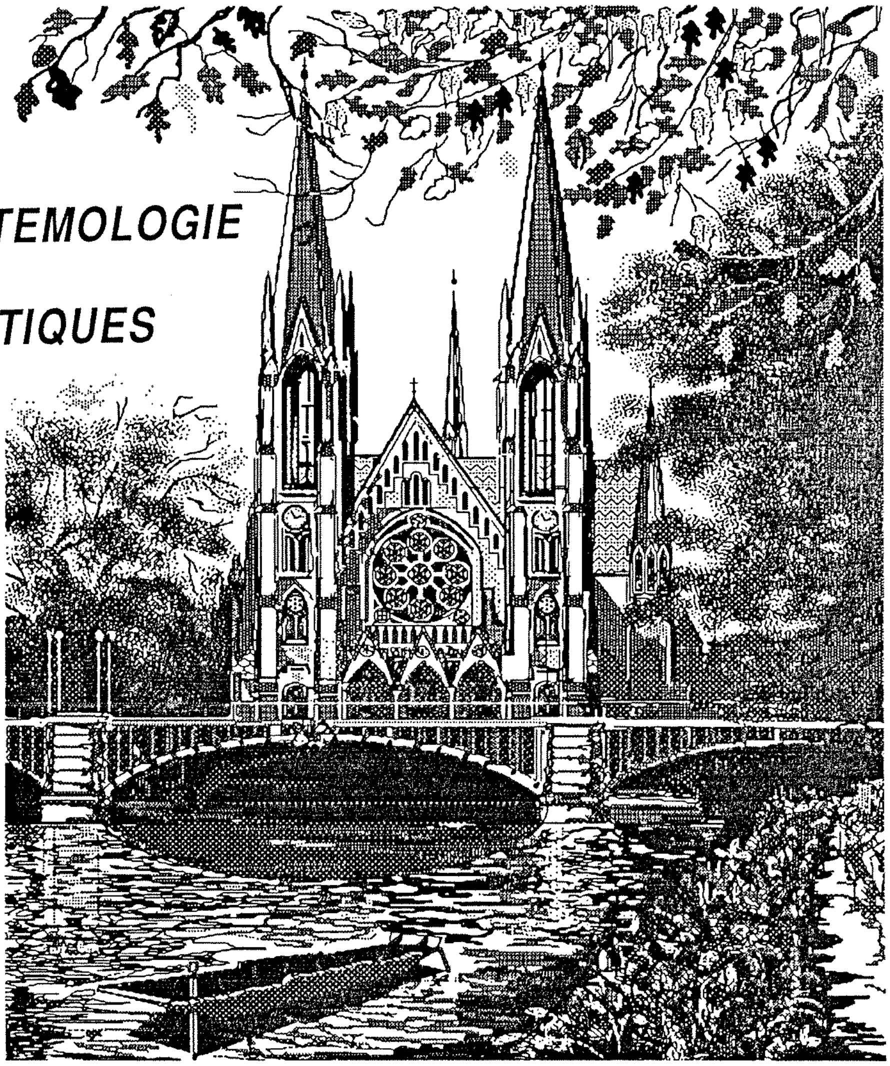
ACTES DU COLLOQUE INTER-IREM

HISTOIRE et EPISTEMOLOGIE des MATHEMATIQUES



STRASBOURG

22-23 MAI 1987

LES MATHEMATIQUES DANS LA CULTURE D'UNE EPOQUE

Université Louis Pasteur
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
10, rue du Général Zimmer
67084 - STRASBOURG Cedex
Tel. 88.41.63.00

ACTES DU COLLOQUE INTER-IREM

STRASBOURG 22-23 MAI 1987

HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES

LES MATHEMATIQUES DANS LA CULTURE D'UNE EPOQUE

Université Louis Pasteur
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
10, rue du Général Zimmer
67084 - STRASBOURG Cedex
Tel. 88.41.63.00

Photo couverture : L'Eglise SAINT PAUL de STRASBOURG a été admirée par les participants du Colloque lors de la promenade en bateau mouche sur l'Ill.

INTRODUCTION

Le thème du sixième colloque national des I.R.E.M. sur l'Epistémologie et l'Histoire des mathématiques fut celui des mathématiques dans la culture d'une époque.

Mathématiques et culture d'une époque ? L'association peut surprendre : comme le remarque Michel Foucault, les mathématiques sont "telles qu'elles peuvent reprendre chacun des épisodes de leur devenir historique à l'intérieur de leur système déductif". De fait, l'histoire des mathématiques peut trouver à l'intérieur même de son sujet une unité et une logique.

Mathématiques dans la culture d'une époque ? L'inclusion implique une problématique de la connaissance dans laquelle la production du savoir mathématique d'une époque s'articule à la pensée philosophique, aux questions théologiques, éducatives ou artistiques, aux idéologies, aux problèmes techniques, économiques et sociaux de cette époque.

L'apparente contradiction de la première interrogation, l'enchevêtrement que suppose la seconde et la prise en compte des deux dans l'enseignement des mathématiques étaient au centre des interventions et des échanges de ce colloque.

S'il est une question qui peut paraître paradoxale aux enseignants de mathématiques c'est bien celle de l'historicité de la notion de rigueur. Pourtant, les efforts déployés par les mathématiciens au début du XIXème siècle pour introduire plus de rigueur dans les fondements de l'analyse permettent de saisir cette historicité. Par là même, l'apprentissage de la rigueur se présente sous un nouveau jour. De même, les difficultés soulevées par l'introduction des infiniment petits attestent que l'élaboration des concepts mathématiques ne peut être séparée des controverses métaphysiques qui l'ont accompagnée. Plus largement, le climat culturel d'une époque peut influencer les relations à l'intérieur de la communauté scientifique, mais aussi le contenu même de la production scientifique, comme le souligne l'étude des mathématiques à l'âge baroque. L'examen de la biographie de Sophie Germain et l'analyse du cadre institutionnel de la recherche à la fin du XIXème siècle relèvent également que les conditions sociales jouent un rôle dans le développement du savoir mathématique.

Hasard ou non ? Le savant le plus honoré lors de ses journées fut Christian Huygens, auquel quatre ateliers furent consacrés. Il est vrai que ce hollandais, qui fut l'un des premiers membres de l'Académie des Sciences, vit dans son temps : son pendule cycloïdal veut servir à la détermination des longitudes en mer, sa description planétaire est utilisée dans la construction d'un automate, son calcul des probabilités est appliqué par De Witt dans une argumentation financière. Après Huygens, l'élaboration de la carte de Cassini donne un nouvel exemple d'articulation entre questions pratiques et résultats théoriques, et l'introduction des procédés statistiques et probabilités se trouve liée au XIXème siècle à la gestion de questions sociales.

Les rapports entre mathématiques et philosophie ont été abordés à plusieurs moments de ce colloque avec les théories pythagoriciennes, l'opposition entre les conceptions des mathématiques de Descartes et de Pascal, l'élaboration des concepts mathématiques cantoriens et la polémique entre Bergson et Borel. L'élaboration du savoir mathématique et la diffusion de ce savoir sont inséparables de la constitution d'une écriture et d'un langage scientifique : cette problématique apparaît dans la préhistoire des mathématiques, dans l'écriture des textes mathématiques hébraïques au XIIème siècle aussi bien que dans l'élaboration du symbolisme algébrique. Le passage du savoir savant au savoir enseigné est une autre facette de la diffusion du savoir abordée également pendant ces journées.

Plusieurs ateliers qui se sont tenus lors de ce colloque prolongeaient la reflexion historique et épistémologique sur le terrain didactique et pédagogique. Les nouveaux programmes des lycées incitent les enseignants à "mettre en valeur le contenu culturel des mathématiques" et soulignent le rôle que peut jouer ici l'introduction d'une perspective historique. Les participants à ce colloque ont pu trouver des références et des exemples : lecture d'un texte de Huygens en classe de 3ème, étude des calculs d'Archimède en Terminale C, activités interdisciplinaires sur le Pythagorisme, problèmes tirés des mathématiques grecques pour le collège, activités arithmétiques dans l'enseignement secondaire.

Le colloque de Strasbourg fut extrêmement riche aussi bien par la quantité que par la qualité et la diversité des interventions. La réussite de cette manifestation doit aussi être mise au compte des organisateurs de ces journées, Jean-Pierre FRIEDELMEYER et Claudine KAHN, que nous remercions pour leur efficacité et leur accueil très chaleureux. Nous remercions également Monsieur le Recteur de l'Académie de Strasbourg d'avoir ouvert ces journées avec une allocution qui fut vivement appréciée par les participants. Nous remercions aussi le Directeur et le Personnel de l'I.R.E.M. de Strasbourg qui ont rendu possible la parution de ces Actes. Nous remercions enfin l'Association pour le Développement de l'Histoire et de l'Epistémologie dans la Recherche et l'Enseignement des mathématiques et la Société d'Histoire de la Médecine, des Sciences et des Techniques pour leur soutien.

Evelyne BARBIN
Responsable de la Commission inter-I.R.E.M.
Epistémologie et Histoire des Mathématiques

TABLE DES MATIERES

COLLOQUE Inter-I.R.E.M. 1987

Histoire et Epistémologie des Mathématiques

"LES MATHEMATIQUES DANS LA CULTURE D'UNE EPOQUE"

STRASBOURG 22-23 MAI 1987

Organisé par la Commission Inter-I.R.E.M. Epistémologie et l'I.R.E.M. de STRASBOURG

Avec le soutien de :

— l'A.D.H.E.R.E.M. (Association pour le Développement de l'Histoire et de l'Epistémologie dans la Recherche et l'Ensqeignement des Mathématiques)

— la S.H.M.S.T (Société d'Histoire de la Médecine des Sciences et des Techniques)

PRESENTATION DES CONFERENCES - EXPOSES ET ATELIERS

I.R.E.M. de STRASBOURG
10, rue du Général Zimmer
67000 STRASBOURG

M.F. JOZEAU / M. HALLEZ

La description planétaire de Huygens
Etude du texte : "Descriptio automati planetarii"
dans une classe de 3ème.

1° Climat philosophique de l'époque

2° Christian Huygens : sa présence à Paris en 1666 à 1681

3° Etude du texte écrit lors de son séjour à Paris

Huygens décrit la construction d'un automate planétaire.
Il calcule avec précision les rapports de démultiplication permettant de reproduire les mouvements de chaque planète et les vitesses relatives de leurs rotations pour obtenir le nombre des dents des roues de sa mécanique. Comme mesure des vitesses de rotation réelles des planètes il utilise les tables récentes de l'astronome Riccioli. Par exemple, Saturne parcourt une distance angulaire de 12° 13' 34" 18"' sur l'ecliptique en un an, la terre parcourt une distance angulaire de 359° 45' 40" 31"'. Il transforme ces mesures en tierces et cherche une "meilleure" approximation pour le rapport des deux distances. Il obtient le rapport 206/7. Sa machine comportera donc 206 dents pour la roue de Saturne et 7 pour la roue motrice.
L'automate fut réalisé en 1682 par Johannes Van Ceulen et est visible au Musée Boerhave à Leyde.

N. ROUCHE/ H. MASY/ M. ANNOY

La théorie des chocs chez Descartes, Huygens
et dans la nature

On lira des textes très largement contradictoires de Descarttes et Huygens sur les chocs entre deux boules élastiques. Pour se faire une opinion, les participants disposeront, par delà les argumentations des deux auteurs, de pendules doubles à masses soit égales, soit inégales, leur permettant d'observer des chocs. L'atelier ne requiert aucune connaissance préalable.

F. EYSSETTE/ M. ZERNER

Histoire des Mathématiques dans la formation des
professeurs de Collège

L'atelier présente un travail effectué dans le cadre d'un stage long de formation continue pour des professeurs de collèges (stages dits de didactique). Le stage comportait cinq modules dont deux de géométrie et un d'histoire des maths. Ce dernier a comporté trois séquences :

- programmes et manuels de géométrie au début du siècle,
- Euclide,
- les débuts de la géométrie analytique : Fermat et Descartes.

L'atelier sera divisé en trois parties :

- présentation du stage et du module
- travail sur quelques textes vus avec les stagiaires (démonstrations d'un cas d'égalité des triangles dans trois manuels de 1911 et chez Euclide),
- discussion sur les réactions des stagiaires, l'intérêt et les difficultés de ce type de travail.

Nous comptons beaucoup sur la troisième partie !

En cette matière, Aryabhata lui-même ne semble pas être un novateur et ses écrits témoignent d'un savoir déjà bien établi. Ils ne nous renseignent malheureusement pas sur les phases successives de l'établissement des connaissances qu'ils attestent.

M. BUHLER

Algorithmes de calcul chez Archimède

Compte rendu d'une expérimentation en T.C.

- Problème à la maison de recherche d'algorithme de calcul de π en suivant la méthode d'Archimède dans "La mesure du cercle".
- Correction en classe suivie de la lecture du texte (proposition 3 et première partie de la démonstration).

Durant l'atelier, nous lirons le texte et essaierons de voir les différentes manières de l'exploiter en classe :

- algorithme de calcul de π, mais aussi problème des approximations employées par Archimède au cours du calcul 265/153 pour $\sqrt{3}$ par exemple).
- prolongement possible avec d'autres textes sur π
- exploitation différente à différents niveaux.

R. CUCULIERE

Nombres et Culture

L'arithmétique, ou Théorie des Nombres, est avec la Géométrie la plus ancienne discipline mathématique. Elle est née et s'est développée comme science libérale, réflexion pure sur les harmonies numériques. Et il est apparu que ces jeux spéculatifs, qui semblaient purement intellectuels, avaient des applications dans divers domaines scientifiques. Ainsi, la science des nombres est parties intégrante de la culture d'une époque et il est difficile d'admettre le fait qu'elle ait été chassée de notre enseignement secondaire, ce qui ne saurait durer. Telles sont les idées principales que l'on voudrait illustrer sur quelques exemples : nombres figurés, équations diophantiennes, nombres premiers, entiers complexes, fractions continues.

J.P. FRIEDELMEYER/O. GEBUHRER

Les efforts de rigueur en analyse au début du XIXe siècle

Il peut paraître paradoxal de lier le concept de rigueur à une époque historique. N'enseigne-t-on pas à longueur de cours de lycée ou de faculté que les mathématiques sont rigoureuses ou ne sont pas, que la vérité mathématique est le *modèle* de la vérité claire, incontestable, sans ambiguïté et donc éternelle ? Que ce qui était vrai pour Euclide l'est encore aujourd'hui ?
Alors pourquoi Cauchy éprouve-t-il le besoin de préciser dans son Cours d'Analyse que : "quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur que l'on exige en géométrie..." Comment ! On aurait dont fait des mathématiques non rigoureuses ? Qui ? ... Des noms ! ... Mais au fait, n'est-ce pas le même Cauchy qui dans le même cours cité, énonce et démontre (!) le théorème "Lorsque les différents termes (d'une) série sont des fonctions d'une même variable x continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x"?
L'atelier vous propose, à partir de la lecture de quelques pages d'Euler,

X. LEFORT/A.BOYE

La carte de CASSINI

A la suite de la création d'un réseau IREM sur l'élaboration de la carte de CASSINI, une documentation conséquente a pu être réunie et des activités interdisciplinaires réalisées, ces dernières années au lycée de LA BAULE.

L'atelier proposé consiste, essentiellement à partir de documents :

- à retracer l'historique de la carte de CASSINI (plus d'un siècle de péripéties !),
- à doner un aperçu de trigonométrie sphérique,
- à retrouver les méthodes pratiques et théoriques utilisées pour la levée de la carte,
- à présenter l'expérience interdisciplinaire du lycée de LA BAULE.

Y. MAREC

Institutions sociales et statistiques à la fin du XIXe siècle

L'atelier portera sur l'introduction des procédés statistiques et probabilistes dans la gestion des institutions sociales et plus précisément celle des mutuelles à la fin du XIXe siècle.

A partir d'un ensemble de documents concernant l'utilisation des statistiques sociales (tables de morbidité et de mortalité, etc.. on en soulignera les enjeux idéologiques

On s'attachera plus particulièrement à dégager la signification des modifications intervenues dans la législation sociale à la fin du XIXe siècle (lois de 1898 sur les accidents du travail et la mutualité).

T. COULHON

Deux conceptions des mathématiques du XIIe siècle :
Descartes et Pascal

Au XVIIe siècle, les mathématiques sont sans cesse convoquées, à titre de paradigme de méthode et de modèle de certitude, au sein même de l'activité philosophique. Mais leur unité en tant que champ de savoir et de pratique, et l'univocité de leur statut sont plus revendiquées que réelles. Ainsi, en continuité avec leurs préoccupations métaphysiques, Descartes et Pascal développent dans deux textes qui se répondent à plus d'un titre, les *Regulæ ad directionem ingenii et l'Esprit de la géométrie*, deux visions différentes des mathématiques. En comparant parallèlement leurs activités de mathématiciens à partir de la Géométrie de Descartes et de quelques traités mathématiques de Pascal, on essaiera de mettre en place un système d'oppositions autour des axes suivants :

1° Ouverture et fermeture du champ mathématique

2° Structuration du discours mathématique

3° L'épaisseur du discours mathématique et ses redoublements.

On se proposera par ce biais de contribuer à élaborer une notion de style mathématique, susceptible d'aider à terme à une lecture sensée et différentielle de textes mathématiques contemporains.

H. GISPERT

Développement des mathématiques et cadre social institutionnel
à la fin du XIXe siècle

Je me propose de dégager le rôle que peuvent jouer les institutions et les conditions sociales de l'exercice de la recherche dans le développement du savoir mathématique à partir de deux exemples (1° le mouvement de refonte des principes de l'analyse en Europe – 2° les spécificités nationales des d'organisation, mais aussi le contenu même de la production scientifique. Cette interaction entre les mathématiques et le baroque sera présentée à partir des études réalisées au Séminaire Interdisciplinaire d'Histoire des Sciences du Lycée Malherbe de Caen.

T. LEVY

Les premiers textes mathématiques hébraïques au XIIe siècle :
contexte historique et constitution d'un langage scientifique.

Les premiers écrits proprement mathématiques rédigés en hébreu apparaissent au XIIe siècle dans le Sud de l'Europe. Ils visent à mettre à la disposition de communautés qui ne lisent pas l'arabe les concepts fondamentaux des mathématiques et de l'astronomie. La rédaction d'ouvrages originaux, ainsi que le mouvement de traduction d'ouvrages arabes qui se développe surtout au XIIIe siècle, répondront à deux exigences : forger un langage qui reste fidèle à la langue des sources hébraïques, et en même temps s'ouvrir aux nouvelles notions véhiculées par les textes mathématiques arabes, originaux ou traduits du grec.
Deux auteurs dominent cette période fondatrice : Abraham bar Hiyya (1065 - 1145) et Abraham ibn Ezra (1092 - 1167). Nous présenterons et commenterons leurs principales créations.

H. MASY

Lectures et activités autour de l'axiome
d'intégrité dans les fondements de la géométrie
de Hilbert

Dans la première édition des *Fondements de la Géométrie,* seul l'Axiome d'Archimède est mentionné sous le titre " Axiome de Continuité". Dans la suite, Hilbert le complète par un axiome d'Intégrité. Nous suivrons, dans les grandes lignes, l'évolution de cet axiome à travers les onze éditions des Fondements, et quantité même infiniment petite ; d'autre part, le produit d'un infiniment petit par un entier ne saurait égaler ni dépasser une quantité "ordinaire", ce qui contrevient à ce que nous appelons aujourd'hui l'axiome d'Archimède. Confronté directement à ces difficultés, en particulier dans sa réponse aux objections de Nieuwentijt, Leibniz assuma ces choix. Plus tard cependant, au grand dam des principaux adeptes de son nouveau calcul, il considéra les infiniment petits comme des fictions utiles ayant néanmoins leur fondement dans le réel, au même titre que les nombres imaginaires. Ces difficultés ne seront surmontées vraiment (de 2 façons différentes) qu'aux 19e et 20e siècles.

SOPHIE GERMAIN
UNE FEMME AUX MARGES DE LA COMMUNAUTE SCIENTIFIQUE

AMY DAHAN DALMEDICO
(C.N.R.S. PARIS)

I.JEUNESSE, MILIEU SOCIAL ET FORMATION.

Sophie Germain est née le 1ér Avril 1776, dans une famille parisienne bourgeoise qui avait atteint un niveau de vie confortable et prospère après plusieurs générations d'activité commerçante .Les détails précis manquent sur sa famille . Son père, Ambroise-François Germain , s'engagea brièvement mais activement pendant la Révolution Française , comme député élu du Tiers-Etat à l'Assemblée Constituante de 1789. Selon l'Almanach des Adresses de Paris et celles des députés à l'Assemblée nationale législative pour 1792, il était marchand de soie en bottes ,236 rue saint denis ; selon le Dictionnaire des parlementaires , il était fils de Thomas Germain , orfèvre, sculpteur et architecte, et lui-même orfèvre , quand il fut élu.

Député, on note deux discours qu'il prononça , l'un le 8 Octobre 1790, l'autre le 5 Mai 1791. A propos d'un projet sur la Caisse d'Escompte , il combat au nom des commerçants, lui un *marchand* titre dont il s'honore, tous ces "*banquiers et ces messieurs qu'on nomme faiseurs d'affaires* ", déclarant "*qu'il a toujours fait profession publique de regarder l'agiotage comme un crime d'état.*" Son père appartenait à cette bourgeoisie libérale et instruite , pétrie de la philosophie des auteurs du XVIIIème siècle , qui après avoir espéré dans les tentatives réformatrices de Turgot , s'était radicalisée jusqu'à vouloir se débarrasser d'un certain nombre de servitudes de l'Ancien Régime. Il fut un moment Directeur de la Banque , mais on ne trouve plus trace de son nom dans une assemblée politique. Peut-être le cours des évènements avait-il dépassé ses opinions. Il devait mourir à 95 ans en 1821.

Sophie est la 2° de ses 3 filles, et elle resta d'ailleurs financièrement dépendante de son père toute sa vie , puisqu'elle ne devait jamais se marier ni obtenir une position sociale pouvant lui assurer une quelconque rémunération . A 13 ans on la dit timide , ombrageuse , d'un physique plutôt ingrat . Trouvant sa maison pleine de discussions sur l'argent, la politique, les changements, elle semble trouver dans la bibliothèque de son père , un refuge rassurant et qui de plus va lui apparaître intellectuellement très excitant .

Toutes les notices biographiques sur Sophie Germain évoquent de façon épique cette période où se révèle son goût pour les mathématiques , qu'elle découvre d'abord dans l'Histoire des Mathématiques de Montucla. Par exemple la lecture de la mort d'Archimède lors de la prise de Syracuse, Archimède tellement absorbé par ses travaux scientifiques qu'il se laisse surprendre sans résister par les soldats romains , semble l'avoir beaucoup marquée. Il est sûr qu'elle est impressionnée par cet univers mathématique et s'y jette à corps perdu.

Seule , dépourvue de conseils , elle se met à étudier tout ce qui lui tombe sous la main avec une ardeur qui ne semble pas du goût de sa famille . Libri raconte comment elle a surmonté les obstacles que ses parents ont essayé de mettre pour freiner cette passion des mathématiques, sans doute extraordinaire pour son âge et incongrue pour son sexe : en se levant la nuit , enveloppée dans des couvertures , l'encre gelant dans l'encrier, à la lueur d'une bougie, ses parents ayant enlevé le feu, les habits, la lampe de sa chambre.(Notice nécrologique parue dans le *Journal des Débats*. 18 Mai 1832). Tard dans sa vie , il lui arrivait d'évoquer encore ces premiers moments d'éblouissement où elle se met à découvrir et comprendre l'Analyse. Sesparents cédèrent sans doute devant cette détermination farouche , et Sophie Germain progressa , passant du traité de Bezout aux oeuvres mêmes de Newton et Euler .

Sophie Germain a 19 ans quand l'Ecole Polytechnique est fondée en 1795 ; Libri indique qu'avec l'établissement de cette école et celle de l'Ecole Normale de l'An III quelques mois auparavant, Sophie avait obtenu les notes de cours de différents professeurs , en particulier celui de chimie de Fourcroy et surtout celui d'analyse de Lagrange l'avaient fortement interessée. Les professeurs avaient l'habitude de demander à la fin du cours à leurs étudiants leurs observations . Sophie Germain envoya les siennes à Lagrange , en utilisant le nom de Le Blanc, un ancien élève de l'Ecole Polytechnique , d'un an plus âgé qu'elle et qui devait entrer à l'Ecole des Ponts et Chaussées . On ignore s'il y eut un arrangement amical entre Sophie Germain et LeBlanc et de fait la connaissance des moeurs sociales de l'époque ne permet pas d'apprécier quelle était la marge de manoeuvre d'une jeune fille de sa classe ayant ses intérêts et ses capacités intellectuelles . Si Sophie menait une vie austère et assez renfermée , évitant les mondanités , elle ne manifestait pas de timidité quand des questions de savoir scientifique étaient en jeu.

C'est en tout cas par ce biais qu'elle connut Lagrange ; son nom courut dans la communauté scientifique piquée de curiosité, et plusieurs savants viennent à elle . Elle est invitée ici ou là , à des dîners d'hommes .
M. A-J Cousin mathématicien et auteur de *Leçons sur le Calcul Différentie. et Intégral* demande à lui présenter ses respects ; J-B Gaspard d'Ansse de Villoison , hélléniste distingué , lui adresse des vers grecs et latins à paraître dans le Magasin encyclopédique , et Sophie Germain s'en offusque vivement . En Novembre 1797 , une visite de Lalande tourne mal et indigne Sophie Germain . Si l'incident reste inexpliqué , il est certain que c'est " *L'Astronomie des Dames* " dont Lalande était l'auteur qui a été à l'origine de l'ombrage.

Un mot sur cette littérature de vulgarisation scientifique du 18° s. particulièrement destinée au public féminin. Les femmes qui donnaient le ton dans de nombreux salons , et pour qui les sciences étaient exclues de toute formation , étaient bien obligées de trouver quelquepart les notions élémentaires de physique pour participer à la conversation qui tournait très fréquemment sur ce sujet. Parmi ces ouvrages, on peut citer aussi les "*Entretiens sur la pluralité des mondes*" de Fontenelle, le "*Newtonianisme* *pour les Dames*"d'Algarotti . Dans les deux cas il s'agit de Dialogues où une dame (de préférence une marquise) apprend la physique de son interlocuteur. Pour Algarotti, les femmes ne s'interessant qu'à la galanterie et à l'amour , c'est par ce biais qu'il faut leur enseigner la physique. Citons un passage de l'article de Andreas Kleinert :

"Newton est présenté comme quelqu'un qui sait dicter aux dames des leçons de toilette . *Quelle raison oblige les Dames (...) à mettre plus de rouge pour paraître dans une Loge à l'Opéra , que pour promener leurs appas dans les Tuileries?*Al'aide de son prisme , Newton donne la réponse : *La lumière des flambeaux n'est pas aussi blanche que celle du jour , elle tire sur le jaunâtre et lorsqu'on la fait passer au travers d'un prisme , on voit que les rayons jaunes y sont les plus brillants . Ainsi moins une dame aura chargé son rouge , plus il se ressentira du jaune qui abonde dans cette espèce de lumière.(...) Cette raison veut qu'on augmente la dose du rouge pour aller à l'Opéra , sans quoi le rouge des Belles , et les yeux de leurs Adorateurs ne trouveraient point leurs comptes aux bougies , autant qu'à la clarté du jour.*

Aussi la marquise n'a-t-elle aucun problème à comprendre la loi des carrés de la distance qui est valable pour la gravitation et pour l'intensité de la lumière , car elle connaît une analogie concluante :

J'ai quelque tentation de croire que dans l'amour on suit cette loi des carrés à l'égard des lieux , ou plutôt à l'égard des temps : ainsi après huit jours d'absence , la tendresse devient 64 fois moindre qu'elle ne l'était le premier jour."...

Et Kleinert remarque que les considérations de ce genre sont si nombreuses qu'elles prennent le pas sur les passages où il s'agit vraiment de physique.

Sophie Germain qui lisait Newton ou *Le Système du Monde* de Laplace n'a pas supporté qu'on lui suggère un livre relevant de cette littérature pour femmes frivoles et a largement fait savoir que Lalande n'était pas de ses amis.

Des scientifiques lui adressent des "paradoxes" , à la mode à la fin du 18° siècle , et de petits problèmes qu'elle résout mais ce n'est visiblement pas ce qu'elle attendait. On peut souligner un hasard et un désordre dans sa formation scientifique : ouvrages, problèmes, notes de lectures se succèdent au grè des rencontres ou des discussions sans aucun plan . Certaines lacunes pèseront très lourd .

Sophie Germain vivait à l'écart , non seulement de la société des hommes scientifiques mais aussi de celle des femmes éduquées dont certaines s'associaient à des hommes de leurs familles pour s'intégrer tant soit peu à la vie scientifique (Madame Lalande, La Duchesse de Gotta...).
Si plusieurs contemporains soulignent sa modestie et sa réserve , nous pouvons nous demander ce que cela recouvre : est-ce une réelle timidité qui lui fait éviter les rencontres et la vie sociale mondaine ?, ou est-ce un sens privé de sa supériorité qui lui fait envisager son travail comme faisant partie , non de la scène sociale contemporaine , mais de la marche de l'esprit humain, au sens des Encyclopédistes et de Condorcet, vers le progrès et la vérité ? Isolée comme elle l'était à cause de son sexe, Sophie Germain n'avait pas les moyens de percevoir la modification des formes et du statut du travail scientifique à cette époque : un travail qui devient chaque jour moins solitaire mais au contraire lié à la vie d'une communauté scientifique croissante en nombre et en influence , dont les institutions et les échanges s'organisent.

La jeunesse de Sophie Germain semble avoir été peuplée d'idées et d'abstractions , mais la personne en chair et en os, malheureusement , nous échappe.

II.LA THEORIE DES NOMBRES . LES RELATIONS AVEC GAUSS.

En 1789 Legendre avait publié son livre sur La Théorie des Nombres et en 1801 Gauss publiait les Disquisitionae Arithmeticae ; Sophie Germain se lance avec enthousiasme dans l'étude de ces ouvrages.
Alors qu' elle s'est toujours montrée agacée et impatientée par les attentions sociales d'hommes cultivés (d'Ansse de Villoison...), pour la première fois elle va se sentir gratifiée par une certaine reconnaissance

professionnelle de vrais scientifiques . Le domaine de la théorie des nombres lui offre l'occasion d'un accomplissement et de réelles avancées. Elle s'y engage , sans doute encouragée par Legendre et Lagrange . Pendant quelques années elle assimile les méthodes nouvelles et difficiles des Disquisitionae: congruences, résidus quadratiques et biquadratiques, théorie des formes...; enhardie par les joies de la découverte elle écrit à Gauss.

On connaît une dizaine de lettres de Sophie Germain à Gauss, échelonnées entre Novembre 1804 et Mai 1809 . Les trois premières sont signées Le Blanc puisque Sophie Germain ," *craignant le ridicule attaché au nom de femme savante* " comme elle l'écrira plus tard , avait utilisé à nouveau son premier pseudonyme pour s'adresser au "Prince des Mathématiciens".

Dans sa première lettre , Sophie Germain écrit à Gauss qu'elle peut démontrer que $x^n + y^n = z^n$ est impossible si $n = p-1$ où p est un nombre premier de la forme $8k + 7$ et lui expose sa méthode. Elle ajoute : " *Malheureusement l'étendue de mon esprit ne répond pas à la vivacité de mes goûts , et je sens qu'il y a une sorte de témérité à importuner un homme de génie lorsqu'on a d'autre titre à son attention qu'une admiration necessairement partagée par tous ses lecteurs .* "

Citons un passage de la première réponse de Gauss :

" *Monsieur (!),*

(....) Je me félicite , que l'Arithmétique acquiert en Vous un ami aussi habile . Surtout votre nouvelle démonstration pour les nombres premiers , dont z est résidu ou non résidu m'a extrêmement plu ; elle est très fine , quoique elle semble isolée , et ne pouvoir s'appliquer à d'autres nombres ..

Et Gauss ajoute, témoignant une fois de plus ici de son sens profond de l'unité des mathématiques : " *J'ai très souvent considéré avec admiration l'enchaînement singulier des vérités arithmétiques . Par exemple le théorème que je nomme fondamental (art. 131) et les théorèmes particuliers concernant les résidus -1, +2, s'entrelacent à une foule d'autres vérités , où l'on ne les aurait jamais cherchés . Outre les deux démonstrations que j'ai donnés dans mon ouvrage je suis en possession de* *deux ou trois autres, qui du moins ne le cèdent pas à celles-là en question d'élégance.* "(16 Juin 1805)

C'est au moment de la campagne d'Iéna en 1806 que Sophie Germain se souvenant d'Archimède, s'inquiète pour Gauss et dépêche un message à un général de ses amis. Son identité est dévoilée et Gauss lui écrit : "... *Comment vous décrire mon admiration et mon étonnement, en voyant se métamorphoser mon correspondant estimé Mr. Leblanc en cet illustre personnage qui donne un exemple aussi brillant de ce que j'aurais peine à croire. Le goût pour les sciences abstraites en général et surtout pour les mystères des nombres est fort rare : on ne s'en étonne pas, les charmes enchanteurs de cette sublime science ne se décèlent dans toute leur beauté qu'à ceux qui ont le courage de l'approfondir. Mais lorsqu'une personne de ce sexe, qui par nos moeurs et par nos préjugés, doit rencontrer infiniment d'obstacles et de difficultés, que les hommes, à se familiariser avec ces recherches épineuses, sait néanmoins franchir ces entraves et pénétrer ce qu'elles ont de plus caché, il faut sans doute, qu'elle ait le plus noble courage, des talents tout à fait extraordinaires, le génie supérieur.(...)*

Les notes savantes, dont vos lettres sont si richement remplies, m'ont donné mille plaisirs. Je les ai étudiées avec attention, et j'admire la facilité, avec laquelle vous avez pénétré toutes les branches de l'Arithmétique, et la sagacité avec laquelle vous avez su généraliser et perfectionner. "(30 Avril 1807)

Gauss poursuit en réfléchissant aux multiples suggestions de sa correspondante, corrigeant au passage une erreur de Sophie Germain qui avait affirmé que " *si la somme des puissances* $n^{ème}$ *de deux nombres quelconques est de la forme* $h^2 + n f^2$, *la somme de ces nombres eux-mêmes sera de la même forme.* "

Il lui donne un exemple numérique où la règle est en défaut : on a $15^{11} + 8^{11} = h^2 + 11 f^2$ mais non $15 + 8 = x^2 + 11 y^2$.

