac{11}{12}} = \frac{4}{33}$$

$$P(A/P) = 1 - \frac{4}{33} = \frac{29}{33}$$

On remarque que pour résoudre le problème de cette façon, il faut une grande sûreté dans la manipulation des écritures symboliques. Il faut aussi passer plusieurs fois au complémentaire pour des probabilités conditionnelles. Dans le cadre d'activités introductives à la notion de probabilité conditionnelle, il est peu probable que ceci constitue une solution "élève"

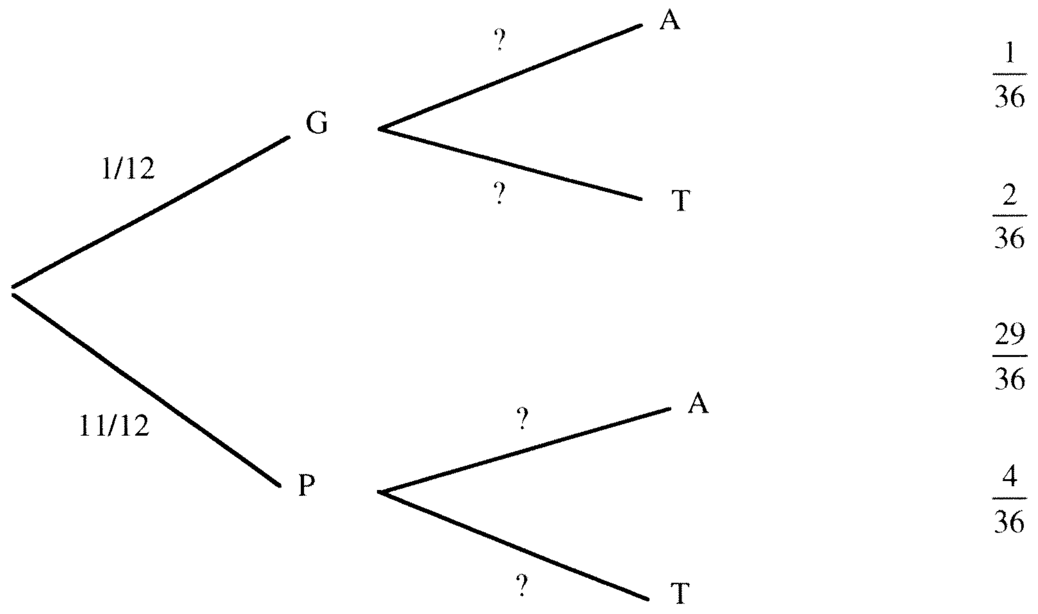
2 Solution Arbustive

Question 1



$$P(G) = \frac{100}{120} \times \frac{1}{30} + \frac{20}{120} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

Questions 2 et 3



Si l'on construit cet arbre inversé, les questions deviennent :
- par quoi faut-il multiplier 1/12 pour obtenir 2/36 ?
réponse 2/3 = P (T/G)

- par quoi faut-il multiplier $\frac{1}{12}$ pour obtenir $\frac{2}{36}$?
réponse $\frac{2}{3}$ = P (T/G)

- par quoi faut-il multiplier $\frac{1}{12}$ pour obtenir $\frac{1}{36}$?
réponse $\frac{1}{3}$ = P(A/G)

- par quoi faut-il multiplier $\frac{11}{12}$ pour obtenir $\frac{4}{36}$?

réponse $\frac{4}{11 \times 3}$ = P(T/P)

- par quoi faut-il multiplier $\frac{11}{12}$ pour obtenir $\frac{29}{36}$?

réponse $\frac{29}{11 \times 3}$ = P(A/P)

On peut aussi raisonner à partir du premier arbre en termes de "proportions" dans la population. Etant donné que l'expérience consiste à tirer une personne au hasard, la proportion de ceux qui vérifient une propriété est égale à la probabilité correspondante.

gagner et être un amateur : $\frac{1}{36}$

gagner et être un tricheur : $\frac{2}{36}$

Proportion de tricheurs parmi ceux qui gagnent

$$\frac{\frac{2}{36}}{\frac{1}{36}+\frac{2}{36}}=\frac{2}{3}$$

Donc la proportion d'amateurs est $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Question 3

Parmi ceux qui perdent, la proportion de tricheurs est $\frac{\frac{4}{36}}{\frac{29}{36}+\frac{4}{36}}=\frac{4}{33}$

la proportion d'amateurs est : $\frac{29}{33}$

3 Solution avec un tableau d'effectif total 120

Essai de partition d'un Ω à 120 éléments, les 120 personnes.
On reporte les données et on complète par soustraction et addition.

	G	P	
A	$\frac{1}{30}$ x 100	$\frac{290}{3}$	100
T	$\frac{1}{3}$ x 20	$\frac{40}{3}$	20
	10	110	120

Question 1

$$P(G) = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$$

Question 2

On se place dans la 1ère colonne

Tricheurs $\dfrac{\frac{20}{3}}{10} = \dfrac{20}{3} = \dfrac{2}{3}$ donc Amateurs $\dfrac{1}{3}$

Question 3

On se place dans le 2ème colonne

Tricheurs $\dfrac{\frac{40}{3}}{110} = \dfrac{4}{33}$

Amateurs $\dfrac{\frac{290}{3}}{110} = \dfrac{29}{33}$

4 Solution avec un tableau d'effectif total 36

36 est le plus petit dénominateur commun des probabilités des intersections
ex : $P(G \cap A) = \dfrac{5}{6} \times \dfrac{1}{30} = \dfrac{1}{36}$ (voir le premier arbre)

	G	P	
A	1	29	30
T	2	4	6
	3	33	36

Dans ce tableau, on peut retrouver toutes les probabilités demandées.
Les nombres y sont tous entiers

Pourtant ce sont de "faux" effectifs à moins que vous ne trouviez un Ω à 36 éléments cohérent avec cette situation.

5 Solution avec un vrai tableau de probabilités

	G	P	
A	$\frac{1}{36}$	$\frac{29}{36}$	$\frac{5}{6}$
T	$\frac{1}{18} = \frac{2}{36}$	$\frac{2}{18} = \frac{4}{36}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$	1

6 Commentaires sur la situation

On peut considérer que Ω est l'ensemble des parties jouées puisqu'on a précisé que chacune des 120 personnes joue une fois. On pourrait avoir aussi bien un amateur qui joue 100 fois et un tricheur qui joue 20 fois, car évidemment on a supposé que les parties sont des épreuves indépendantes.

Les valeurs numériques choisies sont telles si on essaye de déterminer Card $(G \cap T)$ dans un Ω à 120 éléments, on trouve un nombre qui n'est pas entier.

Ceci peut poser des problèmes aux élèves, surtout pour ceux qui ont envie de calculer P(A/B) par $\dfrac{Card(A \cap B)}{Card(B)}$

Cela permet de se rappeler que dans cette situation le "nombre" de personnes qui sont des tricheurs et qui gagnent est un nombre moyen, en fait l'espérance d'une binomiale $\mathcal{B}(20 ; \frac{1}{3})$ où n = 20 est le nombre de Tricheurs et $\frac{1}{3}$ = p est la probabilité de gagner pour chacun d'entre eux.

Indépendance a priori et indépendance

EVENEMENTS INDEPENDANTS

Expérience : *Tirer une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.*

Les événements A : "tirer un roi" et B : "tirer une carte noire" sont-ils indépendants ?

La proportion de rois parmi les cartes noires est égale à la proportion de rois dans le paquet ; la réalisation ou la non-réalisation de l'événement B n'apporte aucune modification de la probabilité de l'événement A : l'événement A est dit indépendant de l'événement B.

$P(A|B)=P(A|\overline{B})=P(A)$ équivaut ici à $P(A\cap B)=P(A)\ P(B)$.

Par symétrie, B est indépendant de A; A et B sont dits indépendants.

L'indépendance de deux événements est donc liée à la probabilité (contrairement à la notion d'événements incompatibles). Ainsi les événements "obtenir un nombre pair" et "obtenir un multiple de 3" dans l'expérience qui consiste à lancer un dé, sont indépendants lorsque le dé est parfaitement équilibré mais ne le sont pas forcément lorsque le dé est pipé.

EPREUVES INDEPENDANTES

Deux épreuves sont indépendantes si le résultat de l'une n'est pas affecté par le résultat de l'autre.

Exemples: ***Epreuves répétées** (jets d'un dé , lancers d'une pièce ou d'une roulette, tirages successifs **avec remise** etc....).

****Tirages successifs de boules dans des urnes distinctes ou modèles équivalents.**

Si Ω_1 (resp. Ω_2) représente l'ensemble des éventualités associé respectivement à l'épreuve n° 1 (resp. n°2) , si A_1 (resp. A_2) est une partie de Ω_1 (resp.Ω_2), on démontre que les événements $A=A_1\times\Omega_2$ et $B=\Omega_1\times A_2$ sont indépendants dans $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$ pour la probabilité produit . Il arrive de dire, par abus de langage, que les événements A_1 (de Ω_1) et A_2 (de Ω_2) sont indépendants.

Dans les applications, il est aberrant de démontrer l'indépendance de tels événements ; en effet celle-ci apparaît comme une propriété de l'expérience aléatoire ; ainsi lorsqu'on procède à un **tirage avec remise** de n individus dans une population finie, les événements relatifs aux différents tirages sont indépendants entre eux **par construction** . On peut parler dans ces cas-là **d'événements indépendants a priori.**

Exemple et contre exemple :

Enoncé : *Les chasseurs Jules et Jim tirent sur une cible . Les événements A : "Jules atteint la cible" et B : "Jim atteint la cible" sont de probabilités respectives 4/5 et 7/8. Quelle est la probabilité qu'aucun des deux n'atteigne la cible ?*

L'expérience peut s'apparenter à un tirage, fait par Jules, d'une boule dans une urne contenant 5 boules dont 4 blanches suivi d'un tirage, fait par Jim, d'une autre boule dans une autre urne contenant 8 boules dont 7 blanches ; "ne pas atteindre la cible" peut signifier ici "ne pas tirer une boule blanche". Le résultat du tirage fait par Jules dans la première urne n'a pas d'incidence sur le résultat du tirage fait par Jim dans la deuxième urne. On peut donc considérer qu'il y a **indépendance a priori** des événements A et B ainsi que des événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ et conclure que $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}).P(\overline{B}) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{8} = 0{,}025$.

Enoncé : *On choisit au hasard une famille dans l'ensemble des familles à 2 enfants, les événements A : "a des enfants des deux sexes" et B : "a au plus une fille" sont-ils indépendants ? (Pour chaque naissance, la probabilité d'avoir un garçon est supposée être égale à 1/2).*

Les naissances des deux enfants peuvent être interprétées comme une **succession de deux épreuves indépendantes** : en effet la détermination du sexe d'une naissance n'influe pas sur celui de la suivante.

Cependant les **événements A et B ne sont pas indépendants a priori** .

On n'est pas dans la situation où A est une partie de l'ensemble Ω_1 des éventualités associé à l'une de ces deux épreuves indépendantes **et où, simultanément,** B est une partie de l'ensemble Ω_2 des éventualités associé à **l'autre** épreuve.

A et B sont ,dans cet exemple, des parties de $\Omega_1 \times \Omega_2$.

On peut néanmoins résoudre ce problème : **L'indépendance des épreuves** entraîne **l'indépendance a priori d'événements** comme "le premier enfant est un garçon" et "le second enfant est un garçon" ou d'événements comme "le premier enfant est un garçon" et "le second enfant est une fille" ou d'événements comme.... Le calcul des probabilités des événements A, B et $A \cap B$ en découle facilement .

Remarque concernant certains énoncés :

C'est dans l'appréciation de l'indépendance des épreuves que se situent souvent les difficultés.

Enoncé : *Un polycopié contient des erreurs. Les n étudiants de l'amicale décident de faire chacun une relecture. Les relectures sont supposées indépendantes. A chaque relecture, une erreur qui n'avait pas encore été corrigée l'est avec une probabilité de 1/3.*

Calculer la probabilité de l'événement A_i : "l'erreur n° i a été corrigée".

En supposant que le polycopié contenait au départ quatre erreurs, combien faut-il d'étudiants dans l'amicale pour que la probabilité qu'il ne subsiste aucune erreur soit au moins 99% ?

Les relectures ne peuvent être indépendantes que si chacun des étudiants relit le même texte initial tout seul dans son coin. Sous cette hypothèse, on peut poser que chaque erreur est corrigée avec une probabilité de 1/3, mais on ne peut pas donner la probabilité de corriger une erreur, sous condition qu'elle ne soit pas corrigée, sans introduire une dépendance entre les épreuves, analogue à celle que l'on établit lors de tirages successifs de n boules **sans remise.**

Enoncé : *Deux individus tirés au hasard indépendamment l'un de l'autre, l'un mâle, l'autre femelle,....*

S'il s'agit de tirer deux individus indépendamment l'un de l'autre dans une population donnée, alors si le premier tiré est un mâle, le second peut être n'importe quel individu de cette population y compris celui qui a été primitivement tiré. Supposer que c'est une femelle, c'est renoncer à l'indépendance .

S'il s'agit de tirer successivement un individu au hasard dans l'ensemble des mâles, puis un individu au hasard dans l'ensemble des femelles alors les épreuves sont indépendantes par construction ....

Enoncé : *Un représentant de commerce doit visiter 5 clients ; chacune de ses visites est indépendante des autres.*

Il peut donc visiter 5 fois de suite le même client....L'indépendance des visites est parfaitement réalisée pour tous les représentants de commerce amnésiques.

<u>Enoncé</u> : *Sujet du Bacc D de PARIS-CRETEIL (juin 1991)*

Voir commentaires dans le bulletin A.P.M. n°386 page 592.

Un tirage successif **sans remise** de n boules dans une urne contenant un très grand nombre de boules y est assimilé, sans avertissement, à un tirage successif **avec remise** de n boules, donc à une succession de n épreuves deux à deux indépendantes.

<u>Enoncé</u> : *Le fameux sujet du Bacc D de PARIS-CRETEIL (juin 1988).*

(Voir commentaires dans le bulletin A.P.M. n°372 page 89.)

On effectue, **sur un même individu,** une succession de deux tests médicaux identiques réalisés **indépendamment l'un de l'autre**. Cela signifie que l'on n'a pas connaissance des résultats du premier test au moment où on réalise le second test, mais ceci ne signifie nullement que les résultats du second test soient sans rapport avec ceux du premier : en effet, d'après l'énoncé, le test n'est pas dénué de toute efficacité! Les résultats du second test confirment dans une très large mesure ceux du premier. Il n'y a nullement indépendance des épreuves .

D'autre part si l'on note V l'événement "l'individu est porteur du virus" et $\overline{T}_i$ l'événement "le test n° i appliqué à cet individu est négatif", l'indépendance de $\overline{T}_1$ et $\overline{T}_2$ pour la probabilité conditionnelle par rapport à V, $P(\ |V)$, et pour la probabilité conditionnelle par rapport à $\overline{V}$, $P(\ |\overline{V})$, n' implique pas celle de $\overline{T}_1$ et $\overline{T}_2$ pour la probabilité conditionnelle par rapport à $V\cup\overline{V}$, $P(\ |V\cup\overline{V})$.

En effet, considérons une urne contenant trois boules noires (portant les numéros 2, 4 et 6) et quatre boules blanches (portant les numéros 1, 2, 42, 3). Soient A l'événement "la boule porte un numéro pair", B l'événement "la boule porte un numéro qui est multiple de trois" et C l'événement "la boule est blanche".

$P(A\cap B\,|C)=P(A|C).P(B|C)$ et

$P(A\cap B\,|\overline{C})=P(A|\overline{C}).P(B|\overline{C})$ mais

$P(A\cap B)\neq P(A).P(B)$.

L'indépendance de A et B pour la probabilité $P(\ |\ C)$ conditionnelle par rapport à C et l'indépendance de A et B pour la probabilité $P(\ |\ \overline{C}\ )$ conditionnelle par rapport à $\overline{C}$ n'entraînent pas l'indépendance de A et B pour la probabilité $P(\ )$.

A relier à certains travaux faits sur les proportions....

QUELQUES REMARQUES :

*Des risques de confusion :

1°) Considérons un univers quelconque et deux événements A et B.

	B	$\overline{B}$
A	a	b
$\overline{A}$	c	d

On note a = $P(A \cap B)$, b=....

On établit sans difficulté que A et B sont indépendants si et seulement si ad=cb, relation qui rappelle sournoisement la dépendance de deux vecteurs.

2°) **Ne pas confondre événements indépendants et épreuves indépendantes** :
Si les épreuves n°1 et n°2 sont indépendantes ainsi que les épreuves n°2 et n°3, il est clair que les épreuves n°1 et n°3 le sont aussi ; il n'en va pas de même pour les événements :
A et B peuvent être indépendants ainsi que B et C, sans que A et C le soient nécessairement.

3°) Considérons une urne contenant 1 boule blanche et 9 boules noires et retirons deux fois de suite **sans remise** une boule de l'urne. Soient A l'événement "la première boule tirée est blanche" et B l' événement "la seconde boule tirée est blanche". La probabilité de l' événement B est égale à 1/10 ; **la probabilité de tirer une boule blanche au $n^{\text{ième}}$ tirage est indépendante de n;** mais les événements A et B ne sont pas indépendants.

**Les limites de l'intuition :

Dans l'ensemble des familles à n enfants, les événements A: "a des enfants des deux sexes" et B: "a au plus une fille" ne sont indépendants que pour n=3. Ce n'est pas évident !

***Indépendance et arbres** (voir page 10 la situation introductive "les multiples" et page 23 : l'indépendance? il suffit de secouer les arbres).

L'événement A sachant B n'existe pas, et pourtant nous l'avons tous rencontré....

L'événement "A sachant B", a priori inconnu des probabilistes, est apparu dans des sujets de probabilité au Baccalauréat. Plusieurs auteurs se sont élevés contre ce phénomène dans des articles du Bulletin de l'APMEP. Comment est-il possible qu'il y ait révélation d'objets mathématiques dans l'institution scolaire ? Cet objet est-il aberrant, inutile ou naturel ? à éviter ou à conforter ?

L'événement A sachant B n'existe pas et pourtant, nous l'avons rencontré....dans les sujets de Bac.

Divers articles du Bulletin de l'APMEP s'élèvent contre le fait de considérer A/B comme un événement. Bernard Parzysz, dans le Courrier des lecteurs[1] "relève depuis quelques temps, dans les sujets de Bac, un type particulier de formulations "vicieuses"(...)

Bac D Paris Juin 1990 : on pourra noter A/B l'événement "A sachant que B".

Bac D Paris Juin 1989 : "les deux événements "D sachant que S" et "G sachant que S" sont-ils indépendants ?"

Nous pourrions multiplier les exemples, mais arrêtons nous pour l'instant à ce sujet de Bac désormais fameux sur la surdité[2], puisque les événements D, G et S étaient définis par :

D : << être atteint de surdité à l'oreille droite >>

G : << être atteint de surdité à l'oreille gauche >>

S : << être atteint de surdité (sur une oreille au moins) >>

Jean Capron [3] avait déja été contacté au sujet de ce sujet de Bac et son commentaire est fort surprenant au premier abord :

> "Si chacun a compris le sens de la question, il n'en reste pas moins vrai que, même entre guillemets, ces deux expressions ("D sachant que S" et "G sachant que S") n'ont aucun sens car la notion d'événement n'est pas liée à la probabilité. (.....) Pourquoi ne pas avoir posé tout simplement la question : "lorsque l'on sait que l'individu est atteint de surdité, les deux événements D et G sont-ils encore indépendants ? "Je ne pense pas que

---

[1] Paul-Louis Hennequin, Courrier des lecteurs, Indépendance et probabilité conditionnelle, Bulletin de l'APMEP n°376, Décembre 1990, p. 669 - 670.

[2] Ce sujet de Bac est reproduit dans un certain nombre de manuels de terminale (voir plus loin).

[3] Jean Capron, Les probabilités au Baccalauréat Série D Paris - Créteil - Versailles (juin 1989), Bulletin de l'APMEP n°375, Septembre 1990, p. 524.

la formulation de cette question ait beaucoup gêné les candidats, mais j'aimerais avoir là-dessus l'avis des collègues qui ont corrigé cette épreuve."

La question posée avait donc un sens ! Mieux encore, sa formulation contestée pouvait n'avoir gêné ni les élèves, ni les enseignants-correcteurs ! Bernard Parzysz, dans le Courrier des lecteurs[1] parle de "l'idée fausse que A/B est un événement au même titre que A et B" .

Et si c'était une bonne idée de considérer A/B comme un événement ? En fait, s'agit-il d'une maladresse de rédaction, d'une erreur mathématique ou au contraire d'une illustration des raccourcis saisissants et efficaces en usage dans la communauté que forment les enseignants et leurs élèves ?

L'événement A sachant B existe pour près d'un étudiant[4] sur deux.

Dans son enquête réalisée auprès de 172 étudiants de DEUG de différentes filières, André Totohasina[5] a posé, entre autres, les trois questions suivantes (p. 317) :

Quelle est la notation qui paraît la plus proche du sens de la probabilité conditionnelle ?

50,29% des étudiants ont choisi la modalité P(B si A)

40,94% ont choisi P (B/A)

et seulement 8,77% ont choisi P_A(B).

B/A est-il un événement au même titre que A, ou que B ?

OUI	49,71%
NON	25,73%
PAS VRAIMENT	24,56%

[B sachant A] est-il un événement au même titre que A, ou que B ?

OUI	49,71%
NON	28,07%
PAS VRAIMENT	22,22%

---

4 interrogé

5 André Totohasina, Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle, Thèse, 1992, Université de Rennes 1.

L'événement A sachant B n'existe pas et pourtant, nous l'avons rencontré....dans les manuels de Terminales.

Nous sommes partis à la recherche d'événements "conditionnels" A/B dans les nouveaux manuels 1992[6]. Il ne s'agit pas de dénoncer tel ou tel auteur de manuel, mais plutôt d'observer les usages dans les classes. Les manuels observés sont conformes aux nouveaux programmes, et donc postérieurs aux sujets de Bac D cités plus haut ; les événements conditionnels A/B ont-ils survécu aux nouveaux programmes ?

Beaucoup de manuels de Terminales reprennent, parmi les exercices proposés, les sujets de Baccalauréat. Il n'est donc pas surprenant d'y trouver des événements conditionnels : le sujet déjà mentionné sur la surdité a eu beaucoup de succès (TRANSMATH A1B n°44 p. 136, TRANSMATH D n°38 p.98, MATH CE n°33 p. 339)[7] ; on retrouve aussi le sujet déjà pointé par Bernard Parzysz "si A et B sont deux événements, on pourra noter A/B l'événement "A sachant que B", (MATH p.338 exercice 23). Les exemples sont nombreux aussi dans les exercices de certains manuels :

> Calculer les probabilités des événements suivants :
> b. La pièce est bonne sachant qu'elle est rejetée.
> c. La pièce est mauvaise sachant qu'elle est acceptée.(MATH, p. 337 exercice 14)

> Calculer les probabilités des événements suivants :
> A : " il fera beau samedi sachant qu'aujourd'hui mercredi il pleut". (MATH, p.339 exercice 27)

Les événements conditionnels sont moins nombreux dans la partie "Cours" des manuels ; néanmoins, on peut en rencontrer soit explicitement :

> la branche verte (de l'arbre) correspond à l'événement << *ne pas être fumeur sachant qu'on habite* V2 >>(TRANSMATH, A1B ET D),

---

[6] André Totohasina (1992, p. 308) en avait aussi relevé.

