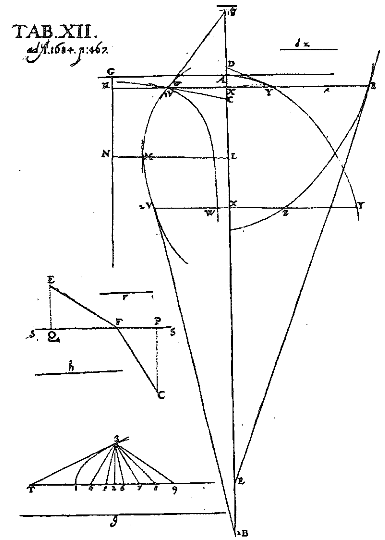
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

L'invention du Calcul différentiel, racontée par Leibniz

MICHEL-PAJUS Annie
Lycée Claude Bernard - IREM Paris 7
Université Denis Diderot (France)

Abstract

L'atelier était consacré à l'étude d'un texte de LEIBNIZ : *Histoire et Origine du Calcul Différentiel*[2] et à une possible utilisation de ce texte avec des étudiants de niveau post Bac. Faute de place, nous nous limiterons ici à une lecture commentée d'extraits du texte. Les documents pour les élèves seront par ailleurs publiés dans une prochaine brochure du Groupe M. : A.T.H[3].



[2]Ce texte est disponible dans *Mnémosyne* n° 13 et Brochure n° 90. IREM Université Denis Diderot Mathématiques : Approche par les Textes Historiques. IREM Université Denis Diderot

[3]Ce qui signifie Mathématiques : Approche par les Textes Historiques. Ce groupe travaille à l'IREM de l'Université Denis Diderot à Paris (ex Paris 7)

1 Introduction

Ce texte est rédigé en 1714, quarante ans après l'invention du Calcul Différentiel, alors que la controverse de priorité entre Newton et LEIBNIZ s'éternise. Il ne sera pas publié du vivant de l'auteur, mort un an après, mais retrouvé au XIX$^{\text{ème}}$ siècle. LEIBNIZ précise d'abord ses objectifs :

> Il est très utile de connaître les véritables origines des inventions mémorables, surtout de celles dont la découverte n'est pas due au hasard, mais au pouvoir de la pensée. En effet, cela permet non seulement à l'Histoire de reconnaître la part qui revient à chaque inventeur et invite d'autres esprits à rechercher les mêmes titres de gloire, mais contribue de plus au développement de l'art d'inventer, en faisant connaître la méthode sur des exemples remarquables.

L'objectif est donc double : pédagogique et polémique. LEIBNIZ précise ensuite ce que n'est pas son Calcul différentiel : ce n'est pas l'étude des développements en séries infinies, à la manière de Mercator ou Newton - ce n'est pas l'utilisation de "quantités qui épuisent progressivement la surface de la figure" pour effectuer une quadrature, à la manière de Cavalieri, Fermat, Huygens, Wallis. C'est un Algorithme, c'est-à-dire un jeu réglé de symboles, qui permet "d'affranchir l'imagination d'une attention continuelle aux figures".

LEIBNIZ revendique un méthode nouvelle, appelée à renouveler les mathématiques aussi radicalement que celles de Viète et de Descartes, mais valide dans un champ beaucoup plus large,

> ... en considérant les différences dx, ddx, etc.- ainsi que les sommes qui sont les inverses de ces différences - comme des fonctions de x et en les introduisant ainsi dans le calcul alors qu'auparavant on n'avait pas employé d'autres fonctions que $x, xx, x^3, \sqrt{x}$, etc. c'est-à-dire des puissances et des racines.
> Par conséquent, on peut comprendre que ceux qui ont exprimé ces quantités [différentielles] par zéro, comme Fermat, Descartes et ce rival en personne, dans ses *Principia* publiés en 16**, sont restés par ce fait très éloignés du calcul différentiel car, dans ces conditions, on ne peut distinguer ni les ordres de différences, ni les fonctions différentielles des diverses quantités[1].

Il faut se méfier du vocabulaire. Il n'y a pas chez LEIBNIZ de fonctions au sens actuel du terme, seulement des "variables" $x, y, z\ldots$ reliées entre elles. x peut donc désigner une fonction d'une autre variable. Ici d, d^2, etc... sont plutôt, dans le langage moderne, des opérateurs sur des fonctions.

2 Première étape : des observations sur les différences et les sommes

Après quelques considérations amères sur la querelle, LEIBNIZ commence son récit (en parlant de lui-même à la troisième personne). Avant son séjour à Paris, ses préoccupations tournaient essentiellement autour de la logique et de la combinatoire; il n'est donc pas étonnant qu'à l'origine soit la vérité identique : $A = A$. Puis l'égalité que LEIBNIZ affirme ici équivalente : $A - A = 0$[2]. C'est de cette rupture de symétrie que va naître tout le calcul différentiel. En effet, en accumulant autant que l'on veut de ces riens ($A - A, B - B, C - C$, etc.) - en nombre fini, infini, dénombrable ou non, on obtient toujours 0[3].

[1]Dans tout cet article, les termes soulignés le sont par moi. Les citations sans références viennent de *Historia et Origo*.

