UNIVERSITE
LOUIS PASTEUR
STRASBOURG
IREM

I.R.E.M. - 10, rue du Général Zimmer - 67000 STRASBOURG
88-41-64-40 ; Fax : 88-41-64-49

PROBLEMES DE MISE EN EQUATIONS :
ces charades dont la solution est
un système d'équations à deux inconnues

Comprenne qui voudra,
moi mon remords ce fut l'inconnue
qui resta sur le papier
(variante d'un poème d'Eluard,
sur une idée de R. Duval)

1996

AVANT - PROPOS

Depuis quelques années, à l'Irem de Strasbourg, un groupe mixte (bien sûr femmes et hommes mais aussi professeurs de mathématiques et de français) a pris l'habitude de se réunir pour mieux comprendre les démarches communes à ces deux disciplines, en particulier dans la lecture et le raisonnement.

Cette brochure est issue de ce travail de réflexion : comme dans tout travail de recherche, nous avons commencé par examiner les travaux menés sur le même thème par différents auteurs. Cette analyse, pas toujours tendre peut-être, nous a permis d'affiner la réflexion déjà menée par des chercheurs de didactique.

Il était aussi évident pour le groupe que cette brochure écrite par des personnes, enseignant pour la plupart en collège ou en lycée, devait s'adresser aux collègues du secondaire, en particulier à ceux enseignant en troisième ou seconde. C'est donc volontairement que nous avons restreint notre recherche à des problèmes de mise en équations conduisant à des systèmes linéaires **à deux inconnues**.

Cette brochure qui a longtemps mûri, n'aurait jamais vu le jour sans le soutien amical et l'exigence intellectuelle de Raymond Duval. Le groupe maths-français le remercie vivement de sa participation et de sa contribution à ce travail.

Isabelle Beck, enseignante de français
Nicole Cordier, enseignante de mathématiques
Geneviève Didierjean, enseignante de mathématiques
Claire Dupuis, enseignante de mathématiques
Marie-Agnès Egret, enseignante de mathématiques
Daniel Kremer, enseignant de mathématiques
Gilles Robert, enseignant de mathématiques
Michèle Vaillant, enseignante de français
Brigitte Wenner, enseignante de mathématiques
Ghislaine Werguet, enseignante de français
Michèle Ziegler, enseignante de mathématiques
et Raymond Duval.

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE IV

Il y a dans l'enseignement des mathématiques des points sensibles sur lesquels il faut passer sans appuyer si l'on veut éviter tout désagrément aux élèves comme aux enseignants. La démonstration en est un, bien connu, la résolution des problèmes de mise en équations en est un autre.

D'un point de vue mathématique, l'enjeu peut sembler de moindre importance pour les problèmes de mise en équations que pour la démonstration. Il ne s'agit, après tout, que d'appliquer des techniques algébriques élémentaires à des problèmes extra-mathématiques. Et si les élèves, de troisième, de seconde et parfois de première, qui ont appris avec pas mal de succès à résoudre des équations et des systèmes, échouent quand il s'agit d'écrire un système d'équations à partir d'un énoncé, ne sommes-nous pas là aux marges d'une activité proprement mathématique ? Et la faute, n'en déplaise aux enseignants de français, n'en reviendrait-elle pas à des difficultés de langage ou de compréhension des textes ?

Du point de vue du rôle que les mathématiques peuvent jouer dans la formation générale de base des élèves, l'enjeu n'apparaît plus tout à fait le même, car il s'agit pour le moins de montrer à quoi peuvent servir les mathématiques que l'on apprend. Et l'on connaît la vague de fond, qui dans beaucoup de pays, tend à porter au premier rang un enseignement des mathématiques qui serait effectué à partir de leurs applications concrètes et qui serait centré sur ces applications. Demain, il n'y aura peut-être de mathématiques socialement et éducativement acceptables qu'appliquées. Dans ces conditions...

Il y a là matière à débat. Mais un tel type de débat surgit souvent comme un écran pour éviter le problème de fond que posent les difficultés systématiquement rencontrées par les élèves pour «écrire un système d'équations» : *quelles sont les opérations requises pour effectuer cette tâche, ou en quoi consiste la complexité de cette tâche ?* Tant qu'on que l'on ne dispose pas d'éléments de réponse précis pour ce problème de fond, toute proposition de méthodes pour apprendre à résoudre ne peut que relever d'une démarche un peu aveugle n'ayant d'autre justification que celle d'arguments égocentriques d'autorité : «c'est évident, moi qui sais des maths, si je regarde comment je fais pour résoudre, c'est comme cela que je vois qu'il faut faire !».

C'est à ce problème de fond qu'est consacré l'essentiel de cette brochure. Pour dégager toutes les opérations, explicites ou implicites, que l'on effectue quand on passe d'un énoncé à l'écriture d'un système, nous avons dû prendre en compte non pas des exemples de problèmes mais déterminer un ensemble d' énoncés de problèmes possibles (chapitre II). Car d'un énoncé à un autre, il peut y avoir des variations qui vont modifier radicalement la complexité de la tâche. Nous avons également pris en compte un autre passage: il s'agit de passer de ce que nous avons appelé «la présentation complète» d'une situation extra-mathématique à l'écriture de plusieurs systèmes différents (chapitre III). L'examen de ces passages nous permettra de voir que la résolution des problèmes de mise en équations mobilise des opérations discursives de désignation d'objet et de relations à l'aide de mots comme à l'aide de symboles. Ces opérations sont beaucoup plus fines que celles habituellement mobilisées dans la lecture courante d'un texte ou dans la manipulation calculatoire d'équations. Et nous touchons là quelque chose d'essentiel pour l'apprentissage des mathématiques. Car cette mobilisation des opérations discursives de désignation d'objets n'a pas seulement un intérêt pour la résolution des problèmes de mise en équations, elle est également requise pour que l'introduction des écritures littérales ou que l'exigence d'un langage précis aient un sens aux yeux des élèves.

Naturellement nous ne négligeons pas la question pratique, la seule qui semble compter quand on se place au point de vue du quotidien de l'enseignement : *comment faire pour apprendre aux élèves à résoudre les problèmes de mise en équations?* Nous y avons consacré deux chapitres, le premier et le dernier. Dans le premier, nous passons en revue les différentes propositions faites pour aider les élèves à voir comment s'y prendre pour résoudre un problème. Ce qui frappe, c'est qu'elles s'inscrivent toutes dans une même démarche typique : celle qui commence par le choix des inconnues. Leurs différences portent surtout sur l'utilisation ou la non-utilisation de représentations auxiliaires et sur la nature de ces représentations. Mais, en définitive, il s'agit plus de la présentation d'exemples résolus, ou dont la résolution est téléguidée pas à pas, que de la présentation de véritables méthodes. Dans le dernier chapitre, nous nous sommes risqués à présenter une séquence de travail de quatre ou cinq séances, inspirée d'expériences antérieures mais réessayées pragmatiquement, c'est-à-dire sans aucun montage expérimental particulier, par des membres du groupe dans leurs propres classes.

Il y a donc deux lectures possibles de cette brochure. Un lecteur qui ne voudrait que du concret et que de l'immédiatemment utilisable demain matin à huit heures dans sa classe pourrait donc se contenter du chapitre I et du chapitre IV. Le chapitre I lui évitera de parcourir plusieurs manuels. Nous l'avons fait pour lui. Et nous avons même constitué un échantillon représentatif de 35 problèmes tirés de différents manuels de Collège et de Lycée. Cette liste se trouve en annexe du chapitre II, et non pas du chapitre I, car cet échantillon donne une idée de la variabilité des énoncés. Le chapitre IV a la forme d'une fiche de travail, non pour les élèves, mais pour l'enseignant.

Mais s'en tenir à ces deux chapitres et ou se contenter de vouloir simplement reproduire une séquence décrite serait s'exposer à des risques de contresens didactiques graves et à aller à la rencontre d'une certaine déception quant aux résultats. Car dès qu'il s'agit de faire entrer les élèves dans une démarche, et non pas seulement de leur faire reproduire une technique dont les étapes sont bien décomposées, il ne suffit pas de savoir quelles activités leur faire faire, il faut surtout avoir soi-même compris pourquoi ces activités sont choisies et quelles réactions elles peuvent provoquer. Les «bonnes» activités, c'est-à-dire celles qui peuvent aider à prendre conscience du sens et de la complexité d'une démarche, présentent généralement trois caractéristiques :

- elles sont choisies en fonction d'un modèle du fonctionnement cognitif impliqué pour l'accomplissement de la tâche mathématique demandée,
- elles offrent des prises aux initiatives des élèves, même faibles,
- elles ne conduisent pas immédiatement à des réussites mais font apparaître des questions ou des difficultés qui n'avaient alors été soupçonnées ni par l'enseignant ni par les élèves eux-mêmes.

C'est évidemment la troisième caractéristique qui est la plus intéressante et la plus féconde pour progresser. Elle suppose que l'enseignant puisse interpréter les productions de ses élèves, jamais complètement semblables d'une classe à une autre ou d'un groupe d'élèves à un autre, en fonction de ce qu'implique la tâche, et qu'il régule en conséquence la présentation des différentes activités composant une séquence d'apprentissage. C'est pourquoi la lecture des chapitres II et III est essentielle. On pourrait même dire qu'elle dispense de la lecture des chapitres I et IV !

Et si quelqu'un prend la peine de tout lire, ne serait-ce que pour nous mettre en contradiction avec nous-mêmes (chapitre II et III d'une part et chapitre IV d'autre part), nous serions heureux de faire sa connaissance, et déjà nous lui susurrons :

«— Hypocrite lecteur— mon semblable, — mon frère!»

CHAPITRE I

LES MÉTHODES DE RÉSOLUTION : AIDE OU LEURRE ?

Le problème auquel les enseignants se trouvent confrontés lorsqu'ils donnent des problèmes de mise en équations est de savoir comment apprendre aux élèves à les résoudre ou, tout au moins, à ne pas rester complètement désorientés devant l'énoncé. Pour répondre à cette préoccupation, de nombreux manuels de collège et de lycée proposent maintenant un «plan de travail» censé aider les élèves. Suivant les commentaires officiels des programmes des classes de quatrième, de troisième et aussi de seconde, qui recommandent de *«dégager, sur les exemples étudiés, les différentes étapes du traitement d'un problème: mise en équation, résolution (en utilisant des techniques), interprétation du résultat* », ce plan de travail comporte le plus souvent quatre étapes :

1. Choix des inconnues .
2. Mise en équations (ou en équation) des données du problème.

   Cette deuxième étape exige évidemment que l'on se réfère peu ou prou à l'énoncé. Aussi est-elle souvent concrétisée par l'une des deux démarches suivantes :

   a. Présentation d'un énoncé qui puisse se découper exactement en fonction de chacun des morceaux d'équations à écrire ou de chacune des équations à écrire.

   b. Ajout à l'énoncé d'une suite de questions ou d'une représentation figurale de la situation de telle sorte que la lecture de l'énoncé soit rendue plus facile ou même qu'elle devienne presqu'inutile.
3. Résolution du système d'équations (ou de l'équation) par les techniques habituelles.
4. Conclusion.

Ce plan de travail est toujours présenté à travers un ou deux exemples de résolution d'un problème particulier.

Cela constitue-t-il un bon schéma de travail pour aider les élèves à acquérir une méthode de résolution des problèmes par une méthode algébrique ? Cette question peut paraître surprenante car ce schéma propose un «ordre logique» dont on ne voit pas comment on pourrait y échapper pour résoudre les problèmes de mise en équations. Cependant la poser, c'est se demander si cet ordre logique est une réelle description des traitements importants à effectuer. Par exemple, le choix des inconnues est-il véritablement la première étape et comment fait-on pour choisir les inconnues ? Ce choix des inconnues précède-t-il vraiment la mise en équations ou ne s'agit- il pas là de deux aspects d'un seul et même «traitement» pour reprendre le terme employé dans les commentaires officiels ?

Toutes ces étapes sont-elles égales ou y en a-t'il une qui s'avère particulièrement difficile du point de vue des élèves? Autrement dit, pour un apprentissage de la résolution des problèmes peut-on mettre sur le même plan les deux premières étapes et la troisième ?

Et il n'y a pas que cet ordre logique apparent des étapes qui pose problème, il y a aussi les exemples. Nous ne nous interrogeons pas ici sur le fait que montrer sur des exemples «comment on fait pour résoudre un problème» puisse aider ou non les élèves. Nous nous interrogeons sur les exemples choisis : sont-ils vraiment représentatifs des différents problèmes que les élèves auront à résoudre ou devraient être en mesure de pouvoir résoudre? Autrement dit, y a-t'il de bons exemples pour montrer, c'est-à-dire les problèmes se ressemblent-ils suffisamment pour qu'un problème puisse être considéré comme équivalent aux autres ?

Ce que les manuels proposent, en s'en tenant à ce schéma de travail réalisé sur un ou deux exemples de problèmes particuliers, peut être regroupé en cinq démarches différentes :

- utiliser des énoncés transparents
- proposer une liste de questions pour guider
- substituer une représentation figurale de la situation à l'énoncé
- donner un tableau totalement ou partiellement rempli
- donner une esquisse de la résolution du problème

Ce sont ces cinq démarches que nous allons présenter brièvement en nous attachant aux traitements proposés pour les deux premières étapes du schéma, c'est-à-dire à ce qui recouvre le passage de l'énoncé du problème à l'écriture du système d'équations. Cela nous permettra ensuite de nous interroger sur la pertinence des méthodes de résolution classiquement proposées et, plus particulièrement de poser la question: où est le problème dans les problèmes de mise en équations?

I. DES DÉMARCHES POUR APPRENDRE À RÉSOUDRE ?

1. Utiliser des énoncés transparents

On choisit des énoncés dont l'organisation syntaxique se laisse découper exactement en fonction de chacun des morceaux d'équations à écrire ou de chacune des équations à écrire. Il faut alors être aveugle, ou pudibond, pour ne pas voir à travers le texte les formes du système d'équations à trouver.

> Huit heures du «math», par l'odeur alléché :
> -«3 baguettes et 5 croissants !
> -Ça fait 30,30 F.»
> Huit heures trois :
> -«Pour moi, 4 baguettes et 3 croissants !
> -Cela nous fait 25 F.»
> Combien coûte la baguette ? Et le croissant ? Pythagore Seconde, 1994, p 64

Après l'étape «choix des inconnues» (mais quelles autres possibilités que celles des bons choix y a-t'il ici? Il n'est même pas nécessaire de distinguer «baguette» et «prix d'une baguette»), l'étape «mise en équations» est donnée par les deux consignes suivantes :

1. Traduire l'achat du premier client sous forme d'une équation à deux inconnues.
2. Recommencer avec le second client.

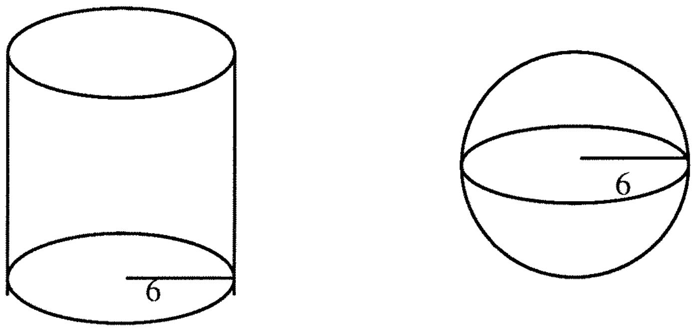
La démarche ainsi présentée permet-elle d'aborder un énoncé un peu moins transparent ? Prenons par exemple le problème suivant que nous trouvons dans le même manuel:

> Un bateau descend une rivière sur 29km en 2h, puis la remonte sur 19km dans le même temps. Calculer la vitesse du courant et la vitesse propre du bateau.
>
> Pythagore Seconde, 1994, p 80

L'élève qui appelle x et y les deux vitesses, de la même manière qu'il a appelé x et y les (prix des) baguettes et des croissants peut-il traduire la première proposition sous la forme d'une équation à deux inconnues ? Etrangement il n'y a plus ici aucune consigne ou indication de méthode.

2. Proposer une liste de questions pour guider vers l'écriture de(s) l'équation(s)

On choisit une suite de questions pour faire repérer les informations nécessaires pour écrire les équations.:



> Une boule a un rayon de 6 cm . Quelle est la hauteur h d'un cylindre dont le rayon de base est également 6 cm, et qui a le même volume que la boule ?
>
> Le volume de la boule, en cm^3 est : ....
> Le volume du cylindre en cm^3, et en fonction de h est :..........
> Les volumes sont égaux donc ... = ...
> Résous l'équation obtenue.
> Conclusion: Le cylindre ayant le même volume que la boule a une hauteur de ... cm.
>
> Delagrave $4^{\text{ème}}$, 1992, p.68.

