UNIVERSITE
LOUIS PASTEUR
STRASBOURG

ENSEIGNER AUTREMENT AU LYCEE

ou :

Thèmes cherchent programmes désespérément

par le groupe lycée

Gravure sur bois ornant la Margarita Phylosophica de Gregorius Reisch (Freiburg, 1503) : l'Arithmétique, symbolisée par la femme debout au centre, semble trancher le débat au sujet de la querelle entre "Abacistes" et "Algoristes" : elle regarde en effet dans la direction du calculateur usant des chiffres "arabes" (chiffres dont sa robe est d'ailleurs ornée). Museum of the History of Science (Oxford).

I.R.E.M.
10, rue du Général Zimmer
67084 STRASBOURG CEDEX
Tél. : 88 41 64 40
Fax : 88 41 64 49

1994

PREFACE

Vous trouverez dans cette brochure quelques-uns des thèmes de la liste qui devait être proposée aux élèves de première L (partie obligatoire) dés la rentrée de 1993. Ce programme n'a jamais été mis en application et "remplacé" par une partie mathématique (à contenu plus traditionnel) intégrée à l'*enseignement scientifique*.

Nous déplorons la disparition de cet espace de liberté qui aurait permis de présenter à des élèves littéraires, souvent réfractaires aux mathématiques traditionnelles, des problèmes de mathématiques que tout citoyen peut être amené à se poser. Que les programmes l'ignorent, des questions mathématiques n'en interpellent pas moins l'honnête homme du vingtième siècle.

Comprendre sa facture d'électricité, ou de téléphone (de toute manière il faut la payer !), estimer ses chances de gains à un jeu (c'est facile et çà peut rapporter gros !), déceler une structure géométrique dans une oeuvre d'art (elle n'en est pas moins belle !), observer le ciel (à la fois romantique et mathématique !) compter comme les grecs ou en système binaire (c'est entrevoir les problèmes de numération)sont des activités susceptibles de faire des mathématiques autrement et de motiver jusqu'aux plus irréductibles non-scientifiques.

Les thèmes proposés ici ne se rattachent donc pas à un programme, mais ils permettent non seulement des activités mathématiques traditionnelles mais aussi l'exploitation de documents, des recherches bibliographiques et historiques et la constitution de dossiers. Il nous a semblé que le travail fourni méritait cependant une diffusion, car il peut être utilisé en module et en travaux dirigés dans différentes classes de lycée, scientifiques, économiques ou littéraires. Nous sommes persuadés que nos collègues sauront extraire de cette brochure des idées dont ils infléchiront la forme pour en proposer une version adaptée à leurs élèves.

Ce travail a été effectué par le groupe lycée de l'IREM de Strasbourg qui comprend: Claire CHAUVIERE, Claudine KAHN, Bernard KOCH, Gérard NAFFZGER, Anne-Marie RIGOURD et Dominique WEIL.

L'équipe rédactrice tient à remercier Michel EMERY, Eliane LEGRAND, Jean LEFORT et Jean-Marie PONCELET de leur participation et Madame PETIT pour la frappe.

Ce travail a pu être réalisé grâce au soutien de la DLC et de la MAFPEN.

Table des matières

LOISIRS

Ce thème propose trois activités concrètes qui concernent vos loisirs.

Dans "**Voyager**" vous vous procurerez les documents nécessaires dans une agence de voyage, par exemple, pour étudier dans deux situations la façon la plus économique de voyager.

" **Cinéma**" vous propose de comprendre sur deux exemples de cartes le calcul du prix d'une place.

"**Vidéo Games**" est une lecture critique d'un article de presse.

VOYAGER

Comment voyager au meilleur prix ?

A. Julien a réussi le concours d'entrée, à une grande école de Toulouse. Il décide de revenir passer tous les week-ends auprès de sa famille, à Paris.

Quelle solution choisir : le train ou l'avion?

Procurez-vous les documents nécessaires (S.N.C.F., Air Inter, agences de voyage..)pour trouver le moyen le plus avantageux. N'oubliez pas les tarifs "Abonnements","Jeunes", "Fins de semaine"...

B. Un couple parisien et ses deux enfants envisagent de passer trois journées entières pendant les vacances de Pâques, à Rome. Vont-ils s'y rendre en voiture, en train ou en avion ?

1° Documentez-vous auprès d'une agence de voyage pour évaluer le coût de tous les moyens de transport possibles.

2° Existe-il des formules "Famille" ou "Congé annuel" avantageuses ?

3° Consultez les horaires pour calculer le nombre de nuits passées en Italie.

4° Renseignez-vous sur les tarifs des hôtels, sur les forfaits train-hôtel et avion-hôtel pour affiner vos conclusions.

C. Des vols à tous les prix

1° Vérifiez grâce à une carte de géographie les distances annoncées dans l'article de la page suivante.

2° Quel est le prix moyen pour chacun de ces vols pour une distance de 100 km ?

3° Que pensez-vous du commentaire de la revue ?

Des vols à tous les prix	
Distances	Prix
400 kilomètres Paris-Lyon Paris-Genève Paris-Hambourg	 735 F 1 525 F 978 F
600 kilomètres Paris-Toulouse Paris-Manchester Londres-Glasgow	 620 F 2 500 F 1 022 F
1000 kilomètres Paris-Ajaccio Paris-Madrid Milan-Catane	 1 130 F 2 750 F 1 215 F

Prix moyen des vols (aller simple) en 1991

Les vols domestiques restent systématiquement moins chers que les vols intra-européens. Il suffit de passer une frontière pour que, à distance égale, les prix soient doublés.

Capital novembre 92

CINEMA

A. Pour la carte Pathé :

. Pour un porteur de la carte, quel est le coût d'une place de cinéma lors des dix premières entrées ? S'il utilise au maximum sa carte, quel est le prix moyen d'une place de cinéma ? Peut-il profiter de cet avantage, s'il se rend au cinéma une fois par semaine pendant la période de dix-huit mois ?

. Deux jeunes possèdent la carte Jeune. Quel est le prix d'une place avec cette carte ? Combien de fois peuvent-ils se rendre au cinéma pendant une période de dix-huit mois avec une seule carte, s'ils veulent l'utiliser au maximum ?

B. Pour la carte U.G.C.

1° Quel est le prix d'une place avec la carte Privilège 1, avec la carte Privilège 2 ?

2° Comparez les avantages des deux cartes pour une personne qui va quatre fois par an au cinéma, pour une personne qui va toutes les semaines au cinéma ?

3° Reprenez la question 2°), dans le cas où ce sont deux jeunes qui se rendent au cinéma ensemble.

Cinéma

Pathé

D.R.

Nombre de porteurs : 250 000.
Prix : 320 francs pour dix entrées, 300 francs ensuite pour créditer la carte dans les salles Pathé. Elle est rechargeable sept fois durant dix-huit mois.
Avantages : pour les moins de 26 ans, une carte Jeune donne droit à cinq séances pour 130 francs, valable un an, pour deux personnes, et rechargeable dix-huit fois. Tél. : (1) 49 24 43 31.

UGC

D.R.

Nombre de porteurs : 272 000.
Prix : deux systèmes différents. La carte UGC Privilège 1 donne droit à quatre places pour 112 francs, à utiliser dans les deux mois suivant la première séance. La carte Privilège 2 crédite six places pour 168 francs, valable pour deux personnes pendant six mois.
Tél. : (1) 46 40 44 00.

Notre avis : plus chère, la carte Pathé demeure cependant la plus facile à gérer avec une limite de temps moins contraignante.

VIDEO GAMES

Pour toute l'activité, utilisez le document de la page suivante extrait de la revue CAPITAL de novembre 92

A. Evaluez la somme dépensée par les Français pour l'achat de jouets.

B. La répartition est représentée par un diagramme circulaire. Proposez un autre mode de représentation comparez la lisibilité.

C. Comment peut-on interpréter le graphique "des ventes qui explosent" ?
Y a-t-il un lien avec le diagramme circulaire ?

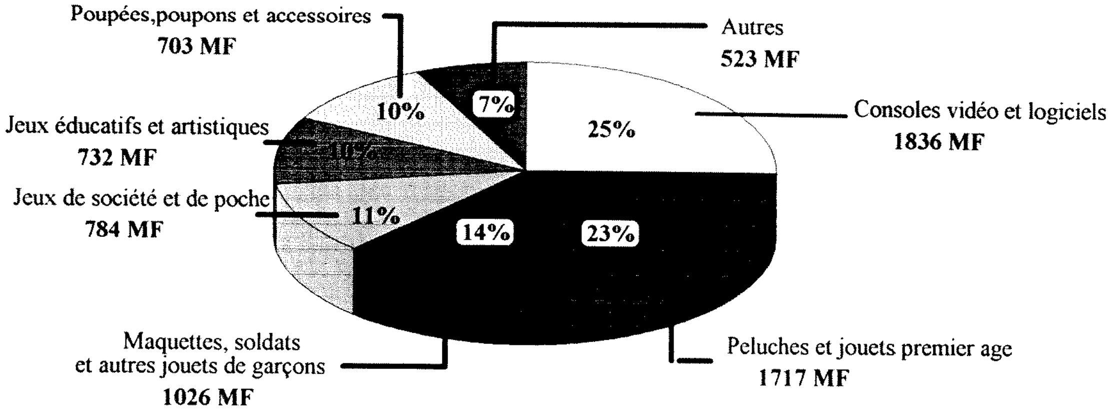
D. Cet article date de novembre 1992. Pouvez-vous faire le point avec la situation du jouet au moment ?

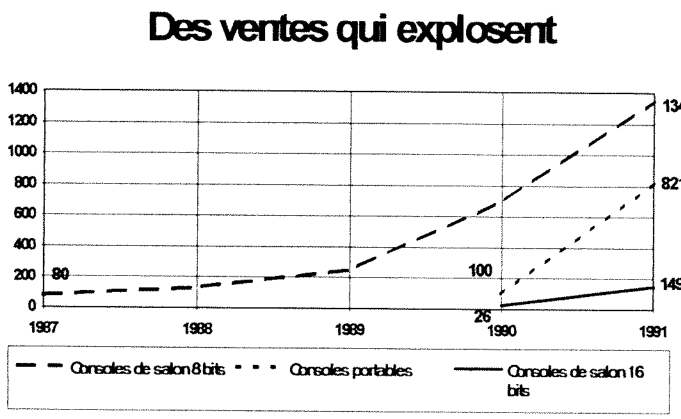
E. A la lecture de ce paragraphe Bruno dit : "Les capacités graphiques et sonores de la Super Nintendo (console 16 bits de Nintendo) sont plus élevées que celles de la Mégadrive (console 16 bits de Sega). La résolution graphique de la Mégadrive est de 320 x 224 pixels en 64 couleurs parmi une palette de 512 couleurs. Par ailleurs, la Super Nintendo peut afficher un écran de 512 x 448 pixels en 256 couleurs à choisir dans une palette de 32 768 couleur. Je préfère la Super Nintendo".

Mathieu réplique :" Je suis d'accord avec toi, la puissance de la Super Nintendo est supérieure à celle de la Mégadrive, mais la logithèque de la Mégadrive est bien plus importante".

Commentez ces deux affirmations.

Les jeux vidéo : un quart du marché du jouet





Le marché français des jeux vidéo, après des débuts en fanfare, avait périclité au milieu des années 80. L'apparition de consoles plus performantes et de jeux plus stimulants ont fait de nouveau exploser ce créneau (graphique ci-contre). L'an dernier, il a représenté un quart des ventes de jouets en France (ci-dessus). Il est tenu à 95% par Nintendo et Séga. Atari et Nec n'ont pas su mettre en valeur leurs produits, pourtant parfois meilleurs.

RESTONS BRANCHES

Encore faut-il savoir comment !

En effet dans certains cas le type d'abonnement d'électricité choisi peut amener de substantielles économies !

La première activité propose la vérification d'une facture d'électricité.

Dans la seconde il s'agira de mieux comprendre un tableau fourni par l'Electricité de Strasbourg

La troisième activité traite de la comparaison des deux types d'abonnement les plus répandus en matière d'électricité.

COMPRENDRE UNE FACTURE

Quel est le prix de l'électricité ?

1° Cherchez le Code Tarif figurant sur la facture (Document 1). En utilisant le tableau général (Document 2), déduisez la puissance souscrite et l'option choisie par Mlle Jeanne.

2° **a)** Vérifiez le détail de la facturation Hors Taxes.

b) Vérifiez que le montant des taxes (colonnes 9 et 10) a bien été correctement calculé sur la facture (utilisez l'encadré qui donne les pourcentages à appliquer pour calculer les taxes).

c) Constatez qu'en majorant le montant H.T. des consommations de 22,3952 % et l'abonnement de 9,2952 %, on obtient le même total T.T.C.

3°Justifiez les résultats du 2° c). Pour cela, on appellera C le montant de la consommation Hors Taxes et A le montant de l'abonnement Hors Taxes pour deux mois, et on calculera le montant T.T.C. en fonction de C et de A.

Document 1

ELECTRICITE DE STRASBOURG - S.A. au capital de 302.732.100 F ... 67007 STRASBOURG CEDEX - C.C.P. Strasbourg 1150 K R.C.S. Strasbourg B 558 501 912

1	2	3	4		5				6	7	8	9	10	11
4 derniers chiffres du numéro du compteur	Code tarif	RELEVE DES COMPTEURS Ancien	Nouveau	Consommations	REPARTITION DES CONSOMMATIONS 1ère tranche kWh	prix en cts	2ème tranche kWh	prix en cts	DETAIL DE LA FACTURATION HORS TAXES Montant des consommations F cts	Abonnement F cts	Disjoncteur et divers F cts	DETAIL DES TAXES Collectivités locales F cts	T.V.A. payée sur débits F cts	TOTAL toutes taxes comprises F cts
1150	054	19494		257	257	5766			148186	6106		670	3217	24812

VOTRE INTERLOCUTEUR : AGENCE DE STRASBOURG TEL. 88.75.55.55

Strasbourg, le 140593 — 600793 400 — 18600550 13 25 — 148186 — 6106 — 670 — 3217 — -12

Prochain passage du releveur

CETTE FACTURE **INTERMEDIAIRE** CONCERNE VOTRE CONSOMMATION **AU 14.05.93**

ET LA REDEVANCE D'ABONNEMENT **DU 14.03.93 AU 14.05.93**

Nous vous remercions de bien vouloir payer la somme due avant le **24 MAI 1993** — **24800**

Les montants précédés du signe – sont en votre faveur

Document 2

PRIX DE H.T. DE L' ELECTRICITE AU 25 FEVRIER 1992

'Garantir aux consommateurs une baisse moyenne du prix de l'electricité de 1,5 % par an par rapport au niveau général des prix est un des objectifs du ontrat de plan signé avec l'Etat".

ISJONCTEUR			OPTION DE BASE			OPTION AVEC HEURES CREUSES(8 H PAR 24 H)				OPTION EJP (EFFACEMENT JOURS DE POINTE)			
EGLAGE Ampères		PUISSANCE SOUSCRITE	CODE TARIF	REDEVANCE d'ABONNEMENT	PRIX DE L'ENERGIE	CODE TARIF	REDEVANCE D'ABONNEMENT	PRIX DE L'ENERGIE c/kWh		CODE TARIF	REDEVANCE d'ABONNEMENT	PRIX DE L'ENERGIE c/kWh	
Ionophase	TRIPHASE	en kW		F par mois	C/kWh	*	F par mois	heures pleines	heures creuses	*	F/mois	heures normales	H.de pointe mobile
15	-	3	petites fournitures 053	11,96	66,56	-	-	-	-	-	-	-	-
30	10	6	054	30,91	56,89	064/065	58,13	56,89	32,29	-	-	-	-
45	15	9	055	59,73	56,89	030/031	97,33	56,89	32,29	-	-	-	-
60	20	12	043	88,14	56,89	044/045	137,47	56,89	32,29	120/121	58,13	36,10	303,51
75	25	15	046	116,55	56,89	032/033	177,61	56,89	32,29	122/123	58,13	36,10	303,51
90	30	18	047	144,96	56,89	034/035	217,75	56,89	32,29	124/125	58,13	36,10	303,51
-	40	24	-	-	-	036/037	334,21	56,89	32,29	-	-	-	-
-	50	30	-	-	-	038/039	450,67	56,89	32,29	-	-	-	-
-	60	36	-	-	-	040/041	567,13	56,89	32,29	130/131	217,75	36,10	303,51

* Ce code figure sur votre facture

PTIONS TARIFAIRES

'option de base** comprend une redevance d'abonnement en fonction de la puissance souscrite et un prix nique de la consommation.

'**option heures creuses** permet, pour un léger supplément d'abonnement, de bénéficier durant 8 h sur 24 h(33 % du temps) u choix du distributeur, d'un prix réduit pour la consommation enregistrée dans cette tranche horaire (heures creuses). ette version convient particulièrement à des usages tels que production d'eau chaude et chauffage.

'**option Effacement Jours de Pointe** (EJP) comprend :
une redevance d'abonnement à prix réduit
deux prix pour la consommation : le tarif "heures de pointe mobile" et le tarif "heures normales" (proche du tarif heures creuses)
e tarif "heures de pointe mobile" correspond aux périodes de pointe (22 jours laissés au choix du distributeur entre le 1er novembre t le 31 mars). Ces périodes sont d'une durée de 18 heures chacune, de 7 h 00 le matin à 1 h 00 du matin le lendemain, soit au total 96 heures (4,5 % du temps).

Le tarif "heures normales" correspond au reste de l'année, soit 8364 heures (95,5 % du temps).
Le distributeur assure par télécommande le passage des heures normales aux heures chargées. Celui-ci est annoncé par un présignal entre 6 h 30 et 7 h 00. Le client a la possibilité "d'effacer" automatiquement, pendant les heures chargées, ses appareils de chauffage et de production d'eau chaude fonctionnant à l'életricité.

Exemple de choix d'abonnement :

La puissance à souscrire détermine votre redevance d'abonnement. Cette puissance dépend de votre équipement électrique et de ses conditions d'utilisation, voir-cidessous des exemples pour 3 - 6 - 9 kW.

CHOISIR SA PUISSANCE

A. Le petit lexique de l'electricité

A partir de divers documents (dictionnaires, encyclopédies, documents publicitaires de l'E.D.F., manuels scolaires ou ouvrages de vulgarisation scientifique, par exemple), recherchez les définitions de : tension, intensité, puissance et consommation électriques.

B. Les puissances

A partir du Document 2 :

1° Combien de puissances différentes un abonné peut-il souscrire ?

2° Qu'est-ce qui détermine le choix de la puissance souscrite ?

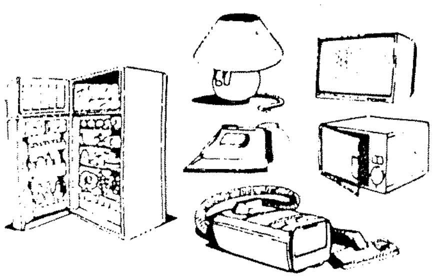
3° Après avoir choisi la puissance qu'il va souscrire, entre combien d'options tarifaires l'abonné a-t-il le choix ?

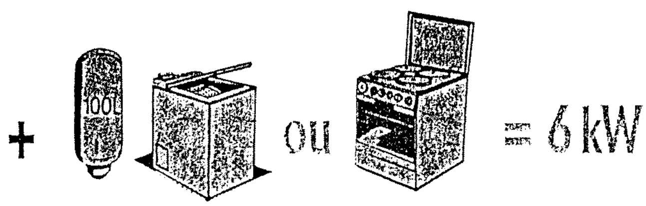
4° Pendant une période de deux mois, un consommateur ayant souscrit un abonnement pour une puissance de 9 kWh.a utilisé 738 kWh Calculez le montant hors taxes de sa facture, sachant qu'il a choisi l'option de base.

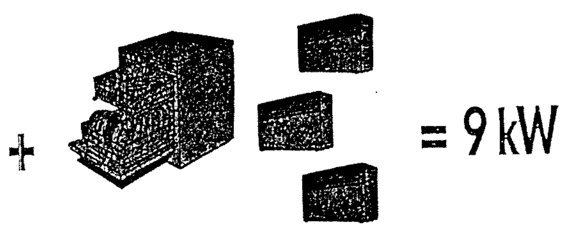
5° Pendant cette même période, un deuxième consommateur dont le code tarif figurant sur sa facture est 030/031 a consommé 272 kWh en "heures pleines" et 466 en "heures creuses". Calculez le montant hors taxes de sa facture.

6° Reprendre les exemples des questions 2 et 3 afin de calculer le montant T.T.C. de ces factures. (Utilisez les mêmes taux de taxes que dans "Comprendre une facture")

7° En utilisant le résultat de"Comprendre une facture" 2 c), établissez un nouveau tableau, analogue à celui du Document 2, mais dans lequel figurent les prix T.T.C.







LES " HEURES CREUSES"

A. Options de base et option avec "heures creuses"

Dans cette partie on considérera que la puissance souscrite est de 9 kW.

1° Un consommateur estime sa consommation en électricité à 500 kWh en deux mois. Il hésite à choisir un abonnement de base ou avec option "heures creuses".

a) Calculez le montant T.T.C. de sa facture, s'il choisit l'option de base.

b) S'il choisit l'option "heures creuses" : soit x sa consommation pendant les heures creuses, exprimez en fonction de x le montant T.T.C. de sa facture.

c) Quelle doit être sa consommation pendant les heures creuses pour que les deux tarifs soient équivalents ? Dans quels cas est-il plus intéressant de choisir la deuxième option ?

2° Reprendre la question précédente avec une consommation de 300 kWh, de 400 kWh, puis de 600 kWh.

Expliquez pourquoi, plus la consommation est élevée, plus l'option "heures creuses" est intéressante.

B. Un peu de pub ...

"Garantir aux consommateurs une baisse moyenne du prix de l'électricité de 1,5 % par an par rapport au niveau général des prix est un des objectifs du contrat de plan signé avec l'Etat."

Cette phrase située juste au-dessus du Document 2 signifie-t-elle que le prix de l'électricité va baisser dans les années à venir ?

QUAND LE JOUR BAISSE, LE TELEPHONE AUSSI !

Nous nous proposons d'analyser des documents extraits de l'annuaire du téléphone (Bas-Rhin 92). Ils nous permettent de mieux comprendre le principe de la facturation selon la distance, le moment de l'appel et sa durée.

Quatre activités sont proposées :

- "**Epluchons la facture** ": c'est l' analyse sur une facture détaillée (document 1) des communications locales d'un abonné strasbourgeois.

- "**Communications à grande distance"** reprend la même facture, mais étudie les communications hors région et à l'étranger, de cet abonné

- "**Corinne et le téléphone"**, où vous apprendrez à bien choisir votre heure pour téléphoner.

- "**Des tableaux aux graphiques"** où vous représenterez le coût d'une communication.

EPLUCHONS LA FACTURE

1° Dans la facture (Document 1), relevez les huit communications qui ont coûté 1,845 F (H.T.). Classez-les dans un tableau, en indiquant leur lieu de destination, leur date et leur durée.

2° Quel est le nombre d'unités télécom" (U.T.) correspondant au montant de 1,845F? (utilisez le Document 2).

3° Communications locales (utilisez les Documents 2 et 3).
Nous allons étudier les huit communications relevées ci-dessus.

a) Sachant que la facture donnée en Document 1 est celle d'un abonné strasbourgeois, expliquez pourquoi les communications du 16 juin, du 11 juillet et du 3 août ont été passées en période rouge.

b) Pourquoi est-on sûr que le 3 août n'était pas un dimanche?

c) Quel tarif a été appliqué lors de l'appel du 10 juin (18 h 27)?

Répondez à la même question pour l'appel du 30 juillet, sachant que ce jour était un jeudi.

ANNEXE A LA FACTURE

FRANCE TELECOM

DOCUMENT 1

Nº d'appel	Nº de compte	Relevé	Date facture
88	88	C4	10/08/92

M 841 1 FEUILLET : 1

DETAIL DES COMMUNICATIONS DE LA LIGNE 88232595

Date	Debut appel hh mn	DIRECTION DEMANDEE	DUREE hh mn ss	TARIF	MONTANT hors taxe
		MOIS DE JUIN			
03	18:05	8328MEURT.MOS	0039	A	1,230
05	12:51	3614TELETEL 2	0254		1,230
10	18:27	8835STRASBOUR	1923		1,845
12	10:52	194481806ROYAUME U	2437		92,865
13	21:29	8835STRASBOUR	4807		2,460
15	10:57	8835STRASBOUR	3106		3,690
16	09:10	8835STRASBOUR	1730		1,845
18	09:25	3699HORL.PARL	0014		0,615
22	12:59	8328MEURT.MOS	0058	A	1,845
23	07:12	3699HORL.PARL	0009		0,615
24	14:55	8835STRASBOUR	0910		1,230
25	16:18	4934SEVRES.DX	0409		9,225
28	14:01	1614074PARIS	1630	A	18,450
28	16:41	8893HAGUENAU	3215	A	8,610
30	12:30	3699HORL.PARL	0006		0,615
		MOIS DE JUILLET			
02	19:09	8328MEURT.MOS	0420	A	6,765
03	18:04	6123GARONNE.H	0529	A	8,610
09	12:47	1614583PARIS	1047	A	16,605
09	19:30	8835STRASBOUR	1402		1,230
13	10:05	3614TELETEL 2	0302		1,230
16	12:28	8328MEURT.MOS	0553	*	10,455
16	17:02	6123GARONNE.H	0410		9,225
17	12:09	8835STRASBOUR	0633		1,230
20	11:55	1614209PARIS	0048		1,845
21	09:37	1614209PARIS	0244		6,150
23	19:38	194978412ALLEMAGNE	0609		10,455
23	20:26	1614793HTS.SEINE	0741	A	12,300
30	19:27	1614793HTS.SEINE	1246	A	19,680
31	20:50	8328MEURT.MOS	0834	A	13,530
		MOIS DE AOUT			
01	13:11	1614672VAL.MARNE	0704	A	11,070
02	19:32	1613952YVELINES	0817	A	9,225
04	12:00	1614672VAL.MARNE	0403		9,225
04	12:30	4745INDRE.LOI	0422	A	6,765

Date	Debut appel hh mn	DIRECTION DEMANDEE	DUREE hh mn ss	TARIF	MONTANT hors taxe
04	15:28	1614672VAL.MARNE	0603		13,530
09	21:22	8835STRASBOUR	4036		2,460
11	20:28	8835STRASBOUR	2850		2,460
12	14:34	8835STRASBOUR	13029		9,840
14	19:56	8328MEURT.MOS	0124	A	1,845
15	19:04	8861STRASBOUR	1021		1,230
17	20:57	2226SOMME	0920	A	14,760
19	21:58	1614793HTS.SEINE	1529	A	17,220
22	19:08	8328MEURT.MOS	0136	A	2,460
24	14:27	3614TELETEL 2	0104		0,615
25	15:29	8832STRASBOUR	0841		1,230
27	14:16	8328MEURT.MOS	1456	A	16,605
28	14:51	1614672VAL.MARNE	0651	A	7,995
29	12:18	3615TELETEL 3	0609		6,765
30	15:53	8391MEURT.MOS	0121		3,075
02	19:14	8835STRASBOUR	1112		1,230
03	20:34	1614672VAL.MARNE	5125	A	79,335
09	14:34	8835STRASBOUR	5427		6,150
11	12:10	8835STRASBOUR	1731		1,845
15	10:53	1614793HTS.SEINE	1127		25,215
16	14:20	8132DOUBS	0309		7,380
17	10:12	1614793HTS.SEINE	0724		16,605
17	13:11	6123GARONNE.H	0210	A	3,690
21	08:17	1614209PARIS	0057		2,460
23	15:51	8876STRASBOUR	0915		1,230
23	19:47	194978412ALLEMAGNE	0345		6,150
30	13:05	8835STRASBOUR	4556		4,305
30	19:41	8835STRASBOUR	2449		1,845
01	20:18	1614793HTS.SEINE	0315	A	3,690
03	10:53	8835STRASBOUR	1629		1,845
04	12:11	8832STRASBOUR	0836		1,230

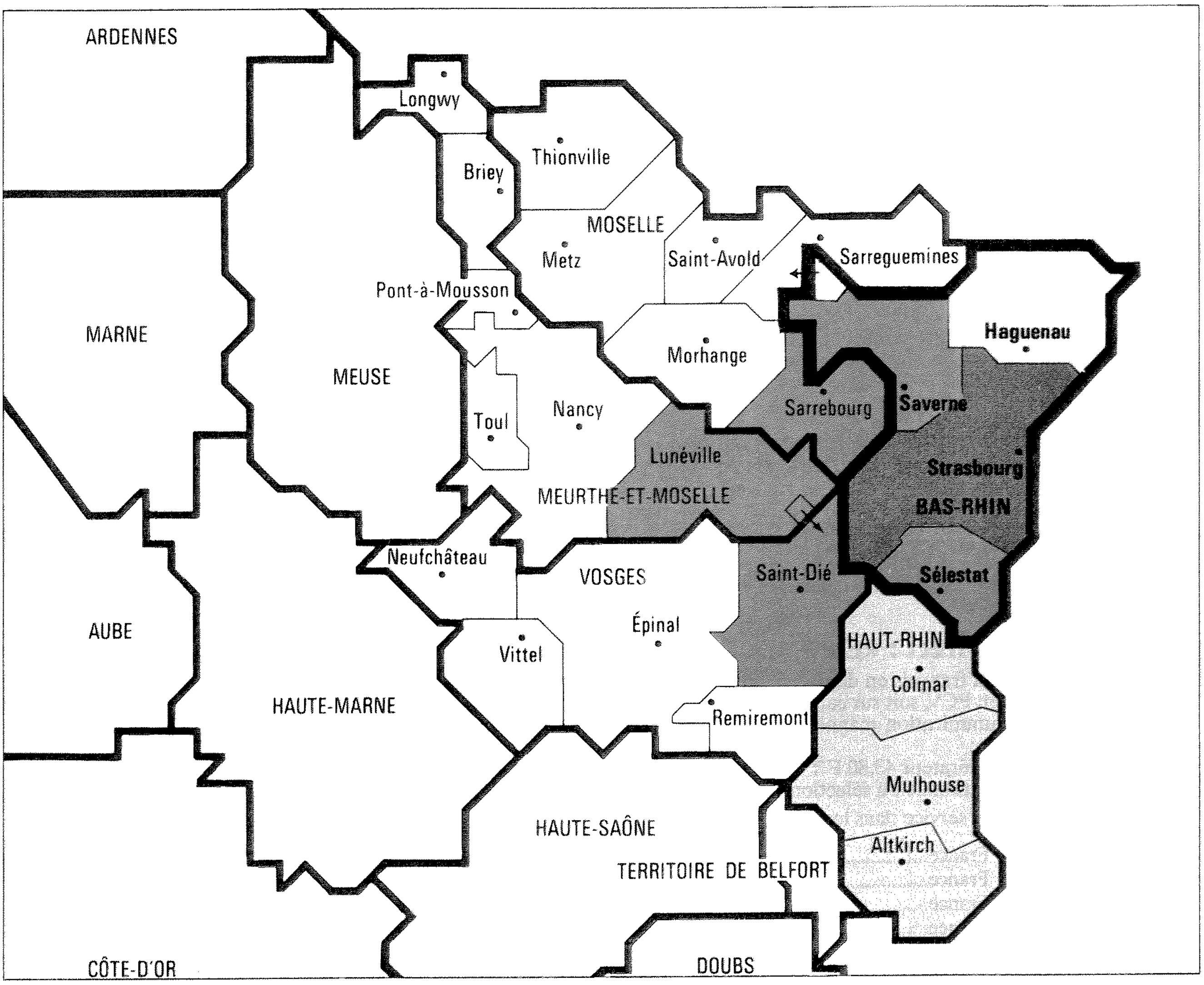
COMMUNICATIONS LOCALES A 1 UT	109,470
ANNUAIRE ELECTRONIQUE	1,845
RENSEIGNEMENTS	3,075
CONSOMMATION COMPTEUR DU 03/06 AU 05/08 DE LA LIGNE 88	682,650

CODES TARIF A = TARIF REDUIT = COMMUNICATIONS COUVRANT DES TARIFS DIFFERENTS

Circonscription tarifaire de Strasbourg

prix mensuel de l'abonnement d'une ligne : 27,82 F HT, 33,00 F TTC
prix des communications :

Document 4



Document 2

tableau A (voir cartes pages suivantes) — **pour 1 unité Télécom (0,615 F HT, 0,73 F TTC *), vous pouvez téléphoner pendant :**

zone de tarification ▶ / tarifs ▼							DOM Mayotte St-Pierre-et-Miquelon	Nouvelle-Calédonie Polynésie française Wallis et Futuna
rouge	**6 minutes**	**120 secondes**	**72 secondes**	**45 secondes**	**24 secondes**	**17 secondes**	**4,9 secondes**	**2,3 secondes**
blanc	9 minutes	170 secondes	102 secondes	64 secondes	34 secondes	24 secondes	7 secondes	3,4 secondes voir page 28
bleu	12 minutes	240 secondes	144 secondes	90 secondes	48 secondes	34 secondes	9,8 secondes	
bleu nuit	**18 minutes**	**340 secondes**	**204 secondes**	**128 secondes**	**68 secondes**	**48 secondes**	**14 secondes**	

*Nota : toute période commencée est due entièrement.

Ces deux pages en couleur sont reproduites avec l'aimable autorisation de France Telecom et sont extraites des pages jaunes de l'Annuaire du Bas-Rhin (1992).

Document 5

A partir d'un poste d'abonné et en métropole, l'Unité Télécom est fixée à **0,73 F**.

- **Communications locales à l'intérieur de la même circonscription :**

- Pendant les périodes de tarif normal : une Unité Télécom **0,73 F** toutes les 6 minutes.
- Pendant les périodes d'application des tarifs réduits : **0,73 F** toutes les **9, 12, 18** minutes selon la période.

- **Communication de voisinage (tarif normal) :**

- 1re zone périphérique de Paris et de Marseille : une Unité Télécom toutes les 120 secondes,
- Pour les autres communications, il est perçu selon la distance entre circonscription, une Unité Télécom par période indivisible de 72, 45 ou 24 secondes.

Pour plus d'informations, reportez-vous à l'annuaire du téléphone, télématique ou papier.

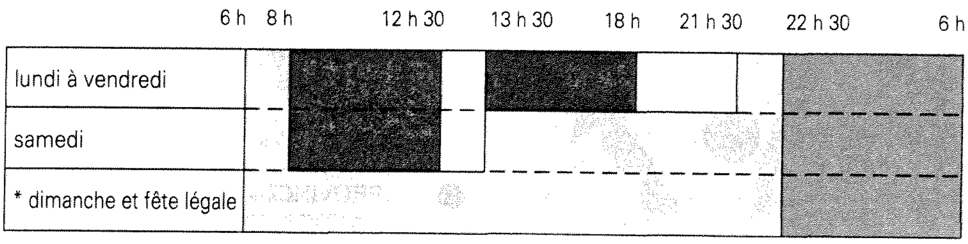
- **Communications à moyenne et grande distance (tarif normal) :**

Appels autres que ceux visés ci-dessus, d'après la distance à vol d'oiseau entre les chefs-lieux des départements.

Si vous téléphonez	cela coûte*	pour 1 mn*
A moins de 100 km	**0,73 F** toutes les **24** s	**2,19 F**
Au-delà de 100 km	**0,73 F** toutes les **17** s	**2,92 F**

* Toute période commencée est due.

- **Modulation horaire du prix des communications ordinaires en métropole dans le régime intérieur.**



tarif rouge :
plein tarif

tarif bleu :
réduction de 50% soit 100%
de temps de conversation en plus

tarif blanc :
réduction de 30% soit 40%
de temps de conversation en plus

tarif bleu nuit :
réduction de 65% soit 180%
de temps de conversation en plus

Document 3

tableau B. — **prix moyen* en francs d'une minute de conversation**

zone de tarification ▶ / tarifs ▼								DOM Mayotte St-Pierre-et-Miquelon	Nouvelle-Calédonie Polynésie française Wallis et Futuna
rouge	HT TTC	0,10 0,12	0,31 0,36	0,51 0,61	0,82 0,97	1,54 1,82	2,17 2,58	7,53 8,93	16,09 19,09
blanc	HT TTC	0,07 0,08	0,22 0,26	0,36 0,43	0,58 0,68	1,09 1,29	1,54 1,82	5,27 6,25	10,86 HT 12,88 TTC voir page 28
bleu	HT TTC	0,05 0,06	0,15 0,18	0,26 0,30	0,41 0,49	0,77 0,91	1,08 1,29	3,77 4,47	
bleu nuit	HT TTC	0,03 0,04	0,11 0,13	0,18 0,21	0,29 0,34	0,54 0,64	0,77 0,91	2,64 3,13	

*Nota : toute période commencée est due entièrement.

COMMUNICATIONS A GRANDE DISTANCE

A. En France (utilisez le Document 4)

1° Indiquez, à l'aide du Document 2, la durée d'une U.T. lorsqu'on téléphone de Strasbourg à Nancy :
en tarif rouge, en tarif blanc, en tarif bleu et en tarif bleu nuit.

2° Les deux communications pour la Meurthe-et-Moselle relevées dans le Document 1 (14 juin et 22 juin) ont en fait été passées à Nancy et ont bénéficié d'un tarif réduit (Code A). Lequel ou lesquels?
Peut-on savoir quel jour de la semaine était le 14 juin?

3° Retrouvez, à l'aide du Document 2, le prix de la communication pour Paris du lundi 20 juillet (11 h 55).

B. Partons à l'étranger!

1° ALLEMAGNE

Lorsqu'on téléphone de Strasbourg en Allemagne, il y a un tarif préférentiel pour certaines localités frontalières.

a) Le 23 juillet, il y a eu deux appels pour l' Allemagne frontalière (à 19 h 38 et à 19 h 47). Or, le 23 juillet 1992 était un jeudi. Déduisez, à l'aide du Document 6, le prix H.T. d'une minute de conversation.
En déduire le nombre d'U.T. correspondant à une minute, puis la cadence (durée d'une U.T.), lors de ces appels.

b) Vérifiez le résultat précédent à l'aide de la durée des deux communications du 23 juillet.

2° ROYAUME-UNI

Retrouvez le nombre d'unités, la cadence et le prix H.T. d'une minute de conversation pour le Royaume-Uni lors de l'appel du 12 juin (utilisez le Document 6)

DOCUMENT 6 : **COMMUNICATIONS : ETRANGER**

Selon les secteurs géographiques indiqués ci dessous, vous pouvez téléphoner depuis la France métropolitaine pour une unité Télécom pendant :

secteurs géograph	Europe : CEE,Suisse	.Europe : autres pays	Afrique du Nord Algérie, Maroc, ,LibyeTunisie	Amérique du Nord Etats-Unis Canada	Pays- d'Afrique francophone	Autres pays du monde
cadences	9,8/14,7 secondes	6,7/10 secondes	5,3/8 secondes	4,7/6,2/7,7 secondes	3/4/5 secondes	(a)Z1 2,3/3,4 sec (b)Z2 :2 sec

TARIFS REDUITS : applicables aux communications automatiques (heure française)

pays demandés	semaine	dimanches et jours de fête légale française	1 minute coûte en F	
			H. T.	T.T.C.
(1)RFA,Belgique,Danemark, Espagne, Grèce, Irlande, Italie, Luxembourg,PaysBas,Royaume-Uni, Suisse	du lundi au vendredi de 21h30 à 8h le samedi à partir de 14 h	toute la journée	2,57	3,04
(8) Allemagne (ex-RFA) (relations frontalières)	du lundi au vendredi de 21 h 30 à 8 h le samedi à partir de 14 h	toute la journée	1,13	1,34
circonscriptions du demandeur / Indicatifs des localités Saverne,Sélestat, et Strasbourg : 764, 780 à 785 Haguenau : 633, 634, 639 720 à 727, 780 à 785	du lundi au vendredi de 8 h à 21 h 30 le samedi de 8 h à 14 h		1,64	1,95

CORINNE ET LE TELEPHONE

Corinne habite Strasbourg. Quatre fois par semaine, à son retour de classe vers 17 heures, elle téléphone pendant dix minutes à chacun de ses trois meilleurs amis qui habitent Strasbourg, Colmar et Paris. Le mercredi après-midi, elle appelle Sandra qui vient de déménager au Luxembourg, pendant dix minutes également.

A. Quand Corinne téléphone, les parents payent

1° En utilisant le Document 2, calculez le prix T.T.C. de ses communications par semaine. En déduire approximativement le prix pour une période de deux mois, qui comporte environ huit semaines et demi. Combien d'heures a-t-elle passé au bout du fil, pendant cette période?

2° Calculez le prix moyen par minute de chacune de ses communications en France. Comparez avec le Document 5. Comment expliquez-vous les différences?

B. Corine participe aux frais

Les parents de Corinne reçoivent la facture détaillée. Ils lui demandent de régler sa quote-part T.T.C.
Corinne décide, à la lecture du libellé : "Tarif blanc, Réduction de 30 %, soit 40 % de conversation en plus", de téléphoner désormais à partir de 18 heures.

1° Elle téléphone toujours dix minutes. A combien revient chacune de ses communications ? L'économie de 30 % en métropole est-elle réalisée?

2° Elle décide de s' accorder, pour chacune des ses communications, le même budget que précédemment.
Combien de temps peut-elle téléphoner à Strasbourg, Colmar, Paris ? Profite-t-elle des 40 % de conversation en plus ?

C. Corine fait des économies

Elle reporte ses quatre communications à 21 heures 30.
Calculez ses dépenses téléphoniques hebdomadaires. A-t-elle bien profité du tarif bleu en métropole?

DES TABLEAUX AUX GRAPHIQUES

1° Dans un repère où vous porterez en abscisses les durées (1 cm = 3 min) et en ordonnées le nombre d'U.T. (1 cm = 1 U.T.), représentez le nombre d'unités facturées en fonction de la durée de l'appel, lors d'une communication locale :

* en tarif rouge,

* en tarif blanc,

* en tarif bleu,

* en tarif bleu nuit.

(Vous obtiendrez les représentations graphiques de quatre "fonctions en escalier")

2° En utilisant le graphique obtenu à la question précédente, donnez les prix T.T.C. des communications locales durant dix minutes selon le tarif.
Répondez à la même question pour des appels de trente minutes. Quelles remarques pouvez-vous faire?

3° En dessous du Document 3, on lit "Tarif blanc, 30 % de réduction, soit 40 % de temps de conversation en plus".
Justifiez cette affirmation.

4° Retrouve-t-on cette augmentation de 40 % du temps de conversation dans les durées indiquées sur le Document 2 ?

ELECTIONS - SCRUTINS A LA PROPORTIONNELLE

Le choix d'un mode de scrutin soulève souvent de vives polémiques.

Les activités qui suivent explorent certaines des méthodes de scrutin dites proportionnelles et permettent de constater que dans certains cas, on n'obtient pas les mêmes résultats.

"**Election dans la classe**" est un exemple fictif pour poser le problème.

"**Scrutin et recette**" est une analyse commentée de documents.

Les élections de 1986 vous proposent de travailler sur des résultats réels en Alsace d'une part, sur la France entière d'autre part.

Pour terminer un petit exercice pour vous donner une idée de l'effet Condorcet.

ELECTIONS DANS LA CLASSE

A. Notions de "Scrutins proportionnel" : Une première approche

Dans une classe de 32 élèves, on procède à une élection dans le but de choisir quatre représentants de la classe à la vie scolaire, soit quatre sièges en tout. Il y a deux listes comprenant chacune quatre candidats. Désignons-les par ***A*** et ***B***.
A l'issue du vote la liste ***A*** a obtenu 8 voix et la liste ***B*** a obtenu 24 voix. Deux élèves de l'établissement, prénommés Pierre et Paul, ont été chargés par la direction d'établir un mode de scrutin équitable, puis de rendre compte du système choisi.
Pierre propose que tous les sièges soient attribués à la liste ***B***, puisqu'elle a obtenu 24 voix, donc une très forte majorité.
Mais Paul lui répond : "D'accord, la liste ***B*** a une large majorité. Cependant les 8 voix obtenues pour la liste ***A*** représentent le quart total des voix. Il serait donc juste que le nombre de sièges obtenus par la liste ***A*** soit le quart du nombre total des sièges, donc un siège pour la liste ***A*** et trois sièges pour la liste ***B***."
On remarque que le nombre de voix pour ***B*** est le triple du nombre de voix pour ***A***, et il en est de même pour le nombre de sièges.

1° Quelle méthode semble la plus démocratique?

2° La deuxième méthode est un mode de scrutin proportionnel : expliquez cette dénomination.

Dans la suite, nous nous intéresserons à des modes de scrutins proportionnels.

B. Ou le problème se complique...

Le même type de vote a lieu dans une autre classe du lycée, comprenant 34 élèves.
La liste ***A*** a obtenu 21 voix et la liste ***B*** a obtenu 13 voix. Il y a toujours quatre sièges à pourvoir. Pierre et Paul doivent indiquer comment répartir les sièges.