[2]Dans certains manuscrits cette deuxième égalité est démontrée comme un corollaire

[3]cf Gilles Deleuze (conférence du 29/4/80, disponible sur www.imaginet.fr/deleuze/TXT/290480.html)

> ... il observait que, à partir de ceci : "$A = A$" ou à partir de son équivalent : "$A - A = 0$"
>
> $$A\frac{-A+B}{+L}\frac{-B+C}{+M}\frac{-C+D}{+N}\frac{-D+E}{+P} - E = 0.$$
>
> Si maintenant, on pose que A, B, C, D, E sont des quantités croissantes et que les différences des deux quantités consécutives $B - A, C - B, D - C, E - D$, sont appelées L, M, N, P, il s'ensuit alors que :
> $A + L + M + N + P - E = 0$, ou : $L + M + N + P = E - A$,
> c'est-à-dire que la somme des différences entre termes consécutifs (quel que soit le nombre) est égale à la différence entre les deux termes extrêmes.
> Si, par exemple, à la place de : A, B, C, D, E, F, on prend des nombres carrés : 0, 1, 4, 9, 16, 25, on découvrira, en fait de différences, les nombres impairs : 1, 3, 5, 7, 9.
>
> | | | | | | | | | | | |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
> | 0 | | 1 | | 4 | | 9 | | 16 | | 25 |
> | | 1 | | 3 | | 5 | | 7 | | 9 | |
>
> De manière évidente, on aura :
>
> $$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25 - 0 = 25,$$
>
> et l'on obtiendra le même résultat, quel que soit le nombre de termes ou de différences et quels que soient les termes choisis comme extrémités.

On peut évidemment recommencer avec la suite de la deuxième ligne, etc... et LEIBNIZ note un résultat curieux, qui constitue un exercice "d'une agréable facilité" pour les élèves (travail sur le binôme, récurrence, analogie avec la dérivation des polynômes) :

> De cette manière, il observait que s'annulent les différences secondes des nombres entiers naturels (c'est-à-dire des nombres pris dans l'ordre à partir de zéro), que s'annulent les différences tierces des carrés obtenus à partir des nombres naturels, que s'annulent les différences quatrièmes des cubes, les différences cinquièmes des bicarrés, les différences sixièmes des nombres élevés à la puissance 5 et ainsi de suite ; et il observait que la différence première des nombres entiers naturels était constante et égale à 1, que la différence seconde des carrés était égale à 1.2 = 2, que la différence troisième des cubes était égale à 1.2.3 = 6, la différence quatrième des bicarrés à 1.2.3.4 = 24, la différence cinquième des nombres élevés à la puissance 5 égale à 1.2.3.4.5 = 120, et ainsi de suite; observations que d'autres pouvaient faire depuis quelque temps, mais, pour l'auteur, elles étaient neuves et invitaient à continuer par leur agréable facilité.

On peut, à rebours, disposer les sommes partielles d'une ligne directement sur la ligne au-dessous. On obtient alors un tableau où chaque ligne est la suite des différences de la suivante et la suite des sommes de la précédente. Or LEIBNIZ a déjà fabriqué dans sa Dissertation sur l'Art Combinatoire de 1666 un tableau de ce type (dans lequel nous reconnaissons évidemment les combinaisons)[4].

"Qu'est-ce que Leibniz appelait l'analyse infinie ? l'analyse infinie remplit la condition suivante : elle apparaît dans la mesure où la continuité et les petites différences se substituent à l'identité".

[4]C'est moi qui ait ajouté le schéma permettant de lire une somme partielle.

1	1	1	1	1	1	
1	2	3	4	5	6	d^3u
1	3	6	10	15	21	d^2u
1	4	10	20	35	56	du
1	5	15	35	70	126	u
1	6	21	56	126	252	$\int u$
1	7	28	84	210	462	$\int\int u$

Pour ajouter quelque chose qui n'est peut-être pas banal, il découvrait aussi des théorèmes à propos des différences et des sommes qui sont les suivantes :

La suite a, b, c, d, e, etc... décroissant à l'infini, soient :

les termes	a		b		c		d		e						etc ...
les différences 1ères		f		g		h		i		k					etc ...
les différences 2èmes			l		m		n		o		p				etc ...
les différences 3èmes				q		r		s		t		u			etc ...
les différences 4èmes					β		γ		δ		ε		θ		etc ...
etc ...						λ		μ		ν		ρ		σ	etc ...

On pose "a" comme terme premier et "ω" comme terme dernier. L'auteur trouvait alors :

$$\begin{aligned} a-\omega &= 1f+1g+1h+1i+1k+etc \\ a-\omega &= 1l+2m+3n+4o+5p+etc \\ a-\omega &= 1q+3r+6s+10t+15u+etc \\ a-\omega &= 1\beta+4\gamma+10\delta+20\varepsilon+35\theta+etc, etc. \end{aligned} \qquad (1)$$

Remarques :

1) la suite "décroissant à l'infini" signifie que la suite est décroissante et tend vers zéro (le terme dernier, désigné par ω plus bas)

2) f représente ici $a-b$ (et non plus $b-a$ comme au début) sans doute pour ne considérer que des quantités positives

3) on lit la somme partielle des termes d'une suite partant de l'infini (à droite) et limitée à gauche par un terme (m par exemple), sur la ligne immédiatement supérieure, en prenant le terme le plus proche à gauche (ici g) : $g = m+n+o+p+\ldots$; $f = l+m+n+o+p+\ldots$

