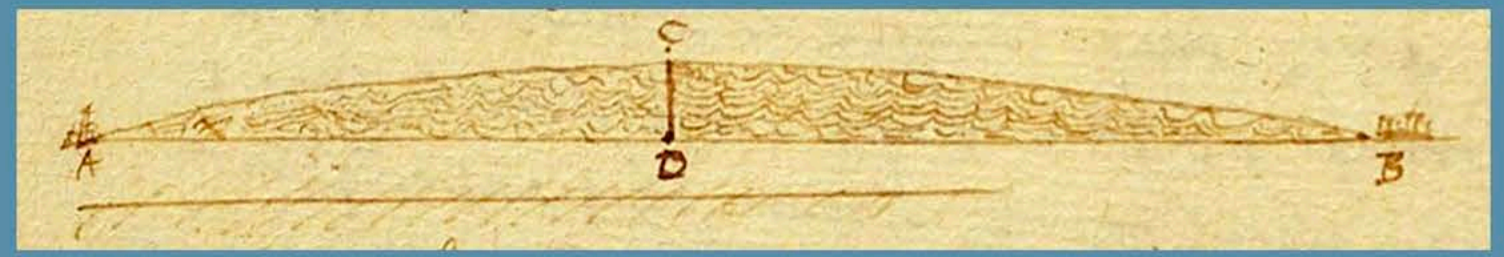
Circulation Transmission Héritage

Pour l'historien des mathématiques, un texte a des destinataires, ceux pour lesquels l'auteur écrit ou qu'il imagine, et des lecteurs, ceux qui liront le texte ou sa traduction dans le temps long de l'histoire. Entre le destinataire contemporain d'un texte et le lecteur lointain, les « horizons d'attente » sont différents. Cet ouvrage explore des moments historiques où des décalages, petits ou grands, nourrirent des héritages et furent le fruit des circulations et des transmissions. Il invite à une ample variation des échelles d'analyse : les vingt-six études qu'il rassemble mettent autant l'accent, par exemple, sur la place de la Normandie dans la diffusion des savoirs que sur l'appropriation mutuelle des traditions mathématiques de l'Europe et de l'Orient, proche ou lointain.

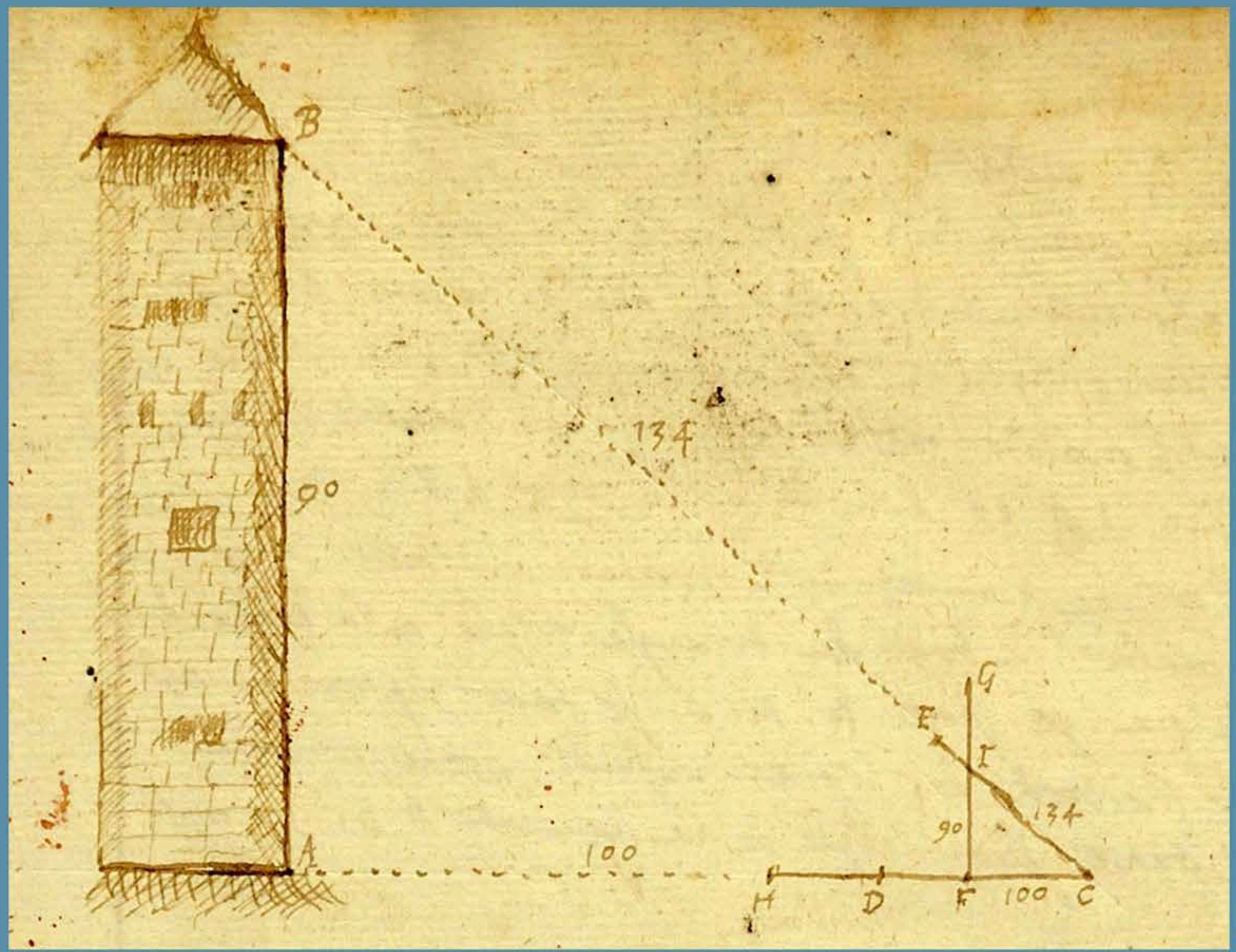


ISBN : 978-2-902498-06-2
Édition et diffusion : IREM de Basse-Normandie
juin 2011

IREM
de Basse-
Normandie

Circulation Transmission Héritage
histoire et épistémologie des mathématiques

Circulation Transmission Héritage



Actes du 18e colloque inter-IREM
histoire et épistémologie
des mathématiques
mai 2011

Université de Caen Basse-Normandie

Circulation
Transmission
Héritage

Actes du XVIII[e] colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

I. – Les véhicules de la circulation mathématique

I-2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

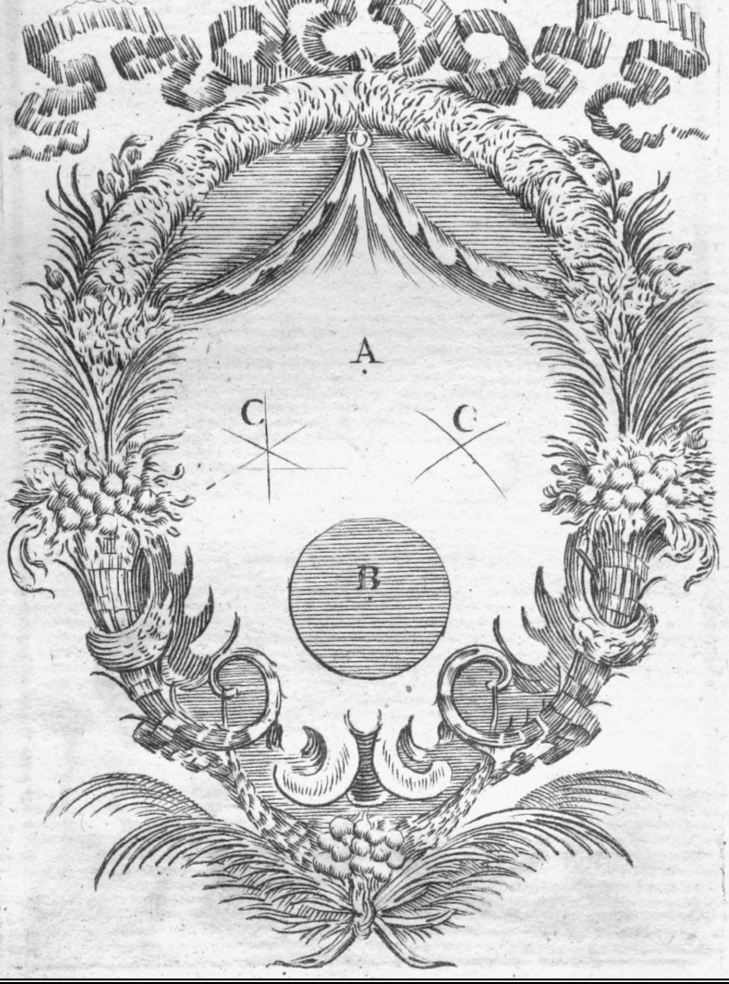
I-2-I.
Pages 201-216

L'enseignement des vecteurs au XX[e] siècle : diversité des héritages mathématiques et circulation entre disciplines