[7] Collection TRANSMATH

André Antibi et alii, Mathématiques, Terminales A1 B, Programme rentrée 1992, Nathan, Paris, 1992.

André Antibi et alii, Mathématiques, Terminales D, Programme rentrée 1992, Nathan, Paris, 1992.

Collection MATH

Michel Dofal et alii, MATH Terminales Cet E, Analyse, programme 1991, Belin, Paris, 1992.

soit de façon beaucoup plus ambiguë :

> nous appellerons ce quotient (...) **probabilité conditionnelle** de l'événement J sachant que S.(FRACTALE CE [8], page 258).

Cette ambiguïté donne à réfléchir : si, en lisant cette phrase, on reprend sa respiration avant J, on aura créé un événement conditionnel : J sachant que S ; si on reprend sa respiration après J, c'est la définition habituelle. Le scandale des événements conditionnels est-il un problème de souffle ? Et dans les exemples ci-dessus, que peut-on répondre à l'élève qui demande : à quel événement est associé cette branche de l'arbre ? Les réponses aux exercices ci-avant auraient-elles été différentes si les questions avaient été ainsi formulées :

> b. Calculer la probabilité pour que la pièce soit bonne sachant qu'elle est rejetée.
> c. Calculer la probabilité pour que la pièce soit mauvaise sachant qu'elle est acceptée.

> Calculer la probabilité pour qu'il fasse beau samedi sachant qu'aujourd'hui mercredi il pleut ?

Non, bien sûr : il n'y a aucune ambiguïté sur ce qui est réellement demandé. Peut-on pour autant considérer que A/B et B/A sont des événements au même titre que les événements A et B ? Des événements oui, mais pas du même type que A et B.

Les événements : A sachant B et B sachant A existent, je peux les définir.

Considérons un univers Ω muni d'une tribu $\mathcal{F}$ [9], ou si l'on préfère un espace probabilisable (Ω, $\mathcal{F}$). Soient A et B deux événements de Ω, c'est-à-dire des éléments de la tribu $\mathcal{F}$. $A \cap B$ est aussi un événement de Ω. On supposera A et B non vides.
Munissons (Ω, $\mathcal{F}$) d'une probabilité P.
$P(A \cap B)$ peut alors être déterminé, ainsi que $P(A / B) = P_B(A)$ et $P(B / A) = P_A(B)$, suivant les définitions de l'axiomatique de Kolmogorov.

---

[8] Collection FRACTALE

Guy Bontemps et alii, Collection Fractale, Analyse et probabilités, Terminales C et E, Bordas, Paris, 1992.

[9] Nous pouvons nous borner à considérer des univers Ω finis, comme le font les programmes de première et de terminales, et la tribu que constitue l'ensemble des sous-ensembles de Ω .

Or $P_B(A) = P_B(A \cap B)$ est une mesure de l'événement $A \cap B$ différente de $P(A \cap B)$ et $P_A(B) = P_A(A \cap B)$ est une troisième mesure de $A \cap B$, qui peut être différente des deux précédentes.

Ce faisant, on a défini trois probabilités différentes sur le même espace $(\Omega, \mathcal{F})$: P, P_B et P_A

Il s'agit bien de probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$, car sinon comment pourrait-on écrire $P_B(A)$ et $P_A(B)$ puisque A et B sont des événements de Ω ? L'axiomatique de Kolmogorov permet de définir ces trois probabilités et de faire tous ces calculs de probabilité sans changer formellement d'univers.

Pourtant, ce changement d'univers est présent dans la représentation que nous avons de ces trois façons différentes de mesurer l'événement $A \cap B$:

- s'il est considéré comme une partie de l'univers Ω, sa probabilité est $P(A \cap B)$
- s'il est considéré comme une partie de l'univers A, sa probabilité est $P_A(A \cap B)$
- s'il est considéré comme une partie de l'univers B, sa probabilité est $P_B(A \cap B)$.

On assiste ici à un "détriplement" d'un même objet, c'est-à-dire du sous-ensemble $A \cap B$ de l'ensemble Ω, considéré d'abord comme un événement de Ω, puis comme un événement de A, puis comme un événement de B. D'où l'idée, pas si farfelue que ça, de ne pas noter de la même façon les trois façons de plonger $A \cap B$ dans trois univers différents :

- $A \cap B$ plongé dans l'univers Ω sera noté $A \cap B$
- $A \cap B$ plongé dans l'univers A sera noté B / A
- $A \cap B$ plongé dans l'univers B sera noté A / B.

C'est cette représentation de la probabilité conditionnelle, qui rend naturelle l'utilisation des événements conditionnels.

Il est possible de donner une définition formelle à ces plongements.
Soient un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{F})$ et B un événement, non vide, de Ω.
On notera $\mathcal{F}_B$ la trace sur B de la tribu $\mathcal{F}$, c'est-à-dire l'ensemble des événements $A \cap B$ pour tout élément A de $\mathcal{F}$.
On peut montrer aisément que $\mathcal{F}_B$ est une tribu sur B et convenir de noter A/B les éléments de cette tribu. On munit naturellement cet espace probabilisable de la restriction à B de la probabilité $P_B(\ )$; notons $Pr_B(\ )$ cette probabilité.

$$Pr_B(A/B) = P_B(A \cap B) = P_B(A) = P(A / B).$$

Les éléments de cette tribu $\mathcal{F}_B$ sont exactement les événements conditionnels que beaucoup utilisent.

Tout ce qu'on peut définir n'est pas forcément nécessaire.

S'il est si facile et si naturel de définir les événements conditionnels, pourquoi n'en trouve-t-on la définition dans aucun livre de probabilité contemporain ? Parce qu'ils ne sont pas nécessaires.

La puissance de l'axiomatique de Kolmogorov concernant la notion de probabilité conditionnelle est précisément d'avoir défini cette notion sur l'espace probabilisable (Ω, $\mathcal{F}$) tout entier. On change de probabilité sans changer d'univers. Le changement d'univers n'est pas nécessaire, mais il est présent dans les esprits et dans les commentaires :
"Prendre les probabilités conditionnelles de différents événements par rapport à une hypothèse particulière H revient à choisir H comme nouvel espace d'épreuves ; il est nécessaire de multiplier toutes les probabilités par le facteur constant 1 / P(H) pour ramener la probabilité totale du nouvel espace à l'unité." (Feller, 1950)[10]
Tout est dit : cela revient à changer d'espace, sans avoir besoin de le faire.

Il apparaît donc que les événements conditionnels, même s'ils peuvent être définis formellement, ne sont nullement nécessaires à la cohérence de la théorie. Définir des événements conditionnels dans l'enseignement risque d'induire de nouvelles difficultés : **on ne peut pas, par exemple, se poser la question de l'indépendance des deux événements conditionnels A/B et C/D qui ne font pas partie du même univers.** Il est, par ailleurs, évident que la définition classique de la probabilité conditionnelle est beaucoup plus opérationnelle dès que la situation se complique, lorsque, par exemple, on enchaîne plusieurs "conditionnements".

André Totohasina, dans sa séquence didactique d'introduction de la notion de probabilité conditionnelle, introduit dans un premier temps uniquement la notation indicielle

$$P_B(A)$$

---

[10] "Taking conditional probabilities of various events with respect to a particular hypothesis H amounts to choosing H as a new sample space ; we have to multiply all probabilities by the constant factor 1 / P(H) in order to reduce the total probability of the new sample space to unity."
William Feller, 1950, An introduction to probability theory and its applications, Vol. 1; John Wiley & Sons, New York, 1965.

et suggère (p.184-185) " il existe d'autres notations qui ne seraient que signalées aux élèves à titre informatif : $P_B(A) = P(A / B)$ ou $P(A | B)$ en indiquant l'éventuelle conséquence infondée de croire que (A / B) ou (A | B) sont des événements". Les tests qu'il a réalisés à la fin de ses séquences d'enseignement (43 élèves de TA et 32 élèves de TD) montrent peu de mauvaises notations des événements, mais un élève au moins définit des événements en supposant "la légitimité de parler d'un événement conditionnel " (p. 263).

En conclusion, il me semble prudent de ne pas introduire les événements conditionnels ni dans les sujets de Bac ni dans les manuels ni dans aucun énoncé de problème, et de s'en tenir dans ces écrits à une stricte orthodoxie.[11]

---

[11]Nous espérons avoir permis à ceux qui veulent absolument utiliser les événements conditionnels de le faire en toute connaissance de cause, et à ceux qui ne les utilisent pas....aussi.

L'automobiliste distrait [1].

Un automobiliste distrait prend la décision de ne plus oublier de desserrer son frein à main lorsqu'il démarre le matin.

On admet que

- si un jour il a oublié de desserrer son frein, la probabilité qu'il l'oublie le lendemain est 0,1

- si un jour il a pensé à desserrer son frein, la probabilité qu'il l'oublie le lendemain est 0,4.

On note p_n la probabilité qu'il oublie de desserrer son frein au jour n, et on pose $p = p_1$.

1) Calculer p_2 en fonction de p.

2) Plus généralement, exprimer p_n en fonction de p_{n-1}, pour $n \geq 2$

3) Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = p_n - \frac{4}{13}$ est géométrique.
En déduire l'expression de p_n en fonction de n et p, et calculer la limite ℓ de (p_n).

4) Calculer p_7 quand

a) la résolution de l'automobiliste est si ferme qu'on peut poser p = 0.

b) l'automobiliste est si ému par sa décision qu'on peut poser p = 1.

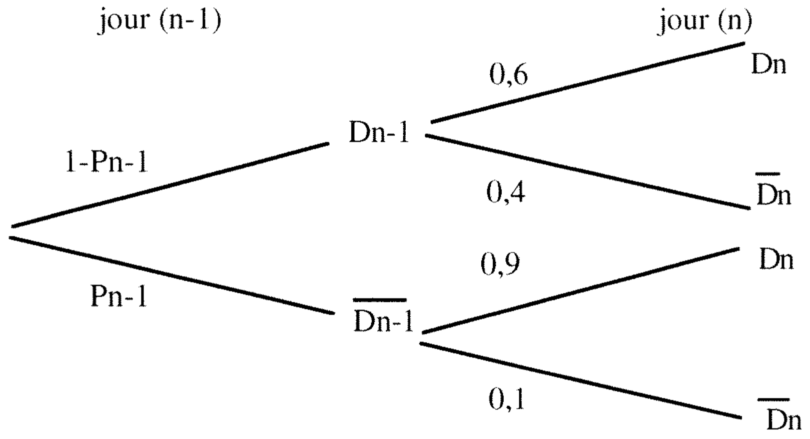
5) Déterminer le plus petit entier n pour lequel p_n est égal à ℓ à $\frac{1}{1000}{}^e$ près, et ce indépendamment de p.

---

[1] d'après HEC 1968.

CORRIGÉ

2) Notons D_n l'événement : "l'automobiliste pense à desserrer son frein au jour n"
L'énoncé se traduit par un arbre :



donc $p_n = p(\overline{D}_n) = (1-p_{n-1}) \times 0{,}4 + p_{n-1} \times 0{,}1 = 0{,}4 - 0{,}3\, p_{n-1}$
(en particulier $p_2 = 0{,}4 - 0{,}3p$).

3) $v_n = p_n - \dfrac{4}{13} = 0{,}4 - 0{,}3\; p_{n-1} - \dfrac{4}{13} = -0{,}3\; v_{n-1}$

$v_1 = p - \dfrac{4}{13}$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison (-0,3),

et $p_n = \left(p - \dfrac{4}{13}\right) \times (-0{,}3)^{n-1} + \dfrac{4}{13}$ pour $n \geq 1$

Sa limite est $\ell = \dfrac{4}{13}$, indépendante de p.

4) Pour p = 0 on trouve $p_7 \cong \dfrac{4}{13} - 2{,}2.10^{-4}$

Pour p = 1 on trouve $p_7 \cong \dfrac{4}{13} + 5.10^{-4}$

5) $\left| p_n - \dfrac{4}{13} \right| \leq \dfrac{1}{1000}$ est réalisé indépendamment de p si $\left(1 - \dfrac{4}{13}\right) \times (0{,}3)^{n-1} \leq \dfrac{1}{1000}$

soit $n \geq 6{,}44$

n = 7 est donc le plus petit entier pour lequel la condition est satisfaite.

Quelques exercices.

I.

a) Une pièce normale a été lancée 3 fois. On a observé la suite de résultats: face, face, pile.
On lance la pièce une quatrième fois. Quelle est la probabilité d'obtenir pile lors de ce quatrième jet ?
b) En codant 1 pour pile et 0 pour face, laquelle des deux suites de résultats données ci-dessous est la plus probable lors de six jets consécutifs ?
A : 1 0 1 0 1 0
B : 1 1 1 1 1 1

CORRIGÉ :

a) Il s'agit d'indépendance a priori (jets successifs) donc la probabilité demandée est 1/2.
b) p(A) = p(B) = $1/2^6$. En effet, chacune des deux suites de résultats proposées correspond à une feuille de l'arbre à 2^6 feuilles que l'on imagine sans peine.

II.

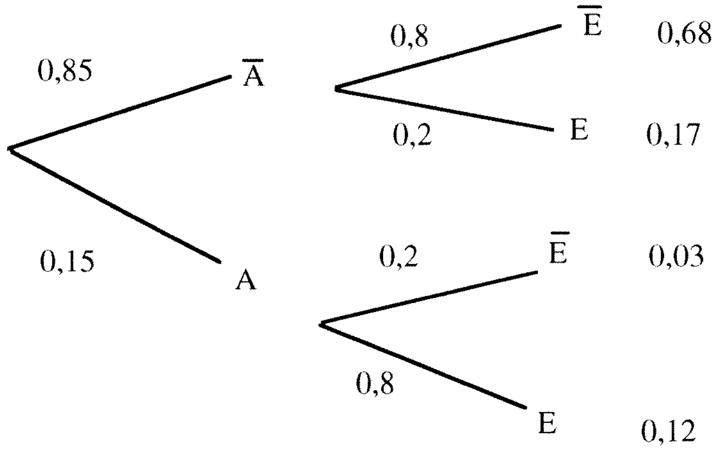
Une usine d'ampoules à incandescence utilise pour contrôler sa production un appareil qui devrait marquer chaque ampoule défectueuse. 85% des ampoules produites sont intactes et 15% sont défectueuses. On sait que l'appareil de contrôle détecte correctement l'état de l'ampoule dans 80% des cas, que celle-ci soit intacte ou défectueuse. Cela signifie que l'appareil marque 80% des ampoules défectueuses et 20% des ampoules intactes. On prélève au hasard une ampoule à la sortie de la chaîne et on la passe dans l'appareil de contrôle.

1) Traduire l'énoncé par un arbre de probabilité et calculer la probabilité que l'appareil marque l'ampoule.

2) L'appareil a marqué l'ampoule. Quelle est la probabilité qu'elle soit vraiment défectueuse ?

CORRIGÉ :
1) Notons A l'événement "l'ampoule est défectueuse" et E l'événement "l'appareil marque l'ampoule". On peut construire l'arbre suivant :

état de l'ampoule réponse de l'appareil

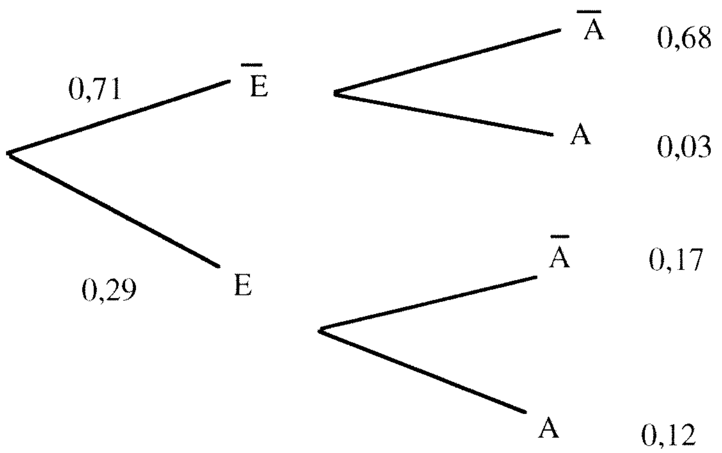


$p(E) = 0{,}85 \times 0{,}2 + 0{,}15 \times 0{,}8 = 0{,}29$

2) On cherche $p(A|E)$.

$$p(A|E) = \frac{p(A \cap E)}{p(E)} = \frac{0{,}15 \times 0{,}8}{0{,}29} \approx 0{,}41$$

Si on a oublié cette formule, on peut néanmoins parvenir au résultat demandé en construisant un arbre dans lequel on inverse les niveaux :



d'où $p(A|E) = 0{,}12/0{,}29 \approx 0{,}41$

III.

Un taxi est mêlé à un accident nocturne avec délit de fuite. Dans la ville où cet accident s'est produit il y a deux compagnies de taxis, l'une utilise des véhicules bleus, l'autre des verts. On donne les renseignements suivants :

(i) 85% des taxis de la ville sont bleus et 15% sont verts.

(ii) Un témoin de l'accident affirme que le taxi impliqué était vert.

Le tribunal fait analyser la capacité du témoin à distinguer, dans des conditions d'éclairement similaires, les véhicules des deux compagnies. Durant cette série d'essais le témoin identifia la couleur correcte (qu'elle soit verte ou bleue) dans 80% des cas et se trompa dans 20% des cas. Quelle est la probabilité que le taxi impliqué dans l'accident soit réellement vert ?

CORRIGÉ : à l'habillage près, l'exercice est identique au précédent.

IV.

On offre la possibilité de participer à deux jeux de "roulette".

a) Dans le jeu A on gagne 1 F si la boule s'arrête sur une case noire alors que 50% exactement des cases sont noires.

b) Dans le jeu B on gagne 1 F si lors du premier essai, ou lors du deuxième essai, ou lors des deux, la boule s'arrête sur une case noire, alors que 25 % exactement des cases sont noires.

1) Quel est le jeu le plus favorable au joueur ?

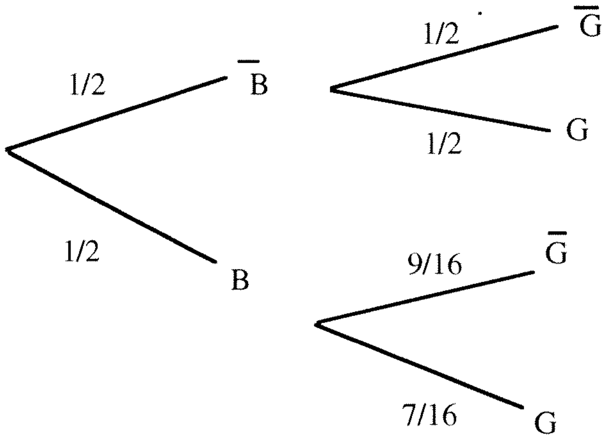
2) J'ai joué à pile ou face pour choisir celui de ces jeux auquel j'allais jouer. J'ai gagné. Quelle est la probabilité que j'aie joué au jeu B ?

CORRIGÉ :

1) La probabilité de gagner au jeu A est 1/2 ; au jeu B c'est la probabilité d'amener au moins une fois le "noir".

p = 1 - p("aucune noire") = $1-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{7}{16}$

2) En notant B l'événement "je joue au jeu B" et G l'événement "j'ai gagné" on obtient :



$$p(G) = \frac{1}{2}\times\frac{7}{16}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{15}{32}$$

et

$$p(B|G) = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{7}{16}}{\frac{15}{32}} = \frac{7}{15} \approx 0,47$$

V.

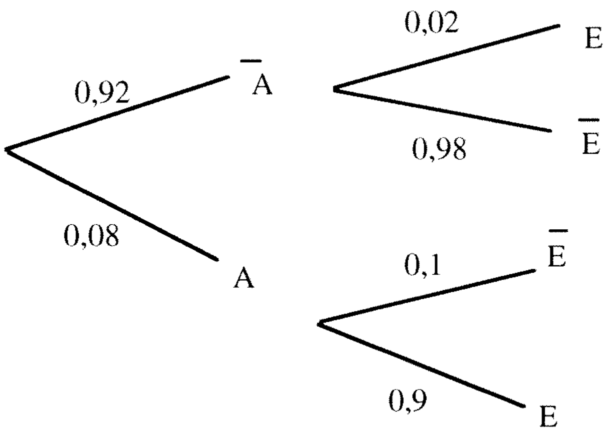
Une société teste les téléviseurs qu'elle produit avant leur livraison. Des observations nombreuses ont permis d'établir que 92% des appareils produits sont sans aucun défaut. La procédure de test détecte 90% des appareils défectueux mais aussi (à tort) 2% des appareils sans défauts.

1) Quelle est la probabilité qu'un appareil choisi au hasard soit détecté lors du contrôle ?

2) Quelle est la probabilité qu'un appareil soit réellement défectueux sachant qu'il a été détecté lors du contrôle ?

CORRIGÉ :

Notons A l'événement "l'appareil est en mauvais état" et E l'événement "l'appareil est détecté lors du contrôle". On peut compléter l'arbre suivant :



1) $p(E) = 0{,}08 \times 0{,}9 + 0{,}92 \times 0{,}02 \approx 0{,}0904$

2) $p(A|E) = (0{,}08 \times 0{,}9)/p(E) \approx 0{,}796$

VI. ♥ ♠

1) Un paquet A de 20 cartes comporte 60% de coeurs et 40% de piques. On extrait au hasard et sans remise 8 cartes de ce paquet. Quelle est la probabilité que dans ces 8 cartes il y ait 6 coeurs et 2 piques ?

2) Reprendre la question 1) en supposant que l'on tire dans un paquet B de 20 cartes comportant 40% de coeurs et 60% de piques.

3) On choisit au hasard l'un des deux paquets A ou B et on en extrait huit cartes au hasard et sans remise.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir 6 coeurs et 2 piques ?

b) On regarde les cartes tirées et on constate qu'on a obtenu 6 coeurs et 2 piques. Quelle est la probabilité que ces cartes proviennent du paquet A ?

CORRIGÉ :

1) $p_1 = \dfrac{C_{12}^{6} \times C_{8}^{2}}{C_{20}^{8}} \approx 0{,}205$

2) $p_2 = \dfrac{C_{12}^{2} \times C_{8}^{6}}{C_{20}^{8}} \approx 0{,}015$

3) Si on note E l'événement "on obtient 6 coeurs et 2 piques" et A l'événement "on tire dans le paquet A" alors p_1 et p_2 s'interprètent comme :

$p_1 = p(E|\,A)$ et $p_2 = p(E|\,\overline{A})$

donc :

$$p(E) = p(A) \times p(E|\,A) + p(\overline{A}) \times p(E|\,\overline{A}) = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2 \approx 0{,}110$$

b) On cherche $p(A|\,E) = \dfrac{p(A \cap E)}{p(E)} = \dfrac{\frac{1}{2}p_1}{\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{2}p_2} \approx \dfrac{0{,}205}{0{,}220} \approx 0{,}93$

VII.

Vrai ou faux ?

Dans cette ville de 20000 habitants, un vol a été commis. Le coupable, qui a agi seul, réside dans la cité. Les témoins sont unanimes, le voleur avait les cheveux roux. Il n' y a dans la population de la ville que 1% de personnes ayant les cheveux roux. L'inspecteur Février arrête un habitant de la ville qu'il choisit au hasard et, constatant qu'il a les cheveux roux, prétend que la probabilité que ce soit le coupable est de 99%.

CORRIGÉ :

On cherche la probabilité qu'un habitant choisi au hasard soit coupable sachant qu'il est roux.
Il y a parmi les 20000 habitants 200 personnes ayant des cheveux roux.

La probabilité qu'une personne choisie au hasard soit le coupable sachant qu'elle est rousse est donc de 1/200 soit 0,005 ou 0,5%. On est donc très loin de la quasi certitude de l'inspecteur.

