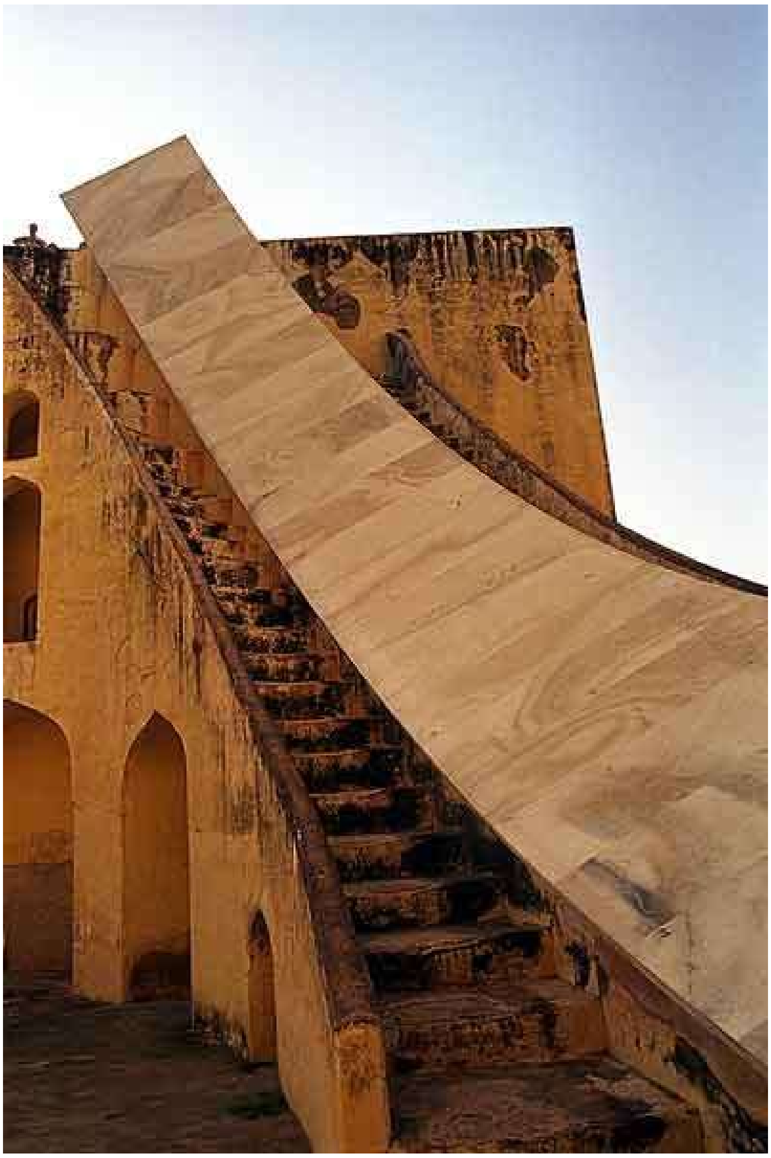
Trigonométrie et « développements en séries » en Inde médiévale



David Pouvreau-Séjourné

Groupe d'histoire des mathématiques
IREM DE TOULOUSE

2003

Trigonométrie et « développements en séries » en Inde médiévale

David Pouvreau-Séjourné

Avec la contribution

du groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Toulouse :

Roseline Cases
Denis Daumas
Stéphane Fargeot
Michel Guillemot
Maryvonne Spiesser

et de

Agathe Keller
(REHSEIS - Université Paris VII)

IREM DE TOULOUSE
2003

Avant-propos

La synthèse de travaux mathématiques indiens médiévaux présentée ici est essentiellement destinée aux enseignants. Elle a entre autres pour ambition d'introduire le lecteur à un domaine de l'histoire des mathématiques très peu connu malgré sa richesse.

Un certain nombre d'aspects purement mathématiques y ont été approfondis. Pour faciliter une lecture déjà peu aisée compte tenu de la difficulté des sujets abordés, quelques démonstrations ont été imprimées en petits caractères afin de signaler que leur lecture peut être omise sans inconvénient pour la compréhension du reste.

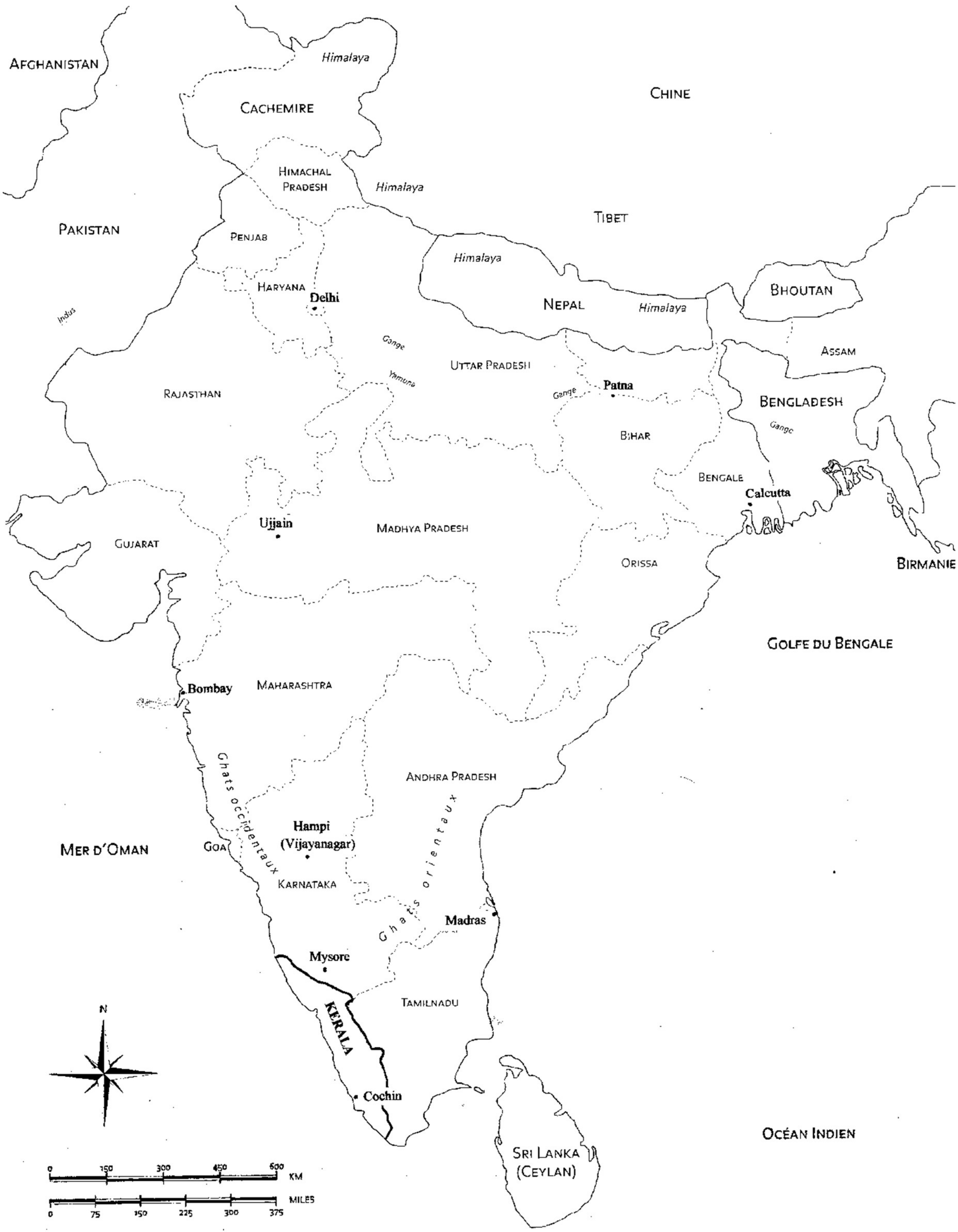
Lorsqu'un aspect particulier méritait d'être détaillé pour lui-même, que ce soit du point de vue mathématique ou du point de vue pédagogique, l'étude en a été effectuée en annexe. L'enseignant trouvera d'ailleurs peut-être autant d'intérêt aux annexes qu'à la synthèse elle-même, dans la mesure où la plupart d'entre elles sont destinées à suggérer des problèmes susceptibles d'être étudiés avec des élèves. Il ne s'agit pas toutefois, nous le soulignons, d'activités « clés en main », même lorsque la forme choisie peut le laisser croire. Le soin est laissé à l'enseignant de s'approprier les problèmes et de les adapter au niveau de ses élèves.

Je souhaite remercier le groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Toulouse dans son ensemble pour sa lecture patiente et les conseils prodigués.

Je tiens cependant à remercier particulièrement Michel Guillemot et Maryvonne Spiesser pour leur disponibilité et l'aide qu'ils m'ont apportée dans la recherche de documents.

Je remercie en outre Agathe Keller, l'une des rares spécialistes françaises en matière d'histoire des mathématiques indiennes, pour le temps qu'elle a accordé à la lecture de cette synthèse. Elle m'a entre autres permis de rectifier certaines imprécisions.

D. P.-S.


AFGHANISTAN
CACHEMIRE
Himalaya
CHINE
HIMACHAL PRADESH
Himalaya
PAKISTAN
TIBET
PENJAB
Himalaya
HARYANA
Delhi
NEPAL
Himalaya
BHOUTAN
Indus
Gange
ASSAM
UTTAR PRADESH
Yamuna
Patna
RAJASTHAN
Gange
BENGLADESH
Gange
BIHAR
BENGALE
Calcutta
Ujjain
MADHYA PRADESH
GUJARAT
ORISSA
BIRMANIE
GOLFE DU BENGALE
Bombay
MAHARASHTRA
Ghats occidentaux
ANDHRA PRADESH
Ghats orientaux
Hampi
(Vijayanagar)
MER D'OMAN
GOA
KARNATAKA
Madras
Mysore
KERALA
TAMILNADU
N
Cochin
OCÉAN INDIEN
SRI LANKA
(CEYLAN)
0 150 300 450 600 KM
0 75 150 225 300 375 MILES

Introduction

Si, en dépit du chaos ambiant et des sollicitations les plus hétéroclites, vous vous avisiez un jour, dans une ville indienne, de laisser errer votre regard sur un étal de périodiques, vous auriez peut-être l'occasion de débusquer un exemplaire d'une revue de mathématiques. Vous liriez alors par exemple, au détour d'une démonstration tirant la conséquence de l'existence d'un triangle rectangle : « D'après le théorème de Baudhāyana : $a^2 + b^2 = c^2$ »… Au sein de plusieurs problèmes d'analyse, vous verriez peut-être aussi revenir avec insistance une référence aux « séries de Mādhava » là où, malgré toute votre bonne volonté, seuls vous apparaîtraient des développements en série entière traditionnellement attribués à des savants européens tels que Gregory, Newton ou Leibniz. Il y a fort à parier que, dans cette éventualité, vous vous interrogeriez sur les raisons pour lesquelles les Indiens s'autorisent à attribuer à certains de leurs compatriotes des théorèmes que nous autres Occidentaux attribuons aux anciens Grecs ou aux Européens de l'époque moderne. Intrigué, vous vous décideriez alors sans nul doute à remonter l'histoire des mathématiques indiennes afin d'assouvir votre curiosité.
L'étude qui suit a pour origine une telle interrogation.

Nous ne pensons pas exagérer en affirmant que l'histoire des mathématiques indiennes est très largement ignorée. Si le rôle historique essentiel des Indiens en matière de système de numération est bien connu[1], la richesse de leur tradition mathématique dans son ensemble l'est considérablement moins. Le double obstacle linguistique et culturel est certes difficile à surmonter et il est compréhensible que la plupart des travaux sur cette question soient effectués par des Indiens. On ne peut que regretter la rareté des spécialistes et des travaux francophones sur ce sujet ; la documentation en langue française concernant les mathématiques indiennes se limite de ce fait le plus souvent à des informations très succinctes au détour d'ouvrages généraux d'histoire des mathématiques[2] et les études approfondies restent rares. Le travail qui suit a en particulier pour objectif de contribuer, de façon certes modeste, à remédier à ce fait.

Dans cette perspective, l'étude de la trigonométrie indienne nous a semblé particulièrement pertinente. Il s'agit en effet de l'un des domaines des mathématiques que les Indiens ont le plus exploré. En tant qu'indispensable auxiliaire de l'astronomie, elle ne pouvait que susciter leur intérêt. Comme l'exposent clairement les vers suivants, l'importance accordée par leur civilisation à la connaissance du ciel et à la mesure du temps fut très tôt considérable, en ce sens qu'elle devait permettre l'exécution rigoureuse des rites religieux :

> « *Les Vedas ont en effet été révélés afin d'assurer l'accomplissement des sacrifices ; mais ces sacrifices ont été instaurés en fonction de périodes précises. Pour cette raison, seul celui qui connaît l'astronomie, la science du temps, comprend les sacrifices*[3]. »

De remarquables résultats en matière de trigonométrie, analogues à ceux que les Européens retrouveront parfois beaucoup plus tard, ont été établis par les Indiens. Les plus fameux d'entre eux sont attribués au mathématicien et astronome Mādhava, dont la période d'activité se situe entre 1380 et 1420[4]. Ils correspondent aux développements en séries entières des fonctions trigonométriques et à des approximations du nombre π d'une grande précision

[1] Voir par exemple [G. Ifrah, 1981, t. I, ch. 24].
[2] Caractéristique à cet égard est l'ouvrage collectif [J.L. Chabert et *alii*, 1994].
[3] [*Rg Vedānga Jyotisa, 36* in B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 1].
[4] [K. Plofker, 2001, p. 284]. Selon B.V. Subbarayappa et K.V. Sarma [1985, p. 315], sa vie se situerait entre 1340 et 1425. Quoiqu'il en soit, deux de ses œuvres sont datées avec certitude de 1403 et 1418, [D. Gold, D. Pingree, 1991, p. 50].

pour l'époque. Parce que les travaux de Mādhava et de ses successeurs mettent en œuvre des connaissances mathématiques très diverses accumulées au cours des siècles précédents, ils constituent d'une certaine manière le « couronnement des mathématiques indiennes ».

Aussi nous proposons-nous ici de rendre compte de ces étonnants succès en présentant une synthèse des travaux relatifs aux « développements en séries » effectués par l'école dite de Mādhava, dont l'activité se prolongea dans la région de l'Inde correspondant à l'actuel Kerala au cours des deux siècles suivant la mort du brillant mathématicien. Il s'agira d'apprécier ces travaux à leur juste valeur, en mettant en évidence à la fois leur intérêt, leur qualité et leurs limites, dont quelques raisons seront suggérées.

L'élaboration de cette synthèse nous a confronté à diverses difficultés d'ordre méthodologique, qu'il convient ici de préciser.

Attendu que nous ne maîtrisons pas le sanscrit ni le malayālam[5], nous avons dû nous en remettre aux traductions en anglais effectuées pour la plupart par des historiens indiens des mathématiques. Or, seuls quelques rares traités tels que *l'Āryabhatīya* d'Āryabhata I (né vers 476) et le *Līlāvatī* de Bhāskara II (né en 1114) ont été entièrement traduits. En ce qui concerne en particulier les travaux de l'école de Mādhava, qui constituent le sujet central de notre étude, nous n'avons pu disposer que de traductions fragmentaires publiées dans divers livres et revues spécialisés dans l'histoire des mathématiques ou de l'astronomie indiennes.

Ces traductions s'accompagnent en général de retranscriptions en notations mathématiques modernes et de commentaires. Compte tenu de la nature des manuscrits indiens originaux, dont quelques aspects méritent ici d'être soulignés, ce travail d'analyse et d'interprétation s'impose.

En première approche, il existe deux groupes de textes très différents dans la tradition savante indienne : les traités proprement dit d'une part, leurs commentaires (*bhāsya*) d'autre part.

Les premiers, dont les œuvres désignées sous le terme générique de *sūtra* (« aphorismes ») constituent des cas particuliers, sont rédigés en vers. Ils se caractérisent le plus souvent par leur généralité et leur concision, au point de prendre un tour énigmatique. Lorsqu'ils concernent les mathématiques, les traités se limitent ainsi pour l'essentiel à suggérer des formules ou des algorithmes destinés aux calculs astronomiques, sans en donner de justification ni même parfois les expliciter.

Il revient aux commentaires d'assumer la fonction de donner un sens aux traités. De sorte qu'ils représentent, du point de vue quantitatif, la partie la plus importante de la littérature savante indienne. On dénombre par exemple pas moins de quarante et une gloses du seul *Līlāvatī* de Bhāskara II[6]. Les commentaires sont le plus souvent écrits en prose et peuvent parfois prendre la forme de dialogues fictifs. Dans le cas particulier des écrits mathématiques, ils consistent en des analyses grammaticales à partir desquelles sont élaborés les objets mathématiques et explicitées les procédures qui les mettent en œuvre. Les justifications des résultats énoncés dans les traités se réduisent en général à des exemples résolus d'application ; ils ne prennent que rarement la forme d'une démonstration et, même lorsque c'est le cas, celle-ci demeure sommaire[7].

Plusieurs raisons peuvent être avancées pour expliquer ces faits et nous aurons l'occasion d'y revenir au cours de cette étude. L'une d'entre elles, qui concerne spécifiquement la forme des écrits mathématiques, est que les mathématiques n'ont guère eu en Inde de statut autonome. Comme le mettent en lumière les vers qui suivent, elles demeurèrent liées de façon

[5] Cette langue, dérivée du sanscrit et du tamoul, est devenue celle du Kerala depuis les environs du IXe siècle.
[6] [A.K. Bag , 1979, pp. 30-32]. Sont ici dénombrés les seuls commentaires indiens antérieurs au XXe siècle.
[7] Pour une analyse approfondie de ces questions philologiques, voir en particulier [A. Keller, 2000 , pp. 23-127].

étroite à l'astronomie, leur destin étant de servir d'auxiliaire à cette dernière en lui fournissant les outils indispensables à sa précision :

> « *Une bonne connaissance de cette science du calcul* (ganita) *comprenant la détermination de la position des planètes, l'arithmétique et l'algèbre, constitue les racines de l'arbre de la science des astres* (jyotisa)[8]. »

La science du calcul (*ganita*) est en fait classifiée comme une branche de l'astronomie (*jyotisa*) parmi d'autres, dont l'astrologie. Il n'existe d'ailleurs pas de mathématicien indien qui ne fut aussi astronome, même si l'œuvre mathématique de certains d'entre eux fut parfois prépondérante[9]. Aussi les énoncés mathématiques furent-ils pour la plupart des recettes dont seule l'efficacité dans le cadre des calculs astronomiques semble avoir eu de l'importance.

Une seconde raison, plus générale, est liée au statut de l'écrit et à la structure de l'enseignement traditionnel en Inde. En effet, le rôle des textes mathématiques consistait avant tout à servir de support à la mémoire des disciples qui se vouaient à acquérir ce type de savoir. Ils n'avaient pas pour but premier de retranscrire de façon systématique des connaissances, ces dernières étant pour l'essentiel révélées oralement par un maître spirituel (*guru*)[10].

Compte tenu de cette situation, l'effort de reconstruction et d'interprétation des textes, nécessaire afin de mettre en évidence la rationalité sous-jacente aux travaux mathématiques indiens et de les rendre intelligibles pour un lecteur moderne, est par nature particulièrement ardu pour quiconque, quand bien même il se réfère directement aux œuvres indiennes originales.

Il comporte en outre des risques et ceux-ci sont d'autant plus difficiles à éviter que l'on n'a pas accès aux textes originaux et que l'on est contraint de se limiter à travailler à partir de traductions en anglais. Non seulement les interprétations, mais dans certains cas les traductions elles-mêmes, lorsqu'elles sont effectuées par des historiens indiens des mathématiques, ne sont pas exemptes d'une indubitable volonté d'idéaliser les œuvres dont elles sont censées décrire le contenu. Parfois prêts à déformer le sens des textes originaux et à jouer sur les incertitudes concernant l'histoire des liens entre l'Inde et les autres civilisations, quelques commentateurs indiens partisans n'ont par exemple pas hésité à dévaluer l'originalité de nombreux travaux arabes et européens par l'intermédiaire d'un discours récurrent dont la thématique consiste à faire apparaître systématiquement leurs ancêtres comme des précurseurs[11].

Conscient de ce problème, nous avons autant que possible multiplié nos sources et les avons confrontées entre elles afin d'en dégager ce qui nous a semblé digne de confiance. Par ailleurs, nous nous sommes référé aux rares travaux d'historiens occidentaux traitant les divers thèmes mathématiques abordés ici, ces travaux étant peut-être moins suspects d'être troublés par ces tendances partisanes.

Une fois prises ces précautions méthodologiques, notre étude prend son sens à travers les objectifs que nous avons pu poursuivre dans les limites des contraintes mentionnées précédemment.

Il s'est d'abord agi de traduire en français les divers textes qui nous ont servi de base de documentation. Nous portons donc l'entière responsabilité de ces traductions.
Nous avons par ailleurs ressenti la nécessité de choisir un symbolisme adapté à la retranscription en notations mathématiques modernes des raisonnements utilisés par les Indiens. Notre choix a

---

[8] Mahādeva, introduction au commentaire sur le *Ratnamālā* de Śrīpati, in [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 2].
[9] Ce fait ressort clairement de [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, pp. 312-320] et de [A.K. Bag, 1979, pp. 3-5].
[10] Voir par exemple [D. Pingree, *Proceedings*…, pp. 28-29].
[11] Un exemple parmi d'autres de cette tendance est [A.K. Bag, 1979].

été effectué avec le souci de trahir le moins possible ces raisonnements, tout en sachant qu'y demeurer parfaitement fidèle constitue une tâche impossible. Ce travail nous a semblé indispensable, dans la mesure où nous avons jugé souvent inadéquat le symbolisme adopté par certains historiens indiens : dans certains cas, il obscurcissait à notre sens ce qu'il était censé éclairer ; dans d'autres, il trahissait de façon évidente la réalité des démarches mathématiques qu'il était supposé décrire.

Nous avons également pris l'initiative de commentaires d'ordre mathématique lorsqu'ils nous ont paru judicieux. Il s'est parfois agi de compléter les analyses mathématiques effectuées dans les articles auxquels nous nous référons. Nous nous sommes aussi efforcés d'interpréter et de justifier avec des arguments mathématiques délibérément modernes les énoncés de l'école de Mādhava que nous avons considérés. A l'opposé de la perspective dans laquelle se placent certains historiens indiens, nous l'avons fait non pour laisser entendre que leurs auteurs furent des précurseurs des Européens du XVII^{e} siècle, mais au contraire afin de mettre en évidence tant la spécificité de leurs travaux que leurs limites.
Cela nous a en outre permis de suggérer, voire d'élaborer plusieurs problèmes en relation avec le programme des classes scientifiques de l'enseignement secondaire et du premier cycle supérieur, qui figurent dans certaines annexes.

Les travaux de l'école de Mādhava seraient difficilement compréhensibles sans référence aux travaux indiens antérieurs. Nous donnerons donc dans une première partie une vue générale de la trigonométrie indienne telle qu'elle se développa du V^{e} au XIV^{e} siècle après J.-C. Une seconde partie mettra en évidence les connaissances sur les séries acquises par les Indiens avant le XV^{e} siècle. Une brève présentation des principaux mathématiciens de l'école de Mādhava et de leurs activités précèdera ensuite une analyse détaillée des deux principales découvertes de cette école : d'une part, l'analogue du développement en série entière de l'arctangente, correspondant à la recherche de la rectification d'un arc de cercle donné, d'autre part l'analogue du développement en série entière du sinus et du cosinus.

Cette étude n'aura pas été vaine si elle contribue à susciter un intérêt pour l'histoire des mathématiques indiennes et encourage quelques lecteurs à approfondir à leur tour ce sujet.

Chapitre 1
Généralités sur la trigonométrie indienne antérieure aux travaux de l'école de Mādhava

La littérature védique[1] dans son ensemble atteste de nombreuses connaissances en matière d'astronomie. Les plus anciens textes indiens exclusivement voués à ce type de connaissance sont connus sous le nom de *Vedānga Jyotisa* (« Élément astronomique du savoir »). Leur rédaction ne semble pas être postérieure au IV^e siècle avant J.-C. et ils n'ont vraisemblablement fait que témoigner d'une longue tradition antérieure, laquelle se maintint sans rivale jusqu'au II^e siècle avant J.-C.[2].

A partir de cette période apparaît une nouvelle littérature consacrée à cette science, celle des *Siddhāntas* (« Solutions »), qui manifeste une approche différente. Bien qu'ils s'accommodent de la tradition, ces traités introduisent d'importantes nouveautés, telles que la division du ciel à l'aide des douze signes du Zodiaque, les calculs d'éclipses ou la notion de parallaxe. Il est possible que les contacts entretenus entre l'Inde et l'Occident lors des périodes hellénistique et gréco-romaine aient influencé la tradition indienne[3].

Les concepts d'épicycle et d'excentrique semblent en outre être apparus en Inde dans la description des mouvements célestes au cours des premiers siècles après J.-C. : l'*Āryabhatīya* d'Āryabhata I en atteste la mise en œuvre à la fin du V^e siècle. Quoique rien ne permette de l'inférer de façon certaine, une influence du système de Ptolémée pourrait avoir contribué à cette apparition, probablement dès le IV^e siècle après J.-C., de méthodes et de concepts radicalement neufs chez les astronomes indiens[4].

La naissance de la trigonométrie indienne, dont la trace connue la plus ancienne apparaît dans le *Sūrya Siddhānta* (« Solution donnée par le soleil », qui serait daté du IV^e siècle)[5], s'inscrit dès lors dans le contexte d'une astronomie nécessitant par la nature même de ses concepts une mathématisation importante. Tout astronome devra désormais être mathématicien et, en particulier, expert en trigonométrie. Vateśvara (fin du IX^e, début du X^e siècle) affirmera ainsi :

> « *Celui qui trouve [...] le Cosinus* (kotijyā) *à partir du Sinus* (bāhujyā) *et le Sinus* (bāhujyā) à partir du *Cosinus* (kotijyā)*, celui-là connaît le vrai mouvement des planètes*[6]. »

Bhāskara II écrira quant à lui :

[1] Le terme *Veda* (littéralement : Savoir) désigne les livres premiers de la Révélation. Ils sont composés d'hymnes, de traités de liturgie et de formules rituelles. La rédaction du *Rg Veda*, le plus ancien d'entre eux, est vraisemblablement antérieure au XIII^e siècle avant J.-C. Par extension, on qualifie souvent de védiques l'ensemble des textes de la Révélation en y incluant les *Upanisads*, lesquelles sont des textes plus tardifs (les plus anciennes sont datées du VI^e siècle avant J.-C.) portant pour la plupart sur des réflexions métaphysiques.

[2] [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, pp. XIX- XXII] et [J. Filliozat, in R. Taton, T. 1, 1957, rééd. 1994, pp. 153-157].

[3] [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. XXII]. Voir aussi [J. Filliozat, in R. Taton, T. 1, 1957, rééd. 1994, pp. 159-165].

[4] [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. XXXII].

[5] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 40]. Il s'agit ici de l'ancien *Sūrya Siddhānta*, dont l'original est perdu. Existe aussi le *Sūrya Siddhānta* dit « moderne », dont la rédaction est postérieure au VI^e siècle et que nous aurons aussi l'occasion de citer.

[6] [*Vateśvara Siddhānta, 2.7.2-16*, in B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 12].

« *Le titre de maître en astronomie sera décerné à celui qui a acquis une connaissance suffisante de la trigonométrie* (jyotpatti)[7]. »

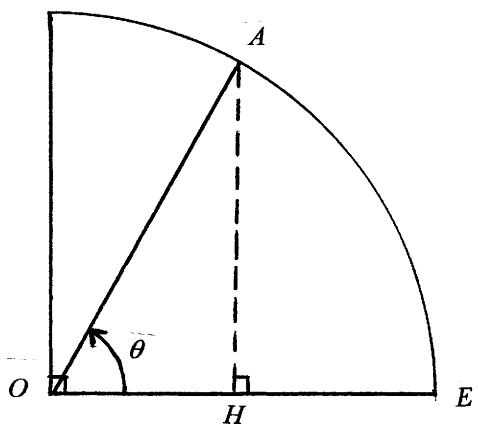
La trigonométrie fut considérablement approfondie par les Indiens, d'Āryabhata I jusqu'aux disciples de Mādhava. Son intérêt fut reconnu très tôt hors des frontières de l'Inde. Certains *Siddhāntas* furent ainsi traduits au VIIIe siècle en arabe[8] et l'œuvre d'al Battānī (environ 855-929) atteste de l'influence indienne qui s'est exercée par l'intermédiaire de cette science sur les mathématiques et l'astronomie arabes[9]. Lorsque la trigonométrie apparaît en Europe, il s'agit donc d'un héritage mêlant à la fois les apports grecs, indiens et arabes. Les deux premiers traités européens exposant des résultats détaillés concernant cette partie des mathématiques sont le *Tractatus… super propositiones Ptolemeai de sinubus et chordis* de Peurbach (1423-1461) et le *De triangulis omnimodis libri quinque* de Regiomontanus (1436-1476)[10].

Nous n'exposerons pas ici les résultats obtenus par les Indiens en matière de trigonométrie sphérique ; nous nous bornerons à dire que, bien que ne disposant pas d'une méthode systématique de résolution des triangles sphériques telle que celle utilisée par Ptolémée sur la base du théorème de Menelaos, ils surent trouver toutes les formules nécessaires à leurs travaux d'astronomie en utilisant les propriétés des triangles semblables et les résultats de trigonométrie plane déjà connus.

Les « fonctions » trigonométriques indiennes : définition et étymologie

Le terme sanscrit désignant la trigonométrie est *Jyottpatiganita*, littéralement : « calculs pour la construction des Sinus ». On trouve ce terme dans le *Brahmasphuta Siddhānta* de Brahmagupta (628). Il sera par la suite simplifié en *Jyāganita*, littéralement : « calculs des Sinus[11]. »

Les Indiens ont introduit et couramment utilisé trois « fonctions » trigonométriques : *jyā* (ou *kramajyā*, parfois encore *jiva* ou *bhujajyā*), *kojyā* (ou *kotijyā*) et *utkramajyā*. Il s'agit en fait de « fonctions » d'un arc de cercle de rayon donné, et non de fonctions d'un angle : si EA est un arc de cercle de centre O et de longueur a inférieure au quart de la circonférence, et si H est le projeté orthogonal de A sur (OE), alors :



$jy\bar{a}(a) = AH$

$kojy\bar{a}(a) = OH$

$utkramajy\bar{a}(a) = HE = OE - OH$

En notant θ une mesure de $(\overrightarrow{OE};\overrightarrow{OA})$ et R le rayon du cercle, on a ainsi :

$jy\bar{a}(a) = R\sin(\theta)$;

$kojy\bar{a}(a) = R\cos(\theta)$

et $utkramajy\bar{a}(a) = R - R\cos(\theta)$

Nous noterons désormais dans toute la suite :

[7] [Section *Jyotpatti* du *Siddhānta Śiromani*, vers 1, in A.K. Bag, 1979, p. 230].

[8] [J. Filliozat, in R. Taton, T. 1, 1957, rééd. 1994, p. 489].

[9] [J. Filliozat, in R. Taton, T. 1, 1957, rééd. 1994, p. 528].

[10] [A. Koyré, in R. Taton, T. 2, 1958, rééd. 1995, pp. 14-17].

[11] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 39]. *Jyā* désigne le Sinus (voir plus loin), *utpatti* peut être traduit par « construction » ou « engendrement » et *ganita* signifie « calcul ».

$$\boxed{jy\bar{a}(a) = Sin(a) = R\sin(\theta)} \quad ; \quad \boxed{kojy\bar{a}(a) = Cos(a) = R\cos(\theta)}$$

$$\text{et : } \boxed{utkramajy\bar{a}(a) = Versin(a) = R - Cos(a) = R - R\cos(\theta)}$$

Il importe de noter que les lignes trigonométriques d'un arc de cercle dont la mesure est supérieure au quart de la circonférence ne sont pas définies de façon autonome, mais toujours en rapport avec les lignes trigonométriques d'un arc dont la mesure est inférieure au quart de la circonférence. Lorsque des arcs du premier type interviennent dans certains calculs, leur étude est systématiquement ramenée à celle d'un arc du second type, le recours au concept de signe étant contourné par divers artifices tels que ceux mentionnés plus loin (pp. 11-13).

Par commodité et du fait que la division du cercle en degrés fut utilisée par les Indiens eux-mêmes, nous utiliserons parfois la notation des mesures d'arcs en degrés lorsqu'il s'agit de fractions déterminées de la circonférence. Si C désigne cette dernière, nous noterons par exemple $180°$ pour $\frac{C}{2}$ et $Sin(90°)$ pour $Sin(\frac{C}{4})$.

Remarquons que les Indiens n'ont pas systématisé l'équivalent de la notion de fonction tangente, bien qu'ils aient en réalité utilisé dans leurs calculs astronomiques le rapport $\frac{Sin}{Cos}$. Ce dernier apparaît par exemple dans le *Sūrya Siddhānta* pour calculer l'ombre du gnomon au midi équinoxial (la hauteur du gnomon étant traditionnellement fixée à 12 unités de mesure) :

> « *Le Sinus de la latitude multiplié par douze et divisé par le Cosinus de la latitude donne l'ombre au midi équinoxial*[12]. »

Les valeurs des lignes trigonométriques indiennes sont ainsi toujours fonction du rayon choisi. Ceci n'exclura pas, comme nous le verrons par la suite, de choisir un rayon de référence, par exemple en vue de la construction de tables trigonométriques.

Le *Sūrya Siddhānta* est le plus ancien traité connu où ces « fonctions » apparaissent. L'original de ce traité est perdu, mais une partie en est connue par l'intermédiaire du *Pañca Siddhāntikā* (« Sur les cinq solutions ») de Varāhamihira (environ 505-578), qui donne une idée de son contenu tout en le remaniant[13].

Avant même qu'ils n'aient pris une signification mathématique, les termes sanscrits *dhanuh* et *jyā* (ou *jiva*) désignaient respectivement, de façon concrète, un arc et la corde qu'il sous-tend. Comme l'indiquent notamment Bhāskara II et Parameśvara (en 1431), le terme *jyā* désigne en fait en trigonométrie non une corde entière, mais une demi-corde (*ardha-jyā*) ; Parameśvara écrit ainsi :

« *Une partie de cercle est de la forme d'un arc, donc est appelée* dhanuh*. La ligne droite joignant ses deux extrémités est la corde de l'arc, donc est appelée* jiva*. C'est en fait la corde entière (*samastajyā*). La moitié de cette corde est ici le demi-jiva (*ardhajyā*) et la moitié de cet arc est dite l'arc de cette demi-corde. En fait, le* jyā *et le* kotijyā *de cet arc sont toujours des demi-cordes*[14]. »

Le *Sūrya Siddhānta* utilise d'ailleurs le terme d'*ardhajyā* pour désigner le Sinus. Le fait de considérer des demi-cordes, au lieu de cordes entières comme le fit en particulier Ptolémée, est une innovation des Indiens qui n'est pas étrangère aux progrès ultérieurs de la trigonométrie[15].

---

[12] [*Sūrya Siddhānta* (moderne), *iii.16*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 42].
[13] [A.K. Bag, 1979, p. 9].
[14] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 40].
[15] [J. Filliozat, in R. Taton, T.1, 1957, rééd. 1994, p. 161].

Il est très probable que le terme moderne de *sinus* dérive du mot sanscrit *jiva*. Celui-ci fut repris par les premiers mathématiciens arabes, en étant dans un premier temps prononcé *jiba*, puis *jaib*. Ce dernier terme peut aussi bien signifier « poche », « sac », « ouverture », « torse » et « cœur ». Il semble que les premiers traducteurs latins des traités arabes, tels Gérard de Crémone (1150), le traduisirent par le terme latin *sinus* parce que celui-ci correspondait au mieux aux divers sens du mot arabe. « *sinus* » peut en effet entre autres être traduit suivant le contexte par « pli » (d'un vêtement), « creux », « poitrine » ou « sein »[16].

Le terme *kramajya*, quant à lui, fut transformé en *karaja* ou *kardaja* par les Arabes. Par exemple, un ouvrage de Ya'qūb ibn Tāriq dont le titre peut-être traduit par « Sur la table de *kardaja* » (vers 770), retranscrit une table des Sinus de Brahmagupta tirée de son principal traité, le *Brahmasphuta Siddhānta* (628). Al Khwārizmī (825) utilisa quant à lui le terme de *karaja*. La traduction latine le transformera en *kardaga* ou en *karkaya*, terme qui désignera l'arc de 3°45' et conservera ainsi la marque de ses origines indiennes[17] (voir le paragraphe : Tables trigonométriques).

Le mot sanscrit *koti* signifie originellement, entre autres, « fin courbée d'un arc » ou « extrémité ». En trigonométrie, il en vint à désigner le complément d'un arc donné. Ainsi, *kotijyā* signifie : « *jyā* de l'arc complémentaire ». Mais il fut rapidement utilisé comme un terme technique indépendant. Le terme moderne de cosinus en est naturellement dérivé, *kotijyā* ayant été transformé en *kojyā* par les Indiens eux-mêmes[18].

Enfin, le terme sanscrit *krama* signifie « régulier » ou « direct ». *kramajyā* désigne donc le « Sinus direct ». *utkrama* signifie « excédent » ou « inversé ». L'*utkramajyā* est ainsi le « Sinus inversé », ou encore la partie en excès du *kramajyā* (prise en considération dans l'ordre inverse, c'est-à-dire en utilisant l'arc complémentaire). Selon Kamalākara (1658) :

> « *Ce qui se trouve entre la corde et l'arc, comme la flèche, est l'*utkramajyā[19]. »

Partition et orientation du cercle

Le cercle est ordinairement divisé en quatre quadrants par deux droites perpendiculaires en son centre : la ligne Est-Ouest et la ligne Nord-Sud. Les quadrants sont ensuite groupés par paires : les deux quadrants dits pairs et les deux quadrants dits impairs ; de plus, le cercle est orienté dans le sens actuellement dit « trigonométrique », le premier quadrant étant le Nord-Est. Ainsi, selon Bhāskara II :

> « (*Les quadrants*) *doivent être pris en considération dans le sens gauche en prenant pour origine le point Est. On les dit alors pairs et impairs successivement*[20]. »

Les quadrants sont eux-mêmes subdivisés en trois parties égales, chacune correspondant à un signe zodiacal. Bhāskara I (début du VIIe siècle) affirme par exemple :

> « *Trois signes forment un quadrant*[21]. »

[16] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 40]. Nous avons légèrement modifié l'interprétation de ces auteurs, après avoir vérifié les traductions possibles du terme arabe auprès d'A. Djebbar et après avoir vérifié celles du terme *sinus* dans le Dictionnaire de Latin-Français de F. Gaffiot.
[17] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 41].
[18] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 41].
[19] [*Siddhānta Tattva Viveka, ii.58*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, pp. 41-42].
[20] [*Siddhānta Śiromani, Graha, ii.19*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 43].
[21] [*Māhabhāskarīya, iv.1*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 43].

La tripartition du premier quadrant explique l'étymologie du terme *trijyā*, qui désigne le rayon du cercle dans nombre d'écrits indiens traitant de trigonométrie. En effet, dès lors que ce terme est compris comme signifiant « Sinus des trois (signes) »[22], il traduit l'égalité $Sin(90°) = R$.

Bien que le cercle soit orienté et subdivisé, ceci n'implique pas qu'un signe soit affecté aux « fonctions » Sinus et Cosinus, selon le quadrant où se situe l'extrémité de leur argument. En réalité, il ne peut être question de leur signe. D'une part, leur définition même les lie de façon étroite au concept de distance. D'autre part, le statut ontologique des nombres négatifs n'est pas établi : il existe seulement des quantités que l'on pourrait qualifier de « soustractives », en ce sens que la négativité n'existe pas en soi mais est toujours impliquée dans une procédure calculatoire. Remarquons que cela n'a pas empêché certains auteurs tels que Bhāskara I de fournir très tôt des règles de calculs élémentaires mettant en œuvre de telles quantités.

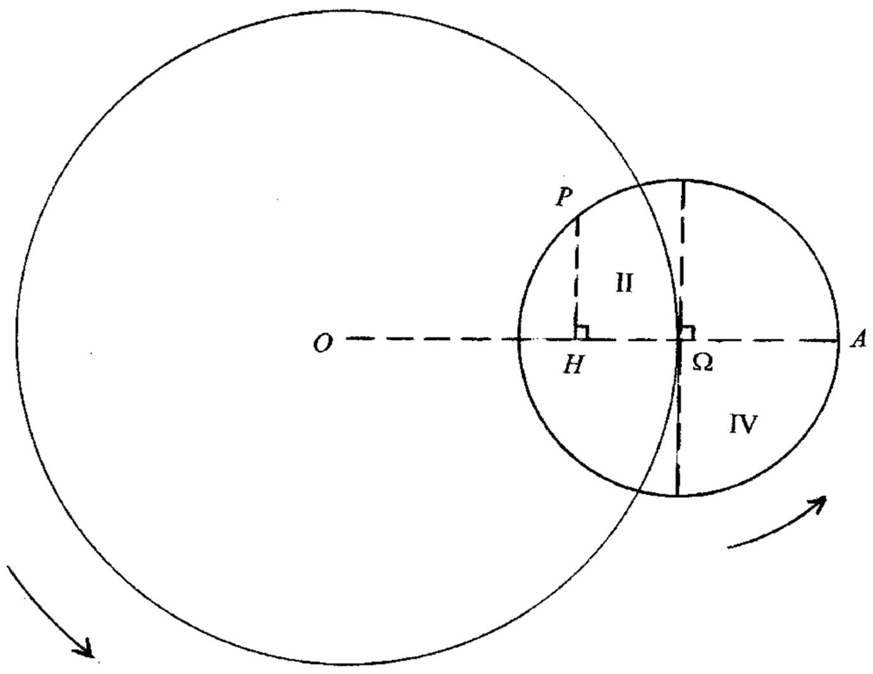
La position de l'extrémité de l'argument ne demeure d'ailleurs pas sans effet sur les calculs. Bien qu'un signe positif ou négatif ne soit jamais affecté à une ligne trigonométrique indienne, le fait qu'elle doive être, selon le cas considéré, ajoutée ou soustraite, n'est pas ignoré. Il existe d'ailleurs de nombreuses manifestations de ce problème dans les traités d'astronomie indienne. Il en est ainsi, en particulier, dans les passages décrivant les méthodes de calcul des trajectoires des planètes en fonction de leur position sur leur épicycle. Caractéristique à cet égard est le passage suivant du *Sūrya Siddhānta* :

> « *Le* śighra kotiphala *doit être ajouté lorsque l'anomalie se trouve dans une position commençant avec le Capricorne ; et il doit être soustrait du rayon dans une position commençant avec le Cancer*[23]. »

Le *śighra kotiphala* d'une planète est un paramètre astronomique que l'on peut écrire sous la forme $kCos(a)$, où k est une constante dépendant de l'épicycle, où le Cosinus est relatif à l'épicycle (en ayant pris l'aphélie de la planète pour origine du cercle) et où a est l'anomalie, c'est-à-dire la distance curviligne de la planète à son aphélie[24].

Sur la figure ci-dessous, O est le centre de l'excentrique ; Ω est le centre de l'épicycle, laquelle est parcourue dans le sens « trigonométrique » ; A est l'aphélie ; P est la position de la planète ; H est le projeté orthogonal de P sur (OA) ; a est alors une mesure de l'arc (AP).
Le Cancer et le Capricorne étant respectivement le quatrième et le dixième signes du Zodiaque (c'est-à-dire encore les premiers tiers respectifs des quadrants II et IV de l'épicycle), la règle peut-être interprétée en termes actuels par le fait que le cosinus d'un angle entre 0° et 90° ou entre 270° et 360° est positif, et qu'il est négatif sinon. Il est néanmoins clair que telle n'est pas la perspective de l'énoncé.

[22] [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 326].
[23] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 48].
[24] [R.P. Shukla, 1960, p. 237 et p. 245] et [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, pp. 36-37 et p. 325].



Confronté au même problème, Lalla (fin du VIII[e] siècle) y répond d'ailleurs en des termes analogues, qui laissent eux aussi plus transparaître la notion d'opération arithmétique adaptée à une configuration que celle de signe :

> « *Lorsque l'anomalie est soit dans le premier, soit dans le quatrième quadrant, le* kotiphala *est au-dessus du rayon. Donc* *<u>leur somme</u>* *est le* koti *correct. Lorsque l'anomalie est soit dans le second, soit dans le troisième quadrant, le* kotiphala *est en-dessous du rayon. Donc* *<u>leur différence</u>* *est le* koti *correct*[25]. »

Formules trigonométriques

Les formules d'arcs associés, se déduisant naturellement par symétries des définitions du Sinus et du Cosinus ainsi que de la division du cercle en quadrants, étaient connues dès les premiers traités de trigonométrie. Varāhamihira affirme ainsi :

> « *Le Sinus de la latitude ôtée du quart de circonférence est le Cosinus de la latitude*[26]. »

C'est-à-dire : $Sin(90° - a) = Cos(a)$.

Mais par exemple, et ce fait est conforme à nos remarques du paragraphe précédent, Bhāskara I formule sans recourir au concept de signe le développement de $Sin(180° + a)$ et de $Sin(270° + a)$, où $a \leq 90°$, par des énoncés équivalents à[27] :

$$Sin(180° + a) = R - Versin(90°) - Sin(a)$$

$$\text{et} \quad Sin(270° + a) = R - Versin(90°) - Sin(90°) + Versin(a).$$

---

25 [*Śisyadhīvrddhida,14. 7-19*, in B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 37]. C'est nous qui soulignons. Nous n'avons pas besoin ici de nous étendre sur le problème d'astronomie sous-jacent. Il suffira de dire que le *kotiphala* désigne un paramètre égal au produit d'une constante par le Cosinus de l'anomalie (ΩH).

26 [*Pañca Siddhāntika, iv. 28*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 46].

27 [*Māhabhāskarīya, iv. 2*, in A.K. Bag, 1979, p. 234].

Compte tenu de $Versin(90°) = R - Sin(90°)$ et de $Versin(a) = R - Cos(a)$, on constate que ces formules peuvent être interprétées, en utilisant les notations modernes, par :

$$Sin(180° + a) = -Sin(a) \quad \text{et} \quad Sin(270° + a) = -Cos(a).$$

Le second résultat peut d'ailleurs être réécrit : $Sin(a - 90°) = -Cos(a)$.

Or, sans utiliser lui non plus le concept de signe, Brahmagupta donne ainsi le développement de $Sin(a - 90°)$:

> « *Le Sinus de l'excès de l'arc par rapport au quart de circonférence additionné au rayon donnera le Versinus de cet arc*[28]. »

Autrement dit : $R + Sin(a - 90°) = Versin(a)$.

Rétrospectivement, on peut ainsi constater sur les exemples précédents que la « fonction » Versinus permet d'éviter systématiquement la mise en œuvre du concept de signe.

En ce qui concerne la relation fondamentale liant le Cosinus au Sinus, elle se déduit immédiatement du théorème dit par certains Indiens « de Baudhāyana » (notre théorème « de Pythagore »)[29]. Varāhamihira la donne comme suit :

> « *Si le carré du Sinus est soustrait du carré du rayon, le carré du Cosinus est obtenu*[30]. »

Ainsi : $R^2 - Sin^2(a) = Cos^2(a)$

De nombreuses formules liée à la duplication d'un arc sont également données dans les divers traités indiens. Varāhamihira énonce par exemple :

> « *Pour trouver le Sinus de n'importe quel arc désiré, soustrais du rayon le Sinus du double de l'arc soustrait du quart de la circonférence, puis additionne le carré de la moitié du résultat au carré de la moitié du Sinus du double de l'arc ; prends ensuite la racine carrée de la somme*[31]. »

Il s'agit donc de la formule : $Sin(a) = \sqrt{\left(\frac{Sin(2a)}{2}\right)^2 + \left(\frac{R - Sin(90° - 2a)}{2}\right)^2}$.

Remarquons qu'elle est équivalente à $4Sin^2(a) = Sin^2(2a) + (R - Cos(2a))^2$, soit encore à $Cos(2a) = R - \frac{2Sin^2(a)}{R}$. Indirectement, il s'agit donc de l'analogue de la formule moderne :

$$\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a).$$

Une démonstration élémentaire de ce résultat, ainsi que celle d'une autre formule de duplication énoncée par Varāhamihira, sont proposées en annexe 2.

Āryabhata II (vers 950) affirme quant à lui :

> « *Le Sinus d'un arc multiplié par le rayon est soustrait ou ajouté au carré de la valeur maximale du Sinus ; la racine carrée de la moitié du résultat obtenu est*

---

[28] [*Brahmasphuta Siddhānta, vii. 12*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 47].
[29] [J. Filliozat, in R. Taton, 1957, rééd. 1994, p. 168]. Baudhāyana, auteur du *Baudhāyana Śulba Sūtra*, vécut vers le VIII[e] siècle avant J.-C. Pour plus de détails, voir [R.P. Kulkarni, 1983, pp. 85-98].
[30] [*Pañca Siddhāntika, ch. 4, v. 5*, in A.K. Bag, 1979, p. 235].
[31] [A.K. Bag, 1979, pp. 235-236].

> *extraite. Ceci donnera le Sinus de l'arc égal à douze fois le premier arc augmenté ou diminué de la moitié de l'arc*[32]. »

Cet énoncé ne peut être compris que dans le contexte de la construction des tables trigonométriques (voir le paragraphe suivant). À lui seul, il révèle à quel point toutes les formules que nous mentionnons ici furent établies en liaison avec ce problème. Ce qui est désigné ici par le premier arc est la mesure de l'arc de référence utilisé pour subdiviser le premier quadrant en vingt-quatre arcs isométriques en vue de la construction d'une table trigonométrique contenant vingt-quatre Sinus. Douze fois le premier arc correspond donc à 45°. La valeur maximale du Sinus étant $Sin(90°) = R$, il s'agit donc de la formule :

$$Sin(45° \pm \frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{1}{2}[R^2 \pm RSin(a)]}$$

Une preuve élémentaire en est fournie en annexe 2.

Le *Siddhānta Śiromani* (« Joyau de tête des solutions ») de Bhāskara II, qui semble être le premier exposé relativement systématique de trigonométrie indienne[33], fournit lui aussi une longue liste de formules de duplication. Il donne en particulier :

> « *Le carré du* Sinus *d'un arc est divisé par la moitié du rayon ; la différence entre ce quotient et le rayon est égale au* Sinus *de la différence entre cet arc et son complément*[34]. »

Ainsi, $Sin[(90° - a) - a] = R - \frac{Sin^2(a)}{R/2}$: c'est l'analogue direct de $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2(a)$.

L'apport de Bhāskara II dans ce domaine dépasse toutefois largement le cas particulier de la duplication, puisqu'il énonce aussi les formules générales d'addition suivantes :

> « *Les Sinus de deux arcs d'un cercle sont réciproquement multipliés par leurs Cosinus ; les produits sont ensuite divisés par le rayon ; la somme des quotients est le Sinus de la somme des arcs et leur différence est le Sinus de la différence des arcs*[35]. »

Il s'agit donc des résultats suivants : $Sin(a \pm b) = \frac{Sin(a)Cos(b)}{R} \pm \frac{Cos(a)Sin(b)}{R}$.

Dans son commentaire de Bhāskara II, le *Siddhānta Tattva Viveka*, Kamalākara a fourni plusieurs preuves de ces relations. Il a aussi énoncé et démontré les autres formules d'addition[36] :

> « *Les produits des Cosinus et des Sinus de deux arcs de cercle sont divisés par son rayon ; la différence et la somme sont égales au Cosinus de la somme et de la différence des deux arcs*[37]. »

Ce que l'on peut retranscrire par : $Cos(a \pm b) = \frac{Cos(a)Cos(b)}{R} \mp \frac{Sin(a)Sin(b)}{R}$.

L'une des méthodes qu'il utilise afin de démontrer simultanément ces deux groupes de formules figure en annexe 3.

---

[32] [*Māha Siddhānta,iii. 2.*, in A.K. Bag, 1979, pp. 237-238]. Voir aussi [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 53].
[33] [A.K. Bag, 1979, p. 229].
[34] [*Siddhānta Śiromani, Goladīpikā, xiv. 15*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, pp. 55-56].
[35] [*Siddhānta Śiromani, Goladīpikā, xiv. 21f.*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 56].
[36] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, pp. 57-60].
[37] [*Siddhānta Tattva Viveka, ii.69*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 57].

Kamalākara attribue les formules d'addition pour le Cosinus à Bhāskara II, bien qu'elles ne figurent pas dans ses écrits. Notons à cet égard la pérennité et l'efficacité de la tradition orale en Inde, compte tenu des cinq siècles séparant les deux mathématiciens.

Bhāskara II décrit en outre explicitement la méthode permettant, par une application récurrente de ces formules d'addition, d'en déduire les lignes trigonométriques des multiples entiers d'un arc donné, sans par ailleurs citer les résultats obtenus[38]. Là encore, c'est Kamalākara qui formule ces résultats et en fournit une démonstration. Il établit par exemple[39] :

$$Sin(2a) = \frac{2Sin(a)Cos(a)}{R} \quad \text{et} \quad Cos(2a) = \frac{Cos^2(a) - Sin^2(a)}{R} \quad ;$$

$$Sin(3a) = \frac{3R^2 Sin(a) - 4Sin^3(a)}{R^2} \quad \text{et} \quad Cos(3a) = \frac{4Cos^3(a) - 3R^2 Cos(a)}{R^2} \quad ;$$

$$Sin(4a) = 4\frac{Cos^3(a)Sin(a) - Sin^3(a)Cos(a)}{R^3} \quad \text{et} \quad Cos(4a) = \frac{Cos^4(a) - 6Cos^2(a)Sin^2(a) + Sin^4(a)}{R^3}.$$

Tables trigonométriques

La valeur exacte des lignes trigonométriques des arcs de référence était connue dès l'époque de Varāhamihira, par exemple sous la forme[40] :

$$Sin(30°) = \frac{R}{2} \quad ; \quad Sin(45°) = \sqrt{\frac{R^2}{2}} \quad \text{et} \quad Sin(60°) = \sqrt{\frac{3R^2}{4}}.$$

Deux autres valeurs exactes furent données environ six siècles plus tard par Bhāskara II :

> « *Le rayon est soustrait de la racine carrée de cinq fois le carré du rayon et le reste est divisé par 4. Le résultat est la valeur exacte du Sinus d'un vingtième de circonférence*[41]. »

C'est-à-dire : $Sin(18°) = \dfrac{\sqrt{5R^2} - R}{4}$.

Par ailleurs :

> « *La racine carrée de cinq fois le carré du carré du rayon est soustraite de cinq fois le carré du rayon et le reste est divisé par 8 ; la racine carrée du quotient est le Sinus d'un dixième de circonférence [...] ou le rayon multiplié par 5878 et divisé par 10000 est le Sinus d'un dixième de circonférence*[42]. »

Ainsi : $Sin(36°) = \sqrt{\dfrac{5R^2 - \sqrt{5R^4}}{8}} \approx \dfrac{5878}{10000}R$.

Ces résultats furent justifiés par Kamalākara, d'une manière que nous avons retranscrite en annexe 4.

---

38 [*Siddhānta Śiromani, Goladīpikā, xiv.21-2*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 61].
39 [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, pp. 61-63].
40 [A.K. Bag, 1979, p. 231] et [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 67].
41 [*Siddhānta Śiromani, Goladīpikā, xiv.9*, in A.K. Bag, 1979, p. 231, p. 68]. Voir aussi [A.K. Bag, 1979, p. 254].
42 [*Siddhānta Śiromani, Goladīpikā, xiv.7-8*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 68] et [A.K. Bag, 1979, p. 254].