Anne Boyé & Guillaume Moussard

Circulation
Transmission
Héritage

Histoire et épistémologie des mathématiques


A.
C
C
B

Commission inter-IREM

Épistémologie et histoire des mathématiques

Circulation
Transmission
Héritage

Actes du XVIII[e] colloque inter-IREM

Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie

Université de Caen / Basse-Normandie

Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

ISBN : 978-2-902498-06-2

Directeur de publication : Pierre Ageron, directeur de l'IREM de Basse-Normandie
Diffusion : IREM de Basse-Normandie, Université de Caen Basse-Normandie,
campus 2, 14032 Caen Cedex
Tél. : 02 31 56 74 02 – Fax. : 02 31 56 74 90
Adresse électronique : irem@unicaen.fr
Site Internet : http ://www.math.unicaen.fr/irem/
Coordination : Évelyne Barbin et Pierre Ageron
Comité de lecture : Pierre Ageron, Didier Bessot, Richard Choulet, Gilles Damamme, Guy Juge, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff, Pierrick Meignen, Thierry Mercier, François Plantade, Danielle Salles, Didier Trotoux et Éric Trotoux
Relecture générale : Pierre Ageron, Jean-Pierre Le Goff
Conception, illustration et mise en page du volume : Jean-Pierre Le Goff, Pierre Ageron, Didier Bessot et Didier Trotoux
Conception de l'affiche du colloque et de la couverture des actes : Patrice Gourbin
Impression et façonnage : Corlet numérique, 14110 Condé-sur-Noireau

Crédits photographiques de la couverture :
Bibliothèque de Caen, deux images tirées du manuscrit *in-fol.* 27 : *Pratique de geometrie*, de la main de Samuel Bochart (1599-1667)
– 1ère de couverture : mesure au *gonomètre* de la hauteur d'une tour, *f* °8 *r* °
– 4ème de couverture : mesure de la *gibbosité* de la mer entre Dieppe et la Rie (Rye), *f* °42 *v* °
Illustrations hors-texte :
Les 16 planches hors-texte des pages de l'ouvrage, paginées ii, viii, xiv, 28, 50, 94, 122, 240, 338, 360, 386, 446, 480, 502, 544 et 582, sont tirées de la *Pratique de la Geometrie, sur le papier et sur le terrein ; où par une methode nouvelle & singuliere l'on peut avec facilité & en peu de tems se perfectionner en cette science*, Par Sebastien Leclerc, Graveur du Roi. A Paris, Chez Ch. A. Jombert, Imprimeur-Libraire du Roi en son Artillerie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame. M. DCC. XLIV. (1744). *Avec Privilege du Roi.* (coll. part., clichés : jplg)

Sommaire

I. – Les véhicules de la circulation mathématique

I-1. – La langue : traduire et faire comprendre

I-2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

I-3. – Les journaux savants : hériter et faire circuler

I-4. – Les figures : accompagner les mots

I-2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

I-3. – Les journaux savants : hériter et faire circuler

I-4. – Les figures : accompagner les mots

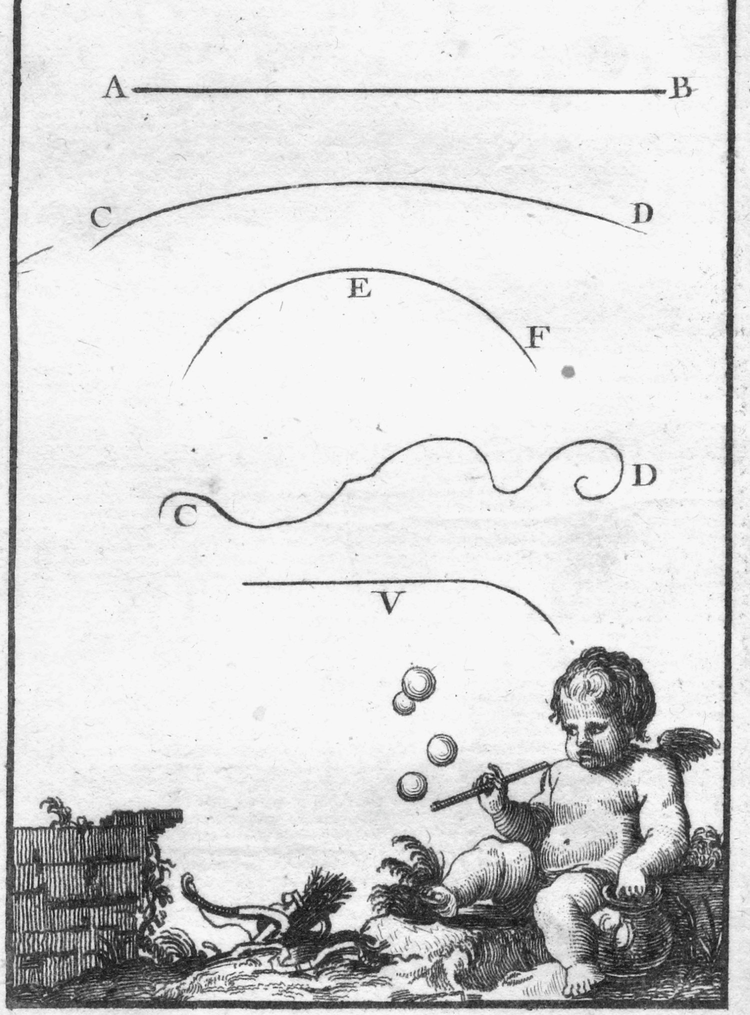
II. – D'une idée à l'autre, d'un auteur à l'autre

II-1. – Hériter et inventer

II-2. – Transmettre et s'approprier

II-3. – Lire les Anciens, aujourd'hui

Planche 2. *Page 9.*



Avant-propos

L'IREM de Basse-Normandie, institué dans l'université de Caen le 23 octobre 1973, cultive par précellence l'histoire des mathématiques. Dès l'origine, plusieurs de ses animateurs, professeurs de lycée, étaient conduits par une intuition : introduire une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques serait de nature à aider les élèves à y retrouver du sens, sens que le formalisme – des "maths modernes", notamment – tendait à dissimuler. Mais la discipline "histoire des sciences" n'était alors guère développée dans les universités. C'est ainsi que commença un colossal travail de recherche fondamentale et appliquée, d'édition de sources, de formation initiale et continue, d'actions interdisciplinaires. Nombreux sont ceux qui y ont contribué ; je veux citer au moins les noms de Jean-Pierre Le Goff, Didier Bessot et Denis Lanier et leur rendre ici un hommage plein d'amitié et d'admiration.

C'est à l'IREM de Basse-Normandie qu'il revint d'organiser le tout premier colloque inter-IREM d'histoire et épistémologie des mathématiques, au château de Tailleville, en mai 1977, puis le X^{e} colloque d'une série devenue bisannuelle, sur le thème *La mémoire des nombres* – c'était à Cherbourg en mai 1994. Entre les deux, l'IREM de Basse-Normandie avait organisé, à l'initiative de l'Association pour le développement des études et recherches en histoire et épistémologie des mathématiques (ADERHEM), un colloque exceptionnel baptisé *Destin de l'art, dessein de la science* (octobre 1986). Enfin le XVIII^{e} colloque inter-IREM, dont vous tenez en main les actes, s'est tenu en mai 2010 au cœur de l'université caennaise, dans l'amphithéâtre Henri Poincaré (qui enseigna deux années à Caen). Le thème retenu, *Circulation – Transmission – Héritage*, invitait à une ample variation des échelles d'analyse : les vingt-six études ici rassemblées mettent autant l'accent, par exemple, sur la place de la Basse-Normandie dans la diffusion des savoirs que sur l'appropriation mutelle des traditions mathématiques de l'Europe et de l'Orient, proche ou lointain.

Je remercie les institutions qui ont compris l'intérêt de cette manifestation : le ministère de l'Éducation nationale (via l'assemblée des directeurs d'IREM), la région Basse-Normandie, la ville de Caen, l'Association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public (régionale de Basse-Normandie), l'ADERHEM, et notre *alma mater* l'université de Caen Basse-Normandie.

Ce colloque n'aurait pu être organisé sans l'énergie déployée par Geneviève Jean, secrétaire de l'IREM, et par de nombreux animateurs de l'IREM, notamment Guy Juge, Éric Trotoux et Didier Trotoux. Enfin Jean-Pierre Le Goff, Didier Trotoux et Didier Bessot m'ont apporté une aide précieuse dans l'édition de ces actes. Que tous soient très chaleureusement remerciés.

Pierre Ageron
directeur de l'IREM de Basse-Normandie

Présentation

Auteurs, destinataires et lecteurs d'un texte : histoires de décalages.

Évelyne Barbin,
IREM des Pays de la Loire,
Centre François Viète, Université de Nantes

La plus grande partie d'une œuvre se déroule sous la tyrannie de sa réception.
Christophe Prochasson, « Ce que le lecteur fait de l'œuvre. Héritages et trahisons : la réception des œuvres », *Mill neuf cent*, 12, 1994.

Le Colloque inter-IREM « Histoire des mathématiques : circulation, transmission, héritage » s'inscrit bien dans la visée de « la réception des œuvres » de Hans Robert Jauss, dont Christophe Prochasson indique l'intérêt pour l'historien dans le texte cité en exergue. Pour l'historien des mathématiques, un texte a des destinataires, ceux pour lesquels l'auteur écrit ou qu'il imagine, et des lecteurs, ceux qui liront le texte ou sa traduction dans le temps long de l'histoire. Le cas des manuels, y compris les plus récents, n'échappe pas à cette distinction, que connaît bien l'enseignant : le destinataire du manuel est l'élève de classe de quatrième, mais la lectrice est Vanessa. Entre le destinataire contemporain d'un texte et le lecteur lointain, les « horizons d'attente » – en utilisant l'expression de Jauss – sont différents. Cet ouvrage propose quelques moments historiques de décalages, petits ou grands, qui nourrissent les héritages, qui sont le fruit des circulations et des transmissions.