VIII. ❍ ❍ ● ● ● ● ● ● ● ●

1) Une urne contient 2 boules blanches et 8 boules noires. On tire successivement et sans remise les boules de cette urne. On désigne par p_k la probabilité que la $k^{\text{ième}}$ boule tirée soit blanche sachant que les k-1 précédentes étaient noires.
Calculer p_k pour les valeurs possibles de k.

2) Généraliser au cas où l'urne contient b boules blanches et n-b noires.

CORRIGÉ :

1) Au moment du $k^{\text{ième}}$ tirage, l'urne contient encore 11-k boules dont 2 sont blanches. La probabilité demandée est donc : $p_k = \dfrac{2}{11-k}$ pour k variant de 1 à 9.

2) Dans ce cas, au moment du $k^{\text{ième}}$ tirage, l'urne contient encore n-k+1 boules dont b sont blanches. La probabilité demandée est donc : $p_k = \dfrac{b}{n-k+1}$ pour k variant de 1 à n-b + 1.

IX.

On a réparti les employés d'une entreprise en 8 sous-ensembles en distinguant les femmes (F) des hommes (H), les fumeurs (U) des non-fumeurs (NF), les personnes ayant des enfants (E) des personnes sans enfant (SE). On a obtenu le tableau suivant :

		H	F
U	E	7	8
U	SE	5	10
NF	E	14	20
NF	SE	14	22

On désigne au hasard l'un des employés de cette entreprise.

Notons

F l'événement "l'employé choisi est une femme"

U l'événement "l'employé choisi est fumeur"

et E l'événement ""l'employé choisi a un ou des enfants"

1) Les événements F et U sont-ils indépendants ?

2) Les événements F et E sont-ils indépendants ?

3) Les événements E et U sont-ils indépendants ?

CORRIGÉ :

1) En ne tenant compte que des événements H,F,U,NF on peut fusionner certaines cases du tableau proposé :

	H	F	Totaux
U	12	18	30
NF	28	42	70
Totaux	40	60	100

On lit alors les probabilités suivantes :
$p(U) = 0.3$ $p(F) = 0.6$ $p(U \cap F) = 0.18$ et on vérifie que $p(U \cap F) = p(U) \times p(F)$. Les événements U et F sont donc indépendants.

2) De manière analogue on a le tableau suivant concernant les événements F et E :

	H	F	Totaux
E	21	28	49
SE	19	32	51
Totaux	40	60	100

et : $p(F) = 0.6$ $p(E) = 0.49$ $p(E \cap F) = 0.28$. Ici $p(E \cap F) \neq p(E) \times p(F)$. Les événements E et F ne sont pas indépendants.

3) De la même manière :

	E	SE	Totaux
U	15	15	30
NF	34	36	70
Totaux	49	51	100

$p(U) = 0.3$ $p(E) = 0.49$ $p(U \cap E) = 0.15$ et là encore $p(U \cap E) \neq p(U) \times p(E)$. Les événements U et E ne sont pas indépendants.

Sur l'espérance de vie des personnes au 17ème siècle.

Dans son traité " De ratiociniis in ludo aleae " (1657), Huyghens traite du concept d'espérance de vie. Cette étude a été reprise par le groupe IREM "épistémologie et histoire" dans son ouvrage "Mathématiques au fil des âges", paru aux éditions Gauthiers Villars.

"On constate avec grande exactitude que, de 100 personnes conçues il en meurt (à Londres au dix septième siècle) :36 au bout de 6 ans, 24 entre 6 et 16 ans , 15 entre 16 et 26 ans, 9 entre 26 et 36 ans, 6 entre 36 et 46 ans, 4 entre 46 et 56 ans, 3 entre 56 et 66 ans, 2 entre 66 et 76 ans, 1 entre 76 et 86 ans".

Ces constatations étant faites avec grande précision et supposées stables à cette époque, elles peuvent donc servir de base de calcul des probabilités pour qu'un individu choisi au hasard dans cette population puisse atteindre l'âge de 6, 16, 26....86 années.

Pour alléger l' énoncé, on se contentera dans toute la suite du problème du mot "individu" pour désigner un "individu pris au hasard dans la population donnée".

1)

a) On choisit un individu. Compléter l'arbre de probabilités ci joint, et calculer la probabilité pour qu'un individu âgé de respectivement 6, 16, ..,etc,..76 ans survive au moins 10 ans. En prenant cette probabilité pour critère, quelle classe d' âge vous semble la plus vigoureuse ?

b) Calculer de même la probabilité pour un individu âgé de 6, 16, 26, 36 ou 46 ans de vivre quarante années supplémentaires. Quelle classe d' âge vous semble la plus vigoureuse à cet égard ?

2) Lors d'une manifestation rassemblant 15 personnes de 16 ans et 35 personnes de 36 ans, les participants décident de se retrouver quarante ans plus tard pour en fêter la commémoration .

a) Calculer la probabilité pour un individu présent de pouvoir assister à cette commémoration.

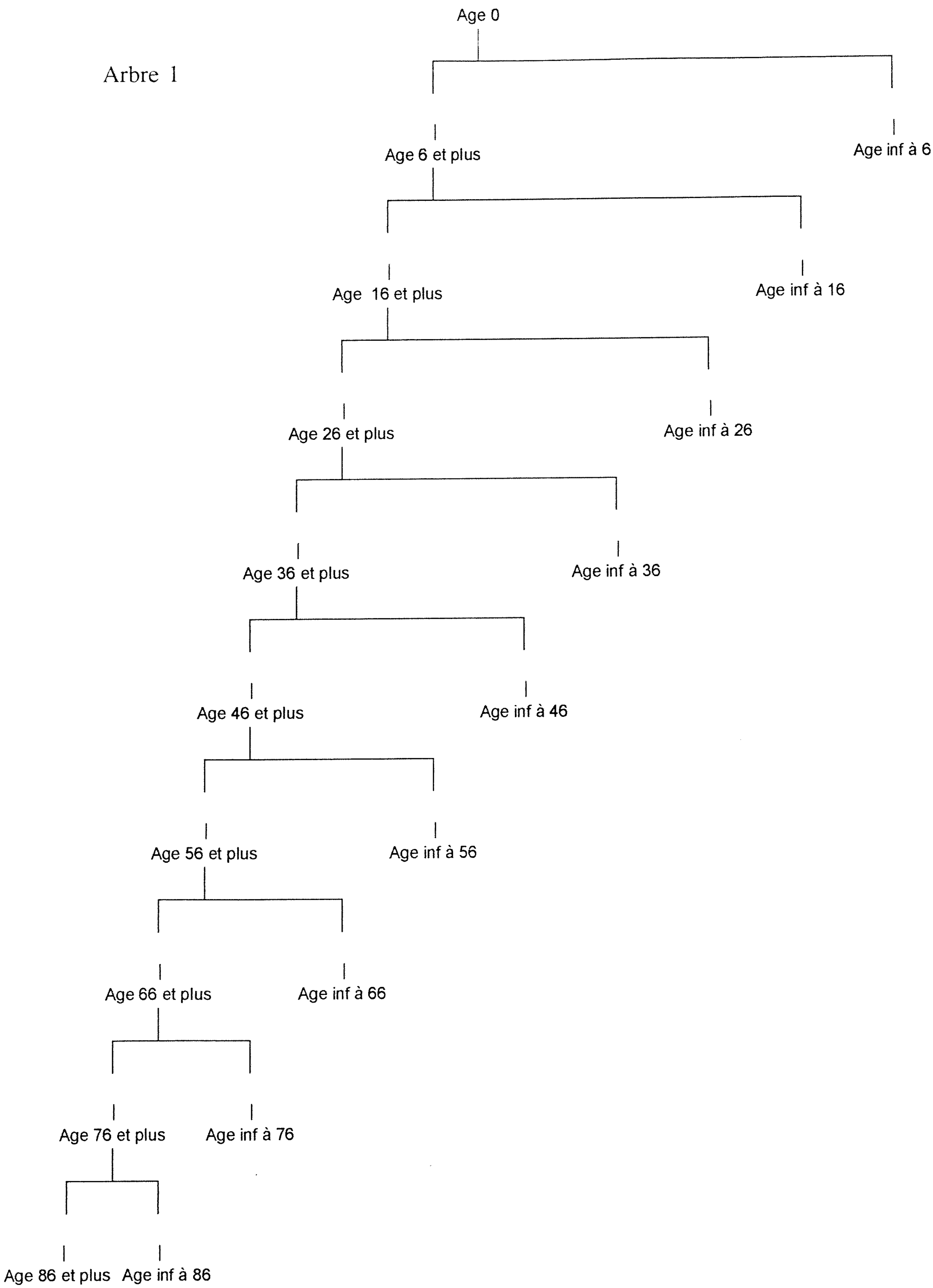
b) Quarante ans plus tard, les survivants se retrouvent. Déterminer la probabilité, pour un individu présent à cette commémoration, d'être âgé de 56 ans.

c) Remarquer que les événements "avoir 16 ans lors de la manifestation" et "survivre 40 ans " ne sont pas indépendants.

3) On suppose ici que la manifestation rassemble m personnes de 16 ans et n personnes de 36 ans (m et n non nuls).
Est-il possible de choisir m et n pour que les événements "avoir 16 ans lors de la manifestation" et "survivre 40 ans" soient indépendants ?

4) On suppose enfin que la manifestation rassemble k personnes de 6 ans, m personnes de 16 ans,n personnes de 36 ans (k, m et n non nuls). Est-il possible de choisir k, m et n pour que les événements "avoir 16 ans lors de la manifestation" et "survivre 40 ans" soient indépendants?

Arbre 1


Age 0
Age 6 et plus
Age inf à 6
Age 16 et plus
Age inf à 16
Age 26 et plus
Age inf à 26
Age 36 et plus
Age inf à 36
Age 46 et plus
Age inf à 46
Age 56 et plus
Age inf à 56
Age 66 et plus
Age inf à 66
Age 76 et plus
Age inf à 76
Age 86 et plus
Age inf à 86

CORRIGÉ

Première question :

a)
On déduit des données que de 100 personnes conçues, 64 arrivent à l'âge de 6 ans, 40 arrivent à l'âge de 16 ans, 25 à l'âge de 26 ans, 16 à l'âge de 36 ans, 10 à l'âge de 46 ans, 6 à l'âge de 56 ans, 3 à l'âge de 66 ans, 1 à l'âge de 76 ans et qu'aucune ne survit après l'âge de 86 ans.

De cette constatation il vient que, par exemple, de 40 personnes parvenant à l'âge de 16 ans, seules 25 survivront jusqu'à l'âge de 26 ans. La fréquence correspondante est donc de $\frac{25}{40} = 0{,}625$. Les autres fréquences se calculent de façon analogue, et l'on peut ainsi construire l'arbre probabiliste représenté ci-après(arbre 2).

Les probabilités pour une personne âgée de 6, 16,....ou 76 ans de survivre encore dix ans figurent sur les branches de l'arbre. La classe d'âge semblant la plus vigoureuse est celle des individus de 26 ans.

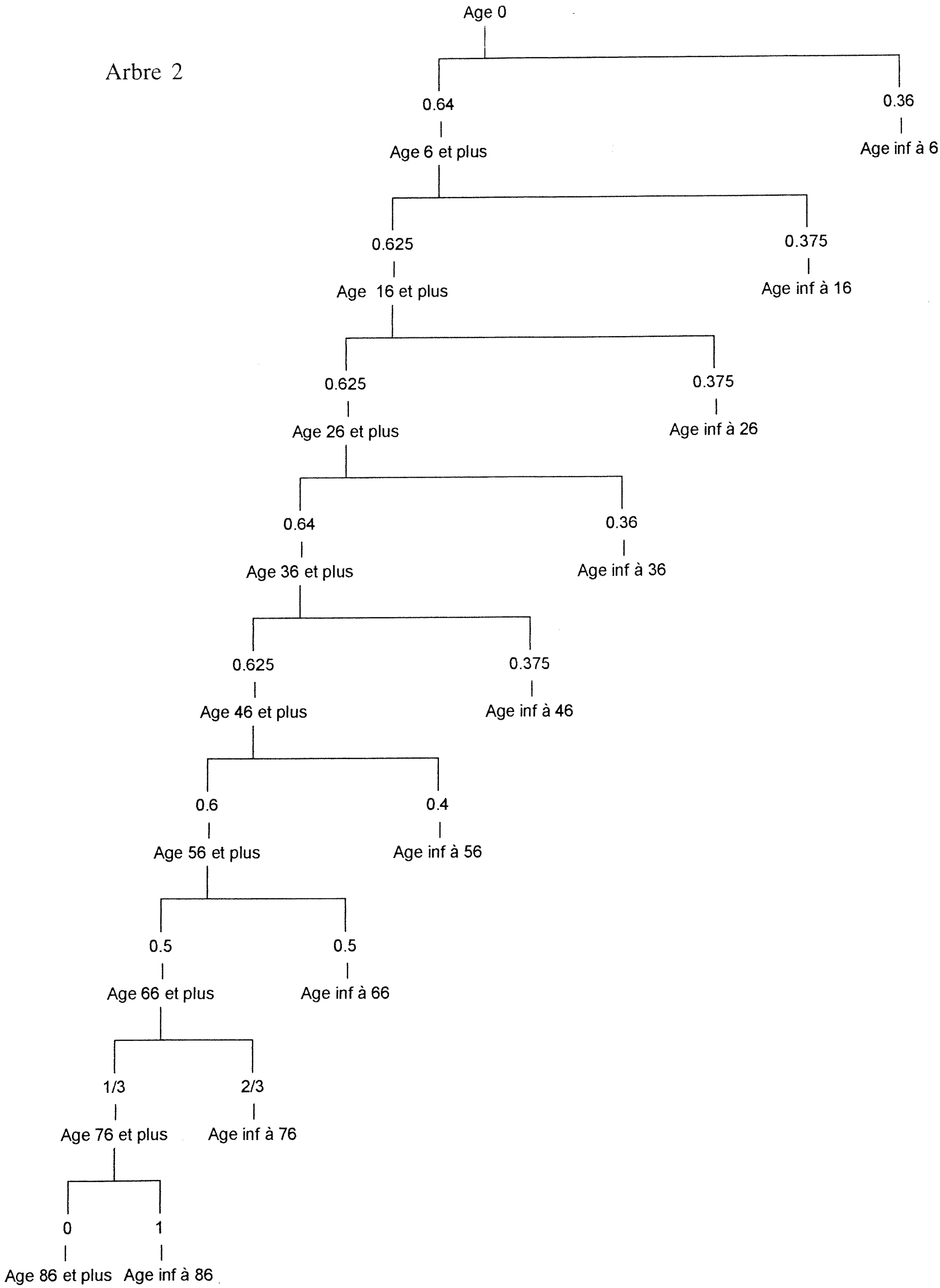
Ces probabilités doivent être comprises comme des probabilités conditionnelles, par exemple : si A désigne l'événement "parvenir à l'âge de 16 ans" et si B désigne l'événement "parvenir à l'âge de 6 ans", la probabilité pour un individu âgé de 6 ans de survivre encore 10 ans est :
$p(A / B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

b)
Parmi 64 personnes arrivant à l'âge de 6 ans, 10 parviennent à vivre 40 ans supplémentaires. La probabilité pour une telle personne de survivre 40 ans est donc de $\frac{10}{64} = 0{,}15625$.

On obtient de la même façon les probabilités de survie de 40 ans
pour une personne de 16 ans: 0,15;
pour une personne de 26 ans : 0,12;
pour une personne de 36 ans : 0,0625;
pour une personne de 46 ans : 0.

A cet égard, la catégorie d'âge semblant la plus vigoureuse est celle des individus de 6 ans. Il apparaît en effet que c'est celle dont la probabilité de survie durant les quarante années suivantes est la plus forte.

Arbre 2


Age 0
0.64
Age 6 et plus
0.36
Age inf à 6
0.625
Age 16 et plus
0.375
Age inf à 16
0.625
Age 26 et plus
0.375
Age inf à 26
0.64
Age 36 et plus
0.36
Age inf à 36
0.625
Age 46 et plus
0.375
Age inf à 46
0.6
Age 56 et plus
0.4
Age inf à 56
0.5
Age 66 et plus
0.5
Age inf à 66
1/3
Age 76 et plus
2/3
Age inf à 76
0
Age 86 et plus
1
Age inf à 86

Deuxième question :

Le groupe sur lequel porte l'expérience a changé : si S désigne l'événement "avoir 16 ans lors de la manifestation", et si T désigne l'événement "avoir 36 ans lors de la manifestation", nous avons :

$$p(S) = \frac{15}{50} \quad \text{et} \quad p(T) = \frac{35}{50}.$$

a)
Si l'on note C l'événement "pouvoir assister à la commémoration", soit "survivre 40 ans", les probabilités conditionnelles p(C / S) et p(C / T) sont en fait les probabilités pour un individu de 16 ou 36 ans de survivre encore 40 ans. Elles ont été calculées précédemment.

Nous pouvons donc construire un nouvel arbre probabiliste (arbre 3), et en utilisant les règles usuelles de calcul des probabilités le long des branches d'un tel arbre, nous obtenons :

$$p(C) = p(C \cap S) + p(C \cap T) = p(C / S)\, p(S) + p(C / T)\, p(T) = 0{,}15 \times \frac{15}{50} + 0{,}0625 \times \frac{35}{50}.$$

Nous obtenons finalement : $p(C) = 0{,}08875$.

b)
La question consiste à calculer $p(S / C) = \dfrac{p(S \cap C)}{p(C)} = \dfrac{p(C/S) \times p(S)}{p(C)} \approx 0{,}5070....$

c)
Vérification immédiate.

Troisième question :

Première solution :

Nous avons ici (avec les notations introduites dans le corrigé de la deuxième question) :

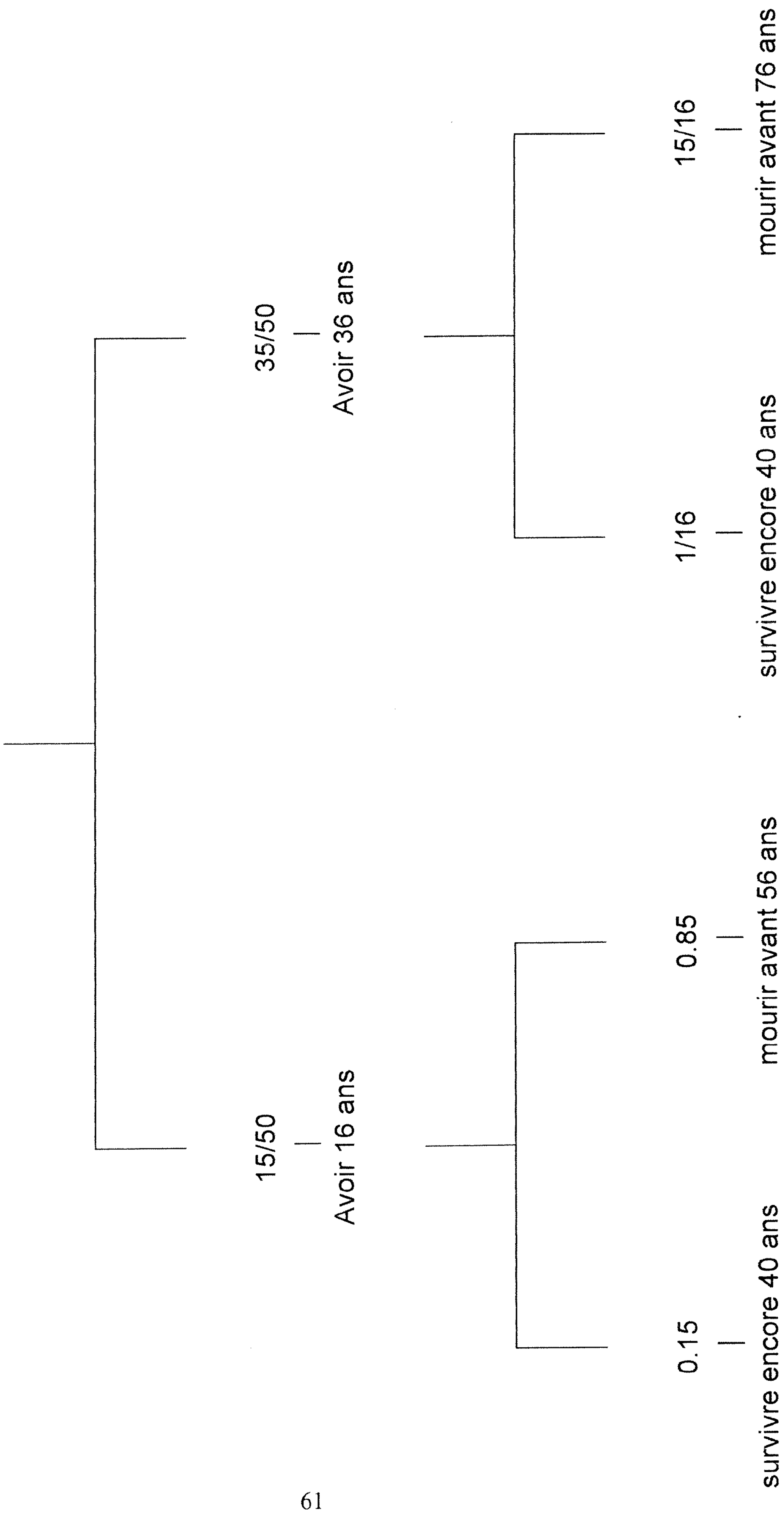
$$T = \overline{S}\ .$$

Les entiers m et n étant non nuls, l'indépendance des événements C et S se traduirait par :

$$p(C / S) = p(C / T).$$

Ces deux réels égalant toujours respectivement 0,15 et 0,0625 , et ce quelles que soient les valeurs attribuées à m et n, les événements C et S sont toujours dépendants.

Arbre 3


35/50
Avoir 36 ans
15/16
mourir avant 76 ans
1/16
survivre encore 40 ans
15/50
Avoir 16 ans
0.85
mourir avant 56 ans
0.15
survivre encore 40 ans

Deuxième solution :

On reprend un calcul analogue à celui développé dans le corrigé de la deuxième question. Nous avons ici :

$$p(C) = 0{,}15 \times \frac{m}{m+n} + 0{,}0625 \times \frac{n}{m+n} \qquad \text{et} \qquad p(S \cap C) = 0{,}15 \times \frac{m}{m+n}$$

L'indépendance de C et S se traduirait par :

$$\frac{m}{m+n} \times \left(0{,}15 \times \frac{m}{m+n} + 0{,}0625 \times \frac{n}{m+n}\right) = 0{,}15 \times \frac{m}{m+n}$$

soit : $0{,}0625 \times n = 0{,}15 \times n$

Cette équation n'a pas de solution n non nulle.

Quatrième question :

Nous désignons par R l'événement "avoir 6 ans lors de la commémoration". On peut alors construire l'arbre ci-après (arbre 4).