La première égalité est celle que l'on a vue plus haut, moyennant le changement de signe observé. Pour la deuxième, on remplace chaque lettre de la ligne précédente par les sommes partielles obtenues selon la remarque 3. l apparaît une fois (venant de f), m deux fois (venant de f et g), n trois fois (venant de f, g et h) etc... On continue pour la troisième égalité. Il est possible d'écrire cela précisément avec les notations contemporaines, mais cela serait contraire à l'esprit du texte, qui ne <u>démontre</u> rien, mais se contente de <u>montrer</u> (donner à voir)

$$[2]\, a-\omega \;=\; \begin{array}{llll} +1f & & & \\ & -1l & & \\ +1f & & +1q & \\ & -2l & & -1\beta \\ +1f & & +3q & & +1\lambda \\ & -3l & & -4\beta \\ +1f & & +6q & & etc. \\ & -4l & & etc. \\ +1f & & etc. & \\ & etc. & & \\ etc. & & & \end{array}$$

Le deuxième membre de l'égalité ci-dessus est la somme tous les termes du triangle. Cette disposition en triangle me suggère une explication du résultat : en sommant selon les diagonales ascendantes, on trouve successivement f, puis g, puis h, puis i, etc... Cela revient à repartir de la première ligne de (1), mais en remplaçant cette fois les termes de la somme par des différences de termes tous situés sur la diagonale à l'extrême gauche du tableau initial.

$$a-\omega \;=\; \begin{array}{lllll} +1f & & \mathbf{1g} & \mathbf{1h} & \mathbf{1i} \\ & -1l & & & \\ +1f & & +1q & & \\ & -2l & & -1\beta & \\ +1f & & +3q & & +1\lambda \\ & -3l & & -4\beta & \\ +1f & & +6q & & etc. \\ & -4l & & etc. & \\ +1f & & etc. & & \\ & etc. & & & \\ etc. & & & & \end{array} \qquad (2)$$

Par conséquent, en adoptant la terminologie introduite plus tard par l'auteur, et en appelant y n'importe quel terme d'une suite (et dans ce cas même $a = y$), on pourra appeler la différence première dy, la différence seconde ddy, la différence troisième d^3y, la différence quatrième d^4y, et en appelant x n'importe quel terme d'une deuxième suite, on pourra appeler la somme de ces termes $\int x$, la somme des sommes (ou somme seconde) $\int\int x$, la somme troisième $\int^3 x$, et la somme quatrième $\int^4 x$.

Si l'on pose ensuite que : 1 + 1 + 1 + 1 + etc, sont égaux à x, c'est-à-dire que x représente les nombres naturels, dont la différence première $dx = 1$, alors :

	$1+2+3+4+5+$	etc font	$\int x$
et	$1+3+6+10+$	etc font	$\int\int x$
	$1+4+10+20+$	etc font	$\int^3 x$
	$1+5+15+35+$	etc font	$\int^4 x$

et ainsi de suite.

D'où finalement, il résulte :

$$y-\omega = dy.x - ddy.\int x + d^3y.\int\int x - d^4y.\int^3 x + \text{etc}, \qquad (2)$$

ce qui est égal à y, si l'on convient de continuer à l'infini c'est-à-dire de rendre $\omega = 0$.

Ce résultat s'obtient aisément en sommant selon les colonnes le tableau [2]. Notons la virtuosité dans les changement de points de vue. La créativité vient de l'observation systématique selon une multiplicité de points de vue.

D'où il s'ensuit la somme de la suite y elle-même, soit

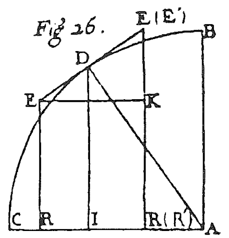
$$\int y = yx - dy.\int x + ddy\int\int x - d^3y.\int^3 x + \text{etc.}[5] \qquad (3)$$

Je suppose que LEIBNIZ remplace y par $\int y$, ce qui n'a pas d'importance, puisque la suite y est quelconque. Ceci suppose tout de même l'utilisation de la relation $d(\int y) = y$. LEIBNIZ ajoute alors une petite phrase...

Or, ces deux théorèmes ont pour propriété remarquable d'être également valides dans les deux calculs différentiels, aussi bien le Calcul différentiel numérique que le Calcul différentiel infinitésimal : nous parlerons plus bas de la distinction à établir entre eux.

3 Deuxième étape : la résolution de problèmes géométriques

Sur les conseils de Huygens, en 1672, LEIBNIZ se met à lire tout ce qui est accessible sur le sujet. Première révélation : *la Géométrie* de Descartes qui permet d'exprimer les courbes par des équations. Deuxième révélation : une figure de Pascal, que LEIBNIZ nomme triangle différentiel, ou triangle caractéristique. Cette figure est dessinée par Pascal dans le but de calculer la somme des produits DI par EE', dans le cas particulier où la courbe CB est un quart de cercle.



PASCAL 1659

[5]Ce résultat est généralement attribué à Jean Bernoulli qui le donne dans les *Acta Eruditorum* en 1694, ou à Brook Taylor qui l'obtient comme cas particulier de son théorème général (publié en 1715).

Qu'y trouve LEIBNIZ ?

- Pascal découpe des intervalles égaux sur la courbe, et non sur les axes, ce qui revient pour nous à prendre comme variable d'accroissement l'abscisse curviligne, alors que LEIBNIZ "n'avait d'abord considéré que les infiniment petits du type des intervalles entre les ordonnées, conformément à la méthode de Cavalieri".
- Ensuite, peu importe que ce triangle soit "inassignable ou infiniment petit", on peut toujours considérer les triangles qui lui sont semblables.
- Par ailleurs, LEIBNIZ emprunte sans hésitation à Pascal l'idée que la longueur de l'élément de courbe est égale à la longueur de la portion de tangente, ce qui conduit à la rectification :

  Pascal : quand je dis que chaque touchante EE est égale à chacun des petits arcs DD, on n'a pas dû en être surpris, pusqu'on sait assez qu'encore que cette égalité ne soit pas véritable quand la multitude des sinus est finie, néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude des sinus est indéfinie; parce qu'alors la somme de toutes les touchantes égales entre elles, EE, ne diffère de l'arc entier BC, ou de la somme de tous les arcs égaux DD, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée[6].