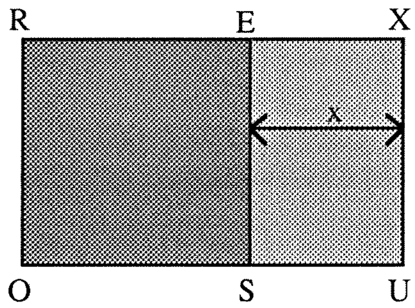
Les différentes questions ont donc pour but de diriger l'attention sur les différents objets à identifier, c'est-à-dire ici deux quantités inconnues (une inconnue, le volume du cylindre et l'autre fixée mais à calculer, le volume de la boule), et sur la relation qui permet d'articuler ces quantités en une équation. Ainsi dans ce cas, trois questions sont suffisantes, deux pour écrire les deux quantités inconnues et une pour identifier la relation d'égalité. Avec une équation dont les membres seraient moins simples ou avec un système d'équations, il faudrait évidemment davantage de questions. Mais la démarche telle qu'elle est proposée ici appelle deux remarques plus importantes :

- On ne distingue pas le choix de l'inconnue que l'on donne et l'écriture de la quantité inconnue à l'aide de cette inconnue choisie. Or avec un système d'équations, cette distinction devient essentielle car elle renvoie à des opérations de nature différente, choix d'un lexique «littéral» de base (de une, deux ou *n* lettres selon le nombre d'inconnues et d'équations) et désignation des quantités inconnues à l'aide de ce lexique de base.
- Les questions sont formulées de telle manière qu'il suffit de regarder la figure pour y répondre. Bref le problème est présenté d'une façon telle que l'énoncé peut être court-circuité. Cela correspond à la troisième démarche.

3. Substituer, à l'énoncé, une représentation figurale de la situation

Cette démarche est séduisante puisqu'elle semble présenter les deux avantages suivants : réduire l'importance d'un énoncé que tant d'élèves paraissent avoir du mal à comprendre et donner l'équivalent d'une représentation mentale dont il est devenu commun de répéter qu'elle est une condition pour résoudre des problèmes. Bref il s'agit de s'arranger pour que la mise en équations puisse être faite par une lecture directe de la figure. Cette démarche peut être immédiate comme dans le cas suivant où l'on réduit d'emblée la part de l'énoncé au profit de la figure :

Le carré ROSE a 5 cm de côté.
L'aire du rectangle ROUX fait 31 cm^2
Calculer la longueur EX



Remarques générales		Points de détail
Choix de l'inconnue et contraintes.	soit x la longueur EX, x est un nombre positif.	x est une longueur
Mise en équation du problème : on traduit le texte par une équation. Résolution de l'équation	$5x+ 25 =31$	31 représente l'aire du rectangle ROUX 25 représente l'aire du carré ROSE $5x$ représente l'aire du rectangle SUXE.

Il y a deux façons de lire cette figure: en fonction des longueurs ou en fonction des aires. La résolution du problème suppose la lecture en fonction des aires.
Dans un tel exemple résolu, le choix de l'inconnue n'est pas à faire puisque celle-ci est donnée sur la figure. On supprime donc ce qui est classiquement considéré comme la première étape. En outre, contrairement à ce qui est dit, on ne traduit pas directement l' énoncé en une équation mais le commentaire qui en est fait, sous forme d'explicitation, dans la troisième colonne du tableau nous permet la mise en équation. On trouve ce genre d'exercices dans un grand nombre de manuels (Transmath 4ème, 1992, p.222; Mistral 4ème, 1988, p.93; Delagrave 4ème, 1992, p.68; Magnard 4ème, 1988, p.165))

Cette démarche de substitution peut-être moins réductrice et tenter d'aider à comprendre le texte comme dans le cas suivant où deux figures sont introduites dans la présentation de la méthode de résolution :

> 9 pièces d'or pèsent le même poids que 11 pièces d'argent. Si on échange une pièce de chaque tas, le tas d'or pèse 13 liangs de moins que le tas de pièces d'argent
> Quels sont les poids d'une pièce d'or et d'une pièce d'argent?
>
> Problème (chinois)
>
> Mise en équations du problème:
> Notons x le poids d'une pièce d'argent et y le poids d'une pièce d'or (en liang).
> Pour mieux comprendre l'énoncé, illustrons les informations données à l'aide des dessins suivants :

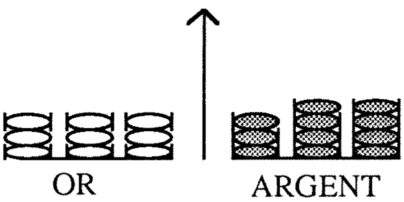


Fig. 1

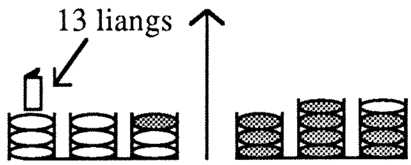


Fig. 2

> a. Se reporter à la figure 1.
> Quelle phrase de l'énoncé permet d'affirmer que la balance est en équilibre?
> Quelle égalité peut-on en déduire?
> b. Se reporter à la figure 2.
> Quelle phrase de l'énoncé permet d'affirmer que la balance est en équilibre?
> Expliquer.
> Quelle égalité peut-on en déduire?
> c. Ecrire le système à résoudre pour obtenir la réponse au problème posé.
>
> Transmath, 3ème, 1993, p.223

On remarquera la correspondance descriptive {une phrase↔une figure↔une équation} sur laquelle est construit cet exemple, les deux premières questions ayant pour but d'attirer l'attention sur cette correspondance. Une fois de plus l'étape «choix des inconnues» apparaît inutile puisque donnée. Car on peut d'emblée écrire chacune des deux équations soit en décrivant chacune des deux figures, soit en transcrivant chacune des deux phrases, à partir des deux questions qui soulignent que la balance est en équilibre! On est donc presque ramené à une situation de transparence. La dernière question est alors purement formelle.

La question que pose une telle démarche est une fois de plus celle de savoir si tous les problèmes peuvent se prêter à ce type de correspondance descriptive{une phrase↔une figure↔une équation}. Car cette correspondance est nécessaire pour pouvoir introduire facilement une figure si au départ on ne dispose que du texte de l'énoncé.

4. Donner un tableau totalement ou partiellement rempli

Il est tout d'abord important de souligner qu'un tableau n'est pas une représentation figurale de la situation décrite dans l'énoncé, mais **une organisation de données** relatives à la situation. Un tableau ne relève pas du même registre de représentation qu'un schéma ou qu'une figure. D'ailleurs le tableau peut être considéré comme une représentation intermédiaire entre le texte de l'énoncé et l'écriture d'un système d'équations. Nous sommes donc là en présence d'une démarche très différente de la précédente. Plusieurs manuels n'hésitent pas à recourir à ce type de démarche, mais ils le font de façons très différentes. Nous pouvons distinguer trois cas : le tableau est donné totalement rempli, le tableau est donné partiellement rempli et le tableau est donné complètement vide, le nombre de lignes et de colonnes étant indéterminé.

Premier cas : *le tableau est donné totalement rempli*

Cela veut dire que, d'une part, les marges correspondant aux catégories des données utiles sont déjà fixées et que, d'autre part, certaines données sont déjà dans les cases correspondantes.

> Un silo à grains contient 44 tonnes de blé de plus qu'un silo B.
> On verse 20 tonnes de blé dans chacun des silos. Le silo A contient alors deux fois plus de blé que le silo B.
> Quelle est la masse de blé dans chaque silo au départ ?
>
> IREM Strasbourg, 4ème, 1992, p.165

La présentation du processus de mise en équations se fait en deux phases :

- une phase de recherche «au brouillon» où on demande de «relever dans le texte les expressions qui entrent en jeu».
- une phase de proposition d'un tableau rempli, où l'inconnue est déjà donnée dans le tableau. Mais aucune procédure de construction d'un tel tableau n'est indiquée.

Cette proposition est suivie de «Je peux faire un tableau et le remplir en relisant l'énoncé»:

Masse en tonnes	*silo A*	*silo B*	***Renseignements complémentaires***
au départ	$44+x$	x	
versée	20	20	
à la fin	$64+x$	20+x	le silo A contient deux fois plus que le silo B

Deuxième cas : *le tableau est donné partiellement rempli*

Cela veut dire que seulement les marges correspondant aux catégories des données utiles sont déjà fixées. Aucune donnée utile n'est rangée dans les cases.

> Un bassin A, qui n'est pas entièrement rempli, contient 15 hl d'eau.
> Un deuxième bassin B, dans les mêmes conditions, renferme 12,5 hl.
> Un robinet remplit le bassin A à raison de 7 l par minute ; un autre robinet remplit le bassin B à raison de 12 l par minute.
> Au bout de combien de temps les deux bassins contiendront-ils la même quantité ?
> Pour résoudre ce problème, on pourra recopier et compléter le tableau ci-dessous:

	bassin A	***bassin B***	***Renseignements complémentaires***
contenance au départ (en l)			
débit (en l/mn)			
Temps de remplissage (en min).			
eau versée (en l)			
contenance totale (en l)			

IREM Strasbourg, $4^{\text{ème}}$, 1992,

Troisième cas : *le tableau doit être construit par l'élève*

Cela veut dire qu'il faut fixer le nombre de lignes et de colonnes et qu'il faut déterminer leur signification. Nous n'avons pas trouvé ce troisième cas. Cependant nous le signalons car c'est cette démarche précise que nous présenterons plus loin.

Il est possible d'organiser les données de n'importe quel problème de mise en équations sous forme d'un tableau. Cette démarche présente donc un intérêt particulier. Mais en réalité, il ne suffit pas de donner un tableau pour aider les élèves. Il peut même être un leurre, ou un obstacle, comme dans le cas suivant où le tableau donné ne comporte pas de case pour écrire les relations données par l'énoncé :

> Claude et Dominique partent à bicyclette des villes A et B et se dirigent l'un vers l'autre. Claude part à 10 heures et sa vitesse est de 15 km/h. Dominique part à 10 heures 10 minutes et sa vitesse est de 18 km/h. Les deux amis arrivent en même temps au milieu du chemin. Déterminer l'heure de leur rencontre.
>
> Dimathème seconde, 1994, TP p109

Ce problème requiert que les élèves se rappellent la relation liant distance, vitesse et temps, puis fixent une seule inconnue t qui désigne la durée en heures du parcours de Claude. Pour mettre en équations, on propose aux élèves de remplir ce tableau en répondant aux questions ci-dessous :

	distance en km	temps en h	vitesse en km/h
Claude		t	15
Dominique			18

a) Exprimer en fonction de t la distance parcourue par Claude et compléter la première ligne du tableau.
b) Justifier que la durée en heure du parcours de Dominique est $t- 1/6$
Compléter la deuxième ligne du tableau.
3) Quelle relation existe-t-il entre les deux lignes de la colonne distance?
Calculer t. En déduire l'heure de la rencontre.

Le fait de ne choisir qu'une inconnue et de ne pas faire apparaître les relations entre les distances et celles entre les durées augmente la difficulté. Le tableau n'est plus une aide pour passer de l'énoncé aux équations puisqu'il faut appréhender toutes les relations entre les objets de l'énoncé avant de le remplir. Cet exercice ne fait que déplacer la difficulté de la mise en équations vers le remplissage d'un tableau.

Le point essentiel concernant cette démarche est de savoir si les élèves sauront par eux-mêmes utiliser cet outil pour sélectionner les données utiles dans l'énoncé et pour les organiser. Cela suppose tout un travail préalable par rapport auquel la présentation d'un tableau partiellement rempli, et a fortiori complètement rempli, apparaît comme une phase terminale de traitement et non pas initiale. En outre, tout n'est pas fait avec un tableau, il reste encore le passage du tableau à l'écriture du système d'équations.

5. Donner une esquisse de la résolution du problème

Les deux premières étapes du plan de travail sont bien explicitées mais on se contente de donner les résultats sans présenter la moindre analyse permettant de les dégager et sans donner la moindre représentation auxiliaire (figure ou tableau) permettant au moins de voir pourquoi on pose ces résultats.

Chez le pépiniériste, on propose un lot de 16 arbustes fruitiers composé de pommiers et de poiriers, à 936F . Sachant que les pommiers valent 53F pièce et les poiriers 75F pièce, calculer le nombre d'arbres de chaque sorte.
a) choix des inconnues et contraintes imposées par l'énoncé
Soit x le nombre de pommiers et y le nombre de poiriers; x et y sont des entiers positifs.
b) mise en équations
$x + y = 16$ (le nombre d'arbustes est 16)
pour l'équation $53x + 75y = 936$ (le lot coûte 936 F).

Pythagore $3^{\text{ème}}$, 1993, p.79.

L'étape a) est loin d'être évidente pour beaucoup d'élèves. On trouve souvent «x = pommier», «y = poirier» ou même «$x = 53$» et «$y = 75$». Cette présentation ne permet pas de travailler en fonction de ces difficultés.

Deux villages V_1 et V_2 sont reliés par une route comportant une montée et une descente de même pente. Sur ce parcours, Jean, sur sa bicyclette, roule à la vitesse de 9km / h en montée et de 36km / h en descente. De V_1 vers V_2 , il met 1h 30 min . De V_2 vers V_1, il met 2h 45 min. Quelles sont, allant de V_1 vers V_2 , les distances parcourues en montée et en descente ?

Après la «traditionnelle» étape : choix des inconnues, on trouve une phase supplémentaire: expression des données où on «parachute» les durées sans présenter la moindre justification :

> Exprimons les temps en heures:
> V_1 vers V_2 : montée $\frac{x}{9}$, descente $\frac{y}{36}$
> total 1h 30 min soit $\frac{3}{2}$ h.
>
> Delagrave 3ème, 1993, p. 55

Et pour la deuxième étape, intitulée «écriture des équations», on donne le système.

Cette démarche n'est pas rare. On la retrouve telle quelle dans un autre manuel.

> Un père a 27 ans de plus que son fils. Dans 6 ans, son âge sera le double de celui du fils. Quel est l'âge du fils? du père?
>
> Choix de l'inconnue:
> Soit x l'âge actuel du fils (en année).
> Mise en équation du problème:
> Suivons l'énoncé... âge actuel du père: $x + 27$
> Dans 6 ans... âge du père: $(x +27) + 6 = x + 33$
> âge du fils: $x + 6$
> ... son âge sera le double de celui du fils
> D'où l'équation: $x + 33 = 2(x + 6)$
>
> Hachette 4ème, 1992, p.75.

Quelques manuels passent sous silence les difficultés de mise en équations d'un énoncé et privilégient les techniques de résolution, c'est-à-dire la troisième étape dans le plan de travail, dans le cours et les travaux pratiques, éventuellement en indiquant les inconnues et le système (Fractales seconde 1994, p.268 à 274) ou en privilégiant les exemples issus de la géométrie analytique ou de l'analyse (Déclic seconde 1993 chap. 8; Transmath seconde 1995 p 326 et 330).

Après ce rapide tour d'horizon de ce que les manuels proposent pour l'apprentissage de la mise en équations, plusieurs constatations s'imposent:

L'étape du «choix des inconnues» est systématiquement escamotée. Elle l'est nécessairement dans les trois premières démarches. Elle l'est délibérément dans la cinquième. Seule la quatrième démarche offre un moyen pour travailler sur le choix des inconnues, mais le tableau à lui seul n'est pas suffisant et tout dépend de la manière dont on l'utilise.

L'étape de la «mise en équations» retient davantage l'attention; mais, soit on se contente de la téléguider par des questions dont la formulation, comme pour les interviews à la télé, impose déjà la réponse, soit on part de présentations où la mise en équations est déjà sur la table et il suffit de transcrire presque «terme à terme» une phrase ou une figure. La difficulté de présenter un travail méthodique pour cette étape ne tiendrait-elle pas au fait que l'étape précédente a été escamotée ? On retrouve ici la question soulevée au début de ce chapitre concernant la pertinence du schéma de travail : le choix des inconnues précède-t-il vraiment la mise en équations ou ne s'agit-il pas là de deux aspects d'un seul et même «traitement»?

Plus généralement, on fait tout pour court-circuiter l'énoncé, c'est-à-dire le texte décrivant une situation et posant une question ou donnant une consigne, comme s'il s'agissait d'un intrus ou d'un parasite, hélas inévitable, dans le bon ordre et l'évidence d'une démarche mathématique. Pourquoi les problèmes de mise en équations ne commencent-ils alors pas directement à la troisième étape, c'est à dire à celle qui consiste à résoudre un système d'équations donné en clair ? En fait, tout semble se passer comme si donner un énoncé était une formalité obligée, les choses sérieuses intellectuellement et mathématiquement ne commençant qu'avec la résolution technique des équations !

Ce bilan concernant les méthodes de résolution de problèmes de mise en équations peut sembler caricatural. Nous ne sommes cependant pas les seuls à le faire. Une autre équipe de l'IREM de Lorraine travaillant sur ce sujet a fait le même constat : «..dans les manuels nous constatons un vide réel sur l'apprentissage de la mise en équation de problèmes, alors que la technique de résolution est en général bien développée», et ailleurs: «..souvent cet apprentissage se limite à une démarche mimétique...» (avant-propos du livret pédagogique algébrisation, classe de troisième). La vérification est facile, chacun n'a qu'à ouvrir un manuel quelconque et lire attentivement ce qu'il propose. Mais la véritable question n'est pas là. Il ne s'agit ni de dénoncer le leurre de ce que les manuels proposent ni de défendre le sérieux de leurs auteurs. Pour la simple raison que les manuels reflètent pour une grande part ce qui se pratique dans les classes. En réalité, ce bilan permet de constater l'absence des étapes «choix des inconnues» et «mise en équations», qui concernent le passage de l'énoncé à l'écriture du système d'équations.