Les aspects matériels de la circulation des textes, leurs véhicules, font l'objet de la première partie. L'histoire des mathématiques arabes est intéressante, puisqu'elles sont au carrefour de langues diverses, elles commencent avec des traductions et se perpétuent avec d'autres traductions, dans une sphère culturelle large, comme le montrent Ahmed Djebbar et Pierre Ageron. Avec la transmission des *Éléments* d'Euclide en Arménie, Frédéric Laurent délivre une partie peu connue de l'histoire. L'ouvrage d'Euclide, transmis par les Jésuites en Chine, y connut un sort étrange, puisque les lecteurs orientaux négligèrent les démonstrations qui faisaient le succès des *Éléments* ailleurs. L'exemple du décalage très abrupt de l'attente entre Occidentaux et Chinois est illustré dans cet ouvrage par Isabelle Martinez et Jean-Pierre Le Goff. L'écart plus ténu entre langue savante, le latin, et langue vernaculaire, ici un dialecte italien, est examiné avec précision par Gérard Hamon et Lucette Degryse à propos des *Quesiti* de Nicollo Tartaglia au XVIe siècle.

Il existe deux types de véhicules adaptés à des destinataires particuliers, ce sont les manuels et les revues mathématiques. Les manuels sont écrits à partir de sources diverses et à destination de commençants, avec le souci d'un rendu intégral des « idées » ou à l'inverse dans celui d'une « adaptation » aux élèves. Du côté des sources, Martine Bühler et Anne Michel-Pajus analysent celles d'un ouvrage d'arithmétique niçois du XVIe siècle. Du côté des réceptions, Pierre Ageron et Didier Bessot retracent les tribulations d'un manuel de géométrie au XVIIIe siècle. Comme le montrent Anne Boyé et Guillaume Moussard, l'enseignement des vecteurs présente un cas très complexe aux sources multiples – géométriques, algébriques et physiques –, qui a beaucoup changé selon les destinataires à différentes époques.

L'édition des revues scientifiques commence au XVIIe siècle. Les journaux savants sont écrits par des « savants » à destination de leurs confrères, membres d'Académies nationales ou de Sociétés provinciales. La spécialisation de revues aux seules mathématiques au XIXe siècle est contemporaine de publications pour des publics eux aussi plus spécialisés, qu'ils soient enseignants, amateurs ou bien mathématiciens. La transmission par des revues multiplie le nombre de possibilités de mise en évidence de décalages, en augmentant le nombre des auteurs et en accordant la plume aux lecteurs. Les articles de Jeanne Peiffer, de Christian Gérini et de Norbert Verdier offrent un large panel de périodes et de publics pour diverses revues sur trois siècles.

Les figures mathématiques ne transcendent-t-elles pas les questions de transmission en offrant un langage qui serait universel ? De plus, ne s'agit-il pas d'un langage qui précède l'écriture ? Ces questions trouveront des éléments de réponse dans les articles d'Olivier Keller et de Jean-Pierre Cléro. Prise du point de vue de la réception historique des « textes », la première question recevrait une réponse plutôt relativiste. Un triangle est vu comme une aire par Euclide et comme ses trois côtés par Descartes, il est désigné par des lettres chez les mathématiciens grecs et par des couleurs chez les chinois.

La seconde partie de cet ouvrage retourne à l'auteur d'un texte, mais sans abandonner la perspective du destinataire et du lecteur. En effet, l'auteur est lui-même un lecteur, et donc un texte peut être lu comme un maillon dans un échange dialogique. Car, comme l'explique Mikhaïl Bakhtine, un texte est écrit en réponse à d'autres auteurs de textes et il s'adresse à des lecteurs qui ont une « attitude responsive active ».

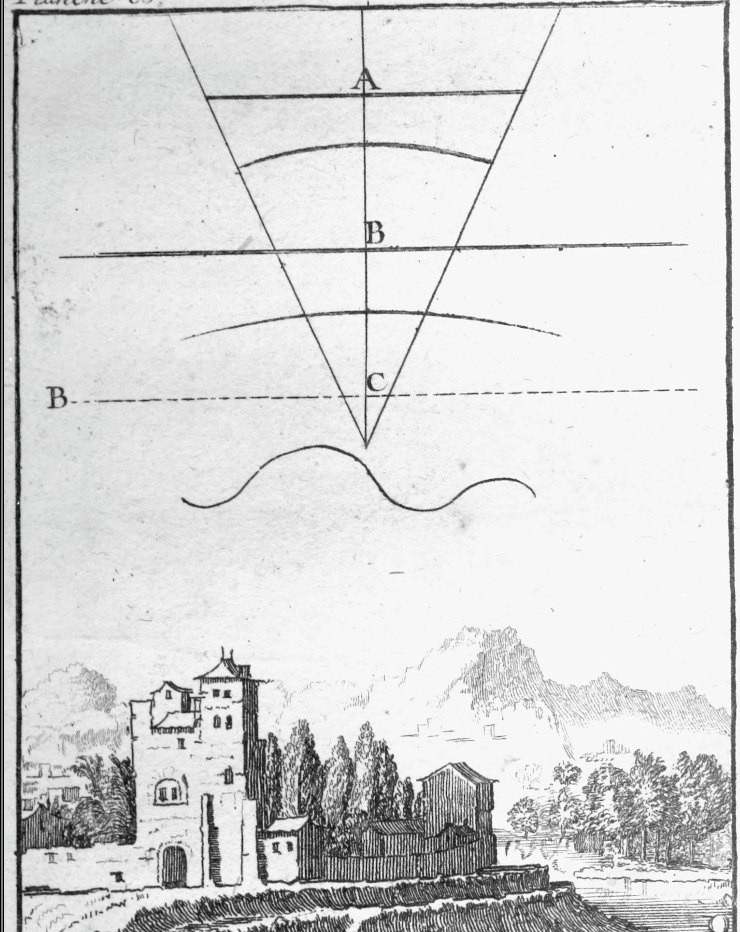
Lorsqu'un auteur doit écrire quelque chose qui lui paraît nouveau, c'est-à-dire susceptible d'aller au-delà des conceptions contemporaines, il doit aménager son texte. Autrement dit l'invention pose des problèmes accrus de transmission. C'est ce qu'analysent les articles de Jean-Paul Guichard, de Denis Lanier, Jean Lejeune et Didier Trotoux pour deux inventions mathématiques. L'histoire des mathématiques, qu'elle s'intéresse à des inventions ou des inventeurs, ne peut pas passer outre leurs intérêts sous-jacents, par exemple pour la nomographie présentée par Dominique Tournès. Le renouveau du genre biographique en histoire, indiqué par Gilles Damamme, va de pair avec une histoire des inventeurs dans le contexte intellectuel, social et culturel de leur époque. En suivant les propos de Pierre Ageron, cette perspective peut aussi être prise en compte dans l'écriture de l'histoire.

Le décalage entre un auteur et l'horizon d'attente de ses lecteurs contemporains est au cœur de la partie suivante. Évelyne Barbin explique que les contemporains de Descartes n'ont pas compris sa *Géométrie* de 1637 alors qu'elle semble aller de soi aujourd'hui. Lorsque que Jean Lejeune, Denis Lanier et Didier Trotoux utilisent le terme de précurseur, au dépit de l'histoire, n'est-ce pas pour écrire un grand décalage entre Gavarret et ses lecteurs ? Avec François Plantade et Jean-Pierre Le Goff, sont retracées les réceptions des œuvres de Grassmann et de Salomon de Caus. En vis-à-vis de ces articles, qui invitent à un relativisme constructif des « vérités mathématiques », Maryvonne Menez-Hallez pose la question du « mathématique ».

La dernière partie de l'ouvrage est plus orientée vers la lecture historique des textes. Didier Bessot, Denis Lanier, Jean-Pierre Le Goff et Didier Trotoux proposent une relecture d'une proposition d'Apollonius à partir de ses éditions et de ses traductions. Alain Bernard lit les *Arithmétiques* de Diophante comme un texte ancré dans différentes traditions antiques. Ainsi que le remarque Christophe Prochasson, « la tradition n'est pas un processus autonome de transmission », elle est au contraire un mécanisme de réappropriation du passé.

La thématique du colloque croise les questions d'enseignement et elle a vivement intéressé ceux qui dans les IREM associent l'histoire des mathématiques à son enseignement. Le riche sommaire de cet ouvrage en est le témoin.

Planche 3. Page 10.