Plus généralement, Bhāskara II s'est efforcé de déterminer une valeur approchée du côté des sept premiers polygones réguliers inscrits dans un cercle donné, ce qui revient à calculer les Sinus de certains sous-multiples de 180°. Il énonce :

> « *Multiplie le diamètre d'un cercle par 103923, 84853, 70534, 60000, 52055, 45922 et 41031 puis divise le produit obtenu dans chaque cas par 120000 ; les quotients seront les côtés des polygones réguliers inscrits dans le cercle, du triangle à l'ennéagone respectivement*[43]. »

Compte tenu du fait que le côté d'un *n*-gone régulier inscrit dans un cercle de rayon R a pour longueur $2\times Sin(\frac{180°}{n})$, cela revient à dire que :

$$2\times Sin(\frac{180°}{3}) \approx \frac{2R\times 103923}{120000} \;;\; 2\times Sin(\frac{180°}{4}) \approx \frac{2R\times 84853}{120000} \;;\; 2\times Sin(\frac{180°}{5}) \approx \frac{2R\times 70534}{120000} \;;$$
$$2\times Sin(\frac{180°}{6}) = \frac{2R\times 60000}{120000} \;;\; 2\times Sin(\frac{180°}{7}) \approx \frac{2R\times 52055}{120000} \;;\; 2\times Sin(\frac{180°}{8}) \approx \frac{2R\times 45922}{120000} \;;$$
$$2\times Sin(\frac{180°}{9}) \approx \frac{2R\times 41031}{120000}.$$

Soit encore :

$$Sin(60°) \approx 0{,}866025\times R \;;\; Sin(45°) \approx 0{,}7071083\times R \;;\; Sin(36°) \approx 0{,}587783\times R \;;$$
$$Sin(30°) = 0{,}5\times R \;;\; Sin(\frac{180°}{7}) \approx 0{,}4337917\times R \;;\; Sin(\frac{180°}{8}) \approx 0{,}382683\times R \;;$$
$$Sin(20°) \approx 0{,}341925\times R.$$

Toutes ces valeurs sont « correctes » avec une erreur ne dépassant pas $3{,}5\times 10^{-4}$ %, à l'exception des cas de l'heptagone et de l'ennéagone, pour lesquels l'erreur est d'environ 3×10^{-2} %. La moindre qualité de ces deux dernières approximations est intéressante, dans la mesure où elle illustre la difficulté du calcul dans ces deux cas spécifiques : celle-ci s'explique rétrospectivement par le théorème de Gauss concernant la constructibilité des polygones réguliers, qui résulte des propriétés des polynômes cyclotomiques. Il est possible que ces deux approximations aient été déterminées par des méthodes d'interpolation. Pour les autres valeurs, la connaissance des formules de duplication et des méthodes de résolution des équations du second degré[44] (dans le cas de $Sin(36°)$ particulièrement) suffit pour résoudre ce problème.

La recherche de valeurs approchées du Sinus débute en fait avec la trigonométrie indienne elle-même, puisque la plus ancienne table trigonométrique connue figure dans le *Sūrya Siddhānta*[45]. Tous les mathématiciens indiens d'importance contribueront dès lors, jusqu'au XVII^e^ siècle, à la tâche consistant à en préciser les calculs.

En général, les tables trigonométriques indiennes sont fondées sur une division du premier quadrant du cercle en vingt-quatre divisions égales, ce qui revient donc à prendre 3°45' = 225' pour arc de référence et à calculer les lignes des multiples entiers de cet arc, de 1 à 24. À l'origine de ce choix, il y a dans un premier temps la nécessité de fixer un rayon de cercle de référence en fonction duquel toutes les lignes trigonométriques seront calculées, sans quoi il y aurait autant de tables que de rayons choisis. Rappelons d'abord que, pour les Indiens, les degrés, les minutes, les secondes et les soixantièmes de seconde ne font pas référence à des

---

[43] [*Līlavātī, v.209-211*, in Colebrooke, 1892, rééd. 1927, pp. 139-140].

[44] Certains cas d'équations du second degré furent résolus par Āryabhata I et Brahmagupta. La connaissance d'une méthode générale de résolution semble attestée chez Śridhāra (*Pātīganita*, début du X^e^ siècle), lequel est cité à ce propos par Bhāskara II. Voir par exemple [B.D. Datta, A.N. Singh, 1962, vol. 2, pp. 59-75].

[45] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 75]. Il s'agit ici de l'ancien *Sūrya Siddhānta* (IV^e^ siècle), qui est en partie connu par l'intermédiaire du *Pañca Siddhāntika* de Varāhamihira.

angles. Une circonférence donnée peut être prise pour unité de longueur et les mesures d'arc dans le cercle considéré deviennent alors des longueurs exprimées dans cette unité. Réciproquement, une minute d'arc peut-être prise comme longueur de référence dans un cercle donné ; c'est précisément ce que font les Indiens. Il ne faudra donc pas s'étonner dans ce qui suit de voir apparaître des rayons exprimés en minutes.
Conformément à ce choix, $360° = 21600'$ est la mesure en minutes de la circonférence d'un cercle. Si l'on cherche le rayon correspondant, celui-ci vérifie la relation : $R = \frac{21600'}{2\pi}$. Sa valeur dépendra donc de la valeur du rapport de la circonférence au diamètre retenue. L'approximation donnée par Āryabhata I fut utilisée. Selon l'*Āryabhatīya*, une unité de longueur étant choisie, la circonférence d'un cercle de diamètre 20000 unités est approximativement égale à 62832 unités :

> « *Cent plus quatre, multiplié par huit, et additionné à soixante deux mille : ceci sera la valeur approximative de la circonférence d'un cercle de diamètre vingt mille*[46]. »

Ceci correspond à l'approximation 3,1416 du nombre π. En conséquence, la première valeur choisie pour le rayon de référence fut ainsi $R = 3438'$, ce qui s'explique par le fait que : $\frac{21600'}{2 \times \frac{62832}{20000}} \approx 3438'$. L'ancien *Sūrya Siddhānta* ayant, selon Varāhamihira, également retenu cette valeur, son antériorité par rapport au traité d'Āryabhata I peut d'ailleurs laisser supposer que l'approximation donnée par ce dernier fut en usage avant lui.
Cette valeur sera parfois précisée par la suite, conformément à la même approximation du rapport entre la circonférence et le diamètre ; Govindaswāmin (début du IX^e^ siècle) choisira ainsi[47] $R = 3437'44''19'''$. Ce choix correspond sensiblement à la conversion en minutes, secondes et tierces de l'approximation : $\frac{21600 \times 60 \times 60'''}{2 \times \frac{62832}{20000}} \approx 12375859'''$.
Compte tenu de sa meilleure évaluation du rapport entre la circonférence et le diamètre qui, ainsi que nous le verrons au cours des chapitres ultérieurs, correspond à l'approximation $\pi \approx 3{,}1415926535922$, Mādhava prendra quant à lui[48] $R = 3437'44''48'''$.

Une fois fixée la valeur de référence $R = 3438'$, il reste à remarquer que, connaissant $Sin(30°) = \frac{R}{2} = 1719'$ et les formules de duplication, on peut obtenir aisément $Sin(15°)$, $Sin(7°30')$ et $Sin(3°45')$. Le choix de $3°45' = 225'$ comme arc de référence pour la construction des tables repose alors sur la constatation que c'est le premier arc dont le nombre de minutes est quasiment identique à celui de son Sinus, à savoir $225'$. La valeur moderne donne effectivement dans ce cas : $Sin(225') \approx 224{,}856$.
Cette raison est clairement formulée par Sūryadevayajvan (né en 1191) :

> « *[...] Par conséquent, le quadrant devrait être divisé de telle sorte que le premier Sinus et l'arc correspondant soient exactement égaux*[49]. »

Au VII^e^ siècle, Bhāskara I défendit d'ailleurs au moyen d'arguments physiques l'idée que la mesure de cet arc élémentaire coïncide *exactement* avec celle de sa corde :

---

[46] [*Āryabhatīya, Ganitapada, v.10*, in B.D. Singh, 1926, p. 26].
[47] [*Māhabhāskarīya Bhāsya, iv.22*, in B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 71].
[48] Cité par Nīlakantha dans l'*Āryabhatīya Bhāsya, ii.12*, in [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 71].
[49] Commentaire sur l'*Āryabhatīya , 2.11*, in [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 65].

> « *Un arc égal à sa corde existe. Si un arc ne pouvait être égal à sa corde, jamais une balle de fer posée sur un sol uniformément plat ne serait stable. Par conséquent, nous en déduisons qu'il existe un lieu au moyen duquel cette balle de fer repose sur le sol uniformément plat. Et ce lieu est la quatre-vingt seizième partie de la circonférence*[50]. »

Il faut toutefois noter que, le choix d'une unité de mesure étant arbitraire, toutes les tables n'ont pas été construites en prenant $R = 3438'$. La table de Varāhamihira[51], par exemple, repose sur le choix de $R = 120$ unités, la mesure de l'arc élémentaire demeurant égale à $225'$. Le choix de cette dernière étant également arbitraire, il existe aussi des tables fondées sur d'autres subdivisions du cercle. L'une des tables de Bhāskara II repose ainsi sur une subdivision de degré en degré. Son procédé de construction est décrit plus loin.

Le *Sūrya Siddhānta* contient une table de vingt-quatre Sinus et Versinus pour tous les multiples entiers (de 1 à 24) de $225'$, avec un rayon de référence égal à $3438'$. Selon le témoignage de Varāhamihira, les valeurs sont calculées conformément à la règle suivante, dont aucune justification n'est fournie :

> « *La huitième partie [du nombre de minutes] d'un signe* (rāśi) *est le premier Sinus. Il est divisé par lui-même et ensuite diminué du quotient. Le reste additionné au premier Sinus donne le second Sinus.*
> *Chaque Sinus est divisé par le premier Sinus et ensuite diminué par le quotient. Le reste additionné à la différence de ce Sinus et du Sinus précédent donnera le Sinus suivant. Ainsi peuvent être obtenus les vingt-quatre Sinus [...]*[52]. »

Le premier Sinus a pour valeur $225'$, puisqu'un signe (zodiacal) correspond à $\frac{1}{12} \times 360° = 30° = 8 \times 225'$. C'est la mesure de la subdivision de référence du cercle, que nous noterons dans toute la suite δ. La méthode de construction de la table du *Sūrya Siddhānta* repose par conséquent sur la règle suivante :

$$Sin[(k+1)\delta] = Sin(k\delta) - Sin[(k-1)\delta] + Sin(k\delta) - \frac{1}{225} Sin(k\delta)\text{, où } \delta = 225' \text{ et } k \in [1;23].$$

Elle consiste à calculer les Sinus de proche en proche à partir des différences successives entre les Sinus tabulés.

Sous une forme équivalente, cette méthode fut également utilisée par Āryabhata I pour la construction de sa table de vingt-quatre Sinus, qui demeura pendant plusieurs siècles une référence :

> « *Le premier Sinus divisé par lui-même et ensuite diminué par le quotient donnera la seconde différence. Pour calculer n'importe quelle autre différence, la somme de toutes les différences précédentes est divisée par le premier Sinus et le quotient est soustrait de la différence précédente. Toutes les différences restantes peuvent être ainsi déterminées*[53]. »

[50] [*Āryabhatīya Bhāsya* de Bhāskara I*, 2-11*, in A. Keller, 2000, T.2, p. 155]. Traduction en français d'A. Keller.
[51] [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 71].
[52] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 75]. Une interprétation légèrement différente de ces vers est possible, quoiqu'en définitive mathématiquement équivalente. Voir par exemple [C.N. Srinivasiengar, 1967, p. 49].
[53] [*Āryabhatīya, ii.12*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983*,* p. 79]. Notons cependant que le vers en question est extrêmement concis et a de ce fait été l'objet de traductions différentes qui ne suggèrent pas exactement le même algorithme (même si en définitive tous ces algorithmes sont mathématiquement équivalents). Voir par exemple [C.N. Srinivasiengar, 1967, pp. 49-50].

Pour tout $k \in [1;24]$, notons $D_k = Sin(k\delta) - Sin[(k-1)\delta]$. Compte tenu du fait que le « premier Sinus » est $Sin(\delta) = Sin(225')$ et qu'Āryabhata I tient sa valeur pour égale à $225'$, nous pouvons globalement formaliser comme suit la règle qu'il énonce :

$$\text{Pour tout } k \in [1;23],\ D_{k+1} = D_k - \frac{\sum_{i=1}^{k} D_i}{225}.$$

Or, $\sum_{i=1}^{k} D_i = Sin(k\delta)$; on retrouve par conséquent la formule du *Sūrya Siddhānta*.

La formule exacte est en fait :

$$Sin[(k+1)\delta] - Sin(k\delta) = Sin(k\delta) - Sin[(k-1)\delta] - \frac{4Sin^2(\frac{\delta}{2})}{R^2} Sin(k\delta).$$

La démonstration en est possible à l'aide des formules d'addition, mais rien ne permet de supposer qu'elles étaient connues avant Bhāskara II[54]. En fait, il faudra attendre le *Yuktibhāsa* du keralais Jyesthadeva (XVI^e siècle) pour en avoir une justification et celle-ci est fondée non sur l'application des formules générales d'addition, mais sur des considérations géométriques plus directes. Comme nous le verrons dans le détail au chapitre 7, l'étude des différences de second ordre des Sinus amena le keralais Nīlakantha, dans son commentaire sur l'*Āryabhatīya* (Ā*ryabhatīya Bhāsya*, environ 1500), à énoncer le résultat précédent sous la forme équivalente (compte tenu de la relation $Versin(\delta) = R - Cos(\delta) = \frac{2Sin^2(\frac{\delta}{2})}{R}$) :

$$[Sin(k\delta) - Sin[(k-1)\delta]] - [Sin[(k+1)\delta] - Sin(k\delta)] = \frac{2Ver\,sin(\delta)}{R} Sin(k\delta).$$

La démonstration en est fournie par Jyesthadeva et est détaillée au chapitre 7.

On peut observer que la règle utilisée par le *Sūrya Siddhānta* et par Āryabhata I se déduit immédiatement de la formule exacte à partir des approximations :

$$2Sin(\frac{\delta}{2}) \approx 2\frac{\delta}{2} = 225' \quad \text{et} \quad (\frac{225'}{R})^2 = (\frac{225'}{3438'})^2 \approx (\frac{1}{15})^2 = \frac{1}{225}.$$

Notons que l'énoncé d'Āryabhata I est relatif non aux Sinus, mais à leurs différences successives. Il en est logiquement de même pour sa table de vingt-quatre Sinus, qui est formulée comme suit :

> « *225, 224, 222, 219, 215, 210, 205, 199, 191, 183, 174, 164, 154, 143, 131, 119, 106, 93, 79, 65, 51, 37, 22 et 7. Telles sont les différences des Sinus en termes de minutes d'arc*[55]. »

La table obtenue est donc la suivante :

---

[54] Indépendamment des travaux indiens, on peut remarquer l'existence d'un cas particulier intéressant de ce résultat : si trois angles sont en progression arithmétique, la somme des sinus des extrêmes est au sinus du moyen comme le sinus du double de la raison est au sinus de la raison : $\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\sin(a)} = \frac{\sin(2b)}{\sin(b)}$.

[55] [*Āryabhatīya, 1.12*, in B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 62].

Différences des Sinus (Āryabhata I)	Valeurs des Sinus correspondantes	Valeurs modernes des Sinus correspondantes
225	225	224,856
224	449	448,749
222	671	670,720
219	890	889,820
215	1105	1105,109
210	1315	1315,666
205	1520	1520,589
199	1719	1719,000
191	1910	1910,050
183	2093	2092,922
174	2267	2266,831
164	2431	2431,033
154	2585	2584,825
143	2728	2727,549
131	2859	2858,592
119	2978	2977,395
106	3084	3083,448
93	3177	3176,298
79	3256	3255,546
65	3321	3320,853
51	3372	3371,940
37	3409	3408,588
22	3431	3430,639
7	3438	3438,000

L'erreur commise (par rapport aux valeurs modernes) dans la table des différences de Sinus obtenue à l'aide de la formule est en général comprise entre 0,5% et 1,5%, l'imprécision ayant tendance à augmenter avec les valeurs de k. Il semble toutefois que Āryabhata I ait apporté une correction à certains de ces résultats, de sorte que sa table est plus précise : l'erreur moyenne commise sur les différences est inférieure à 0,5%. Quant à l'erreur moyenne sur les Sinus proprement dits, elle est inférieure à 0,1%. Il est possible qu'il se soit d'abord fondé sur les valeurs connues de $Sin(30°)$, $Sin(45°)$ et $Sin(60°)$ et qu'il n'ait en fait utilisé la formule que pour le calcul des valeurs intermédiaires[56].

La table d'Āryabhata I fut par la suite considérablement améliorée par les astronomes keralais Govindaswāmin (*Māhabhāskarīya Bhāsya*) et Mādhava (selon Nīlakantha, *Tantrasamgraha*). Leurs tables de Sinus correspondent à des valeurs du sinus dans l'ensemble correctes à 10^{-6} près.

Les raisons de la qualité de la table dite de Mādhava seront étudiées dans les chapitres ultérieurs. En ce qui concerne celle de Govindaswāmin, la méthode grâce à laquelle il l'a obtenue demeure inconnue. L'utilisation de méthodes d'interpolation (évoquées au paragraphe suivant) est une hypothèse plausible, puisqu'il a, entre autres, traité ce problème[57].
Quoiqu'il en soit, la qualité de sa table resta inégalée jusqu'à celle de Mādhava[58]:

[56] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, pp. 81-82]. Voir aussi [A.K. Bag, 1979, pp. 253-254].
[57] [R.C. Gupta, 1969, p. 91-92].
[58] La table qui suit (pour les valeurs données par Govindaswāmin) est issue de [A.K. Bag, 1979, pp. 247-248].

Valeurs des Sinus (Govindaswāmin)	Valeurs des sinus correspondantes	Valeurs modernes des sinus correspondantes
224’50’’23’’’	**0,065403**38	**0,065403**13
448’42’’53’’’	**0,1305261**31	**0,1305261**92
670’40’’11’’’	**0,1950903**77	**0,1950903**22
889’45’’8’’’	**0,25881904**4	**0,25881904**5
1105’1’’30’’’	**0,321439**505	**0,321439**465
1315’33’’56’’’	**0,382683**416	**0,382683**432
1520’28’’22’’’	**0,442288**652	**0,442288**69
1718’52’’10’’’	**0,5**	**0,5**
1909’54’’19’’’	**0,5555702**43	**0,5555702**33
2092’45’’46’’’	**0,6087614**6	**0,6087614**29
2266’38’’44’’’	**0,65934**203	**0,65934**5815
2430’50’’54’’’	**0,7071067**95	**0,7071067**81
2584’37’’43’’’	**0,751839**771	**0,751839**807
2727’20’’29’’’	**0,7933533**34	**0,7933533**4
2858’22’’31’’’	**0,8314696**37	**0,8314696**12
2977’10’’9’’’	**0,8660254**61	**0,8660254**03
3083’12’’51’’’	**0,8968727**74	**0,8968727**41
3176’3’’23’’’	**0,9238795**46	**0,9238795**32
3255’17’’54’’’	**0,9469301**48	**0,9469301**29
3320’36’’2’’’	**0,9659258**4	**0,9659258**26
3371’41’’1’’’	**0,980785**33	**0,980785**28
3408’19’’42’’’	**0,9914448**76	**0,9914448**61
3430’22’’42’’’	**0,9978589**76	**0,9978589**23
3437’44’’19’’’	**1**	**1**

De nombreuses autres tables de Sinus ont été construites en utilisant des méthodes de calcul différentes de celle du *Sūrya Siddhānta* et d’Āryabhata I. La plupart d’entre elles utilisent des formules de duplication (dont notamment celles énoncées plus haut) et les combinent avec des formules d’arcs associés.

L’ordre dans lequel les valeurs sont calculées dépend des formules utilisées, mais l’idée générale demeure et nous pouvons l’illustrer à partir de la méthode choisie par Brahmagupta[59]. Celle-ci utilise les formules :

$$Sin(\frac{a}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{Sin^2(a) + Ver\,sin^2(a)} \qquad (1)$$

$$\text{et} \qquad Sin(90° - \frac{a}{2}) = \sqrt{R^2 - Sin^2(\frac{a}{2})} \qquad (2)$$

Notons toujours $\delta = 225'$ l’arc élémentaire. La valeur exacte de $Sin(8\delta) = Sin(30°)$ et celle de $Sin(16\delta) = Sin(60°)$ sont connues. En appliquant (1), on déduit successivement de la première $Sin(4\delta)$, $Sin(2\delta)$ et $Sin(\delta)$. La formule (2) appliquée à ces trois derniers arguments permet ensuite de calculer $Sin(20\delta)$, $Sin(22\delta)$ et $Sin(23\delta)$. La connaissance de $Sin(20\delta)$ et $Sin(22\delta)$ permet alors en utilisant (1) de calculer $Sin(10\delta)$ et $Sin(11\delta)$; à l’aide de (2), on obtient ensuite : $Sin(14\delta)$ et $Sin(13\delta)$. En poursuivant ce procédé, on peut encore calculer $Sin(5\delta)$ et $Sin(19\delta)$, ainsi que $Sin(7\delta)$ et $Sin(17\delta)$.

Seize Sinus ont déjà été déterminés. Le reste de la table s’obtient à partir de $Sin(12\delta)$, dont la valeur exacte est, elle aussi, bien connue. En appliquant (1) puis (2), on calcule d’abord $Sin(6\delta)$ et $Sin(18\delta)$. L’utilisation de (1) permet d’en déduire $Sin(3\delta)$ et $Sin(9\delta)$. En

[59] [*Brahmasphuta Siddhānta, xxi,20-21*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983*,* pp. 82-83].

appliquant (2), on peut ensuite obtenir $Sin(21\delta)$ et $Sin(15\delta)$. Les vingt-quatre Sinus ont alors été déterminés, puisque par ailleurs $Sin(24\delta) = R$. Brahmagupta fait ainsi remarquer :

> « *De cette manière peuvent être calculés les* Sinus *de plus grands ou de plus petits arcs, ayant la connaissance initiale des* Sinus *du sixième, du quart et du tiers de la demi-circonférence du cercle*[60]. »

Le *Siddhānta Śiromani* de Bhāskara II fournit d'autres méthodes pour construire des tables de Sinus. Certaines d'entre elles sont également fondées sur des formules de duplication. D'autres, plus originales, utilisent les formules générales d'addition qu'il avait lui-même énoncées. L'une d'entre elles permet d'obtenir une table de vingt-quatre Sinus en utilisant la règle[61]:

$$Sin(k\delta \pm \delta) = Sin(k\delta) - \frac{1}{467} Sin(k\delta) \pm \frac{100}{1529} Cos(k\delta),$$

$$\text{où } \delta = 225' \text{ et } k \in [1;23], \text{ avec } R = 3438' \text{ et } Sin(\delta) = (225 - \tfrac{1}{7})'.$$

Une autre permet d'obtenir une table trigonométrique de degré en degré en utilisant la règle[62] :

$$Sin(a \pm 1°) = Sin(a) - \frac{1}{6567} Sin(a) \pm \frac{10}{573} Cos(a),$$

$$\text{où } a \in [1°;89°], \text{ avec } R = 3438' \text{ et } Sin(1°) = 60'.$$

La justification de ces deux procédés est mise en évidence à l'annexe 5.

Calculs de lignes trigonométriques par interpolation

Afin de déterminer les lignes trigonométriques d'un arc autre que ceux dont la valeur est déjà tabulée, les Indiens utilisent en général un principe d'accroissement linéaire entre deux valeurs tabulées. Ce principe est énoncé dès le *Sūrya Siddhānta* :

> « *Divise les minutes d'arc par 225. Le quotient indiquera le nombre de Sinus tabulés dépassés ; le reste est multiplié par la différence entre le Sinus tabulé dépassé et celui qui reste à atteindre, puis divisé par 225. Le résultat obtenu alors doit être additionné au Sinus tabulé dépassé ; la somme sera le Sinus requis. La règle est aussi applicable dans le cas du Versinus*[63]. »

Si $a_k = k\delta$ et $a_{k+1} = (k+1)\delta$ sont les mesures en minutes de deux arcs consécutifs d'une table de 24 Sinus de pas de subdivision $\delta = 225'$, ceci peut être interprété par :

$$\text{Pour tout } x \in [a_k; a_{k+1}], \quad Sin(x) \approx Sin(a_k) + \frac{r[Sin(a_{k+1}) - Sin(a_k)]}{225}$$

où r est le reste de la division euclidienne de x par $\delta = 225$. Ce que l'on peut encore écrire :

$$\text{Pour tout } x \in [a_k; a_{k+1}], \quad Sin(x) \approx Sin(a_k) + \frac{x - a_k}{\delta}[Sin(a_{k+1}) - Sin(a_k)]. \qquad (1)$$

Cette méthode d'interpolation élémentaire fut largement utilisée par les mathématiciens indiens. Elle fut en particulier citée[64] par Brahmagupta (*Brahmasphuta Siddhānta, ii.10*) et Bhāskara I (*Māhabhāskarīya, iv.3-4*).

---

[60] [*Brahmasphuta Siddhānta, xxi,23*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 83].
[61] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 86].
[62] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, pp. 87-88].
[63] [*Sūrya Siddhānta, ii.31-2*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 90].
[64] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 90].

On peut remarquer que, si l'on fait tendre la subdivision élémentaire δ vers 0, on obtient l'approximation affine moderne : $Sin(x) \approx Sin(a_k) + \frac{d(Sin)}{dx}(a_k) \times (x - a_k)$.

Sans que l'on puisse considérer le problème posé par la différentiation comme résolu par les Indiens, ni même envisagé en ces termes, nous verrons cependant au chapitre 7 que la question de l'étude des différences des Sinus lorsque l'écart des arguments est très petit fut étudiée par Bhāskara II et l'école de Mādhava.

Brahmagupta et Bhāskara I appliquèrent également le principe d'accroissement linéaire afin de résoudre le problème réciproque consistant à déterminer un arc donné connaissant ses lignes trigonométriques, dans le cas où ces dernières ne sont pas tabulées[65].

Un souci de généralisation et de précision supplémentaire apparaît néanmoins dès l'œuvre de Brahmagupta. Dans un traité postérieur à son *Brahmasphuta Siddhānta*, le *Khanda Khādyaka* (daté de 665), il donne une formule d'interpolation plus sophistiquée en faisant intervenir les différences de second ordre des lignes trigonométriques tabulées. Il énonce :

> « *La moitié de la différence entre la différence passée et celle devant être passée est multipliée par les minutes résiduelles et divisée par 900 ; la moitié de la somme de ces différences plus ou moins ce quotient, selon qu'il est moins ou plus grand que la différence tabulée devant être passée, sera la valeur corrigée de la différence devant être passée*[66]. »

Ainsi, soit x la mesure en minutes d'un arc dont on souhaite calculer les lignes trigonométriques, dans le cas où elles ne sont pas tabulées. Notons toujours $\delta = 15° = 900'$ le pas de subdivision du premier quadrant du cercle, en remarquant que l'énoncé de Brahmagupta s'inscrit dans le cadre de la construction d'une courte table de six (et non de vingt-quatre) Sinus.

Soient (dans l'ordre croissant) a_{k-1}, a_k et a_{k+1} les mesures en minutes de trois arcs tabulés consécutifs. On suppose que : $a_k < x < a_{k+1}$. Notons f le Sinus, le Cosinus ou le Versinus ; puis $\Delta_k = f(a_k) - f(a_{k-1})$ la « différence passée » et $\Delta_{k+1} = f(a_{k+1}) - f(a_k)$ la « différence devant être passée ».

Dans ces conditions, l'interpolation annoncée par Brahmagupta peut s'écrire :

$$f(x) \approx f(a_k) + \frac{x - a_k}{\delta}\left\{\frac{\Delta_k + \Delta_{k+1}}{2} \pm \frac{x - a_k}{\delta} \times \frac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{2}\right\}. \qquad (2)$$

Elle répond visiblement, compte tenu de la référence finale à la « valeur corrigée de la différence devant être passée », à la volonté d'affiner l'interpolation (1) en y substituant à la différence $f(a_{k+1}) - f(a_k) = \Delta_{k+1}$ une quantité plus précise, en l'occurrence :

$$\frac{\Delta_k + \Delta_{k+1}}{2} - \frac{x - a_k}{2\delta}(\Delta_k - \Delta_{k+1}).$$

Si l'on note $\Delta_k' = \frac{\Delta_k + \Delta_{k+1}}{2}$, on constate que (2) équivaut à :

$$f(x) \approx f(a_k) + \frac{\Delta_k'}{\delta}(x - a_k) \pm \frac{1}{2!}\frac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{\delta^2}(x - a_k)^2.$$

[65] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, pp. 91-92].

[66] [*Khanda Khādyaka,IX, 8*, in R.C. Gupta, 1969, p. 88] et [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 92].

Il est alors possible d'interpréter ce résultat d'un point de vue moderne en observant son accord rétrospectif avec la « formule de Taylor-Young » à l'ordre deux appliquée à f au voisinage de a_k, laquelle correspond au cas où δ est considéré comme un infinitésimal.

On a en effet :

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\Delta_k'}{\delta} = \frac{df}{dx}(a_k) \quad \text{(dérivée dite symétrique de } f \text{ en } a_k\text{)}$$

et $$\lim_{\delta \to 0} \frac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{\delta^2} = \pm \frac{d^2 f}{dx^2}(a_k).$$

Dans le *Siddhānta Śiromani*, Bhāskara II énonce la même interpolation, à ceci près qu'il l'applique au cas où $\delta = 10° = 600'$, dans le cadre de la construction d'une table réduite de dix Sinus :

> « *La différence entre la différence passée et celle devant être passée est multipliée par l'arc résiduel et divisée par 20 ; le résultat est soustrait ou ajouté à la demi-somme des deux différences pour obtenir la valeur corrigée de la différence des Sinus ou des Versinus respectivement*[67]. »

Son originalité quant à ce résultat tient au fait qu'il en donne une justification, que nous étudions à l'annexe 6. Il indique par ailleurs que (dans l'accolade de (2)) le dernier terme doit être retranché si f est le Sinus et ajouté si f est le Versinus.

Ainsi que nous le verrons aux chapitres 7 et 8, une étude plus précise de ces différences du second ordre du Sinus et de leur comportement lorsque la mesure δ de l'arc élémentaire devient très petite fut essentielle dans les travaux qui, près de huit siècles plus tard, permirent d'établir les « développements en séries » du Sinus et du Cosinus.

Une explicitation du Sinus sous forme de fraction rationnelle

Il est clair que, bien qu'utiles aux astronomes, les tables trigonométriques, limitées à certaines valeurs particulières du Sinus, n'offraient pas les avantages d'une formule donnant explicitement le Sinus d'un arc donné, même avec l'outil complémentaire de l'interpolation. La recherche d'une telle formule semble avoir motivé, comme nous le verrons au chapitre 8, une partie des travaux des mathématiciens keralais. Toutefois, une explicitation du Sinus sous forme de fraction rationnelle fut donnée dès les premiers traités indiens de trigonométrie et demeura longtemps en usage chez les astronomes.

Cette formule fut, pour autant qu'on le sache, énoncée pour la première fois par Bhāskara I :

> « *J'énonce maintenant brièvement la règle sans faire usage des différences des Sinus, 225 etc… Soustrais les degrés de l'arc des degrés de la demi-circonférence. Multiplie le reste par les degrés de l'arc et retranscris le résultat en deux endroits ; à l'un des endroits, soustrais le résultat de 40500 ; par le quart du résultat, divise le produit du rayon de l'épicycle par le résultat retranscrit au second endroit […]. Les valeurs du Sinus de l'arc et de son complément seront ainsi obtenues*[68]. »

Cette règle, dont l'application aux calculs astronomiques est explicite, peut être retranscrite comme suit : si a est la mesure en degrés (inférieure à 180°) d'un arc de mesure A considéré dans un cercle de rayon R et de circonférence C, alors :

---

[67] [*Siddhānta Śiromani, ii.16*, in B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 65] et [R.C. Gupta, 1969, p. 89].

[68] [*Māhabhāskarīya, vii, 17-19*, in R.C. Gupta, 1967, p. 122] et [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 72].

$$Sin(A) = \frac{R(180° - a)a}{\frac{1}{4}[40500 - (180° - a)a]} \quad (= Sin(\frac{C}{2} - A))$$

On peut vérifier que l'erreur moyenne commise (par rapport aux valeurs modernes) en appliquant cette formule est inférieure à 0,5 % :

Angle en degrés	Valeur du sinus correspondante suivant la formule de Bhāskara I	Valeur du sinus correspondante suivant un calcul moderne
10°	0,1752	0,1736
20°	0,3432	0,3420
30°	0,5	0,5
40°	0,6418	0,6428
50°	0,7647	0,7660
60°	0,8649	0,8660
70°	0,93902	0,93969
80°	0,98462	0,98481

Selon Bhāskara I lui-même, elle était connue d'Āryabhata I. Elle fut énoncée d'une façon analogue[69] dans de nombreux traités, par exemple par Brahmagupta (*Brahmasphuta Siddhānta, 14.23-24*), et Śripati (*Siddhānta Śekhara, 3.17*, fin du X^{e} siècle).

Bhāskara II écrit quant à lui dans le *Līlavātī* :

> « *Soustrais l'arc de la circonférence et multiplie le reste par l'arc ; ce produit est appelé le « premier »* (prathama). *De cinq fois le quart du carré de la circonférence, soustrais le « premier »* (prathama) *; divise par le reste le « premier »* (prathama) *multiplié par le quadruple du diamètre ; le quotient obtenu sera la corde de l'arc*[70]. »

Soient K et A sont les mesures respectives d'une corde et de l'arc qui la sous-tend, dans un cercle de rayon R et de circonférence C. La quantité dénommée le « premier » est $(C - A)A$. La règle énoncée par Bhāskara II s'écrit dans ces conditions :

$$K = \frac{4 \times (2R) \times (C - A)A}{5 \times \frac{C^2}{4} - (C - A)A}.$$

En notant $2a$ la mesure en degrés de l'arc de mesure A, on a ainsi :

$$K = \frac{4 \times (2R) \times (360 - 2a)2a}{5 \times \frac{360^2}{4} - (360 - 2a)2a} = \frac{32R(180 - a)a}{\frac{1}{4}[16 \times 40500 - 16(180 - a)a]} = 2\frac{R(180 - a)a}{\frac{1}{4}[40500 - (180 - a)a]}.$$

Compte tenu du fait que $K = 2Sin(\frac{A}{2})$, on retrouve donc par substitution la formule de Bhāskara I . Comme on peut le remarquer, la formule de Bhāskara II est relative à des cordes entières au lieu des traditionnelles demi-cordes qui définissent les Sinus.

La méthode ayant permis d'obtenir ce résultat demeure inconnue. Quelques arguments avancés par Ganeśa dans le *Buddhi Vilāsinī* (1545), qui constitue un commentaire du *Līlavātī* de Bhāskara II, ont permis de formuler plusieurs hypothèses plausibles quant à cette question[71]. Deux d'entre elles sont exposées à l'annexe 7.

---

69 [R.C. Gupta, 1967, pp. 123-127] et [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, pp. 72-73].

70 [*Līlavātī, Ksetravyavahāra, 48*, in B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 72].

71 [R.C. Gupta, 1967, pp. 128-134] et [R.C. Gupta, 1986, pp. 39-41].

Notons enfin que le problème réciproque consistant à déterminer une approximation de l'arc correspondant à un Sinus donné fut étudié par Brahmagupta dans le *Brahmasphuta Siddhānta*, à l'aide de cette explicitation du Sinus et de la résolution d'une équation du second degré[72] :

En supposant connu $s = Sin(a)$, on a d'après ce qui précède : $s = \dfrac{R(180-a)a}{10125-(180-a)\frac{a}{4}}$.

a est donc une solution de l'équation : $x^2 - 180x + \dfrac{10125s}{\frac{s}{4}+R} = 0$.

Si a est supposé compris entre 0° et 90°, on en déduit la formule de Brahmagupta :

$$a = 90 - \sqrt{8100 - \frac{10125s}{\frac{s}{4}+R}}.$$

Cette formule fut reprise plus tard par Śripati et Bhāskara II successivement[73].

[72] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, pp. 73-74].
[73] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 74].

Chapitre 2
Les travaux indiens sur les séries antérieurs au XVe siècle

La plus ancienne littérature indienne connue mentionnant des progressions arithmétiques est la littérature védique. Le *Rg Veda* cite ainsi[1] la suite des multiples de 10 dans l'ordre croissant, de 10 à 100 et l'*Atharva Veda*, la suite des multiples de 11 dans l'ordre décroissant, de 99 à 11. Quant aux progressions géométriques, un exemple en est évoqué[2] dans la *Vājasaneyi Samhitā* avec la suite des puissances de 10 dans l'ordre croissant, de 10 à 10^{12}. Les termes sanscrits *średhī* et *samkalita*, qui désignent respectivement les termes d'une suite et le résultat de leur sommation, semblent toutefois n'apparaître fréquemment dans la littérature mathématique qu'à partir des IVe et Ve siècles après J.-C.[3].

Nous reprendrons ici la classification du *Ganitasārasamgraha* de Mahāvīra (écrit vers 850), qui discerne trois types de séries : les séries à progression arithmétique, celles à progression géométrique et les « séries complexes », qui incluent entre autres les sommes de puissances d'entiers.

Les séries à progression arithmétique

Les plus anciens traités indiens donnant la règle générale de sommation de ce type de série semblent être[4] le manuscrit dit « de *Bakhshālī* » (entre le Ve et le VIIIe siècle) et l'*Āryabhatīya* d'Āryabhata I. Selon Bhāskara II, elle peut être retenue comme suit :

> « *Le produit de l'accroissement par la période diminuée de 1, ajouté à la première quantité, est la dernière quantité. La demi-somme de celle-ci et de la première quantité est la moyenne ; laquelle, multipliée par la période, est la quantité totale*[5]. »

Autrement dit (l'« accroissement » étant la raison), la somme recherchée (« quantité totale ») est égale au produit du nombre de termes (« période ») par la moyenne arithmétique des termes extrêmes.

Āryabhata I est le premier mathématicien indien connu à avoir énoncé la solution générale du cas particulier concernant la somme des entiers naturels consécutifs[6] ; il la donne sous une forme équivalente à :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1).$$

Le calcul du nombre n de termes d'une série à progression arithmétique, connaissant sa somme S, son premier terme a et sa raison r, fut décrit par Āryabhata I à l'aide de la formule que nous pouvons retranscrire par[7] :

$$n = \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8rS + (2a-r)^2} - 2a}{r} + 1\right].$$

---

[1] [*Rg Veda, 2.18.5* et *Atharva Veda, 19.47.3*, in M.D. Pandit, 1993, pp. 121-122].
[2] [M.D. Pandit, 1993, pp. 128-129].
[3] [A.K. Bag, 1979, p. 180].
[4] [*Āryabhatīya, Ganitapāda, v.19*, in A.K. Bag, 1979, p. 181].
[5] [*Līlāvatī, 119*, in Colebrooke, 1892, rééd.1927, p. 78].
[6] [*Āryabhatīya, Ganitapāda, v.22*, in A.K. Bag, 1979, p. 182].
[7] [A.K. Bag, 1979, p. 182].

Ce résultat, dont la détermination nécessite la résolution d'une équation du second degré, fut également cité, en particulier, par Mahāvīra et Bhāskara II [8].

Ce dernier a par ailleurs traité deux autres problèmes. Il a résolu[9] celui qui consiste à déterminer le premier terme *a* connaissant la somme *S*, le nombre n de termes et la raison r, par une formule équivalente à : $a = \frac{S}{n} - \frac{n-1}{2} r$. Il a aussi donné[10] l'expression de la raison *r*, connaissant la somme *S*, le nombre n de termes et le premier terme a, sous une forme que nous pouvons retranscrire par : $r = \frac{\frac{S}{n} - a}{\frac{n-1}{2}}$.

Une représentation géométrique de ce type de série fut décrite par Nārāyana Pandita dans le *Ganita Kaumudī* (1356). Son principe consiste, une unité de longueur étant choisie, à interpréter chaque somme partielle d'une série à progression arithmétique de premier terme *a*, de raison *r* et de nombre de termes *n*, comme l'aire d'un trapèze dont les bases parallèles ont pour mesures $a - \frac{r}{2}$ et $a - \frac{r}{2} + nr$, et dont la hauteur a pour mesure *n*. A l'aide de cette interprétation, Nārāyana a considéré des séries dont la raison est fractionnaire ou négative, la représentation consistant dans ce dernier cas en un trapèze croisé. Il a donné en particulier une signification à de telles sommes partielles lorsqu'elles sont nulles, en les interprétant à l'aide de deux triangles isocèles isométriques joints par leur sommet [11].

Les séries à progression géométrique

Le *Chandah Sūtra* de Pingala (vers 200 av. J.-C.) est le plus ancien traité connu à donner[12], dans le cas particulier de la suite de premier terme 1 et de terme général $u_n = 2^n$, la somme d'un nombre fini de termes d'une suite géométrique : $1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^k = 2^n - 1$.

Mahāvīra semble avoir été le premier à énoncer (vers 850) la règle générale donnant la somme des termes de ce type de progression[13], sous une forme équivalente à :

$$\sum_{k=0}^{n-1} ar^k = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \text{ , où } r \neq 1 .$$

Divers problèmes mettant en œuvre des suites géométriques et la sommation de leurs termes furent diffusés par la tradition orale indienne. Certains, dont la célèbre légende de l'échiquier et des grains de blé, furent plus tard connus jusqu'en Occident par l'intermédiaire de voyageurs arabes ou perses tels que al Bīrūnī (973-1050)[14].

Les questions liées à la convergence de ce type de série n'apparurent dans les écrits indiens qu'aux environs de 1500, dans l'œuvre de Nīlakantha (*Āryabhatīya Bhāsya*). Nous reviendrons sur ce point au chapitre 3 et à l'annexe 8.

---

8 Respectivement [*Ganitasārasamgraha, ch.2, v.69* in A.K. Bag, 1979, p. 182] et [*Līlāvatī,125*, in Colebrooke, 1892, rééd. 1927, p.81].
9 [*Līlāvatī, 122*, in Colebrooke, 1892, rééd. 1927, p. 80].
10 [*Līlāvatī, 123*, in Colebrooke, 1892, rééd. 1927, p. 80].
11 [T.A. Saraswathi, 1963, p. 324].
12 [T.A. Saraswathi, 1963, p. 326].
13 [*Ganitasārasamgraha, ch.2, 94 et 95*, in A.K. Bag, 1979, pp.186-187].
14 Par exemple : [al Bīrūnī, *Kitābu'l Hind, 48*, trad. Q. Ahmad, 1992, pp. 187-188].

Les « séries complexes »

Le premier type de « série complexe » est pour les Indiens la sommation des puissances p-ièmes (avec $p \geq 2$) des n premiers entiers naturels. Āryabhata I a énoncé les deux cas particuliers[15] :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

D'autres mathématiciens ont par la suite cité ces formules, sans résoudre le problème posé par la sommations des puissances supérieures. Bhāskara II les expose comme suit :

> « *Le tiers du double de la période ajoutée à 1, multiplié par la somme, est la somme des carrés. La somme des cubes à partir de 1 est selon les Anciens égale au carré de la somme*[16]. »

Ainsi : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(1+2n)}{3} \times \sum_{k=1}^{n} k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\sum_{k=1}^{n} k\right]^2$.

Dans l'*Āryabhatīya Bhāsya*, Nīlakantha a exposé une démonstration géométrique de ces résultats[17], que nous étudions à l'annexe 9. Par sa nature même, elle peut expliquer le fait que, confrontés comme le furent les Grecs aux limitations inhérentes à la représentation de l'espace en deux ou trois dimensions, les Indiens se soient limités à ces deux cas particuliers. Ainsi que nous le verrons au chapitre 5, les mathématiciens de l'école de Mādhava ont toutefois été amenés, du fait de leurs travaux concernant la rectification d'un arc de cercle, à évaluer, pour toute valeur de p, les sommes du type $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ pour les grandes valeurs de n.

Mahāvīra a donné une généralisation des deux cas particuliers précédents en exprimant la somme des carrés et la somme des cubes des n premiers termes d'une suite arithmétique. Ses formules peuvent être retranscrites comme suit[18] :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a+kb)^2 = n[(\frac{(2n-1)b^2}{b} + ab)(n-1) + a^2].$$

Et, si $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (a+kb)$, alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (a+kb)^3 = S^2 b + Sa(a-b) \quad \text{si } a \geq b \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{n-1} (a+kb)^3 = S^2 b - Sa(a-b) \quad \text{si } a \leq b.$$

Le second type de « série complexe » envisagé par les Indiens est le cas des séries dont, suivant la terminologie moderne, le terme général n'est connu que par une formule de récurrence. Mahāvīra a résolu ce problème dans le cas particulier où le terme général est celui d'une suite arithmético-géométrique[19]. Nous pouvons le formuler comme suit :

---

[15] [*Āryabhatīya, Ganitapāda, v.22*, in A.K. Bag, 1979, p. 182].
[16] [*Līlāvatī, 117*, in Colebrooke, 1892, rééd. 1927, p. 77].
[17] [T.A. Saraswathi, 1963, p. 327].
[18] [A.K. Bag, 1979, p. 183].

[19] [*Ganitasārasamgraha, ch.2, 314*, in A.K. Bag, 1979, p. 186].

Soient $a \neq 0$, $r \neq 1$ et $S = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k$; soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $u_0 = a$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = ru_n \pm b$. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k = S \pm \frac{(\frac{S}{a} - n)b}{r-1}.$$

Le troisième type de « série complexe » est ce que les Indiens nomment *vārasamkalita* (littéralement : « sommation répétée »). Ce terme fut peut-être introduit par Nārāyana Pandita[20]. Dans le *Ganita Kaumudī*, ce dernier reprit et tenta de systématiser certains résultats d'Āryabhata I et de Bhāskara II concernant la somme des entiers triangulaires.
Āryabhata I avait par exemple énoncé[21] que la somme que nous pouvons symboliser par

$$S = n \times 1 + (n-1) \times 2 + (n-2) \times 3 + ... + [n-(n-1)] \times n = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k)(k+1)$$

correspond à la somme des n premiers entiers dits « triangulaires », c'est-à-dire : $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} i$. Il en avait donné le résultat, sous une forme équivalant à $S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$. Bhāskara II avait quant à lui affirmé :

> « *La moitié de la période, multipliée par la période ajoutée à l'unité, est la somme des entiers à partir de 1 et est nommée leur addition* (samkalita). *Ceci, multiplié par la période ajoutée à 2 et divisé par 3, est l'agrégation des additions* (samkalita)[22]. »

Autrement dit : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{2}(n+1)$ et $\sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{k} i = \left[\frac{n}{2}(n+1)\right] \times \frac{n+2}{3}$.

Nārayāna tenta de généraliser ce type de sommation. Il définit le *vārasamkalita* d'ordre 1 par : $V_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2}$.

La somme des n premières sommes d'entiers, c'est à dire la somme des n premiers entiers « triangulaires », est alors le *vārasamkalita* d'ordre 2 :

$$V_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} V_k^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n}{1} \times \frac{n+1}{2} \times \frac{n+2}{3}.$$

En généralisant ce procédé, il peut définir le *vārasamkalita* d'ordre p par :

$$V_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} V_k^{(p-1)}.$$

Il énonce alors comme suit la formule donnant $V_n^{(p)}$ dans le cas général :

> « *Les nombres commençant par le nombre de termes dans la série et augmentés unité par unité, égaux en nombre à une unité supérieure au nombre représentant l'ordre de sommation forment de façon séparée les numérateurs. Les dénominateurs*

[20] [A.K. Bag, 1979, p. 184].
[21] [*Āryabhatīya, Ganitapāda, v.21*, in A.K. Bag, 1979, pp. 183-184].
[22] [*Līlāvatī, 115*, in Colebrooke, 1892, rééd. 1927, p. 76].

correspondants sont les entiers naturels commençant par 1. Le produit est le vārasamkalita[23]. »

On a ainsi : $V_n^{(p)} = \prod_{k=0}^{p} \frac{n+k}{k+1}$. C'est-à-dire, en utilisant les notations modernes :

$$V_n^{(p)} = \frac{\prod_{k=0}^{p}(n+k)}{(p+1)!} = \frac{(n+p)!}{(n-1)!(p+1)!} = C_{n+p}^{p+1}.$$

Aucune démonstration générale de ce résultat n'est fournie par Nārāyana. Nous en proposons une à l'annexe 10. Il est probable en fait qu'il l'a obtenu par induction : la formule était, comme nous l'avons vu, déjà connue aux ordres 1 et 2 ; de plus, elle se démontre à l'ordre 3 à l'aide de résultats déjà bien établis concernant la somme des carrés et la somme des cubes. En effet :

$$\begin{aligned} V_n^{(3)} &= \sum_{k=1}^{n} V_k^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)(k+2)}{6} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k) \\ &= \frac{1}{6}\left[(\frac{n(n+1)}{2})^2 + 3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2} \right] = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4!}. \end{aligned}$$

Nārāyana cite par ailleurs un problème concret lié à ces formules : il s'agit de déterminer le nombre de descendants d'un veau femelle en 20 ans, sachant qu'une vache accouche d'un veau femelle tous les ans à partir de l'âge de 3 ans[24]. Le lecteur pourra vérifier que la solution est exactement :

$$V_{17}^{(1)} + V_{14}^{(2)} + V_{11}^{(3)} + V_{8}^{(4)} + V_{5}^{(5)} + V_{2}^{(6)}.$$

Remarquons au passage que ce problème concernant les sommes itérées d'entiers naturels fut également étudié trois siècles plus tard par Blaise Pascal dans son *Traité du triangle arithmétique*. Ce qui, dans sa terminologie, peut être désigné par le n-ième nombre d'ordre p correspond en effet, pour $p \geq 3$, à ce que nous notons $V_n^{(p-2)}$. En mettant clairement en évidence le lien entre ces nombres et les coefficients désormais dits « binomiaux », Pascal décrivit une méthode permettant de les obtenir[25]. Pour les détails, le lecteur est renvoyé à l'annexe 10.

Notons enfin que ce principe de sommation réitérée fut généralisé par Nārāyana à tous les types de somme à progression arithmétique. Mahāvīra[26] avait tenté de résoudre ce problème à l'ordre 2, mais sa solution était erronée. Il donna en effet un résultat équivalent à :

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}[a+r(i-1)] = \frac{n}{2}\left[\frac{(2n-1)r^2}{6} + \frac{r}{2} + ar\right](n+1) + a(a+1).$$

La solution correcte est en fait : $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}[a+r(i-1)] = \frac{n(n+1)}{2}\left[a + \frac{r(n-1)}{3}\right]$.

Nārāyana formula la solution à tout ordre de la façon suivante :

« *Le multiplicande de la raison sera le* vārasamkalita *du nombre de termes diminué d'une unité. Ce* vārasamkalita *multiplié d'une part par l'ordre de la répétition* (vāra) *augmenté d'une unité et d'autre part divisé par le nombre de termes diminué d'une*

23 [*Ganita Kaumudī, 2*, in T.A. Saraswathi, 1963, p. 321].
24 [T.A. Saraswathi, 1963, p. 323].
25 [B. Pascal, 1665, rééd. 1963, pp. 54-55].
26 [*Ganitasārasamgraha, ch.6, 305,* in A.K. Bag, 1979, p. 185].

> *unité sera le multiplicande du premier terme. Le résultat de la sommation répétée sera la somme du premier terme et de la raison multipliés par leurs multiplicandes respectifs*[27]. »

Ainsi, soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $u_n = a + r(n-1)$. On définit par récurrence la « sommation répétée » d'ordre p des u_n par :

$$W_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad W_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} W_k^{(p-1)} \quad \text{pour tout } p \geq 2 .$$

La proposition de Nārāyana peut alors être retranscrite par :

$$W_n^{(p)} = a \frac{p+1}{n-1} V_{n-1}^{(p)} + r V_{n-1}^{(p)} \quad \text{pour tout } p \geq 1 .$$

La preuve n'en est, là encore, pas apportée par Nārāyana ; mais elle se déduit des résultats déjà énoncés concernant le cas particulier où $a = r = 1$. Nous en proposons une à l'annexe 10.

[27] [T.A. Saraswathi, 1963, pp. 322-323].

Chapitre 3
L'école de Mādhava

On désigne par école de Mādhava une école d'astronomie ayant exercé ses activités dans la région correspondant à l'actuel état du Kerala entre la fin du XIV^e siècle et le début du XVII^e siècle. Elle doit cette appellation au fait que les principaux astronomes rattachés à cette école désignent eux-même Mādhava comme leur *adiguru*, c'est-à-dire comme leur maître spirituel originel[1].

Avant même de considérer les travaux de ce groupe d'astronomes, il importe de situer le contexte historique dans lequel ils s'inscrivent.

D'une façon générale, l'Inde méridionale doit une partie de sa spécificité au fait qu'elle ne fut pas directement touchée par l'expansion islamique, si ce n'est du point de vue commercial. Commencée dès le VIII^e siècle, celle-ci eut entre autres pour conséquence un affaiblissement non négligeable de l'activité créatrice au nord du Deccan[2]. Tandis qu'en Inde du Nord les incursions arabes, particulièrement brutales, mirent à mal les équilibres traditionnels de la société hindoue, trois grandes dynasties dominèrent le sud du Deccan du IX^e au XIII^e siècle et y permirent l'épanouissement de la culture dravidienne[3] : les dynasties Chōla, Hoysala et Pandya[4]. D'une certaine manière, l'Inde méridionale devint progressivement au cours de cette période un bastion de l'hindouisme. La culture dravidienne, reposant sur la langue tamoule et ses dérivées, accueillit en effet son homologue brahmanique fondée sur le sanscrit. La conséquence en fut un puissant essor intellectuel et artistique, mû pour l'essentiel par la volonté de préserver les enseignements traditionnels[5]. Ce phénomène se traduisit d'ailleurs politiquement au XIV^e siècle. Divers sultanats musulmans s'étaient jusqu'alors partagé la domination de la plus grande partie de la péninsule indienne, certains ayant réussi à s'étendre jusqu'au sud du Deccan. La réaction hindoue s'organisa après l'anéantissement en 1325 de la dynastie Hoysala et fonda en 1336 le vaste empire de Vijayanagar. Celui-ci, constitué de multiples royaumes hindous, demeura jusqu'en 1556 l'état hindou le plus puissant, le seul capable de résister aux attaques islamiques. Non seulement il fut le lieu d'un développement commercial sans précédent, mais l'activité religieuse, la littérature, les arts et les sciences d'inspiration brahmanique y bénéficièrent du mécénat des divers *rajahs* (« rois ») ayant exercé leur pouvoir au sein de l'empire[6].

En ce qui concerne en particulier l'actuelle région du Kerala, divers facteurs historiques supplémentaires peuvent avoir contribué à créer les conditions d'apparition d'une école telle que celle de Mādhava. D'une part, cette région a, dès les siècles immédiatement antérieurs à l'ère chrétienne, joui d'une exceptionnelle prospérité, en tant qu'important lieu d'échanges sur la route maritime des épices. Le Kerala demeure d'ailleurs dans l'Inde moderne l'état le plus riche et le plus alphabétisé[7]. D'autre part, l'une des spécificités de cette région est l'existence d'une caste très puissante de brahmanes, les Nambūtiri, qui semble y avoir assis sa domination depuis une période très reculée. Cumulant le statut sacerdotal et, dans une certaine mesure, la

---

[1] Voir par exemple [K. Plofker, 2001, pp. 283-295] et [A.K. Bag, 1979, pp. 37-38].
[2] [J. Filliozat, in R. Taton, T. 1, 1957, rééd. 1994, p. 526].
[3] Le terme « dravidien » fut à l'origine créé pour regrouper sous une même désignation le tamoul et les langues vernaculaires apparentées du sud de l'Inde. Par extension, il désigne les cultures diverses qui reposent sur ces langues et qui ont en commun le fait d'avoir subi l'influence des Aryens et de la religion védique plus tardivement que le reste de l'Inde.
[4] Voir par exemple [*Encyclopaedia Universalis,* vol. 8, 1980, p. 809].
[5] [J. Filliozat, in R. Taton, T. 1, 1957, rééd. 1994, p. 526].
[6] [*Encyclopaedia Universalis,* 1980, vol. 8, pp. 810-811].
[7] [D.B. Rao, 1996].

propriété des terres, ces brahmanes formèrent une véritable oligarchie dont le pouvoir transcendait celui des *rajahs* et unifiait la région par delà ses clivages politiques. Pour la plupart lettrés, les Nambūtiris contribuèrent largement à la renaissance brahmanique sous l'empire Chōla et celui de Vijayanagar[8].