II. OÙ EST LE PROBLEME ?

L'IREM de Lorraine a publié récemment un fichier et un livret pédagogique portant sur l'algébrisation en classe de troisième. L'un des objectifs du travail proposé est de permettre aux élèves de résoudre des problèmes par une méthode algébrique et donc de les mettre en équations. Pour cela les auteurs reprennent un schéma de travail en six étapes où une plus grande place est faite à l'énoncé :

1) Lecture de l'énoncé,
2) Choix et formulation des inconnues,
3) Analyse de l'énoncé,

4) Traduction algébrique du problème et choix des opérations,

5) Interprétation de la (ou des) solution(s),

6) Formulation de la réponse.

On remarquera que, dans ces six étapes, la phase correspondant à ce qu'on appelle classiquement «mise en équations» est appelée «traduction algébrique du problème et choix des opérations». Ce changement de dénomination n'est pas un hasard. Il correspond au fait que les auteurs proposent une démarche séduisante pour le travail de cette étape: le «raisonnement analogique: ... l'idée consiste donc pour l'élève à remplacer l'inconnue par une valeur particulière simple (éventuellement plusieurs fois) et faire «fonctionner» le problème sur un support numérique concret...(p.5)». Le choix des opérations est effectivement important lors d'une mise en équations de problèmes, et constitue l'une des difficultés majeures que rencontre l'élève lorsqu'une grandeur est exprimée par une lettre. La méthode proposée consiste à faire trouver les opérations intervenant dans le problème en s'appuyant sur des «essais numériques», c'est-à-dire à faire «fonctionner le problème» sur un support numérique concret afin de mieux percevoir les relations existant entre les grandeurs.

Cette démarche présente un avantage. Faisant travailler en marge du registre de l'écriture algébrique, elle engage sur une voie où les élèves ont plus de maîtrise, c'est-à-dire plus de possibilités d'initiative et plus de moyens de contrôle. La seule question que l'on puisse se poser est de savoir si elle permet une entrée systématique dans les différents problèmes posés aux élèves et si elle ne présuppose pas ce qu'il s'agit justement d'apprendre. Prenons trois exemples proposés dans le document (p.21):

Problème 1

Trouver un nombre de trois chiffres vérifiant les conditions suivantes:

- ce nombre est un multiple de 9
- son chiffre des dizaines est 5
- si l'on échange le chiffre des unités avec celui des centaines le nombre diminue de 198.

Il semble difficile que le raisonnement analogique puisse être utilisé dans ce problème.

Problème 2

Un véhicule roule de Paris à Tours à la vitesse de 60km/h. Il revient à Paris à la vitesse de 80km/h. Il est parti de Paris à 8h et revient à 18h. Il s'est arrêté pendant trois heures à Tours. Quelle est la distance entre Paris et Tours?

Pour utiliser le raisonnement analogique sur un tel problème, il faut déjà mobiliser une écriture littérale exprimant la relation liant le temps, la vitesse et la distance. Le simple choix de nombres indiquant la distance Paris-Tours ne peut être d'aucune aide.

Problème 3

> Jim téléphone pendant 15 minutes vers 18 h. Une partie de la conversation a eu lieu avant 18 h, pendant la période plein tarif, soit 2 F la minute. L'autre partie a eu lieu après 18 h lorsque le tarif est réduit de 30%. La communication a coûté 28,60 F. A quelle heure a débuté la conversation?

Un raisonnement analogique peut très bien fonctionner sur ce problème mais à la condition que l'élève ne se trompe pas dans ce qu'on appelle le choix des inconnues. Imaginons un élève qui choisisse comme inconnue l'heure à laquelle a débuté la conversation tout simplement parce qu'elle fait l'objet de la question (c'est évidemment une pure supposition d'école qu'on ne rencontrera dans la réalité). Cet élève pourra-t-il vraiment «s'en sortir» en faisant fonctionner le raisonnement par analogie ?

Evidemment cela n'invalide pas l'intérêt de cette démarche. Un raisonnement analogique permet sans doute l'émergence de l'équation recherchée. Du moins tant qu'on en reste à des problèmes très simples qui ne font appel qu'à une seule inconnue. Cette démarche peut-elle être encore possible pour les problèmes conduisant à écrire un système d'équations ? Les auteurs le pensent sans véritablement le montrer : «les compétences mises en jeu pour les problèmes se traduisant par des systèmes d'équations sont rigoureusement les mêmes que dans le cas de problèmes à une inconnue... ». En réalité des problèmes à une équation aux problèmes à deux équations, il y a un saut. Et pour le franchir il faut véritablement prendre en compte le fait que la rédaction de l'énoncé est une composante essentielle de la structure des problèmes de mise en équations. Or dans cette brochure on retrouve le même réflexe mathématicien que dans les manuels : oublier au plus vite l'énoncé et privilégier le domaine des opérations numériques. Si l'on en revient au schéma de travail en six étapes proposé par l'IREM de Lorraine, l'étape appelée «analyse de l'énoncé» est peut être la plus importante, la plus décisive et en tous cas celle qui doit être placée en premier. Après ce sera «l'âne qui trotte» comme aimait à le dire G. Glaeser quand l'essentiel d'un problème était résolu.

CHAPITRE II

DE LA LECTURE DE L'ÉNONCÉ
A
L'ÉCRITURE DU SYSTÈME D'ÉQUATIONS.

La question essentielle concernant les problèmes de mise en équations est celle-ci : comment passe-t-on de la lecture de l'énoncé du problème à l'écriture du système d'équations ?
Généralement les enseignants regardent à peine l'énoncé. Un bref regard sur les deux ou trois lignes pour repérer les inconnues, un peu comme on cherche un article sur un rayon, et ils savent écrire le système. Pour eux, hormis le cas où il y des astuces, un énoncé en vaut un autre : non seulement la distance qui sépare l'énoncé et l'écriture du système ne change pas mais elle se franchit sans qu'on s'en aperçoive. Alors pourquoi tant d'élèves restent-ils «plantés» devant l'énoncé ? Pour expliquer cette difficulté et pour la faire surmonter, il ne s'agit pas de décrire un algorithme performant qui peut-être n'existe pas, ni d'analyser toutes les erreurs observables des élèves, il s'agit d'abord de comprendre la tâche cognitive que constitue ce passage.

I. Arrêt sur lecture: l'énoncé

Deux remarques sur la compréhension des énoncés de problèmes vont guider l'analyse de ce passage:

1. D'une façon générale, la compréhension d'un énoncé de problème consiste dans l'identification des **objets** que l'énoncé décrit et dans l'identification des **relations qu'il établit entre ces objets.**

Ce ne sont ni les mêmes objets ni les mêmes relations que l'on identifie dans un énoncé de problème, s'il s'agit de comprendre la situation extra-mathématique décrite ou évoquée par l'énoncé ou s'il s'agit d'écrire un traitement mathématique à partir de l'énoncé : par exemple un système d'équations.

2. Dans les problèmes de mise en équations, **les objets à identifier sont des quantités inconnues,** et les **relations entre ces objets** sont les relations qui permettent d'**articuler les quantités inconnues identifiées en une équation.**

Les quantités inconnues ne sont pas ce que l'on appelle habituellement les «inconnues», et que l'on représente dans l'écriture des équations par les lettres x et y. Un système d'équations à deux inconnues requiert généralement, comme nous le verrons plus loin, *quatre quantités inconnues exprimées à l'aide des deux dénominations de base x et y.*

Les relations entre les quantités inconnues sont en premier lieu *les relations d'égalité qui vont remplir une fonction verbale* dans les équations du système. Par exemple dans les énoncés présentés dans le chapitre précédent, ces relations d'égalités remplissant une fonction verbale dans l'équation sont données par les extraits d'énoncés suivants:

et..... **Ça fait** ....
(problème des baguettes de pain, Pythagore Seconde, 1994, p 64)
... un cylindre ... qui **a le même volume que** la boule
(Problème de la hauteur d'un cylindre, Delagrave $4^{ème}$, 1992, p.68)
arrivent **en même temps au milieu du chemin.**
(Problème des parcours en bicyclette Dimathème seconde, 1994, TP p109)

En second lieu, ces relations peuvent aussi être celles qui articulent des quantités différentes, connues ou inconnues, en un membre d'équation. Par exemple dans l'un des énoncés présentés dans le chapitre précédent :

...Si on échange une pièce de chaque tas, le tas d'or pèse 13 liangs de moins que...
(c'est-à-dire $8y + x + 13$ pour un membre et $10x + y$ pour l'autre membre)
Transmath, $3^{ème}$, 1993, p.223

Les objets que l'énoncé décrit ne sont donc pas les deux «inconnues» mais les quatre quantités inconnues. Pour reprendre l'exemple précédent les quatre quantités inconnues décrites sont : le tas d'or avant l'échange, le tas d'argent avant l'échange, le tas d'or après l'échange et le tas d'argent après l'échange. Ces quantités inconnues peuvent être décrites ou désignées par des expressions à chaque fois différentes ou par des expressions ayant une partie commune. Nous appellerons «dénomination de base» une expression désignant ou décrivant une quantité inconnue. Un énoncé peut donc présenter deux dénominations de base (problème 1 ci-dessous) ou quatre dénominations de base (problème 2 ci-dessous).
Comprendre l'énoncé consiste donc d'abord à identifier les expressions linguistiques décrivant les quantités inconnues.

L'analyse du passage de l'énoncé à l'écriture du système d'équations doit donc porter sur deux points :
- l'identification des quantités inconnues décrites ou désignées dans l'énoncé et la conversion de leur expression linguistique en une expression algébrique,
- l'identification des relations d'égalité devant remplir une fonction verbale dans l'écriture des équations
Nous verrons qu'il s'agit là de deux opérations totalement indépendantes l'une de l'autre. Les difficultés auxquelles elles peuvent donner lieu ne sont pas de même nature car elles ne relèvent pas des mêmes fonctions discursives.

1. L'identification des quantités inconnues et la conversion de leur expression linguistique

Cette première opération cognitive comprend deux étapes très différentes.

La première porte directement sur l'énoncé. Nous verrons plus loin (chapitre IV) qu'elle suppose *une lecture dirigée par une liste de questions* pour identifier toutes les quantités inconnues qui sont désignées ou décrites dans l'énoncé et nous verrons comment donner un moyen de *faire générer ces questions par l'élève lui-même, sans lui donner une liste de questions toutes prêtes à l'emploi* et qui ne seraient pas utilisables pour un autre type d'énoncé.

La deuxième étape, porte sur la conversion du texte en écriture algébrique et comporte une difficulté spécifique. Comment traduire les expressions linguistiques décrivant les quantités inconnues en expressions algébriques décrivant ces mêmes quantités, étant donné que l'on ne dispose pas nécessairement du même nombre de dénominations de base dans chacun des deux registres ? En effet, l'écriture algébrique d'un système de deux équations n'autorise que deux dénominations de base, deux lettres désignant les deux inconnues, pour exprimer les quatre quantités inconnues, alors que le nombre de dénominations de base utilisés dans l'énoncé peut varier.

Deux cas peuvent alors se présenter :

a) L'énoncé exprime lui aussi les quatre quantités inconnues à l'aide de deux dénominations de base. Et alors, la conversion des expressions linguistiques en expressions algébriques est immédiate. A la lecture l'identification des quantités inconnues coïncide avec le choix des inconnues. C'est le cas de **transparence**.

Problème 1

> Un bassin est alimenté par deux fontaines A et B. Si on laisse couler A pendant 4 h et B pendant 2 h, on obtient 64 l. Si on laisse couler A pendant 3 h et B pendant 4 h, on obtient 62 l. Quel est le débit de chaque fontaine ?

Dans cet énoncé, les quantités inconnues sont exprimées par des propositions qui présentent deux à deux une même dénomination de base :

«A coule pendant 4h», «A coule pendant 3h». (Dénomination de base: A coule ... **(débit de la fontaine A)**)

«B coule pendant 2h», «B coule pendant 4h». (Dénomination de base: B coule ...**(débit de la fontaine B)**)

Ces quatre expressions désignent quatre quantités inconnues différentes *à partir de deux dénominations de base* (en caractère gras ci-dessus). La conversion est donc immédiate. En redésignant ces deux dénominations de base respectivement par x et par y on a les quatre désignations algébriques : $4x$, $3x$, $2y$, $4y$.

b) L'énoncé exprime les quatre quantités inconnues en recourant à plus de deux dénominations de base. Et alors un travail de redésignation de deux des quantités inconnues est nécessaire pour passer aux expressions algébriques. C'est le cas d'**opacité**.

Problème 2

Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 15 mètres par seconde ; puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 21 mètres par seconde. Le parcours total a duré 270 secondes, et la montée est de 126 mètres plus longue que la descente. Combien de temps a duré la montée ?

Dans cet énoncé les quantités inconnues sont désignées par des expressions n'ayant aucune dénomination de base commune:

«Le parcours total a duré....» qui se nominalise en «**la durée de la montée**» et la «**la durée de la descente**»

«la montée est de 126 mètres plus longue que la descente» qui exprime une comparaison entre «**la longueur de la montée**» et «**la longueur de la descente**».

Le problème que soulève la formulation de l'énoncé n'est pas à chercher dans les légères modifications des deux propositions de la seconde phrase, mais dans le fait que *nous avons quatre dénominations de base*. Une conversion immédiate, comme dans le problème 1 ci-dessus, nous donnerait une désignation algébrique des quantités inconnues par quatre inconnues. Ce qui conduirait au système d'équations suivant :

$$x + y = 270$$
$$z = w + 126$$

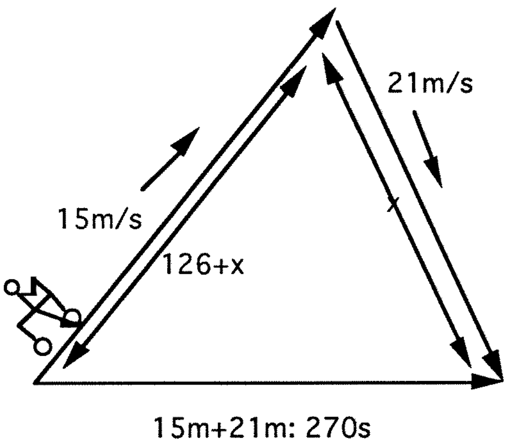
Pour pouvoir écrire un système d'équations pouvant être résolu, il faut donc **redésigner deux des quatre quantités inconnues** de façon à ne plus avoir que deux dénominations de base au lieu de quatre ! Par exemple « **la longueur de la montée**» équivaut à « **la durée de la montée** multipliée par la vitesse de la montée» et «**la longueur de la descente**» équivaut à «**la durée de la descente** multipliée par la vitesse de la descente». Cette redésignation est une **opération de réduction à deux dénominations de base :** «la durée de la montée» et la «la durée de la descente».

L'expression algébrique des quatre quantités inconnues de l'énoncé devient alors immédiat : x, ,y , $15x$, $21y$.

Le dessin ci-dessous, fait par un élève de seconde, illustre bien deux choses:

- l'hésitation entre les objets extra-mathématiques (montée, descente) et les objets mathématiques (quantités inconnues) auxquels l'énoncé réfère,
- la confusion entre les dénominations de base et l'expression des quantités inconnues

Nous interprétons les données par un dessin explicatif:



Nous choisissons x pour la longueur de la descente et y pour le temps.

Nous avons trouvé: $(126 + x)15\,y + x + 21y = 270$s.

On remarque que la redésignation des quatre quantités inconnues se fait ici en fonction d'une *relation multiplicative entre deux grandeurs* de nature différente, relation correspondant à la notion de vitesse : $v= d/t$. Mais cette redésignation peut aussi se faire en fonction d'*une relation additive* comme dans le problème suivant:

Problème 3

> Trouver un nombre de deux chiffres sachant que la somme des deux nombres que ces chiffres représentent est 13, et que la différence entre le nombre cherché et le nombre obtenu en permutant les deux chiffres est 45.

Il y a quatre quantités inconnues : «un nombre de deux chiffres» (= «le nombre cherché»), «les deux nombres que ces chiffres représentent», c'est-à-dire «le nombre représenté par le premier chiffre» et «le nombre représenté par le deuxième chiffre», «le nombre obtenu en permutant les deux chiffres». La désignation de ces quatre quantités inconnues se fait à partir des dénominations de base dont une est implicite : les deux chiffres, nombre représenté par les chiffres, et position des chiffres (dizaine, unité). Pour opérer la réduction, il faut donc utiliser la relation additive qui permet de convertir «le nombre représenté par les deux chiffres» en «$10x + y$» et «le nombre obtenu en permutant les deux chiffres» en $10y + x$.

Pas un scientifique ne confond un objet et sa dénomination. Pas un mathématicien ne confond un nombre et un chiffre. On pourrait donc s'attendre naturellement à ce qu'aucun enseignant ne confonde les quantités inconnues, qui sont des objets pouvant être décrits linguistiquement et redésignés algébriquement, et les «inconnues» qui sont des dénominations de base pour désigner algébriquement des quantités inconnues. Pourtant on parle allègrement de «commencer par choisir les (deux) inconnues». Qu'est-ce que cela veut dire ? commencer par choisir des dénominations de base (lesquelles ne sont pas des objets) ? Identifier ces (quatre) objets que sont les quantités inconnues ? Redésigner algébriquement ces objets ?