Nous pouvons calculer :

$$p(C) = 0{,}15625 \times \frac{k}{k+m+n} + 0{,}15 \times \frac{m}{k+m+n} + 0{,}0625 \times \frac{n}{k+m+n}$$

et :

$$p(S \cap C) = 0{,}15 \times \frac{m}{k+m+n}$$

Pour rendre compte de l'indépendance des événements S et C, nous écrivons :

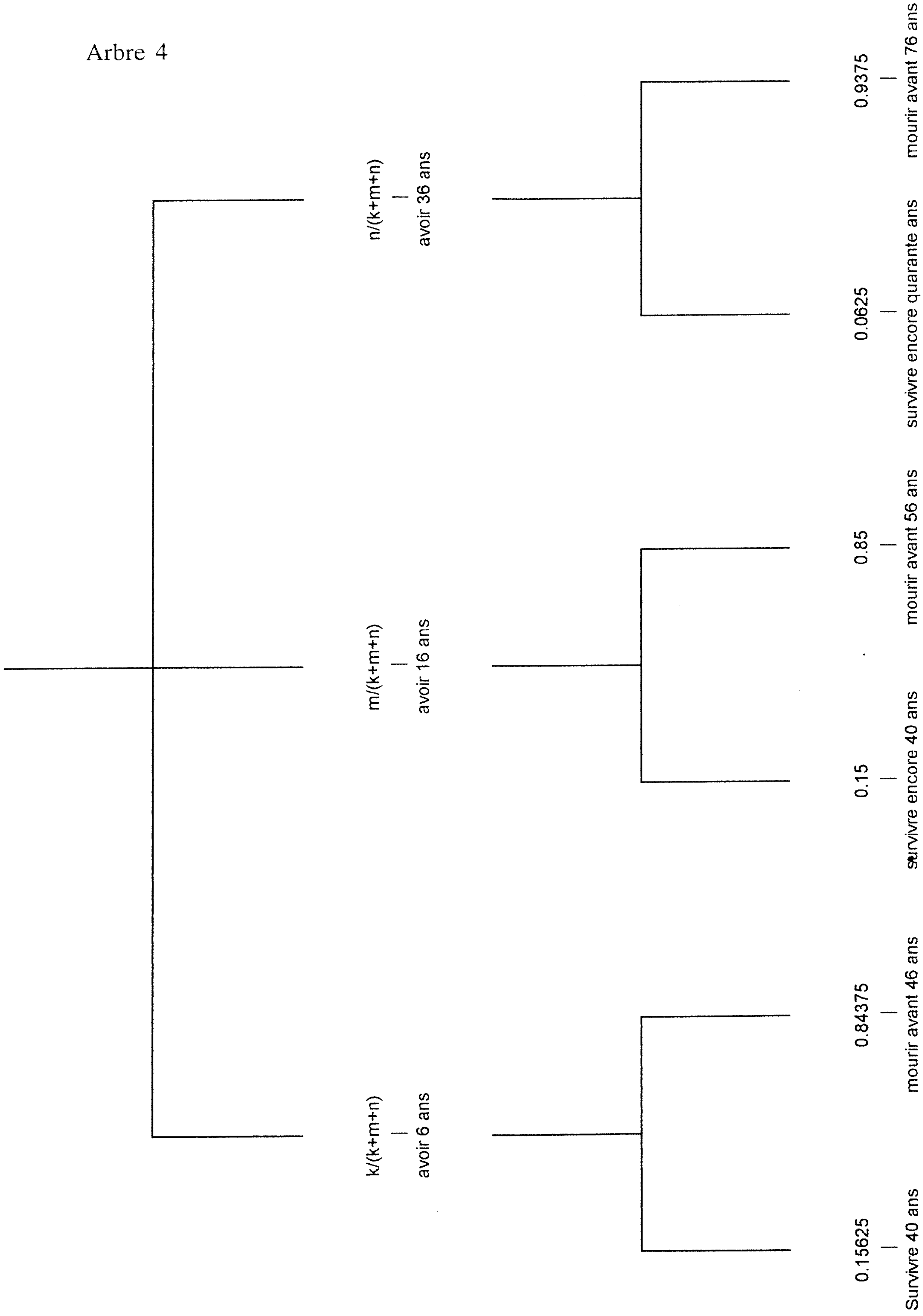
$$0{,}15 \times \frac{m}{k+m+n} = \frac{m}{k+m+n} \times \left(0{,}15625 \times \frac{k}{k+m+n} + 0{,}15 \times \frac{m}{k+m+n} + 0{,}0625 \times \frac{n}{k+m+n}\right)$$

soit, après simplification :

$$5\,k = 7\,n.$$

On peut donc choisir, par exemple, k = 7 et n = 5 ; le terme m étant quelconque, non nul.

Arbre 4


k/(k+m+n)
avoir 6 ans
m/(k+m+n)
avoir 16 ans
n/(k+m+n)
avoir 36 ans
0.15625
Survivre 40 ans
0.84375
mourir avant 46 ans
0.15
survivre encore 40 ans
0.85
mourir avant 56 ans
0.0625
survivre encore quarante ans
0.9375
mourir avant 76 ans

Remarque :

Le choix de l'événement S dans cette question n'est pas anodin.
Il eût été impossible de rendre R et C, ou T et C indépendants.

Considérons plus généralement une expérience aléatoire d'univers Ω, C un événement. Recherchons des événements R,S et T formant une partition de Ω, de probabilités respectives non nulles r,s et t, et de probabilités conditionnelles imposées :

$$p(R / C) = a \qquad p(S / C) = b \qquad p(T / C) = c.$$

En traduisant l'indépendance de S et C, nous obtenons : $s(ar + bs + ct) = bs$;
ce qui se simplifie en : $r(a - b) = t(b - c)$ car $r+s+t = 1$.

Une condition nécessaire et suffisante d'existence de solution (r, s, t) est alors que b soit compris entre a et c au sens strict ou $a = b = c$.

On obtient par exemple si $a > b > c$:

$$r = \lambda(b - c) \qquad s = 1 - \lambda(a - c) \qquad t = \lambda(a - b)$$

λ désignant un nombre réel compris strictement entre 0 et $\frac{1}{a-c}$.
Le réel s peut être choisi de façon arbitraire.

II

INTRODUCTION À LA NOTION DE VARIABLE ALÉATOIRE

Les exemples 1 et 2 permettent d'introduire les notions de variable aléatoire et d'espérance par une démarche analogue à celle qui a été adoptée en classe de première pour introduire les probabilités.
Ils mettent en évidence le lien entre la moyenne statistique sur un échantillon et l'espérance mathématique.
Les exemples 3, 4, 5 et 6 présentent plusieurs éclairages sur les notions d'espérance, de jeu équitable, de jeu favorable ou défavorable au joueur, activités mathématiques.

Exemple 1

Une partie consiste à jeter deux dés simultanément. Chaque partie coûte 6F. Chaque partie rapporte la somme des résultats indiqués par les dés.

1) Lydia a joué 12 parties qui lui ont coûté 72F et lui ont rapporté 71F. Elle a perdu en tout 1F. Elle a donc perdu en moyenne 1/12F par partie. Son gain moyen par partie est -1/12F.

2) Paul a joué 20 parties qui lui ont coûté 120F et lui ont rapporté 150F. Il a gagné en tout 30F soit en moyenne 1,5F par partie. Son gain moyen par partie est 1,5F.

3) Frédéric, patient, a joué 500 fois à ce jeu. Comme il est très organisé, il a noté les résultats qu'il obtenait dans un tableau (tableau n°1, page suivante).
Remplir le tableau 2.(page suivante)
Combien Frédéric a-t-il gagné en moyenne par partie ?

Jusqu'à ce stade on a fait des statistiques.

4) **Sylvain prétend qu'en jouant 1000 parties il peut espérer gagner 1F par partie. A-t-il raison ?**

Tableau n° 1

résultats obtenus sur les dés	sommes	effectifs	fréquences
1 et 1		16	
1 et 2		28	
1 et 3		22	
1 et 4		24	
1 et 5		31	
1 et 6		25	
2 et 2		14	
2 et 3		29	
2 et 4		27	
2 et 5		28	
2 et 6		34	
3 et 3		16	
3 et 4		27	
3 et 5		22	
3 et 6		23	
4 et 4		16	
4 et 5		34	
4 et 6		30	
5 et 5		12	
5 et 6		27	
6 et 6		15	

Tableau n° 2 Faire un tableau avec les rubriques suivantes et 11 lignes à remplir

somme obtenue	gain correspondant	effectifs	fréquences	fréquences cumulées croissantes

POINT COURS

VARIABLE ALÉATOIRE

Définir une variable aléatoire X sur Ω c'est associer un réel à chaque élément de Ω

$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$A \mapsto X(A)$

Dans l'exemple 1, la variable aléatoire G associe la valeur du gain, à chaque couple de résultats.
Les valeurs prises par la fonction sont notées x_i
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est donnée par le tableau suivant :

valeurs de la variable : x_i	
probabilités : p_i	

$p_i = P(X=x_i)$ probabilité que X prenne la valeur x_i

Espérance mathématique.
L'espérance de la variable aléatoire X est notée E (X).

$$E(X) = \sum p_i x_i$$

Exemple 2

On joue avec trois dés. Il y a un banquier et des joueurs. Un joueur peut miser une somme quelconque sur n'importe lequel des chiffres de 1 à 6.

Si, une fois les trois dés lancés, le chiffre sur lequel le joueur a misé sort sur un seul dé, le joueur reçoit sa mise plus une fois sa mise.

Si le chiffre sort sur deux dés, le joueur reçoit sa mise plus deux fois sa mise.

Si le chiffre sort sur trois dés, le joueur reçoit sa mise plus trois fois sa mise.

Si le chiffre ne sort sur aucun dé, le joueur perd sa mise.

Le jeu favorise-t-il le joueur ?

On dispose des données statistiques suivantes :

Marion a joué 30 parties en misant toujours sur 6.

Elle a obtenu :

6 sur aucun dé	14 fois
6 sur un seul dé	12 fois
6 sur les deux dés	4 fois
6 sur les trois dés	0 fois

Christophe a joué 100 parties en ne misant pas toujours sur le même nombre.

le nombre sur lequel il a misé n'est sorti sur aucun dé	56 fois
le nombre sur lequel il a misé est sorti sur un seul dé	33 fois
le nombre sur lequel il a misé est sorti sur deux dés	10 fois
le nombre sur lequel il a misé est sorti sur trois dés	1 fois

Lydia a joué 157 parties.

le nombre sur lequel elle a misé n'est sorti sur aucun dé	88 fois
le nombre sur lequel elle a misé est sorti sur un seul dé	55 fois
le nombre sur lequel elle a misé est sorti sur deux dés	12 fois
le nombre sur lequel elle a misé est sorti sur trois dés	2 fois

CORRIGE ET COMMENTAIRES EXEMPLE 1

3) Tableau n° 2 : Résultats statistiques

valeurs de S	valeurs de G	effectifs	fréquences	cumulées
2	-4	16	0,032	0,032
3	-3	28	0,056	0,088
4	-2	36	0,072	0,16
5	-1	53	0,106	0,266
6	0	74	0,148	0,414
7	1	80	0,16	0,574
8	2	72	0,144	0,718
9	3	57	0,114	0,832
10	4	42	0,084	0,916
11	5	27	0,054	0,97
12	6	15	0,03	1

$\overline{G} = 1{,}03$ Frédéric a gagné en moyenne 1,03F par partie.

On peut remarquer $\overline{S} = 7{,}03$ ($G = S - \sigma$ la mise étant 6F)

$\sigma_G = \sigma_S \approx 2{,}43$

4) Modélisation :

soit G la variable aléatoire qui à chaque couple de résultats associe la valeur du gain

exemples : $G : (1,6) \mapsto 1$ $(4,3) \mapsto 1$ $(2,1) \mapsto -3$

G prend les valeurs - 4 ; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 avec les probabilités données par le tableau n° 3

Tableau 3

sommes obtenues	gains correspondants	proba théorique	probas cumulés
2	-4	$\frac{1}{36} = 0{,}028$	0,028
3	-3	$\frac{2}{36} = 0{,}056$	0,084
4	-2	$\frac{3}{36} = 0{,}083$	0,167
5	-1	$\frac{4}{36} = 0{,}111$	0,288
6	0	$\frac{5}{36} = 0{,}139$	0,417
7	1	$\frac{6}{36} = 0{,}166$	0,583
8	2	$\frac{5}{36} = 0{,}139$	0,722
9	3	$\frac{4}{36} = 0{,}111$	0,833
10	4	$\frac{3}{36} = 0{,}083$	0,916
11	5	$\frac{2}{36} = 0{,}056$	0,972
12	6	$\frac{1}{36} = 0{,}028$	1

On calcule $E(G) = \sum p_i x_i = \frac{1}{36}x(-4)+\frac{2}{36}x(-3)+\ldots+\frac{1}{36}x6=1$

Sylvain peut effectivement espérer gagner 1F par partie en jouant 1 000 parties (nombre assez grand pour que le gain moyen théorique E (G) soit proche du gain moyen réel).

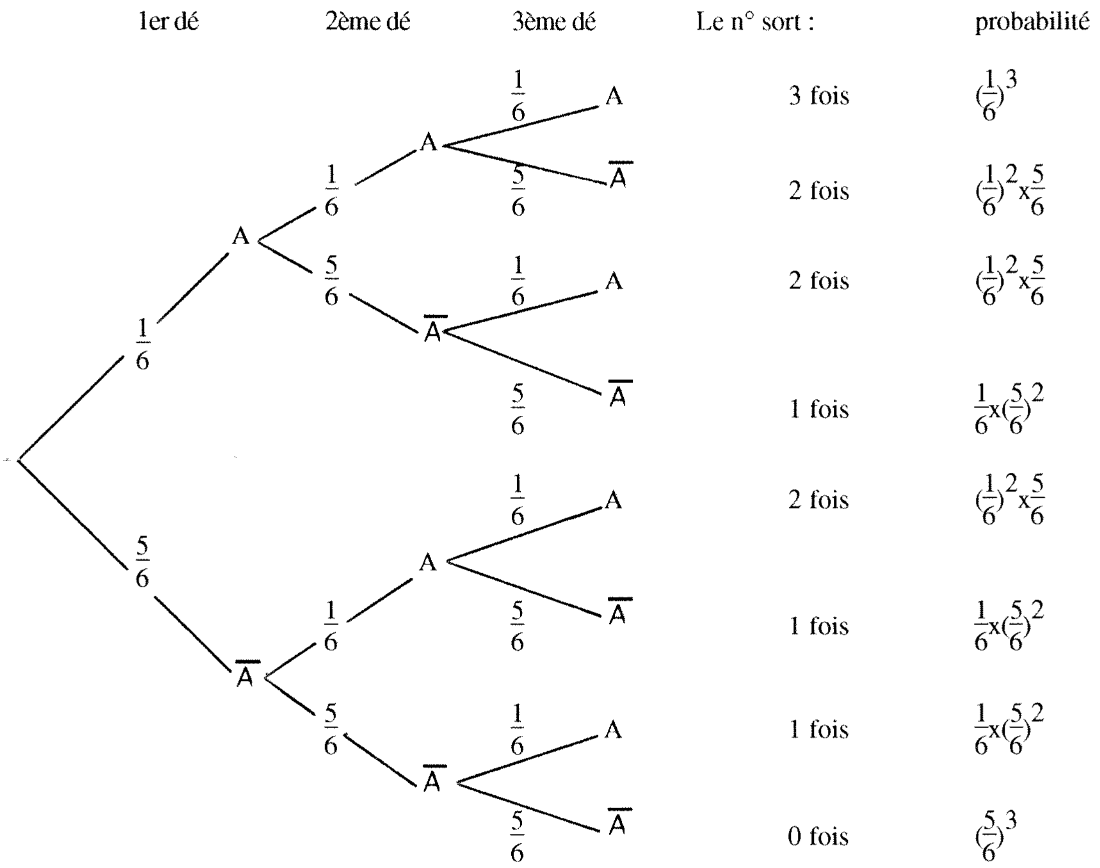
On peut ici définir la fonction de répartition de G dont la représentation graphique modélise la courbe des fréquences cumulées croissantes de l'expérience.
(comparer les tableaux n° 2 et n°3).

notation : $F(x) = P(G \leq x)$

CORRIGE ET COMMENTAIRES EXEMPLE 2

Modélisation :

A : "Le numéro sur lequel on a misé sort lors d'un lancer de dé"



Soit M la somme misée par le joueur à chaque jeu. Soit X le gain théorique du joueur.

A chaque résultat du lancer on associe un nombre : le gain du joueur.

exemple : le numéro misé sort 2 fois, on associe 2M

Loi de probabilité de X :

nombre de sorties du numéro misé	3	2	1	0
valeurs de X : x_i	3M	2M	1M	-M
Probabilités $(P(X=x_i) = p_i$	$\frac{1}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{125}{216}$

$$E(X) = \frac{3M+30M+75M-125M}{216} = -\frac{17M}{216} = -0{,}078\ M$$

E (X) < O le jeu est défavorable au joueur

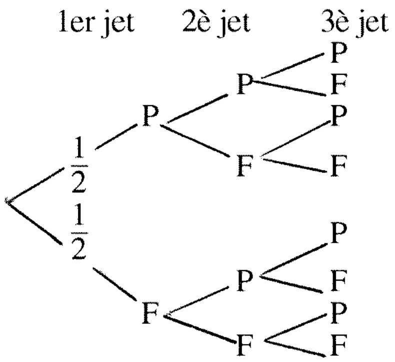
mais le joueur peut gagner sur un petit nombre de parties

Exemple 3

Un joueur lance trois pièces de monnaie bien équilibrées. Il gagne 15F s'il obtient 3 faces, 10F s'il obtient 2 faces, 5F s'il obtient 1 face, et il perd n francs s'il obtient trois piles.
Calculer n pour que le jeu soit équitable.

CORRIGE

soit X la variable aléatoire dont les valeurs sont les gains des joueurs.



résultats des 3 jets	3 piles	2 piles 1 face	1 pile 2 faces	3 faces
gains : valeurs de X_i	-n	5	10	15
probabilités : P_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$E(X) = \Sigma\, x_i p_i = \frac{-n+15+30+15}{8} = \frac{-n+60}{8}$$

Le jeu est équitable si E (X) = 0 c'est-à-dire si <u>n = 60</u>

<u>Commentaire :</u> On peut faire réaliser ce jeu aux élèves et constater sur les résultats statistiques que le jeu n'est pas forcément équitable sur un faible nombre de parties.

Exemple 4 : le tapis vert

Le jeu consiste à remplir une grille en cochant un pique, un coeur, un carreau et un trèfle, parmi 8 cartes proposées dans chaque couleur (du sept à l'as) et à miser une certaine somme sur cette grille.

1)

Une grille qui comporte les 4 cartes tirées rapporte 1000 fois la mise.
Une grille qui comporte 3 des 4 cartes tirées rapporte 30 fois la mise.
Une grille qui comporte 2 des 4 cartes tirées rapporte 2 fois la mise.

a) Dénombrer toutes les grilles possibles

b) Dénombrer les grilles contenant les quatre cartes tirées, trois des cartes tirées, deux des cartes tirées.

c) Calculer le gain (ou la perte) réalisé par une personne jouant 2F sur chacune des 4096 grilles possibles. **Calculer le gain moyen par grille.**

2)

Modifier la règle du jeu donnée en 1) pour que le jeu du tapis vert **devienne un jeu équitable.**

CORRIGE.

1)

a) nombre de grilles possibles 8x8x8x8 = 4096
b) nombre de grilles comportant trois des cartes tirées : 1
nombre de grilles comportant trois des cartes tirées 1^3x7x4=28
nombre de grilles comportant deux des cartes tirées 1^2x7^2x6=294
c) 2F par grille
le joueur joue toutes les grilles - il paie 2x4096=8192F
il gagne 2x1000+28x2x30+294x2x2=4856F
Bilan : <u>il a perdu 3396F</u>
<u>le gain moyen par grille est - 0,83F (environ)</u>

2)

Une grille comportant quatre bonnes cartes rapporte n_1 fois la mise
une grille comportant trois bonnes cartes rapporte n_2 fois la mise
une grille comportant deux bonnes cartes rapporte n_3 fois la mise
les autres grilles ne rapportent rien.
Les 4096 grilles représentent une mise de 4096 fois la mise.
Dans un jeu équitable le gain moyen est nul

$$2n_1+28x2n_2+294x2n_3.4096x2=0$$

n1,n2,n3 vérifient : $n_1+28n_2+294n_3-4096=0$

une solution possible :

$$\mathbf{n_1 = 932 \quad n_2 = 50 \quad n_3 = 6}$$

Exemple 5: le problème du chevalier de Méré

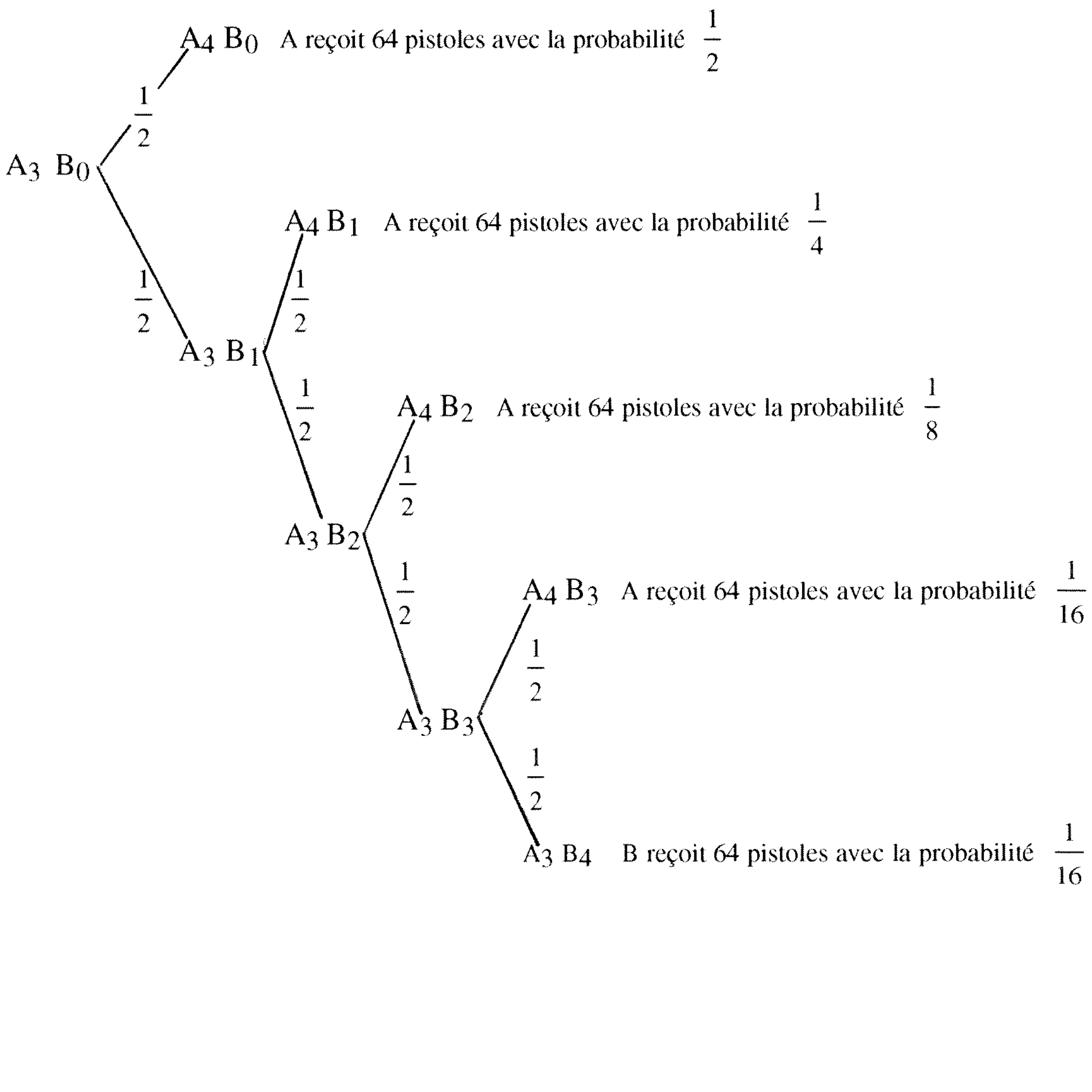
Deux joueurs A et B misent chacun 32 pistoles dans un jeu de pile ou face. Le premier à avoir gagné 4 parties est le gagnant. Il empoche la totalité des mises soit 64 pistoles. On se place au moment où le joueur A a déjà gagné trois parties et B aucune. Quelle est à partir de ce moment là, l'espérance de la somme que va recevoir A (**ou encore le juste prix auquel A accepterait de céder sa place dans le jeu) ?**

CORRIGE

Plaçons-nous par exemple dans le cas où A a gagné trois parties et B aucune. On note cette situation A_3B_O

Les parties suivantes peuvent être représentées par l'arbre suivant :

(il figure page 96 dans la brochure IREM - Probabilités en 1ère)



Soit X la somme reçue par A
Soit Y la somme reçue par B

valeurs de X	0	64
probabilités	$\frac{1}{16}$	$\frac{15}{16}$

E(X) = 60

C'est, d'après Pascal, le juste prix auquel A accepte de céder sa place dans le jeu.

valeurs de Y	0	64
probabilités	$\frac{15}{16}$	$\frac{1}{16}$

E(Y)= 4

C'est le juste prix auquel B accepte de céder sa place dans le jeu.