Il poursuit en lui annonçant qu'il a obtenus de nouveaux résultats concernant les résidus cubiques et bicarrés mais dont les démonstrations nécessiteraient un " *mémoire expres* " tant elles sont délicates. Comme pour excuser son silence sur ce point , il écrit encore : " *Voici une autre proposition relative aux résidus carrés , dont la démonstration est moins cachée : je ne l'ajoute pas pour ne pas vous dérober le plaisir de la développer vous-même , si vous la trouverez digne d'occuper quelques moments de votre loisir.* "

Il n'y a aucune raison de penser que le jugement flatteur de Gauss à cette époque n'ait pas été sincère . D'ailleurs on peut constater dans ses lettres à Olbers que sa correspondance avec LeBlanc-Germain l'a interessé et stimulé . Mais Gauss a des problèmes de vie personnelle, de carrière à mener, de livres à éditer...problèmes qu'il évoque dans les lettres. Il s'occupe de mécanique céleste , d'astronomie, néglige la théorie des nombres . Ses contributions suivantes dans ce domaine n'interviendront qu'en 1828 et 1832; il s'agit de 2 mémoires classiques sur la réciprocité biquadratique.

A partir de 1808 , il suspend la correspondance , et ne répond pas à un commentaire mathématique de Sophie Germain dans lequel elle énonçait pour la première fois ce qui deviendra "son" théorème. Sophie Germain , elle, ne connaît pas les contraintes de la vie , du travail. Aucun poste n'est ouvert pour elle. Elle s'occupe de mathématiques , purement , abstraitement , passionnément.

Les résultats de Sophie Germain ne seront largement connus que par la mention qu'en fera Legendre dans un mémoire de 1823 paru dans les Mémoires de de l'Académie des Sciences de l'année 1827 (tome VI). Ils seront ensuite mentionnés en note dans le 2ème Supplément à la Théorie des Nombres , paru en 1830.

Or entre la lettre d'Euler à Goldbach de 1753 disant qu'il a réussi à démontrer le théorème de Fermat pour $n=3$ et qu'il observe que la démonstration est très différente que pour $n=4$, et les travaux de Kummer sur les facteurs idéaux de 1840 , le théorème de Sophie Germain est le plus important résultat relatif au théorème de Fermat.

Remarquons d'ailleurs que les relations de Gauss et Legendre étaient plutôt tendues et c'est un mérite de Sophie que d'avoir pu s'entendre avec les deux plus grands spécialistes de la théorie des nombres de cette époque.

Rappelons que le (grand) "théorème de Fermat" est l'affirmation selon laquelle l'égalité $x^n + y^n = z^n$ est impossible pour des nombres entiers positifs quelconques , et pour tout entier n supérieur à 2.

le théorème de Sophie Germain

Le premier théorème démontré par Sophie Germain est le suivant :

Si $x^5 + y^5 + z^5 = 0$, alors l'un des trois nombres x, y, z est divisible par 5.

(L'avantage de cette écriture est de faire jouer à x, y, et z des rôles symétriques.)

Présentons les grandes étapes du résultat de Sophie Germain , dans une marche très proche de la sienne

1ère étape:

On écrit :

$$-x^5 = (y + z)(y^4 - y^3z + y^2z^2 - yz^3 + z^4)$$

On peut supposer x, y, z , 2 à 2 premiers entre eux , sinon on exhibe un diviseur commun et on simplifie ; On démontre que les deux facteurs du 2ème membre sont premiers entre eux .

En effet si p divise $y + z$,

$$y \equiv -z \pmod p$$

et alors $y^4 - y^3z + y^2z^2 - yz^3 + z^4 \equiv 5y^4 \pmod p$

Si p divise le 2ème facteur , il divise $5y^4$ alors :

- soit $p = 5$ et x est divisible par 5, ce qui doit être prouvé
- soit p divise $y+z$ et y et alors y et z ne sont pas premiers entre eux.

Donc on a établi que :

Si $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ et si x, y, z sont premiers 2 à 2 , et si tous les 3 sont premiers à 5, alors $y+z$ et $y^4 - y^3z + y^2z^2 - yz^3 + z^4$ sont mutuellement premiers.

2ème étape

Le produit des deux facteurs précédents est une puissance 5ème, puisque il vaut :

$$y^5 + z^5 = - x^5 = (-x)^5$$

On démontre alors que chacun d'eux est une puissance 5ème, par un argument de descente infinie; argument qui avait été utilisé par Euler pour démontrer le théorème de Fermat pour $n=3$.

Mais x, y, z jouent des rôles analogues. On a donc :

$$y+z = a^5, \quad y^4 - y^3z + y^2z^2 - yz^3 + z^4 = \alpha^5, \qquad x = -a\alpha$$

$$z+x = b^5, \quad z^4 - \ldots\ldots\ldots\ldots + x^4 = \beta^5, \qquad y = -b\beta$$

$$x+y = c^5, \quad x^4 - \ldots\ldots\ldots\ldots + y^4 = \gamma^5, \qquad z = -c\gamma$$

On va montrer que c'est impossible.

La clé de la démonstration, qui est l'idée propre de Sophie Germain est ici de voir que modulo 11, les puissances 5ème sont -1, 0, $+1$.

En effet par le petit théorème de Fermat,

$$x^{p-1} \equiv 1 \pmod p \quad \text{sauf si } x=0$$

$$\text{c.a.d. } x^{10} \equiv 1 \pmod{11}, \quad \text{soit } x^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$$

Alors $x^5 + y^5 + z^5 \equiv 0 \pmod{11}$ est possible si et seulement si x ou y ou z est congru à $0 \pmod{11}$.

Revenons à l'hypothèse $x^5 + y^5 + z^5 = 0$ où x, y, z premiers 2 à 2 et premiers 5.

On doit trouver a, b, c, α, β, γ, vérifiant les conditions ci-dessus.

$$x^5 + y^5 + z^5 = 0 \Rightarrow x^5 + y^5 + z^5 \equiv 0 \pmod{11}$$

donc un des 3 nombres doit être congru à $0 \pmod{11}$, par exemple x.

Donc $\quad 2x = b^5 + c^5 + (-a)^5 \equiv 0 \pmod{11}$

Un des 3 nombres b, c, ou a doit être divisible par 11. Mais :

- b ne peut être divisible par 11, car alors y et x auraient le facteur 11,
- c ne peut pas être divisible par 11, car z et x auraient le facteur 11,
- reste a.

Ainsi a doit être divisible par 11. Mais ceci est impossible car alors :

$y \equiv -z \pmod{11}$ et $\alpha^5 \equiv 5y^4 \pmod{11}$

Mais $x \equiv 0 \pmod{11}$

$$x^4 - \ldots\ldots + y^4 = \gamma^5 \quad \Rightarrow \quad \gamma^5 \equiv y^4 \pmod{11}$$

$$y^4 - y^3 z + y^2 z^2 - y z^3 + z^4 = \alpha^5 \quad \Rightarrow \quad \alpha^5 \equiv 5\gamma^5 \pmod{11}$$

Puisque les puissances 5 ème (mod 11) sont $0, +1, -1$, ceci implique $\alpha \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{11}$ et contredit que x et z relativement premiers.
Le théorème de Sophie Germain est démontré.

Avec exactement les mêmes arguments, on peut démontrer le <u>théorème plus général:</u>

Si n est premier impair et si $2n+1$ est premier, alors $x^n + y^n = z^n$ implique que x, y, ou z est divisible par n.

La démonstration devait être publiée par Legendre, mais l'idée en est donnée dans la lettre à Gauss.

Ainsi pour démontrer le théorème de Fermat pour $n=5$, ou $n=11$, ou de nombreux autres nombres premiers, il suffit de montrer que :
$x^n + y^n + z^n = 0$ est impossible <u>avec l'hypothèse supplémentaire</u> que l'un des trois nombres est divisible par n.
(Le cas où deux des nombres et donc a fortiori les 3, sont divisibles par n, est déjà exclu car x, y, z, sont 2 à 2 premiers entre eux.)

Il est devenu traditionnel, en grande partie à cause du résultat précédent, de diviser le théorème de Fermat en 2 cas :
- <u>1er cas</u> : quand aucun des 3 nombres x, y, z n'est divisible par n

- <u>2ème cas</u> : quand un seul des trois nombres est divisible par n

Le théorème précédent revient à dire que :

Si n est premier tel que $2n+1$ est premier , alors le premier cas du théorème de Fermat est vrai pour les puissances n-èmes.

Le travail est simplifié de moitié .

De façon surprenante le premier cas du théorème de Fermat s'est avéré le plus élémentaire . De plus même quand le théorème échoue , par exemple pour $n = 7$ puisque 15 non premier , on peut souvent aboutir en prenant un autre entier au lieu de $2n+1$, dans ce cas avec $4n + 1 = 29$ premier. En effet les 7èmes puissances mod(29) sont 0, +1, -1, +12,-12 et on montre de façon analogue que :

$x^7 + y^7 + z^7 \equiv 0 \pmod{29}$ est possible si l'un des 3 nombres est nul, mod29.

Ce qu'on appelle aujourd'hui (c.f.Edwards) le

<u>Théorème deSophie Germain :</u>

Soit n un nombre premier. S'il existe un nombre premier p tel que

-i) $x^n + y^n + z^n \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow x, y$ ou z est $\equiv 0 \pmod{p}$

et -ii) $x^n \equiv n \pmod{p}$ est impossible,

Alors le 1er cas du théorème de Fermat est vrai pour n.

Utilisant son théorème , Sophie Germain était capable de prouver le 1er cas du théorème de Fermat pour tous les nombres premiers inférieurs à 100, c.a.d. que pour tout nombre premier impair n inférieur à 100, elle a pu trouver un autre nombre premier p vérifiant les conditions i) et ii). Legendre devait aller jusqu'aux nombres premiers n inférieurs à 197.

Indiquons que le théorème de Fermat pour n=5 (c.a.d. en fait le 2ème cas) devait être établi par Dirichlet et par Legendre (indépendamment) en 1825 .

III- LES ESSAIS POUR UNE THEORIE MATHEMATIQUE DES SURFACES ELASTIQUES

les expériences de Chladni

A partir de 1809 Sophie Germain change de domaine de travail et de recherche . Le prétexte en est le suivant : En 1808, Chladni acousticien et ingénieur allemand vient à Paris présenter des expériences sur les modes de vibrations des plaques élastiques devant les membres de la 1ère classe de l'Institut.

Le principe de ces expériences était simple : il s'agissait de saupoudrer de sable fin des plaques plates de formes variées et de les soumettre à des vibrations. En donnant un coup d'archet sur leurs bords, les expériences de Chladni montraient qu'une plaque plane vibrante donne lieu à des courbes ou des lignes de points immobiles , sur lesquels les grains de sable se concentrent , de même qu'une corde qui vibre a des noeuds pour lesquels il n'y a pas de mouvement. Les figures formées étaient symétriques, assez spectaculaires , cercles, étoiles, et autres figures géométriques. En général, il fixait les plaques en un point intérieur qui devenait un noeud et laissait les bords libres ; quelquefois un point du bord ou tout un côté étaient fixés . La forme des courbes nodales dépendait de celle des plaques , de la position des points fixes tenant les plaques , et de la façon dont on les frappait ("ton pur" ou non) .Chladni analysa les figures de sable en les classant suivant leur forme géométrique et en notant pour chacune , une hauteur de son correspondante . Ainsi il indiquait que les figures et les sons d'une plaque vibrante sont analogues aux formes et aux tons des modes harmoniques d'une corde.

Ces expériences présentées devant le "gratin scientifique" parisien - ce groupe d'élite de 60 personnes qui composait la 1ère Classe de mathématiques et de sciences physiques de l'Institut- ont suscité curiosité, émoi et intérêt . Elles furent répétées devant Napoléon qui avait gagné une place à l'Institut depuis 1800.

le sujet du grand prix

L'Académie avait l'habitude de proposer et juger un Prix chaque année en sciences physiques et mathématiques . On élisait une commission de 4 ou 5 personnes dans la 1ère classe qui choisissait un sujet et établissait un programme pour le Prix . Les candidats avaient 2 ans pour rendre le travail qui était jugé anonymement. L'Académie proposa en 1809 la question suivante : *"Donner la théorie mathématique des surfaces élastiques et la comparer à l'expérience"*.

Le sujet était très difficile (il ne commencera à être élucidé qu'après 1860) et il fut remis 2 fois en concours : les concepts fondamentaux de la théorie des corps élastiques sont alors inexistents et n'apparaîtront qu'avec les travaux de Cauchy en 1823 ; on a besoin de la notion d'invariant d'une surface courbe et de concepts de géométrie différentielle qui ne seront définis que dans le mémoire sur la théorie des surfaces de Gauss de 1827 ; enfin le sujet nécessite la mise en oeuvre et la maîtrise de techniques variationnelles délicates . Lagrange avait déclaré que ce problème "nécessitait un nouveau genre d'analyse". Finalement aucun scientifique ne relèvera le défi de l'Académie et Sophie Germain sera la seule concurrente en titre . Sa connaissance du calcul des variations et des techniques d'analyse était trop partielle pour qu'elle s'effrayât de difficultés insoupçonnées.

Sophie Germain devait présenter trois mémoires successifs en 1811, 1813 et 1815. Le premier d'entre eux provoqua une contribution de Lagrange; Poisson rédigea un mémoire en 1814; des membres parmi les plus éminents de la Classe de Mathématiques et Physique de l'Institut firent partie des jurys successifs (Laplace, Lagrange, Legendre, Lacroix, Malus, Poisson, Carnot) et furent concernés de près ou de plus loin par ce sujet. Pendant quelques années Sophie Germain put se sentir au coeur d'un domaine de recherches mis au premier plan.

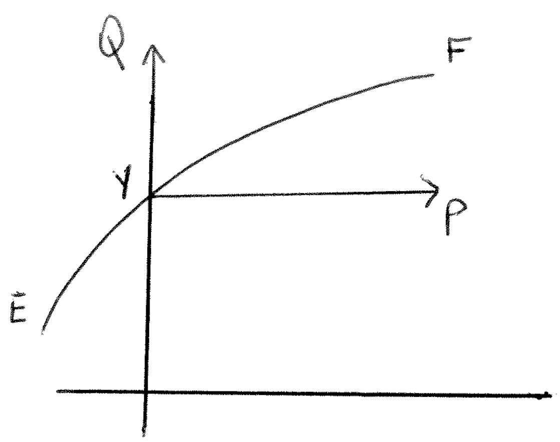
Mais Sophie Germain est restée une étrangère pour la communauté scientifique , maintenue à une distance certaine de la vie professionnelle: chaque contact, chaque rencontre est un évènement social formel qui implique une lettre d'invitation , quelquefois une demande de permission , de prévoir transport ou raccompagnement etc. Ainsi marginalisée, elle n'a pas d'occasion de discuter avec ses collègues de sujets d'intérêt commun . Sa formation reste aussi très lacunaire. Tout ceci n'avait pas eu trop d'inconvénients dans le cas de la théorie des nombres , dont les techniques toutes récentes étaient concentrées dans un ou deux ouvrages capitaux et où la communauté intéressée se réduisait à 5 ou 6 personnes. Par contre cet état de fait handicapera gravement les efforts de Sophie Germain dans le domaine de la physique mathématique.

Sa vision de la méthodologie mathématique propre à l'explication de phénomènes physiques venait seulement de la lecture de la *Mécanique Analytique* de Lagrange et de traductions laborieuses de mémoires latins d'Euler sur la vibration des tiges élastiques, encouragées par une correspondance avec Legendre. Il est évident que la façon dont Sophie Germain entreprend ses recherches est très différente de celle que l'on peut attendre d'un "scientifique professionnel" comme l'est par exemple Poisson.

Procéder par analogie avec Euler

Fondamentalement, Sophie Germain veut procéder pour les surfaces par **analogie** avec le raisonnement qu'Euler a suivi dans le cas unidimensionnel des tiges et des cordes. (Analogie , c'est d'ailleurs le maître-mot et le concept unificateur de son Essai Philosophique posthume). Un flot de correspondance avec Legendre et un copieux manuscrit prouvent qu'elle se met à étudier avec acharnement le mémoire d'Euler de 1779.

Euler avait cherché une équation intégro-différentielle exprimant l'équilibre des moments des forces s'exerçant sur une portion EY d'une lame EF.



Il écrivait l'équation

$$\int dy \int P\, ds - \int dx \int Q\, ds = \frac{V}{r}$$

où le membre de gauche représente l'effet des forces externes appliquées, dont les composantes sont P suivant l'axe des x, et Q suivant l'axe des y. Ces forces tendent à courber et déplacer la tige produisant un rayon de courbure r et V est une constante d'élasticité dépendant du matériau de la tige. Le membre de droite représente donc les forces internes d'élasticité qui contrebalancent les forces extérieures appliquées et qui sont donc inversement proportionnelles au rayon de courbure de la tige.

Cette idée de proportionnalité de la force d'élasticité à la courbure avait en fait été déjà utilisée par Jacques Bernoulli en 1705, dans son important mémoire sur l'*elastica*, mais en 1811 Sophie Germain ignorait encore ce travail.

Euler considérait le cas d'une tige horizontale effectuant de petites vibrations verticales et négligeait les déplacements horizontaux des points. Il aboutissait notamment à une équation différentielle du type

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -k^2 \frac{d^4 z}{dx^4}$$

dont il étudiait les solutions.

De façon analogue donc, Sophie Germain part de l'équation suivante

$$\int dz\, dy \int P ds + \int dz\, dx \int Q\, ds - 2 \int dx\, dy \int R ds = V[\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}]$$

pour représenter l'équilibre de n'importe quel élément de la plaque ; équation à propos de laquelle elle écrit au début du mémoire de 1811 soumis au Prix : *"Je me contente de la donner au commencement de mon mémoire sans entrer dans aucun détail sur la manière dont je l'ai trouvée..."*.

Elle explique que cette équation *" suppose que pour un poin. quelconque de cette surface on ait établi 3 coordonnées orthogonale: savoir* x, y, z, *de sorte que l'élément soit exprimé suivant l'usage pa: l'équation* $ds = dx\, dy\, (1 + (\partial_x z)^2 + (\partial_y z)^2)^{1/2}$,

la masse de cet élément le sera alors par ds "

Ici aussi, le membre de gauche représente l'effet des forces extérieures appliquées (dont les composantes suivant les 3 axes orthogonaux sont P, Q et R), V est une constante d'élasticité liée à la nature du matériau, $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}$, est la somme des rayons principaux de courbures de la surface, qui est censée mesurer la déformation de la plaque. Rappelons que les courbures principales sont les courbures maximale et minimale parmi toutes les courbures des sections normales en un point de la surface. Sophie Germain appellera ultérieurement courbure moyenne la demi-somme des courbures principales, nous y reviendrons.

Ainsi ce que Sophie Germain appellera toujours "***mon hypothèse***", faite par analogie avec ce qu'elle a compris d'Euler, est le fait que la *force élastique* (ou *moment* et dans le premier mémoire de 1811, elle utilise indifféremmment les deux termes) *est proportionnelle à la somme des courbures principales.*

Puis à partir de cette relation d'équilibre supposée, Sophie Germain fait comme Euler plusieurs autres suppositions simplificatrices sur les déplacements et rotations de la plaque ; en particulier elle suppose que les déplacements des points de la surface sont petits et s'effectuent le long des normales en chaque point à la surface. Elle différencie quatre fois l'équation par rapport à x et y et obtient une équation aux dérivées partielles du sixième ordre.

Enfin, pour ne retenir que les solutions régulières qui seules, dit-elle, donnent un véritable "son" et non du "bruit", Sophie Germain efface la dépendance par rapport au temps et déduit la relation

$$z(x, y) = \frac{f^6}{2}\left(\frac{d^6z}{dx^4dz^2} + \frac{d^6z}{dy^4dx^2}\right)$$

dont elle cherche les solutions régulières dans des cas particuliers, au moyen de séries trigonométriques comme Euler l'avait fait pour la tige.

En fait, plusieurs points sont très contestables dans son mémoire qui dans l'ensemble est erroné. Le traitement mathématique présente de nombreuses insuffisances et la notion de force élastique elle-même est très floue. S'y trouvent confondues la notion eulérienne de *force* élastique, et la notion lagrangienne de *moment* élastique qui est une quantité scalaire, soumise aux méthodes variationnelles de la *Mécanique*

Analytique et qui s'apparente à une force de liaison . De fait S. Germain n'utilise pas les propriétés directionnelles de la force et sa démarche n'est pas valide. Cette confusion entre force et moment élastique entraîne une ambiguité conceptuelle dans la formulation même de son hypothèse.

Mais l'idée de faire jouer, dans le cadre de la théorie des surfaces, à la somme des courbures principales d'une surface le même rôle que la courbure de la ligne élastique dans la théorie des verges, est originale. Elle s'appuie sur l'intuition qu'une surface (d'épaisseur négligeable) se comporte comme la somme de ses indivisibles (les lignes) et que le mouvement imprimé à la surface peut être condidéré comme la superposition des mouvements que les lignes prendraient si elles étaient réellement séparées et ébranlées isolément. Nous verrons comment Sophie Germain tentera de la justifier dans ses essais ultérieurs. En 1811, elle se contente d'indiquer en note que si elle a retenu l'expression $(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'})$, c'est que pour de petites vibrations les termes en $\frac{1}{r}.\frac{1}{r'}$, ou d'autres fonctions des courbures principales sont négligeables par rapport à leur somme.

Dans un Supplément à son Mémoire, arrivé après la clôture du Concours, Sophie Germain essaie de légitimer son *hypothèse*, en l'induisant du cas de la tige, traité par Lagrange dans l'édition de 1811 de la *Mécanique Analytique*. Mais Sophie Germain ne maîtrise pas correctement les techniques du calcul des variations et sa généralisation est défectueuse Le jury de l'Académie décida de remettre le sujet en concours pour Octobre 1813.

Pourtant Lagrange qui a eu en mains cette première version de Sophie Germain, en tire profit, corrige l'analyse mathématique et obtient à partir de son hypothèse, mais en y ajoutant des propriétés aux bords adéquates, la base pour décrire le comportement statique et dynamique des plaques. De Lagrange, on ne connaît d'ailleurs que l'équation trouvée, qui s'écrit pour z très petit :

$$\frac{d^2z}{dt^2}+k^2[\frac{d^4z}{dx^4}+\frac{d^4z}{dx^2dy^2}+\frac{d^4z}{dy^4}] = 0$$

et une brève *"Note* (manuscrite) *communiquée, aux Commissions pour le Prix de la surface élastique"* en décembre 1811, et citée par Navier en 1828, lors de sa controverse avec Poisson .

le 2ème concours

Pour le 2ème concours, il semble que Sophie Germain ait travaillé seule, avec une confiance croissante en son approche première. D'ailleurs Lagrange n'avait-il pas utilisé avec succès son idée ?

Cette fois elle sait qu'elle veut aboutir à l'équation obtenue par l'éminent maître et elle cherche à justifier son **hypothèse** par des considérations géométriques sur la déformation d'un plan .

Sophie Germain considère un plan auquel quatre points sont supposés appartenir initialement. Ensuite elle cherche à calculer l'angle déterminé, après la déformation , par les plans passant respectivement par les 1^e, 2^e et 4^e points et par les 1^e, 3^e et 4^e points.

Sophie Germain ici aussi cherche à étendre par analogie le principe utilisé par Euler pour une simple courbe, et encore imaginé par Jacques Bernoulli (1705), principe qui stipule que la force d'élasticité résulte de la **résistance** que les éléments successifs de la tige opposent à être fléchis les uns sur les autres, et à changer leur angle de contingence actuel.

Mais comment exprimer cette condition pour une surface où la flexion peut avoir lieu en tous sens ? Ce qui fait ici cruellement défaut pour la réalisation de progrès décisifs dans ce domaine est une théorie de géométrie différentielle des surfaces qui ne devait émerger qu'après 1830.

Sa tentative est très critiquée par Legendre qui lui écrit le 4 Décembre 1813 :

"Lagrange a eu raison de considérer deux éléments consécutifs dans la courbe élastique et de mesurer l'élasticité par l'angle compris entre les deux éléments. On n'a pas d'éléments analogues dans les surfaces, ou du moins ceux que nous avons considérés ne sont pas dans le signe de l'analogie [...]. Il y a dans tout cela beaucoup d'obscurité"

Et Legendre poursuit : *"Il paraît reconnu cependant que votre équation est réellement celle de la surface vibrante. En mettant l'analyse à part, le reste peut être bon, en ce qui concerne l'explication des* *phénomènes. Si la commission de l'Institut était de cet avis vous pourriez au moins être mentionnée honorablement".* Ce fut bien le cas.

Sophie Germain reçut une mention honorable pour la confrontation honnête et satisfaisante de ses résultats théoriques avec l'expérience. A l'exemple d'Euler, pour les lames vibrantes, elle avait donné des intégrales particulières de l'équation fondamentale trouvée, sous forme de séries d'exponentielles, de sinus et de cosinus. Chacune de ces intégrales correspond à une forme particulière de la plaque qui présente à l'état de vibration régulière, une certaine configuration et un certain nombre de lignes nodales. Le son que la plaque fait entendre, dépend en général du nombre de ces lignes et l'intégrale établit un rapport entre ce nombre et le son correspondant.

Dans l'importante deuxième partie de son mémoire, S. Germain avait calculé d'après ce rapport le ton relatif à chaque forme, puis comparé le ton calculé à celui que donne l'expérience pour une figure semblable. Cette comparaison faite avec scrupules portait sur un grand nombre d'expériences de M. Chladni et sur bien d'autres propres à Sophie Germain elle-même.

L'entrée en scène du modèle moléculaire : le mémoire de Poisson de 1814.

Au moment où l'amateur Sophie Germain décroche une mention honorable , un professionnel du milieu scientifique s'empare du sujet : Poisson. Revenons quelque peu sur la situation de Poisson car la comparaison de celle-ci avec celle de Sophie Germain est fort significative . Ils vont d'ailleurs s'opposer sur le sujet des surfaces élastiques et être dans une situation de rivalité.

Siméon-Denis Poisson né en 1781 , avait été envoyé à l'école centrale de Fontainebleau par son père , un ancien soldat ayant acquis une charge administrative et assez au courant des filières de l'instruction publique. Le jeune Poisson y montre de grandes facultés d'assimilation et de grandes aptitudes en mathématiques . On l'oriente vers le concours de Polytechnique et il y est reçu premier en 1798.

A l'Ecole Polytechnique, Lagrange trouve en lui un auditeur toujours en éveil, Laplace le distingue particulièrement .S'il révèle une grande maladresse manuelle,- il est par exemple incapable de réaliser des épures et de faire de la géométrie descriptive-, c'est un esprit très abstrait et un brillant calculateur . Aussitôt achevé son temps d'élève, il est désigné comme répétiteur à l'Ecole Polytechnique et connaîtra ensuite grâce à l'appui de Laplace une carrière très facile.

Professeur suppléant à l'X en 1802, puis titulaire en 1806 en remplacement de Fourier , il est nommé au Bureau des Longitudes en 1808, et professeur de Mécanique à la Faculté des Sciences de Paris en 1809. Enfin il fréquente assidûment la fameuse Société d'Arcueil animée par Laplace et Berthollet en y jouant plutôt le rôle de conseiller mathématique.

Bien qu'il soit déjà au centre de la vie de la communauté scientifique et cumule les postes d'enseignement , on peut dire qu'en 1809 Poisson est encore au début de sa carrière de savant . Il a assez peu publié et n'est pas encore membre de l'Académie . On a pu dire que la protection personnelle de Laplace pour la carrière de son jeune protégé avait pu être à la source du choix du sujet des surfaces élastiques , Poisson devant décrocher le concours et aussi le siège d'académicien .

Mais en 1812, Poisson avait été élu à l'Institut dans la section de Physique, en remplacement de Malus. C'est peut-être en partie pour cette raison qu'il n'avait pas présenté de mémoire au concours de 1811. Il fit partie du jury du concours suivant.

Poisson lut devant la 1e classe de l'Institut, le 1e Août 1814, un *"Mémoire sur les Surfaces Elastiques"* . Il y déclare d'emblée :

"Mon but a été de parvenir ***sans aucune hypothèse,*** *aux équations d'équilibre des surfaces élastiques dont tous les points sont sollicités par des forces données"* . Il fait bien sûr référence au mémoire anonyme ayant obtenu la mention honorable l'année précédente et fondé sur l'hypothèse que la force élastique est proportionnelle à la somme des courbures principales.

En vrai scientifique professionnel, Poisson commence son mémoire par un rappel historique de tous les travaux antérieurs du XVIIIè siècle (Jacques Bernoulli 1705, Euler, Daniel Bernoulli, Jacques II Bernoulli 1788, Lagrange, un mémoire de Biot de 1803, Sophie Germain).

Selon lui tous ces essais infructueux *"plient en deux sens différents"* :

- soit comme Euler dans le cas des cloches on se borne à considérer isolément les vibrations de chacun des annneaux circulaires dont une cloche est composée, ce qui réduit la question à celle de simples lignes élastiques,
- soit comme Jacques II Bernoulli en 1788 pour les plaques rectangulaires, on considère la plaque comme composée de deux systèmes de lames parallèles aux côtés du rectangle et qui vibrent comme s'ils étaient collés l'un à l'autre et sans se gêner mutuellement. (c'est aussi le cas d' Euler pour les tambours).

Dans les deux cas, dit Poisson, l'accord avec l'expérience est assez médiocre. Poisson veut rompre avec ces deux types de méthodes qui s'appuient sur la *décomposition géométrique* de la surface dont on veut étudier les vibrations. Il se refuse à exprimer la réaction de la surface par les réactions partielles des courbes dont elle est composée. Ainsi en 1814 Poisson récuse principalement la **tradition géométrique** de la mécanique eulérienne.

Sophie Germain, elle, a tenté de poursuivre cette tradition là, en la fécondant par les méthodes de la *Mécanique Analytique*. Mais il lui manquait la maîtrise de tous les instruments conceptuels.

Disciple de Laplace, proche du groupe de scientifiques de la Société d'Arcueil, Poisson participe de cette mentalité moléculaire qui cherche à étudier de manière nouvelle les phénomènes physiques sur le modèle de la physique newtonienne, c'est à dire par un jeu de forces intermoléculaires, attractives ou répulsives. On sait que Laplace avait tenté de rendre compte des phénomènes de capillarité et de retrouver la loi de Snell, déjà connue, suivant ce modèle. Poisson s'engage dans le même chemin pour l'étude de l'élasticité. Il écrit :

*" Cette qualité de la matière peut être attribuée, à une **force répulsive** qui s'exerce entre les molécules des corps, et dont l'action ne s'étend qu'à des distances insensibles ; la fonction qui en représente la loi doit donc devenir nulle ou insensible, aussitôt que la variable qui représente les distances a cessé d'être extrêmement petite ; or on sait que de semblables fonctions disparaissent en général dans le calcul et ne*

laissent dans les résultats définitifs que des intégrales totales ou des constantes arbitraires, qui sont les données de l'observation. C'est ce qui arrive en effet dans la théorie des réfractions, et mieux encore dans la théorie de l'action capillaire, l'une des plus belles applications de l'analyse à la physique qui soit due aux géomètres. Il en est de même dans la question présente et c'est ce qui a permis d'exprimer les forces dues à l'élasticité de la surface en quantités dépendantes uniquement de sa figure, tels que ses rayons de courbure et leurs différences partielles".

Poisson va déduire l'équation relative à la plaque de la considération de l'équilibre d'une **seule** molécule d'une surface élastique. Selon lui, la déformation de la surface, que ce soit par son extension ou sa courbure, change les distances entre les molécules et ceci engendre la force d'élasticité qui tend à ramener la surface à sa configuration plane originale.

Il écrit que la force d'élasticité entre deux molécules m et m' à la distance r vaut $e^2 f(r)$ où e est l'épaisseur de la surface élastique, puis fait la résultante de toutes les forces agissant sur une même molécule m, en sommant sur les éléments de la sphère d'activité de la molécule m. Pour satisfaire à des conditions d'intégrabilité, il doit supposer l'épaisseur constante, puis négligeable.

La démonstration mathématique est très embrouillée et il est presque impossible de relier les fondements et les développements mathématiques avec les caractères physiques du phénomène. On peut observer déjà ici, ce qui s'avèrera être une caractéristique constante du style de Poisson en physique mathématique. Et bien que le paradigme mécanico-moléculaire apparaisse pour nous une explication physique causale contraignante, Poisson le présente comme une **absence d'hypothèse** et développe ensuite sa technique mathématique, indépendamment de toute signification physique.