Dans le cas transparent, il n'y a pas à se poser ce genre de questions, puisque l'expression linguistique des quatre quantités inconnues se fait à partir de deux dénominations de base que l'on peut mettre directement en correspondance avec les deux inconnues marquées par deux lettres. Le choix des dénominations de base, l'identification des quantités inconnues et la redésignation algébrique se confondent dans une seule et même étape.

Il n'en va plus de même dans le cas opaque, si on ne s'autorise que l'écriture d'un système à deux inconnues. L'énoncé utilise plus de deux dénominations de base pour décrire ou désigner les quantités inconnues. Il faut donc opérer une réduction à deux dénominations de base pour avoir une correspondance avec les deux «inconnues». Or, pour pouvoir être effectuée, cette réduction requiert deux conditions :

- avoir pris conscience de la différence entre *le choix de deux dénominations de base* pour désigner les quantités inconnues et *la désignation des objets que sont les quantités inconnues*. De même que 6 ou 9 peuvent être deux chiffres permettant d'écrire des nombres (699, 969...) ou deux nombres, de même x et y peuvent être deux dénominations de base ou deux expressions de quantités inconnues (cfr. le problème 2 ci-dessus)
- avoir pris conscience qu'*un même objet*, ici une quantité inconnue, *peut être désigné de façon très différente selon les dénominations de base choisies*, et cela aussi bien dans le registre de la langue naturelle que dans celui de l'écriture algébrique. Et cela renvoie à une opération discursive fondamentale qui ne relève pas d'une question de bonne ou mauvaise connaissance du français (Duval 1995, p.99-100).

2. L'identification des relations d'égalité devant remplir une fonction verbale dans l'écriture des équations

L'identification des quantités inconnues auxquelles les formulations de l'énoncé réfèrent et leur conversion en expressions algébriques ne sont pas des opérations suffisantes pour écrire l'équation. Il faut aussi identifier les relations que l'énoncé établit entre ces quantités inconnues et qui vont permettre d'identifier les membres de chaque équation. Ces relations sont, d'une part, celles articulant deux quantités inconnues en un membre d'équation et, d'autre part, les plus importantes, celles qui désignent les relations d'égalité. Deux cas peuvent se présenter:

a. Cas de marquage explicite des relations

Reprenons l'énoncé du problème 1 ci-dessus:

Si on laisse couler A pendant 4 h **et** B pendant 2 h, **on obtient** 64 l.
\+ =
Si on laisse couler A pendant 3 h **et** B pendant 4 h, **on obtient** 62 l.
\+ =

Nous avons mis en caractère gras les expressions qui marquent les relations pertinentes pour l'écriture de l'équation. Le marquage ne peut pas être plus explicite puisque la relation d'égalité est exprimée ici par le verbe de la proposition principale et que la conjonction «et» se convertit directement en un signe d'addition! En réalité, le cas explicite classique est celui où d'une part, nous avons une phrase (ou une proposition indépendante) par équation, et où, d'autre part, l'organisation syntaxique de la phrase peut être mise en correspondance terme à terme avec l'organisation de l'équation. Très souvent, le marquage de la relation d'égalité est donnée dans une proposition qui exprime une relation additive entre les deux situations décrites. C'est le cas, par exemple, de l'énoncé du problème 2:

> Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 15 mètres par seconde (SITUATION 1) ; puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 21 mètres par seconde (SITUATION 2). Le parcours total a duré 270 secondes, et **la MONTÉE** (SITUATION 1) **est de 126 mètres plus longue que la DESCENTE** (SITUATION 2). Combien de temps a duré la montée ?

Cet exemple permet en outre de voir que les énoncés peuvent être opaques pour l'identification des objets et explicites pour l'identification des relations. Ce sont là deux facteurs totalement indépendants pour la compréhension et la conversion des énoncés.

b. Cas de marquage semi-implicite ou entièrement implicite des relations.

Problème 4

> Une usine fabrique deux sortes d'objets A et B. L'objet A nécessite 2,4 kg d'acier et 3 h de fabrication. L'objet B nécessite 4 kg d'acier et 2 h de fabrication. Calculer **le nombre d'objets de chaque sorte** sachant que l'**on a utilisé, pour les produire** 80 kg d'acier et 67 h de travail.

Cet énoncé est intéressant puisqu'il rentre dans le cas transparent, pour l'identification des objets. En revanche, les relations nécessaires pour écrire l'équation ne sont pas toutes marquées explicitement. La proposition «on a utilisé pour les produire » permet d'identifier la relation d'égalité pour les deux équations. Mais il faut paraphraser l'expression «le nombre d'objets de chaque sorte... » par « la somme du nombre de A et du nombre de B» pour constituer le premier membre de chaque équation. En outre la conjonction «et» fonctionne comme un séparateur des quantités inconnues pour chacune des deux équations. Ici l'emploi de la conjonction «et» peut donc être trompeur, car cette indication ne sert à rien pour écrire le système d'équations. L'organisation de l'énoncé correspond en réalité à une description du tableau suivant :

(SITUATION 1) L'objet *A* nécessite	*2,4 kg* d'acier (et)	*3 h* de fabrication.
(SITUATION 2) L'objet *B* nécessite	*4 kg* d'acier (et)	*2 h* de fabrication
Le *nombre* d'objets de chaque sorte... pour *les produire*...	*80 kg* d'acier (et)	*67 h* de travail
«**Production des objets** A **et des objets** B» (Relation entre les deux situations)	$2,4\ n_A + 4\ n_B = 80$	$3\ n_A + 2\ n_B = 67$

Voici maintenant deux exemples d'énoncé où le marquage de la relation principale est complètement implicite.

Problème 5

> J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez, et quand vous aurez l'âge que j'ai, la somme de nos âges sera de 90 ans. Quel âge ai-je ?

Dans cet énoncé, qui relève du cas opaque pour l'identification et l'expression des quantités inconnues, la relation permettant d'écrire l'une des équations est : «la différence d'âge entre moi et vous reste la même maintenant qu'avant». Rien, évidemment, dans l'énoncé ne l'indique ou ne le rappelle.

Problème 6

> Un avion décolle de sa base à 7 h, vole en ligne droite jusqu'à une balise radio, retourne vers sa base et atterrit à 10 h 30 min. A l'aller la vitesse de l'avion était de 960 km/h, au retour de 720 km/h.
> Calculer les temps mis pour aller à la balise puis pour retourner à la base.

Dans cet énoncé, la relation permettant d'écrire l'une des équations est : «la distance da la base à la balise est la même que la distance de la balise à la base».

On voit donc la différence entre l'identification des quantités inconnues et l'identification des relations. Alors que la désignation des quantités inconnues est toujours explicite, même si elle n'est pas toujours directement utilisable, en revanche le marquage des relations non seulement n'est pas toujours explicite, mais il peut parfois être omis, ceci sous prétexte d'évidence.

Avant d'en finir avec notre arrêt sur lecture, rappelons que les énoncés de problèmes de mise en équations présentent deux types de difficultés entièrement indépendantes l'une de l'autre. La première est générale : c'est le caractère explicite ou implicite des informations. Pour les problèmes de mise en équations cette difficulté porte très exactement sur les informations relatives aux relations. En revanche, la seconde est spécifique aux problèmes de mise en équations : c'est la différence entre les inconnues qui sont des dénominations de base dans le registre de l'écriture algébrique et dont le nombre est déterminé par le nombre d'équations, et les quantités inconnues qui sont les objets décrits dans l'énoncé à l'aide de dénominations de base dans le registre linguistique et dont le nombre est variable.

II. Classification des énoncés de problèmes de mise en équations

Les exemples de problèmes donnés dans le chapitre précédent et ceux que nous venons d'analyser suffisent à montrer que les énoncés de problèmes ne sont pas du tout équivalents. Et on comprend pourquoi présenter une méthode de résolution sur des exemples peut être terriblement trompeur. Comment sait-on que les problèmes choisis sont vraiment représentatifs des différents problèmes que les élèves auront à résoudre ou devraient être en mesure de pouvoir résoudre ? L'importance des variations que nous venons de dégager jouent qualitativement (nature des opérations à effectuer, addition ou multiplication) et quantitativement (distance entre la lecture de l'énoncé et l'écriture du système d'équations) sur la complexité de la tâche globale de résolution. Il est donc important de disposer d'une catégorisation des différents types d'énoncé possibles de problème de mise en équations.

Pour déterminer le type d'un énoncé, il faut se poser deux questions :

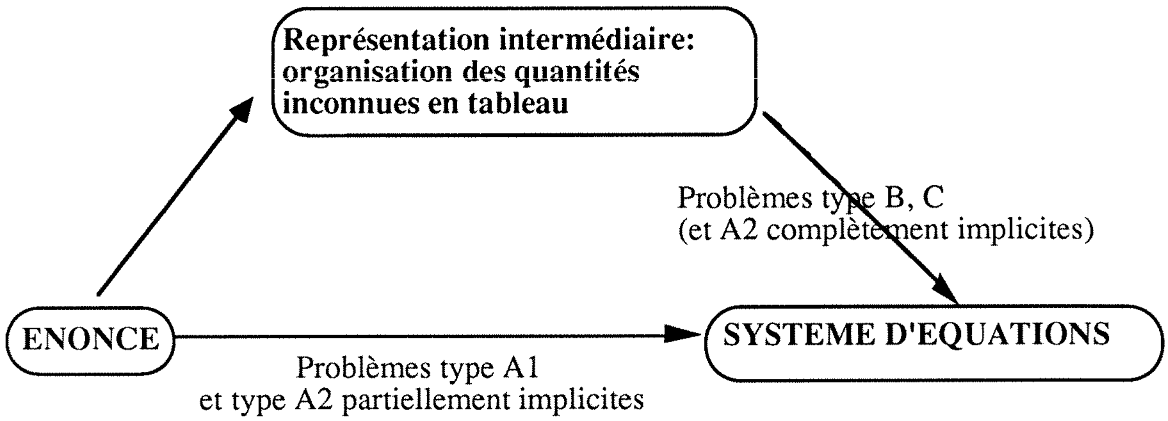
1. La conversion requiert-elle une réduction à deux des dénominations de base des quantités inconnues (et si oui, la redésignation se fait-elle en utilisant une procédure additive ou une procédure multiplicative?) ?
2. Le marquage linguistique des relations est -il explicite ou non ?

Selon les réponses à ces questions, on obtient un énoncé qui est de l'un des six types suivants:

		EXPRESSION DES QUANTITÉS INCONNUES		
		Transparente	opaque (réduction à deux dénominations de base)	
			quantités discrètes qui permettent le recours à une procédure additive	quantités continues qui obligent le recours à une procédure multiplicative
INDICATIONS RELATIVES AU MARQUAGE DES RELATIONS	explicite et conversion immédiate	Pb. 1 **A.1**	Pb3 **B.1**	Pb2 **C.1**
	partiellement implicite ou complètement implicite (relativement à une relation d'égalité)	Pb.4 **A.2**	Pb.5 **B.2**	Pb.6 **C.2**

Les caractères gras, dans chaque case, désignent chacun un type de problème.
On peut éventuellement envisager d'autres variations, comme par exemple la présence de pourcentages : «si la longueur d'un rectangle augmente de 10 %... ». Mais ces variations ne concernent plus la structure de l'énoncé ou du système d'équations mais seulement la présentation de l'une des quantités connues ou inconnues.

On voit tout de suite que le type de conversion à effectuer change selon la rédaction de l'énoncé, voir les exemples donnés en annexe 1. On peut avoir **un passage direct et immédiat** dans le cas de problèmes du type A1 ou au contraire un passage exigeant **un détour par une représentation intermédiaire** dans le cas des problèmes du type B ou C. Pour les problèmes du type A2, cela peut dépendre des indications relatives aux relations que la rédaction laisse implicites. Rappelons que le degré d'implicite ne concerne pas les quantités inconnues mais les indications relatives aux relations.



Le passage de l'énoncé à l'écriture du système d'équations dépend donc du degré de correspondance entre l'organisation de l'énoncé qui est proposé comme problème et celle du système d'équations à écrire. *La compréhension des problèmes de mise en équations ne dépend donc pas d'une «compétence» générale de lecture des énoncés de problème, comme cela est quelquefois affirmé, mais d'un développement intériorisé de l'organisation en tableau de données relatives à des grandeurs (voir ci-dessus le problème 2), qu'elles soient reliées ou non par une relation multiplicative.*
Ces remarques sont importantes car elles permettent de mieux analyser la nature des difficultés rencontrées pour la mise en équations de ces problèmes. Et elles montrent aussi que proposer de **commencer par «choisir les inconnues» est un non-sens**. D'ailleurs ce conseil aveugle est non seulement inefficace mais il peut conduire à renforcer des comportements de choix impressionniste chez les élèves qui vont associer les inconnues à un mot de l'énoncé, celui-ci étant en général choisi dans la question posée.

III. De l'énoncé au système d'équations : un vrai jeu de pistes pour les élèves

Les analyses précédentes ont montré la complexité du passage d'un énoncé à l'écriture d'un système d'équations. Il serait donc miraculeux que les élèves le réussissent même après quelques conseils ou quelques exemples ! Car un tel passage présente plein de fausses pistes. On peut se tromper sur la nature des objets à identifier, sur les objets de la situation extra-mathématique évoquée par l'énoncé ou sur ceux qui sont pertinents pour la conversion en équations (les quantités inconnues). Davantage, on peut confondre les dénominations de base utilisées pour désigner les quantités inconnues et les objets qu'elles permettent de désigner. On peut alors être entraîné à établir de fausses correspondances entre les inconnues et certaines désignations de l'énoncé. *Bref, celui qui n'a pas pris conscience que le «problème» des problèmes de mise en équations joue sur la distinction entre les objets désignés et les dénominations utilisées pour le désigner ne peut aller loin dans le passage d'un énoncé à l'écriture du système.*

Il ne sera donc pas surprenant de voir les élèves emprunter toutes les fausses pistes possibles. Ce seront ces erreurs que l'on retrouve toujours sous des formes variées. Dans son travail de thèse, Kourkoulos (1990) en a établi une typologie de base. Il les a caractérisées comme des «défauts de représentation» des élèves. Mais l'analyse de la tâche cognitive que représente le passage de la lecture d'un énoncé à l'écriture du système nous a montré qu'elles sont quasi-nécessaires en l'absence d'un apprentissage spécifique et sérieux.

On peut alors se demander pourquoi les enseignants de mathématiques ont l'air d'éviter d'instinct toutes ces fausses pistes sur lesquelles tous les autres s'engagent, y compris probablement beaucoup d'enseignants de français qu'on ne suspectera pourtant pas de ne pas «savoir lire» ou d'avoir «des difficultés avec le langage» ! Avant de répondre à cette question concernant le privilège d'évidence (apparemment difficilement partageable) dont les enseignants de mathématiques semblent bénéficier, regardons d'abord quelques erreurs types de la grande majorité des élèves. Nous en retiendrons quatre :

1. Pas de distinction entre inconnues et quantité inconnues et identification des objets centrée sur les objets de la situation extra-mathématique.

> Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 15 mètres par seconde ; puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 21 mètres par seconde. Le parcours total a duré 270 secondes, et la montée est de 126 mètres plus longue que la descente. Combien de temps a duré la montée ?

L'élève écrit :

x **: la montée,** y **: la descente**

la première équation : $x + y = 270$

et la deuxième équation : $x = y + 126$.

Sans reprendre l'analyse détaillée de ce problème que nous avons présentée plus haut, rappelons seulement les remarques suivantes:

«**La montée**», «**la durée** de la montée» et «**la longueur** de la montée», sont des expressions qui renvoient chacune à des objets différents. «La montée» désigne une pente à gravir, «la durée de la montée» et «la longueur de la montée» désignent deux quantités inconnues. Ces trois expressions semblent avoir une même dénomination de base «la montée». En ne distinguant pas les objets désignés et les moyens linguistiques ou symboliques de désigner les objets, l'élève établit une correspondance directe entre «la montée» et «x» (inconnue et/ou quantité inconnue). Il en résulte un emploi équivoque de «x» dans les deux équations, pour désigner dans l'une «la durée de la montée» et dans l'autre «la longueur de la montée». Le dessin d'un élève présenté plus haut (voir p.23), en est d'ailleurs une parfaite illustration.

Voici un autre exemple de ce type d'erreur observable sur un autre énoncé:

> Une barre métallique est construite en deux parties : la première est en zinc et chaque cm de cette partie pèse 11 g. La deuxième est en fer et chaque cm de cette partie pèse 17 g. La partie en fer est de 14 cm plus longue que la partie en zinc. La barre pèse en tout 980 g. Quelle est la longueur de la partie en zinc ?

L'élève écrit:

x **: la partie en fer,** y **: la partie en zinc**

première équation : $x+14 = y$

deuxième équation : $x+ y = 980$

«**La partie** en fer», «**la masse** de la partie en fer», «**la longueur** de la partie en fer» désignent trois objets différents et n'ont pas les mêmes dénominations de base.

2. Pas de distinction entre inconnues et quantités inconnues, mais distinction entre objets de la situation extra-mathématique et quantités inconnues, celles-ci étant réduites à de simples nombres : x désigne simplement un nombre inconnu, et tous les nombres sont homogènes.

> Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 15 mètres par seconde ; puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 21 mètres par seconde. Le parcours total a duré 270 secondes, et la montée est de 126 mètres plus longue que la descente. Combien de temps a duré la montée ?