Remarque : soit G_A le gain de A $G_A=X-32$ (chacun a misé 32 pistoles)

soit G_B le gain de B $G_B=Y-32$

$E(G_A)= 28$ "gain" moyen espéré" par A

$E(G_B)= -28$ "gain" moyen "espéré" par B

Exemple 6

(comparaison de deux jeux)

Un joueur a la choix entre deux jeux :

<u>jeu n° 1</u>

On dispose d'une roulette comportant 1000 numéros. Le joueur paie 1F le droit de faire tourner la roulette. Seul le numéro 1000 est gagnant et rapporte 2500 F. Le joueur peut relancer la roulette autant qu'il veut à condition de payer 1F à chaque partie.

<u>jeu n° 2</u>

On dispose d'une roulette comportant 1000 numéros. Le joueur paie 1F le droit de faire tourner la roulette. Tous les numéros autres que 1000 sont gagnants et rapportent 2,50 F.
Le joueur peut relancer la roulette autant qu'il veut à condition de payer 1F à chaque partie.

<u>Questions :</u>

1) Calculer les espérances de gain du joueur dans chacun des deux jeux.
2) Quel jeu choisissez-vous et pourquoi ?

CORRIGE

<u>Jeu n° 1</u> : soit X le gain du joueur

valeurs de X	2499	- 1
probabilités	$\frac{1}{1000}$	$\frac{999}{1000}$

Jeu n° 2 : soit Y le gain du joueur

valeurs de Y	1,5	- 1
probabilités	$\frac{999}{1000}$	$\frac{1}{1000}$

1) E (X) et E (Y) : gain moyen par partie, espéré par le joueur

$$E\ (X) = 2499 \times \frac{1}{1000} - \frac{999}{1000} = 1{,}5$$

$$E\ (Y) = 1{,}5 \times \frac{999}{1000} - \frac{1}{1000} = 1{,}4975$$

E (X) = 1,5

E (Y) = 1,4975

Les espérances de gains sont très proches. On pourrait donc penser que les deux jeux sont "équivalents".
Pourtant, ceci n'est vrai que pour un grand nombre de parties.

2) Le choix dépend de la "psychologie" du joueur et du nombre de parties à jouer.

On peut faire remarquer que les deux jeux sont différents en terme de "risque" en comparant les écarts-types :

$$[\sigma(X)]^2 = (2499-1{,}5)^2 \times \frac{1}{1000} + (2{,}5)^2 \times \frac{999}{1000} = 6243{,}75 = 6{,}24375 \times 10^3$$

$$\sigma\ (X) \approx 79$$

$$[\sigma(Y)]^2 = (1{,}5-1{,}4975)^2 \times \frac{999}{1000} + (2{,}4975)^2 \times \frac{1}{1000} = 6{,}24 \times 10^{-3}$$

$$\sigma\ (Y) \approx 0{,}079$$

L'écart-type de X est mille fois celui de Y !

LE JEU DE LA ROULETTE

TP1
Jeu de la roulette
(version simplifiée)

On peut décrire ainsi le jeu de la roulette : une boule, lancée par une roue s'immobilise avec des chances égales dans l'une des 37 cases numérotées de 0 à 36. Parmi ces 37 cases, 18 sont rouges et 18 sont noires, le zéro n'a pas de couleur.

a) Le joueur A mise 10 francs sur un nombre. Si la boule s'immobilise dans la case portant ce nombre, le croupier lui remet 360 francs. Dans le cas contraire, le joueur A perd sa mise.
Quelle est l'espérance mathématique de gain du joueur A ?

b) Le joueur B mise 10 francs sur une couleur. Si la boule s'immobilise sur une case de cette couleur, le croupier lui remet le double de sa mise, soit 20 francs; si la boule s'immobilise sur une case de l'autre couleur, le joueur perd sa mise ; si enfin la boule s'immobilise sur le zéro, on la relance ; si elle s'arrête sur une case de la couleur misée, le joueur récupère sa mise (*et non le double)* et la perd sur toute autre case.
Quelle est l'espérance mathématique de gain du joueur B ?

c) Le joueur C mise 7 francs sur le rouge et 3 francs sur le noir. La règle du jeu est celle adoptée pour le joueur B.
Quelle est l'espérance mathématique de gain du joueur C ?

d) Le joueur D mise a francs sur le rouge ($0 \leq a \leq 10$) et $10 - a$ francs sur le noir. La règle du jeu est celle adoptée pour le joueur B.
Quelle est l'espérance mathématique de gain du joueur D ?

CORRIGÉ

a) Soit X le gain du joueur A : E(X) = - 0,27

b) Soit Y le gain du joueur B :

$$E(Y) = 10 \times \frac{18}{37} + 0 \times \left(\frac{1}{37} \times \frac{18}{37}\right) + (-10) \times \left(\frac{18}{37} + \frac{1}{37} \times \frac{18}{37} + \frac{1}{37} \times \frac{1}{37}\right)$$

$$E(Y) = \frac{-190}{37^2} \cong -0{,}139$$

c) Soit Z le gain du joueur C :

valeurs de Z	- 10	- 7 (3-10)	- 4 (2×3-10)	- 3	4
probabilités	$\frac{1}{37^2}$	$\frac{18}{37^2}$	$\frac{18}{37}$	$\frac{18}{37^2}$	$\frac{18}{37}$

$$E(Z) = \frac{-190}{37^2} = E(Y)$$

d) Soit W le gain du joueur D : $0 \le a \le 10$

$$E(W) = (2a-10) \times \frac{18}{37} + (10-2a) \times \frac{18}{37} + (a-10) \times \frac{18}{37^2} + (-a) \times \frac{18}{37^2} + (-10) \times \frac{1}{37^2} = \frac{-190}{37^2}$$

E (W) = E (Y) = E (Z).

Avec la règle adoptée par les joueurs B, C et D l'espérance de gain est la même. Elle est indépendante de a.

TP2
Bluffer est un art [1]

Voici un jeu opposant un joueur et un banquier. Au début le joueur et le banquier misent chacun 1 franc. Le joueur tire au hasard une carte dans un paquet comportant un nombre égal de cartes gagnantes et de cartes perdantes. Le joueur regarde la carte tirée sans la montrer au banquier et a le choix entre passer et relancer.
S'il passe, le banquier ramasse les mises et la partie est terminée.
S'il relance, il mise à nouveau 1 franc et le banquier peut alors passer ou demander à voir.

Si le banquier passe, le joueur ramasse les mises et la partie est terminée.

Si le banquier demande à voir , il doit miser à nouveau 1 franc. Le joueur retourne alors sa carte. Les mises sont ramassées par le joueur si la carte est gagnante, par le banquier si la carte est perdante. Le jeu est terminé.
Soit X le gain, en francs, du joueur.

PREMIERE STRATEGIE: le joueur ne bluffe jamais.
Le joueur relance systématiquement quand il a une bonne carte et passe systématiquement quand il en a une mauvaise. Le banquier ne tarde pas à s'en apercevoir et décide de passer systématiquement. Calculer E (X).

DEUXIEME STRATEGIE: le joueur bluffe toujours.
Le joueur relance systématiquement. Le banquier décide alors de demander à voir systématiquement. Calculer E (X).

TROISIEME STRATEGIE: le joueur bluffe de façon aléatoire.
Le joueur relance quand il a une bonne carte. Quand la carte est mauvaise, il s'en remet au hasard et relance avec une probabilité p.
Le banquier décide de s'en remettre lui aussi au hasard et demande à voir avec une probabilité q.

1. Démontrer que $E(X) = p + \frac{q}{2} - \frac{3}{2}pq$.

---

[1] d'après une idée de Ivar Ekeland, "Au hasard : La chance, la science et le monde, Editions du Seuil.

2. Retrouver ainsi les résultats des deux stratégies précédentes.

3. Vérifier que $E(X) = \frac{1}{3} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{3} - p\right)\left(\frac{2}{3} - q\right)$.

4. A chaque couple (p, q) on associe le point de coordonnées (p, q) dans un repère orthonormé (unité 10 cm).

Faire apparaître l'ensemble des points M pour lesquels :

a) $E(X) = \frac{1}{3}$;

b) $E(X) < \frac{1}{3}$;

c) $E(X) > \frac{1}{3}$.

5. Tracer l'ensemble des points M pour lesquels :

a) $E(X) = 0$;

b) $E(X) = 0{,}2$;

c) $E(X) = 0{,}4$;

d) $E(X) = 0{,}5$;

e) $E(X) = 1$.

6. VOUS jouez contre le banquier. Quelle stratégie adopterez-vous?

CORRIGÉ

PREMIERE STRATEGIE

- Si la carte est gagnante, le joueur relance, le banquier passe, donc $X = 1$ $(p = \frac{1}{2})$.
- Si la carte est perdante, le joueur passe, donc $X = -1$ $(p = \frac{1}{2})$.

$E(X) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{2} \times (-1) = 0.$

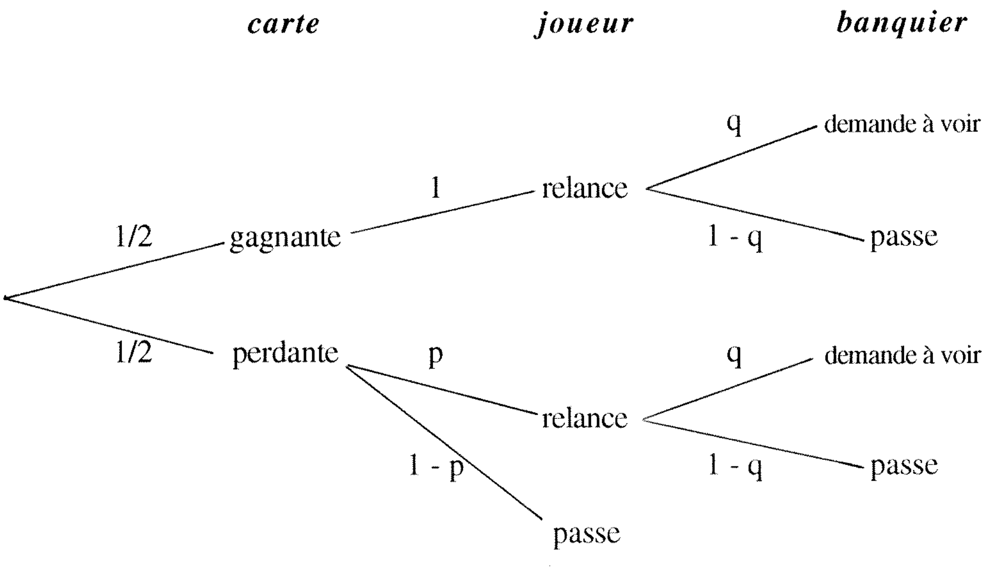
DEUXIEME STRATEGIE

- Le joueur mise toujours 2F, le banquier aussi. Donc $X = 2$ pour une carte gagnante, $X=-2$ pour une carte perdante.

$E(X) = 0.$

TROISIEME STRATEGIE

1)



valeurs de x	probabilité
2	$\frac{q}{2}$
1	$\frac{1}{2}(1-q)$
- 2	$\frac{1}{2}\,pq$
+ 1	$\frac{p\,(1-q)}{2}$
- 1	$\frac{1-p}{2}$

donc $E(X) = q + \frac{1-q}{2} - pq + \frac{p-pq}{2} - \frac{1-p}{2} = p + \frac{q}{2} - \frac{3}{2}\,pq.$

2) La situation 1 correspond à $p = q = 0$ d'où $E(X) = 0$.

3) On développe...

4) a) $E(X) = \frac{1}{3}$ pour $p = \frac{1}{3}$ ou $q = \frac{2}{3}$.

b) $E(X) < \frac{1}{3}$ pour $(\frac{1}{3} - p)(\frac{2}{3} - q) > 0$ donc $p > \frac{1}{3}$ et $q > \frac{2}{3}$ ou $p < \frac{1}{3}$ et $q < \frac{1}{3}$.

c) $E(X) > \frac{1}{3}$ dans le reste du carré de côté 1.

5) Posons $E(X) = \frac{k+1}{3}$; on a alors $q = \frac{2(p-k)}{3p-1}$.

Représentons la fonction f_k définie par $f_k(p) = \frac{2(p-k)}{3p-1}$,

ou du moins la portion de courbe intérieure au carré de côté 1.

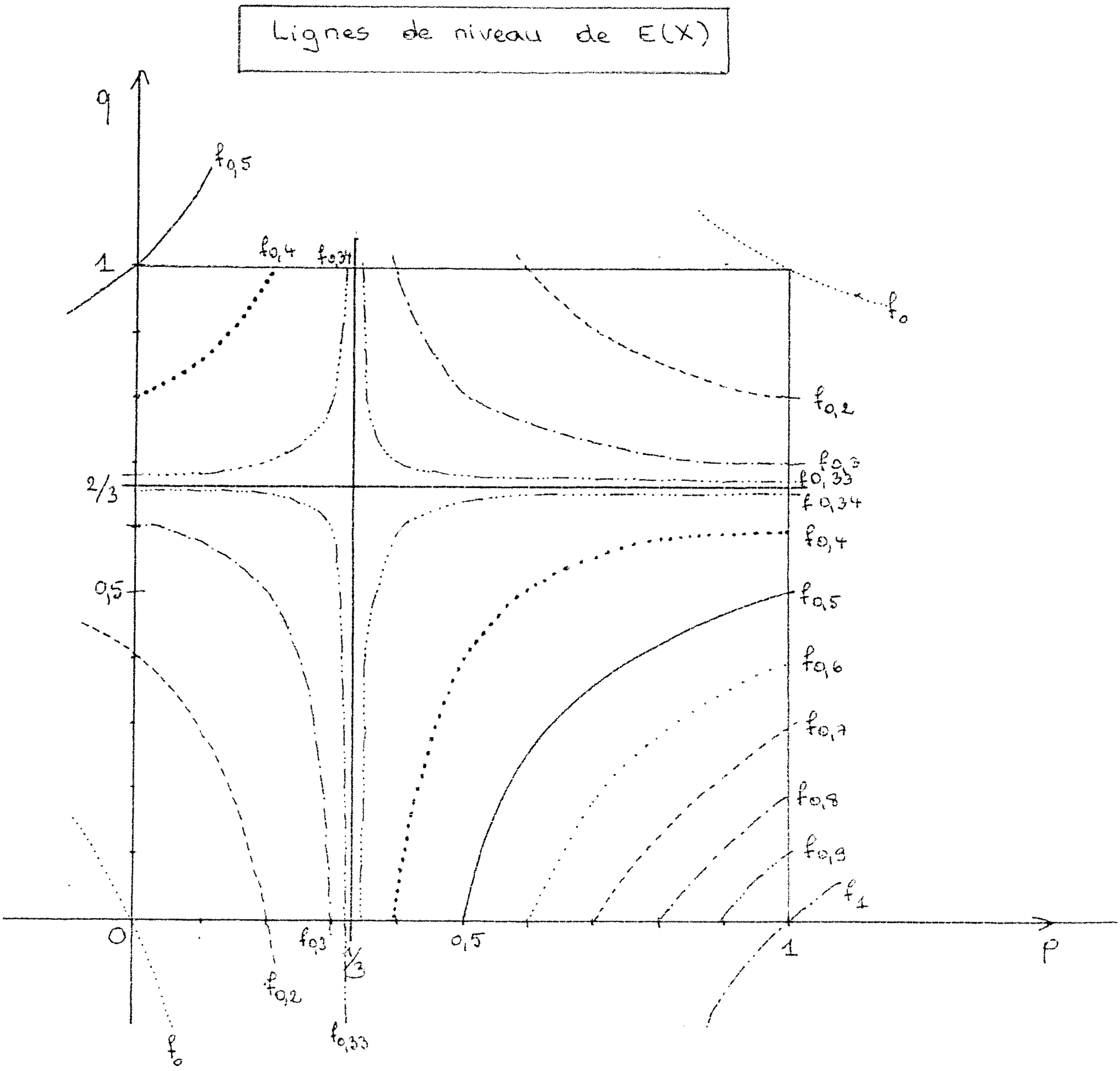
$f'_k(p) = \frac{2(3k-1)}{(3p-1)^2}$ donc f_k est croissante sur $[0, \frac{1}{3}[$ et $]\frac{1}{3} ; 1]$ si $k > \frac{1}{3}$,

f_k est décroissante si $k < \frac{1}{3}$.

Les asymptotes sont la ligne de niveau $\frac{1}{3}$ de $E(X)$.

6) En l'absence de renseignements sur la stratégie du banquier, **il est raisonnable de choisir $p = \frac{1}{3}$,** qui permet d'obtenir une espérance indépendante de la stratégie du banquier.

N.B. Sur le graphique figurent quelques lignes de niveau de plus. On peut voir par exemple, que si on choisit p = 0,6, l'espérance E (X) pourra varier de 0,2 à 0,6 selon la stratégie du banquier.



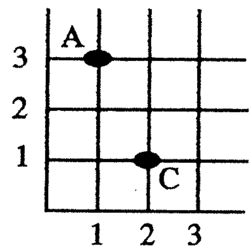
TP 3
Calculs d'espérances

Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2, 3 respectivement.

1.On tire avec remise 2 boules de cette urne. On désigne par Δ la variable aléatoire égale à la valeur absolue de la différence des nombres indiqués par les boules tirées. Etablir la loi de Δ et calculer son espérance.

2.On tire avec remise 4 boules de cette urne. On obtient un résultat de la forme (a,b,c,d) où a, b, c et d sont les numéros des boules tirées. A chaque tirage, on associe les points A (a,b) et C (c,d) au quadrillage ci-contre.

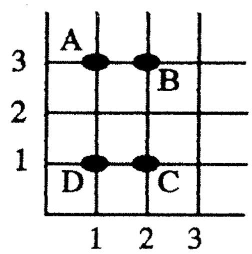
exemple avec (a,b,c,d) = (1,3,2,1)



Quelle est l'espérance de AC^2 ?
Quelle est l'espérance de la distance AC ?

3. On complète la figure précédente en un rectangle ABCD à côtés parallèles aux lignes du quadrillage.

exemple avec (a,b,c,d) = (1,3,2,1)



a) Calculer la probabilité que l'aire du rectangle soit nulle.
b) Calculer la probabilité que l'on obtienne un carré.
c) Calculer l'espérance du périmètre du rectangle.
d) Calculer l'espérance de la distance DC, de la distance AD.
e) Calculer l'espérance de l'aire du rectangle.

4. Si X et Y sont deux variables aléatoires, que penser des formules:
$E(XY) = E(X)E(Y)$,
$E(X^2) = [E(X)]^2$,
$E(X) + E(Y) = E(X+Y)$?

CORRIGÉ

1) $E(\Delta) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{2}{9} = \frac{8}{9}$.

2) Utiliser le point D de la 3° question : $AC^2 = AD^2 + DC^2$
$AD = |b - c|$, $DC = |a-d|$. AD et DC ont une loi identique à celle de Δ.

$$E(AC^2) = 0\times \frac{1}{9} + 1\times \frac{24}{81} + 2\times\frac{16}{81} + 4\times \frac{12}{81} + 5\times \frac{16}{81} + 8\times \frac{4}{81} = \frac{216}{81}.$$

$$\mathbf{E(AC^2) = \frac{8}{3} \cong 2{,}67.}$$

$$E(AC) = 0 \times \frac{1}{9} + 1\times \frac{24}{81} + \sqrt{2} \times \frac{16}{81} + 2 \times \frac{12}{81} + \sqrt{5} \times \frac{16}{81} + 2\sqrt{2} \times \frac{4}{81}.$$

$$\mathbf{E(AC) = \frac{48+24\sqrt{2}+16\sqrt{5}}{81} \cong 1{,}45.}$$

3)

a) L'aire est nulle si au moins un côté est nul : $\mathbf{p = \frac{45}{81} \cong 0{,}56.}$

b) ABCD carré signifie AD=DC $p = (\frac{3}{9})^2+(\frac{4}{9})^2+(\frac{2}{9})^2=\frac{29}{81} \cong 0{,}36$.
(ou $\frac{20}{81}$ si on impose $AD \neq 0$)

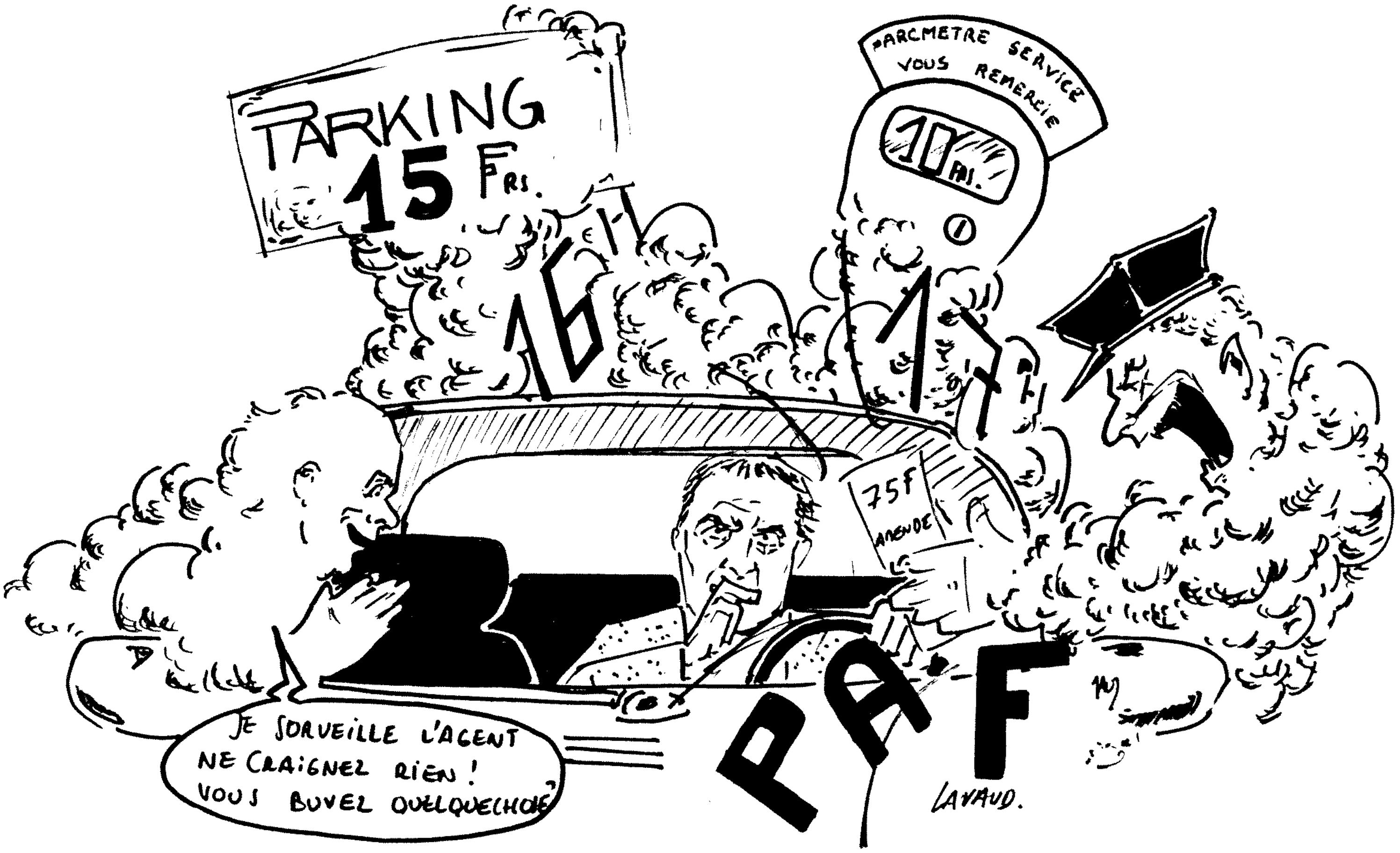
c) $\mathcal{P} = 2(AD+DC)$
$\mathbf{E(\mathcal{P})} = 0\times\frac{1}{9} + 2 \times\frac{24}{81} + 4\times \frac{28}{81} + 6\times\frac{16}{81} + 8\times\frac{4}{81} = \frac{288}{81} = \frac{32}{9} \cong 3{,}56$.

d) $\mathbf{E(AD) = E(DC) = E(\Delta) = \frac{8}{9}.}$

e) $\mathcal{A} = AD \times DC$ donc
$\mathbf{E(\mathcal{A})} = 0\times\frac{45}{81} + 1\times\frac{16}{81} + 2\times\frac{16}{81} + 4\times\frac{4}{81} = \frac{64}{81} = \mathbf{(\frac{8}{9})^2}$.