Section I

Les véhicules de la circulation mathématique

2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

Circulation
Transmission
Héritage

Actes du XVIII[e] colloque inter-IREM
Histoire et épistémologie des mathématiques

IREM de Basse-Normandie
Université de Caen / Basse-Normandie
Campus 1 – vendredi 28 et samedi 29 mai 2010

I. – Les véhicules de la circulation mathématique

I-2. – Cours et manuels : enseigner pour transmettre

I-2-I.
Pages 201-216

L'enseignement des vecteurs au XX[e] siècle : diversité des héritages mathématiques et circulation entre disciplines

Anne Boyé & Guillaume Moussard

L'enseignement des vecteurs au XX^e siècle : diversité des héritages mathématiques et circulation entre disciplines

Anne Boyé,
IREM des Pays de la Loire & centre F. Viète,
cenub@club-internet.fr
et Guillaume Moussard,
IREM des Pays de la Loire & IUFM du Mans,
Guillaume.Moussard@univ-nantes.fr

Dès la première décennie du XX^e siècle, les mathématiciens et les physiciens se sont posé la question de l'introduction de la notion de vecteur dans l'enseignement secondaire français : à quel niveau ? pourquoi ? quels vecteurs ? comment ? Ces questions se retrouveront périodiquement tout au long du siècle. Elles se sont à nouveau posées lors de la récente refonte des programmes de seconde. Pour tenter d'apporter des réponses, nous avons étudié les programmes de mathématiques successifs, et leur mise en œuvre dans quelques manuels.

1. – Une première apparition timide : 1902-1945

Examinant les programmes de 1902, revus en 1905, 1909 et 1912, nous y trouvons le mot *vecteur* pour la première fois dans celui de la classe de mathématiques[1], dans la partie géométrie, puis dans les parties cinématique, et dynamique – statique[2].

L'introduction des vecteurs se fait, de façon assez évidente, pour le seul usage de la physique. Sont au programme des notions comme « moment linéaire par rapport à un point, moment par rapport à un axe, somme de moments, application à un couple de vecteurs », puis « vitesse représentée par un vecteur, accélération représentée par un vecteur » et enfin « force représentée par un vecteur ». En l'absence de commentaires officiels, qui n'existaient pas à l'époque, nous en sommes réduits à nous fier aux manuels, ou aux commentaires des mathématiciens ou pédagogues de l'époque, pour tenter d'approcher la mise en œuvre de ces programmes.

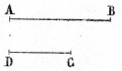
---

1 C'est la désignation de la classe de terminale scientifique pendant la première partie du XX^e siècle.

2 Pendant une très grande partie du XX^e siècle, la "mécanique" a fait partie du cours de mathématiques, au moins la cinématique. Ceci constituait en quelque sorte la partie théorique, la physique traitant ces mêmes matières d'un point de vue plus "pratique".

La remarque suivante établit le lien qui existe entre la somme de deux vecteurs et celle des nombres.

REMARQUE. — Si l'on a adopté pour les vecteurs un sens positif, on pourra représenter un vecteur par un nombre positif ou négatif, et on voit aisément que la définition de la somme de deux nombres est telle que cette somme représente le vecteur somme des vecteurs représentés par ces nombres.



Ainsi les vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$, étant représentés par $(+5)$ et (-3), sont de sens différents.

Le vecteur somme a le sens de $\overline{AB}$, vecteur de plus grande longueur.	Le nombre somme de $(+5)$ et (-3) a le signe de $(+5)$, qui a la plus grande valeur absolue.
Sa longueur est la différence $5-3$ des longueurs de $\overline{AB}$ et $\overline{CD}$.	Sa valeur absolue est la différence $5-3$ des valeurs absolues des nombres.

Multiplication.

21. D'après les conventions faites au début, nous savons qu'un vecteur est *représenté* par un nombre positif ou négatif ; conformément à la dénomination employée en arithmétique, nous dirons que le nombre qui représente un vecteur est la *mesure* de ce vecteur.

Pour que cette expression ait le sens ordinaire, il faut choisir un *vecteur unité* ; il est naturel de prendre pour vecteur unité le vecteur de longueur 1 dirigé dans un sens déterminé ; ce sera le sens *positif*.

Généralisant alors la notion de *multiplication*, nous pourrons dire que le vecteur mesuré par a est le *produit par a du vecteur unité* ; de cette définition, on déduit la conséquence suivante :

Le produit du vecteur unité par un nombre est un vecteur de même sens si le nombre est positif, de sens contraire si le nombre est négatif. Sa longueur est le produit de la longueur du vecteur unité par la valeur absolue du nombre.

Une nouvelle extension toute naturelle résulte du changement de vecteur unité : les définitions devant subsister, on peut d'une façon générale définir le *produit d'un vecteur par un nombre, un vecteur de même sens si le nombre est positif, de sens contraire si le nombre est négatif ; la longueur du vecteur nouveau étant le produit, par la valeur absolue du nombre, de la longueur du premier vecteur.*

Si maintenant nous remplaçons les vecteurs par les nombres qui les mesurent, nous serons conduits à la multiplication de deux nombres : il suffira de remplacer le mot *sens* par le mot *signe* et le mot *longueur* par les mots *valeur absolue.*

Extrait du *Traité d'algèbre* d'Auguste Grévy, 1913 [Gr]

Nous ne sommes pas extrêmement surpris de trouver les vecteurs du côté de la physique plus que des mathématiques. Ce sont en effet les physiciens qui se sont emparés de la notion de vecteur, sous l'influence de J. C. Maxwell (1831-1879), de J. W. Gibbs (1839-1903) et O. Heaviside (1850-1925), par exemple. En revanche, nous sommes assez étonnés de trouver dans certains manuels d'algèbre des classes de seconde et première, une première introduction des vecteurs, dans la partie nombres relatifs, en relation avec la notion de mesure algébrique. Les nombres relatifs ont été introduits en classe de troisième, ainsi que les opérations. Cette reprise ici, sans que ce soit explicitement au programme, reflète un besoin de justification théorique des règles, en particulier la règle des signes sur le produit, qui posent évidemment le plus de problèmes. En 1913, Auguste Grévy[3] écrivait : « C'est dans l'étude des longueurs dirigées que nous allons chercher l'origine des opérations sur les nombres » [Gr] ; sont définis dans la foulée les mots « vecteur » (portion de droite parcourue dans un sens déterminé) et « vecteurs équipollents » (s'ils sont parallèles, de même longueur et de même sens). On s'intéresse alors uniquement aux vecteurs à supports parallèles, on justifie les opérations sur ces vecteurs, en particulier la multiplication d'un vecteur par un nombre, par des considérations de sens de parcours, et le choix d'un « vecteur unité ». Un

3 Auguste Grévy fut un des premiers présidents de l'APMESP (devenue APMEP), de 1911 à 1912.

vecteur étant, par une sorte de convention, représenté par un nombre positif ou négatif, la seule substitution du mot *nombre* au mot *vecteur* permet de justifier les opérations sur les nombres relatifs.

Ce mode d'introduction qui tire ses racines des questionnements sur les négatifs et les imaginaires au XIX^e^ siècle, à la source, en partie, de l'origine du concept de vecteur, perdura très longtemps dans certains manuels, jusqu'à la période dite "des maths modernes", nous le constaterons. La seule allusion à cette présentation que nous ayons pu trouver dans les programmes date de 1945 ; elle se trouve dans le commentaire de la partie géométrie, pour la classe de mathématiques :

> [la] place [de l'étude des vecteurs] par rapport à la théorie des nombres algébriques n'est pas imposée.[4]

Nous comprenons mieux alors les critiques de certains mathématiciens sur les programmes de mathématiques, mais surtout sur certains manuels. Charles Ange Laisant (1841-1920) par exemple fut un des premiers à s'indigner de la façon dont les vecteurs étaient présentés dans l'enseignement français [La, 1912] :

> En France, non sans peine, **le mot** « vecteur » a fini par prendre droit de cité dans l'enseignement. Il figure dans une foule de programmes, aussi dans la plupart des livres classiques contemporains.
>
> Je dis **le mot**, avec intention, car il n'en est pas de même de la chose. Du mot, on use et je pourrais dire on abuse. La chose reste dans une pénombre mystérieuse.

Il s'attaquait ici probablement aux classes préparatoires et à l'enseignement supérieur au moins autant qu'à l'enseignement secondaire. Laisant, qui avait traduit en 1874 le *Traité des équipollences* de Bellavitis, présenté comme un système nouveau pour traiter des questions de géométrie, était le cofondateur de la revue *L'enseignement mathématique* en 1899. Il était donc très préoccupé par les questions d'enseignement et au cœur des discussions sur les différentes conceptions des vecteurs. Il distingua en particulier la théorie de Bellavitis de celle de Mourey[5], qui, selon lui, et malgré son intérêt, mêlait complètement les considérations de géométrie à celles d'algèbre [La, 1887] :

> Il [Mourey] avait certainement compris tout le profit que la géométrie pouvait tirer de la théorie des droites inclinées, mais sans effectuer assez nettement la séparation nécessaire entre le point de vue géométrique et le point de vue analytique.

---

4 A cette époque, les nombres algébriques sont introduits dès la classe de quatrième.

5 C. V. Mourey est l'auteur de l'opuscule *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires* (1828, réimpr. en 1861). Il eut une influence considérable sur ceux qui se sont préoccupés des questions concernant les imaginaires, les négatifs, les grandeurs orientées et les vecteurs.