Bien que l'école de Mādhava s'inscrive dans le contexte de cette renaissance, il faut noter qu'elle est aussi l'héritière d'une longue tradition keralaise d'astronomie et de mathématiques, dont l'orientation générale a consisté à préciser, corriger et enrichir les méthodes d'Āryabhata I[9]. Même si l'hypothèse émise par certains historiens indiens, selon laquelle ce dernier fut natif du Kerala et y fonda une école à la fin de sa vie, apparaît fort douteuse[10], il n'en demeure pas moins que presque tous les astronomes ultérieurs issus de cette région, en particulier Mādhava et ses disciples, se réclament de la tradition qu'il a instaurée.

L'un des plus brillants prédécesseurs keralais de Mādhava est Govindaswāmin, qui semble avoir vécu au cours de la première moitié du IXe siècle. Sa seule œuvre connue est un commentaire sur le *Māhabhāskarīya Bhāsya* de Bhāskara I. Elle contient entre autres une table des vingt-quatre Sinus qui fit autorité pendant plusieurs siècles ; nous l'avons retranscrite au chapitre 1. Govindaswāmin eut une influence certaine sur Mādhava et ses disciples, car ces derniers le citent en plusieurs occasions[11]. On sait d'ailleurs par leur intermédiaire qu'il écrivit aussi un commentaire sur l'*Āryabhatīya* d'Āryabhata I, qui semble être perdu[12].

D'autres astronomes et mathématiciens non originaires de l'actuel Kerala peuvent également avoir influencé Mādhava et ses successeurs. Il en est ainsi de Mahāvīra, qui fut membre de l'école de Mysore[13], à une époque où s'initiait sous la dynastie Chōla une certaine unification politique et culturelle. Son seul traité connu, le *Ganitasārasamgraha*, est daté de 850 et est (fait assez rare) exclusivement consacré aux mathématiques. Il s'agit semble-t-il pour l'essentiel d'un commentaire approfondi des travaux mathématiques de Brahmagupta, qu'il enrichit par de nouveaux énoncés. Mahāvīra y établit en particulier de nombreux résultats concernant les séries, qu'elles soient arithmétiques, géométriques ou « complexes ». Nous en avons mentionné quelques-uns dans le chapitre précédent.

Ni ses antécédents scientifiques, ni le contexte historique de son apparition, ne sauraient cependant diminuer l'originalité de l'école de Mādhava. Elle se caractérise d'abord par son exigence de fonder l'astronomie sur des calculs mathématiques précis et sur l'accord de ces derniers avec l'observation[14]. Bien qu'il ne s'agisse pas d'un cas unique en Inde, elle utilisa aussi un nouveau système de notation des nombres à l'aide de lettres, appelée notation *katapayādi*. L'effet principal de ce système fut de versifier les textes d'astronomie ou de mathématiques de telle sorte que leur mémorisation en soit rendue plus aisée, voire de leur donner plusieurs niveaux de signification faisant parfois référence à des mythes religieux[15]. Par delà ces aspects, l'originalité profonde de cette école repose toutefois sur son approche inédite et remarquablement efficace de certains problèmes mathématiques, dont le mérite semble revenir pour l'essentiel à Mādhava lui-même.

[8] Voir par exemple [L. Dumont, 1966, pp. 103-104] et [D. Pingree, *Proceedings*…, p. 28].
[9] [K.V. Sarma, 1972, p. 6].
[10] Ces hypothèses sont par exemple formulées dans [A.K. Bag, 1979, pp. 12-13]. On ne dispose en fait d'aucune information conséquente sur la vie d'Āryabhata I, en particulier quant à ses origines.
[11] [A.K. Bag, 1979, p. 21].
[12] [A.K. Bag, 1979, p. 21].
[13] [A.K. Bag, 1979, p. 12 et p. 23]. L'école de Mysore fut l'une des trois plus grandes écoles d'astronomie en Inde médiévale. Les deux autres furent celle de Kusumpura (près de l'actuelle Patna), qui forma entre autres Āryabhata I, et celle d'Ujjain, dont Varāhamihira et Brahmagupta sont issus.
[14] [K.V. Sarma, 1972, pp. 2-3].
[15] [T. Hayashi, T. Kusuba, M. Yano, 1990, p. 171, note 1].

Originaire d'un village situé quelque peu au nord de l'actuelle Cochin, ce brahmane n'était pas, contrairement à la plupart de ses successeurs, membre de la caste des Nambūtiris[16]. Ce statut inférieur ne l'empêcha pas d'être vénéré par ses disciples, qui firent référence à lui sous le terme de *golavid* (« expert de la sphère ») et lui reconnurent la paternité des grandes réalisations mathématiques qui, précisément, font sa renommée[17] : d'une part, la rectification d'un arc de cercle donné sous forme de « développement en série » ; d'autre part, les « développements en séries » du Sinus et du Versinus d'un arc de cercle donné et l'excellente table trigonométrique qui fut construite par leur intermédiaire. Ses successeurs Nīlakantha et Śankara Vāriyar lui attribuent aussi l'énoncé, lié au premier problème, selon lequel un cercle de diamètre 9×10^{11} unités a pour circonférence 2827433388233 unités[18]. Ce résultat équivaut à l'approximation correcte à $2{,}5\times10^{-12}$ près (précision remarquable pour son époque) :

$$\pi \approx \frac{2827433388233}{900000000000} \approx 3{,}1415926535922\,.$$

On ne connaît toutefois de Mādhava que quelques traités d'astronomie. Ses travaux proprement mathématiques, dont ceux que nous avons évoqués, ne sont accessibles que par l'intermédiaire de ses disciples, lesquels le citent abondamment.

Parameśvara, qui vécut de façon certaine entre 1360 et 1460, est le seul disciple direct connu de Mādhava[19]. Ce fut avant tout un astronome réputé, qui commenta les traités classiques et introduisit un esprit nouveau dans cette discipline. Constatant l'incapacité du système de calculs astronomiques en vigueur jusqu'alors (le système dit *Parahita*) à prévoir de façon correcte les phénomènes célestes, il insista particulièrement sur la nécessité de faire concorder les calculs à l'observation. Dans son traité majeur, le *Drgganita*, il donne ainsi en quelque sorte le ton de toute l'école de Mādhava :

> « *Les positions des planètes obtenues selon le* Parahita *sont différentes de celles vues par les yeux. Et, dans les textes qui font autorité* (Śāstras)*, il est dit que seules les positions observées sont véridiques. Les positions des planètes permettent de connaître les moments spécifiés pour l'accomplissement des actes méritoires. Les moments calculés à partir de positions incorrectes des planètes ne seront pas auspicieux pour ces actes. Par conséquent, des efforts doivent être faits par ceux qui sont instruits dans les sciences et par ceux qui sont experts de la sphère afin de connaître les vraies positions des planètes. Pensant ainsi et m'efforçant d'étudier les anciens textes et d'observer les vraies positions des planètes [...], je compose un manuel d'astronomie pour les disciples deux fois nés en attente de la connaissance de la position véritable des planètes*[20]. »

Parameśvara était un brahmane Nambūtiri. Il fonda dans son propre foyer un centre d'enseignement de l'astronomie nommé Vataśreni, qui devint très réputé aux XIVe et XVe siècles dans la région correspondant à l'actuel Kerala[21]. Il composa de nombreux traités relatifs à cette science et fut notamment renommé pour ses calculs minutieux permettant la prévision des éclipses[22]. Son œuvre mathématique en tant que telle n'est toutefois pas négligeable, non seulement en ce sens qu'il contribua, en commentant les traités d'Āryabhata I, de Bhāskara I

[16] [D. Gold, D. Pingree, 1991, p. 49].
[17] [A.K. Bag, 1979, p. 37].
[18] [D. Pingree, *Proceedings*..., p. 27].
[19] [D. Gold, D. Pingree, 1991, p. 50].
[20] [K.V. Sarma, 1972, pp. 2-3]. L'expression « deux-fois nés » désigne les membres des castes supérieures, qui sont initiés aux rituels brahmaniques.
[21] [D. Gold, D. Pingree, 1991, p. 50].
[22] [K.V. Sarma, 1972, p. 33].

et de Bhāskara II, à transmettre la tradition, mais aussi parce qu'il le fit à la lumière de l'enseignement de Mādhava[23]. Il proposa en outre quelques innovations. Dans le *Siddhāntadīpikā* (« Éclairage des solutions »), qui constitue un sur-commentaire du *Māhabhāskarīya Bhāsya* de Govindaswāmin, il décrivit par exemple un algorithme de détermination par valeurs approchées du Sinus d'un arc donné. Celui-ci repose sur une technique d'interpolation linéaire itérée connue sous le nom de « méthode des sécantes » qui est très semblable à l'algorithme dit « de Newton-Raphson », à ceci près que des taux de variations y remplacent des dérivées[24].

Le seul disciple connu de Parameśvara est son propre fils, Dāmodara. On sait seulement de celui-ci qu'il transmit la tradition inaugurée par Mādhava à plusieurs brahmanes Nambūtiri[25].

Le premier d'entre eux fut Nīlakantha. Il est toutefois possible que ce dernier, né vers 1444 et mort avant 1543, ait directement connu Parameśvara[26]. Après avoir reçu l'enseignement de Dāmodara à Vataśreni, il rédigea en sanscrit l'*Āryabhatīya Bhāsya* (commentaire sur l'*Āryabhatīya* d'Āryabhata I) et le *Tantrasamgraha* (« Totalité de la doctrine »), daté de 1501 [27]. Le *Tantrasamgraha* contient en particulier le plus ancien exposé connu des résultats attribués à Mādhava concernant les « développements en séries des fonctions trigonométriques », ainsi que la table de vingt quatre Sinus qui en fut déduite[28]. Dans l'*Āryabhatīya Bhāsya*, où ce problème des « développements en séries » fut également abordé, il énonça et démontra les formules donnant la somme des termes consécutifs des suites arithmétiques ou géométriques, la somme des nombres triangulaires, ainsi que la somme des carrés et des cubes d'entiers[29]. Certaines de ses démonstrations, effectuées à l'aide de diagrammes géométriques, sont étudiées à l'annexe 9. Toujours dans l'*Āryabhatīya Bhāsya*, Nīlakantha fut aussi, semble-t-il, le premier à énoncer une règle générale concernant la somme d'une série à progression géométrique dont le nombre de termes est « infini en puissance » :

> « *La somme résultant de la sommation de termes du premier jusqu'à la fin, dont chaque élément est obtenu en divisant le précédent par le même diviseur, précisément la somme réduite de ces termes, est partout égale au premier terme divisé par le diviseur commun ôté de un*[30]. »

Son énoncé n'est cependant pas aussi général que possible, puisqu'il ne concerne que les cas où la raison est l'inverse d'un entier positif : le « premier terme » désigne un certain entier a et le « diviseur commun » un entier naturel non nul p. La série considérée est alors $\sum_{k\geq 1}\frac{a}{p^k}$ et il est affirmé que sa somme est égale à $\frac{a}{p-1}$, somme qualifiée de « réduite » et qui correspond en fait au résultat obtenu lorsque le nombre de termes sommés est infini. Il est difficile de savoir précisément ce que Nīlakantha désignait par une sommation de termes « du premier jusqu'à la fin ». On peut toutefois penser qu'il ne s'agissait pas d'une somme actuellement infinie, mais d'une somme dont le nombre de termes est potentiellement infini, voire simplement « assez

---

23 Voir par exemple [A.K. Bag, 1979, pp. 39-40], [K. Plofker, 1996, pp. 246-256] et [K. Plofker, 2001, p. 284].
24 [K. Plofker,1996, pp. 246-256].
25 [D. Gold, D. Pingree, 1991, p. 50].
26 [A.K. Bag, 1979, p. 41].
27 [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 316].
28 Voir par exemple [T.A. Saraswathi, 1963, pp. 320-343].
29 [T.A. Saraswathi, 1963, pp. 327-328].
30 [T.A. Saraswathi, 1963, p. 325]. Très délicate à effectuer, la traduction présentée ici a été effectuée à partir d'une traduction du sanscrit réalisée par A. Keller. Elle diffère légèrement de celle donnée (en anglais) par T.A. Saraswathi.

grand ». La façon dont Nīlakantha justifia sur un exemple la validité de son énoncé est intéressante à cet égard. Il considéra en effet le cas particulier correspondant à l'identité $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{4^k}=\frac{1}{3}$ et adopta un point de vue rétrospectivement très moderne en ce sens que la somme de cette série avait selon lui pour valeur $\frac{1}{3}$ du fait de la possibilité de rendre ses sommes partielles aussi proches de cette valeur que voulu, pourvu que le nombre de termes soit assez grand[31]. Sa justification est étudiée à l'annexe 8.

Nīlakantha fut aussi conscient de l'irrationalité du rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre, fait qui n'est probablement pas sans rapport avec l'approche du problème de la rectification du cercle par des « développements en séries ». Il affirme en effet dans l'*Āryabhatīya Bhāsya* :

> « *Si le diamètre, mesuré selon une unité particulière, est commensurable selon la même unité de mesure, la circonférence est incommensurable ; et si la circonférence est commensurable avec l'unité de mesure, alors le diamètre est incommensurable selon la même unité*[32]. »

Enfin, en suivant une perspective et un raisonnement différent[33] de celui de Bhāskara II, il donna une justification d'un résultat important concernant la « différentiation » du Sinus et du Cosinus, que nous étudions au chapitre 7.

Dāmodara eut aussi pour élève renommé un brahmane Nambūtiri nommé Jyesthadeva, qui fut donc un jeune condisciple de Nīlakantha à Vataśreni. Jyesthadeva semble avoir vécu[34] entre 1500 et 1575. Son principal écrit, le *Yuktibhāsā* (« Discours du fondement »), fut rédigé en malayālam et s'inspire largement du *Tantrasamgraha* de Nīlakantha, dont il constitue pour l'essentiel un commentaire[35]. Jyesthadeva y traita d'arithmétique, de géométrie et d'algèbre, mais aussi d'astronomie et de trigonométrie sphérique. L'originalité de ce commentaire est de fournir les démonstrations de certains résultats mathématiques utilisés par les astronomes médiévaux[36]. Y sont en particulier justifiés les « développements en séries des fonctions trigonométriques ». Nous-nous réfèrerons largement à ce traité au cours des chapitres 4 à 8.

Nīlakantha et Jyesthadeva eurent plusieurs disciples, dont au moins un en commun : Śānkara Vāriyar. Cet astronome, dont il faut noter qu'il n'était pas un brahmane Nambūtiri[37], semble avoir vécu[38] entre 1500 et 1560. Son *Yuktidīpikā* (« Éclairage du fondement ») est une traduction en sanscrit du *Yuktibhāsā* de Jyesthadeva, auquel il apporta de légères modifications. Il rédigea aussi en 1556 un commentaire sur le *Tantrasamgraha* de Nīlakantha, le *Laghuvivrti*. Dans le *Kriyākramakarī* (« Travail ordonné de l'ouvrage »), il commenta de façon approfondie le *Līlāvatī* de Bhāskara II et en justifia de nombreux résultats[39]. Comme celle de ses maîtres, son œuvre est un témoin important de l'enseignement de Mādhava. Elle contient en effet plusieurs énoncés relatifs aux « développements en séries » qui permettent de comprendre comment l'excellente approximation du rapport de la

---

[31] [T.A. Saraswathi, 1963, pp. 325-326].
[32] [*Āryabhatīya Bhāsya,* commentaire du vers 10 du *Ganitapada*, in A.K. Bag, 1979, p. 263]. Voir aussi [K.V. Sarma, 1972, p. 22].
[33] Voir par exemple [A.K. Bag, 1979, pp. 289-291]. Pour d'autres références, voir le chapitre 7.
[34] [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 316].
[35] [D. Gold, D. Pingree, 1991, p. 51].
[36] [A.K. Bag, 1979, p. 44].
[37] [D.Gold, D.Pingree, 1991, p. 51]. Śānkara Vāriyar faisait partie d'une caste inférieure de brahmanes dont la fonction principale était l'entretien des temples.
[38] [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 317].
[39] [D.Gold, D.Pingree, 1991, p. 51] et [A.K. Bag, 1979, p. 43].

circonférence d'un cercle à son diamètre énoncée plus haut put être déterminée à partir d'une série dont, suivant la terminologie moderne, la convergence est excessivement lente. Ils seront cités et étudiés au chapitre 6.

Le dernier membre prolifique probable[40] de l'école de Mādhava fut un disciple de Jyesthadeva nommé Acyuta Pisārati, qui vécut entre 1550 et 1621. Fait assez exceptionnel, il n'était pas issu des castes de brahmanes[41]. Ses travaux concernèrent pour l'essentiel l'astronomie. Il fut notamment le premier Indien à énoncer, comme Tycho Brahé à la même époque, le principe dit « de réduction de l'écliptique », destiné à tenir compte du fait que la trajectoire d'une planète dévie en général légèrement du plan de l'écliptique[42]. Son seul traité essentiellement mathématique, le *Karanottama*, n'a par contre pas l'intérêt des œuvres de ses prédécesseurs, en ce sens qu'il ne contient pas de résultats originaux ni n'apporte d'éclairage nouveau sur l'enseignement de Mādhava [43].

Après la mort d'Acyuta Pisārati, la transmission des idées dont il était l'héritier semble s'être rapidement interrompue.

Il faut néanmoins noter l'existence d'une œuvre d'astronomie dont l'auteur demeure inconnu et la date de rédaction controversée[44], mais qui peut de façon certaine être rattachée à la tradition de Mādhava. Il s'agit du *Karanapaddhati*, qui a en particulier l'intérêt de reproduire de nombreux énoncés relatifs aux « développements en séries » et d'en fournir quelques justifications.

---

40 [K. Plofker, 2001, p. 284].
41 [A.K. Bag, 1979, p. 47].
42 [K.V. Sarma, 1972, pp. 12-14].
43 Voir par exemple [A.K. Bag, 1979, p. 47].
44 1596 selon [A.K. Bag, 1979, p. 47] ; 1740 selon [B.V. Subbarayappa et K.V. Sarma, 1985, p. 319]. Ces derniers, ainsi que [T.A Saraswathi, 1962, p. 320] ont par ailleurs émis l'hypothèse que ce traité serait l'œuvre de Putumana Somayajīn, qui fut un astronome keralais ayant vécu entre la fin du XVIIe et le milieu du XVIIIe siècle.

Chapitre 4
La rectification d'un arc de cercle (1e partie)

L'un des énoncés les plus remarquables du *Tantrasamgraha* de Nīlakantha concerne la rectification d'un arc de cercle donné sous la forme d'un « développement en série » :

> « *Obtiens premièrement le résultat du produit du Sinus par le rayon* (trijyā) *et divise ce résultat par le Cosinus. Multiplie le résultat par le carré du Sinus et divise par le carré du Cosinus. On obtient alors un second résultat, ainsi qu'une suite de résultats successifs en répétant la multiplication par le carré du Sinus et en divisant par le carré du Cosinus. Divise les termes de la suite dans l'ordre par les nombres 1 ; 3 ; 5 ;… ; ensuite, ajoute tous les termes impairs et soustrais y tous les termes pairs. Tu obtiens alors l'arc dont les deux éléments sont les Sinus et Cosinus donnés. Ici, le plus petit des deux éléments doit être pris comme Sinus. Sinon les termes ne seront pas limités, bien qu'ils soient obtenus par notre procédé itératif*[1]. »

Le *Kriyākramakarī*[2] et le *Karanapaddhati*[3] formulent le même résultat en des termes quasiment identiques. Transcrivons cet énoncé :

Dans un cercle de rayon R et de circonférence C, notons t la mesure d'un arc tel que : $0 \le t \le \dfrac{C}{8}$ (soit : $0 \le t \le R \times \dfrac{\pi}{4}$). Cette condition est imposée par la dernière remarque ; nous y reviendrons plus loin.

Il s'agit d'abord de calculer : $\dfrac{Sin(t) \times R}{Cos(t)}$;

on calcule ensuite : $\dfrac{Sin(t) \times R}{Cos(t)} \times \dfrac{Sin^2(t)}{Cos^2(t)} = R\dfrac{Sin^3(t)}{Cos^3(t)}$;

on poursuit ce procédé, en divisant les termes obtenus par les entiers impairs successifs :

Étape 1	$R\dfrac{Sin(t)}{Cos(t)}$	Division par 1
Étape 2	$R\dfrac{Sin^3(t)}{Cos^3(t)}$	Division par 3
Étape 3	$R\dfrac{Sin^5(t)}{Cos^5(t)}$	Division par 5
Étape 4	$R\dfrac{Sin^7(t)}{Cos^7(t)}$	Division par 7
………	…..	…..

[1] [C.T. Rajagopal, M.S. Rangachari, 1978, p. 93]. Nous-nous référons ici en fait à la traduction du passage du *Yuktidīpikā* donnée par ces auteurs, ce traité citant effectivement les vers du *Tantrasamgraha*. Une traduction sensiblement différente de la dernière phrase fut donnée auparavant dans [C.T. Rajagopal, T.V. Aiyar, 1951, p. 67] : « *Sinon la (valeur de la) somme obtenue ne serait pas finie*. »

[2] [K.V. Sarma, 1972, p. 21].

[3] [A.K. Bag, 1979, p. 275].

On ajoute les termes obtenus aux étapes d'ordinal impair et on leur soustrait les termes obtenus aux étapes d'ordinal pair. On obtient alors :

$$\boxed{t = R\frac{Sin(t)}{Cos(t)} - \frac{R}{3}\frac{Sin^3(t)}{Cos^3(t)} + \frac{R}{5}\frac{Sin^5(t)}{Cos^5(t)} - \frac{R}{7}\frac{Sin^7(t)}{Cos^7(t)} + \ldots.. \qquad (1)}$$

En posant $\theta = \frac{t}{R}$, on a : $\frac{Sin(t)}{Cos(t)} = \tan(\theta)$. On peut donc constater que l'énoncé du *Tāntrasamgraha* peut être mis en correspondance avec l'identité moderne :

$$\theta = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\tan^{2p+1}(\theta)}{2p+1} \quad \text{pour tout } \theta \text{ tel que } 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}.$$

Ou encore :

$$Arc\tan(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{2p+1} \quad \text{pour tout } x \text{ tel que } 0 \le x \le 1. \qquad (1')$$

Ce dernier résultat, qui constitue un développement en série entière désormais classique, semble avoir été énoncé pour la première fois en Europe en 1671 par J. Gregory[4].

Il est néanmoins indispensable de conserver à l'esprit que le « fossé conceptuel » franchi par les Européens du XVII^e siècle avec l'avènement du calcul différentiel et intégral rend délicat, voire illusoire, tout parallèle établi entre travaux indiens et européens. Remarquons par exemple que Nīlakantha ne précise absolument pas la nature de la sommation qu'il utilise : son énoncé ne permet pas de savoir si le nombre de termes sommés est infini, ou simplement « très grand ». Nous verrons au cours de ce chapitre et de ceux qui suivent que sa perspective, comme celle de tous les successeurs de Mādhava, est essentiellement la dernière. Leurs travaux sont avant tout guidés par le souci de déterminer des approximations aussi précises que voulues de certaines quantités en vue des calculs astronomiques. Ils s'inscrivent plus dans le cadre de l'analyse dite « numérique » que dans celui de l'analyse proprement dit. Ce fait n'exclut certes pas que certaines intuitions liées en définitive au concept d'infini mathématique aient pu guider Mādhava et ses disciples. En témoignent par exemple les énoncés de Nīlakantha relatifs aux séries à progression géométrique ou à l'irrationalité du rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre, que nous avons présentés au chapitre précédent. La mesure dans laquelle ils ont pu s'approcher de ce concept est précisément l'un des intérêts majeurs de leurs travaux.

La dernière partie de l'énoncé de Nīlakantha est d'un grand intérêt, parce qu'elle montre la conscience qu'il a du domaine de validité de son développement. La condition $0 \le t \le \frac{C}{8}$ du développement (1) est en effet équivalente à la condition $0 \le x \le 1$ du développement (1') ; celle-ci est effectivement indispensable, l'intervalle de convergence de la série entière étant en fait]-1;1]. L'argument invoqué par Nīlakantha consiste à dire que si $Sin(t) > Cos(t)$, c'est-à-dire $\frac{Sin(t)}{Cos(t)} > 1$, alors la suite de terme général $\frac{1}{2p-1}\left[\frac{Sin(t)}{Cos(t)}\right]^{2p-1}$ n'est pas bornée ; il laisse entendre que, dans ce cas, l'algorithme qu'il décrit n'a pas de sens.

Une première possibilité est que Nīlakantha ait simplement adopté le principe selon lequel la sommation d'un « grand » nombre de termes d'une série est possible dès lors que son terme général devient de plus en plus petit (ce qui, on le sait, est faux). Or, sa connaissance de la sommation des termes d'une série à progression géométrique, que nous avons évoquée au chapitre 3, nous autorise à penser qu'il sait que les puissances de nombres (rationnels)

[4] Voir par exemple [J.L. Chabert et *alii*, 1994, p. 183].

deviennent d'autant plus petites que les puissances elles-mêmes sont élevées : il n'étudie en effet le problème de la sommation d'un « grand » nombre de termes pour ce type de série que lorsque la raison est l'inverse d'un entier supérieur à 1. Dans cette hypothèse, il peut avoir remarqué que les termes ne deviennent de plus en plus petits que lorsque $\frac{Sin(t)}{Cos(t)} \leq 1$; ceci suppose qu'il ait remarqué que les puissances d'un nombre (rationnel) supérieur à 1 croissent beaucoup plus vite que les puissances elles-mêmes, mais son énoncé laisse justement penser qu'il en a conscience.

Remarquons par ailleurs que la série considérée vérifie le critère suffisant de convergence des séries alternées si $\frac{Sin(t)}{Cos(t)} \leq 1$ et que sous cette hypothèse :

$$\left| t - \left\{ \sum_{p=1}^{q} (-1)^{p-1} \frac{R}{2p-1} \left[\frac{Sin(t)}{Cos(t)} \right]^{2p-1} \right\} \right| \leq \frac{R}{2q+1} \left[\frac{Sin(t)}{Cos(t)} \right]^{2q+1} \text{ pour tout } q \geq 1.$$

Il n'est pas impossible que cette propriété ait été observée par Nīlakantha dans ce cas particulier. Dans ces conditions, et c'est d'ailleurs la manière dont il envisage le problème analogue pour les séries à progression géométrique, il peut avoir remarqué que l'écart entre l'arc et les « sommes partielles » de la série devient d'autant plus petit que l'ordre de sommation est élevé. Nous verrons quoiqu'il en soit dans ce chapitre et au chapitre 6 que la détermination de (1) repose dans une large mesure sur l'utilisation de séries à progression géométrique. Nous donnerons à cette occasion une hypothèse complémentaire de celles qui précèdent concernant l'énoncé de sa condition de validité.

En ce qui concerne cette dernière, il faut noter que Jyesthadeva a apporté dans le *Yuktibhāsa* une précision supplémentaire[5] : lorsque $\frac{C}{8} < t < \frac{C}{4}$, c'est à dire $Sin(t) > Cos(t)$, l'algorithme décrit par Nīlakantha doit être appliqué non pas à l'arc de mesure *t*, mais à son complémentaire, c'est-à-dire à l'arc de mesure $\frac{C}{4} - t$. Dans ce cas, on a en effet : $Sin(\frac{C}{4} - t) < Cos(\frac{C}{4} - t)$.

Ni le *Tantrasamgraha*, ni le *Yuktidīpikā*, ni le *Karanapaddhati*, ne fournissent d'explication sur la méthode ayant permis d'établir le résultat (1). Seul le *Yuktibhāsa* permet de la connaître, en ce sens qu'il donne une justification du cas particulier du huitième de circonférence et que le cas général (1) peut être établi par une méthode analogue que nous présenterons au chapitre 6.
Ce cas particulier, pour lequel on a $Sin(t) = Cos(t)$, est mentionné sous des formes diverses dans tous les traités précédents. Il peut être retranscrit par :

$$\boxed{\frac{C}{8} = R - \frac{R}{3} + \frac{R}{5} - \frac{R}{7} + \ldots.. \qquad (2)}$$

Ce résultat a pour analogue moderne l'identité : $\frac{C}{8} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{R}{2p+1}$;

c'est-à-dire encore :

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1}.$$

[5] [C.T. Rajagopal, T.V. Aiyar, 1951, p. 67].

Gottfried Wilhelm Leibniz semble avoir été[6], en 1673, le premier Européen à mentionner ce cas particulier de la formule (1').

Le *Karanapaddhati* expose comme suit un développement équivalent à (2) :

> « *Le quadruple du diamètre doit être divisé séparément par chacun des entiers impairs 3 ; 5 ; 7,… ; chaque quotient d'ordre pair est soustrait de celui qui le précède. Le résultat combiné de toutes ces petites opérations, lorsqu'il est soustrait du quadruple du diamètre, donne la valeur de la circonférence avec une précision progressivement accrue*[7]. »

Notons D le diamètre du cercle. Les quotients d'ordre pair correspondent à $\frac{4D}{5}, \frac{4D}{9}, \frac{4D}{13}, \ldots$

Ceux qui les précèdent sont respectivement $\frac{4D}{3}, \frac{4D}{7}, \frac{4D}{11}, \ldots$

L'énoncé du *Karanapaddhati* peut donc être retranscrit par :

$$C = 4D - (\frac{4D}{3} - \frac{4D}{5}) - (\frac{4D}{7} - \frac{4D}{9}) - (\frac{4D}{11} - \frac{4D}{13}) - \ldots..$$

Sa dernière partie a cependant l'intérêt supplémentaire de montrer clairement qu'il s'inscrit dans la perspective du calcul numérique : il n'énonce pas une identité (valable pour une sommation infinie), mais un algorithme permettant une approximation aussi précise que voulue de la circonférence.

Notons que le *Yuktidīpikā* et le *Karanapaddhati* donnent d'autres « développements en série » analogues de la circonférence, dont la « convergence » est beaucoup plus rapide. Ils seront étudiés en détail au chapitre 6.

Dans le reste de ce chapitre et dans celui qui suit, nous allons examiner dans le détail les divers arguments donnés par Jyesthadeva dans le *Yuktibhāsa* pour justifier le développement (2). Ces arguments succèdent à la description d'un diagramme géométrique qui leur sert de support. Nous les avons présentés en quatre étapes, qui constituent en quelque sorte quatre lemmes introduisant naturellement la conclusion (2).

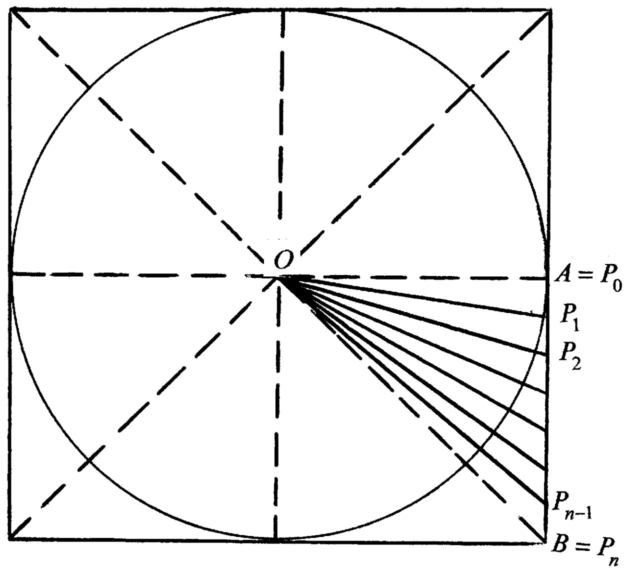
Diagramme fondamental

> « *Imagine un cercle touchant les quatre côtés d'un carré en leur milieu. Les lignes droites joignant les milieux des côtés opposés du carré passeront par le centre du cercle et formeront les directions primaires : Est-Ouest, Nord-Sud. La distance entre le point oriental de contact et le coin du Sud-Est du carré sera égale au demi-diamètre du cercle. Le long de cette moitié du côté du carré, prends un grand nombre de points afin de le diviser en un grand nombre de parties* (khanda). *Les lignes droites joignant ces points au centre du cercle sont des hypoténuses* (karna)[8]. »

On note O le centre du cercle, R son rayon et C sa circonférence ; $P_0 = A$ est le point oriental de contact ; $n \geq 1$ est un entier ; $B = P_n$ est le coin du Sud-Est ; $(P_k)_{1 \leq k \leq n-1}$ est une famille de points distincts intérieurs à $[AB]$, divisant ce segment en n segments de même longueur $\delta = \frac{R}{n}$;

[6] [J.L. Chabert et *alii*, 1994, p. 181].
[7] [A.K. Bag, 1979, p. 265].
[8] [C.T. Rajagopal, T.V. Aiyar, 1951, p. 68].

le fait que ces derniers soient isométriques n'est connu que par la suite de la démonstration. Ces segments sont les parties (*khanda*). On note a_k la longueur de l'hypoténuse (*karna*) $[OP_k]$.



Bien que l'énoncé puisse le laisser supposer, il est indispensable de noter que le nombre n de subdivisions de $[AB]$ (et donc la mesure δ du *khanda*) n'est pas totalement arbitraire. Il doit être « grand » pour que les arguments qui suivent soient valables ; en fait, il est précisé par ailleurs[9] que l'on peut *par exemple* fixer la valeur de n à 3438 et il est hautement significatif que cette valeur ait été évoquée. L'unité de mesure dans le cercle de référence étant la minute, nous avons en effet vu au chapitre 1 que le rayon est traditionnellement fixé à 3438 unités. La mesure de $[AB]$ étant égale à un rayon, on constate dans ces conditions qu'effectuer cette subdivision particulière revient à attribuer à δ la valeur d'une unité. Il est clair que d'autres unités de mesure et d'autres rayons pourraient être considérés. Par exemple, l'école de Mādhava ayant aussi fixé[10] le rayon de référence à $3437'44''48'''$, c'est-à-dire à $12375888'''$, il suffirait dans ce cas de prendre le soixantième de seconde pour unité de mesure et n égal à 12375888 pour se ramener à δ égal à 1. Le point essentiel ici est que n n'apparaît pas, dans le raisonnement qui suit, comme un entier arbitrairement grand, c'est-à-dire (au sens moderne), comme un paramètre que l'on peut faire « tendre vers l'infini » ; et que δ ne semble pas être arbitrairement petit, au sens moderne d'un paramètre qui pourrait « tendre vers 0 ». n est simplement assez grand pour que δ soit égal à l'unité de mesure fixée initialement. Ceci signifie aussi, et nous y reviendrons par la suite, que δ ne peut manifestement pas être considéré comme un infinitésimal.

Nous verrons au chapitre 5 que cette perspective a pour résultat de ramener l'analyse du continu constitué par l'arc de cercle étudié, qui nécessite ici la mise en œuvre du calcul intégral, à un problème arithmétique lié à des sommations d'entiers.

Plan de la démonstration

Le *Yuktibhāsa* justifie successivement plusieurs résultats que nous pouvons regrouper et interpréter comme suit à l'aide des notations précédemment introduites (la notation $\approx$ utilisée

[9] Voir [D. Pingree, *Proceedings*..., pp. 26-27].

[10] Elle l'a justement fait après avoir évalué de façon précise le rapport de la circonférence et du diamètre.

dans toute la suite désignant une égalité approximative entre deux quantités, dont la qualité augmente sous des conditions données) :

Lemme 1 : Pour tout $k \in [1;n]$, les segments $[OP_{k-1}]$ et $[OP_k]$ coupent le cercle en deux points Q_{k-1} et Q_k tels que $arc(Q_{k-1}Q_k) \approx \dfrac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k}$ lorsque n devient grand.

De plus, $\dfrac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k} \approx \dfrac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}}$ et donc $arc(Q_{k-1}Q_k) \approx \dfrac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}}$ lorsque n devient grand.

Lemme 2 : On a $\sum_{k=1}^{n} arc(Q_{k-1}Q_k) = \dfrac{C}{8}$. Le lemme 1 permet d'en déduire :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}} \approx \frac{C}{8} \quad \text{lorsque } n \text{ devient grand.}$$

Lemme 3 : Pour tout $k \in [1;n]$, $\dfrac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}}$ peut être développé à l'aide d'une série dont le terme général est celui d'une progression géométrique :

$$\frac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}} \approx \delta + \sum_{p=1}^{q} (-1)^p \delta \frac{(a_k^{\ 2} - R^2)^p}{R^{2p}} \quad \text{lorsque } q \text{ devient grand.}$$

Or : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left\{ \delta + \sum_{p=1}^{q} (-1)^p \delta \frac{(a_k^{\ 2} - R^2)^p}{R^{2p}} \right\} = R + \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^p}{R^{2p}} \left\{ \delta \sum_{k=1}^{n} (k\delta)^{2p} \right\}$ pour tous n et q.

Donc d'après le lemme 2 :

$$R + \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^p}{R^{2p}} \left\{ \delta \sum_{k=1}^{n} (k\delta)^{2p} \right\} \approx \frac{C}{8} \quad \text{lorsque } n \text{ et } q \text{ deviennent grands.}$$

Lemme 4 : Pour tout $p \geq 1$, $\delta \sum_{k=1}^{n} (k\delta)^{2p} \approx \dfrac{R^{2p+1}}{2p+1}$ lorsque n devient grand.

Conclusion : Il résulte des lemmes 3 et 4 que :

$$R + \sum_{p=1}^{q} (-1)^p \frac{R}{2p+1} \approx \frac{C}{8} \quad \text{lorsque } q \text{ devient grand.}$$

Nous étudierons le lemme 4 au chapitre 5. La conclusion, ainsi que d'autres énoncés de l'école de Mādhava sur ce sujet, feront l'objet du chapitre 6.

Lemme 1

Jyesthadeva commence par rappeler différents cas de similitude de triangles. En particulier :

Cas I :

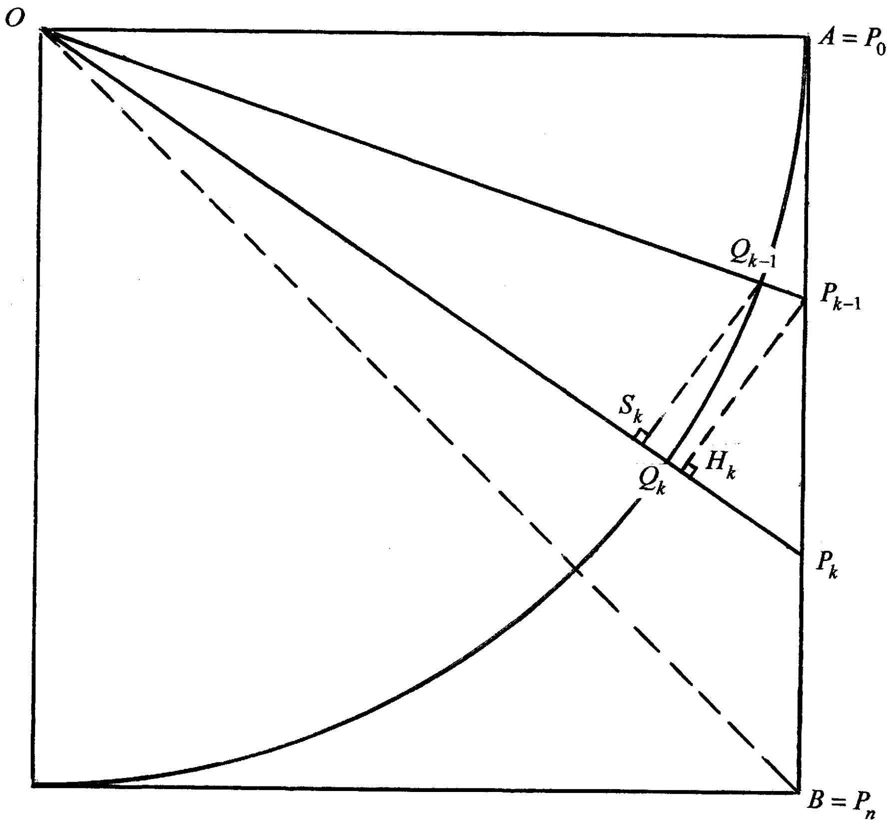
> « *[les deux triangles sont rectangles et] un côté de l'angle droit* (koti) *et l'hypoténuse* (karna) *de l'un sont perpendiculaires à l'hypoténuse* (karna) *et à un côté de l'angle droit* (koti) *de l'autre.* »

Cas II :

« *Les côtés des deux triangles sont soit parallèles, soit perpendiculaires deux à deux*[11]. »

Il énonce ensuite :

a) « *Si chaque partie* (khanda) *est multipliée par le carré du rayon du cercle et divisée par le produit des hypoténuses* (karna) *passant par ses extrémités, le quotient sera le Sinus de l'arc correspondant du cercle*[12]. »



Avec les notations que nous avons introduites, il s'agit donc de l'énoncé suivant :
Si, pour tout entier k tel que $1 \le k \le n$, on note Q_{k-1} l'intersection de (OP_{k-1}) et de (C), alors :

$$Sin[arc(Q_{k-1}Q_k)] = \frac{P_{k-1}P_k \times R^2}{OP_{k-1} \times OP_k}$$

Autrement dit, en notant S_k le projeté orthogonal de Q_{k-1} sur (OP_k) : $Q_{k-1}S_k = \dfrac{P_{k-1}P_k \times R^2}{OP_{k-1} \times OP_k}$.

Soit encore : $\boxed{Sin[arc(Q_{k-1}Q_k)] = Q_{k-1}S_k = \dfrac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k}}$

La démonstration fournie par le *Yuktibhāsa* peut être « traduite » comme suit[13] :
Notons H_k le projeté orthogonal de P_{k-1} sur (OP_k).
Les triangles $P_{k-1}H_kP_k$ et OP_0P_k étant semblables d'après le cas de similitude I, on a :

[11] [C.T. Rajagopal, T.V. Aiyar, 1951, p. 69].
[12] [C.T. Rajagopal, T.V. Aiyar, 1951, p. 69].
[13] [T.A. Saraswathi, 1963, p. 329].

$$\frac{P_{k-1}H_k}{P_{k-1}P_k} = \frac{OP_0}{OP_k} \;\; ; \text{ soit } \;\; P_{k-1}H_k = \frac{OP_0 \times P_{k-1}P_k}{OP_k} = \frac{R\delta}{a_k}.$$

Les triangles $OQ_{k-1}S_k$ et $OP_{k-1}H_k$ étant semblables d'après le cas de similitude II, on a :

$$\frac{Q_{k-1}S_k}{OQ_{k-1}} = \frac{P_{k-1}H_k}{OP_{k-1}} \;\; ; \text{ soit } \;\; Q_{k-1}S_k = \frac{OQ_{k-1} \times P_{k-1}H_k}{OP_{k-1}} = \frac{R \times P_{k-1}H_k}{a_{k-1}}.$$

L'égalité annoncée se déduit des deux résultats précédents.

Remarquons que, en notant α_{k-1} et α_k les mesures respectives des arcs (P_0Q_{k-1}) et (P_0Q_k), ce résultat se déduit aussi de la formule connue depuis Bhāskara II :

$$R \times Sin(\alpha_k - \alpha_{k-1}) = Sin(\alpha_k)Cos(\alpha_{k-1}) - Cos(\alpha_k)Sin(\alpha_{k-1}).$$

Il s'est donc agi dans un premier temps de déterminer la mesure des Sinus des « arcs élémentaires » $Q_{k-1}Q_k$. L'étape suivante utilise ce résultat afin d'évaluer la mesure de ces arcs ; évaluation indispensable compte tenu du but poursuivi, le huitième de circonférence étant obtenu par leur sommation. Jyesthadeva poursuit ainsi :

> b) « *Si la partie* (khanda) *est très petite, le Sinus de l'arc de cercle correspondant tend à coïncider avec la longueur de l'arc.*
>
> *Dans ce cas, il suffit de prendre pour diviseur le carré de l'une des deux hypoténuses* (karna)*, par exemple la plus longue*[14]. »

La première assertion revient à utiliser la propriété classique bien connue des Indiens, selon laquelle on peut identifier la mesure d'un arc à celle de la corde qu'il sous-tend si ces mesures sont petites par rapport au rayon. Elle correspond à l'approximation moderne : $\theta \approx 0 \Rightarrow \sin(\theta) \approx \theta$. Nous pouvons l'écrire :

Pour tout k tel que $1 \le k \le n$, $arc(Q_{k-1}Q_k) \approx Sin[arc(Q_{k-1}Q_k)]$ lorsque δ devient très petit.

La combinaison de cette approximation et du résultat obtenu au a) permet d'en déduire :

Pour tout k tel que $1 \le k \le n$, $arc(Q_{k-1}Q_k) \approx \dfrac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k}$ lorsque δ devient très petit.

Ce résultat demeure implicite dans la seconde assertion de Jyesthadeva, qui énonce en fait une autre approximation équivalente à :

Pour tout k tel que $1 \le k \le n$, $arc(Q_{k-1}Q_k) \approx \dfrac{R^2\delta}{a_k^2}$ lorsque δ devient très petit.

La légitimité de cette approximation est claire : elle tient au fait que $a_{k-1} \approx a_k$ lorsque δ devient très petit, les points P_k et P_{k-1} tendant alors à se confondre.

Son intérêt par rapport à l'approximation $arc(Q_{k-1}Q_k) \approx \dfrac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k}$ tient essentiellement à la possibilité ultérieure d'expliciter de façon simple a_k^2 en fonction de k par le théorème « de

[14] [C.T. Rajagopal, T.V. Aiyar, 1951, p. 69]. Voir aussi [D. Pingree, *Proceedings*…, p. 26].

Pythagore » ($a_k^2 = OP_k^2 = OA^2 + AP_k^2 = R^2 + (k\delta)^2$). Bien qu'il n'apparaisse en fait que vers la fin de la démonstration, cet intérêt est relativement prévisible.

Notons cependant qu'il s'agit d'une seconde approximation. À cet égard, elle peut paraître étonnante, voire abusive : sachant que l'étape suivante va consister à sommer ces approximations et que le but visé est une évaluation fine du huitième de circonférence, une accumulation d'imprécisions pourrait se révéler préjudiciable. L'examen des lemmes 2 et 3 montrera qu'il n'en est rien et que cette approximation est non seulement légitime dans la perspective de la sommation envisagée, mais judicieuse.

Le fait que l'approximation $arc(Q_{k-1}Q_k) \approx \frac{R^2\delta}{a_{k-1}^2}$ n'ait pas été préférée est par contre beaucoup plus surprenant : celle-ci est aussi légitime et présente autant d'intérêt *a priori*, tout en ayant l'avantage d'être intuitivement et théoriquement plus justifiée. On peut en effet remarquer que les inégalités suivantes[15] sont vérifiées pour tout $k \in [1;n]$:

$$\frac{R^2\delta}{a_k^2} < \frac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k} < \frac{R^2\delta}{a_{k-1}^2} \quad \text{et} \quad \frac{R^2\delta}{a_k^2} < \frac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k} < arc(Q_{k-1}Q_k).$$

Il paraît donc *a priori* plus naturel de choisir $\frac{R^2\delta}{a_{k-1}^2}$ pour approximation de $arc(Q_{k-1}Q_k)$. D'une part dans la mesure où le choix de $\frac{R^2\delta}{a_k^2}$ implique de façon certaine un accroissement de l'erreur déjà commise dans l'approximation $arc(Q_{k-1}Q_k) \approx \frac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k}$; d'autre part parce que l'on peut penser que le choix de $\frac{R^2\delta}{a_{k-1}^2}$ est susceptible de compenser cette dernière erreur, qui est commise par valeurs inférieures. Mais Jyesthadeva, remarquons-le, ne dit pas qu'il faut préférer l'une des deux approximations. Il affirme en fait implicitement qu'elles sont toutes deux valables et que le choix de l'une d'entre elles est indifférent pour la suite du raisonnement. Ce point de vue est tout à fait correct, à un détail près qui sera examiné au cours de l'étude du lemme 3 ; nous verrons en effet que des deux approximations, seule $\frac{R^2\delta}{a_{k-1}^2}$ est en toute rigueur théoriquement correcte (suivant les critères modernes) eu égard à la suite de la démonstration.

---

[15] Elles résultent clairement des inégalités $a_{k-1} < a_k$ et $\frac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k} = Sin[arc(Q_{k-1}Q_k)] < arc(Q_{k-1}Q_k)$. Plus précisément, on a : $\frac{R^2\delta}{a_k^2} < \frac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k} < arc(Q_{k-1}Q_k) < \frac{R^2\delta}{a_{k-1}^2}$. La dernière inégalité résulte par exemple de : $\int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \frac{R^2}{R^2+x^2}dx < \int_{(k-1)\delta}^{k\delta} \frac{R^2}{R^2+[(k-1)\delta]^2}dx$; en effet, cette inégalité s'écrit encore : $arc(Q_{k-1}Q_k) = R \times \left[Arc\tan(\frac{x}{R}) \right]_{(k-1)\delta}^{k\delta} < \frac{R^2\delta}{R^2+[(k-1)\delta]^2} = \frac{R^2\delta}{a_{k-1}^2}$.

En définitive, la seconde partie de l'énoncé de Jyesthadeva ne semble avoir en elle-même guère d'autre justification *a priori* que le simple fait que $a_{k-1} \approx a_k$ lorsque δ devient très petit. Sa légitimité n'apparaît pleinement que dans la perspective du lemme 2, c'est-à-dire dans le cadre de la sommation des approximations qui viennent d'être introduites.

Lemme 2

« *Plus grand sera le nombre de parties* (khanda), *meilleure sera la précision du calcul. Multiplie chaque partie* (khanda) *par le carré du rayon du cercle et divise par le carré de la plus longue des hypoténuses* (karna). *Si les quotients ainsi déterminés sont sommés, la partie de la circonférence entre les lignes Est et Sud-Est sera obtenue*[16]. »

En d'autres termes : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_k^2} \approx \frac{C}{8} \text{ lorsque } n \text{ devient grand.}}$ (3)

En utilisant le concept moderne de limite, cette assertion peut donc être interprétée par :

$$\frac{C}{8} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_k^2} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{R^3}{na_k^2} \qquad (3')$$

Le début de l'assertion suggère toutefois assez clairement d'inscrire la problématique qui suit dans la perspective de l'analyse numérique.

Ce lemme est la suite logique du précédent ; il traduit l'intuition selon laquelle :

$$n \text{ devient grand (ie. } \delta = \frac{R}{n} \text{ devient petit)} \Rightarrow arc(Q_{k-1}Q_k) \approx \frac{R^2\delta}{a_k^2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} arc(Q_{k-1}Q_k) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_k^2}.$$

Une esquisse de justification en est donnée par le *Yuktibhāsa*. Le simple fait que le besoin en ait été ressenti est intéressant, car les implications que nous venons d'écrire auraient pu être directement posées à l'aide du lemme 1-b s'il n'y avait eu un souci minimal de rigueur (lequel est nécessaire, compte tenu de l'accumulation des approximations). Malgré les évidentes insuffisances de cette justification du point de vue moderne, ce fait révèle peut-être une certaine conscience des problèmes susceptibles d'être posés par la sommation d'« équivalents ». Nous retrouverons d'ailleurs ces problèmes au cours du raisonnement ayant conduit au lemme 4.

Les implications que nous pouvons écrire :

$$n \text{ devient grand} \Rightarrow arc(Q_{k-1}Q_k) \approx \frac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k} \text{ pour tout } k \in [1;n]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} arc(Q_{k-1}Q_k) \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{8} \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k}$$

demeurent implicites dans le raisonnement de Jyesthadeva. Sa justification ne porte que sur la légitimité de l'introduction de la seconde approximation $\frac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k} \approx \frac{R^2\delta}{a_k^2}$ dans les sommes

[16] [C.T. Rajagopal, T.V. Aiyar, 1951, p. 69].

considérées. En quelque sorte, il s'agit seulement pour lui de montrer ici que cette « approximation d'approximation » est sans conséquence lorsque le nombre de termes sommés devient grand. Manifestement, la sommation d'« équivalents » ne nécessite ici d'explication que parce que la qualité de ces « équivalents » reste à démontrer, ainsi que nous l'avons souligné au paragraphe précédent.

La justification fournie par Jyesthadeva repose[17] sur l'identité « remarquable » :

$$\frac{1}{a_{k-1}a_k} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a_k^2} + \frac{1}{a_{k-1}^2}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right]^2 .$$

Une telle décomposition du rapport $\frac{1}{a_{k-1}a_k}$ lui permet en effet de décomposer à son tour la somme $\sum_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k}$, d'une manière que nous pouvons formaliser comme suit :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{2}\left[\frac{1}{a_{k-1}^2} + \frac{1}{a_k^2}\right] - \sum_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{2}\left[\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right]^2 .\\ &= \frac{\delta}{4} + \sum_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{a_k^2} - \sum_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{2}\left[\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right]^2 .\end{aligned}$$

(La seconde ligne résulte de : $\sum_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{2}\left[\frac{1}{a_{k-1}^2} + \frac{1}{a_k^2}\right] = \frac{R^2\delta}{2a_0^2} + \frac{R^2\delta}{2a_n^2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{R^2\delta}{a_k^2} = \frac{R^2\delta}{2a_0^2} - \frac{R^2\delta}{2a_n^2} + \sum_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{a_k^2}$

et des deux égalités : $a_0^2 = R^2$ et $a_n^2 = 2R^2$).

Jyesthadeva se limite en fait à mettre en évidence cette relation entre les deux sommes $\sum_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{a_k^2}$ et $\sum_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k}$; relation qui lui permet d'en déduire que $\sum_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{a_k^2}$ est d'autant plus proche de $\frac{C}{8}$ que *n* est grand (étant admis implicitement que tel est le cas de $\sum_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k}$). Le fait que $\frac{\delta}{4}$ soit d'autant plus petit que *n* est grand est certes clair, puisque $\delta = \frac{R}{n}$. Qu'il en soit de même pour $\sum_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{2}\left[\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right]^2$ le semble moins, mais peut se justifier intuitivement de façon simple : l'idée peut avoir été que $\left[\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right]^2$ devient « quadratiquement petit » lorsque *n* devient grand, $\sum_{k=1}^{n}\frac{R^2}{2}\left[\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right]^2$ devenant dans ces conditions « linéairement petit » et $\sum_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{2}\left[\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right]^2$ non seulement très petit, mais négligeable même par rapport à $\frac{\delta}{4}$. On peut d'ailleurs formaliser cette intuition et donner une démonstration rigoureuse de sa validité :

D'après l'inégalité triangulaire $a_k < a_{k-1} + \delta$, on a $\frac{1}{a_k} > \frac{1}{a_{k-1}+\delta}$ pour tout $k \in [1;n]$.

[17] [C.T. Rajagopal, T.V. Aiyar, 1951, pp. 69-70] et [T.A. Saraswathi, 1963, pp. 330-331].

On en déduit les inégalités suivantes, valables pour tout $k \in [1;n]$:

$$\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} < \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_{k-1}+\delta} = \frac{\delta}{a_{k-1}^2 + \delta a_{k-1}} < \frac{\delta}{a_{k-1}^2} \leq \frac{\delta}{a_0^2} = \frac{\delta}{R^2}.$$

D'où l'inégalité valable pour tout entier naturel non nul n :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{2}\left[\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right]^2 < \frac{R^2\delta}{2}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{\delta}{R^2}\right]^2 = \frac{R^2\delta}{2} \times n\frac{\delta^2}{R^4} = \frac{n\delta^3}{2R^2} = \frac{\delta^2}{2R} = \frac{R}{2n^2}.$$

Les quantités étant positives, il en résulte bien que $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{2}\left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right)^2 = 0$.

Il est intéressant de remarquer le lien entre l'énoncé de Jyesthadeva, que nous avons interprété sous la forme $\frac{C}{8} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{R^2\delta}{a_k^2}$ (3'), et la relation démontrée par L. Euler[18] en 1739 :

$$\mathrm{Arctan}(t) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t/n}{1+(kt/n)^2}.$$

Cette formule établit en particulier que :

$$\mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{1+(k/n)^2}. \qquad (3'')$$

Or, en utilisant le théorème de Pythagore, on peut remarquer que (3') est équivalente à :

$$\frac{C}{8} = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{R^2 \times \frac{R}{n}}{R^2 + AP_k^2} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{R^3}{R^2 + (k\frac{R}{n})^2} = R \times \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+(k/n)^2}.$$

Comme $C = 2\pi R$, on constate donc que la proposition (3') est équivalente à (3'').