4) $E(XY) = E(X)\,E(Y)$ et $E(X^2) = [E(X)]^2$: vraies dans d) et e) du 3) mais pas dans 2) :
$E(AC^2) \cong 2{,}67$, $[E(AC)]^2 \cong 2{,}1$ donc $E(AC^2) \neq [E(AC)]^2$.

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ vrai dans 3)c : $E(\mathcal{P}) = 4\,E(\Delta)$.
Dans une bonne classe on peut démontrer que $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.


PARKING
15 Frs.
PARCMETRE SERVICE VOUS REMERCIE
10 FRS.
16 H
17 H
75 F AMENDE
JE SURVEILLE L'AGENT NE CRAIGNEZ RIEN ! VOUS BUVEZ QUELQUECHOSE
PAF
LAVAUD.

TP 4

Prendre des risques calculés pour garer sa voiture [1].

J'arrive en ville à 14 heures et compte y rester jusqu'à 17 heures. J'ai le choix entre trois options:

Option n°1: je vais directement au parking. Cela me coûtera 15F par heure.

Option n°2: je vais directement au parcmètre. Cela me coûtera 5F par heure mais le stationnement y est limité à deux heures. Je mets donc 10F dans l'horodateur et prends le risque que l'agent verbalisateur passe entre 16 h et 17h et m'inflige une amende de 75F.

Option n°3: je vais demander au patron du bistrot voisin, qui surveille du coin de l'oeil les allées et venues de l'agent , s'il pense que celui-ci passera aujourd'hui entre 16h et 17h. S'il me répond oui je vais au parking sinon je vais au parcmètre. Cela me coûtera le prix d'une consommation en supplément (7F50). Je ne suis d'ailleurs pas sûr(e) que le cafetier ait raison, et **nous admettrons pour tout l'exercice** que le cafetier se trompe, dans tous les cas, deux fois sur dix;

Nous noterons C l'événement : "le cafetier dit que l'agent va passer".
Nous noterons A l'événement : "l'agent passe et verbalise entre 16h et 17h".

Le but de l'exercice est de comparer les coûts moyens que l'on peut s'attendre à payer selon l'option choisie.

[1] *D'après "Comment prendre des risques " de J.Lubczanski (Les Maths au jour le jour , Cedic ,1985)*

I ***Dans cette partie nous supposons que p(A) = 0,4.***

1) **Option n°1:**

Calculer le coût de cette option.

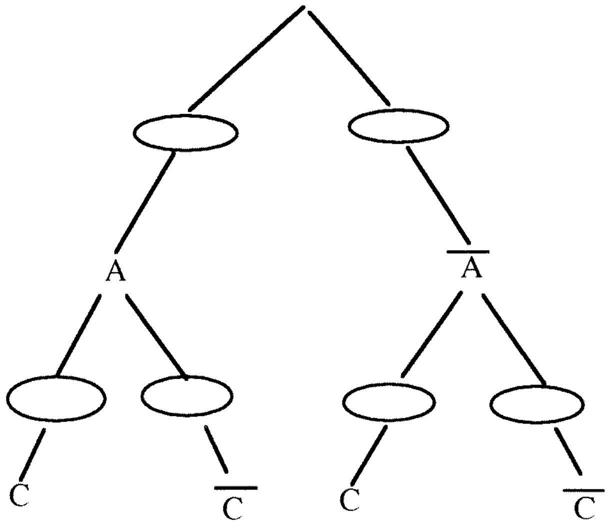
2) **Option n°2:**

Soit X la variable aléatoire dont les valeurs sont les coûts des différentes situations.

Calculer E(X)

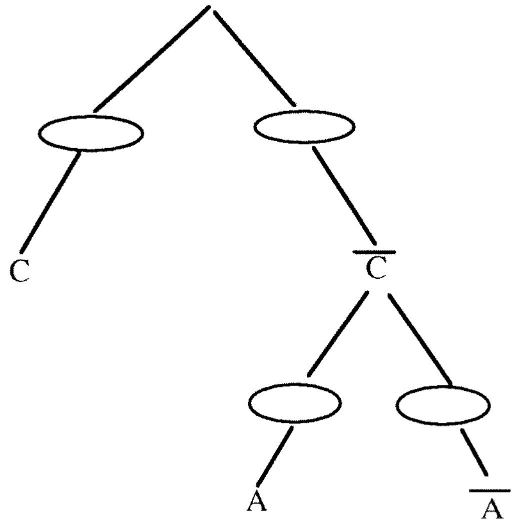
3) **Option n°3:**

a) Compléter l'arbre ci-contre:



b) En déduire les valeurs de P(C) et P($\overline{C}$)

c) Compléter l'arbre ci-contre:



d) Soit Y la variable aléatoire dont les valeurs sont les coûts des différentes situations.
Compléter le tableau suivant:

valeurs de Y			
probabilités			

e) Calculer E(Y).

4) **Quelle option choisiriez - vous?**

II ***Dans cette partie, nous appelerons p la probabilité de l'événement A.***

1) Démontrer que $E(X)=75p+10$ et que $E(Y)=36p+24{,}50$.

2) Trouver, en discutant selon la valeur de p, quelle est la meilleure option (on s'aidera d'un graphique).

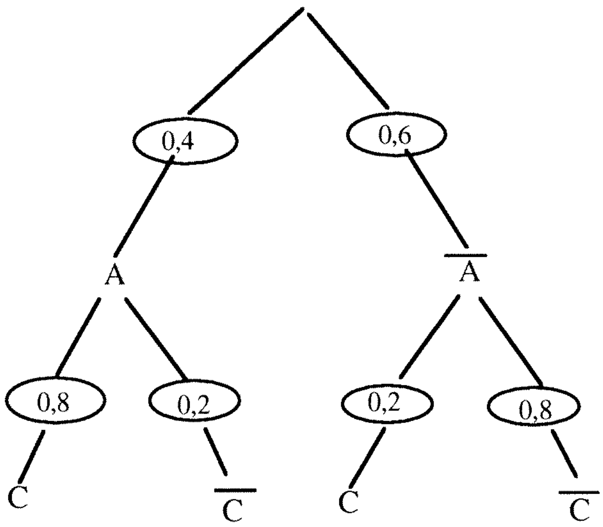
Remarque: pour estimer la valeur de p, je peux faire une observation statistique des passages de l'agent, mais ceci est une autre histoire.

ELÉMENTS DE CORRIGÉ.

I 1) 45 F

2) $E(X) = (10 \times 0,6) + (85 \times 0,4) = 40$ F

3) a)

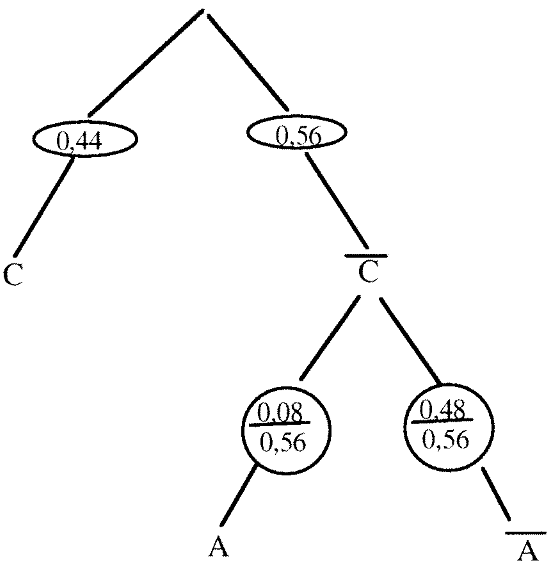


b)

$P(C) = (0,4 \times 0,8) + (0,6 \times 0,2) = 0,44$

$P(\overline{C}) = 0,56$

c)



d)

y_i	52,50	92,50	17,50
p_i	0,44	0,08	0,48

e)

E(Y)=38,90 F

4)

option n°3

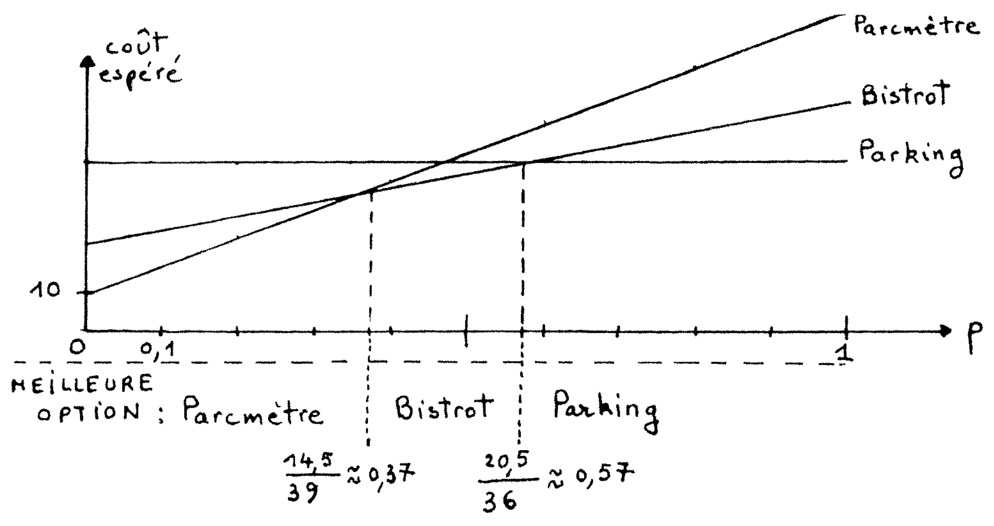
II 1) E(X)=10 (1-p) + 85p = 75p + 10

y_i	52,50	92,50	17,50
p_i	0,6p+0,2 = 0,8p + 0,2(1-p)	0,2p	0,8(1-p)

E(Y)=36p+24,50

Il peut être intéressant de remarquer que l'on peut se passer des questions 3°b et 3°c du I

2)



TP 5

Le paradoxe de Saint-Petersbourg.

Le jeu se joue entre deux adversaires A et B.
On jette en l'air une pièce de monnaie, et ce jusqu'à la sortie de " face ".

Au début du jeu, B verse à A une somme S.

Si " face " sort au premier jet, A donne 1 franc à B.
Si " face " sort au deuxième jet, A donne 2 francs à B, et ce ainsi de suite : si " face " sort au n-ième jet, A donnera 2^{n-1} Francs à B.

Quelle doit être la valeur de la somme S pour que le jeu soit équitable ?

On suppose maintenant la fortune de A limitée à 10000 francs.
Le joueur A ne peut donc s'engager au delà d'un certain nombre de jets de pièce de monnaie.
Quel est ce seuil ?
Quelle est la somme que B doit donner à A afin que le jeu soit équitable ?

CORRIGÉ

Le joueur B reçoit 1 franc si " face " sort au premier jet, cet événement a pour probabilité 1/2 .
Il reçoit 2 francs si " face " ne sort qu' au deuxième jet, cet événement a pour probabilité 1/4 .
Le joueur B reçoit 2^{n-1} francs si " face " ne sort qu'au n-ième jet, cet événement a pour probabilité $\frac{1}{2^n}$.

Le joueur B peut donc espérer gagner, au bout de n lancers :

$$1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2^2} + 4 \times \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + 2^{n-1} \times \frac{1}{2^n} = n \times \frac{1}{2} \text{ francs.}$$

Le nombre n de jets n'étant pas limité, le joueur B devrait donc verser à A un droit d'entrée infini !

Ce problème a fait l'objet d'une première étude en 1713 par Nicolas Bernoulli. Cette étude a été modifiée et publiée dans les " Comptes rendus " de l'Académie de Saint Petersbourg par son neveu, Daniel Bernoulli.
La conclusion semble paradoxale, le joueur B devant verser une somme infinie à A afin que la partie soit équitable.

Le problème tel qu'il a été présenté suppose cependant l'existence d'un joueur A capable de payer une somme de 2^{n-1} francs en toutes circonstances, c'est à dire pour tout n. Un tel joueur devrait avoir une fortune infinie, ce qui est exclu.

Supposons maintenant que la fortune de A soit limitée à 10000 francs.
Le joueur A ne peut s'engager à rembourser de somme de 2^{n-1} francs supérieure à 10000.
La plus grande valeur de n possible est alors de 14. Le joueur B peut alors espérer gagner 7 francs, et devrait donc s'acquitter de cette somme pour pouvoir jouer.
Une telle somme ne paraît pas déraisonnable : si " face " sort au quatrième jet, B touche 8 francs et gagne donc 8-7 = 1 franc et il est gagnant, si " face " sort au septième jet, B gagne 64 - 7 francs, et si " face " ne sort qu'au quatorzième jet, B gagne 8192 - 7 francs.

III

DÉNOMBREMENTS.

Les deux activités proposent deux éclairages différents sur le chapître des dénombrements.

La première activité est une introduction aux "classiques" techniques de dénombrement, totalement indépendante des probabilités.

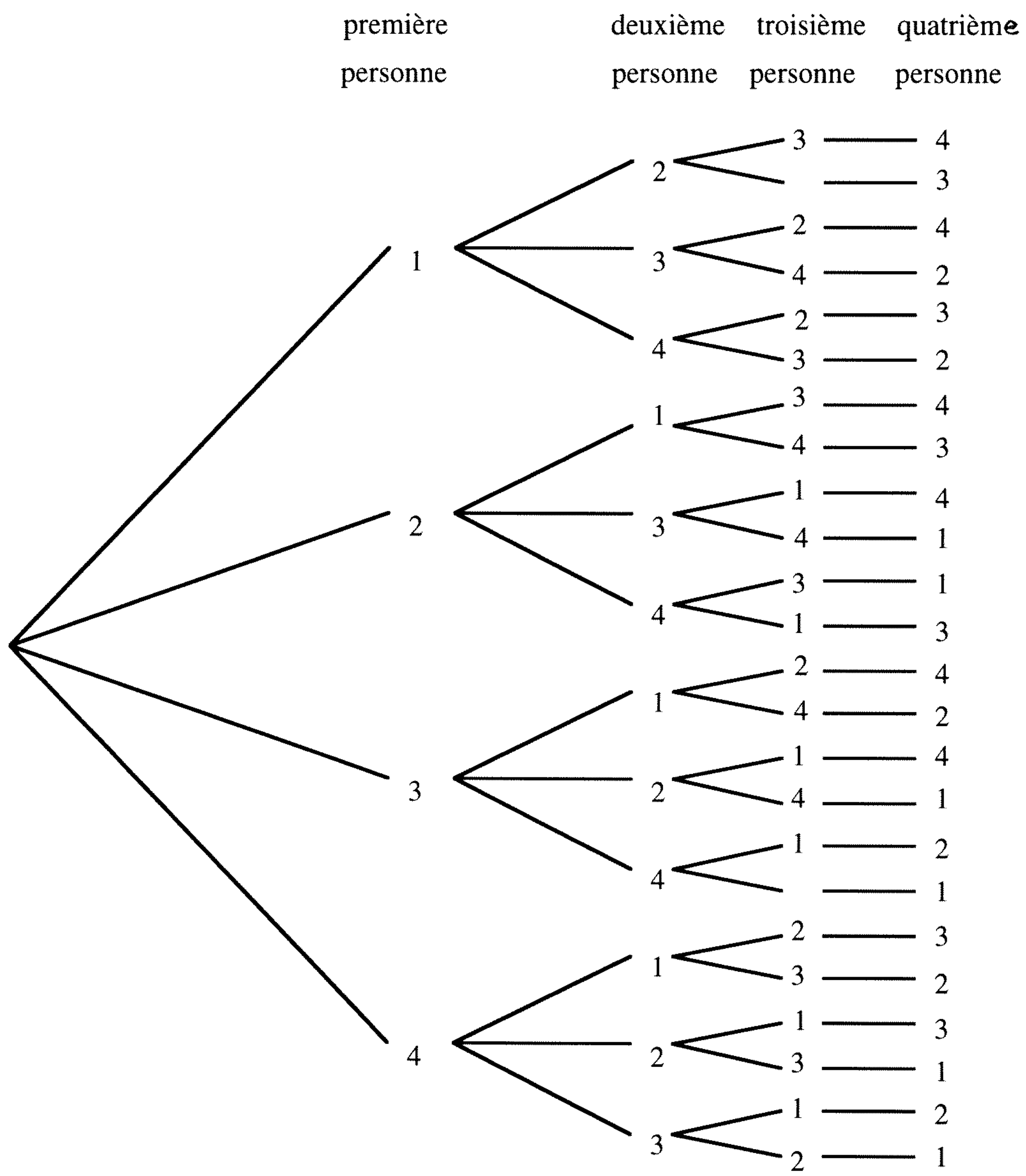
La seconde activité permet d'établir les principales formules de dénombrement A_n^p , C_n^p , etc....en s'appuyant sur le calcul des probabilités. Les exercices qui y sont proposés supposent de la part des élèves une maîtrise suffisante de ces techniques. Ils peuvent être utilisés comme Travaux Pratiques introductifs aux dénombrements, comme exercices ou comme parties de cours.

A chacun sa chaise !

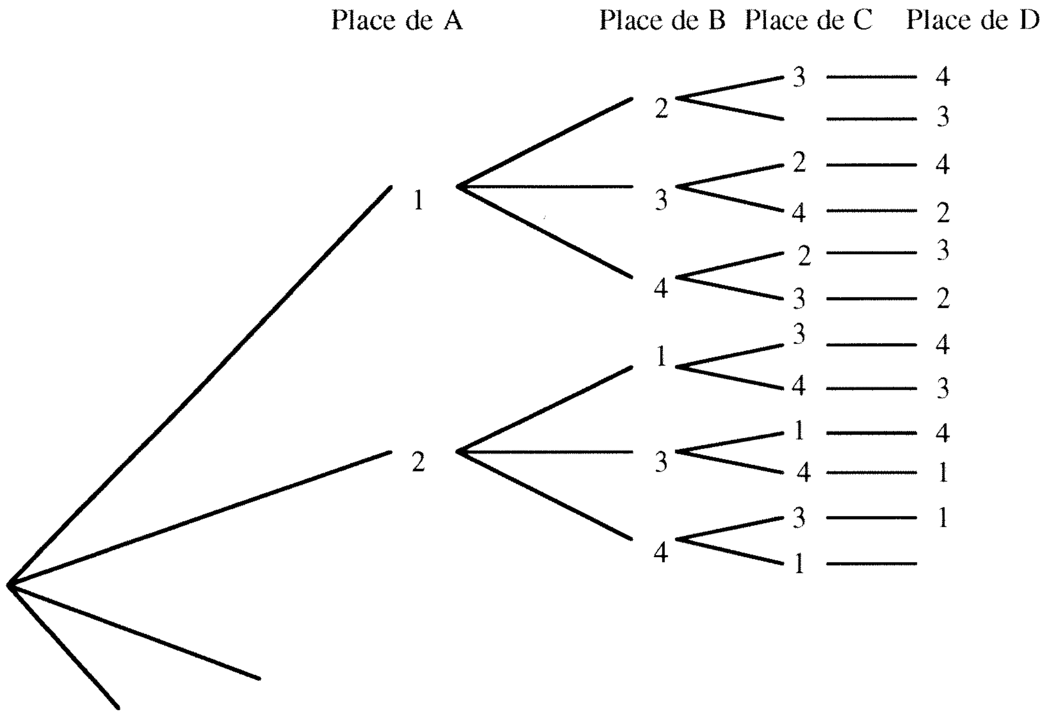
UN EXEMPLE QUI PERMET D'INTRODUIRE LES NOTIONS DE PERMUTATIONS, ARRANGEMENTS, COMBINAISONS ET DE LES DÉNOMBRER.

Quatre personnes doivent prendre place autour d'une table comportant 4 places numérotées de 1 à 4. On se demande quel est le nombre de répartitions possibles ?

Supposons que les personnes arrivent successivement. La première personne qui arrive a le choix entre 4 places, la seconde n'a plus que 3 possibilités, la troisième 2 possibilités et la dernière ne peut que s'installer à l'unique place restante. Le nombre de dispositions possibles est donc le nombre de feuilles de l'arbre ci-dessous :



Il y a donc 4x3x2x1 = 24 dispositions possibles.
Notation : on note 4! (qui se lit "factorielle 4") le produit des entiers de 1 à 4 (qui est égal à 24) et, plus généralement n! le produit de tous les entiers de 1 à n.
Si les personnes arrivent simultanément, on peut encore construire le même arbre en nommant A, B, C et D les quatre personnes, le premier niveau de l'arbre correspondra à la place de A, le second à la place de B, le troisième à la place de C etc.

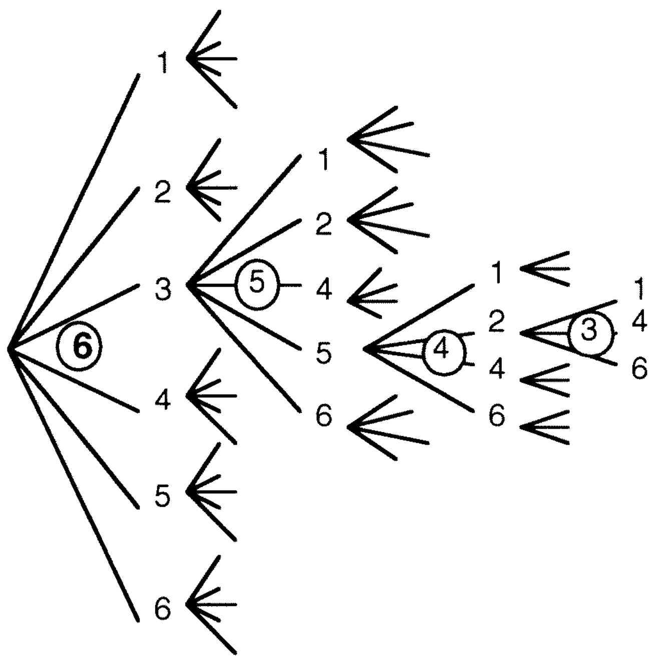


On peut également présenter les dispositions possibles sous forme de tableau :

	Place 1	**Place 2**	**Place 3**	**Place 4**
P	A	B	C	D
E	A	B	D	C
R	A	C	B	D
S	A	C	D	B
O	A	D	B	C
N	A	D	C	B
N	B	A	C	D
E	B	A	D	C
S	....	....	....	....
	....	....	....	....