L'élève écrit :

x **: durée de la descente**

équation : $(x + 126\text{m}) + x = 270$

3. Identification erronée d'une relation permettant d'écrire une des deux équations, mais pas d'erreur concernant l'identification des objets et leur conversion en expression algébrique.

> Dans une usine, on fabrique du chocolat. Une première machine produit 13 kg de chocolat par minute. Au bout d'un certain temps, on la remplace par une deuxième machine qui produit 21 kg de chocolat par minute. La fabrication dure 510 minutes en tout. La $1^{\text{ère}}$ machine a produit 238 kg de plus que la $2^{\text{ème}}$ machine. Combien de temps a fonctionné la $1^{\text{ère}}$ machine ?

L'élève écrit :

x: durée $1^{\text{ère}}$ machine, y: durée $2^{\text{ème}}$ machine,

ce qui est une définition précise des inconnues,

$13x$: quantité $1^{\text{ère}}$ machine, $21y$: quantité $2^{\text{ème}}$ machine,

ce qui est correct.

équation : $13x + 21y = 510$.

L'identification des quantités inconnues et leur expression algébrique est parfaite. L'erreur porte sur l'identification des propositions permettant d'écrire la relation d'égalité. Cette erreur s'explique par le caractère semi-implicite de la proposition : «La fabrication dure 510 minutes en tout.»

4. Absence d'une redésignation de certaines quantités inconnues lorsque l'énoncé recourt à quatre dénominations de base (longueur de la partie en fer, poids de la partie en fer, longueur de la partie en zinc, poids de la partie en zinc). Cette absence s'accompagne souvent d'une confusion entre les inconnues et les quantités inconnues désignées comme on peut le voir dans l'exemple ci-dessous:

> Une barre métallique est construite en deux parties : la première est en zinc et chaque cm de cette partie pèse 11g. La deuxième est en fer et chaque cm de cette partie pèse 17 g. La partie en fer est de 14 cm plus longue que la partie en zinc. La barre pèse en tout 980 g. Quelle est la longueur de la partie en zinc ?

L'élève écrit:

x : longueur de zinc, y : longueur de fer

et **$11x$: partie en zinc, $17y$: partie en fer.**

première équation : $\mathbf{11x+14 = 17y}$

deuxième équation : $\mathbf{11x + 17y = 980}$

En réalité cet élève identifie seulement deux des quatre quantités inconnues, et les deux autres objets redésignés par $11x$ et $17y$ ne sont plus des quantités inconnues, mais des objets réels de la situation extra-mathématique.

On pourrait évidemment continuer l'énumération de toutes les erreurs observées. Cela confirmerait la variété des fausses pistes possibles quand il s'agit de passer de la lecture d'un énoncé à l'écriture d'un système d'équations. Comment se fait-il que les enseignants de mathématiques croient voir d'emblée le bon chemin et ne semblent voir que lui ? On peut avancer beaucoup d'explications dont celle de l'habitude qui leur a peut-être fait oublier quelques difficultés initiales.... Mais peu importe. La raison est probablement à chercher ailleurs. Les enseignants de mathématique «comprennent» d'emblée un énoncé parce qu'**ils ont d'abord eu l'occasion d'effectuer la tâche inverse, c'est-à-dire d'écrire un énoncé à partir d'un système d'équations donné.**

Prenons par exemple le système suivant :

$$x + y = 13$$

$$(10x + y) - (10y + x) = 45$$

On peut alors demander d'écrire un énoncé de problème dont la solution est donnée par ce système, en indiquant simplement que les quantités inconnues sont deux nombres. Une version plus simple serait de proposer la même tâche à partir de deux égalités :

$$9 + 4 = 13$$

$$94 - 49 = 45$$

ANNEXE 1.
Illustration de la classification des énoncés

Des énoncés peuvent être en apparence similaires parce qu'ils font référence à des situations extra-mathématiques semblables, mais être de types différents et de ce fait ne pas présenter pas les mêmes difficultés.

Enoncé 1

> Un bassin est alimenté par deux fontaines A et B. Si on laisse couler A pendant 4 h et B pendant 2 h, on obtient 64 l. Si on laisse couler A pendant 3 h et B pendant 4 h, on obtient 62 l.
> Quel est le débit de chaque fontaine?

Ce problème a été étudié dans le chapitre II, il est de type A1; c'est le «cas de transparence» il n'y a que deux dénominations de base; de plus la conversion des phrases en égalités est immédiate.

Enoncé 2

> Un bassin est alimenté par deux fontaines A et B. Si on laisse couler A pendant 3 heures et B pendant 5 heures, A verse 15 litres d'eau de plus que B. Si on laisse couler A pendant 1 heure et B pendant 3 heures, B verse 3 litres d'eau de plus que A.
> Quel est le débit du robinet B ?

Cette fois la conversion des phrases en égalités n'est plus aussi simple: il faut remplacer la deuxième phrase par «le volume de A pendant 3h est égal au volume de B pendant 5h plus 15l». Cet énoncé est de type A2.

Enoncé 3

> Un bassin est alimenté par un premier robinet qui verse 45 litres par heure. On arrête ce robinet et on le remplace par une fontaine qui verse 35 litres par heure. Il a fallu en tout 5 heures pour remplir le bassin, et la fontaine a versé 15 litres d'eau de plus que le robinet.
> Pendant combien de temps le robinet a-t-il coulé ?

Dans cet énoncé les quantités inconnues sont désignées par quatre dénominations de base : l'expression «il a fallu en tout 5 h pour remplir le bassin» met en relation la durée d'ouverture du robinet et la durée d'ouverture de la fontaine. L'expression «la fontaine a versé 15 litres d'eau de plus que le robinet» compare le volume versé par la fontaine et le volume versé par le robinet. Pour écrire un système de deux équations à deux inconnues, il est nécessaire de réduire à deux les dénominations de base en utilisant la relation:

$$\text{nombre de litres par heure} \times \text{nombre d'heures} = \text{volume}$$

La relation d'égalité entre les volumes ($v_1 = v_2 + 15$) est explicite ainsi que celle entre les durées (l'expression «en tout» induit clairement une somme). L'énoncé est de type B1.

Enoncé 4

> Un bassin de 200 l est alimenté par un premier robinet qui verse 40 litres par heure. On arrête ce robinet et on le remplace par une fontaine qui verse 30 litres par heure. Il a fallu 5 heures pour remplir le bassin.
> Pendant combien de temps le robinet a-t-il coulé ?

Cet énoncé est très voisin du précédent, mais les relations entre les quantités inconnues sont implicites. On a ainsi ajouté une difficulté supplémentaire qui n'est pas du même ordre que la difficulté d'exprimer les quantités inconnues. L'énoncé est de type B2.

Enoncé 5

> Un bassin est alimenté par deux robinets de débits différents: le débit du deuxième vaut 1,5 fois celui du premier. Le premier a coulé pendant 3 h 1/4, le second pendant 2 h 1/2 et ils ont versé ensemble 280 l d'eau.
> Quel est le débit de chaque robinet ? (ou quel est le volume versé par chaque robinet ?)

Cette fois encore il y a nécessité de réduire les dénominations de base en utilisant la relation multiplicative: volume = débit × durée.
Le marquage des relations ($d_2 = 1{,}5 \times d_1$ et $v_1 + v_2 = 280$) est explicite dans le texte. L'énoncé est de type C1.

Enoncé 6

> Un bassin est alimenté par un robinet. Si on diminue le débit de 20 l/h, il faut 2 heures de plus pour le remplir et si on augmente le débit de 20 l/h, il faut 1 h de moins pour le remplir.
> Quel est le volume du bassin ?

Il y a encore nécessité de réduire les dénominations de base en utilisant la relation multiplicative: volume = débit × durée. Par contre, dans les deux expressions «Si on diminue le débit de 20 l/h» et «Si on diminue le débit de 20 l/h», il faut ajouter une relation implicite qui est obtenu en considérant le débit initial. L'énoncé est de type C2.

ANNEXE 2.
Enoncés de problèmes proposés dans les manuels

1) Paul a 18 grosses billes et 13 petites billes. Toutes les grosses billes ont la même masse, et toutes les petites aussi. Une grosse bille pèse 7 grammes de plus qu'une petite bille. La masse totale des 18 grosses billes fait 206 grammes de plus que la masse totale des 13 petites. Quelle est la masse d'une petite bille ?

2) Hier, il y avait 8 fois plus de présents dans la classe que d'absents. Aujourd'hui, il y a 2 absents de plus qu'hier et le nombre des absents est égal à 20 % du nombre des présents. Quel est l'effectif de la classe ?

3) Dans une usine, on fabrique du chocolat. Une première machine produit 13 kg de chocolat par minute. Au bout d'un certain temps, on la remplace par une deuxième machine qui produit 21 kg de chocolat par minute. La fabrication dure 510 minutes en tout. La première machine a produit 238 kg de plus que la deuxième machine. Combien de temps a fonctionné la première machine ?

4) Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 15 mètres par seconde ; puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 21 mètres par seconde. Le parcours total a duré 270 secondes, et la montée est de 126 mètres plus longue que la descente. Combien de temps a duré la montée ?

5) Une barre métallique est construite en deux parties : la première est en zinc et chaque cm de cette partie pèse 11 g. La deuxième est en fer et chaque cm de cette partie pèse 17 g. La partie en fer est de 14 cm plus longue que la partie en zinc. La barre pèse en tout 980 g. Quelle est la longueur de la partie en zinc ?

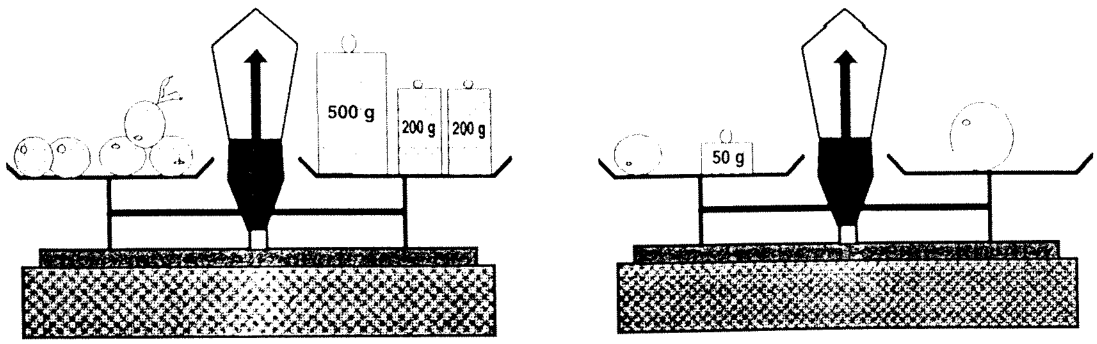
6) Un bassin de 200 l est alimenté par deux fontaines A et B. Si on laisse couler A pendant 4 h et B pendant 2 h, on obtient 64 l. Si on laisse couler A pendant 3 h et B pendant 4 h, on obtient 62 l. Quel est le débit de chaque fontaine ? Combien faut-il de temps pour remplir le bassin si les deux fontaines coulent ensemble ?

7) Deux élèves, Konan et Koffi, discutent.
Konan dit : "Dans ma classe, il y a 30 élèves. Si je multiplie le nombre x de garçons par 3, puis le nombre de y de filles par 2 et si j'ajoute ces deux résultats, je trouve 85".
Koffi lui dit alors :"Dans la mienne, il y a 35 élèves. Si je multiplie le nombre x de garçons par 2, puis le nombre y de filles par 5 et si j'ajoute ces deux résultats, je trouve 55".
Mais un professeur de mathématiques, qui les écoute, affirme que ce que dit Konan est vrai et que ce que dit Koffi est faux.
Déterminer le nombre de garçons et de filles de la classe de Konan.
Pourquoi ce que dit Koffi ne peut-il pas être vrai?

8) Une fermière a vendu une première fois 3 canards et 4 poulets pour 272 F, puis une deuxième fois 2 canards et 3 poulets pour 192 F. Combien coûtent un canard et un poulet ?

9) Un libraire a vendu 28 livres de poche, les uns à 36 F, les autres à 45 F, pour une somme totale de 1 035 F. Combien a-t-il vendu de livres de chaque sorte ?

10) Avec une balance à deux plateaux on a obtenu les deux équilibres suivants :



Trouver la masse d'une orange, d'un pamplemousse (les oranges ont toutes la même masse, les pamplemousses aussi).

11) La différence de deux nombres est égale à 30. Si on ajoute 5 à chacun d'eux, le plus grand vaut trois fois le plus petit. Combien vaut le plus petit ?

12) Si la longueur d'un rectangle augmente de 10 %, son demi-périmètre est alors de 10,6 cm. Si la largeur de ce même rectangle diminue de 10 %, son demi-périmètre est alors de 9,6 cm. Quelles sont les dimensions initiales du rectangle ?

13) Une mule et un baudet chargés de sacs également pesants cheminent de concert. Le baudet se plaignant de sa charge, la mule lui dit : «De quoi te plains-tu ? Si je prenais un de tes sacs, je serais chargée deux fois autant que toi, et si tu me prenais un des miens, je serais encore aussi chargée que toi.». Combien chaque animal porte-t-il de sacs ?

14) Des pigeons s'abattent sur un arbre : les uns se perchent sur les branches du haut, les autres sur les branches du bas. Les premiers disent aux autres : «Si l'un de vous se joint à nous, notre troupe sera double de la vôtre, mais si l'un de nous descend vers vous, vous nous égalerez en nombre». Combien de pigeons y a-t-il ?

15) Il y a 4 ans, Jean était 6 fois plus âgé que François. Aujourd'hui, il est 2 fois plus âgé que François. Trouver l'âge de Jean et celui de François.

16) Huit pièces de 10F et quinze pièces de 2F alignées côte à côte ont une longueur totale de 49,3cm ; tandis que douze pièces de 10F et neuf pièces de 2F ne font que 48,3cm. Calculer les diamètres des pièces de 10F et de 2F.

17)Une usine fabrique deux sortes d'objets A et B. L'objet A nécessite 2,4 kg d'acier et 3 h de fabrication. L'objet B nécessite 4 kg d'acier et 2 h de fabrication. Calculer le nombre d'objets de chaque sorte sachant que l'on a utilisé, pour les produire 80 kg d'acier et 67 h de travail.

18) Un avion décolle de sa base à 7 h, vole en ligne droite jusqu'à une balise radio, retourne vers sa base et atterrit à 10 h 30 min. A l'aller la vitesse de l'avion était de 960 km/h, au retour de 720 km/h. Calculer les temps mis pour aller à la balise puis pour retourner à la base.

19) Parti dès 6 h du matin d'un village situé à 1 500 m d'altitude, un randonneur est monté en moyenne de 250 m par heure de marche. Après un repas reconstituant pris au sommet, il est redescendu en moyenne de 450 m par heure de marche et arrive au village à 17 h 48 min. A quelle altitude culmine le mont gravi par notre randonneur, sachant qu'il s'est arrêté 2 h pendant la randonnée ?

20) La route qui relie A et B comporte, de A vers B, une montée, puis une descente. Un cycliste, dont la vitesse moyenne est de 10 km à l'heure en montée, et de 30 km à l'heure en descente, met 1 heure 30 minutes pour aller de A à B et 2 heures 30 minutes pour aller de B à A. Calculer la distance de chaque ville au point le plus élevé de la route.

21) On veut imprimer un livre dont le nombre de lignes, sur chaque page, et celui des lettres dans chaque ligne, est déterminé. Si l'on a mis 3 lignes de plus par page et 4 lettres de plus par ligne, la page aurait contenu 224 lettres de plus. En mettant 2 lignes de moins par page et 3 lettres de moins par ligne, la page aurait contenu 145 lettres de moins. Combien a-t-on mis de lignes à la page et de lettres à la ligne ?

22) Trouver un nombre de deux chiffres sachant que la somme des deux nombres que ces chiffres représentent est 13, et que la différence entre le nombre cherché et le nombre obtenu en permutant les deux chiffres est 45.

23) En augmentant sa vitesse de 5 km/h, un cycliste gagne 37 minutes et 30 secondes. En diminuant sa vitesse de 5 km/h, il perd 50 minutes. Quelle est sa vitesse et la longueur du parcours ?

24) Un lingot de 20 kg est constitué d'un alliage d'or et d'argent. Il a pour volume 1,5dm^3. Sachant que les densités de l'or et l'argent sont respectivement 19,64 et 10,50 déterminer les masses d'or et d'argent qui constituent ce lingot.

25) L'aire d'un rectangle s'accroît de 5 661m^2 quand on double simultanément ses deux dimensions, elle s'accroît de 2 664m^2 quand on diminue la longueur de 10m et qu'on triple la largeur. Déterminer les dimensions du rectangle et son aire.

26) «J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez, et quand vous aurez l'âge que j'ai, la somme de nos âges sera de 90 ans. Quel âge ai-je ?».

27) On fond un alliage contenant 45 % d'argent avec un alliage contenant 60 % d'argent pour obtenir 40kg d'un alliage contenant 48 % d'argent. Quelles ont été les masses fondues ?