Finalement il aboutit à une équation assez effrayante, non linéaire (fausse, précisons le) :

$$n^2e^2\left[\frac{1+q^2}{k^2}\frac{d^2P}{dx^2}-\frac{2pq}{k}\frac{d^2P}{dxdy}+\frac{1+p^2}{k}\frac{d^2P}{dy^2}-pP\frac{dP}{dx}-qP\frac{dP}{dy}+k\frac{P}{2}(P^2-4Q)\right]=Z-pX-qY-kP\Pi$$

où $P = (\frac{1}{r} + \frac{1}{r'})$, $Q = \frac{1}{r r'}$

On peut dire avec Bucciarelli et Dworsky [1980, p 74] que c'est un miracle que cette équation conduise par des simplifications adéquates de linéarisation à l'équation du mouvement d'une plaque vibrante, trouvée par Lagrange et redonnée par S. Germain dans son 2ème mémoire de 1813. En fait si Poisson refusait l'hypothèse de Sophie Germain, il acceptait cette équation qui avait beaucoup gagné en crédibilité, et voulait y aboutir. Sinon, il y a peu de raisons de penser qu'il y serait arrivé directement par sa méthode.

Dans la *Correspondance de l'Ecole Polytechnique*, Poisson indique qu'une autre hypothèse - par exemple que la force élastique soit proportionnelle à la différence des courbures principales - déterminerait la même équation . En fait Poisson note que l'application de la méthode variationnelle de Lagrange à n'importe quelle expression de la forme :

$$[(1/r) + (1/r')]^2 + C\,[(1/r).(1/r')]$$

où C est une constante arbitraire , donne l'équation de la plaque. C'est pourquoi , et d'une certaine façon à juste titre, Poisson accorde peu d'importance à l'hypothèse de sa rivale.

Un aspect intéressant de l'approche variationnelle du problème de la courbure des plaques est que si l'on suppose , comme le fit Sophie Germain , que la force élastique est proportionnelle à la somme des courbures principales , on obtient (comme Lagrange l'a fait) l'équation correct du mouvement des points intérieurs, mais certaines des équations déterminant le comportement des bords de la plaque sont erronées. C'est Kirchhoff qui devait résoudre à partir de 1850 ces difficultés.

L' approche de Poisson lui permet d'obtenir une équation qui comprend la courbure à partir d'un modèle qui exclut celle-ci, puisque le modèle utilisé en 1814 ne tient pas compte de la redistribution des molécules à travers l'épaisseur de la surface et décrit une plaque sans épaisseur sur laquelle seraient répandus des points matériels se repoussant mutuellement. En 1828, dans une controverse de priorité l'opposant à Poisson, Navier reprochera suffisamment à son rival ces incohérences : comment des points matériels sur une surface sans épaisseur peuvent-ils former un corps solide élastique ? Comment des formules contenant l'épaisseur peuvent-elles s'appliquer à une surface sans épaisseur ? et comment une telle surface peut-elle résister à la flexion ?.

La méthode de Poisson satisfaisait la plupart de ses contemporains qui travaillaient dans le cadre du paradigme laplacien. Seul Lagrange aurait pu l'interroger, mais il était mort en Avril 1813. Biot donnera un écho très favorable à Poisson dans le *Journal des Savants* .

Après la lecture du mémoire de Poisson et le fait que l'équation des plaques vibrantes fut rendue publique, le Prix offert pour la troisième fois au Concours aurait sans doute pu être retiré. Mais il n'en fut rien et Sophie Germain se remit au travail.

3) L'hypothèse de Sophie Germain se démontre-t-elle ?: Le troisième mémoire de 1815

Dans le préambule au troisième mémoire Sophie Germain écrit : *"J'ai vivement regretté de ne pas connaître le mémoire de M. Poisson, j'ai passé à en attendre la publication un temps qui m'eût été précieux"*. Ce regret confirme, ô combien, cette marginalisation vis à vis de la communauté scientifique dont a souffert Sophie Germain.

On comprend plus aisément qu'elle ait peu varié ses centres d'intérêt et ses méthodes d'approches des questions.

Sophie Germain poursuit : *"J'aurais même entièrement renoncé aux recherches que j'ai l'honneur de soumettre au jugement de la classe, si je n'avais appris [...] que l'équation obtenue dans une hypothèse différente de celle que j'avais proposée, résulterait également de cette dernière hypothèse. En effet, je voyais chaque jour de nouvelles raisons de regarder mon hypothèse comme incontestable ; et pourtant le respect dû à M. Poisson m'ôtait le courage de soumettre au calcul un principe que je ne prévoyais pas alors d'être d'accord avec l'équation publiée par cet habile géomètre "*.

Ainsi Sophie Germain a acquis une confiance croissante en son hypothèse, et elle va retrouver l'équation généralede Poisson , suivant son approche à elle. La situation est cette fois renversée : alors que Poisson s'était arrangé en 1814 pour retrouver l'équation donnée par Sophie Germain en 1813 du fait qu'elle bénéficiait de l'autorité de Lagrange et d'une bonne conformité à l'expérience, c'est au tour de Sophie Germain cette fois de se "débrouiller" pour retrouver l'équation non linéaire (et erronée) que Poisson a donnée dans son mémoire de 1814 , celui-ci étant devenu un académicien réputé, jouissant d'un prestige scientifique certain .

Dans ce troisième essai, Sophie Germain cherche à étendre sa méthode pour inclure les vibrations des surfaces initialement courbées. C'était une direction de recherche légitime mais son hypothèse de base s'avère inadéquate quand on la généralise à de telles surfaces comme devaient le montrer les travaux ultérieurs en élasticité au XIXè siècle. Aujourd'hui une méthode pour déduire l'équation générale des surfaces vibrantes avec des conditions aux limites, recquiert impérativement la notion d'invariant d'une surface courbe.

La méthode mathématique de Sophie Germain est donc encore largement défectueuse, comme l'était d'ailleurs la déduction erronée de Poisson. Mais avec ce troisième mémoire, le travail de Sophie Germain devient progressivement un des points de résistance et de lutte contre le paradigme laplacien et la mentalité moléculaire.

En effet Sophie Germain interprète toutes les réserves qui sont faites à l'égard de son travail comme une critique exclusive de son "hypothèse", alors que cela n'était pas forcément le cas (sauf pour Poisson). Elle y répond donc en présentant une défense acharnée de la légitimité de cette hypothèse .

Pour cela elle s'appuie sur deux éléments :

a) un postulat méthodologique qui lui semble *a priori* évident, et dont elle veut déduire, par une suite de propositions s'enchaînant logiquement, son "hypothèse" fondamentale qui aurait alors un statut de **théorème.**

Le postulat posé à la base du raisonnement de Sophie Germain est le suivant : l'effet est proportionnel à la cause qui le produit. C'est l'argument tant décrié par d'Alembert dans sa discussion avec Euler sur les principes fondateurs de la Mécanique.

Ici la situation est à trois termes : une cause extérieure produit une déformation d'une surface et celle-ci est elle même la cause des forces d'élasticité. La relation de proportionnalité qui intéresse notre auteur est celle entre la déformation de la surface, et les forces d'élasticité.

b) La mathématisation de la notion de forme d'une surface, ou bien encore la notion de ***déformation***, celle-ci étant définie localement comme une différence entre deux formes.

Dans le texte du mémoire, la forme est symboliquement notée par une lettre :

"... *La différence qui sert de mesure aux forces d'élasticité est donc exprimée par la différence entre la figure initiale ou naturelle [notée I] d'un corps élastique et sa figure élastique, c'est à dire celle qu'une force extérieure l'a forcé de prendre [notée E]...* "

Ce symbole littéral pour la *forme* ne devient mathématiquement opératoire, dans le cas d'une tige, que par le biais de la notion de courbure. En effet une tige déformée est représentée par une courbe de l'espace qui admet en chaque point un rayon de courbure qui est le rayon du cercle osculateur à la courbe en ce point. L'inverse de ce rayon *mesure* la déformation, par rapport à la forme rectiligne, de la courbe. On l'appelle simplement courbure.

Mais une surface élastique déformée présente une multitude de courbes possibles en chaque point, qui sont les sections de la surface, suivant tous les plans passant par ce point. Sophie Germain postule qu'en considérant la **somme** de toutes les courbures relatives à toutes les courbes produites par les différentes sections de la surface, on obtiendra une expression qui mathématisera la *forme* de la surface en un point.

Elle propose donc implicitement une procédure intégrale pour définir la courbure de la surface. Y concourent deux raisonnements inductifs issus de deux intuitions distinctes:

- l'une est mathématique : une surface est la somme de ses lignes, au sens du calcul des indivisibles, puis du calcul intégral.
- l'autre est plus proprement physique. Quand on étudie un solide élastique d'épaisseur petite par rapport à ses autres dimensions, Sophie Germain écrira, en 1828, qu'il "*est permis de considérer ce solide comme partagé en un nombre infini de couches infiniment minces, qui affecteraient toutes durant le mouvement des figures semblables entre*

elles et également semblables aux figures que les diverses couches réellement séparées prendraient si, toutes choses égales d'ailleurs, elles étaient ébranlées isolément..".

L'approche est donc voisine de celles d'Euler ou de Jacques II Bernoulli selon lesquelles on décompose une surface géométrique en somme de lignes indivisibles, décomposition qui a un sens physique puisque les mouvements de la surface résultent de la composition ou de la superposition des mouvements des lignes considérées isolément.

Le style de Fourier en physique mathématique relève également de ce point de vue : la décomposition géométrique des corps y est en relation directe avec la juxtaposition des mouvements simples de la chaleur, et toutes deux sont légitimées par le caractère **linéaire** du phénomène et donc des équations différentielles qui l'expriment . C'est cette méthode physico-géométrique et plus généralement ce style qui sont jugés très suspects par Poisson et les adeptes du modèle mécanico-moléculaire.

Dans son mémoire, Sophie Germain établit que cette somme de toutes les courbures se réduit à deux termes qui sont les **courbures principales**, c'est à dire les courbures maximum et minimum parmi toutes les courbures relatives aux sections passant par la normale au point donné.

Examinons comment Sophie Germain somme toutes les courbures , relatives à toutes les sections planes passant par un point .

Euler pensait déjà qu'on pouvait mettre à l'écart les sections obliques et que la somme des sections normales conduirait à connaître la "*juste mesure de la courbure de la surface au point donné* ". Pour démontrer ce point, Sophie Germain rappelle que la courbure dûe aux sections obliques renferme le cosinus de l'inclinaison ; donc en prenant pour chacune des positions du plan normal la somme de toutes les sections inclinées, chaque valeur du cosinus interviendra avec des signes opposés, (c'est à dire que dans une intégration de 0 à π par rapport à l'angle d'inclinaison, le résultat est nul) .

On ne s'occupera plus dès lors que des sections normales, c'est-à-dire les sections passant par la normale à la surface au point considéré .

Si f et g sont ici les rayons de plus grande et de moindre courbure ($\frac{1}{f}$ et $\frac{1}{g}$ sont dites les courbures principales), et si r et r' sont les rayons qui appartiennent aux plans faisant l'un l'angle φ, l'autre l'angle $\varphi+\frac{\pi}{2}$ avec celui de plus grande courbure, Sophie Germain rappelle que l'on a :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{f}\sin^2\varphi + \frac{1}{g}\cos^2\varphi$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{f}\cos^2\varphi + \frac{1}{g}\sin^2\varphi$$

et donc :

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{g}.$$

En fait, Euler dans ses *Recherches sur la courbure des Surfaces* [1760] avait établi les formules :

$$r = \frac{2fg}{f+g-(f-g)\cos 2\varphi}$$

et

$$r' = \frac{2fg}{f+g-(f-g)\cos 2(\varphi+\pi/2)}$$

ce qui prouve bien que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{g}$

Ainsi quelle que soit la position de deux plans normaux perpendiculaires entre eux, la somme des courbures des courbes contenues dans ces plans est constante. C'est cette propriété déjà connue qui a pu suggérer à Sophie Germain, l'idée de son hypothèse.

La section finale du mémoire décrit les expériences qu'elle a faites avec les surfaces courbées , à l'image de celles de Chladni avec les surfaces planes . Rencontrant beaucoup de difficultés elle décrit très honnêtement les limites de ses réalisations et ses succès partiels.

Finalement Sophie Germain obtint le Prix de l'Académie pour ce 3ème mémoire mais elle n'alla même pas le retirer . De plus elle ne reçut qu'une réponse laconique et formellement courtoise de Poisson qui éludait toute discussion sérieuse sur les questions de fond et feignait de l'ignorer publiquement. Contrairement à Fourier dont les deux mémoires de 1807 et 1810 avaient été lus attentivement par Lagrange, Laplace, Poisson et précisément critiqués soit pour l'absence d'hypothèse physique sur la nature de la chaleur, soit pour des développements mathématiques qui semblaient contestables, Sophie Germain n'eut jamais de véritable interlocuteur intellectuel et scientifique dans le domaine de l'élasticité.

IV LES PUBLICATIONS . LA MATURITE

En 1816, Sophie Germain se trouve dans une nouvelle position . Elle vient de passer 6 ans , concentrée sur ce problème du grand prix. D'un côté cela lui a donné un sens de son standing professionnel , une confiance en elle , une autorité. De l'autre, le coeur de la communauté scientifique ne lui témoigne pas le respect qui lui semble dû et ne daigne même pas s'engager dans une réelle dicussion scientifique avec elle . Quelques années plus tôt , elle se voyait en novice inférieure dans la compagnie des grands ; maintenant elle n'a plus sérieuse admiration pour son rival principal.

Deux éléments viennent conforter sa propre estime :

-sa rencontre avec Fourier qui deviendra secrétaire perpétuel de l'académie en 1822. Cette amitié et la position de Fourier lui donnent l'impression de participer réellement aux activités de la communauté scientifique parisienne . Elle est invitée à assister aux séances de l'Académie, alors que jusque là seules les épouses des académiciens le pouvaient . Notons que Fourier avait aussi souffert dans sa carrière d'une rivalité avec Poisson et qu'une certaine complicité devait régner entre eux à ce propos.

-le retour à un travail sérieux en théorie des nombres . Elle collabore assez étroitement avec Legendre , pratiquement sur un pied d'égalité , à la mise au point de démonstrations et de contributions clairement significatives et qui portent aujourd'hui encore son nom .

En 1821, elle publie à compte d'auteur le mémoire qui avait remporté le Grand Prix en 1816 sous le titre *"Recherche sur la théorie des surfaces élastiques "*, désirant sans doute prendre date pour la postérité, et alors qu'un nouveau champ est prêt de s'ouvrir en théorie de l'élasticité et de renouveler les points de vue.

Elle veut aussi en appeler à la communauté scientifique pour arbitrer ce conflit entre la mentalité moléculaire des partisans du modèle laplacien et ceux qui, comme elle, " *considèrent que l'objet des mathématiques n'est pas la recherche des causes qu'on peut assigner aux phénomènes naturels*", et cherchent à décrire mathématiquement des phénomènes généraux " *sans satisfaire au besoin d'explication qui a été dans tous les temps, une source féconde d'erreurs ...* "

L'avertissement qu'elle ajoute au mémoire pour la publication revêt, dans sa retenue, des accents émouvants :

" *Deux hypothèses essentiellement différentes ont été proposées. L'une d'elles a pour appui un nom justement célèbre ; c'est une forte raison de se défier de celle qui m'appartient : aussi ai-je fait tous mes efforts pour y renoncer.*

Je sens que j'ai besoin de m'étayer d'un jugement étranger. Il ne me reste que ce moyen de dissiper le doute qui me poursuit au milieu des recherches que j'ai entreprises. En exposant mon sentiment, j'y joins mes raisons, afin que le public éclairé les pèse, et m'apprenne à en mieux juger.

Si je prends quelquefois le ton affirmatif, c'est uniquement pour m'affranchir de l'expression fatigante du doute. Il suffit d'avertir une fois le lecteur que, bien loin de prétendre fixer son opinion, je sollicite de sa part l'examen critique de la mienne. On me pardonnera, sans doute, de ne dissimuler ensuite aucun des avantages que je crois reconnaître dans mon hypothèse ".

Au cours de la fin des années 1820, de nouvelles théories en élasticité des solides tridimensionnels apparaissent et les travaux de Sophie Germain semblent de peu de poids dans cette nouvelle étape. Pourtant elle intervient à nouveau en 1826 et 1828 au cours de la controverse opposant Navier et Poisson, pour rappeler sa démarche et ses travaux.

le domaine "mixte" de la géométrie physique

Dans ses " *Remarques sur la nature , les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques* " (1826) elle essaie de donner une version plus lucide de son analyse antérieure, en introduisant des hypothèses simplificatrices.

À propos de la notion de surface élastique, elle écrit : *"Elle est en quelque sorte* ***mixte*** *entre celle de la surface géométrique et celle du solide. En effet d'une part la surface géométrique n'ayant aucune existence réelle se refuse à toute idée du mouvement, et de l'autre, les molécules qui composent l'épaisseur d'un solide ne peuvent être confondues avec celles qui appartiennent à une des faces du même solide, qu'en vertu de conditions particulières ... "*.

Et elle poursuit : *" Cela posé, nous pouvons donc dire qu'un solide doué d'élasticité et dont l'épaisseur est fort petite par rapport à ses autres dimensions, reçoit le nom de* ***surface élastique*** *lorsqu'il est assujetti à cette condition que, abstraction faite du temps, chacune des couches dans lesquelles on peut concevoir son épaisseur divisée, se comporte, durant le mouvement de ce solide, de la même manière que si elle était isolée".*

Ainsi Sophie Germain en vient donc à prendre pour **définition** des surfaces élastiques, l'hypothèse qui lui avait servi de modèle, quinze ans plus tôt! Sa théorie va alors évidemment s'appliquer à de telles surfaces , puisque par définition, ce sont les surfaces *ad-hoc* . Elle procède ici en pure mathématicienne et la justification de l'hypothèse ne se pose plus; la confusion ici est d'ordre épistémologique. Aujourd'hui nous savons que son hypothèse est valide dans des conditions assez restrictives: plaques planes de faible épaisseur, petites déformations, loin des bords ...

Elle rédige au cours des évènements de Juillet 1830 à Paris , quelques mois avant sa mort un " *Mémoire sur la courbure des surfaces* [Germain 1831]. Par le sujet même de son dernier travail , Sophie Germain perçoit et désigne ce qui sera l'étape indispensable à franchir pour progresser dans l'étude des vibrations des surfaces élastiques : élaborer une théorie géométrique des surfaces qui contienne le concept d'**invariant** pour des classes de surfaces .

Le travail de Sophie Germain que nous ne détaillons pas ici [30] a pour but de définir une " théorie dynamique de la courbure " et d'exhiber des instruments indépendants , en un certain sens , de la forme concrète des surfaces , et adaptés au domaine considéré.

Dans ce mémoire qui s'inscrit dans ce domaine *"mixte"* , intermédiaire entre la mécanique et la géométrie, Sophie Germain donne :

a) d'une part une **interprétation géométrique** de l'expression de la force élastique d'une plaque, en la mesurant par le rayon d'une sphère, égal à la courbure moyenne de la plaque déformée, en ce point.

b) d'autre part un **contenu physique** à cette somme des courbures principales, en la désignant comme une quantité physique mesurable :

" Je dis quantité de courbure, car de quelque manière que la courbure soit répartie autour du point donné de la surface, elle fera équilibre à la même quantité dynamique. Au reste je ne dissimule pas que cette manière d'envisager la courbure est entièrement nouvelle. Les géomètres décideront si elle doit être adoptée" .

L'interpénétration des notions mathématiques et physiques se fait plus étroite mais sans doute l'est-elle trop, pour être véritablement féconde. Les surfaces auxiliaires que Sophie Germain met en place ("sphère-moyenne", "surface des distances") sont très directement liées à la représentation mécanique : devant matérialiser concrètement l'action des forces élastiques , elles n'ont aucune autonomie par rapport aux idées initiales qu'elle avait en ce domaine et seront finalement de peu d'utilité . De plus , manque aussi la détermination analytique de nombreux éléments d'une surface .

La théorie mathématique de Gauss, puissante, autonome et profonde conduit, elle, à étudier une surface d'un point de vue **intrinsèque**, c'est-à-dire en se plaçant sur la surface elle-même , et en faisant abstraction de ses rapports à l'espace environnant .

C'est en maîtrisant cette théorie , qui a pu paraître n'avoir aucun lien au premier abord avec les surfaces élastiques , que les élasticiens de la deuxième moitié du XIXème siècle progresseront à nouveau.

les professions de foi "positivistes"

Face aux adeptes du modèle moléculaire , Poisson et même Navier, le discours de Sophie Germain dans ces derniers textes se durcit nettement . Elle écrit dans l' *Examen des Principes* (1828) :

" *Qu'il me soit permis de rappeler d'abord que **l'objet des mathématiques n'est pas la recherche des causes** que l'on peut assigner aux phénomènes naturels. Cette science perdrait et son caractère et son crédit, si, renonçant à l'appui que lui offrent les faits généraux bien constatés, elle cherchait dans la région des conjectures les moyens de satisfaire au besoin d'explication qui a été, dans tous les temps, une source féconde d'erreurs. Dans la question des forces d'élasticité, le fait général, spécial et caractéristique est la tendance que les corps doués de telles forces ont à se rétablir dans la forme qu'une cause extérieure peut leur avoir fait perdre. Cette tendance exige que toutes les molécules du corps élastique tendent aussi à reprendre la place qu'elles occupaient avant l'action d'une cause extérieure qui les aurait déplacées.*

Tel est le fait, le seul fait incontestable de l'élasticité ; et si, pour se faire une idée de la manière dont ce fait se réalise, on veut remonter plus haut, on devra craindre d'avoir introduit dans la question des considérations qui lui soient ou inutiles ou même entièrement étrangères.. "

La référence ici à la notion de causalité pour en assumer le rejet est très ambigüe et peut s'expliquer par le discours radical et opposé de Poisson . S'agit-il d'une cause ultime , expressément physique , - (les molécules qui s'attirent des newtoniens ou bien les petites boules qui s'entrechoquent des cinétistes)-, cause que les mathématiques ne pourraient jamais atteindre tandis qu'elles se contenteraient alors de rendre compte dans leur *langage* des faits généraux et des phénomènes ? On comprend qu'avec de telles déclarations Sophie Germain devint , à son insu , une figure hagiographique dans le panthéon des positivistes, successeurs d'Auguste Comte au XIXème siècle .

Mais en fait assimiler le débat entre partisans et adversaires du modèle laplacien , à une controverse entre adeptes ou non de la " *recherche des causes* " est une traduction en grande partie fallacieuse de ces oppositions car projetant des débats philosophiques bien plus tardifs.

V. LES DERNIERES ANNEES

Dans ses dernières années Sophie Germain se tourna vers des questions culturelles générales , elle s'intéressait au développement des sciences dans plusieurs domaines , fréquentait des cercles intellectuels. Elle initia par exemple le mathématicien italien Libri , de 24 ans moins âgé qu'elle, à la communauté scientifique parisienne.

Elle rédigea un essai philosophique resté inachevé et qui fut publié de façon posthume en 1832, "*Considérations Générales sur les Sciences et les Lettres*". Bien qu'incontestablement personnel, cet essai s'inscrit dans les courants d'idées et les milieux sociaux qui l'entourent , et il nous renseigne à leur égard: l'influence des Encyclopédistes et surtout de Condorcet est très sensible, Auguste Comte y était peut-être présent, Hegel y fut sans doute reçu lors de son voyage à Paris en 1827; une des tâches assignées au texte est la réfutation de certaines idées Kantiennes superficiellement comprises.

Le texte est divisé en deux parties :

1- "*Comment Sciences et Lettres sont dominées par un sentiment qui leur est commun*". L'idée la plus originale de l'Essai est celle de l'identité des procédés intellectuels dans les deux domaines et même dans toutes les activités humaines . Cette identité est possible à cause du fait que l'homme recherche toujours un ordre , des proportions , une simplicité qui sont le caractère du vrai, et qui font partie d'une nécessité intellectuelle, inhérente aux lois qui régissent sa pensée.

Le maître-mot pour décrire cela est l'analogie. L'analogie existe, l'esprit humain la reconnaît , elle permet d'ordonner, de trouver les lois de l'univers . Sophie Germain développe deux exemples empruntés à la science et à la poésie, poussant le parallèle jusqu'à la notion de *style*. Elle note que la "*langue des calculs*" a aussi son style propre et que tous les auteurs ne l'écrivent pas de la même façon (l'expression vient du titre de l'ouvrage posthume de Condillac et était peu courante).

2-Sophie Germain frappée de l'aperçu si neuf que Condorcet avait donné dans son *Esquisse sur les Progrès de l'Esprit Humain* cherche aussi à préciser les considérations de la 1ère partie , aux différentes époques de la culture. Elle a le sentiment d'un état métaphysique qui a précédé l'état scientifique et ceci rappelle évidemment la loi des 3 états d'Auguste Comte , même si elle n'est qu'ébauchée. Celui-ci a écrit d'elle : "*son excellent discours posthume indique en Sophie Germain une philosophie* *très élevée, à la fois sage et énergique , dont bien peu d'esprits supérieurs ont aujourd'hui un sentiment aussi net et aussi profond . J'attacherai toujours le plus grand prix à la conformité générale que j'ai aperçue dans cet écrit avec ma propre manière de concevoir l'ensemble du développement intellectuel de l'humanité."*

Enfin pour elle "*la distinction entre les faits contingents et les faits nécessaires est quant au fond , celle qui se trouve entre les faits dont on ignore et ceux dont on connaît la nature.*" et son déterminisme qui s'exprime avec les mêmes mots que celui de Laplace est bien la croyance scientifique dominante d'une époque.

Que Sophie Germain manquât de vrai génie, c'est incontestable, et elle était la première à en être persuadée . Mais elle possédait du talent , des dons réels , beaucoup de volonté, d'opiniâtreté, une passion exclusive et désintéressée pour les mathématiques et la science . Combien d'hommes ont-ils laissé un nom dans la science avec bien moins que cela ?

Outre ses résultats incontestables en théorie des nombres , sa contribution à l'étude des phénomènes élastiques doit être retenue. Malgré des défaillances au regard des mathématiques de son temps , son explication des figures de Chladni a conduit à l'équation correcte du comportement des plaques élastiques et a stimulé ses contemporains . Son approche d'un corps élastique comme un continuum dans lequel se distribuent des forces et des déformations nous est bien plus familière que la méthode totalement caduque de Poisson.

Etre femme , autodidacte de surcroît, ne facilite pas les choses encore de nos jours, dans la voie que Sophie Germain avait choisie . On peut imaginer ce que cela devait représenter dans ces premières décennies du XIXème siècle.

Bibliographie

- L.L.Bucciarelli et N.Dworski : *Sophie Germain, An Essay in the History of the Theory of Elasticity*. D.Reidel Publishing Compagny. Dordrecht. 1980. Nous tenons à souligner notre dette à l'égard de cet ouvrage .

- *Oeuvres Philosophiques* de Sophie Germain , précédées d'une *Etude sur sa Vie et son Oeuvre* par H.Stupuy. Paris . 1872. De nombreuses lettres s'y trouvent reproduites.

= Sophie Germain : *Recherches sur les Surfaces Elastiques* . Paris. 1821. Impr. Vve Courcier.

- : *Remarques sur la nature , les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques , et Equation Générale de ces Surfaces*. Paris . 1826. Impr. Huzard Courcier.

- : " Examen des Principes qui peuvent conduire à la connaissance des lois de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques" *Annalas de Chimie et de Physique*. T 38., p 123-131. 1828. Ce dernier texte est écrit en réponse implicite au mémoire de Poisson d'avril 1828, paru dans les mêmes *Annales*, T 37, p337.

- Amy Dahan Dalmedico : "Etude des Méthodes et des "Styles " de Mathématisation: La Science de l'Elasticité." à paraître dans l'ouvrage dirigé par R.Rashed *Recherches sur les Sciences à l'Epoque de la Révolution*. .Paris. Lib.Blanchard. 1988.

- : "Mécanique et Théorie des Surfaces : les Travaux de Sophie Germain" à paraître in *Historia Mathematica* .1988.

-

CHAPITRE PREMIER

MOYENNE ET PERFECTION

F. EWALD

Il y a sans doute eu, au début du XIXe siècle, deux grandes objectivations concurrentes de la « société » ayant toutes deux les mêmes prétentions à constituer la science de l'homme, à donner son statut scientifique à la connaissance de la société, à fonder la « physique sociale » ou la « sociologie » : celle d'Auguste Comte et celle d'Adolphe Quételet. Comte a pensé qu'on ne pouvait fonder la sociologie que sur la base d'une histoire du développement social. La sociologie renvoie chez lui au projet de faire de l'histoire une science. Il s'agit de penser rigoureusement l'idée que le développement de l'homme obéit à des « lois ». Celle de Quételet est d'une autre nature : elle découle de l'application — plusieurs fois proscrite par Comte — de la théorie mathématique des chances à l'étude des phénomènes sociaux. C'est l'objectivation statistico-probabilitaire. La sociologie comtienne est entièrement dominée par le problème politique qu'a formulé Saint-Simon : « Terminer la Révolution française. » Comment ? Par l'organisation positive de la société. Ce programme qui dominera tout le siècle donnera une grande importance politique à Comte. Quételet est beaucoup plus un savant. Son objectif est de connaissance, même si la physique sociale n'est pas sans conséquence politique. L'importance de Quételet est d'avoir été un carrefour, un lieu de croisement, un point de précipitation. Des choses encore isolées, dispersées, séparées vont grâce à lui se mettre à communiquer et à prendre une forme nouvelle, de nouveaux développements, un nouvel avenir. Quételet est l'homme de l'universalisation du calcul des probabilités — qui est l'échangeur universel —, celui à travers qui l'astronomie communique avec le penchant au crime ; la météorologie, avec les tables de mortalité.

La sociologie comtienne, aussi intéressante qu'elle soit, ne nous surprend pas. Elle s'inscrit, même si c'est pour les renouveler, dans les catégories dans lesquelles on pensait déjà l'histoire de l'humanité, celle de perfectionnement par exemple. Comte, sans doute nous apprend des choses sur nous-mêmes, mais c'est toujours de nous qu'il s'agit. Il n'en va pas de même avec Quételet : sa physique sociale nous rend d'un coup étrangers à nous-mêmes.

Elle nous confère une nouvelle identité. Si l'on veut saisir les effets de décentrement du sujet liés à l'objectivation sociologique de la société, c'est Quételet qu'il faut lire.

INVENTAIRES INFINIS ET DÉNOMBREMENTS PARFAITS

Quételet n'a pas élaboré sa sociologie comme réponse à un problème qui aurait été celui d'une connaissance de la société. La société n'est pas chez lui, comme chez Comte, un objet qui, ayant sa place définie dans la classification des sciences, attendrait la constitution de sa connaissance scientifique. L'objet d'étude de Quételet est l' « homme » dans ses qualités physiques (de taille, de poids, de force) comme dans ses attributs intellectuels et moraux (penchant au crime, tendance au mariage...). La société, chez Quételet, est le produit de l'application d'une méthode : le corrélatif d'un certain type d'appréhension de l'homme.

Au départ, un postulat qu'on pourrait appeler le postulat de l'astronome, postulat de Laplace ou du système du monde : « Après avoir vu la marche qu'ont suivie les sciences à l'égard des mondes, ne pouvons-nous essayer de la suivre à l'égard des hommes; ne serait-il pas absurde de croire que pendant que tout se fait d'après des lois si admirables, l'espèce humaine seule reste abandonnée aveuglément à elle-même et qu'elle ne possède aucun principe de conservation? Nous ne craignons pas de dire qu'une pareille supposition serait plus injurieuse à la divinité que la recherche même que nous nous proposions de faire[1]. » Quételet ne cessera de le répéter : le monde, le grand, celui du système du monde, comme le petit, le nôtre, sont soumis à des lois. Il ne saurait y avoir d'exception pour ce qui concerne l'homme, autant dans son physique que dans ses qualités intellectuelles et morales.

Toutefois, cette connaissance, en quelque sorte inscrite dans la nature et dans l'idée même de Dieu telle que la révèle la science, se heurte à un double obstacle : subjectif et objectif. Subjectif, il est en nous-mêmes. Au fond, nous ne voulons pas d'une connaissance scientifique de l'homme, parce que cela voudrait dire que nous sommes soumis à des lois, parce que cette connaissance menace notre manière de nous identifier : « Ce qui fait obstacle à ce genre d'études c'est une crainte exagérée de voir porter atteinte au libre arbitre de l'homme; il semble qu'on réduise notre espèce à fonctionner comme un ensemble de machines[2]. » Nous préférons le sentiment même illusoire de notre liberté à l'idée qu'elle pourrait être soumise à des lois. Nous craignons de perdre la maîtrise de nous-mêmes, sur notre destin et sur le monde, qui semble corrélative de l'idée de liberté. Nous redoutons le décentrement du sujet qu'impliquerait la constitution d'une sociologie scientifique. L'argument est celui même que développera Freud à propos de la psychanalyse : on y résiste pour les atteintes au narcissisme qu'elle porte avec elle. Il y a dans notre psychologie, dans notre volonté d'être « maître et possesseur de la nature », de rester en son centre les raisons d'un refus obstiné d'une science de l'homme.