  LEIBNIZ[7] :... ce qui constitue pour moi le principe général de mesure des courbes, à savoir considérer qu'une figure curviligne équivaut à un Polygone d'une infinité de côtés...

- Et surtout, ce que Pascal n'a pas vu : "Je vis immédiatement que ce théorème était très général et valable pour n'importe quelle courbe"[8].

LEIBNIZ étend donc la méthode de Pascal à une courbe quelconque et en déduit, simplement par des considérations de triangles semblables, des égalités entre sommes obtenues en changeant ce que nous appellerions la variable d'intégration[9]. Il modifie évidemment en même temps ce que nous appellerions la fonction à intégrer et dénomme la nouvelle courbe correspondant à la nouvelle fonction une quadratrice.

Il détaille trois théorèmes ainsi obtenus, faisant intervenir moments, normales, sous-normales, superficies, etc. que nous résumons en termes plus modernes[10] :

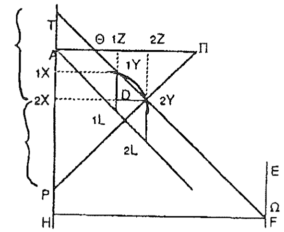


FIGURE 2

[6]*Traité des sinus du quart de cercle*, Avertissement suivant la démonstration de la proposition I.
[7]*Additio Ad Schedam de dimensionibus figuram inveniendis*, 1684. PARMENTIER, p. 94.
[8]Lettre à Bernoulli, 1703. CHILD, p.17.
[9]Les notions de fonctions et de variables ne sont pas encore conceptualisées.
[10]Attention ! l'indice est placé à gauche de la lettre pour désigner certains points. L'axe des x est AH, celui des z est AM.

1) En utilisant le triangle caractéristique D_1Y_2Y et le triangle P_2X_2Y, on obtient :
$P_2Y._1YD =_2 Y_2X._2Y_1Y$; en posant $\|P_2Y\| = n$ ceci correspond à $n.dx = z.ds$. Le moment vaut $\int zds = \int ndx$ et l'aire de révolution vaut $\int 2\pi zds = 2\pi$. moment.

2) Avec le triangle ΩHT, on obtient :
$\Omega H._1Y_2Y = T\Omega._2YD$ ce qui correspond à $k.ds = \|T\Omega\|.dz$ et longueur = $\int ds = \frac{1}{k}\int \|T\Omega\|dz$.

3) Avec le triangle P_2X_2Y à nouveau , on obtient :
${}_2XP._1YD =_2 Y_2X.D_2Y$ ce qui correspond à (sous-normale) . $dx = z.dz$ et donc $\frac{z^2}{2} = \int zdz = \int$ sous-normale dx

Par conséquent, pour trouver la superficie d'une figure donnée, on cherche une autre figure dont les sous-normales soient égales aux ordonnées de la figure donnée : cette autre figure sera la quadratrice de la figure donnée.

Ainsi, grâce à ce raisonnement très aisé, nous réduisons le calcul des superficies de solides de révolution aux problèmes de quadratures planes et de rectifications de courbes ; en même temps, nous réduisons le problème des quadratures au problème inverse des tangentes.

Autrement dit, pour trouver la surface "sous la courbe" d'ordonnée y, on cherche une courbe d'ordonnée z telle que y soit la sous normale de cette courbe, et on obtient la surface cherchée comme moitié de celle du carré de côté z. Cela ne semble pas très pratique, mais a une grande portée théorique, car LEIBNIZ découvre ainsi que Pascal n'avait pas vu, bloqué dans son quart de cercle où "tout se passe trop bien"[11] : *une relation générale entre les aires et les tangentes.* (Rappelons qu'on appelait problème inverse des tangentes la recherche d'une courbe dont les tangentes possédaient une propriété particulière : il s'agit ici d'une propriété des sous-normales)

Selon son habitude, LEIBNIZ essaie sa méthode sur une multitude de problèmes, en variant autant que possible les techniques, et il va ainsi trouver un des résultats dont il sera le plus fier : la quadrature arithmétique du cercle, en expérimentant un autre type de découpage de la figure .

En 1673, et pendant une partie de 1674, Leibniz se rendit à Paris. Mais en 1674 (pour autant qu'il puisse s'en souvenir) il tomba en Arithmétique sur cette célèbre Quadrature[12] qui mérite bien que l'on expose selon quelle méthode elle a été réalisée. D'habitude, les Géomètres décomposaient les figures en rectangles, en traçant des droites parallèles aux ordonnées. Lui-même eut l'occasion par hasard de résoudre une figure en triangles, formés par des droites concourantes en un seul point : il examina comment on pouvait obtenir quelque chose de neuf, donc de commode.

Nous ne détaillons pas ici la démonstration, qui fait l'objet de l'un des problèmes destinés aux élèves que nous avons présentés, et aussi l'objet d'un autre atelier de cette Université d'été[13]. Il s'agit encore de changer, à partir de considérations géométriques sur les triangles semblables, l'élément différentiel et la fonction à quarrer. Cette transformation (que LEIBNIZ généralise sous le nom de méthode des métamorphoses) permet d'obtenir une fonction dont on peut trouver une primitive (éventuellement sous forme de développement en série, comme ici).