Notons par ailleurs que, le second membre de l'identité (3'') étant la limite d'une somme de Riemann, cette identité peut se traduire par :

$$\mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Il sera dès lors moins étonnant de voir le concept de calcul intégral sous-jacent à la suite du raisonnement qui mène Jyesthadeva à la conclusion du « développement en série » de $\frac{C}{8}$, bien qu'il soit hors de question de considérer que ce dernier l'ait mis en œuvre, comme nous le verrons au cours de l'étude du lemme 4.

Le second lemme aura finalement permis de déterminer en principe une première évaluation du huitième de circonférence. Mais cette évaluation se révèle en tant que telle difficile à préciser, car elle est obtenue par la sommation de quantités (les $\frac{R^2\delta}{a_k^2}$) encore trop compliquées : les paramètres variables a_k y interviennent aux dénominateurs. L'objet du troisième lemme est précisément de montrer comment contourner cette difficulté.

[18] [L. Euler, 1750, pp. 116-127, in *Œuvres*, 1924, série 1, t. 14, pp. 350-363].

Lemme 3 : un algorithme de « développement en série »

Jyesthadeva montre de quelle manière chaque terme de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}}$ peut lui-même être développé en une somme dont le nombre de termes est arbitrairement grand.

L'algorithme qu'il met en œuvre à cette fin[19] repose sur l'identité que nous pouvons noter :

$$\frac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}} = \delta - \frac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}} \times \frac{a_k^{\ 2} - R^2}{R^2}. \qquad (4)$$

Jyesthadeva déduit cette identité de celle que nous pouvons traduire par :

$$\frac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}} = \delta - \delta \frac{a_k^{\ 2} - R^2}{a_k^{\ 2}}. \qquad (4')$$

Ces égalités sont clairement vraies *a posteriori*, mais leur raison d'être mérite une attention particulière : elles constituent probablement le « coup de génie » de toute la démonstration.

(4') est peut-être une première manifestation de l'intérêt (déjà suggéré au cours de l'examen du lemme 1) de l'utilisation de $\frac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}}$ au lieu de $\frac{R^2\delta}{a_{k-1}a_k}$ comme approximation des « arcs élémentaires ». Le théorème de Pythagore peut en effet être appliqué deux fois au triangle OP_0P_k afin de transformer $\frac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}}$, l'identité (4') en résultant :

$$\frac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}} = \frac{OP_0^{\ 2} \times \delta}{OP_k^2} = \frac{(OP_k^{\ 2} - P_0P_k^{\ 2})\delta}{OP_k^2} = \delta - \delta \frac{P_0P_k^{\ 2}}{OP_k^2} = \delta - \delta \frac{OP_k^{\ 2} - OP_0^2}{OP_k^2} = \delta - \delta \frac{a_k^{\ 2} - R^2}{a_k^{\ 2}}.$$

L'identité (4), qui s'en déduit immédiatement, indique la finalité de cette transformation : elle permet d'inclure la quantité $\frac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}}$ dans la procédure destinée à sa propre évaluation. S'amorce de la sorte un algorithme dont l'ingéniosité force l'admiration, qui consiste à réintroduire systématiquement l'identité (4) dans l'évaluation de $\frac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}}$. Jyesthadeva se limite à en exposer le principe et à en décrire les premières étapes, lesquelles peuvent être formalisées comme suit :

$$\begin{aligned} \frac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}} &= \delta - \left[\delta - \frac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}} \times \frac{a_k^{\ 2} - R^2}{R^2}\right] \times \frac{a_k^{\ 2} - R^2}{R^2} \\ &= \delta - \delta \frac{a_k^{\ 2} - R^2}{R^2} + \frac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}} \times \frac{(a_k^{\ 2} - R^2)^2}{R^4} \\ &= \delta - \delta \frac{a_k^{\ 2} - R^2}{R^2} + \left[\delta - \frac{R^2\delta}{a_k^{\ 2}} \times \frac{a_k^{\ 2} - R^2}{R^2}\right] \times \frac{(a_k^{\ 2} - R^2)^2}{R^4} \end{aligned}$$

[19] [C.T. Rajagopal, T.V. Aiyar, 1951, p. 71] ; voir aussi [T.A. Saraswati, 1963, p. 331].

$$= \delta - \delta \frac{a_k{}^2 - R^2}{R^2} + \delta \frac{(a_k{}^2 - R^2)^2}{R^4} - \frac{R^2\delta}{a_k{}^2} \times \frac{(a_k{}^2 - R^2)^3}{R^6}.$$

L'intérêt profond de l'algorithme se dessine alors. Nous savons depuis le second lemme que l'évaluation du huitième de circonférence peut être obtenue par celle de la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_k{}^2}$ lorsque n est grand. Mais, ainsi que nous l'avons déjà mentionné, cette dernière évaluation est problématique dans la mesure où les paramètres variables de la somme (les a_k) interviennent aux dénominateurs. La mise en œuvre de l'algorithme permet justement de contourner ce problème, puisque chacun des $\frac{R^2\delta}{a_k{}^2}$ est progressivement développé en une somme de fractions où ces paramètres ne figurent plus qu'aux numérateurs. Remarquons cependant que la raison pour laquelle cette transformation permet effectivement de réaliser l'évaluation de la somme considérée n'apparaît pas encore : elle ne le pourra qu'à l'examen du quatrième lemme.

Sans la justifier, Jyesthadeva affirme la possibilité de poursuivre indéfiniment l'algorithme ainsi introduit. Celui-ci semble par conséquent devoir être compris comme l'énoncé implicite d'un développement de $\frac{R^2\delta}{a_k{}^2}$ que nous pouvons formaliser comme suit :

$$\boxed{\frac{R^2\delta}{a_k{}^2} \approx \delta + \sum_{p=1}^{q} (-1)^p \delta \frac{(a_k{}^2 - R^2)^p}{R^{2p}} \quad \text{lorsque } q \text{ devient grand.}}$$

Remarquons que, si on interprète ce résultat d'un point de vue moderne, c'est-à-dire sous la forme $\frac{R^2\delta}{a_k{}^2} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \delta \frac{(a_k{}^2 - R^2)^p}{R^{2p}}$, on constate qu'il revient à développer un nombre en série à progression géométrique : $\frac{R^2\delta}{a_k{}^2}$ est la somme des termes de la suite géométrique de premier terme δ et de raison $-\frac{a_k{}^2 - R^2}{R^2} = -\frac{(k\delta)^2}{R^2} = -(\frac{k}{n})^2$ (en tenant compte de $R = n\delta$). Bien que la négativité de la raison rende très douteux le fait que Jyesthadeva ait effectivement considéré le développement qu'il expose comme celui d'une série de ce type, il est assez probable qu'une analogie ait été reconnue.

Notre formulation[20] du développement de $\frac{R^2\delta}{a_k{}^2}$ se justifie d'ailleurs par la façon dont Nīlakantha (que Jyesthadeva commente) semble avoir envisagé la sommation des termes d'une série à progression géométrique (voir le chapitre 3 et l'annexe 8). Il n'y a en effet aucun indice permettant de penser que ses écrits sur ce sujet aient été guidés par le concept d'infini actuel, ce qui selon nous interdit d'interpréter le procédé de développement du point de vue moderne mentionné plus haut. Il n'est par contre pas abusif d'admettre que ses raisonnements reposent sur le concept d'infini potentiel. Selon lui, les sommes partielles d'une série à progression

[20] Rappelons que nous faisons correspondre la notation $\approx$ à une égalité « asymptotique ». Notre formulation revient donc à énoncer : « $\delta + \sum_{p=1}^{q} (-1)^p \delta \frac{(a_k{}^2 - R^2)^p}{R^{2p}}$ est d'autant plus proche de $\frac{R^2\delta}{a_k{}^2}$ que q est grand ».

géométrique dont la raison est un « quantième »[21] tendent à se rapprocher d'une certaine valeur finie (la « limite »), laquelle peut être considérée comme la somme de cette série pourvu que le nombre de termes sommés soit assez grand. Nous avons vu que son argument principal consiste à dire que l'écart entre les sommes partielles et cette valeur (« limite ») peut être rendu aussi petit que l'on veut. Or, ce type d'argument s'applique ici encore lorsque $k \in [1;n-1]$. Pour tout $q \geq 1$, l'algorithme utilisé permet en effet d'écrire :

$$\begin{aligned}\frac{R^2\delta}{a_k^{\,2}} &= \left\{\delta + \sum_{p=1}^{q}(-1)^p\delta\frac{(a_k^{\,2}-R^2)^p}{R^{2p}}\right\} + (-1)^{q+1}\frac{R^2\delta}{a_k^{\,2}}\frac{(a_k^{\,2}-R^2)^{q+1}}{R^{2q+2}}\\ &= \left\{\delta + \sum_{p=1}^{q}(-1)^p\delta\frac{(a_k^{\,2}-R^2)^p}{R^{2p}}\right\} + (-1)^{q+1}\frac{R^2\delta}{a_k^{\,2}}\left(\frac{k}{n}\right)^{2q+2}.\end{aligned}$$

Pour tout $k \in [1;n-1]$, $0 < \frac{k}{n} < 1$; donc le terme $\frac{R^2\delta}{a_k^{\,2}}\left(\frac{k}{n}\right)^{2q+2}$ est d'autant plus petit que q est grand et l'argument annoncé s'applique.

On peut cependant remarquer que tel n'est pas le cas lorsque $k = n$. Mais ce cas est très particulier et, si l'on adopte un mode de raisonnement qui méconnaît les concepts de convergence et d'infini actuel, on constatera qu'il ne pose en fait aucun problème.
En effet, $a_n^{\,2} = 2R^2$; donc pour tout $q \geq 1$:

$$\left\{\delta + \sum_{p=1}^{q}(-1)^p\delta\frac{(a_n^{\,2}-R^2)^p}{R^{2p}}\right\} + (-1)^{q+1}\frac{R^2\delta}{a_n^{\,2}}\frac{(a_n^{\,2}-R^2)^{q+1}}{R^{2q+2}} = \left\{\delta + \sum_{p=1}^{q}(-1)^p\delta\right\} + (-1)^{q+1}\frac{\delta}{2}.$$

Quelle que soit la parité de q, on obtient alors que la somme considérée est égale à $\frac{\delta}{2}$, c'est-à-dire encore à $\frac{R^2\delta}{a_n^{\,2}}$. Ainsi, l'algorithme est parfaitement valable même dans ce cas.

Si, par contre, on souhaite interpréter le procédé de développement à l'aide de concepts modernes sous la forme $\frac{R^2\delta}{a_k^{\,2}} = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\delta\frac{(a_k^{\,2}-R^2)^p}{R^{2p}}$, on constate que cette identité est erronée dans le cas où $k = n$. Elle s'écrit en effet : $\frac{\delta}{2} = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p\delta$; ou encore : $\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p = \frac{1}{2}$. Or, on sait désormais que cette identité est fausse, puisque la série de terme général $(-1)^p$ diverge. Ce cas particulier demeura d'ailleurs problématique en Europe jusqu'au XVIII^e siècle, à une époque où la notion de convergence n'était pas encore précisée[22] ; G.W. Leibniz, par exemple, proposa justement la valeur $\frac{1}{2}$ pour la série $\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p$.

Souligner, comme l'ont fait certains historiens indiens[23], le caractère erroné de l'algorithme lorsque $k = n$, nous semble par conséquent hors de propos. Nous suggérons au contraire que ce cas est très révélateur, parce qu'il illustre sans ambiguïté le fait que les raisonnements suivis par les Indiens le sont à des ordres finis. Si le problème existe

---

[21] Inverse d'un entier naturel supérieur ou égal à 2.
[22] [R. Rashed et *alii*, 1991, pp. 224-225].
[23] [C.T. Rajagopal, T.V. Aiyar, 1951, p. 71].

effectivement dans la perspective moderne, il ne peut en aucun cas, à notre sens, se poser dans celle des Indiens.

Quoiqu'il en soit, remarquons que, même si l'on admettait que l'algorithme exposé par Jyesthadeva comporte une erreur, celle-ci n'aurait aucune importance pour la suite de la démonstration. Il aurait en effet suffi, pour éviter ce « problème de divergence », de considérer au second lemme la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_{k-1}^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{R^2\delta}{a_k^2}$ plutôt que la somme $\sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_k^2}$. C'est d'ailleurs ce que fit L. Euler, comme nous l'avons mentionné plus haut. Mais comme ces deux sommes ne diffèrent que de $\frac{R^2\delta}{a_0^2} - \frac{R^2\delta}{a_n^2} = \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$, qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, on constate que cette « imprécision » ne prête pas à conséquence.

L'étape franchie ici est décisive. La synthèse des lemmes 2 et 3 va en effet permettre de ramener l'évaluation du huitième de circonférence à un problème *a priori* plus simple que celui qui se posait à l'issue du second lemme, dans la mesure où l'école de Mādhava en possédait déjà une approche. Ce problème, étudié au chapitre suivant, fera l'objet du quatrième lemme.

Synthèse des lemmes 2 et 3

Le second lemme avait permis d'établir que :

$$\frac{C}{8} \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_k^2} \quad \text{lorsque } n \text{ devient grand.}$$

Le troisième lemme a consisté à montrer que, pour tout $k \in [1;n]$:

$$\frac{R^2\delta}{a_k^2} \approx \delta + \sum_{p=1}^{q} (-1)^p \delta \frac{(a_k^2 - R^2)^p}{R^{2p}} \quad \text{lorsque } q \text{ devient grand.}$$

L'utilisation du fait que $a_k^2 - R^2 = (k\delta)^2$ pour tout $k \in [1;n]$ permet désormais à Jyesthadeva de synthétiser ces deux résultats, d'une façon que nous pouvons retranscrire par[24] :

$$\sum_{k=1}^{n} \left\{ \delta - \delta \frac{(k\delta)^2}{R^2} + \delta \frac{(k\delta)^4}{R^4} - \delta \frac{(k\delta)^6}{R^6} + \ldots\ldots + (-1)^q \delta \frac{(k\delta)^{2q}}{R^{2q}} \right\} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ \delta + \delta \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^p}{R^{2p}} (k\delta)^{2p} \right\}$$

est d'autant plus proche de $\frac{C}{8}$ que n et q sont grands.

En permutant les sommations, Jyesthadeva en déduit le résultat que nous pouvons noter :

$$\boxed{\frac{C}{8} \approx R + \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^p}{R^{2p}} \left\{ \delta \sum_{k=1}^{n} (k\delta)^{2p} \right\} \quad \text{lorsque } n \text{ et } q \text{ deviennent grands.}}$$

Si on interprète cet énoncé du point de vue moderne, c'est-à-dire sous la forme

$$\frac{C}{8} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_k^2} = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \delta \left\{ \lim_{q \to +\infty} \sum_{p=0}^{q} (-1)^p \frac{(k\delta)^{2p}}{R^{2p}} \right\},$$

[24] [C.T. Rajagopal, T.V. Aiyar, 1951, p. 72] et [T.A. Saraswathi, 1963, p. 331].

on constate qu'il s'agit là d'une partie cruciale de la démonstration, puisqu'elle pose le problème de l'interversion des limites. On ne s'étonnera pas du fait que l'auteur du *Yuktibhāsa* ne mentionne aucune difficulté à ce propos si l'on admet que sa démonstration s'effectue à des ordres de sommation finis, bien qu'ils puissent être « très grands » : il n'y en a effectivement pas de ce point de vue. Si l'on adopte une perspective moderne, il faut cependant noter que la validité de cette interversion des sommations à des ordres finis n'implique pas *a priori* celle de l'interversion des limites. Le fait d'affirmer que $\frac{C}{8}$ est *d'autant mieux approché* que n et q sont *grands* pose donc un réel problème. Mais il était évidemment hors de question pour les Indiens de justifier la validité de cette assertion, de telles subtilités ne pouvant probablement être saisies qu'au sein d'une théorie élaborée des limites et de l'intégration. Cela ne les a pas empêchés de parvenir à une conclusion correcte, cette interversion des sommations étant en fait parfaitement valable, même au passage à la limite. Rappelons à cet égard que les Européens du XVIII^{e} siècle n'hésitèrent pas, eux non plus, à construire de brillants raisonnements sur des bases théoriques chancelantes.

Indépendamment du calcul effectif des sommes considérées, cette interversion des limites peut par exemple être justifiée à l'aide du théorème dit « de convergence dominée » :

Notons f la fonction définie sur R par : $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Nous avons vu plus haut que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_k^2} = R \times \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.

Il est clair par ailleurs que f est la limite simple sur $[0;1[$ de la suite de fonctions continues $(S_q)_{q\geq 1}$ de terme général $S_q : x \mapsto 1 + \sum_{p=1}^{q} (-1)^p x^{2p}$. De plus, pour tout $x \in [0;1[$, $S_q(x) = f(x) + (-1)^q \frac{x^{2q+2}}{1+x^2}$.

On en déduit que, pour tout $x \in [0;1[$, $0 \leq f(x) - \frac{x^{2q+2}}{1+x^2} \leq S_q(x) \leq f(x) + \frac{x^{2q+2}}{1+x^2} \leq 2f(x)$.

La fonction $g = 2f$ étant intégrable sur $[0;1]$, le théorème de convergence dominée s'applique et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_k^2} = R \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = R\int_0^1 f(x)dx = R\int_0^1 (\lim_{q\to+\infty} S_q(x))dx = R \lim_{q\to+\infty} \int_0^1 S_q(x)dx.$$

D'où : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_k^2} = R \lim_{q\to+\infty} (1 + \sum_{p=1}^{q} (-1)^p \int_0^1 x^{2p}dx) = R + \lim_{q\to+\infty} \sum_{p=1}^{q} (-1)^p R \times (\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^{2p})$.

Il en résulte effectivement : $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{R^2\delta}{a_k^2} = R + \lim_{q\to+\infty} \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^p}{R^{2p}} \times (\lim_{n\to+\infty} \delta\sum_{k=1}^{n} (k\delta)^{2p})$.

Une fois parvenu à ce stade de la démonstration, il ne reste plus qu'une seule étape pour justifier le « développement en série » du huitième de circonférence : celle qui consiste à évaluer, pour tout $p \in N^*$, la quantité $\delta\sum_{k=1}^{n} (k\delta)^{2p}$ lorsque n est grand (et donc δ petit).

Compte tenu de $\delta = \frac{R}{n}$, on a $\delta\sum_{k=1}^{n} (k\delta)^{2p} = \frac{R}{n}\sum_{k=1}^{n} (k\frac{R}{n})^{2p}$. Suivant la terminologie moderne, il s'agit donc désormais pour Jyesthadeva d'évaluer, lorsque n est grand et pour tout $p \in N^*$, les sommes de Riemann des fonctions $x \mapsto x^{2p}$ associées à une subdivision de pas $\delta = \frac{R}{n}$ de l'intervalle $[0;R]$. L'étude du quatrième lemme va nous permettre de voir comment ce problème fut résolu sans l'outil du calcul intégral.

Chapitre 5
Évaluation de « sommes de Riemann »

Nous avons vu au chapitre précédent que l'étude de la rectification d'un huitième de circonférence entreprise par Jyesthadeva nécessite l'évaluation de « sommes de Riemann » : le réel $R > 0$ et deux entiers naturels non nuls n et p étant donnés, il s'agit d'évaluer lorsque $\delta = \dfrac{R}{n}$ est petit, c'est-à-dire lorsque n est grand, la somme $S_{R,n}^{(p)} = \delta \sum_{k=1}^{n} (k\delta)^p$.

Nous noterons $S_R^{(p)}$ la « valeur asymptotique » de $S_{R,n}^{(p)}$; c'est-à-dire plus précisément, en termes actuels : $S_R^{(p)} = \lim_{n\to+\infty} S_{R,n}^{(p)}$.

Nous étudions ici le lemme en deux parties énoncé et partiellement justifié par Jyesthadeva afin de résoudre ce problème.

Si on le considère du point de vue moderne, celui-ci est immédiatement résolu par passage à la limite, c'est-à-dire en considérant δ comme un infinitésimal et la somme à évaluer comme une somme intégrale :

$$S_R^{(p)} = \lim_{n\to+\infty} S_{R,n}^{(p)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{R}{n} \sum_{k=1}^{n} (k\frac{R}{n})^p = \lim_{\delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} (k\delta)^p \delta = \int_0^R x^p dx = \frac{R^{p+1}}{p+1}.$$

En réalité, et on ne s'en étonnera pas, Jyesthadeva ne conceptualise pas du tout le problème de cette manière. Il s'agit sans doute là du point sur lequel les limites de l'approche indienne apparaissent le plus nettement. Nous avons déjà mentionné au chapitre précédent (« diagramme fondamental ») le fait que le nombre n de subdivisions du segment de mesure R n'est pas arbitrairement grand au sens moderne, c'est-à-dire qu'il n'est pas susceptible de « tendre vers l'infini ». Cette approche finitiste se manifeste clairement ici : Jyesthadeva suggère[1] que l'on peut choisir 3438 pour valeur de n ; ce qui revient, puisque le rayon est traditionnellement fixé à 3438', à considérer δ comme l'unité de mesure elle-même, c'est-à-dire la minute. D'autres unités de mesure plus petites auraient certes pu être choisies, impliquant des subdivisions plus fines du segment de mesure *R*. Cet aspect conventionnel a sans nul doute été perçu par les Indiens. Il n'en demeure pas moins que leur perspective ne peut correspondre à une approche infinitésimale du problème : dans tout ce qui suit, n ne tend jamais vers l'infini ; il est seulement assez grand pour que les évaluations des sommes que nous notons $S_{R,n}^{(p)}$ soient raisonnablement correctes.

Le choix consistant à identifier δ à une unité de mesure a pour effet de rendre R égal à n unités. Dans ces conditions, le problème initial qui concernait des « sommes de Riemann » est ramené par Jyesthadeva à un problème de sommation de puissances d'entiers : il s'agit désormais d'évaluer la somme $S_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} k^p$ lorsque n est grand. Ce que nous avons noté $S_R^{(p)}$ correspond dès lors à la « valeur asymptotique » de $S_n^{(p)}$; en termes modernes, il s'agit plus précisément de la partie principale de son développement asymptotique.

---

[1] [D. Pingree, *Proceedings*..., pp. 25-26] ; voir aussi [T.A. Saraswathi, 1963, p. 332].

Or, ce problème était loin d'être inconnu de l'école de Mādhava : les expressions de $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$ et $S_n^{(3)}$ furent déterminées dès l'époque d'Āryabhata I, ainsi que nous l'avons mentionné aux chapitres 2 et 3. Leurs « valeurs asymptotiques » (respectivement : $\frac{n^2}{2}$, $\frac{n^3}{3}$ et $\frac{n^4}{4}$) étaient donc *a priori* connues de ceux qu'elles intéressaient. Les deux propriétés énoncées dans le *Yuktibhāsa* à ce sujet suggèrent un algorithme destiné à généraliser ces résultats.

Lemme 4

La première propriété que nous étudierons est difficile à traduire simplement sans le recours à un terme sanscrit utilisé par Jyesthadeva. Il s'agit du terme *samkalita*, qui signifie d'une façon générale une sommation ou son résultat. Dans l'énoncé qui suit, ce que l'auteur désigne par *samkalita* d'une puissance (p) donnée est ce que nous notons $S_n^{(p)}$. Le terme de « limite » est quant à lui relatif au nombre de termes sommés : ainsi, la « limite » de $S_n^{(p)}$ est l'entier n.

a) « *Chaque fois que nous souhaitons obtenir le* samkalita *d'une puissance quelconque donnée, nous multiplions le* samkalita *de la puissance immédiatement inférieure par la limite. Le résultat contiendra le* samkalita *requis et aussi le* samkalita *des* samkalita *de la puissance inférieure jusqu'aux différentes limites*[2]. »

Le « *samkalita* requis » désigne ce que nous notons $S_n^{(p)}$. Les « différentes limites » évoquées sont les entiers naturels (non nuls) précédant n : ce sont les « limites » des différentes sommes $S_k^{(p-1)}$ (avec $1 \le k \le n-1$). En d'autres termes, l'énoncé précédent correspond à l'assertion :

$$\boxed{\text{Pour tous } p \ge 2 \text{ et } n \ge 2 : \ nS_n^{(p-1)} = S_n^{(p)} + [S_1^{(p-1)} + S_2^{(p-1)} + \dots + S_{n-1}^{(p-1)}] = S_n^{(p)} + \sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(p-1)}.}$$

Son intérêt, comme nous le verrons par la suite, est de permettre d'exprimer le « *samkalita* d'ordre p » en fonction des « *samkalita* aux ordres précédents ». En termes actuels, nous dirions qu'il introduit naturellement la possibilité d'une connaissance par récurrence des $S_n^{(p)}$.

Le *Yuktibhāsa* ne fournit pas de démonstration générale de ce résultat. Il se limite à en établir la validité dans les cas $p=2$ et $p=3$, en utilisant un procédé de regroupement de termes particulièrement ingénieux que nous pouvons retranscrire comme suit[3] :

$$\begin{aligned}
nS_n^{(1)} - S_n^{(2)} &= [n + 2n + 3n + \dots + (n-2)n + (n-1)n + n^2] - [1^2 + 2^2 + \dots + (n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2] \\
&= [n - 1^2] + [2n - 2^2] + [3n - 3^2] + \dots + [(n-2)n - (n-2)^2] + [(n-1)n - (n-1)^2] \\
&= (n-1)\times 1 + (n-2)\times 2 + (n-3)\times 3 + \dots + 3\times(n-3) + 2\times(n-2) + 1\times(n-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
= & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 & +\dots+ & 1 & + & 1 & + & 1 & + & 1 \\
 & & + & 2 & + & 2 & + & 2 & +\dots+ & 2 & + & 2 & + & 2 & + & 2 \\
 & & & & + & 3 & + & 3 & +\dots+ & 3 & + & 3 & + & 3 & + & 3 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 & & & & & & & & & & & + (n-3) & + & (n-3) & + & (n-3)
\end{array}$$

[2] [C.T. Rajagopal, T.V. Aiyar,1951, p. 70].
[3] [T.A. Saraswathi, 1963, pp. 332-334].

$$
\begin{array}{r}
+(n-2)+(n-2)\\
+\ (n-1)
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= S_1^{(1)} + S_2^{(1)} + S_3^{(1)} + \ldots\ldots + S_{n-3}^{(1)} + S_{n-2}^{(1)} + S_{n-1}^{(1)}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(1)}
\end{aligned}
$$

Puis :

$$
\begin{aligned}
nS_n^{(2)} - S_n^{(3)} &= [n + 2^2 n + 3^2 n + \ldots + (n-2)^2 n + (n-1)^2 n + n^3] - [1^3 + 2^3 + \ldots + (n-2)^3 + (n-1)^3 + n^3]\\
&= [n-1^3] + [2^2 n - 2^3] + [3^2 n - 3^3] + \ldots\ldots + [(n-2)^2 n - (n-2)^3] + [(n-1)^2 n - (n-1)^3]\\
&= (n-1)\times 1^2 + (n-2)\times 2^2 + (n-3)\times 3^2 + \ldots\ldots + 3(n-3)^2 + 2(n-2)^2 + 1(n-1)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{rccccccccccccccc}
= & 1^2 & + & 1^2 & + & 1^2 & + & 1^2 & +\ldots\ldots+ & 1^2 & + & 1^2 & + & 1^2 & + & 1^2\\
 & & + & 2^2 & + & 2^2 & + & 2^2 & +\ldots\ldots+ & 2^2 & + & 2^2 & + & 2^2 & + & 2^2\\
 & & & & + & 3^2 & + & 3^2 & +\ldots\ldots+ & 3^2 & + & 3^2 & + & 3^2 & + & 3^2\\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \\
 & & & & & & & & & & +(n-3)^2 & & +(n-3)^2 & & +(n-3)^2 & \\
 & & & & & & & & & & & & +(n-2)^2 & & +(n-2)^2 & \\
 & & & & & & & & & & & & & & +(n-1)^2 &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
&= S_1^{(2)} + S_2^{(2)} + S_3^{(2)} + \ldots\ldots + S_{n-3}^{(2)} + S_{n-2}^{(2)} + S_{n-1}^{(2)}\\
&= \sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(2)}
\end{aligned}
$$

La validité générale de l'algorithme décrit à travers ces deux cas particuliers est suffisamment claire pour que l'auteur s'autorise à induire celle de l'énoncé a), généralisation en l'occurrence parfaitement légitime.

La propriété ainsi établie va dès lors permettre de justifier une méthode de généralisation des résultats déjà connus concernant $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$ et $S_n^{(3)}$. L'énoncé décrivant cette méthode n'a cependant pas le même statut que celui du a). Contrairement à ce dernier, il n'expose pas une égalité exacte, mais une égalité « asymptotique » : la « limite » considérée ici est encore le nombre n de termes de ce que nous notons $S_n^{(p)}$, mais elle doit être comprise comme « très grande » :

> b) « *Multiplie le* samkalita *de la puissance inférieure par la limite. Soustrais de ce produit le résultat du quotient du produit par l'entier d'une unité supérieure à la puissance donnée. Le reste sera le* samkalita *désiré*[4]. »

Dans le contexte de la rectification du huitième de circonférence où intervient cet énoncé, rappelons qu'un segment de mesure égale au rayon R est découpé en n intervalles de même mesure, laquelle est prise pour unité. *R*, de mesure n unités, est donc ici encore la « limite » mentionnée. Rappelons aussi que nous avons noté $S_R^{(p)}$ la « valeur asymptotique » de $S_n^{(p)}$, ou plus précisément la partie principale de son développement asymptotique.

Dans ces conditions, l'énoncé doit être compris comme suit :

[4] [C.T. Rajagopal, T.V. Aiyar, 1951, p. 70] et [T.A. Saraswathi, 1963, pp. 334].

$$\boxed{\text{Pour tout entier } p \geq 2\,,\ \ S_R^{(p)} = S_R^{(p-1)}R - \frac{S_R^{(p-1)}R}{p+1}.}$$

Une interprétation de cet énoncé dans le même esprit que celui du a) serait en effet manifestement fausse, puisqu'elle serait équivalente à l'assertion :

$$\text{Pour tout entier } p \geq 2\,,\ S_n^{(p)} = S_n^{(p-1)}n - \frac{S_n^{(p-1)}n}{p+1}.$$

La considération du cas $p = 2$, par exemple, suffit pour se convaincre de la fausseté de cette égalité : $S_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2}$ impliquerait $S_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n)}{6}$ au lieu de $S_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
L'énoncé du *Yuktibhāsa*, s'il devait être formalisé avec ces même notations, devrait en fait l'être comme suit :

$$\text{Pour tout entier } p \geq 2\,,\ S_n^{(p)} \approx S_n^{(p-1)}n - \frac{S_n^{(p-1)}n}{p+1} \quad \text{lorsque } n \text{ devient grand.}$$

Jyesthadeva ne fournit là encore pas de démonstration générale du résultat qu'il énonce. Sa justification, très partielle, peut être retranscrite comme suit[5] :
On sait (et l'auteur en redonne une démonstration) que :

$$S_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Or, n étant supposé grand, l'unité peut être négligée. Donc $S_n^{(1)} \approx \frac{n^2}{2}$ et par conséquent :

$$\boxed{S_R^{(1)} = \frac{R^2}{2}}$$

D'après a), il est alors nécessaire, pour évaluer $S_n^{(2)}$, d'évaluer $\sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(1)}$ lorsque n devient grand.
Le principe utilisé afin d'y parvenir, quoiqu'en l'occurrence correct, n'est quant à lui pas du tout justifié. Il consiste à poser que :

$$S_n^{(1)} \approx \frac{n^2}{2} \ \text{ lorsque } n \text{ devient grand} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(1)} \approx \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{2} \ \text{ lorsque } n \text{ devient grand.}$$

On peut constater que cela revient à appliquer le résultat suivant (désormais bien assuré) :
Si $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite à terme réels positifs, telle que $\sum_k v_k$ diverge et si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite telle que u_n soit équivalent à v_n au voisinage de l'infini, alors les sommes $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et $\sum_{k=0}^{n} v_k$ sont équivalentes au voisinage de l'infini.
L'application du procédé introduit par Jyesthadeva permet d'écrire :

$$\sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(1)} \approx \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{n^2}{2}.$$

En utilisant le fait que le terme n^2 est négligeable devant $\sum_{k=1}^{n} k^2$, on obtient :

[5] [T.A. Saraswathi, 1963, pp. 332-334].

$$\sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(1)} \approx \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{2} S_n^{(2)}.$$

Par application de a), on en déduit alors : $nS_n^{(1)} \approx S_n^{(2)} + \frac{1}{2} S_n^{(2)}$.

Soit encore : $S_n^{(2)} \approx \frac{2}{3} nS_n^{(1)} = nS_n^{(1)} - \frac{nS_n^{(1)}}{2+1}$. Le résultat annoncé s'en déduit :

$$S_R^{(2)} = RS_R^{(1)} - \frac{RS_R^{(1)}}{2+1}.$$

Il permet d'obtenir : $\boxed{S_R^{(2)} = \frac{R^3}{3}}$

Etant données les connaissances sur les séries déjà acquises par les Indiens, on pourrait considérer ce qui précède comme parfaitement inutile (voire tautologique, puisque le fait de considérer n^2 comme négligeable devant $\sum_{k=1}^{n} k^2$ semble présupposer au moins la forme du résultat final $\sum_{k=1}^{n} k^2 \approx \frac{n^3}{3}$). En effet, l'identité $S_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, déjà connue, permet d'en déduire immédiatement la « valeur asymptotique » : $S_n^{(2)} \approx \frac{n^3}{3}$.

D'autre part, la quantité $\sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(1)}$ est familière non seulement à l'auteur, mais à toute l'école de Mādhava[6] : c'est le *vārasamkalita* d'ordre 2 associé à la suite des entiers naturels, quantité dont nous avons exposé la définition au chapitre 2. Son expression est connue :

$$\sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(1)} = V_{n-1}^{(2)} = \frac{(n-1)n(n+1)}{6}.$$

Lorsque n devient grand, on peut donc écrire :

$$\sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(1)} \approx \frac{n^3}{6} = n\frac{n^2}{2} \times \frac{1}{3} = nS_n^{(1)} \times \frac{1}{2+1}.$$

La propriété annoncée résulte alors de a) et pouvait donc être directement établie sans recourir au principe d'« équivalence de sommes partielles ».

En fait, l'objectif poursuivi par Jyesthadeva semble moins consister à déterminer la « valeur asymptotique » particulière de $S_n^{(2)}$ (qui lui est déjà connue), qu'à exposer un algorithme général de détermination de la « valeur asymptotique » de $S_n^{(p)}$. Or, il ne dispose pas des outils théoriques pour fournir une véritable démonstration de la validité de cet algorithme puisque celui-ci repose sur le principe d'« équivalence des sommes partielles », qui n'est pas justifié. Il se limite donc à montrer que l'application de ce principe mène à un résultat correct dans le cas $p = 2$ (vu ci-dessus) et dans le cas $p = 3$ (étudié ci-dessous), qui sont, avec le cas $p = 1$, les seuls où le résultat est déjà bien établi.

[6] Nīlakantha a en particulier donné une démonstration géométrique du *vārasamkalita* d'ordre 2, que nous exposons en annexe 9. Jyesthadeva a de toutes façons utilisé ce principe de sommation réitérée dans sa justification des « développements en série » du Sinus et du Cosinus, ainsi que nous le verrons au chapitre 8.

Ainsi, l'évaluation de $S_n^{(3)}$ est effectuée de manière semblable. Elle nécessite à son tour celle de $\sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(2)}$ lorsque n est grand, laquelle peut être obtenue par application du résultat précédent et du principe d'« équivalence des sommes partielles » :

$$\sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(2)} \approx \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^3}{3} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 - \frac{n^3}{3}.$$

Le terme n^3 étant négligeable devant $\sum_{k=1}^{n} k^3$, on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(2)} \approx \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{3} S_n^{(3)}.$$

D'où, par application de a) : $nS_n^{(2)} \approx S_n^{(3)} + \frac{1}{3} S_n^{(3)}$.

Soit encore : $S_n^{(3)} \approx \frac{3}{4} nS_n^{(2)} = nS_n^{(2)} - \frac{nS_n^{(2)}}{3+1}$. Le résultat annoncé s'en déduit :

$$S_R^{(3)} = RS_R^{(2)} - \frac{RS_R^{(2)}}{4}.$$

Ce qui, en utilisant la valeur de $S_R^{(2)}$ déjà déterminée, permet d'obtenir :

$$\boxed{S_R^{(3)} = \frac{R^4}{4}}$$

Ici encore, et cela confirme les remarques que nous avons faites plus haut, cette « valeur asymptotique » de $S_n^{(3)}$ aurait pu immédiatement être déduite du fait déjà connu que : $S_n^{(3)} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$. Remarquons aussi que l'expression exacte de $\sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(2)}$ était accessible à Jyesthadeva, compte tenu de sa connaissance des résultats concernant les *vārasamkalita* associés à la suite des entiers naturels. On la déduit par exemple de l'expression des *vārasamkalita* d'ordres 2 et 3, de la façon suivante :

$$\sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(2)} = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} i^2 = 2\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}[\frac{i(i+1)}{2} - \frac{i}{2}] = 2\sum_{k=1}^{n-1} V_k^{(2)} - \sum_{k=1}^{n-1} V_k^{(1)} = 2V_{n-1}^{(3)} - V_{n-1}^{(2)}$$

$$= 2\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{4!} - \frac{(n-1)n(n+1)}{3!} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

D'où : $\sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(2)} \approx \frac{n^4}{12}$. Ce qui, combiné avec a), donne le résultat annoncé.

Le cas général énoncé au b) est induit sur la base des deux cas particuliers précédemment étudiés[7]. L'application récurrente de l'algorithme exposé permet d'en déduire :

Pour tout entier $p \geq 1$, $S_n^{(p)} \approx \frac{n^{p+1}}{p+1}$ lorsque n devient grand.

Ce que nous pouvons encore écrire :

[7] [C.T. Rajagopal, T.V. Aiyar, 1951, p. 71], [D. Pingree, *Proceedings..*, p. 26] et [T.A. Saraswathi, 1963, p. 331].

$$\boxed{\text{Pour tout entier } p \geq 1,\ S_R^{(p)} = \frac{R^{p+1}}{p+1}.}$$

Cet algorithme peut en définitive être synthétisé par le raisonnement par récurrence suivant :

$$S_R^{(1)} = \frac{R^2}{2} \text{ et, pour tout } p \geq 2,\ S_R^{(p-1)} = \frac{R^p}{p} \Rightarrow S_R^{(p)} = \frac{R^{p+1}}{p+1}.$$

$$\text{Donc } S_R^{(p)} = \frac{R^{p+1}}{p+1} \text{ pour tout } p \geq 1.$$

Compte tenu des remarques précédentes, on ne peut toutefois pas considérer que Jyesthadeva donne une véritable démonstration de la validité générale de ce lemme ; il ne justifie pas, en effet, l'implication logique sur laquelle repose l'essentiel de sa « démonstration » et que nous pouvons formuler comme suit :

$$S_k^{(p-1)} \approx \frac{k^p}{p} \text{ lorsque } k \text{ devient grand} \Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} S_k^{(p-1)} \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{p} = \frac{S_n^{(p)}}{p} \text{ lorsque } n \text{ devient grand.}$$

En réalité, il semble s'agir pour lui de montrer, sur les cas qu'il considère, que son intuition de l'équivalence d'une somme d'équivalents est fondée : parce que l'implication précédente est vraie dans les cas $p = 2$ et $p = 3$, son application menant aux « valeurs asymptotiques » correctes de $S_n^{(2)}$ et $S_n^{(3)}$, il s'autorise à en induire la validité pour toute valeur de p. Il fonde donc moins son lemme sur la base d'une argumentation mathématique et logique solide que sur une intuition confirmée par certains cas particuliers.

Cette étude de Jyesthadeva, centrale dans le cadre de son exposé de la rectification d'un huitième de circonférence, est à notre sens particulièrement révélatrice des limites conceptuelles des travaux de l'école de Mādhava concernant les « développements en série ». Le lemme 4, même s'il permet d'obtenir un résultat équivalent à l'intégration $\int_0^R x^p dx = \frac{R^{p+1}}{p+1}$, est établi d'une façon essentiellement intuitive et inductive. Il résulte en réalité d'une perspective qui ignore encore les fondements du calcul intégral. La justification qu'en donne Jyesthadeva se heurte de ce fait aux problèmes difficiles liés à l'analyse du continu, sans pouvoir les résoudre d'une façon satisfaisante (suivant les critères modernes) : ces problèmes demeurent irréductiblement présents sous une forme ou sous une autre dès lors que le raisonnement appliqué se dispense du concept d'infini.

Ce fait ne doit néanmoins pas nous empêcher de reconnaître l'ingéniosité de la méthode mise en œuvre par les membres de l'école de Mādhava afin de résoudre ce problème.

Sa généralité est en outre remarquable. L'évaluation de certaines sommes d'entiers du type $\sum_{k=1}^{n} k^p$ et de leur « comportement asymptotique » en vue de la détermination de longueurs, d'aires ou de volumes est certes très ancienne : on en trouve certains cas dans les travaux d'Archimède (III^e siècle avant J.-C.) et dans ceux d'Ibn Qurra (IX^e siècle) par exemple[8]. Toutefois, le cas général ne fut semble-t-il abordé en Occident qu'au XVII^e siècle en Europe, notamment par J. Wallis (1616-1703) et B. Pascal (1623-1662). Ce dernier lia d'ailleurs étroitement le problème des sommes de puissance donnée d'entiers au « calcul des indivisibles » (lequel, destiné aux calculs de longueurs, d'aires et de volumes, fut un prélude au

[8] [R. Arnaldez, L. Massignon, A.P. Youschkevitch, in R. Taton, 1957, rééd. 1994, pp. 487-488].

calcul intégral). Dans sa dernière règle du *Traité de la sommation des puissances numériques*, il énonce ainsi :

> « *La somme des mêmes puissances d'un certain nombre de lignes est à la puissance de degré immédiatement supérieur de la plus grande d'entre elles, comme l'unité est à l'exposant de cette même puissance*[9]. »

On constate qu'il s'agit, dans le contexte du « calcul des indivisibles », de l'analogue de la proposition traduite en termes actuels par : $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$.

Après quelques remarques sur le sens de cet énoncé, suit alors, en conclusion du traité, un commentaire que l'on pourrait dans une large mesure appliquer aux travaux indiens étudiés dans ce chapitre :

> « *J'ai tenu à ajouter ces quelques remarques, familières à ceux qui pratiquent les indivisibles, afin de faire ressortir la liaison, toujours admirable, que la nature, éprise d'unité, établit entre les choses les plus éloignées en apparence. Elle apparaît dans cet exemple, où nous voyons le calcul des dimensions des grandeurs continues se rattacher à la sommation des puissances numériques*[10]. »

[9] [B. Pascal, 1665, rééd. 1963, p. 94].
[10] [B. Pascal, 1665, rééd. 1963, p. 94].

Chapitre 6
La rectification d'un arc de cercle (2e partie)

La détermination du huitième de circonférence : conclusion de la démonstration

Soient C et R la circonférence et le rayon d'un cercle. Soient n et p deux entiers naturels non nuls. $S_{R,n}^{(2p)}$ désignant la somme $S_{R,n}^{(2p)} = \delta \sum_{k=1}^{n} (k\delta)^{2p}$, où $\delta = \frac{R}{n}$, Jyesthadeva a tenté dans le *Yuktibhāsa* de justifier le résultat que nous avons noté :

$$R + \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^p}{R^{2p}} S_{R,n}^{(2p)} \approx \frac{C}{8} \quad \text{lorsque } q \text{ et } n \text{ deviennent grands.}$$

La méthode par laquelle il y est parvenu a fait l'objet des lemmes 1 à 3 étudiés au chapitre 4 (pp. 43-55). Il s'est ensuite efforcé de montrer ce que nous avons retranscrit par :

$$S_{R,n}^{(2p)} \approx \frac{R^{2p+1}}{2p+1} \quad \text{lorsque } n \text{ devient grand.}$$

Ce résultat a fait l'objet du chapitre précédent dans son ensemble.

La synthèse de ces deux résultats intermédiaires autorise alors la conclusion annoncée[1], que nous pouvons écrire :

$$R + \sum_{p=1}^{q} \frac{(-1)^p}{R^{2p}} \frac{R^{2p+1}}{2p+1} = R + \sum_{p=1}^{q} (-1)^p \frac{R}{2p+1} \approx \frac{C}{8} \quad \text{lorsque } q \text{ devient grand.}$$

Ou encore, avec toute l'ambiguïté déjà discutée au chapitre 4 concernant le nombre de termes sommés et le statut de l'égalité :

$$\boxed{\frac{C}{8} = R - \frac{R}{3} + \frac{R}{5} - \frac{R}{7} + \dots..} \qquad (2)$$

La rectification d'un arc de mesure inférieure au huitième de circonférence : procédure de généralisation

Ainsi que nous l'avons déjà mentionné, la démonstration de Jyesthadeva que nous avons suivie depuis le chapitre 4 est un commentaire sur le *Tantrasamgraha* de Nīlakantha. Ce dernier énonce en fait le résultat général[2] que nous avons noté :

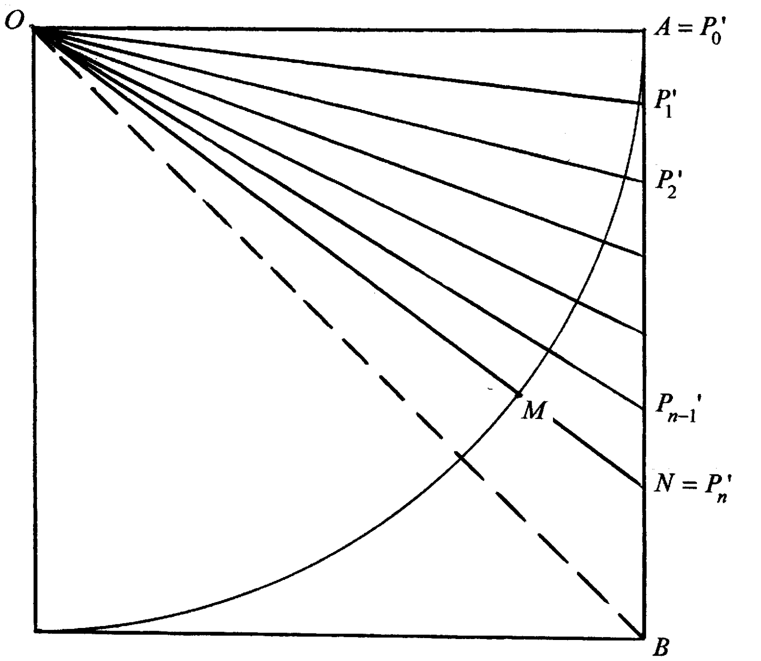
$$\boxed{t = R\frac{Sin(t)}{Cos(t)} - \frac{R}{3}\frac{(Sin(t))^3}{(Cos(t))^3} + \frac{R}{5}\frac{(Sin(t))^5}{(Cos(t))^5} - \frac{R}{7}\frac{(Sin(t))^7}{(Cos(t))^7} + \dots..} \qquad (1)$$

$$\text{pour tout } t \text{ tel que } 0 \le t \le \frac{C}{8}$$

[1] [C.T. Rajagopal, T.V. Aiyar, 1951, p. 72] et [T.A. Saraswathi, 1963, p. 334].
[2] [C.T. Rajagopal, M.S. Rangachari, 1978, p. 93]. Voir la page 41 pour notre traduction en français de cet énoncé.

Cette démonstration figurant dans le *Yuktibhāsa* représente à cet égard un argument pour la validité de (1) à travers celle de (2). Qu'elle suffise à son auteur, nous le comprendrons aisément si nous tentons de reproduire le raisonnement dans le cas d'un arc de mesure t telle que $0 \le t \le \frac{C}{8}$.

Reprenons en effet les notations introduites au chapitre 4. Si A est l'origine de cet arc et M son extrémité, alors (AM) coupe $[AB]$ en un point N. Notons $AN = r = \frac{r}{R}R$.



Si, d'une façon analogue au cas $\frac{r}{R} = 1$, nous découpons $[AN]$ en n segments de longueur $\delta' = \frac{r}{R}\delta$, où $\delta = \frac{R}{n}$, nous obtenons par le même raisonnement l'analogue de ce que nous avons désigné par le lemme 3 au chapitre 4 :

$$r - \frac{\delta'}{R^2}\left\{(\delta')^2 + (2\delta')^2 + ... + [(n-1)\delta']^2 + (n\delta')^2\right\} + \frac{\delta'}{R^4}\left\{(\delta')^4 + (2\delta')^4 + ... + [(n-1)\delta']^4 + (n\delta')^4\right\}$$
$$- ..... + (-1)^q \frac{\delta'}{R^{2q}}\left\{(\delta')^{2q} + (2\delta')^{2q} + ... + [(n-1)\delta']^{2q} + (n\delta')^{2q}\right\}$$

est d'autant plus proche de t que n et q sont grands.

Ce qui, en substituant $\frac{r}{R}\delta$ à δ', peut encore être noté :

$$t \approx r - \frac{r}{R} \times \frac{1}{R^2} \times \frac{r^2}{R^2}\delta\sum_{k=1}^{n}(k\delta)^2 + \frac{r}{R} \times \frac{1}{R^4} \times \frac{r^4}{R^4}\delta\sum_{k=1}^{n}(k\delta)^4 - ..... + (-1)^q \frac{r}{R} \times \frac{1}{R^{2q}} \times \frac{r^{2q}}{R^{2q}}\delta\sum_{k=1}^{n}(k\delta)^{2q}$$

lorsque n et q deviennent grands.

En utilisant les notations introduites au chapitre 5, où $S_R^{(p)}$ désigne la « valeur asymptotique » de $\delta\sum_{k=1}^{n}(k\delta)^p$, on a par conséquent :

$$t \approx r - \frac{r^3}{R^3}\times\frac{1}{R^2}\times S_R^{(2)} + \frac{r^5}{R^5}\times\frac{1}{R^4}\times S_R^{(4)} - \frac{r^7}{R^7}\times\frac{1}{R^6}\times S_R^{(6)} + ... + (-1)^q\frac{r^{2q+1}}{R^{2q+1}}\times\frac{1}{R^{2q}}\times S_R^{(2q)}$$

lorsque q devient grand.

D'où, en utilisant le lemme 4 (qui a consisté à justifier le fait que $S_R^{(p)} = \frac{R^{p+1}}{p+1}$) :

$$t \approx r - \frac{r^3}{R^3}\times\frac{R}{3} + \frac{r^5}{R^5}\times\frac{R}{5} - \frac{r^7}{R^7}\times\frac{R}{7} + ... + (-1)^q\frac{r^{2q+1}}{R^{2q+1}}\times\frac{R}{2q+1}$$

lorsque q devient grand.

Le résultat (1) s'en déduit alors en remarquant que $\frac{r}{R} = \frac{Sin(t)}{Cos(t)}$.

Nous avons déjà formulé au chapitre 4 quelques conjectures quant aux raisons pour lesquelles Nīlakantha a réussi à formuler la condition de validité de ce développement, c'est-à-dire : $\frac{Sin(t)}{Cos(t)} \leq 1$. Il est possible ici d'avancer une hypothèse complémentaire.

Conservons les notations précédentes et supposons cette fois que $\frac{C}{8} < t < \frac{C}{4}$. Dans ce cas, $\frac{Sin(t)}{Cos(t)} = \frac{r}{R} > 1$ et on a par exemple : $a_n^2 - R^2 = r^2 > R^2$.

Si l'on souhaite alors appliquer à un ordre q donné la règle de développement exposée au lemme 3, on obtient encore :

$$\frac{R^2\delta'}{a_n^2} = \left\{\delta' + \sum_{p=1}^{q}(-1)^p\delta'\left[\frac{a_n^2 - R^2}{R^2}\right]^p\right\} + (-1)^{q+1}\frac{R^2\delta'}{a_n^2}\left[\frac{a_n^2 - R^2}{R^2}\right]^{q+1}.$$

Mais, ici, la différence entre $\frac{R^2\delta'}{a_n^2}$ et $\left\{\delta' + \sum_{p=1}^{q}(-1)^p\delta'\left[\frac{a_n^2 - R^2}{R^2}\right]^p\right\}$ devient d'autant plus grande (en valeur absolue) que q est grand, puisque $\frac{a_n^2 - R^2}{R^2} = \left[\frac{Sin(t)}{Cos(t)}\right]^2 > 1$.

La démonstration précédente n'est donc plus valide, puisqu'elle exige que cette différence devienne de plus en plus petite. Compte tenu de la façon déjà plusieurs fois évoquée dont Nīlakantha a envisagé la sommation des séries à progression géométrique (voir le chapitre 3 et l'annexe 8), cette propriété peut avoir été à l'origine de son énoncé concernant la condition de validité du développement (1).

L'évaluation du reste de la série développant le huitième de circonférence

L'excellente approximation du rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre ($\frac{2827433388233}{900000000000} \approx 3{,}1415926535922$) attribuée par ses successeurs à Mādhava ne saurait s'expliquer par l'utilisation du « développement en série » (2) en tant que tel. En effet, la convergence vers π de la série $4\sum_{p\geq 1} \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}$ (convergence dont (2) est l'analogue) est extrêmement lente et il faudrait sommer plus de 8×10^{11} termes pour avoir l'assurance d'obtenir ce résultat, correct à $2{,}5\times 10^{-12}$ près[3]. En réalité, diverses techniques d'« accélération de convergence » ont été mises en évidence par certains disciples de Mādhava. Leur remarquable efficacité permet de comprendre comment ce résultat a pu être obtenu.

Nous examinons ici, dans un premier temps, de quelle manière divers termes correcteurs furent ajoutés aux sommes partielles de la série initiale exprimée dans (2) afin de compenser sa « lenteur de convergence ». Nous verrons au paragraphe suivant comment ces termes correcteurs furent ensuite utilisés afin de construire de nouvelles séries dont la « convergence » est très rapide.

Śānkara Vāriyar, qui fut un disciple de Jyesthadeva et de Nīlakantha, énonce dans le *Kriyākramakarī* et le *Yuktidīpikā* les vers suivants, en les attribuant à Mādhava lui-même :

> « *Prends le diamètre du cercle multiplié par 4 et divisé par 1 ; soustrais et ajoute alternativement à ce résultat les termes successifs obtenus en divisant le quadruple du diamètre plusieurs fois par les nombres impairs 3, 5, etc… Prends le nombre pair immédiatement supérieur au nombre impair auquel le procédé précédent a été interrompu. Comme auparavant, multiplie le quadruple du diamètre par la moitié de ce nombre pair et divise par son carré ajouté de 1. Le quotient doit être additionné à la série si le dernier terme a été soustrait et soustrait si le dernier terme a été additionné. Le résultat est la circonférence du cercle. En prenant plus de termes, le résultat sera plus précis*[4]. »

En notant *D* le diamètre du cercle de circonférence *C*, nous pouvons retranscrire cette assertion comme suit :

$$C \approx \frac{4D}{1} - \frac{4D}{3} + \frac{4D}{5} - \ldots \pm \frac{4D}{2n-1} \mp \frac{4D\times(\frac{2n}{2})}{(2n)^2+1} \quad \text{lorsque } n \text{ devient grand.}$$

Soit encore :

---

[3] Un critère classique de convergence des séries alternées s'applique en effet ici et permet d'écrire, pour tout entier n : $\left|\pi - 4\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{2p-1}\right| \leq 4\times\frac{1}{2n+1}$. On a donc :

$$n > 8\times 10^{11} \Rightarrow \frac{4}{2n+1} < 2{,}5\times 10^{-12} \Rightarrow \left|\pi - 4\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^p}{2p-1}\right| \leq 2{,}5\times 10^{-12}.$$

Il se trouve que la convergence de cette série nécessite effectivement de sommer un nombre de termes de cet ordre pour parvenir à ce résultat, tant cette convergence est lente. Voir [E. Baltz, L. Bigiaoui, 2002, p. 11].