28) Dans un livre de mathématiques, datant de 1930, on lit les informations suivantes : «Deux ouvriers travaillent dans le même atelier, l'un gagne par jour les trois quarts de ce que gagne l'autre. Le premier ayant travaillé 16 jours et le second 20 jours, ils ont touché ensemble 1 395F». Quels étaient, en 1930, les salaires quotidiens de chacun de ces deux ouvriers? Combien ont-ils gagné au cours de la période faisant l'objet de l'énoncé?

29) Dans un grenier, on a découvert un document datant de 1890 faisant état de l'achat de 15kg de sucre et 7kg de café pour 42F ; et un autre, de la même époque, faisant état de l'achat de 8 kg de sucre et de 3kg de café, pour 20,20F. Quels étaient les prix d'un kilo de sucre et d'un kilo de café en 1890 ?

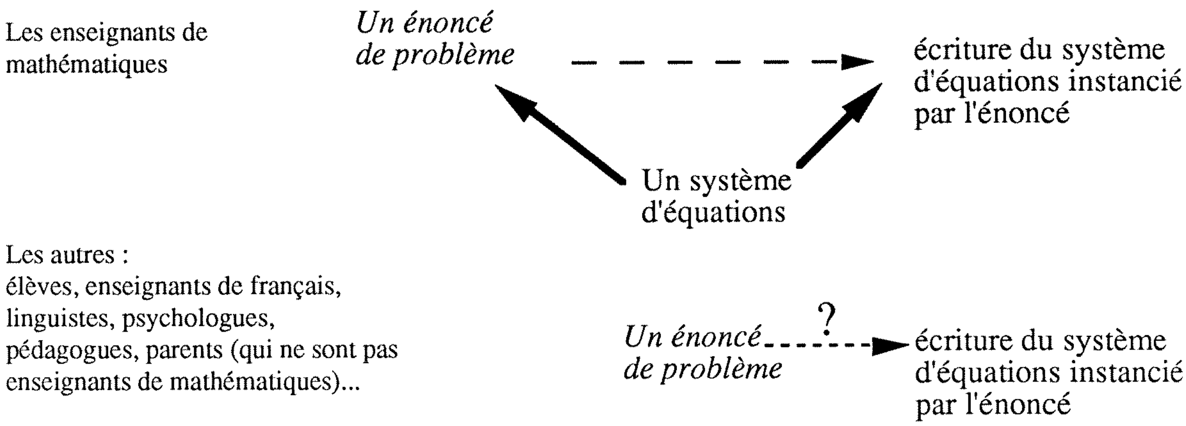
30) Un cycliste parcourt une route (A, B) qui comprend des parties horizontales, des montées et des descentes. Sur les parties horizontales, sa vitesse est de 12km à l'heure, en montée elle est de 8km à l'heure, et en descente de 15km à l'heure.
De A à B, le cycliste met 5 heures, et de B à A, il met 4h 39min. Sachant que les parties horizontales ont une longueur totale de 28km, on demande la longueur totale des montées (sens de A vers B) ainsi que celle des descentes.

31) A la fin de la saison de chasse, on demande à Nemrod combien il a tué de lièvres et de faisans. «19 têtes et 54 pattes» répond-il malicieusement. Peut-on conclure ?

CHAPITRE III

D'UNE SITUATION À UN ÉNONCÉ : CHAMPS DE VARIATIONS POUR LES PROBLÈMES DE MISE EN ÉQUATIONS

En nous demandant pourquoi les enseignants de mathématiques avaient un comportement si différent de celui des autres, quand ils lisent un énoncé de problème de mise en équations, nous avons suggéré que cela pouvait tenir à leur pratique du passage du système d'équations à la confection d'un énoncé de problème. Car *devant un énoncé les enseignants de mathématiques se trouvent dans une position différente de celle des autres lecteurs*. Ce qui peut être représenté ainsi dans le schéma suivant :



La familiarité avec les traitements algébriques fournit comme une grille de lecture préalable pour les énoncés. Comment s'acquiert une telle familiarité ? Il serait évidemment simpliste de croire que le seul fait d'avoir appris à résoudre des équations et des systèmes d'équations, et d'avoir fait des centaines d'exercices de ce type, donnerait cette familiarité. La familiarité avec des traitements d'un niveau n suppose que l'on ait appris des traitements d'un niveau n+1, c'est-à-dire que l'on ait appris des traitements beaucoup plus complexes. Car *l'organisation sémantique sous-jacente aux traitements d'un certain niveau ne peut véritablement être discernée que par celui qui accède à des traitements d'un niveau supérieur*. Et ici un tel discernement est essentiel pour pouvoir utiliser des systèmes d'équations pour résoudre des problèmes .

Concrètement cela veut dire deux choses:

- on ne peut pas considérer que des élèves qui ont acquis la «compétence» pour résoudre des systèmes d'équations soient familiers avec ces traitements algébriques.
- proposer comme travail le passage du système d'équations à la confection d'un énoncé de problème constituerait pour eux un vrai problème, mais ne faciliterait pas nécessairement

une prise de conscience de l'organisation sémantique sous-jacente. En outre une telle tâche pourrait apparaître encore plus artificielle et arbitraire que la présentation classique d'un énoncé.
Il faut donc partir d'une base plus large que celle de la seule présentation d'un système d'équations. Et la seule base possible semble être la présentation complète d'une situation pour laquelle l'utilisation d'un système d'équations peut être utile.

I. La présentation complète d'une situation

Prenons, par exemple, le déplacement d'un mobile sur un parcours accidenté ou marqué par des forces contraires ou favorables : cycliste (mais pourquoi pas un automobiliste ?), bateau (et pourquoi pas une montgolfière ?), un locataire dans un immeuble où l'ascenseur est toujours en panne, une montgolfière, etc.... Une présentation complète de la situation requiert que l'on explicite toutes les données quantitatives nécessaires quant à la vitesse, la durée, la distance, la montée, la descente... Cette présentation peut se faire sous deux formes différentes:
- sous la forme d'un texte descriptif ou narratif. Dans ce cas, on a une présentation séquentielle qui fournit les données de façon linéaire et sans aucun classement. C'est de cette façon que les énoncés de problèmes fournissent les données nécessaires à une mise en équation, à ceci près qu'on n'a pas toutes les données sinon il n'y aurait plus de problème.
- sous la forme d'un tableau. Dans ce cas, on une présentation dans laquelle les données sont classées selon les différentes dimensions sémantiques dont elles relèvent.
Voici par exemple la présentation tabulaire complète d'une situation comportant les valeurs numériques de six objets ainsi que les relations entre les objets de même nature:

	vitesse en m/s	durée en s	distance en m
montée	$v_1 = 15$	$t_1 = 161$	$d_1 = 2415$
descente	$v_2 = 21$	$t_2 = 109$	$d_2 = 2289$
relations	$v_2 - v_1 = 6$	$t_1 + t_2 = 270$	$d_1 - d_2 = 126$

Il y a évidemment un saut cognitif important quand on passe de la forme textuelle à la forme tabulaire pour la présentation complète d'une situation. Dans un cas, les données sont mélangées et, dans l'autre, elles sont classées. Qu'il faille ou non faire travailler les élèves sur ce saut est évidemment une question importante que nous aborderons dans le chapitre suivant.

Mais la présentation complète d'une situation ne constitue pas un problème. Pour que la situation présentée devienne la matière d'un problème, il faut choisir parmi les données, celles qui figureront dans le texte de l'énoncé et celles qui seront des quantités inconnues. Ainsi, à partir d'une même situation, nous pouvons générer des problèmes très différents les uns des autres.

II. Génération d'énoncés et variations sur la présentation complète d'une situation

Si nous partons du tableau ci-dessus, nous pouvons écrire plusieurs énoncés de problèmes en faisant varier la question posée ou le choix des données.

1. Variation de la question posée

On choisit de donner : les deux vitesses : $v_1 = 15$ et $v_2 = 21$

les relations sur les durées : $t_1 + t_2 = 270$

les relations sur les distances : $d_1 - d_2 = 126$

Problème 1

Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 15 mètres par seconde, puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 21 mètres par seconde. Le parcours total a duré 270 secondes, et la montée est de 126 mètres plus longue que la descente.

Les valeurs numériques de v_1 , v_2 , t_1 et t_2 sont les quatre quantités inconnues.

Pour écrire un système de deux équations à deux inconnues, il est nécessaire de réduire ces quatre quantités à deux dénominations de base, qui seront les inconnues notées x et y et dont le choix est souvent, pour les élèves, guidé par la question posée.

QUESTION POSEE	INCONNUES	SYSTEME
Combien de temps ont duré la montée et la descente ?	$x = t_1$ $y = t_2$	$\begin{cases} x + y = 270 \\ 15x - 21y = 126 \end{cases}$
Calculer les longueurs de la montée et de la descente	$x = d_1$ $y = d_2$	$\begin{cases} x - y = 126 \\ \dfrac{x}{15} + \dfrac{y}{21} = 270 \end{cases}$
Calculer la longueur et la durée de la montée.	$x = t_1$ $y = d_1$	$\begin{cases} y = 15x \\ y = 21(270 - x) + 126 \end{cases}$

En choisissant les inconnues induites par la question posée, on obtient trois démarches différentes qui ne présentent pas le même niveau de difficulté pour les élèves. En effet, d'une part, la relation implicite qui lie les grandeurs distance - temps - vitesse n'est pas exprimée de la même façon dans les trois cas:
- dans le premier cas, l'élève est amené à écrire une relation facile à obtenir:
vitesse x temps = distance, qui correspond à la notion de proportionnalité entre temps et distance, à vitesse constante.
- dans le deuxième cas, le choix des distances comme dénominations de base conduit l'élève à utiliser la relation : temps = distance / vitesse ce qui nécessite un traitement mathématique de la définition habituelle: vitesse = distance / temps.
- dans le troisième cas, la seconde équation utilise simultanément les relations entre les temps et entre les distances, ce qui est une difficulté supplémentaire.
D'autre part, les systèmes obtenus ne sont pas équivalents du point de la technicité de résolution. (le deuxième comporte des quotients; dans le troisième, on a directement y en fonction de x).
Ceci montre pourquoi on ne peut pas choisir les inconnues à priori, à la simple lecture de l'énoncé.
Cette affirmation est confirmée si la question posée est :

« Quelle est la longueur totale du trajet ?».

L'élève qui écrit : « soit x la distance totale parcourue en mètres » aura sans doute beaucoup de difficultés à mettre le problème en équations.
L'enseignant peut montrer à l'élève qu'il peut choisir les inconnues indépendamment de la question de l'énoncé puisque les valeurs numériques de deux grandeurs permettent de calculer les deux autres. Il est d'ailleurs possible, et certains élèves le font d'eux-mêmes, de garder quatre inconnues et d'écrire le système suivant :

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 270 \\ d_1 - d_2 = 126 \\ 15 \times t_1 = d_1 \\ 21 \times t_2 = d_2 \end{cases}$$
, que l'on résout ensuite par substitutions.

2. Variations des données.

A partir du même tableau de données, nous pouvons écrire d'autres problèmes en choisissant deux autres données numériques et deux autres relations.
Ces problèmes sont-ils de la même nature que les précédents ?
a) Première variation des données.
On choisit de donner : les deux durées : $t_1 = 161$ et $t_2 = 109$
les relations sur les vitesses : $v_2 - v_1 = 6$
les relations sur les distances : $d_1 - d_2 = 126$

Problème 2

Un vélomoteur met 161 secondes pour monter une colline , puis 109 secondes pour redescendre de l'autre côté. Sa vitesse en descente dépasse de 6 mètres par seconde sa vitesse en montée , et la montée est de 126 mètres plus longue que la descente.

INCONNUES	SYSTEME
$x = v_1$ $y = v_2$	$\begin{cases} y - x = 6 \\ 161x - 109y = 126 \end{cases}$
$x = d_1$ $y = d_2$	$\begin{cases} x - y = 126 \\ \dfrac{x}{161} - \dfrac{y}{109} = -6 \end{cases}$
$x = v_1$ $y = d_1$	$\begin{cases} y = 161x \\ y = 109(x+6) + 126 \end{cases}$

Nous obtenons trois problèmes similaires aux précédents. En effet, dans la relation : vitesse x temps = distance, vitesse et temps jouent des rôles symétriques. La relation utilisée dans le deuxième cas correspond cette fois à la définition de la vitesse.

b). Deuxième variation des données.

On choisit de donner : une durée et une vitesse: $v_1 = 15$ et $t_2 = 109$

les relations sur les distances: $d_1 - d_2 = 126$

les relations sur les vitesses: $v_2 - v_1 = 6$

Problème 3

Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 15 mètres par secondes, puis redescend de l'autre côté à une vitesse supérieure de 6 mètres par seconde à la vitesse de montée. La descente a duré 109 secondes et la montée est de 126 mètres plus longue que la descente.

INCONNUES	SYSTEME
$x = t_1$ $y = v_2$	$\begin{cases} 15x - 109y = 126 \\ y = 6 + 15 \end{cases}$
$x = d_1$ $y = d_2$	$\begin{cases} x - y = 126 \\ 15 + 6 = \dfrac{y}{109} \end{cases}$

Ces problèmes ne conduisent pas à des systèmes. Leur mise en équation est simple.

c). Troisième variation des données.

On choisit de donner : les deux distances : $d_1 = 2415$ et $d_2 = 2289$

les relations sur les vitesses : $v_2 - v_1 = 6$

les relations sur les durées : $t_1 + t_2 = 270$

Problème 4

Un vélomoteur monte une colline par une route de 2415 mètres, puis redescend de l'autre côté par une route de 2289 mètres. Le parcours total a duré 270 secondes et sa vitesse en descente dépasse de 6 mètres par seconde sa vitesse en montée.

INCONNUES	SYSTEME
$x = t_1$ $y = t_2$	$\begin{cases} x + y = 270 \\ \dfrac{2415}{x} - \dfrac{2289}{y} = -6 \end{cases}$
$x = v_1$ $y = v_2$	$\begin{cases} x - y = -6 \\ \dfrac{2415}{x} + \dfrac{2289}{y} = 270 \end{cases}$
$x = t_1$ $y = v_1$	$\begin{cases} xy = 2415 \\ x + \dfrac{2289}{y+6} = 270 \end{cases}$

Quel que soit le choix des dénominations de base, nous obtenons des systèmes non linéaires qui conduisent à des équations du second degré, dont la résolution est au programme des classes de Première.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu tous les différents types d'énoncés possibles par rapport au système d'équations à trouver. Dans ce chapitre, nous venons de voir les différents systèmes et donc les différents problèmes qui peuvent être formés à partir de la présentation complète d'une situation. Il ne resterait plus pour fermer la boucle qu'à analyser les énoncés de ces problèmes en fonction de la classification proposée au chapitre précédent. Et on aurait alors une vue globale et précise de tout le fonctionnement cognitif impliqué par les problèmes de mise en équations. Nous laissons au lecteur le soin de faire ce petit travail à titre de vérification de sa propre compréhension. L'important maintenant est de revenir à la question initiale du premier chapitre : comment faire apprendre aux élèves à résoudre les problèmes ou, tout au moins, à ne pas rester complètement désorientés devant l'énoncé.

CHAPITRE IV

APPRENDRE LA MISE EN EQUATIONS

On pourrait résumer toutes les analyses précédentes par cette formule : pour ce genre de problèmes, tout est dans la compréhension de l'énoncé pour la mise en équations. Ensuite, ce n'est plus que de la technique de calcul (pour éviter l'ambiguïté du mot «résolution»).
La séquence d'apprentissage que nous allons présenter ici s'efforce de prendre en compte les analyses précédentes sur ce qu'implique la compréhension de l'énoncé pour la mise en équations. Elle tient compte des expériences faites par Kourkoulos (1990) et de N. Cordier (1993). Son but est que les élèves s'approprient une procédure pour interroger le texte de façon à:
- en extraire toutes les informations présentées
- les organiser selon une disposition immédiatement transposable en l'écriture d'un système d'équations.

Cela implique donc un classement des données de l'énoncé en fonction des deux dimensions dont elles relèvent. Matériellement, il s'agit du passage de la présentation séquentielle à la présentation sous une forme tabulaire. *Il ne s'agit donc pas, comme certains lecteurs pressés pourraient être tentés de le croire, de donner un tableau déjà construit, ou de dire ce qu'il faudrait mettre pour compléter un tableau.* Il s'agit d'apprendre à construire une grille de questions pour lesquelles les réponses se croisent deux à deux. Cela veut dire que les données de l'énoncé doivent être regardées sous deux aspects sémantiques différents. Cette procédure précède le choix des inconnues. Et c'est à ce stade que se fait la réelle compréhension de la mise en équations. Naturellement on pourrait vouloir ignorer l'importance de cette tâche, mais alors il faudrait donner directement le système d'équations à résoudre et ne pas avoir l'hypocrisie de donner un texte comme énoncé de problème.
Nous allons présenter deux séquences d'apprentissage, l'une effectuée dans une classe de troisième et l'autre dans deux classes de seconde .

I. Une séquence d'apprentissage en classe de troisième

Le travail sur la résolution de problèmes a débuté après les vacances de printemps. Il a duré cinq séances, en plus du test d'entrée, à raison de deux heures par semaine.

Préliminaire: situer le niveau des élèves pour la mise en équation (une vingtaine de minutes)

Consigne: pour chaque problème, écrire un système d'équations qui permet de répondre à la question posée en précisant bien les inconnues, mais sans résoudre le système.