> On voit donc que, s'il faut attribuer à Mourey la priorité d'appliquer à la géométrie les principes de l'algèbre directive, la part qui revient à M. Bellavitis n'en reste pas moins considérable, puisqu'il a le premier, créé, sous une forme réellement méthodique, un système nouveau de géométrie, lequel se prête de la façon la plus heureuse à un grand nombre de questions, et fournit souvent des résultats d'une extrême élégance.

Autrement dit, il serait dommage de restreindre l'utilité des « droites inclinées » à des questions d'algèbre. Laisant critiqua tout autant l'usage abusif du mot « vecteur » pour désigner des forces [La, 1912] :

> Mais c'est à tort qu'on a cru sortir de peine et tourner la difficulté en remplaçant le mot **force** par le mot **vecteur** ; et le tort est d'autant plus grand qu'on l'a fait sans le dire. On a surtout appelé vecteur ce qui n'est pas un vecteur, ni dans le langage des inventeurs, ni dans celui des géomètres qui ont fait usage de ce nouveau mode de calcul géométrique.

Il posait ainsi une question qui s'adresse aux mathématiciens, mais concerne au moins autant les enseignants : « Qu'est-ce qu'un vecteur ? » En 1915, dans la même revue, Émile Dumont, de Bruxelles, essaya d'y apporter une réponse [Du] :

> On distingue dans les deux articles précités de l'*Encyclopédie*[6] les vecteurs libres, glissants et liés ; on y distingue aussi les vecteurs axiaux et les vecteurs polaires. Mais on continue à confondre le vecteur géométrique et le vecteur numérique. Le premier est une grandeur géométrique dirigée ; le second est un nombre complexe : c'est le vecteur $ix + jy + kz$ de Hamilton. […] Or, la distinction entre grandeurs et nombres est une des préoccupations principales de l'enseignement des mathématiques ; la confusion des deux sortes de vecteurs est donc une erreur pédagogique.

Nous comprenons bien à travers ces débats que la notion de vecteur, pour les mathématiciens, était encore en discussion, autant pour sa définition que pour son usage. Il n'est donc pas étonnant de trouver un certain flottement dans les manuels du secondaire. Leur nécessité, même dans l'enseignement de la physique, semblait aussi discutée, même s'ils permettaient d'alléger parfois l'écriture et les calculs. Nous lisons ainsi, dans un article de 1904 sur l'enseignement élémentaire de la mécanique [Go] :

> Ce résumé était nécessaire pour faire ressortir l'utilité de la considération des vecteurs. […] Le langage gagne en précision, à notre avis, et même paraît simplifié ; en l'employant, on est moins exposé aux erreurs d'application qu'avec la forme en usage. Dans l'ignorance où nous

---

6 L'auteur fait allusion à deux articles rédigés, l'un par L. Lévy, « Fondements géométriques de la statique », l'autre par P. Langevin, « Notions géométriques fondamentales », dans l'*Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, tome IV (mécanique), 1912.

> sommes de la constitution intime des corps et des lois des forces mutuelles, les vecteurs servent à définir des forces de raison, conforme aux hypothèses sur la nature des corps.

L'auteur, Alexandre Gouilly, a développé un cours de mécanique traditionnel, puis, après un court exposé sur les vecteurs, essaie de défendre leur utilité, tant pour parler des forces, des vitesses et des accélérations que pour les calculs de la physique théorique. Nous comprenons mieux alors que les programmes, même timides, soient une incitation à diffuser la théorie des vecteurs, au moins dans le domaine de la physique.

Les programmes de 1925 correspondent à une période d' "égalité scientifique" où les élèves suivent les mêmes programmes de sciences, quelle que soit leur option, jusqu'à la classe de première comprise. Ils n'apportèrent pas de changements significatifs. Une seule mention supplémentaire des vecteurs apparut, dans le programme de la classe de mathématiques : on abordait en trigonométrie la somme géométrique des vecteurs.

Il fallut attendre les programmes de 1945 pour quelques nouveautés encore timides. On note dans la partie géométrie, pour la classe de seconde C et M[7], la notion de vecteur associée à celle de translation dans le plan, puis, en première, l'extension de ces notions à l'espace, ainsi que la définition de l'homothétie à l'aide des vecteurs. Nous trouvons aussi assez souvent, dans les manuels de la classe terminale de mathématiques, la définition du produit scalaire, à usage essentiellement de la physique, même si cela n'est pas inscrit dans le programme. Un autre changement se situe dans l'utilisation des vecteurs pour la notion de repérage et la définition des coordonnées rectangulaires. Les coordonnées et le repérage seront, dès lors, presque toujours associés aux vecteurs dans l'enseignement des mathématiques. Cette dualité qui fera disparaître, souvent implicitement, la notion même de vecteur, avait été soulignée par ceux qui avaient largement contribué à la diffusion des vecteurs, en Italie d'abord, puis en France, Cesare Burali-Forti (1861-1931) et Roberto Marcolongo (1862-1943) [BM] :

> C'est l'opinion de plusieurs, y compris ceux qui font usage des méthodes vectorielles ordinaires, que le calcul vectoriel ait nécessairement besoin des coordonnées cartésiennes et que la concision bien connue du calcul vectoriel soit due, en substance, au fait qu'on indique par une seule lettre une expression complexe. [...] Mais il est possible d'envisager le calcul vectoriel d'une tout autre manière. Notre calcul diffère substantiellement des calculs ordinaires, en ce qu'il peut opérer directement sur les éléments géométriques et physiques, sans avoir jamais besoin de recourir à aucune coordonnée. Notre calcul peut ainsi s'appeler intrinsèque, ou absolu, ou autonome.

7 Il s'agit des classes à option scientifique.

Nous remarquerons par ailleurs que dans ces programmes de 1945, l'usage des vecteurs pour la mécanique et la cinématique en terminale est encore amplifié, et ce, y compris dans la nouvelle section de sciences expérimentale qui voit alors le jour. On y trouve les expressions « vecteur vitesse », « vecteur accélération » et même « vecteur tournant ».

2. – Les années soixante

Nous avons examiné avec une attention particulière les manuels des années 1960, où l'enseignement des mathématiques, dans le secondaire, prend un vrai tournant, encore marqué de certaines traditions des années précédentes, mais déjà annonciateur de la réforme des "mathématiques modernes" et préfigurant les questionnements de la "Contre-Réforme" de 1981. Ceci est particulièrement marqué pour toute la partie *Éléments orientés, vecteurs*, qui prend enfin une place conséquente, du moins dans les classes scientifiques. À titre d'exemple, nous nous intéressons à deux couples de manuels – *Algèbre* et *Géométrie* – rédigés au début des années 1960 par Maurice Monge pour l'un, par Camille Lebossé et Corentin Hémery pour l'autre [M1, M2, LH1, LH2]. Ces ouvrages sont destinés aux élèves de la classe de seconde scientifique (A', C, M , M'). Il s'agit ici de voir à quelles occasions et pour quels objectifs la notion de vecteur est introduite dans ces manuels.

Les ouvrages de Monge

Algèbre : vecteurs et nombres relatifs. Le lecteur contemporain sera surpris de constater que les vecteurs sont d'abord introduits dans le manuel d'algèbre [M1]. Plus précisément, Monge introduit la notion de vecteur à l'occasion du chapitre sur les nombres relatifs. Cette notion permet de fonder l'existence et les propriétés des nombres relatifs sur l'étude d'une grandeur géométrique orientée : le vecteur.

Un vecteur est défini comme « un segment de droite qui joint un couple de deux points ordonnés ». Mais au-delà de cette définition générale, le manuel distingue plusieurs types de vecteurs.

Vecteurs glissants. Un vecteur glissant est un vecteur porté par un axe fixe, sur lequel il peut se déplacer « en conservant une mesure algébrique constante », c'est-à-dire qu'on « ne précise pas sa position sur l'axe ». Le choix d'un tel axe muni d'un vecteur unitaire d'une part, la mesure algébrique d'autre part, permettent d'associer un nombre relatif à un vecteur glissant par une « application biunivoque » :

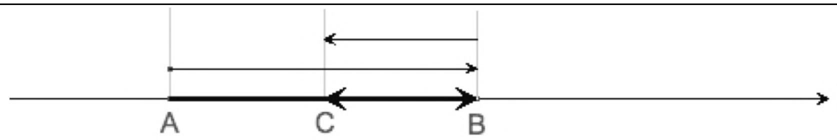
Mesure algébrique

Nombres relatifs
c'est-à-dire les couples
(signe, nombre arithmétique) $\longleftarrow$ $\longrightarrow$ Vecteurs

Axe muni d'un
vecteur unité

Cette correspondance entre nombres relatifs et vecteurs va permettre de définir les opérations sur les nombres relatifs et d'en établir les propriétés.

Pour l'addition d'abord, le lecteur « constate » que la somme de vecteurs glissants permet d'effectuer les additions de nombres relatifs, via la relation de Chasles :



$\overline{AB} = +\,4$, $\overline{BC} = -\,2$: nous constatons que $\overline{AC} = +\,2$.

Venons-en maintenant à la multiplication de nombres relatifs. La notion de rapport de vecteurs est introduite la première. Il s'agit du rapport des longueurs des segments, muni du signe conventionnel + si les deux vecteurs ont le même sens, et – sinon. Ce rapport définit un nombre relatif ; dès lors, le nombre relatif est conçu comme la réunion d'un rapport de longueur, qui fournit un nombre arithmétique, et d'un signe conventionnel, qui définit « un choix entre deux possibilités de sens ». Il faut noter ici que la considération en premier lieu d'un rapport dans l'intention de définir le produit de nombres relatifs est liée à la volonté de l'auteur de fonder l'étude de ces nombres sur la considération d'une grandeur géométrique.