[4] [R.C. Gupta, 1992, pp. 68-69]. Voir aussi [C.T. Rajagopal, M.S. Rangachari, 1978, p. 94].

$$\boxed{C \approx \frac{4D}{1} - \frac{4D}{3} + \frac{4D}{5} - \ldots.. \pm \frac{4D}{2n-1} \mp 4D \times R_n^{(2)} \quad \text{lorsque } n \text{ devient grand, avec } R_n^{(2)} = \frac{n}{4n^2+1}.}$$

Ce qui, en termes modernes, peut encore s'écrire :

$$\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots.. \pm \frac{1}{2n-1} \mp R_n^{(2)} \quad \text{lorsque } n \text{ devient grand, avec } R_n^{(2)} = \frac{n}{4n^2+1}.$$

On peut remarquer au passage que les deux dernières phrases de Śānkara résument à elles-seules toute l'ambiguïté des énoncés de l'école de Mādhava quant à leur rapport au concept d'infini mathématique. Car si le résultat obtenu *est* la circonférence du cercle, il est dit aussitôt après que l'application de l'algorithme ne donne que des *approximations* de plus en plus *précises*.

Toujours dans le *Kriyākramakārī* et le *Yuktidīpikā*, Śānkara énonce ensuite, en attribuant là encore ces vers à Mādhava :

> « *Pour une plus grande précision [...], dans le terme final, le multiplicande du quadruple du diamètre est le carré de la moitié du nombre pair additionné à 1 et le diviseur est le quadruple de ce multiplicande additionné à 1, multiplié ensuite par la moitié du nombre pair*[5]. »

En d'autres termes :

$$C \approx \frac{4D}{1} - \frac{4D}{3} + \frac{4D}{5} - \ldots.. \pm \frac{4D}{2n-1} \mp \frac{4D \times [(\frac{2n}{2})^2 + 1]}{\left[4[(\frac{2n}{2})^2 + 1] + 1\right] \times n} \quad \text{lorsque } n \text{ devient grand.}$$

Soit encore :

$$\boxed{C \approx \frac{4D}{1} - \frac{4D}{3} + \frac{4D}{5} - \ldots.. \pm \frac{4D}{2n-1} \mp 4D \times R_n^{(3)} \quad \text{lorsque } n \text{ devient grand, avec } R_n^{(3)} = \frac{n^2+1}{(4n^2+5)n}}$$

Ce qui, avec les notations modernes, est équivalent à :

$$\text{Si } n \text{ est grand, alors : } \frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots \pm \frac{1}{2n-1} \mp R_n^{(3)} \text{ , avec } R_n^{(3)} = \frac{n^2+1}{(4n^2+5)n}$$

(cette approximation étant meilleure que la précédente).

Ainsi que nous le verrons plus loin, Śānkara, au cours des explications qu'il donne concernant la manière selon laquelle ces termes correcteurs ont été obtenus, énonce aussi $4D \times R_n^{(1)}$, où $R_n^{(1)} = \frac{1}{4n}$, pour première approximation du reste[6].

Avant d'étudier sa justification, il est indispensable de remarquer la qualité de ces évaluations. On peut en effet démontrer (ce que nous faisons à l'annexe 11) qu'en réalité, si $\rho_n = \left| \frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \right|$, alors ρ_n admet le développement en fraction continue généralisée suivant :

---

[5] [R.C. Gupta, 1992, p. 69] ; [C.T. Rajagopal, M.S. Rangachari, 1978, p. 94].
[6] [T. Hayashi, T. Kusuba, M.Yano, 1990, p. 150].

$$\rho_n = \cfrac{1/2}{2n + \cfrac{1^2}{2n + \cfrac{2^2}{2n + \cfrac{3^2}{2n + \ldots}}}}$$

On constate que $R_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}$ et $R_n^{(3)}$ sont respectivement la première, la seconde et la troisième réduite de ρ_n. En effet :

$$R_n^{(1)} = \frac{1/2}{2n} \quad ; \quad R_n^{(2)} = \cfrac{1}{4n + \cfrac{1}{n}} = \cfrac{1/2}{2n + \cfrac{1^2}{2n}} \quad \text{et} \quad R_n^{(3)} = \cfrac{1}{4n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n}}} = \cfrac{1/2}{2n + \cfrac{1^2}{2n + \cfrac{2^2}{2n}}}$$

Dans le *Kriyākramakārī*, Śānkara attribue au « maître », c'est-à-dire à Mādhava lui-même, la méthode de détermination de ces termes correcteurs[7]. L'idée fondamentale guidant cette méthode, décrite par Śānkara, repose sur la constatation initiale suivante :

Le terme correcteur idéal ρ_n est tel que $C = \left\{ \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \frac{4D}{2p-1} \right\} + (-1)^n 4D\rho_n$.

On a donc, pour tout $n \geq 1$, $\rho_n + \rho_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$.

Déterminer un terme correcteur pour la série revient par conséquent à chercher une suite de terme général R_n telle que $R_n + R_{n+1}$ soit le plus proche possible de $\frac{1}{2n+1}$, tout au moins lorsque n devient grand ; c'est-à-dire qu'il s'agit de déterminer R_n tel que la quantité :

$$E_n = 4D\left| \left[\left\{ \sum_{p=1}^{n+1} \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1} \right\} + (-1)^{n+1} R_{n+1} \right] - \left[\left\{ \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1} \right\} + (-1)^n R_n \right] \right| = 4D\left| \frac{1}{2n+1} - (R_n + R_{n+1}) \right|$$

soit la plus petite possible. Cette quantité est appelée « erreur » (*sthaulya*) par Śānkara[8].

Ce dernier commence par remarquer que si l'on avait $\rho_n = \rho_{n+1} = \frac{1}{2(2n+1)}$, alors le problème serait résolu. Cette remarque initiale se comprend si l'on s'avise du fait que, les termes ρ_n « tendant vers 0 » lorsque n croît, on doit avoir $\rho_n \approx \rho_{n+1}$ lorsque n devient grand. Bien que l'égalité posée soit clairement fausse (par exemple parce que la suite (ρ_n) est strictement décroissante), elle devient donc d'autant plus correcte que n est grand. Probablement guidé par le fait que $\frac{1}{2(2n+1)} \approx \frac{1}{4n}$ lorsque n devient grand, Śānkara prend alors[9] pour première approximation de ρ_n la quantité $R_n^{(1)} = \frac{1}{4n}$.

Notons avant de poursuivre que les raisonnements exposés ensuite par Śānkara le sont en rapport avec le premier nombre impair, que nous noterons m, dont l'inverse est négligé dans la somme partielle considérée ici. C'est-à-dire que, dans la somme que nous notons

7 [T. Hayashi, T. Kusuba, M.Yano, 1990, p. 151].
8 [T. Hayashi, T. Kusuba, M.Yano, 1990, p. 153].
9 [T. Hayashi, T. Kusuba, M.Yano, 1990, pp. 152-153].

$4D\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}$, il fait le plus souvent référence à l'entier impair $m = 2n + 1$; ce qui n'est d'ailleurs pas sans intérêt du point de vue algébrique, les étapes de son raisonnement s'exprimant plus simplement à l'aide de cet entier qu'à l'aide de n. Il obtient dans ces conditions :

$$R_n^{(1)} = \frac{1}{2m-2} \quad ; \quad R_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{2m+2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{m}.$$

D'où :

$$R_n^{(1)} + R_{n+1}^{(1)} = \frac{4m}{4m^2-4} = \frac{m^2}{m^3-m} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2n+1} = \frac{m^2-1}{m^3-m}.$$

L'« erreur » est donc ici :

$$E_n^{(1)} = 4D\left[(R_n^{(1)} + R_{n+1}^{(1)}) - \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{4D}{m^3-m} = \frac{4D}{(2n+1)^3-(2n+1)}.$$

L'idée est alors que, $R_n^{(1)} + R_{n+1}^{(1)}$ étant supérieur à $\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{m}$, on peut en déduire que $R_n^{(1)}$ est trop grand. Śānkara écrit ainsi :

> « *Le maître, qui n'était pas satisfait en voyant cette erreur, chercha une autre correction. Dans ce cas, un petit excès par rapport à la valeur désirée a été produit dans le quotient obtenu au moyen du dénominateur de la correction. Aussi, afin de l'éliminer, il additionna l'unité aux deux dénominateurs*[10]. »

Selon lui, Mādhava a donc considéré un second terme correcteur : $R_n^{(1a)} = \frac{1}{4n+1} = \frac{1}{2m-1}$.

Dans ces conditions :

$$R_{n+1}^{(1a)} = \frac{1}{2m+3}$$

puis :

$$R_n^{(1a)} + R_{n+1}^{(1a)} = \frac{4m^2+2m}{m(2m-1)(2m+3)}.$$

Comme $\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{m} = \frac{(4m^2+2m)+(2m-3)}{m(2m-1)(2m+3)}$, on peut alors constater que $\frac{1}{2n+1}$ est plus grand que $R_n^{(1a)} + R_{n+1}^{(1a)}$. Ceci signifie que $R_n^{(1a)}$ est trop petit.

Śānkara énonce alors fort logiquement :

> « *[...] Par conséquent, l'unité ne doit pas être entièrement additionnée aux dénominateurs des corrections*[11]. »

Commence ensuite un raisonnement très obscur au cours duquel Śānkara donne dans un premier temps $R_n^{(1b)} = \frac{1}{4n+\frac{1}{4n}}$ pour nouvelle évaluation du reste, avant d'arriver à la conclusion que

[10] [T. Hayashi, T. Kusuba, M.Yano, 1990, p. 153].
[11] [T. Hayashi, T. Kusuba, M.Yano, 1990, p. 155].

$R_n^{(2)} = \dfrac{1}{4n + \dfrac{4}{4n}} = \dfrac{1}{4n + \dfrac{1}{n}}$ en constitue une meilleure[12]. Ce raisonnement n'étant pas exempt de contradictions d'ordre logique aussi bien que mathématique, il semble s'agir en fait d'une tentative de reconstruction *a posteriori* sous une forme déductive d'un résultat déjà obtenu par une voie inductive à partir des premières valeurs de n, comme nous le verrons plus loin.

À notre connaissance, il n'existe d'ailleurs aucune façon de prévoir *a priori* la forme de la seconde réduite $R_n^{(2)}$. On ne peut que la chercher sous la forme $\dfrac{1}{4n + \dfrac{a}{n}}$ et vérifier *ensuite* que la valeur $a = 1$ induit *effectivement* la plus petite « erreur » possible dans ces conditions (ceci apparaît implicitement dans la démonstration générale que nous donnons à l'annexe 11).

Śānkara ne donne pas dans le *Kriyākramakarī* l'« erreur » $E_n^{(2)}$ induite par $R_n^{(2)}$. Mais il la détermine dans le *Yuktidīpikā*[13] :

Toujours avec $m = 2n + 1$, on a :

$$R_n^{(2)} = \frac{1}{2m - 2 + \dfrac{4}{2m - 2}} = \frac{m-1}{2m^2 - 4m + 4}$$

et :

$$R_{n+1}^{(2)} = \frac{1}{2m + 2 + \dfrac{4}{2m + 2}} = \frac{m+1}{2m^2 + 4m + 4} .$$

D'où :

$$R_n^{(2)} + R_{n+1}^{(2)} = \frac{m^3}{m^4 + 4} = \frac{m^4}{m^5 + 4m} .$$

Il résulte alors de $\dfrac{1}{2n+1} = \dfrac{1}{m} = \dfrac{m^4 + 4}{m^5 + 4m}$ que :

$$E_n^{(2)} = 4D\left[\frac{1}{2n+1} - (R_n^{(2)} + R_{n+1}^{(2)})\right] = \frac{16D}{m^5 + 4m} = \frac{16D}{(2n+1)^5 + 4(2n+1)} .$$

Nous verrons plus loin comment $E_n^{(1)}$ et $E_n^{(2)}$ furent utilisées afin de construire de nouvelles séries dont la « vitesse de convergence » est plus élevée que celle de la série initiale.

La détermination de $R_n^{(3)} = \dfrac{1}{4n + \dfrac{1}{n + \dfrac{1}{n}}}$ ne fait l'objet d'aucune justification de la part de Śānkara[14]. Remarquons simplement qu'elle est cohérente, compte tenu du fait que $R_n^{(2)} + R_{n+1}^{(2)} < \dfrac{1}{2n+1}$.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, les trois termes correcteurs que nous avons notés $R_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}$ et $R_n^{(3)}$ ont très probablement été déterminés d'une façon inductive. Plusieurs hypothèses ont été formulées à ce sujet. L'idée générale repose sur le fait que plusieurs

---

12 Pour les détails, voir [T. Hayashi, T. Kusuba, M.Yano, 1990, pp. 154-158].
13 [T. Hayashi, T. Kusuba, M.Yano, 1990, p. 159].
14 [T. Hayashi, T. Kusuba, M.Yano, 1990, p. 160].

approximations du rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre étaient connues des Indiens et que certaines d'entre elles permettent de mettre en évidence les expressions de ces trois termes correcteurs pour les premières valeurs de n.

Avec l'approximation $\frac{355}{113}$, on obtient ainsi que $R_n = \left|\frac{1}{4}\times\frac{355}{113} - \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}\right|$ vérifie pour tout $n \in [1;7]$ une relation du type :

$$R_n = \cfrac{1}{4n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + f_n}}} \quad \text{, où } f_n \in \left]0;1\right[\text{ est une fraction[15].}$$

Par exemple avec $n = 3$, on obtient successivement :

$$R_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}\times\frac{355}{113} = \frac{551}{6780} = \frac{1}{\frac{6780}{551}} = \frac{1}{12 + \frac{168}{551}} \quad ; \quad \text{soit : } R_3 \approx \frac{1}{12} = \frac{1}{4\times 3} = R_3^{(1)} \ ;$$

$$R_3 = \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{\frac{551}{168}}} = \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{3 + \frac{47}{168}}} \quad ; \quad \text{soit : } R_3 \approx \cfrac{1}{12 + \frac{1}{3}} = \cfrac{1}{(4\times 3) + \frac{1}{3}} = R_3^{(2)} \ ;$$

$$R_3 = \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\frac{168}{47}}}} = \cfrac{1}{12 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \frac{27}{47}}}} \quad ; \quad \text{soit : } R_3 \approx \cfrac{1}{(4\times 3) + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{3}}} = R_3^{(3)} .$$

Même si l'approximation $\frac{355}{113}$ fut connue en Inde, y compris au sein de la tradition instaurée par Āryabhata I, il est toutefois plus probable qu'une telle induction des termes correcteurs fut effectuée à partir du rapport $\frac{62832}{20000}$, qui était le plus largement utilisé[16]. Il se trouve que dans ce cas le reste $R_n = \left|\frac{1}{4}\times\frac{62832}{20000} - \sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}\right|$ vérifie lui aussi, cette fois pour tout $n \in [1;4]$ seulement, une relation du type :

$$R_n = \cfrac{1}{4n + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{n + f_n}}} \quad \text{, où } f_n \in]0;1[\text{ est une fraction.}$$

Quoiqu'il en soit, ces termes correcteurs sont d'une remarquable efficacité dans la perspective de la détermination de nouvelles approximations aussi précises que voulues du rapport de la circonférence au diamètre. Une étude comparée de l'« accélération de convergence » induite par ces termes est présentée à l'annexe 12. On constatera que l'approximation donnant le plus rapidement un résultat voisin du rapport attribué à Mādhava (lequel est correct à $2,5\times 10^{-12}$ près), s'obtient par :

---

[15] [T. Hayashi, T. Kusuba, M.Yano, 1990, p. 166].

[16] [R.C. Gupta, 1992, p. 70].

$$4\sum_{k=1}^{42}\frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}+4R_{42}^{(3)}\approx 3{,}1415926535923.$$

Nous proposons par ailleurs en annexe 13 un problème s'inscrivant dans le cadre du programme des classes de Terminale S, dont une partie est destinée à montrer la qualité des termes correcteurs $R_n^{(1)}$ et $R_n^{(2)}$ à partir de l'expression intégrale : $\rho_n=\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}dx$.

Construction de nouvelles séries à « convergence accélérée »

Le *Yuktidīpikā* de Śānkara et le *Karanapaddhati* donnent d'autres « développements en séries » de la circonférence d'un cercle que celui examiné jusqu'à présent, à savoir (D désignant le diamètre de ce cercle) :

$$C=4D-\frac{4D}{3}+\frac{4D}{5}-\frac{4D}{7}+.....$$

Tous deux énoncent par exemple :

> « *La circonférence est de façon analogue obtenue lorsque quatre fois le diamètre est divisé par les cubes des nombres impairs en commençant par 3 diminués par ces nombres eux-mêmes et que ces quotients sont alternativement additionnés ou soustraits au triple du diamètre*[17]. »

Enoncé que l'on peut retranscrire comme suit :

$$\boxed{C=3D+\frac{4D}{3^3-3}-\frac{4D}{5^3-5}+\frac{4D}{7^3-7}-\frac{4D}{9^3-9}+.....}$$

En termes modernes, ce résultat correspond au développement en série :

$$\pi=3+4\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{(2p+1)^3-(2p+1)}\ .$$

Le *Yuktidīpikā* énonce encore :

> « *Le quadruple des nombres impairs est ajouté à leur cinquième puissance ; 16 fois le diamètre est successivement divisé par les nombres obtenus ; les résultats des rangs impairs sont additionnés et ceux de rang pair soustraits. La circonférence correspondant au diamètre est ainsi obtenue*[18]. »

C'est-à-dire :

$$\boxed{C=\frac{16D}{1^5+4\times1}-\frac{16D}{3^5+4\times3}+\frac{16D}{5^5+4\times5}-\frac{16D}{7^5+4\times7}+.....}$$

A ce résultat correspond l'identité moderne :

$$\pi=16\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^5+4(2p+1)}\,.$$

Remarquons que les deux énoncés précédents peuvent laisser entendre que si l'algorithme est *indéfiniment* poursuivi, alors la circonférence sera *exactement* obtenue. Ceci

[17] [C.T. Rajagopal, M.S. Rangachari, 1978, p. 95] ; [A.K. Bag, 1979, p. 266].
[18] [C.T. Rajagopal, M.S. Rangachari, 1978, p. 95].

semble infirmer certaines remarques que nous avons précédemment faites au sujet de l'ambiguïté quant au statut de l'infini et des égalités (exactes, « asymptotiques » ou approximatives). En réalité, bien qu'une telle interprétation ne soit pas à exclure, il faut tenir compte du fait que même dans des contextes où les égalités annoncées sont clairement des approximations, les astronomes indiens recourent en général à des formulations dans lesquelles ce statut d'approximation n'est plus explicite. C'est le cas, et nous en avons donné quelques exemples au premier chapitre, des énoncés concernant les tables trigonométriques[19].

Ces développements ne sont justifiés ni par Śānkara, ni par aucun membre de l'école de Mādhava. Il est néanmoins certain qu'ils résultent de l'utilisation des termes correcteurs étudiés au paragraphe précédent ; ceci d'autant plus qu'ils sont énoncés dans le *Yuktidīpikā* immédiatement après que les explications concernant la détermination de ce que nous avons noté $R_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}$ et $R_n^{(3)}$ aient été données[20].

La méthode employée est sans doute voisine de celle que nous présentons ci-après ; celle-ci peut d'ailleurs être généralisée, ainsi que nous le montrons à l'annexe 12, afin d'accélérer la convergence d'une série, pourvu que l'on dispose d'un équivalent asymptotique du reste de ses sommes partielles.

Nous avons vu au paragraphe précédent que Śānkara a établi l'identité que nous notons :

$$E_n^{(1)} = 4D \times \left[(R_n^{(1)} + R_{n+1}^{(1)}) - \frac{1}{2n+1} \right] = \frac{4D}{(2n+1)^3 - (2n+1)} \quad \text{, où } R_n^{(1)} = \frac{1}{4n}.$$

Pour tout $n \geq 1$, il est donc possible d'écrire les égalités successives :

$$\begin{cases} 4D \times \left[(R_1^{(1)} + R_2^{(1)}) - \frac{1}{3} \right] = \frac{4D}{3^3 - 3} \\ 4D \times \left[\frac{1}{5} - (R_2^{(1)} + R_3^{(1)}) \right] = -\frac{4D}{5^3 - 5} \\ 4D \times \left[(R_3^{(1)} + R_4^{(1)}) - \frac{1}{7} \right] = \frac{4D}{7^3 - 7} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ 4D \times (-1)^{n+1} \left[(R_n^{(1)} + R_{n+1}^{(1)}) - \frac{1}{2n+1} \right] = (-1)^{n+1} \frac{4D}{(2n+1)^3 - (2n+1)} \end{cases}$$

On en déduit, après sommation membre à membre et simplifications :

$$\sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \frac{4D}{(2p+1)^3 - (2p+1)} = 4D \times \left[(-1)^{n+1} (R_{n+1}^{(1)} - \frac{1}{2n+1}) \right] + 4DR_1^{(1)} + \sum_{p=2}^{n} (-1)^{p-1} \frac{4D}{2p-1}.$$

Puis, en ajoutant $4D$ aux deux membres et en tenant compte du fait que $4DR_1^{(1)} = D$:

$$4D + \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \frac{4D}{(2p+1)^3 - (2p+1)} = 4D \times \left[(-1)^{n+1} (R_{n+1}^{(1)} - \frac{1}{2n+1}) \right] + D + \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \frac{4D}{2p-1}.$$

[19] Ce fait se vérifie dans de nombreux passages. Voir par exemple [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985].

[20] [T. Hayashi, T. Kusuba, M. Yano, 1992, p. 160].

Or : $R_{n+1}^{(1)}$ et $\frac{1}{2n+1}$ sont d'autant plus petits que n est grand. Comme on sait par ailleurs que $\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{4D}{2p-1} \approx C$ lorsque n devient grand, on en déduit que :

$$C \approx 3D + \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{4D}{(2p+1)^3-(2p+1)} \quad \text{lorsque } n \text{ devient grand.}$$

Le second « développement en série » peut être justifié de façon analogue.

Śānkara a établi l'identité que nous avons notée :

$$E_n^{(2)} = 4D \times \left[\frac{1}{2n+1} - (R_n^{(2)} + R_{n+1}^{(2)})\right] = \frac{16D}{(2n+1)^5 + 4(2n+1)} \text{, où } R_n^{(2)} = \frac{n}{4n^2+1}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on obtient par conséquent les égalités successives :

$$\begin{cases} 4D \times \left[(R_1^{(2)} + R_2^{(2)}) - \frac{1}{3}\right] = -\frac{16D}{3^5 + 4\times 3} \\ 4D \times \left[\frac{1}{5} - (R_2^{(2)} + R_3^{(2)})\right] = \frac{16D}{5^5 + 4\times 5} \\ 4D \times \left[(R_3^{(2)} + R_4^{(2)}) - \frac{1}{7}\right] = -\frac{16D}{7^5 + 4\times 7} \\ \ldots\ldots \\ \ldots\ldots \\ 4D \times (-1)^{n+1}\left[(R_n^{(2)} + R_{n+1}^{(2)}) - \frac{1}{2n+1}\right] = (-1)^n \frac{16D}{(2n+1)^5 + 4(2n+1)} \end{cases}$$

D'où, après sommation membre à membre et simplifications :

$$\sum_{p=1}^{n}(-1)^p \frac{16D}{(2p+1)^5 + 4(2p+1)} = 4D \times \left[(-1)^{n+1}(R_{n+1}^{(2)} - \frac{1}{2n+1})\right] + 4DR_1^{(2)} + \sum_{p=2}^{n}(-1)^{p-1}\frac{4D}{2p-1}.$$

On a : $4DR_1^{(2)} = 4D \times \frac{1}{5}$. En ajoutant $4D$ aux deux membres de l'égalité, on en déduit :

$$4D + \sum_{p=1}^{n}(-1)^p \frac{16D}{(2p+1)^5 + 4(2p+1)} = 4D \times \left[(-1)^{n+1}(R_{n+1}^{(2)} - \frac{1}{2n+1})\right] + \frac{4D}{5} + \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{4D}{2p-1}.$$

Enfin, $R_{n+1}^{(2)}$ et $\frac{1}{2n+1}$ sont d'autant plus petits que n est grand. Il résulte alors du fait que $\sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}\frac{4D}{2p-1} \approx C$ lorsque n devient grand que :

$$C \approx \frac{16D}{5} + \sum_{p=1}^{n}(-1)^p \frac{16D}{(2p+1)^5 + 4(2p+1)} \quad \text{lorsque } n \text{ devient grand.}$$

Il en résulte bien :

$$C \approx \sum_{p=0}^{n}(-1)^p \frac{16D}{(2p+1)^5 + 4(2p+1)} \quad \text{lorsque } n \text{ devient grand.}$$

Les séries obtenues convergent beaucoup plus rapidement que la série initiale. Elles le font d'une façon identique aux suites obtenues avec les termes correcteurs, ainsi que nous le montrons à l'annexe 12. Il est clair en outre que plus la réduite $R_n^{(k)}$ du développement en fraction continue généralisé ρ_n du reste est d'ordre k élevé, plus la convergence est rapide, l'erreur correspondante $E_n^{(k)}$ devenant d'autant plus petite (on peut montrer que c'est une fraction rationnelle en n dont le degré est $-1-2k$).

Remarquons enfin que le terme correcteur $R_n^{(3)}$ ne semble pas avoir été à son tour utilisé par Mādhava et ses disciples afin de construire la série correspondante à partir de $E_n^{(3)}$. Quoiqu'il en soit, elle n'apparaît pas dans leurs écrits. Nous montrons à l'annexe 12 que l'application de la méthode précédente permet en fait d'obtenir le développement qui converge encore plus rapidement équivalent à :

$$\pi = \frac{28}{9} + 36\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p(p+1)(2p+1)(4p^2+5)(4p^2+8p+9)}.$$

Chapitre 7
Les différences d'ordre 1 et 2 du Sinus et du Cosinus

Nous avons vu au chapitre 1 que les différences du premier et du second ordre des Sinus ont joué un rôle important dans la construction des tables trigonométriques indiennes, ceci dès l'œuvre d'Āryabhata I. Nous nous proposons, dans ce chapitre et dans celui qui suit, d'exposer la manière dont ces différences ont été considérées par Bhāskara II, puis par les astronomes de l'école de Mādhava. En ce qui concerne ces derniers, nous verrons l'importance fondamentale jouée par l'étude des différences d'ordre 1 et 2 des Sinus et des Cosinus dans la mise en évidence des « développements en séries » de ces « fonctions ». Bien qu'il s'agisse là de notre principal objet, nous avons jugé intéressant de mettre auparavant en évidence la conception de Bhāskara II quant aux différences d'ordre 1 ; non seulement parce que ses résultats sont antérieurs et peuvent avoir été connus des keralais, mais surtout parce qu'il a l'originalité d'adopter un point de vue cinématique.

Les différences d'ordre 1 du Sinus et du Cosinus

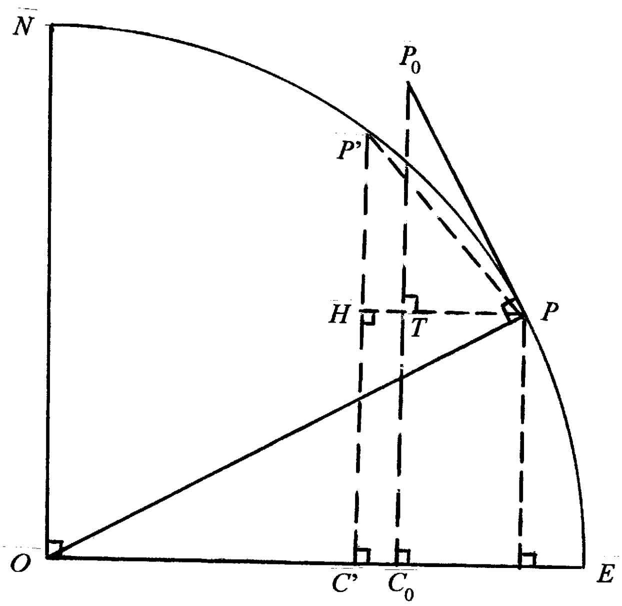
En vue de la détermination précise du mouvement quotidien d'une planète, Bhāskara II est amené dans le *Siddhānta Śiromani* à comparer les positions de cette planète au cours d'intervalles de temps très petits[1]. Afin d'analyser ce mouvement, il utilise le concept de « mouvement durant un instant » (*tatkālikīgati*). Il distingue clairement le « mouvement mesuré grossièrement » (*sthūlagati*), que l'on peut mettre en rapport avec le concept de vitesse moyenne, du « mouvement mesuré avec précision » (*sūksmagati*), lequel fait référence à des déplacements et des intervalles de temps très petits. On peut en fait définir le « mouvement durant un instant » (*tatkālikīgati*) comme la variation très petite de la position d'une planète observée lors d'un temps d'observation très court[2].

Bhāskara II nomme «variation du Sinus » (*bhogya khanda*) d'un Sinus donné figurant dans une table trigonométrique la différence entre le Sinus qui lui succède dans la table et lui-même. Considérant le mouvement uniforme d'un point sur le cercle, qui correspond à l'analyse du mouvement d'une planète sur son épicycle, il nomme aussi « variation du Sinus durant un instant » (*tatkālika bhogya khanda*) de ce Sinus la variation de latitude qui serait engendrée à partir du point considéré au cours du petit intervalle de temps étudié, si son mouvement s'effectuait tangentiellement au cercle[3].

Ces quantités et le résultat qu'il établit peuvent être considérés à l'aide de la configuration suivante :

[1] [C.N. Srinivasiengar, 1967, p. 92].
[2] [A.K. Bag, 1979, p. 289].
[3] [A.K. Bag, 1979, pp. 289-290].

O est le centre du cercle de rayon R ;
a et a' sont deux arcs tabulés consécutifs d'une table de Sinus donnée de subdivision élémentaire δ ; c'est-à-dire : $a' = a + \delta$;
P et P' sont tels que les mesures des arcs d'origine E et d'extrémités P et P' soient respectivement a et a' ;
P_0 appartient à la tangente au cercle en P et est tel que : $PP_0 = a'$;
C, C' et C_0 sont les projetés orthogonaux respectifs de P, P' et P_0 sur (OE) ;
H et T sont les projetés orthogonaux de P sur $(P'C')$ et (P_0Q_0) respectivement.



Alors la « variation du Sinus » (*bhogya khanda*) de $Sin(a)$ correspond à :

$$Sin(a') - Sin(a) = P'C' - PC = P'H \;;$$

et la « variation du Sinus durant un instant » (*tatkālika bhogya khanda*) de $Sin(a)$ est :

$$P_0C_0 - PC = P_0T \,.$$

Bhāskara II détermine la « variation du Sinus » (*bhogya khanda*) de $Sin(a)$ en l'identifiant avec la « variation du Sinus durant un instant » (*tatkālika bhogya khanda*) correspondante, ce qui revient à considérer que le mouvement est localement tangentiel au cercle[4]. Il énonce alors :

> « *Le produit du Cosinus par l'arc élémentaire rapporté au rayon donne la différence des deux Sinus*[5]. »

C'est-à-dire : $Sin(a+\delta) - Sin(a) \approx Cos(a) \times \frac{\delta}{R}$ (lorsque δ est petit par rapport à R)

Ou encore :

$$\boxed{Sin(a') - Sin(a) \approx Cos(a) \times \frac{a'-a}{R} \quad \text{lorsque } a' \approx a\,.}$$

Compte tenu de la perspective dans laquelle il se place, son raisonnement fut probablement analogue à celui qui suit :

Les triangles OCP et P_0TP étant semblables, on peut écrire :

$$P_0T = \frac{PP_0 \times OC}{OP} = \frac{PP_0}{R} \times Cos(a)$$

Par ailleurs, $a' - a$ étant l'arc élémentaire δ d'une table trigonométrique, il est par définition petit (par rapport à R).
Les triangles P_0TP et $P'HP$ sont donc approximativement confondus et on a :

$$PP' \approx arc(PP') = PP_0 = a' - a \quad \text{et} \quad P'H \approx P_0T$$

[4] [A.K. Bag, 1979, pp. 289-290].
[5] [C.N. Srinivasiengar, 1967, p. 92].

(approximation qui traduit l'identification annoncée de la « variation du Sinus » (*bhogya khanda*) et de la « variation du Sinus durant un instant » (*tatkālika bhogya khanda*) correspondante).
D'où, en utilisant le résultat précédent :

$$Sin(a') - Sin(a) = P'H \approx P_0T = Cos(a) \times \frac{PP_0}{R} \approx Cos(a) \times \frac{PP'}{R} = Cos(a) \times \frac{a'-a}{R} .$$

Remarquons que ce résultat obtenu par Bhāskara II peut être mis en relation avec la différentiation d'ordre 1 du Sinus en a, que les modernes noteraient :

$$d[Sin](a) = Cos(a) \times \frac{da}{R} .$$

Il est clair cependant que δ n'est pas ici un infinitésimal : aussi petit soit-il, il demeure une subdivision fixée du cercle.

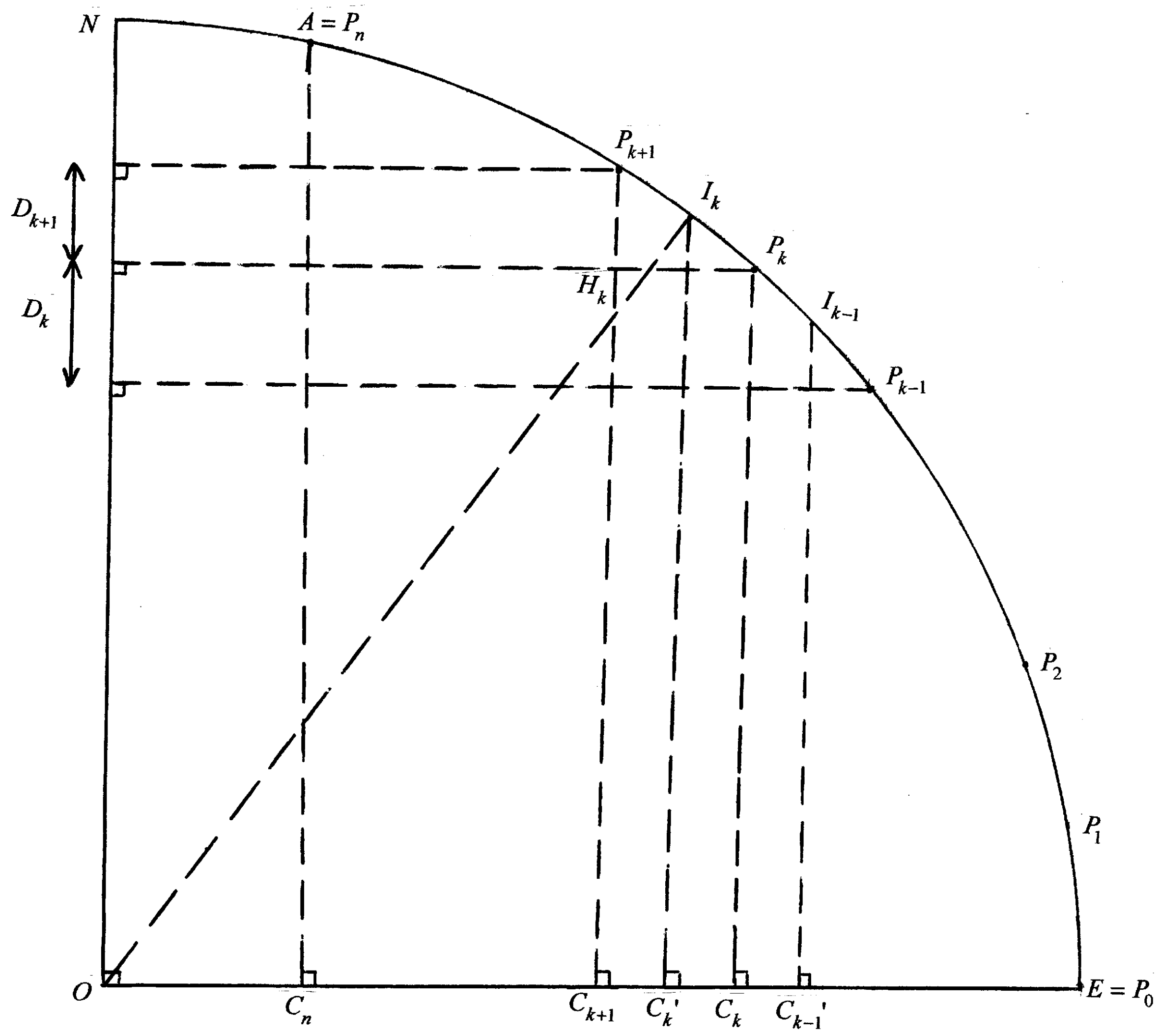
Nīlakantha (*Āryabhatīya Bhāsya* et *Tantrasamgraha*) et Jyesthadeva (*Yuktibhāsa*) envisagent le même problème géométrique, mais d'une façon à la fois différente et plus précise qui ne recourt pas au concept de mouvement. Précisons que les énoncés de Jyesthadeva qui figureront ici sont des lemmes introductifs à la justification qu'il donne des « développements en série » des « fonctions » Sinus et Cosinus, qui sera exposée au chapitre suivant.

La configuration sous-jacente à leurs énoncés peut être décrite de la façon suivante[6] :

Un arc de mesure a, d'origine E et d'extrémité A située dans le premier quadrant du cercle de référence, est subdivisé en n arcs de même mesure $\delta = \frac{a}{n}$, laquelle sera nommée subdivision élémentaire. Si a est un quart de circonférence, alors δ est par exemple la mesure de l'arc de référence d'une table trigonométrique, telle que : δ = 3° 45'.

Pour $k \in [0;n]$, on note P_k les points du premier quadrant tels que l'arc (EP_k) ait pour mesure : $a_k = k\delta$. On convient que : $P_n = A$ et $P_0 = E$.
Si $k \in [1;n-1]$, on note C_k et H_k les projetés orthogonaux de P_k sur (OE) et ($P_{k+1}C_{k+1}$) respectivement, C_n étant le projeté orthogonal de A sur (OE).
Pour $k \in [0;n-1]$, on note I_k le milieu de l'arc (P_kP_{k+1}) (qui sera qualifié d'arc élémentaire) et c la mesure (indépendante de k) de la corde qu'il sous-tend, laquelle sera qualifiée de corde élémentaire.
C_k' est le projeté orthogonal de I_k sur (OE).
a_k' est la mesure de l'arc (EI_k) : $a_k' = \frac{a_k + a_{k+1}}{2} = (k + \frac{1}{2})\delta$.
On note enfin, pour tout $k \in [0;n]$: $x_k = Cos(a_k)$; $y_k = Sin(a_k)$; $x_k' = Cos(a_k')$ et $y_k' = Sin(a_k')$.

[6] [R.C. Gupta, 1972, pp. 81-84].



Dans l'*Āryabhatīya Bhāsya*, Nīlakantha énonce sous la forme de deux « règles de trois » ce que nous qualifierons de **lemme fondamental** :

> (I) *La différence des Cosinus correspondant aux extrémités de n'importe quel arc élémentaire est proportionnelle au Sinus correspondant au milieu de l'arc ;*
>
> (II) *La différence des Sinus correspondant aux extrémités de n'importe quel arc élémentaire est proportionnelle au Cosinus correspondant au milieu de l'arc ;*
> *Le rapport de proportionnalité est dans les deux cas égal au quotient de la corde de l'arc élémentaire et du rayon*[7].

Ce que nous pouvons noter :

Pour tout $k \in [0; n-1]$, $\boxed{Cos(a_k) - Cos(a_{k+1}) = \frac{c}{R} Sin(a_k')}$ et $\boxed{Sin(a_{k+1}) - Sin(a_k) = \frac{c}{R} Cos(a_k')}$

Dans le *Yuktibhāsa*, Jyesthadeva énonce le même lemme fondamental et le justifie par l'argument que nous pouvons retranscrire comme suit à l'aide des notations que nous avons introduites[8] :

---

7 [R.C. Gupta, 1972, p. 84].

8 [C.T. Rajagopal, A. Venkataraman, 1949, p. 4].

Pour tout $k \in [0; n-1]$, le triangle $OC_k' I_k$ rectangle en C_k' est semblable au triangle $P_k H_k P_{k+1}$ rectangle en H_k.
Cette propriété permet d'en déduire :

$$P_{k+1}H_k = \frac{P_k P_{k+1}}{OI_k} \times OC_k' = \frac{c}{R} Cos(a_k') \quad \text{et} \quad P_k H_k = \frac{P_k P_{k+1}}{OI_k} \times I_k C_k' = \frac{c}{R} Sin(a_k').$$

Ces résultats exacts permettent d'effectuer des approximations en tenant compte du fait que, δ étant petit par hypothèse, on a : $c \approx \delta$. Parameśvara, se plaçant dans la perspective consistant à donner une formule d'interpolation linéaire entre deux valeurs tabulées, utilise ainsi dans le *Siddhāntadīpikā* les mêmes propriétés en substituant l'arc « résiduel » (de mesure $\varepsilon < \delta$) à la corde correspondante :

> « *Multiplie le Cosinus au milieu de l'arc résiduel par l'arc résiduel et divise par le rayon. Ceci devient la différence des Sinus pour l'arc résiduel* [9]. »

Ce que nous pouvons retranscrire par : $Sin(a_k + \varepsilon) - Sin(a_k) \approx Cos(a_k + \frac{\varepsilon}{2}) \times \frac{\varepsilon}{R}$

> « *Multiplie le Sinus au milieu de l'arc résiduel par l'arc résiduel et divise par le rayon. Ceci devient la différence des Cosinus pour l'arc résiduel*[10]. »

C'est-à-dire, avec les mêmes notations : $Cos(a_k) - Cos(a_k + \varepsilon) \approx Sin(x + \frac{\varepsilon}{2}) \times \frac{\varepsilon}{R}$.

Par ailleurs, remarquons que l'argument de continuité selon lequel $Sin(a_k') \approx Sin(a_k)$ et $Cos(a_k') \approx Cos(a_k)$ permet de retrouver les résultats énoncés par Bhāskara II, en utilisant comme précédemment l'approximation $c \approx \delta$:

$$Sin(a_{k+1}) - Sin(a_k) \approx Cos(a_k) \times \frac{\delta}{R} \quad \text{et} \quad Cos(a_k) - Cos(a_{k+1}) \approx Sin(a_k) \times \frac{\delta}{R}.$$

On constate que ces approximations peuvent être mises en relation avec les différentiations d'ordre 1 du Sinus et du Cosinus, que les Modernes écriraient :

$$d[Sin](a) = Cos(a)\frac{da}{R} \quad \text{et} \quad d[Cos](a) = -Sin(a)\frac{da}{R}.$$

Il est néanmoins clair, une fois encore, que les membres de l'école de Mādhava n'ont pas adopté ce point de vue différentiel.

[9] [R.C. Gupta,1969, p. 95].
[10][R.C. Gupta,1969, p. 95].

Les différences d'ordre 2 du Sinus et du Cosinus

Définissons maintenant, à l'aide de nos notations, la suite $(D_k)_{1\leq k\leq n}$ de terme général : $D_k = y_k - y_{k-1}$. Cette suite peut être qualifiée de « suite des différences des Sinus ».

Une propriété fondamentale est alors énoncée et justifiée par Nīlakantha (*Āryabhatīya Bhāsya*) et par Jyesthadeva (*Yuktibhāsa*), à la suite du lemme fondamental énoncé plus haut. Cette propriété consiste dans le fait que, selon Nīlakantha lui-même :

> « *La variation des différences des Sinus est proportionnelle aux Sinus eux-mêmes*[11]. »

Plus précisément, il existe une constante λ telle que :

$$\text{Pour tout } k\in[1;n-1],\ D_k - D_{k+1} = \lambda y_k .$$

Nous avons déjà évoqué au premier chapitre le fait que cette propriété fut connue dès l'époque d'Āryabhata I. Elle est en effet apparente dans la formule que ce dernier utilisa pour construire sa table de vingt-quatre Sinus. Rappelons qu'elle se traduit avec les notations que nous avons introduites par :

$$\text{Pour tout } k\in[1;n-1],\ D_{k+1} = D_k - \frac{y_k}{225} .$$

Conformément à la propriété énoncée par Nīlakhanta, la formule exacte s'écrit en fait dans le cas général :

$$D_{k+1} = D_k - \frac{D_1 - D_2}{D_1} y_k .$$

En effet : $D_1 - D_2 = \lambda y_1 \Rightarrow \lambda = \dfrac{D_1 - D_2}{y_1} = \dfrac{D_1 - D_2}{D_1}$.

Or, la table d'Āryabhata I, retranscrite au chapitre 1, donne $D_1 = 225'$ et $D_2 = 224'$. Dans ce cas, on obtient donc $\dfrac{D_1 - D_2}{D_1} = \dfrac{1}{225}$. On constate par conséquent que la règle utilisée par Āryabhata I est parfaitement correcte eu égard à son choix de poser $D_1 = 225'$. Ce qui n'empêche pas sa table d'être approximative, du fait de l'imprécision commise sur le calcul de D_1 et D_2, qui se reporte sur toutes les autres valeurs ; mais l'erreur sur D_2 compense exactement dans la formule celle commise sur D_1.

Ceci peut suggérer qu'Āryabhata I connaissait la formule exacte, ou tout au moins le fait que « les différences des différences de Sinus sont proportionnelles aux Sinus eux-mêmes » : c'est une hypothèse que nous examinerons plus loin. Quoiqu'il en soit, il n'a pas justifié ce résultat et c'est l'une des raisons pour lesquelles les commentaires de Nīlakantha et Jyesthadeva sont intéressants.

Nīlakantha précise dans le *Tantrasamgraha* l'expression du coefficient λ en fonction de δ :

> « *Le double de la dernière différence de Sinus est le multiplicande ; le demi-diamètre est le diviseur. Le premier Sinus auquel s'appliquent ce multiplicande et ce diviseur*

[11] [R.C. Gupta, 1972, p. 83].

> *est la différence des différences de Sinus initiale. Avec ce même multiplicande et ce même diviseur appliqués aux Sinus tabulés, on obtient les différences successives des différences de Sinus*[12]. »

En d'autres termes : $M = 2[Sin(90°) - Sin(90° - \delta)]$ est le multiplicande et le rayon R est le diviseur ; on a alors :

$$\text{Pour tout } k \in [1; n-1],\ D_k - D_{k+1} = \frac{M}{R} y_k .$$

Ce résultat peut encore être noté comme suit :

$$D_k - D_{k+1} = \frac{2[R - Cos(\delta)]}{R} y_k .$$

Dans l'*Āryabhatīya Bhāsya*[13], Nīlakantha l'énonce d'ailleurs effectivement sous la forme :

$$D_k - D_{k+1} = \frac{2 Ver\,sin(\delta)}{R} y_k .$$

Une formulation équivalente (compte tenu de $c = 2Sin(\frac{\delta}{2})$ et de $Cos(\delta) = R - 2\dfrac{Sin^2(\frac{\delta}{2})}{R}$), mais plus intéressante (voir le chapitre 8) est ensuite énoncée par Nīlakantha, toujours dans l'*Āryabhatīya Bhāsya* :

> « *Pour le Sinus en n'importe quelle jonction d'arcs élémentaires, le carré de la corde élémentaire est le multiplicande et le carré du rayon est le diviseur. Le résultat est la différence des deux différences de Sinus adjacentes*[14]. »

Avec nos notations, son assertion revient à affirmer que :

$$\text{Pour tout } k \in [1; n-1] :\ D_k - D_{k+1} = \frac{c^2}{R^2} y_k .$$

Jyesthadeva, commençant ici sa justification des « développements en séries » du Sinus et du Cosinus, démontre ce résultat à l'aide d'un lemme en trois parties :

> « *La différence des Cosinus correspondant à l'arc dont les extrémités sont les milieux des arcs élémentaires consécutifs est obtenue en multipliant le Sinus correspondant au point commun à ces arcs par la corde élémentaire et en divisant ensuite par le rayon*[15]. »

Ce que nous pouvons retranscrire par :

$$\boxed{\underline{\text{Lemme 1-a}} :\ \text{Pour tout } k \in [1; n-1] :\ x_{k-1}' - x_k' = \frac{c}{R} y_k .}$$

Sa justification repose sur le fait que la réunion de l'arc $(I_k P_k)$ et de l'arc $(P_k I_{k-1})$ est l'arc $(I_k I_{k-1})$, dont P_k est le milieu et dont la longueur est δ. On peut donc appliquer le lemme fondamental I à l'arc $(I_k I_{k-1})$; il vient alors : $Cos(a_{k-1}') - Cos(a_k') = \frac{c}{R} Sin(a_k) = \frac{c}{R} y_k$. D'où le résultat.

---

[12] [R.C. Gupta, 1972, p. 83].
[13] [R.C. Gupta, 1972, p. 82].
[14] [R.C. Gupta, 1972, p. 83].
[15] [C.T. Rajagopal, A. Venkataraman, 1949, p. 5].

Jyesthadeva poursuit :

> « *Ensuite, en multipliant cette différence de Cosinus par la corde élémentaire, puis en divisant par le rayon, on obtient la différence entre les différences de Sinus consécutives*[16]. »

C'est-à-dire :

$$\boxed{\underline{\text{Lemme 1-b}} : \text{ Pour tout } k \in [1;n-1] \ : \ D_k - D_{k+1} = \frac{c}{R}(x_{k-1}' - x_k').}$$

En effet, il résulte du lemme fondamental II que, pour tout $k \in [1;n-1]$:

$D_{k+1} = y_{k+1} - y_k = \frac{c}{R} Cos(a_k')$ et $D_k = y_k - y_{k-1} = \frac{c}{R} Cos(a_{k-1}')$.

Par conséquent : $D_k - D_{k+1} = \frac{c}{R}\left[Cos(a_{k-1}') - Cos(a_k')\right] = \frac{c}{R}(x_{k-1}' - x_k')$.

Il conclut :

> « *Par conséquent, si l'on multiplie le Sinus correspondant à n'importe quel point de la subdivision par le carré de la corde élémentaire et si l'on divise par le carré du rayon, le résultat est la différence entre les différences de Sinus de part et d'autre du point de subdivision*[17]. »

En d'autres termes :

$$\boxed{\underline{\text{Lemme 1-c}} : \text{ Pour tout } k \in [1;n-1] : D_k - D_{k+1} = \frac{c^2}{R^2} y_k}$$

Les lemmes 1-a et 1-b permettent en effet d'écrire : $D_k - D_{k+1} = \frac{c}{R}(x_{k-1}' - x_k') = \frac{c}{R}\left[\frac{c}{R} y_k\right]$.

Fait remarquable, le résultat ainsi démontré n'est pas une approximation.

Si l'on revient maintenant au problème posé par la justification de la règle utilisée par Āryabhata I afin de construire sa table de vingt-quatre Sinus, on constate qu'une hypothèse peut être formulée à cet égard. En effet, cette table repose sur le choix de $\delta = 225'$ (avec $R = 3438'$) pour la raison que le Sinus de cet arc est en bonne approximation égal à la mesure de l'arc lui-même, parce qu'il est assez petit. Mais dans ces conditions, on a aussi : $c \approx \delta = 225'$. D'où l'approximation possible $\frac{c^2}{R^2} \approx \left[\frac{225}{3438}\right]^2 \approx \frac{1}{225}$, qui correspond à la règle donnée par Āryabhata I. On peut de ce fait penser qu'Āryabhata I a obtenu sa formule par des considérations géométriques analogues à celles qui précèdent en ayant eu recours à ce type d'approximations[18].

Compte tenu du commentaire que nous avons fait plus haut à ce propos, il n'est cependant pas même nécessaire de supposer que ces approximations aient été utilisées : l'essentiel est d'avoir établi que « les différences des différences de Sinus sont proportionnelles aux Sinus eux-mêmes ». Dans ce cas, le fait de fixer la valeur de D_1 à $225'$ et de ne retenir que des valeurs entières impose, quel que soit le mode de calcul (par exemple l'utilisation d'une

[16] [C.T. Rajagopal, A. Venkataraman, 1949, p. 6].
[17] [C.T. Rajagopal, A. Venkataraman, 1949, p. 6].
[18] [C.N. Srinivasiengar, 1967, p. 52].

formule de duplication), d'obtenir $D_2 = 224'$. Le facteur de proportionnalité est alors nécessairement, comme nous l'avons déjà vu, $\dfrac{D_1 - D_2}{D_1} = \dfrac{1}{225}$.

Remarquons enfin que si l'on effectue l'approximation $c \approx \delta$ en tenant compte du fait que δ est petit, alors la formule énoncée plus haut permet d'écrire l'approximation :

$$D_k - D_{k+1} \approx Sin(a_k) \times \frac{\delta^2}{R^2}.$$

Une approximation analogue fut, ainsi que nous le verrons au chapitre suivant, utilisée par Jyesthadeva dans le cadre de sa justification des « développements en séries » du Sinus et du Cosinus. Si l'on interprète δ comme un infinitésimal, on constate qu'elle est l'analogue de la différentiation d'ordre 2 que les Modernes noteraient :

$$d^2[Sin](a) = -Sin(a)\frac{da^2}{R^2}.$$

Une fois de plus, il nous paraît néanmoins clair que la perspective adoptée par les Indiens n'est pas celle du calcul différentiel : elle s'inscrit dans un type d'approche qui demeure purement géométrique.

Chapitre 8
Les « développements en séries » du Sinus et du Cosinus

Nous abordons dans ce dernier chapitre l'une des découvertes les plus remarquables de l'école de Mādhava : celle qui concerne l'approximation polynomiale à n'importe quel degré fixé du Sinus et du Cosinus d'un arc donné.

Les énoncés des « développements en séries » du Sinus et du Cosinus

Nīlakantha énonce dans le *Tantrasamgraha* :

« *Multiplie de façon répétée l'arc par son propre carré et divise le résultat par le carré de chacun des nombres pairs augmenté de lui-même, multiplié ensuite par le carré du rayon. Place l'arc et les résultats obtenus de la sorte les uns en dessous des autres et soustrais systématiquement chacun de ce qui le précède. Ce procédé permet d'obtenir le Sinus tel qu'on le trouve dans le vers commençant par* Vidvan…
Multiplie de façon répétée le rayon par le carré de l'arc et divise le résultat par le carré de chacun des nombres pairs diminué de lui-même, multiplié ensuite par le carré du rayon. Place les résultats les uns en dessous des autres et soustrais chacun de ce qui le précède. Ce procédé qui permet d'obtenir le Versinus tel qu'on le trouve dans le vers commençant par Stenāstri…[1].»

Cet énoncé figure également dans le *Yuktibhāsa* de Jyesthadeva[2] et dans le *Yuktidīpikā* de Śānkara[3].