---

[11]Comme l'écrit Claude Merker dans *Le calcul intégral dans la dernière œuvre scientifique de Pascal*, 1995, IREM de Besançon.

[12]Il s'agit de l'expression de l'aire du cercle unité sous forme de série. Le procédé est détaillé dans le texte de problème inspiré de la "lettre à La Roque", dans *Mnémosyne*, n° 13.

[13]Gilles Bonnefoy.

Mais LEIBNIZ s'aperçoit alors que beaucoup de ces résultats ont déjà été obtenus par d'autres méthodes, et abandonne ses recherches géométriques.

4 Troisième étape : Retour au calcul des différences finies. La nouvelle notation

D'autre part, il faut exposer comment, peu à peu, notre auteur est parvenu à un nouveau genre de notation, qu'il a appelé "calcul différentiel".
Déjà, en 1672, Huygens lui avait proposé, alors qu'ils s'entretenaient des propriétés des nombres, le problème suivant : trouver la somme d'une série décroissante de fractions dont les numérateurs sont égaux à 1, et dont les dénominateurs sont les nombres triangulaires : somme que Huygens avait trouvée dans des travaux de Hudde sur l'estimation de la probabilité. Notre auteur trouva que la somme était 2, ce qui était en accord avec la proposition de Huygens.

Le terme général de la série est $\frac{2}{x(x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{2}{x+1}$, ce qui permet à la "propriété des différences" de manifester toute son efficacité !

Du même coup, il découvrit les sommes des séries de nombres du même genre, où les dénominateurs sont des nombres combinatoires quelconques, et en fit part à Oldenbourg en février 1673, dans une lettre publiée par les adversaires. Quand l'auteur eut vu, plus tard, le triangle arithmétique de Pascal, il créa, sur cet exemple, le triangle Harmonique.

Triangle Arithmétique, où la suite fondamentale est constituée par une progression Arithmétique : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, . . .

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

Triangle Harmonique, où la suite fondamentale est la progression Harmonique $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \ldots$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & & \\
 & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & & \\
 & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{7} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{140} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{7}
\end{array}$$

Dans le triangle harmonique, si l'on divise les dénominateurs de n'importe quelle suite oblique descendant à l'infini et, de même, de n'importe quelle suite parallèle finie, par le dénominateur du terme correspondant dans la suite première, on obtient les nombres combinatoires figurant dans le triangle arithmétique.

Par ailleurs, ce qui est commun aux deux triangles, c'est que les suites obliques sont déduites les unes des autres par somme ou par différence. Dans le triangle arithmétique, une suite donnée est obtenue en faisant la somme de la suite précédente la plus proche, ou en faisant la différence de la suite immédiatement consécutive ; mais, dans le triangle harmonique au contraire, une suite donnée est obtenue en faisant la somme de la suite immédiatement consécutive.

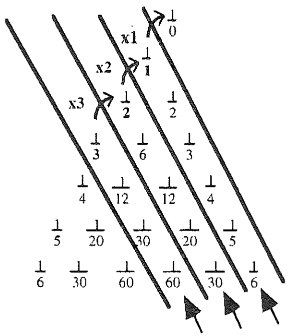
D'où il s'ensuit[14] :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\text{etc} &= \frac{1}{0} \\ \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28}+\text{etc} &= \frac{2}{1} \\ \frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{35}+\frac{1}{56}+\frac{1}{84}+\text{etc} &= \frac{3}{2} \\ \frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{70}+\frac{1}{126}+\frac{1}{210}+\text{etc} &= \frac{4}{3} \end{aligned} \tag{4}$$

et ainsi de suite.

Il s'agit de la même idée qu'au §2, avec une disposition différente : la somme des termes d'une diagonale, en partant de l'infini (en bas), s'obtient sur la diagonale précédente en prenant le nombre immédiatement au-dessus. Pour que toutes le sommes commencent par $\frac{1}{1}$, il suffit de multiplier tous les termes par le dénominateur de la première fraction.

La première égalité est assez étonnante, mais si on complète les diagonales par $\frac{1}{0}$, elle s'obtient naturellement !



ajouter en partant de l'infini

A partir de ces sommes, LEIBNIZ obtient les sommes d'autres séries, en se ramenant aux précédentes par une méthode d'identification. Cette méthode fait l'objet de l'autre problème destiné aux élèves que nous avons examiné. En voici seulement un exemple :

[14]En sommant les termes d'une oblique, on obtient le premier terme de l'oblique précédente; ici tous les termes sont de plus multipliés par l'inverse du premier terme de l'oblique.

Soit $x = 1$, ou 2, ou 3, etc. . . ; le terme général de la série $\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}$+etc. . . est $\frac{1}{4x^2+8x+3}$; on cherche le terme général de la série-somme ; on examine par la méthode la plus simple si l'on peut l'obtenir sous la forme suivante : $\frac{e}{bx+c}$; on aura :

$$\frac{e}{bx+c}-\frac{e}{bx+b+c}=\frac{eb}{b^2x^2+b^2x+bc+2bcx+c^2}=\frac{1}{4x^2+8x+3}.$$

En identifiant ces deux formules on obtient :
$b=2, eb=1$, donc : $e=\frac{1}{2}, b^2+2bc=8$, soit : $4+4c=8$ ou $c=1$, et enfin : $bc+c^2=3$, ce qui en découle.