De la définition du rapport de deux vecteurs se déduit immédiatement la définition du produit d'un nombre relatif par un vecteur de par l'équivalence des écritures :

$$\frac{\vec{V}_2}{\vec{V}_1} = a \qquad \text{et} \qquad \vec{V}_2 = a \bullet \vec{V}_1$$

Le produit des nombres relatifs a et b s'obtient alors comme rapport du vecteur $\vec{V}_3$ au vecteur $\vec{V}_1$, où $\vec{V}_3 = a \bullet (b \bullet \vec{V}_1)$. Cette définition très formelle aboutit immédiatement à la règle pratique du produit de deux nombres relatifs, connue aujourd'hui sous le nom de *règle des signes*.

Règle pratique de multiplication de deux nombres relatifs.

65. Il résulte des définitions précédentes que la valeur absolue du produit p (rapport de la longueur du vecteur $\overrightarrow{V_3}$ à la longueur du vecteur $\overrightarrow{V_1}$) est le produit des valeurs absolues des nombres relatifs a et b.

En ce qui concerne les signes, il suffit de comparer les sens des vecteurs $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$.

Nous savons que : $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ de même sens $\Longleftrightarrow$ a positif;
$\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ de sens contraires $\Longleftrightarrow$ a négatif;
$\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ de même sens $\Longleftrightarrow$ b positif;
$\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ de sens contraires $\Longleftrightarrow$ b négatif;
$\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_3}$ de même sens $\Longleftrightarrow$ p positif;
$\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_3}$ de sens contraires $\Longleftrightarrow$ p négatif.

Il résulte du tableau précédent que si a et b sont de signes contraires, $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_3}$ sont de sens contraires et p est négatif; si a et b sont de même signe, $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_3}$ sont de même sens et p est positif.

66. RÈGLES DES SIGNES : **Le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif; le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif.**

Les conclusions précédentes concernant les signes sont rassemblées dans le tableau suivant :

Signe du multiplicande a	Signe du multiplicateur b	Signe du produit p
+	+	+
−	+	−
+	−	−
−	−	+

Une fois les opérations sur les nombres relatifs définies sur la base de cette représentation géométrique vectorielle, les propriétés algébriques de ces opérations sont explicitées dans le détail afin d'établir que « l'ensemble R des nombres relatifs présente une structure d'anneau ».

Vecteurs liés. Un vecteur lié est aussi un vecteur porté par un axe, mais il possède une origine fixe O sur cet axe. Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ ci-dessous sont de tels vecteurs. Par le recours aux vecteurs liés, un nombre relatif détermine un point de l'axe et réciproquement.

« Le point C est l'affixe du nombre + 2 ; le point D est l'affixe du nombre – 1 »

Ainsi, l'ouvrage d'algèbre de Monge introduit les vecteurs pour fonder la connaissance des nombres relatifs sur l'étude d'une grandeur géométrique orientée. La notion de vecteur glissant permet d'établir les propriétés des opérations sur ces nombres, et celle de vecteur lié fournit une représentation géométrique de l'ensemble de ces nombres sous la forme d'une droite.

Géométrie : applications des vecteurs. La notion de vecteur est aussi abordée dans le manuel de géométrie [M2]. À cette occasion est définie une troisième notion de vecteur, le *vecteur libre*. Le *vecteur libre* est « seulement assujetti à demeurer équipollent à un vecteur lié donné $\overrightarrow{AB}$ », deux vecteurs équipollents étant « des vecteurs qui ont des supports parallèles, des longueurs égales, et qui sont de même sens ». Cette notion permet de définir la translation. Plus loin, dans une partie entièrement consacrée aux vecteurs et aux transformations, toutes les propriétés des opérations sur les vecteurs libres qui font de cet ensemble un espace vectoriel (terme non employé dans l'ouvrage) sont explicitées. L'étude des propriétés de la projection de vecteurs permet d'énoncer le théorème de Thalès dans le plan et dans l'espace. L'étude des propriétés de la translation et de l'homothétie aboutit à la résolution de problèmes, comme la construction des tangentes communes à deux cercles donnés.

Dans les ouvrages de Monge, l'étude de la notion de vecteur révèle donc trois préoccupations distinctes. D'abord, la notion de vecteur permet de fonder la connaissance des nombres relatifs sur l'intuition géométrique par l'étude d'une grandeur orientée. Ensuite, l'auteur, en dégageant systématiquement les structures mathématiques des objets étudiés, préfigure le formalisme de la réforme des mathématiques modernes. Enfin, dans le manuel de géométrie, les vecteurs interviennent comme un outil qui permet de démontrer des théorèmes et de résoudre des problèmes.

Les ouvrages de Lebossé et Hémery

Algèbre : vecteurs et coordonnées. À nouveau, comme chez Monge, les vecteurs sont introduits dans l'ouvrage d'algèbre. Cependant l'intention des auteurs est ici complètement différente. En effet, si l'étude des vecteurs apparaît dans la première partie du manuel d'algèbre, intitulée *Calcul algébrique*, elle arrive néanmoins après celle des nombres relatifs, et ne peut donc pas lui servir de fondement. En fait, les propriétés des nombres relatifs sont énoncées comme autant de règles et en l'absence de toute justification.

Le chapitre sur les vecteurs est plutôt bref. Il définit le vecteur comme « un segment de droite orienté », puis expose rapidement les notions de rapport de vecteurs parallèles, d'axe orienté, de mesure algébrique, ainsi que la somme de vecteurs et la relation de Chasles. Les applications proposées permettent de comprendre que ce court exposé est entièrement destiné à justifier la caractérisation analytique des propriétés géométriques en termes de coordonnées dans un repère. Par exemple, la propriété suivante fait suite à la relation de Chasles :

> Le milieu d'un segment a pour abscisse la demi-somme des abscisses des extrémités de ce segment.
>
> $$\boxed{m = \frac{a+b}{2}}$$

À la suite de ce chapitre, les vecteurs ne réapparaissent dans l'ouvrage que dans sa troisième et dernière partie, sur les fonctions, et en l'occurrence dans un paragraphe portant sur les coordonnées cartésiennes. Le recours à la notion de vecteur permet de traduire des propriétés géométriques en relations algébriques sur les coordonnées. Par exemple, sont présentées l'expression de la distance entre deux points du plan en fonction de leurs coordonnées, ou encore l'équation d'une droite du plan.

Géométrie : mesure algébrique et transformations. La notion de vecteur est introduite d'abord dans la première partie portant sur la géométrie plane. Elle permet d'y définir la notion de mesure algébrique :

> On appelle mesure algébrique d'un vecteur sur un axe le rapport de ce vecteur et du vecteur unitaire de l'axe [...] donc le nombre relatif qui a pour valeur absolue la longueur AB et pour signe + ou – suivant que le vecteur et l'axe sont de même sens ou non.
>
> $$\boxed{\overline{\mathrm{AB}} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\vec{i}} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AB}}\,\vec{i}}$$

Cette notion de mesure algébrique permet de généraliser les écritures de la division harmonique et du théorème de Thalès aux différentes configurations possibles. Dans la deuxième partie consacrée à la géométrie dans l'espace, les propriétés de certaines opérations (somme, produit par un nombre) sur l'ensemble des vecteurs sont établies. Puis sont étudiées la translation et l'homothétie, ce qui aboutit à la résolution de problèmes, comme la construction d'un cercle passant par un point donné et tangent aux côtés d'un angle donné.

Dans les ouvrages de Lebossé et Hémery, l'emploi de la notion de vecteur se fait donc selon trois axes assez différents de ce que nous avons vu chez Monge. D'abord la notion de vecteur permet de fonder la traduction des configurations géométriques en relations algébriques sur les coordonnées. Ensuite, elle induit la notion de mesure algébrique, qui permet de généraliser l'écriture des certaines relations entre grandeurs géométriques. Enfin l'introduction de transformations géométriques permet de résoudre certains problèmes de géométrie.

Du côté des programmes

Ces manuels répondent aux programmes du 18 juillet 1960, appliqués à la rentrée 1961. Ils concernent la classe de seconde A', C, M, M'. Il y a alors une différence notable entre les sections pour ce qui est des mathématiques. Ces programmes au demeurant auront une durée très brève. Dès 1969 se mettent en place les nouveaux programmes de "mathématiques modernes" en sixième et en seconde. Les vecteurs n'y sont pas mentionnés dans la partie Algèbre, mais uniquement, nous l'avons dit, dans la partie Géométrie, dans le paragraphe « Éléments orientés. Vecteurs ».