Pierre dit : "Si l' on divise l'effectif total de la classe par 4, on obtient 8,5. Donc : 8,5 voix représentent un élu. Les 21 voix de la liste ***A*** représentent deux élus + 4 voix, puisque 8,5 x 2 = 17 et 17 + 4 = 21. De même les 13 voix de la liste ***B*** représentent un élu + 4,5 voix, puisque 8,5 + 4,5 = 13. En tout, nous avons donc trois élus. Il me semble que le quatrième élu doit être choisi dans les candidats pour la liste ***B***, puisque la liste ***B*** obtient une demi-voix supplémentaire en plus."

Paul dit : "Moi, je vois les choses autrement. Nous sommes d'accord pour dire que deux élus sont acquis pour la liste ***A***, et un élu pour la liste ***B***.

Regardons successivement ce qui se passe pour chaque liste lorsqu'on lui attribue l'élu supplémentaire.

Si la liste ***A*** avait trois élus pour 21 voix, chacun d'eux représenterait 7 voix, puisque $\frac{21}{3}=7$. Si la liste ***B*** avait deux élus, chacun d'eux représenterait 6,5 voix, puisque

$\frac{13}{2}=6{,}5$. Donc l'élu supplémentaire représenterait moins de voix que celui de la liste ***A***

Il me semble donc que le siège supplémentaire doit être attribué à la liste ***A***.

1° Commentez les points de vue présentés par Pierre et Paul.

2° La méthode préconisée par Paul est appelée *méthode au plus fort reste.*
Celle proposée par Pierre est appelée *mode de scrutin à la plus forte moyenne.*

Expliquez ces dénominations.

C. Un exemple simple

Dans une troisième classe, on procède à une élection concernant deux listes ***A*** et ***B***; avec quatre sièges à pourvoir. La liste ***A*** obtient 13 voix. La liste ***B*** obtient 22 voix.

1° Calculez le nombre de sièges obtenus par chaque liste avec la méthode de scrutin au plus fort reste.

2° Faites le même calcul avec la méthode de scrutin à la plus forte moyenne.

SCRUTIN ET "RECETTE"

A. Deux articles de presse

Les Documents 1 et 2 sont deux extraits d'articles parus le 14 novembre 1985 dans le quotidien *Le Monde* .

B. Allons voir de plus près

Dans un scrutin de liste à la proportionnelle, les candidats se présentent sur une liste dans un ordre de préséance.
Supposons que quatre listes soient en présence, notées *A; B, C, D.*

1° LE SCRUTIN PROPORTIONNEL AU PLUS FORT RESTE

Méthode : Pour chaque liste, on définit :

$$q= \frac{Nombre\ de\ voix\ obtenues}{Nombre\ de\ voix\ exprimées} \times nombre\ de\ sièges\ à\ pourvoir$$

Le nombre q n'est généralement pas entier, mais s'écrit sous la forme
$q = m + r$, où m est entier et $0 \leq r < 1$.

Exemple : Si $q = 2{,}45$ on a $m = 2$ et $r = 0{,}45$.

Chaque liste obtient d'office m sièges. Le nombre r est appelé reste;
Les sièges restant à pourvoir sont attribués aux listes ayant obtenu les plus forts restes et ceci dans l'ordre décroissant des restes, jusqu'à épuisement des sièges à pourvoir.

2° LE SCRUTIN PROPORTIONNEL A LA PLUS FORTE MOYENNE

Nous citons ici une recette fournie par le journal *Le Monde.*

"*Recette* : Une péréquation attribue à chaque liste un nombre d'élus égal au nombre total de sièges à pourvoir, multiplié par le rapport du nombre de voix pour cette liste au nombre total de voix exprimées; ou plutôt la partie entière de ce résultat. Cette opération d'arrondi laissant quelques sièges vacants, on les répartit entre les listes selon la règle suivante : pour chaque liste, ajouter fictivement 1 au nombre (éventuellement nul) d'élus de cette liste, puis diviser par le résultat obtenu le nombre de voix recueilli par la liste. Ce quotient est appelé moyenne de la liste, et le premier des sièges vacants est attribué à la liste ayant la plus forte moyenne. Les autres sièges vacants, s'il y en a, sont attribués jusqu'à épuisement par le même procédé, les moyennes utilisées à chaque étape tenant compte de tous les sièges précédemment attribués."

Cette "recette " bien compliquée mérite d'être illustrée par des exemples concrets

. *Le scrutin au plus fort reste.*

Dans un vote pour trois listes A, B, C, le nombre de sièges à pourvoir est 7.

La liste ***A*** a obtenu 4 voix.
La liste ***B*** a obtenu 10 voix.
La liste ***C*** a obtenu 6 voix.

Dressons un tableau donnant le détail des calculs et déterminons la répartition des sièges par le mode de scrutin au plus fort reste.

Dressons le tableau donnant les nombre m et r.

Listes	A	B	C
Nombre de voix	4	10	6
m	1	3	2
r	0,40	0,50	0,10

Il reste un siège à attribuer, qui est obtenu par la liste ***B*** correspondant au plus fort reste. Finalement, la liste ***A*** obtient 1 siège, la liste ***B*** en obtient 4 et la liste ***C*** en obtient 2.

Comparaison du scrutin au plus fort reste et du scrutin à la plus forte moyenne.

Le tableau ci-dessous donne, pour chacune des quatre listes ***A***; ***B***, ***C***, ***D***, le nombre q, l'entier m le plus proche inférieur a q, ainsi que les nombres $1 + m$ et $\frac{q}{1+m}$
Les résultats sont arrondis à deux décimales.

Listes	A	B	C	D
Nombre de voix	7	9	10	4
q	1,87	2,40	2,67	1,07
m	1	2	2	1
$1 + m$	2	3	3	2
$\frac{q}{1+m}$	0,93	0,80	0,89	0,53

Déterminons les répartitions des deux sièges restant à attribuer, sachant que le nombre total de sièges à pourvoir est 8. Comparons le résultat à celui qui serait obtenu avec la méthode du plus fort reste.

D'après la dernière ligne du tableau, la liste *A* a la plus forte moyenne : on lui attribue donc un siège supplémentaire. Le nombre m prend donc la valeur 2, et le nombre $m + 1$ devient 3 : la nouvelle moyenne de cette liste est alors $\frac{1,87}{3} = 0,62$
La liste de plus forte moyenne est maintenant la liste *C* avec une moyenne de 0,89. Le dernier siège à répartir est donc attribué à la liste *C*. Comparons ce résultat avec la méthode au plus fort reste. Après calcul, les restes respectifs sont 0,87 ; 0,40 ; 0,67 et 0,07. Ce sont cette fois les listes *A* et *C* qui obtiennent un siège supplémentaire : avec cette méthode, les trois listes obtiendraient finalement le même nombre de sièges !

DOCUMENT 1 : **LEXIQUE**

Aujourd'hui en France, les députés sont élus au scrutin majoritaire uninominal à deux tours de circonscription. Que signifient exactement ces mots - et les autres ? • **Proportionnelle** : - Les candidats se regroupent par liste. Les électeurs votent pour l'une d'elles, en général de manière "bloquée", c'est-à-dire sans pouvoir mêler les noms de l'une et de l'autre (c'est ce que l' on appelle le "panachage") ni éliminer des candidats sur la liste qu'ils ont choisie (c'est ce que l'on appelle le "vote préférentiel"). Les sièges en jeu sont répartis selon une règle de trois : si une liste a obtenu 30 % des voix, elle obtient 30 % des sièges. Comme ceux-ci ne peuvent être divisés en deçà de l'unité, il y a forcément des "restes" ; ces restes sont répartis selon des règles aussi diverses que complexes, mais dont l'effet peut être sensible.	• **Majoritaire**. - C'est le candidat qui recueille le plus de voix qui est élu. Ce type de scrutin peut être à un tour. Il peut être aussi à deux tours ; dans ce cas, il faut obtenir la majorité absolue des suffrages exprimés pour être élu au premier. La majorité relative suffit au second. • **Plurinominal. -** Dans le cadre du scrutin majoritaire, il peut y avoir plusieurs sièges à pourvoir dans une même circonscription. Dans ce cas les candidats peuvent se regrouper par liste ou se présenter à titre individuel. Les électeurs composent un bulletin de vote ne comprenant pas plus de noms que de postes à pourvoir. S'il y en a, par exemple cinq, sont déclarés élus les cinq candidats ayant recueilli le plus grand nombre de suffrages. • **Uninominal. -** Il n'y a qu'un poste à pourvoir dans la circonscriptiond'élection. L'électeur indique un seul nom, celui du candidat qui a sa préférence.

DOCUMENT 2

• **1985**. - Les socialistes au pouvoir savent qu'ils vont perdre les prochaines élections. Pour éviter une déroute, et surtout pour empêcher la droite d'obtenir la majorité absolue des sièges de l'Assemblée nationale, le gouvernement de M. Laurent Fabius, par la loi du 10 juillet 1985, institue la proportionnelle départementale à un tour, sans panachage ni vote préférentiel, et sans division des départements les plus grands.

DES ELECTIONS LEGISLATIVES ET REGIONALES

L'exemple de 1986 : c'est le seul exemple récent où s'appliquait, en France, un mode de scrutin basé sur la représentation proportionnelle départementale à un tour et à la plus forte moyenne, et où, le jour même, les électeurs devaient choisir à la fois des députés et des conseillers régionaux.

A. Flash-information

Rédigez une synthèse, sous forme d'informations rapides, du Documents 3, éléments extraits de l'Encyclopédie Universalis, concernant les résultats des élections législatives et régionales de 1986.

DOCUMENT 3 : **ELECTIONS LEGISLATIVES ET REGIONALES : LES RESULTATS**

Avant même le vote, la journée électorale du 16 mars offrait déjà des traits particuliers, dont la réunion n'est guère fréquente dans notre histoire récente. D'abord, parce qu'on devait choisir le même jour les députés et les conseillers régionaux, ceux-ci étant élus pour la première fois au suffrage direct. Un tel événement - deux consultations générales simultanées - ne s'était pas produit en France depuis le 21 octobre 1945, avec la combinaison d'un référendum et d' élections à l'Assemblée constituante. En outre, les deux élections allaient se dérouler suivant un nouveau mode de scrutin. L'adoption de la représentation proportionnelle à la plus forte moyenne, dans le cadre du département, constituait une véritable rupture avec les habitudes majoritaires qui s'étaient installés à tous les niveaux de notre système politique depuis un quart de siècle. Enfin, et c'est peut-être l'aspect le plus insolite par rapport aux consultations précédentes, le résultat des élections législatives était tenu pour acquis, avec toutes ses conséquences institutionnelles possibles. L'opinion comme la classe politique se préparaient à un changement de majorité parlementaire et, malgré les objections de Raymond Barre, acceptaient d'avance la cohabitation entre cette dernière et un président qui n'entendait pas renoncer à sa fonction et aux pouvoirs qu'elle lui assurait pour deux années encore.
Pour l'essentiel, les résultats ont été ce qu'on pouvait prévoir et cependant ils ont quelque peu étonné, décevant parfois les vainqueurs et rassurant apparemment certains des vaincus.

DOCUMENT 4

	métropole			outre-mer			total		
	suffrages	% inscrits	% exprimés	suffrages	% inscrits	% exprimés	suffrages	% inscrits	% exprimés
électeurs inscrits	36 714 736			893 455			37 608 191		
votants	28 734 080	78,3		555 804	62,2		29 289 884	77,9	
abstentions	7 980 656	21,7		337 641	37,8		8 318 307	22,1	
suffrages exprimés	27 492 200	74,9		524 802	58,7		28 017 002	74,5	
extrême gauche	420 332	1,2	1,5	19 517	2,2	3,7	439 849	1,2	1,6
Parti communiste et apparentés	2 663 259	7,3	9,7	77 715	8,7	14,8	2 740 974	7,3	9,8
P.S.-M.R.G.[1]	8 688 034	23,7	31,6	49 765	5,6	9,5	8 737 799	23,2	31,2
divers gauche et dissidents	329 995	0,9	1,2	84 003	9,4	16,0	413 998	1,1	1,5
total de la gauche	12 101 620	33,0	44,0	231 000	25,9	44,0	12 332 620	32,8	44,0
écologistes et régionalistes	363 457	1,0	1,3	237	-	-	363 694	1,0	1,3
U.D.F.-R.P.R.[2]	11 556 071	31,5	42,0	235 903	26,4	45,0	11 791 974	31,4	42,1
divers droite et dissidents	748 473	2,0	2,7	52 371	5,9	10,0	800 844	2,1	2,8
extrême droite	2 722 579	7,4	9,9	5 291	0,6	1,0	2 727 870	7,3	9,7
total de la droite	15 027 123	40,9	54,7	293 565	32,9	55,9	15 320 688	40,7	54,7

1. Listes présentées officiellement par les deux formations. Les dissidents P.S. ou M.R.G. sont comptés avec les divers gauche.
2. Listes présentées officiellement par les deux formations, soit unies, soit séparées. Les dissidents sont comptés avec les divers droite.

B. Les élections de 1986 en Alsace

Les extraits ci-joints concernent les élections législatives et régionales du Haut-Rhin et du Bas-Rhin en 1986. Ils ont été édités par le journal des Dernières Nouvelles d'Alsace, sous le titre "Spécial Elections". Document 5

Sachant que les listes qui ont obtenu moins de 5 % des voix ne sont pas prises en compte dans les calculs, comparez les résultats du journal aux résultats obtenus en appliquant la méthode du plus fort reste, puis celle de la plus forte moyenne.

A titre d'exemple, les calculs sont faits pour les élections législatives et régionales dans le Bas-Rhin.

De la même façon, dressez les tableaux pour les élections législatives et régionales dans le Haut-Rhin.

Comparez les résultats obtenus par le calcul avec ceux fournis par les "Dernières Nouvelles d'Alsace."

Corrigé de l'exercice pour les résultats du Bas-Rhin.

Nous dressons ci-après les tableaux donnant, pour chaque liste retenue, le nombre v de voix obtenues, puis les nombre q, m, r et $\frac{q}{m+1}$ introduits dans l'étude des modes de scrutin. Nous ne tenons pas compte des listes ayant obtenu moins de 5 % des voix.

Dressez le tableau.

Législatives du Bas-Rhin **:**

Listes	**F.N.**	**R.P.R.**	**P.S.**	**U.D.F.**	**M.D.A.**
v	57 135	86 352	81 309	120 708	26 170
q	1,38	2,09	1,97	2,92	0,63
m	1	2	1	2	0
r	0,38	0,09	0,97	0,92	0,63
$\frac{q}{m+1}$	0,69	0,70	0,98	0,97	0,63

Il reste trois sièges à pourvoir, attribués aux listes P.S., U.D.F. et M.D.A. d'après la méthode des plus forts restes. Regardons la répartition obtenue par la méthode de la plus forte moyenne. Le P.S. obtient d'abord un deuxième siège, sa nouvelle moyenne étant $\frac{1,97}{3} = 0,66$

Le deuxième siège est donc attribué à l' U.D.F., dont la moyenne devient $\frac{2,92}{4} = 0,73$
Cette moyenne étant la plus forte des moyennes restantes, le dernier siège revient à l' U.D.F., ce qui correspond aux résultats publiés.

Régionales du Bas-Rhin :

Listes	F.N.	P.S.	Verts	M.D.A.	R.P.R.	R.P.A.	U.D.F.
v	52 264	64 381	24 746	24 634	70 945	25 857	132 127
q	3,57	4,40	1,69	1,68	4,85	1,77	9,03
m	3	4	1	1	4	1	9
r	0,57	0,40	0,69	0,68	0,85	0,77	0,03
$\dfrac{q}{m+1}$	0,89	0,880	0,85	0,84	0,97	0,884	0,90

Il y a en tout 27 sièges à pourvoir. Il reste donc 4 sièges à répartir. Par la méthode au plus fort reste, ils sont attribués aux listes R.P.R., R.P.A., les Verts et M.D.A.

Par la méthode à la plus forte moyenne, le R.P.R. reçoit le premier siège, sa moyenne devenant $\dfrac{4,85}{6} = 0,81$

Le deuxième siège revient donc à l'U.D.F., dont la nouvelle moyenne est $\dfrac{9,03}{11} = 0,82$

Le troisième siège va au F.N., dont la nouvelle moyenne est $\dfrac{3,57}{5} = 0,71$

Le dernier siège revient au R.P.A., dont la moyenne est légèrement supérieure à celle du P.S.

Ces derniers résultats sont bien conformes à la publication.

DOCUMENT 5

Dans le département du Haut-Rhin, résultats.

Elections législatives

LISTES	VOIX	%	ELUS
UDF Fuchs)	70 663	22,6	2
PC (Buecher)	6 142	2	
PS (Boeckel)	92 547	29,6	2
RE-AL-IT-(Adolph)	3 167	1	
RPR (Weisenhorn)	73 238	23,4	2
Verts (Fernex)	11 582	3,7	
Alsace Progrès (Taesch)	4 463	1,4	
Mouvement pour un parti des travailleurs (Monnot)	929	0,3	
Front National (Freulet)	45 205	14,5	1
Parti ouvrier Européen (Loisel)	1 433	0,5	
CNIP (Bader)	2 214	0,7	
MRG (Wertheim	937	0,3	

Elections régionales

LISTES	VOIX	%	ELUS
PS (Bauemler)	80 628	26	6
Verts (Waechter)	20 329	6,54	1
PC (Bechler)	7 049	2,26	
Front National (Freulet)	44 617	14,4	3
UDF (Gerrer)	73 122	23,5	5
RE-AL-IL (Adolph)	4 937	1,6	
RPR (Meinrad)	67 451	21,7	5
Alsace Progrès (Lacour)	8 557	2,75	
CNIP (Bader)	3 871	1,2	

Dans le département du Bas-Rhin, résultats								
Elections législatives					**Elections régionales**			
LISTES	VOIX	57 135	ELUS		LISTES	VOIX	%	ELUS
Front national (Spieler)	57 135	13	1		Front Natiional (Spieler)	52 264	10	4
RPR (Durr)	86 352	19,7	2					
Socialisme maintenu (Colin)	9 792	2,2			PS (Estève)	64 381	14,8	4
PS (Oehler)	81 309	18,5	2		PC (Wurtz)	8 077	1,8	
PC (Bailleux	7 004	1,6						
Lutte ouvrière (Serfati)	5 237	1,1			Socialisme maintenu (Hoffmann)	14 295	3,2	
Ligue communiste révolutionnaire (Fritz)	493	0,1			Verts (Buchmann)	24 746	5,7	1
CNIP (Cailliau)	5 197	1,1			Lutte ouvrière (Serfati)	6 542	1,5	
UDF (Zeller)	120 708	27,5	4		MDA (Uberall)	24 634	5,6	1
Verts (Stoeckel)	16 001	3,6			RPR (Schreiner)	70 945	16,3	5
MDA (Muler)	26 170	5,9						
La radio des Alsaciens) (Barthelmé)	6	0,0			RPA (Burckel)	25 857	5,9	2
Parti ouvrier européen (Turcat)	1 274	0,2			UDF (Rudloff)	132 127	31,6	10
RPA (Pfalzgraf)	20 943	4,7			CNIP (Stoffel)	4 555	1	

ELECTIONS LEGISLATIVES SUR LA FRANCE ENTIERE

Voici les résultats des élections législatives du 16 mars 1986 publiés par le Quid.

16 mars 1986	Métropole		DOM		TOM		Total		
	Voix	%	Voix	%	Voix	%	Voix	%	Elus
Inscrits	36 585 861		699 296		227 016		37 562 173		
Votants	28 718 372		434 132		147 348		29 299 852		
Abstentions							7 878 658		
Blancs ou nuls	1 244 627		28 561		2 496		1 275 684		
Exprimés	27 473 745		405 571		144 852		28 024 168		
Extrême gauche	421 411		3 298		5 643		430 352		
PC	2 662 238		77 687		-		2 739 925		35
UNG			56 044		1 526		56 044		
PS	8 642 632		49 781		163		8 693 939		206
Radicaux de gauche	107 606		-				107 769		2
Divers gauches	267 921		10 685		22 457		301 063		5
Ecologistes	339 876		233				340 109		
Régionalistes	22 552				5 227		28 379		
RPR	3 059 124		5 332		78 768		3 143 224		76
UDF	2 316 719		2 723		10 725		2 330 167		53
Union RPR-UDF	5 859 848		148 764				6 008 612		147
Divers droite	1 018 240		46 883		18 588		1 083 711		14
FN	2 699 301		4 141				2 703 442		35
Extrême droite	56 277				1 155		57 432		

C'est une élection de liste à la proportionnelle dans 102 circonscriptions (100 départements + 2 TOM) et un scrutin majoritaire uninominal à 2 tours dans 3 circonscriptions (Mayotte, St-Pierre-et-Miquelon, Wallis-et-Futuna).

1° Complétez les colonnes de pourcentages.

2° Les 573 sièges ont été attribués par circonscription. Si cette attribution se faisait au niveau national, proportionnellement au nombre total de voix, calculez approximativement le nombre de sièges qu'aurait obtenu chaque parti politique. Les écarts avec le nombre d'élus indiqués dans le tableau sont-ils importants ?

DEMOCRATIE ET JUSTICE

Invités à classer dans l'ordre de préférence trois candidats A, B et C, les électeurs ont répondu :

- ABC : 27 votants,
- ACB : 25 votants,
- BAC : 10 votants,
- BCA : 20 votants,
- CAB : 40 votants,
- CBA : 10 votants.

1° En calculant le nombre total de bulletins dans lesquels A précède B, montrez qu'une majorité de votants préfère A à B.

2° Comparez par le même procédé B et C, puis C à A. Que peut-on en conclure ?

N.B. - Cet effet porte le nom d'effet Condorcet.

IMPOTS

L'impôt, au fil des siècles ...

"La conception romaine de l'impôt, considérée comme un devoir, a fini par s'imposer en France après la période féodale de contributions volontaires (aides) soit aux seigneurs, soit au roi ... Mais, à partir de 1920 surtout, l'impôt, considéré par les classiques comme un instrument purement financier appelé à fournir des ressources au budget, présente un nouvel aspect. Politique, il est mis au service soit des changements de structure économique ou sociale, soit de la direction de la production, de la circulation ou de la répartition."

H. Laufenburger. *Histoire de l'impôt* (éd. PUF)

Dans le cadre pluridisciplinaire, vous étudierez avec votre professeur d'histoire comment la conception de l'impôt a évolué au cours des siècles.

Les deux activités qui suivent concernent l'impôt sur les revenus (de 1993). L'une a pour objectif de nous familiariser avec le calcul des impôts dans quelques situations simples, l'autre se propose d'étudier les variations de l'impôt suivant deux paramètres : le nombre de part et le revenu.

IMPOTS SUR LE REVENU

A. Le revenu imposable

Le *revenu imposable* (**R**) est déterminé à partir du montant total des revenus, une fois les abattements légaux appliqués. Il constitue l'assiette de l'impôt.

Exemple de calcul du revenu imposable.
Le salaire net annuel de Mlle Duparc est : 54 167 F. Pour calculer son revenu imposable brut global, elle doit tout d'abord déduire 10 % de cette somme :

54 167 F - 5 417 F = 48 750 F.

Puis elle bénéficie d'un abattement de 20 % sur cette dernière somme :

48 750 F - 0,2 x 48 750 F = 39 000 F.

N'ayant aucun revenu de valeurs ou de capitaux mobiliers, cette somme constitue son revenu brut global. N'ayant en outre aucune charge déductible de son revenu, son revenu imposable (R) est donc de 39 000 F.

1° Dans le cas de Mlle Duparc, quel pourcentage du salaire annuel représente le revenu imposable ?

B. Calculs d'impôts

Dans cette partie, on utilisera le Document 1

1° Pour chacune des personnes du Document 2
a) Déterminez le nombre de part (N).
b) Calculez le quotient familial (QF).
c) Calculez l'impôt (I).

2° M. Marin, domicilié en Martinique, bénéficie d'un abattement sur l'impôt précédemment calculé. Calculez cet abattement, puis l'impôt qu'il paiera.

C. Plafonnement

Utilisez le Document 1 § 6

Madame Lafortune, séparée, avec trois enfants à charge, a un revenu imposable de 1 050 000 F. Elle est domiciliée en France métropolitaine. Calculez son impôt après plafonnement (IP)

D. Changement de domicile

Mademoiselle Duparc se voit proposer un poste en Guyane. Son nouveau *salaire annuel* serait de 67000 F.

1° Calculez son nouveau revenu imposable.

2° Quel serait alors le montant de son impôt ? Comparez avec le résultat obtenu dans la partie A

1 Déterminez votre revenu brut global.

	Vous	Conjoint	Personnes à charge (1)	(revenu + ; déficit −)

TRAITEMENTS, SALAIRES, PENSIONS ET RENTES

- Salaires + droits d'auteur + avantages en nature + indemnités journalières .... a
  Déduction 10 %, (minimum de 2 160 F, maxi [illegible]) ou frais réels .... b
  Déduction supplémentaire (limitée à 50 000 F sur les salaires et à 50 000 F sur les droits d'auteur) : à calculer sur a − 10 % (ou minimum de 2160 F ; maximum 72 250 F) c
  NB. le minimum de **2 160 F** s'applique globalement à la déduction forfaitaire de 10 % et aux déductions supplémentaires.
  Reste net *ligne a − (lignes b + c)* .... d
- Pensions, retraites, rentes à titre gratuit, retraits d'un PER bénéficiant des abattements .... e
  Abattement de 10 % limité à 30 800 F pour l'ensemble du foyer (si ce plafond est applicable, le répartir au prorata entre les membres du foyer). Minimum 1 900 F par bénéficiaire .... f
  Reste net *lignes e − f* .... g
- Abattement de 20 % : *lignes (d + g)* × 20 % limité à [illegible] .... h
  Reste net *(lignes d + g − h)* .... i ... + ... + ... = 1
- Rentes viagères à titre onéreux .... + ... + ... = 2

> La fraction imposable dépend de l'âge que vous aviez lors de l'entrée en jouissance de la rente : moins de 50 ans : 70 % ; 50 à 59 ans : 50 % ; 60 à 69 ans : 40 % ; plus de 69 ans : 30 %.

REVENUS DES VALEURS ET CAPITAUX MOBILIERS *(lignes AB à FZ, • 2 de la déclaration)* 3

> Vous bénéficiez d'un abattement unique sur les revenus d'actions et d'obligations de **16 000 F** si vous êtes mariés ou de **8 000 F** dans le cas contraire. Cet abattement s'applique sur les sommes déclarées lignes FG + HF après déduction des frais de garde (CA) répartis au prorata des montants des lignes FG + HF et JK.

REVENU BRUT GLOBAL *(1 + 2 + 3)* 4

2 Déduisez les charges suivantes de votre revenu.

Pensions alimentaires (lignes UH à UZ) : .... j

> Pensions portées lignes UH, UK, UL et UM : déduction limitée à [illegible] par enfant. Si vous subvenez seul à l'entretien d'un enfant marié ou chargé de famille quel que soit le nombre d'enfants du jeune foyer la déduction est limitée à 54 240 F
> Nota : Dans certains cas, vous pouvez obtenir un avantage en impôt complémentaire résultant de la déduction des pensions alimentaires versées à des enfants majeurs étudiants inscrits dans l'enseignement supérieur. (cf. page 12).

Déductions diverses (ligne BA) : .... k

TOTAL (j et k)...... l .... = 5

REVENU NET GLOBAL *(4 − 5)* 6

ABATTEMENTS SPÉCIAUX personnes âgées ou invalides : voir ci-dessous ; enfants mariés à charge : abattement de [illegible] par personne rattachée 7

MONTANT DU REVENU NET IMPOSABLE *(6 − 7)* arrondi à la dizaine de francs inférieure .... R = ...

> ABATTEMENT ACCORDÉ AUX PERSONNES ÂGÉES OU INVALIDES : Si vous êtes âgé(e) de plus de 65 ans ou invalide (titulaire d'une pension d'invalidité de guerre ou d'accident du travail d'au moins 40 % ou titulaire de la carte d'invalidité), vous bénéficiez d'un abattement de [illegible] si le revenu net global de votre foyer n'excède pas 57 500 F ; il est de [illegible] si ce revenu est compris entre 57 500 F et 93 000 F ; cet abattement est doublé si votre conjoint répond aux mêmes conditions. L'ordinateur déduira automatiquement cet abattement.

(1) S'il y a plusieurs personnes à charge, effectuez un calcul séparé pour chacune d'entre elles.

Vous n'avez pas d'impôt à acquitter lorsque (1) :

— votre revenu net de frais professionnels (avant abattement de 20 % pour les salaires et pensions) n'excède pas 42 500 F (ou 46 300 F si vous avez plus de 65 ans);

— ou bien votre revenu imposable (R) est inférieur aux limites du tableau ci-dessous (2);

Pour	Votre revenu (R) est inférieur à :	Pour	Votre revenu (R) est inférieur à :	Pour	Votre revenu (R) est inférieur à :	Pour	Votre revenu (R) est inférieur à :	Pour	Votre revenu (R) est inférieur à :
1 part	40 980 F	2 parts	62 880 F	3 parts	84 780 F	4 parts	106 680 F	5 parts	128 580 F
1,5 part	51 930 F	2,5 parts	73 830 F	3,5 parts	95 730 F	4,5 parts	117 630 F	5,5 parts	139 530 F

(1) En l'absence de plus-values à un taux proportionnel. (2) Ces limites peuvent être supérieures si vous avez droit à une réduction d'impôt.

3 Déterminez votre nombre de parts (N) utilisé pour l'application du barème de l'impôt sur le revenu.

vous êtes \ vous avez	aucune personne à charge: cas général	aucune personne à charge: cas particuliers (2)	nombre de personnes à charge (1): 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	et ainsi de suite en ajoutant une part
Mariés (3)	2	»	2,5	3	4	5	6	7	8	9	10	11	
Célibataire (5) Divorcé(e)(5) veuf(4)(5)	1	1,5	2	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5	

(1) Ajoutez 1/2 part pour chaque personne à charge titulaire de la carte d'invalidité (cases G ou R du cadre B page 2 de la déclaration).
(2) Vous remplissez une ou plusieurs des conditions énumérées face aux cases P, E, K, W du cadre A page 2 de la déclaration.
(3) Ajoutez 1/2 part lorsque vous ou votre conjoint êtes invalide, ou si l'un de vous a plus de 75 ans et la carte du combattant. Ajoutez 1 part si chacun est invalide.
(4) Vous avez un enfant à charge issu du mariage avec votre conjoint décédé : ajoutez 1/2 part. Votre conjoint est décédé en 1993 : vous suivez le régime des " mariés ".
(5) Si vous êtes invalide, ajoutez 1/2 part lorsque vous avez des charges de famille.

Nombre de parts N = .../.......

DOCUMENT 1

4 Calculez le quotient familial correspondant à votre nombre de parts.

Ce quotient « QF » est égal à : $\frac{\text{R (revenu imposable)}}{\text{N (nombre de parts)}}$ = ...

Recherchez ci-dessous la tranche dans laquelle est situé votre quotient familial « QF » (et non pas votre revenu)

5 Calculez votre impôt « I » à l'aide du barème suivant :

Si votre « QF » $\left(\frac{R}{N}\right)$		
	n'excède pas 21 900 F	votre impôt sera égal à : 0
	est supérieur à 21 900 F et inférieur ou égal à 47 900 F	votre impôt sera égal à : (R × 0,12) – (2 628 × N)
	est supérieur à 47 900 F et inférieur ou égal à 84 300 F	votre impôt sera égal à : (R × 0,25) – (8 855 × N)
	est supérieur à 84 300 F et inférieur ou égal à 136 500 F	votre impôt sera égal à : (R × 0,35) – (17 285 × N)
	est supérieur à 136 500 F et inférieur ou égal à 222 100 F	votre impôt sera égal à : (R × 0,45) – (30 935 × N)
	est supérieur à 222 100 F et inférieur ou égal à 273 900 F	votre impôt sera égal à : (R × 0,50) – (42 040 × N)
	est supérieur à 273 900 F	votre impôt sera égal à : (R × 0,568) – (60 665,20 × N)

Dans votre cas,
la formule de calcul
est la suivante : (..............................(R) × O, ...) – (.............................. F × ....(N)) = I..............................

Exemple : Si votre revenu imposable R (page 10) est de 125 000 F et votre nombre de parts N égal à 2,5, votre quotient familial « QF » = R/N = 125 000 : 2,5 = 50 000 F. Ce montant est compris dans la tranche "supérieur à 47 900 F et inférieur ou égal à 84 300 F".
Votre impôt est égal à : (125 000 × 0,25) – (8 855 × 2,5) = 9 112,5 F (arrondi à 9 113 F).

6 Corrections à apporter à l'impôt résultant du barème

■ PLAFONNEMENT DU QUOTIENT FAMILIAL. La réduction d'impôt pour chaque 1/2 part s'ajoutant à 1 part (personne seule) ou à 2 parts (mariés) ne peut excéder **15 400 F** (*) : si votre revenu imposable R atteint ou excède le seuil ci-dessous, calculez votre impôt sur 1 part (non marié(e)) ou 2 parts (mariés) et déduisez une somme égale au produit de **15 400 F (*)** par le nombre de 1/2 parts excédant 1 part (non marié(e)) ou 2 parts (mariés).

Situation / Nombre de parts	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
Célibataire, divorcé(e), séparé(e)(**)	204 090	161 430	221 830	266 980	300 130	333 040	367 550	402 050	436 560	471 060
Veuf(ve)	204 090	255 140	291 990	322 990	353 990	384 990	415 990	446 980	477 980	508 980
Mariés	—	—	340 590	408 160	465 230	510 280	552 980	583 980	614 970	645 970

Si votre nombre de parts est supérieur à 6, calculez votre impôt I une 1re fois avec votre nombre de parts, puis une 2e fois (A) avec 1 part (non marié(e)) ou 2 parts (mariés). Si la différence entre les deux excède le produit (B) de **15 400 F (*)** par le nombre de 1/2 parts s'ajoutant à 1 ou 2 parts, votre impôt est égal à A – B.
Dans le cas contraire il est égal à I.

Impôt après plafonnement éventuel IP..............................

Exemples

- Soit un couple marié, avec 3 parts et un revenu imposable R de 430 000 F.
  Ce revenu excédant le seuil de 408 160 F, le plafonnement s'applique.
  On calcule d'abord les droits sur 2 parts, soit : (430 000 × 0,45) – (30 935 × 2) = 131 630 F.
  On retranche 15 400 F × (nombre de 1/2 parts excédant 2 parts, soit 2) = 30 800 F.
  Le montant de l'impôt IP après plafonnement est de 131 630 F – 30 800 F = 100 830 F.
- Soit un divorcé avec 2 enfants à charge (soit 2,5 parts) et un revenu imposable R de 430 000 F. Ce revenu excédant le seuil de 221 830 F, le plafonnement s'applique. Calculer d'abord les droits sur 1 part :
  (430 000 F × 0,568) – (60 665,20 F) = 183 574,80 F arrondi à 183 575 F.
  L'impôt IP après plafonnement est de 183 575 F – (19 060 F + 15 400 F) = 149 115 F.

Si vous êtes domicilié(e) dans les D.O.M.

Vous bénéficiez alors d'un abattement, sur l'impôt calculé ci-dessus, de :
30 % pour la Guadeloupe, la Martinique ou la Réunion (plafonné à **33 310 F**) ;
40 % pour la Guyane (plafonné à **44 070 F**).

(*) *Toutefois, pour les célibataires, divorcés ou séparés imposés distinctement, la réduction d'impôt procurée par les 2 demi-parts accordées pour le 1er des enfants à charge ne peut excéder* **19 060 F**

(**) *Pour un célibataire, divorcé ou séparé n'ayant pas d'enfant à charge mais une personne invalide à charge (autre qu'un enfant) les limites de plafonnement sont celles qui sont indiquées sur la ligne "veuf(ve)"*

Selon votre cas, reportez l'impôt I ou IP de la page 11 ....

■ DÉCOTE : si le montant de votre impôt « I ou IP » est inférieur à **4 180 F**
déduisez une décote égale à 4 180 F – I ou IP et inscrivez-la ci-contre (en la limitant au montant I ou IP) .... A..............................

Impôt après imputation de la décote (I ou IP – A) ▶ B..............................

■ RÉDUCTIONS D'IMPÔT A DÉDUIRE

- Dons affectés à la fourniture gratuite de repas ou au logement des personnes en difficulté (ligne GA) : .... a..............................

50 % des sommes versées. Le total de ces sommes est limité à **1 000 F**

- Dons aux œuvres (lignes GC et GD) : .... b..............................

40 % des versements effectués. Le montant total de ces versements (lignes GC + GD) est limité à 5 % du revenu (ligne 6 p. 10).
Toutefois, les dons versés aux œuvres d'intérêt général ne peuvent dépasser 1,25 % de ce même revenu.

DOCUMENT 1

• Sommes versées pour l'emploi d'un salarié à domicile (ligne LJ) : . . . . c.............................

50 % des sommes versées limitées à 26 000 F

• Cotisations syndicales (lignes AC, BC, AE, BE, AG ou BG du • 1) : . . . . d.............................

Pour chaque personne salariée ou pensionnée : **30 %** des sommes versées limitées à 1 % des salaires et pensions après imputation des charges sociales déductibles.
NB. Cette réduction ne s'applique pas aux bénéficiaires de salaires demandant la déduction des frais réels.

• Frais de garde de l'enfant à l'extérieur du domicile (ligne DA) : . . . . e.............................

25 % des sommes versées limitées à **15 000 F** par enfant.

• Dépenses d'hébergement dans un établissement de long séjour ou une section de cure médicale (ligne LK) : . . . . f.............................

25 % des sommes versées limitées à **13 000 F.**

• Intérêts d'emprunts, ravalement (lignes VH, VJ, VK, VL, VM, VN, VP, VR, VS et VT) : g.............................

20 % pour les dépenses de la ligne VH ; 25 % pour les autres lignes.
Plafonds des dépenses :
- Le montant porté ligne VH est limité à **9 000 F + 1 500 F** par personne à charge.
- Le total des dépenses indiquées lignes VJ, VL, VM, VS et VT est globalement limité à **15 000 F + 2 000 F** par personne à charge.
- Pour les dépenses figurant sur les lignes VK et VN, le plafond est de **30 000 F.** Ce montant est majoré de **2 000 F** par personne à charge. Cette majoration est portée à **2 500 F** pour le 2e enfant et à **3 000 F** par enfant à partir du 3e enfant.
- Pour les dépenses inscrites sur les lignes VP et VR, le plafond est de **40 000 F** pour un couple marié, **20 000 F** pour les célibataires, veufs ou divorcés. Ces montants sont majorés de **2 000 F** par personne à charge. Cette majoration est portée à **2 500 F** pour le 2e enfant et à **3 000 F** à partir du 3e enfant.

NOTA : Les différents plafonds ne se cumulent pas. Si votre revenu imposable R (voir page 10) par part est supérieur à [illegible], vous ne pouvez pas bénéficier de cette réduction d'impôt pour les emprunts contractés entre le 1-1-90 et le 30-06-93.

• Dépenses de grosses réparations, d'amélioration, d'isolation thermique et de régulation du chauffage (lignes VU, VW et VX) : . . . . h.............................

25 % des dépenses (y compris dépenses non imputées en 1992 et faisant l'objet d'un report ligne VX), celles-ci étant limitées à la moitié d'un plafond de [illegible] pour un couple marié, [illegible] dans les autres cas, **+ 2 000 F** par personne à charge, **+ 2 500 F** pour le 2e enfant et **+ 3 000 F** à partir du 3e enfant. L'ensemble des dépenses effectuées du 1.1.1990 au 31.12.1995 ne peut excéder ce plafond.

NOTA : Si votre revenu net imposable R (voir page 10) par part est supérieur à [illegible], vous ne pouvez pas bénéficier des réductions d'impôt relatives aux dépenses afférentes à l'habitation principale (intérêts d'emprunt contractés du 1/1/1990 au 30/06/1993, dépenses de ravalement, de grosses réparations, d'isolation thermique, de régulation de chauffage et d'amélioration payées jusqu'au 30/06/1993).

• Assurance-vie (ligne MJ) : . . . . i.............................

25 % de la part d'épargne des primes d'assurance-vie (base de calcul limitée à **4 000 F + 1 000 F** par enfant à charge).

• Rente survie et contrats d'épargne handicap (ligne MK) : . . . . j.............................

25 % des primes de rente survie et de la part d'épargne des contrats d'épargne handicap (base de calcul limitée à **7 000 F + 1 500 F** par enfant à charge).

• Enfants à charge poursuivant leurs études (lignes WG, WJ, WL) : . . . . k.............................

400 F par enfant au collège, **1 000 F** par enfant au lycée, **1 200 F** par enfant dans l'enseignement supérieur.

Total des lignes a à k limité au montant B ▶ C.............................

Impôt après imputation des réductions d'impôt ci-dessus (B − C) ▶ D.............................

7 Impôt à payer :

■ REPRISES D'IMPÔT :
CEA ou autres reprises d'impôt (lignes HG et NR du • 8) . . . . E.............................

■ AVANTAGE EN IMPÔT COMPLÉMENTAIRE : (pensions alimentaires versées à des enfants majeurs étudiants non à charge) : selon des modalités de calcul particulières, vous pouvez avoir droit, en fonction de l'importance de vos revenus, à un complément de réduction d'impôt (cf. page 8 de la notice). . . . . F.............................

Impôt après corrections (D + E − F) ▶ G............................. (1)

(1) Vous n'avez pas d'impôt à acquitter s'il est inférieur à **400 F**

■ IMPÔT COMPLÉMENTAIRE DE 1 % SUR LES REVENUS DE CAPITAUX MOBILIERS SI VOTRE IMPÔT EST AU MOINS ÉGAL A 400 F (1 % du montant imposable des revenus du • 2) . . . . H.............................

■ PRÉLÈVEMENT SOCIAL DE 1 % SUR CERTAINS REVENUS SI VOTRE IMPÔT EST AU MOINS ÉGAL A 400 F (1 % du montant imposable des rentes viagères à titre onéreux et des revenus de capitaux mobiliers) . . . . I.............................

■ IMPUTATIONS : déduisez les crédits d'impôt, avoirs fiscaux, prélèvements ou retenues non libératoires . . . . J.............................
Si vous avez rempli la ligne FZ du • 2, portez 75 % des intérêts d'obligations que vous avez soumis à tort au prélèvement libératoire alors qu'ils auraient pu bénéficier de l'abattement unique sur les revenus d'actions et d'obligations.
Si le montant total de ces crédits d'impôt, avoirs fiscaux... est supérieur à l'impôt dû, l'excédent vous sera restitué.
Si votre impôt est inférieur à **400 F**, la restitution sera réduite du montant de cet impôt.

IMPÔT DÛ (G + H + I − J) ▶ ....

DOCUMENT 1

Document 2

PRÉSENTATION DES PERSONNES					
NOM AGE	Mlle DUPARC 20 ans	M. LATOUR 45 ans	Mme LEDOUX 70 ans	M. SCHMITT 35 ans	M. MARIN 28 ans
SITUATIONS FAMILIALE	Célibataire	Marié	Veuve	Divorcé	Marié
DOMICILE	PARIS	BORDEAUX	NICE	STRASBOURG	MARTINIQUE
NOMBRE DE PERSONNES A CHARGE	0	4	2	1	3
VALIDITÉ	NON	NON	NON	OUI	NON
REVENU IMPOSABLE	39 000 F.	150 000 F.	200 000 F.	180 000 F.	170 000 F.

Remarque : L'une des personnes à la charge de Madame LEDOUX est un enfant issu de son mariage avec son conjoint décédé en 1990.

VARIATIONS DE L'IMPOT

A. Nombre de parts fixes

1° On suppose que $N = 1$
a) Représentez graphiquement la fonction qui à ***R*** associe ***I***
N.B. : Au-dessous d'un certain revenu imposable, ***I*** est nul. (voir Document 1) Quelle est la nature de cette fonction ?

b) Utilisez le graphique précédent pour répondre aux questions suivantes :
- Quel est le revenu imposable d'une personne ayant un impôt ***I*** de 9 000 F ?
- Quel est l'impôt ***I*** d'une personne ayant un revenu imposable de 55 000 F ?

2° On suppose que N = 3
a)Jusqu'à quelle valeur du revenu imposable, l'impôt ***I*** est-il nul ?

b) En vous aidant du Document 1 complétez le tableau suivant

Si		**R**	$\leq$	84 780	**I** = 0
Si	84 780	< **R**	$\leq$	143 700	**I** = R x 0,12 - 2 628 x 3
Si		< **R**	$\leq$		**I** = R x 0,25 - 8855 x 3
Si		< **R**	$\leq$		

c) En déduire la représentation graphique de la fonction qui à **R** associe ***I*** dans le cas (N = 3).

d) Madame Ledoux (voir Document 2) voit son revenu imposable augmenter de 20 000 F. Reste-t-elle dans la même "tranche" d'impôts ? Quel est son nouvel impôt ?

e) Répondez aux mêmes questions si son revenu imposable augmente de 60 000 F.