Notons R le rayon du cercle et a la mesure de l'arc considéré. Les quantités décrites dans la première partie de l'assertion peuvent être formulées comme suit :

$$q_1 = \frac{a \times a^2}{(2^2+2)\times R^2} = \frac{a^3}{(2^2+2)R^2} \;;$$

$$q_2 = \frac{a \times a^2 \times a^2}{(2^2+2)(4^2+4)\times R^2 \times R^2} = \frac{a^5}{(2^2+2)(4^2+4)R^4} \;; \text{ etc…}$$

c'est-à-dire :

$$q_k = \frac{a^{2k+1}}{\left(\prod_{i=1}^{k}[(2i)^2+(2i)]\right)\times R^{2k}} \quad \text{pour tout entier naturel non nul } k.$$

Il est remarquable que l'algorithme exposé suppose en lui-même un nombre fini d'opérations, quoique ce nombre soit arbitrairement grand. Il s'agit en effet d'interrompre la construction des nombres q_k à un certain ordre n, puis d'écrire verticalement les quantités obtenues en commençant par l'arc lui-même :

1 [A.K. Bag, 1979, p. 273].
2 [K.V. Sarma, 1972, p. 17].
3 [C.T. Rajagopal, M.S. Rangachari, 1978, p. 96].

$$\begin{array}{c} a \\ q_1 \\ q_2 \\ . \\ . \\ q_{n-2} \\ q_{n-1} \\ q_n \end{array}$$

L'algorithme consiste alors à prendre le terme le plus bas (q_n) et à le retrancher de celui qui le précède (q_{n-1}), puis à retrancher la différence obtenue du terme précédent (q_{n-2}) etc… jusqu'à ce qu'on arrive au premier terme (a). La première partie de l'énoncé peut donc être retranscrite par :

$$Sin(a) \approx a - \{q_1 - \{q_2 - ..... - \{q_{n-2} - \{q_{n-1} - q_n\}\}\}\}$$

Les quantités décrites dans la seconde partie de l'assertion peuvent être formulées par :

$$q_1' = \frac{R \times a^2}{(2^2 - 2) \times R^2} \ ;$$

$$q_2' = \frac{R \times a^2 \times a^2}{(2^2 - 2)(4^2 - 4) \times R^2 \times R^2} = \frac{Ra^4}{(2^2 - 2)(4^2 - 4)R^4} \ ; \text{ etc…}$$

c'est-à-dire :

$$q_k' = \frac{Ra^{2k}}{(\prod_{i=1}^{k}[(2i)^2 - (2i)]) \times R^{2k}} \quad \text{pour tout entier naturel non nul } k.$$

D'une façon analogue à celle qui précède, la seconde partie de l'énoncé revient dès lors à écrire :

$$Versin(a) = R - Cos(a) \approx q_1' - \{q_2' - \{..... - \{q_{n-2}' - \{q_{n-1}' - q_n'\}\}\}\}$$

Remarquons que les quantités q_k et q_k' s'écrivent plus synthétiquement sous la forme :

$$q_k = \frac{a^{2k+1}}{R^{2k}(2k+1)!} \quad \text{et} \quad q_k' = \frac{a^{2k}}{R^{2k-1}(2k)!} \quad \text{pour tout entier naturel non nul } k.$$

Dans ces conditions, l'énoncé de Nīlakantha peut se traduire par :

$$\boxed{Sin(a) \approx a - \left\{\frac{a^3}{3!R^2} - \left\{\frac{a^5}{5!R^4} - \left\{..... - \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!R^{2n}}\right\}\right\}\right\} \quad \text{(lorsque } n \text{ devient grand).}} \qquad (1)$$

soit encore :

$$Sin(a) \approx a - \frac{a^3}{3!R^2} + \frac{a^5}{5!R^4} - ..... + (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!R^{2n}} \quad \text{(lorsque } n \text{ devient grand).} \qquad (1')$$

et : $$\boxed{Cos(a) \approx R - \left\{ \frac{a^2}{2!R} - \left\{ \frac{a^4}{4!R^3} - \left\{ ..... - \frac{a^{2n}}{(2n)!R^{2n-1}} \right\} \right\} \right\} \quad \text{(lorsque } n \text{ devient grand).}} \qquad (2)$$

c'est-à-dire :

$$Cos(a) \approx R - \frac{a^2}{2!R} + \frac{a^4}{4!R^3} - ..... + (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!R^{2n-1}} \quad \text{(lorsque } n \text{ devient grand).} \qquad (2')$$

Le *Karanapaddhati*[4] a d'ailleurs énoncé ces résultats sous la forme correspondant à (1) et (2).

(1') et (2') ont clairement pour analogues modernes les développements en séries établis vers 1665 par I. Newton[5], développements que l'on note désormais :

$$\sin(a) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{a^{2p+1}}{(2p+1)!} \quad \text{et} \quad \cos(a) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{a^{2p}}{(2p)!}.$$

Ainsi que nous le verrons au cours de la justification qui en fut donnée par Jyesthadeva, les mathématiciens keralais envisagent leur algorithme selon une perspective finitiste. Ils ont « seulement » conscience du fait que les approximations qu'ils énoncent sont d'autant meilleures que l'ordre d'application de l'algorithme est élevé. L'énoncé originel attribué à Mādhava par ses successeurs est à cet égard très significatif, en ce sens qu'il précise cet ordre dans les deux cas.

Les vers qui suivent, « commençant par *vidvan* », sont ceux auxquels Nīlakantha fait référence. Ils sont rédigés dans le système *katapayādi*, au sein duquel des noms sont attribués à tous les nombres. On peut les trouver aussi bien dans son *Āryabhatīya Bhāsya* que dans le *Yuktibhāsa* de Jyesthadeva, le *Yuktidīpikā* de Śānkara et le *Karanapaddhati* ; de plus, tous ces auteurs sont unanimes pour dire qu'ils citent ici les paroles de leur maître :

« *Ecris les uns au-dessus des autres les nombres* :

2220 ; 39 ; 40
273 ; 57 ; 47
16 ; 05 ; 41
0 ; 33 ; 06
0 ; 0 ; 44

En commençant par le bas, multiplie le premier par le carré de l'arc donné et divise par celui de 5400 ; le quotient est soustrait du second nombre. Le résultat de la soustraction est ensuite multiplié par le carré de l'arc donné et divisé par celui de 5400 ; le quotient qui en résulte est soustrait du troisième nombre. Ce procédé de multiplication et division suivi d'une soustraction est répété jusqu'à ce que les cinq nombres soient traversés. Le résultat final est ensuite multiplié par le cube de l'arc donné et divisé par le cube de 5400. Si le quotient qui en résulte est soustrait de l'arc donné, le reste sera le Sinus désiré [6]. »

Afin de décrire cet algorithme, notons toujours a la mesure de l'arc considéré (a étant inférieur à un quart de circonférence) et R le rayon. Notons h la mesure en minutes du quart de la circonférence, égale à $5400'$, et $\alpha = \frac{a}{h}$.

[4] [C.T. Rajagopal, A. Venkataraman, 1949, p. 3].
[5] [C.H. Edwards Jr., 1979, pp. 205-207].
[6] [R.C. Gupta, 1976, pp. 21-22]. Voir aussi [C.T. Rajagopal, M.S. Rangachari, 1978, pp. 97-98].

Les cinq nombres annoncés correspondent à des mesures en minutes, secondes et soixantièmes de secondes :

$$Q_1 = 0'0''44''' \ ; \ Q_2 = 0'33''06''' \ ; \ Q_3 = 16'05''41''' \ ; \ Q_4 = 273'57''47''' \ ; \ Q_5 = 2220'39''40'''.$$

À chacune d'entre elle est attribué un nom sanscrit[7] ; en particulier, le terme *vidvan* commençant le vers mentionné par Nīlakantha désigne Q_1.

Les opérations décrites par l'énoncé correspondent dans un premier temps au calcul de :

$$Q_5 - \alpha^2\{Q_4 - \alpha^2\{Q_3 - \alpha^2\{Q_2 - \alpha^2 Q_1\}\}\}.$$

La conclusion en est que :

$$Sin(a) \approx a - \alpha^3\{Q_5 - \alpha^2\{Q_4 - \alpha^2\{Q_3 - \alpha^2\{Q_2 - \alpha^2 Q_1\}\}\}\}.$$

Le lien entre cet énoncé et celui du *Tantrasamgraha* peut être rétabli en remarquant que si l'on fixe la mesure du rayon à 3437'44''48''' (mesure en vigueur au sein de l'école de Mādhava), alors on obtient (à une tierce près) en tenant compte de $h = 5400'$:

$$Q_1 = \frac{h^{11}}{11!R^{10}} \ (vidvan) \ ; \ Q_2 = \frac{h^9}{9!R^8} \ ; \ Q_3 = \frac{h^7}{7!R^6} \ ; \ Q_4 = \frac{h^5}{5!R^4} \ ; \ Q_5 = \frac{h^3}{3!R^2}.$$

Dans ces conditions, l'énoncé attribué à Mādhava peut effectivement être retranscrit par :

$$Sin(a) \approx a - \frac{a^3}{h^3}\left\{\frac{h^3}{3!R^2} - \frac{a^2}{h^2}\left\{\frac{h^5}{5!R^4} - \frac{a^2}{h^2}\left\{\frac{h^7}{7!R^6} - \frac{a^2}{h^2}\left\{\frac{h^9}{9!R^8} - \frac{a^2}{h^2}\frac{h^{11}}{11!R^{10}}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

$$\approx a - \left\{\frac{a^3}{3!R^2} - \left\{\frac{a^5}{5!R^4} - \left\{\frac{a^7}{7!R^6} - \left\{\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}}\right\}\right\}\right\}\right\}$$

Mādhava a clairement utilisé cette approximation polynomiale du Sinus afin de construire la table de vingt-quatre Sinus que toute son école lui attribue : elle lui correspond exactement. La précision de cette table[8] est remarquable, du même ordre que celle de Govindaswāmin (retranscrite au chapitre 1) :

[7] [C.T. Rajagopal, M.S. Rangachari, 1978, p. 98].

[8] [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 65].

Valeurs des Sinus (Mādhava)	Valeurs des sinus correspondantes	Valeurs modernes des sinus correspondantes
224'50''22'''	**0,065403145**	**0,06540313**
448'42''58'''	**0,130526229**	**0,130526192**
670'40''16'''	**0,195090324**	**0,195090322**
889'45''15'''	**0,258819003**	**0,258819045**
1105'1''39'''	**0,321439479**	**0,321439465**
1315'34''7'''	**0,382683408**	**0,382683432**
1520'28''35'''	**0,442288666**	**0,44228869**
1718'52''24'''	**0,5**	**0,5**
1909'54''35'''	**0,555570234**	**0,555570233**
2092'46''3'''	**0,608761407**	**0,608761429**
2266'39''50'''	**0,659345818**	**0,659345815**
2430'51''15'''	**0,707106835**	**0,707106781**
2584'38''6'''	**0,751839867**	**0,751839807**
2727'20''52'''	**0,793353333**	**0,79335334**
2858'22''55'''	**0,831469628**	**0,831469612**
2977'10''34'''	**0,866025452**	**0,866025403**
3083'13''17'''	**0,896872773**	**0,896872741**
3176'3''50'''	**0,923879563**	**0,923879532**
3255'18''22'''	**0,946930191**	**0,946930129**
3320'36''30'''	**0,965925838**	**0,965925826**
3371'41''29'''	**0,980785297**	**0,98078528**
3408'20''11'''	**0,991444896**	**0,991444861**
3430'23''11'''	**0,997858981**	**0,997858923**
3437'44''48'''	**1**	**1**

Nīlakantha attribue par ailleurs à Mādhava un mode de calcul du Versinus analogue à celui qui précède[9], dont on montre de la même façon qu'il est équivalent à :

$$Versin(a) = R - Cos(a) = \left\{\frac{a^2}{2!R} - \left\{\frac{a^4}{4!R^3} - \left\{\frac{a^6}{6!R^5} - \left\{\frac{a^8}{8!R^7} - \left\{\frac{a^{10}}{10!R^9} - \frac{a^{12}}{12!R^{11}}\right\}\right\}\right\}\right\}\right\}.$$

Là encore, des noms sanscrits sont attribués aux coefficients ; en particulier, le terme s*tenāstri* commençant le vers mentionné par Nīlakantha désigne le coefficient $\frac{h^{12}}{12!R^{11}}$ dans le développement du Versinus analogue à celui donné plus haut pour le Sinus[10].

Avant d'étudier la justification donnée à ces résultats dans le *Yuktibhāsa* de Jyesthadeva, il est intéressant de noter que d'autres approximations polynomiales du Sinus et du Cosinus ont été énoncées par les mathématiciens de l'école de Mādhava. Plus précisément, le *Siddhāntadīpikā* de Parameśvara contient plusieurs formules d'interpolation de style « taylorien », dont nous avons déjà vu deux exemples d'ordre 1 au chapitre précédent. En combinant entre elles plusieurs formules d'interpolation d'ordre 1, Parameśvara obtient aussi les interpolations d'ordre 2 de style « taylorien » que nous pouvons écrire[11] (a étant un arc tabulé et ε un arc « résiduel » de mesure inférieure à celle de la subdivision élémentaire de tabulation) :

$$Sin(a+\varepsilon) \approx Sin(a) + Cos(a)\frac{\varepsilon}{R} - \frac{Sin(a)}{2}\frac{\varepsilon^2}{R^2}$$

[9] [A.K. Bag, 1979, p. 273].
[10] [C.T. Rajagopal, M.S. Rangachari, 1978, p. 99].
[11] [R.C. Gupta, 1969, p. 96].

$$\text{et}\quad Cos(a+\varepsilon) \approx Cos(a) - Sin(a)\frac{\varepsilon}{R} - \frac{Cos(a)}{2}\frac{\varepsilon^2}{R^2}.$$

Mais le *Siddhāntadīpikā* donne aussi deux approximations « pseudo-tayloriennes » à l'ordre 3 que l'on peut formuler comme suit en conservant les notations précédentes :

$$Sin(a+\varepsilon) \approx Sin(a) + Cos(a)\frac{\varepsilon}{R} - \frac{Sin(a)}{2}\frac{\varepsilon^2}{R^2} - \frac{Cos(a)}{4}\frac{\varepsilon^3}{R^3}$$

$$\text{et}\quad Cos(a+\varepsilon) \approx Cos(a) - Sin(a)\frac{\varepsilon}{R} - \frac{Cos(a)}{2}\frac{\varepsilon^2}{R^2} + \frac{Sin(a)}{4}\frac{\varepsilon^3}{R^3}.$$

Il est particulièrement remarquable que ces deux dernières approximations ne sont pas, selon une perspective moderne, conformes aux développements « tayloriens » énoncés par Nīlakantha et ses successeurs, alors que Parameśvara fut un disciple direct de Mādhava : le facteur $\frac{1}{4}$, au lieu de $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$, intervient dans le dernier terme. Ces approximations, obtenues grâce à des considérations essentiellement géométriques[12], suggèrent par leur « erreur » même la spécificité des raisonnements indiens. Bien qu'elles ne furent reprises par aucun des successeurs de Parameśvara, elles illustrent à elles seules combien les énoncés que nous étudions ici et les raisonnements qui les justifient, même lorsqu'ils apparaissent très proches de ceux développés par les Européens du XVII^e siècle, en sont en fait éloignés.

Les fondements de la justification des « développements en séries » du Sinus et du Cosinus fournie par Jyesthadeva

Nous reprenons ici les notations et la configuration introduites au chapitre précédent.

On considère un arc de mesure a, d'origine E et d'extrémité A située dans le premier quadrant du cercle de référence ; il est subdivisé en n arcs de même mesure $\delta = \frac{a}{n}$.

Pour $k \in [0;n]$, on note P_k les points du premier quadrant tels que l'arc (EP_k) ait pour mesure $a_k = k\delta$. On convient que $P_n = A$ et que $P_0 = E$.

Pour $k \in [1;n-1]$, C_k et H_k sont les projetés orthogonaux de P_k sur (OE) et $(P_{k+1}C_{k+1})$ respectivement, C_n étant celui de A sur (OE).

Pour $k \in [0;n-1]$, on note I_k le milieu de l'arc (P_kP_{k+1}) (qualifié d'arc élémentaire) et c la mesure de la corde qu'il sous-tend (qualifiée de corde élémentaire).

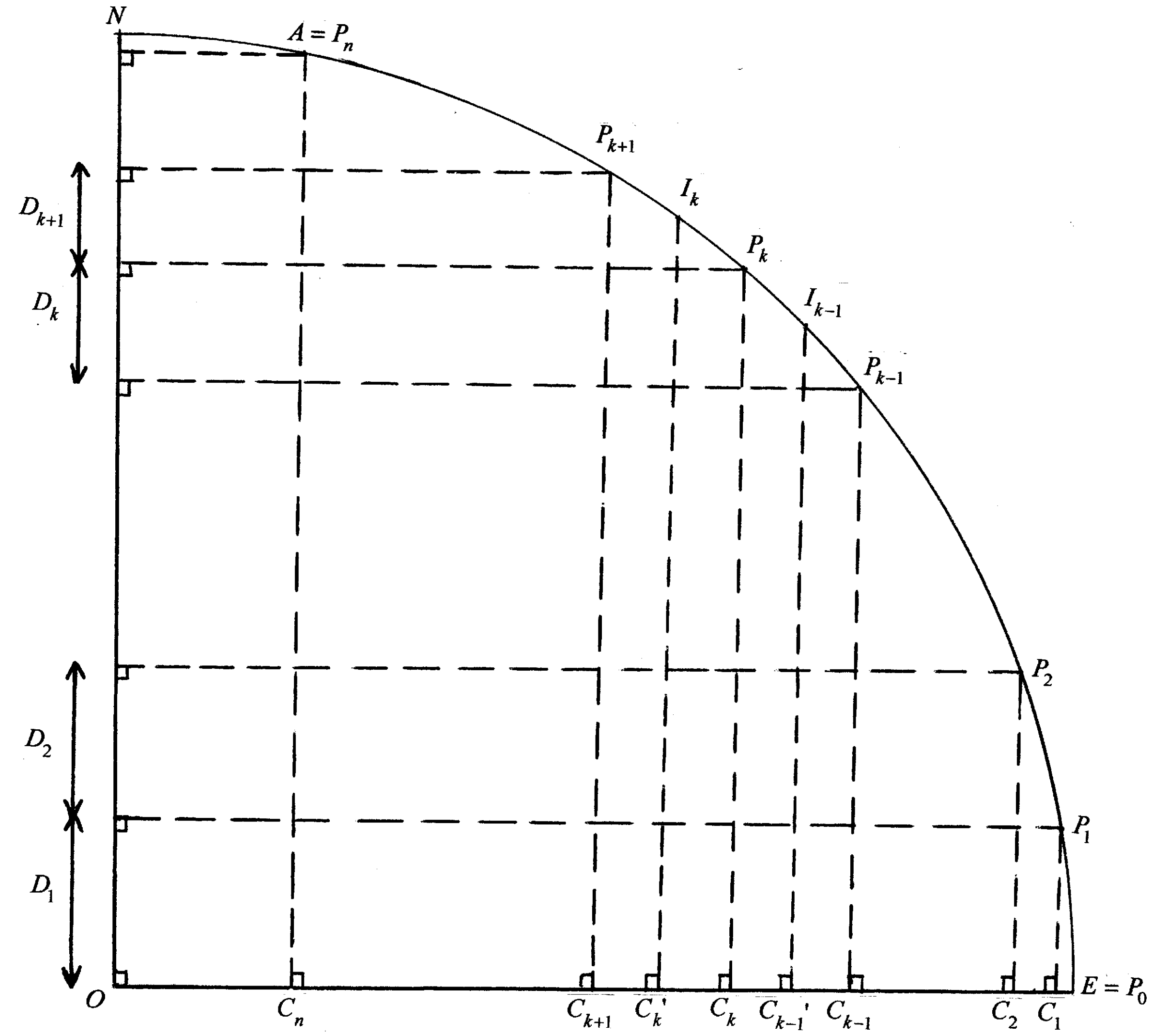
C_k' est le projeté orthogonal de I_k sur (OE).

L'arc (EI_k) a pour mesure $a_k' = \frac{a_k + a_{k+1}}{2} = (k+\frac{1}{2})\delta$.

On note aussi, pour tout $k \in [0;n]$: $x_k = Cos(a_k)$; $y_k = Sin(a_k)$; $x_k' = Cos(a_k')$ et $y_k' = Sin(a_k')$

Enfin, on considère la suite $(D_k)_{1\le k\le n}$ de terme général $D_k = y_k - y_{k-1}$ (qui sera qualifiée de « suite des différences des Sinus »).

[12] [K. Plofker, 2001, pp. 283-295].



Lemme 1

Le lemme 1 en trois parties énoncé par Jyesthadeva que nous avons étudié au chapitre 7 constitue, comme nous l'avons mentionné alors, le début de la démonstration des développements (1) et (2) donnés par le *Yuktibhāsa*. Rappelons que nous avons retranscrit ce lemme par :

<u>Lemme 1</u> : Pour tout $k \in [1; n-1]$:

a) $x_{k-1}' - x_k' = \frac{c}{R} y_k$

b) $D_k - D_{k+1} = \frac{c}{R}(x_{k-1}' - x_k')$

c) $D_k - D_{k+1} = \frac{c^2}{R^2} y_k$

Jyesthadeva énonce ensuite :

Lemme 2

« *La différence entre le produit du premier Sinus par le nombre de subdivisions et le dernier Sinus est égale à la seconde somme des Sinus à l'exclusion du dernier, multipliée par le carré de la corde élémentaire et divisée par le carré du rayon*[12]. »

Ce qui est ici désigné par « seconde somme des Sinus » est la somme réitérée des Sinus à partir du premier, c'est-à-dire encore la « somme des sommes des Sinus » à partir du premier.
Nous pouvons donc formuler ce lemme par :

Lemme 2-a : $ny_1 - y_n = \frac{c^2}{R^2}\left\{y_1 + (y_1 + y_2) + ... + (y_1 + y_2 + ... + y_{n-1})\right\} = \frac{c^2}{R^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} y_i$.

Il s'agit en fait d'une conséquence du lemme 1-c, que l'on peut aisément obtenir comme suit :

$$\frac{c^2}{R^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} y_i = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}(D_i - D_{i+1}) = \sum_{k=1}^{n-1}(D_1 - D_{k+1}) = (n-1)y_1 - (\sum_{k=1}^{n-1} D_{k+1})$$

$$= (\sum_{k=1}^{n-1}(y_k - y_{k+1})) + ny_1 - y_1 = y_1 - y_n + ny_1 - y_1 = ny_1 - y_n .$$

Jyesthadeva explique ensuite que lorsque le nombre (n) de subdivisions est grand, le premier Sinus (y_1) se confond avec l'arc élémentaire (δ) et par conséquent : $ny_1 \approx n\delta = a$. Comme $y_n = Sin(a)$, il en déduit que, dans ce cas, le Sinus de l'arc ôté de l'arc lui-même est le produit de la seconde somme des Sinus (à l'exclusion du dernier) par le carré de l'arc élémentaire divisé par le carré du rayon[13] :

Lemme 2-b : $a - Sin(a) \approx \frac{\delta^2}{R^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} y_i$ (lorsque n devient grand).

Il faut cependant noter que le nombre n de subdivisions n'est en réalité pas complètement arbitraire : la situation est analogue à celle rencontrée au cours de la justification du « développement en série » du huitième de circonférence, à savoir que δ est en fait égal à l'unité de mesure choisie pour la circonférence[14]. On peut donc avoir $\delta = 1'$ ou encore $\delta = 1''$. δ n'est en tous cas pas un infinitésimal et n n'est pas arbitrairement grand au sens moderne, c'est à dire qu'on ne le fait pas ici « tendre vers l'infini ».

Avant de poursuivre l'étude du raisonnement fourni par Jyesthadeva, il faut dès à présent en souligner l'originalité. Le lemme 1 avait en effet mis en évidence des relations trigonométriques exactes. Mais il mettait en jeu des différences de second ordre des Sinus. Le lemme 2 montre comment une connaissance approchée des Sinus devient possible à partir de celle de leurs différences. Comme si la connaissance de ces dernières constituait en définitive un préalable indispensable à la connaissance des Sinus eux-mêmes. Sans qu'il soit ici possible de parler de calcul différentiel et encore moins de réciprocité de l'intégration et de la différentiation, il y a ainsi, dans cette idée qu'un Sinus peut être connu à travers sa décomposition en éléments et la recomposition ultérieure de ces derniers par sommation, un aspect épistémologique analogue à celui qui accompagna au XVII^e siècle la naissance de l'analyse mathématique en général, et celle du mouvement des corps en particulier.

---

12 [C.T. Rajagopal, A. Venkataraman, 1949, p. 6].
13 [C.T. Rajagopal, A. Venkataraman, 1949, p. 6]. Voir aussi [T.A. Saraswathi, 1963, p. 340]. Une justification identique figure dans un autre traité de l'école de Mādhava dont l'auteur demeure inconnu : voir [D. Gold, D. Pingree, 1991, p. 64].
14 [A.K. Bag, 1979, p. 274].

Insistons toutefois sur le fait que cette approche s'inscrit dans un contexte très particulier et qu'elle n'a pas été systématisée.

La propriété remarquable des différences de second ordre des Sinus d'être proportionnelles aux Sinus eux-mêmes, connue dès l'époque d'Āryabhata I, est ici très habilement mise en œuvre dans le lemme 2 avec l'idée qu'une double sommation permet de reconstruire le Sinus cherché tout en apportant une connaissance nouvelle sur ce Sinus. Cette idée ne montrera cependant toute sa valeur qu'en étant combinée avec deux autres propriétés. La première d'entre elles est énoncée comme suit par Jyesthadeva :

Lemme 3

« *La différence entre le Cosinus correspondant au milieu du premier arc et celui correspondant au milieu du dernier arc est la somme des Sinus à l'exclusion du dernier, multipliée par la corde élémentaire et divisée par le rayon*[15]. »

En d'autres termes : Lemme 3-a : $\boxed{x_0' - x_{n-1}' = \frac{c}{R}\sum_{k=1}^{n-1} y_k}$.

Ce lemme résulte immédiatement du lemme 1-a ; on a en effet :

$$\frac{c}{R}\sum_{k=1}^{n-1} y_k = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{c}{R}y_k = \sum_{k=1}^{n-1}(x_{k-1}' - x_k') = x_0' - x_{n-1}'.$$

Ici encore, Jyesthadeva remarque que lorsque le nombre n de subdivisions est grand, on a :

$$x_0' \approx x_0 = R\,,\quad x_{n-1}' \approx x_n = Cos(a) \quad \text{et} \quad c \approx \delta\,.$$

Ceci lui permet d'en déduire que, dans ces conditions, le Versinus de l'arc est égal à la somme des Sinus à l'exclusion du dernier, multipliée par l'arc élémentaire et divisée par le rayon[16] :

Lemme 3-b : $\boxed{Versin(a) = R - Cos(a) \approx \frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n-1} y_k \quad \text{(lorsque } n \text{ devient grand)}}$.

Avant de considérer le quatrième lemme énoncé par Jyesthadeva, nous pouvons compléter les remarques faites plus haut en montrant qu'il est possible d'interpréter les lemmes 2 et 3 d'un point de vue moderne.

En effet, posons : $\alpha = \frac{a}{R}$. Puisque $\delta = \frac{a}{n}$, on a :

$$\frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n-1} y_k = \frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n-1} Sin(k\delta) = \frac{1}{R}\frac{a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} R\sin(k\frac{\alpha}{n}) = \frac{R\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k\frac{\alpha}{n})\,.$$

Donc : $\lim_{n\to+\infty}\frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n-1} y_k = R\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k\frac{\alpha}{n}) = R\int_0^{\alpha}\sin(x)dx$.

Compte tenu de : $R - Cos(a) = R - R\cos(\alpha)$, le lemme 3-b peut donc être considéré comme l'analogue de l'identité qui, en termes modernes, s'écrit :

$$R - R\cos(\alpha) = R\int_0^{\alpha}\sin(x)dx\,.$$

De même : $\frac{\delta^2}{R^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} y_i = R\frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha}{n}\sum_{i=1}^{k}\sin(i\frac{\alpha}{n})$.

[15] [C.T. Rajagopal, A. Venkataraman, 1949, p. 6].
[16] [C.T. Rajagopal, A. Venkataraman, 1949, p. 7].

Donc : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\delta^2}{R^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k} y_i = R\times \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\alpha}{n}\sum_{i=1}^{k}\sin(i\frac{\alpha}{n}) = R\int_0^{\alpha}(\int_0^{x}\sin(y)dy)dx$.

Or : $R\int_0^{\alpha}(\int_0^{x}\sin(y)dy)dx = R\int_0^{\alpha}[1-\cos(x)]dx = R[\alpha-\sin(\alpha)]$.

Compte tenu de $a - Sin(a) = R[\alpha - \sin(\alpha)]$, on constate ainsi que le lemme 2-b est l'analogue de l'identité qui, en termes modernes, s'écrit :

$$R[\alpha-\sin(\alpha)] = R\int_0^{\alpha}(\int_0^{x}\sin(y)dy)dx .$$

Ces interprétations des lemmes 2 et 3 en termes modernes ne doivent néanmoins pas occulter le fait que les arguments avancés par Jyesthadeva ne mettent pas en œuvre le concept d'intégration : ils reposent essentiellement sur une utilisation ingénieuse des propriétés spécifiques des fonctions trigonométriques.

Lemme 4

Jyesthadeva commence par définir un certain type de sommes qui interviennent par la suite de façon décisive dans la conclusion de sa démonstration, sommes qu'il nomme *capasamkalitam* (« somme d'arcs ») :

> « *Pour chaque arc élémentaire, en commençant par celui dont l'origine est le point Est, construis un rectangle dont la base est la subdivision élémentaire et dont la hauteur est l'arc défini par le point Est et l'extrémité de l'arc élémentaire choisi. Calcule alors la somme des aires des rectangles obtenus jusqu'à cet arc élémentaire. Ensuite, pour chaque arc élémentaire, construis un rectangle dont la base est la subdivision élémentaire et dont la hauteur est la somme des aires obtenues précédemment. Calcule alors la somme des aires des rectangles obtenus jusqu'à l'arc élémentaire choisi.*
> *Ce procédé peut être poursuivi. Lorsque le nombre de subdivisions est grand, la somme des aires de tous les rectangles obtenus donne la première somme d'arcs* (capasamkalitam)*, la seconde somme d'arcs* (capasamkalitam)*, etc…*[17] »

Notons $\boxed{\Sigma_{a,n}^{(1)} = \delta\sum_{i=1}^{n} i\delta}$: c'est la somme totale des aires des rectangles de base δ dont la hauteur est la longueur $i\delta$ de l'arc (EP_i), pour $i\in[1;n]$.

La première somme d'arcs (*capasamkalitam*) est alors la valeur $C_a^{(1)}$ dont s'approche $\Sigma_{a,n}^{(1)}$ lorsque n devient grand. Remarquons qu'en utilisant les notations du chapitre 5, on a $\Sigma_{a,n}^{(1)} = S_{a,n}^{(1)}$ et $C_a^{(1)} = S_a^{(1)}$.

Pour tout $k\in[1;n]$, nous noterons $\Sigma_{a,k}^{(1)} = \delta\sum_{i=1}^{k} i\delta$; c'est la somme partielle des aires des rectangles de base δ dont la hauteur est la longueur $i\delta$ de l'arc (EP_i), pour $i\in[1;k]$.

On peut alors définir $\boxed{\Sigma_{a,n}^{(2)} = \delta\sum_{i=1}^{n}\Sigma_{a,i}^{(1)}}$, quantité qui correspond à la somme totale des aires des rectangles de base δ dont la hauteur est la somme des aires $\Sigma_{a,i}^{(1)}$, pour $i\in[1;n]$. La

[17] [C.T. Rajagopal, A. Venkataraman, 1949, p. 7].

seconde somme d'arcs (*capasamkalitam*) est alors la valeur $C_a^{(2)}$ dont s'approche $\Sigma_{a,n}^{(2)}$ lorsque n devient grand.

Pour tout $k \in [1;n]$, nous noterons $\Sigma_{a,k}^{(2)} = \delta \sum_{i=1}^{k} \Sigma_{a,i}^{(1)}$; c'est la somme partielle des aires des rectangles de base δ dont la hauteur est la somme des aires $\Sigma_{a,i}^{(1)}$, pour $i \in [1;k]$.

En réitérant le procédé, on peut ainsi définir par récurrence, pour tout entier $p \geq 2$:

$$\boxed{\Sigma_{a,n}^{(p)} = \delta \sum_{i=1}^{n} \Sigma_{a,i}^{(p-1)}}$$

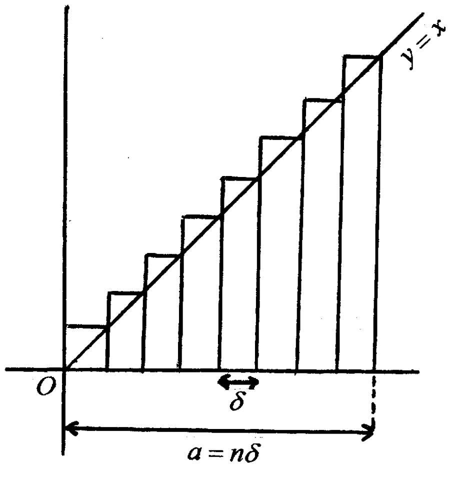
La somme d'arcs (*capasamkalitam*) d'ordre p est alors la valeur $C_a^{(p)}$ dont s'approche $\Sigma_{a,n}^{(p)}$ lorsque n devient grand.

Avant d'étudier la méthode utilisée par Jyesthadeva pour déterminer ces « sommes d'arcs d'ordre p », il semble nécessaire ici de noter que la formulation du problème en terme d'aires de rectangles ne doit pas abuser le lecteur moderne quant à la nature des concepts mis en œuvre.

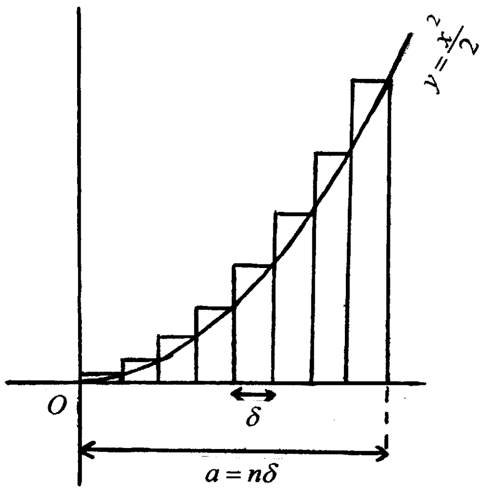
$\Sigma_{a,n}^{(1)}$ peut certes être interprétée comme une somme de Riemann de la fonction identité associée à une subdivision de pas $\delta = \frac{a}{n}$ de l'intervalle [0;a], $C_a^{(1)}$ correspondant donc, en tant que limite de cette somme de Riemann lorsque n tend vers l'infini, à l'aire du domaine plan défini par le système d'inéquations $\begin{cases} 0 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$.

$C_a^{(1)}$ étant l'aire d'un demi-carré de côté a, on a ainsi :

$C_a^{(1)} = \frac{a^2}{2}$ $(= \int_0^a x dx)$.



De même, $\Sigma_{a,n}^{(2)}$ peut être considérée comme une somme de Riemann de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{2}$ associée à une subdivision de pas $\delta = \frac{a}{n}$ de l'intervalle $[0;a]$, $C_a^{(2)}$ correspondant alors, en tant que limite de cette somme de Riemann lorsque n tend vers l'infini, à l'aire du domaine plan défini par le système d'inéquations $\begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le \frac{x^2}{2} \end{cases}$.



C'est-à-dire qu'on a : $C_a^{(2)} = \int_0^a \frac{x^2}{2} dx = \frac{a^3}{6}$.

D'une façon générale, on peut interpréter $C_a^{(p)}$ comme l'aire du domaine plan défini (par récurrence) par le système d'inéquations $\begin{cases} 0 \le x \le a \\ 0 \le y \le C_x^{(p-1)} \end{cases}$, aire qui est donnée par $\int_0^a C_x^{(p-1)} dx$.

Cette interprétation moderne ne correspond toutefois pas à la réalité du raisonnement exposé par Jyesthadeva. Etant donné son caractère relativement élémentaire, la première « somme d'arcs » $C_a^{(1)}$ peut certes avoir été déterminée à partir de ce point de vue géométrique ; mais compte tenu de la nature de la justification (examinée ci-dessous) fournie par le *Yuktibhāsa*, cette éventuelle détermination ne semble pas pouvoir avoir eu d'autre effet que de renforcer une connaissance acquise par d'autres moyens. D'une part, le concept de courbe est en effet absent des justifications apportées par Jyesthadeva. Il en est donc de même *a fortiori* de l'idée que les « sommes d'arcs d'ordre p » peuvent systématiquement être associées au calcul de l'aire définie par une courbe et trois droites. Mais surtout, ces arguments reposent essentiellement sur des résultats algébriques et demeurent conceptuellement étrangers à l'approche analytique inhérente au calcul intégral.

Peut-être faut-il moins voir dans cette référence aux aires de rectangles les prémices du calcul intégral qu'une formulation adaptée à la mémorisation d'un algorithme.

Le lecteur pourra juger de la pertinence de ces remarques en considérant les indications sommaires fournies par Jyesthadeva en vue de la détermination des deux premières sommes d'arcs (*capasamkalitam*)[18] : il commence par fixer la subdivision élémentaire δ comme unité de mesure, ce qui revient à poser que la mesure a de l'arc est égale à n unités. Nous noterons dans ces conditions : $\Sigma_{a,n}^{(p)} = \Sigma_n^{(p)}$.

$\Sigma_n^{(1)}$ et $\Sigma_n^{(2)}$ sont alors donnés sans détail sous une forme équivalente à :

$$\Sigma_n^{(1)} = \frac{n(n+1)}{2!} \quad \text{et} \quad \Sigma_n^{(2)} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}.$$

Ce qui correspond en réalité aux égalités :

[18] [C.T. Rajagopal, A. Venkataraman, 1949, p. 7].

$$\Sigma_{a,n}^{(1)} = \frac{a(a+\delta)}{2!} \quad \text{et} \quad \Sigma_{a,n}^{(2)} = \frac{a(a+\delta)(a+2\delta)}{3!}.$$

Constatant que $\Sigma_n^{(1)} \approx \frac{n^2}{2!}$ et $\Sigma_n^{(2)} \approx \frac{n^3}{3!}$ lorsque n devient grand, Jyesthadeva en déduit les deux premières « sommes d'arcs » :

$$C_a^{(1)} = \frac{a^2}{2!} \quad \text{et} \quad C_a^{(2)} = \frac{a^3}{3!}.$$

Ces résultats se comprennent aisément dans le contexte indien si l'on remarque que, dès lors que δ est considéré comme une unité, $\Sigma_{a,n}^{(1)}$ et $\Sigma_{a,n}^{(2)}$ (que nous notons alors $\Sigma_n^{(1)}$ et $\Sigma_n^{(2)}$) deviennent les sommes réitérées (*vārasamkalita*) d'ordre 1 et 2 respectivement des entiers naturels jusqu'à n, dont nous avons vu la définition et l'expression au chapitre 2. En effet, on a dans ces conditions :

$$\Sigma_n^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} i = V_n^{(1)} \quad \text{et} \quad \Sigma_n^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} \Sigma_i^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} V_i^{(1)} = V_n^{(2)} \quad \left(= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j \right).$$

La généralisation de ces cas particuliers à des ordres supérieurs de sommation est ensuite tacitement admise par Jyesthadeva[19] : elle est utilisée dans la conclusion de sa démonstration, ainsi que nous le verrons plus loin.

Le lemme 4 revient en définitive à définir $C_a^{(p)}$, puis à en donner l'expression sous la forme :

<u>Lemme 4</u> : Pour tout entier $p \geq 1$: $C_a^{(p)} = \frac{a^{p+1}}{(p+1)!}$.

Bien que les résultats de Nārāyana concernant les sommes réitérées (*vārasamkalita*), vus au chapitre 2, ne soient pas explicitement mentionnés dans le *Yuktibhāsa*, il est fort possible qu'ils aient été utilisés ici. Selon Nārāyana, on a en effet :

$$V_n^{(p)} = \frac{\prod_{k=0}^{p}(n+k)}{(p+1)!}.$$

Comme $\Sigma_n^{(p)} = V_n^{(p)}$, on obtient alors immédiatement :

$$\Sigma_n^{(p)} = V_n^{(p)} \approx \frac{n^{p+1}}{(p+1)!} \quad \text{lorsque } n \text{ devient grand.}$$

D'où : $C_a^{(p)} = \frac{a^{p+1}}{(p+1)!}$.

Remarquons que, compte tenu du type de justification donnée à ce lemme, il existe aussi un lien étroit entre ce dernier et le lemme 4 vu au chapitre 5, lequel est équivalent à l'assertion :

$$\sum_{k=1}^{n} k^p \approx \frac{n^{p+1}}{p+1} \quad \text{lorsque } n \text{ devient grand.}$$

Admettons en effet, comme le fait en réalité Jyesthadeva au cours de la justification de cette « valeur asymptotique », le principe d'équivalence au voisinage de l'infini de deux sommes

[19] [C.T. Rajagopal, A. Venkataraman, 1949, p. 7]. Voir aussi [T.A. Saraswathi, 1963, pp. 335-336].

partielles (de séries divergentes) de termes généraux équivalents. Pour n voisin de l'infini, on a alors :

$$V_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} V_k^{(p-1)} \approx \sum_{k=1}^{n} \frac{k^p}{p!}.$$

Donc :

$$\sum_{k=1}^{n} k^p \approx p! V_n^{(p)}.$$

Pourvu que le principe d'équivalence des sommes partielles soit admis, on obtient ainsi :

$$V_n^{(p)} \approx \frac{n^{p+1}}{(p+1)!} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^p \approx \frac{n^{p+1}}{p+1}.$$

Il est possible que ce lien fut reconnu par Jyesthadeva. Le lecteur pourra d'ailleurs vérifier que, dans la conclusion de sa démonstration retranscrite ci-dessous, l'introduction successive des sommes du type $S_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} k^p$ aurait pu se substituer au recours aux sommes d'arcs (*capasamkalitam*).

Compte tenu de l'autorité reconnue du résultat de Nārāyana (dont la validité générale ne fut, comme nous l'avons vu au chapitre 3, jamais démontrée par les Indiens), il est possible que le lien entre les « valeurs asymptotiques » de ces deux types de sommes ait accru, de façon certes tautologique, la force de persuasion des justifications de ces deux résultats et la certitude quant à leur validité.

Le lemme 4 revient en définitive à généraliser le concept de somme réitérée (*vārasamkalita*) en l'appliquant à la sommation des parties d'un ensemble continu. Ainsi que nous l'avons suggéré plus haut, ce lemme a pour analogue moderne le résultat des p intégrations successives suivantes de la fonction identité :

$$\underbrace{\int_0^a \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \ldots \int_0^{u_{p-1}} x dx du_{p-1} \ldots du_2 du_1}_{p \text{Intégrales}} = \frac{a^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Il est néanmoins abusif à notre sens de traduire le concept indien de somme réitérée (*vārasamkalita*) par celui d'intégrations successives (de la fonction identité), ainsi que l'ont fait certains historiens indiens[20] : les raisonnements mis en œuvre ici par Jyesthadeva demeurent essentiellement d'ordre algébrique et ne sont pas fondés sur le lien de réciprocité existant entre calcul de différences infinitésimales et sommation intégrale de ces différences, ni *a fortiori* sur des algorithmes systématiques de calcul différentiel et intégral, comme ce fut le cas chez les Européens des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles.

L'algorithme de « développement en série » simultané du Sinus et du Versinus d'un arc

L'algorithme décrit dans le *Yuktibhāsa* afin de justifier les développements (1) et (2) repose sur l'utilisation combinée des lemmes 2, 3 et 4 étudiés plus haut. Il est fondé sur l'idée d'une correction progressive de l'écart entre la mesure d'un arc et celle de son Sinus, qui permet non seulement d'obtenir un « développement en série » de cet écart, mais aussi, simultanément, celui du Versinus de l'arc considéré.

[20] [T.A. Saraswathi, 1963, pp. 335-336] et [C.T. Rajagopal, A. Venkataraman, 1949, pp. 7-9].

Deux descriptions détaillées de cet algorithme ont déjà été fournies en langue anglaise. Mais leur contenu et leur formalisme le trahissent de façon trop évidente, à tel point qu'elles ne concordent pas. L'une[21] parce qu'elle ne met absolument pas en évidence l'utilisation des lemmes exposés plus haut. L'autre[22] parce qu'elle recourt de façon abusive au concept de calcul intégral.

La reconstruction de cet algorithme proposée ici nous est par conséquent personnelle. Elle a été élaborée avec le souci d'en respecter les idées fondamentales et de ne rien utiliser qui ne soit contenu dans les lemmes destinés à le justifier. L'esprit de cet algorithme a par ailleurs été particulièrement bien décrit dans un article relativement récent dont nous avons tenu compte[23]. Les notations utilisées sont celles introduites dans les paragraphes précédents.

Combiné avec le fait que $\frac{\delta}{R}Sin(n\delta)=\frac{\delta}{R}Sin(a)$ devient négligeable lorsque n devient grand, le lemme 3-b permet dans un premier temps d'écrire sous cette hypothèse :

$$R-Cos(a)\approx\frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n-1}Sin(k\delta)\approx\frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n}Sin(k\delta)=\frac{1}{R}\delta\sum_{k=1}^{n}k\delta+\frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n}[Sin(k\delta)-k\delta]\ ;$$

soit encore :

$$R-Cos(a)\approx\frac{1}{R}\Sigma_{a,n}^{(1)}-\frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n}[k\delta-Sin(k\delta)]. \qquad \text{(I)}$$

En première approximation, l'écart entre la mesure $k\delta$ des arcs et leur Sinus peut être négligé. On obtient dans ce cas :

$$R-Cos(a)\approx\frac{1}{R}\Sigma_{a,n}^{(1)}\approx\frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n}Sin(k\delta) \qquad \text{(II)}$$

c'est-à-dire aussi, compte tenu de $\Sigma_{a,n}^{(1)}\approx C_a^{(1)}=\frac{a^2}{2!}$ (lemme 4) :

$$\boxed{R-Cos(a)\approx\frac{a^2}{2!R}.}$$

Le lemme 2-b permet ensuite d'écrire, lorsque n devient grand :

$$a-Sin(a)\approx\frac{\delta^2}{R^2}\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{k}Sin(i\delta)\approx\frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta}{R}\sum_{i=1}^{k}Sin(i\delta). \qquad \text{(III)}$$

Donc :

$$a-Sin(a)\approx\frac{1}{R^2}\delta\sum_{k=1}^{n}\delta\sum_{i=1}^{k}i\delta+\frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta}{R}\sum_{i=1}^{k}[Sin(i\delta)-i\delta]\ ;$$

soit encore :

$$a-Sin(a)\approx\frac{1}{R^2}\Sigma_{a,n}^{(2)}-\frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n}\frac{\delta}{R}\sum_{i=1}^{k}[i\delta-Sin(i\delta)]. \qquad \text{(IV)}$$

En introduisant dans (III) le principe de l'approximation (II), on obtient :

$$a-Sin(a)\approx\frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{R}\Sigma_{a,k}^{(1)}=\frac{1}{R^2}\Sigma_{a,n}^{(2)}\ . \qquad \text{(V)}$$

[21] [T.A. Saraswathi, 1963, pp. 339-342].
[22] [C.T. Rajagopal, A. Venkataraman, 1949, pp. 7-9].
[23] [D. Gold, D. Pingree, 1991, pp. 49-65] : cet algorithme est évoqué de façon particulièrement claire dans un commentaire dont l'auteur, qui demeure inconnu, appartint de façon certaine à l'école de Mādhava.

Soit aussi, puisque $\Sigma_{a,n}^{(2)} \approx C_a^{(2)} = \frac{a^3}{3!}$ (lemme 4) :

$$\boxed{a - Sin(a) \approx \frac{a^3}{3!R^2}.}$$

Le principe de l'approximation (V) permet alors d'introduire une correction dans (I) :

$$R - Cos(a) \approx \frac{1}{R}\Sigma_{a,n}^{(1)} - \frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{R^2}\Sigma_{a,k}^{(2)}.$$

D'où :

$$R - Cos(a) \approx \frac{1}{R}\Sigma_{a,n}^{(1)} - \frac{1}{R^3}\Sigma_{a,n}^{(3)}.$$

Soit aussi, en tenant compte de $\Sigma_{a,n}^{(1)} \approx C_a^{(1)} = \frac{a^2}{2!}$ et $\Sigma_{a,n}^{(3)} \approx C_a^{(3)} = \frac{a^4}{4!}$:

$$\boxed{R - Cos(a) \approx \frac{a^2}{2!R} - \frac{a^4}{4!R^3}.}$$

On déduit alors de (I) que :

$$\frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n}[k\delta - Sin(k\delta)] \approx \frac{1}{R^3}\Sigma_{a,n}^{(3)}. \quad \text{(VI)}$$

En corrigeant l'approximation (IV) à l'aide du principe d'approximation (VI), on obtient :

$$a - Sin(a) \approx \frac{1}{R^2}\Sigma_{a,n}^{(2)} - \frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{R^3}\Sigma_{a,k}^{(3)}.$$

D'où :

$$a - Sin(a) \approx \frac{1}{R^2}\Sigma_{a,n}^{(2)} - \frac{1}{R^4}\Sigma_{a,n}^{(4)}. \quad \text{(VII)}$$

Soit encore, en tenant compte de $\Sigma_{a,n}^{(2)} \approx C_a^{(2)} = \frac{a^3}{3!}$ et $\Sigma_{a,n}^{(4)} \approx C_a^{(4)} = \frac{a^5}{5!}$:

$$\boxed{a - Sin(a) \approx \frac{a^3}{3!R^2} - \frac{a^5}{5!R^4}.}$$

Le principe de l'approximation (VII) permet alors de corriger (I) :

$$R - Cos(a) \approx \frac{1}{R}\Sigma_{a,n}^{(1)} - \frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n}[\frac{1}{R^2}\Sigma_{a,k}^{(2)} - \frac{1}{R^4}\Sigma_{a,k}^{(4)}] \ ;$$

soit :

$$R - Cos(a) \approx \frac{1}{R}\Sigma_{a,n}^{(1)} - \left\{\frac{1}{R^3}\Sigma_{a,n}^{(3)} - \frac{1}{R^5}\Sigma_{a,n}^{(5)}\right\} \ ;$$

ce qui permet d'obtenir, en utilisant le lemme 4 :

$$\boxed{R - Cos(a) \approx \frac{a^2}{2!R} - \left\{\frac{a^4}{4!R^3} - \frac{a^6}{6!R^5}\right\}.}$$

On déduit alors de (I) que :

$$\frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n}[k\delta - Sin(k\delta)] \approx \frac{1}{R^3}\Sigma_{a,n}^{(3)} - \frac{1}{R^5}\Sigma_{a,n}^{(5)} \qquad \text{(VIII)}$$

En introduisant le principe d'approximation (IV) dans (VIII), il vient :

$$a - Sin(a) \approx \frac{1}{R^2}\Sigma_{a,n}^{(2)} - \frac{\delta}{R}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{R^3}\Sigma_{a,k}^{(3)} - \frac{1}{R^5}\Sigma_{a,k}^{(5)}\right].$$

D'où :

$$a - Sin(a) \approx \frac{1}{R^2}\Sigma_{n}^{(2)} - \left\{\frac{1}{R^4}\Sigma_{a,n}^{(4)} - \frac{1}{R^6}\Sigma_{a,n}^{(6)}\right\} ;$$

soit, en utilisant le lemme 4 :

$$\boxed{a - Sin(a) \approx \frac{a^3}{3!R^2} - \left\{\frac{a^5}{5!R^4} - \frac{a^7}{7!R^6}\right\}.}$$

Cet algorithme peut alors être poursuivi jusqu'à tout ordre q fixé. Compte tenu du fait que, pour tout entier non nul p, $\Sigma_{a,n}^{(p)} \approx C_a^{(p)} = \frac{a^{p+1}}{(p+1)!}$ lorsque n devient grand (lemme 4), on obtient finalement :

$$\boxed{Versin(a) = R - Cos(a) \approx \frac{a^2}{2!R} - \left\{\frac{a^4}{4!R^3} - \left\{\frac{a^6}{6!R^5} - \left\{ ..... - \left\{\frac{a^{2q}}{(2q)!R^{2q-1}}\right\}\right\}\right\}\right\}}$$

et :

$$\boxed{Sin(a) \approx a - \left\{\frac{a^3}{3!R^2} - \left\{\frac{a^5}{5!R^4} - \left\{\frac{a^7}{7!R^6} - \left\{ ..... - \left\{\frac{a^{2q+1}}{(2q+1)!R^{2q}}\right\}\right\}\right\}\right\}\right\}.}$$

Notons que ni Jyesthadeva, ni aucun des autres mathématiciens keralais ayant traité ce problème, n'énoncent explicitement le fait que les deux approximations ainsi réalisées sont d'autant meilleures que le nombre de termes du développement est grand. Il n'y a toutefois aucune raison de douter de leur compréhension de cette propriété, car l'algorithme répond clairement à une volonté d'améliorer progressivement les approximations obtenues à chaque étape en corrigeant d'autant mieux l'erreur commise (sur l'évaluation de l'écart entre la mesure d'un arc et son Sinus) que le nombre de termes est grand. Par ailleurs, la propriété analogue fut explicitement mentionnée par plusieurs d'entre eux dans le cadre de la rectification d'un arc de cercle sous forme de « développement en série », comme nous l'avons vu au chapitre 6.

Constatons finalement que l'école de Mādhava est parvenue très brillamment à établir ces résultats difficiles par la combinaison de propriétés propres aux fonctions trigonométriques, d'un algorithme ingénieux et, surtout, d'une méthode d'évaluation de « sommes de Riemann réitérées » essentiellement fondée sur des considérations algébriques relatives aux sommations de puissances d'entiers. Sur ce dernier point, il est clair que l'intuition et l'induction auront joué un rôle important, tant dans l'identification de quantités « continues » à des quantités « discrètes » (dans le choix initial de poser la subdivision élémentaire δ égale à une unité de mesure) que dans les propriétés des entiers utilisées.

Nous proposons en annexe 14, par l'intermédiaire d'un problème destiné aux classes de Terminale S ou de 1er cycle supérieur, une méthode permettant d'obtenir le développement en série entière du sinus et du cosinus qui, malgré l'utilisation des concepts et du symbolisme modernes, s'inspire de l'algorithme mis en œuvre dans le *Yuktibhāsa*. Nous tentons à cette occasion d'en donner une justification moderne.

Conclusion

Les « développements en séries » de la mesure d'un arc de cercle ainsi que ceux de son Sinus et de son Cosinus constituent parmi les plus brillantes réalisations des mathématiques indiennes. Déterminés entre la fin du XIV^e et le début du XV^e siècle, puis partiellement justifiés au XVI^e siècle, ils ont permis à leurs auteurs, les mathématiciens-astronomes de l'école de Mādhava, de calculer des approximations du rapport entre la circonférence d'un cercle et son diamètre et de construire des tables trigonométriques d'une exceptionnelle précision pour leur époque.

Il faut souligner la profonde originalité de ces résultats, qui semblent en particulier, quant au problème de l'évaluation de la circonférence d'un cercle, être les premiers dans l'histoire à substituer ce type d'algorithme aux traditionnelles approximations par des polygones réguliers utilisées jusqu'alors, y compris en Inde.

Ces réussites reposent d'une part sur un solide corpus de connaissances relatives à la trigonométrie accumulées depuis le V^e siècle et sur un certain nombre de résultats concernant la sommation de divers types de séries d'entiers ou de rationnels. Elles sont d'autre part le fruit de spéculations propres aux mathématiciens keralais. Ces derniers, confrontés au cours de leurs études au calcul des petites variations des « fonctions » trigonométriques et à la question de leur sommation, ainsi qu'à l'évaluation de certaines « sommes de Riemann », ont résolu à leur façon ces problèmes liés en définitive au calcul différentiel et intégral.

Il est néanmoins très douteux de suggérer, comme l'ont fait certains historiens indiens des mathématiques, que Mādhava serait le véritable fondateur du calcul infinitésimal, une sorte de précurseur de Newton et Leibniz dont la science se serait diffusée jusqu'en Europe grâce aux échanges entre l'Inde et l'Occident[13]. L'importance commerciale du Kerala dans ces échanges ne saurait d'abord à elle seule permettre de rendre historiquement crédible une influence que rien n'atteste par ailleurs. Mais surtout, et nous espérons l'avoir mis en évidence, les méthodes mathématiques utilisées par les astronomes keralais n'ont qu'un rapport d'analogie avec le calcul infinitésimal, duquel elles sont à maints égards conceptuellement éloignées. Il est en particulier notoire que les « développements en séries » obtenus par Mādhava et ses disciples résultent non de l'application d'algorithmes généraux tels que ceux utilisés par Newton, Leibniz, Taylor ou Mac Laurin, mais d'une utilisation ingénieuse de propriétés spécifiques à la trigonométrie et d'habiles techniques de sommation d'entiers. Rien dans ces travaux ne démontre par exemple une compréhension du lien étroit et systématique existant entre le calcul des petites variations d'une quantité et celui de leur sommation, le traitement purement algébrique des « sommes de Riemann des fonctions puissances » ou des « sommes de Riemann itérées de la fonction identité » témoignant au contraire de son absence. De plus, leur perspective se révèle essentiellement finitiste : seules l'intuition et l'induction ont permis à Mādhava et à ses disciples de contourner les problèmes délicats posés par le concept d'infini, concept laissé dans l'ombre malgré son omniprésence sous-jacente.

Une traduction complète et exigeante de commentaires rédigés par des membres de l'école tels que le *Yuktibhāsa* ou le *Yuktidīpikā* s'impose néanmoins pour pouvoir approfondir ces jugements.