Un premier point préalable concerne les éléments orientés sur une droite, où l'on définit « les segments orientés », leur mesure algébrique, l'abscisse d'un point sur un axe, où l'on établit la « formule de Chasles » (sur les mesures algébriques), pour aboutir aux relations caractéristiques de la division harmonique de points alignés (en termes de mesure algébrique ou d'abscisses). Nous remarquons que, mises à part les relations sur les divisions harmoniques, tout ceci a déjà été défini et pratiqué dans les classes précédentes, de quatrième et de troisième. De la même façon, les nombres relatifs et les règles d'opérations sont pratiqués par les élèves depuis la classe de quatrième. Le repérage sur un axe a été défini en quatrième et les coordonnées rectangulaires en troisième, tout ceci en lien avec les mesures algébriques et les grandeurs orientées. Les élèves ne feraient donc ici que des révisions, ou des « consolidations », comme l'indiquent les instructions des programmes. Le choix de M. Monge d'utiliser la notion de vecteur pour justifier les opérations sur les nombres relatifs, en particulier la règle des signes pour le produit, est un choix personnel, dans la tradition de ce que nous avons noté au début du siècle. Hormis peut-être le vocabulaire un peu plus "moderne ", le parallèle est assez frappant avec l'ouvrage de A. Grévy. Nous rappelons qu'il s'agissait, là aussi, d'un choix personnel. Cette partie est, selon les manuels, traitée en géométrie, comme le suggèrent les programmes, ou en algèbre comme le font les deux auteurs étudiés.

Viennent ensuite les points concernant la notion de vecteur proprement dite.

2° *Vecteur*. Equipollence. Addition; associativité et commutativité. Vecteur nul; vecteurs opposés. Soustraction.

Projection d'un vecteur : sur un plan, parallèlement à une direction de droite; sur une droite, parallèlement à une direction de droite (géométrie plane), ou parallèlement à une direction de plan. Projection orthogonale d'un vecteur. Projection d'une somme ou d'une différence de vecteurs (sur un plan, sur une droite).

Projection sur une droite orientée; mesure algébrique de la projection d'un vecteur, d'une somme ou d'une différence de vecteurs.

3° Multiplication d'un vecteur par un nombre relatif; rapport de deux vecteurs parallèles.

Thèorème de Thalès en géométrie plane; problème réciproque. Théorème de Thalès dans l'espace; réciproque. Projection (sur une droite, sur un plan) du vecteur produit d'un vecteur par un nombre. Projection sur une droite orientée : mesure algébrique de la projection du vecteur produit d'un vecteur par un nombre.

4° Translation; homothétie. Définition. Transformés d'une droite, d'un plan d'un segment, d'un angle, d'un cercle.

Double propriété de distributivité, par rapport à l'addition, de la multiplication d'un vecteur par un nombre.

Triangles homothétiques dans un plan; application aux médianes d'un triangle.

Homothéties transformant l'un en l'autre deux cercles d'un plan; tangentes communes à deux cercles d'un plan.

(Les produits de translations et d'homothéties ne sont pas au programme.)

Le paragraphe 2° est aussi une redite de ce qui a été fait en classe de troisième. Les seules notions vraiment nouvelles se situent à partir du théorème de Thalès. Ce qui est cependant très différent, c'est le vocabulaire et la "modernité" de la présentation, comme nous l'avons déjà remarqué dans nos deux analyses de manuels. Cette volonté est soulignée dans les « instructions » (encadré ci-contre), qui sont relativement étoffées, ce qui est notable, car les commentaires étaient jusqu'alors soit inexistants, soit brefs.

La plupart des auteurs ont pris en compte ces recommandations. Voici par exemple ce que l'on peut lire dans la préface du manuel de mathématiques de G. Girard et A. Lentin [GL] :

> Nous avons essayé de familiariser les élèves avec l'esprit des Mathématiques modernes, sans nous rendre esclaves d'un formalisme exagéré.
>
> Si l'exposition de l'algèbre témoigne plus immédiatement peut-être de cette préoccupation, on constatera aussi un souci constant de présenter la géométrie d'une manière propre à éviter plus tard une révision « déchirante ». Les premiers linéaments sont tracés et les pierres d'attente posées en vue de la construction axiomatique que nous estimons souhaitable et utile au niveau de la classe de Mathématiques. [...] Il paraît assurément difficile à l'heure actuelle de contenter tous ceux qui se préoccupent de l'enseignement des mathématiques, et, à vouloir garder un juste milieu, on s'expose peut-être à recevoir des critiques sur les deux flancs.

EXTRAITS DES INSTRUCTIONS RELATIVES AUX PROGRAMMES DU 18 JUILLET 1960

Les programmes de mathématiques du Premier Cycle ont permis aux jeunes élèves de prendre contact, à partir de leur monde familier, avec un certain nombre de notions, avec quelques représentations symboliques d'êtres et de relations, avec les éléments d'un raisonnement logique. Ces connaissances, non négligeables, ne peuvent pas être considérées comme définitivement acquises et disponibles, car il faut tenir compte de l'âge des enfants, comme des difficultés et des défauts inhérents à tout enseignement collectif; il convient donc, au début du Second Cycle, de les reprendre pour les ordonner, les clarifier et les consolider.

Certains chapitres du nouveau programme des classes de Seconde A', C, M, M' répondent à cette exigence; parmi eux figure naturellement celui qui concerne la « géométrie dans l'espace » dont les éléments présentés sommairement dans la classe de Troisième doivent maintenant être étudiés de façon méthodique. [...]

L'initiation au raisonnement logique.

[...] C'est à l'enseignement du Second Cycle qu'incombe la tâche d'entreprendre et de poursuivre une initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique et à ses moyens d'expression, étant bien entendu que ces notions ne doivent pas faire l'objet d'un exposé systématique, théorique et abstrait; elles doivent être dégagées et précisées peu à peu, puis être mises à l'épreuve, à l'occasion de l'étude méthodique et réfléchie des diverses théories et des nombreux problèmes que comporte chacune d'elles.

L'exposé des premiers éléments d'algèbre et de géométrie.

[...] La présentation des toutes premières notions pose, dès l'abord, un problème délicat, car la tentation est bien naturelle d'essayer de bâtir, dans l'abstrait, un édifice d'une parfaite rigueur. [...]

Un exposé strictement axiomatique, séparant totalement les êtres mathématiques de leur origine concrète, du cadre réel de leur création, ne peut guère donner de résultats valables en Seconde et en Première; mais il n'est pas exclu, bien au contraire, d'attirer l'attention, dès ce moment, sur la nature et la signification des définitions et des hypothèses que l'on adopte, sur les faits et les propriétés que l'on « admet » afin de réserver l'avenir et de faire comprendre que de nouvelles étapes restent à parcourir.

Importance du calcul numérique.

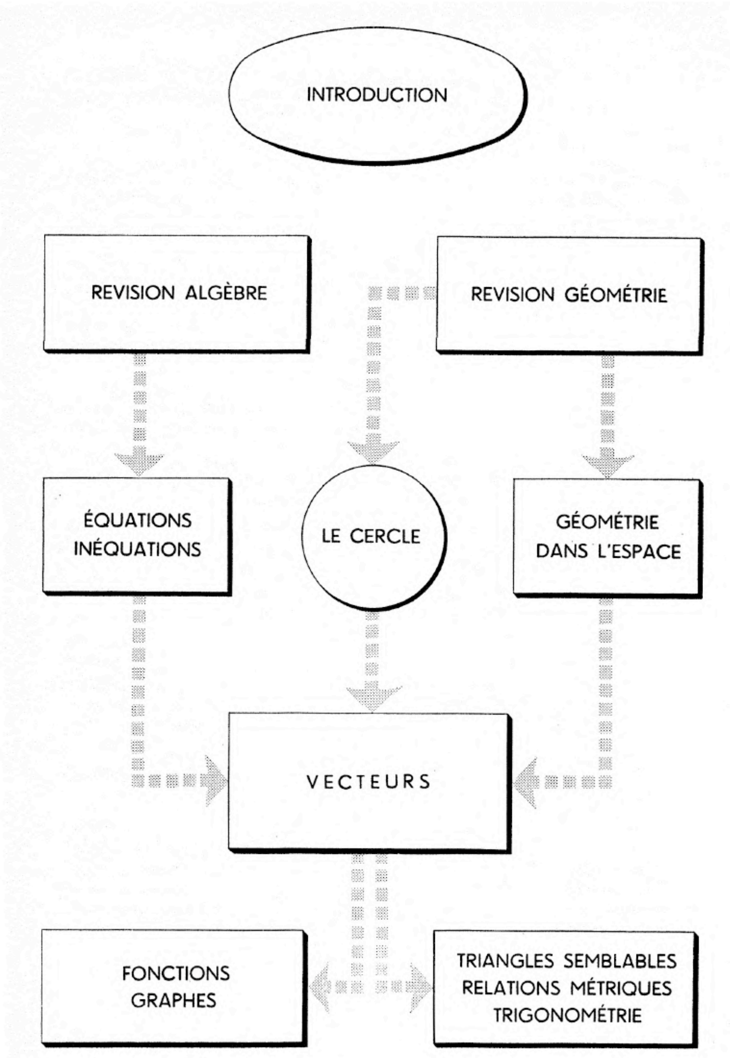
Le calcul numérique doit tenir, dans l'enseignement des mathématiques, une place de choix. S'il n'est mentionné dans le texte du programme que sous telle ou telle rubrique, il est bien évident que de nombreux problèmes fournissent l'occasion naturelle de proposer un exercice raisonnable de calcul. [...]

Les notions « modernes ». Le vocabulaire et le symbolisme.