B. Revenu fixé
Dans cette partie, on suppose le revenu imposable ***R*** fixé à 120 000 F.

1° A partir de quel nombre de parts, *N*, l'impôt sera-t-il nul ?

2° Calculez le quotient familial, QF, et l'impôt ***I*** pour N=1; N=2 ; N =2,5; N=3; N=4.
3° On se place dans le cas d'un couple marié. Utilisez la question 2 pour étudier les variations, en pourcentages, du montant de l'impôt en fonction du nombre d'enfants du couple.

4° Quel pourcentage du revenu imposable représente l'impôt dans chacun des cas suivants :

a) Personne célibataire avec un enfant à charge ?
b) Personne divorcée, invalide, sans personne à charge ?
c) Personne divorcée, invalide, avec une personne à charge ?
d) Couple marié avec un enfant ?
e) Couple marié avec trois enfants ?

LES NOMBRES : ECRITURES ET CALCULS

"...Ce jour là, on me posa une question si simple que j'en demeurais un instant sans voix. "Monsieur, d'où viennent les chiffres ? Quand est-ce qu'on a appris à compter ? Quelle est l'origine des nombres ?"

G. IFRAF

(Introduction à l'Histoire Universelle des Chiffres)

On parle toujours des chiffres arabes, mais comment écrivait-on les nombres lorsqu'on ne les connaissait pas ? Les deux premières activités apportent la réponse des Grecs à cette question.
La troisième explique les mécanismes du système décimal et la quatrième se veut une approche historique des nombre décimaux. Enfin les amateurs d'abaques ou autres machines à calculer pourront affiner leur connaissance de la pratique du boulier chinois.

LE SYSTEME DE NUMERATION IONIQUE

Il n'est nul besoin d'être expert en mathématiques pour connaître l'importance qu'eurent les Grecs dans ce domaine : qui ne connaît l'axiome d'Euclide, les théorème de Thalès ou de Pythagore...?

Rappelons aussi que bien des mots que nous utilisons ont une origine étymologique grecque, citons, entre autre :
mathématiques : de mathèmatikos : qui concerne la science
géométrie : de gê : terre et metron : mesure
isocèle : de îsos : égal et skelos : jambe

A. Signes utilisés

Le système de numération que nous allons étudier est le système qu'utilisèrent les Grecs à partir du 3è siècle avant J.C. environ, il se substitua à un autre système de numération appelé système attique (ionique : de l'Ionie, ancienne province grecque, attique : relatif à Athènes).

Parmi les mathématiciens les plus connus de cette époque, citons Euclide - Archimède - Appolonius (Thalès et Pythagore les précèdent d'environ 3 siècles, Platon et Aristote d'environ 1 siècle).

Le système ionique s'inspire d'un système de lettres numérales d'origine phénicienne (quelques 1000 ans avant J.C.) et utilise les lettres de l'alphabet grec classique auxquelles sont adjointes trois lettres anciennes :
Digamma : ς
Koppa : ϙ
Sampi : ϡ

UNITES				DIZAINES				CENTAINES			
Α	α	Alpha	1	Ι	ι	Iota	10	Ρ	ρ	Rô	100
Β	β	Béta	2	Κ	κ	Kappa	20	Σ	σ	Sigma	200
Γ	γ	Gamma	3	Λ	λ	Lamda	30	Τ	τ	Tau	300
Δ	δ	Delta	4	Μ	μ	Mu	40	Υ	υ	Upsilon	400
Ε	ε	Epsilon	5	Ν	ν	Nu	50	Φ	φ	Phi	500
Ϛ	ς	Digamma	6	Ξ	ξ	Ksi	60	Χ	χ	Khi	600
Ζ	ζ	Dzêta	7	Ο	ο	Omicron	70	Ψ	ψ	Psi	700
Η	η	Eta	8	Π	π	Pi	80	Ω	ω	Oméga	800
Θ	θ	Thêta	9	Ϙ	ϙ	Koppa	90	Ϡ	ϡ	Sampi	900

C'est un système de numération par juxtaposition, la valeur d'un nombre s'obtient par l'addition des valeurs des différentes lettres utilisées.

Ainsi $\pi\,\eta = 80 + 8 = 88$

ϡ $\nu\,\varepsilon = 900+50+5 = 955$

1° Ecrire dans le système ionique : 21 ; 362 ; 993 ;

2° Que représentent les écritures : ο ς ; φ μ δ

3° Quel est le plus grand nombre que l'on peut écrire avec les symboles présentés ci-dessus?

B - Milliers et myriades :

1° Pour écrire les milliers, on utilise les lettres représentant les unités (et elles seulement) en plaçant un accent en bas à gauche de la lettre.

Ainsi ,α représente 1000

,β représente 2000

,θ représente 9000

,ηψϙα représente 8791

a) Ecrire en système ionique : 1994 ; 2001 ; 5555

b) Expliquer pourquoi ,θϡϙθ est le plus grand nombre que l'on puisse maintenant écrire.

2° Pour écrire les nombres supérieurs à 10000, divers systèmes ont été utilisés, nous citerons celui d'Appolonius qui utilisait la lettre M pour désigner une myriade soit 10 000.

(M est l'initiale de Μυριοι , mot grec signifiant myriade)

Le nombre de myriades est alors écrit au-dessus de la lettre M

Ainsi $\overset{\alpha}{M}$ désigne 1 myriade c'est à dire 10 000

$\overset{\pi\theta}{M}$ désigne 88 myriades c'est à dire 88 x 10 000 soit 88 000

$\overset{\sigma\mu\alpha}{M}$ désigne 241 myriades c'est à dire 241 x 10 000 soit 2 410 000

et $\overset{\sigma\mu\alpha}{M}\,{,}\alpha\omega\theta$ désigne 2 411 809

a) Ecrire en système ionique 1 800 000 ; 3 543 231.

b) Quel est le plus grand nombre que l'on peut maintenant écrire ?

c) Que représentent les écritures : $\overset{\lambda}{M}$; $\overset{\mu\beta}{M}{,}\theta\omega$?

3° Pour aller plus loin encore, Appolonius proposait de répartir les nombres en "classes" :

- la classe élémentaire contenait les nombres strictement inférieurs à 10 000
- la classe des "myriades premières" contenait les nombres obtenus en multipliant les nombres élémentaires par les myriades
- la classe des "myriades secondes " contenait les nombres obtenus en multipliant les nombres élémentaires par les myriades de myriades
- etc...

OPERATIONS DANS LE SYSTEME IONIQUE

A - Fractions

La notation des fractions a pris plusieurs formes au cours de cette époque. Retenons l'écriture suivante :

- les fractions de numérateur 1 sont représentées par les lettres correspondant à leur dénominateur suivies d'un double accent en haut :

Ainsi $\varepsilon'' = \frac{1}{5}$; $\lambda\beta'' = \frac{1}{32}$

- les autres étaient notées (par Archimède par exemple) en plaçant le dénominateur en exposant :

Ainsi $\overline{\eta}^{\theta}$ ou $\overset{\theta}{\eta}$ représentent $\frac{8}{9}$; $\overline{\kappa\theta}^{\iota\gamma}$ ou $\overset{\iota\gamma}{\kappa\theta}$ représentent $\frac{29}{13}$

1° Que représentent les écritures γ''? $\overline{\lambda}^{\mu\theta}$?

2° Ecrire en système ionique : $\frac{10}{71}$; $\frac{1}{32}$; $\frac{5}{112}$

B - Technique de multiplication (les choses se compliquent...!)

Précisons tout d'abord que les Grecs disposaient de tables de multiplication qui leur permettaient d'effectuer les calculs "simples"
Pour les opérations plus importantes le procédé utilisé était basé sur des considérations du type :
"Des centaines par des dizaines donnent des milliers"
"Des centaines par des centaines donnent des myriades" etc..

Ainsi le produit de π(80) par σ(200) est $\overset{\alpha}{M}, \varsigma$ (1 myriade + 6000).

1° Quel est le produit de η par ϕ ?

Quel est le produit de ψ par χ ?

2° Exercice résolu : Multiplions 1512 par 345, autrement dit $,\alpha\phi\iota\beta$ par $\tau\mu\varepsilon$

Tout d'abord étudions la méthode utilisée avec nos notations habituelles :

$$\begin{array}{rr} & 1000 + 500 + 10 + 2 \\ \text{x} & 300 + 40 + 5 \\ \hline \end{array}$$

(Décomposition en milliers, centaines, dizaines...)

L'idée est alors de multiplier 300 successivement par 1000, 500, 10, et 2, puis de multiplier 40 successivement par 1000, 500, 10 et 2, puis de multiplier 5 successivement par 1000, 500, 10 et 2, calculs qui sont présentés ci-dessous :

$$\begin{array}{r} ,\alpha\phi\iota\beta \\ \times \quad \tau \\ \hline \overset{\lambda}{M}\overset{\iota\varepsilon}{M},\gamma\chi \end{array}$$

1 2 3 4

$$\begin{array}{rl} & 1000 + 500 + 10 + 2 \\ \times & 300 \\ \hline \end{array}$$

300 x 1000 = 300 000 = 30 myriades 1
300 x 500 = 150 000 = 15 myriades 2
300 x 10 = 3 000 = 3 milliers 3
300 x 2 = 600 4

$$\begin{array}{r} ,\alpha\phi\iota\beta \\ \times \quad \mu \\ \hline \overset{\delta}{M}\overset{\beta}{M}\upsilon\pi \end{array}$$

1 2 3 4

$$\begin{array}{rl} & 1000 + 500 + 10 + 2 \\ \times & 40 \\ \hline \end{array}$$

40 x 1000 = 40 000 = 4 myriades 1
40 x 500 = 20 000 = 2 myriades 2
40 x 10 = 400 3
40 x 2 = 80 4

Poursuivre cette opération et vérifier que le résultat final s'écrit :

$\overset{\nu\beta}{M},\alpha\chi\mu$ (52 myriades + 1640)

(Pour additionner les résultats des différentes étapes on additionne les nombres de myriades, de milliers... entre eux)

Il est évident que notre système de multiplication est bien plus pratique d'utilisation !!

SYSTEME DECIMAL

Examinons notre système d'un peu plus près

Nous utilisons un système décimal (ou système de base 10). Ce qui signifie que nous disposons de 10 symboles pour écrire les nombres : 0, 1, 2,...9. Ces 10 chiffres sont la base de notre numération. L'un d'entre eux pourtant n'est pas tout à fait comme les autres..

Petite histoire (très abrégée) du zéro

Le mot zéro vient de l'arabe صفر SIFR qui signifie "vie" et indique l'absence de chiffre "significatif" à l'emplacement qu'il occupe. Parmi les peuples qui ressentirent le besoin d'utiliser un symbole pour remplacer ce "vide", signalons :
- les Babyloniens qui introduisirent le symbole environ quatre siècles avant notre ère
- les Mayas chez qui on trouve différentes représentations du zéro (premiers siècles de notre ère)

Fig. 223. – Diverses représentations hiéroglyphiques du zéro, relevées sur des stèles et des sculptures mayas. Cf. F.-A. Peterson [138], fig. 51 et J.-E. Thompson [397], fig. 13.

Mais il faudra attendre le 12è siècle de notre ère pour que le symbole actuel soit introduit et diffusé en Occident. Léonard de Pise (dit Fibonacci) (1170-1250) le nomma d'abord zephirium, ce qui devint plus tard zefiro et enfin zéro. Notons aussi que le mot arabe sifr a aussi donné notre mot "chiffre" qui désigne n'importe lequel des 10 symboles de notre numération.

Revenons à notre système décimal qui est dit de position : la place d'un chiffre lui donne un rôle bien précis dans la valeur du nombre. Ainsi quand nous écrivons 372, nous supposons implicitement :

3 centaines + 7 dizaines + 2 unités

ou

$$3 \times 10^2 \quad + 7 \times 10^1 \quad + 2 \times 1$$

(Rappelons que 10 est la base de notre système)

1° Voici trois opérations simples :

a	b	c	
$^1 3 ^1 7\ 2$	3 5	3 7 2 1	35
+ 7 4 9	x 1 3	-3 5	1 0 6
+ 1 3	1 0 5	2 2 1	
	3 5 ← 2è ligne	-2 1 0	
1 1 3 4	4 5 5	1 1	

a) Pouvez-vous détailler le raisonnement que vous utilisez (sans doute sans y penser..) dans l'addition a ?

A quoi correspondent les retenues ?

b) En remarquant que 35 = 3x10+5x1 et 13=1x10+3, justifiez la technique habituelle de multiplication (en particulier le décalage vers la gauche des chiffres de la 2ème ligne) utilisée dans l'opération b

c) La présentation adoptée dans l'opération c n'est pas classique (du moins pour des divisions de nombres). Pouvez-vous expliquer ce que l'on a fait ?

Quelle relation pouvez-vous déduire de cette opération entre les nombres 3721, 35, 106 et 11 ? (3721=...x...+..).

Plus généralement si la division de l'entier a par l'entier non nul, b a pour quotient q et pour reste r, quelle relation lie a,b,q,r ? (a=..x..+..)

2° Trouvez un nombre de 2 chiffres sachant que :

* la somme des 2 chiffres est 9
* si l'on permute les 2 chiffres, le nombre diminue de 45.

LA DISME

Qui enseigne à expédier facilement avec des nombres entiers, sans fractions , tous les comptes qui se rencontrent dans les affaires des hommes.

Aux Astrologues, Arpenteurs, Mesureurs de tapisserie, Jaugeurs, Stéréométriciens en général , Maîtres de monnaie, et à tous les Marchands,

Simon STEVIN Salut.

Quelqu'un voyant la petitesse de ce livret, et la comparant à votre grandeur, mes très honorés Seigneurs, auxquels il est dédié, estimera peut-être absurde ce que nous avons conçu. Mais s'il considère la proportion qu'il y a entre, d'une part le petit volume de ce livret et l'humaine faiblesse de ses destinataires, et d'autre part sa grande utilité et leur esprit profond et ingénieux ((3), il se rendra compte qu'il a comparé des termes extrêmes, qui ne permettent pas de convertir cette comparaison en une proportion. Considérons donc le rapport du troisième terme au quatrième. Mais que va-t-on proposer ? D'aventure quelque invention admirable ? Non certes, mais une chose si simple qu'elle ne mérite quasiment pas le nom d'invention, car comme l'homme rustique et lourd trouve bien d'aventure quelque grand trésor, sans avoir pour cela usé de science, c'est ainsi quelque chose de semblable qui est arrivé en cette affaire. Pourtant si quelqu'un juge que je me vante de mon esprit à cause de l'explication que je donne de son utilité, sans aucun doute il démontre, ou qu'il n'y a en lui ni jugement, ni intelligence, pour savoir discerner les choses simples des ingénieuses, ou qu'il est jaloux de ce qui contribue à la prospérité commune; mais quoiqu'il en soit, il ne faut pas omettre l'utilité de celui-ci, pour l'inutile calomnie de celui-là. Or comme le marinier, qui a d'aventure trouvé quelque île inconnue, déclare franchement au Roi toutes ses richesses, comme d'avoir de beaux fruits, de précieux minéraux, de plaisantes contrées, etc., sans que cela passe pour de l'orgueil, de même nous parlerons ici librement de la grande utilité de cette invention, je dis grande, voire plus grande qu'aucun de vous autres ne s'y attend, sans toutefois m'en glorifier.

Vu donc que la matière de cette DISME (dont le nom sera justifié par la première définition qui suivra) est le nombre, et que son utilité vous est, Messieurs, bien connue par vos expériences continuelles, il ne sera point besoin d'en parler longuement. Car si quelqu'un est Astrologue, il sait que le monde est devenu grâce aux calculs astronomiques (car ils enseignent au pilote l'élévation de l'équateur et du pôle, au moyen de la table des déclinaisons du soleil, on décrit avec celle-ci la vraie longitude et latitude des lieux, etc...) un paradis, abondant en plusieurs lieux de ce que toutefois la terre n'y peut produire. Mais comme le doux n'est jamais sans l'amer, le travail occasionné par de tels calculs lui est connu, à cause des laborieuses multiplications et divisions qui découlent de la progression par soixantièmes des degrés, minutes, secondes, tierces, etc... Mais s'il est Arpenteur, il sait le grand bénéfice que le monde reçoit de sa science, par laquelle s'évitent plusieurs difficultés et querelles, qui surviendraient journellement, par ignorance de la superficie des terres ; outre cela il n'ignore pas (principalement celui qui a de grandes affaires) les ennuyeuses multiplications qui découlent des verges, pieds et souvent doigts (4), multipliés l'une par l'autre, ce qui n'est pas seulement importun, mais (même si les mesures et autres choses précédentes étaient bien exécutées) est souvent cause d'erreur, tendant à causer un grand dommage à l'un ou l'autre, ainsi que la ruine de la renommée de l'Arpenteur. Et de même des Maîtres de monnaies, Marchands, et autres métiers. Mais d'autant plus important sont ceux-là, et les voies pour y parvenir plus laborieuses, d'autant plus grande est cette découverte de la DISME qui ôte toutes ces difficultés. Mais comment ? Elle enseigne (afin de dire beaucoup en un mot) à expédier facilement sans nombres fractionnaires tous les comptes qui se rencontrent dans les affaires humaines ; de sorte que les quatre principes d'Arithmétique que l'on appelle ajouter, soustraire, multiplier et diviser avec des nombres entiers, pourront rendre un tel service, procurant la même facilité à ceux qui usent de jetons. Or si par un tel moyen sera sauvé ce qui se perdrait autrement, si par un tel moyen sera ôté labeur, querelle, erreur, dommage et autres accidents communément associés à ceux-ci, je le soumets volontiers à votre jugement.

Quand à ce que quelqu'un pourrait me dire, que beaucoup d'inventions semblent bonnes au premier regard, mais quand on veut s'en servir, on ne peut rien en faire, comme il arrive souvent aux chercheurs de grandes inspirations, qui semblent bonnes dans les petites épreuves, mais qui dans les grandes, ou à l'usage, ne valent rien, nous lui répondrons qu'il n'y a ici un tel doute, parce que l'on en fait journellement l'expérience de façon concrète ; à savoir par divers Arpenteurs Hollandais experts, auxquels nous l'avons soumise, lesquels (laissant ce qu'ils avaient inventé chacun à sa manière, pour amoindrir le travail de leurs calculs) l'utilisent à leur grande satisfaction et avec le fruit qui, par nature, doit nécessairement s'en suivre. La même chose arrivera à chacun de vous autres, mes Très honorés Seigneurs, qui fera comme eux. Vivez cependant en toute félicité.

ARGUMENT

La DISME a deux parties : définitions et opérations. Dans la première partie on dira par la première définition, ce qu'est la DISME ; par la seconde , troisième et quatrième, ce que signifie commencement, prime, seconde, etc.... et nombres de DISME. Dans l'opération on dira par quatre propositions, l'addition, soustraction, multiplication et division des nombres de DISME, dont la structure peut se représenter succinctement par cette table.

La Disme a deux parties	définition de ce qu'est :	Disme Commencement Prime, seconde, etc Nombre de Disme
	Opération de	L'addition Soustraction Multiplication Division

A la fin on trouvera encore un Appendice, disant l'usage de la Disme par quelques exemples concrets;.

LA PREMIERE PARTIE DE LA DISME

DES DEFINITIONS

- DEFINITION I -

Disme est une espèce d'Arithmétique, inventée par la progression en dixième, ayant pour caractère des chiffres, par lesquels se décrivent tout nombre, et par laquelle l'on expédie avec des nombres entiers sans fractions, tous les comptes qui se rencontrent dans les affaires des hommes.

EXPLICATION

Soit un nombre : mille cent onze, écrit avec les caractères des chiffres de cette façon 1111, pour lesquels ils apparaît que chaque 1 est la dixième partie du caractère précédent le plus proche. Pareillement pour 2378 : chaque unité du 8 est la dixième de chaque unité du 7. Et de même de tous les autres. Mais parce qu'il est convenable que les choses dont on veut parler aient des noms et que ce type de calcul est obtenu par la considération d'une telle progression par dixième ou disme, voire qu'elle consiste entièrement en elle, comme il apparaîtra dans ce qui suit, nous nommons ce traité proprement et convenablement la DISME ; par là même on peut opérer avec des nombres entiers sans fractions dans tous les comptes se rencontrant dans nos affaires, comme on le démontre par la suite.

- DEFINITION II -

Tout nombre entier proposé s'appelle COMMENCEMENT, son signe est ⓪

EXPLICATION

Par exemple soit un nombre quelconque : trois cent soixante quatre ; nous le nommons trois cent soixante quatre COMMENCEMENTS, le décrivant ainsi 364⓪ Et ainsi pour tous les autres.

- DEFINITION III -

Et chaque dixième partie de l'unité du commencement nous la nommons PRIME son signe et ①; et chaque dixième partie de l'unité de prime nous la nommons SECONDE, son signe est ② Et ainsi pour chaque dixième partie de l'unité de son signe précédent, toujours d'ordre un de plus.

EXPLICATION

Comme 3①7②5③9④ c'est-à-dire 3 primes 7 secondes 5 tierces 9 quartes et ainsi on pourrait continuer à l'infini. Mais pour dire leur valeur il est évident que les dits nombres font $\frac{3}{10}\,\frac{7}{100}\,\frac{5}{1000}\,\frac{9}{10000}$, soit ensemble $\frac{3759}{10000}$. Pareillement 8⓪ 9① 3② 7③ valent $8\frac{9}{10}\,\frac{3}{100}\,\frac{7}{1000}$, soit ensemble $8\frac{937}{1000}$. Et ainsi pour les autres. Il faut savoir aussi que nous n'utilisons dans la DISME aucun nombre fractionnaire, et que le nombre placé devant les signes excepté ⓪ n'excède jamais le 9. Par exemple nous n'écrivons pas 7① 12② mais à la place 8①2② car ils valent autant.

- DEFINITION IV

Les nombres de la précédente et troisième définition s'appellent en général NOMBRES DE DISME.

Fin des définitions

RECHERCHE ET ETUDE DU TEXTE

A. Recherchez des documents sur les systèmes de numération anciens (babylonien, égyptien, chinois, arabe...)

Entraînez-vous à transcrire des nombres de notre système dans chacun de ceux que vous aurez trouvés et inversement.

Ces systèmes étaient-ils de base 10 ?
Si la réponse est non, quelle en est la base ?

Etaient-ce des systèmes de numération par juxtaposition ? Par position ?

B. Document : "La Disme" de STEVIN (IREM de POITIERS-Mai 1984)
p. 17 à 20

a) Qui était Stevin ? A quelle époque a-t-il vécu ? Que faisait-il ?

b) En quoi le traité de Stevin apporte-t-il une innovation dans la notation des nombres ?

c) Quelle nouvelle unité d'angle fut introduite à cette époque ? Pourquoi ?

d) Comment écririez-vous aujourd'hui le nombre que Stevin écrit 3(1)7(2)5(3)9(4)?
celui qu'il écrit 8(0)9(1)3(2)7(3)?

e) Comment Stevin aurait-il noté 17,42 ? 0,0125 ?

Remarque :

Le document ci-joint n'est qu'un très cours extrait du texte de Stevin que l'on peut trouver intégralement dans la brochure de l'IREM de Poitiers citée ci-dessus ou dans "Mathématiques et Mathématiciens" de Dedron et Itard (Ed. Magnard). L'introduction de ce traité, rédigée avec beaucoup d'humour, peut être lue avec intérêt.

LE BOULIER CHINOIS

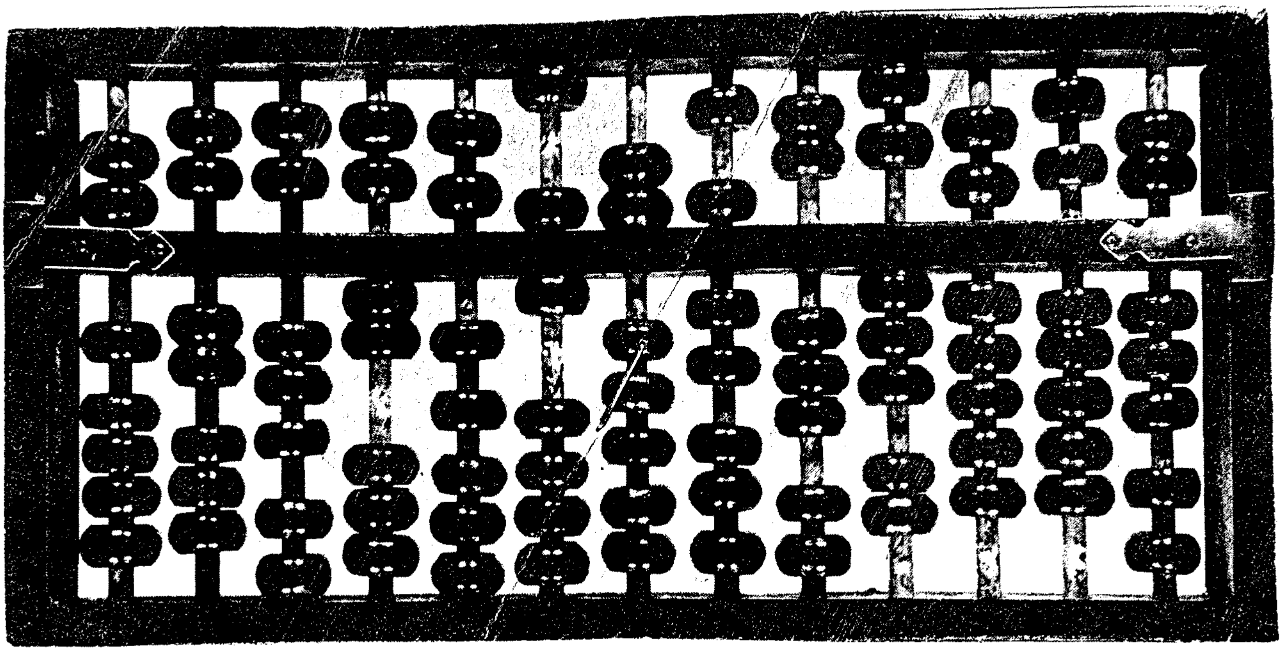
A notre époque, alors que la plupart des peuples du monde sont devenus de fervents adeptes de la calculatrice électronique, le boulier reste l'instrument de calcul le plus usuel de beaucoup de Chinois (et pas seulement de ceux qui ne savent ni lire ni écrire) et son usage n'a pas non plus complètement disparu dans bien des régions de l'ex-URSS.

Le boulier est ce que l'on appelle un abaque (du latin abacus provenant lui-même du grec ábákion : plateau-table, instrument qui fut utilisé par de nombreux peuples au cours de l'histoire : Grecs - Etrusques - Romains - peuples occidentaux, du Moyen-Age au 18è siècle. Il avait l'allure d'une table et les calculs se faisaient à l'aide de jetons et de bâtonnets (il y eut même des abaques "à poussière" : tablette remplie de sable dans lequel on écrivait avec les doigts ou une pointe). Les Romains furent les premiers à utiliser les abaques "portatifs", plus commodes d'utilisation.

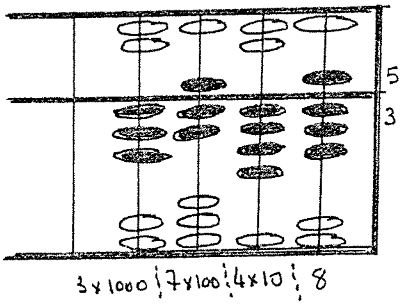
N.B. : Cette activité est beaucoup plus attrayante si on peut disposer de bouliers plutôt que de faire des schémas !

A. Le boulier chinois (Suan pan) : présentation et premières utilisations.

Il est constitué d'un cadre de bois et de tiges (dont le nombre peut être 9, 11 ou 13). Le cadre est divisé en 2 parties : la partie supérieure dans laquelle chaque tige porte deux boules (boules supérieures), la partie inférieure dans laquelle chaque tige porte 5 boules (boules inférieures). Chaque boule supérieure est égale à 5 boules inférieures (sur une tige donnée) et chaque boule inférieure est égale à 10 boules inférieures de la colonne immédiatement à sa droite.

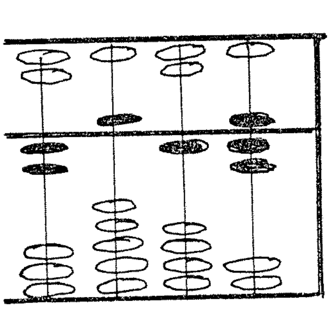


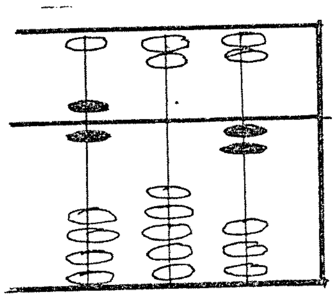
1° Représentons le nombre 3748.

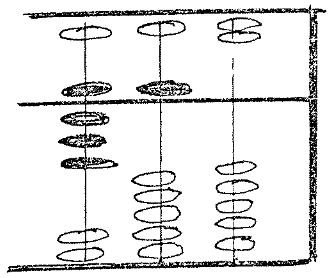


a) Représentez sur un boulier : 13 ; 19 ; 55 ; 17 216

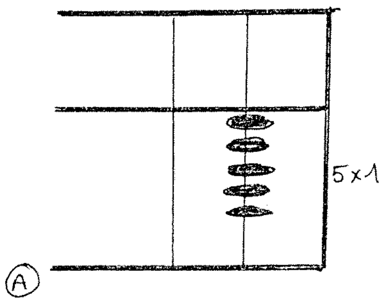
b) Quels nombres sont représentés ci-dessous ?

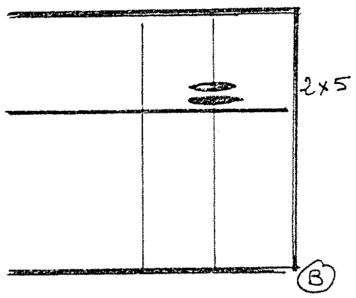




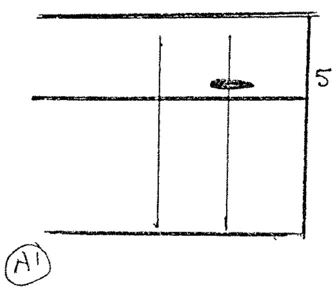


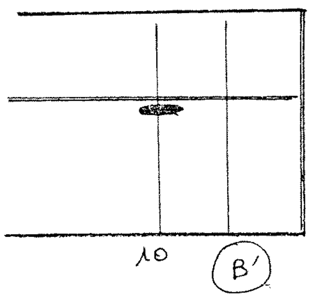
Remarque : Les dispositions suivantes :





seront systématiquement remplacées par :



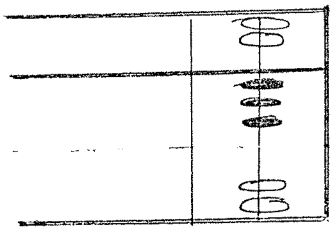


B. Opérations simples sur un boulier

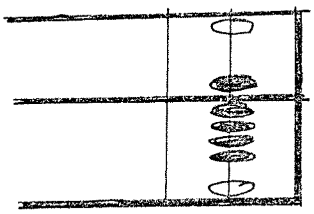
1° Addition - soustraction

a) Un exemple simple : 3 + 6.

Plaçons 3 sur le boulier (on commencera sur le dernier rang à droite)



Il faut lui ajouter 6 c'est à dire 5+1 donc abaisser une boule supérieure (qui vaut 5) et ajouter une boule inférieure

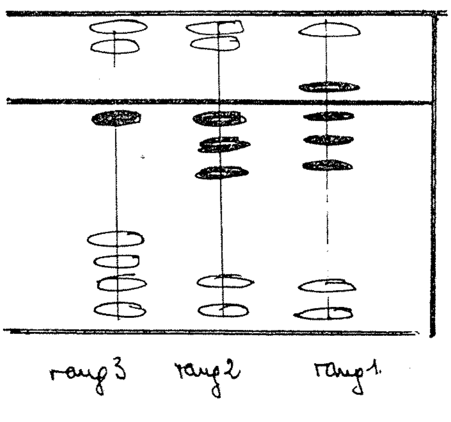


D'où le résultat : 9

b) Un exemple moins trivial : 138 + 47

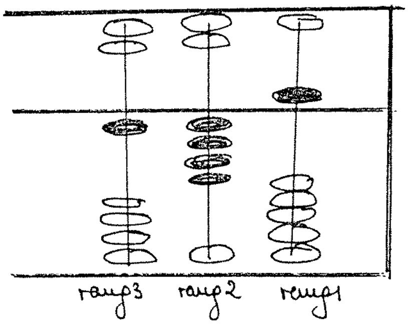
Règle pratique : Pour additionner 9 (resp 8 ; 7 ; 6), on additionnera 10 et on enlèvera 1 (resp 2 ; 3 ; 4.)

Plaçons 138 sur le boulier, le chiffre des unités (8) étant placé sur la dernière tige à droite du boulier :

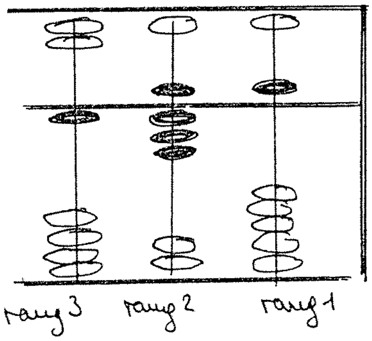


47 = 40 + 7.

Nous ajoutons d'abord 7 : ajoutons une boule inférieure au rang 2 (10) et retirons 3 boules au rang 1 :



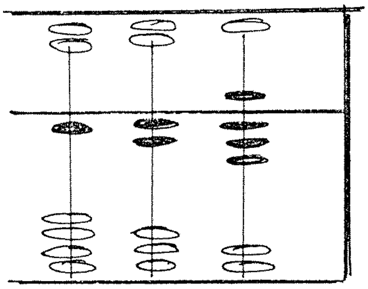
Puis ajoutons 40 c'est à dire 4 boules inférieures du rang 2... il n'y en a plus assez ! Alors nous rajouterons une boule supérieure du rang 2 (50) et nous enlèverons une boule inférieure du même rang :



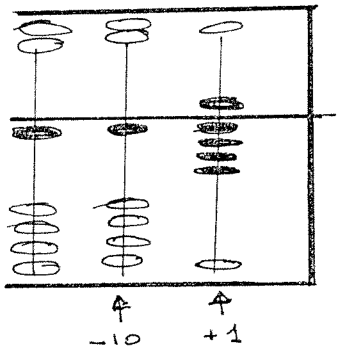
Nous pouvons maintenant lire le résultat : 185

c) Pour la soustraction on procède de façon analogue, la règle étant maintenant : pour soustraire 9 (resp 8 ; 7 ; 6 ..) on soustrait 10 et on rajoute 1 (resp 2 ; 3 ; 4 ...)

Exemple 1 : 128 - 9 :

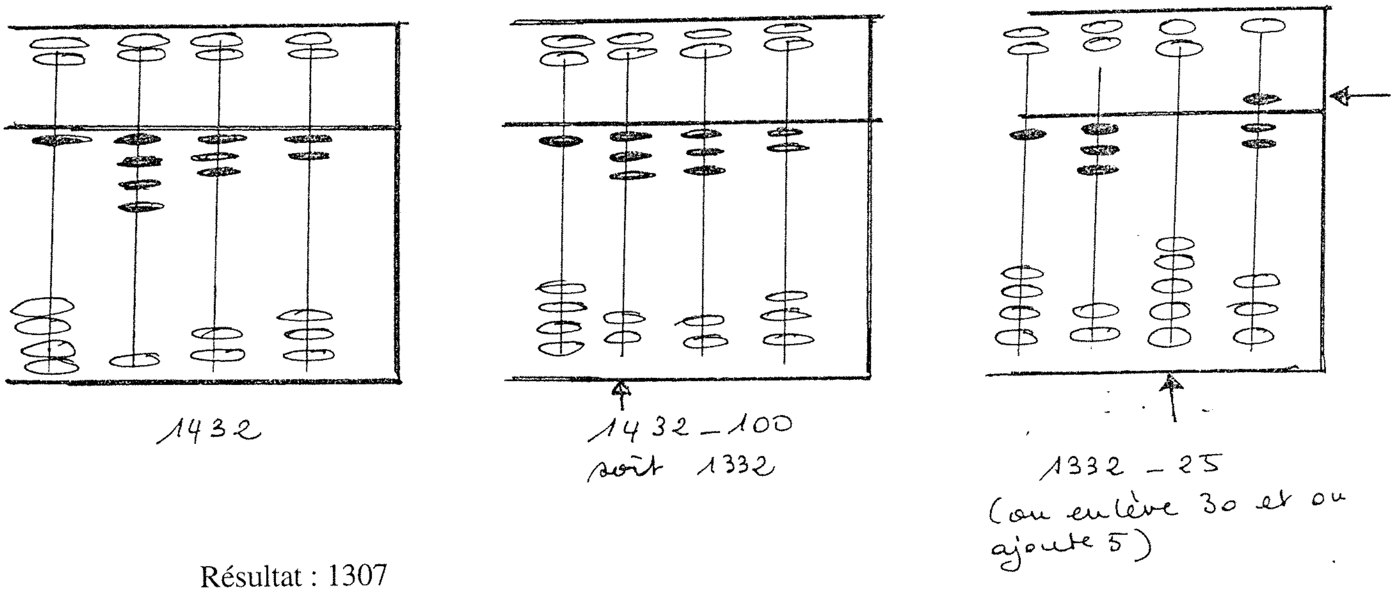


128



Resultat : 119.

Exemple 2 : 1432 - 125 :



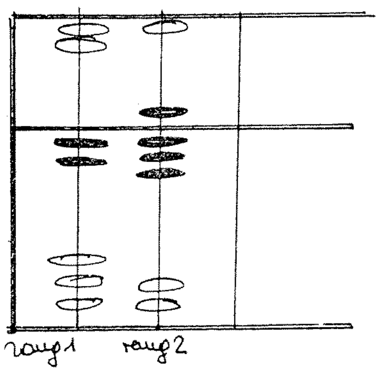
Résultat : 1307

2° Multiplication :

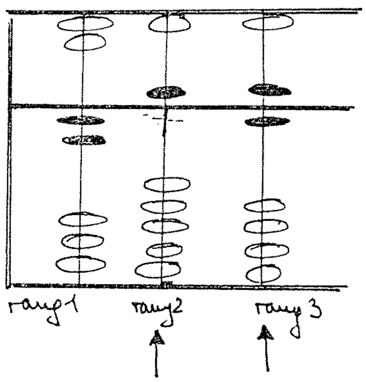
Nous ne donnerons ici que des exemples simples de multiplication (il est bon de connaître ses tables...!)

Exemple 1 : 28 x 7

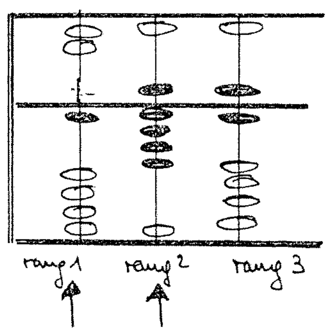
Un changement dès le départ : nous nous plaçons maintenant dans la partie gauche du boulier où nous écrivons 28 :



Nous commençons par multiplier 7 par 8, les boules qui étaient sur le rang 2 (8) disparaissent et nous écrivons alors 56 (7 x 8) à partir du rang 2 en allant vers la droite :



Ensuite nous multiplions 7 par 2, les boules représenant 2 (rang 1) disparaissent (et elles seulement) et nous écrivons alors 14 (7 x 2) en commençant au rang 1 :



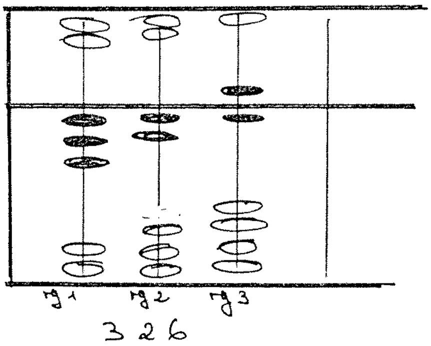
La boule qui était sur le rang 2 ne bouge pas et on lui rajoute 4 boules inférieures.

Résultat : 196

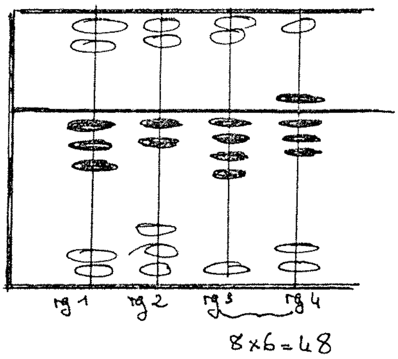
Exemple 2 : 326 x 8 :

Voici les différentes étapes du calcul :

1

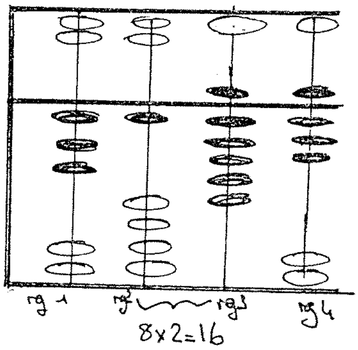


2

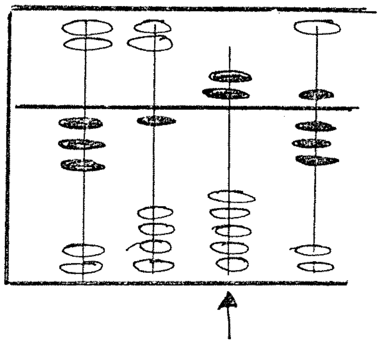


les boules du rang 3 sont enlevées avant de mettre le 4.

3

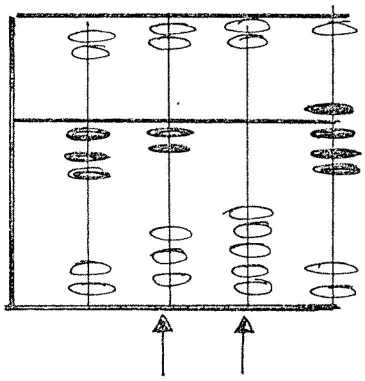


ce qui devient



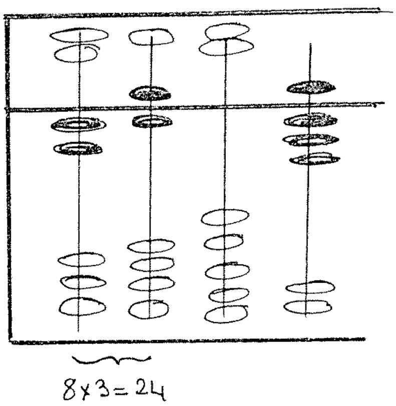
les boules de rang 2 sont enlevées avant de mettre le 1 et on rajoute 6 aux boules du rang 3

puis



enfin

4



au rang 2 on avait déjà 2, il faut y ajouter 4 ce qui revient à écrire 5 (une boule supérieure) plus 1 (1 boule inférieure)

Résultat : 2608

3° Effectuez :

28	+	65
1744	+	176
183 725	+	1 341
18 716	-	47
9 322	-	1 413
45	x	7
123	x	6
2 135	x	9

En schématisant les différentes étapes du calcul (si on ne dispose pas de boulier) on s'apercevra, après quelques expériences, que les manipulations ne sont pas plus compliquées quand les nombres utilisés sont très importants, ce qui explique peut-être l'utilisation encore actuelle par des Chinois.

LE SYSTEME BINAIRE

Pour écrire les nombres nous utilisons dix symboles : notre système est un système décimal. Il est courant de dire qu'en informatique on travaille en système binaire.

Les deux premières activités exposent la signification de cette écriture, où ne sont utilisés que le symbole 0 et 1.

Les deux activités suivantes permettent d'expliquer le rapport qui existe entre l'informatique et ce système.

LE SYSTEME BINAIRE

1° Signes utilisés

Le nombre de symboles utilisés dans les systèmes de numération sont de tout temps, objet de discussions : pour certains, 10 est la base idéale (représentée par nos dix doigts), pour d'autres les bases 12 ou 60 seraient plus pratiques (en raison de la richesse en diviseurs de ces deux nombres) alors que d'autres encore préfèreraient que la base soit un nombre premier !

Le système binaire (ou système de base 2) n'utilise que les 2 chiffres 0 et 1.

(Pour éviter toute ambiguité dans la suite, les nombres écrits en binaire seront surmontés d'une barre)

Pour bien comprendre ce qui suit, il est bon de se rappeler le rôle de 10 et de ses puissances dans notre écriture habituelle des nombres. Ce rôle est maintenant tenu par 2 et ses puissances. Les dizaines deviennent des "deuzaines", les centaines deviennent des "quatzaines"...mieux vaut arrêter là...

ainsi $\overline{10}$ représente 2 (1 deuzaine et 0 unité)
$\overline{11}$ " 3 (1 deuzaine et 1 unité)
$\overline{100}$ " 4 (1 quatzaine, pas de deuzaine, pas d'unité)

En pratique, la notation binaire utilisant des nombres ayant vite beaucoup de chiffres, il est commode d'utiliser la disposition suivante : on écrit au dessous de chaque chiffre la puissance de 2 concernée. Par exemple, quel nombre est représenté par $\overline{1010101}$?