Mais il y a un autre obstacle qui, lui, est constitutif de l'objet à connaître : « Quand on se met en présence de la nature et qu'on cherche à l'interroger, ce qui frappe au premier abord c'est la variété infinie qu'on remarque dans les moindres phénomènes. Quelles que soient les limites dans lesquelles on concentre son attention, on trouve une diversité qui étonne autant qu'elle embarrasse. Les simples appréciations laissent un vague, incompatible avec la précision qu'exigent les sciences[3]. » Non seulement les lois de l'homme et de son développement ne nous sont pas données, non seulement nous ne tenons pas tant à les découvrir, mais ce qui nous est donné, les individus dans leur individualité, la diversité du divers, l'infinie variété des différences individuelles, l'irrégularité, l'incohérence et l'inconstance dont elles témoignent, semble devoir nous en tenir définitivement éloignés : « Si l'on se contente d'étudier les individus, il devient impossible de saisir les lois et l'on est frappé par les particularités individuelles qui sont infinies[4]. »

D'où le problème d'une science de l'homme : trouver le moyen qui permettra, tout en s'en tenant aux faits, à l'observation stricte des phénomènes — comme l'exige la science —, de découvrir à travers leur diversité et leur variation cette loi de la nature qui sera en même temps la loi de leur nature. Trouver le moyen qui permettra de rapprocher de l'unité la diversité du donné, de discerner à travers ce fatras de particularités individuelles la régularité d'une loi. La réponse à ce problème est une méthode : *l'application du calcul des probabilités à la statistique.*

Cela suppose un déplacement épistémologique fondamental. On ne peut pas avoir directement une connaissance adéquate de l'individu lui-même. Pour atteindre l'individu dans son individualité, il faut faire un détour par la masse, par la collectivité à laquelle il appartient : « Nous devons avant tout perdre de vue l'homme pris isolément et ne le considérer que comme une fraction de l'espèce. En le dépouillant de son individualité nous éliminerons tout ce qui n'est qu'accidentel ; et les particularités individuelles qui n'ont que peu ou point d'action sur la masse s'effaceront d'elles-mêmes et permettront de saisir les résultats généraux. Ainsi, pour rendre notre manière de procéder sensible par un exemple, celui qui examinerait de trop près une petite portion d'une circonférence très grande tracée sur un plan ne verrait dans cette portion détachée qu'une certaine quantité de points physiques assemblés d'une manière plus ou moins accidentée, plus ou moins arbitraire et comme au hasard, quel que fût d'ailleurs le soin avec lequel la ligne aurait été tracée. En se plaçant à une distance plus grande son œil embrasserait un plus grand nombre de points qu'il verrait se distribuer déjà avec régularité sur un arc d'une certaine étendue ; bientôt, en continuant à s'éloigner, il perdrait de vue chacun d'eux individuellement, n'apercevrait plus les arrangements bizarres qui se trouvent accidentellement entre eux, mais il saisirait la loi qui a présidé à leur arrangement général et reconnaîtrait la nature de la courbe tracée. Il pourrait se faire même que les différents points de la courbe au lieu d'être des points matériels fussent de petits êtres animés libres d'agir à leur gré dans une sphère circonscrite, sans que ces mouvements spontanés fussent sensibles en se plaçant à une distance convenable[5]. » Ce n'est qu'en prenant les individus en masse que l'on pourra prétendre à une connaissance vraie de l'individu.

La société, chez Quételet, est d'abord le produit de cette méthode. Elle est objectivée comme le corrélatif nécessaire d'une science de l'homme. Ce n'est pas d'abord une réalité vivante, cette densité d'échanges matériels, de relations sociales et affectives qu'on appelle société civile. Elle est synonyme de masse, de multitudes, de multiplicités, de nombre. D'où ce qui sera un des grands problèmes de la sociologie de Quételet : comment passer de cette société « abstraite », corrélat d'un calcul, à la société « réelle » ? Est-ce que le passage est seulement permis, possible ? N'y a-t-il pas à l'horizon d'une telle méthode la tentation de l'erreur réaliste qui nous ferait prendre pour l'expression d'une réalité ce qui n'est que le produit d'une construction artificielle ? Problème inhérent à l'application du calcul des probabilités, face auquel celui-ci ne laisse pas sans ressource puisqu'il est constitué pour le résoudre. On sait, en effet, que tout jugement de probabilité est double : il comporte un énoncé, un jugement de réalité qui n'est lui-même valable que dans la mesure où il est indexé à l'évaluation de sa propre probabilité. Si j'énonce, par exemple, qu'il y a une loi de la nature qui fait que les naissances masculines l'emportent sur les féminines, selon tel pourcentage, je devrai en même temps énoncer la probabilité de ce jugement qui dépendra en particulier du nombre d'observations. Avec le calcul des probabilités, on entre dans un monde de connaissance où s'échangent perpétuellement dans une sorte de clignotement permanent les dimensions subjective et objective du jugement.

Si le passage de l'individu à la masse constitue un problème épistémologique, il représente aussi un geste de grande importance : l'individu apprend en quelque sorte qu'il n'est lui-même qu'au sein d'une collectivité, que son identité au fond est sociale, qu'elle n'est pas à chercher dans l'intimité d'un rapport à soi mais dans le groupe auquel il appartient. L'homme devient un *être social.* Sans doute ce geste avait-il été préparé depuis longtemps, depuis les premiers calculs de population de W. Petty, depuis l'établissement des premières tables de mortalité, depuis que la population était devenue le principal de la richesse d'un État. Mais si l'on avait bien appris à compter la population, à calculer sa durée moyenne de vie, peut-être ne la considérait-on que comme le produit d'une simple sommation : la population était la somme des habitants d'un pays. Elle n'avait pas, en tant que telle, de propriétés, de qualités propres. Le nombre avait la forme d'un constat ; c'était une somme passive. Le geste d'un Quételet témoigne que le nombre a acquis une puissance propre. La masse n'est plus une simple collection, elle devient au moins ce qui permet une connaissance : le tout n'est pas égal à la somme de ses parties.

Statistique et calcul des probabilités ne sont pas des éléments de même rang : à la statistique revient l'inventaire, l'énumération, le dénombrement des faits. Mais déjà, dans cette activité de récolement, elle doit emprunter sa méthode au calcul des probabilités : « La méthode statistique n'est que l'application du calcul des probabilités à l'observation des faits. » Le calcul des probabilités a non seulement un rôle directeur au niveau de l'observation statistique, celui de la régler, de l'évaluer, de vérifier si elle est correcte, suffisante, en un mot de la contrôler; mais elle a surtout la tâche de son interprétation. La théorie des probabilités élaborée par Quételet — la théorie des moyennes — est l'instrument d'une interprétation rigoureuse de la statistique. L'interprétation, c'est-à-dire précisément la science, l'explication, la formulation des lois de l'homme.

La définition de cette méthode quant à l'étude de l'homme n'est pas sans effets. D'abord, sur le calcul des probabilités lui-même, dont la compétence n'est plus limitée à un domaine d'objets mais devient universelle : « La théorie des probabilités, précise Quételet, devrait servir de base à toutes les sciences d'observation. » Mais aussi sur la statistique, qui doit évidemment être numérique. Fourier l'avait déjà dit : « Les sciences statistiques ne feront de véritables progrès que lorsqu'elles seront confiées à ceux qui ont approfondi les théories mathématiques. » Peut-être ce moment marque-t-il la victoire définitive de la statistique numérique sur la statistique descriptive désormais reléguée au rang subalterne de géographie. « La géographie décrit les contrées; la statistique analyse les sociétés; l'une raconte et disserte, l'autre calcule et analyse. Il n'est guère possible de moins se ressembler », écrit Moreau de Jonnès en 1847. Moment de rupture entre géographie et sociologie, mais peut-être, plus profondément, moment d'une transformation dans les formes du discours vrai sur la société. Formation d'une nouvelle police du discours politique qui marquerait la fin de l'éloquence du publiciste. On devra désormais parler par tableaux, courbes, graphiques, cartes et diagrammes. Avec l'espoir que l'avènement d'un discours enfin positif sur la société mette un terme à l'infini des controverses.

Deuxième conséquence : pas plus que le calcul des probabilités, la statistique n'a d'objet spécifique — la connaissance de l'État, de ses forces, de ses richesses, de sa population —, elle a compétence universelle. Elle est la science d'observation non seulement des phénomènes sociaux, mais de tous les phénomènes de quelque ordre qu'ils soient, organiques ou inorganiques. L'idée procède chez Quételet du sentiment de l'harmonie du monde, de l'existence d'une loi de continuité des phénomènes : les phénomènes sociaux, ceux qui se rapportent à l'homme, ne sont pas d'une nature différente de ceux qui se rapportent à la nature physique.

Troisième conséquence : cette statistique universelle doit prendre la forme d'un inventaire infini. C'est une conséquence directe de l'application du calcul des probabilités : ses résultats seront d'autant plus fiables qu'ils relèveront d'observations plus nombreuses, plus détaillées, plus infinitésimales. Avec le couple statistico-probabilitaire, on entre dans le cycle d'une croissance incessante des notations autant en quantité qu'en précision, dans la spirale d'une observation — notation perpétuelle et perpétuellement renouvelée, relancée par elle-même. Utopie de l'inventaire infini, des dénombrements parfaits, des recensements sans lacunes. Le mieux serait que chacun s'observe perpétuellement, continûment, depuis le plus jeune âge, et se note en même temps. Mais cette forme de véridiction en fait moins la tâche des individus que celle de l'administration des États. Pour que des mesures aussi nombreuses et précises soient utilisables, il faut définir une unité de mesure, s'assurer que l'on compare bien le comparable. Il revient à l'État de la définir sur son territoire et pour sa population, de même qu'il lui appartient d'engranger, de centraliser et d'exploiter les résultats. Enfin, le programme statistique ne pourra s'accomplir qu'à l'échelle internationale, sous la direction d'une instance de coordination et de centralisation à qui il incombera d'homogénéiser les questionnaires et les enquêtes : naissance (1851) des premiers congrès internationaux de statistique que Quételet présidera. Raison aussi pour laquelle des économistes libéraux comme J.-B. Say pourront se méfier de la statistique. « La quantité d'informations doit être concise parce qu'elle est d'utilité restreinte pour la connaissance et parce qu'elle tend irrésistiblement à proliférer, à l'image de la bureaucratie étatique. C'est que les deux phénomènes sont complémentaires et contemporains. Plus exactement, l'un et l'autre se renforcent, l'accumulation des données justifie l'extension d'un fonctionnariat, de publications, etc., qui coûtent cher au contribuable et servent l'emprise croissante de l'État. " Quand je vois, dit Say, qu'il n'y a pas d'opération détestable qu'on n'ait soutenue et déterminée par des calculs arithmétiques, je croirais plutôt que ce sont les chiffres qui tuent les États "[6]. » Décidément, la problématique « informatique et libertés » ne date pas d'aujourd'hui.

NORME ET MOYENNE

Le calcul des probabilités jouit dans la sociologie de Quételet d'un statut très particulier. Il fonctionne très exactement comme une ruse de la raison. C'est un moyen d'investigation mathématique destiné à suppléer à l'impossibilité d'une expérimentation physique. C'est l'instrument d'une expérimentation par raison pure. Non seulement nous ignorons les lois des phénomènes qui nous sont livrés dans l'infinie variété de leur dispersion, de leurs fluctuations et de leurs irrégularités, mais nous ignorons aussi leurs causes. Notre ignorance est telle que même si nous arrivions à dégager des régularités, nous ne saurions même pas s'il s'agit bien de lois. Notre posture face aux phénomènes est telle que nous semblons réduits à être des spectateurs, sans doute consciencieux et minutieux de faits que nous serions impuissants à commenter. Pour prendre le modèle de l'urne, nous ne sommes pas dans la situation du joueur de loto qui, connaissant le nombre de boules et leurs couleurs, peut calculer *a priori* la probabilité de leurs occurrences, mais, dans la situation inverse : nous connaissons les résultats du tirage, indéfiniment répétés quoique nécessairement lacunaires, mais sans rien d'autre. S'il se peut que nous découvrions quelque chose, comment le savoir ? On connaît le paradoxe du Crétois : c'est parce qu'il disait vrai qu'il mentait. Celui-ci est plus complexe : on peut toujours dire vrai, on n'a pas les moyens de le savoir.

Le paradoxe du calcul des probabilités — et donc de la méthode de Quételet — tient à ce que cette ignorance fondamentale n'est pas destinée à être comblée par un savoir qui serait de l'ordre d'une découverte, à ce qu'on ne quittera jamais le terrain de l'observation. Tout l'art du calcul va consister à faire jouer cette ignorance contre elle-même, à la contourner, en quelque sorte, en l'utilisant contre elle-même. La construction de Quételet, la fameuse théorie des moyennes, réside dans l'invention de ces ruses qui vont forcer la nature à se révéler sans qu'elle ait pour autant à dévoiler ses secrets. D'où l'usage très spécifique dans cette sociologie des notions de cause et de loi. La loi ne renvoie pas à ce qui serait un rapport nécessaire entre éléments identifiés du réel, elle se confond avec la constatation des régularités statistiques qui caractérisent certains phénomènes dès lors qu'ils sont observés en masse. Et la notion de cause ne désigne pas ce qui en serait la causalité objective ou efficiente — la sociologie de Quételet est de l'ordre de la constatation et non de l'explication —, mais ce que dans l'hypothèse d'un déterminisme minimal il faut bien supposer comme étant corrélatif de ces régularités. « L'idée métaphysique de la causation n'entre pas dans le système délicat et raffiné du raisonnement mathématique, généralement connu aujourd'hui sous le nom de " calcul des probabilités". Le terme de *cause* est employé dans ces recherches sans aucune référence à une force supposée capable de produire un résultat donné en vertu d'une activité qui lui serait inhérente. Il ne fait qu'exprimer l'occasion pour ce résultat de se produire plus ou moins fréquemment et peut consister aussi bien dans l'éloignement d'un obstacle que dans une action directe[7]. »

Les causes ne sont rien d'autre que les *chances* que tel ou tel phénomène se manifeste. Ce sont des *tendances,* des *penchants* comme le « penchant au crime, au mariage, au suicide »... ou encore des *influences*. Si l'on peut sans doute en mesurer l'intensité, cela ne parvient pas à cacher la redondance de ces notions par rapport aux observations qu'elles décrivent. On ne dira plus pourquoi un tel est un criminel, comme pourrait le prétendre une psychologie, ni même pourquoi il y a des crimes dans une société, mais, sur la base, par exemple, du constat de l'augmentation de la délinquance dans les zones urbaines, que la vie urbaine est une « cause » de la criminalité ; ce qui n'est rien d'autre que commenter la constance d'une probabilité. On parlera de l'influence de l'urbanisation sur la criminalité, on pourra repérer des corrélations statistiques entre tel ou tel phénomène et les saisons, les climats, les régions, mais sans qu'elles nous livrent jamais leur cause.

Quételet distingue deux grandes sortes de moyennes : la moyenne objective et la moyenne arithmétique. La moyenne objective correspond à quelque chose de réel. Veut-on mesurer un objet, une statue, un édifice... ? On prendra dix, vingt mesures successives dont aucune ne coïncidera exactement avec les autres. Mais on pourra dire avec une probabilité calculable, proportionnelle au nombre de mesures, que la hauteur objective de la statue ou de l'édifice correspond à la moyenne des différentes mesures. Les écarts par rapport à la moyenne, qui d'ailleurs obéissent à une distribution spécifique permettant après coup de vérifier si les mensurations ont été correctement effectuées, tiennent à l'opération de mensuration elle-même, sans que cela affecte l'identité de l'objet mesuré. La moyenne arithmétique est bien différente : c'est celle que l'on obtiendrait en prenant la moyenne des mesures des maisons d'une rue : il n'y correspondrait pas de maison dans ladite rue. C'est à cette même moyenne que correspond la notion de durée moyenne de vie : elle ne dégage pas l'âge d'un individu moyen, elle ne dit pas plus à quel âge un individu qui serait dans la moyenne va mourir. Pas plus que l'on ne peut déduire d'une table de mortalité l'âge de la mort de quelqu'un. On notera, toutefois, qu'à cette moyenne ne correspond pas tout à fait rien : il n'est pas indifférent pour un gouvernement de constater que sur son territoire la durée moyenne de vie augmente ou diminue. Cette moyenne purement mathématique, qui ne résulte pas d'observations imprécises, fait naître quelque chose d'un ordre très singulier. On peut dire que toute la sociologie de Quételet tient dans la manière dont il va travailler ce type de moyenne et l'interpréter à partir du calcul des probabilités.

Pour dire les choses rapidement, la statistique va fournir toute une série de données, de faits qui ne seront utilisables qu'à partir du calcul de moyennes. Le problème va être de savoir à quel type de moyenne celles-ci correspondent. Moyenne objective, qui renverrait donc à un objet, ou moyenne arithmétique ? Le calcul des probabilités indique que dans les deux cas la distribution des observations ne revêt pas la même forme : dans le cas de la moyenne objective, elles obéissent à la fameuse loi binômiale (à la courbe de Gauss), que Quételet appelle encore « loi de possibilités ». Elle indique que les variations sont dues à des causes « accidentelles » qui se neutralisent et que l'on peut raisonnablement négliger, puisqu'elles sont indifférentes à ce qu'elles désignent. Ce qui n'arrive pas dans le cas d'une moyenne arithmétique. Ou, plutôt, le problème décisif va être d'interpréter ces cas où une moyenne arithmétique vient, comme dans l'expérience cruciale du gladiateur ou de la statue, rejoindre la moyenne objective. Qu'est-on en droit d'inférer quant à la réalité d'une telle coïncidence ?

Suivons l'expérience telle que Quételet l'a décrite à l'intention du duc de Saxe-Cobourg.

Le gladiateur est sans contredit l'un des plus beaux ouvrages de la sculpture ancienne. C'est avec raison que les artistes ont étudié ses formes nobles et dégagées, et qu'ils ont souvent mesuré les principales dimensions de la tête et du corps, pour en saisir les rapports et l'harmonie.

La mesure d'une statue n'est pas une opération aussi facile qu'on le croirait au premier abord, surtout si l'on désire l'obtenir avec une grande précision. En mesurant dix fois de suite la circonférence de la poitrine, on n'est pas sûr de trouver deux résultats identiquement les mêmes. Il arrive presque toujours que les valeurs obtenues sont plus ou moins éloignées de celle que l'on cherche ; et je suppose même les circonstances les plus favorables, celles où l'on n'aurait aucune tendance à prendre des mesures trop grandes ou trop petites.

Si l'on avait le courage de recommencer mille fois, on finirait par avoir une série de nombres qui différeraient entre eux selon le degré de précision qu'on aurait mis à les recueillir. La moyenne de tous ces nombres s'écarterait certainement très-peu de la véritable valeur. De plus, en classant toutes les mesures par ordre de grandeur, on ne serait pas médiocrement étonné de voir les groupes se succéder avec la régularité la plus grande. Les mesures qui s'écartent le moins de la moyenne générale composeraient le groupe le plus considérable ; et les autres groupes seraient d'autant plus petits, qu'ils contiendraient des mesures plus en désaccord avec cette même moyenne. Si l'on figurait la succession des groupes par une ligne, Votre Altesse a déjà deviné que cette ligne serait la courbe de possibilité ; ce résultat, en effet, était à prévoir. En sorte que la maladresse, ou le hasard, si nous aimons mieux ce mot pour couvrir notre amour-propre, procède avec une régularité qu'on ne serait guère tenté de lui attribuer.

Je suppose maintenant qu'on réunisse les cinq cents mesures qui s'écartent le moins de la moyenne ; la demi-différence qui se trouvera entre la plus grande et la plus petite de toutes ces mesures, sera le module de la précision ou l'*erreur probable*. Il pourrait se faire que, dans les circonstances actuelles, cette erreur probable ne fût que d'un millimètre ; en sorte que, sur les mille mesures, cinq cents seraient en erreur de moins d'un millimètre, et cinq cents autres seraient en erreur de plus d'un millimètre. On aurait ainsi 1 contre 1 à parier qu'en prenant une nouvelle mesure, on ne s'écarterait pas d'un millimètre de la moyenne de toutes les mesures, laquelle peut être considérée comme la véritable circonférence qu'on voulait apprécier.

Si l'on avait à mesurer la poitrine d'une personne vivante au lieu de celle d'une statue, les chances d'erreur seraient beaucoup plus nombreuses ; et je doute fort qu'après mille mesures, on trouvât encore une erreur probable de 1 millimètre. Le seul acte de la respiration, qui fait varier à chaque instant la forme et les dimensions de la poitrine, ajouterait une puissante cause d'erreur à toutes celles qu'on rencontre déjà en opérant sur une statue parfaitement immobile. Malgré ce désavantage, les mille mesures groupées par rangs de grandeur procèderaient cependant encore d'une manière très-régulière. La ligne qui les représenterait, serait toujours la courbe de possibilité, mais dilatée dans le sens horizontal, proportionnellement à l'erreur probable.

Modifions encore notre hypothèse, et supposons qu'on ait employé un millier de statuaires pour copier le gladiateur avec tout le soin imaginable. Votre Altesse ne pense certainement pas que les mille copies qui auront été faites, reproduiront chacune exactement le modèle, et qu'en les mesurant successivement, les mille mesures que j'obtiendrais seraient aussi concordantes que si je les avais prises toutes sur la statue du gladiateur même. Aux premières chances d'erreur viendraient se joindre les inexactitudes des copistes ; en sorte que l'erreur probable serait peut-être très-grande. Malgré cela, si les copistes n'ont pas travaillé avec des idées préconçues, en exagérant ou en diminuant certaines proportions d'après des préjugés d'école, et si leurs inexactitudes ne sont qu'accidentelles, les mille mesures, groupées par ordre de grandeur, présenteront encore une régularité remarquable et se succèderont dans l'ordre que leur assigne la loi de possibilité.

Je vois sourire Votre Altesse ; elle me dira sans doute que de pareilles assertions ne me compromettront pas, attendu qu'on ne sera pas disposé à tenter l'expérience. Et pourquoi pas ? Je vais peut-être bien l'étonner, en disant que l'expérience est toute faite. Oui vraiment, on a mesuré plus d'un millier de copies d'une statue que je n'assurerai pas être celle du gladiateur, mais qui, en tout cas, s'en éloigne peu : ces copies étaient même vivantes, en sorte que les mesures ont été prises avec toutes les chances d'erreur possible : j'ajouterai, de plus, que les copies ont pu se déformer par une foule de causes accidentelles. On doit donc s'attendre, ici, à trouver une erreur probable très-sensible.

J'en viens au fait. On trouve, dans le 13e volume du journal médical d'Edimbourg, les résultats de 5 738 mesures prises sur les poitrines des soldats des différents régiments écossais. Ces mesures sont exprimées en pouces anglais et groupées par ordre de grandeur, en procédant par différences de 1 pouce. La plus petite mesure est de 33 pouces environ, et la plus grande de 48 ; la moyenne de toutes les mesures donne un peu plus de 40 pouces pour circonférence de la poitrine d'un soldat écossais : c'est aussi le nombre qui correspond au plus grand groupe de mesures ; et, comme la théorie l'indique, les autres groupes diminuent de grandeur à mesure qu'ils s'éloignent de celui-ci ; l'écart probable est de 1^{p},312 ou de 33^{mm},34. Je prie Votre Altesse de ne pas perdre de vue cette valeur.

Je demande maintenant si ce serait exagérer que de parier 1 contre 1 qu'une personne peu exercée à prendre des mesures sur le corps humain, va se tromper de 33 millimètres environ, en mesurant une poitrine de plus d'un mètre de circonférence ? Eh bien, en admettant cette erreur probable, 5 738 mesures prises sur une même personne ne se grouperaient certainement pas avec plus de régularité, quant à l'ordre de grandeur, que les 5 738 mesures prises sur les soldats écossais. Et si l'on nous donnait les deux séries de mesures sans les avoir désignées d'une manière particulière, nous serions très-embarrassés de dire quelle série a été prise sur 5 738 soldats différents, et quelle série a été obtenue sur une seule et même personne, avec moins d'habitude et des moyens d'appréciation plus grossiers.

L'exemple que je viens de citer mérite, je crois, toute notre attention : il nous montre que les choses se passent absolument comme si les poitrines qui ont été mesurées avaient été modelées sur un même type, sur un même individu, idéal si l'on veut, mais dont nous pouvons saisir les proportions par une expérience suffisamment prolongée. Si telle n'était pas la loi de la nature, les mesures ne se grouperaient pas, malgré leurs défectuosités, avec l'étonnante symétrie que leur assigne la loi de possibilité [8].

L'expérience a quasiment la forme d'un syllogisme. Elle se déroule en trois temps : *a*) on mesure le gladiateur. Les mesures se distribuent régulièrement selon la loi des causes accidentelles qui permet de dire qu'à la valeur moyenne correspond bien la taille effective du gladiateur. La moyenne est objective ; *b*) on fait copier, reproduire l'objet ; au lieu d'avoir des chiffres, on a maintenant des objets. Ces objets se distribuent selon la même loi que précédemment. Cela se comprend : l'original joue ici le rôle de valeur moyenne objective. Le calcul des probabilités rend compte de cette distribution régulière des copies par rapport à l'original ; *c*) on supprime le modèle tout en passant à des hommes réels : du constat que la distribution des tailles de ces hommes obéit à la même loi que précédemment, on doit déduire selon la même inférence probabilitaire qu'à la moyenne de ces tailles correspond « quelque chose ». Le fait est que ce qui paraissait n'être qu'une moyenne arithmétique correspond à une moyenne objective : « Les choses se passent comme si les poitrines qui ont été mesurées avaient été modelées sur un même type... »

Quételet d'en conclure :

Parmi les admirables lois que la nature attache à la conservation de l'espèce, je crois pouvoir mettre en première ligne celle de la conservation du type. Dans mon travail sur la *physique sociale,* j'avais déjà cherché à déterminer ce type, par la connaissance de l'homme moyen. Mais, si je ne me fais illusion, ce que l'expérience et le raisonnement m'avaient fait reconnaître, prend ici le caractère d'une vérité mathématique.

Le type humain pour des hommes d'une même race et d'un même âge, se trouve si bien établi, que les écarts entre les résultats de l'observation et ceux du calcul, malgré les nombreuses causes accidentelles qui peuvent les provoquer et les exagérer, ne dépassent guère ceux que des maladresses pourraient produire dans une série de mesures prises sur un même individu.

Si l'on m'objecte que l'on rejette des régiments les hommes qui sont déformés par un excès d'embonpoint ou de maigreur, je répondrai qu'en les admettant tous, on ne ferait qu'élargir les limites de l'erreur probable, sans altérer la loi qui préside à l'assemblage des nombres. Je pourrais citer des exemples à l'appui de cette assertion, et rapporter les résultats des mesures que j'ai prises moi-même sur un grand nombre d'individus, sans choix préalable; mais j'ai cru ne devoir employer, autant que possible, que des nombres réunis par des mains étrangères.

S'il n'existait aucune loi qui présidât au développement de l'homme, si tout se faisait au hasard, je demanderais à mon tour combien on n'aurait pas à parier contre un, que 5 738 mesures prises sur autant de poitrines, se rangeraient dans un ordre tout différent de celui qui est déterminé par la loi de possibilité[9].

De la théorie des moyennes, de l'interprétation des statistiques par le calcul des probabilités découle directement la fameuse théorie de l' « homme moyen », à la fois l'objet d'étude de la sociologie et son produit le plus caractéristique. On trouve chez Quételet au moins trois formulations de la théorie de l'homme moyen. En premier lieu, l'idée d'homme moyen procède directement de la notion de moyenne : « En réunissant les individus d'un même âge et d'un même sexe et en prenant la moyenne de leurs constantes particulières, on obtient des constantes que j'attribue à un être fictif que je nomme l'homme moyen chez ce peuple. Si l'on avait, par exemple, la taille de tous les Français âgés de vingt-cinq ans et si l'on en prenait la moyenne, la valeur que l'on obtiendrait serait la taille de l'homme moyen de vingt-cinq ans[10]. » Ainsi défini, l'homme moyen est un « être fictif » : il n'y a pas un Français de vingt-cinq ans qui serait l'homme moyen. Pas plus qu'on ne peut déterminer à partir d'une table de mortalité à quel âge X ou Y devra mourir.

L'homme moyen est aussi le type de l'homme à un certain moment pour un certain lieu : « Les choses se passent donc ici comme si la nature avait un type propre au pays et aux circonstances dans lesquelles il se trouve. Les écarts de ce type seraient le produit des causes purement accidentelles qui agiraient avec la même intensité en plus et en moins. En considérant les choses sous ce point de vue et en supposant un nombre d'observations suffisamment grand, l'homme moyen à chaque âge se trouverait placé entre deux groupes d'individus également nombreux, les uns plus grands, les autres plus petits que lui. De plus les groupes se distribueraient de la manière la plus régulière d'après l'ordre des tailles. Les groupes les plus nombreux sont ceux qui s'écartent le moins de la moyenne : à mesure que les écarts deviennent plus forts, les groupes d'hommes qui les présentent sont plus faibles ; et vers les limites extrêmes, les géants comme les nains sont très rares ; il ne faut pas néanmoins considérer ces derniers comme des anomalies, ils sont nécessaires pour compléter les séries ascendante et descendante déterminées par la loi des causes accidentelles. Chaque groupe a en effet sa valeur définie. Ainsi, quand les hommes sont confondus dans la société et que leurs grandeurs se mêlent en apparence de la manière la plus capricieuse, il existe entre eux un lien mystérieux qui fait que chaque individu peut être considéré comme la partie nécessaire d'un tout qui nous échappe physiquement et qu'on ne peut saisir qu'avec les yeux de la science [11]. » On notera que, dans cette seconde version, l'homme moyen est toujours une fiction ; tout se passe « comme si... », dit bien Quételet. Avec ceci, toutefois, que l'application de la loi des causes accidentelles fait apparaître qu'à cette fiction correspond bien quelque chose. Il n'y correspond pas un homme qui serait l'homme moyen de la société en question, mais le type des hommes de cette société. Non pas le modèle, l'original dont ces hommes réels seraient des copies plus ou moins conformes, mais plutôt leur référence commune. Ce qui témoigne qu'ils ont une identité « naturelle » et qu'il y a des lois de l'homme.

Enfin, dit Quételet, « l'homme que je considère est, dans la société, l'analogue du centre de gravité dans le corps ; il est la moyenne autour de laquelle oscillent les éléments sociaux : ce sera, si l'on veut, un être fictif pour qui toutes les choses se passeront conformément aux résultats moyens obtenus pour la société », et d'ajouter : « Cette détermination de l'homme moyen n'est pas une spéculation de pure curiosité ; elle peut rendre les services les plus importants à la science de l'homme et du système social. Elle doit nécessairement précéder toute autre recherche relative à la physique sociale, puisqu'elle en forme pour ainsi dire la base. L'homme moyen, en effet, est dans une nation ce que le centre de gravité est dans un corps ; c'est à sa considération que se ramène l'appréciation de tous les phénomènes de l'équilibre et du mouvement [12]. »

L'homme moyen n'est donc pas un homme qui se logerait on ne sait pas très bien où dans la société : c'est la société même telle que l'objective la sociologie. On ne trouve pas trace, chez Quételet, d'un réalisme de l'homme moyen. L'homme moyen, c'est à la fois ce qui rend possible un jugement scientifique sur l'homme et son nécessaire corrélat. Abolissez la référence métaphysique à une nature humaine, vous ne pourrez identifier les individus, les juger scientifiquement que selon un jugement social, en référence précisément à cet homme moyen. L'homme moyen n'est rien d'autre que ce qui apparaît, dès lors que l'on fait son deuil d'un prétendu état de nature et que l'on veut fonder un jugement social sur l'homme.

Cette théorie de l'homme moyen devait provoquer un déferlement de critiques, et cela d'autant plus que Quételet ne devait pas hésiter à en faire le modèle de la perfection et de la beauté. Cournot le dénonçait comme ne pouvant être qu'un homme « difforme », Bertillon comme le type du « médiocre », et, un siècle après que Quételet en eut dressé la figure, M. Halbwachs consacrait un livre à sa réfutation. La plupart des critiques l'ont dénoncé d'un point de vue réaliste : cet homme prétendu ne pouvait pas exister. Et il est vrai que ce qu'objectivait Quételet sur le nom d' « homme moyen » ne pouvait avoir qu'un mode d'existence tout à fait spécifique, un statut peut-être comparable aux incorporels des stoïciens. Toutes ces critiques ne sont pas sans rappeler celles qu'on adressera quelques décennies plus tard à la prétention de Durkheim de « traiter les faits sociaux comme des choses ». Elles témoignent des difficultés à penser les effets du décentrement sociologique, les déplacements introduits par la sociologie dans l'étude de l'homme.

En effet, au-delà de la question de son mode d'existence, qu'est-ce d'autre que la théorie de l'homme moyen, sinon un autre mode — le mode moderne — d'individualisation des individus d'une population ? Ce n'est rien d'autre que la définition de ce que nous ne cessons d'invoquer aujourd'hui sous sa forme de la norme et du normal. La notion d'homme moyen n'exprime rien d'autre — et est le corrélat — d'un nouveau jugement sur les individus, le seul qui serait d'ailleurs scientifiquement possible : « Ce qu'il me paraîtra toujours impossible d'estimer c'est le degré absolu de courage ou de ce qu'on est convenu de regarder comme tel, pour un individu isolé ; car quelle est l'unité de mesure qu'il conviendra d'adopter ? Pourra-t-on observer cet individu pendant un temps assez long et d'une manière assez suivie pour tenir compte de tous ses actes et pour estimer à leur valeur ses actions courageuses ? Quel est le tribunal appelé à porter les jugements ? Et ces actions seront-elles en assez grand nombre pour pouvoir en conclure quelque chose de satisfaisant ? Qui répondrait d'ailleurs que, pendant le cours des observations, cet individu n'aura pas changé ? Quand on opère sur un grand nombre d'hommes, ces difficultés disparaissent presque toutes, surtout si l'on n'a en vue que de déterminer des rapports et non des valeurs absolues [13]. »

Avec la théorie de l'homme moyen, Quételet ne fait rien d'autre que proposer un mode d'individualisation des individus non plus à partir d'eux-mêmes, de ce qui serait leur nature ou ce qui devrait être leur idéal, mais à partir du groupe auquel ils appartiennent. La théorie de l'homme moyen n'est rien d'autre que cet instrument qui va permettre de référer une population, une collectivité — et les individus qui la composent — non plus à quelque chose qui lui serait extérieur — son origine perdue, ou son avenir bienheureux —, à une fin, mais à elle-même. Avec la construction de l'homme moyen, Quételet n'a rien fait qu'accomplir ce geste fondateur de la sociologie qui permet de penser la société et les individus qui la composent sans autres références qu'eux-mêmes.