Le libellé du programme ne fait pas explicitement mention de certaines notions simples sur les ensembles ni du vocabulaire actuellement admis pour les désigner : réunion, intersection, ensembles complémentaires, inclusion, appartenance.... Il n'est nullement question d'en proscrire l'emploi; les unes et les autres se rencontrent en fait très fréquemment, dans la plupart des théories; il convient de les dégager peu à peu, de les faire reconnaître, puis de les définir, à partir de nombreux exemples où elles interviennent naturellement. Ainsi apparaîtra leur intérêt par les applications qu'on peut en faire, par la simplification ou la clarification qu'elles sont susceptibles d'apporter dans une recherche ou dans un exposé.

D'autres notions, telles que celles qui touchent aux structures d'ensembles : groupes, anneaux, corps, pourront aussi être introduites, à condition que le terrain ait été d'abord soigneusement préparé; elles peuvent faciliter la présentation de certaines synthèses et permettre des comparaisons utiles pour l'avenir.

Tout cela est évidemment annonciateur de ce qui va suivre dans les années 1970, qui sera d'ailleurs, notons-le au passage, presque aussi éphémère, puisque dès 1981 interviendra la "Contre-Réforme". Quoi qu'il en soit, il est notable de trouver dans la structure de ces programmes la notion de vecteur comme notion centrale, ainsi que le met en évidence le schéma suivant extrait du même manuel, Girard et Lentin :



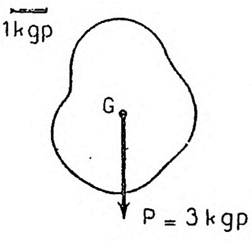
Ce programme bien sûr ne concernait que les classes scientifiques, mais s'inscrivait dans la continuité des enseignements qui allaient suivre. Tout était prêt finalement pour aborder en classe de première (A', C, M, M'), puis en "maths élém", les notions de produit scalaire, de produit vectoriel, de transformations et d'espace vectoriel, avant d'aborder l'algèbre linéaire dans l'enseignement supérieur. Mais certains restes des anciennes conceptions demandaient probablement à être rafraîchis. Il n'était peut-être pas aisé par exemple de faire le tri entre les vecteurs liés, libres, glissants, … sans compter les vecteurs de la physique, les vecteurs polaires, les vecteurs moments, comme on peut le lire ci-après[8] :

8 Extrait d'un manuel de physique de 1959, seconde A', C, M, M', par Eurin et Guinot.

25. Les trois éléments caractérisent le poids d'un corps. — Ces travaux pratiques sur le centre de gravité nous ont permis de mettre en évidence un troisième caractère essentiel du poids d'un corps :

▶ *La ligne d'action du poids d'un corps passe toujours par un point fixe de ce corps qui est son centre de gravité, appelé aussi point d'application du poids du corps.*

Finalement, le poids est caractérisé par les trois éléments suivants : sa direction (la verticale) et son sens (vers la Terre); sa grandeur (valeur du poids); son point d'application (centre de gravité).



26.

Nous conviendrons de représenter un poids par un **vecteur** qui a pour support la ligne d'action du poids, pour sens le sens du poids : le vecteur est donc vertical, dirigé vers le bas. On donne à ce vecteur une longueur proportionnelle à la grandeur du poids, en précisant l'échelle utilisée. Enfin l'origine du vecteur est le centre de gravité du corps (*fig. 26*).

Il n'est pas inutile, à la fin de ce chapitre, d'attirer l'attention entre les deux sortes de vecteurs que nous venons de rencontrer, et qui ne sont *pas de même nature*.

Le vecteur force $\vec{F}$ est souvent appelé *vecteur polaire* : il tend à produire un mouvement le long et *dans le sens de son axe*; s'il en existe plusieurs, on peut les composer suivant les règles indiquées : leur résultante est aussi un vecteur polaire, possédant un point d'application bien déterminé, tout comme une force ordinaire.

Il en est tout autrement du vecteur moment $\vec{\Gamma}$ (*voir* § : 57); celui-ci ne tend pas à produire un mouvement le long de son axe, mais *autour de son axe*, et ce dans un sens bien déterminé, indiqué précisément par la règle du tire-bouchon; c'est un *vecteur axial*. On démontre que de tels vecteurs se composent eux-aussi d'après la règle du parallélogramme, pour donner un vecteur axial (ou vecteur moment) résultant, de telle sorte que finalement le corps tende à tourner autour de lui; cette résultante n'a pas de point d'application bien déterminé, c'est encore un vecteur glissant (*voir* § 57).

On conçoit que la composition entre eux d'un vecteur axial et d'un vecteur polaire ne conduirait à rien et serait absurde : ils ne sont pas de même nature.

La notion de vecteur est certes difficile à appréhender, du segment orienté à la “flèche”, du bipoint au triplet (longueur, direction, sens), de la translation à l'élément d'un espace vectoriel. Mais peut-être pouvons nous regretter à l'instar de ce que Pierre Legrand écrivait en 1997 [Le] :

> L'évolution des vecteurs dans notre enseignement secondaire, depuis cinquante ans peut se résumer ainsi : un quart de siècle d'avancée, un quart de siècle de recul.

Bibliographie

[AL] Max ABRAHAM & Paul LANGEVIN, « Notions géométriques fondamentales », *in* : *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, tome IV, vol. 5, Paris : Gauthier-Villars, 1912, p. 1-60 ; repr., Paris : J. Gabay, 1992.

[B] Anne BOYÉ, « Des chemins ou lignes dirigées… aux vecteurs », *in* : *De grands défis mathématiques d'Euclide à Condorcet*, Paris : Vuibert Adapt-SNES, 2010, p. 81-96.

[BC] Anne BOYÉ & M. Céline COMAIRAS, *Les moins que rien et les imaginaires mènent au réel*, Nantes : IREM des Pays de la Loire, 1998.

[BD] Cissé BA & Jean-Luc DORIER, « Aperçu historique de l'évolution de l'enseignement des vecteurs en France depuis la fin du XIXe siècle », *L'ouvert* 113, Strasbourg, 2006, p. 17-30.

[BM] Cesare BURALI-FORTI & Roberto MARCOLONGO, *Éléments de calcul vectoriel avec de nombreuses applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique mathématique*, traduit de l'italien par S. Lattes, Paris : Hermann, 1910.

[C] Michael J. CROWE, *A history of Vector Analysis*, Notre Dame (Indiana) : University of Notre Dame Press, 1967, rééd. New York : Dover, 1985.

[Da] Jean-Pierre DAUBELCOURT, *Évolution des programmes d'analyse et de géométrie au vingtième siècle en classe de terminale scientifique*, en ligne : http://jpdaubelcourt.pagesperso-orange.fr

[Du] Émile DUMONT, « Sur les bases de l'analyse vectorielle », *L'enseignement mathématique* 17, 1915, p. 81-93.

[F] F. G. M., *Cours d'algèbre élémentaire, conforme aux derniers programmes de l'enseignement secondaire* (1902), 5e édition, Tours : Mame, 1909.

[Fl1] Dominique FLAMENT (dir.), *Le nombre une hydre à n visages*, Paris : Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 1997.

[Fl2] Dominique FLAMENT, *Histoire des nombres complexes, entre algèbre et géométrie*, Paris : CNRS éditions, 2003.

[GL] Georges GIRARD & André LENTIN, *Mathématiques, seconde A'CMM'*, cours Maillard, Paris : Hachette, 1961.

[Go] Alexandre GOUILLY, « Sur l'enseignement élémentaire de la mécanique », *L'enseignement mathématique* 6, 1904, p. 17-18.

[Gr] Auguste GREVY, *Traité d'algèbre à l'usage des élèves de mathématiques A et B et des candidats aux écoles*, Paris : Vuibert, 1913.

[La, 1887] Charles–Ange LAISANT, *Théorie et applications des équipollences*, Paris : Gauthier-Villars, 1887.

[La, 1912] Charles–Ange LAISANT, « Qu'est-ce qu'un vecteur ? », *L'enseignement mathématique* 14, 1912, p. 362-365.

[LH1] Camille LEBOSSÉ & Corentin HÉMERY, *Géométrie classe de seconde A'CMM'*, Paris : Nathan, 1961.

[LH2] Camille LEBOSSÉ & Corentin HÉMERY, *Algèbre classe de seconde A'CMM'*, Paris : Nathan, 1961.

[Le] Pierre LEGRAND, *Profession enseignant, les maths en collège et en lycée*, Paris : Hachette éducation, 1997.

[LT] Lucien LÉVY, d'après Heinrich Emil TIMERDING, « Fondements géométriques de la statique », *in* : *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées*, t. IV, vol. 2, Paris : Gauthier-Villars, 1912, p. 1-144, réimpr. Paris : J. Gabay, 1992.

[M1] Maurice MONGE, *Algèbre classe de seconde A'CMM'*, Paris : Belin, 1961.

[M2] Maurice MONGE, *Géométrie classe de seconde A'CMM'*, Paris : Belin, 1961.

[Mo] C. V. MOUREY, *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires*, Paris, 1828, 2e éd. Paris : Mallet-Bachelier, Paris, 1861, repr. Dijon : IREM de Dijon, 1992.

[W] Charles Ernest WEATHERBURN, *Elementary Vector Analysis with Application to Geometrical Physics*, Londres : Bell and Sons, 1921.