1	0	1	0	1	0	1
↑	↑	↑	↑	↑	↑	↑
64	32	16	8	4	2	1
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	

Donc $\overline{1010101} = 1 \times 64 + 1 \times 16 + 1 \times 4 + 1$

a) Ecrire en binaire : 5, 6, 7, 8, 9, 10

b) Ecrire en décimal $\overline{1111}$; $\overline{11110}$; $\overline{11111}$; $\overline{11101}$

2° Passage du système décimal au système binaire

Nous avons vu comment s'écrivent les dix premiers entiers en binaire. Comment faire pour des nombres plus importants. L'idée est de le décomposer suivant les puissances de 2.
Par exemple : $11 = 8 + 2 + 1 = 2^3 + 2^1 + 1 = 1011$
En pratique on utilise la disposition suivante :

$$\begin{aligned} 11 &= 2 \times 5 \quad + 1 \\ &= 2 \times (2 \times 2 + 1) + 1 \\ &= 2^3 + 2 + 1 \end{aligned}$$

L'écriture en binaire s'obtient alors en "remontant" à partir du dernier quotient et en écrivant à sa suite les restes obtenus. $9=\overline{1011}$

a) Ecrire en binaire : 25 ; 33 ; 72 ; 100

3° Opérations en binaire.

a) compléter les tables d'addition et de multiplication suivantes (en système binaire) :

+	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$		
$\overline{1}$		

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{0}$		
$\overline{1}$		

b) Exercice résolu : calculons $\overline{110}+\overline{1011}$ et $\overline{110}\times\overline{1011}$

Nous allons retrouver en binaire le principe de la "retenue" bien connu en décimal :

$$\begin{array}{r} {}^{1}\,17 \\ \underline{+\ \ 5} \\ 22 \end{array}$$

7 + 5 = 12, "posons 2 et retenons 1"
(nous posons ce qui dépasse de 10)

De même pour nos opérations en binaire :

*

$$\begin{array}{r} {}^{1}\,1\,1\,0 \\ {}^{1}\,1\,0\,1\,1 \\ \text{---------} \\ 1\,0\,0\,0\,1 \end{array}$$

$\overline{110}+\overline{1011}=\overline{10001}$

en binaire $\overline{1}+\overline{1}=\overline{10}$, donc "on pose 0 et on retient 1" etc...

*

$$\begin{array}{r} 1\,0\,1\,1 \\ \underline{\text{x}\ \ \ 1\,1\,0} \\ 0 \\ 1\,0\,1\,1 \\ \underline{1\,0\,1\,1\,.} \\ 1\,0\,0\,0\,0\,1\,0 \end{array}$$

$\overline{1011}\times\overline{110}=\overline{1000010}$

Vérifions ces calculs : $\overline{1011}=1+2+8=11$ *et* $\overline{110}=2+4=6$

$11+6=17$ *or* $\overline{10001}=1+16=17$

$11\times6=66$ *or* $\overline{1000010}=2+64=66$

c) Effectuez en base 2 puis vérifiez en décimal :

$$\overline{1111} + \overline{101} \; ; \; \overline{1111} \times \overline{101}$$

$$\overline{101010} + \overline{11011} \; ; \; \overline{101010} \times \overline{11011}$$

SYTEMES LIES AU SYSTEME BINAIRE

Le système binaire, ne disposant que de deux symboles, conduit assez rapidement à des écritures longues et fastidieuses. Pour cette raison, il est plus commode d'utiliser les systèmes que nous allons étudier maintenant qui ont pour bases des puissances de 2 : le système octal (de base $8 = 2^3$) et le système hexadécimal (de base $16 = 2^{4)}$

A. Système octal et héxadécimal

	Base 8	Base 16
Chiffres utilisés	0,1,2....7	0,1,2,.....9,a,b,c,d,e,f
Exemples	$\overline{375}_{(8)} = 5+7\times 8^1 + 3\times 8^2$ $= 253$ $4938 = \overline{11512}_{(8)}$ en effet : 4938=8x617+**2** 617=8x77+**1** 77=8x9+**5** 9=8x1+**1** 1=8x0+**1**	$\overline{31ef}_{(16)} = 15\times 1 + 14\times 16^1 + 1\times 16^2 + 3\times 16^3$ $= 12783$ $4938 = \overline{134a}$ en effet : 4938=16x308+**10** (a=10) 308=16x19+**4** 19=16x1+**3** 1=16x0+**1**

1° Ecrire en décimal : $\overline{7373}_{(8)}$; $\overline{abc}_{(16)}$; $\overline{100a}_{(16)}$

2° Ecrire en octal puis en héxadécimal : 64 ; 120 ; 3612

B. Passage d'un système à un autre :

1° Justifier les règles suivantes :

<u>REGLE 1</u> :

Pour écrire en base 8 un nombre donné en binaire, il suffit de partager ce nombre en tranches de 3 chiffres en partant de la droite et de remplacer chaque tranche par le chiffre qu'il représente en base 8.

ex.: Convertir en base 8 $\overline{111100011}_{(2)}$

$\overline{111}_{(2)} = 2^2 + 2 + 1 = 7$; $\overline{100}_{(2)} = 4$; $\overline{011}_{(2)} = 3$

$\underbrace{111}_{7}\,\underbrace{100}_{4}\,\underbrace{011}_{3}$ donné en base 2

$\overline{111100011}_{(2)} = \overline{743}_{(8)}$

REGLE 2 :

Pour écrire en base 2 un nombre donné en base 8, il suffit de remplacer chacun de ses chiffres par son écriture à 3 chiffres binaires :

ex.: Convertir en base 2 $\overline{5671}_{(8)}$

$$\underbrace{101}_{5}\ \underbrace{110}_{6}\ \underbrace{111}_{7}\ \underbrace{001}_{1}$$

Ainsi : $\overline{5671}_{(8)} = \overline{101110111001}_{(2)}$

2° Ecrire en octal puis en binaire : 24 ; 36 ; 72

3° Ecrire en binaire $\overline{3746}_{(8)}$

Ecrire en base 8 $\overline{10111011}_{(2)}$

4° En vous insipirant des règles précédentes, trouver un moyen de passer de la base 2 à la base 16 et inversement (on remarquera que $8 = 2^3$ et que $16 = 2^4$)

LE SYSTEME BINAIRE EN INFORMATIQUE

A. Bits et octets

Toute l'information traitée par un ordinateur (ou une calculatrice est préalablement "codée en binaire. Au niveau des circuits électroniques, les chiffres 0 et 1 correspondront à deux niveaux de tension électrique (par exemple 0 et 5 volts). Le langage utilisé par les informaticiens diffère du langage mathématique habituel. Un chiffre binaire (0 ou 1) est appelé **bit** (c'est la contraction de l'expression anglaise "binary digit").

Les bit sont regroupés (notamment dans les mémoires) en **octets** (juxtaposition de huit bits).

1	0	0 0 1 1 0 1 0 0
Un bit	Un autre bit	Un octet

1° Combien y-a-t-il d'octets distincts ?

Un kilo-octet (ko) correspond en fait à $2^{10} = 1024$ octets, un méga-octet à $2^{20} = 1048576$ octets.

2°. Combien y a-t-il de bits dans 64 kilo-octets ?

B. Le codage des nombres

(on ne s'intéresse qu'aux nombres et résultats d'opérations, compris entre -127 et 127).

1° Le codage des entiers positifs.

Les nombres entiers positifs peuvent être directement convertis en base deux ce qui permet de les mémoriser et de calculer avec eux.

Très schématiquement, pour une addition simple comme 20+43, l'ordinateur procèdera ainsi :

Clavier	Conversion	Addition	Conversion
20	0 0 0 1 0 1 0 0	00010100	
43	0 0 1 0 1 0 1 1	00101011	
		00111111	63

2° Un codage simple des entiers relatifs.

Le codage des nombres entiers relatifs est plus délicat. Une première idée est d'utiliser un bit (le premier en général) pour indiquer le signe (0 pour +, 1 pour -) et les bits restants pour coder la valeur absolue.

Cette représentation présente le grave inconvénient de ne pas donner le résultat correct en cas d'addition, c'est pourquoi on utilise un nouveau codage : le codage en complément à deux.

3° Codage en complément à deux.

Pour coder un nombre en complément à deux, on convertit sa valeur absolue en base deux, puis on inverse tous les bits (0 devient 1 et réciproquement) et enfin on ajoute 1 au nombre binaire obtenu.

Exemples :

Pour coder -9 en complément à deux sur 1 octet :

9 s'écrit	0	0	0	0	1	0	0	1	en base deux
	1	1	1	1	0	1	1	0	on inverse les bits
	1	1	1	1	0	1	1	1	on ajoute 1

En complément à 2 sur un octet -9 s'écrit 11110111

<u>On remarquera que le premier bit reste l'indicateur du signe.</u>

Le code | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | correspond à un nombre négatif (le premier bit est 1), il est donc en complément à 2 et le décodage s'obtient par :

	1	0	0	1	0	1	1	1
retrancher 1	1	0	0	1	0	1	1	0
inverser	0	1	1	0	1	0	0	1

qui est l'écriture en base deux de 105. Le code proposé est donc celui de -105.

Codons les nombres +5 et -7 en complément à 2:

5	0	0	0	0	0	1	0	1	valeur absolue
7	0	0	0	0	0	1	1	1	valeur absolue
	1	1	1	1	1	0	0	0	inverser les bits
-7	1	1	1	1	1	0	0	1	ajouter 1

En additionnant les codes correspondants à -7 et +5 par exemple, on obtient:

-7	1	1	1	1	1	0	0	1
+5	0	0	0	0	0	1	0	1
	1	1	1	1	1	1	1	0

qui est le code d'un nombre négatif (le premier bit est 1) que l'on décode par:

1	1	1	1	1	1	0	1	retrancher 1
0	0	0	0	0	0	1	0	inverser les bits

qui correspond à 2.
En additionnant les codes de -7 et +5, on obtient bien le code de -2.

a) Additionnez de même les codes correspondant à (+5)+(+7), (-5)+(+7) et (-5)+(-7) en ignorant (s'il y a lieu) la dernière retenue (celle qui déborde de l'octet)...
Obtenez-vous les résultats escomptés ?

b) Additionnez les codes correspondant à +105 et à -105. Expliquez pourquoi le code "complément à 2" mériterait de s'appeler "complément à 2^8" ou complément à 256.

On démontre, et nous l'admettrons, que les codes en complément à deux "s'additionnent" comme des nombres écrits en base deux. Ce type de codage est celui utilisé dans les ordinateurs et calculatrices actuels.

CODAGES DE TEXTES ET D'IMAGES

A. Codage binaire du texte

Lorsqu'il ne s'agit plus d'informations numériques mais de texte par exemple, il n'existe pas d'équivalent direct en base deux. On attribue alors à chaque caractère un numéro en utilisant une table normalisée. La table la plus utilisée est le code ASCII (American Standart Code for Information Interchange). Dans la table ASCII les lettres de l'alphabet majuscule portent les numéros de 65 à 90. Elles sont dans l'ordre alphabétique.

Pour représenter une chaine de caractères, il suffit alors de juxtaposer les codes des caractères qui la compose et d'indiquer le nombre de caractères ou encore de marquer la fin de la chaine par un caractère "spécial".

1° En utilisant la table ASCII donnée en annexe décodez l'information suivante qui est composée de deux chaines le premier octet donne, pour chaque chaine sa longueur (le nombre de ses caractères) et les suivants les codes des caractères qui la composent.

0000111101010110010010010101011001000101001000000100110001000101
0101001100100000010011010100000101010100010010000101001100100000
0001000101000101010101000010000001001100001001110100100101001110
0100011001001111010100100100110101000001010101000100100101010001
0101010101000101

Indications :

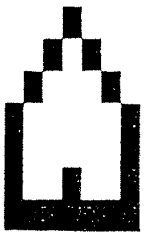
- découper en octets
- traduire chaque octet en décimal
- rechercher le caractère correspondant dans la table.

On notera qu'il est indispensable de savoir que la suite de bits donnée représente une chaine et non des nombres ou autre chose. Cette contrainte oblige les progammmeurs à déclarer le type des informations qu'ils désirent faire traiter par la machine. L'ordinateur ne peut faire la différence entre le nombre 65 et le caractère A qui dans sa mémoire sont tous deux représentés par 01000001.

B. Codage des images

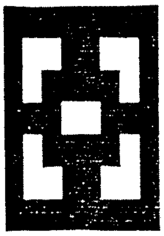
En informatique les images (en noir et blanc) sont constituées de points allumés ou éteints. Pour les coder en binaire il suffit de remplacer un point allumé par 1 et un point éteint par 0.

Exemple :La petite "maison" ci-dessous peut alors être codée sur 7 octets :

Dessin	Binaire	Décimal
	00010000	16
	00101000	40
	01000100	68
	10000010	130
	10000010	130
	10010010	146
	11111110	254

Un tel codage d'une image est appelé "bitmap".

1° Donnez l'écriture décimale des 7 octets qui décrivent le motif ci-dessous :



2° Représentez le dessin décrit par les nombres suivants (deux octets par ligne)

1, 128, 3, 208, 13, 208, 54, 160, 27, 244, 15, 248, 22, 92.
27, 224, 14, 96, 3, 128, 1, 128, 1, 128, 1, 128, 3, 192.

ANNEXE I

CODES ASCII

CARACTÈRE OU CONTRÔLE	ASCII (HEXA-DÉCIMAL)	CARACTÈRES SPÉCIAUX ET CHIFFRES	ASCII (HEXA-DÉCIMAL)	CARACTÈRES MAJUSCULES	ASCII (HEXA-DÉCIMAL)	CARACTÈRES MINUSCULES	ASCII (HEXA-DÉCIMAL)
NUL	00	SP (espace)	20	@	40	\	60
SOH	01	!	21	A	41	a	61
STX	02	' '	22	B	42	b	62
ETX	03	#	23	C	43	c	63
EOT	04	$	24	D	44	d	64
ENQ	05	%	25	E	45	e	65
ACK	06	&	26	F	46	f	66
BEL	07	/	27	G	47	g	67
BS	08	(	28	H	48	h	68
HT	09	)	29	I	49	i	69
LF	0A	•	2A	J	4A	j	6A
VT	0B	+	2B	K	4B	k	6B
FF	0C	,	2C	L	4C	l	6C
CR	0D	–	2D	M	4D	m	6D
SO	0E	.	2E	N	4E	n	6E
SI	0F	/	2F	O	4F	o	6F
DLE	10	0	30	P	50	p	70
DCA(X-ON)	11	1	31	Q	51	q	71
DC2(TAPE)	12	2	32	R	52	r	72
DC3(X-OFF)	13	3	33	S	53	s	73
DC4(TAPE)	14	4	34	T	54	t	74
NAK	15	5	35	U	55	u	75
SYN	16	6	36	V	56	v	76
ETB	17	7	37	W	57	w	77
CAN	18	8	38	X	58	x	78
EM	19	9	39	Y	59	y	79
SUB	1A	:	3A	Z	5A	z	7A
ESC	1B	;	3B	[	5B	{	7B
FS	1C	<	3C	\	5C	|	7C
GS	1D	=	3D	]	5D	}(ALT MODE)	7D
RS	1E	>	3E	Δ(↓)	5E		7E
US	1F	?	3F	–(←)	5F	DEL	7F

LES CALENDRIERS

Le soleil et la lune furent les premières horloges. Pour comprendre l'écoulement du temps les hommes observaient le ciel. Ainsi naquirent les notions de jour, de mois, d'année que vous verrez définies dans la première activité.

En général ce sont les prêtres qui fixaient les calendriers, qu'ils soient lunaires, luni-solaires ou solaires.

Cette tâche n'est pas aisée : vous le constaterez dans les deux activités suivantes.

JOUR - MOIS - ANNEE

"Le Soleil et la Lune, les "deux grands luminaires" célestes, furent les premières horloges. Les heures, le jour, le mois, l'année étaient suspendus à leur course. Les hommes impuissants à comprendre l'écoulement du temps, l'observaient dans le ciel.

Jean MATRICON

A. Le Jour :

L'alternance des jours et des nuits est sans doute le phénomène astronomique que l'on regarde en premier.

1° Qu'effectue la terre pendant la durée d'un jour de 24 heures ?
Suivant les peuples, le jour peut débuter soit au lever du soleil, soit au coucher, soit à midi.
Observons le tableau suivant :

	LEVER	PASSAGE AU MERIDIEN	COUCHER
21 mars	5 h 54 mn	11 h 58,0 mn	18 h 03 mn
22 mars	5 h 52 mn	11 h 57,7 mn	18 h 04 mn

2° Calculez la durée qui sépare :
deux levers consécutifs, deux passages au méridien consécutifs, deux couchers consécutifs.

3° En utilisant des éphémérides, calculez la durée du jour selon le moment du début adopté, à différentes époques de l'année, par exemple au changement de saison.

Note : Pour trouver les éphémérides on peut consulter le minitel code 3615 BDL, bureau des longitudes.

Le jour solaire est la durée qui sépare deux passages consécutifs au méridien. Comme il est variable, on est amené à définir un jour solaire moyen qui consiste à diviser la durée totale d'un grand nombre de jours par ce nombre de jours. L'heure est la 24ème partie d'un jour ; on définit par conséquent l'heure moyenne comme la 24ème partie du jour moyen.

B. Le Mois

Les phases de la lune ont du être un phénomène astronomique très vite remarqué par les hommes.

1° Qu'effectue la lune pendant la durée d'environ un mois ?

Très rapidement l'Humanité a pris l'habitude de regrouper les jours en lunaison ou mois lunaire. C'est la durée qui sépare deux pleines lunes consécutives. Elle varie d'un mois à l'autre, mais sa durée moyenne est d'environ 29,530588 jours c'est-à-dire 29 jours 12 heures 44 minutes.

2° Trouvez la racine du mot MOIS en français et en espagnol.
Trouvez la racine du mot MOIS en allemand et en anglais.

3° En utilisant des éphémérides, calculez la durée de différentes lunaisons.

Il est traditionnel de commencer une lunaison au moment de la nouvelle lune. On décrète le nouveau mois dès que l'on aperçoit un petit croissant ... Encore faut-il qu'il n'y ait pas de nuages !

4° Qu'effectue la terre pendant la durée d'un an ?

La durée moyenne de l'année tropique - qui règle le retour des saisons - est de 365,24 220 jours. Elle n'est pas facile à évaluer. Dans les régions où les saisons sont bien tranchées, on peut avoir une idée approximative. En fait, elle est mise en évidence par observation d'étoiles visibles la nuit.

CALENDRIERS LUNAIRE ET LUNI-SOLAIRE

" La perception du temps est rythmée par des phénomènes cycliques de la nature. Dans les îles du Pacifique, où la pêche est l'activité essentielle, les marées ont une grande importance. Dans les déserts les nomades comptent les retours de phase de la lune. Les peuples qui cultivent la terre donnent plus d'importance aux saisons qui dépendent du soleil. Mais en général ce sont les prêtres qui établissaient le calendrier : ils fixaient les dates importantes en fonction des exigences des cultes rendus aux dieux".

A. Les lunaisons

Dans un calendrier lunaire alternent en première approximation les mois de 29 et de 30 jours.

1° Calculez le nombre de jours d'une année lunaire de 12 mois

2° Sachant que la durée moyenne d'un mois lunaire est de 29 jours 12 heures 44 minutes, calculez combien il manque d'heures au bout d'une année pour être en concordance avec la lune.

B. Le calendrier musulman

Pour compenser cette erreur, les musulmans introduisent des mois lunaires consécutifs de 30 jours. Plus précisément ils utilisent un cycle de 30 années lunaires comprenant 19 années communes de 354 jours (mois alternés) et 11 années abondantes de 355 jours (un 30ème jour est ajouté au dernier mois) placées aux rangs 3, 6, 9, 11, 14, 17, 19, 22, 25, 27 et 30.

1° Vérifiez qu'au cours d'un cycle de 30 ans, le nombre de jours écoulés est à peu près égal au nombre de jours écoulés réellement lorsqu'on prend la définition du paragraphe A.

2° Un musulman vient de fêter ses 34 ans avec son calendrier. Quel est son âge avec notre calendrier ?

C. Le calendrier hébreu.

1° Calculez le retard de l'année musulmane par rapport à l'année tropique. Constatez qu'au bout de trois ans il dépasse un mois.

Dans le calendrier hébreu, les mois sont lunaires alternativement de 29 et 30 jours. Mais le rituel de Pâques est lié au printemps. Ce calendrier doit être en accord avec les saisons : c'est aussi un calendrier solaire.

C'est pourquoi un mois, celui d'ADAR est redoublé certaines années. Au départ, cette notion était : lorsque l'orge n'était pas mûr à temps, les prêtres redoublaient le mois d'Adar.
A l'époque du temple, la Nouvelle Lune, qui correspond au début d'un mois, est proclamée a Jérusalem. Elle est communiquée au reste du pays et même au delà à l'aide de torches que des émissaires brandissent du haut des montagnes.
C'est au 4ème siècle de notre ère que le calendrier est définitivement fixé. Sur un cycle de 19 années, on trouve sept années embolismiques placées aux rangs 3, 6, 8, 11, 14, 17 et 19. En fait il existe six sortes d'années, les communes (353 ou 354 ou 355 jours) les embolismiques (383 ou 384 ou 385 jours)

2° Calculez le nombre de jours écoulés - à peu près - pendant un cycle du calendrier hébreu. Comparez avec le nombre de jours écoulés pendant 19 années tropiques. La fête de Pâques se situe-t-elle toujours au printemps ?

LES CALENDRIERS SOLAIRES

A. Le Calendrier égyptien

L'année tropique est d'environ 365,2422 jours. Les Egyptiens adoptèrent 10 000 ans avant notre ère une année de 12 mois de 30 jours. Vers -4200, ils ajoutèrent 5 jours après le douzième mois : c'est le calendrier Vague.

1° Ce calendrier Vague est-il en avance ou en retard par rapport aux saisons ? Calculez le décalage au bout de 4 ans, 120 ans, 730 ans.

2° Après combien d'années ce décalage est-il d'une année entière ?

Ce décalage était perçu à cause de la coïncidence du lever de Sothis (Sirius) et du début de la crue du Nil. Tout rentre dans l'ordre au bout de 1461 ans ; c'est la période Sothiaque dont l'achèvement donne lieu à de grandes festivités (-2775 ; -1317 ; 139)

B. Le calendrier julien

Lorsque Jules César arrive au pouvoir à Rome, le calendrier est dans la confusion la plus complète, les pontifes ayant le droit de décider de la durée de l'année. Il fait appel à un astronome d'Alexandrie, Sosigène, qui propose : trois années successives de 365 jours puis une année de 366 jours avec addition d'un jour en février.

1° Que signifie le mot bissextile ? Trouvez son origine.

2° En quelle année ce calendrier fut-il imposé ?

3° Le calendrier est-il en retard ou en avance par rapport à l'année tropique ? Calculez le décalage au bout de 25 ans, 100 ans, 1000 ans.

4° Si le calendrier julien avait été conservé, en quelle année l'équinoxe de printemps aurait-il eu lieu le premier janvier ? (en 325 après J.C.cet équinoxe se produisit le 21 mars).

C. Le calendrier grégorien

Le concile de Nicée, réuni en l'an 325, avait lié la date de Pâques au 21 mars. Quelques siècles plus tard, l'Eglise s'inquiéta du glissement de la fête de Pâques vers l'été. En l'an 1582, le pape Grégoire XIII décida une réforme du calendrier julien.

1° Calculez quel fut en 1582 le retard du calendrier julien par rapport à l'équinoxe de printemps qui aurait dû se produire le 21 mars.
Pour ramener l'équinoxe au 21 mars, le pape décida de supprimer 10 jours du calendrier cette année. Pour l'Eglise romaine le lendemain du jeudi 4 octobre fut le vendredi 15. En France le lendemain du 9 décembre fut le 20.

2° Calculez le décalage pris par le calendrier julien en 400 ans.

Le pape Grégoire décida également de supprimer 3 jours en 400 ans en supprimant 3 années bissextiles en 400 ans. Depuis les années bissextiles sont celles dont le millésime est :
- soit divisible par 4 mais pas par 100
- soit divisible par 400.

Le calendrier ainsi obtenu est appelé calendrier grégorien. C'est notre calendrier actuel.

DU RAYON DE LA TERRE AU CADRAN SOLAIRE

Lorsque notre montre indique 12 heures, il n'est pas midi. Lorsqu'il est midi au soleil, que lit-on sur la montre ? La réponse se trouve dans la première activité.

Cette technique utilisant des mesures dans deux villes situées à la même latitude permet de calculer le rayon de la terre.

La dernière activité de ce thème expose la construction d'un cadran solaire.

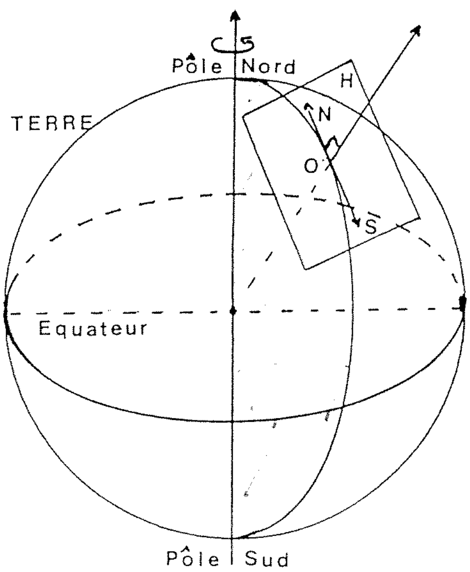
MIDI AU SOLEIL

A. Quelques définitions

Un observateur se place en un point O du globe terrestre. On considère deux plans qui contiennent O, le plan méridien et le plan de l'horizon qui se coupent suivant une droite appelée la méridienne du lieu. Elle détermine la direction Nord-Sud.

Pour l'observateur placé en O face au Sud, le soleil se lève le matin à sa gauche (vers l'Est) passe vers midi au Sud et se couche le soir à sa droite (vers l'Ouest). Lorsque le soleil est plein Sud, il est au plus haut dans le ciel au-dessus de l'horizon. Il traverse à ce moment là le plan méridien du lieu. Il est exactement 12 heures, mais il n'est pas 12 heures à notre montre.

Nous cherchons à connaître l'heure indiquée par notre montre.



//// plan méridien du lieu O.

≡ plan horizon du lieu O.

NS méridienne du lieu ou direction Nord-Sud.

B. Détermination de la méridienne du lieu

Matériel :

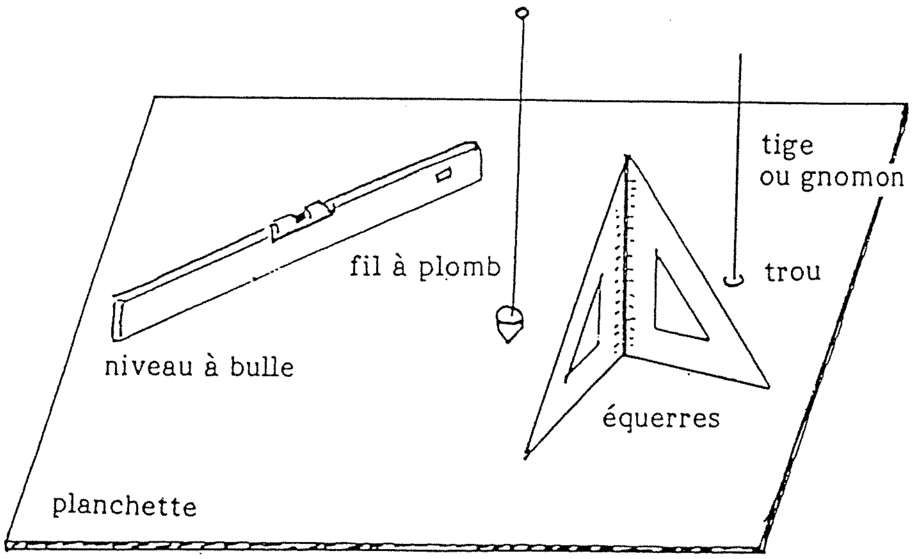
- planchette recouverte de formica (50 cm x 50 cm, environ)
- tige métallique (20 à 30 cm)
- deux équerres (ou fil à plomb)
- un niveau à bulle
- feutres effaçables et permanents

1° Préparation du matériel :

- percer dans la planchette, au milieu d'un côté, à 10 cm du bord, un trou du diamètre de la tige.

- enfoncer la tige dans le trou, perpendiculairement à la planche (utiliser les deux équerres ou le fil à plomb). (fig.1)

- installer la planchette horizontalement.



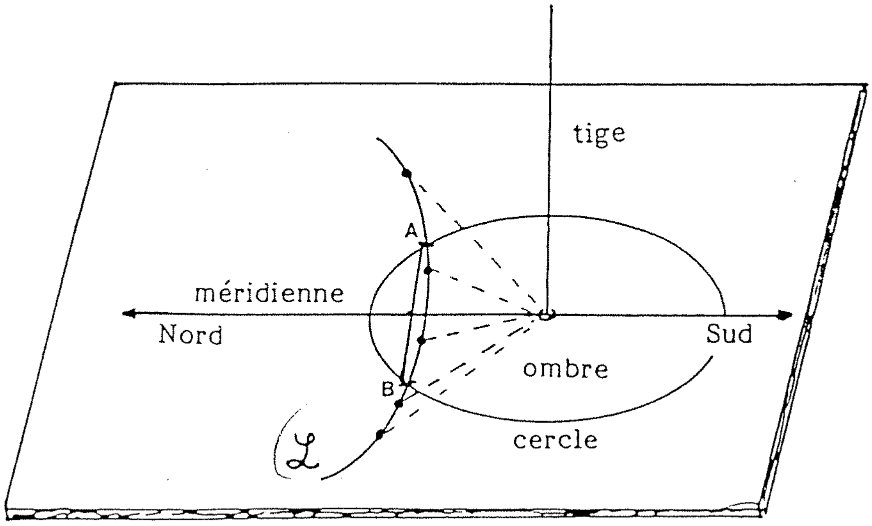
matériel (fig.. 1)

2° Tracé de la méridienne :

- au cours d'une même journée, on marque au feutre effaçable environ toutes les demi-heures (à partir de 9 heures du matin) l'extrémité de l'ombre de la tige sur la planche.

- par la suite, on trace, avec grand soin, la courbe *L* passant par les extrémités des ombres marquées(fig.2). On trace un cercle de centre O, pied de la tige, coupant la courbe *L*, en A et B.

- la médiatrice de la corde AB (qui passe par O, bien sûr), est la ***méridienne du lieu***.(plusieurs tracés de corde apportent plus de précision).

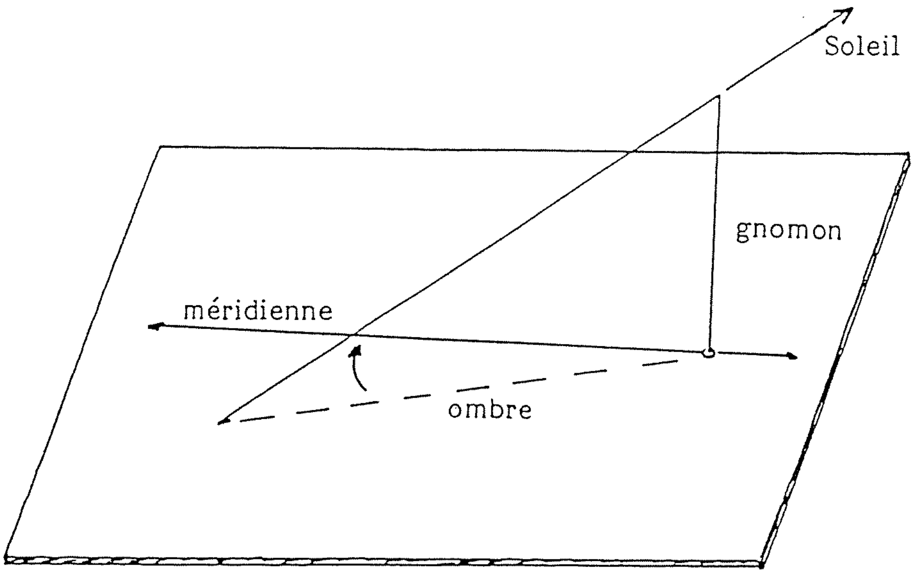


tracé de la méridienne (fig. 2)

Par la suite, on peut effacer sur la planchette les tracés ayant servi à la construction de la méridienne. Celle-ci est alors tracée au feutre permanent. La position de la planchette étant repérée au sol, il est alors possible de l'enlever en fin d'expérience et de la repositionner par la suite.

C. Heure de passage du soleil au méridien

Le plan méridien du lieu n'étant pas matérialisé, il n'est pas possible de situer l'endroit du ciel où le soleil traverse ce plan (l'endroit où le soleil culmine) et donc aussi de lire sur sa montre l'heure de son passage au méridien. On procède alors de la façon suivante :



Détermination du midi vrai (fig. 3)

Sur la planchette bien repositionnée et sur laquelle la méridienne est déjà tracée , on observe le déplacement de l'ombre du gnomon et on note alors l'heure (à 1 mn près) de la superposition de l'ombre et de la méridienne. Il est midi vrai. Essayez!

Exemple : Strasbourg le 16-4-92 : 13 h 29 mn.

On peut comparer ce résultat à celui obtenu dans l'activité Cadran solaire.

CALCUL DU RAYON DE LA TERRE

L'expérience de l'activité précédente a été réalisée en avril 1990 dans deux écoles : BARR (près de Strasbourg) et PERROS-GUIREC. Voici les heures de passage du soleil au méridien de ces deux villes.

Le 27.04.90	BARR	13 h 26 mn	(à 1 mn près)
	PERROS	14 h 10 mn	(à 1 mn près)

A. Revoyez les définitions des mots latitude et longitude. BARR et PERROS-GUIREC ont la particularité d'avoir la même latitude (48°Nord). La différence de longitude est égale au temps mis par le soleil pour passer d'un méridien à l'autre.

B. Calculez ce temps T en minutes.
En fait c'est la terre qui a tourné sur elle-même pendant ce temps T.

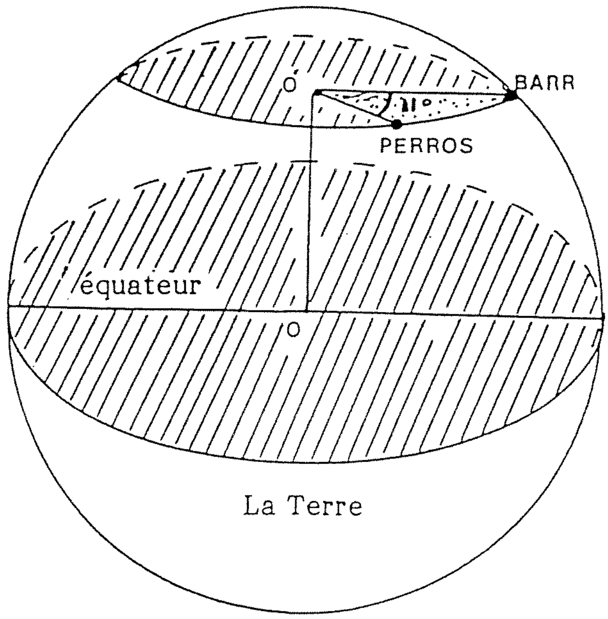
C. Exprimez ce temps en degrés

heure	24
degré	360

et donnez en degrés la différence L de longitude entre les deux villes.

D. Sur une carte de France, mesurez la distance séparant les deux villes à vol d'oiseau.
Repérez l'échelle de la carte et donnez cette distance en kilomètres

E. Calculez le périmètre et le rayon du cercle de centre O' représenté sur la figure donnée page suivante:



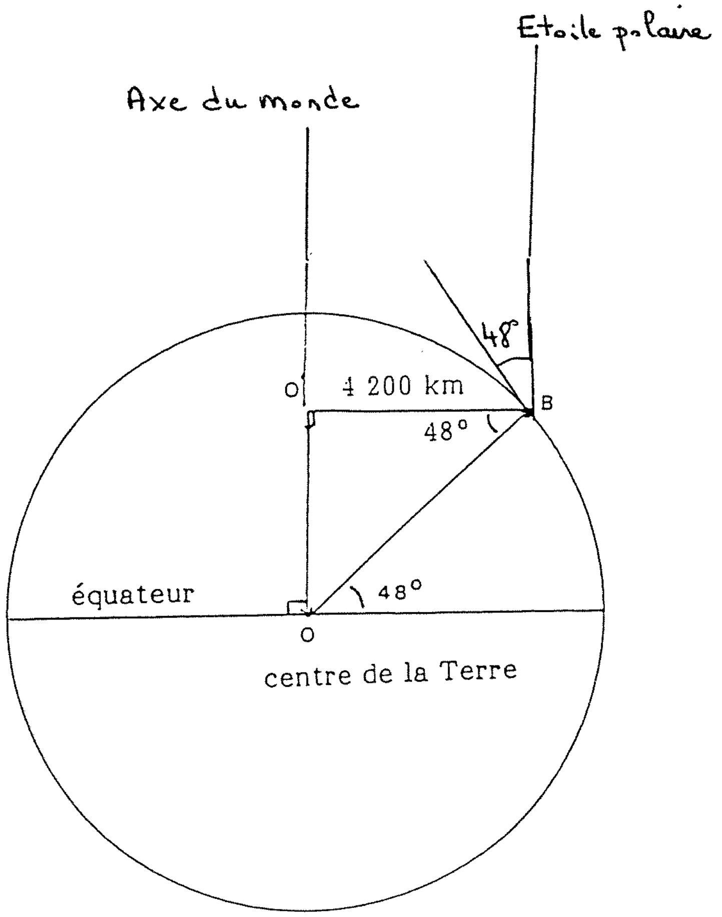
Parallèle 48°

degré	11	360
km	804	P

Calcul du rayon r:

$P = 2\pi r$ d'où

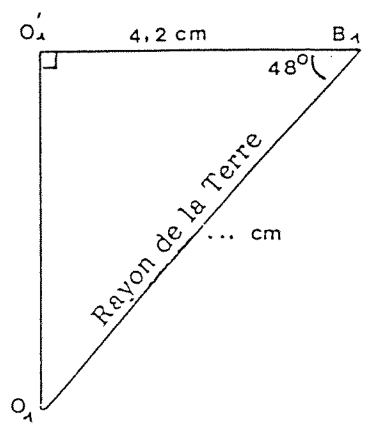
r =... km



On reproduit à l'échelle 1/100 000 000 le triangle rectangle OO'B :

1000 km-----1 cm

4200 km-----4,2 cm



On mesure sur le dessin la longueur du côté O_1B_1 :

O_1B_1 = ...cm (moyenne des mesures effectuées par les élèves)

D'où : R = ...km (rayon de la terre)

<u>Remarque</u> : Pour déterminer la latitude du lieu, une méthode consiste à mesurer la hauteur au-dessus de l'horizon de l'étoile polaire.

CONSTRUCTION D'UN CADRAN SOLAIRE

Un cadran solaire est une horloge très simple donnant l'heure solaire vraie. Il se compose d'une surface plane (parfois sphérique ou cylindrique) et d'une tige appelée gnomon ou style selon le cas.

On observe la position de l'ombre de la tige sur la table pour lire l'heure, la table étant graduée en lignes horaires correspondant aux positions de l'ombre aux heures rondes.

A. Cadran solaire horizontal

- matériel : une planchette, une tige métallique.
- information : repérer en ville (mairie ou syndicat d'initiative) la latitude et longitude du lieu.
  avoir à portée de main table ou graphique donnant l'équation du temps.
- construction : les tracés sont à faire au feutre effaçable sur la planchette (bien lisse)

. tracer la ligne N S (Nord-Sud) partageant la planchette en deux parties égales.

. choisir un point T (pied de la tige) S N assez près de S.

. tracer un segment TA de longueur arbitraire faisant avec TN un angle égal à la latitude du lieu.

. tracer en A la perpendiculaire à TA. Elle coupe TN en B

. placer sur SN le point O tel que BO=BA (B entre O et T)

. tracer la perpendiculaire x'x à S N en B.

. tracer le demi-cercle de centre O de rayon OB

. partager ce demi-cercle en 12 secteurs angulaires égaux.

Les côtés de ces secteurs coupent x'x en des points que l'on marquera ...8, 9, 10....16, 17

Au feutre indélébile :

. joindre ces points au point T (prolonger au-delà de x'x, jusqu'au bord de la planchette).

. tracer la ligne horaire 6 h - 18 h perpendiculaire à TN en T

. fixer la tige en T après avoir percé un trou et l'incliner d'un angle égal à la latitude du lieu, le plan contenant la tige et la droite SN étant perpendiculaires à la planchette (voir figure)

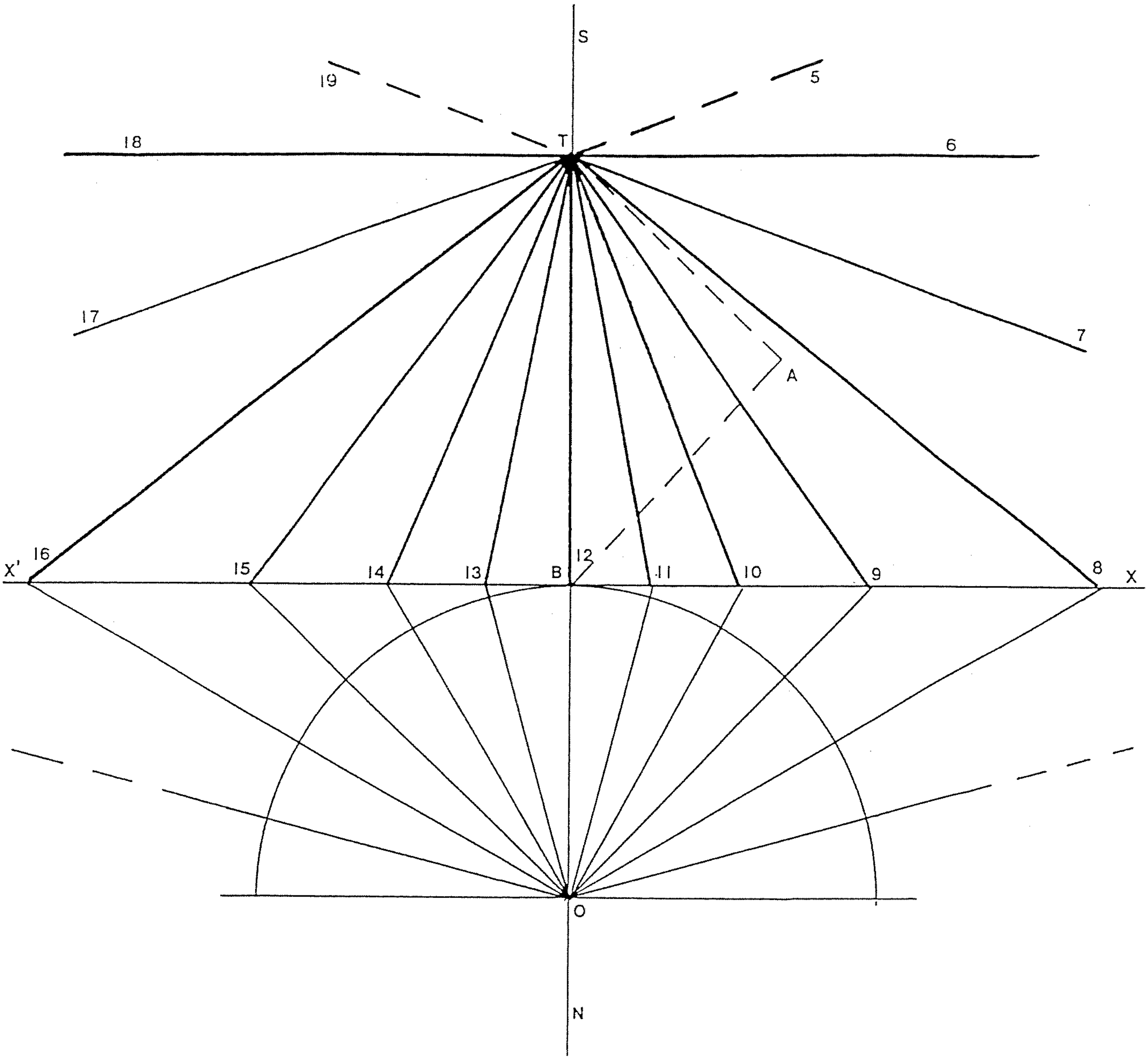
. placer le cadran horizontalement de telle sorte que la ligne NS soit parallèle à la méridienne du lieu préalablement déterminée. La tige appelée pour un tel cadran "style" est alors parallèle à l'axe du monde (axe de la Terre)

B. Quelle heure est-il ?

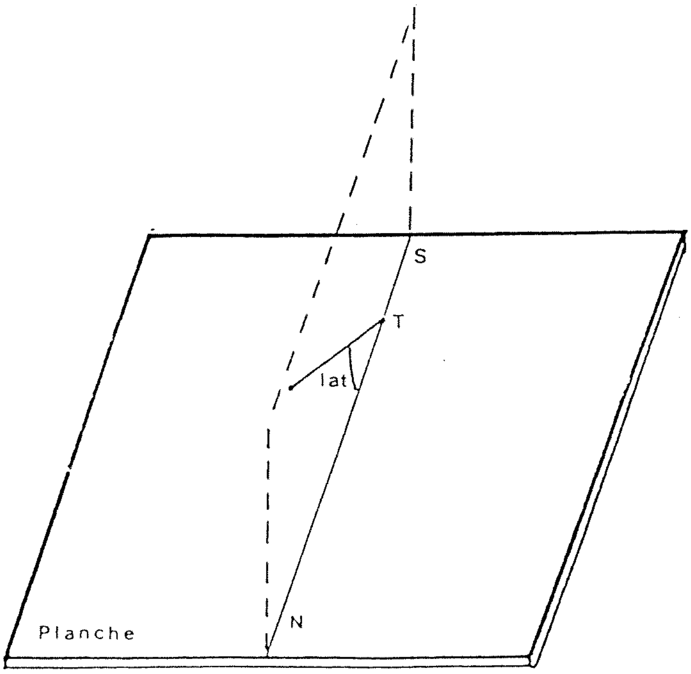
Quand le soleil passe au méridien, il est midi vrai ; l'ombre du style est sur la méridienne (ligne NS). Le cadran indique 12 h.
On appellera heure solaire T_S l'heure indiquée par le cadran.
A partir de cette lecture, comment obtenir l'heure légal T_L(heure de la montre) ?
La formule est la suivante :

$$T_L = T_S + E + L + N \quad \text{où}$$

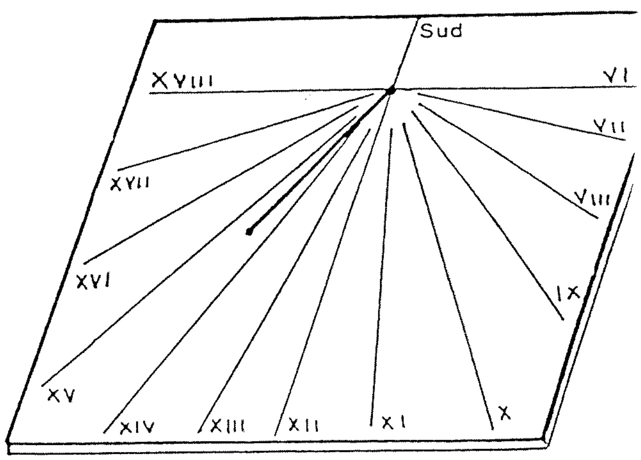
E : équation du temps (en général en minutes)
L : longitude du lieu (exprimée en h; mn)
N : fuseau horaire du lieu (en h).