Dans *Surveiller et punir,* Michel Foucault a montré comment les disciplines « normalisent ». Il a très minutieusement détaillé leurs différents procédés de « normalisation ». On pourrait dire que la normalisation disciplinaire reste une normalisation de type classique : les individus ne sont pas identifiés et jugés par référence à une moyenne mais selon une norme, une règle ou une échelle qui leur est extérieure du meilleur au moins bon, du parfait à l'exécrable. La normalisation liée à la notion d'homme moyen est d'un autre type ; elle passe par une tout autre manière d'étalonner. On ne part plus des individus pris chacun un par un pour les mesurer à une échelle de capacités. On part de la masse, de la collectivité elle-même, et c'est en fonction de sa propre normalité que s'effectue le classement : non plus dans un ordre hiérarchique de 0 à 10, mais selon des écarts par rapport à une moyenne qui n'indique pas le minimum à atteindre mais le type du groupe. La taille moyenne, le poids moyen ne désignent pas la taille que devraient avoir les individus bien constitués d'une société bien policée ; c'est ce qui permet de distribuer les individus en groupes les uns par rapport aux autres. La moyenne de Quételet ne passe pas par un impératif — ou du moins pas d'abord par l'énoncé d'un impératif. Les politiques de normalisation n'auront pas la forme d'exigences disciplinaires. Un test n'est pas un examen, même s'il en a la forme.

Deux modes différents d'individualisation qui, loin de s'exclure, vont se combiner dans la pratique. A l'école, par exemple, la normalisation sociologique va venir au secours de la normalisation disciplinaire : les indications du Q.I. viendront doubler les résultats scolaires. L'identification psychosociologique permettra de définir les procédures adaptées d'une adaptation scolaire et d'une différenciation des normes disciplinaires : on définira pour chacun, en fonction de son identification sociale, la norme disciplinaire qu'il peut et doit atteindre. A chacun sa place. On peut mesurer la distance qui sépare ce mode d'individualisation sociologique, ce type de rapport tout-parties, universel-singulier, de l'homme de la *Déclaration des droits*. L'homme n'est plus ici un universel, un résumé de propriétés qu'on trouvait toutes identiques en chacun. On est très loin du « tout un chacun » kantien ou de la « raison tout entière en un chacun » de Descartes. Avec l'homme moyen, il n'y a plus d'universel ; tout au plus du général et encore du général toujours spécifié.

La théorie de l'homme moyen représente la manière proprement sociologique de penser les rapports entre tout et parties, une manière de penser le régime des identités et des différences à partir de la seule réalité des inégalités ; comment malgré les différences et les inégalités seules réelles il y a pourtant identité sociale ou collective. L'homme moyen n'est pas tout à fait chacun de nous, mais nous sommes tous un peu de lui ; il nous ressemble à s'y méprendre, et pourtant nous nous en séparons toujours par l'écart à la fois minuscule et accidentel de notre identité. Avec la théorie de l'homme moyen, on passe du régime des identités morale ou métaphysique à un régime des identités sociologiques.

Comment faire de l'homme moyen le type du beau et le modèle de la perfection ? Comment opérer cette étrange réduction du parfait au moyen qui heurte si fort nos habitudes de pensée ? *Perfection* et *moyenne* ne sont-ils pas deux termes qui s'excluent ? Tout dépend de la manière dont on pense. Si l'on adopte le schéma de l'histoire ou la matrice du progrès, le parfait ne peut jamais être présent, ni réalisé : il est toujours au-delà, ailleurs, au bout d'un processus indéfini de perfectionnement. Rousseau, Kant, Condorcet raisonnent dans ce schéma de l'indéfinie perfectibilité. Mais dès lors que l'on pense les individus, leurs rapports et leur identité non plus en fonction d'un avenir désirable mais dans la stricte actualité de leur présent, le parfait devient lui-même actuel : il est toujours réalisé, dans la mesure où il est ce qui sert de référence. De la même manière, si l'homme moyen peut être le modèle de la beauté, cela s'explique par ceci que le jugement que nous portons sur nous-mêmes, sur ce que nous voudrions être et aimons est toujours un jugement social, que ce que nous nous représentons comme idéal n'est jamais qu'une représentation du social. La théorie de l'homme moyen annonce l'ère où la perfection s'identifiera avec la normalité, où le grand impératif de la morale sociale sera de normaliser. Quételet pourra dire que ce qui caractérise les grands hommes, c'est moins la distance qui les séparerait des autres que leur conformité à cette fameuse « moyenne », conformité qui va permettre que le commun s'identifie à lui. On avait pu chercher dans la cité grecque ou dans la république romaine l'idéal d'une société à reconstituer, placer dans l'utopie des communautés le bonheur promis à l'humanité, Quételet et la tradition sociologique qu'il inaugure nous rappellent à la réalité d'un monde où l'idéal est déjà là, toujours actuel, sous la forme de la norme et de la moyenne qui la définit. La perfection, le devoir, le bien, le bien-être seront d'être dans la norme et la moyenne. L'idéal ne sera plus de sortir de la norme, de se distinguer des autres, de se démarquer, mais d'être le mieux « socialisé ». On pourra commenter comme on voudra cette singulière identité de la norme et de la morale, de la perfection et de la moyenne. Cette manière de n'envisager d'autre norme pour chacun que son rapport toujours actuel aux autres, cette manière en fin de compte de réduire l'être de chacun à son être social ; tout cela est sans doute caractéristique de l'ère qui s'ouvrait alors et qu'un historien anglais, M. Bidiss, a heureusement caractérisée comme l'*ère des masses.*

LE TOUT ET SES PARTIES

La deuxième grande série de critiques que l'on a portées contre Quételet concerne le « matérialisme » qui découlerait de sa sociologie : elle impliquerait un fatalisme destructeur de notre liberté, que l'on trouverait exprimé dans les conclusions devenues célèbres qu'il devait tirer de l'étude des premières statistiques criminelles : « Cette constance avec laquelle les mêmes crimes se reproduisent annuellement dans le même ordre et attirent les mêmes peines dans les mêmes proportions est un des faits les plus curieux que nous apprennent les statistiques des tribunaux ; je me suis particulièrement attaché à la mettre en évidence dans mes différents écrits ; je n'ai cessé de répéter chaque année : il est un budget qu'on paye avec une régularité effrayante, c'est celui des prisons, des bagnes et des échafauds ; c'est celui-là surtout qu'il faudrait s'attacher à réduire ; et chaque année les nombres sont venus confirmer mes prévisions, à tel point que j'aurais pu dire peut-être avec plus d'exactitude : il est un tribut que l'homme acquitte avec plus de régularité que celui qu'il doit à la nature ou au trésor de l'État, c'est celui qu'il paye au crime ! — Triste condition de l'espèce humaine ! Nous pouvons énumérer d'avance combien d'individus souilleront leurs mains du sang de leurs semblables, combien seront faussaires, combien seront empoisonneurs : à peu près comme on peut énumérer d'avance les naissances et les décès qui doivent se succéder. La société renferme en elle les germes de tous les crimes qui vont se commettre. C'est elle en quelque sorte qui les prépare et le coupable n'est que l'instrument qui les exécute [14]. » Ici, à nouveau, sont en question l'objectivation et le décentrement sociologique, l'idée même d'une sociologie. Le problème est celui des rapports du tout et de ses parties, de la société et des individus : si le tout obéit à des lois, comment donc ceux qui le composent pourraient-ils encore être libres ? L'idée même d'une sociologie scientifique n'implique-t-elle pas le deuil de la liberté individuelle ?

Ce qui caractérise la physique sociale de Quételet — comme plus généralement la sociologie —, c'est l'abandon de toute perspective individuelle ou psychologique : « Il s'agit de bien s'entendre sur la nature et la valeur des lois que nous nous proposons de rechercher ; c'est le corps social que nous avons en vue d'étudier et non les particularités qui distinguent les individus dont il se compose [15]. » Les lois que la sociologie dégage s'appliquent au tout sans s'appliquer à chacune de ses parties. Il n'y a pas d'isomorphisme entre l'individu et la société ; il y a là deux réalités de nature différente : « Ces lois, par la manière même dont on les a déterminées, ne présentent plus rien d'individuel, et par conséquent on ne saurait les appliquer aux individus que dans certaines limites. Toutes les applications qu'on voudrait en faire à un homme en particulier seraient essentiellement fausses, de même que si l'on prétendait déterminer l'époque à laquelle une personne doit mourir, en faisant usage des tables de mortalité [16]. » La société est objectivée par la sociologie comme une réalité « indépendante » de ses parties. Théorie paradoxale : comment, en effet, le tout pourrait-il exister indépendamment de ses parties ? Cette thèse est comme fondatrice de la sociologie ; on la retrouve dans la célèbre règle durkheimienne : « Traiter les faits sociaux comme des choses. » La société devient un sujet susceptible d'un certain type de prédication qui n'est pas lui-même applicable aux individus qui la composent. La société peut être soumise à des lois et les individus garder leur libre arbitre.

Soit. Mais, dans le cadre de cette hypothèse sociologique où le tout et ses parties ont chacun leur propre mode d'existence, comment penser leurs rapports ? Quelle influence la liberté peut-elle avoir sur l'évolution sociale et, inversement, quelle place ce déterminisme, l'existence de causalités sociales laisse-t-il aux libertés individuelles ?

Du point de vue de l'influence des libertés individuelles sur la société, la réponse de Quételet peut se résumer en trois propositions :

a) La première est épistémologique : les effets du libre arbitre individuel, considérés en masse, se neutralisent. « Devant un pareil ensemble d'observations, faut-il nier le libre arbitre de l'homme ? Certes je ne le crois pas. Je conçois seulement que l'effet de ce libre arbitre se trouve resserré dans des limites très étroites et joue dans les phénomènes sociaux le rôle d'une cause accidentelle. La possibilité d'établir une statistique morale et d'en déduire des conséquences utiles dépend entièrement de ce fait fondamental que le libre arbitre de l'homme s'efface et demeure sans effet sensible quand les observations s'étendent sur un grand nombre d'individus[17]. » Ils ne sont donc facteurs d'irrégularités qu'en apparence. C'est la loi des causes accidentelles. La liberté a le statut épistémologique d'une cause accidentelle : c'est l'aléa. En d'autres mots, l'hypothèse du libre arbitre n'est pas un obstacle pour la sociologie, et celle-ci n'implique en rien l'inexistence de la liberté. La question de la liberté n'est pas pertinente pour la sociologie.

b) Le libre arbitre a-t-il une influence perturbatrice sur la marche du tout ? La réponse de Quételet est surprenante : l'existence du libre arbitre, loin d'être un facteur de désordre, est plutôt un facteur d'ordre : « Quant au libre arbitre de l'homme, cette force en apparence si capricieuse serait loin de troubler la marche du corps social ; c'est au contraire à son intervention que serait due la reproduction si régulière des mêmes faits. Cette espèce de paradoxe s'explique en considérant que chaque homme en vertu de son libre arbitre et des circonstances qui l'entourent s'est créé un état normal vers lequel il tend constamment à revenir. » Et Quételet de préciser : « C'est l'état qui va le mieux à notre organisation : des causes accidentelles peuvent l'altérer, mais nous tendons toujours à y revenir. Des événements imprévus peuvent exciter nos passions, nous porter au mal comme aussi nous élever au-dessus de nous-même ; ce sont ces causes accidentelles qui nous font osciller plus ou moins autour de notre état moyen ; et par cela même que les variations s'accomplissent sous leur influence, nos différents états sont soumis à la loi de possibilité. Quant au libre arbitre, bien loin de jeter des perturbations dans la série des phénomènes qui s'accomplissent avec cette admirable régularité, il les empêche au contraire, dans ce sens qu'il resserre les limites entre lesquelles se manifestent les variations de nos différents penchants[18]. » Non seulement le libre arbitre est plutôt un facteur d'ordre que de désordre, mais c'est grâce à lui que les lois sociales sont plus régulières que les lois physiques : « Les phénomènes sociaux, influencés par le libre arbitre de l'homme, procèdent d'année en année avec plus de régularité que les phénomènes purement influencés par des causes matérielles et fortuites[19]. » Quételet ne pouvait décidément pas aller plus loin dans le renversement de l'objection qu'on lui portait : non seulement la question de la liberté est indifférente au sociologue, mais, si l'on en adopte l'hypothèse, c'est à elle qu'il faut rendre grâce de la possibilité de la sociologie.

c) Quels effets peut-on escompter de l'exercice des libertés ? Les libertés individuelles ont-elles un effet sur la marche du tout ? et lequel ? Quelle est la puissance de la liberté ? « Je crois, écrit Quételet, que l'homme possède une force morale capable de modifier les lois qui le concernent ; mais cette force n'agit que de la manière la plus lente, de sorte que les causes qui influent sur le système social ne peuvent subir aucune altération brusque ; telles qu'elles ont agi pendant une série d'années, telles elles agiront encore pendant les années qui vont suivre, à moins qu'on ne parvienne à les modifier[20]. » En somme il n'y a pas de révolution possible. Plus exactement, s'il peut y avoir des révolutions politiques, il ne peut y avoir de révolution sociale. Cela résulte du décentrement sociologique. L'idée de révolution sociale implique une sorte de toute-puissance de la liberté, dont la sociologie implique que l'on fasse le deuil.

Quételet va plus loin. Les hommes, livrés à eux-mêmes, auraient vécu dans un état stationnaire : « L'homme dépourvu du bienfait de la science serait nécessairement stationnaire [...]. Il subirait le sort de tous les êtres animés et présenterait dans ses divers éléments des fluctuations qui auraient leurs phases et leurs limites déterminées. Mais ces fluctuations, depuis l'ogirine du monde, n'auraient point subi de variations, parce que rien ne prouve que la nature, depuis cette époque, ait altéré ses lois. » Autrement dit, dans la mesure où la liberté est naturelle, elle ne donne pas à l'homme un statut différent de celui d'une autre espèce vivante. Si les hommes ont une histoire, s'ils ont plus varié qu'une autre espèce, s'ils se sont libérés de leur seule existence biologique, c'est grâce à la science : « Les seules causes qui puissent supporter des altérations dans les lois naturelles proviennent de l'homme, qui, en s'appuyant sur la science, change la culture et parvient à altérer les moyennes et les limites[21]... »

Mais cette première étude du rapport tout-parties, dans le sens individus-société n'épuise pas le problème. Il faut envisager le rapport dans le sens inverse : quelle est l'influence de la société, de ses lois sur les individus ? Si l'hypothèse de la liberté n'empêche pas de dégager des lois sociales et reste compatible avec la constitution de la sociologie, est-ce qu'inversement l'affirmation de causalités sociales n'implique pas celle d'une détermination des volontés ? Si l'existence de la liberté n'affecte pas la constitution de la sociologie, l'objectivation sociologique de la société laisse-t-elle sauve l'hypothèse de la liberté ? La thèse de Quételet est la suivante : « C'est ici que nous trouvons au contraire une admirable harmonie qui, tout en laissant à l'homme sa libre faculté d'agir, l'a cependant limitée avec tant de sagesse qu'elle ne peut entraver en rien les lois immuables qui président à la conservation des mondes comme à celle des plus simples éléments qui les composent[22]. » Ce qu'il précise à propos de ce fameux penchant au crime à propos duquel il avait pu déclarer qu' « il est un tribut que l'homme acquitte avec plus de régularité que celui qu'il doit à la nature ou au trésor de l'État, c'est celui qu'il paye au crime » : « Chez l'homme la tendance au crime dépend de son organisation particulière, de l'éducation qu'il a reçue, des circonstances dans lesquelles il s'est trouvé, ainsi que de son libre arbitre auquel j'accorde volontiers l'influence la plus grande pour modifier tous ses penchants. Il peut donc s'il le veut devenir autre qu'il n'est[23]. » L'existence des lois sociales n'implique donc en rien la réfutation de l'existence du libre arbitre.

Le rapport société-individu est un rapport complexe. Il y a d'une part influence ou action de la société sur les conduites individuelles. La constatation de lois sociales oblige à supposer l'existence de facteurs qui les traduisent dans la réalité, une zone intermédiaire, un entre-deux entre la société et les individus : des influences, des circonstances, des mœurs, des habitudes, des usages, des coutumes qui rendent compte de l'action de la société sur les comportements : « Faut-il donc admettre que ce libre arbitre s'exerce dans des limites indéfinies, si l'on ne veut encourir le reproche de le nier entièrement ? Mais avec toutes les folies qui ont passé par la tête des hommes, avec tous les penchants qui ont désolé la société, que serait devenue notre espèce depuis tant de siècles ?... Eh quoi ! lorsqu'il s'agit de prendre la détermination la plus simple, nous sommes sous l'empire de nos habitudes, de nos besoins, de nos relations sociales et d'une foule de causes qui, toutes, nous tiraillent en cent façons différentes. Ces influences sont si fortes, que nous ne faisons pas difficulté de dire, même quand il s'agit de personnes que nous connaissons à peine ou même que nous ne connaissons pas, quelle est la résolution à laquelle elles vont s'arrêter. Pourquoi donc ce préjugé auquel vous vous associez chaque jour, si vous n'étiez convaincus à l'avance qu'il est extrêmement probable que l'empire des causes l'emportera sur le libre arbitre [24] ? » Et Quételet précise : « Pour savoir jusqu'à quel point notre volonté se trouve engagée dans le système social, considérons nos moindres actions, même en dehors des obligations que nous impose notre état, ainsi que toutes les convenances que nous avons à consulter dans nos relations avec le monde extérieur. Nos costumes, nos promenades, nos discours, nos plaisirs, les heures de nos repas, celles même de notre sommeil, sont fixés par d'autres que par nous. Est-il étonnant dès lors qu'il reste des traces de cet esclavage dans l'ensemble des faits que recueille la statistique ? Si l'on se marie, on a des convenances à consulter, des usages à suivre, des blâmes à éviter, et comme ces obligations sont générales, les faits qui en résultent le sont aussi. Ce n'est plus le vouloir de l'individu qui se trouve ici le seul régulateur, mais celui du peuple auquel l'individu appartient [...]. Les volontés sont soumises à certains usages auxquels elles cèdent comme à des nécessités et, comme ces nécessités restent annuellement les mêmes, on voit aussi se reproduire périodiquement les mêmes effets [25]. »

S'il faut supposer tant de déterminations, quel statut encore pour la liberté ? Celui d'une puissance ou d'une force de réaction, de résistance ou d'opposition. En même temps que Quételet affirme que « le penchant de l'homme au mal dépend de son organisation particulière, de l'éducation qu'il a reçue, des circonstances dans lesquelles il s'est trouvé », il précise qu'il dépend aussi, d'autre part, « de son libre artibre auquel j'attribue volontiers l'influence la plus grande pour modifier tous ses penchants. Il peut donc, s'il le veut, devenir autre qu'il n'est [26] ». En somme, il faut abandonner le vocabulaire métaphysique de la liberté pour celui, plus positif, de rapports de force et de résistance. Comme le dira quelques années plus tard E. Levasseur : « La nation, le groupe social, la famille, le corps, le caractère et l'intelligence : autant de cercles concentriques et de plus en plus étroits qui enserrent la liberté de tout homme et qui exercent, du dehors au dedans, leur pression sur sa volonté. L'homme et même l'enfant, quand il est en état de comprendre ce qu'il fait, peuvent accomplir l'effort nécessaire pour sortir de ces cercles. Le plus souvent la volonté s'y confine par habitude ou s'y maintient par résolution. Mais qu'elle cède ou qu'elle résiste aux impressions du dehors et du dedans, elle n'est pas moins là au centre dans le for intérieur : c'est assez pour que l'homme ait la responsabilité de ses actes et en soit rendu effectivement responsable dans tous les cas où il n'est pas prouvé d'une manière manifeste que sa volonté n'a pu agir [27]. » La liberté n'est pas un pouvoir d'absolue autodétermination. Être libre ne signifie pas être indépendant ou indéterminé. La liberté est un pouvoir sans doute réel, quoique limité, de résister et de réagir aux influences que nous subissons.

Avec ceci que l'on peut supposer les hommes aussi libres que l'on veut — et ce n'est pas une simple hypothèse, comme le prouve la loi des causes accidentelles —, on peut conférer une sorte de toute-puissance à la volonté, le fait est que les hommes n'en usent généralement pas. « Notre volonté est une force aussi, mais une force dont nous usons rarement ; dans le plus grand nombre des cas, on peut la considérer comme nulle [...]. L'homme, dans les sphères d'activité de son libre arbitre, peut développer toutes les forces de sa raison, poursuivre ou repousser les suggestions étrangères, mais l'expérience nous apprend que tandis que l'un triomphe, l'autre succombe et que sous l'influence des causes sociales qui nous dominent plus ou moins, les mêmes effets se reproduisent périodiquement dans le même ordre [28]. » Et Quételet d'utiliser, pour penser le rapport action sociale-réaction individuelle dans le cas du crime, la métaphore de la chute et de l'accident : « Si je m'avisais de faire dépaver la rue devant ma porte et si l'on venait me dire le lendemain que plusieurs personnes, en tombant, se sont blessées pendant la nuit, devrais-je m'en étonner ? Ces accidents ne seraient-ils pas très naturels, au contraire, et ne se reproduiraient-ils pas les nuits suivantes ? N'aurais-je pas mauvaise grâce de prétendre ensuite que je ne suis point cause du mal, que chacun était libre d'aller comme il l'entendait et que ceux qui sont tombés auraient dû se faire éclairer ? Eh bien, une grande partie des chutes morales qui se font dans l'ordre social ont la même origine ; et l'on ne saurait trop s'attacher à écarter les occasions qui les font naître [29]. » Crime, chute, accident, cet accouplement singulier d'un mode d'objectivation religieux, avec celui tout désaffecté de l'accident est sans doute plus que l'effet du hasard : à la chute va maintenant succéder l'accident, qui se définit exactement d'être au point d'articulation d'une régularité statistique et de la liberté individuelle.

POLITIQUE DE LA SOCIOLOGIE

L'objectivation sociologique de la société conteste celle qui présidait aux politiques libérales. C'est comme si on était dans un autre monde : le tout a acquis une existence quasi indépendante de ses parties ; le rapport du tout et de ses parties s'est comme inversé. D'un côté il y a le tout et ses lois, comme le fameux penchant au crime, de l'autre les libertés individuelles, qui, si elles ont en permanence le pouvoir de les modifier, contribuent pratiquement à les former. Cela implique la disqualification des politiques de moralisation, dont la logique était précisément un changement social par le biais d'une action individuelle.

Et cela d'autant plus que Quételet, conformément à ses postulats de base, va interpréter les résultats de sa physique sociale à travers le principe physique de la conservation des forces vives : « Lorsqu'un système de corps est en mouvement, sa marche demeure invariablement la même, à moins que les causes de ce mouvement ne viennent à varier. C'est ainsi qu'un État verra annuellement le retour des mêmes effets, comptera le même nombre de naissances, de décès, de mariages, de crimes et d'actions vertueuses, pourvu que la loi, les coutumes, les mœurs, les lumières et toutes les conditions de cet État ne changent pas[30]. »

La conséquence de cette position n'est ni la résignation, ni la passivité. Elle implique seulement un changement du point d'application des réformes et de l'action politique : que l'on agisse non plus tant sur les individus que sur ce qui les influence, le « milieu », sur les causes des maux sociaux, c'est-à-dire sur la société elle-même. La société n'est plus le cadre ni l'instrument à l'intérieur duquel et grâce auquel pourraient s'opérer les réformes selon le couple moralisation-pénalisation ; elle devient son propre objet de réforme. Elle doit maintenant agir sur elle-même. Premier effet : dans la mesure où la politique doit maintenant se donner comme tâche d'agir sur les causalités sociales, la sociologie, à qui il appartient de les faire apparaître, devient sociologie politique. Les succès de la politique dépendront des progrès de la sociologie. La sociologie n'est pas seulement une science pure ; on doit attendre le meilleur de ses applications. La sociologie porte avec elle une transformation de la rationalité gouvernementale. Comme l'exprimait Villermé : « Ces conclusions ou les faits qu'elles expriment sont les résultats nécessaires des inclinations et des conditions dans lesquelles on est ou l'on a été. Tout ce que peut de plus efficace un gouvernement habile et le zèle d'hommes éclairés, puissants et amis de leurs semblables, c'est de changer, autant qu'il est donné de le faire, les conditions dont il s'agit, de manière à contrebalancer leurs mauvais effets par des effets contraires. Prétendre corriger et prévenir les infractions aux lois avec les seuls châtiments ou supplices, c'est ignorer le cœur et l'esprit humains ; c'est ne pas savoir que la morale des peuples est toute dans les habitudes et les circonstances ; que s'il y a des individus coupables, il y a aussi des préjugés, des usages, des positions, des institutions qui font naître les crimes ; et que ce sont, avant tout, ces institutions, ces positions, ces usages, ces préjugés qu'il faut attaquer ou changer pour arrêter la démoralisation publique. Faire autrement, c'est ne demander à des sociétés organisées pour le vice que des actes irréprochables, c'est vouloir l'impossible ou c'est, si l'on veut, ressembler à ces juges devant lesquels paraît un homme couvert d'attentats, qu'ils avaient autrefois, lorsque cet homme n'était encore en rien perverti, envoyé en prison pour une faute légère ; ils le condamnent, une seconde fois, sans penser que c'est leur premier jugement ou le séjour dans la prison au milieu d'un ramas de scélérats, qui l'a lancé dans la carrière du crime et que chacun d'eux doit des actions de grâces au Ciel pour n'être point un pareil monstre. Je tiens d'une personne qui accompagnait Napoléon à l'île d'Elbe que, dans les conversations particulières et alors très philosophiques de l'ex-empereur, on lui a plusieurs fois entendu dire que, sous quelque rapport que l'homme so envisagé, il est autant le produit de son atmosphère physique et morale qu de son organisation. Certes l'idée déjà émise par bien d'autres que présente phrase est la plus générale comme la plus juste de toutes cell qu'on peut avoir sur notre sujet[31]. » Cette politique a un nom : l'hygièn sociale ; une forme privilégiée : la prévention, dont la répression ne devra être qu'une des modalités ; un organe : non plus la justice, mais l'administra tion.

Si les politiques sociales doivent changer d'objectifs, elles doivent auss réviser leur prétention dans la lutte contre le mal social : les politique pénales, par exemple, ne sauraient plus prétendre éradiquer le crime, comm l'exprime bien la métaphore si souvent utilisée par Quételet du « budget ». I y a pour toute société un taux de criminalité à la fois inéluctable, normal e même nécessaire à l'équilibre de l'ensemble. Il est lui-même un des facteur de conservation sociale. Durkheim ira jusqu'à dire : de « santé ». Il est sans doute possible de le contenir, de le maîtriser, peut-être même de le faire tendre à la baisse, mais certainement pas de le faire disparaître. Ce qui est anormal, ce n'est pas le fait du crime en lui-même, mais la variation outre mesure de son taux.

D'où cette conséquence qu'une bonne politique pénale devra être de prévention, de pénalisation des délinquants sans doute, mais surtout de réparation. Si un certain taux de criminalité est normal, nécessaire, il devient aussi nécessaire que ceux qui en pâtissent ne soient plus les seuls à en supporter la charge. Si certaines souffrances individuelles sont nécessaires, il devient non moins nécessaire d'en répartir socialement la charge. Le délinquant, son crime et sa responsabilité se trouvent associés, en amont, vers les conditions qui l'ont poussé à le commettre et, en aval, vers la protection de ses victimes.

La sociologie de Quételet comporte une dimension politique plus générale : elle propose un art de gouverner. Sur un modèle qu'on pourrait croire inspiré du *Prince* de Machiavel, Quételet ne propose d'autre objet au gouvernement que sa propre conservation. Les lois du système social comme celles de tout autre système obéissent à l'unique principe de conservation. Sociologiquement, une société ne peut donc rigoureusement avoir d'autre projet que de se conserver. La conservation du système social dépend du maintien de l'équilibre des forces qui le traversent. L'art de gouverner va être celui de maintenir le système en équilibre ; l'équilibre devient le maître mot de la politique : « Si cet équilibre n'a pas lieu par lui-même, on peut le produire en ajoutant aux forces existantes une nouvelle force égale et directement opposée à leur résultante. C'est dans l'estimation de la nature et de la direction de cette résultante que réside l'art de gouverner. Il faut connaître parfaitement les forces et les tendances des partis qui divisent ordinairement un État, pour juger des moyens les plus propres à les combattre et à les paralyser[32]. »

Machiavel passe pour avoir libéré la politique de la morale. Il aurait ainsi posé les conditions d'une politique réaliste. Quételet en propose une autre, fondée sur une autre positivité. Qui ne se souvient du chapitre XXV du *Prince*, où Machiavel explique que, tout compte fait, le prince a lui-même un maître dans « la Fortune » : « Il n'est pas rare aujourd'hui de voir des princes tomber d'un état prospère dans l'infortune sans qu'on puisse attribuer leurs disgrâces à aucun changement dans leur conduite ou dans leur caractère. Je crois que cela tient à des causes que j'ai déduites ci-dessus assez au long : c'est que les princes qui comptent trop sur la Fortune doivent périr lorsqu'elle les abandonne. Les princes qui règlent leur conduite sur le temps sont rarement malheureux et la Fortune change pour ceux qui ne savent pas se conformer aux temps. » Ce texte évoque un rapport du politique avec le temps, l'histoire et la nature qui n'est peut-être plus le nôtre. En tout cas, celui auquel nous avons appris à rêver depuis que des Quételet et autres sociologues nous ont enseigné que, la société étant susceptible d'être étudiée scientifiquement, il serait désormais possible de faire l'économie des expédients machiavéliques pour mener des politiques devenues enfin positives.

NOTES

Inventaires infinis et dénombrements parfaits

1. A. Quételet, « Recherches sur le penchant au crime dans les différents âges », *Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et des belles-lettres,* Bruxelles, 1832, p. 4.
2. Id., *Du système social et des lois qui le régissent,* Paris, 1848, p. 8.
3. Id., *Lettres à S.A.R. le duc régnant de Saxe-Cobourg et Gotha, sur la théorie des probabilités, appliquée aux sciences morales et politiques,* Bruxelles, 1946, p. 47.
4. J. Lottin, *Quételet, statisticien et sociologue,* Paris-Louvain 1912, p. 58.
5. A. Quételet, *Physique sociale ou Essai sur le développement des facultés de l'homme,* Bruxelles, 1869, t. I, p. 93-94.
6. C. Ménard, « Trois formes de résistance aux statistiques : Say, Cournot, Walras », *Journées d'étude sur l'histoire de la statistique,* Paris, 1976, multigraphie, p. 5.

Norme et moyenne

7. A. Quételet, *Physique sociale,* op. cit., t. I, p. 6-7.
8. Id., *Lettres à S.A.R. le duc régnant de Saxe-Cobourg...,* op. cit., p. 135 *sqq.*
9. Id., *ibid.,* p. 137-138.
10. Id., *Du système social...,* op. cit., p. 13-14.
11. Id., *ibid.,* p. 18-19.
12. Id., *Sur l'homme et le développement de ses facultés ou Essai de physique sociale,* Paris, 1835, t. I, p. 20, et t. II, p. 250.
13. Id., *Physique sociale,* op. cit., t. I, p. 147-148.

Le tout et ses parties

14. QUÉTELET, *Physique sociale,* op. cit., t. I, p. 96-97. « Il en résulte, poursuit Quételet, que celui qui porte sa tête sur l'échafaud ou va finir son existence dans les prisons, est en quelque sorte une victime expiatoire de la société. »
15. ID., *Sur l'homme...* op. cit., t. I, p. 14.
16. ID., *ibid.,* p. 14.
17. ID., *Du système social.,* op. cit., p. 69.
18. ID., *ibid.,* p. 96.
19. ID., *ibid.,* p. 97.
20. ID., « Recherches sur le penchant au crime... » *op. cit.*
21. ID., *Du système social...,* op. cit., p. 258.
22. ID., *ibid.,* p. 9.
23. ID., *ibid.,* p. 96.
24. ID., *Études sur l'homme,* Bruxelles, 1842, p. 12.
25. ID., *Du système social...,* op. cit., p. 71-72, p. 95 ; « De l'influence du libre arbitre de l'homme sur les faits sociaux et particulièrement sur le nombre des mariages » (*Bulletin de la Commission centrale des statistiques,* Bruxelles, t. III, 1847, p. 145).
26. ID., *Du système social...,* op. cit., p. 95.
27. E. LEVASSEUR, *la Population,* Paris, t. II, p. 525.
28. A. QUÉTELET, *Du système social...,* op. cit., p. 104 ; « Sur la statistique morale et les principes qui doivent en former la base » (*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale,* t. XXI, 1848, p. 36).
29. ID., *Physique sociale,* op. cit., t. II, p. 248.

Politique de la sociologie

30. J. LOTTIN, *op. cit.,* p. 395.
31. L. R. VILLERMÉ, « Sur l'hygiène sociale », in *Annales d'hygiène publique,* Paris, 1830, t. IV, p. 46.
32. A. QUÉTELET, *Du système social...,* op. cit., p. 291.

ESQUISSE D'UNE HISTOIRE DE TRANSPOSITIONS DANS L'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE

Georges GLAESER

I TRANSPOSITIONS

C'est hors de l'école que s'apprennent les savoir-faire les plus courants de la vie quotidienne : pour se nourrir, voyager, vendre, acheter ... l'instruction ne fournit, au mieux que des compléments d'information.