Il y a donc 24 manières d'ordonner les quatre lettres A, B, C, D c'est à dire que l'on peut écrire 24 "mots" différents en utilisant une seule fois chacune des quatre lettres.
Un ordre possible est appelé **permutation** des quatre lettres. Le nombre de permutations de 4 objets est donc 4!=24.
Plus généralement :
En imaginant un arbre de n niveaux, on remarque que le nombre de permutations de n objets est égal à n!.

Supposons à présent que 4 personnes désirent s'installer autour d'une table comportant 6 places. Imaginons sans le dessiner entièrement un arbre analogue à celui complété ci -dessus :



(Les nombres écrits dans les ovales correspondent au nombre de branches issues de chacun des noeuds de ce niveau.)

On peut calculer le nombre de feuilles qui est dans ce cas égal à : 6x5x4x3 = 360

C'est également le nombre de manière d'ordonner 4 lettres choisies parmi 6. Une telle disposition est appelée **arrangement** de 4 objets pris parmi 6. Le nombre de ces arrangements est noté A_6^4.

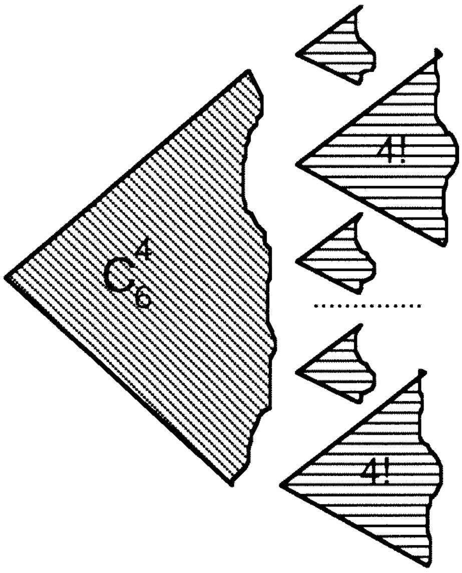
$$A_6^4 = 360$$

Plus généralement, le nombre d'arrangements de p objets pris parmi n (p<=n) est noté A_n^p et :

$$A_n^p = n x(n-1)x(n-2)x....x(n-p+1)$$

Une autre manière de procéder pour disposer 4 personnes autour d'une table de 6 places consiste à enlever tout de suite deux chaises c'est à dire à choisir, parmi les 6 places le sous-ensemble des 4 places qui seront occupées. Un tel sous-ensemble est encore appelé **combinaison** de 4 éléments pris parmi 6. Le nombre de ces combinaisons est noté C_6^4.

Lorsque le sous-ensemble des places occupées est choisi, on est dans la situation de 4 personnes pour 4 places étudiée ci-dessus. Il y a alors encore 24 dispositions possibles.
On peut donc imaginer l'arbre suivant (dont on sait déjà qu'il a A_6^4 = 360 feuilles :



360 feuilles

On peut donc calculer le nombre C_6^4 en remarquant que :

$$C_6^4 \times 4! = A_6^4 = 360$$

$$C_6^4 = \frac{360}{4!} = \frac{360}{24} = 15$$

Plus généralement, si C est le nombre de sous-ensembles de p éléments d'un ensemble de n éléments, c'est à dire le nombre de combinaisons de p éléments pris parmi n, on a :

$$C_n^p \times p! = A_n^p$$

c'est à dire :

$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

Etablir les principales formules de dénombrement à l'aide des probabilités.

Le schéma des exercices est toujours le suivant :

On décrit une expérience de tirage au sort portant sur des objets classiques : p-arrangements, p-combinaisons,....On s'intéresse à la réalisation d' une épreuve bien précise. La probabilité de réalisation de cette épreuve qui est de $\frac{1}{A_n^p}$ ou de $\frac{1}{C_n^p}$...suivant le cas, peut encore être calculée d'une autre façon, ce qui permet le calcul effectif de A_n^p ou C_n^p.

Exercice 1:

Un amoureux transi décide de téléphoner à sa fiancée. Ne connaissant plus son numéro, il décide d'en composer les huit chiffres au hasard.

1) Quelle est la probabilité qu'il obtienne ainsi le bon numéro ?

2) Un numéro correspond à huit tirages successifs avec remise d'un chiffre parmi dix. C'est donc une 8-liste de chiffres de 0 à 9. Soit N le nombre de ces 8-listes, exprimer en fonction de N la probabilité de l'événement " l'amoureux transi obtient le bon numéro ". En déduire la valeur de N.

Exercice 2:

Pour composer des numéros de billets de loterie on dispose d'un ensemble de n symboles : &,#,@,1,!,,9,...etc.

Un billet de loterie porte un numéro formé de p symboles pouvant être répétés. L'ordre de ces symboles importe. Il s'agit donc d'une p-liste de symboles choisis parmi n.

1) Paul assiste au tirage successif de ces symboles. Quelle est la probabilité pour que son billet soit gagnant ?

2) En désignant par N le nombre de p-listes, calculer en fonction de N la probabilité de gain de Paul, en déduire l'expression de N en fonction de n et de p.

Exercice 3[1] :

Pour décider de l'ordre dans lequel les n concurrentes à un prix de beauté pourront se présenter, on procède à un tirage au sort.

1) Quelle est la probabilité pour que l'ordre de passage corresponde à l'ordre alphabétique ?

2) Chaque tirage au sort est une permutation des n éléments de l'ensemble E des concurrentes. Calculer le nombre de ces permutations.

Exercice 4 :

L'école d'ingénieurs de la bonne ville de V... emploie n professeurs. Il est organisé chaque année une série de p ($p \leq n$) conférences en divers endroits afin d'assurer la publicité de l'école.

Afin de répartir ce travail, il est procédé chaque année à un tirage au sort parmi les professeurs de l'établissement, l'ordre du tirage déterminant également le lieu de la conférence.

1) Quelle est la probabilité pour que les mêmes professeurs aient à effectuer en 1994 les mêmes travaux qu'en 1993 ?

2) Soit N le nombre de p-arrangements pouvant être formés avec n éléments. En remarquant que le tirage au sort dans l'ordre des p professeurs consiste justement en la désignation d'un p-arrangement, calculer N.

Exercice 5[1] :

Madame Schmitt achète n oeufs sans se rendre compte que p sont pourris. Tel jour, elle utilise p oeufs qu'elle choisit au hasard. Quelle est la probabilité pour que tous soient pourris ?

On désigne par N le nombre de p-combinaisons d'éléments choisis parmi n. Déterminer N en exprimant cette probabilité en fonction de N.

---

[1] exercice adapté de : POLYA : "Mathematics and plausible reasoning ", Princeton University Press, Princeton, USA.

Exercice 6 :

Les couples de fiancés de la bonne ville de V... ont deux lieux de rendez-vous :

- au jardin municipal, devant la statue du mathématicien Laplace,
- sur la Grand place, devant la statue de Saint Valentin.

Les garçons choisissent d'abord chacun un des lieux, les filles les y rejoignent au hasard.

1) Quelle est la probabilité pour que chacun retrouve sa chacune ?

2) Soit E l'ensemble des n couples de fiancés de V..., et soit N le nombre de parties de E. Soit G l'ensemble des couples dont les garçons ont choisi la statue de Saint Valentin. Exprimer en fonction de N la probabilité pour que l'ensemble F des couples dont les filles ont choisi la statue de Saint Valentin coïncide avec G. En comparant les résultats de ces deux questions, donner la valeur de N.

CORRIGÉ.

EXERCICE 1:

1)

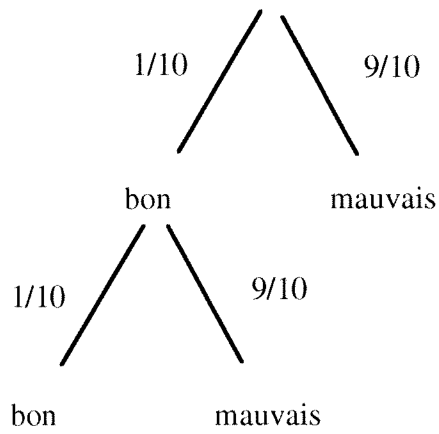
Chaque numéro est le résultat de tirages successifs avec remise.

Soit A l'événement:"le numéro composé est celui de la fiancée".

Arbre pour calculer P(A):

le premier chiffre composé est

le second chiffre composé est



etc..

$$P(A)=\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}\times\ldots\ldots\ldots\ldots\times\frac{1}{10}=\frac{1}{10^8}$$

2)

$$P(A)=\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}=\frac{1}{N}$$ d'où $N=10^8$

Le nombre de 8-listes d'éléments pris parmi 10 est 10^8

EXERCICE 2:

analogue au n°1.

Le nombre de p-listes d'éléments choisis dans un ensemble de n éléments est n^p.

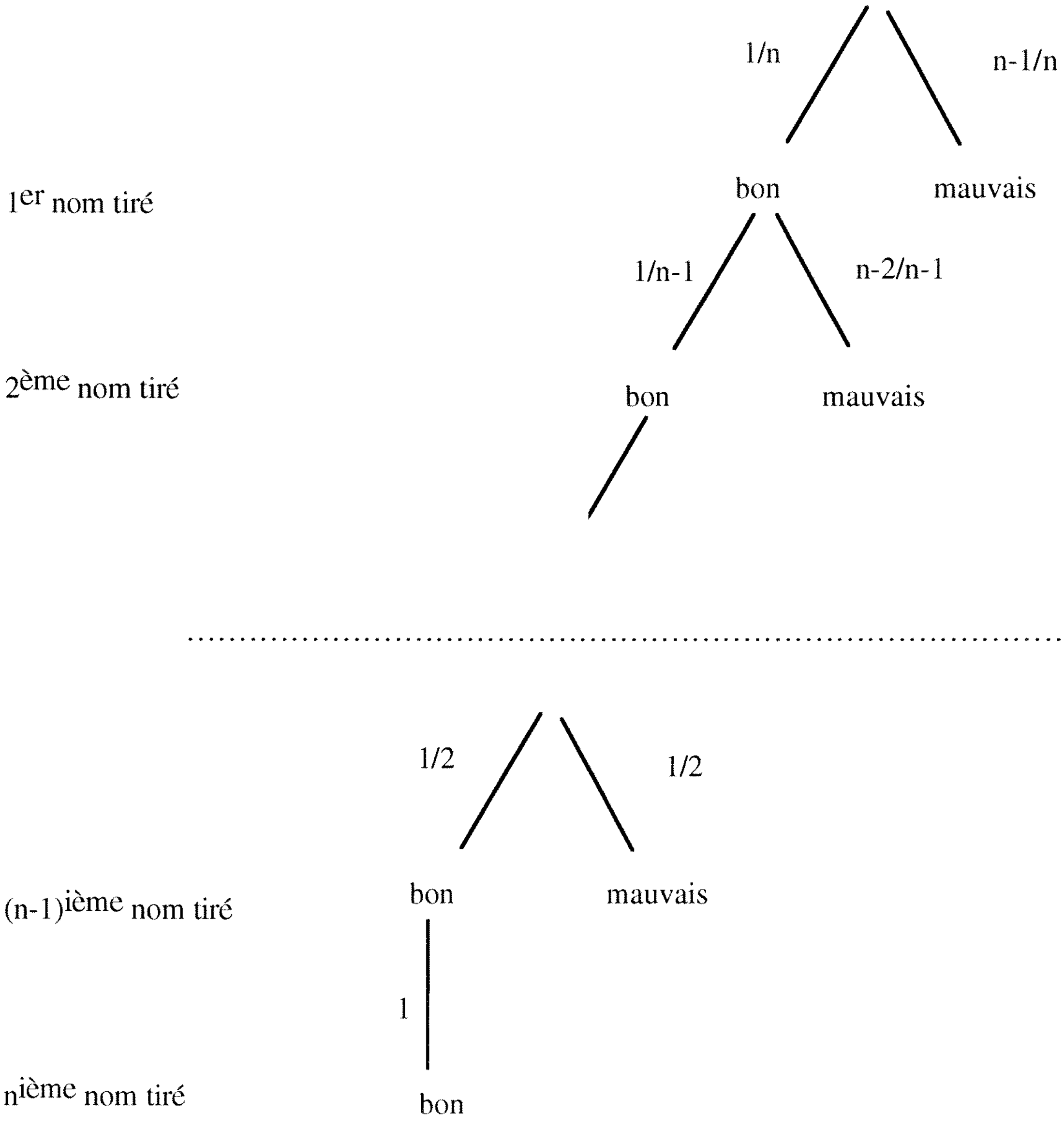
EXERCICE 3:

1)

Chaque "ordre de passage des candidates" est le résultat ordonné de n tirages successifs, sans remise, dans un ensemble de n éléments.

Soit A l'événement:"le tirage est celui de l'ordre alphabétique".

Arbre pour calculer P(A):



$$P(A)=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}\times\ldots\ldots\ldots\ldots\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{n!}$$

2)

$P(A)=\frac{1}{N}$ d'où, par comparaison $N=n!$

Le nombre de permutations de n éléments est n!

EXERCICE 4:

La liste des conférenciers d'une année donnée est le résultat ordonné de p tirages successifs, sans remise, dans un ensemble de n éléments.
Soit A l'événement: "la liste de 1994 est la même que celle de 1993".
L'arbre est similaire à celui de l'exercice 3 mais s'arrête après p tirages.

$$P(A)=\frac{1}{n}\times\frac{1}{n-1}\times\ldots\ldots\ldots\ldots\times\frac{1}{n-p+1}=\frac{1}{N} \qquad \text{d'où} \quad N=n(n-1)\ldots(n-p+1)=\frac{n!}{(n-p)!}$$

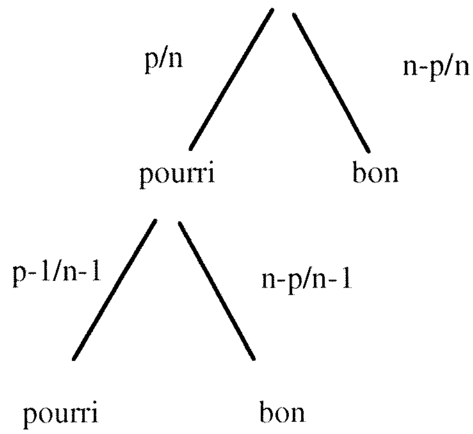
Le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est $\mathbf{\frac{n!}{(n-p)!}}$

EXERCICE 5:

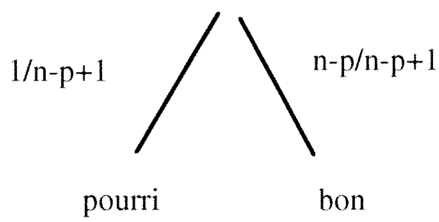
Soit A l'événement: "tous les oeufs utilisés sont pourris".
Arbre pour calculer P(A):

1^{er} oeuf utilisé

$2^{ème}$ oeuf utilisé



....



$p^{ième}$ oeuf utilisé

$$P(A)=\frac{p}{n}\times\frac{p-1}{n-1}\times\ldots\ldots\ldots\ldots\times\frac{1}{n-p+1}=\frac{1}{N} \qquad \text{d'où} \quad N=\frac{p\,(p-1)\ldots\times 1}{n\,(n-1)\ldots(n-p+1)}=\frac{n!}{(n-p)!}$$

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n est $\mathbf{\frac{n!}{(n-p)!}}$

EXERCICE 6:

1)

Soit A l'événement:"chacun retrouve sa chacune".

Pour chacun des couples la probabilité de se retrouver est $\frac{1}{2}$.

Pour les n couples la probabilité que tous se retrouvent est donc

$P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times ..... \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2^n}$

2)

Soit G l'ensemble des couples dont le garçon a choisi la statue de Saint-Valentin.

Soit F l'ensemble des couples dont la fille a choisi la statue de Saint-Valentin. Il y a N parties dans E donc N possibilités pour F.

P(A) est la probabilité pour que F égale G. Il y a une seule partie F favorable (c'est G). Donc $P(A)= \frac{1}{N}$.

Par comparaison on obtient $N=2^n$

Le nombre de parties d'un ensemble de n éléments est 2^n

IV

DU BON USAGE DES ARBRES

On se propose ici de présenter quelques exemples d'utilisations d'arbres et de faire apparaître quelques règles concernant leur emploi.

Lorsque l'on manipule des arbres en mathématique, on utilise un langage composé de termes empruntés tantôt à la botanique, tantôt à la généalogie. Ainsi, un arbre est formé de noeuds, qui peuvent avoir des descendants (ou fils). Les noeuds sans descendant sont appelés feuilles. Le seul noeud qui n'est le descendant d'aucun autre est appelé racine. Nous dessinerons nos arbres avec la racine en haut et les feuilles en bas, ce qui met à mal l'analogie botanique mais s'avère bien plus commode d'un point de vue typographique.

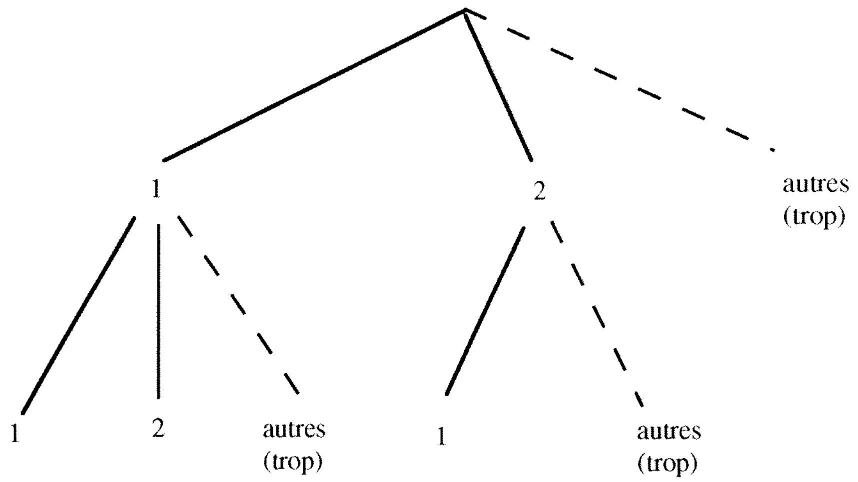
Des arbres pour dénombrer.

1) Premier exemple :

On lance un dé deux fois de suite. De combien de manières différentes peut-on obtenir une somme des résultats au plus égale à trois ?

Résultats possibles
pour le premier lancer

Résultats possibles
pour le second lancer



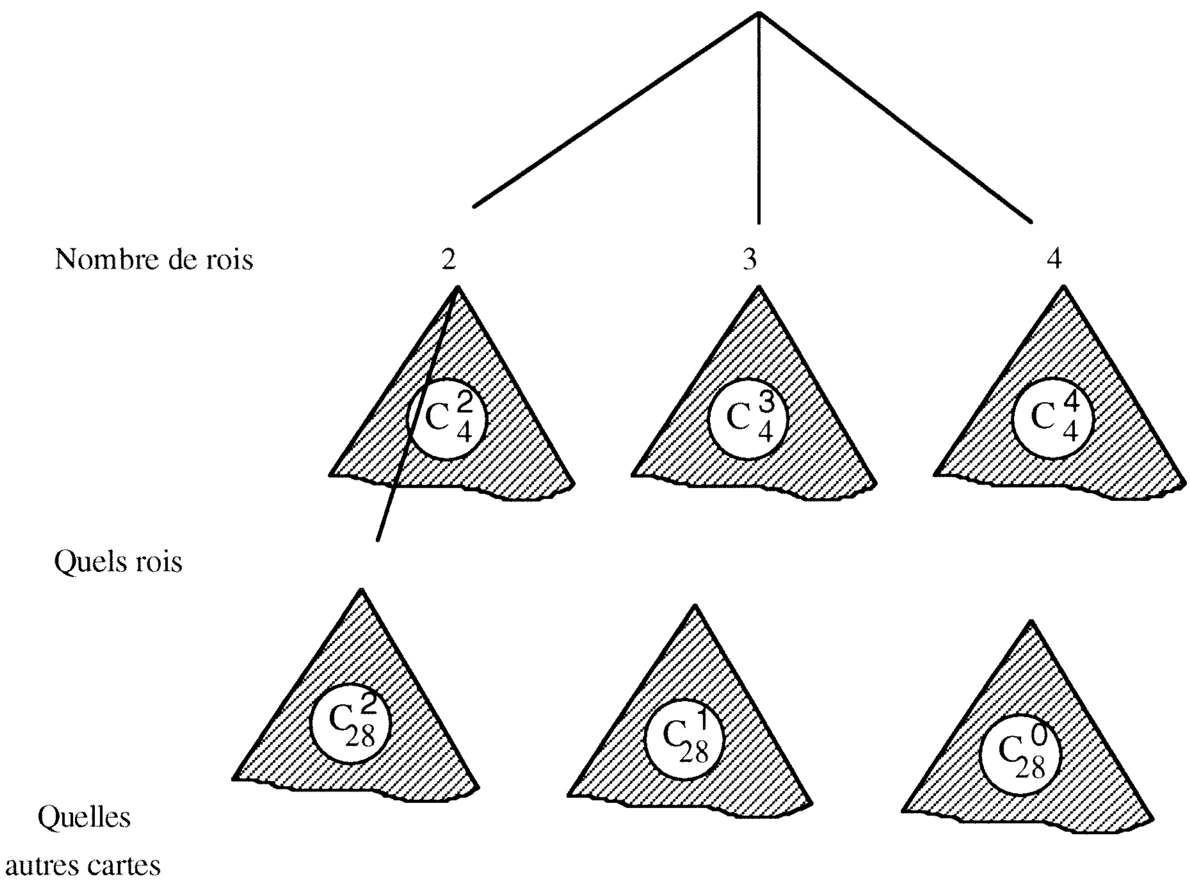
Le nombre cherché est le nombre de chemins allant de la racine de l'arbre à une feuille et représentés en traits pleins. Ces chemins sont au nombre de 3.

Notons qu'il s'agit ici de dénombrer un sous-ensemble de ExE où E = {1,2,3,4,5,6}.
De façon générale, un arbre est utile pour dénombrer un sous-ensemble d'un produit cartésien ExFxGx....C'est pourquoi on pourra l'utiliser lorsque les objets à dénombrer peuvent être symbolisés par des listes de résultats de choix successifs.