Un certain nombre de raisons peuvent être avancées pour expliquer en partie tant cette réussite des mathématiciens keralais que les limites de leurs travaux. Notons d'abord que les « fonctions » trigonométriques, qui furent abondamment étudiées en liaison avec les besoins de l'astronomie, ont des propriétés très particulières. Dès l'époque d'Āryabhata I, les mathématiciens indiens recoururent aux différences de Sinus afin de calculer les Sinus eux-

[13] [A.K. Bag, 1979, pp. 284-285]

mêmes. Ils ne tardèrent pas à remarquer que les différences du second ordre des Sinus possèdent elles aussi des propriétés particulières et qu'elles peuvent se déduire de considérations géométriques élémentaires. En ce sens, le calcul des Sinus (*jyāganita*) s'inscrit d'emblée et par nécessité dans une problématique où une « fonction » n'est connue que grâce à ses différences. Il fallait néanmoins que cette problématique soit fécondée pour qu'adviennent les fameux « développements en séries ». Les connaissances concernant les séries, accumulées depuis Māhavīra et surtout Nārāyana, ont permis de fournir l'ensemble de connaissances complémentaires indispensables. Il revient à Mādhava d'avoir eu le génie de combiner ces diverses approches.

Les travaux mathématiques de ce dernier et de son école se restreignent certes pour l'essentiel au cadre relativement étroit de la trigonométrie, ce qui limite leur portée. Compte tenu de leur subordination aux besoins de l'astronomie, il n'y a toutefois pas à s'étonner du fait que les raisonnements et les méthodes qu'ils utilisent n'aient pas été généralisés ni systématisés. Le contraire aurait été miraculeux dans le contexte d'une astronomie qui ne se voulait pas physique et d'une philosophie où le concept de *mathesis universalis* eût été incongru.

Essentiellement oral et axé sur le respect de la Tradition, l'enseignement était par ailleurs voué à encourager ceux qui le pouvaient à mémoriser une grande quantité de vers, à apprendre et à reproduire les techniques de calculs en usage ou encore à composer de nouveaux vers afin de décrire des algorithmes déjà connus[14]. Il ne favorisait par conséquent guère l'émergence de concepts radicalement nouveaux. Notons à cet égard que les travaux de l'école de Mādhava introduisirent moins de nouveautés dans les concepts que dans les méthodes : ils s'inscrivaient avant tout dans la tradition instaurée par Āryabhata I.

Soulignons enfin un dernier aspect qui, lié au précédent, l'est peut-être aussi à la conjoncture politique en Inde entre le XIVe et le XVIe siècle : ni le contenu des traités de Mādhava et de ses successeurs, ni celui de leurs commentaires, ne semblent avoir circulé, au cours des deux siècles d'existence de l'école, au-delà du cercle restreint de ses membres. Tout indique que le reste de l'Inde, à commencer par le reste du Kerala, demeura ignorant de ces travaux[15].

L'école de Mādhava apparaît ainsi comme un groupe d'astronomes trop orienté sur certains problèmes spécifiques et trop replié sur lui-même pour avoir pu cultiver durablement l'inspiration de son brillant fondateur, l'enrichir de façon significative et la diffuser au reste du monde. Ceci n'enlève rien à son mérite : injustement négligée, elle peut à bon droit revendiquer une place honorable dans l'histoire des mathématiques. Il en est de même, d'ailleurs, de la trigonométrie indienne dans son ensemble.

L'œuvre de S. Ramanujan (1887-1920), jungle luxuriante où se mêlent en particulier d'extravagantes séries ou développements en fractions continues généralisées[16] liés au nombre π, prolonge de la sorte une brillante tradition, même si son auteur semble être demeuré ignorant des travaux de ses illustres prédécesseurs indiens[17].

---

14 [D. Pingree, *Proceedings…*, pp. 28-29]

15 [D. Pingree, *Proceedings…*, p. 29]. *A fortiori*, on voit mal comment ils auraient pu avoir un écho jusqu'en Europe…

16 Mentionnons « simplement » $\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{(1103+26390n)}{396^{4n}}$ et $\frac{4}{\varphi(x)} = \left[\Gamma(\frac{x+1}{4})/\Gamma(\frac{x+3}{4})\right]^2$ (où Γ est la fonction d'Euler et $\varphi(x)$ le développement en fraction continue généralisée de Brouncker $x+\frac{1^2}{2x+}\frac{3^2}{2x+}\frac{5^2}{2x+}$....., qui a la particularité remarquable d'être tel que $\pi = 4/\varphi(1)$).

17 [C.T. Rajagopal, M.S. Rangachari, 1986, p. 98]. Sur S. Ramanujan, voir par exemple [B. Randé, 2002].

Annexes

Annexe 1
Chronologie des mathématiciens et des œuvres cités[18]

Baudhāyana	Vers le VIII^e siècle avant J.-C.	Baudhāyana Śulba Sūtra
?	Avant le IV^e siècle avant J.-C.	*Vedānga Jyotisa*
Pingala	Vers 200 avant J.-C.	*Chandah Sūtra*
?	Vers le V^e siècle après J.-C.	*Sūrya Siddhānta*
Āryabhata I	Né en 476	*Āryabhatīya* (499)
?	Entre le V^e et le VIII^e siècle	Manuscrit « de *Bakshalī* »
Varāhamihira	505-578	*Pañca Siddhāntikā*
Bhāskara I	Début du VII^e siècle	*Mahābhāskarīya* (629)
Brahmagupta	VII^e siècle	*Brahmasphuta Siddhānta* (628) *Khanda Khādyaka* (665)
Lalla	VIII^e siècle	*Śisyadhīvrddhida* (768)
Govindaswāmin	Fin du VIII^e siècle, première moitié du IX^e siècle	*Mahābhāskarīya Bhāsya*
Mahāvīra	IX^e siècle	*Ganitasārasamgraha* (850)

[18] Pour les dates ou les périodes indiquées, nous nous sommes essentiellement référés à [A.K. Bag, 1979], [D. Pingree, 1976], [D. Pingree, 1981] et [B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985]. Lorsqu'il s'agit de dates, nous insistons sur le fait qu'elles ne sont pas, à quelques exceptions près, assurées.

Vateśvara	Fin du IXe siècle, début du Xe siècle	*Vateśvara Siddhānta* (904)
Śrīdhara	Fin du IXe siècle, début du Xe siècle	*Pātīganita*
Āryabhata II	Xe siècle	*Mahā Siddhānta* (950)
Śrīpati	Fin du Xe siècle, première moitié du XIe siècle	*Siddhānta Śekhara* (1039) *Ratnamālā*
Halāyudha	Fin du Xe siècle, début du XIe siècle	
Bhāskara II	Né en 1114	*Siddhānta Śiromani* (incluant *Līlāvatī*)
Sūryadevayajvan	Né en 1191	Commentaire sur L' *Āryabhatīya*
Nārāyana Pandita	XIVe siècle	*Ganita Kaumudī*
Mādhava	Fin du XIVe siècle, Début du XVe siècle	
Parameśvara	Entre 1360 et 1460	*Drgganita* *Siddhāntadīpikā*
Dāmodara	XVe siècle	
Nīlakantha	Né en 1444, mort avant 1543	*Āryabhatīya Bhāsya* *Tantrasamgraha*
Jyesthadeva	Entre 1500 et 1575	*Yuktibhāsa*

Śankara Vāriyar	Entre 1500 et 1560	*Yuktidīpikā* *Kriyākramakarī*
Ganeśa	XVI^{e} siècle	*Buddhi Vilāsinī* (1545)
Acyuta Pisārati	Né vers 1550, mort en 1621	*Karanottama*
?	Entre la fin du XVI^{e} siècle (peut-être 1596) et le milieu du XVIII^{e} siècle (peut-être 1740)	*Karanapaddhati*
Kamalākara	Né vers 1610	*Siddhānta Tattva Viveka* (1658)

Annexe 2
Trois formules de duplication[19]

Trois formules de duplication sont ici justifiées d'une manière autant que possible conforme à l'esprit des raisonnements indiens, lequel est connu à travers la justification de résultats analogues. Ces trois formules et le style de démonstration fourni semblent particulièrement adaptés à la classe de Seconde. Elles pourraient y faire l'objet d'un problème.

Varāhamihira énonce dans le *Pañca Siddhāntikā* :

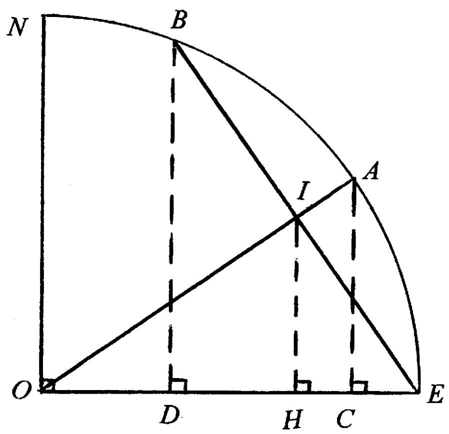
« *Pour trouver le Sinus de n'importe quel autre arc désiré, double l'arc et soustrais du quart du cercle ; diminue le rayon par le Sinus du reste. Le carré de la moitié du résultat est additionné au carré de la moitié du Sinus du double de l'arc. La racine carrée de la somme est le Sinus désiré*[20]. »

En d'autres termes : $Sin(a) = \sqrt{\left(\dfrac{Sin(2a)}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{R - Sin(90° - 2a)}{2}\right)^2}$ (1)

où R est le rayon du cercle et où a est la mesure d'un arc, laquelle est inférieure au huitième de circonférence dans le contexte étudié par Varāhamihira.

Cette relation peut avoir été établie comme suit :

Soient O le centre du cercle, E le point Est et N le point Nord. Soit A un point du premier quadrant tel que l'arc (EA) ait pour mesure a et que le point B, tel que l'arc (EB) ait pour mesure $2a$, soit aussi dans le premier quadrant. Notons C le projeté orthogonal de A sur (OE), D celui de B et $I = (EB) \cap (OA)$.



EBD étant rectangle en D, on a : $EB^2 = BD^2 + ED^2$.

Soit encore, puisque I est le milieu de $[EB]$: $4EI^2 = BD^2 + (R - OD)^2$.

Donc : $EI = \sqrt{\left(\dfrac{BD}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{R - OD}{2}\right)^2}$.

Or : $BD = Sin(2a)$ et $OD = Cos(2a) = Sin(90° - 2a)$.

De plus, les triangles OCA et OIE sont isométriques ; donc $EI = AC = Sin(a)$.

La formule (1) en résulte.

Dans un autre énoncé, Varāhamihira affirme également :

[19] Voir la page 16.

[20] [A.K. Bag, 1979, pp. 235-236].

« *Le double de n'importe quel arc désiré est soustrait du quart de cercle, le Sinus du reste est soustrait du Sinus du quart de cercle. Le résultat multiplié par 60 est le carré du Sinus de cet arc*[21]. »

Sous les mêmes hypothèses que précédemment et compte tenu du fait que le problème est ici considéré dans un cercle de rayon 120, il est donc affirmé que :

$$Sin^2(a) = \frac{R}{2}[Sin(90°) - Sin(90° - 2a)] \qquad (2)$$

Avec les mêmes notations, ceci a pu être déduit du fait que, les triangles *EHI* et *EIO* étant semblables : $\frac{EI}{EH} = \frac{EO}{EI}$.

D'où : $EI^2 = EO \times EH = \frac{EO}{2} \times ED$.

(2) résulte alors de $EI = Sin(a)$, $EO = R$ et $ED = R - OD = Sin(90°) - Sin(90° - 2a)$.

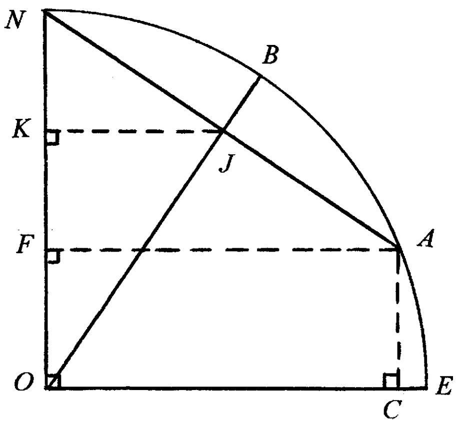
Āryabhata II énonce quant à lui dans le *Mahā Siddhānta* :

« *Le Sinus d'un arc multiplié par le rayon est soustrait ou ajouté au carré de la valeur maximale du Sinus ; la racine carrée de la moitié du résultat obtenu est extraite. Ceci donnera le Sinus de l'arc égal à douze fois le premier arc augmenté ou diminué de la moitié de l'arc*[22]. »

C'est-à-dire (compte tenu de $12 \times 3°45' = 45°$) : $Sin(45° \pm \frac{a}{2}) = \sqrt{\frac{1}{2}[R^2 \pm RSin(a)}$ (3)

Voici une démonstration élémentaire du cas $Sin(45° - \frac{a}{2})$, l'autre étant analogue :

On reprend les notations utilisées au cours de la première démonstration. Toutefois, *B* sera ici tel que la droite (*OB*) soit la médiatrice de [*AN*]. On notera *J* le milieu de [*AN*], puis *F* et *K* les projetés orthogonaux respectifs de *A* et *J* sur [*ON*].



ANF étant rectangle en *F* :

$$AN^2 = NF^2 + AF^2 = (ON - AC)^2 + AF^2 = ON^2 + AC^2 + AF^2 - 2 \times ON \times AC$$
$$= R^2 + (AC^2 + OC^2) - 2R \times AC = R^2 + R^2 - 2RSin(a) = 2[R^2 - RSin(a)]$$

De plus : $AN^2 = 4AJ^2$. Donc $AJ^2 = \frac{1}{2}[R^2 - RSin(a)]$.

Enfin, l'arc (*AB*) a pour mesure $\frac{1}{2}(90° - a) = 45° - \frac{a}{2}$ et $AJ = Sin[arc(AB)] = Sin(45° - \frac{a}{2})$.

D'où le résultat annoncé en (3).

[21] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 51]
[22] [A.K. Bag, 1979, pp. 237-238]

Annexe 3
Les formules d'addition selon Kamalākara[23]

La démonstration des formules d'addition pour le Sinus et le Cosinus présentée ici peut inspirer un problème intéressant en classe de Première, voire dans certaines classes de Seconde. Elle a en effet l'intérêt de ne recourir qu'à des propriétés élémentaires et peut par conséquent servir d'alternative au traditionnel recours aux produits scalaires.

Bhāskara II avait énoncé dans le *Siddhānta Śiromani* :

> « *Les Sinus de deux arcs quelconques d'un cercle sont multipliés réciproquement par leurs Cosinus ; les produits sont ensuite divisés par le rayon ; la somme des quotients est égale au Sinus de la somme des deux arcs ; et leur différence est le Sinus de la différence des arcs*[24]. »

Ainsi, pour tous arcs de mesures a et b d'un cercle de rayon R :

$$\boxed{Sin(a \pm b) = \frac{Sin(a)Cos(b)}{R} \pm \frac{Cos(a)Sin(b)}{R}}$$

Kamalākara donne cette règle en des termes voisins dans le *Siddhānta Tattva Viveka*. Il y énonce aussi les formules d'addition pour le Cosinus, en les attribuant à Bhāskara II :

> « *Le produit des Cosinus et des Sinus de deux arcs d'un cercle sont divisés par le rayon ; la différence et la somme des quotients sont égales au Cosinus de la somme et de la différence des deux arcs*[25]. »

C'est-à-dire que, pour tous arcs de mesures a et b d'un cercle de rayon R :

$$\boxed{Cos(a \pm b) = \frac{Cos(a)Cos(b)}{R} \mp \frac{Sin(a)Sin(b)}{R}}$$

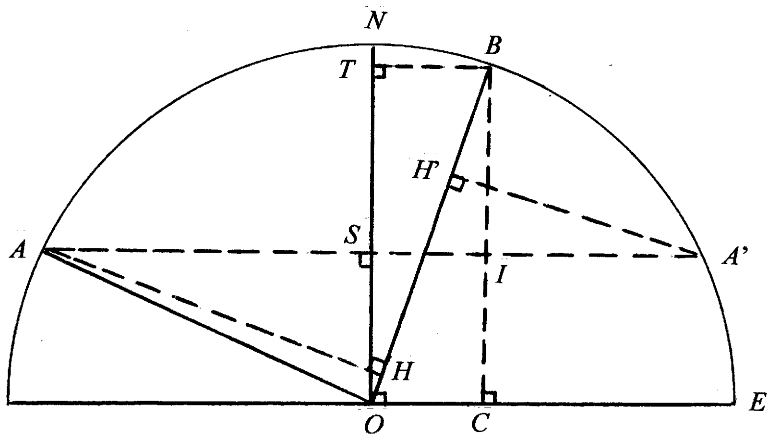
L'originalité de Kamalākara est d'être le premier mathématicien indien connu à justifier ces résultats. Il en fournit même deux démonstrations dans le cas où a et b sont des mesures d'arcs inférieures à un quart de circonférence, tout en précisant :

> « *Même lorsque les deux arcs sont au-delà du quart de circonférence, dans n'importe quel quadrant pair ou impair, il en sera de même et pas autrement. C'est l'opinion de ceux qui sont conscients des faits véritables*[26]. »

Sa première démonstration (la seule que nous exposerons) peut être retranscrite comme suit :

Soit O le centre du cercle de rayon R, N le point Nord et E le point Est. A et B sont deux points distincts de ce cercle. On note a la mesure de l'arc (AN) et b celle de l'arc (BN). On suppose que $a > b$. S est le projeté orthogonal de A sur (ON) et (AS) recoupe le cercle en A'. C et T sont les projetés orthogonaux respectifs de B sur (OE) et (ON). (AA') coupe (BC) en I. Enfin, H et H' sont les projetés orthogonaux respectifs de A et A' sur (OB).

[23] Voir la page 17.
[24] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, pp. 55-56]
[25] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 57]
[26] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 60]



On a : $AS = Sin(a)$; $OS = Cos(a)$; $BT = Sin(b)$; $OT = Cos(b)$; $BI = Cos(b) - Cos(a)$; $AI = Sin(a) + Sin(b)$; $AH = Sin(a+b)$ et $BH = R - Cos(a+b)$.

De $BI^2 + AI^2 = AB^2 = AH^2 + BH^2$, on peut donc déduire :

$$[Cos(b) - Cos(a)]^2 + [Sin(a) + Sin(b)]^2 = Sin^2(a+b) + [R - Cos(a+b)]^2.$$

Après développement et simplifications et compte tenu des trois relations $Cos^2(a) + Sin^2(a) = R^2$, $Cos^2(b) + Sin^2(b) = R^2$ et $Cos^2(a+b) + Sin^2(a+b) = R^2$, on obtient :

$$Cos(a+b) = \frac{Cos(a)Cos(b) - Sin(a)Sin(b)}{R}.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
Sin^2(a+b) = R^2 - Cos^2(a+b) &= \frac{1}{R^2}[R^4 - (Cos(a)Cos(b) - Sin(a)Sin(b))^2] \\
&= \frac{1}{R^2}[(Cos^2(a) + Sin^2(a))(Cos^2(b) + Sin^2(b)) - (Cos(a)Cos(b) - Sin(a)Sin(b))^2] \\
&= \frac{1}{R^2}[Sin(a)Cos(b) + Cos(a)Sin(b)]^2
\end{aligned}$$

D'où : $Sin(a+b) = \dfrac{Sin(a)Cos(b) + Cos(a)Sin(b)}{R}$.

Par ailleurs : $A'I = Sin(a) - Sin(b)$; $A'H' = Sin(a-b)$ et $BH' = OB - OH' = R - Cos(a-b)$.

De $BI^2 + A'I^2 = A'B^2 = A'H'^2 + BH'^2$, on peut donc déduire :

$[Cos(b) - Cos(a)]^2 + [Sin(a) - Sin(b)]^2 = Sin^2(a-b) + [R - Cos(a-b)]^2$

Soit, après développement et simplifications :

$$Cos(a-b) = \frac{Cos(a)Cos(b) + Sin(a)Sin(b)}{R}.$$

Un calcul analogue à celui effectué pour le développement de $Sin(a+b)$ permet alors de déduire de ce qui précède et de la relation $Sin^2(a-b) = R^2 - Cos^2(a-b)$ que :

$$Sin(a-b) = \frac{Sin(a)Cos(b) - Cos(a)Sin(b)}{R}.$$

Annexe 4
Les Sinus de 18° et de 36° : une justification des résultats de Bhāskara II par Kamalākara[27]

La justification des valeurs exactes respectives de $Sin(18°)$ et $Sin(36°)$ retranscrite ici a, outre son utilisation de plusieurs formules trigonométriques, l'intérêt de montrer un exemple de « problème du second degré » résolu par d'habiles procédés algébriques.
Elle pourrait inspirer un problème dans les classes de Première.

Bhāskara II énonce dans le *Siddhānta Śiromani*[28] :

« *La racine carrée de cinq fois le carré du rayon est diminuée par le rayon et le reste est divisé par 4 ; le résultat est la valeur exacte du Sinus de 18°.* »

Ainsi : $Sin(18°) = \dfrac{\sqrt{5R^2} - R}{4}$; c'est-à-dire : $\sin(18°) = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

Dans le même traité, il donne aussi[29] :

« *La racine carrée de cinq fois le carré du carré du rayon est soustraite de cinq fois le carré du rayon et le reste est divisé par 8 ; la racine carrée du quotient est le Sinus de 36°.* »

Soit : $Sin(36°) = \sqrt{\dfrac{5R^2 - \sqrt{5(R^2)^2}}{8}}$; c'est-à-dire : $\sin(36°) = \sqrt{\dfrac{5 - \sqrt{5}}{8}}$

Bhāskara II ne justifie pas ce résultat. Kamalākara en donne une preuve dans son *Siddhānta Tattva Viveka*, en utilisant plusieurs fois les formules de duplication et d'ingénieux calculs algébriques. Elle peut être retranscrite comme suit[30] (par commodité, nous noterons $x = Sin(18°)$) :

On a d'abord : $$\frac{1}{2}R(R - x) = \frac{1}{2}R \times Versin(72°) = Sin^2(36°)$$

et : $$\frac{2x^2}{R} = R - Cos(36°) = Versin(36°).$$

Donc : $$\frac{1}{2}R(R - x) + \left[\frac{2x^2}{R}\right]^2 = Sin^2(36°) + Ver\sin^2(36°) = 4Sin^2(18°) = 4x^2 .$$

On en déduit : $8x^2R^2 = 8x^4 - R^3x + R^4$.
En multipliant par 8 et en réarrangeant les termes, on obtient par conséquent :

$$16R^2x^2 + 8R^3x + R^4 = 9R^4 - 48R^2x^2 + 64x^4 .$$

D'où, en prenant la racine carrée des deux membres de l'égalité :

$$4Rx + R^2 = 3R^2 - 8x^2 .$$

[27] Voir page 18.
[28] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 68].
[29] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 68].
[30] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 69].

(l'inégalité $x \le \sqrt{\frac{3}{8}}R$ n'est pas justifiée; elle résulte facilement de : $x \le Sin(30°) = \frac{R}{2} \le \sqrt{\frac{3}{8}}R$)
On a donc, après multiplication par 2 et réarrangement des termes :

$$(4x + R)^2 = 5R^2 .$$

On en déduit $x = \dfrac{\sqrt{5R^2} - R}{4}$, en tenant compte du fait que $x \le R$.
Enfin :

$$Sin^2(36°) = \frac{1}{2}R(R - x) = \frac{R(5R - \sqrt{5R^2})}{8} \text{ , d'où } Sin(36°) = \sqrt{\frac{5R^2 - \sqrt{5(R^2)^2}}{8}} .$$

Annexe 5
Deux formules de Bhāskara II destinées à la construction de tables de Sinus[31]

Les formules justifiées ici le sont, autant que possible, dans le respect de l'esprit des traités indiens. Elles sont directement en liaison avec celles étudiées à l'annexe 3.

L'ensemble formé par l'annexe 3 et la présente est manifestement susceptible de faire l'objet d'un problème en classe de Première scientifique. Aux aspects géométriques de la première s'adjoint en effet ici le recours à des approximations affines. Les deux énoncés de Bhāskara II présentés ici pourraient par exemple, après une éventuelle adaptation, être posés en énigme à résoudre, après deux questions préliminaires portant sur les approximations affines utilisées et quelques explications introduisant l'énoncé.

Selon le *Siddhānta Śiromani* de Bhāskara II :

> « *Multiplie le Cosinus par 100 et divise par 1529 ; diminue le Sinus de sa 467e partie. La somme de ces deux résultats donnera le Sinus suivant et leur différence le Sinus précédent. Ici, 225 moins 1/7 est le premier Sinus. Et par cette règle on peut calculer successivement les vingt-quatre Sinus*[32]. »

Cette règle énonce donc qu'en prenant $a = 225'$, $Sin(a) = 225 - \frac{1}{7}$ et le rayon R égal à 3438', on obtient pour $n \in [1;23]$ la formule :

$$Sin(na \pm a) \approx [Sin(na) - \frac{Sin(na)}{467}] \pm \frac{100}{1529} Cos(na) .$$

Elle peut se justifier comme suit :
Les formules d'addition (connues de Bhāskara II) permettent d'écrire :

$$Sin(na \pm a) = \frac{Sin(na)Cos(a) \pm Cos(na)Sin(a)}{R} = Sin(na)\frac{Cos(a)}{R} \pm Cos(na)\frac{Sin(a)}{R} .$$

Or : $\dfrac{Sin(a)}{R} = \dfrac{225 - \frac{1}{7}}{3438} = \dfrac{787}{12033} \approx \dfrac{1}{15,2897} \approx \dfrac{100}{1529}$

Et : $\dfrac{Cos(a)}{R} = \dfrac{\sqrt{R^2 - Sin^2(a)}}{R} = \sqrt{1 - (\dfrac{Sin(a)}{R})^2} \approx \sqrt{1 - \dfrac{1}{233,775}} \approx 1 - \dfrac{1}{467,55} \approx 1 - \dfrac{1}{467}$

(en ayant utilisé l'approximation classique : $h \approx 0 \Rightarrow \sqrt{1-h} \approx 1 - \frac{h}{2}$)

Le résultat annoncé s'en déduit.

Cette formule donne une table de vingt-quatre Sinus très précise, précision dont la cause principale est la qualité de l'évaluation par Bhāskara II du Sinus de référence. En effet, un calcul moderne donne : $Sin(225') \approx 224,856$ et $225 - \frac{1}{7} \approx 224,857$ en est une très bonne approximation. Cette évaluation plus fine que l'usuelle $Sin(225') \approx 225$ a sans doute pour

[31] Voir la page 24.
[32] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 86].

origine un plus grand souci de précision dans l'extraction des racines carrées successives permettant de déterminer ce Sinus à partir de celui de 30° et des formules de duplication.

Dans le *Siddhānta Śiromani*, Bhāskara II fournit aussi la règle suivante, qui permet la construction d'une table de degré en degré :

> « *Ôte au Sinus de n'importe quel arc sa 6567^e partie ; multiplie son Cosinus par 10, puis divise par 573. La somme de ces deux résultats est le Sinus suivant et leur différence est le Sinus précédent. Ici, le premier Sinus sera de 60 minutes et les autres Sinus pourront être déterminés successivement. Ainsi seront obtenus quatre vingt dix Sinus dans un cercle de rayon égal à 3438 minutes*[33]. »

La règle énonce donc que si, dans un cercle de rayon $R = 3438'$, a est une mesure entière en degrés d'un arc telle que $a \in [1°;89°]$, alors en considérant que $Sin(1°) = Sin(60') = 60'$, on obtient : $Sin(a \pm 1°) \approx [Sin(a) - \frac{Sin(a)}{6567}] \pm \frac{10}{573} Cos(a)$.

Elle peut se justifier comme suit :
Les formules d'addition (connues de Bhāskara II) permettent d'écrire :

$$Sin(a \pm 1°) = \frac{Sin(a)Cos(1°) \pm Cos(a)Sin(1°)}{R} = \frac{Cos(1°)}{R} Sin(a) \pm \frac{Sin(1°)}{R} Cos(a).$$

Or, 1° de circonférence correspond à un arc dont la mesure est petite (par rapport au rayon). Donc l'approximation $Sin(1°) \approx 60'$ est légitime.

Par conséquent : $\frac{Sin(1°)}{R} \approx \frac{60}{3438} = \frac{10}{573}$

et $$\frac{Cos(1°)}{R} = \frac{\sqrt{R^2 - Sin^2(1°)}}{R} = \sqrt{1 - (\frac{Sin(1°)}{R})^2} = \sqrt{1 - (\frac{10}{573})^2} = \sqrt{1 - \frac{100}{328329}}$$

$$\approx 1 - \frac{100}{2 \times 328329} \quad \text{(en ayant utilisé le fait que } h \approx 0 \Rightarrow \sqrt{1-h} \approx 1 - \frac{h}{2}\text{)}$$

$$\approx 1 - \frac{1}{6566{,}58} \approx 1 - \frac{1}{6567}.$$

La formule annoncée s'en déduit.

[33] [B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, pp. 87-88].

Annexe 6
Une justification par Bhāskara II d'une formule d'interpolation du second ordre de Brahmagupta[34]

Nous avons vu au premier chapitre qu'une formule d'interpolation du second ordre destinée au calcul approché de certaines lignes trigonométriques fut énoncée dès le VII^e siècle en Inde, dans l'œuvre de Brahmagupta. Nous examinons ici une justification de ce résultat apportée par Bhāskara II dans le *Siddhānta Śiromani*.

Commençons par rappeler le contexte de cette formule d'interpolation.

Un quart de cercle est subdivisé de façon régulière en n arcs de même mesure δ.

On note $(a_k)_{1\le k\le n}$ les n mesures d'arcs ainsi définies et on suppose que l'on dispose d'une table donnant les valeurs d'une certaine ligne trigonométrique f de ces arcs.

Dans ces conditions, on se donne (dans l'ordre croissant) trois mesures d'arcs tabulés consécutives a_{k-1}, a_k et a_{k+1} et on considère un arc non tabulé dont la mesure x est telle que : $a_k < x < a_{k+1}$.

Enfin, on appelle « différence passée » la quantité $\Delta_k = f(a_k) - f(a_{k-1})$ et « différence devant être passée » la quantité $\Delta_{k+1} = f(a_{k+1}) - f(a_k)$.

Rappelons aussi qu'une formule d'interpolation du premier ordre fut utilisée par les astronomes indiens dès le V^e siècle. Avec les notations précédentes, elle peut s'écrire :

$$f(x) \approx f(a_k) + \frac{x - a_k}{\delta}\Delta_{k+1}. \qquad (1)$$

Bhāskara II fait implicitement référence à cette approximation lorsqu'il énonce la formule d'interpolation du second ordre destinée à l'améliorer :

> « *La différence entre la différence passée et celle devant être passée est multipliée par l'arc résiduel et divisée par 20 ; le résultat est soustrait ou ajouté à la demi-somme des deux différences pour obtenir la valeur corrigée de la différence des Sinus ou des Versinus respectivement*[35]. »

Ici, $n = 10$ et donc $\delta = 10°$. f désignant le Sinus ou le Versinus, cet énoncé peut être retranscrit par :

$$f(x) \approx f(a_k) + \frac{x - a_k}{\delta}\left\{\frac{\Delta_k + \Delta_{k+1}}{2} \pm \frac{x - a_k}{\delta} \times \frac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{2}\right\}. \qquad (2)$$

Il revient en effet à affirmer que l'imprécision de (1) sera corrigée en y substituant $\left\{\frac{\Delta_k + \Delta_{k+1}}{2} \pm \frac{x - a_k}{\delta} \times \frac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{2}\right\}$ à Δ_{k+1}.

Bhāskara II justifie ce résultat comme suit :

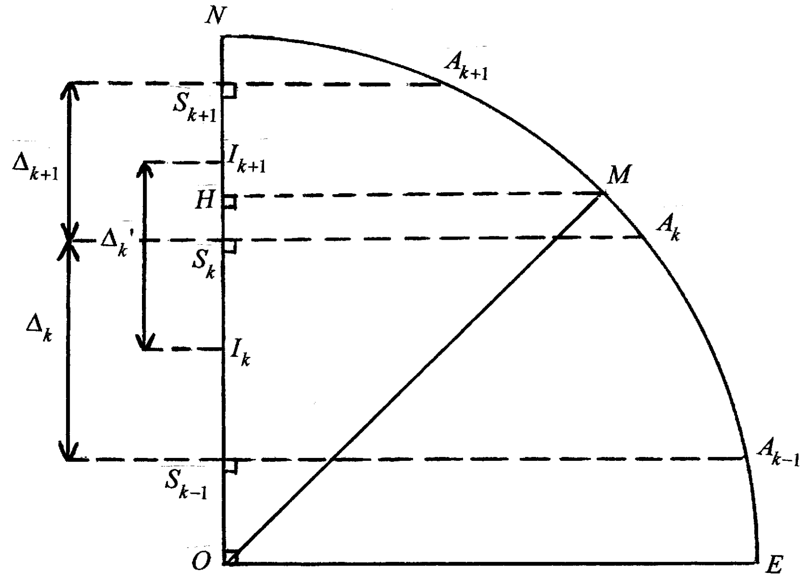
> « *La demi-somme de la différence passée et de la différence devant être passée sera la différence au milieu de ces différences. Mais la différence devant être passée est à la fin de cet intervalle devant être passé. Aussi faut-il effectuer une proportion avec*

[34] Voir les pages 26 et 27.

[35] [*Siddhānta Śiromani, ii.16*, in B.V. Subbarayappa, K.V. Sarma, 1985, p. 65] et [R.C. Gupta, 1969, p. 89].

leur différence : si pour un intervalle de dix degrés on obtient la moitié de leur différence, alors qu'obtiendra-t-on pour les degrés restants ? Par la règle de trois, vingt sera le diviseur du produit des degrés restant et de la différence entre la différence passée et la différence devant être passée ; la demi-somme de la différence passée et de la différence devant être passée est ensuite diminuée par ce quotient ; car pour le calcul des Sinus les différences sont en ordre décroissant. Mais dans le calcul des Versinus ils sont en ordre croissant ; aussi l'addition devra-t-elle être effectuée dans ce cas. Ainsi la règle est prouvée[36]. »

On reprend les notations précédentes. f désignera ici le Sinus. A_{k-1}, A_k et A_{k+1} sont tels que a_{k-1}, a_k et a_{k+1} soient les mesures respectives des arcs (EA_{k-1}), (EA_k) et (EA_{k+1}). M est un point de l'arc (A_kA_{k+1}) et x est la mesure de l'arc (EM). S_{k-1}, S_k et S_{k+1} sont les projetés orthogonaux respectifs de A_{k-1}, A_k et A_{k+1} sur (ON) et H celui de M. Enfin, I_k et I_{k+1} désignent les milieux respectifs de $[S_{k-1}S_k]$ et $[S_kS_{k+1}]$.



Par commodité, nous désignerons par « coefficient de variation » de f sur un intervalle le produit de son taux de variation sur cet intervalle par δ. Certaines références à des « différences » dans l'énoncé peuvent en effet être comprises en ce sens.

Notons $\Delta_k' = \dfrac{\Delta_k + \Delta_{k+1}}{2}$ la demi-somme de la « différence passée » et de la « différence devant être passée ».

La raison de l'introduction de cette quantité dans la première phrase de l'énoncé est éclairée par la seconde assertion. Celle-ci suggère pourquoi l'interpolation (1) du premier ordre est insuffisante ; elle doit très probablement être comprise comme suit : cette insuffisance de (1) vient de ce qu'on y considère le « coefficient de variation » de f comme constant sur tout l'intervalle $[a_k; a_{k+1}]$ et égal à Δ_{k+1}, alors qu'en toute rigueur ce coefficient est toujours supérieur et ne prend effectivement cette valeur qu'à la fin de l'« intervalle devant être passé »[37], c'est-

[36] [*Siddhānta Śiromani, ii.16*, in B.D. Datta, A.N. Singh, 1983, p. 95].

[37] En effet : $\delta \dfrac{f(a_{k+1}) - f(a_k)}{a_{k+1} - a_k} = \Delta_{k+1}$.

à-dire pour $x = a_{k+1}$. Dans le cas où f est le Sinus, les taux de variation sont en effet décroissants. Pour améliorer la précision de l'interpolation, il faut donc tenir compte du fait que le « coefficient de variation de f » entre a_k et x dépend de x et décroît lorsque x croît vers a_{k+1}. Il s'agit dès lors de déterminer le « coefficient de variation » $\partial_{k+1}(x)$ tel que :

$$f(x) \approx f(a_k) + \frac{x - a_k}{\delta} \partial_{k+1}(x)$$

($\partial_{k+1}(x)$ décroissant lorsque x croît et coïncidant avec Δ_{k+1} lorsque $x = a_{k+1}$).

L'idée utilisée pour déterminer $\partial_{k+1}(x)$ consiste à utiliser à nouveau un principe d'accroissement linéaire sur l'intervalle $[a_k; a_{k+1}]$, mais pour les « coefficients de variation » cette fois. C'est ce principe d'accroissement linéaire que Bhāskara II désigne par l'expression « règle de trois ».

Nous avons dit que le « coefficient de variation » est connu en $x = a_{k+1}$: c'est Δ_{k+1}. Mais que vaut-il au tout début de l'intervalle « devant être passé » $[a_k; a_{k+1}]$, c'est-à-dire lorsque x tend vers a_k ? En toute rigueur, il faudrait recourir au concept de limite pour le définir, puisque le taux de variation n'est pas défini en a_k. Il n'en est évidemment pas question ici.

La solution retenue par Bhāskara II pour résoudre le problème est contenue dans la première assertion, dont nous pouvons désormais donner le sens. Notons d'abord que le « milieu » des différences Δ_k et Δ_{k+1} auquel Bhāskara II se réfère doit être compris comme étant soit le point A_k, soit le point S_k [38]. Puisque le « coefficient de variation » entre a_k et a_{k+1} est Δ_{k+1} et que le « coefficient de variation » entre a_{k-1} et a_k est Δ_k, la moyenne arithmétique de ces « coefficients de variation », à savoir Δ_k', constitue une bonne approximation du « coefficient de variation » au tout début de l'« intervalle devant être passé » $[a_k; a_{k+1}]$, c'est-à-dire, à la limite, en a_k. $\partial_{k+1}(x)$ peut alors être déterminé par le principe d'accroissement linéaire annoncé :

$$\partial_{k+1}(x) - \Delta_k' = \frac{x - a_k}{\delta}(\Delta_{k+1} - \Delta_k') \ ;$$

soit :

$$\partial_{k+1}(x) = \Delta_k' - \frac{x - a_k}{\delta}(\Delta_k' - \Delta_{k+1}) .$$

Comme $\Delta_k' - \Delta_{k+1} = \dfrac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{2}$ et $\Delta_k' = \dfrac{\Delta_k + \Delta_{k+1}}{2}$, on obtient donc :

$$\partial_{k+1}(x) = \frac{\Delta_k + \Delta_{k+1}}{2} - \frac{x - a_k}{\delta}\left(\frac{\Delta_k - \Delta_{k+1}}{2}\right) .$$

D'où la formule d'interpolation (2) annoncée dans le cas où f est le Sinus.

Un raisonnement analogue, dont Bhāskara II lui-même indique l'argument principal, permet d'obtenir (2) dans le cas où f est le Versinus.

---

[38] Dans ce dernier cas, S_k ne doit pas être compris comme le milieu de $[S_{k-1}S_{k+1}]$ (c'est clairement faux), mais soit comme une approximation de ce milieu, soit, plus simplement, comme la « jonction » entre les segments $[S_{k-1}S_k]$ et $[S_kS_{k+1}]$.

Annexe 7
Une approximation rationnelle du Sinus : la formule de Bhāskara I [39]

Nous avons vu à la fin du premier chapitre que de nombreux mathématiciens indiens, dont Bhāskara I semble être le premier, ont énoncé une approximation du Sinus remarquablement précise (compte tenu de sa simplicité) à l'aide d'une fraction rationnelle. Rappelons que cette approximation correspond à l'énoncé suivant :

Si, dans un cercle de rayon R, a est la mesure en degrés d'un arc de ce cercle inférieure à $180°$ d'arc, alors :

$$Sin(a) \approx \frac{R(180° - a)a}{\frac{1}{4}[40500 - (180° - a)a]} \qquad (1)$$

c'est-à-dire encore :

$$\boxed{\sin(a) \approx \frac{4(180° - a)a}{40500 - (180° - a)a}.} \qquad (1')$$

Nous exposons ici deux méthodes permettant de justifier cette approximation[40]. Elles s'inspirent d'un commentaire fourni par Ganeśa et sont donc susceptibles d'utiliser certaines des idées effectivement mises en œuvre afin de déterminer cette approximation.

Ces justifications, ou tout au moins l'approximation qu'elles concernent, peuvent en outre à notre avis inspirer un problème intéressant au niveau des classes de Seconde ou de Première.

1e justification

Notons $p = (180° - a)a$ et $P = \frac{p}{8100}$.

Il s'agit alors de justifier que :

$$\sin(a) \approx \frac{4P}{5 - P} \qquad (2)$$

On constate d'abord que les trois quantités positives $\sin(a)$, P et $P\sin(a)$ s'annulent pour $a = 0°$ et $a = 180°$. De plus, elles atteignent leur maximum (égal à 1) pour $a = 90°$ et elles varient de la même façon (croissantes sur [0°;90°] et décroissantes sur [90°;180°]).
Des constats analogues ont effectivement été faits par Ganeśa (voir la seconde justification).

On peut alors s'interroger sur la relation existant entre ces trois quantités. La plus simple à laquelle on puisse penser, et elle est conforme avec ce qui précède, est une relation linéaire.

Ganeśa a donné dans son *Buddhi Vilāsinī* une explication très sommaire sur la méthode utilisée pour obtenir la formule analogue à (1) donnée par Bhāskara I. Elle va précisément dans le sens du recours à une telle relation de linéarité :

« *Une règle de trois fut appliquée par les maîtres pour obtenir le résultat*[41]. »

---

[39] Voir la page 28.
[40] Nous nous référons ici dans une large mesure aux deux articles majeurs concernant ce sujet, à savoir [R.C. Gupta, 1967, pp. 121-135] et [R.C. Gupta, 1986, pp. 39-41].
[41] [R.C. Gupta, 1986, p. 40].

D'où peut bien venir une telle « règle de trois » ? La quantité que l'on souhaite déterminer étant sin(a), on peut se demander comment elle diffère des deux autres. D'où l'idée d'introduire les deux différences $P-\sin(a)$ et $\sin(a)-P\sin(a)$. Une relation de linéarité correspondant à l'application d'une règle de trois sera alors obtenue en supposant leur proportionnalité, c'est-à-dire en affirmant l'existence d'un réel k tel que :

$$\frac{P-\sin(a)}{\sin(a)-P\sin(a)}=k \quad \text{pour tout } a \text{ distinct de } 90° \text{ et tel que } 0°<a<180°.$$

Ceci se justifie d'autant plus que ces deux différences sont simultanément nulles pour $a = 0°$, pour $a = 90°$ et pour $a = 180°$.

Or, si $a = 30°$, on a : $\sin(a)=\frac{1}{2}$; $P=\frac{5}{9}$ et $P\sin(a)=\frac{5}{18}$.

Par conséquent :

$$\frac{P-\sin(a)}{\sin(a)-P\sin(a)}=\frac{\frac{5}{9}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{5}{18}}.$$

(2) s'en déduit alors après isolement de sin(a) et simplifications.

2^e^ justification

Soit A la mesure d'un arc de cercle de diamètre D et de circonférence C. Notons K la mesure de la corde sous-tendue par cet arc et $P'=(C-A)A$ la quantité appelée *prathama* (« premier ») par Bhāskara II.

L'intérêt de P' est indiqué par Ganeśa :

« *Lorsque la corde augmente, le premier* (prathama) *augmente aussi. Lorsque l'arc est la demi-circonférence, il y a un maximum de la corde et c'est là aussi un maximum du premier* (prathama)[42]. »

La similitude des variations de K et de P' est donc remarquée. K varie en outre de façon directement proportionnelle à D. Le plus simple consiste alors dans un premier temps à supposer qu'il existe une relation du type : $K=\lambda DP'$, où λ est une constante.

Lorsque les deux membres de l'égalité atteignent leur maximum, on a dans ces conditions :

$$D=\lambda D\frac{C^2}{4}.$$

Donc : $\lambda=\frac{4}{C^2}$.

Il en résulte : $K=\frac{4DP'}{C^2}$. (3)

Si l'on note $2a$ la mesure en degrés de l'angle au centre sous-tendu par l'arc de mesure A, on obtient alors :

$$D\sin(a)=K=\frac{4D(360-2a)2a}{360^2} ;$$

d'où :

$$\sin(a)=\frac{16(180-a)a}{129600}=\frac{(180-a)a}{8100} ;$$

[42] [R.C. Gupta, 1986, p. 40].

c'est-à-dire :

$$\sin(a) = P, \text{ où } P = \frac{(180-a)a}{8100} .$$

L'approximation précédente est toutefois trop grossière. On peut alors tenter d'obtenir une meilleure approximation que (3) en remplaçant le dénominateur par une quantité dépendant de a. Le plus simple est de considérer une expression polynomiale. Puisqu'il faut en outre conserver l'homogénéité dimensionnelle de la formule, on est donc amené à remplacer C^2 par une quantité quadratique, du type : $uC^2 + vCa + wa^2$.

Mais, P' étant lié à Ca et à a^2, on peut ramener le problème à la recherche d'une quantité du type : $uC^2 + u'P'$. Il s'agit dès lors de déterminer u et u' tels que : $K = \frac{4DP'}{uC^2 + u'P'}$

En considérant les cas $A = \frac{C}{2}$ et $A = \frac{C}{6}$, on obtient les deux égalités :

$$D = \frac{4D(C-\frac{C}{2})\frac{C}{2}}{uC^2 + u'(C-\frac{C}{2})\frac{C}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{D}{2} = \frac{4D(C-\frac{C}{6})\frac{C}{6}}{uC^2 + u'(C-\frac{C}{6})\frac{C}{6}} .$$

D'où : $\begin{cases} 4u + u' = 4 \\ 36u + 5u' = 40 \end{cases}$.

On en déduit : $u = \frac{5}{4}$ et $u' = -1$.

On obtient alors la formule telle qu'elle fut donnée par Bhāskara II :

$$K = \frac{8R(C-A)A}{\frac{5}{4}C^2 - (C-A)A} .$$

Avec les notations déjà introduites, on a ainsi :

$$2\sin(a) = \frac{8(360-2a)2a}{\frac{5}{4}\times 360^2 - (360-2a)2a} .$$

La formule (1') en résulte.

Annexe 8
La « convergence » de certaines séries géométriques selon Nīlakantha[43]

Nous avons vu au chapitre 3 que Nīlakantha a énoncé dans l'*Āryabhatīya Bhāsya* une règle générale de sommation « indéfinie » des séries géométriques dont la raison est un quantième.
Rappelons qu'elle consiste à dire[44] que, si a est un entier (naturel) et p un entier supérieur ou égal à 2, alors $\sum_{k\geq 1}\frac{a}{p^k}=\frac{a}{p-1}$, étant entendu que cette notation ne doit pas faire oublier l'ambiguïté (mentionnée au chapitre 3) concernant le statut de la somme et de l'égalité considérées.

Nīlakantha justifie ensuite cette règle générale[45] en examinant le cas particulier où la raison est $\frac{1}{4}$ et où $a=1$:
Il constate d'abord que :

$$\frac{1}{4}=3\times\frac{1}{12} \quad \text{et} \quad \frac{1}{3}=4\times\frac{1}{12} \quad \text{impliquent} \quad \frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4\times 3}.$$

Puis que :

$$\frac{1}{4\times 3}-\frac{1}{4^2}=\frac{1}{4\times 4\times 3} \quad \text{implique} \quad \frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}=\frac{1}{4\times 4\times 3}.$$

En poursuivant ce procédé il obtient ainsi :

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4^2}-\frac{1}{4^3}=\frac{1}{4\times 4\times 4\times 3} \qquad \text{etc....}$$

C'est-à-dire en définitive :

$$\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots+\frac{1}{4^n}\right]=\frac{1}{4^n\times 3}$$

où $n\geq 1$ désigne le nombre de termes de la somme choisi.

Selon Nīlakantha, <u>l'écart</u> entre $\frac{1}{3}$ et la somme obtenue <u>devient alors d'autant plus petit que le</u> <u>nombre de termes sommé est grand</u>, puisque cet écart est une fraction de $\frac{1}{3}$ pouvant être rendue aussi petite que l'on veut en prenant un nombre suffisant de termes. Il en conclut que cette somme vaut $\frac{1}{3}$ lorsque la sommation est « indéfiniment » poursuivie.

Remarquons que cet algorithme peut être généralisé comme suit, pour tout $p\geq 2$:

$$\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}=\frac{1}{p(p-1)} \quad ;$$

puis :

---

[43] Voir la page 31.
[44] [T.A. Saraswathi, 1963, pp. 325-326].
[45] [T.A. Saraswathi, 1963, pp. 325-326].

$$\frac{1}{p-1}-(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2})=\frac{1}{p(p-1)}-\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p^2(p-1)}.$$

En généralisant à tout entier $n \geq 1$, on obtient ainsi :

$$\frac{1}{p-1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p^k}=\frac{1}{p^n(p-1)}.$$

D'où :

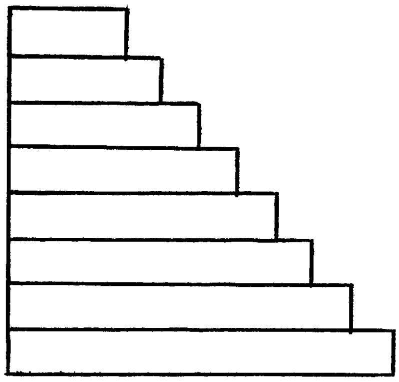
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p^k}=\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p^n(p-1)}\approx\frac{1}{p-1}\text{ lorsque } n \text{ devient grand.}$$

Annexe 9
Les représentations géométriques de divers types de sommation d'entiers selon Nīlakantha[46]

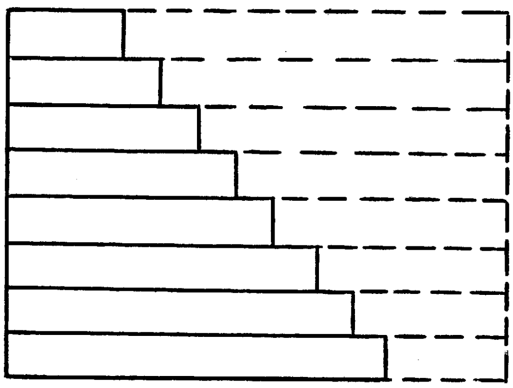
L'un des aspects remarquables de l'*Āryabhatīya* de Nīlakantha (commentaire sur l'*Āryabhatīya* d'Āryabhata I) est le recours à des diagrammes géométriques destinés à démontrer la validité de divers types de sommation d'entiers. Bien que ce genre de justification n'apparaisse dans aucun traité antérieur aux travaux de Nīlakantha, ce dernier ne prétend pas en être l'auteur original. Il est probable en fait que les « monstrations » qui suivent[47] furent connues au sein de l'école d'Āryabhata beaucoup plus tôt. Notons qu'elles apparaissent toutes également dans le *Kriyakramakāri* de Śānkara Vāriyar, lequel prétend par ailleurs que la preuve concernant les sommes d'entiers triangulaires (*vārasamkalita* d'ordre 2 ; voir aussi l'annexe 10) peut être généralisée à des ordres de sommation supérieurs.

Représentation des séries de terme général arithmétique

Chaque terme d'une suite arithmétique peut être représenté par une bande rectangulaire de largeur unité et dont la longueur est le nombre d'unités égal à sa valeur. En arrangeant ces bandes, on obtient alors le diagramme ci-contre : la bande supérieure a pour longueur le nombre d'unités égal au premier terme a, l'écart de longueur entre deux bandes est le nombre d'unités égal à la raison et le nombre de bandes est égal au nombre n de termes à sommer, la dernière bande ayant pour longueur le nombre d'unités égal au dernier terme a'.



Si deux tels diagrammes sont juxtaposés comme le montre la figure ci-dessous, on obtient un rectangle dont les côtés ont pour longueurs respectives $(a + a')$ et n unités.



[46] Voir la page 38.

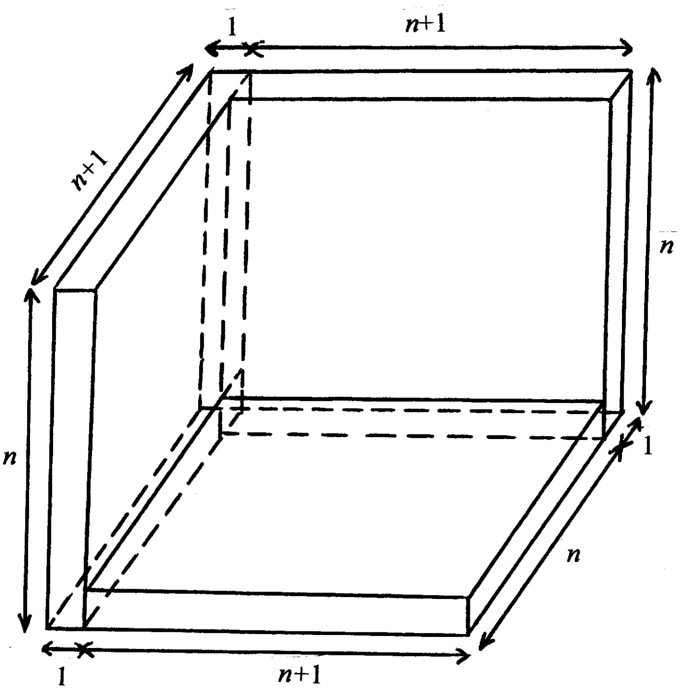
[47] Nous les avons reconstruites essentiellement sur la base des indications figurant dans [T.A. Saraswathi, 1963, pp. 326-328].

L'aire du rectangle étant $n(a + a')$ unités d'aire, celle de l'un des deux diagrammes est $n\frac{a+a'}{2}$ unités d'aire. Nīlakantha en déduit la justification du résultat classique selon lequel la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme a et de n-ième terme a' est $n\frac{a+a'}{2}$.

Représentation des sommes d'entiers triangulaires

Nīlakantha considère d'abord six diagrammes représentatifs de la somme des n premiers entiers naturels non nuls (diagrammes définis au paragraphe précédent, avec ici $a = 1$ et $a' = n$), pourvus d'une épaisseur d'une unité. Il les combine par paires (comme au paragraphe précédent) afin d'obtenir trois parallélépipèdes rectangles de dimensions $n \times (n+1) \times 1$.

Comme l'indique la figure ci-contre, il place l'un de ces parallélépipèdes horizontalement et les deux autres verticalement, de façon à obtenir trois faces adjacentes deux à deux d'un parallélépipède rectangle de dimensions $n \times (n+1) \times (n+2)$.