> Les **apprentissages sans enseignement** sont ceux qui se réalisent au contact de l'environnement.

L'**enseignement** au contraire repose sur une préparation intentionnelle de la matière à inculquer : elle est préalablement analysée, décomposée, dépouillée des détails non significatifs, complétée par des explications, illustrée par des exemples. On la présente alors à l'apprenant selon un *timing* dûment planifié : cette gestion de temps prévoit non seulement l'ordre dans lequel les divers items seront exposés, mais aussi les longs intervalles de temps, qui permettent une maturation, une assimilation des bases.

> Une **transposition** est une modification du contenu, ou de son mode de présentation effectuée dans le but de faciliter l'apprentissage

Glaeser 1987

Remarquons (qu'au même titre que le mot *permutation*, en mathématique) les mots transposition (ou modification) désignent soit une *action* soit le *résultat* de cette action : ce dernier ne s'avère pas toujours conforme aux souhaits de celui qui entreprend l'action. Le contexte permettra, si nécessaire, de distinguer ces deux acceptions.

A côté des enseignements dispensés par un **maître** dont c'est la profession, il existe des **apprentissages autodidactes** réalisés par exemple grâce à des *livres*.Les connaissances transmises ont été soumises à des transpositions séculaires ; les auteurs les plus originaux empruntent beaucoup à la tradition, mais y apportent quelques modifications personnelles : les innovations sont parfois abandonnées ou, au contraire, reprises et améliorées par la postérité.

La **classe** n'est pas l'unique théâtre de tous les enseignements : c'est d'ailleurs une institution récente. Mais le temps scolaire ne représente dans l'enseignement élémentaire actuel que 900 heures sur 8760. Et les années de scolarisation ne sont qu'une faible fraction de la vie d'un individu. Bien des activités imposées ou suggérées par l'école (devoir, leçon, observation du milieu, lectures) se déroulent hors de la salle de classe. (L'Ouvert n° 26).

Le **professeur apprend beaucoup en enseignant** (bien après avoir "terminé" ses études institutionalisées). Expliquons ce paradoxe :

Pour préparer un cours sur un sujet nouveau, il consulte systématiquement plusieurs livres ; il reformule systématiquement le contenu ; il invente de nouveaux arguments. Il parcourt le domaine d'étude selon divers itinéraires, en variant les points de départ et d'aboutissement. Il explore aussi l'environnement culturel, en composant des exercices et autres activités. Brefs, **il transpose** !
L'exposé linéaire qu'il fournira à ses élèves, gomme tous les chemins de traverses qu'il aura découverts. Par contre, il bénéficiera de l'analyse qu'il aura réalisée en dévoilant la structure complexe du sujet traité. De plus il prendra conscience des difficultés, en observant les réactions de ses élèves.

"La meilleure façon de se familiariser avec un sujet, c'est de lui consacrer un livre !" ?

Qui peut me donner le nom de l'auteur de cette célèbre boutade ?

La *didactique* d'une discipline est l'étude des mécanismes d'apprentissage qui mettent en œuvre des enseignements.

Pour se constituer en science, la didactique des mathématiques recourt surtout à des *méthodologies expérimentales* . Mais elle recherche, en outre dans *l'histoire de l'enseignement* des informations qui éclairent les phénomènes pédagogiques de notre temps.

Et ce qui nous intéresse le plus, ce sont les *ruptures* qui balayent nos pratiques éducatives. C'est ce qui conduit à esquisser une histoire *centrée sur les transpositions.*

Dans le cadre d'une seule conférence, je ne puis qu'évoquer une *histoire en pointillés,* choisissant ça et là quelques points significatifs.

1° Je survolerai le long règne de la *pédagogie sans élèves* , au cours de laquelle toute la pédagogie porte sur la modification du texte enseigné, sur la fabrication du message, sans égard à sa réception.
Je n'évoquerai donc que l'histoire d'un très petit nombre de livres, ancêtres de nos *manuels scolaires* .
Je préciserai d'abord ce que signifient ces termes :

Un *manuel* se caractérise
par certains modes d'emploi pédagogiques,
par le public auquel il s'adresse (âge et niveau des lecteurs).

Un *manuel scolaire*
est adopté par des *établissements d'enseignement,*
à l'usage des *professeurs* ou des *élèves* .
Ces derniers sont *contraints,* en principe, de consulter
ce livre, et à *apprendre des passages par cœur* .

2° Une rupture fondamentale semble liée à l'avènement d'une *pédagogie de l'exercice et du problème*, dont l'histoire mériterait déjà, à elle seule, tout un enseignement annuel.

3° Je regrette de ne pouvoir aborder ici une *histoire de la formation des maîtres* ; et spécialement celle du XXe siècle, qui mériterait à elle seule beaucoup de recherches supplémentaires.

II DEUX MILLE ANS DE TRANSPOSITIONS DU TEXTE D'EUCLIDE

Jadis on croyait à une liaison rigide, absolue, irréductible entre la connaissance et le texte

> A cette époque ...
>
> *Connaître* : c'est savoir interpréter le texte et le mémoriser
> *Apprendre* : c'est le psalmodier, le restituer ou le commenter.
>
> Quant au *texte* lui-même, c'était (outre les Ecritures sacrées des diverses religions) Aristote, Hippocrate ...
>
> En mathématiques, c'était essentiellement "Les Eléments" d'Euclide (IIIe siècle avant J.C)

Les livres anciens étaient surtout des *textes évolutifs* . Constamment recopié, remanié au cours des siècles, le chef d'œuvre d'Euclide est en état permanent de transposition. La plus ancienne copie dont nous disposons est postérieure de cinq siècles environ à ses premières versions.

Les changements relevés ne sont parfois que des lapsus de copistes. Mais on inclut souvent dans le texte les dernières améliorations scientifiques ... Et souvent, on prétend apporter des modifications qui rendraient l'exposé plus clair, mieux enseignable. Ce processus se poursuit au cours de l'histoire des traductions de l'ouvrage dans diverses langues savantes (latin, hébreu, arabe ...) et des *adaptations* , dont on trouvera un premier inventaire dans l'article d'Alexandre Koyre (in Taton 1957).

Les "Eléments" s'adressaient essentiellement à des *savants de haut niveau.* Vers le XVIe siècle, apparaissent des versions destinées à des "commençants" : mais on croyait alors que les mathématiques les plus élémentaires (les opérations de l'arithmétique par exemple, et même la numération (le "chiffrage")) n'étaient pas accessibles aux enfants.

Au XVIIe siècle, on commence à disposer d'adaptations du texte d'Euclide, qui sont des manuels scolaires destinés à des adolescents agés. Le plus célèbre fut celui de Clavius (1574), en usage durant tout le XVIIe siècle dans les établissements de Jésuites où l'étude des mathématiques débutait (pour des élèves hautement sélectionnés) vers 19 ans environ !

Plus tard s'amorce un processus d'adaptation des Eléments d'Euclide à des élèves plus jeunes. Le manuel de Robert Simpson (1756) connut un vif succès de librairie (30 éditions) en Grande-Bretagne.

Citons encore la "Géométrie de Port-Royal": les "*Nouveaux élémens* [1]*de Géométrie*" rédigés par Antoine Arnauld (1667). Ce *n'était pas un manuel* : Les Petites Ecoles de Port-Royal disposaient de collaborateurs fort compétents en mathématiques (Blaise Pascal), qui rédigèrent en partie ces nouveaux "Elémens" et la célèbre "Logique ou l'Art de Penser" (1662), par Arnauld et Nicole. Mais, au témoignage même de Jacqueline Pascal le programme d'études du célèbre établissement janséniste ne comportait ni calcul, ni géométrie "si ce n'est une heure de "gets" (jetons) les dimanches et jours de fête, lorsqu'il pleuvait !" (Carré, 1971).

Une des caractéristiques des sous-produits d'Euclide du XVII et XVIIIe siècle est – à mon avis – une régression du point de vue de la clarté. Les auteurs pensaient rendre l'exposé plus accessible, en éliminant les excès de rigueurs.Mais les résultats ne furent pas probants. L'idéologie de la "Lumière naturelle", chère à Pascal, était plutôt une *obscure clarté !!*

III CLAIRAUT (1713 - 1765)

Les premières transpositions qui concernent vraiment la didactique des mathématiques émanent des contestataires d'Euclide. Claude-Alexis Clairaut fut l'artisan le plus important de cette rupture. Les deux ouvrages d'enseignement écrits par ce grand savant "Elémens de Géométrie" (1741) et "Elémens d'algèbre" (1746) eurent le mérite de déclencher cent ans plus tard un débat sur la diversité des modes d'enseignement en mathématiques et leurs mérites respectifs. Ce débat n'est pas encore éteint.

J'ai exposé dans (Glaeser 1983) quelques uns des principes de la pédagogie de Clairaut, en les illustrant d'exemples empruntés à sa "Géométrie". Je complète ici cet article en insistant sur les transpositions qui apparaissent dans son "Algèbre".

Clairaut fut un pionnier de ce que l'on peut appeler la *méthode d'exposition magistrale par le problème.*
Auparavant le discours dogmatique fournissait des réponses à des *questions non posées.*

Clairaut invente des progressions de questions ingénieuses-auxquelles il apporte aussitôt *ses* réponses.
C'est là une rupture radicale vis-à-vis d'Euclide.
Un siècle et demi plus tard l'étape suivante est franchie (par exemple par Martin Wagenschein) :
C'est l'apprentissage par *problèmes posés et résolus par l'élève,* ce que des situations judicieusement choisies par le professeur rendent possible.
C'est une rupture radicale vis-à-vis de Clairaut.

(1) *Orthographe ancienne*

Des admirateurs trop naïfs de Clairaut ne se contentent pas de rendre justice aux progrès considérables qu'il a accomplis. Ils lui prêtent, en outre, des *intentions* évidemment *anachroniques* .

Jusqu'au XVIIe siècle, l'enseignement des mathématiques concerne un nombre infime d'individus, adultes ou adolescents âgés. Il existe cependant des exceptions :

L'épisode sumérien (3000 ans av J.C.)(S.N. Kramer 1975) et l'épisode florentin (12e au 15e siècle après J.C) (Van Egmont 1980).
Dans ces deux cas, on sait que les écoliers commençaient leurs études vers 7-9 ans ; on connaît les énoncés des activités qu'on leur proposait (par exemple un répertoire de 400 exercices étudiés dans les nombreuses *boutiques à calcul* italiennes).

Ces traditions se sont perdues. On ne connaît pas d'exemples analogues au XVIIIe siècle : tous les documents d'époque, tous les témoignages d'anciens élèves, ne mentionnent pas d'enseignement mathématique, systématique avant 19 ans (sauf si un élève particulièrement doué était admis à suivre des enseignements destinés aux adultes, ou disposait de leçons privées).
On ne peut parler de didactique tant qu'on se cantonne dans la pédagogie sans élèves : au temps de Clairaut, nul ne songe à mettre des "apprenants" adultes en observation pour étudier les mécanismes de la formation de la compréhension ... Nous n'en sommes encore qu'à la *préhistoire de la didactique.*

Cependant, cette époque est l'un des âges forts de la pédagogie-fiction. On disserte sur les comportements d'apprentissage de quelques Emiles, fruits de l'imagination d'écrivains utopistes.

Clairaut n'en est pas là. Il a effectivement mis en oeuvre un enseignement non scolaire et autodidacte (I). Il s'adressait à un public adulte, qui prenait plaisir à s'instruire sans obligations ni sanctions. Les livres de Clairaut font de la vulgarisation au meilleur sens du terme (Glaeser 1987) . Cette approche se rattache à ce que j'ai nommé la *pédagogie mondaine*, dans une intention descriptive ... sans connotation péjorative.

Je persisterai dans cette opinion tant qu'on ne me présentera pas des documents qui attestent de l'utilisation des deux ouvrages cités de Clairaut, comme outils de travail entre les mains d'adolescents, élèves d'un établissement d'enseignement. Alors, et alors seulement, je proclamerai que les "Elémens" de Clairaut sont des manuels scolaires !

Dans l'inventaire des ouvrages utilisés dans les diverses écoles d'ingénieurs (Taton, 1964) on cite rarement les Clairaut, et toujours comme *ouvrages d'accompagnement ou d'agrément* : ils figurent sur les rayons de la bibliothèque du professeur. Stendhal en témoigne, à propos de l'Ecole Centrale de Grenoble, dont il fut l'élève de 1796 à 1799. (in "La vie de Henri Brûlard) : "Nous suivions le plat cours de Bezout, mais M. Dupuy *(son professeur de mathématiques)* eut le bon esprit de nous parler de Clairaut ... ... Clairaut était fort pour ouvrir l'esprit, que Bezout tendait à laisser à jamais bouché. Chaque proposition dans Bezout a l'air d'un grand secret appris d'une bonne femme voisine"

Les pédagogues du XVIIIe siècle s'inspiraient volontiers de la philosophie **sensualiste** de Condillac (1714-1780). Dans ses formulations les plus excessives, cette doctrine professait que toute connaissance, toute compréhension, dérive essentiellement de la sensation. Le credo pédagogique de J.J. Rousseau et de Pestalozzi s'exprime par cette maxime : "Pour expliquer, il suffit de *montrer* ". Destutt de Tracy va encore plus loin, dans l'excès : il affirme que "Penser, c'est toujours sentir et ce n'est rien que sentir".

Les géomètres actuels sont unanimes pour affirmer que "pour comprendre la géométrie, il ne suffit pas de regarder la figure !!" Dans une faible mesure, le raisonnement géométrique se construit peu à peu **à partir** du donné empirique. Mais il s'élabore surtout **contre** les apparences de la sensation.

Il s'agit donc, pour l'enseignement mathématique de trouver un compromis : d'un côté, il est parfois raisonnable de **substituer la monstration à la démonstration** ; mais il ne faut pas en abuser.

Les livres de Clairaut réalisent un certain équilibre entre ces deux tendances : on doit en discuter pour décider si certaines de ses options sont raisonnables, et d'autres franchement excessives (Glaeser 1983).

La méthode de Clairaut, défendue d'une façon académique dans les écrits pédagogiques de Sylvestre Lacroix (1765-1843), fut effectivement mise en œuvre dans l'enseignement secondaire français. Mais ce ne sera que sous l'influence d'Emile **Blutel,** vers 1920. Il aura fallu qu'auparavant Carlo Bourlet, Blutel et P. Chenevier fassent subir à l'œuvre du pionnier, beaucoup de transpositions décisives. (Cf. les manuels de P. Chenevier avec leur préfaces écrites par Blutel).

Clairaut fut à l'origine de certaines pratiques moins heureuses ; notamment il eut souvent recours à des **artifices pédagogiques** destinés à contourner certaines difficultés. Ces procédés devaient envahir l'enseignement secondaire français dans la première moitié du XXe siècle.

Il s'agissait alors d'enseigner coûte que coûte certaines questions du programme, qui exigeaient naturellement certains prérequis, encore inconnus des élèves. Il fallait alors inventer des acrobaties intellectuelles, dont Henri Lebesgue démonta les mécanismes dans "Les coniques" (1942).
L'exemple le plus ridicule à mon avis fut introduit lorsque le programme demanda d'exposer la théorie des polaires par rapport à un cercle C, à des élèves qui n'avaient pas encore étudié les nombres complexes.
Rappelons la définition classique : deux points M et N sont *conjugués* par rapport à C si la droite MN coupe C en deux points A et B de sorte que la division (M,N ; A,B) soit harmonique. Cette définition tombe en défaut, lorsque la droite MN ne coupe pas le cercle, et elle aurait conduit à une théorie boiteuse, obligeant à distinguer une profusion de cas de figures.

Pour débrouiller cet écheveau, on imagina une définition "réelle" des points conjugués, basée sur une étude préalable des *cercles orthogonaux*. Evidemmment ce détour ne pouvait être justifié aux yeux des élèves doués d'un minimum d'esprit critique. Bientôt on s'avisa que cet artifice n'était pas encore satisfaisant. On "améliora" la construction, en introduisant la notion de cercles *pseudo-orthogonaux* ...
Bref, cette présentation délirante, fut qualifiée à l'époque de méthode pédagogique élégante (consulter les manuels de géométrie de la classe de Mathématiques élémentaires des années 1930 à 1950 - ainsi que (Lebesgue 1942)).

On trouve chez Clairaut un tel détour tortueux lorsqu'il s'agit de faire accepter à ses lecteurs la redoutable **règle des signes** (Glaeser 1981) , utilisée dès le 4ème siècle après J.C, mais jugée *incompréhensible* par les plus grands mathématiciens jusqu'au début du XXe siècle !

L'artifice de Clairaut commence très naturellement par une initiation à la résolution de problèmes numériques par l'*algèbre* : il utilise à cette fin un choix d'exercices gradués formulés en termes pratiques (partages, rencontres de courriers, robinets ... etc). Les réponses sont des nombres positifs, et cette initiation à l'utilisation **d'inconnues littérales** n'offre guère de grande difficulté.
Suit alors une longue digression de 50 pages ! Clairaut repose les mêmes problèmes ; mais cette fois-ci les **données sont représentées par des lettres.** Tout en établissant les formules de résolution des équations, Clairaut familiarise ses lecteurs avec le calcul littéral.

Jusque là rien à redire si ce n'est que ces calculs sont plutôt ennuyeux et que le lecteur est peu incité à s'exercer lui-même. Revenant aux problèmes numériques initiaux, Clairaut retrouve les réponses numériques (positives) en appliquant les formules trouvées.

C'est là que survient le **tour de passe-passe** décisif ! Il choisit maintenant des données positives qui aboutissent à des soustractions "impossibles" ! (au niveau où se trouvent les lecteurs des "Elemens d'Algèbre").

Sans s'attarder sur cette situation troublante, Clairaut reprend les problèmes, sans algèbre, et montre que les réponses "impossibles" s'interprètent en terme de **déficit**. Les nombres négatifs sont introduits dans la foulée, et sont justifiés par des *arguments d'efficacité* : ces nombres "impossibles" sont légitimes, puisque "ça marche" dans les quelques exemples imaginés ...
Supposons que par une maladresse (qu'il se garde bien de commettre), Clairaut ait choisi des données numériques qui conduisent à des **divisions par zéro**, dans les formules paramétriques. Il aurait alors été contraint d'expliquer que ce choix de données numériques, qui conduit à des opérations "impossibles", n'est pas acceptable !

N'importe qui pourrait objecter alors que le même argument réfuterait le raisonnement d'efficacité précédent : c'est d'ailleurs ce qu'affirmait Lazare Carnot, dans sa "Géométrie de position" (1803) lorsqu'il condamnait l'emploi des quantités négatives.

Les enseignants savent bien que lorsqu'on escamote une difficulté, elle risque de ressurgir en d'autres occasions. L'artifice de Clairaut, qui peut réussir pour un temps avec des lecteurs à l'esprit peu éveillé ne manquera pas de jeter un trouble, en maintes occasions ultérieures.

Clairaut fut aussi le pionnier de la fameuse *méthode de redécouverte*, qu'il présente ainsi :

PREFACE.

JE me suis proposé de suivre dans cet Ouvrage, la même méthode que dans mes Elémens de Géométrie : J'ai tâché d'y donner des regles de l'Algebre dans un ordre que les Inventeurs eussent pû suivre. Nulle vérité n'y est présentée sous la forme de Théorêmes, toutes semblent être découvertes en s'exerçant sur les Problêmes que le besoin ou la curiosité ont fait entreprendre de résoudre.

L'exemple précédent montre bien que cette prétention historique n'utilise qu'une histoire-fiction, qui méconnait l'ordre des difficultés que l'épistémologie moderne a dévoilé :

a) En fait, l'article de Clairaut est basé sur une erreur de jugement. Il ignore que l'utilisation des *paramètres* est bien plus difficile que l'emploi des *inconnues* . La première est apparue (avec Viete ou Leibnitz) plus de mille ans après Diophante : l'usage des quantités supposées connues mais non précisées – momentanément *constantes* mais qu'on fera varier ultérieurement – est très difficile à comprendre. Lorsque Diophante propose un problème général il particularise aussitôt les données pour n'avoir à raisonner que sur du numérique.
Ainsi la prétendue méthode de redécouverte de Clairaut ne suit pas un cheminement de pensée qui aurait pu être suivi par les anciens savants ; elle se base sur une épistémologie fictive et anachronique.

b) La démarche de Clairaut postule que la difficulté pédagogique essentielle est de faire admettre l'*utilisation* de la règle des signes.
Il se trompe complètement de cible : c'est la *justification* de cette règle, et non son emploi qui troubla, pendant seize siècles, les plus grands mathématiciens. Stendhal calculait correctement sur les nombres négatifs, conformément à ce que son maître lui disait de faire. Mais il ne comprenait pas pourquoi "– × – donne +".
A titre d'introduction à un algorithme, l'article de Clairaut est inutile. A titre de justification, il ne justifie rien.

c) Contrairement à ce que déclare Clairaut dans la préface citée, l'algèbre n'a pas été inventée sous la pression des nécessités pratiques : il suffit de feuilleter l'œuvre de Diophante pour constater qu'aucune équation diophantienne qu'il résout ne s'impose par des arguments d'utilité !

L'œuvre pédagogique de Clairaut illustre bien ce que pouvaient être, en son temps, les meilleurs essais de transposition : on remaniait l'exposé tant sur le fond que dans son agencement ; on l'illustrait par un choix judicieux des exemples illustratifs. L'influence de "l'apprenant" y est tout à fait négligeable. D'ailleurs ... de jeunes élèves, il n'y en a pas encore !

IV A L'AUBE DU CHANGEMENT

Ce ne fut qu'au XIXe siècle que commence la **scolarisation universelle**, le plus grand bouleversement culturel de l'histoire. Auparavant, un pourcentage dérisoire de la population des nations les plus avancées apprenait à lire et à écrire. Désormais plus de 50 % de l'*humanité* est soumise à des contraintes scolaires.

En France, cette mutation se préparait, à petite échelle, dès le XVIIIe siècle, par la création de nombreuses écoles supérieures techniques et militaires. L'effectif des élèves, âgés de plus de 17 ans, y reste encore faible ... Mais ces établissements servirent de bancs d'essai pour la pédagogie qui assura l'accueil de la masse de la population scolarisée progressivement pendant tout le XIXe siècle.
On trouvera dans (Taton 1964) une histoire institutionnelle de ces grandes écoles ..., et aussi une liste d'ouvrages qui y furent utilisés. Ce qui nous manque le plus, c'est la

restitution du climat des études. Aux documents officiels, il faudrait ajouter l'iconographie des scènes scolaires, pour lequel l'Atlas de (Alt 1960) est précieux.

La pédagogie se réduisait au **cours magistral dicté**. En 1722, Varignon dictait son cours de mathématique en latin. En 1741, un de ses successeurs, l'abbé de La Caille dicte déjà en français : il imagine de distribuer à ses auditeurs des cahiers imprimés qui **résument** son cours oral.

Au contraire, le père Torne fait imprimer (1754) un manuel remarquable, à l'usage des élèves de son collège, où il **développe** l'essentiel de son cours oral résumé .

Ainsi apparaît une controverse pédagogique fort vive, à l'aube de la Révolution, à propos de la distinction entre les **abrégés** et **les éléments**, et leurs mérites respectifs.

Désormais, le livre d'étude semble changer de rôle. On rejette les auxiliaires de loisirs éclairés et l'on réclame des **outils de travail**.

Au centre de ces débats, La Chalotais proclame dès 1763, ce qu'on pourrait appeler aujourd'hui le mythe de **l'exposé-miracle** : non seulement c'est un des postulats de la pédagogie sans élèves mais aussi l'instrument d'une **pédagogie sans maîtres compétents !!** N'écrivait-il pas : “Ces livres seraient la meilleure instruction que les maîtres puissent donner, et tiendraient lieu de toute autre méthode ... Ces livres bien faits dispenseraient de maîtres formés” ? (cité dans (Schubring 1984)).

V LEGENDRE (1752-1833)

Un concours officiel fut organisé en 1794 pour sélectionner les meilleurs manuels scolaires. Deux auteurs recueillirent tous les suffrages : Etienne Bezout (1730-1783) et Adrien-Marie Legendre.

Le premier écrivit en 1764 un célèbre “Cours de mathématiques à l'usage des Gardes du Pavillon et de la Marine” qui s'adressait initialement à des étudiants de plus de 17 ans. Mais du vivant de l'auteur, (ainsi qu'à titre posthume), ce manuel évolua. Il fut le principal instrument de l'extraordinaire processus d'abaissement de l'âge d'initiation aux mathématiques. On possède de nombreux témoignages sur l'utilisation effective des livres de Bezout dans l'enseignement (dont ceux de Chateaubriand, Stendhal, Victor Hugo ...)

Les “Elémens de Géométrie”(1794) de Legendre connurent un succès considérable à travers ses nombreuses variantes. Nous reviendrons bientôt sur l'édition posthume, publiée par A. Blanchet (1845) qui fut reliée en un seul volume avec la dernière édition, relue par l'auteur. On a là un excellent instrument pour observer les changements qui se réaliseront durant quinze années cruciales pour l'enseignement mathématique.

Une des traductions anglaises est dûe à l'illustre écrivain Thomas Carlyle ... En 1885, on utilisait encore le Legendre à l'université de Yale (aux Etas-Unis).

Legendre réalisa une double rupture, tant vis à vis d'Euclide que de Clairaut.
Il remanie entièrement l'agencement des “Eléments” d'Euclide, en réinventant beau-

coup de démonstrations nouvelles et plus simples. Le recours aux **cas d'égalité des triangles** y est plus systématique. Du point de vue scientifique, cette option est peut-être critiquable ("A bas le triangle" s'écriait naguère Dieudonné)
A la réflexion, je pense que c'est pourtant un outil pédagogique efficace pour développer chez des débutants l'aptitude à construire de courtes séquences déductives.

- Legendre a innové aussi en utilisant le **symbolisme algébrique** dans ce qu'on nommait la *géométrie spéculative* (en opposition avec la géométrie analytique).

- La rupture avec Clairaut se traduit surtout par un retour à des **exigences de rigueur**.S'il lui arrive de déraper, au plan de la logique, Legendre ne se contente pas, comme le fait la géométrie de Port-Royal (Arnauld 1667) de quelques affirmations aussi péremptoires que fausses.

Plutôt que d'énumérer ici les nombreux détails sur lesquels le manuel de Legendre a apporté des modifications utiles, je me concentrerai sur une transposition très importante : le changement radical de la signification de l'expression **ligne droite**, depuis Euclide jusqu'à nos jours !

Il s'agit d'un bouleversement aveuglant lorsqu'on embrasse du regard l'histoire des mathématiques à **l'échelle des millénaires**. Mais il est passé complètement inaperçu de ceux qui vivaient l'évènement à **l'échelle des années.**

Jadis une *ligne droite* désignait ce qu'aujourd'hui nous nommons un *segment de droite* . Faute de l'avoir compris, un lecteur moderne des "Eléments d'Euclide" se heurte constamment à des obscurités, qu'il attribue au manque de rigueur des Anciens, alors que c'est un changement de signification qui est en cause.

Ainsi Euclide ne pouvait énoncer : "Par deux points distincts passe une ligne droite et une seule" (parce que manifestement il en passe beaucoup de longueurs différentes !). C'est ce qui explique "l'incompréhensible" sixième postulat d'Euclide qui se formule ainsi :

Deux lignes droites ne renferment pas d'espace.

Il exprime qu'il n'existe pas deux segments de droite distincts de mêmes extrémités (Pour le lecteur moderne non averti, ce postulat est manifestement contraire à l'expérience courante : deux droites parallèles *infinies*, renferment une *bande* .)

Pour pouvoir définir des lignes droites parallèles, Euclide doit postuler la possibilité de *prolonger* une ligne droite (ce qui pour une droite infinie n'a pas de sens !) Et il ne peut formuler son célèbre 5ème postulat, comme nous le faisons de nos jours :
"Par un point du plan ne passe qu'*une seule* parallèle à une ligne droite donnée"
(En effet, dans le contexte d'Euclide, cet énoncé est manifestement faux : par un point on peut tracer une infinité de segments de droite de même direction).
L'épistémologue s'interroge :

Depuis quand est-on passé de la conception archaïque de la ligne droite, à notre conception moderne ?

Grosso modo, le tournant s'est produit dans la seconde moitié du XIXe siècle. Mais on est passé (par exemple au XVIIe siècle) par une longue période de laxisme, en matière de formulation.

C'est ainsi que dans les "Nouveaux Elémens de Géométrie" d'Antoine Arnauld (1667) (c'est la Géométrie de Port-Royal) on trouve les passages suivants. On y notera, au milieu de l'exposé du troisième axiome, une acception de l'expression "ligne droite" qui n'est valable que pour une droite idéale, indéfiniment prolongée :

82 NOUVEAUX ELEMENS

lors que l'on compare pluſieurs lignes enſemble, on les ſuppoſe toûjours dans ces premiers elemens comme eſtant poſées, ou décrites ſur un même plan, c'eſt à dire ſur une même ſuperficie plate ; ce qu'il ſuffit d'avoir dit une fois pour toutes.

PREMIERE SECTION.

DE LA LIGNE DROITE.

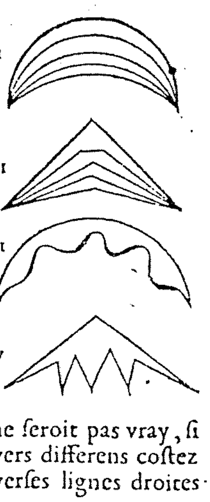
V. Nous n'avons point defini la ligne droite, parce que l'idée en eſt tres claire d'elle même, & que tous les hommes conçoivent la même choſe par ce mot. Mais il eſt bon de remarquer ce que nous concevons naturellement eſtre enfermé dans cette idée, ce que l'on pourra prendre ſi l'on veut pour ſa definition.

La ligne droite eſt la plus courte eſtenduë entre deux points.

Et celle qui approche plus de la droite, eſt auſſi la plus courte : ce qui a donné occaſion à Archimede d'établir ce principe ou Axiome.

PREMIER AXIOME.

VI. SI deux lignes ſur le même plan ont les extremitez communes & ſont courbes ou creuſes vers la même part, celle qui eſt contenüe eſt plus courte que celle qui la contient. J'ay dit courbes ou creuſes, car cela n'eſt pas ſeulement vray des lignes courbes comme dans la i. figure, mais auſſi des droites comme dans la II, lors que deux ou pluſieurs lignes droites ſe joignant font un creux. Car alors deux ou pluſieurs lignes droites ſont conſiderées comme une ſeule ligne courbe qui ſeroit creuſe vers ce coſté là.



Mais il faut bien remarquer ces mots, (vers la même part) car cela ne ſeroit pas vray, ſi la même ligne courbe eſtoit creuſe vers differens coſtez comme dans la III figure, ou ſi diverſes lignes droites

DE GEOMETRIE. LIVRE V. 83

conſiderées comme une ſeule ligne faiſoient auſſi des creux de differens coſtez comme dans la IV figure ; car alors la contenante pourroit eſtre plus courte que la contenüe.

SECOND AXIOME OU DEMANDE.

AYANT deux points donnez on peut mener une ligne droite de l'un à l'autre. VII.

Et on n'y en peut mener qu'une.

Laquelle par conſequent eſt l'unique & naturelle meſure de la diſtance entre ces deux points. L'inſtrument dont on ſe ſert pour cela s'appelle *regle*.

TROISIEME AXIOME OU DEMANDE.

LA ſimplicité de la ligne droite fait qu'en ayant une poſée on la peut prolonger de part & d'autre juſques à l'infini, c'eſt à dire tant que l'on veut. VIII.

D'où il s'enſuit que la poſition d'une ligne droite ne dépend que de deux points.

Ou, que connoiſſant deux points dans une ligne droite, nous la connoiſſons toute.

Ou, que deux points eſtant donnez de poſition, toute la ligne droite eſt donnée.

QUATRIEME AXIOME.

SI une ligne droite eſt immediatement couchée ſur une autre en une de ſes parties, elle le ſera en toutes, pourveu que l'une & l'autre ſoit prolongée autant qu'il faudra, & elles ne ſeront proprement qu'une même ligne. IX.

CINQUIEME AXIOME.

DEUX lignes droites ne ſe peuvent couper qu'en un point. X.

SIXIEME AXIOME.

DEUX lignes droites qui eſtant prolongées vers un même coſté s'approchent peu à peu, ſe couperont à la fin. XI.

Euclide prend cette propoſition pour un principe & avec raiſon : car elle a aſſez de clarté pour s'en contenter, & ce ſeroit perdre le temps inutilement que de ſe rompre la teſte pour la prouver par un long circuit.

L ij

Legendre est plus rigoureux : mais il n'a pas franchi ce pas là ! Il écrit :

> La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre.
> D'un point à un autre, on ne peut mener qu'une seule ligne droite.

Il ne s'agit ici que de segments. C'est dans l'édition posthume (1845) (Blanchet) qu'apparaît la ligne droite indéfiniment et idéalement prolongée :

> VIII. La *ligne droite* est une ligne indéfinie qui est la plus courte entre deux quelconques de ses points.
> On doit regarder comme évident que d'un point à un autre on ne peut mener qu'une ligne droite, et que si deux portions de lignes droites coïncident, ces lignes coïncident dans toute leur étendue.

Il semblerait donc que la transposition se soit enfin opérée. Mais Blanchet lui-même oublie constamment le changement qu'il a introduit ! Il parle de *droites égales* ... Pour définir des parallèles il use du pléonasme suivant :

> Les **parallèles** sont des lignes droites qui ne peuvent se rencontrer à quelques distances qu'on les prolonge l'une et l'autre.