2) Deuxième exemple :

De combien de façons différentes peut-on choisir simultanément quatre cartes dans un jeu de 32 de façon à avoir au moins deux rois ?

a) On pourra là encore esquisser un arbre :



Le nombre cherché est le nombre de chemins allant de la racine à une feuille qui vaut :

$$C_4^2 \times C_{28}^2 + C_4^3 \times C_{28}^1 + C_4^4 \times C_{28}^0$$

car chacune des C_4^2 branches du second niveau se subdivise en C_{28}^2 branches au troisième niveau	car on réalise une partition de l'ensemble des chemins en : chemins issus du noeud "2 rois" chemins issus du noeud "3 rois" chemins issus du noeud "4 rois"
REGLE DU PRODUIT	REGLE DE LA SOMME

Remarquons que les mains à dénombrer sont des combinaisons du type {R♣,R♥, 10♠,8♣} et que le chemin correspondant de l'arbre ci-dessus se décrit plutôt par (2,{R♣,R♥},{10♠,8♣}).

b) Remarque :

L'utilisation d'un arbre à $\underbrace{C_4^2}_{\text{nombre de manières de choisir 2 rois parmi 4}} \times \underbrace{C_{30}^2}_{\text{nombre de manières de choisir deux autres cartes parmi les 30 restantes}}$ feuilles,

donne lieu à l'erreur classique qui consiste à compter plusieurs fois certains objets.

Un chemin de cet arbre peut se symboliser par un couple du type ({R♣,R♥},{10♠,8♣}) et on sera amené à compter trois fois les combinaisons avec trois rois telles que :

{R♣,R♥, R♠,8♣} qui correspond aux trois chemins de l'arbre décrits par :

({R♣,R♥},{R♠,8♣})
({R♣,R♠},{R♥,8♣})
({R♥, R♠},{R♣,8♣})

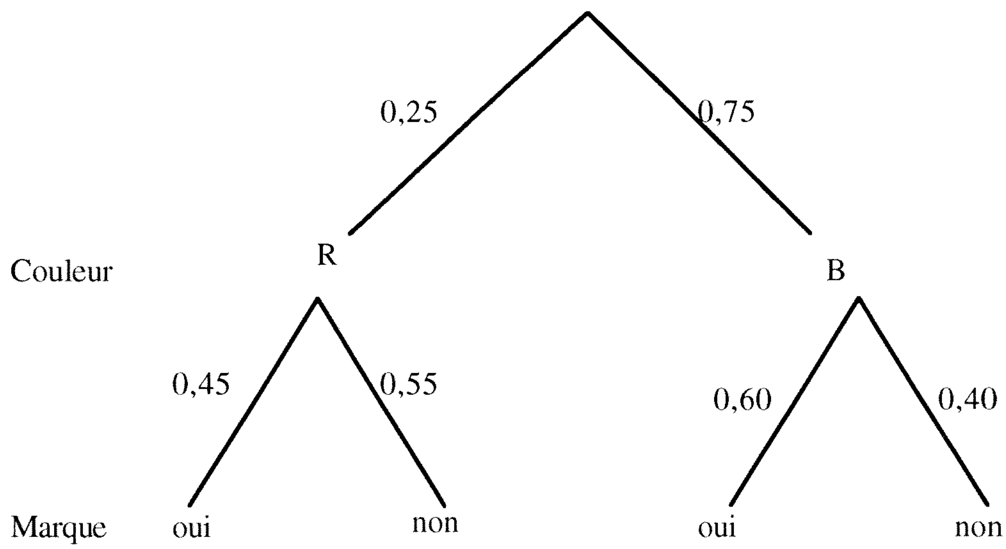
La combinaison contenant les quatre rois correspondra à 6 chemins de l'arbre qui s'avère donc inadapté ici.

Des arbres pondérés pour calculer des probabilités.

1) Premier exemple :

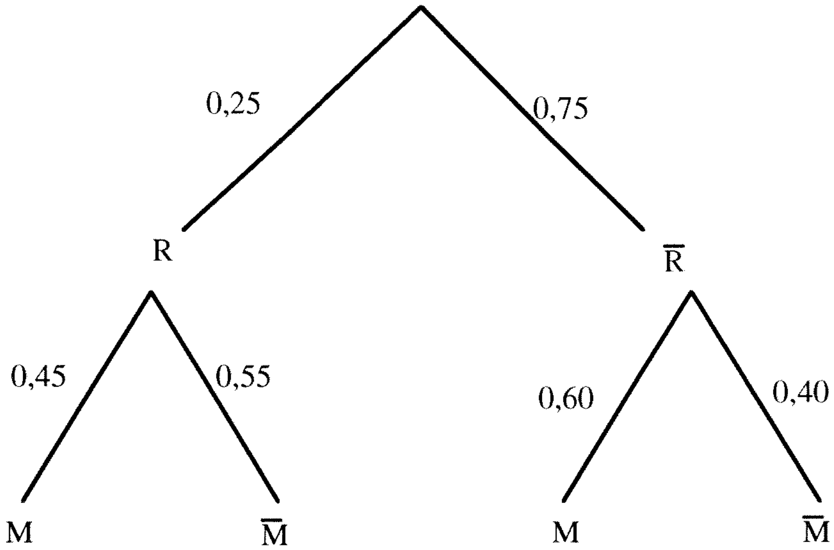
Soit la situation suivante :
Un magasin stocke des robes de deux couleurs seulement : rouges dans la proportion 25%, bleues dans la proportion 75%. Certaines de ces robes sont de la marque (prestigieuse) "M", les autres ne sont d' aucune marque.
On sait d'autre part que parmi les robes rouges, 45% portent la fameuse marque M et parmi les robes bleues, 60% portent la marque M.
On prend au hasard une robe dans le magasin.

Cette situation peut être représentée par l'arbre pondéré :



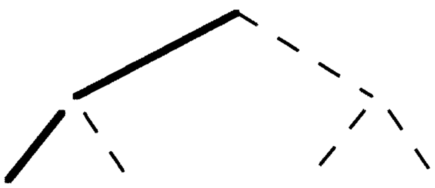
Important : la somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même noeud est égale à 1.

On pourra même noter R l'événement "la robe est rouge" et M l'événement "la robe est de marque M" et schématiser davantage l'arbre :

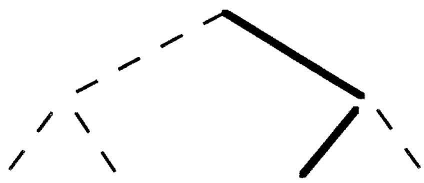


Ce qu'il faut alors bien noter c'est que l'événement M est représenté par un ensemble de deux chemins maximaux (= chemins allant de la racine à une feuille).

Premier chemin



Deuxième chemin

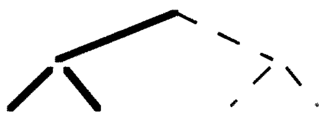


Bien que les feuilles de l'arbre portent les lettres M, $\overline{M}$, M, $\overline{M}$, elles représentent en fait les événements $R \cap M$, $R \cap \overline{M}$, $\overline{R} \cap M$, $\overline{R} \cap \overline{M}$ comme on peut le constater en suivant les chemins qui y mènent à partir de la racine.

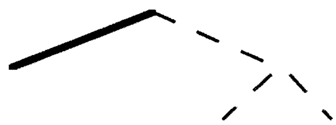
Les différents événements peuvent être représentés par des ensembles de chemins maximaux.

Exemples :

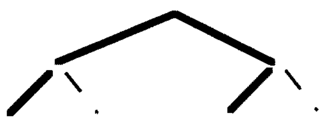
Evénement R



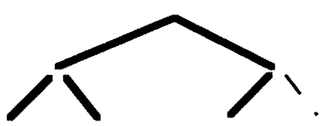
ou



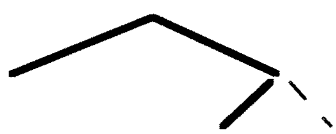
Evénement M



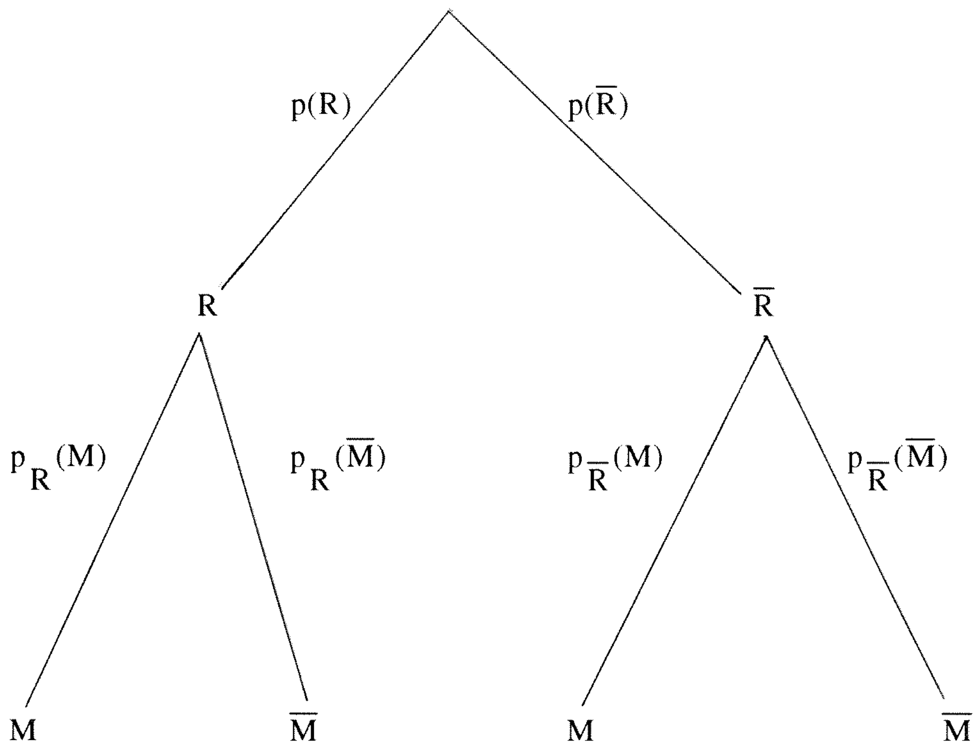
Evénement $R \cup M$



ou



Sur l'arbre figurent les probabilités suivantes :



$$p(R \cap M) = 0{,}25 \;\; \mathbf{x} \;\; 0{,}45$$

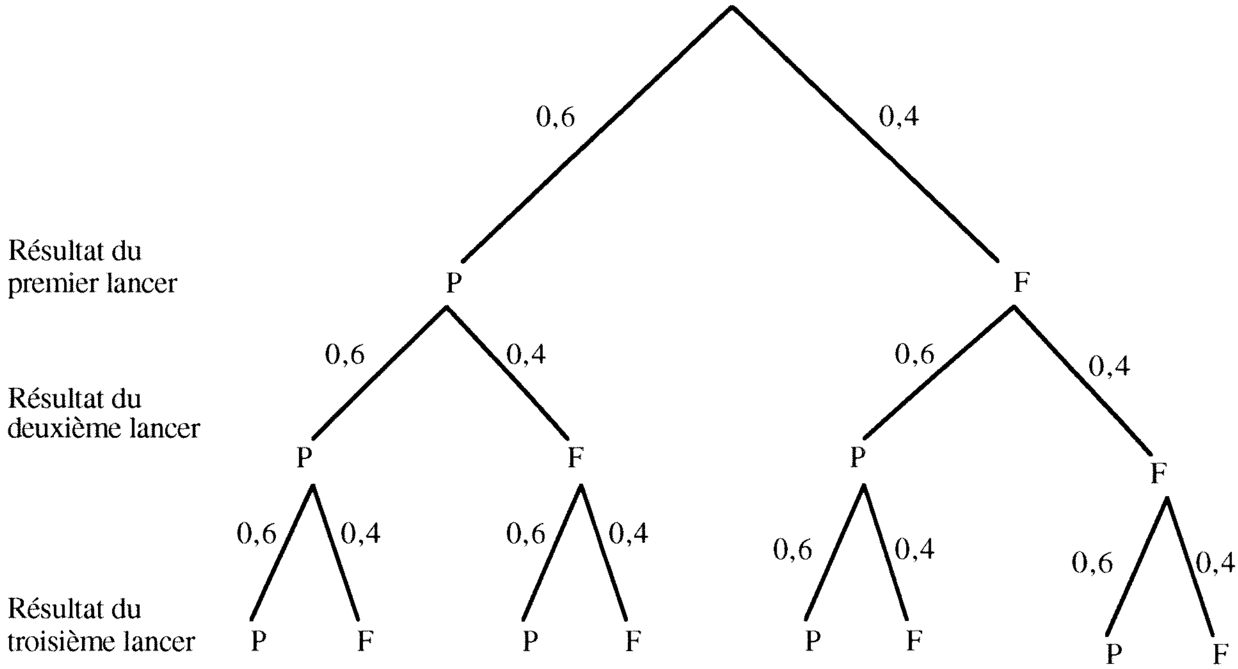
La probabilité d'un événement représenté par un chemin maximal est le produit des probabilités de chacune des branches qui composent le chemin. (REGLE DU PRODUIT)

$$p(M) = 0{,}25 \text{ x } 0{,}45 \; + \; 0{,}75 \text{ x } 0{,}60$$

La probabilité d'un événement représenté par un ensemble de plusieurs chemins maximaux est égale à la somme des probabilités correspondantes. (REGLE DE LA SOMME)

2) Deuxième exemple :

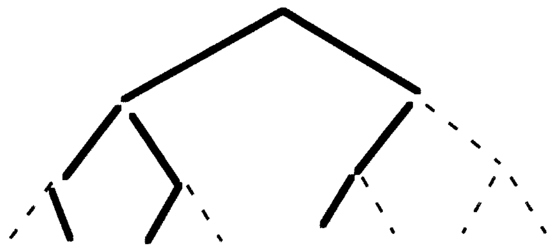
Une pièce est truquée de telle manière que la probabilité qu'elle tombe sur face est 0,4. On lance cette pièce trois fois de suite. Cette situation peut se représenter par l'arbre :



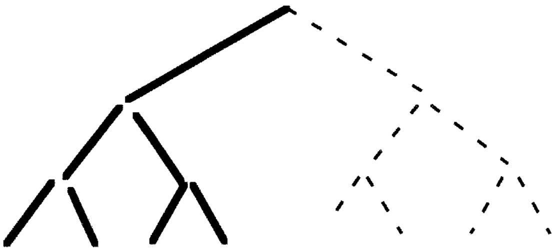
On notera qu'ici il vaut mieux éviter de noter P (ou F) un quelconque événement.

Cet arbre comporte huit chemins maximaux. Un événement quelconque sera représenté par un sous ensemble de chemins maximaux.

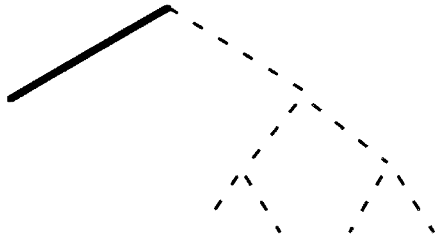
L'événement A : "obtenir deux fois pile" sera représenté par :



L'événement B : "obtenir pile au premier lancer" sera représenté par :



ou



Dans l'arbre de droite, dont certains chemins sont tronqués, les feuilles ne correspondent pas toutes à des événements élémentaires. C'est cet "élagage" qui permet à l'arbre d'être moins lourd que ne le serait l'énumération des éléments de Ω.

3) Troisième exemple, où l'arbre est bien moins "régulier".

Une urne A contient 5 boules blanches, 3 boules noires et 2 boules rouges.
Une urne B contient dix boules dont 8 portent le numéro 3, une le numéro 1 et une le numéro 2.
Une urne C contient 3 boules blanches et 2 boules rouges.

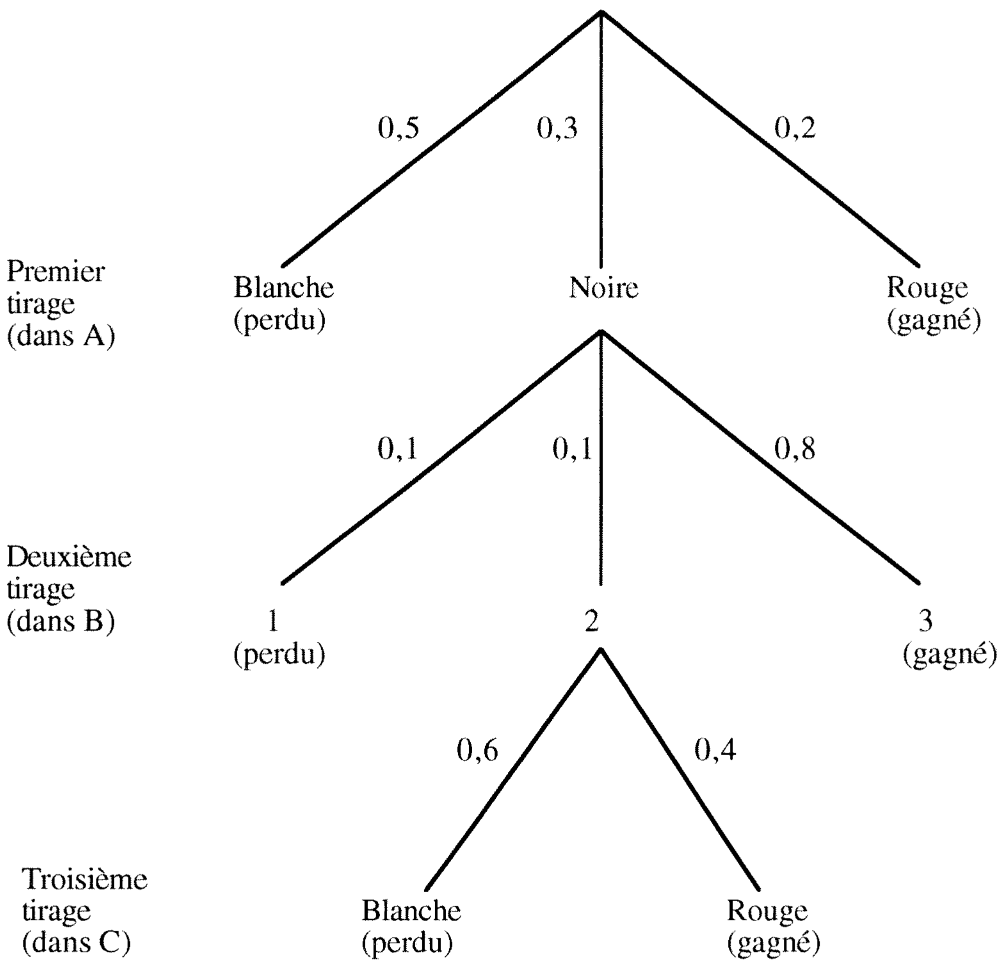
On tire une boule dans l'urne A.

- Si elle est blanche on a perdu.

- Si elle est rouge, on a gagné.

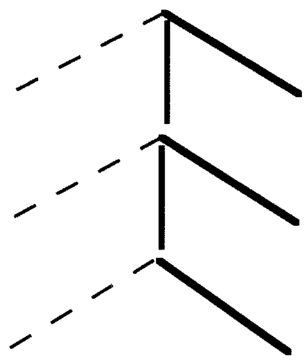
- Si elle est noire on tire une boule dans l'urne B.
  - Si la boule tirée de B porte le numéro 1 on a perdu.
  - Si elle porte le numéro 2 on tire une boule dans l'urne C, si elle est blanche on a perdu, si elle est rouge on a gagné.
  - Si elle porte le numéro trois, on a gagné.

Cette situation peut se décrire par l'arbre suivant:



Un événement quelconque correspond à un sous ensemble de l'ensemble des six chemins maximaux de cet arbre.

L'événement "gagné" correspond par exemple à :



La probabilité de cet événement se calcule facilement en utilisant les règles de la somme et du produit énoncées ci-dessus :

$$p(\text{"gagné"}) = 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}1 \times 0{,}4$$

Bibliographie

OUVRAGES

DROESBEKE Jean-Jacques. - *Eléments de statistiques.*-Editions ELIPPES (1988).-

ENCYLOPEDIAE UNIVERSALIS (1990).- (*Calcul des*) *Probalilités* : in corpus 18, pp. 1018-1028.

ENGEL Arthur.- *Les certitudes du hasard.*- Lyon, Editions Aléas (1990).-

ENGEL Arthur.- L'enseignement des probabilités et de la statistique.- Paris, Cédic (1975).-

FELLER William, *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. 1, John WILEY & Sons, New-York (1950).-

POLYA .- *Mathematics and plausible reasonnig* .- Princeton University Press.- Princeton, USA

BULLETIN DE L'APMEP

CAPRON Jean .- *Des probabilités au baccalauréat série D.- Paris Créteil Versailles (Juin 1989)* Bulletin de l'APMEP N° 375, Septembre 1990, p. 524.

CAPRON Jean et BOUCHER Françoise.- *L'Exercice de probabilités au bac D de Paris Créteil Versailles (Juin 1988)*, Bulletin de l'APMEP N° 372, février 1990, page 89.

HENNEQUIN Paul Louis.- *Courrier des Lecteurs- Indépendance et probabilité conditionnelle* Bulletin de l'APMEP N° 376, Décembre 1990, p. 669-670.

PARZYSZ Bernard.- *Un outil probabiliste sous-estimé : l'arbre probabiliste,* Bulletin de l'APMEP, N° 372, fév. 1990.

PUBLICATIONS DES I.R.E.M.

GROUPE INTER-I.R.E.M. "EPISTEMOLOGIE ET HISTOIRE".- *Mathématiques au fil des âges*.- Paris,- Gauthier-Villars (1987).

I.R.E.M. DE PARIS VII.- *Mathématiques, approches par des textes historiques* .- (Tome 1 : 1986 - Tome 2 : 1990).-

I.R.E.M DE STRASBOURG.-*Enseigner les probabilités en classe de première,* 1992, (Brochure S 151).

HENRY Annie et Michel.- *L'enseignement des probabilités dans le programme de première* , Repères I.R.E.M. N°6 (janv. 1992), pp. 27-53.-

MAA Abderrazzak.- *Pour une approche "fréquentielle" des probabilités.*-, "L'Ouvert" (Journal de l'A.P.M.E.P. d'Alsace et de l'I.R.E.M. de Strasbourg) N° 65 (déc. 1991),pp. 38-44.

PARSYSZ Bernard .- *Des statistiques aux probabilités : exploitons les arbres.*- Repères I.R.E.M. N° 10, pp. 91 - 104.

ARTICLES

MAURY Sylvette.- *Influence de la question dans une épreuve relative à la notion d'indépendance.*- in : “Educational studies in mathematics”, Vol. 16, pp. 283-301.-

STEINBRING Heinz.- *L'indépendance stochastique*.- in “Recherche en Didactique des Mathématiques”, Vol. 7/3, 1986, pp.5-50.

THESE

TOTOHASINA André.- *Méthode implicative en analyse de données et application à l'analyse de conceptions d'étudiants sur la notion de probabilité conditionnelle.*- Thèse de Doctorat - Université de Rennes 1, 1992.

Table des matières

Titre : Enseigner les probabilités en classe de Terminale

Auteurs : Claire DUPUIS, André BASTIAN, Jean-Claude KEYLING, Bernard KOCH, Dominique PERNOUX, Marie-Luce PORT, Suzette ROUSSET-BERT, Christine UNDREINER-BACH

Mots-clés : Enseignement-Probabilités

Résumé : Cette brochure est à la fois une suite et un complément de celle que nous avons publiée en 1992 sur l'enseignement des probabilités en classe de première.
Nous proposons des situations introductives pour les notions de probabilité conditionnelle et d'indépendance, de variable aléatoire et d'espérance mathématique, nos réflexions sur la notion d'indépendance et sur les fameux "évènements conditionnels" et bien entendu des exercices et travaux pratiques.
Les dénombrements sont présentés sous deux éclairages différents. Le dernier chapitre est la conclusion, peut-être provisoire, de nos discussions au sujet de l'outil “arbres”.

Public concerné : Professeurs de lycées.

Editeur : I. R. E. M. de Strasbourg (brochure S. 157)