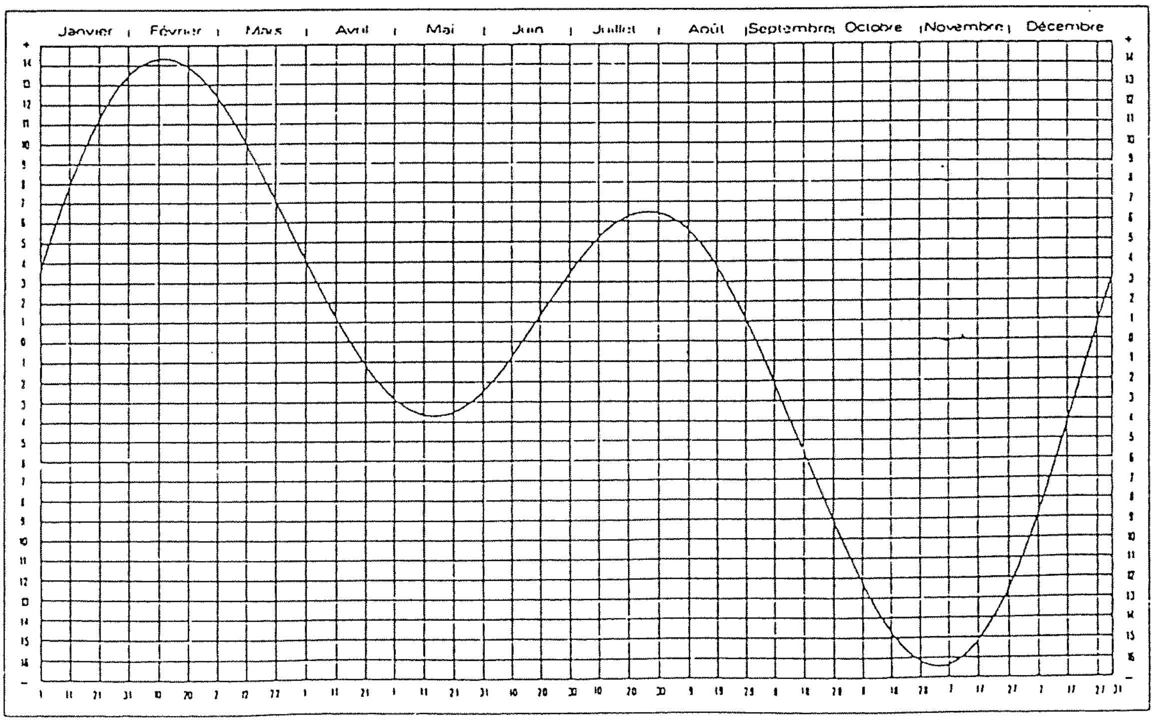
S
19
5
18
T
6
17
7
A
X'
16
15
14
13
B
12
11
10
9
8
X
O
N



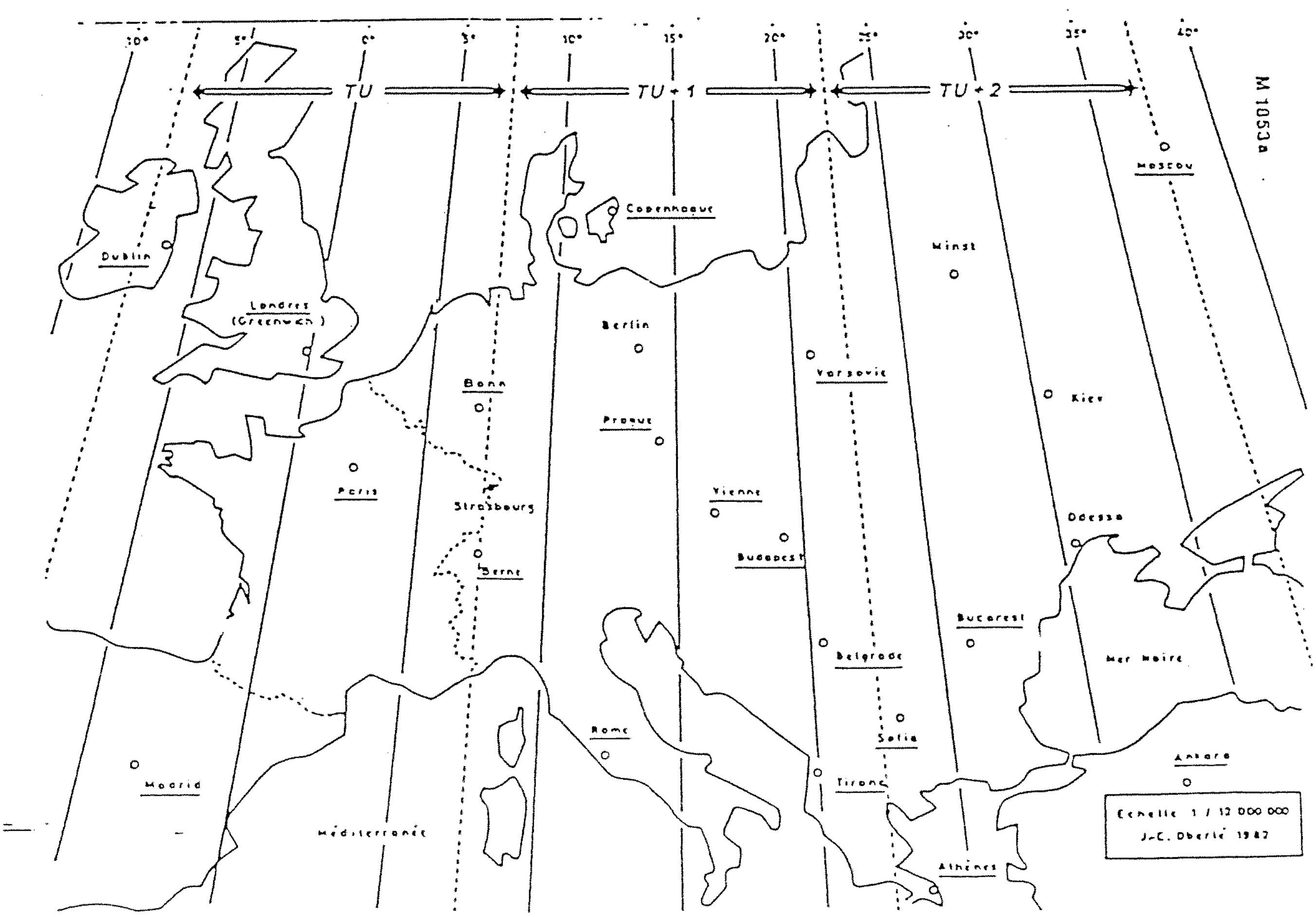
S
T
lat
N
Planche



Sud
XVIII
VI
VII
XVII
VIII
XVI
IX
XV
X
XIV
XIII
XII
XI



– Équation du temps.



Fuseaux horaires

UN PEU DE MECANIQUE CELESTE

Ce thème culturel vous propose dans une première activité de constituer un dossier pour situer quelques grands noms dans l'histoire. La deuxième activité est une étude commentée d'un texte de Bertholt BRECHT traitant d'une découverte historique de premier plan qui a révolutionné notre conception du système solaire. Pour finir quelques exercices permettant de se familiariser avec les distances astronomiques.

LES GRANDES ETAPES HISTORIQUES

Constituez un dossier en suivant le plan ci-dessous :

A. L'antiquité :

. Quelles étaient les connaissances des astronomes Babyloniens, Egyptiens, Chinois ?

. L'apport des Grecs fut fondamental : Trois grandes écoles s'illustrèrent en Astronomie Lesquelles ? Pour chacunes citez deux astronomes et leurs découvertes.

. Faites un bilan des connaissances à la fin de la période grecque :
Mouvement de la terre - Mesure de distances astronomiques - Mouvement des étoiles.

. Présentez le système de Ptolémée et placez le dans son contexte historique :
de quand date-t-il ? Jusqu'à quand fut-il accepté ?

. Quel est le rôle des Arabes ?

B. La renaissance

.Vie et Oeuvre de Nicolas Copernic. Pourquoi sa théorie ne fit-elle pas beaucoup de bruit à son époque ?

. Tycho-Brahé : précisez son apport à l'Astronomie.

. Quelle est l'importance de Galilée pour le système de Copernic

. Précisez la vie et l'oeuvre de Johannes Keppler.

C. Le 17 ^{ème} siècle.

. Rôle de Newton dans l'histoire de l'Astronomie : les principes de la mécanique.

Bibliographie :

Encyclopédia Universalis (Article Histoire de l'Astronomie, Copernic etc...)
Galilée, le Messager des Etoiles (Edition Gallimard Découvertes)
Revue du Palais de la Découverte N° Spécial 13 Découverte de l'Univers (mai 1978)

LA DECOUVERTE DES SATELLITES DE JUPITER

Dans cette scène tirée de "La Vie de Galilée" de Bertholt BRECHT, Galilée et son ami Sagredo observent le ciel à l'aide de la lunette, inventée en Hollande, mais perfectionnée par Galilée.

La scène se situe à Venise le 10 janvier 1610.

SAGREDO *hésite à s'approcher de la lunette* : Galilée, je ressens quelque chose comme de la peur.

GALILEE : Je vais te présenter maintenant un des brouillards brillants et laiteux de la voie lactée. Dis-moi de quoi il est fait !

SAGREDO : Ce sont des étoiles, sans nombre.

GALILEE : Rien que dans la constellation d'Orion, il y a cinq cents étoiles fixes. Ce sont les multiples mondes, les innombrables autres mondes, les astres plus lointains dont a parlé celui qui a été brûlé. Il ne les a pas vus, il les attendait !

SAGREDO : Mais même si cette terre est une étoile, il y a encore un long chemin à faire jusqu'aux affirmations de Copernic, selon lesquelles elle tourne autour du soleil. Dans le ciel, il n'y a pas d'astre autour duquel un autre tourne. Mais autour de la terre, la lune, elle, tourne toujours.

GALILEE : Je me le demande, Sagredo. Depuis avant-hier, je me le demande. Voici Jupiter. (*Il règle la lunette.*) En effet, il y a là près de lui quatre étoiles plus petites qu'on ne peut voir qu'à travers le tube. Je les ai vues lundi, mais sans prendre spécialement garde à leur position. Hier j'y ai jeté de nouveau un coup d'oeil. J'aurai pu jurer que toutes les quatre avaient changé de position. Je les ai notées. Elles ont de nouveau changé de place. Que se passe-t-il ? J'en ai pourtant vu quatre. (*Emu*:) Tiens, regarde !

SAGREDO : j'en vois trois

GALILEE : Où est la quatrième ? Voici les tables. Il faut que nous calculions quels mouvements les étoiles ont pu faire.

Excités, ils se mettent au travail. La scène devient sombre mais on continue à voir l'horizon circulaire Jupiter et ses satellites. Quand il refait clair, les deux hommes sont toujours assis, vêtus de manteaux d'hiver.

GALILEE : C'est démontré. La quatrième ne peut qu'être passée derrière Jupiter, où on ne la voit pas. Maintenant tu as un astre autour duquel un autre tourne.

SAGREDO : Mais l'enveloppe de cristal à laquelle est rivé Jupiter ?

GALILEE : Oui, où est-elle à présent ? Comment Jupiter pourrait-il être rivé si d'autres étoiles tournent autour de lui ? Pas de support dans le ciel, pas d'attache dans l'univers ! Un autre soleil !

SAGREDO : Calme-toi. Tu penses trop vite.

GALILEE : Quoi, vite ! Bon sang, échauffe-toi ! Ce que tu vois, personne encore ne l'a vu. Ils avaient raison !

SAGREDO : Qui ? Les partisans de Copernic ?

GALILEE : Et l'autre ! Le monde entier était contre eux, et ils avaient raison. Cà, c'est quelque chose pour Andréa !
*(Exalté, il court à la porte et crie à la cantonade :)*Madame Sarti ! Madame Sarti !

SAGREDO : Galilée, calme-toi !

GALILEE : Sagredo, échauffe-toi ! Madame Sarti !

SAGREDO *détourne la lunette* : Vas-tu cesser de brailler partout comme un insensé ?

GALILEE: Vas-tu cesser de rester là comme une buse quand la vérité est découverte ?

SAGREDO : Je ne reste pas là comme une buse, mais je tremble que ce ne soit la vérité.

GALILEE: Quoi ?

SAGREDO , As-tu perdu tout bon sens ? Oublierais-tu vraiment dans quelle affaire tu t'engages si ce que tu vois est vrai ? Et si tu vas crier sur toutes les places publiques que la terre est une étoile, et non le centre de l'univers ?

GALILEE : Oui, et que ce n'est pas tout le gigantesque univers, avec tous ses astres, qui tourne autour de notre terre minuscule, comme chacun pouvait se le dire !

SAGREDO : Qu'il n'y a donc que des astres ! - Et Alors, où est Dieu ?

GALILEE : Que veux-tu dire ?

SAGREDO : Dieu ! où est Dieu ?

GALILEE, *en colère* : Pas là-bas ! Pas plus qu'il ne se trouverait ici sur la terre s'il y avait là-bas des êtres qui auraient à le chercher ici !

SAGREDO : Et alors où est Dieu ?

GALILEE : Suis-je théologien ? Je suis mathématicien.

SAGREDO : Avant tout, tu es un homme. Et je te demande : où est Dieu dans ton système ?

GALILEE : En nous ou nulle part !

SAGREDO, *criant* : Comme disait celui qu'on a brûlé ?

GALILEE : Comme disait celui qu'on a brûlé !

SAGREDO : C'est pour ça qu'on l'a brûlé ! Il y a moins de dix ans !

GALILEE : Parce qu'il ne pouvait rien démontrer ! Parce qu'il affirmait seulement ! Madame Sarti !

SAGREDO , Galilée, je t'ai toujours connu malin. Pendant dix-sept ans à Padoue et pendant trois ans à Pise tu as patiemment enseigné à des centaines d'élèves le système de Ptolémée, que l'Eglise proclame et l'Ecriture confirme, le système sur lequel l'Eglise est fondée. Avec Copernic, tu le tenais pour faux, mais tu l'enseignais.

GALILEE : Parce que je ne pouvais rien démontrer.

SAGREDO, *incrédule :* Et tu crois que ça fait une différence ?

GALILEE : Toute la différence ! Tu vois, Sagredo ! Je crois en l'homme, et ça veut dire que je crois en sa raison ! Sans cette croyance, je n'aurais pas la force de me lever le matin de mon lit.

SAGREDO : Alors, je vais te dire quelque chose : moi je n'y crois pas. Quarante années parmi les homme n'ont cessé de m'enseigner qu'ils ne sont pas accessibles à la raison. Montre-leur la queue rouge d'une comète, insuffle-leur une sourde angoisse et ils se précipiteront hors de chez eux et se casseront la jambe. Mais dis-leur une chose raisonnable, donne-leur trente-six explications, et ils se moqueront tout simplement de toi.

GALILEE : C'est complètement faux et c'est une calomnie. Je ne comprends pas comment, croyant une chose pareille, tu peux aimer la science. Il n'y a que les morts que les explications n'atteignent plus !

SAGREDO : Comment peux-tu confondre avec la raison leur pitoyable ruse !

GALILEE : Je ne parle pas de leur ruse. Je sais que l'âne, ils le baptisent cheval quand ils veulent le vendre, et le cheval âne quand ils veulent l'acheter. C'est ça leur ruse. La vieille qui, de sa main rude, le soir avant le voyage, donne au mulet une botte de foin supplémentaire ; le marin qui, lorsqu'il achète les vivres, prévoit la tempête et le calme plat ; l'enfant qui enfonce son bonnet quand on lui a démontré qu'il peut pleuvoir, tous sont mon espérance, tous tiennent compte des explications. Oui, je crois en la douce violence de la raison sur les hommes. A la longue, ils ne peuvent lui résister. Personne ne peut supporter longtemps (*il lâche une pierre*) que je laisse tomber une pierre et que je dise en même temps : elle ne tombe pas. Personne n'en est capable. La séduction est trop grande, qui émane d'une preuve. La plupart y succombent, à la longue, tous. Penser fait partie des plus grands plaisirs de la race humaine.

SAGREDO : Galilée, je te vois sur une route qui épouvante. C'est une nuit de malheur, celle où l'homme voit la vérité. Et une heure d'aveuglement, celle où il croit à la raison de l'espèce humaine. De qui dit-on qu'il marche les yeux ouverts ? De celui qui marche à sa perte. Comment les puissants pourraient-ils laisser courir quelqu'un qui sait la vérité, quand bien même elle ne concernerait que les astres les plus lointains ! Penses-tu que le pape entendra ta vérité si tu dis qu'il se trompe, et qu'il n'entendra pas qu'il se trompe ? Crois-tu qu'il consignera simplement dans son journal : 10 janvier 1610, ciel supprimé ? Comment peux-tu vouloir quitter cette République, la vérité dans la poche, et te jeter, avec ta lunette à la main, dans les pièges des princes et des moines ? Toi si méfiant dans ta science, tu es naïf comme un enfant dans tout ce qui paraît te faciliter sa pratique. Tu ne crois pas à Aristote, mais au grand-duc de Florence. Tout à l'heure, quand je t'ai vu auprès de la lunette et que tu voyais ces nouvelles étoiles, il m'a semblé que je te voyais sur des fagots brûlants, et quand tu disais que tu croyais aux preuves, je respirais l'odeur de la chair brûlée. J'aime la science, mais toi je t'aime encore plus, mon ami. Ne va pas à Florence, Galilée !

GALILEE : S'ils me prennent, j'y vais.

Sur un rideau apparaît la dernière page de la lettre :

" Quand j'attribue aux nouvelles étoiles que j'ai découvertes le noble nom de la lignée médicéenne, je suis conscient que si l'accession des dieux et des héros au ciel étoilé a suffi à leur glorification, à l'inverse, dans le cas présent c'est le noble nom des Médicis qui vaudra aux étoiles de rester éternellement dans les mémoires. Quant à moi, je me rappelle à votre souvenir comme comptant au nombre de vos plus fidèles et dévoués serviteurs, qui se fait une gloire suprême d'être né votre sujet. "

" Mais je n'aspire à rien tant qu'à être plus proche de vous, du soleil levant qui éclairera ce siècle. "

Galileo Galilei

Bertholt Brecht
Théâtre complet -4-
Edition L'ARCHE
La vie de Galilée
p. 61-62-63-64-67.

Trouvez à partir du texte les réponses aux questions suivantes :

A. Quelles sont les deux découvertes de Galilée en Astronomie évoquées dans cette scène ?

B. Galilée et son ami calculent les mouvements des étoiles à l'aide de tables. De quelles tables peut-il s'agir ?

C. Cherchez dans une encyclopédie ce que signifie " l'enveloppe de cristal où est rivé Jupiter".

D. Quel était le système astronomique enseigné par Galilée à Padoue et à Pise ? Y croyait-il ? Pourquoi devait-il l'enseigner ?

E. Quel est l'homme évoqué par Galilée quand il dit :
"Les astres plus lointains dont a parlé celui qui a été brûlé".

F. Pourquoi l'observation des satellites de Jupiter est-elle un argument en faveur de la thèse de Copernic ?

Citez le passage qui l'explique.

G. Comment Galilée baptise-t-il les quatre satellites de Jupiter qu'il observe cette nuit-là ? En l'honneur de qui ?

Cherchez leur nom actuel. Combien connaît-on aujourd'hui de satellites de Jupiter ?

H. Contre quoi Sagredo met-il en garde Galilée qui veut partir à Florence

I. Cherchez les principes philosophiques qui s'opposent au système de Copernic.

QUELQUES EXERCICES LIES A L'ASTRONOMIE

N° 1 Distances en Astronomie

Le plus gros des astéroïdes, **Cérès**, découvert en 1801 est situé à une distance moyenne de 413,83 millions de kilomètres du soleil.

Exprimez cette distance en U. A. et en minutes de lumière

Rappels : a) Unité astronomique (U.A.) C'est la distance moyenne de la Terre au Soleil.

1 U A = 1,4959 x 10^{11} m soit environ 149,6 millions de km.

b) Vitesse de la lumière : 300 000 km/s.

N°2 Des distances astronomiques

PLANETES	Distance moyenne au soleil				Distances extrêmes (périhéli aphélie) 10^6 km	Période de révolu tion		Durée de ré volut tion syno dique (jours)	Vitesse moyen ne sur orbite (km/s)	Excen tricité de l'orbite	Incli naison de l'orbite sur l'éclip tique
	en unités astrono-miques	en millions de km	en mn de lumière	en rayons solaires		Jours	Années				
MERCURE	0,387	57,92	3,22	83,0	45,9/69,8	87,97	0,241	115,88	47,87	0,2058	7,00
VENUS	0,723	108,25	6,01	155,5	107,4/109,0	224,70	0,615	583,92	35,03	0,0068	3,39
TERRE	1	149,60	8,47	214,6	147,1/152,1	365,28	1,000	--	29,77	0,0167	0
MARS	1,524	227,95	12,67	327,0	206,7/249,1	686,97	1,881	779,94	24,12	0,0934	1,85
JUPITER	5,203	778,3	43,3	1 118	740,9/815,7	4382,6	11,862	398,9	13,06	0,0485	1,31
SATURNE	9,539	1 428	79,3	2 054	1 348/1 508	10759,2	29,458	378,1	9,64	0,0556	2,49
URANUS	19,182	2 870	159,5	4 131	2 735/3 005	30688	84,013	369,7	6,80	0,0468	0,77
NEPTUNE	30,058	4 497	250,0	6 472	4 456/4 538	80 189	164,79	367,5	5,43	0,0088	1,78
PLUTON	39,44	5 900	328,0	8 485	4 425/7 375	90 472	247,69	366,6	4,73	0,2494	17,22

Diamètre du soleil : 1 391 994 km Masse de la terre 5,974 x 10^{24} kg

a) En supposant que le soleil soit représenté par un cercle de diamètre 5 cm, quels seront les diamètres des représentations des planètes sur un plan à l'échelle du système solaire ? Quelle sera la distance Soleil-Pluton sur cette représentation ?

b)Réalisez un plan à l'échelle du système solaire sans vous préoccuper de la taille des planètes.

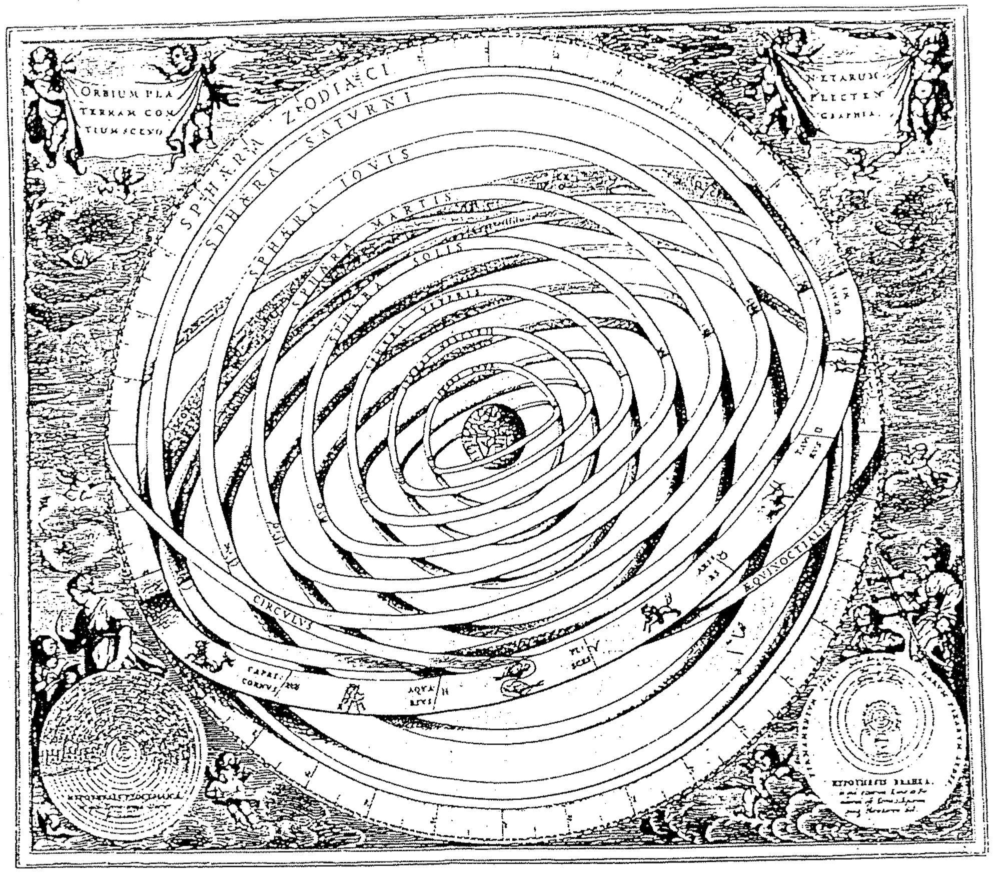
c) Réalisez un dessin comparatif, à l'échelle de la taille des planètes du système solaire

d) L'étoile α du centaure est la plus proche du soleil (4,2 années-lumière). Si cette distance est représentée par 10 cm sur une carte à l'échelle, quelles seront les longueurs des représentations des distances Terre-Soleil et Soleil-Pluton ?

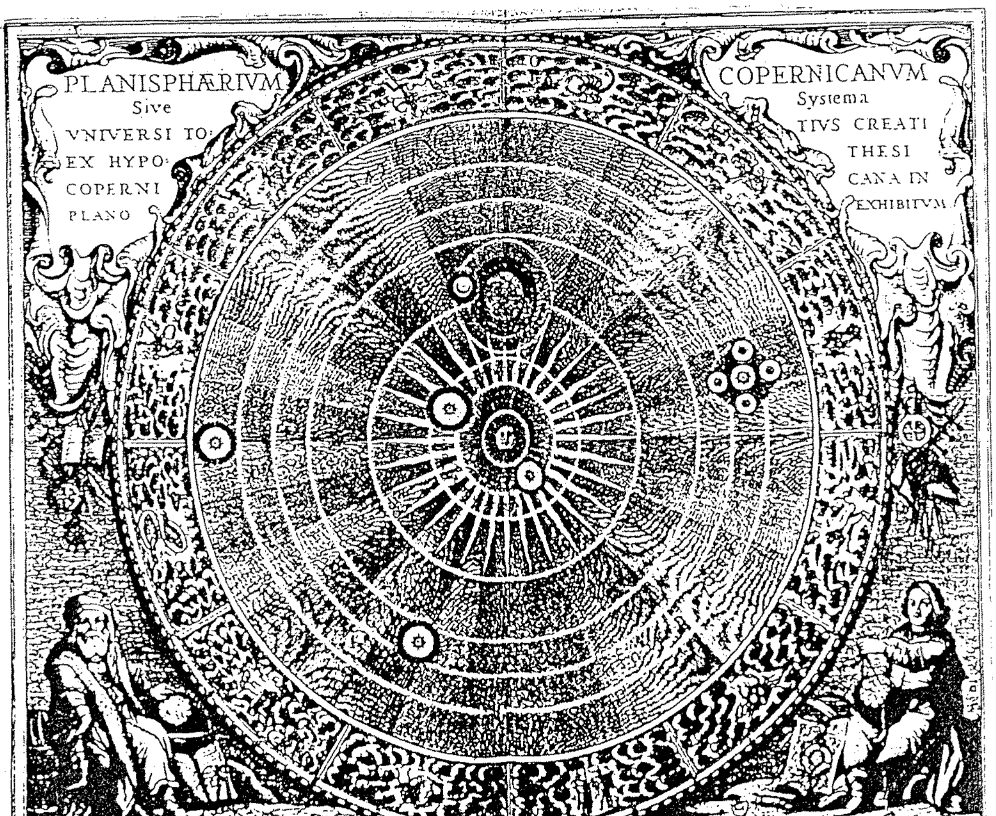
e) On veut réaliser un plan de la Voie lactée, notre galaxie (100 000a.l. de diamètre) sur une feuille de format A4. Sera-t'il possible de distinguer l'étoile α du centaure et le soleil ?

f) Quel est le nom de la galaxie la plus proche de la Voie lactée ? A quelle distance se situe-t-elle ?
Calculez le rapport du diamètre de notre galaxie sur cette distance.

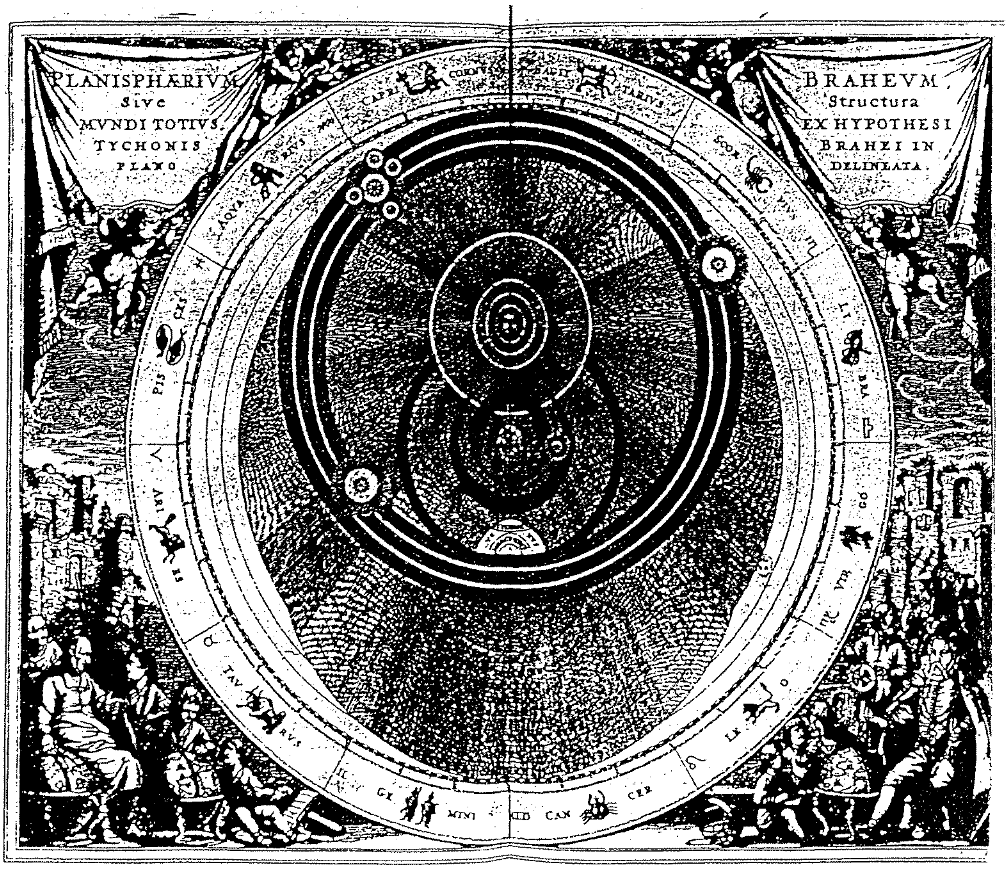
Les trois systèmes du monde rivaux : les systèmes de Ptolémée (168 après J.C), de Copernic (1473-1543) et de Tycho Brahé (1546-1601)



Dans le système géocentrique de Ptolémée, la Terre est immobile au centre de l'Univers ; les sept premières sphères portent les « planètes » (Lune et Soleil compris), et la huitième, les étoiles.



Pour Copernic et son système héliocentrique, le Soleil est immobile au centre de l'Univers ; la Terre et son satellite, la Lune, ainsi que les (autres) planètes tournent autour de lui ; le mouvement des étoiles n'est qu'apparent, dû à la rotation de la Terre.



Enfin, le système du monde de Tycho Brahé est intermédiaire entre les deux premiers : la Terre est à nouveau immobile au centre de l'Univers et le Soleil tourne autour d'elle ; la différence provient des (autres) planètes qui tournent autour du Soleil en l'accompagnant dans son mouvement autour de la Terre.

Ces gravures de 1661 illustrent bien le conflit de préséance et de magnificence entre le Soleil et la Terre. Les planètes ont des zones d'influence plutôt que des trajectoires. Les satellites de Jupiter, découverts par Galilée, sont indiqués.
(Gravures in A. Cellarius, Harmonia macrocosmica, seu Atlas universalis et novus, 1661 ; Bibl. nat. Paris. Ph. © Bibl. nat./Photeb.)

PROBABILITES

Ce thème propose plusieurs activités qui vous permettront de vous familiariser avec les notions de probabilités qui figurent dans les programmes de première et de terminale. Traitées dans l'ordre, elles ne nécessitent aucune connaissance préalable.

"Des proportions sur un arbre" décrivent l'outil ARBRE utilisé dans tout le thème.

"Stimulons le hasard" introduit la notion de probabilité à partir de celle de fréquence.

"Tourn' en rond" et "la case trois fatale" reprennent et approfondissent les notions abordées dans les deux premières activités.

"L'épicerie" constitue une première approche des probabilités conditionnelles, qui sont introduites de manière explicite dans "les urnes".

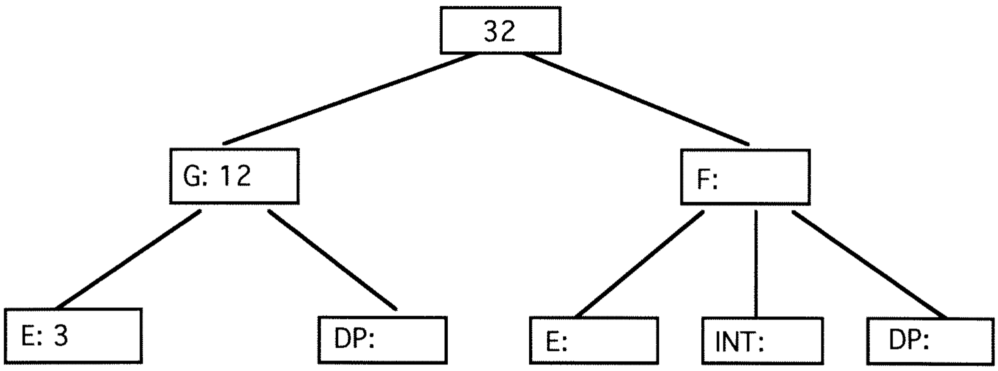
"Les multiples" et **"la kermesse"** sont deux autres activités sur ce sujet.

Les deux dernières activités proposent des analyses de textes historiques au sujet du problème des partis par **"la méthode de Pascal"** et **"la solution de Fernat"**.

DES PROPORTIONS SUR UN ARBRE

A.
Dans une classe il y a 32 élèves. Parmi ces élèves il y a 12 garçons. Parmi les garçons il y a 3 externes, les autres sont demi-pensionnaires. Parmi les filles il y a 16 externes, une interne, les autres sont demi-pensionnaires.

1° Réorganisez ces informations en complétant l'arbre ci-dessous :



Pour les questions 2 à 5, on donnera les résultats sous forme d'une fraction, puis d'un pourcentage, puis d'un nombre décimal compris entre 0 et 1.

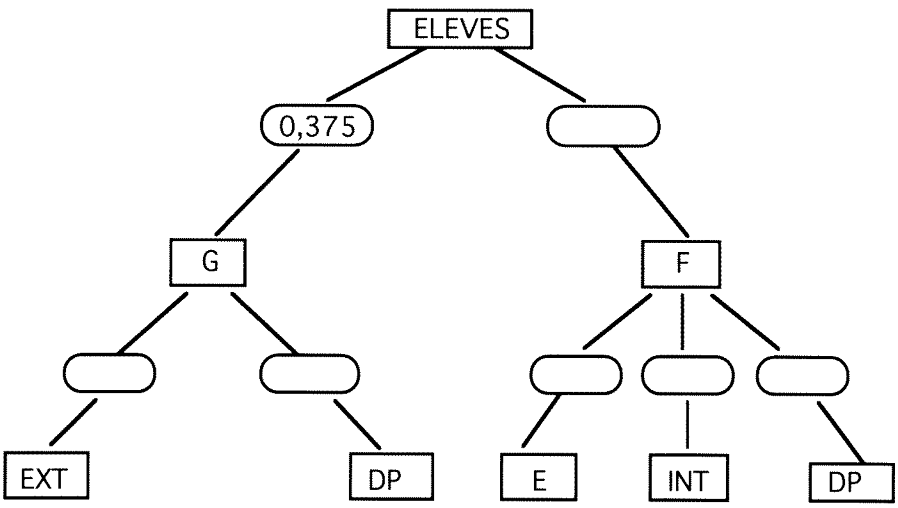
2° Parmi les élèves de la classe, quelle est la proportion de garçons ?

3° Parmi les élèves de la classe, quelle est la proportion de filles ?

4° Parmi les garçons, quelle est la proportion d'externes ? La proportion de demi-pensionnaires ?

5° Parmi les filles, quelle est la proportion d'externes ? La proportion d'internes ? La proportion de demi-pensionnaires ?

B.
1° Reportez les résultats trouvés ci-dessus dans l'arbre suivant :



2° Calculez en utilisant uniquement ce deuxième arbre :

a) La proportion de garçons demi-pensionnaires parmi les élèves de la classe.
b) La proportion de filles demi-pensionnaires parmi les élèves de la classe.
c)La proportion de demi-pensionnaires parmi les élèves de la classe.
d) La proportion d'externes parmi les élèves de la classe.

SIMULONS LE HASARD

A. Lançons un dé :

Munissez-vous d'un dé à jouer normal. Lancez-le quarante fois de suite et notez, en fonction du nombre de jets n, le nombre de fois où vous obtenez le "six". Calculez, pour les valeurs de n de 1 à 40 la fréquence d'obtention du "six". Reportez sur un graphique les fréquences ainsi calculées (porter n en abscisse et les fréquences en ordonnée).

B. Un dé dans un ordinateur :

L'expérience aléatoire et les calculs statistiques que vous avez réalisés dans la partie A se révèlent rapidement assez pénibles. Il existe dans les langages informatiques et sur beaucoup de calculatrices une fonction capable d'engendrer un nombre entier au hasard compris entre 1 et 6, ce qui correspond au lancer d'un dé. Ce procédé est appelé "simulation".

Les deux tableaux ci-dessous donnent, pour deux simulations, l'évolution de la fréquence d'obtention du 6, en fonction du nombre de lancers n. Construire pour ces deux simulations un graphique analogue à celui demandé dans A. Que remarque-t-on ? Autour de quelle valeur les fréquences semblent-elles se stabiliser ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

On traduit le fait que la fréquence d'obtention du 6 semble, lorsqu'on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire, se stabiliser au voisinage de la valeur 1/6, en disant que lorsqu'on lance un dé, la probabilité d'obtenir 6 est 1/6. Le dé étant symétrique, on peut admettre que la probabilité d'obtenir l'un quelconque des autres résultats (1,2,3,4 ou 5) est également de 1/6.

n	6
10	0.100
20	0.250
30	0.167
40	0.150
50	0.180
100	0.170
150	0.173
200	0.180
250	0.172
300	0.167
350	0.180
400	0.190
450	0.180
500	0.176
550	0.178
600	0.175
650	0.172
700	0.167
750	0.165
800	0.166

n	6
10	0.200
20	0.150
30	0.133
40	0.100
50	0.140
100	0.160
150	0.180
200	0.170
250	0.168
300	0.173
350	0.166
400	0.163
450	0.171
500	0.168
550	0.162
600	0.162
650	0.158
700	0.159
750	0.159
800	0.158

C. Simulations avec deux dés :

Si on lance deux dés et que l'on retient la somme des points obtenus, on obtient un résultat compris entre 2 et 12. Le tableau donne l'évolution de la fréquence d'obtention de chacune des sommes possibles au cours d'une série de 1 000 lancers.
Les résultats de cette simulation vous incitent-ils à penser que toutes les sommes ont la même probabilité ?

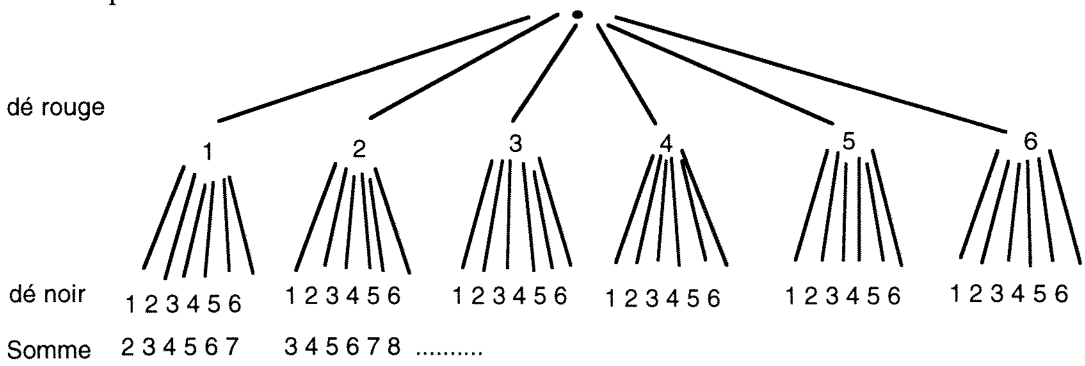
n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
50	0.040	0.120	0.060	0.060	0.100	0.200	0.100	0.180	0.080	0.020	0.040
100	0.040	0.090	0.050	0.080	0.120	0.170	0.150	0.190	0.040	0.040	0.030
150	0.033	0.067	0.067	0.087	0.113	0.173	0.140	0.173	0.067	0.053	0.027
200	0.025	0.080	0.085	0.090	0.115	0.145	0.145	0.150	0.080	0.060	0.025
250	0.032	0.080	0.076	0.100	0.112	0.156	0.152	0.140	0.072	0.060	0.020
300	0.033	0.077	0.070	0.100	0.120	0.143	0.160	0.137	0.073	0.063	0.023
350	0.031	0.074	0.086	0.091	0.117	0.140	0.154	0.134	0.077	0.071	0.023
400	0.033	0.070	0.088	0.088	0.117	0.148	0.158	0.135	0.075	0.068	0.023
450	0.029	0.071	0.084	0.082	0.111	0.160	0.156	0.138	0.076	0.071	0.022
500	0.030	0.072	0.080	0.076	0.118	0.164	0.158	0.124	0.082	0.072	0.024
550	0.033	0.071	0.082	0.075	0.116	0.167	0.162	0.122	0.082	0.069	0.022
600	0.030	0.067	0.080	0.077	0.123	0.168	0.160	0.122	0.085	0.065	0.023
650	0.031	0.063	0.082	0.078	0.118	0.168	0.162	0.120	0.088	0.066	0.025
700	0.030	0.063	0.083	0.079	0.121	0.171	0.159	0.117	0.086	0.067	0.024
750	0.031	0.061	0.084	0.077	0.119	0.173	0.160	0.123	0.084	0.065	0.023
800	0.033	0.058	0.084	0.081	0.119	0.171	0.160	0.124	0.081	0.065	0.025
850	0.032	0.058	0.082	0.082	0.120	0.172	0.164	0.118	0.086	0.061	0.026
900	0.032	0.057	0.081	0.084	0.122	0.172	0.163	0.118	0.084	0.061	0.024
950	0.034	0.056	0.080	0.089	0.123	0.173	0.162	0.117	0.083	0.060	0.023
1000	0.033	0.055	0.080	0.087	0.121	0.176	0.163	0.118	0.083	0.060	0.024

Un modèle théorique :

Si on suppose que l'un des dés est rouge et l'autre noir, on peut décrire les résultats possibles par le tableau ci-dessous. Complétez ce tableau en y inscrivant les sommes correspondantes.