Donc le terme général de la série-somme est : $\frac{\frac{1}{2}}{2x+1}$, soit $\frac{1}{4x+2}$

Remarquons la nouvelle notation : la suite est désignée par son terme général $\frac{1}{4x^2+8x+3}$, où x désigne le rang du terme (ce que nous notons généralement n), comme dans le §2. Cette notation identique pour les fonctions et les suites va faciliter le transfert des méthodes de calcul

5 Le passage aux différentielles géométriques

LEIBNIZ poursuit sans transition: (en se désignant toujours par "notre auteur")

> Or, notre auteur remarqua aisément que le calcul différentiel, dans le cas des Figures géométriques, était étonnamment facile pour celui qui s'est exercé à manier les nombres, puisque, dans les figures, les différences et ce qui diffère sont des incomparables ; toutes les fois que sont rapprochées, dans une addition ou une soustraction, des grandeurs incomparables, les petites sont négligeables par rapport aux grandes ; aussi, les quantités irrationnelles ne sont-elles pas moins faciles à différencier que les sourdes[15], ou que les quantités exponentielles, à l'aide de logarithmes.

Certes! mais ceci ne nous dit pas ce que signifie différencier une grandeur géométrique ! la réponse suit :

> D'autre part, il observait que les lignes infiniment petites qui se présentent dans les figures ne sont que les différences relatives aux moments des lignes variables.

Pour comprendre l'importance de cette remarque, il faut remonter à ses premiers manuscrits : d'après ceux-ci, il semble bien que la notation $\int$ (d'abord notée omn) et d (d'abord indiqué en dénominateur), soit apparues dans le contexte géométrique, et immédiatement appliquées de façon formelle dans les calculs. Mais *d n'apparaît pas comme notation de l'élément d'accroissement.* Dans les sommations, celui-ci n'est tout simplement pas écrit ! l'auteur indique simplement, s'il y a ambiguïté, à quel axe est appliquée la sommation. Sur cet axe, le découpage est toujours régulier[16]. S'il s'agit de l'axe des abscisses, cela revient à prendre dx constant. Au départ, *d indique seulement l'opérateur inverse de $\int$.*

> Etant donné l [l'ordonnée], et sa relation avec x [la variable], trouver $\int l$. Ceci doit être obtenu par le calcul contraire, c'est-à-dire, supposons que $\int l = ya$. Soit $l = \frac{ya}{d}$; alors de même que $\int$ les accroît, d va diminuer la dimension. Mais $\int$ signifie une somme et d une différence. A partir d'un y donné, on peut toujours trouver $\frac{y}{d}$ ou l, c'est-à-dire la différence des y[17].

[15]Parmi les quantités que nous appelons irrationnelles, Leibniz distingue les sourdes qui peuvent s'exprimer à l'aide de radicaux, et les autres qu'il nomme irrationnelles.

[16]A l'époque, il n'était pas d'usage d'indiquer l'élément différentiel dans la sommation. Pascal par exemple le sous-entend généralement, et l'on sait quel est l' élément de sommation en regardant justement quelle ligne bénéficie d'un découpage équidistant.

[17]Manuscrit du 29 Octobre 1675, CHILD p. 82.

Ce n'est qu'ensuite que LEIBNIZ remarque que les accroissements des lignes correspondent à dx, dy, ds. Et c'est dans cette relation entre la quantité accroissement de la variable et l'opérateur d que se noue le calcul différentiel. Elle permet la traduction du calcul algébrique en propriétés géométriques, et réciproquement.

Dans une lettre à L'Hospital de 1694, Leibniz est un peu plus explicite. Après avoir rappelé brièvement comment il a obtenu les formules (5), il écrit :

> Reconnaissant donc cette grand utilité des différences et voyant que par le calcul de M. des Cartes l'ordonnée de la courbe peut estre exprimée, je vis que trouver les quadratures ou les sommes des ordonnées n'est autre choses que trouver une ordonnée (de la quadratrice) dont la différence est proportionnelle à l'ordonnée donnée. Je reconnus aussi bientost que trouver les tangentes n'est autre chose que différentier, et trouver les quadratures n'est autre chose que sommer, pourvu qu'on suppose les différences incomparablement petites[18].

Pour trouver la quadrature de y on calcule la somme des rectangles ydx : $Q = \int ydx$ est ainsi interprétée comme une *sommation*. Mais elle signifie aussi que Q est une quantité dont la différentielle est ydx (interprétation comme une *intégration*[19]).

Notons que pour la quadrature, comme pour les tangentes, la rédaction de cet extrait suppose que les dx sont égaux (et c'est dx qui donne le coefficient de proportionnalité). Pour une quadrature on somme des rectangles de base égales : "la somme des ydx" devient "la somme des y" si $dx = 1$. Pour les tangentes, si $dx = 1$, la valeur de dy permet de construire la tangente, au moyen du triangle différentiel.

Cela tombe bien, puisque dans les formules du §2, dx valait 1. A un coefficient de proportionnalité près, les résultats du calcul des différences finies restent valables. Cette condition $dx = 1$ indique simplement que x est considérée comme la variable (elle peut se lire aussi : la différentielle de la fonction $x \mapsto x$ est égale à 1).

Cette convention sera abandonnée en pratique dès lors que la variable n'est plus x. Nous avons dit que pour LEIBNIZ, y n'est pas une fonction de x au sens actuel: x et y sont des variables liées par une relation. Quand dx apparaît, c'est que x est elle-même fonction d'une variable déterminée (par exemple l'abscisse curviligne) ou non, le choix étant fait plus tard pour la commodité des calculs.