Problème 1 de type A1

Jean a des grosses billes et des petites billes. Toutes les grosses billes ont la même masse et toutes les petites aussi. 5 grosses billes et 12 petites billes pèsent ensemble 386 g . 7 grosses billes et 9 petites billes pèsent ensemble 380,5 g .
Calculer les masses des grosses billes et des petites billes.

Problème 2 de type B1, les quantités sont discrètes

Un enfant dispose de 15 jetons blancs et de 12 jetons noirs. Les jetons de la même couleur ont le même diamètre. Le diamètre d'un jeton blanc mesure 6 mm de plus que le diamètre d'un jeton noir. La rangée des 15 jetons blancs alignés côte à côte dépasse de 144 mm la rangée des 12 jetons noirs alignés côte à côte.
Quel est le diamètre d'un jeton blanc ?

Problème 3 de type C1, les quantités sont continues

Un bassin est alimenté par un premier robinet qui a un débit de 45 litres par heure. On arrête ce robinet et on le remplace par une fontaine qui a un débit de 35 litres par heure. Il a fallu 5 heures pour remplir le bassin, et la fontaine a versé 15 litres d'eau de plus que le robinet.
Calculer pendant combien de temps le robinet a coulé.

En ne prenant en compte que les élèves qui écrivent un système correct, avec éventuellement des inconnues mal définies, nous avons obtenu les résultats suivants :

	Réussi	Non réussi ou non traité
Problème 1	27	0
Problème 2	5	22
Problème 3	0	27

L'analyse faite précédemment nous permettait de prévoir ces résultats. Au vu des résultats de ce test, les élèves nous ont demandé une stratégie de résolution.

Séquence d'apprentissage (environ cinq heures)

Première heure:
introduction d'une procédure d'analyse du texte de l'énoncé

Nous n'avons pas corrigé pas le test, mais nous sommes partis de l'exercice suivant:

Dans une usine, on fabrique du chocolat. Une première machine produit 13 kg de chocolat par minute ; au bout d'un certain temps, elle est remplacée par une deuxième machine qui produit 21

kg de chocolat par minute. La fabrication dure 510 minutes en tout. La première machine a produit 238 kg de plus que la deuxième.
Combien de temps a fonctionné la première machine ?

Les élèves remarquent d'emblée une ressemblance avec le troisième problème du test. Nous leur avons alors proposé de «décortiquer» l'énoncé avec eux:

a) Classement des informations de l'énoncé

Nous construisons ensemble un tableau pour organiser les informations en cherchant:

- les différents types de quantités inconnues qui entrent en jeu ; les élèves les repèrent par les différentes unités.
- les phases de l'action : fonctionnement de la 1ère machine, fonctionnement de la 2ème machine.

Nous arrivons à la représentation suivante:

	Quantité produite par minute en kg/min	Masse produite en kg	Durée en min
1ère machine			
2ème machine			

b) Tri de l'information chiffrée

Les élèves placent dans le tableau les données 13kg par minute et 21kg par minute. Ils essaient de placer dans les cases les données 238 et 510, mais n'y arrivent pas. Ils cherchent aussi à écrire immédiatement un système, sans avoir clairement défini les quantités inconnues. Il leur apparaît alors nécessaire d'ajouter une ligne au tableau, pour placer les « valeurs » 238 et 510.

On parvient à la représentation suivante:

	Quantité produite par minute en kg/min	Masse produite en kg	Durée en min
1èremachine	13		
2ème machine	21		
relation		la 1ère a produit 238 de plus que la 2ème	510 en tout

c) Prise de conscience des quantités inconnues et des dénominations de base

C'est à ce stade que nous pouvons vraiment commencer à chercher quelles sont les quantités inconnues. Certains élèves en proposent quatre, puisqu'il y a quatre cases

vides. Ne sachant résoudre que des systèmes de deux équations à deux inconnues, ce nombre est trop grand, il faut donc essayer de le réduire. Il est évident pour les élèves que les quantités inconnues sont liées entre elles mais la relation «la masse totale est égale au produit de la quantité par minute par la durée » n'est pas immédiate. La prise de conscience des quantités inconnues s'accompagne donc de la nécessité de trouver une relation implicite entre les quantités pour réduire à deux les dénominations de base (pour ce choix, les élèves vont privilégier l'absence de quotients dans les calculs).
La dernière présentation du tableau est celle-ci :

	Quantité produite par minute en kg/min	Durée en min	masse produite en kg	relation entre les quantités inconnues
1ère machine	13	x	$m_1 = 13x$	quantité x durée = masse
2ème machine	21	y	$m_2 = 21y$	
relation		510 en tout	la 1ère vaut 238 de plus que la 2ème	

L'exercice suivant , variante du précédent est alors proposé, ceci afin que chacun refasse tout seul le travail d'organisation des données en tableau.

> Dans une usine, on fabrique du chocolat. Une première machine produit 18 kg de chocolat par minute; au bout d'un certain temps, elle est remplacée par une deuxième machine qui produit 24 kg de chocolat par minute. La fabrication dure 231 minutes en tout et la production totale est de 5 040 kg de chocolat. Combien de temps a fonctionné la première machine ?

Deuxième à cinquième heure:
pratique de la procédure d'analyse de l'énoncé

Le deuxième problème de la première heure est corrigé : comme l'organisation de son énoncé était semblable à celle du problème précédent, les élèves n'ont pas eu de difficultés particulières pour le mettre en équations. Il faut ensuite laisser les élèves chercher un certain nombre d'exercices afin qu'ils s'approprient le travail de cette analyse. Bien entendu, chacun doit trouver sa propre organisation en tableau qui n'est pas nécessairement identique à celle que nous proposons en annexe, correspondant aux énoncés proposés ci-dessous.
Il est alors intéressant de proposer aux élèves des énoncés:

- sur le MEME THEME dans lesquels la relation implicite est toujours la même mais où on fait varier les informations:

Problème 1

Un bateau va d'un port A vers un port B et il consomme 14 l de carburant au km. Au port B, on le décharge, et il repart vers un port C, en consommant cette fois 8 l par km. La distance entre les ports A et B est la même que celle entre B et C. Pour tout le voyage, le bateau a consommé 6952 l de carburant. Quel est le volume consommé entre A et B?

Problème 2

Un bateau va d'un port A vers un port B et il consomme 12 l de carburant par km. Au port B, on le charge de marchandises et il continue vers un port C. Du port B au port C, il consomme 15 l de carburant par km. La distance parcourue en tout est de 305 km. Pour aller de A à B, le bateau a consommé 204 l de plus que pour aller de B à C. Quelle est la distance du port A au port B?

Remarques:

Les élèves ont beaucoup de mal à repérer les quantités inconnues. Beaucoup ne distinguent pas la consommation au kilomètre et la consommation totale, et certains ne retiennent que les valeurs numériques.

Pour les relations liant entre elles les quantités inconnues, *ils se sont contentés d'écrire un nombre au lieu d'une phrase*, ce qui a entretenu la confusion entre consommation au kilomètre et consommation totale. De plus, ils n'ont prêté aucune attention à l'information :

«La distance entre les ports A et B est la même que celle entre B et C».

A ce stade là, on peut noter que l'apprentissage est en cours d'acquisition.

- sur un THEME DIFFERENT: la relation implicite varie.

Problème 3

On remplit d'eau un réservoir avec un robinet qui débite 9 litres d'eau par minute. Quand le réservoir est plein, on change le débit du robinet à 13 litres d'eau par minute, et on commence à remplir un deuxième réservoir. On continue jusqu'à ce que le deuxième réservoir soit plein, et on ferme le robinet. Le robinet a été ouvert pendant 160 minutes. La contenance du deuxième réservoir est égale à trois fois celle du premier. Quelle est la contenance du premier réservoir ?

Problème 4

Une barre métallique est constituée de deux parties : l'une en zinc, l'autre en fer. Chaque centimètre de la partie en zinc pèse 4 grammes. Chaque centimètre de la partie en fer pèse 7 grammes. La barre pèse en tout 430 grammes et mesure 76 centimètres. Quelle est la longueur de la partie en zinc ?

Remarques:

Le problème 3 a posé de grandes difficultés aux élèves. Un seul élève a réussi à le mettre en équations et un grand nombre d'entre eux n'ont même pas essayé. Quelques élèves ont présenté des tableaux incomplets, avec des confusions débit - volume ou débit - durée. D'autres ont mal interprété la situation de proportionnalité : influencés par la rédaction de la question posée, ils ont souvent choisi les contenances comme inconnues, mais ont alors écrit $9x$ au lieu de $9/x$. Les deux types de dénominations de base choisies par les élèves (durées ou contenances) ont permis de montrer qu'on peut obtenir deux systèmes différents dont l'un est plus facile à résoudre.

- de TYPE DIFFERENT: l'analyse de l'énoncé ne conduit pas à une organisation en tableau analogue aux précédents.

- La lecture de chacune des phrases conduit, sans organisation en tableau, à une des deux équations.

Problème 5

Huit pièces de 10 F et quinze pièces de 2F alignées côte à côte ont une longueur totale de 49,3 cm; tandis que douze pièces de 10 F et neuf pièces de 2F ne font que 48,3 cm. Calculer les diamètres des pièces de 10 F et de 2F.

Remarques:

Cet exercice de type brevet a été réussi par tous. Seuls deux élèves ont essayé de traiter cet exercice à l'aide d'un tableau, mais certains ont fait un schéma représentant les alignements de pièces. Les données numériques parasites n'ont gêné personne.

- La relation implicite n'est pas donnée par une formule, souvent induite par les unités intervenant dans l'énoncé du problème.

Problème 6

La mule et le baudet

Une mule et un baudet chargés de sacs également pesants cheminent de concert. Le baudet se plaignant de sa charge, la mule lui dit: “ De quoi te plains-tu ? Si je prenais un de tes sacs, je serais chargée deux fois autant que toi, et si tu me prenais un des miens, je serais encore aussi chargée que toi. ” . Combien chaque animal porte-t-il de sacs ?

La relation implicite est la suivante: *le nombre total de sacs est invariable.*

Remarques:

Cet exercice a rebuté les élèves: vocabulaire utilisé, tournures de phrases. Certains se sont obstinés, d'autres ont abandonné très vite. Une réflexion est revenue plusieurs fois : « C'est horrible, il n'y a pas de nombres! », réflexion qui a provoqué une discussion animée dans la classe.

Après discussion, il s'est avéré que beaucoup ne faisaient pas de différence au niveau de la désignation des quantités inconnues entre le nombre initial de sacs et entre le nombre de sacs plus 1. Au niveau de l'algébrisation, ces élèves ont donc encore bien des difficultés.

Bilan de cette séquence de cinq séances

Le recours à un tableau ne s'impose pas nécessairement pour les meilleurs. Ceux-ci intériorisent entièrement leur démarche d'organisation des données et ne ressentent pas la nécessité de la faire apparaître. Cependant, pour des exercices plus complexes, ils y ont recours.

Les plus faibles sont rebutés par l'effort de rigueur demandé.

La plupart des élèves ont été très motivés par la stratégie proposée. L'une des raisons est qu'ils ont été confrontés, lors du test initial, à des problèmes qu'ils ne savaient pas résoudre. Une autre raison est que, dans cette classe, les élèves étaient toujours demandeurs de « recettes miracles» pour éviter de réfléchir. C'est donc effectivement comme « recette » que certains ont considéré l'apprentissage.

La majorité des élèves a pris l'habitude de chercher d'abord les types de quantités inconnues qui entrent en jeu, et ne commencent plus par écrire un système plus ou moins au hasard, avec des dénominations de base qu'ils n'ont pas clairement définies. L'organisation en tableau ne résout pas les difficultés d'algébrisation, mais fait apparaître clairement les dysfonctionnements de raisonnement d'élèves, ce qui permet d'essayer d'y remédier.

Pour ceux qui maîtrisent l'organisation des données d'un énoncé, le réinvestissement dans d'autres domaines mathématiques s'est révélé être immédiat.

Après cette séquence, il y a peu d'élèves qui restent totalement inactifs devant un énoncé.

II. Séquence d'apprentissage en classe de seconde

Préliminaire: situer le niveau des élèves pour la mise en équation (une vingtaine de minutes)

Afin de mieux préparer la séance d'apprentissage de la résolution de problèmes conduisant à une mise en équation, nous proposons de faire passer un test aux élèves. Les réussites à ce test permettent de grouper les élèves suivant leurs difficultés.

Test d'évaluation (durée 20 minutes)

Consigne: pour chaque problème, écrire un système d'équations qui permet de répondre à la question en précisant bien les inconnues, mais sans résoudre le système.

Problème 1 de type A1:

Jean a des grosses billes et des petites billes. Toutes les grosses billes ont la même masse et toutes les petites aussi. 5 grosses billes et 12 petites billes pèsent ensemble 386g. 7 grosses billes et 9 petites billes pèsent ensemble 380,5g.
Calculer les masses des grosses billes et des petites billes.

Problème 2 de type B1, les quantités sont discrètes:

Un enfant dispose de 15 jetons blancs et de 12 jetons noirs. Les jetons de la même couleur ont le même diamètre. Le diamètre d'un jeton blanc mesure 6 mm de plus que le diamètre d'un jeton noir. La rangée des 15 jetons blancs alignés côte à côte dépasse de 144 mm la rangée des 12 jetons noirs alignés côte à côte.
Quel est le diamètre d'un jeton blanc ?

Problème 3 de type C1, les quantités sont continues:

Un bassin est alimenté par un premier robinet qui a un débit de 45 litres par heure. On arrête ce robinet et on le remplace par une fontaine qui a un débit de 35 litres par heure. Il a fallu 5 heures pour remplir le bassin, et la fontaine a versé 15 litres d'eau de plus que le robinet.
Calculer pendant combien de temps le robinet a coulé.

Nous avons fait passer ce test en début d'année à des élèves de seconde n'ayant reçu comme enseignement qu'un entraînement de type classique (exercices du brevet des collèges). En ne prenant en compte que les élèves qui écrivent un système correct, avec éventuellement des inconnues mal définies, nous obtenons les résultats suivants :

	Réussi	Non réussi ou non traité
Problème 1	61	5
Problème 2	33	33
Problème 3	5	61

Nous avons constaté que le fait de mal définir les inconnues n'empêche pas l'écriture correct d'un système de deux équations à deux inconnues dans le premier problème. Les résultats montrent que c'est pour le deuxième problème que les élèves ont des difficultés. Mais l'analyse proposée dans le chapitre II nous permettait de le prévoir. Ce test nous conduit à remarquer qu'un enseignement différent semble nécessaire si on veut considérer comme acquise à la fin du collège la résolution de problèmes conduisant à une mise en équations du premier degré.

Séquence d'apprentissage (environ quatre heures)

A la suite du test préliminaire, deux groupes distincts peuvent alors être constitués : le premier groupe composé des élèves qui n'ont pas réussi le deuxième problème suit la séance d'apprentissage suivante. Le second, composé d'élèves ayant moins de difficultés, peut être amené à travailler plus vite la première heure.

Première heure:
introduction d'une procédure d'analyse du texte de l'énoncé

Les élèves cherchent individuellement ce problème pendant une quinzaine de minutes:

> Dans une usine, on fabrique du chocolat. Une première machine produit 13 kg de chocolat par minute; au bout d'un certain temps, elle est remplacée par une deuxième machine qui produit 21kg de chocolat par minute. La fabrication dure 510 minutes en tout. La première machine a produit 238 kg de plus que la deuxième.
> Combien de temps a fonctionné la première machine?

On retrouve alors, dans leurs propositions, la plupart des défauts de représentation décrits par M. Kourkoulos (cf. chapitre II).

Au bout de ce temps de recherche, l'enseignant propose de fournir une aide et commence à décortiquer l'énoncé avec les élèves.

a) Classement des informations de l'énoncé

Les élèves mettent en évidence dans l'énoncé la présence de trois quantités inconnues que les élèves désignent spontanément par leurs unités: il y a des minutes, des kilogrammes et des kilogrammes par minute, et ceci pour 2 machines.

A la question *«comment organiser les données ?»* la construction d'un tableau vient comme réponse.

	débit en kg/min	durée en min	masse produite en kg
1ère machine			
2ème machine			

b) Tri de l'information chiffrée

Les deux premières informations chiffrées (13 kg par minute et 21 kg par minute) sont placées aisément dans le tableau. Mais la question *«Avons - nous mis toutes les données chiffrées de l'énoncé dans le tableau ?»* suscite un débat pour savoir où placer les deux autres renseignements; il en ressort la nécessité de créer une troisième ligne dans le tableau. On obtient alors le tableau suivant:

	débit en kg/min	durée en min	masse produite en kg
1ère machine	13		
2ème machine	21		
relations		510 en tout	la 1ère vaut 238 de plus que la 2ème

On remarque qu'on n'introduit pas d'emblée le tableau complet (3 lignes, 3 colonnes). Le travail d'élaboration se fait en deux temps. Il faut d'abord chercher à bien distinguer les **deux** dimensions de l'information à prendre en compte (ligne et colonne). Et ensuite seulement, on regarde si l'organisation ainsi dégagée laisse assez de place pour ranger toutes les informations du texte de l'énoncé. Ces deux activités n'orientent pas l'attention sur les mêmes aspects. Il ne faut donc pas les fusionner d'emblée.

c) Prise de conscience des quantités inconnues et des dénominations de base

A ce stade, les élèves sont bloqués. L'enseignant interroge: «*Connaissez-vous une relation entre les trois quantités inconnues* ?»