		Dé rouge					
		1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4			
	2	3	4				
Dé noir	3			6			
	4						
	5						
	6						

Une autre manière de décrire l'expérience qui consiste à lancer deux dés est de présenter les résultats possibles sous forme d'arbre :



Reproduire et compléter cet arbre.

Expliquez pourquoi, la probabilité d'obtenir la somme 7 est 6 fois la probabilité d'obtenir la somme 2. Calculez les probabilités d'obtenir chacune des somme possibles.
Comparez les probabilités trouvées aux fréquences observées dans le tableau ci-dessus.

D. Le plus grand de deux dés :

Considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés et à retenir le plus grand des deux résultats obtenus. Ce maximum peut aller de 1 à 6. Le tableau ci-dessous donne l'évolution des fréquences d'obtention de ces six valeurs lors d'une simulation de 1000 lancers.
Les six valeurs vous semblent-elles, au vu de ces résultats, avoir la même probabilité ?

n	1	2	3	4	5	6
50	0,040	0,040	0,160	0,100	0,340	0,320
100	0,050	0,060	0,150	0,120	0,270	0,350
150	0,033	0,067	0,140	0,153	0,260	0,347
200	0,030	0,075	0,125	0,150	0,245	0,375
250	0,024	0,084	0,124	0,168	0,240	0,360
300	0,023	0,080	0,120	0,183	0,240	0,353
350	0,029	0,077	0,143	0,171	0,234	0,346
400	0,028	0,078	0,148	0,177	0,235	0,335
450	0,029	0,084	0,153	0,173	0,236	0,324
500	0,028	0,086	0,152	0,182	0,232	0,320
550	0,035	0,082	0,151	0,185	0,227	0,320
600	0,032	0,077	0,152	0,190	0,233	0,317
650	0,034	0,077	0,148	0,194	0,226	0,322
700	0,034	0,081	0,149	0,193	0,227	0,316
750	0,032	0,081	0,149	0,191	0,235	0,312
800	0,033	0,081	0,150	0,191	0,234	0,311
850	0,031	0,079	0,153	0,195	0,233	0,309
900	0,031	0,080	0,150	0,194	0,237	0,308
950	0,029	0,084	0,146	0,196	0,238	0,306
1000	0,029	0,081	0,144	0,199	0,235	0,312

Présenter les résultats possibles sous forme de tableau, puis sous forme d'arbre par analogie avec les représentations données dans C. En déduire les probabilités des différents maximums possibles.

TOURN' EN ROND

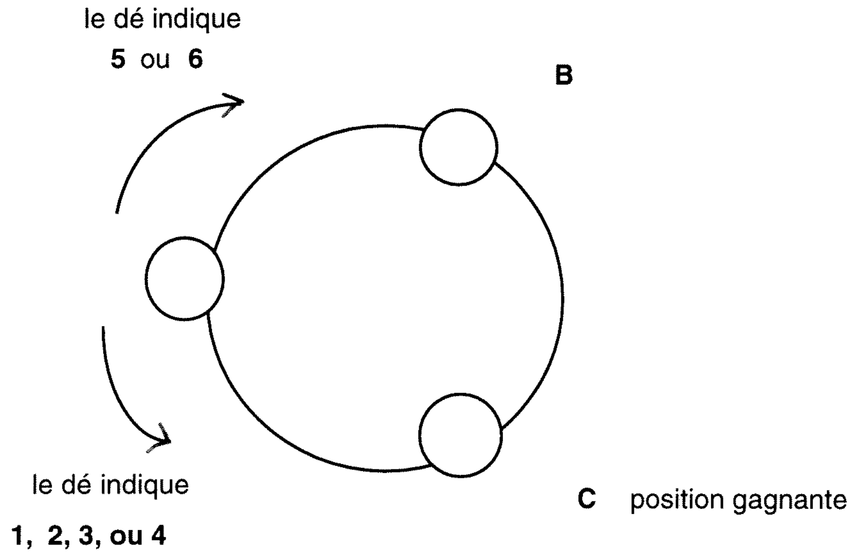
A. jouons et comptons :

La règle du jeu :
Munissez-vous d'un dé et d'un jeton. Placez le jeton sur la case A de la piste ci-dessous. Lancez le dé et déplacez le jeton en respectant la règle suivante :

- si le résultat est 1,2,3 ou 4, déplacez le jeton d'une case dans le sens contraire des aiguilles d'une montre

- sinon déplacez le jeton d'une case dans le sens des aiguilles d'une montre.

Vous gagnez si vous atteignez la case C en deux lancers au plus.



Jouez 30 parties et notez dans un tableau analogue à celui donné ci-dessous

1) le nombre de parties gagnées en un seul lancer
2) le nombre de parties gagnées en deux lancers
3) le nombre de parties perdues
4) le nombre total de parties gagnées.

Tableau I

Gagnées en un coup (1)	Gagnées en deux coups (2)	Perdues (3)	Gagnées (4)

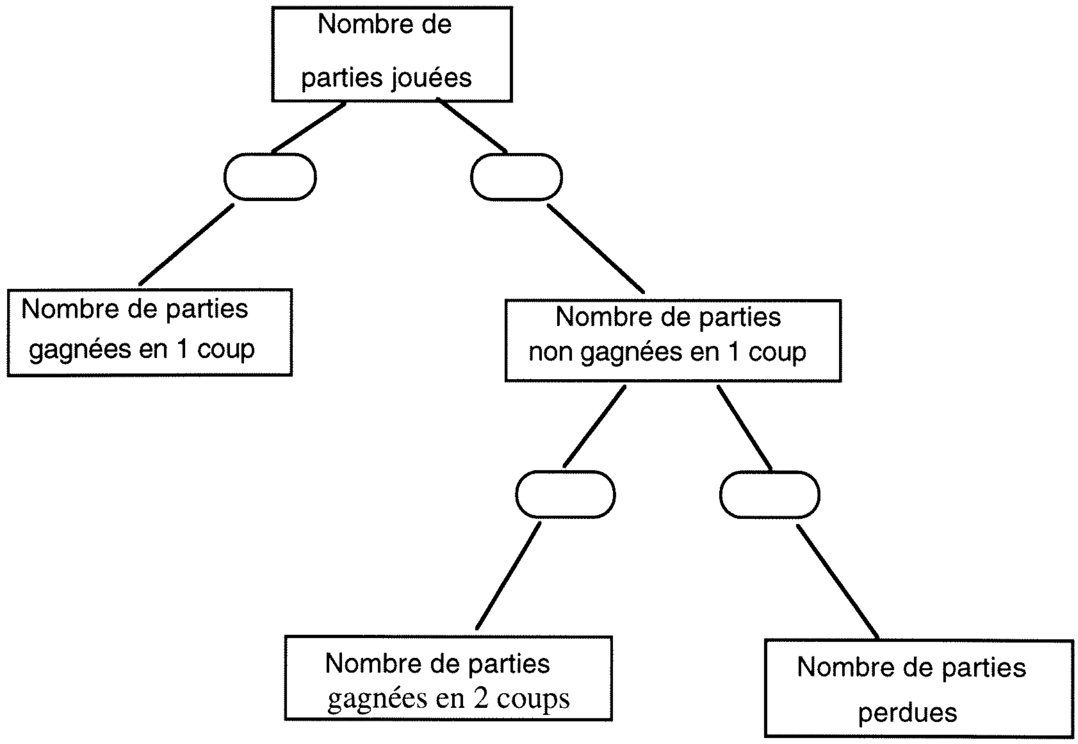
Vérifiez que : case (1) + case (2) = case (4)
case (1) + case (2) + case (3) = 30
case (3) + case (4) = 30

Nous allons nous intéresser à la proportion de parties gagnées parmi les parties jouées, que nous appellerons la **fréquence** des parties gagnées.

1° Calculez la fréquence des parties gagnées lors de vos 30 essais.

2° Regroupez vos résultats avec ceux de quelques-uns de vos camarades de manière à obtenir un tableau récapitulatif (tableau II) portant sur environ 300 parties. Calculez la fréquence des parties gagnées correspondant au tableau II.

3° Présentez les résultats du tableau II sous forme d'un arbre analogue au schéma ci-dessous :

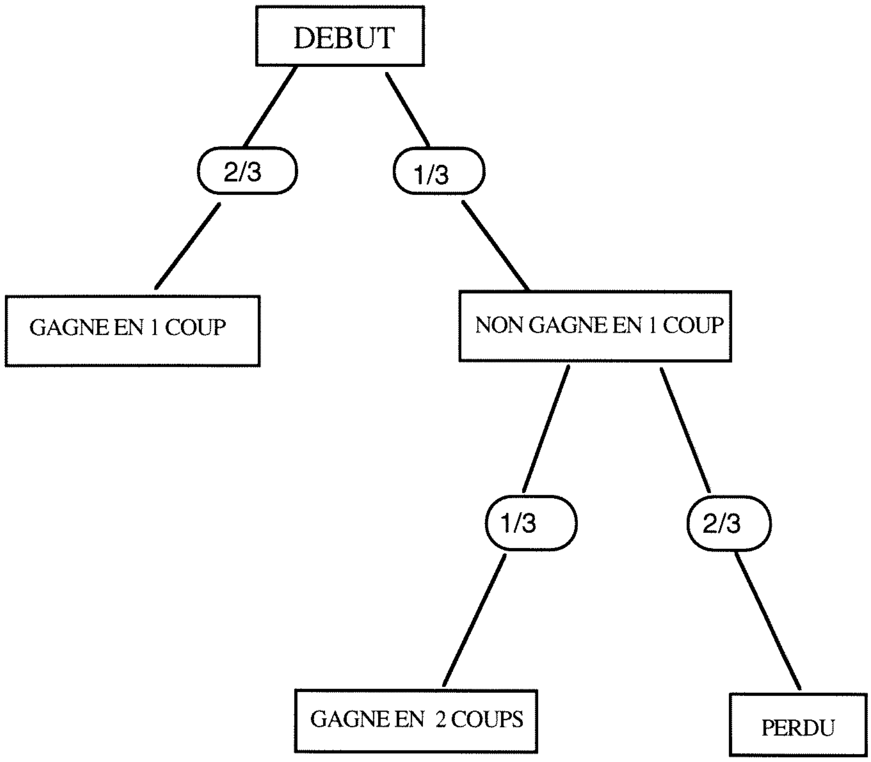


On inscrira sur les branches de l'arbre les fréquences correspondantes.

4° Comment peut-on retrouver la fréquence des parties gagnées (que ce soit en un ou deux coups) en utilisant uniquement les quatre fréquences figurant sur les branches de l'arbre ?

B. Un modèle théorique :

En reprenant l'arbre ci-dessus et en remplaçant les fréquences observées par les valeurs théoriquement attendues que l'on nomme **probabilités** mises en évidence dans l'activité **"simulons le hasard"**, on peut, en appliquant les mêmes règles de calcul à ces probabilités qu'aux fréquences (produits le long des branches successives), calculer la "probabilité" de gagner à ce jeu :



5° Terminez ce calcul. Comparez la probabilité trouvée à la fréquence observée dans A.

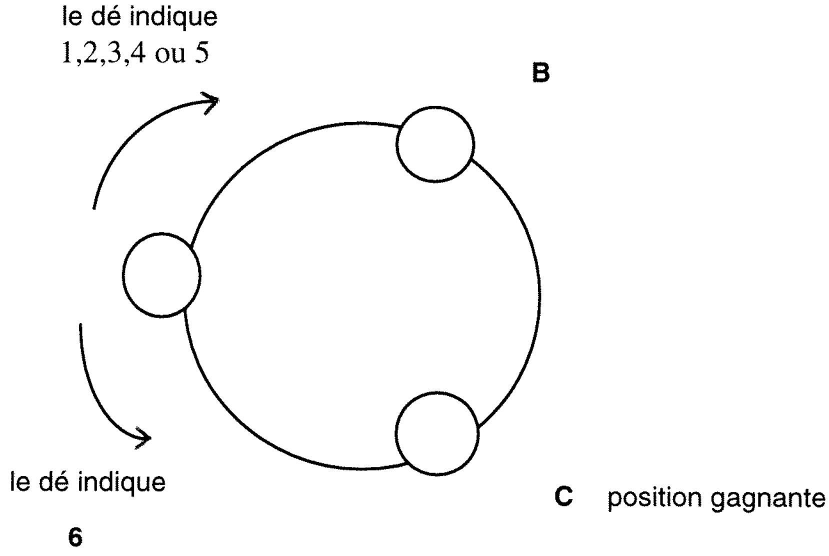
C. Un jeu très analogue :

Le matériel et le principe de ce jeu est le même que pour le jeu décrit ci-dessus. Seule la règle de déplacement est modifiée :

- si le résultat est 6, déplacez le jeton d'une case dans le sens contraire des aiguilles d'une montre

- sinon déplacez le jeton d'une case dans le sens des aiguilles d'une montre.

Vous gagnez si vous atteignez la case C en deux lancers au plus

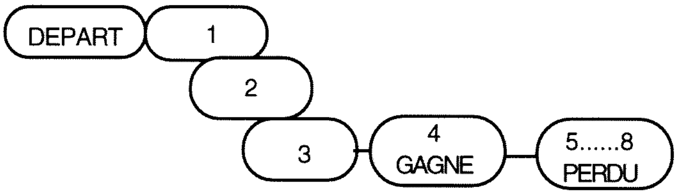


1° Jouez 30 fois à ce nouveau jeu et collectez les résultats sous une forme identique au tableau I.
Lequel des deux jeux vous semble le plus favorable au joueur ?

2° En construisant un arbre analogue à celui de la question B4, calculez la probabilité de gagner à ce second jeu ? Votre intuition était-elle la bonne ? Sinon, quelles observations complémentaires auraient pu vous permettre d'être plus précis ?

LA CASE TROIS FATALE

Dans un jeu analogue au jeu de l'oie, la case trois est fatale au joueur c'est-à-dire que l'on perd la partie en tombant dessus.



Le joueur part de la case "Départ", lance un dé cubique non truqué et avance du nombre de cases indiqué. Le joueur gagne dès qu'il a dépassé la case 3, il perd s'il tombe sur cette case et relance son dé dans les autres cas. Après au plus trois lancers du dé le joueur est ainsi fixé sur son sort.

A. Jouons et comptons :

1° Munissez-vous d'un dé et tentez votre chance 40 fois à ce jeu. Notez, pour chaque partie, la suite des nombres de points obtenus dans un tableau 1.

2° Réorganisez les résultats en les reportant dans un arbre 1.

3° En utilisant le tableau 1 ou l'arbre 1, calculez votre proportion (ou fréquence) de parties gagnées.

4° Calculez toutes les proportions permettant de compléter les branches de l'arbre 2.

B. Une simulation de 1000 parties :

Une simulation de 1000 parties de ce jeu sur un ordinateur a donné les résultats détaillés dans l'arbre 3 ci-dessous.

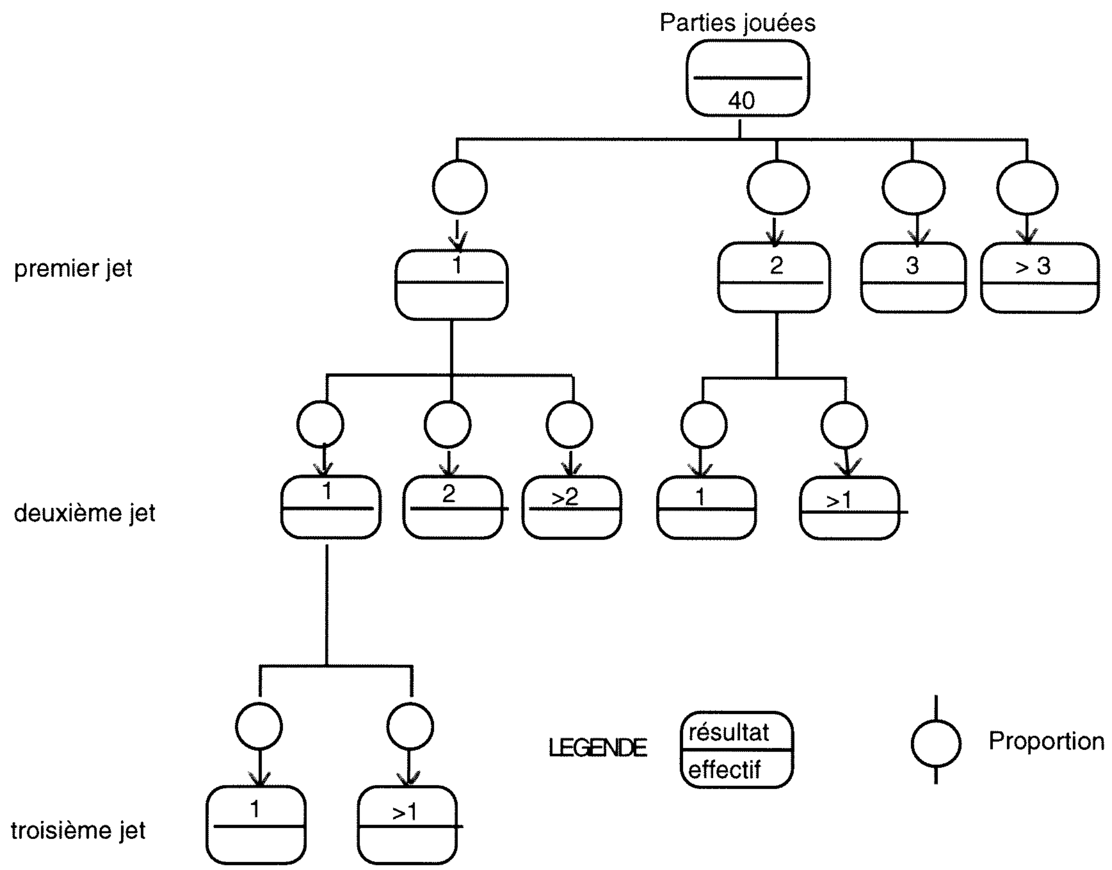
1° Calculez les proportions correspondant aux branches de l'arbre.

2° Peut-on trouver la proportion de parties gagnées en utilisant uniquement les proportions inscrites sur les branches de l'arbre 3 ?

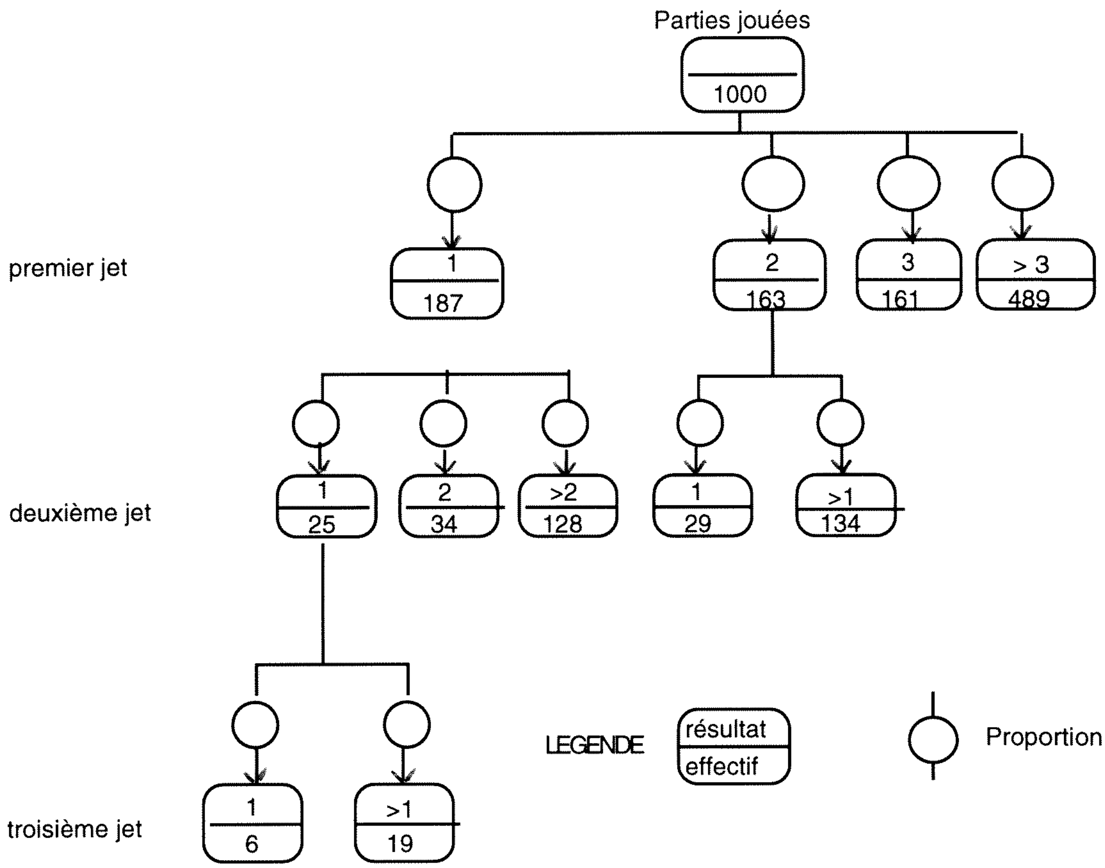
C. Un modèle théorique :

1° Complétez l'arbre 4 ci-dessous en remplaçant les proportions de l'arbre 3 par les probabilités.

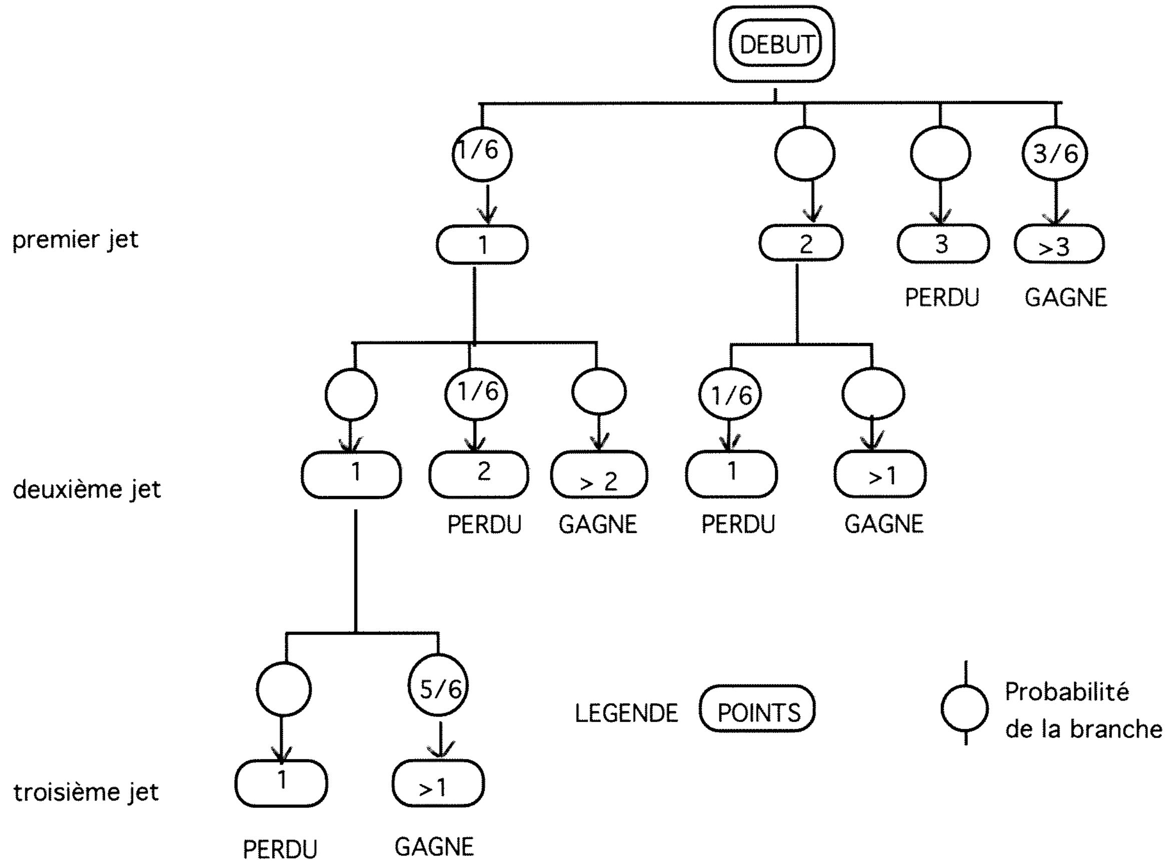
2° En appliquant les mêmes règles de calcul aux probabilités qu'aux proportions, trouvez la probabilité de gagner au jeu de la case 3 fatale.


Parties jouées
40
premier jet
1
2
3
> 3
deuxième jet
1
2
>2
1
>1
troisième jet
1
>1
LEGENDE
résultat
effectif
Proportion

ARBRE 2


Parties jouées
1000
premier jet
1
187
2
163
3
161
> 3
489
deuxième jet
1
25
2
34
>2
128
1
29
>1
134
troisième jet
1
6
>1
19
LEGENDE
résultat
effectif
Proportion

ARBRE 3


DEBUT
1/6
3/6
premier jet
1
2
3
>3
PERDU
GAGNE
1/6
1/6
deuxième jet
1
2
> 2
1
>1
PERDU
GAGNE
PERDU
GAGNE
5/6
troisième jet
1
>1
PERDU
GAGNE
LEGENDE
POINTS
Probabilité
de la branche

ARBRE 4

L' EPICERIE

A. La marque mystérieuse :

Un magasin stocke un certain produit dans des boîtes de deux couleurs : rouges dans la proportion de 25 %, bleues dans la proportion de 75 %. Elles sont protégées par des cartons identiques, chaque carton contenant une seule boîte. Certains cartons portent, en dessous et à l'extérieur, la marque M, les autres ne portent aucune marque.

On sait de plus que :

parmi les cartons contenant une boîte rouge, 45 % portent la fameuse marque M
parmi ceux qui contiennent une boîte bleue, 60 % portent la marque M.

On prend au hasard un carton dans le magasin.

1° On ouvre le carton choisi et on remarque qu'il contient une boîte rouge. Quelle est la probabilité que le carton porte la marque M ?

2° Si la boîte contenue dans le carton était bleue, qu'elle serait la probabilité que le carton porte la marque M ?

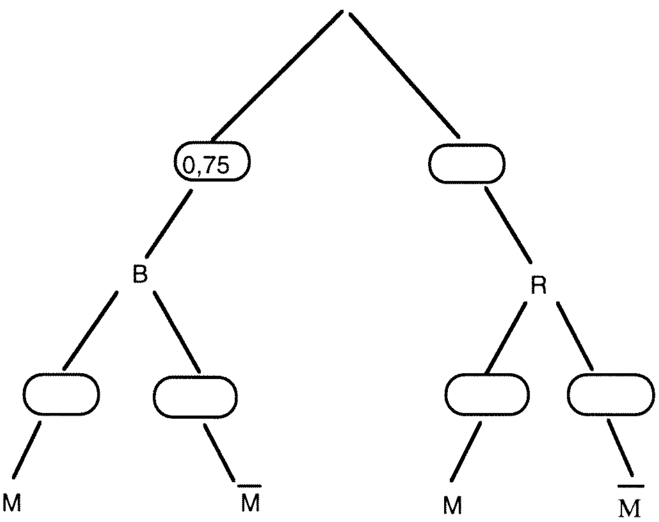
3° En complétant l'arbre ci-dessous calculez :

la probabilité que le carton tiré contienne une boîte rouge et porte la marque M,
la probabilité que le carton tiré contienne une boîte bleue et porte la marque M.

En déduire la probabilité que le carton tiré porte la marque M.

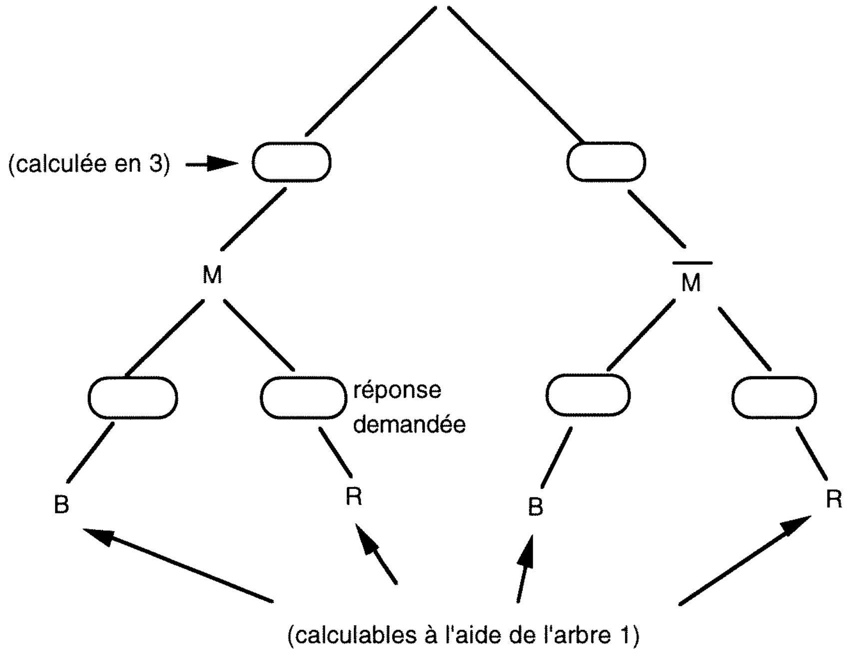
On a adopté les notations suivantes :

M : "Obtenir un carton portant la marque M"
M : "Obtenir un carton sans la marque M"
R : "Obtenir un carton contenant la boîte rouge"
B : "Obtenir un carton contenant une boîte bleue"



ARBRE 1

4° On n'ouvre pas le carton choisi. On remarque toutefois qu'il porte la marque M. Quelle est la probabilité que ce carton contienne une boîte rouge ?
Pour répondre à cette question vous remplirez l'arbre 2 en remarquant qu'il décrit la même situation que l'arbre 1.



ARBRE 2

B. Les pochettes surprise :

Un épicier propose des pochettes surprise de deux couleurs seulement, rouges dans la proportion de 40 %, vertes dans la proportion de 60 %. Il sait de plus que 10 % des pochettes rouges et 20 % des pochettes vertes contiennent un cadeau (les autres ne contiennent qu'un bonbon en guise de consolation).
Un enfant achète une pochette qu'il choisit au hasard.

1° En construisant un arbre analogue à ceux utilisés dans A 3), calculez la probabilité que la pochette achetée contienne un cadeau.

2° La pochette achetée contient effectivement un cadeau. En construisant un deuxième arbre inversé par rapport au premier comme dans A 4), calculez la probabilité que ce soit une pochette rouge.

LES URNES

Situation 1
Dans une urne 1, il y a huit boules noires et douze boules blanches.
Dans une urne 2, il y a trois boules noires et sept boules blanches.

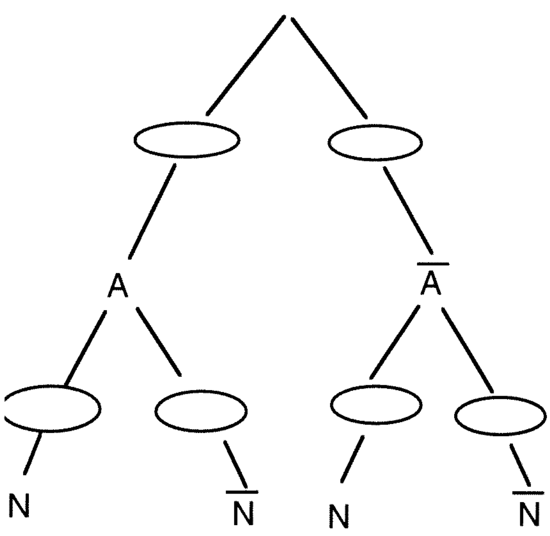
Situation 2
Dans une urne 1, il y a quatre boules noires et huit boules blanches
Dans une urne 2, il y a trois boules noires et six boules blanches.

On choisit une urne au hasard puis on choisit une boules au hasard dans cette urne.
Soit les évènements :
A : "on choisit l'urne 1"
N : "la boules tirée est noire"

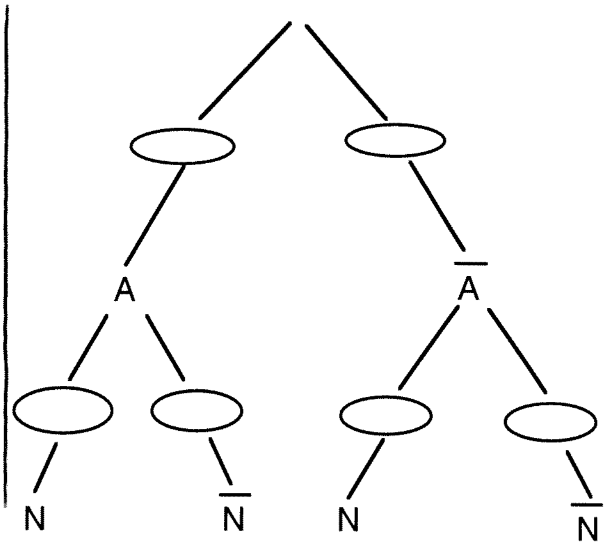
L'évènement "on choisit l'urne 2" est le contraire de l'évènement A, nous le noterons $\overline{A}$ (ce qui se lit A "barre").

L'évènement "la boule tirée est blanche" est le contraire de l'évènement N, nous le noterons $\overline{N}$).
Nous noterons p(A) la probabilité de l'évènement A, p(N) celle de l'évènement N etc...

1° En complétant l'arbre ci-dessous, calculez les probabilités p(A),p(A etN), p($\overline{A}$ et N).
En déduire la valeur de p(N)



1° En complétant l'arbre ci-dessous, calculez les probabilités p(A), p(A et N), p($\overline{A}$ et N).
En déduire la valeur de p(N).



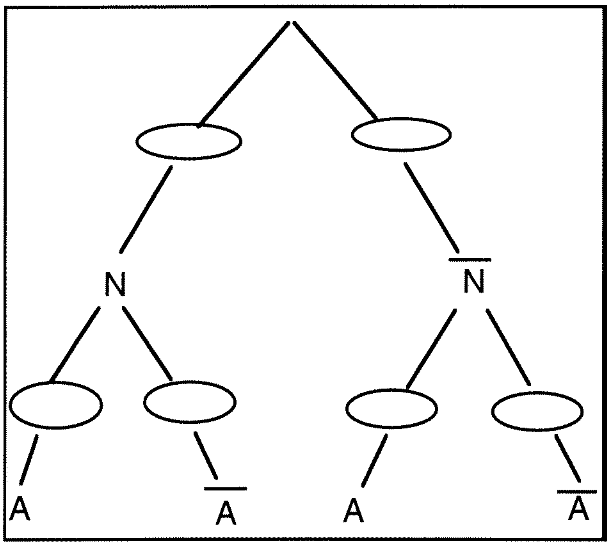
Introduisons une notation nouvelle : nous noterons $p_A(N)$ la probabilité de tirer une boule noire quand on sait qu'on a choisi l'urne 1. On parle de probabilité conditionnelle. On définit de même $p_A(\overline{N})$,$p_{\overline{A}}(N)$ et $p_{\overline{A}}(\overline{N})$..

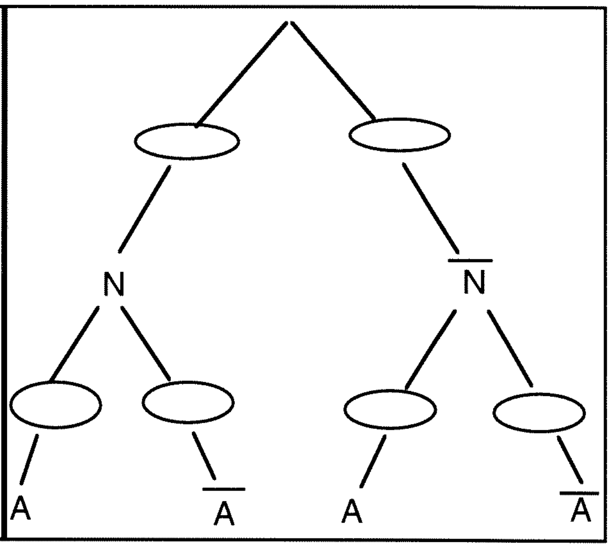
2° Les quatre probabilités conditionnelles introduites ci-dessus peuvent se lire sur les arbres complétés à la question 1. Donnez $p_A(N)$, $p_A(\overline{N})$,$p_{\overline{A}}(N)$ et $p_{\overline{A}}(\overline{N})$. Comparez $p_A(N)$ et p(N) dans chacune des deux situations.

Vous n'étiez pas là au moment du choix de l'urne et du tirage de la boule, mais je vous dis que la boule tirée est noire.

3° Quelle est alors la probabilité que la boule provienne de l'urne 1 ? on remarquera qu'il faut calculer $p_N(A)$ ce qui est possible en complétant l'arbre ci-dessous, inversé par rapport à celui de la question 1

3° Quelle est alors la probabilité que la boule provienne de l'urne 1 ? on remarquera qu'il faut calculer $p_N(A)$ ce qui est possible en complétant l'arbre ci-dessous, inversé par rapport à celui de la question 1





LES MULTIPLES

On tire un nombre au hasard parmi les dix premiers entiers naturels non nuls :

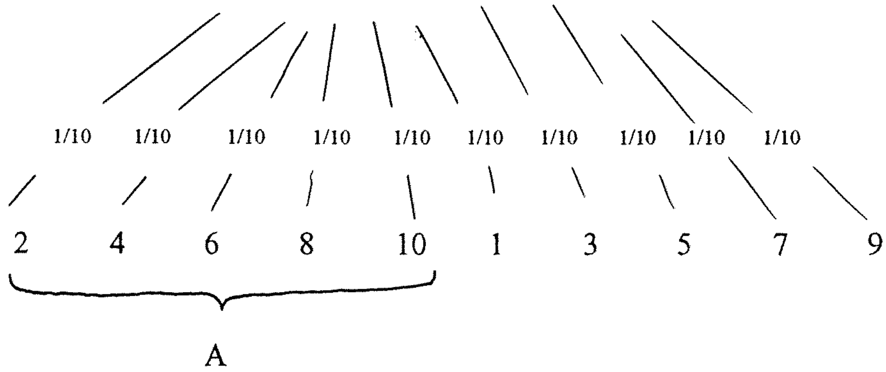
1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 et 10

Considérons les évènements suivants :

A : "le résultat est un multiple de 2"
B : "le résultat est un multiple de 5"
C : "le résultat est un multiple de 10"
D : "le résultat est un multiple de 3"
E : "le résultat est un multiple de 6".

On note Ω l'ensemble des possibles $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
On peut définir l'évènement par $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ (c'est un sous-ensemble de Ω)

1° Ecrivez sous la même forme les évènements B, C, D et E?
Comme chacun des nombres a une probabilité de 1/10 d'être tiré, la probabilité de l'évènement A est de 5/10 comme le montre l'arbre à un seul niveau ci-dessous :

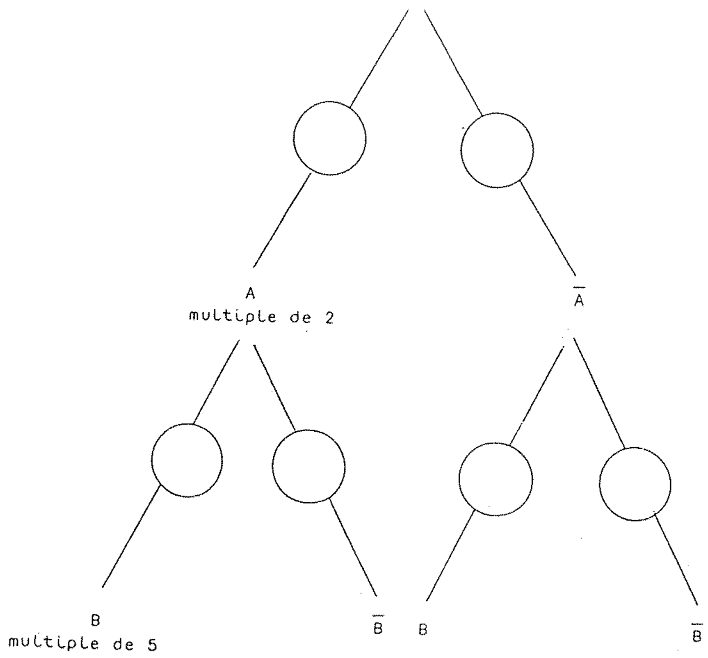


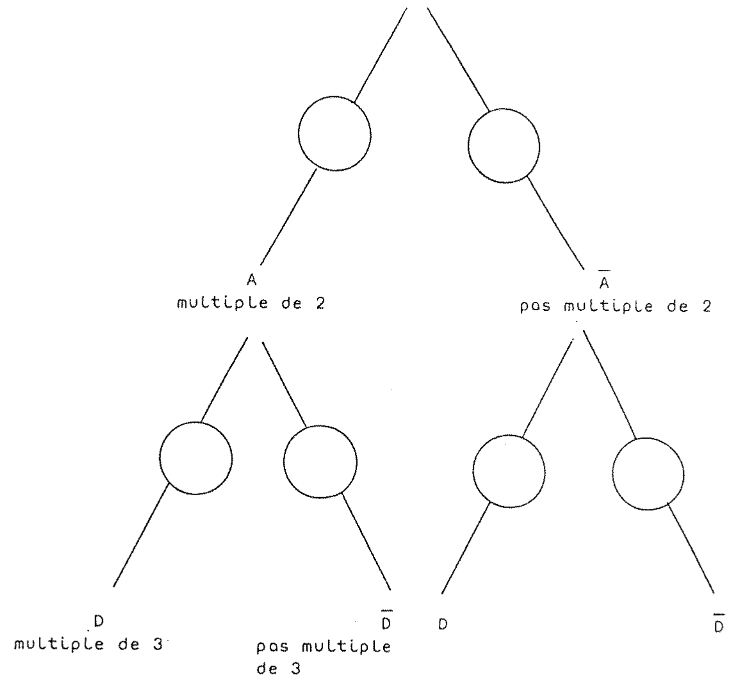
2° Calculez les probabilités p(B), p(C) et p(D).

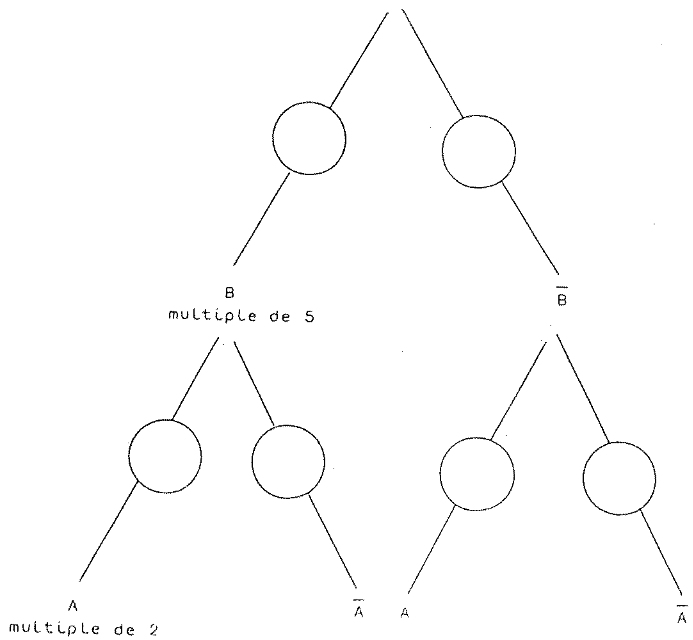
3° Ecrivez sous forme de sous-ensemble de Ω l'évènement A et B ("le résultat est à la fois un multiple de 2 et de 5") qui sera noté $A \cap B$

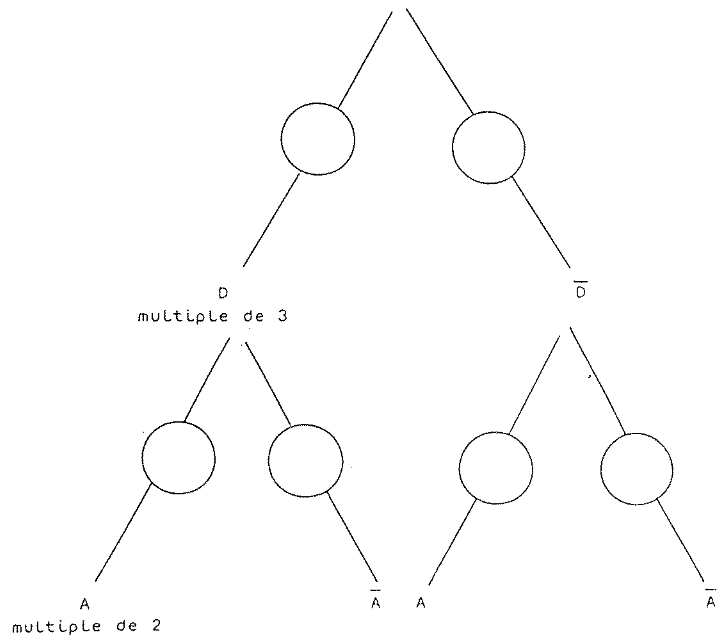
4° Ecrivez sous forme de sous-ensemble de Ω l'évènement $A \cap D$. Calculez $p(A \cap D)$.