De plus, la définition de d comme opérateur permet la réitération, grâce à la notation exponentielle dont LEIBNIZ élargit ici le champ, et le nouveau calcul va définir les règles qui permettent de combiner d et $\int$ avec toutes les autres opérations, permettant ainsi le traitement de beaucoup plus de courbes.

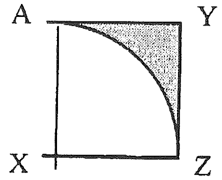
> Et, de la même façon que les quantités considérées jusqu'ici par les analystes avaient des fonctions telles que, par exemple, les puissances et les racines, de même, désormais, des quantités considérées comme des variables admettent de nouvelles fonctions, comme par exemple les différences. Tout comme nous avons eu jusqu'ici les fonctions x, xx, x^3, etc..., y, yy, y^3, etc..., de même, nous pouvons employer dx, ddx, d^3x, etc... Ainsi, même les Courbes que Descartes a exclues de sa Géométrie, en tant que "mécaniques", peuvent être exprimées par des équations appropriées et traitées par le calcul, ce qui libère l'esprit de l'attention continuelle qu'il porte aux figures.
>
> Dès lors, tout ce qui, autrefois, était donné dans des figures, pouvait être exprimé par le calcul. En effet, $\sqrt{dxdx + dydy}$ exprimait un élément de courbe, ydx une portion de son aire ; du fait que

[18] GERHARDT, MS, Tome II, p. 260.

[19] Signalons au passage que le terme "intégrale" apparaît en 1690 sous la plume de Jacques Bernoulli dans une lettre à LEIBNIZ.

> $\int ydx$ et $\int xdy$ sont complémentaires, il ressort aussitôt avec évidence que : $d(xy) = xdy + ydx$, soit, si l'on préfère : $xy = \int xdy + \int ydx$, bien que ces signes varient parfois.

La différentielle du produit est obtenue ici par un raisonnement géométrique :



En prenant A comme origine et une courbe AZ, l'aire de la partie blanche est $\int ydx$, celle de la partie complémentaire grisée $\int xdy$, et l'aire du rectangle est xy[20]. Cette méthode correspond aux essais de LEIBNIZ dans ses premiers manuscrits (1675). Mais dans une lettre de 1677 à Oldenburg (destinée à Newton), il raisonne sur les ordres de grandeur. Cette méthode est reprise dans un article de 1710 sur l'analogie symbolique entre les puissances et les différences:

> $d(xy)$ est la différence entre $(x+dx)(y+dy)$ et xy, c'est-à-dire entre un produit donné et le produit immédiatement consécutif. Or $(x+dx)(y+dy) = xy + ydx + xdy + dxdy$; en soustrayant xy, il vient : $ydx + xdy + dxdy$; mais puisque dx et dy sont incomparablement plus petits que x ou y, $dxdy$ sera donc incomparablement plus petit que xdy et ydx, par conséquent nous l'écartons pour aboutir en définitive à $(x+dx)(y+dy) - xy = ydx + xdy$[21].

En fait, nous voyons que c'est par un aller-retour incessant entre les démonstrations de type géométrique et celles de type calculatoire que LEIBNIZ teste et affine sa méthode ; il donne à la fin de Historia et Origo un exemple de double démonstration de ce type pour un théorème sur les moments.

Ce nouveau calcul présente l'avantage de prouver simplement tous les résultats déjà connus, mais surtout d'étudier de nouvelles courbes, définies par des équations transcendantes. C'est en particulier en cela qu'il estime avoir amélioré le travail de Descartes.

> Ainsi, même les Courbes que Descartes a exclues de sa Géométrie, en tant que "mécaniques", peuvent être exprimées par des équations appropriées et traitées par le calcul, ce qui libère l'esprit de l'attention continuelle qu'il porte aux figures.

Par ailleurs, à condition de considérer soigneusement les ordres de différentiation, la méthode s'étend à d'autres problèmes que les quadrature et tangentes :

> Lorsqu'on applique le calcul différentiel à la Géométrie, les différences de premier ordre correspondent exactement aux tangentes, les différences de second ordre aux cercles osculateurs (dont notre jeune homme a introduit lui-même l'usage), et on peut procéder ainsi de suite. Or, ces procédés ne s'appliquent pas seulement aux tangentes et aux quadratures, mais à toutes sortes de problèmes et de théorèmes, où sont diversement mêlées différences et intégrales (selon la terminologie de l'ingénieux Bernouilli), comme cela se produit d'ordinaire dans les problèmes physico-mécaniques.

[20] Il n'y a pas de figure à cet endroit du texte, mais celle-ci se trouve un peu plus loin, pour un raisonnement du même type, avec un intégrande plus compliqué. Cela revient à une intégration par parties.

[21] *Symbolismus memorabilis...* in PARMENTIER, p. 417.

Ce qui permet à LEIBNIZ de conclure, qu'étant "parvenu à quelque chose de plus élevé et de plus général" que ses adversaires, on ne peut l'accuser de plagiat.

Conclusion

Au terme de cette étude, nous restons un peu sur notre faim. Nous ne trouvons aucun "passage à la limite" qui justifierait le passage du discret au continu, des différences finies aux différentielles.