L'adoption de cette transposition fut fort longue. En 1920 Carlo Bourlet insiste clairement sur ce point, dans l'avertissement à son cours abrégé de géométrie (Bourlet 1920) :

> Une droite *indéfinie* n'a pas de moitié. D'ailleurs, pour ôter définitivement aux élèves l'idée qu'une droite indéfinie se partage en deux parties égales de la même façon qu'un segment fini, il suffit de leur faire remarquer que, si d'une semi-droite on détache un segment fini (d'ailleurs aussi grand qu'on le voudra), il reste encore une semi-droite superposable point par point à la première.

Il serait intéressant de suivre, de 1845 à 1920 l'évolution du discours mathématique sur ce point, de manuels en manuels. L'introduction d'une terminologie nuancée (segments, semi-droites, ouverts, fermés, (à gauche et à droite)) apparaît souvent de nos jours comme un pédantisme superflu. Dans beaucoup de cas, c'est bien un luxe inutile mais c'est, de temps en temps, une nécessité incontournable.

IV *DES ELEVES ... ENFIN !*

Au début de l'enseignement scolaire, l'enseignement mathématique reste encore un **soliloque** du professeur. Le public sert de *faire-valoir,* comme il arrive dans un spectacle de music-hall, où l'on invite l'assistance à reprendre le refrain en chœur, ou à taper dans les mains. Mais les réactions de l'élève n'influencent guère le contenu du discours magistral. Parfois, on fait passer un élève au tableau, pour *réciter sa leçon,* c'est-à-dire pour restituer des réponses préparées à l'avance, à des questions répertoriées.

L'enseignement moderne, lié à la scolarisation de masse apparaît comme la **conquête progressive de l'autonomie de l'élève.** Un siècle et demi d'invention pédagogique a contribué à doubler l'exposé d'un cours par des activités scolaires variées. Celles-ci sont proposées aux *apprenants* . Le maître intervient plus ou moins dans leur exécution. On les désigne généralement sous les dénominations globales **d'exercices ou problèmes** ou encore de **travaux pratiques.**

Je me souviens d'un collègue qui se vantait d'avoir proposé dans sa classe *plus de 400 exercices !* Pour beaucoup d'enseignants, "l'exo" est une unité de mesure qui correspond à moins de 10 minutes d'activités scolaires !
Je lui répondis que je venais de passer une heure entière en 5ème à faire utiliser les tables de levers et couchers du soleil et de la lune - publiées par l'almanach des postes. La classe, partagée en 12 petits groupes (1 pour chaque mois), calculait la durée des jours et des nuits, ainsi que les heures du passage du soleil et de la lune au méridien. Les calculs furent ensuite relevés, sur des courbes représentatives. Etait-ce un exercice unique ? Sinon avais-je "perdu du temps" ? Cette activité était-elle conforme aux programmes ? En tout cas, ce fut une excellente occasion d'observer des faits numériques et cosmographiques, de s'instruire et de s'éduquer.

Les exercices que nous envisageons dorénavant portent sur un ou plusieurs **thèmes mathématiques** (dans l'exemple précédent, sur le calcul dans les systèmes de numérations sexagésimaux et la cosmographie). Ils sont exploités par l'enseignant après une *mise en énoncé* adaptée à un objectif pédagogique particulier.

Les adeptes de la pédagogie sans élèves préparent leurs séances d'exercies en résolvant par avance (de préférence de diverses façons) les énoncés qu'ils proposeront, et prévoient les commentaires mathématiques qu'ils en feront.

Du point de vue de notre didactique, il convient en outre de prévoir les **comportement interactifs des élèves et du maître face à chaque énoncé.**

Exemple

Thème : L'équation numérique du 1er degré

Elle peut donner lieu à une profusion de situations didactiques différentes. Nous n'en évoquons ici que trois :

1° On peut interroger un élève au tableau, en lui demandant, par exemple, de résoudre l'équation :
$2x - 19 = 1/5(3x - 15)$.
On exige qu'il applique sans hésitation les algorithmes classiques qu'on lui aura enseignés précédemment.

Un **échec** complet est jugé très **significatif.** L'élève n'a pas travaillé ... Il n'a pas appris sa leçon. On lui inflige une mauvaise note, voire un pensum.

Une **réussite** est beaucoup plus ambigüe. L'élève est-il génial, intelligent, docile, travailleur, soigneux ... ? Quelle note va-t-on lui donner, et selon quels critères ?

2° Les deux situations suivantes provoquées par l'énoncé suivant sont bien différentes :
" Résoudre l'équation :

$$\frac{x - 1987}{25} + \frac{x - 1988}{24} + \frac{x - 1989}{23} = \frac{x - 25}{1987} + \frac{x - 24}{1988} + \frac{x - 23}{1989} \text{ "}$$

La question est posée, à la fin d'une classe et commentée par le maître quinze jours plus tard : l'élève n'est pas soumis à des contraintes de temps.

2a) Si un élève résout cette question sans calcul, après avoir contemplé l'équation pendant quelques minutes, on peut lui accorder une bonne intuition. S'il doit réfléchir plus longtemps et trouver la racine après des cheminements de pensée plus ou moins tortueux, ce n'est pas mal non plus !
Mais qui le blâmera s'il sèche longtemps sans trouver, bien qu'a posteriori la réponse lui paraisse évidente ?
Ici, le **succès est significatif** et on ne peut rien conclure d'un échec.

2b) Il se trouvera peut-être un élève, habile au calcul et courageux, qui se lancera dans une réduction au même dénominateur, pour aboutir finalement à la réponse. Que peut-on conclure de cet exploit ? L'élève est doué de qualités de *soins* , d'*attention* , de *fiabilité* , mais il ne brille pas apparemment par une imagination extraordinaire ! Evidemment les succès a) et b) ne sont pas comparables.

Les règlements scolaires contraignent parfois les enseignants à attribuer des notes (de 0 à 20 ...) à tous les exercices qu'ils proposent. On prend alors des moyennes, arbitrairement pondérées, de toutes les notes ainsi collectées : le résultat fournira la fameuse moyenne trimestrielle, destinée à informer les familles sur les aptitudes et le travail de leurs enfants.
Il est évidemment impossible de distinguer à l'aide d'une seule note équitable les deux profils schématisés par les comportements a) et b).

En 1973, j'ai tenté une taxonomie synthétique des nombreuses situations d'exercices et problèmes, imaginées depuis un siècle et demi. Et l'I.R.E.M. de Strasbourg produisit collectivement les 6 fascicules du **Livre du Problème** [LP] où l'on s'intéressait à l'activité des élèves, aux interventions du maître (et non plus aux seuls énoncés d'exercices).

Une saine formation des maîtres devrait entraîner à gérer ces diverses façons de conduire des séances d'exercices et à mettre en œuvre les diverses dialectiques qu'utilise Guy Brousseau. Les enseignants doivent savoir développer un même thème mathématique selon des objectifs pédagogiques différents. D'ailleurs un même énoncé proposé à des élèves d'âge ou de niveau très différent peut provoquer des activités dont les déroulements ne se ressemblent guère. (Le fascicule 3 [LP3] consacré au thème mathématique de la parité illustre bien ce que l'on entend par là).

Voici une grille, analogue à celle qui est proposée dans [LP1]. Elle isole quelques uns des facteurs qui permettent de distinguer les divers types d'exercices et de problèmes.

PRINCIPALES VARIABLES DIDACTIQUES
DES EXERCICES OU PROBLEMES

ANTÉCÉDENTS DES ÉLEVES Quel est leur âge et leur niveau ?
Quels sont les connaissances et habitudes prérequises avant que la question leur soit posée ?

FORMULATION DES QUESTIONS Orales, dictées, polycopiées, présentées par le maître, empruntées à un livre ?
L'énoncé est-il fourni entièrement, sous forme définitive, au début, ou bien sera-t-il remanié (par des élèves ou le maître) au cours du travail ?

RÉPONSE Orale ou écrite, au propre ou au brouillon, sur cahier, copie, ardoise ...
Les réponses exigées se réduisent-elles à un résultat ... ou bien doivent-elles être commentées ou justifiées ?

TEMPS ACCORDÉ pour fournir la réponse :
Fraction de minutes, des heures ou des mois. Temps limités ?

RECHERCHE en classe ou hors de l'école ; individuelle par équipe ou avec participation de toute la classe ... Recours à des aides extérieures. Obligation du secret (comme à l'examen) ou recherche collective ?

MATÉRIEL Interdiction, autorisation ou obligation de se documenter. Liste limitative des documents ? Utilisation d'instruments (à volonté ou imposés)

INTERVENTION DU MAITRE Fréquence et nature de ses interventions. Dirige-t-il la recherche en l'influençant, ou se contente-t-il d'encouragements ? Fournit-il des informations ou des conseils ? Émet-il des jugements de valeur ?

ÉVALUATION La distinction entre réponse "juste" ou "erronnée" est-elle fermée à l'avance ou négociable ? Comment sont reconnues les réponses *partiellement* correctes (ou fausses) ? Ces décisions font-elles objet d'un débat avec les élèves ?
La tâche donne-t-elle lieu à une note ? une appréciation ? des sanctions ? (positives ou négatives) ?
L'échec (resp. le succès) sont-ils significatifs ?
L'évaluation sur une tâche précise contribuera-t-elle à l'élaboration du *profil* de l'élève ? A un résultat d'examen à sanction sociale ?

VII ÉLABORATION DU STOCK D'ÉNONCÉS

La tradition nous a légué peu de matériels pédagogiques utilisables en classe.
Voici quelques exceptions :

1° On dispose d'une vaste anthologie de **mathématique récréative** d'origine extrême orientale, perse, grecque, arabe etc ... L'ouvrage le plus célèbre sous ce rapport fut assurément le livre de Bachet de Meziriac "Problesmes playsants et délectables qui se font par les nombres" (1613)
Ce trésor s'est notablement enrichi, grâce à Edouard Lucas, Samuel Loyd, Martin Gardner etc ...
Bien qu'il ne s'agisse là que d'une *mathématique de divertissement* , cette veine fut souvent exploitée en pédagogie scolaire.

2° Les aventures *sumériennes* et *florentines* mentionnées en (III) ont laissé des corpus d'énoncés d'exercices. Mais ce trésor ne fut exhumé qu'au XXe siècle : il n'influença guère l'enseignement scolaire.

3° Beaucoup d'ouvrages de mathématiques contiennent dans le corps de l'exposé quelques exercices entièrement résolus par l'auteur. (Ceux de Clairaut, d'Euler, du marquis de L'Hospital sont typiques). Dans la mesure où la réponse apparaît au lecteur, avant qu'il ait eu le temps, le loisir ou *l'obligation* de s'exercer, ce ne sont pas des exercices !

4° Les écoles d'ingénieurs du XVIIIe siècle proposaient systématiquement à leurs rares élèves des tâches techniques de dessin ou de calcul. Il resterait au didacticien-épistémologue à collecter et à dépouiller les productions d'élèves conservées en archives, pour découvrir la part d'autonomie qui était laissée aux apprenants (il s'agit d'exercices d'arpentage, de géométrie descriptive, de stéréotomie, de projets mécaniques).

Mais à l'origine, la principale source d'énoncés relève de l'engouement pour la *bachomanie* : l'institution de nombreux examens et concours provoque une demande de préparation à ces épreuves. Le marché de l'édition exploite cette clientèle.

Ainsi paraissent au début du XIXe siècle des recueils de sujets d'examens tels ceux de Reynaud et Duhamel (1823), de Georges Ritt (1836) ... En Allemagne, E. Bardey compile des énoncés, et ses recueils sont traduits en diverses langues (en français de 1870 à 1920).

Les premières fournées témoignent de la médiocrité de l'imagination pédagogique : un énoncé d'exercice se griffonne sur un coin de table, sans qu'une réflexion pédagogique préalable dégage des objectifs et oriente la mise en forme. Voici par exemple une batterie typique d'exercices empruntés à un recueil de Georges Ritt :

Effectuer les multiplications suivantes.

6. 57. 58. $3a \times 5b$. $7a^2 \times 8ab$. $12a^3b \times 7a^2bc^2$.

9. 60. $-5abc \times 8abd$ $\quad 14a^2bcx \times (-8ab^3x)$.

1. 62. $7ab \times 8a^2 \times 7bc$. $\quad (6a+2b-8c)7a$

3. $(-5a^2+3ab-8b^2)(-9ab)$.

4. 65. $(a+b)(a+b)$. $\quad (a-b)(a-b)$.

6. 67. $(a+b)(c+d)$. $\quad (a+b-c)(d-e)$.

8. $(2a-3b-8c-d+9e)(7f+2g-h)$.

9. $(a+b)(a-b)$.

70. $(5ab+3ac-4bc)(7ab-18ac+2bc+d)$.

71. $(x^2-3x-7)(x-2)$.

72. $(4a^2-16ax+3x^2)(5a^3-2a^2x)$.

73. $(a^2+a^4+a^6)(a^2-1)$.

74. $(a^4-2a^3b+4a^2b^2-8ab^3+16b^4)(a+2b)$.

75. $(7a^3-5a^2b+6ab^2-2b^3)(3a^4-4a^3b+16a^2b^2)$.

76. $(a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5)(a^3-3a^2$
$+3ab^2-b^3)$.

77. $(5a^3b^4c^3-6a^4b^2c^5+7a^8b^5c^6)(2a^3b^3c^2+3a^4b^4c^5-6a^7b^4c^3)$

Dans un premier temps, de tels exercices sont utilisés n'importe comment, pour faire n'importe quoi.

Par exemple, on choisit 20 questions de ces types au hasard, et l'on attribue un point par réponse correcte. Après quoi, on décide que l'épreuve est réussie si le candidat obtient la moyenne.

Ce n'est que vers 1920 qu'apparaît la *docimologie*. Le progrès décisif est dû à Charles-Edouard Spearman (1863-1945)(Spearman 1927). Il pose correctement la question d'une évaluation scientifique des aptitudes, et invente un outil statistique puissant : *l'analyse factorielle.*

Bientôt paraissent des **solutionnaires**: ce sont des recueils d'énoncés accompagnés de leurs solutions ; puis des **méthodologies**, qui exposent des méthodes toutes standardisées pour résoudre des épreuves qui se donnent aux examens, où des problèmes d'un certain type (Petersen 1866).

L'usage des énoncés, insérés en fin de manuels (ou en fin de chapitre) semble plus récent. L'exemple le plus ancien que je connaisse est justement l'édition posthume Blanchet (1845) de la Géométrie de Legendre : on y trouve 10 pages d'énoncés de géométrie plane et autant de géométrie dans l'espace.
L'habitude ne s'en est pas imposée rapidement. Dans les "Applications de l'Algèbre à la Géométrie de M. Bourdon (1872), l'auteur éprouve le besoin de prévenir le lecteur :

"Nous croyons devoir terminer cette introduction, en proposant quelques exercices ... ". Suivent onze énoncés élémentaires et ternes ; ce sont les seuls qui figurent dans l'ouvrage.

A la fin du XIXe siècle, apparaissent des **activités plus culturelles**. Ce ne sont plus des problèmes d'examen ! (Bien qu'on continue parfois à les noter).

Voici quelques *beaux calculs* que Carlo Bourlet (1896) a exhumés des œuvres de quelques grands mathématiciens. Ici, deux solutions paramétriques de l'équation diophantienne :

$$x^3 + y^3 = z^3 + u^3$$

Comparer avec le triste ramassis du spécimen cité de Georges Ritt.

21. Démontrer que l'on a l'identité

$$x^3 + y^3 \equiv z^3 + u^3$$

lorsqu'on prend, soit :

$$\begin{aligned}
x &= (f^2 + 3g^2)^2 - (ff' + 3gg' + 3fg' - 3f'g)(f'^2 + 3g'^2),\\
y &= -(f^2 + 3g^2)^2 + (ff' + 3gg' - 3fg' + 3f'g)(f'^2 + 3g'^2),\\
z &= -(f'^2 + 3g'^2)^2 + (ff' + 3gg' - 3fg' + 3f'g)(f^2 + 3g^2),\\
u &= (f'^2 + 3g'^2)^2 - (ff' + 3gg' + 3fg' - 3f'g)(f^2 + 3g^2)
\end{aligned}$$

(EULER).

soit encore :

$$\begin{aligned}
x &= (a^2 + 3b^2)^2 - a + 3b,\\
y &= -(a^2 + 3b^2)^2 + a + 3b,\\
z &= (a^2 + 3b^2)(a + 3b) - 1,\\
u &= -(a^2 + 3b^2)(a - 3b) + 1.
\end{aligned}$$

(BINET).

L'institution des Frères des Ecoles Chrétiennes compila systématiquement des thèmes d'exercices ; cette érudition est surtout orientée vers des questions ayant un intérêt par elles-mêmes. Les volumes les plus intéressants sont signés F. JM ou F. JG (Frère Jean-Marie(?) ou Frère Jean Gabriel(?))... ou portent la mention "par une réunion de professeurs".

Ainsi commence, surtout en France une nouvelle utilisation de l'exercice destiné à présenter des **compléments** ou même des questions **hors programme** qu'un bon élève devrait connaître.

♣ Exemples

1° Même si le *tétraèdre régulier* est explicitement cité dans les programmes, le professeur doit choisir, dans ce vaste sujet, ce qu'il dira dans le cours, et ce qu'il proposera aux élèves curieux ou studieux.
Ainsi proposera-t-on en fin de chapitre le calcul du volume, des rayons des sphères passant pas les sommets ou tangentes aux faces ... et *aux arêtes !*

On en demandera un dessin (par exemple une épure de géométrie descriptive) sous divers points de vue.

2° On peut alimenter la curiosité de quelques élèves en leur présentant les *suites de Fibonacci*, la *construction du pentagone régulier* à la règle et au compas, le *nombre d'or*, des *calculs d'éclipses* ou de *phases de la lune* ... etc...

Dans ces cas, l'objectif visé n'est pas la préparation à des examens (sauf si l'on sait qu'il est bon de connaître quelques questions hors programmes - par exemple la droite de Simpson ou le cercle d'Euler qui inspirent souvent les interrogateurs. Il ne s'agit pas davantage à faire chercher longtemps. Le **but visé est l'information** . Et c'est ainsi que se développe la technique de **l'exercice d'exposition** qui fleurit surtout entre 1920 et 1960 (LP1 - Chapitre 1).

Ce style de *mise en exercice* , est destiné à informer rapidement un élève sans le faire trop *sécher*, en lui fournissant les principales idées qu'il risquerait de ne trouver lui-même qu'au prix d'une *perte de temps*.

C'est sous cette forme que sont présentés dans Bourbaki les exemples et les contre-exemples, ainsi que les questions annexes. En voici un spécimen, tiré du premier chapitre § 7 de "l'Algèbre".
Le thème est la génération du Groupe $\mathcal{S}_n$ des permutations de n objets.

¶ 7) *a*) Montrer que toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ est un produit de transpositions (raisonner par récurrence sur le nombre d'éléments non invariants par la permutation considérée).

b) En déduire que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les $n - 1$ transpositions $(1\ 2), (1\ 3), \ldots (1\ n)$, et aussi par les $n - 1$ transpositions $(1\ 2), (2\ 3), \ldots, (n-1\ \ n)$ (utiliser la formule (1) de l'exerc. 6).

c) En déduire que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les *deux* permutations $(1\ 2)$ et $(1\ 2\ 3 \ldots n)$ (même méthode).

On aurait pu poser la même question sous forme d'un **Problème de Recherche** formulé ainsi : "Quel est le nombre minimum de permutations qui peuvent engendrer le groupe $\mathcal{S}_n$?"
Mais, même pour un mathématicien expérimenté qui ne connaitrait pas le résultat, la recherche serait hasardeuse et en moyenne de durée assez longue.

L'exercice d'exposition, au contraire, **découpe la question** en sous-questions posées dans un ordre efficace. Je conseille **d'attribuer un titre** à de tels énoncés : il ne faut pas que l'élève résolve la question sans prendre conscience de l'intérêt de l'information qu'il vient de recueillir.

La vogue des exercices d'exposition, en France, conduisit à bien des aberrations pédagogiques. On utilisa ce style de rédaction hors de propos. Ainsi on rédigea beaucoup de problèmes d'examen sous cette forme.

Ceci provoquait les effets pervers suivants :

a) Le travail étant complètement mâché, le candidat n'a aucun moyen de faire valoir ses qualités (à l'exception de quelques savoir-faire algorithmiques ou de quelques connaissances mémorisées ...)

b) Si l'énoncé est long, on peut obtenir une excellente note, sans arriver à la fin de l'épreuve ... On résout localement, sans savoir où l'on va ...
Après avoir passé 7 heures à travailler sur le problème d'Agrégation masculine de 1929 (Dollon 1931), un candidat pouvait ignorer complètement qu'il venait de s'initier aux principes d'une géométrie non-euclidienne !
Au cours de la correction d'une séance de préparation au concours consacrée à cette épreuve, j'ai demandé à mes étudiants s'ils avaient entendu parler du demi-plan de Poincaré. Personne, (même ceux qui m'avaient remis de longues copies) ne leva la main !

c) Un énoncé d'épreuve d'examen est destiné à l'évaluation des aptitudes ou des connaissances des candidats. Les problèmes d'exposition ne sont pas adaptés à cet objectif.

Les problèmes de recherche se sont développés, hors de France, depuis longtemps. C'est en 1894 que la compétition Eötvos fut instituée en Hongrie. Les Olympiades Internationales de Mathématiques sont instituées depuis 1959 (Gerrl 1976). C'est en 1973 que l'IREM de Strasbourg a créé le Rallye Mathématique d'Alsace, qui mobilise tous les ans environ un millier de participants. L'initiative fut suivie par quelques autres IREM.

Un **Problème** est une activité *éducative* qui vise surtout à développer des **habitudes de curiosité et de recherche ;** les *connaissances* qu'il peut faire acquérir ne sont qu'un sous-produit secondaire qui ne sont pas systématiquement recherchées. (C'est l'un des traits qui le distingue des *situations-problèmes*, systématiquement étudiées par Guy Brousseau).

Selon la grille proposée ci-dessus, les principales caractéristiques d'un problème sont les suivantes :

- *Formulation* . L'énoncé est très court, provocateur, débarassé de toute indication permettant une solution rapide. Il est parfois rédigé d'une façon volontairement imprécise et incomplète, laissant à l'élève l'occasion d'apporter la rigueur indispensable. Un des objectifs est d'entraîner à *se poser des questions*.

- La *durée de la recherche,* est, sauf intuition exceptionnelle, de plus d'une heure ... parfois de plusieurs mois.
Pour un mathématicien cette durée peut dépasser des années (voir dans Glaeser 1983 l'exemple d'une découverte que Gauss mit plus de 15 ans à mener à son terme !).

- On évite de proposer un problème qui exige des connaissances trop particulières. En tout cas, l'élève doit être en mesure *d'inventer* une information qui lui ferait défaut. On l'invite à se documenter si nécessaire, et la consultation de livres n'est pas tabou ... Mais, en principe, la clé qui résout un problème dépend rarement d'un renseignement.

- Enfin, un problème ne peut donner lieu à une *évaluation bilatérale* : j'ai quelquefois signalé à un jury d'examen que tel étudiant avait été le seul à résoudre un problème, afin qu'il en soit tenu compte, en cas de besoin. Mais on ne peut faire grief à quiconque de n'avoir pas inventé une idée ingénieuse ! (Voir l'exemple page 14 de l'équation du premier degré).

L'introduction de ce nouveau type d'activité fut d'abord accueilli avec scepticisme par le corps enseignant . Les critiques furent véhémentes ! L'introduction d'activités heuristiques à l'école était, affirmait-on, *irréalisables, élitistes, incompatibles avec les programmes* ... Toutes ces objections furent balayées en quelques années, là où l'effort fut réellement entrepris. On trouvera dans l'Ouvert (Ouvert n° 13, 16, 24, 26) des comptes rendus d'activités qui prouvent bien que c'est faisable et souhaitable.

L'introduction de *problèmes* dans l'enseignement, au titre d'ingrédients d'un menu didactique équilibré fut une *transposition importante* . Mais il ne suffisait pas de fournir le matériel mathématique pour cela. La nécessité de convaincre des professeurs à se lancer dans l'aventure fut le facteur décisif.

Pendant plusieurs mois, des professeurs s'habituèrent, à l'IREM à résoudre eux-mêmes des problèmes ! L'étonnement de certains d'entre eux fut spectaculaire. Mais ils hésitaient à proposer ces énoncés à des élèves ... "Ils n'y arriveront jamais ... ! " répétait-on.
Un ou deux stagiaires intrépides se jetèrent à l'eau et firent part à leurs collègues des étonnants résultats obtenus ! Nos élèves trouvaient des choses inattendues ... Ce n'était pas toujours le "premier de la classe" officiel qui réussissait le mieux (ainsi, l'activité heuristique permettait à certains élèves, mal à l'aise dans l'assimilation d'un cours, mais riche en aptitudes créatrices de se faire valoir auprès du maître et des condisciples).
Et très vite, ces expériences isolées se répandirent dans toute l'académie . Et aujourd'hui, on trouve un solide noyau d'enseignants qui proposent de temps à autre des activités, qui auraient été jugées peu orthodoxes dix ans plus tôt.

Ainsi apparaît un aspect essentiel de la transposition. Des milliers d'innovateurs ont inventé de nouvelles façons de conduire une classe. Mais ce travail ne prend tout son sens que si la communication s'effectue à l'intérieur du corps enseignant. Sinon, tous ces efforts sont perdus.

Je ne détaillerai pas ici l'histoire des exercices de **mathématiques appliquées**. Clairaut fut assurément un pionnier en la matière.

L'utilisation de **manipulations** apparaît dans l'enseignement primaire sous la rubrique : travaux manuels (découpages, pliages, construction de modèles etc ...).

Peu appréciées lors du règne exclusif d'une mathématique spéculative, elles reparaissent actuellement, avec l'engouement justifié pour les nouveaux auxilliaires de calcul et de dessin (ordinateurs, calculettes).

Le colloque inter-IREM "Epistémologie et Histoire des Mathématiques" nous a montré ce que sont les efforts de transpositions contemporains pour rendre un matériel **mathématico-historique** accessible à nos élèves.

Une technique qui est souvent mise en œuvre est de doubler un texte ancien (dont la langue nous est difficilement accessible) d'une adaptation sous forme *d'exercice d'exposition* . Après avoir résolu un problème réécrit dans le style actuel, nos élèves peuvent lire les textes originaux ce qui replace les grandes découvertes dans leur contexte.

L'enseignement magistral traditionnel, qui était répétitif et contraignant, a contribué à donner une image fausse de la mathématique.

Mais l'imagination pédagogique fécondée par la didactique expérimentale bouleverse actuellement les méthodes d'enseignement.

On ne se contente plus de transposer le discours magistral au niveau de l'auditoire. On invente des situations didactiques où l'élève est confronté à des questions mathématiques et divers agents éducatifs (instruments, écrits, maîtres, condisciples etc...). La compréhension s'élabore en surmontant ces conflits.

* * *
* *
*

Bibliographie

R. ALT Bilderatlas zur Schul und Erziehungsgeschichte. Volk und Wissen Verlag. Berlin DDR - (1960 et 1965)

A. ARNAULD 1667
"Nouveaux élémens de géométrie" (Réédité par l'I.R.E.M. de Dijon 1983)

A. ARNAULD et P. NICOLE 1662
"La logique ou l'Art de penser". Réédité Flammarion - Paris 1970

E. BEZOUT Cours de Mathématiques à l'Usage des Gardes du Pavillon et de la Marine. Paris Muser 1764

E. BLUTEL "Le devoir du moment". Bulletin de l'A.P.M. n° 55 - 1928

M. BOURDON Application de l'Algèbre à la Géométrie. Gauthiers-Villars Paris 1872.

C. BOURLET Leçons d'Algèbre Elémentaire. Armand Colin - Paris 1886

C. BOURLET Cours abrégé de Géométrie. Hachette. Paris - 7e édition 1920.

L. CARRE Les pédagogues de Port-Royal - Slatkine Genève 1971

P. CHENEVIER
Collection de manuels, comprenant notamment : "Précis de Géométrie plane" 4e et 3e. Préface de E. Blutel. Hachette 1925.

C.A. CLAIRAUT
Elémens de Géométrie. David fils. Paris 1741.

C.A. CLAIRAUT
Elémens d'Algèbre. David fils.1746

W. van EGMONT
The commercial revolution and the beginning of western mathematics in Renaissance 1300-1500. Doctoral Thesis - Indiana University 1980.

FITZ-PATRICK et CHEVREL
Les exercices d'Arithmétiques (énoncés et solutions) - Hermann Paris 1900.

D. GERLL et G. GIRARD
Les Olympiades Internationales de mathématiques - Hachette Paris 1976.

G. GLAESER "Epistémologie des nombres relatifs" R.D.M. Vol. 2-3. La Pensée Sauvage - Grenoble 1981

G. GLAESER a) A propos de la pédagogie de Clairaut -RDM Vol. 4-3 1983

G. GLAESER b) Genèse et maturation précoce d'une découverte mathématique. Gazette des mathématiciens n°21 S.M.F. 1983.

G. GLAESER Transposition : Polycopié - Strasbourg 1987 ... (à paraître)

IREM de Strasbourg
(LP_1)(LP_3). Le livre du Problème. Fascicule 1 et 3. Cedic - Paris 1977

S.N. KRAMER
A Sumerian composition relating to the education of a scribe. Journal ot the American Oriental Society. Vol 69 - 1949

S.N. KRAMER L'histoire commence à Sumer -, Paris Artaud 1975

H. LEBESGUE
Les coniques. Gauthier-Villars. Paris 1942

A.LEGENDRE 1794
Elémens de Géométrie avec des additions de M.A. BLANCHET, suivi de la 14e édition Firmin-Didot - Paris 1845

J. PETERSEN 1866
Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques. (Traduction française) Gauthier-Villars Paris 1880.

H. PIERON Examens et docimologie P.U.F. Paris 1963

REYNAUD et DUHAMEL
Les problèmes et développements sur les diverses parties des mathématiques - Paris 1823

G. RITT Problèmes d'algèbre et exercices de calcul. Hachette - Paris 1836

G. RITT Manuel des aspirants à l'école polytechnique . Hachette - Paris 1839

G. SCHUBRING
Essai sur l'histoire de l'enseignement des mathématiques particulièrement en France et en Prusse. R.D.M. Vol. 5-3 1954

C.E. SPEARMAN 1927
The abilities of man. Mac Milan. Londres - Traduction française (Darnois) “Les aptitudes de l'homme”. Conservatoire des Arts et Métiers - Paris 1936

R. TATON Histoire générale des sciences. P.U.F. - Paris 1957

R. TATON Enseignement et diffusion des Sciences en France au XVIIIe siècle - Herman - Paris 1964.

PREHISTOIRE DES MATHEMATIQUES

LA DECOUVERTE DU NOMBRE ET DU CALCUL

Olivier KELLER

Les plus vieux documents connus de mathématiques pures datent des débuts du deuxième millénaire avant notre ère ; on a là de véritables traités de mathématiques comme science à part, mais le nombre et l'art du calcul furent découverts sans doute possible longtemps avant : depuis quand et par quels cheminements, tel est l'objet du présent article.

Nous allons parler un peu de préhistoire, d'humanité primitive, de sociétés primitives : le lecteur doit savoir que toutes ces questions, dont l'étude sérieuse est relativement récente, sont l'objet d'âpres polémiques. L'objet même du présent exposé peut être nié : car parler de découverte du nombre, comme d'une découverte scientifique, c'est faire peu de cas d'un "sens du nombre" qui existerait chez certains animaux et à l'état inné chez l'homme.

Je dirai seulement ici qu'il ne s'agit pas de mon point de vue d'un sens, mais d'une pensée, une pensée qui exprime des relations réelles entre des choses réelles, ce que seul le cerveau humain est capable de produire.

I Depuis quand connait-on les nombres ?

L'homme existe, aux dernières nouvelles, depuis au moins deux millions d'années ; les documents qu'il nous a laissés donnent des renseignements solides sur son évolution physique et sur sa vie matérielle, mais rien ne permet de suivre à la trace ses progrès dans la pensée en général et dans la science des nombres en particulier. On ne sait même pas de quand datent les débuts du langage articulé.

Ce n'est qu'au paléolithique supérieur, stade pratiquement contemporain à l'échelle des temps humains (voir la chronologie), que l'on trouve des traces pouvant faire penser à des activités numériques. Cette époque fournit en effet une grande quantité d'os striés, de façon régulière ou non ; certains y ont vu des tables de nombres premiers et de leurs doubles (Heinzelin cité dans 9), d'autres des calendriers lunaires (9), mais ces interprétations sont en général rejetées à juste titre.

Admettons en effet qu'un ensemble de stries sur un os représente un nombre, c'est-à-dire qu'à chaque strie corresponde un objet, comment savoir de *quel* objet il s'agit ?

Si l'objet est un jour, nous aurons affaire à une sorte de calendrier ; mais il peut être aussi la marque d'un épisode, d'une histoire ou d'une strophe d'un chant ou d'une partie d'une prière. Une strie peut représenter un animal tué, et nous aurons des marques de chasse ; on peut aussi imaginer des encoches pour dettes ou créances comme les tailles des boulangers.

Certaines femmes africaines font de temps en temps une encoche dans le manche de leur cuillère en bois : font-elles un calendrier ? un pense-bête ? Il est impossible de deviner la réalité : ces femmes font une marque chaque fois qu'elles reçoivent un coup de leur mari ; dès que le manche de la cuiller est rempli, elles demandent le divorce ! (17) Seidenberg (14) fait même état de "fornication tally" utilisé dans le détroit de Torrès.

Toute interprétation unilatérale des traces du paléolithique supérieur est donc, *par définition,* à rejeter totalement ; elles sont peut être des signes d'activité numérique. C'est tout ce que l'on peut dire, et c'est maigre.