5° Complétez les 4 arbres ci-dessous en inscrivant dans les "bulles" les probabilités correspondantes. Répondez par lecture sur ces arbres aux questions suivantes concernant des probabilités conditionnelles :
a) Quelle est la probabilité que le nombre tiré soit un multiple de 5 sachant que c'est un multiple de 2 (probabilité notée $p_A(B)$ comme dans l'activité précédente).
b) Quelle est la probabilité que le nombre tiré soit un multiple de 2 sachant que c'est un multiple de 5 (probabilité notée $p_B(A)$ comme dans l'activité précédente).
c) Quelle est la probabilité que le nombre tiré soit un multiple de 3 sachant que c'est un multiple de 2 c'est-à-dire $p_A(D)$.
d) Quelle est la probabilité que le nombre tiré soit un multiple de 2 sachant que c'est un multiple de 3 c'est-à-dire $p_D(A)$


A
multiple de 2
$\overline{A}$
B
multiple de 5
$\overline{B}$
B
$\overline{B}$


A
multiple de 2
$\overline{A}$
pas multiple de 2
D
multiple de 3
$\overline{D}$
pas multiple
de 3
D
$\overline{D}$


B
multiple de 5
$\overline{B}$
A
multiple de 2
$\overline{A}$
A
$\overline{A}$


D
multiple de 3
$\overline{D}$
A
multiple de 2
$\overline{A}$
A
$\overline{A}$

LA KERMESSE

A. La roulette et les complices du croupier :

Dans une kermesse, une loterie utilisant une roulette comportant 30 numéros est proposée. Le joueur parie sur un numéro. Le croupier lance alors la roulette puis la bille : le joueur gagne si la bille s'arrête sur le numéro joué (si le numéro joué "sort").
Parmi les 120 personnes qui se présentent pour jouer, 100 sont d'honnêtes amateurs et 20 sont des tricheurs qui ont acheté la complicité du croupier de sorte que les amateurs ont une probabilité de gagner de 1/30 alors que les tricheurs ont une probabilité de gagner de 1/3.

1° Une personne prise au hasard parmi les 120 joueurs (et dont on ne sait rien) se présente pour jouer. En construisant un arbre à deux niveaux (premier niveau : tricheur/amateur ; second niveau :gagné/perdu) calculez la probabilité qu'elle gagne.

2° Une personne prise au hasard parmi les 120 joueurs, joue et gagne. En construisant un arbre dont les niveaux sont inversés par rapport à ceux de l'arbre de la première question (c'est-à-dire gagné/perdu au premier niveau et amateur/tricheur au second) calculez la probabilité que ce soit un tricheur puis la probabilité que ce soit un amateur.

3° Une personne choisie au hasard parmi les 120 joueurs joue et perd. Calculez la probabilité que ce soit un tricheur, puis la probabilité que ce soit un amateur.

B. Le dé truqué :

Dans cette même kermesse (toute ressemblance avec une manifestation réelle serait purement fortuite) on propose le jeu qui consiste à lancer un dé avant que le croupier ne lance (en apparence) le même dé. Celui qui obtient le plus grand nombre de points emporte la partie (qui est nulle en cas d'égalité).
En fait le croupier utilise, chaque fois que le résultat du joueur est au moins 4, un dé truqué qu'il substitue habilement au premier. Ce dé truqué est tel que la face 6 est cinq fois plus probable que les 5 autres faces qui ont la même probabilité x.

1° Calculez x en utilisant le fait que la somme des probabilités des 6 faces est 1.

2° En construisant un arbre (avec, par exemple, 6 branches au premier niveau qui se subdivisent chacune en deux branches gagné/perdu au second niveau), calculez la probabilité que le joueur gagne.

3° Vous arrivez au moment où le croupier lance un dé (vous ignorez quel est le score du joueur), il obtient 6. Quelle est la probabilité qu'il ait utilisé le dé truqué ?

LE PROBLEME DES PARTIS

La méthode de Pascal

Déjà abordé en 1494 par Luca Pacioli dans "La suma de arithmetica geometria proportioni et proportionalita", le problème des partis, après avoir fait l'objet de nombreuses contributions et critiques (Tartaglia, Forestiani, Cardan), fut proposé à Pascal par le Chevalier de Méré, homme de lettre, philosophe et joueur invétéré (1607-1684). Voici une transcription de l'énoncé soumis à Pascal en 1664.

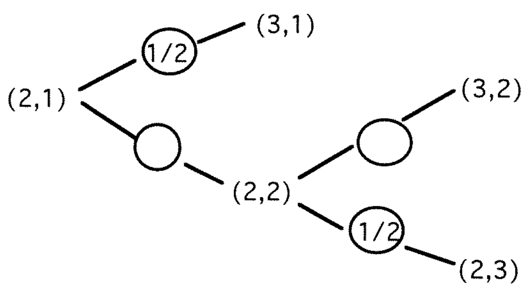
> *Dans tel jeu de hasard qu'on voudra deux joueurs jouent ensemble une partie en un nombre donné de points. Ayant des acquis inégaux, ils décident de s'arrêter sans avoir terminé la partie et de se repartir équitablement les mises initiales. Comment faire le partage ?*

A. Un exemple :

Pascal propose de raisonner d'abord sur un exemple numérique simple :
Deux joueurs misent chacun 32 pistoles avec la convention que le premier à avoir 3 points emporte la totalité des mises. Ils décident d'arrêter le jeu alors que le premier a gagné 2 points et le second un. Comment faire le partage.
Le document 1 est une lettre de Pascal à Fermat qui détaille sa solution à ce problème. Lisez attentivement toute la lettre.
Représentons chaque état du jeu par un couple (i,j) où i est le nombre de points du premier joueur et j le nombre de points du second.

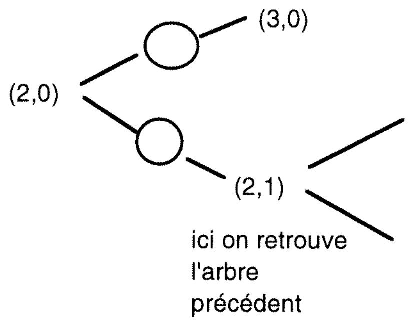
1° Complétez l'arbre ci-contre qui décrit ce qui peut se produire à partir de l'état (2,1).Calculez la probabilité qu'a chacun des joueurs de l'emporter à partir de cette situation.

2° Montrez que la répartition des mises proposées par Pascal est proportionnelle aux probabilités de gagner de chacun des joueurs.



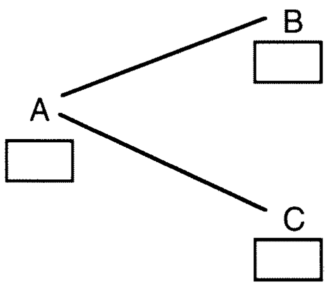
3° Dans la suite de sa lettre, Pascal analyse la situation de départ (2,0). En complétant l'arbre ci-contre, montrez que là encore la répartition trouvée par Pascal est proportionnelle aux probabilités de gagner.

4° Étendez l'arbre au cas où le premier a un point et le second aucun.



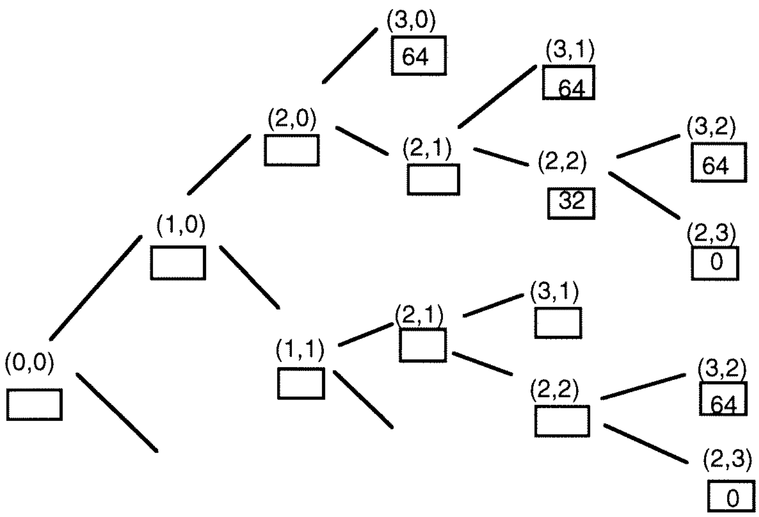
B. Généralisons :

1° Montrez que la méthode de calcul proposée par Pascal, revient en fait à remplir l'arbre ci-dessous en calculant la somme à remettre au premier joueur de droite à gauche par la formule

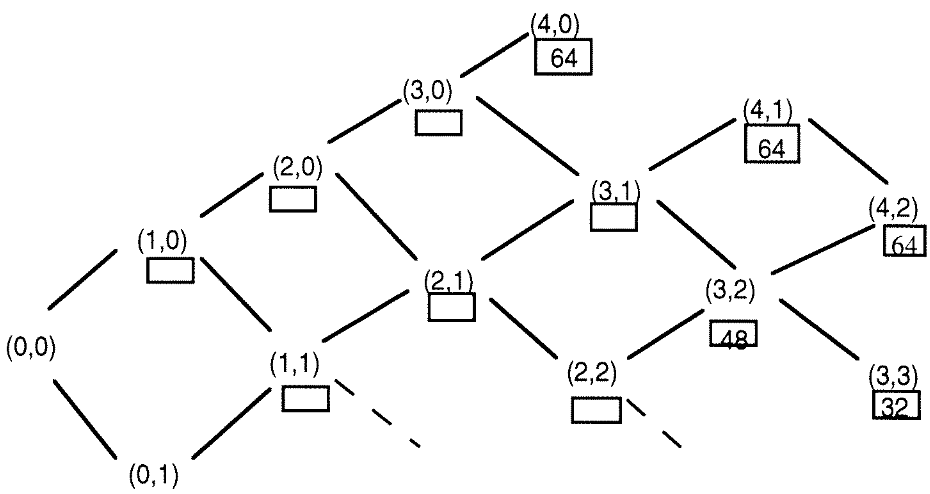


Somme en A = (somme en B + somme en C)/2

Complétez l'arbre proposé. Vous retrouverez ainsi tous les résultats calculés ci-dessus.



2° En utilisant la même règle, calculez la somme à donner au premier joueur dans le cas où il faut quatre points (et non plus trois) pour emporter toute la mise. Il vous suffira de compléter le schéma ci-dessous :



Document 1 :

LETTRE DE PASCAL A FERMAT DU 29 JUILLET 1654

Varia Opera Mathematica D. Petri de Fermat (Toulouse 1679) pp. 179-183

Oeuvres de Blaise Pascal, G.E., pp. 381-393

Monsieur,

L'impatience me prend aussi bien qu'à vous et, quoique je sois encore au lit, je ne puis m'empêcher de vous dire que je reçus hier au soir de la part de M. de Carcavi, votre lettre sur les partis, que j'admire si fort que ne puis vous le dire. Je n'ai pas le loisir de m'étendre, mais, en un mot, vous avez trouvé les deux partis des dés et des parties dans la parfaite justesse : j'en suis tout satisfait, car je ne doute plus maintenant et que je ne sois dans la vérité, après la rencontre admirable où je me trouve avec vous.

J'admire bien davantage la méthode des parties que celle des dés; j'avois vu plusieurs personnes trouver celle des dés, comme M. le chevalier de Méré, qui est celui qui m'a proposé ces questions, et aussi M. de Roberval : mais M. de Méré n'avoit jamais pu trouver la juste valeur des parties ni de biais pour y arriver, de sorte que je me trouvois seul qui eûsse connu cette proportion.

Votre méthode est très sûre et est celle qui m'est la première venue à la pensée dans cette recherche; mais, parce que la peine des combinaisons est excessive, j'en ai trouvé un abrégé et proprement une autre méthode bien plus courte et plus nette, que je voudrois vous pouvoir dire ici en peu de mots : car je voudrois désormais vous ouvrir mon coeur, s'il se pouvoit, tant j'ai de joie de voir notre rencontre. Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et à Paris.

Voici à peu près comme je fais savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :

Posons que le premier en ait deux et l'autre une; ils jouent maintenant une partie dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir 64 pistoles; si l'autre la gagne, ils sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir chacun 32 pistoles.

Considérez donc, Monsieur, que, si le premier gagne, il lui appartient 64; s'il perd, il lui appartient 32. Donc, s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire : "Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même les donne; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez, le hasard est égal. Partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela mes 32 qui me sont sûres". Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.

Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles; si l'autre la gagne les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.

Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas il appartient, à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : "Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines, au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi". Ainsi il aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles. Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point. Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il lui appartient 56 pistoles, s'il la perd, ils sont partie à partie: donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : "Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12 et moi 12, qui, avec 32, font 44".

Or, par ce moyen, vous voyez, par les simples soustractions, que, pour la première partie, il appartient sur l'argent de l'autre 12 pistoles, pour la seconde, autres 12; et pour la dernière 8.

LE PROBLEME DES PARTIS

La solution de Fermat

Le document 2 est une lettre de Pascal à Fermat dans laquelle Pascal expose la méthode utilisée par Fermat pour résoudre le problème des partis (la lettre de Fermat dans laquelle il expose lui même sa méthode ne nous est, semble-t-il, pas parvenue).

A. Un tableau pour décrire l'ensemble des possibles :

1° Montrez que la situation particulière décrite correspond au cas d'un jeu où l'on gagne en marquant 3 points que l'on analyse au stade où le premier joueur (noté a) a 1 point et le second (noté b) aucun. Combien de coups devront au maximum être encore joués pour déterminer celui qui emportera toute la mise ?

2° Décrivez les dés que Pascal imagine pour réaliser ce jeu.

3° Complétez le tableau des "assiettes possibles" dont nous avons masqué certaines parties. Ecrivez dans la dernière ligne du tableau le gagnant correspondant à chaque colonne. Retrouvez les probabilités de gagner de chacun des joueurs.

4° En déduire la répartition équitable des mises.

B. L'objection de Roberval :

Monsieur de Roberval reproche à la méthode du tableau d'imaginer des coups fictifs, qu'il n'est plus nécessaire de jouer car le gagnant est déjà désigné avant et il craint que cela ne fausse les calculs.

1° Analysez les arguments que Pascal présente pour montrer que le résultat des calculs reste néanmoins correct et donnez en une rédaction en des termes plus modernes.

2° Recherchez dans une encyclopédie des informations complémentaires concernant tous les savants dont les noms sont cités dans les deux lettres de Pascal.

Document 2

LETTRE DE PASCAL A FERMAT DU 24 AOUT 1654

Varia Opera Mathematica P. de Fermat, pp. 184-188
Oeuvres de Blaise Pascal, G.E. III pp. 401-412

Monsieur,

Je ne pus vous ouvrir ma pensée entière touchant les partis de plusieurs joueurs par l'ordinaire passé, et même j'ai quelque répugnance à le faire, de peur qu'en ceci cette admirable convenance, qui étoit entre nous et qui m'atoit si chère, ne commence à se démentir, car je crains que nous ne soyons de différents avis sur ce sujet. Je vous veux ouvrir toutes mes raisons, et vous me ferez la grâce de me redresser, si j'erre, ou de m'affermir, si j'ai bien rencontré. Je vous le demande tout de bon et sincèrement, car je ne me tiendrai pour certain que quand vous serez de mon côté.

Quand il n'y a que deux joueurs, votre méthode, qui procède par les combinaisons, est très sûre; mais, quand il y en a trois, je crois avoir démonstration qu'elle est mal juste, si ce n'est que vous y procédiez de quelque autre manière que je n'entends pas. Mais la méthode que je vous ai ouverte et dont je me sers partout est commune à toutes les conditions imaginables de toutes sortes de partis, au lieu que celle des combinaisons (dont je ne me sers qu'aux rencontres particulières où elle est plus courte que la générale) n'est bonne qu'en ces seules occasions et non pas aux autres.

Je suis sûr que je me donnerai à entendre, mais il me faudra un peu de discours et à vous un peu de patience.

Voici comment vous procédez quand il y a deux joueurs :

Si deux joueurs, jouant en plusieurs parties, se trouvent en cet état qu'il manque deux parties au premier et trois au second, pour trouver le parti, il faut, dites-vous, voir en combien de parties le jeu sera décidé absolument.
Il est aisé de supputer que ce sera en quatre parties, d'où vous concluez qu'il faut voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs et voir combien il y a de combinaisons pour faire gagner le premier et combien pour le second et partager l'argent suivant cette proportion. J'eusse eu peine à entendre ce discours-là, si je ne l'eusse su de moi-même auparavant ; aussi vous l'aviez écrit dans cette pensée. Donc, pour voir combien quatre parties se combinent entre deux joueurs, il faut imaginer qu'ils jouent avec un dé à deux faces (puisqu'ils ne sont que deux joueurs), comme à croix et pile, et qu'ils jettent quatre de ces dés (parce qu'ils jouent en quatre parties); et maintenant il faut voir combien ces dés peuvent avoir d'assiettes différentes.

Cela est aisé à supputer : ils en peuvent avoir seize qui est le second degré de quatre, c'est-à-dire le quarré. Car figurons-nous qu'une des faces est marquée *a*, favorable au premier joueur, et l'autre *b*, favorable au second; donc ces quatre dés peuvent s'asseoir sur une de ces seize assiettes :

a a a a	a a a b	a a b a	a a b b		a b a a	a b a	a b b	a b b		b a a	b a	b a	b a		b b	b	b	b
1	1	1	1		1													

et, parce qu'il manque deux parties au premier joueur, toutes les faces qui ont deux *a* le font gagner : donc il en a 11 pour lui : et parce qu'il y manque trois parties au second, toutes les faces où il y a trois *b* le peuvent faire gagner : donc il y en a 5. Donc il faut qu'ils partagent la somme comme 11 à 5.

Voilà votre méthode quand il y a deux joueurs; sur quoi vous dites que, s'il yen a davantage, il ne sera pas difficile de faire les partis par la même méthode.

Sur cela, Monsieur, j'ai à vous dire que ce parti pour deux joueurs, fondé sur les combinaisons, est très juste et très bon, mais que, s'il y a plus de deux joueurs, il ne sera pas toujours juste et je vous dirai la raison de cette différence.

Je communiquai votre méthode à nos Messieurs, sur quoi M. de Roberval me fit cette objection :
Que c'est à tort que l'on prend l'art de faire le parti sur la supposition qu'on joue en quatre parties, vu que, quand il manque deux parties à l'un et trois à l'autre, il n'est pas de nécessité que l'on joue quatre parties, pouvant arriver qu'on n'en jouera que deux ou trois, ou à la vérité peut-être quatre.

Et ainsi qu'il ne voyait pas pourquoi on prétendoit de faire le parti juste sur une condition feinte qu'on jouera quatre parties, vu que la condition naturelle du jeu est qu'on ne jouera plus dès que l'un des joueurs aura gagné, et qu'au moins, si cela n'étoit faux, cela n'étoit pas démontré, de sorte qu'il avoit quelque soupçon que nous avions fait un paralogisme.

Je lui répondis que je me fondois pas tant sur cette méthode des combinaisons, laquelle véritablement n'est pas en son lieu en cette occasion, comme sur mon autre méthode universelle, à qui rien n'échappe et qui porte sa démonstration avec soi, qui trouve le même parti précisément que celle des combinaisons, et de plus je lui démontrai la vérité du parti entre deux joueurs par les combinaisons en cette sorte :

N'est-il pas vrai que, si deux joueurs, se trouvant en cet état de l'hypothèse qu'il manque deux parties à l'un et trois parties à l'autre, conviennent maintenant de gré à gré qu'on joue quatre parties complètes, c'est-à-dire qu'on jette les quatre dés à deux faces tous là la fois, n'est-il pas vrai, dis-je, que, s'ils ont délibéré de jouer les quatre parties, le parti doit être, tel que nous avons dit, suivant la multitude des assiettes favorables à chacun ?

Il en demeura d'accord et cela en effet est démonstratif; mais il nioit que la même chose subsistât en ne s'astreignant pas à jouer les quatre parties. Je lui dis donc ainsi :

N'est-il pas clair que les mêmes joueurs, n'étant pas astreints à jouer les quatre parties, mais voulant quitter le jeu dès que l'un auroit atteint son nombre, peuvent sans dommage ni avantage s'astreindre à jouer les quatre parties entières et que cette convention ne change en aucune manière leur condition ? Car, si le premier gagne les deux premières parties de quatre et qu'ainsi il ait gagné, refusera-t-il de jouer encore deux parties, vu que, s'il les gagne, il n'a pas mieux gagné, et s'il les perd, il n'a pas moins gagné ? Car ces deux que l'autre a gagné ne lui suffisent pas, puisqu'il lui en faut trois, et ainsi il n'y a pas assez de quatre parties pour faire q'ils puissent tous deux atteindre le nombre qui leur manque.

Certainement il est aisé de considérer qu'il est absolument égal et indifférent à l'un et à l'autre de jouer en la condition naturelle à leur jeu, qui est de finir dès qu'un aura son compte, ou de jouer les quatre parties entières : donc, puisque ces deux conditions sont égales et indifférentes, le parti doit être tout pareil en l'une et en l'autre. Or, il est juste quand ils sont obligés de jouer quatre parties, comme je l'ai montré : donc il est juste aussi en l'autre cas. Voilà comment je le démontrai et, si vous y prenez garde, cette démonstration est fondée sur l'égalité des deux conditions, vraie et feinte, à l'égard de deux joueurs, et qu'en l'une et en l'autre un même gagnera toujours et, si l'un gagne ou perd en l'une, il gagnera ou perdra en l'autre et jamais deux n'auront leur compte.

FRISES ET PAVAGES

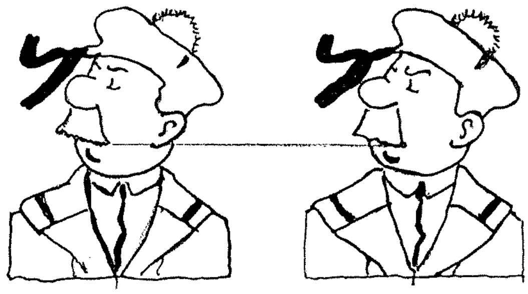
Frises et pavages interviennent souvent dans les domaines artistiques. Le thème proposé, où la manipulation est importante, permet de classer les dessins obtenus en fonction des isométries du plan qui entrent en jeu dans leur génération. Un rappel des définitions des isométries planes est proposé en introduction.

LES ISOMETRIES DU PLAN

Les translations

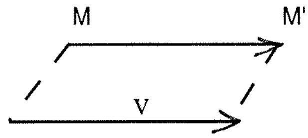
Manipulation :

Pour obtenir l'image d'une figure par une translation, la reproduire sur un calque et faire glisser ce calque du vecteur donné sans le tourner.



Définition :

On appelle translation de vecteur $\vec{v}$ la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

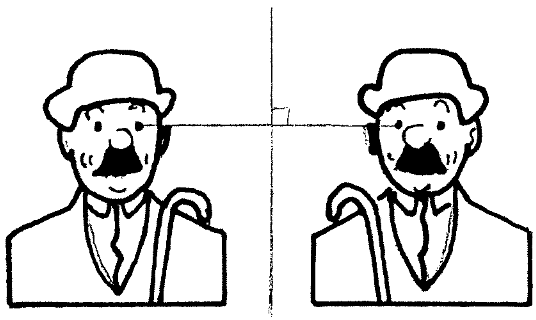


$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$

Les symétries axiales

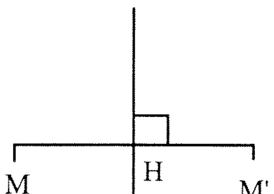
Manipulation :

Pour obtenir l'image d'une figure par une symétrie axiale, la reproduire sur un calque ainsi que l'axe de symétrie puis retourner le calque et reposer chaque point de l'axe sur lui même.



Définition :

On appelle symétrie d'axe d la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que d soit la médiatrice de $[MM']$

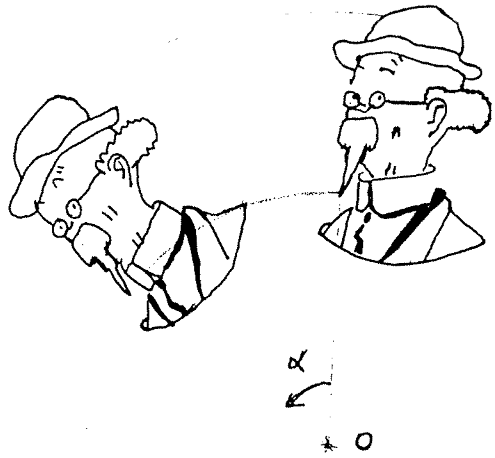


MH = M'H et MM' $\perp$ d

Les rotations

Manipulations :

Pour obtenir l'image d'une figure par une rotation, la reproduire sur un calque ainsi que le centre de rotation puis piquer une épingle à l'emplacement du centre et faire tourner le calque de l'angle donné.



Définition :

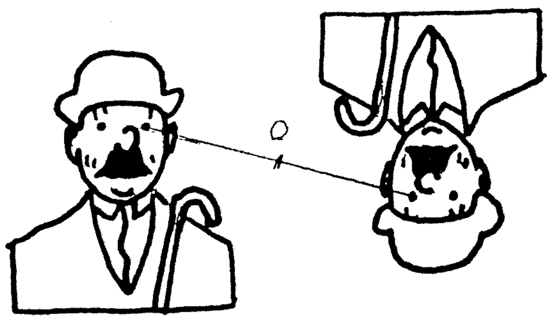
On appelle rotation de centre O et d'angle α la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que OM=OM' et MOM' = α

OM=OM' $\widehat{MOM'}=\alpha$

Les symétries centrales

Manipulation :

Pour obtenir l'image d'une figure par une symétrie centrale, la reproduire sur un calque ainsi que le centre puis piquer une épingle à l'emplacement du centre et faire tourner le calque d'un demi-tour.



Définition :

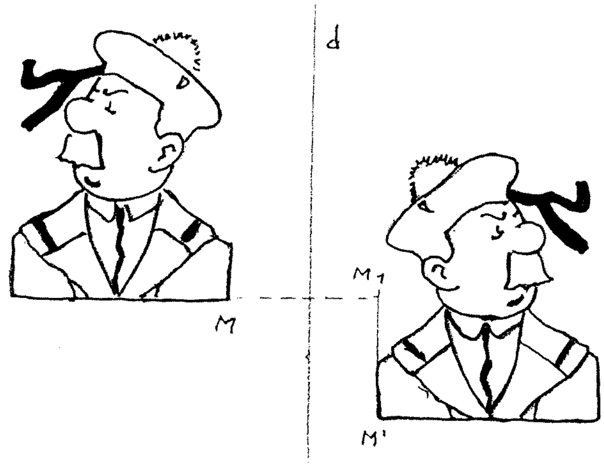
On appelle symétrie de centre O la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que O soit le milieu de $[MM']$.
La symétrie centrale est aussi une rotation d'angle plat.

OM=OM'

Les symétries glissées

Manipulation :

Pour obtenir l'image d'une figure par une symétrie glissée, la reproduire sur un calque ainsi que l'axe puis retourner le calque en reposant l'axe sur l'axe et faire glisser le calque le long de cet axe.



Définition :

On appelle symétrie glissée d'axe d et de vecteur $\vec{v}$ la symétrie d'axe d suivie de la translation de vecteur $\vec{v}$.

d médiatrice de $[MM_1]$

et $\overrightarrow{M_1M'} = \vec{v}$

En guise de conclusion:

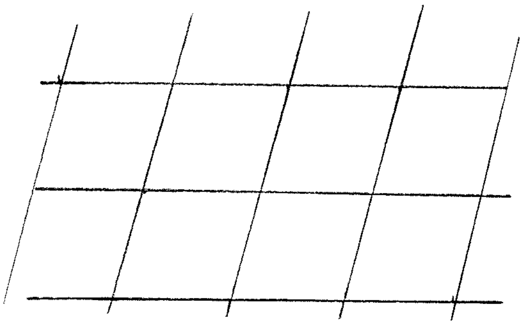
Une isométrie transforme une figure en une figure superposable (elle conserve les longueurs).

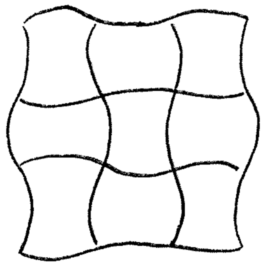
On démontre et nous l'admettons que les seules isométries du plus sont les translations, les symétries axiales, les rotations (en particulier les symétries centrales) et les symétries glissées.

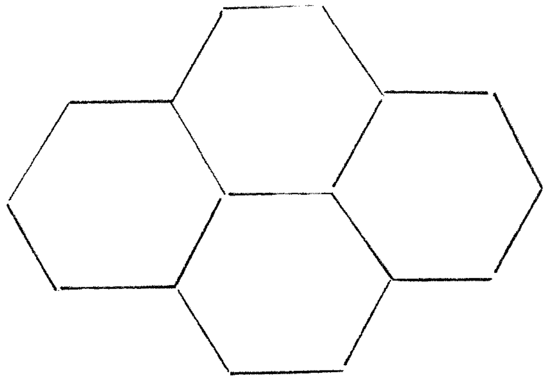
GEOMETRIE ET ARTS PLASTIQUES

Pavages réguliers du plan

Nous connaissons des exemples de pavages du plan par des figures toutes identiques. En voici quelques-uns.





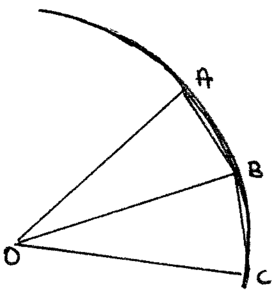


Parallélogrammes "Tritons" Hexagones

Le but de cette activité est de rechercher les pavages du plan par des polygones réguliers.

A. Polygones réguliers :

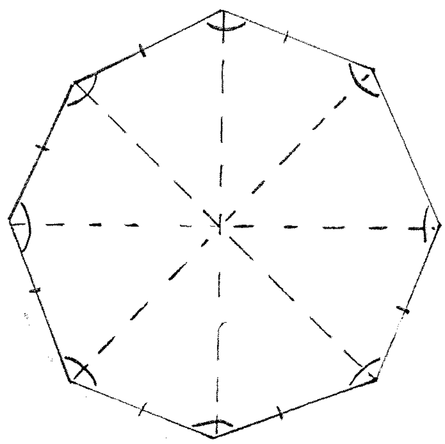
Un polygone est dit régulier s'il a tous ses côtés égaux et tous ses angles égaux. On peut démontrer, et nous l'admettrons, qu'un polygone régulier est inscriptible dans un cercle.



Dans un polygone régulier à n côtés, inscrit dans un cercle de centre O, soit $[AB]$ l'un des côtés

1° Quel est, en fonction de n, la mesure de l'angle au centre $\widehat{AOB}$? Celle de l'angle $\widehat{ABO}$? Celle de l'angle $\widehat{ABC}$, c'est-à-dire celle de tous les angles d'un polygone régulier de n côtés ?

2° En déduire que la mesure d'un angle d'un polygone régulier est au moins de 60°.



B. Pavages réguliers :

Dans un pavage du plan par des polygones réguliers à n côtés tous identiques, désignons par p le nombre de polygones assemblés en chaque sommet (par exemple, dans le pavage par des hexagones donnés ci-dessus p = 3)

1° Montrez que : $3 \leq p \leq 6$ et que $n \geq 3$.

2° En additionnant les angles des polygones assemblés en un même sommet, montrez que :

$$p\left(1 - \frac{2}{n}\right) = 2$$

3° Montrez que si $n \geq 6$ alors $p\left(1 - \frac{2}{n}\right) > 2$.
En déduire que nécessairement : $3 \leq n \leq 6$.

4° En remplaçant successivement n par les valeurs possibles et en calculant p, montrez qu'il n'existe que trois types de polygones réguliers susceptibles de paver le plan, dessinez les trois pavages correspondants et reproduisez les également sur un calque.

C. Pavages réguliers et isométries* :

1° En utilisant le calque, déterminez, pour chacun des trois pavages réguliers du plan, s'il coïncide avec son calque retourné "autour" d'une droite. Si oui, celà signifie que le pavage en question est invariant par des symétries axiales. Représentez dans ce cas les axes de symétries correspondant.

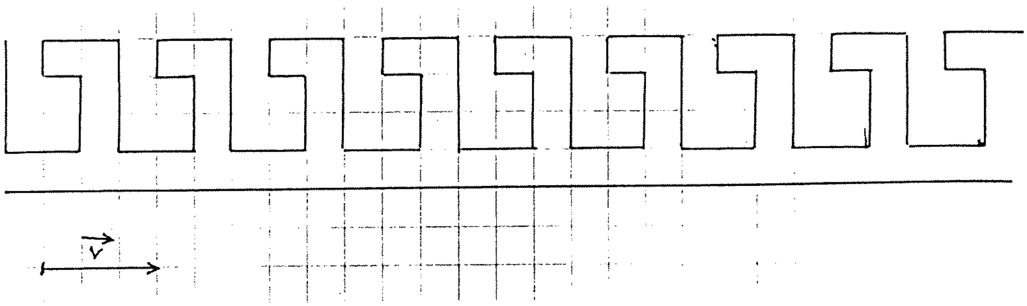
2° Déterminez de même s'il est possible de faire tourner le calque autour d'un point de telle manière qu'il vienne se superposer au pavage initial. Si oui, celà signifie que le pavage est invariant par des rotations. Marquez dans ce cas les centres de rotation et déterminez le plus petit angle de rotation possible.

* transformations qui conservent les distances, comme, par exemple, les translations, les symétries et les rotations.

DES FRISES BIEN CLASSEES

ou le jeu des 7 familles

Nous connaissons tous des exemples de frises, dessins répétitifs obtenus en appliquant une translation à un motif initial. Fréquentes dans les monuments grecs dès l'époque crétoise elles continuent d'orner les murs et rampes de balcons.



Exemple de frise de style greque, avec le vecteur de la translation qui permet de la prolonger indéfiniment.

A. Classons les frises.

On peut démontrer, et nous l'admettrons, que, du point de vue des isométries qui les laissent globalement invariantes, il n'existe que 7 types de frises. L'arbre ci-dessous permet de déterminer à quelle famille appartient une frise donnée. Les codes qui servent à désigner les familles sont communément utilisés par les chimistes cristallographes. Ce type de classification est, en effet, également utilisé pour classer les cristaux.

Utilisons l'arbre pour déterminer à quel type appartient la frise grecque donnée en exemple ci-dessus :

- il n'y a pas d'axe de symétrie
- il n'y a pas de centre de symétrie
- la frise n'est pas invariante par une symétrie glissée, elle est donc du type f1.

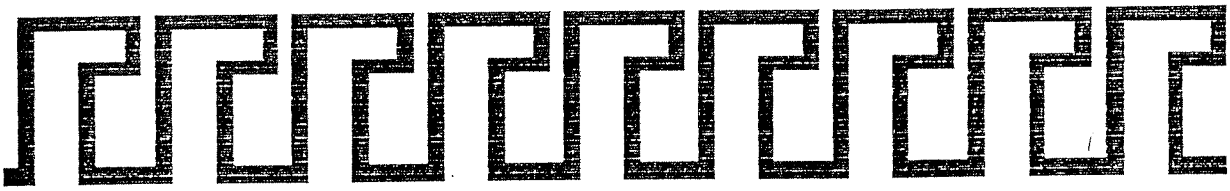
Rappelons les manipulations susceptibles de faciliter les réponses aux questions posées dans l'arbre :

- reproduire la frise sur un calque
- si la frise peut coïncider avec son calque retourné,
    -le long d'une droite sans décalage, c'est que cette droite est axe de symétrie,

    - le long d'une droite avec glissement; la frise est invariante par une symétrie glissée

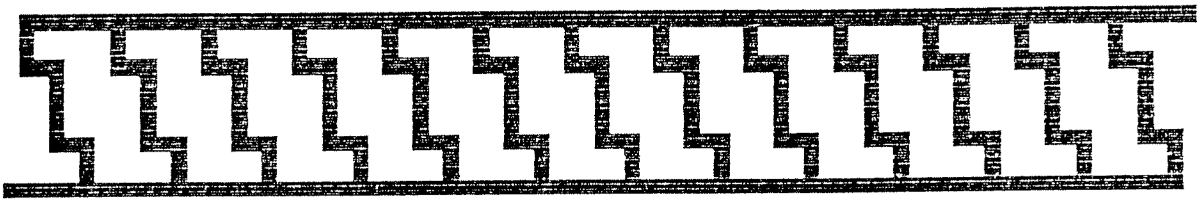
- si la frise peut coïncider avec son calque tourné d'un demi-tour, c'est qu'il y a des centres de symétrie.

A

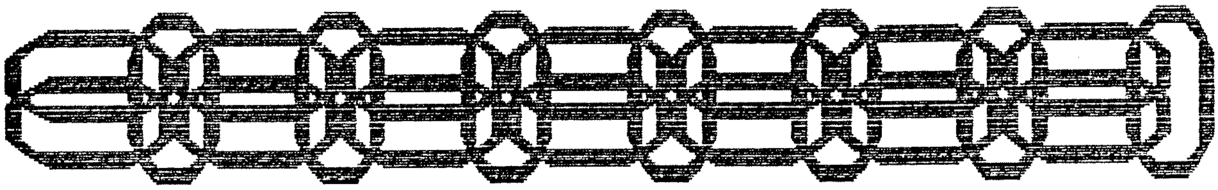


B

C

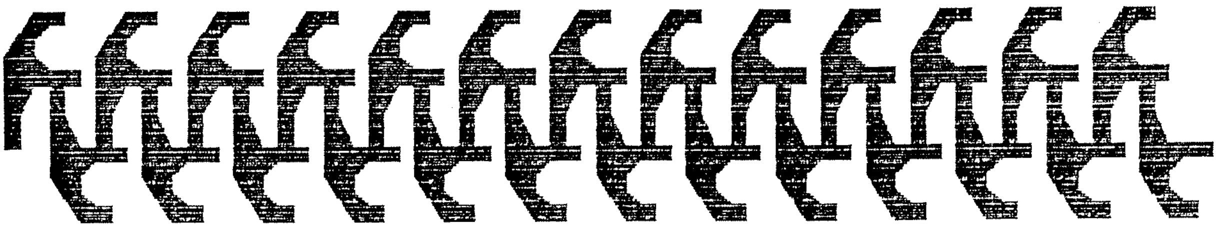


D



E

F



G

H

1° Parmi les huit frises de la page précédente, deux sont de la même famille (puisqu'il n'y a que 7 familles), essayez de deviner instinctivement lesquelles.

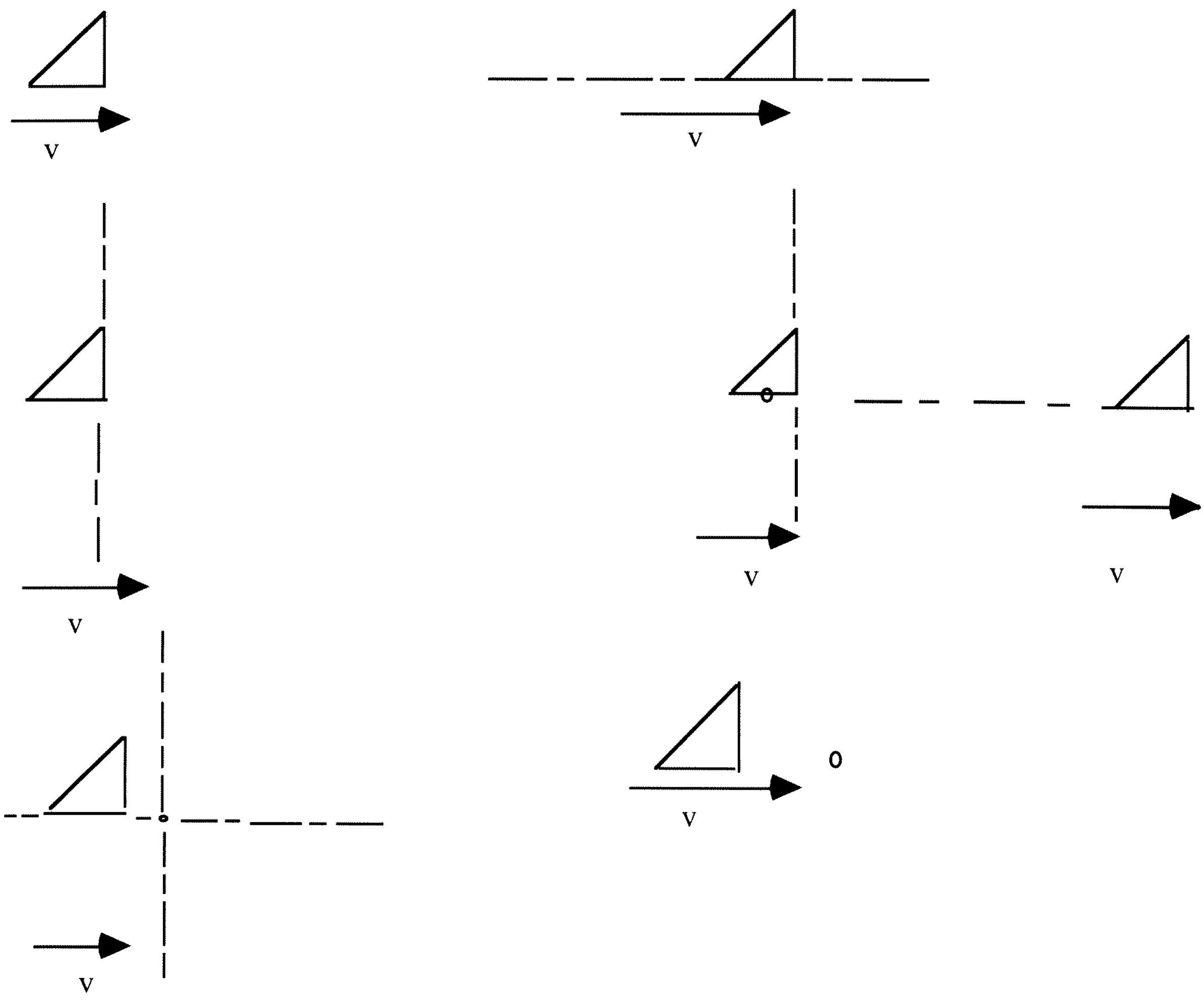
2° En utilisant l'arbre et en vous aidant éventuellement d'un calque déterminez le type de chacune des huit frises. Votre réponse "instinctive" à la question 1 était-elle correcte ?