Des transformations qui reviennent pour nous à des changements de variable ou à des intégrations par parties permettent de ramener les calculs à des quadratures connues (et prouvées par la méthode d'exhaustion), ou à des développements en série de fonctions dont on sait faire les quadratures. Ces transformations sont justifiées tantôt par des considérations géométriques, tantôt par un calcul formel dont les règles sont simplement données sans preuve dans le *Nova methodus*[22].

A la lueur de ce texte et des manuscrits que j'ai pu trouver, voici comment je vois le déroulement des faits :

Les observations sur les suites mettent en évidence les deux opérations réciproques : différence et somme, sans que cela soit formalisé, faute de notation adéquate.

Puis commence le travail géométrique sur les aires. Les travaux antérieurs des géomètres, associés à la notation de Descartes, les font apparaître comme sommes de suites. Le triangle différentiel de Pascal fait découvrir à LEIBNIZ une relation entre quadrature et tangentes, qui n'est pas encore celle dont nous avons l'habitude entre différentiation et intégration, et une technique de "métamorphoses" qui revient à transformer les intégrales.

Emergent alors simultanément la notation par une seule lettre d'une suite et d'une fonction, (lettre qui représente à la fois un terme ou une ligne <u>et</u> l'ensemble de tous les termes ou de toutes les lignes) et les symboles -et le concept- des opérateurs réciproques sur ces objets, avec les symboles $\int$ et d. La réciprocité observée sur les suites suggère sans doute celle posée par définition, puis interprétée, sur les opérateurs en géométrie.

LEIBNIZ explore alors, à son habitude toutes les règles de combinaison avec les autres symboles connus, en même temps que l'application systématique à la géométrie. Cette recherche utilise en aller-retours constants l'interprétation géométrique et les analogies formelles.

Les justifications "métaphysiques" n'interviendront que plus tard, quand les interlocuteurs de LEIBNIZ insisteront, sous forme d'une théorie assez floue sur la nature des infiniment petits, les ordres de grandeur, le principe de continuité, etc. Il est d'ailleurs remarquable que dans ce texte écrit à la fin de sa vie, LEIBNIZ n'y fasse aucune allusion.

Sans aucun doute la conviction de LEIBNIZ, en relation avec sa vision du monde, est davantage fondée sur l'*harmonie* formelle de son calcul, d'une part, et son efficacité dans la résolution des problèmes géométriques, d'autre part.

Faut-il le regretter ? je laisse la réponse au grand mathématicien André WEIL :

> "Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe; le pressentiment se change en certitude; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaître; comme l'enseigne la Gita on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique

[22]publié en 1684, PARMENTIER, p. 96-117.

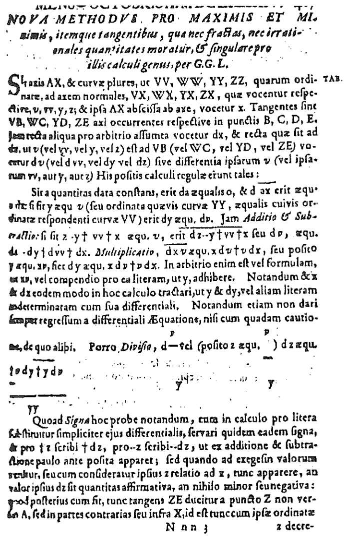
> est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir.
>
> [...]
>
> Nous voyons les analogies entre le calcul des différences finies et le calcul différentiel servir de guide à Leibniz, à Taylor, à Euler, au cours de la période héroïque durant laquelle Berkeley pouvait dire, avec autant d'humour que d'à-propos, que les "croyants" du calcul infinitésimal étaient peu qualifiés pour critiquer l'obscurité des mystères de la religion chrétienne, celui-là étant pour le moins aussi plein de mystères que celle-ci. Un peu plus tard, d'Alembert, ennemi de toute métaphysique en mathématiques comme ailleurs, soutint dans les articles de l'Encyclopédie que la vraie métaphysique du calcul infinitésimal n'était autre chose que la notion de limite. S'il ne tira pas lui-même de cette idée tout le parti dont elle était susceptible, les développements du siècle suivant devaient lui donner raison; et rien ne saurait être plus clair aujourd'hui, ni, il faut le dire, plus ennuyeux, qu'un exposé correct des éléments du Calcul différentiel et intégral".[23]

Ouvrages référencés dans les notes :

J.M. CHILD, *The early manuscripts of Leibniz*, 1920, The open court publishing company.

M. PARMENTIER, *G.W.Leibniz, La naissance du calcul différentiel*, 1989, Vrin.

C.I. GERHARDT *Mathematische Schriften* (7 vol) Berlin et Halle, 1848-1863, réedition Hildersheim, 1965.



NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MInimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G.G.L.

Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respective, v, w, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quæ sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel dw, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales : TAB. XII.

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis 0, & d ax erit æqu. a dx: si sit y æqu v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ respondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: si sit z -y † w † x æqu. v, erit dz--y † w † x seu dv, æqu. dz -dy † dw † dx. *Multiplicatio*, dx v æqu. x dv † v dx, seu posito y æqu. xv, fiet dy æqu. x dv † v dx. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari semper regressum a differentiali Æquatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*, d vel (posito z æqu.) dz æqu. † v dy † y dv

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera substituitur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa, & pro † z scribi † dz, pro--z scribi--dz, ut ex additione & subtractione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesin valorum venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa: quod posterius cum fit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non versus A, sed in partes contrarias seu infra X, id est tunc cum ipsæ ordinatæ z decre-

Nnn 3

[23]André WEIL (1960) *Œuvres complètes*, Tome 2, p.408.