Tous les élèves écrivent une des égalités suivantes :

débit x durée = masse   ou   kg/min x min = kg

L'enseignant poursuit le dialogue: «*On connaît le débit. Préférez - vous exprimer la masse en fonction de la durée, ou la durée en fonction de la masse*?». La première alternative est choisie à l'unanimité.

La classe décide alors d'appeler x la durée en minutes pour la 1ère machine et y la durée en minutes pour la 2ème.

La prise de conscience des quantités inconnues s'accompagne donc de la nécessité de trouver une relation implicite entre ces quantités pour réduire à deux les dénominations de base (pour ce choix, les élèves vont privilégier l'absence de quotients dans les calculs).

La dernière phase du tableau est celle-ci:

	débit en kg/min	durée en min	masse produite en kg	relation entre les quantités inconnues
1ère machine	13	x	$m_1 = 13x$	débit x durée = masse
2ème machine	21	y	$m_2 = 21y$	
relation		510 en tout	la 1ère vaut 238 de plus que la 2ème	

d) Ecriture du système par lecture des lignes et des colonnes.

Il ne reste plus qu'à écrire les deux équations pour obtenir le système à résoudre. Cette écriture est aisée car il ne s'agit que de lire des colonnes et des lignes du tableau.

Il faut remarquer qu'une difficulté liée à la non-transposition immédiate entre la langue naturelle et l'écriture algébrique va être souvent relevée: la transformation de l'expression «de plus» n'est pas immédiate pour beaucoup de nos élèves.

Cette première heure est essentielle afin d'apprendre aux élèves à organiser une situation en **construisant eux-mêmes des tableaux contenant les informations** données dans l'énoncé.

Deuxième et troisième heure:
pratique de la procédure d'analyse de l'énoncé

Il s'agissait de laisser les élèves chercher un certain nombre d'exercices afin qu'ils s'approprient le travail fait dans la première heure. Bien entendu, chacun doit trouver son organisation en tableau qui n'est pas nécessairement identique à celle que nous proposons en annexe, pour les énoncés de problèmes présentés ci-dessous.

Nous avons proposé des énoncés :
- sur le MEME THEME (le vélomoteur) dans lesquels on fait varier les informations, la relation implicite étant toujours la même:

Problème 1

Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 15 mètres par seconde, puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 21 mètres par seconde.
Le parcours total a duré 270 secondes et la montée est de 126 mètres plus longue que la descente. Combien de temps a duré la montée?

Problème 2

Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 17 mètres par seconde, puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 26 mètres par seconde.
La montée est de 203 mètres plus longue que la descente et a duré 40 secondes de plus. Combien de temps a duré la descente?

Problème 3

Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 18 mètres par seconde, puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 26 mètres par seconde.
Le parcours total a duré 240 secondes et sa longueur est 5160 mètres.
Combien de temps a duré la montée?

- sur un THEME DIFFERENT (l'usine de chocolat et le bassin) la relation implicite varie.

Problème 4

Un bassin est alimenté par un premier robinet qui a un débit de 45 litres par heure. On arrête ce robinet et on le remplace par une fontaine qui a un débit de 35 litres par heure. Il a fallu 5 heures pour remplir ce bassin et la fontaine a versé 15 litres d'eau de plus que le robinet.
Pendant combien de temps le robinet a-t-il coulé?

Problème 5

Dans une usine, on fabrique du chocolat. Une première machine produit 9 kg de chocolat par minute; au bout d'un certain temps, elle est remplacée par une deuxième machine qui produit 13 kg de chocolat par minute. La première machine a produit 138 kg de plus que la deuxième, elle a travaillé 34 minutes de plus que la deuxième.
Combien de temps a fonctionné la première machine?

Les élèves réussissent ces exercices. La plupart ont eu recours à un tableau, même s'ils n'ont fait que l'ébaucher : à la fin, tout s'est passé comme si le simple fait de construire les marges du tableau suffisait à éclaircir la situation.

Quatrième heure:

la maîtrise des énoncés par le travail sur les relations nécessaires pour rédiger un problème

Pour terminer cette séquence, il nous a semblé utile de proposer aux élèves de *comprendre comment écrire les énoncés de mise en équations,* c'est-à-dire de leur proposer la démarche de construction d'un énoncé. Pour fabriquer un énoncé analogue à ceux déjà rencontrés, il faut trois quantités inconnues reliées par une loi qui n'est en général pas explicite dans l'énoncé mais qui est supposée connue. Par exemple:

prix unitaire : prix en F pour 1 objet (pour 1 kg, pour 1 *l*, pour 1m...)	x	nombre d'objets (de kg, de *l*, de m...)	=	prix en F
masse unitaire : nombre de kg pour 1 objet (pour 1 m^3, pour 1 *l*...)	x	nombre d'objets (de m^3, de *l* ...)	=	masse en kg
vitesse : nombre de m par s (ou de km par h)	x	durée en s (ou en h)	=	distance en m (ou en km)
débit : nombre de m^3 (ou de *l* ou de kg) pendant 1 h	x	durée en h	=	volume en m^3 ou en *l* ou masse en kg

Ensuite il faut 2 situations: 2 sortes d'objets, 2 machines, 2 parcours, 2 robinets, 2 métaux ...

On peut alors construire un tableau pour organiser les données. On remplit avec des valeurs numériques une colonne et on écrit des relations dans les autres colonnes. On demande de calculer certaines des quantités inconnues.

Exemple:

	colonne 1	colonne 2	colonne 3
situation A	45		
situation B	35		
relation		la somme vaut 5	le $2^{ème}$ vaut 15 de plus que le 1^{er}

Il ne reste plus qu'à broder une histoire pour écrire l'énoncé...!

Les consignes peuvent alors être du type suivant :
- A partir du tableau ci-dessus écrire un problème d'achat, un problème de production, puis un problème de déplacement. Ne pas oublier de poser une question.
- Choisir des valeurs pour les nombres de la colonne 2, et une relation pour la colonne 1 en supprimant les valeurs 35 et 45. Inventer des énoncés de problème à partir du nouveau tableau.
- Faire résoudre un des exercices à son voisin puis corriger la solution proposée

Bilan de cette séquence de quatre séances

Ce travail a intéressé tous les élèves : pour ceux qui avaient réussi le deuxième problème du test initial, le travail d'organisation en tableau n'était pas nécessaire dans les problèmes simples. Mais cela leur a permis une démarche de contrôle. Pour les plus faibles, le travail d'organisation des informations du texte prend du temps mais ils ont pris du plaisir à le faire et ont été heureux d'arriver à résoudre les problèmes. Les autres ont commencé à organiser les énoncés en tableaux, ont arrêté puis sont revenus à la construction du tableau en fonction des difficultés qu'ils rencontraient.

Cette classification des informations permet un réinvestissement dans d'autres activités : exercices de mise en équation qui ne conduisent pas à un système, problèmes de fonctions, et problèmes de proportionnalité pour lesquels spontanément une organisation en tableau sera faite par les élèves. En fait, dans toute activité de modélisation, le réinvestissement de ce travail se fera.

En conclusion, la question suivante peut être posée: sur quels critères choisir les énoncés ? Les énoncés de problèmes peuvent varier considérablement. Nous en avons vu les principes dans le chapitre III. Mais quand on feuillette les manuels, on retrouve un lot de problèmes communs que nous avons rassemblés en annexe 2 (p.34). Tous ces énoncés représentent-ils des variations pertinentes et intéressantes? Quelques éléments de réponse peuvent déjà être avancés sur la base des observations précédentes.

Un problème est un bon exercice d'apprentissage lorsque l'élève qui présente un (ou plusieurs) défaut(s) de représentation ne peut pas arriver à mettre en équations correctement les données. Par conséquent, dans un tel exercice, l'élève qui réussit, définit clairement les dénominations de base, sait combiner les différentes quantités inconnues du problème entre elles, et connaît la signification du résultat de ces combinaisons. La condition nécessaire pour qu'un exercice de mise en équations soit un bon exercice d'apprentissage est la présence de:
- **deux objets** (montée et descente, parties en fer et en zinc, ...)

- **deux dénominations de base** (longueur et masse, longueur et durée, ...) afin qu'il puisse y avoir discrimination. En effet, lorsqu'il y a deux dénominations de base et deux objets il y a quatre quantités inconnues, ce qui oblige l'élève à préciser le choix de ses inconnues.
- les variables doivent être continues et non pas discrètes, c'est-à-dire que certaines informations numériques portent sur des grandeurs (masse volumique, débit, vitesse). Les problèmes avec des quantités discrètes sont plus facilement résolus par les élèves et présentent deux dénominations de base mais l'une d'entre elles est le nombre d'objets pouvant être obtenu par comptage.
- la relation entre les quantités inconnues doit être une relation de proportionnalité, afin d'obliger l'élève à multiplier ou à diviser pour réduire le nombre de quantités inconnues. Ceci permet de voir s'il sait concevoir une multiplication et reconnaître la signification de son résultat.

ANNEXE
Propositions d'organisation des données en tableau.

En classe de troisième:

Problème 1.

Un bateau va d'un port A vers un port B et il consomme 14 l de carburant au km. Au port B, on le décharge, et il repart vers un port C, en consommant cette fois 8 l par km. La distance entre les ports A et B est la même que celle entre B et C. Pour tout le voyage, le bateau a consommé 6952 l de carburant. Quel est le volume consommé entre A et B?

	consom. au km en l/km	distance en km	consom. totale en l	relation entre les quantités inconnues
1^{er} trajet de A vers B	14	x	$c_1 = 14x$	consom. au km ×
$2^{ème}$ trajet de B vers C	8	y	$c_2 = 8y$	distance
relation		distance de A vers B = distance de B vers C	6952 en tout	= consom. totale

Problème 2

Un bateau va d'un port A vers un port B et il consomme 12 l de carburant par km. Au port B, on le charge de marchandises et il continue vers un port C. Du port B au port C, il consomme 15 l de carburant par km. La distance parcourue en tout est de 305 km. Pour aller de A à B, le bateau a consommé 204 l de plus que pour aller de B à C. Quelle est la distance du port A au port B?

	consom. au km en l/km	distance en km	consom. totale en l	relation entre les quantités inconnues
1^{er} trajet de A vers B	12	x	$c_1 = 14x$	consom. au km ×
$2^{ème}$ trajet de B vers C	15	y	$c_2 = 8y$	distance =
relation		305 en tout	le 1^{er} consomme 204 l de plus que le $2^{ème}$	consom. totale

Problème 3

On remplit d'eau un réservoir avec un robinet qui débite 9 litres d'eau par minute. Quand le réservoir est plein, on change le débit du robinet à 13 litres d'eau par minute, et on commence à remplir un deuxième réservoir. On continue jusqu'à ce que le deuxième réservoir soit plein, et on ferme le robinet. Le robinet a été ouvert pendant 160 minutes. La contenance du deuxième réservoir est égale à trois fois celle du premier. Quelle est la contenance du premier réservoir ?

	débit en l/min	durée en min	contenance en l	relation entre les quantités inconnues
1er réservoir	9	x	$m_1 = 9x$	débit x durée
2ème réservoir	13	y	$m_2 = 13y$	=
relation		160 en tout	la 2ème vaut 3 fois la 1ère	contenance

Problème 4

Une barre métallique est constituée de deux parties : l'une en zinc, l'autre en fer. Chaque centimètre de la partie en zinc pèse 4 grammes. Chaque centimètre de la partie en fer pèse 7 grammes. La barre pèse en tout 430 grammes et mesure 76 centimètres. Quelle est la longueur de la partie en zinc ?

	masse par cm en g.	longueur en cm	masse en g.	relation entre les quantités inconnues
partie en zinc	4	x	$m_1 = 9x$	masse par cm ×
partie en fer	7	y	$m_2 = 13y$	longueur =
relation		76 en tout	430 . en tout	masse

Problème 6

La mule et le baudet

Une mule et un baudet chargés de sacs également pesants cheminent de concert. Le baudet se plaignant de sa charge, la mule lui dit: “ De quoi te plains-tu ? Si je prenais un de tes sacs, je serais chargée deux fois autant que toi, et si tu me prenais un des miens, je serais encore aussi chargée que toi. ” . Combien chaque animal porte-t-il de sacs ?

	charge de la mule	charge du baudet	relations	relation entre les quantités inconnues
situation 0	x	y		nombre total de sacs invariable
situation 1	$x + 1$	$y - 1$	charge de la mule = 2 fois charge du baudet	
situation 2	$x - 1$	$y + 1$	charge de la mule = charge du baudet	

En classe de seconde:

Problème 1

Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 15 mètres par seconde, puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 21 mètres par seconde.
Le parcours total a duré 270 secondes et la montée est de 126 mètres plus longue que la descente. Combien de temps a duré la montée?

	vitesse en m/s	durée en min	distance en km	relation entre les quantités inconnues
montée	15	x	$m_1 = 15x$	vitesse x durée = distance
descente	21	y	$m_2 = 21y$	
relation		en tout 270	la montée est de 126 de plus que la descente	

Problème 2

Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 17 mètres par seconde, puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 26 mètres par seconde.
La montée est de 203 mètres plus longue que la descente et a duré 40 secondes de plus. Combien de temps a duré la descente?

	vitesse en m/s	durée en min	distance en km	relation entre les quantités inconnues
montée	17	x	$m_1 = 17x$	vitesse x durée = distance
descente	26	y	$m_2 = 26y$	
relation		la montée dure 40 de plus que la descente	la montée est de 203 de plus que la descente	

Problème 3

Un vélomoteur monte une colline à la vitesse de 18 mètres par seconde, puis il redescend de l'autre côté à la vitesse de 26 mètres par seconde.
Le parcours total a duré 240 secondes et sa longueur est 5160 mètres.
Combien de temps a duré la montée?

	vitesse en m/s	durée en min	distance en km	relation entre les quantités inconnues
montée	18	x	$m_1 = 18x$	vitesse x durée = distance
descente	26	y	$m_2 = 26y$	
relation		en tout 240	en tout 5160	

Problème 4

Un bassin est alimenté par un premier robinet qui a un débit de 45 litres par heure. On arrête ce robinet et on le remplace par une fontaine qui a un débit de 35 litres par heure. Il a fallu 5 heures pour remplir ce bassin et la fontaine a versé 15 litres d'eau de plus que le robinet.
Pendant combien de temps le robinet a-t-il coulé?

	débit en l /h	durée en h	volume en l	relation entre les quantités inconnues
robinet	45	x	$m_1 = 45x$	débit x durée = volume
fontaine	35	y	$m_2 = 35y$	
relation		en tout 5	la fontaine verse 15 de plus que le robinet	

Problème 5

Dans une usine, on fabrique du chocolat. Une première machine produit 9 kg de chocolat par minute; au bout d'un certain temps, elle est remplacée par une deuxième machine qui produit 13 kg de chocolat par minute. La première machine a produit 138 kg de plus que la deuxième, elle a travaillé 34 minutes de plus que la deuxième.
Combien de temps a fonctionné la première machine?

	débit en kg/min	durée en min	masse produite en kg	relation entre les quantités inconnues
1ère machine	9	x	$m_1 = 9x$	débit x durée = masse
2ème machine	13	y	$m_2 = 13y$	
relation		la 1ère travaille 34 de plus que la 2ème	la 1ère vaut 138 de plus que la 2ème	

BIBLIOGRAPHIE

CORDIER N.: Les problèmes de mise équation en troisième et en seconde, Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg, n°5, (1993)

DUVAL R.: Sémiosis et pensée humaine, Peter Lang, (1995)

KOURKOULOS M.: Modélisation mathématique de situations aboutissant à des équations du premier degré, Strasbourg, thèse ULP, (1990)

Brochure de l'IREM de Lorraine: Algébrisation, (1994)

Mathématiques troisième (89) : Hachette, Pythagore Hatier, Irem Strasbourg Istra

Mathématiques seconde (90) : Dimathème Didier, Transmath Nathan

TITRE :	PROBLÈMES DE MISE EN EQUATIONS : ces charades dont la solution est un système d'équations à deux inconnues
AUTEURS :	Groupe math - français de l'IREM de Strasbourg: Isabelle BECK, Nicole CORDIER, Geneviève DIDIERJEAN, Claire DUPUIS, Raymond DUVAL, Marie-Agnès EGRET, Daniel KREMER, Gilles ROBERT, Michèle VAILLANT, Brigitte WENNER, Ghislaine WERGUET, Michèle ZIEGLER.
DATE :	Janvier 1996
EDITEUR :	IREM de Strasbourg (S.165)
MOTS - CLES :	Système d'équations linéaire à deux inconnues, mise en équations, lecture d'énoncés.
RESUME :	Une nouvelle approche d'apprentissage de la mise en équations d'un système à deux inconnues est proposée dans cette brochure. Dans une première partie, nous procédons à un état des lieux dans les manuels scolaires et les brochures sur ce thème. Une autre partie est consacrée à l'analyse de la tâche cognitive que constitue le passage de l'énoncé à l'écriture d'un système. Suite à cette analyse, une méthodologie d'enseignement est proposée.
NOMBRE DE PAGES :	62
ISBN :	2 -911446 - 01- 1