B. Un motif pour sept frises bient distinctes

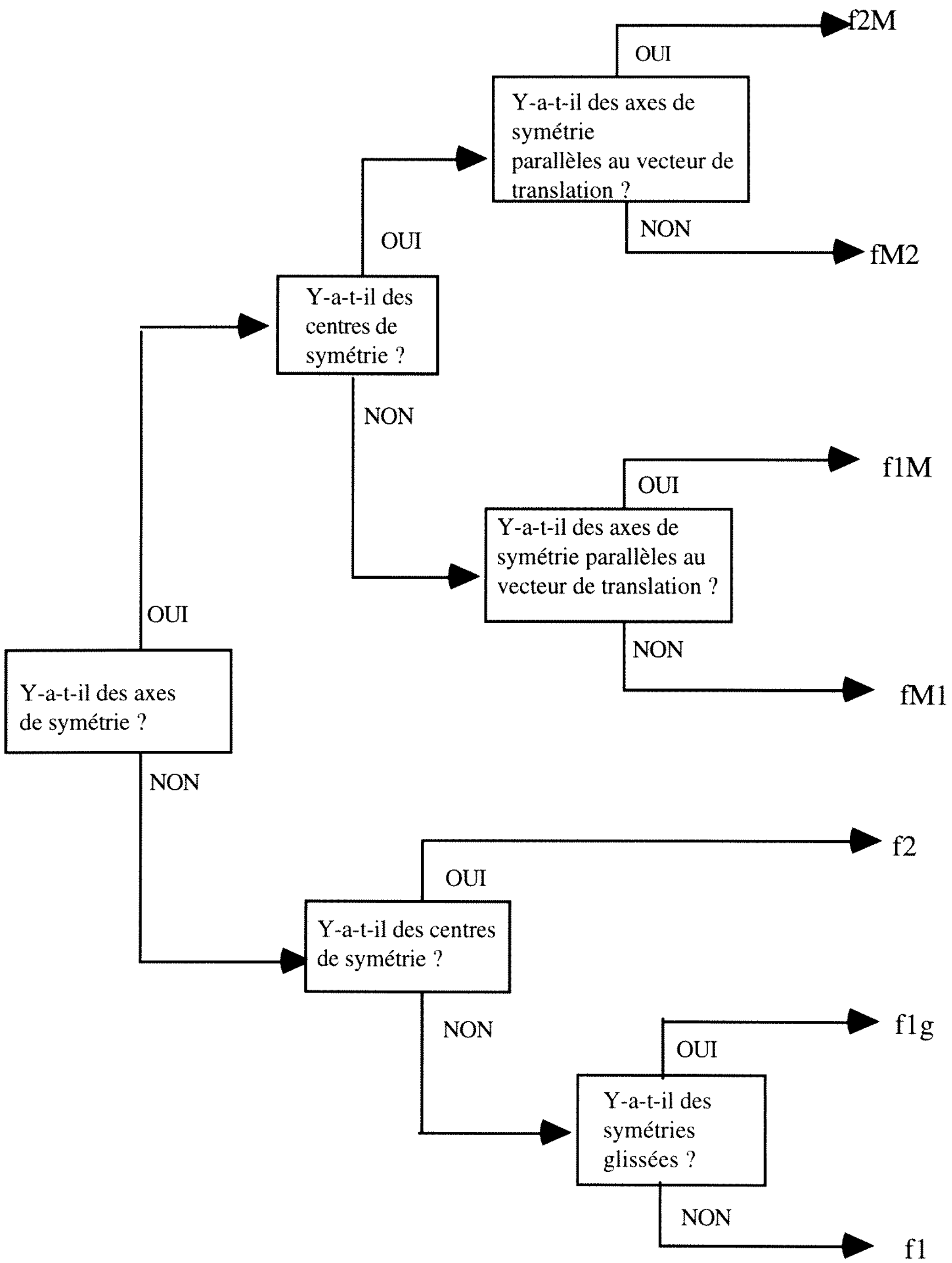
Complétez les sept dessins ci-dessous, pour obtenir, à partir d'un même motif de base (le petit triangle) des frises des sept types.
Les vecteurs des translations qui permettent de prolonger les frises proposées sont représentés en dessous. Par ailleurs, certains axes de symétrie sont indiqués par :

certains centres de symétrie par : o

les axes de symétrie glissée par : → – → – → – → – →



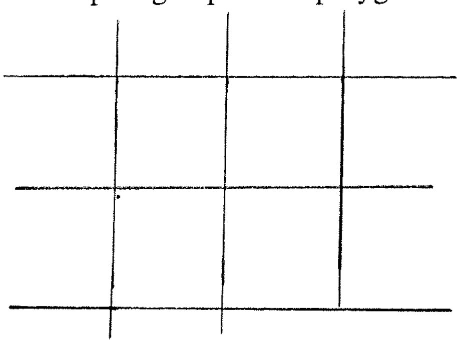
CLASSIFICATION DES FRISES



UN ARBRE POUR CLASSER DES PAVAGES

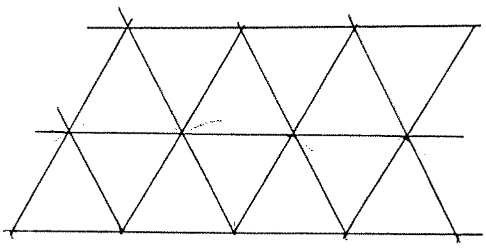
Comme dans le cas des frises, on peut démontrer que, du point de vue des isométries qui les laissent globalement invariant, il n'y a que 17 types de pavages périodiques.

L'arbre proposé page suivante permet de déterminer à quelle famille appartient un pavage donné.
Utilisons le pour classer les pavages par des polygones réguliers trouvés dans "**pavages réguliers du plan**".



Dans le cas du pavage par des carrés,
- il y a des axes de symétrie (les médiatrices des côtés et les diagonales)
- il y a des rotations d'angle 90°
- il y a quatre directions d'axes de symétrie.

Le pavage par des carrés est donc de type p4m.

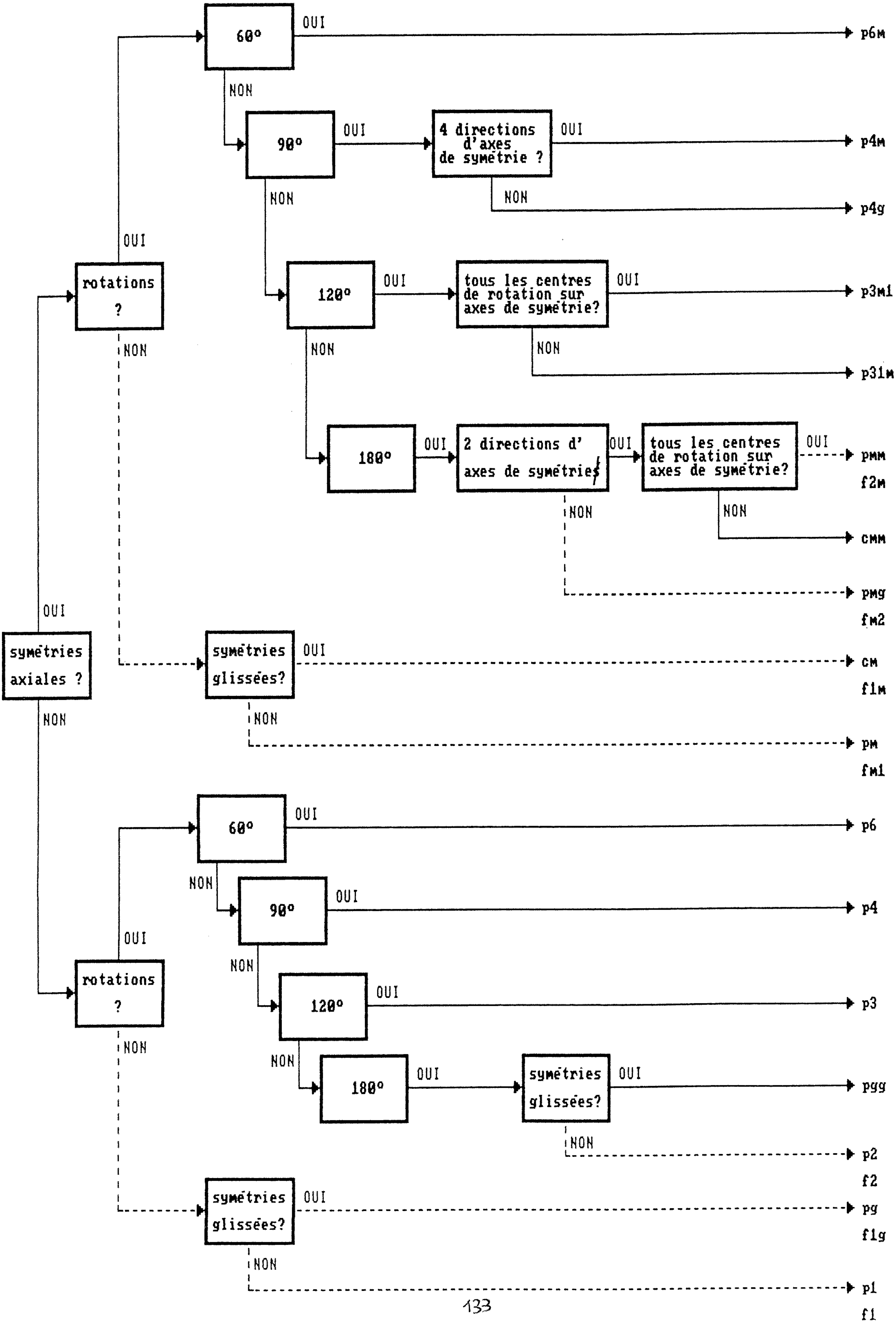


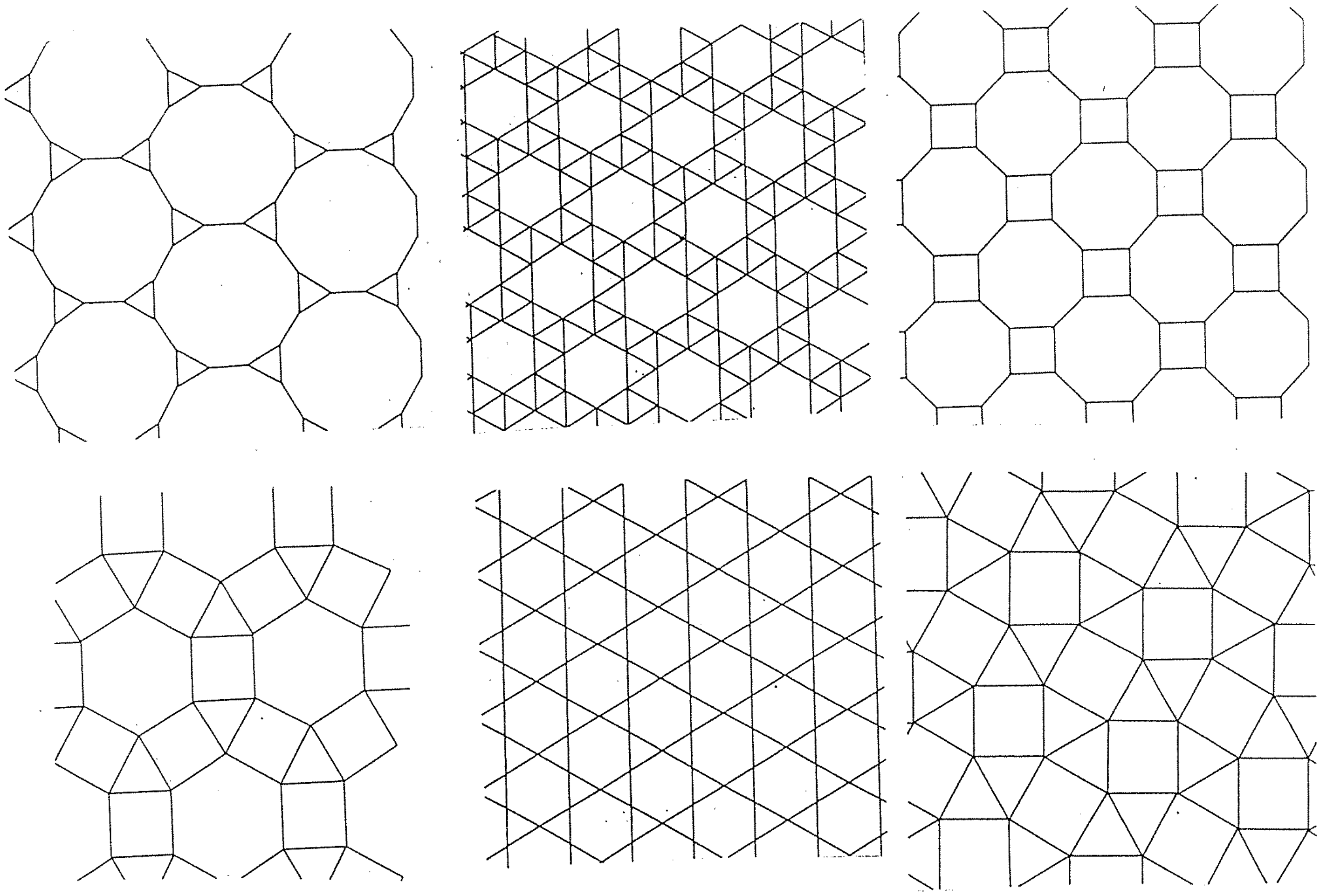
Pour le pavage par des triangles équilatéraux,
- il y a des axes de symétrie (les médiatrices des côtés)
- il y a des rotations d'angle 60°

Le pavage par des triangles équilatéraux est du type p6m.

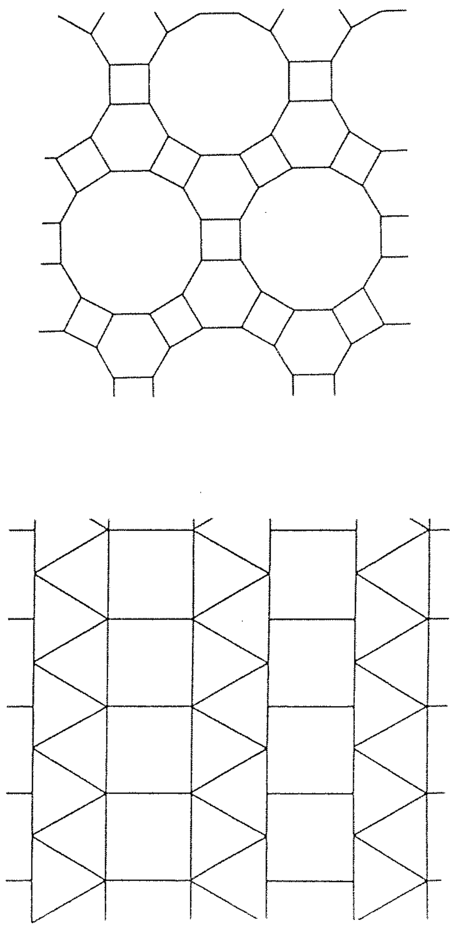
1° De quel type est le pavage par des hexagones réguliers ?

2° De quels types sont les pavages donnés page 134 ? On peut démontrer (par des considérations de sommes d'angles analogues à celles que nous avons invoquées dans une activité précédente), que ce sont les seuls pavages du plan par des polygones réguliers non tous de la même nature (on les appelle pavages "semi-réguliers").


symétries axiales ?
OUI
NON
rotations ?
OUI
NON
60°
OUI
NON
p6m
90°
OUI
NON
4 directions d'axes de symétrie ?
OUI
NON
p4m
p4g
120°
OUI
NON
tous les centres de rotation sur axes de symétrie?
OUI
NON
p3m1
p31m
180°
OUI
2 directions d' axes de symétries
OUI
NON
tous les centres de rotation sur axes de symétrie?
OUI
NON
pmm
f2m
cmm
pmg
fm2
symétries glissées?
OUI
NON
cm
f1m
pm
fm1
rotations ?
OUI
NON
60°
OUI
NON
p6
90°
OUI
NON
p4
120°
OUI
NON
p3
180°
OUI
symétries glissées?
OUI
NON
pgg
p2
f2
symétries glissées?
OUI
NON
pg
f1g
p1
f1



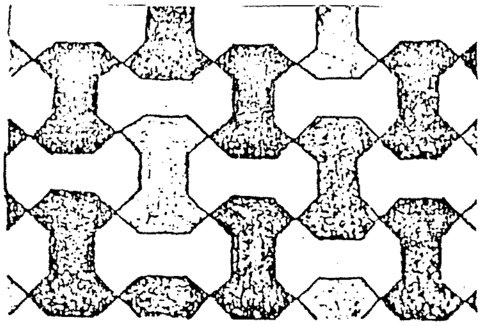
(Figure 1)
pruebas A 1)

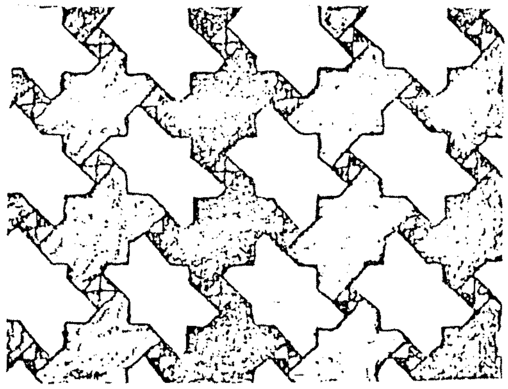


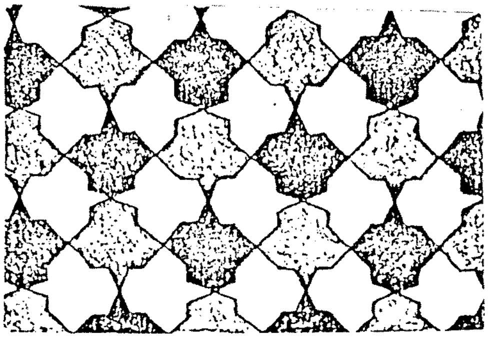
A L'ALHAMBRA DE GRENADE.

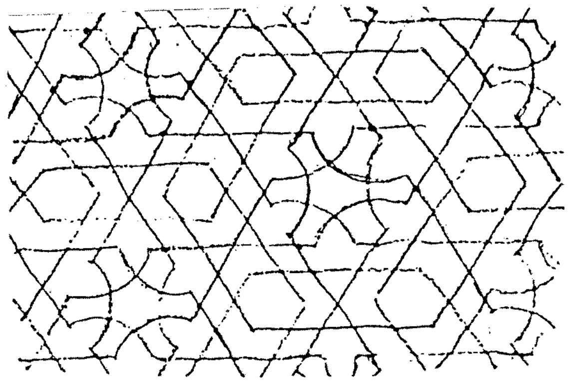
L'Islam interdit la représentation des êtres animés sur les monuments. Certains spécialistes pensent que c'est pour cette raison que les artistes musulmans ont développé à ce point des décors géométriques abstraits (en particulier des pavages) pour décorer tombes et mosquées. Les motifs reproduits ci-dessous proviennent de l'Alhambra de Grenade dans le sud de l'Espagne.

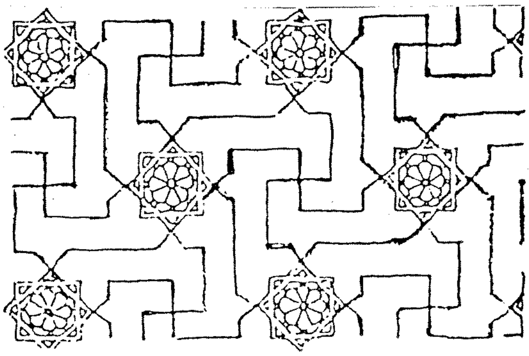
A quel type de pavages appartiennent-ils ?

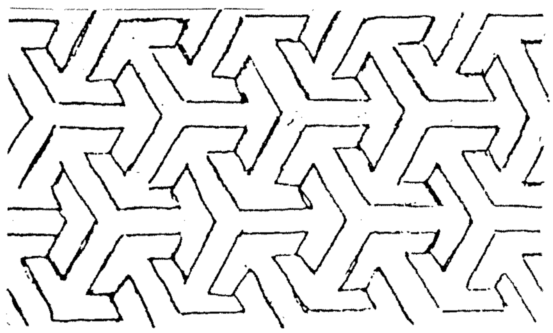


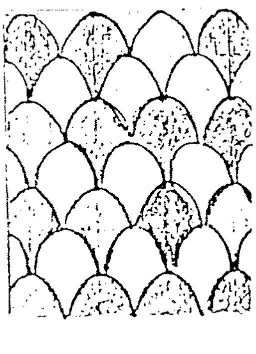






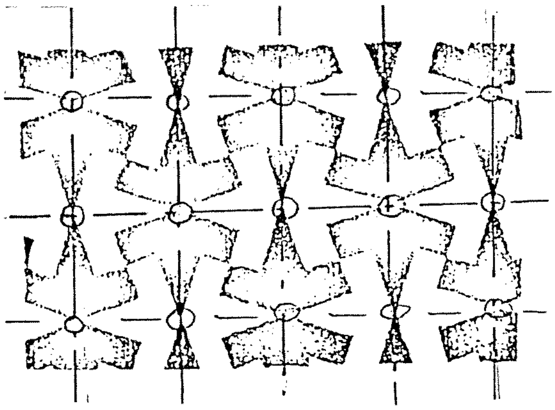


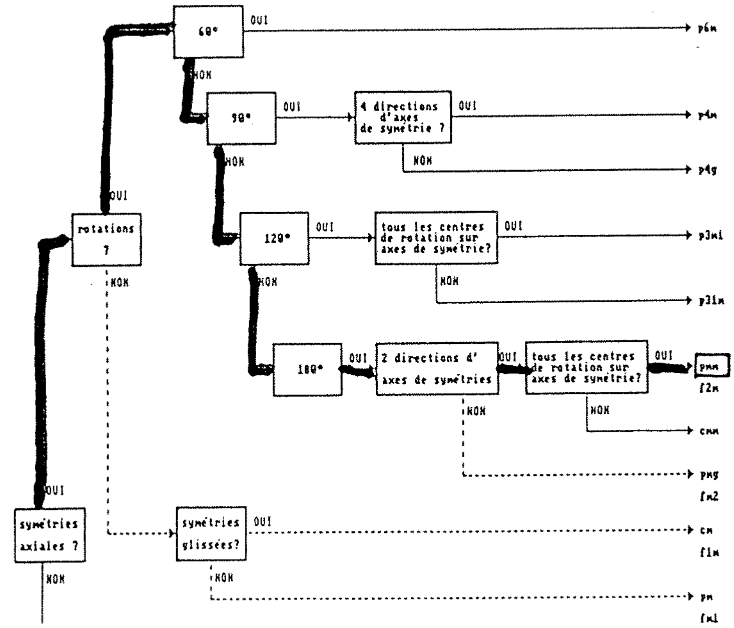


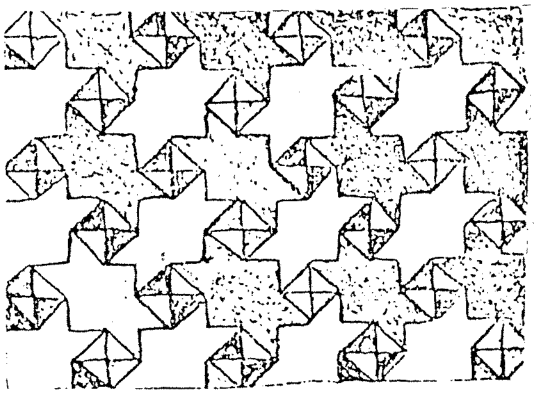


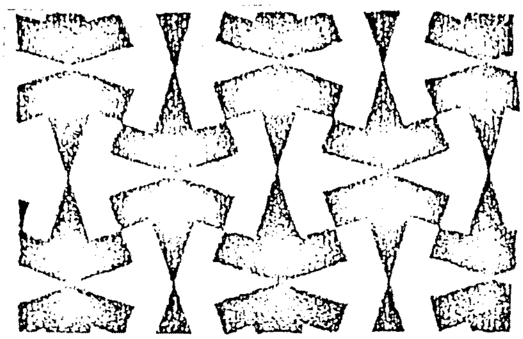
Exemple :

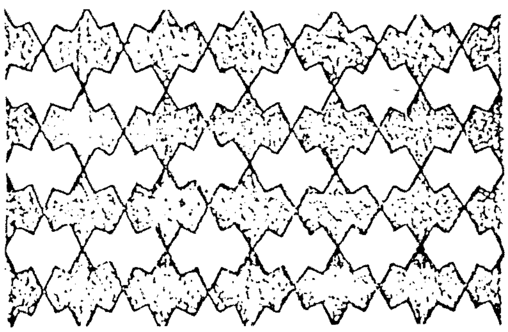
Dans le cas du pavage ci-contre, il y a des axes de symétrie et des centres de symétrie. Il y a deux directions d'axes de symétrie et tous les centres de symétrie sont situés sur les axes de symétrie. On parcourt donc l'arbre selon le trajet surligné et on peut conclure que ce pavage est de type pmm.

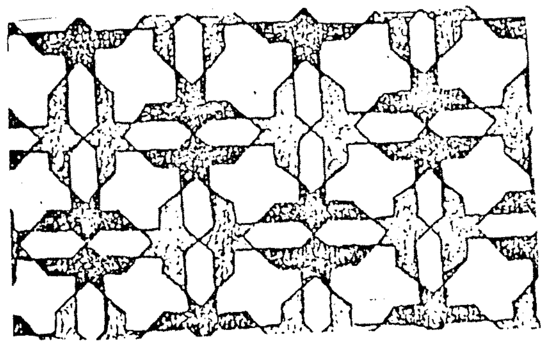












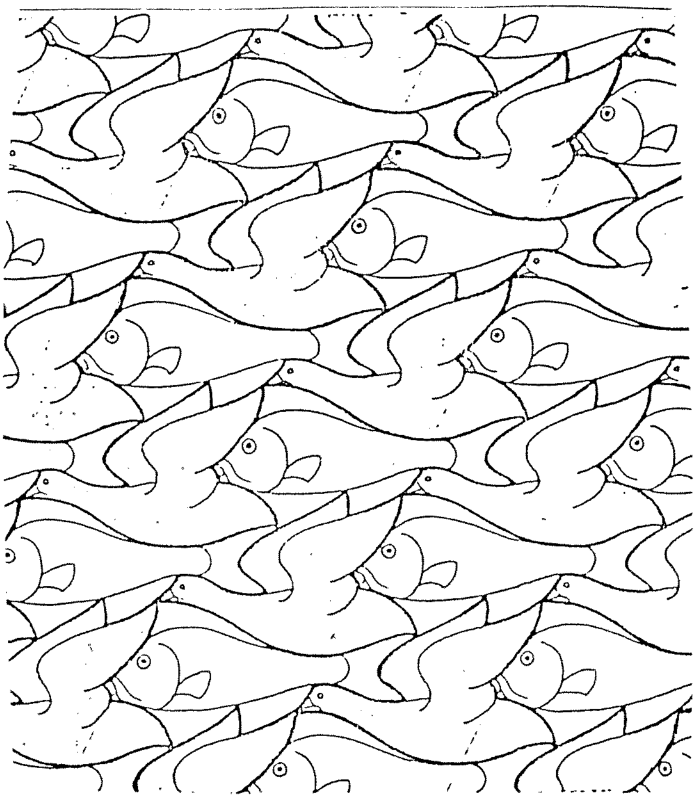
DES PAVAGES D'ARTISTES.

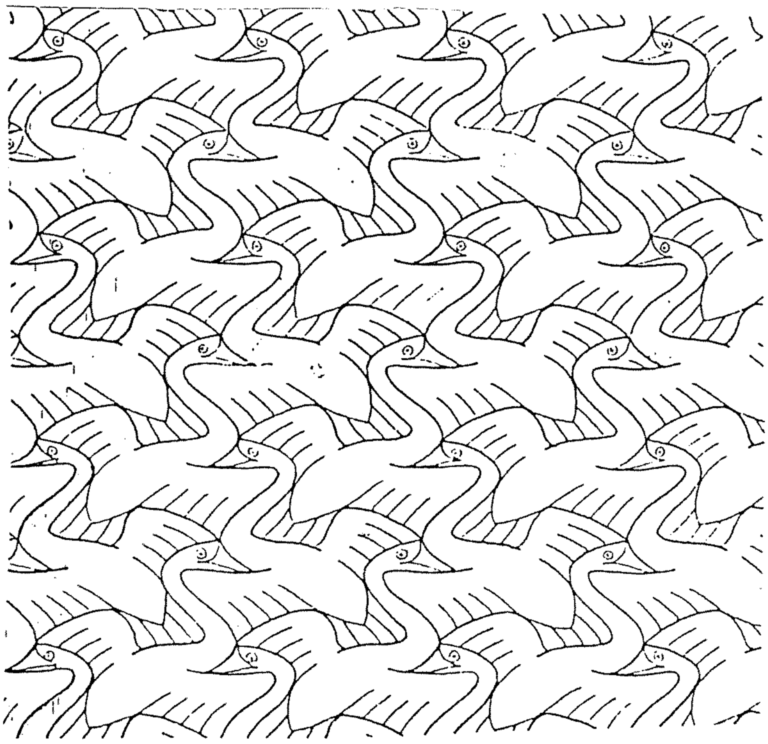
M.C. Escher, peintre et graveur hollandais (1898-1971) est célèbre en particulier pour les pavages très décoratifs qu'il a conçus. On rapporte que son goût pour ce genre de décors lui est venu à la suite d'un voyage à Grenade où il a visité l'Alhambra. Voici ce qu'il disait à ce propos en 1958 à Utrecht :

"Bien longtemps avant de découvrir, chez les Maures de l'Alhambra, une affinité avec le remplissage périodique du plan, je l'avais déjà reconnue chez moi-même. Au début, je n'avais aucune idée des possibilités offertes pour la construction systématique de mes figures. Je ne connaissais aucune règle du jeu et j'essayais, pratiquement sans très bien savoir ce que je faisais, d'emboîter les uns dans les autres de petits plans congruents auxquels je tentais de donner une forme animale...plus tard, la création de nouveaux motifs fut moins laborieuse qu'au début, mais c'est toujours une occupation qui demande un gros effort, une véritable "manie", une vraie drogue à laquelle je m'arrache difficilement".

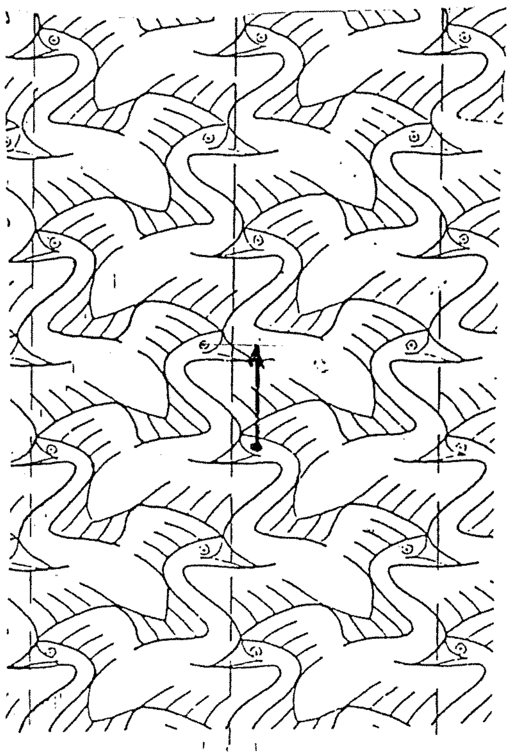
Utilisez l'arbre pour analyser à quel type appartiennent les pavages d'Escher reproduits dans les pages suivantes.

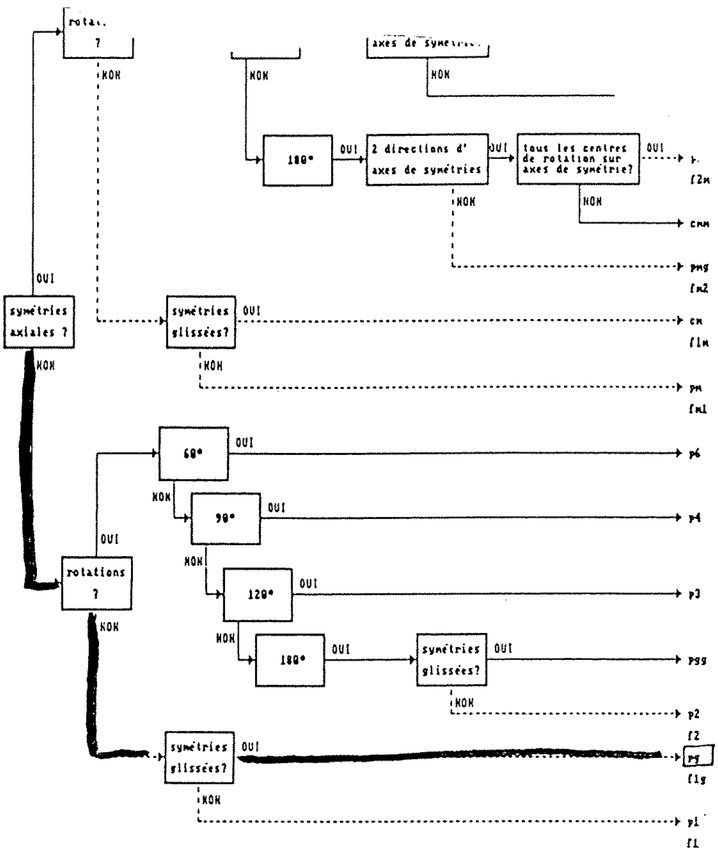
<u>Exemple :</u>

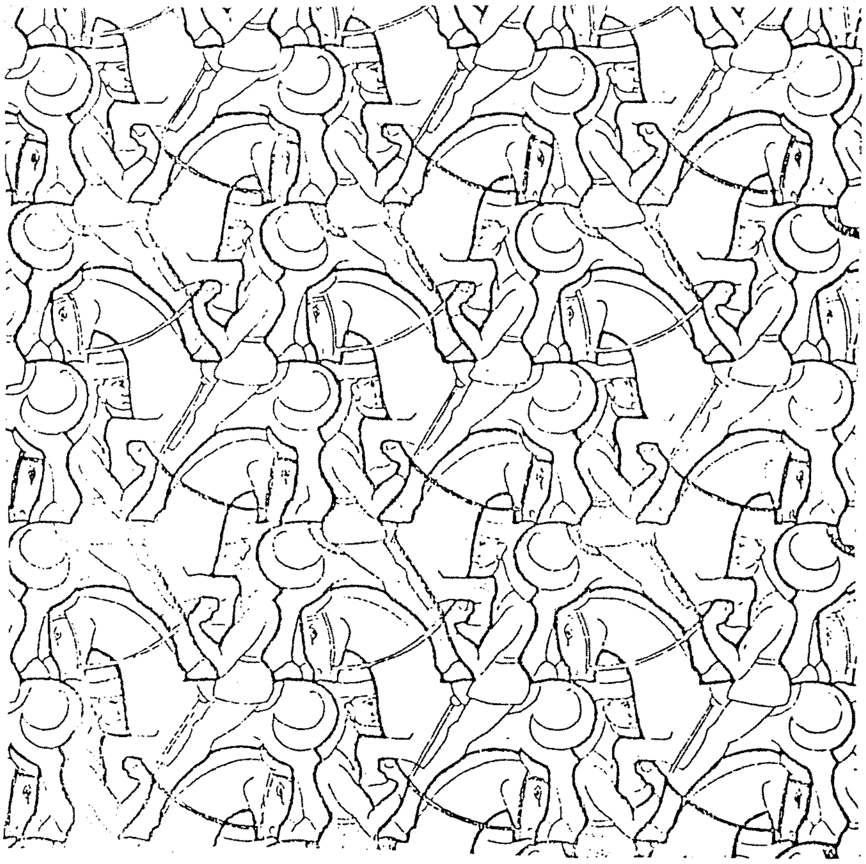


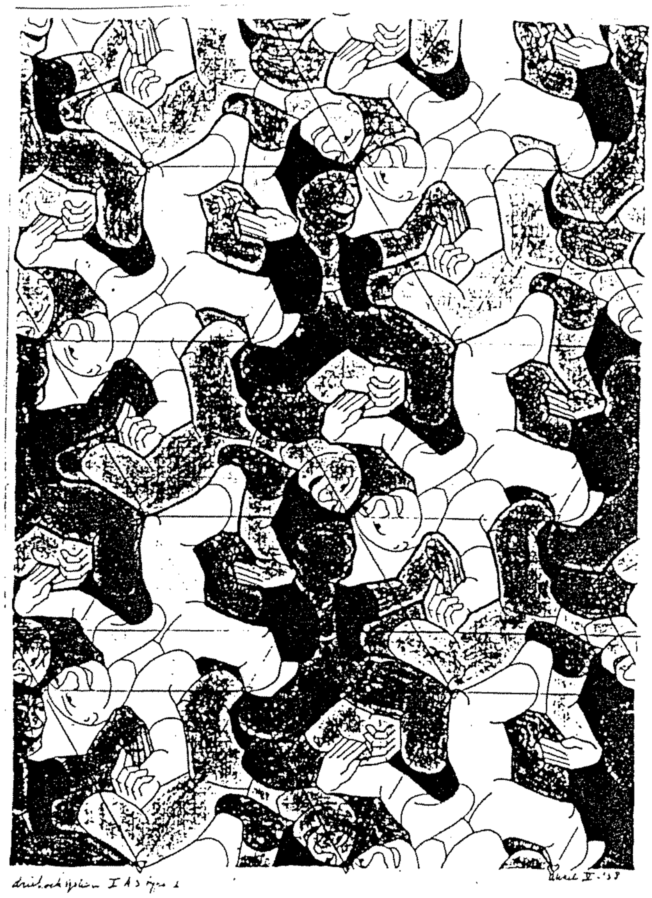


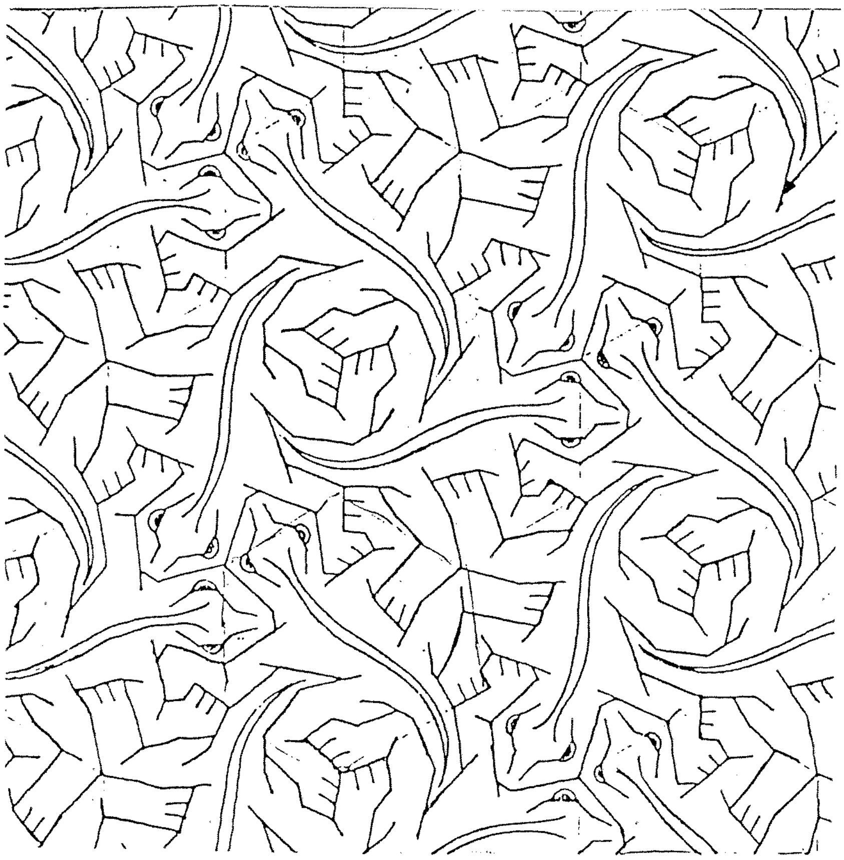
Dans ce pavage par des oiseaux, il n'y a ni axe ni centre de symétries, ni rotation le laissant invariant ; il est invariant par les symétries glissées dont les axes sont indiqués et le vecteur dessiné. On est donc amené à parcourir l'arbre comme la partie surlignée. Ce pavage est de type pg.

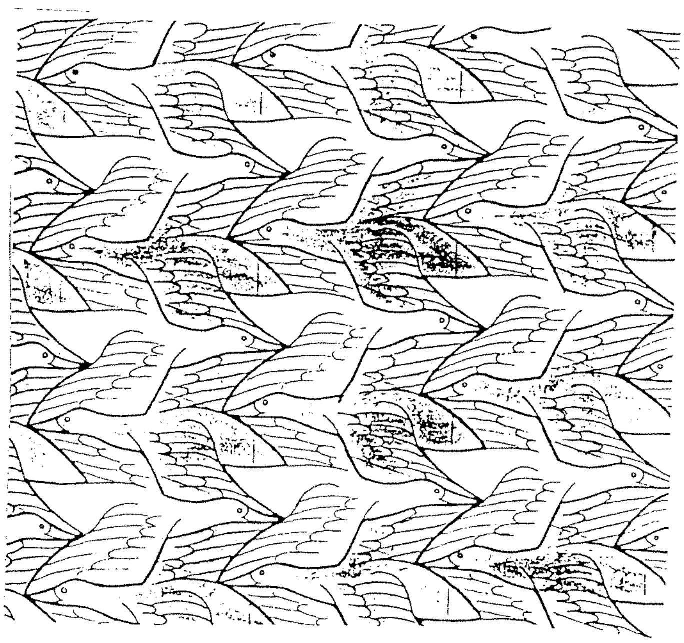


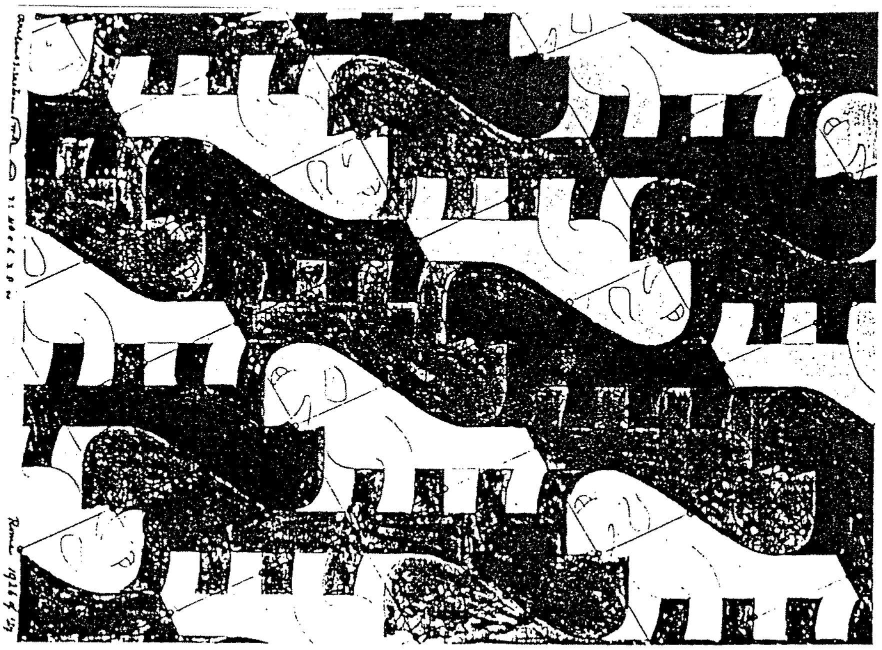


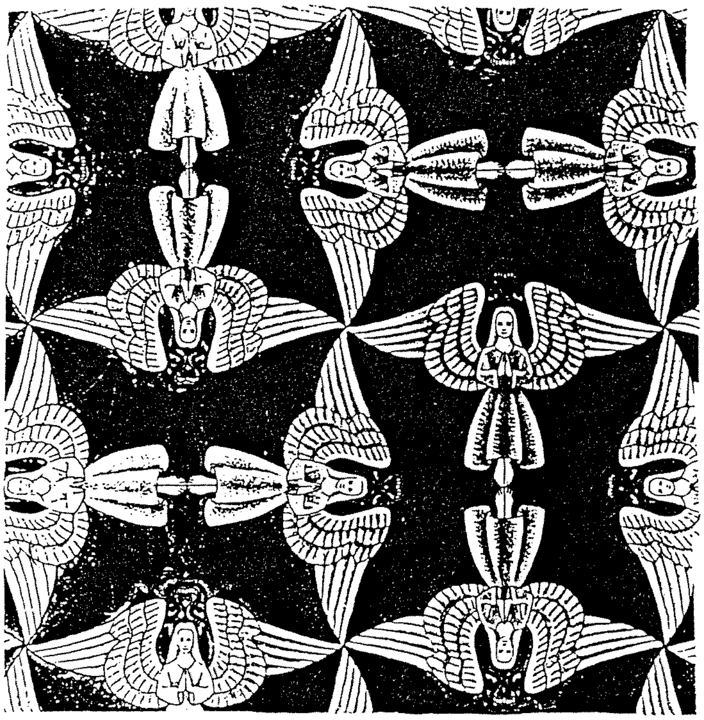












Titre : Enseigner autrement au lycée
ou : Thèmes cherchent programmes désespérément.

Auteurs : Claire CHAUVIERE, Claudine KAHN, Bernard KOCH, Gérard NAFFZGER, Anne-Marie RIGOURD et Dominique WEIL.

Mots-clés : lycée, proportionnalité, nombre, système binaire, calendrier, astronomie, mécanique céleste, probabilité, pavage, frise.

Résumé : Les thèmes proposés ici ne se rattachent pas à un programme mais ils permettent non seulement des activités mathématiques traditionnelles mais aussi l'exploitation de documents, des recherches bibliographiques et historiques et la constitution de dossiers.

Public concerné : Professeurs de lycée.

Nombre de pages : 145.

Editeur : I.R.E.M. de Strasbourg (S. 159).