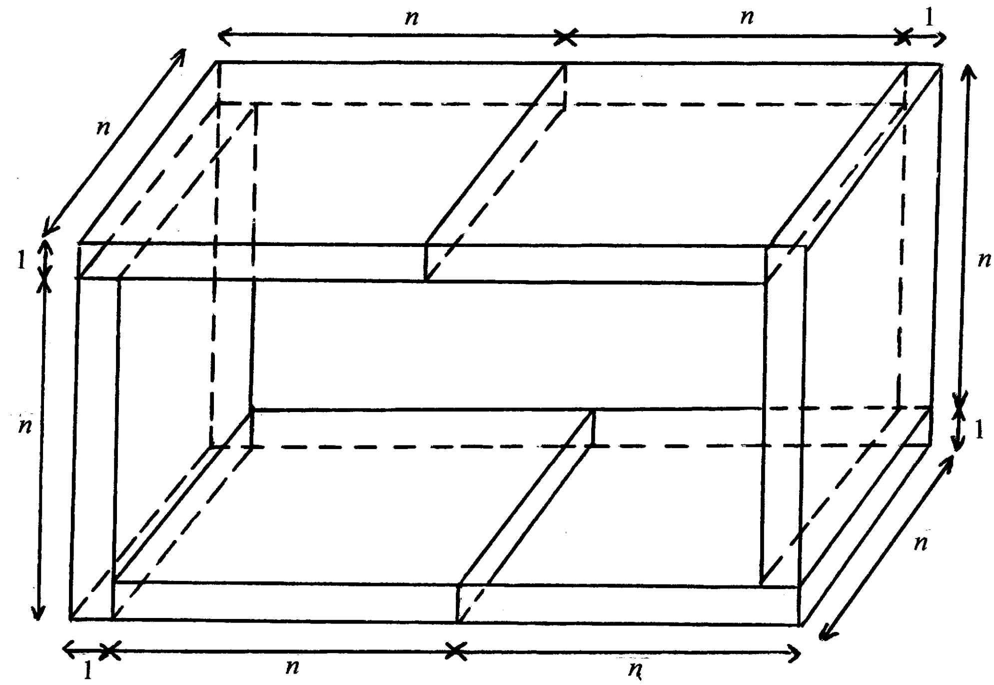


Ce procédé peut alors être réitéré pour chaque somme des k premiers entiers non nuls, avec k parcourant les valeurs entières de $(n-1)$ à 1.
On obtient de la sorte $(n-1)$ gnomons tridimensionnels avec lesquels il est possible de remplir l'intérieur du parallélépipède de dimensions $n \times (n+1) \times (n+2)$ ébauché par le gnomon initial. Le volume global des n gnomons ainsi utilisés (soit $6n$ diagrammes d'épaisseur 1 unité) est alors de $6\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} \times 1$ unités de volume.
Comme il est égal au volume intérieur au parallélépipède de dimensions $n \times (n+1) \times (n+2)$, on a : $6\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = n(n+1)(n+2)$. D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}.$$

Représentation des sommes de carrés d'entiers

Afin de démontrer la formule donnant la somme des carrés des n premiers entiers naturels non nuls, Nīlakantha considère d'abord six parallélépipèdes rectangles de dimensions $n \times n \times 1$, qu'il juxtapose comme l'indique la figure ci-dessous de manière à obtenir un premier gnomon tridimensionnel ébauchant un parallélépipède de dimensions $n \times (n+1) \times (2n+1)$.



Ce procédé peut alors être réitéré pour chaque parallélépipède rectangle de dimensions $k \times k \times 1$ avec k parcourant toutes les valeurs entières de $(n-1)$ à 1.

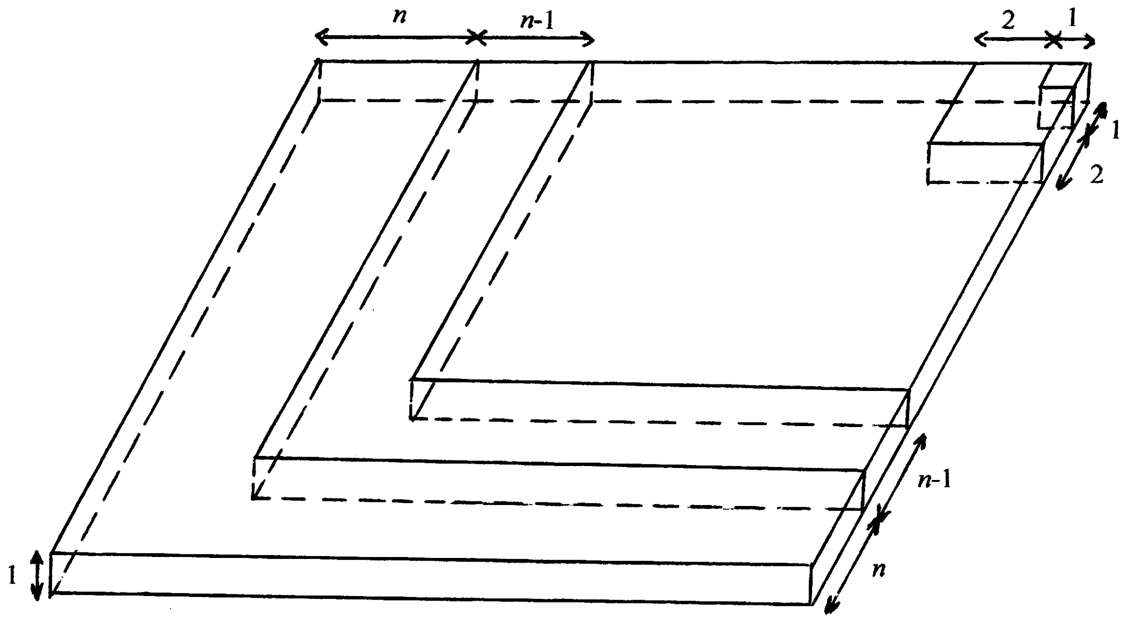
On obtient de la sorte $(n-1)$ gnomons tridimensionnels avec lesquels il est possible de remplir le parallélépipède rectangle de dimensions $n \times (n+1) \times (2n+1)$ ébauché par le gnomon initial.

Le volume global des n gnomons ainsi utilisés (soit n groupes de six parallélépipèdes rectangle de dimensions $k \times k \times 1$, pour $1 \le k \le n$) est alors de $6\sum_{k=1}^{n} k \times k \times 1$ unités de volume. Comme il est égal au volume intérieur au parallélépipède rectangle de dimensions $n \times (n+1) \times (2n+1)$, on obtient : $6\sum_{k=1}^{n} k^2 = n(n+1)(2n+1)$. D'où :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Représentation des sommes de cubes d'entiers

Afin de démontrer la formule donnant la somme des cubes des n premiers entiers non nuls, Nīlakantha considère un parallélépipède rectangle de dimensions $\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \times 1$. Il le découpe comme l'indique la figure ci-dessous en n gnomons de largeur k, k décrivant toutes les valeurs entières de n à 1.



Chacun de ces gnomons peut lui-même être découpé en $k^2 + 2 \times k \sum_{i=1}^{k-1} i = k^2 + k \times k(k-1) = k^3$ cubes de volume unitaire et peut par conséquent être considéré comme la réunion de *k* parallélépipèdes rectangle de dimensions $k \times k \times 1$; lesquels, une fois empilés, forment un cube de côté k unités.

On obtient ainsi n cubes dont le volume global est $\sum_{k=1}^{n} k^3$ unités de volume.

Comme ce volume est identique au volume du parallélépipède initial de dimensions $\frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2} \times 1$, on en déduit la formule :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 .$$

Annexe 10
Une démonstration des propriétés de Nārāyana concernant les sommations itérées d'entiers. Quelques considérations de Blaise Pascal sur le même thème[48].

Soit $n \in N^*$ fixé. On note $(V_n^{(p)})_{p\in N}$ la suite des sommations itérées des entiers naturels (« *vārasamkalita* d'ordre p ») définie par :

$$V_n^{(0)} = n \quad \text{et} \quad V_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} V_k^{(p-1)} \quad \text{pour tout } p \geq 1 .$$

Nous-nous proposons ici de démontrer le résultat énoncé par Nārāyana dans le cas où p est non nul, à savoir que :

$$V_n^{(p)} = \frac{\prod_{k=0}^{p}(n+k)}{(p+1)!} \quad \text{pour tous entiers } n \in N^* \text{ et } p \in N .$$

Nous mettrons ensuite ce résultat en relation avec certaines remarques faites par Blaise Pascal dans le *Traité du triangle arithmétique*.

On peut d'abord vérifier sans difficulté que :

$$V_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2!} \quad \text{et} \quad V_n^{(2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2!} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3!} .$$

Notons H_p l'hypothèse « Pour tout $n \in N^*$: $V_n^{(p)} = \dfrac{\prod_{k=0}^{p}(n+k)}{(p+1)!}$ ».

Nous allons prouver par récurrence sur p que H_p est vraie pour tout $p \in N$.

H_0 est vraie et nous venons de voir qu'il en est de même de H_1 et H_2.
Supposons maintenant que H_p est vraie pour un certain $p \in N$. Il en résulte d'abord que, pour tout $n \in N^*$ et tout $k \in [1;n]$:

$$V_k^{(p)} = \frac{\prod_{i=0}^{p}(k+i)}{(p+1)!} = \frac{k+p}{p+1} \frac{\prod_{i=0}^{p-1}(k+i)}{p!} = \frac{k+p}{p+1} V_k^{(p-1)} .$$

On a donc, pour tout $n \in N^*$:

$$(p+1)V_n^{(p+1)} = (p+1)\sum_{k=1}^{n} V_k^{(p)} = \sum_{k=1}^{n}(k+p)V_k^{(p-1)} = p\sum_{k=1}^{n} V_k^{(p-1)} + \sum_{k=1}^{n} kV_k^{(p-1)} .$$

C'est-à-dire :

$$(p+1)V_n^{(p+1)} = pV_n^{(p)} + \sum_{k=1}^{n} kV_k^{(p-1)} . \qquad (1)$$

[48] Voir la page 33.

Or : $\sum_{k=1}^{n} kV_k^{(p-1)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n} V_i^{(p-1)} = \sum_{k=1}^{n} V_k^{(p-1)} + \sum_{k=1}^{n}[\sum_{k=1}^{n} V_k^{(p-1)} - \sum_{i=1}^{k} V_i^{(p-1)}] = V_n^{(p)} + \sum_{k=1}^{n}[V_n^{(p)} - V_k^{(p)}]$

$$= (n+1)V_n^{(p)} - \sum_{k=1}^{n} V_k^{(p)} = (n+1)V_n^{(p)} - V_n^{(p+1)}.$$

En reportant dans (1), on obtient par conséquent :

$$(p+1)V_n^{(p+1)} = pV_n^{(p)} + (n+1)V_n^{(p)} - V_n^{(p+1)}.$$

Soit : $V_n^{(p+1)} = \dfrac{n+p+1}{p+2}V_n^{(p)} = \dfrac{n+p+1}{p+2}\dfrac{\prod_{k=0}^{p}(n+k)}{(p+1)!} = \dfrac{\prod_{k=0}^{p+1}(n+k)}{(p+2)!}$. Donc H_{p+1} est vraie.

On en déduit par récurrence que H_p est vraie pour tout $p \in N$.

En introduisant le coefficient binomial $C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, on obtient ainsi :

$$\boxed{\text{Pour tous entiers } n \in N^* \text{ et } p \in N : \ V_n^{(p)} = \frac{\prod_{k=0}^{p}(n+k)}{(p+1)!} = \frac{(n+p)!}{(p+1)!(n-1)!} = C_{n+p}^{p+1}.}$$

Nous avons vu au chapitre 2 que ce résultat a aussi été généralisé par Nārāyana.

Rappelons qu'il s'agit de considérer la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = a + r(n-1)$, puis de définir par récurrence la « sommation répétée » d'ordre p des u_n par :

$$W_n^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad W_n^{(p)} = \sum_{k=1}^{n} W_k^{(p-1)} \quad \text{pour tout } p \geq 2.$$

La généralisation du résultat précédent est alors donnée par Nārāyana sous une forme équivalente à :

$$W_n^{(p)} = a\frac{p+1}{n-1}V_{n-1}^{(p)} + rV_{n-1}^{(p)} \quad \text{pour tout } p \geq 1.$$

Cette généralisation se déduit sans difficulté du cas particulier ($a = r = 1$) établi plus haut.

En remarquant que $u_n = a \times 1 + r \times (n-1)$, il est clair en effet qu'on obtient d'abord (lorsque $n \geq 2$) : $W_n^{(p)} = aV_n^{(p-1)} + rV_{n-1}^{(p)}$.

Pour établir le résultat annoncé, il suffit alors de remarquer que (lorsque $n \geq 2$) :

$$V_n^{(p-1)} = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!} = \frac{p+1}{n-1}\frac{(n+p-1)!}{(p+1)!(n-2)!} = \frac{p+1}{n-1}V_{n-1}^{(p)}.$$

Ainsi que nous l'avons mentionné au chapitre 2, ces problèmes relatifs aux sommations itérées d'entiers ont aussi été étudiés par Pascal. Au début de la dernière partie du *Traité du triangle arithmétique*, intitulée *Divers usages du triangle arithmétique dont le générateur est l'unité*, il donne ainsi une définition de ce qu'il appelle l'« ordre d'un entier » :

> « *On a considéré dans l'arithmétique les nombres des différentes progressions ; on a aussi considéré ceux des différentes puissances et des différents degrés ; mais on n'a pas, ce me semble, assez examiné ceux dont je parle, quoiqu'ils soient d'un très grand usage : et même ils n'ont pas de nom ; ainsi j'ai été obligé de leur en donner ;*

> *et parce que ceux de progression, de degré et de puissance sont déjà employés, je me sers de celui d'*ordres.
> *J'appelle donc nombres du premier ordre les simples unités :*
> *1, 1, 1, 1, 1, etc.*
> *J'appelle nombres du second ordre les naturels qui se forment par l'addition des unités :*
> *1, 2, 3, 4, 5, etc.*
> *J'appelle nombres de troisième ordre ceux qui se forment par l'addition des naturels, qu'on appelle triangulaires :*
> *1, 3, 6, 10, etc.*
> *[...] J'appelle nombres du quatrième ordre ceux qui se forment par l'addition des triangulaires, qu'on appelle pyramidaux :*
> *1, 4, 10, 20, etc.*
> *[...] Et ainsi à l'infini [...]* [49]. »

Le n-ième nombre d'ordre p selon Pascal correspond donc, pour $p \geq 3$, à ce que nous avons noté $V_n^{(p-2)}$.

Une fois cette définition de l'ordre donnée, Pascal la met clairement en rapport avec son « triangle arithmétique ». Il montre de la sorte, sans toutefois en donner la formule explicite, comment obtenir le n-ième nombre d'ordre p à partir de ce que l'on qualifie désormais de « coefficients binomiaux ». Son explication revient à mettre en évidence la relation existant entre ce n-ième nombre d'ordre p et un coefficient particulier de son « triangle arithmétique », relation qui correspond précisément à celle que nous avons notée $V_n^{(p)} = C_{n+p}^{p+1}$.
Il illustre cette explication par l'exemple suivant :

> « *Et ainsi le nombre, par exemple, 21, qui dans le Triangle arithmétique se trouve dans le troisième rang parallèle, et dans le sixième rang perpendiculaire, étant considéré entre les ordres numériques, il sera du troisième ordre, et le sixième de son ordre [...]* [50]. »

Ce qui revient à dire que le nombre 21, correspondant dans le « triangle arithmétique » au nombre que l'on note désormais C_7^2, est aussi le sixième nombre d'ordre trois, que nous avons noté $V_6^{(3-2)} = V_6^{(1)}$. On a bien dans ce cas : $V_6^{(1)} = C_{6+1}^{1+1}$.
Pascal en conclut :

> « *Ce qui fait connaître que tout ce qui a été dit des rangs et des cellules du Triangle arithmétique convient exactement aux ordres des nombres, et que les mêmes égalités et les mêmes proportions qui ont été remarquées aux uns se trouveront aussi aux autres ; il ne faudra seulement que changer les énonciations, en substituant les termes qui conviennent aux ordres numériques [...]* [51]. »

L'apport de Pascal consiste ainsi dans sa mise en évidence explicite du lien étroit existant entre les sommes itérées d'entiers et le « triangle arithmétique ». On peut même dire que son originalité quant à ce problème ne se trouve que dans cette mise en évidence. En effet, non seulement une méthode de calcul des sommes itérées fut, nous l'avons vu, obtenue en Inde dès le XIV^e^ siècle, mais le fameux « triangle » y fut connu bien plus tôt encore puisqu'on peut

---

[49] [B. Pascal, 1665, rééd. 1963, pp. 54-55].
[50] [B. Pascal, 1665, rééd. 1963, pp. 55].
[51] [B. Pascal, 1665, rééd. 1963, pp. 55].

en lire une description explicite dans l'œuvre du mathématicien indien Halāyudha avant la fin du XIe siècle[52], le dénombrement des combinaisons de p éléments pris parmi n ayant quant à lui été déterminé au moins dès l'œuvre de Bhāskara II [53]. Aucun Indien ne mentionna toutefois le lien existant entre les problèmes que Pascal a rapprochés.

[52] On en trouvera une traduction en anglais dans [A.K. Bag, 1979, pp. 190-191] par exemple.
[53] [*Līlāvatī, 110-113,* in Colebrooke, 1892, rééd. 1927, pp. 71-73].

Annexe 11
Le développement en fraction continue généralisée de la série « de Mādhava-Leibniz »[54]

Nous désignons par série « de Mādhava-Leibniz » la série de terme général $\frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}$.

Elle converge vers $\frac{\pi}{4}$ (voir par exemple l'annexe 13).

Pour tout $n \in N^*$, nous notons $\rho_n = (-1)^n \left[\frac{\pi}{4} - S_n \right]$, où $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{2p-1}$.

Nous avons affirmé au chapitre 6 que, pour tout $n \in N^*$, ρ_n admet pour développement en fraction continue généralisée :

$$\boxed{\rho_n = \cfrac{1/2}{2n + \cfrac{1^2}{2n + \cfrac{2^2}{2n + \cfrac{3^2}{2n + \dots}}}}}$$

Nous proposons ici une démonstration de ce résultat.

Remarquons d'abord que, pour tout $n \in N^*$:

$$\rho_n + \rho_{n+1} = (-1)^n \left[\left(\frac{\pi}{4} - S_n \right) - \left(\frac{\pi}{4} - S_{n+1} \right) \right] = (-1)^n \left[S_{n+1} - S_n \right] = (-1)^n \times \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Donc :

$$\rho_n + \rho_{n+1} = \frac{1}{2n+1} \qquad (1)$$

Nous affirmons que $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est l'unique suite convergente vérifiant (1).

En effet, soit $(r_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que $r_n + r_{n+1} = \frac{1}{2n+1}$ pour tout $n \in N^*$.

Posons $v_n = r_n - \rho_n$. Il est clair que $v_n + v_{n+1} = 0$ pour tout $n \in N^*$.

Donc $v_n = (-1)^{n-1} v_1$ pour tout $n \in N^*$.

Il en résulte que $r_n = \rho_n + (-1)^{n-1} v_1$ pour tout $n \in N^*$.

Par conséquent, $(r_n)_{n\geq 1}$ converge $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} v_1$ existe $\Leftrightarrow$ $v_1 = 0$ $\Leftrightarrow$ $\forall n \in N^*,\ r_n = \rho_n$.

Supposons maintenant qu'il existe une suite $(a_k)_{k\in N}$ telle que, pour tout $n \in N^*$:

$$\rho_n = \cfrac{a_0}{n + \cfrac{a_1}{n + \cfrac{a_2}{n + \dots}}}.$$

Pour tout $k \in N$, notons :

[54] Voir la page 72.

$$F_n^k = \cfrac{a_k}{n + \cfrac{a_{k+1}}{n + \cfrac{a_{k+2}}{n + ...}}}.$$

Pour tout $k \in N$, $\frac{a_k}{n}$ est un équivalent de F_n^k lorsque n est voisin de $+\infty$.

Donc $\lim_{n\to+\infty} F_n^k = 0$.

Par ailleurs, l'identité (1) permet d'écrire que la suite $(a_k)_{k\in N}$ doit nécessairement vérifier :

$$\text{Pour tout } n \in N^* : \frac{a_0}{n + F_n^1} + \frac{a_0}{(n+1) + F_{n+1}^1} = \frac{1}{2n+1}.$$

Après réduction au même dénominateur, on obtient :

$$(n + F_n^1)(n + 1 + F_{n+1}^1) = a_0(2n+1)(2n+1+F_n^1 + F_{n+1}^1).$$

D'où, en ordonnant et en divisant par n la relation obtenue :

$$(1-4a_0)n + [(1-4a_0) + (1-2a_0)(F_n^1 + F_{n+1}^1)] + \frac{1}{n}[(1-a_0)F_n^1 - a_0F_{n+1}^1 + F_n^1F_{n+1}^1 - a_0] = 0.$$

Puisque $\lim_{n\to+\infty} F_n^1 = \lim_{n\to+\infty} F_{n+1}^1 = 0$, il est donc nécessaire que $1 - 4a_0 = 0$, soit :

$$a_0 = \frac{1}{4}.$$

L'identité précédente devient par conséquent :

$$2n(F_n^1 + F_{n+1}^1) + 3F_n^1 - F_{n+1}^1 + 4F_n^1F_{n+1}^1 - 1 = 0 \qquad (2)$$

Or, pour tout $n \in N^*$: $F_n^1 = \frac{a_1}{n + F_n^2}$ et $F_{n+1}^1 = \frac{a_1}{(n+1) + F_{n+1}^2}$.

En reportant dans (2), on obtient donc, après réduction au même dénominateur :

$$2na_1(n + F_n^2) + 2na_1(n+1+F_{n+1}^2) - (n + F_n^2)(n+1+F_{n+1}^2) + 3a_1(n+1+F_{n+1}^2) - a_1(n+F_n^2) + 4a_1^2 = 0$$

D'où, après avoir ordonné et divisé par n la relation obtenue :

$$(1-4a_1)n + [(1-4a_1) + (1-2a_1)(F_n^2 + F_{n+1}^2)] + \frac{1}{n}[(1+a_1)F_n^2 - 3a_1F_{n+1}^2 + F_n^2F_{n+1}^2 - 4a_1^2 - 3a_1] = 0.$$

Il résulte ensuite de $\lim_{n\to+\infty} F_n^2 = \lim_{n\to+\infty} F_{n+1}^2 = 0$ que $1 - 4a_1 = 0$ nécessairement. D'où :

$$a_1 = \frac{1}{4}.$$

En reportant cette valeur dans l'égalité précédente, on obtient alors :

$$2n(F_n^2 + F_{n+1}^2) + 5F_n^2 - 3F_{n+1}^2 + 4F_n^2F_{n+1}^2 - 4 = 0 \qquad (3)$$

Pour tout entier non nul k distinct de 1, notons maintenant (H_k) l'hypothèse de récurrence :

$$a_{k-1} = \frac{(k-1)^2}{4} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1,\ 2n(F_n^k + F_{n+1}^k) + (2k+1)F_n^k - (2k-1)F_{n+1}^k + 4F_n^kF_{n+1}^k - k^2 = 0.$$

Nous avons vu que (H_2) est vraie.
Un entier non nul k distinct de 1 étant donné, supposons que (H_k) est vraie.
En utilisant $F_n^k = \dfrac{a_k}{n + F_n^{k+1}}$ et $F_{n+1}^k = \dfrac{a_k}{(n+1) + F_{n+1}^{k+1}}$, on obtient :

$$2na_k(n + F_n^{k+1}) + 2na_k(n+1+F_{n+1}^{k+1}) - k^2(n + F_n^{k+1})(n+1+F_{n+1}^{k+1}) + (2k+1)a_k(n+1+F_{n+1}^{k+1}) - (2k-1)a_k(n + F_n^{k+1}) + 4a_k^{\,2} = 0$$

D'où, après avoir développé, ordonné et divisé par n la relation obtenue :

$$(k^2 - 4a_k)n + [(k^2 - 4a_k) + (k^2 - 2a_k)(F_n^{k+1} + F_{n+1}^{k+1})] + \frac{1}{n}[(k^2 + (2k-1)a_k)F_n^{k+1} - (2k+1)a_kF_{n+1}^{k+1} + k^2F_n^{k+1}F_{n+1}^{k+1} - 4a_k^{\,2} - (2k+1)a_k] = 0$$

Il résulte alors de $\lim\limits_{n\to+\infty} F_n^{k+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} F_{n+1}^{k+1} = 0$ que nécessairement : $k^2 - 4a_k = 0$. On en déduit :

$$a_k = \frac{k^2}{4}$$

L'identité précédente devient alors :

$$2n(F_n^{k+1} + F_{n+1}^{k+1}) + (2k+3)F_n^{k+1} - (2k+1)F_{n+1}^{k+1} + 4F_n^{k+1}F_{n+1}^{k+1} - (k+1)^2 = 0\,.$$

Ceci montre que (H_{k+1}) est vraie.
Par récurrence, (H_k) est donc vraie pour tout $k \geq 2$.
Il en résulte que nécessairement :

$$a_k = \frac{k^2}{4} \text{ pour tout } k \in N^*.$$

Si ρ_n admet un développement en fraction continue du type proposé, celui-ci ne peut donc être que $\cfrac{1/4}{n + \cfrac{1^2/4}{n + \cfrac{2^2/4}{n + \cfrac{3^2/4}{n + \dots}}}}$. Soit encore : $\cfrac{1/2}{2n + \cfrac{1^2}{2n + \cfrac{2^2}{2n + \cfrac{3^2}{2n + \dots}}}}$.

Réciproquement, le développement en fraction continue généralisée précédent vérifie par construction la relation (1). Comme il converge (vers 0) lorsque *n* tend vers l'infini, le fait que $(\rho_n)_{n\geq 1}$ est l'unique suite convergente vérifiant (1) montre que ce développement est bien celui de ρ_n.

Annexe 12
Un algorithme général de construction de séries à convergence accélérée. Applications à la série « de Mādhava-Leibniz »[55].

Nous avons examiné au chapitre 6, par l'intermédiaire des commentaires de l'astronome keralais Śānkara, de quelle manière probable deux « développements en séries » donnant la circonférence d'un cercle en fonction de son rayon ont été déterminés par l'école de Mādhava. Nous nous proposons ici de montrer comment cette méthode peut être généralisée. Cette généralisation pourrait faire l'objet d'un problème de 1[er] cycle universitaire, au sein duquel elle serait ensuite appliquée par exemple à la série « de Mādhava-Leibniz », ceci en liaison éventuelle avec la démonstration effectuée à l'annexe 11.

A l'issue de cette démonstration, nous illustrerons cette méthode en déterminant une série convergeant vers π très rapidement, série mentionnée à la fin du chapitre 6 (p. 79) et qui s'inscrit logiquement dans la continuité des travaux de l'école de Mādhava.

Enfin, nous comparerons numériquement les accélérations de convergence induites par les séries construites à partir de la série « de Mādhava-Leibniz » à l'aide de cet algorithme.

Une méthode générale de construction de séries à convergence accélérée.

Rappelons d'abord que, si (S_n) est une suite convergeant vers un réel φ, on dit qu'une suite (S_n') converge vers φ plus rapidement que (S_n) si $\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi - S_n'}{\varphi - S_n} = 0$.

Une suite $(u_n)_{n\geq 1}$ à termes réels étant donnée telle la série de somme partielle $S_n = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} u_p$ converge vers φ, on cherche ici à construire une série convergeant vers φ plus rapidement que (S_n), dans le cas où l'on dispose d'un équivalent asymptotique R_n de $\rho_n = (-1)^n(\varphi - S_n)$.

Ce problème peut d'abord être étudié de manière « constructive ».

Posons $S_n' = S_n + (-1)^n R_n$ où R_n est un tel équivalent asymptotique. Supposons ensuite qu'il existe une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ telle que $S_n' = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} v_p$ pour tout $n \geq 1$.

Alors, d'une part :

$$S_{n+1}' - S_n' = (-1)^n v_{n+1}.$$

D'autre part :

$$S_{n+1}' - S_n' = (S_{n+1} - S_n) + (-1)^{n+1} R_{n+1} - (-1)^n R_n = (-1)^n [u_{n+1} - (R_{n+1} + R_n)].$$

On a donc nécessairement : $v_n = u_n - (R_n + R_{n-1})$ pour tout $n \geq 2$.

Par ailleurs, $S_1' = v_1 = S_1 - R_1 = u_1 - R_1$. D'où finalement :

[55] Voir la page 77.

$$S_n' = u_1 - R_1 + \sum_{p=2}^{n}(-1)^{p-1}[u_p - (R_p + R_{p-1})] = u_1 - R_1 + \sum_{q=1}^{n-1}(-1)^{q-1}[(R_{q+1} + R_q) - u_{q+1}].$$

En désignant par « qualité » d'un équivalent asymptotique R_n de ρ_n la quantité $\left|\frac{R_n}{\rho_n} - 1\right|$, nous pouvons plus précisément énoncer :

> Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite à termes réels, telle que la série de somme partielle $S_n = \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}u_p$ converge vers un réel φ.
>
> On note $\rho_n = (-1)^n(\varphi - S_n)$ pour tout $n \geq 1$.
>
> Soient $(R_n)_{n\geq 1}$ une suite de limite nulle, $(S_n')_{n\geq 1}$ la suite de terme général $S_n' = S_n + (-1)^n R_n$, $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général $v_n = (R_n + R_{n+1}) - u_{n+1}$ et $(S_n'')_{n\geq 1}$ la suite de terme général $S_n'' = (u_1 - R_1) + \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}v_p$. Alors :
>
> a) Les suites $(S_n')_{n\geq 1}$ et $(S_n'')_{n\geq 1}$ convergent vers φ.
>
> b) La suite $(S_n')_{n\geq 1}$ converge vers φ plus rapidement que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ si et seulement si R_n est un équivalent asymptotique de ρ_n.
>
> c) Si R_n est un équivalent asymptotique de ρ_n, alors $(S_n'')_{n\geq 1}$ converge vers φ plus rapidement que $(S_n)_{n\geq 1}$ en proportion de la « qualité » de R_n

En effet, il est clair que $\lim_{n\to+\infty} S_n' = \varphi$.

De plus, pour tout $n \geq 1$:

$$S_n'' = (u_1 - R_1) + \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}v_p = (u_1 - R_1) + \sum_{p=1}^{n}(-1)^{p-1}(R_p + R_{p+1} - u_{p+1})$$
$$= \sum_{p=1}^{n+1}(-1)^{p-1}u_p + \sum_{p=1}^{n}(-R_p + R_p) + (-1)^{n-1}R_{n+1}.$$

Donc $S_n'' = S_{n+1} + (-1)^{n-1}R_{n+1} = S_{n+1}'$ pour tout $n \geq 1$.

Par conséquent : $\lim_{n\to+\infty} S_n'' = \lim_{n\to+\infty} S_{n+1}' = \varphi$. D'où a).

D'autre part, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{\varphi - S_n'}{\varphi - S_n} = \frac{S_n + (-1)^n\rho_n - S_n - (-1)^n R_n}{S_n + (-1)^n\rho_n - S_n} = \frac{\rho_n - R_n}{\rho_n} = 1 - \frac{R_n}{\rho_n}.$$

Donc (S_n') converge plus vite que (S_n) si et seulement si $\lim_{n\to+\infty}\frac{R_n}{\rho_n} = 1$. D'où b).

Enfin, supposons que R_n soit un équivalent asymptotique de ρ_n : il existe une suite (ε_n) de limite nulle telle que $R_n = (1+\varepsilon_n)\rho_n$ pour tout $n \geq 1$.

Comme $\varphi = S_{n+1} + (-1)^{n+1}\rho_{n+1}$, on a alors, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}\left|S_n''-\varphi\right| = \left|\left[S_{n+1}-\varphi\right]+(-1)^{n-1}R_{n+1}\right| &= \left|\left[S_{n+1}-\varphi\right]+(-1)^{n-1}(1+\varepsilon_{n+1})\rho_{n+1}\right| \\ &= \left|\left[S_{n+1}-\varphi\right]+(-1)^{2n}(1+\varepsilon_{n+1})(\varphi-S_{n+1})\right| \\ &= \left|\varepsilon_{n+1}\right|\times\left|S_{n+1}-\varphi\right|.\end{aligned}$$

Il en résulte immédiatement que (S_n'') converge vers φ plus rapidement que (S_n), et ce en proportion de la « qualité » de l'équivalent asymptotique R_n. D'où c).

Une application à la série « de Mādhava-Leibniz »

La série « de Mādhava -Leibniz » correspond au cas où $u_n = \frac{1}{2n-1}$: c'est la série de somme partielle $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{2p-1}$. Nous avons vu au chapitre 6 et démontré à l'annexe 11 que cette série converge vers $\frac{\pi}{4}$ et que $R_n^{(3)} = \cfrac{1}{4n+\cfrac{1}{n+\cfrac{1}{n}}} = \frac{n^2+1}{(4n^2+5)n}$ est un équivalent asymptotique de $\rho_n = (-1)^n(\frac{\pi}{4}-S_n)$. Appliquons à cet équivalent l'algorithme exposé plus haut :

On a d'abord : $u_1 - R_1^{(3)} = 1-\frac{2}{9} = \frac{7}{9}$.

Puis, pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}v_n = R_n^{(3)} + R_{n+1}^{(3)} - u_{n+1} &= \frac{n^2+1}{(4n^2+5)n} + \frac{(n+1)^2+1}{[4(n+1)^2+5](n+1)} - \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{8n^5+20n^4+34n^3+31n^2+27n+9}{n(n+1)(4n^2+5)(4n^2+8n+9)} - \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{9}{n(n+1)(2n+1)(4n^2+5)(4n^2+8n+9)}.\end{aligned}$$

Le théorème énoncé plus haut permet d'en déduire immédiatement :

$$\frac{\pi}{4} = \frac{7}{9} + \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1} \frac{9}{p(p+1)(2p+1)(4p^2+5)(4p^2+8p+9)}.$$

Soit encore :

$$\boxed{\pi = \frac{28}{9} + 36\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p(p+1)(2p+1)(4p^2+5)(4p^2+8p+9)}.}$$

Une comparaison numérique des accélérations de convergence induites par les séries déduites des « termes correcteurs » énoncés par Śānkara.

Nous nous limitons ici à la comparaison numérique des convergences respectives de la série déterminée au paragraphe précédent et des deux séries analogues déjà discutées au chapitre 6.

Compte tenu du lien établi au cours de la démonstration du théorème étudié au premier paragraphe entre ces séries et les suites dont le terme général est obtenu par l'addition respective des termes correcteurs $R_n^{(1)}$, $R_n^{(2)}$ et $R_n^{(3)}$ aux sommes partielles de la série « de Mādhava-Leibniz », l'étude numérique qui suit vaut aussi pour ces suites (à une translation d'un rang près)[56].

Si l'on note :

$$a_n = 3 + 4\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{(2p+1)^3 - (2p+1)} \quad ;$$

$$b_n = 16\sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^{p}}{(2p+1)^5 + 4(2p+1)} \quad ;$$

et $$c_n = \frac{28}{9} + 36\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p-1}}{p(p+1)(2p+1)(4p^2+5)(4p^2+8p+9)} \ ,$$

on obtient (les caractères gras correspondant aux décimales correctes de π) :

	Suite (a_n)	Suite (b_n)	Suite (c_n)
$n = 2$	**3,1**333333333333	**3,1**372549019608	**3,1414**634146341
$n = 3$	**3,14**52380952382	**3,14**23423423424	**3,141**6149068323
$n = 4$	**3,1**396825396626	**3,141**391941392	**3,1415**873015673
$n = 5$	**3,14**27128427129	**3,141**6627377024	**3,1415**942744802
$n = 10$	**3,141**4067184965	**3,14159**02423789	**3,1415926**266579
$n = 11$	**3,141**7360992607	**3,14159**41599212	**3,1415926**683944
$n = 20$	**3,1415**657346587	**3,141592**5761871	**3,14159265**32636
$n = 21$	**3,141**6160719183	**3,141592**7142891	**3,14159265**38114
$n = 40$	**3,1415**890289487	**3,14159265**11543	**3,14159265358**7
$n = 41$	**3,14159**60255683	**3,14159265**57431	**3,1415926535**923
$n = 70$	**3,14159**19552651	**3,141592653**4413	**3,1415926535897**
$n = 71$	**3,14159**33232242	**3,141592653**7284	**3,141592653589**8

L'évaluation déjà évoquée du rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre attribuée à Mādhava, à savoir $\frac{2827433388233}{900000000000} \approx$ **3,1415926535**922, correspond sensiblement à c_{41}, c'est-à-dire encore à $S_{42} + R_{42}^{(3)}$. Il est possible qu'elle ait en fait été déterminée en considérant les suites formées par les moyennes arithmétiques de deux termes consécutifs de chacune de ces trois suites : ces « suites moyennes » convergent encore plus vite[57].

56 Avec les notations utilisées dans l'énoncé du théorème, nous avons établi au cours de sa démonstration la relation valable pour tout entier naturel non nul n : $S_n'' = S_{n+1}'$.

57 [E. Baltz, L. Bigiaoui, 2002, p. 12].

Annexe 13
Série « de Mādhava-Leibniz » et approximations de π en classe de Terminale S[58]

Le problème consistant à démontrer que la série de « Mādhava-Leibniz » converge vers $\frac{\pi}{4}$ est classique en classe de Terminale S. Aussi la première partie du problème que nous proposons ci-dessous n'est-elle guère originale. Par contre, la lenteur de convergence de cette série la rendant impropre à la détermination de bonnes approximations de π, les manuels se limitent à la démonstration de cette convergence. Aucun d'entre eux n'étudie le problème consistant à évaluer le reste des sommes partielles afin de compenser cette lenteur de convergence. Or, une telle évaluation, comme nous l'avons vu au chapitre 6 et à l'annexe 12, permet d'obtenir de façon rapide d'excellentes approximations de π. L'objet des parties suivantes de ce problème est de déterminer deux équivalents asymptotiques du reste et de montrer qu'elles correspondent aux deux premiers équivalents donnés par l'école de Mādhava. Cette étude est à notre avis non seulement possible, mais aussi très intéressante dans le cadre de la classe de Terminale S. En effet, elle met en œuvre de nombreux acquis du cours d'analyse, tels que l'intégration par parties, la dérivation de fonctions composées, le calcul de limites et les encadrements de fonctions et d'intégrales. Elle permet de plus de comparer la vitesse de convergence de plusieurs suites, problème dont l'importance est bien connue.

Problème

On se propose ici d'étudier, dans une première partie, la convergence de la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ de terme général : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$. Il s'agira ensuite d'étudier dans quelle mesure on peut se servir de cette suite afin d'obtenir rapidement des approximations du nombre π.

Partie I

1) a) Démontrer que, pour tout $n \in N^*$ et tout $x \in R$:

$$1 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1+x^2} + (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in N^*$:

$$S_n - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx.$$

2) Pour $n \in N^*$, on note : $\rho_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}\,dx$.

a) Justifier que, pour tout $n \in N^*$ et tout $x \in [0;1]$: $0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in N^*$: $0 \leq \rho_n \leq \frac{1}{2n+1}$. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \rho_n = 0$.

[58] Voir la page 76.

c) Justifier que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge et que :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\,.$$

3) Soit F la fonction définie par : $F(t) = \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\,dx$.

a) Justifier que F est définie et dérivable sur R. Calculer $F'(t)$ pour tout réel t.

b) Pour tout $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$, on pose : $u(t) = F(\tan(t))$. Montrer que u est dérivable sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa dérivée u'.

c) Calculer $u(0)$. En déduire que $u(t) = t$ pour tout $t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right[$.

d) Calculer $F(1)$.

4) Déduire de 1) et 2) que : a) $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{4}.}$

b) Pour tout $n \in N^*$: $\boxed{4S_n + (-1)^n \times 4\rho_n = \pi\,.}$

5) Donner les valeurs approchées à 10^{-9} près de $4S_{10}$, $4S_{20}$, $4S_{30}$ et $4S_{40}$. Que peut-on dire de la limite et de la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ de terme général $u_n = 4S_n$?

Partie II

On se propose ici de déterminer, en fonction de *n*, une approximation rationnelle de ρ_n pour les grandes valeurs de *n*, puis de s'en servir afin de définir une suite convergeant plus rapidement que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

1) a) En utilisant une intégration par parties, démontrer que, pour tout $n \in N^*$:

$$4n\rho_n = \frac{2n}{2n+1} + \frac{8n}{2n+1}\int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{(1+x^2)^2}dx\,.$$

b) Par une méthode analogue à celle utilisée au I-2), démontrer que :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{(1+x^2)^2}\,dx = 0\,.$$

c) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} 4n\rho_n = 1$ et que $\boxed{\rho_n \approx \frac{1}{4n} \text{ lorsque } n \text{ est grand.}}$ [59]

2) On note $(v_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général : $v_n = 4S_n + (-1)^n \times 4 \times \frac{1}{4n} = 4S_n + \frac{(-1)^n}{n}$.

a) Quelle est la limite de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$? En utilisant I-4), I-5) et II-1), comparer *a priori* la vitesse de convergence de cette suite à celle de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

---

[59] La notation $\approx$ pouvant se limiter ici à désigner une égalité approximative, sans la nuance que nous y avons mise dans notre synthèse.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-9} près de v_{10}, v_{20}, v_{30} et v_{40}. Comparer ces résultats à ceux obtenus au I-5). Sont-ils conformes à ce qui a été conjecturé au a) ?

Partie III

On se propose ici de déterminer une approximation rationnelle de ρ_n pour les grandes valeurs de *n* meilleure que celle déterminée dans la partie II, puis de l'utiliser afin de construire une suite convergeant plus rapidement encore que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$.

1) Démontrer que, pour tout $n \in N^*$: $\frac{1}{4n} - \rho_n = \int_0^1 x^{2n-1} \frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)} dx$.

On pourra commencer par remarquer que : $\frac{1}{4n} = \int_0^1 \frac{x^{2n-1}}{2} dx$.

2) En utilisant trois intégrations par parties, démontrer les égalités successives suivantes, pour tout $n \geq 1$:

$$16n^3 \int_0^1 x^{2n-1} \frac{(x-1)^2}{2(x^2+1)} dx = 8n^2 \int_0^1 x^{2n} \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} dx$$

$$= \frac{16n^2}{2n+1} \int_0^1 x^{2n+2} \frac{3-x^2}{(x^2+1)^3} dx$$

$$= \frac{4n^2}{(2n+1)(2n+3)} + \frac{64n^2}{(2n+1)(2n+3)} \int_0^1 x^{2n+4} \frac{5-x^2}{(x^2+1)^4} dx.$$

3) On note f la fonction définie sur R par : $f(x) = \frac{5-x^2}{(x^2+1)^4}$.

a) Démontrer que f est dérivable sur R et que : $f'(x) = \frac{6x(x^2-7)}{(x^2+1)^5}$.

b) Déduire des variations de f sur $[0;1]$ que : $\frac{1}{4} \leq f(x) \leq 5$ pour tout $x \in [0;1]$.

c) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{16n^2}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} \leq \frac{64n^2}{(2n+1)(2n+3)} \int_0^1 x^{2n+4} \frac{5-x^2}{(x^2+1)^4} dx \leq \frac{320n^2}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}.$$

4) a) Déduire de 1), 2) et 3) que : $\lim_{n\to+\infty} 16n^3(\frac{1}{4n} - \rho_n) = 1$.

Justifier alors l'existence d'une fonction ε_1 de limite nulle en l'infini telle que :

$$\rho_n = (\frac{1}{4n} - \frac{1}{16n^3}) + \frac{1}{n^3}\varepsilon_1(n).$$

b) Démontrer qu'il existe une fonction ε_2 (que l'on explicitera) de limite nulle en l'infini et telle que :

$$\frac{1}{4n + \frac{1}{n}} - (\frac{1}{4n} - \frac{1}{16n^3}) = \frac{1}{n^4}\varepsilon_2(n).$$

c) En déduire qu'il existe une fonction ε de limite nulle en l'infini telle que :

$$\rho_n = \frac{1}{4n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n^3}\varepsilon(n).$$

d) Justifier l'assertion suivante :

$\rho_n \approx \dfrac{1}{4n + \frac{1}{n}}$ lorsque n est grand, cette approximation étant meilleure que $\dfrac{1}{4n}$.

5) On note $(w_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général : $w_n = 4S_n + (-1)^n \times 4\dfrac{1}{4n + \frac{1}{n}} = 4S_n + \dfrac{(-1)^n}{n + \frac{1}{4n}}$.

a) Quelle est la limite de la suite $(w_n)_{n\geq 1}$? En utilisant I-4), II-2) et III-4), comparer *a priori* la vitesse de convergence de cette suite à celle de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$.

b) Donner une valeur approchée à 10^{-9} près de w_{10}, w_{20}, w_{30} et w_{40}. Comparer ces résultats à ceux obtenus au II-2). Sont-ils conformes à ce qui a été conjecturé au a) ?

<u>Remarque</u> : on peut établir de meilleures approximations de ρ_n et en déduire des suites qui convergent encore plus rapidement que $(w_n)_{n\geq 1}$.

Ainsi en est-il de la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de terme général : $x_n = 4S_n + \dfrac{(-1)^n}{n + \dfrac{1}{4n + \frac{4}{n}}}$.

On pourra calculer x_{10}, x_{20}, x_{30} et x_{40} pour s'en convaincre.

Annexe 14

Le développement en série entière du sinus et du cosinus : une formalisation moderne de l'algorithme mis en œuvre par l'école de Mādhava, sous la forme d'un problème destiné aux classes de Terminale S ou de 1^er cycle scientifique[60].

Le problème concernant le développement en série entière des fonctions sinus et cosinus n'est en général pas traité en classe de Terminale S. On trouve néanmoins proposé dans plusieurs manuels celui qui concerne le développement en série entière de la fonction exponentielle de base *e*, qui recourt à une démonstration, dans le cas particulier de cette fonction, de la formule dite de Taylor avec reste intégral. Un problème analogue pourrait donc être proposé dans ces classes en thème d'étude avec les fonctions sinus et cosinus.

Nous proposons ici une approche légèrement différente qui s'inspire largement de l'algorithme exposé au dernier chapitre, par lequel Jyesthadeva justifie ces développements. Cette approche, fondée sur l'idée d'intégrations successives, a plusieurs intérêts. Elle nécessite tout d'abord une claire compréhension de la notion de variable muette et du lien entre intégrale et primitive, met en œuvre plusieurs raisonnements par récurrence et pose le problème de la convergence vers 0 du reste d'une série, question qui nécessite de recourir à la définition de la convergence d'une suite et de la mettre en œuvre avec habileté. La méthode proposée permet en outre de donner pleinement un sens au terme d'« intégration » d'une équation différentielle. Il s'agit en effet de déterminer la solution f de l'équation différentielle $y'' = -y$ vérifiant les conditions $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, chaque double intégration des deux termes de l'équation donnant un terme du développement en série de la solution. On remarquera à cet égard que cette méthode peut être appliquée de manière plus aisée à la fonction exponentielle de base *e*, puisque celle-ci est solution d'une équation d'ordre 1.

Il est probable toutefois que ce problème convient plus particulièrement aux élèves de 1^er cycle scientifique, compte tenu en particulier de la maîtrise du calcul intégral qu'il suppose.

Problème

Partie I

Soient x un réel strictement positif et $(u_n)_{n\in N}$ la suite de terme général : $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$.

1) a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

   b) En déduire qu'il existe un entier p tel que, pour tout $n \geq p$: $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{1}{2}$.

2) a) Démontrer que, pour tout $n \geq p+1$: $0 < u_n < (\frac{1}{2})^{n-p} u_p$.

   b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

3) Le résultat établi précédemment demeure-t-il valable si $x \leq 0$?

[60] Voir la page 108.

Partie II

Un réel x étant donné, on définit par récurrence la suite $(I_n(x))_{n\geq 1}$ de la façon suivante :

$$I_1(x) = \int_0^x \sin(t)dt \quad \text{et, pour tout } n \geq 1 : \; I_{n+1}(x) = \int_0^x I_n(t)dt .$$

On définit aussi par récurrence la suite $(J_n(x))_{n\geq 1}$ par :

$$J_1(x) = \int_0^x tdt \quad \text{et, pour tout } n \geq 1 : \; J_{n+1}(x) = \int_0^x J_n(t)dt .$$

1) Justifier que ces suites sont bien définies quel que soit le choix de x.
2) a) Démontrer que $\sin(x) - x = -I_2(x)$.
   b) En remarquant que, pour tout réel t, $\sin(t) = t + [\sin(t) - t]$, démontrer en utilisant a) que : $I_2(x) = J_2(x) - I_4(x)$.
   c) En déduire que : $\sin(x) - x = -J_2(x) + I_4(x)$.
3) a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$: $I_n(x) = J_n(x) - I_{n+2}(x)$.
   b) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$: $\sin(x) - x = [\sum_{k=1}^{n}(-1)^k J_{2k}(x)] + (-1)^{n+1} I_{2n+2}(x)$.
4) a) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$: $J_n(x) = \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.
   b) En déduire que, pour tout $n \geq 1$: $\sin(x) = [x + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}] + (-1)^{n+1} I_{2n+2}(x)$.
5) On suppose ici que x est positif.
   a) Démontrer que, pour tout $n \geq 2$: $-J_{n-1}(x) \leq I_n(x) \leq J_{n-1}(x)$.
   b) En déduire que : $\lim_{n\to+\infty} I_n(x) = 0$.
6) Justifier que, pour tout réel x : $\sin(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Partie III

1) En utilisant II-3)b), démontrer que, pour tout réel x et tout entier naturel non nul n :
   $\cos(x) = [1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}] + (-1)^{n+1} I_{2n+1}(x)$.
2) En déduire que, pour tout réel x : $\cos(x) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!}$.

Bibliographie

Bag A.K., *Mathematics in ancient and medieval India*, Varanasi, Chaukhamba Orientalia, 1979.

Baltz E., Bigiaoui L., « Une formule de Ramanujan », *Quadrature*, 45, 2002, pp. 7-14.

al Bīrūnī, *Kitābu'l Hind*, traduction en anglais (al Bīrūnī's *India*) par Q. Ahmad, New Delhi, National Book Trust, 1992.

Chabert J.L. et *alii*, *Histoire d'algorithmes*, Paris, Belin, 1994.

Colebrooke, *Translation of the Līlāvatī*, (1892), Second edition (with notes by H.C. Banerji), Calcutta, The book company, 1927.

Datta B., « Hindu values of π », *Journal of the Asiatic Society of Bengal*, 22, 1926, pp. 25-42.

Datta B., Singh A.N., *History of Hindu mathematics* (2 vol.), Bombay, Asia Publishing House, 1962.

Datta B., Singh A.N., « Hindu trigonometry », *Indian Journal of History of Science*, 18, 1983, pp. 39-108.

Dumont L., *Homo Hierarchicus*, Paris, Gallimard (édition « Tel »), 1980.

Edwards Jr. C.H., *The historical development of the calculus*, New York, Springer, 1979.

Encyclopaedia Universalis, Paris, 1980.

Euler L., « Consideratio progressionis cuiusdam ad circuli quadraturam inveniendam ideoneae », *Commentarii Academiae Petropolitanae ad annum*, 11, 1750, pp. 116-127, in *Oeuvres Leonhardi Euleri Opera Omnia*, éd. Boehm C., Faber G., Leipzig, Berlin, Teubner, 1924, série 1, t. 14, pp. 350-363.

Gold D., Pingree D., « A hitherto unknown Sanskrit work concerning Mādhava's derivation of the power series for Sine and Cosine », *Historia Scientarum*, 42, 1991, pp. 49-65.

Gupta R.C., « Bhāskara I's approximation to Sine », *Indian Journal of History of Science*, 2, n°2, 1967, pp. 121-136.

Gupta R.C., « Second order interpolation in Indian mathematics up to the fifteenth century », *Indian Journal of History of Science*, 4, n°1 & 2, 1969, pp. 86-98.

Gupta R.C., « Early Indians on second order Sine differences », *Indian Journal of History of Science*, 7, 1972, pp. 81-86.

Gupta R.C., « Mādhava's power series computation of the Sine », *Ganita*, 27, n°1-2, 1976, pp. 19-24.

Gupta R.C., « On derivation of Bhāskara I's formula for the Sine », *Ganita Bhāratī*, 8, n°1-4, 1986, pp. 39-41.

Gupta R.C., « On the remainder term in the Mādhava-Leibniz's series », *Ganita Bhāratī*, 14, n°1-4, 1992, pp. 68-71.

Hayashi T., Kusuba T., Yano M., « The correction of the Mādhava series for the circumference of a circle », *Centaurus*, 33, 1990, pp. 149-174.

Ifrah G., *Histoire universelle des chiffres*, 2 vol., Paris, Laffont, 1981.

Keller A., *Un commentaire indien du VIIème siècle, Bhāskara et le ganita-pāda de l'Āryabhatīya*, 2 vol., thèse de doctorat, Université Paris VII, 2000.

Kulkarni R.P., *Geometry according to Śulba Sūtra*, Pune, Vaidika Samśodhana Mandala, 1983.

Marar M., Rajagopal C.T., « On the Hindu quadrature of the circle », *Journal of the Bombay branch of the Royal Asiatic society*, 20, 1944, pp. 66-68.

Pandit M.D., *Mathematics as known to the Vedic Samhitās*, Delhi, Sri Satguru Publications, Indian Book Center, 1993.

Pascal B., *Oeuvres complètes*, Paris, Seuil, 1963.

Pingree D., *Census of the exact sciences in Sanskrit*, American Philosophical Society, Philadelphia, Series A : vol. 1-4, 1970-1981.

Pingree D., « Power series in medieval Indian trigonometry », *Proceedings of the South Asia seminar II*, University of Pennsylvania, pp. 25-30.

Plofker K., « An example of the secant method of iterative approximation in a fifteenth-century Sanskrit text », *Historia Mathematica*, 23, 1996, pp. 246-256.

Plofker K., « The "error" in the Indian "Taylor series approximation" to the Sine », *Historia Mathematica*, 28, 2001, pp. 283-295.

Rajagopal C.T., Aiyar T.V.V., « On the Hindu proof of Gregory's series », *Scripta Mathematica*, 17, n°1-2, 1951, pp. 65-74.

Rajagopal C.T., Rangachari M.S. « On an untapped source of medieval Keralese mathematics », *Archive for History of Exact Sciences*, 35, 1986, pp. 91-99.

Rajagopal C.T., Venkataraman A., « The Sine and Cosine power series in Hindu mathematics », *Journal of the Asiatic Society of Bengal*, 15, 1949, pp. 1-13.

Randé B., *Les carnets indiens de Srinivasa Ramanujan*, Paris, Cassini, 2002.

Rao D.B., *Education for all (The world conference)*, 5 vol., New Delhi, APH Publishing Corporation, 1996.
Rashed R. (sous la direction de), *Mathématiques et philosophie*, Paris, Editions du CNRS, 1991.

Saraswathi T.A., « Series mathematics in India after Bhāskara II », *Bulletin of the National Institute of Sciences of India*, 21, 1963, pp. 320-343.

Sarma K.V., *A history of the Kerala school of Hindu astronomy*, Hoshiarpur, Vishveshvaranand Institute, 1972.

Shukla K.S., *Mahā-Bhāskarīya (translated into English)*, Lucknow University, 1960.

Srinivasiengar C.N., *The history of ancient Indian mathematics*, Calcutta, The World Press Private, 1967.

Subbarayappa B.V., Sarma K.V., *Indian Astronomy, A source book*, Bombay, Nehru Centre, 1985.

Taton R. (sous la direction de), *La science antique et médiévale*, Paris, P.U.F. (1957), réédition « Quadrige », 1994.

Taton R. (sous la direction de), *La science moderne*, Paris, P.U.F. (1958), réédition « Quadrige », 1995.

Upadhyaya A.K., *Siddhānta-Darpana*, (1899), New Delhi, réédition Nag Publishers, 1998.

Table des matières

Titre TRIGONOMÉTRIE ET « DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES » EN INDE MÉDIÉVALE

Auteur David Pouvreau-Séjourné,
Groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Toulouse

Public Enseignants de lycée et de premier cycle universitaire scientifique

Date Octobre 2003

Mots clefs approximations de π, arctangente, Āryabhata, Bhāskara, cosinus, développement en série, histoire des mathématiques, Jyesthadeva, Leibniz, Mādhava, mathématiques indiennes, Nīlakantha, Parameśvara, Pascal, quadrature du cercle, sinus, sommation itérée d'entiers, sommation de puissances d'entiers, sommes de Riemann, trigonométrie.

Résumé La synthèse présentée ici répond à deux objectifs.

Elle consiste en premier lieu à exposer et à analyser les sources et le contenu d'un ensemble de travaux mathématiques réalisés en Inde entre le XIVe et le XVIe siècle. L'originalité et l'intérêt de ces travaux sont remarquables : ils aboutissent à la formulation d'algorithmes équivalents aux développements en séries entières des fonctions sinus, cosinus et arctangente ; en particulier, ils semblent être les premiers dans l'histoire à recourir à ce type d'algorithme afin d'évaluer le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre.

Cette synthèse est en outre destinée à suggérer un certain nombre de problèmes et d'activités susceptibles d'être exploitées par le professeur de lycée ou de 1er cycle universitaire, tant en trigonométrie qu'en algèbre et en analyse.

N° 167

Edition : IREM de Toulouse
Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne
31062 Toulouse Cedex 4

Prix : 10 euros

Illustration de couverture : Observatoire de Jaipur, extrait de http://www.worldisround.com