Pour tenter malgré tout de dater les premières connaissances numériques, je poserai la question comme suit : *en quoi l'homme de la préhistoire pouvait-il avoir besoin du nombre et du calcul ?* "L'homme de la préhistoire" dont il s'agit ici, c'est uniquement l'homme du paléolithique supérieur ; c'est celui que nous connaissons le moins mal en partie parce qu'il existe, ou qu'il existait encore récemment, des sociétés appelées primitives, formées de chasseurs-cueilleurs vivant comme nous vivions en Europe il y a 4000 à 10000 ans.

Il est généralement admis que les sociétés primitives sont des sociétés communistes, mais d'un communisme borné à la horde, au clan ou à la tribu ; on n'y connait ni individu ni genre humain. Les hommes extérieurs au groupe ne sont guère que des animaux à chasser ou à déguster, puis, plus tardivement sans doute des gens avec qui l'on peut, à la rigueur, troquer quelques silex contre quelques peaux, et plus récemment enfin des réservoir d'esclaves. Le véritable commerce régulier et à grande échelle, la désagrégation complète du communisme de groupe qui impose des normes quantitatives de répartition des produits (salaires en nature, impôts), deux nouveautés essentielles impossibles sans arithmétique, ne datent que du néolithique.

Au sein de la communauté primitive, la répartition des produits se fait suivant des règles qualitatives, et non quantitatives. Si, dans une tribu australienne, "un homme tue un kangourou avec deux autres membres de la tribu, alors la queue de la bête et un des membre postérieur appartiennent de droit à l'un des aides, tandis que l'autre membre postérieur et l'une des hanches revient au second. Le reste de l'animal capturé revient au chasseur principal, mais la coutume lui prescrit minutieusement l'usage qu'il doit en faire, et l'on voit à ce sujet intervenir les droits résultant de la parenté" (6) ; en cas de disette, la règle est simple : tout le monde a accès aux provisions disponibles.

L'étude de M. Sahlin (18) est particulièrement remarquable en ce qu'elle montre les transitions depuis le véritable communisme qui règne au sein du groupe de la proche parenté, au troc réalisé avec des groupes étrangers, en passant par l'échange de dons entre parents éloignés. Lorsqu'il a lieu, et même lorsqu'il a lieu depuis suffisamment longtemps pour être réglementé, le troc avec l'étranger reste quelque chose d'un peu honteux, qui ne peut se faire quelque fois qu'en dehors du village ou même sans contact direct entre partenaires. Entre amis ou parents proches, on n'échange pas, on donne sans compter, et c'est l'attitude normale, la vie de tous les jours ; le marchandage et le décompte n'ont lieu qu'entre étrangers, et ce sont des activités visiblement perçues comme contre-nature, parce que relativement récentes. On est loin du "les bons comptes font les bons amis" !

De telles sociétés ne peuvent produire qu'une arithmétique rudimentaire sinon inexistante. Voici une anecdote sur les Hottentots, peuple pourtant relativement avancé qui connaît l'élevage, la poterie et le travail des métaux :

"Un Hottentot Damara, à qui l'on avait acheté deux moutons, à raison de deux rouleaux de tabac par animal, et à qui on avait payé ensemble toute la somme, ne réussit point à comprendre et il obligea l'acheteur à payer chaque animal séparément et successivement. S'agit-il d'acheter ou de vendre un bœuf pour dix rouleaux de tabac, par exemple ? Alors le vendeur Damara étend ses mains par terre, puis l'acheteur place un rouleau de tabac sur chacun des doigts étendus. Pourtant ces pauvres calculateurs s'aperçoivent ordinairement très bien qu'un bœuf a disparu de leur troupeau ; mais c'est simplement parce qu'ils connaissent individuellement tous leurs animaux". (5).

Une autre source essentielle de besoins numériques est la mise au point de *calendriers* ; on connaît les achèvements brillants des Aztèques et des Mayas. Mais les peuples dont il s'agit, agriculteurs, commerçants, organisés en puissantes cités, avaient largement dépassé le stade correspondant au paléolithique supérieur.

Les peuples les plus primitifs ne semblent pas avoir du tout de calendrier ; puis apparaissent des calendriers purement qualitatifs, où les lunaisons et les saisons ne sont pas numérotées et dénombrées mais décrites, nommées d'après les événements qui les caractérisent. A la question : “à quel moment a eu lieu tel événement ? ”, on préférera toujours répondre par un autre événement simultané plutôt que par un nombre d'unités de temps : un tel est né “après que l'on eût pêché le gros poisson”” ou “l'année où il y a eu tant de neige”. (11) Ou encore : tel événement a eu lieu quand telle personne était grande comme ça, ou lorsque sa barbe était grande comme ça. Lorsque les nombres commencent à être utilisés pour la mesure du temps, c'est sous la forme d'un petit nombre d'unités avant ou après un événement important. Mais dans la vie réelle des chasseurs-cueilleurs, le décompte du temps n'a que peu d'importance :

“Le temps vu comme une succession continue de périodes semble n'avoir aucune importance pour les aborigènes (australiens) ... Si vous demandez à un indigène quelle sera la durée de son déplacement pour gagner tel ou tel endroit qu'il connaît, il y a de grandes chances pour qu'il vous réponde «cela me prendra peut-être bien un peu longtemps» ; forcez-le à préciser, et il montrera très exactement soit sur ses ongles, soit sur les articulations de ses doigts, ou encore en donnant des coups sur le sol, combien de fois il aura à s'arrêter en cours de route pour camper ...

Même s'il doit participer au terme de ces étapes à un rassemblement tribal pour cérémonies rituelles ou rencontres “commerciales”, l'aborigène ne se pressera pas afin d'être là au moment voulu, comme à un rendez-vous... Dans une réunion de ce genre, ceux qui arrivent les premiers attendent les autres, c'est-à-dire qu'ils s'installent, cueillent des comestibles, exécutent des danses. Ils ne montrent aucune impatience et ne font nul reproche pour motif de retard ... ” (3)

De tout ceci, je tirerai la *conclusion* suivante : il est probable que, jusqu'au paléolithique supérieur, l'humanité a ignoré les nombres. Au paléolithique supérieur, et plus vraisemblablement à sa fin, apparaissent les premières connaissances, rendues nécessaires par l'intensification des échanges entre groupes humains (troc et peut être décompte des durées) et par la dissolution du communisme primitif (impôts, paiements en nature).

II Les premières activités numériques

L'espace occupé peut constituer une première approximation du nombre d'objets. Si on demande aux Abipones (Indiens d'Amérique du Sud) combien ils ont de chevaux, ils décrivent l'espace occupé par le troupeau. Les Abipones ne confondent sans doute pas les deux notions mais il y a peut être eu, à un stade donné, absence de différentiation entre elles. En tout cas, les petits de quatre ans ont du mal à s'en sortir, comme le montre cet étonnant dialogue rapporté par Piaget (12) :

Expérimentateur Prends juste assez d'œufs pour les coquetiers, pas plus et pas moins, un œuf pour chaque coquetier. (L'enfant construit une rangée de même longueur, mais contenant beaucoup trop d'œufs).

Expérimentateur C'est la même chose d'œufs et de coquetiers.

Enfant *Oui*

Expérimentateur Alors mets les œufs pour voir si c'est juste. (Il le fait)

Expérimentateur C'est la même chose ?

Enfant *Non*

Expérimentateur Et maintenant ?

Enfant *Oui (il enlève le surplus)*

Expérimentateur Alors on va sortir tous les œufs. (On les met en tas devant les coquetiers) C'est maintenant la même chose ?

Enfant *Non*

Expérimentateur Pourquoi ?

Enfant *Il y a plus de coquetiers ... (On serre les coquetiers et on répand les œufs). Regarde. Maintenant, il y a la même chose d'œufs et de coquetiers ?*

Enfant *Non, il y a plus d'œufs.*

On peut, sans savoir compter, vérifier l'invariance d'une collection d'objets ; il suffit d'avoir au préalable gravé dans son esprit une image de chacun d'entre eux. C'est ce que font les Hottentots avec leur troupeau ; c'est ce que faisaient aussi, dit-on, les Abipones, qui voyaient immédiatement s'il manquait un chien à leur meute fort nombreuse. Cette méthode pourrait bien avoir été fort répandue dans les sociétés primitives, où la mémoire des individus était prodigieusement développée ; mais il est clair qu'il n'y a pas là de dénombrement, bien que l'opération intellectuelle soit une mise en correspondance un à un des objets présents, comme les bêtes du troupeau, avec leurs images préalablement enregistrées par le cerveau. Et lorsqu'on raconte que certains animaux comme les chimpanzés savent compter jusqu'à 5 ou 6, on confond précisément, à mon avis, mémoire et dénombrement.

On voit apparaître effectivement le nombre, dans les sociétés primitives, mais sous une forme tellement rudimentaire qu'on lui refuse volontiers cette dénomination. Prenons les Veddas de Ceylan, un des peuples les plus primitifs aujourd'hui disparus ; ils n'avaient, paraît-il, aucun nom de nombre. Mais pour compter leurs noix de coco, ils mettaient un bâtonnet en face de chacune, le paquet de bâtonnets devenant ensuite, par conséquent, le témoin des noix de coco. Il y a cette fois-ci mise en correspondance un à un entre des objets, les noix, et ceux *d'une collection type* privilégiée, les bâtonnets.Le paquet de bâtonnets obtenu est bel et bien le nombre cardinal des noix ; cela, aucun animal n'est apte à le concevoir, bien que certains fassent illusion en “apprenant par cœur” quelques symboles.

Les premières activités numériques se font de même, partout, au moyen de nombreuses collections types. Les insulaires Andamans, au large des côtes de la Birmanie, ne connaissaient que les mots “un” et “plus d'un” suivant les uns, ou “un”, “deux”, “un de plus”, “quelques uns de plus”, suivant les autres ; mais ils comptaient jusqu'à dix en se touchant le nez avec les doigts, l'un après l'autre.

Des aborigènes australiens ont pour noms de nombres “un”, “deux”, “deux un”, “deux deux” ; au delà c'est “beaucoup”. Mais cela ne signifie nullement qu'ils ne savent pas compter au delà : pour cinq, ils montrent les cinq doigts de la main, pour 7 ils montrent une main et deux doigts, et ainsi de suite jusqu'à 20 en utilisant les doigts de pieds. On a vu plus haut que pour indiquer un nombre d'étapes, ils frappent du pieds ou montrent leurs doigts.

Une sorte de collection type particulièrement répandue, ce sont les listes standards de parties du corps ; voici les noms de nombres utilisés dans le détroit de Torrès, en commençant par le petit doigt de la main gauche :

un se dit	:	doigt du bout
deux	:	ce qui suit le doigt du bout
trois	:	doigt du milieu
quatre	:	doigt qui jette la lance
cinq	:	doigt de l'aviron
six	:	poignet
sept	:	coude
huit	:	épaule
neuf	:	poitrine
dix	:	sein droit
•		
•		
•		
dix neuf	:	petit doigt de la main droite. (8).

Il est important de noter que le compte ne se fait pas en récitant la liste, mais au moyen d'un geste du doigt allant de l'objet compté à l'élément correspondant de la collection type.

Les Dogons du Mali ont aussi une telle liste, utilisée concurremment avec des cordelettes à nœuds, des grains et des coquillages. Les Indiens d'Amérique ont la plupart du temps une liste plus savante, que nous verrons plus loin ; mais en même temps les nœuds, les entailles et les bâtonnets plus primitifs y jouent encore un grand rôle.

On raconte que lorsque les Natchez et les Chocktaws voulurent attaquer les Français en Louisiane, chaque tribu reçut un paquet de bâtons, l'un d'eux devant être ôté et détruit chaque jour, de façon à ce qu'ils puissent porter leurs coups en même temps. De même, quand un chef de Californie décide d'un bal dans un village, il envoie des messagers dans les villages voisins, chacun ayant une corde avec un certain nombre de nœuds. Chaque matin, le chef invité défait l'un des nœuds, et lorsque le dernier est arrivé, ils se mettent en route joyeusement, hommes, femmes et enfants. (11)

Les exemples existent en foule et rempliraient un volume entier ; leurs caractéristiques communes sont les suivantes :

a) L'existence d'un grand nombre de collections types matérielles chez un même peuple et le besoin de faire concrètement, avec des gestes, les correspondances un à un. Il paraît que certains esquimaux ne comptent que jusqu'à 20 avec leurs doigts et leurs orteils ; arrivés là ils disent “où prendrais-je le reste ? ” Autrement dit : je veux bien aller plus loin, mais avec quoi ?

b) Les nombres ne se présentent pas du tout, au début, comme une suite illimitée. Les parties du corps utilisées pour compter ne dépassent guère en général la vingtaine. Thurnwald (15) raconte qu'ayant essayé de faire progresser le compte, chez un peuple des Nouvelles Hébrides, jusqu'à 60 ou 80 cochons, il lui fut répondu que cela n'avait pas de sens car “davantage de cochons, cela n'existe pas”.

c) La dénomination des nombres est partout un processus distinct de leur découverte et de leur utilisation dans la vie courante. Beaucoup de peuples comptent assez loin, avec des objets divers, mais n'ont de noms que pour un, deux et trois, ce qui fais dire à des auteurs pressés qu'ils ne savent compter que jusqu'à trois.

Toutes ces caractéristiques sont autant de questions posées au chercheur. Pourquoi, chez un même peuple, diverses collections types ? Cela peut être tout bêtement par raison de commodité ; elles pourraient aussi être apparues successivement, les plus récentes supplantant peu à peu les plus anciennes. Elles peuvent encore relever de sphères étrangères, comme le religieux et le profane. Il n'y a peut être pas de loi générale.

Les mythologies semblent presque toutes muettes là dessus, en tous cas je n'en connais qu'une qui aborde le problème, la mythologie Dogon. Les activités humaines y sont regroupées en “paroles” qui symbolisent l'acte fondateur de chacune d'entre elles. La quinzième parole est la “parole du compte”. A chaque parole est associée une série de représentations graphiques données dans un ordre hiérarchique strict, de la plus grossière à la plus achevée. Les représentations de la “parole du compte” sont, conformément à cet ordre (2)

- Des cordelettes en fibres végétales auxquelles on fait des nœuds pour marquer les mois et les années ; c'est le “compte par les nœuds de la corde”.
- Des petits alignements de graines de baobab que l'on dispose par cinq sur le sol.
- Des chapelets de 100 graines qui servent à calculer.
- Le compte des cauris (coquillages) par paquets de 5, 10, 20, 40, 80.

Il existe, curieusement, une autre parole du compte, la 19° ; c'est la“parole du compte du corps de l'homme” ; elle est représentée par 9 parties du corps, plus les 10 doigts, plus 3 qui symbolise le sexe masculin, soit au total 22 qui est un nombre clé de l'univers dans la mythologie Dogon. Sa signification mystique explique qu'elle constitue une parole à part.

Il est tout à fait intéressant de constater que les Dogons ont ainsi une vision nette de l'évolution de leurs propres activités numériques, et une vision somme toute fort raisonnable. En premier lieu, ils pensent que la connaissance du nombre est apparue à un stade déterminé de leur évolution, puisque les dieux ne leur ont transmis les “paroles” que pour les sortir du stade de la sauvagerie où l'homme “ne se nourrissait que de fruits et de viande crue”, et leur permettre d'entrer en civilisation.

En second lieu, ils affirment que l'activité la plus grossière est un décompte du temps, au moyen de cordelettes nouées ; vient ensuite un dénombrement plus rapide, cinq par cinq, qui est déjà un calcul rudimentaire, et le calcul proprement dit avec un chapelet de 100 graines(!!). La forme la plus récente enfin montre déjà l'apparition d'un système de numération.

Le lecteur aura sûrement remarqué que la 19° parole, mystique, est la seule qui ait pu donner naissance à des noms de nombres ; elle est nettement séparée de la 15°, consacrée au dénombrement pratique et parfaitement anonyme. Cela relève de la caractéristique c) ci-dessus.

Pourquoi a-t-on donné des noms à certains nombres, et comment ? Cette question n'est pas résolue, mais l'hypothèse mystique est sûrement à creuser.

L'article de Seidenberg (14), qui défend la thèse de l'origine rituelle de *toute* activité numérique, donne beaucoup de détails intéressants.

On a relevé en outre des noms de nombres différents, dans certaines langues, suivant le type d'objet compté ; mais la question est de savoir s'il s'agit vraiment de mots différents ou de rajouts d'affixes à un radical commun. Thurnwald (15) parle de 28 séries de noms de nombres dans les îles Marshall ; une pour les bateaux, une pour les plantes à fruits, une pour les récipients pleins, un pour les récipients vides ... et une série générale pour les dénombrements courants !!

Tels sont les premiers pas de l'homme vers la conquête du nombre. La vieille sociologie vulgaire, représentée en France par Lévy-Bruhl (8) y voyait une des nombreuses manifestations de la "mentalité prélogique" des primitifs, caractérisée par l'incapacité à l'abstraction poussée et par la méconnaissance du principe de non contradiction. Cette vision traîne encore dans d'excellents ouvrages, comme celui de Menninger (10).

Qu'il y ait une réelle difficulté à concevoir le nombre, c'est ce que montrent les expériences avec les enfants, inaugurées par l'école de Piaget. Nous avons connu d'ailleurs il n'y a pas si longtemps ce type de difficulté après les découvertes de Cantor, qui reposent entièrement et uniquement sur le principe de correspondance un à un ! S'il est déjà difficile d'apprendre ce que d'autres ont découvert, on comprendra que la découverte elle-même puisse être laborieuse.

La pensée, primitive ou pas, prélogique ou pas, est déjà le résultat d'une abstraction très poussée. La pensée à ses débuts témoigne d'une conscience dialectique aiguë, reflétée dans des descriptions charmantes et pleines de vie de l'unité du monde ; elle crée les liens les plus inattendus entre les choses et les êtres les plus disparates, et des transformations les uns dans les autres qui font de leurs mythologies des contes merveilleux. Quelle fraîcheur naïve et quel étonnant pouvoir d'abstraction dans ces croyances rapportées par Lévi-Strauss (7) :

> "Le sorcier Ndembu, qui est surtout un voyant, ne doit pas consommer la viande du céphalophe, parce que le cuir de cet animal est irrégulièrement tacheté ; sinon, sa prescience risquerait de s'égarer à droite et à gauche, au lieu de se concentrer sur les questions importantes. Le même raisonnement lui interdit aussi ... plusieurs sortes d'épinards à feuilles glissantes afin que son pouvoir ne fuie pas au dehors".

Le dénombrement se présente d'abord comme une négation, une destruction de cette merveilleuse poésie ; compter, c'est d'abord séparer des choses analogues, qualitativement identiques ; c'est ensuite les rapprocher d'autres choses, celles de la collection type, qui n'ont qualitativement rien à voir avec les premières. Ce rapprochement nouveau, c'est celui de l'austère correspondance un à un, ce fantôme bien pâle face au monde enchanteur de la mythologie primitive ! C'est donc l'abstraction quantitative, et non l'abstraction en général, qui a été si longue à obtenir.

Il est possible qu'il y ait eu chez certains peuples, sous l'effet de la révolution intellectuelle que nous venons de décrire, une sorte de répulsion devant le nombre. Cela expliquerait qu'en Afrique en particulier, le nombre ait été véritablement tabou ; en de nombreux endroits, ils ne faut surtout pas compter ses enfants ou son troupeau car le risque est grand que les mauvais esprits l'entendent et y apportent la mort (14). Les Bergdama d'Afrique comptent avec les doigts de la main ; arrivés à dix, ils frappent les bouts des doigts ensemble et disent “ils sont morts” ; certains Bushmens n'ont de noms de nombres que jusqu'à trois, et trois se dit “mourir” (15). D'après Seidenberg, on trouve encore en Europe les traces d'une telle mentalité “primitive”.

G. Guittel rapporte cette extraordinaire anecdote, malheureusement sans indication de source :

> “Bien des cases africaines ne possèdent qu'une ouverture ; il convient de mettre en garde le jeune homme qui rentre dans sa case pour y dormir. S'il commet l'imprudence de se coucher les pieds tournés vers l'entrée de sa case, les esprits de la nuit, qui sont condamnés à compter, ont vite fait le compte des doigts de ses pieds et le dormeur est immédiatement emporté.” (4)

Compter, on le voit, est une malédiction à laquelle on peut être condamné, et être compté est carrément une condamnation à mort. Mais le nombre et l'arithmétique ne sont pas restés longtemps dans ces zones sinistres ; ils ont fini par réintégrer, curieusement, le monde fantastique de la mythologie grâce aux nouvelles liaisons magiques que son concept autorise.

Prenons par exemple le nombre quatre : il est ce qu'il y a de commun à toutes les collections de quatre objets. Dans un premier temps, il n'est que la négation de ces objets, au sens de négation de toutes leurs qualités ; mais dans un deuxième temps il fut sans doute perçu comme un lien plus profond, magique, purement abstrait, qui dépasse toute apparence sensible. Supposons alors que l'on attache une importance capitale et bénéfique à quatre objets déterminés, comme les quatre points cardinaux : grâce au lien occulte du nombre quatre, tout ce qui *est* quatre aura quelque chose des qualités des points cardinaux. La quantité devient ainsi le véhicule de la qualité, et par là une qualité au second degré. Telle est l'origine de la magie numérique et des nombres sacrés ; voici un exemple, rapporté par Lévy-Bruhl :

> “Dans le grand récit épique des Navajos, les dieux sont tous au nombre de quatre, et tous se rangent aux quatre points cardinaux, peints de la couleur propre à chacun de ces points… Le héros a quatre jours pour raconter son histoire, quatre jours sont employés à sa purification… A Vancouver, dans les cérémonies d'initiation d'un homme médecine, quand il se met debout, il doit tourner sur lui même quatre fois … Ensuite, il doit porter son pied en avant quatre fois sans cependant faire un pas. Pareillement, il doit faire quatre pas avant de sortir par la porte. Ses instruments culinaires doivent être jetés au bout de quatre mois, il ne doit pas prendre plus de quatre bouchées à la fois”. (8)

Si aux quatre points cardinaux on ajoute le zénith, le nadir et le centre, cela donne 7, d'où un nouveau nombre sacré chez les Indiens d'Amérique.

Il faut tenir ces systèmes en haute estime, comme témoignages d'une pensée véritable et comme source inestimable de renseignements. Il y a tout un travail à faire dans ce domaine au lieu de le laisser aux mains des charlatans. Les innombrables systèmes de nombres sacrés, les systèmes de divination à base arithmétique (le Yi-king chinois et la géomancie arabe et africaine), les calendriers et l'astrologie primitive, le pythagorisme, le gématrie seraient à explorer *scientifiquement*. La moisson serait à coup sûr abondante car, qu'on le veuille ou non, c'est ainsi que s'est faite la pensée humaine.

La preuve, c'est que le plus achevé de ces systèmes, le pythagorisme, fut le cadre de la première théorie des nombres. Comme le nombre est un lien entre toute chose, comme on l'a vu plus haut, "toutes choses sont nombres". Mais le pythagorisme a fait un pas en avant, ouvrant la voie aux véritables mathématiques et terminant l'époque des mythologies numériques : comme toutes choses sont nombres, ce qu'il faut étudier, ce sont les propriétés internes des nombres eux-mêmes, c'est-à-dire comment ils s'engendrent les uns les autres. D'où la première arithmétique pure.

III La naissance du calcul

Le calcul apparaît d'abord comme un modeste auxiliaire du dénombrement. Lorsque nous dépouillons les résultats d'un vote, nous notons les voix par des barres disposées cinq par cinq, puis nous comptons les paquets de cinq. Lorsque les Dogons affirment qu'ils ont commencé à compter par cinq, c'est sans doute à une technique analogue qu'ils font allusion. On rapporte de même qu'en Polynésie, le décompte se fait par deux, et que le mot vingt signifie en fait vingt paires. Lorsque, dans certaines tribus australiennes, les noms de nombres sont "un", "deux", "deux-un", "deux-deux" etc ..., ils reflètent peut être un procédé pratique de comptage facile à imaginer.

Une conception géniale, révolutionnaire est à l'œuvre derrière ces modestes procédés ; car les petites collections servent à compter les grandes, donc un nombre est la combinaison d'autres nombres. Là est l'essence du calcul. De plus, si je donne le résultat d'un dénombrement sous la forme "trois mains", pour trois fois cinq, le cinq est devenu une chose étrange : comme cinq il est multiplicité, mais comme chose comptée, comme main, il est unité. Dans le calcul, et plus précisément dans la multiplication, le nombre se dédouble, il acquiert deux aspects contradictoires qui le mettent en mouvement, permettant ainsi compositions et décompositions en foule et par suite des spéculations sans fin pour la plus grande joie des Pythagoriciens.

On a vu plus haut une collection type formée de parties du corps, où le nom nombre n'est qu'une description de l'appendice correspondant : doigt de l'aviron, poignet etc ... On connaît des collections types où, dans les noms de nombres, le calcul apparaît timidement ; ainsi chez les Zunis (Amérique), quatre se dit "tous les doigts levés excepté un" (donc cinq moins un), cinq se dit "l'entaillé" (le pouce), six se dit "un ajouté à ce qui est déjà compté" (cinq plus un), dix se dit "tous les doigts" etc ... (8)

Plus savant est le procédé de l'île de Saa (îles Salomon) pour compter les ignames : deux hommes les entassent par paquets de cinq ; à chaque double paquet de cinq réalisé, ils disent "un", puis "deux", et ainsi de suite. Un autre homme sied dans les parages, et lorsque "dix" (donc 100 en réalité) est annoncé, il met une petite racine d'igname de côté.

La nouvelle méthode savante se reflète parfaitement dans les noms de nombre des Tamanacs de l'Orénoque (16) :

Noms spéciaux de un à quatre :

5 se dit :	"une main entière"
6 à 9 :	"un de l'autre main" à "quatre de l'autre main"
10 :	"les deux mains"
11 :	"un du pied" (en montrant les deux mains et en avançant le pied)
	et ainsi de suite jusqu'à :
15 :	"tout un pied"
16 :	"un de l'autre pied"
	et ainsi de suite jusqu'à :
20 :	"un indien"
21 :	"un des mains d'un autre indien"
	et ainsi de suite jusqu'à :
40 :	"deux indiens"
	etc ...

Ce système de noms, que j'appelle le système main-pied-homme, fut l'un des premiers systèmes de numération inventés par l'homme, grâce au modèle fourni par le corps humain. Il connut une fortune prodigieuse sur tous les continents ; en Europe même il subsiste de nombreuses traces d'un ancien regroupement des unités par 20 (voir par exemple (10)).

Désormais, la numération prend une nouvelle tournure. On peut briser la limite imposée par le caractère fini d'une collection type comme le corps humain et donner des noms à des nombres relativement grands ; dans une île au sud de Sumatra, on disait "un homme" pour vingt, "main homme" pour 100 et "un notre corps" pour 400 (10) ; rien n'empêche d'imaginer "homme notre corps" pour 8000, mais la dénomination de 160000 est plus problématique.

Mais surtout, il est peu vraisemblable que celui qui comptait jusqu'à "deux indiens et un du pied d'un autre indien" ait montré du doigt deux indiens effectivement présents, ses deux mains et avancé son pied. Autrement dit, la bijection concrète, matérielle, des débuts a du faire place à une bijection purement cérébrale, au moyen de la simple récitation d'une liste de noms. La collection type peut devenir alors purement abstraite puisqu'elle n'intervient que comme liste de mots, et l'origine concrète de ces mots disparaît petit à petit des mémoires ; en revanche, leur signification numérique prend le dessus, et à cet égard, il y a peu de différence entre "deux indiens et un du pied d'un autre indien" où indien et pied n'ont aucune importance face au deux fois vingt et dix et un, et notre cinquante et un qui signifie cinq fois dix et un. Le calcul, au départ simple auxiliaire du dénombrement, est maintenant l'essence et le principe organisateur de la collection type.

Ici se termine cette exploration rapide des premières découvertes arithmétiques de l'humanité, que l'on peut toutes situer à la charnière du paléolithique supérieur et du néolithique. Lorsqu'un peu plus tard l'élevage, l'agriculture et le commerce apparaissent, il faudra bien faire avec ces rudiments ; c'est ainsi que les Incas entassèrent des montagnes de cordelettes nouées en guise d'archives statistiques, et que les Chinois allèrent jusqu'à faire de l'algèbre uniquement ... avec des baguettes et un échiquier !

Les premiers contrats apparurent au moyen-orient sous la forme quelque peu rustique de poches d'argile pleines de cailloux, appelées “bulles enveloppes” :

> “Le comptable chargé de fixer le contrat passé entre deux personnes, l'une livrant à l'autre un certain nombre d'objets matérialisait ce nombre par de petits objets d'argile ou ‘calculi’ ... Ces objets ne servaient plus simplement à compter ... L'idée nouvelle ... a été de les regrouper en un document : la bulle enveloppe, scellée pour garantir l'authenticité de l'opération, c'est-à-dire l'accord des contractants”(1).

On tend même à penser maintenant qu'une sorte d'abstraction des bulles enveloppes fut à l'origine de l'écriture :

> “La surface de la bulle fut marquée de telle sorte que, outre les empreintes du sceau qui la validait, y figurât l'image de tous les jetons qu'elle contenait ... De toute évidence, le marquage des bulles n'était pas destiné à supplanter le système comptable fondé sur des jetons : pourtant c'est ce qui s'est produit ... et le remplacement des jetons par leur image à deux dimensions semble avoir été le lien décisif entre le système d'enregistrement archaïque et l'écriture. Aux bulles creuses et aux jetons qu'elles contenaient se substituèrent des objets d'argile gravés : les tablettes” (13).

Olivier KELLER
OCTOBRE 1987

CHRONOLOGIE

2 millions d'années au plus tard : premiers hommes

PALEOLITHIQUE INFERIEUR

- 80000 à - 40000 ans : homme de Néandertal ; traces de pratiques funéraires. Début du langage articulé ?

PALEOLITHIQUE MOYEN

- 40000 à - 10000 : homo sapiens ; art mobilier et pariétal.
Premières traces pouvant faire penser à une activité numérique.
Troc probable.

PALEOLITHIQUE SUPERIEUR

- 10000 à - 3000 : passage à l'agriculture et à l'élevage
. **Traces certaines d'activités numériques : comptabilité avec des jetons au Moyen Orient.**

MESO ET NEOLITHIQUE

Fin du quatrième millénaire au moyen orient : Bulles enveloppes.
Plus anciennes tablettes connues comportant des additions et des fractions.

Début du deuxième millénaire :
Premiers traités de mathématiques au Moyen Orient : Egypte et Babylone.

* * *
* *
*

BIBLIOGRAPHIE

(1) **P. AMIET** Naissance de l'écriture. (Catalogue de l'exposition du même nom ; éditions de la réunion des musées nationaux. 1982)

(2) **G. CALAME-GRIAULE** Ethnologie et langage ; la parole chez les Dogons. (Gallimard 1965)

(3) **A.P. ELKIN** Les aborigènes Australiens (Gallimard 1967)

(4) **G. GUITTEL** Histoire comparée des numérations écrites (Flammarion 1975)

(5) **CH. LETOURNEAU** L'évolution de l'éducation dans les diverses races humaines (Paris, 1898)

(6) **CH. LETOURNEAU** L'évolution de la propriété (Paris 1889)

(7) **Cl. LEVI-STRAUSS** La pensée sauvage (Plon 1962)

(8) **LEVY-BRUHL** Les fonctions mentales dans les sociétés inférieures, surtout le chapitre V (1910)

(9) **A. MARSHACK** Les racines de la civilisation (Plon 1972)

(10) **K. MENNINGER** Numbers words and number symbols (MIT Press 1969)

(11) **M.P NILLSON** Primitive time-reckoning (1920)

(12) **PIAGET** La genèse du nombre chez l'enfant (3° édition, 1964)

(13) **D. SCHMANDT-BESSERAT** Les plus anciens précurseurs de l'écriture. Dans “L'aube de l'humanité” (Belin - Pour la science 1983)

(14) **A. SEIDENBERG** The ritual origin of counting (Archive for History of exact sciences. 1962 Vol. II-1)

(15) **THURNWALD** “Zählen” article du “Reallexicon der Vorgeschichte” (1929)

(16) **E.B. TYLOR** La civilisation primitive, surtout le chapitre 7 (1873)

(17) **C. ZASLAVSKY** Africa counts (Prindle, Weber and Schmidt 1973)

(18) **M. SAHLINS** Age de pierre, âge d'abondance. L'économie des sociétés primitives (Gallimard 1972)

DEUX ASPECTS DE L'ARITHMETIQUE PYTHAGORICIENNE : NOMBRES FIGURES ET MOYENNES

Maryvonne SPIESSER

La doctrine pythagoricienne forme un ensemble très complexe à la fois mystique, scientifique et philosophique. Le Pythagorisme vise une explication du monde en termes de nombres, comme en témoigne sa devise : "toutes les choses sont nombres". Les préoccupations mathématiques de l'école pythagoricienne sont donc étroitement liées aux conceptions philosophiques et les thèmes d'arithmétique qui sont notre propos ici doivent être compris dans cette perspective d'explication du monde en termes numériques.

Parmi les préoccupations arithmétiques essentielles des Pythagoriciens figure l'étude des nombres figurés et des médiétés ou moyennes. Les spéculations menées sur ces deux sujets nous sont surtout parvenues par l'intermédiaire des néo-phythagoriciens (1er siècle ap. J.C.) dont THEON DE SMYRNE et NICOMAQUE DE GERASE sont parmi les principaux représentants.

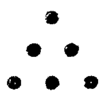
Nous nous bornerons ici à donner les idées essentielles qui se dégagent de cette étude. Le lecteur pourra se reporter, pour plus de détails, à la brochure que vient d'éditer l'IREM de Toulouse et qui s'intitule : "Pythagore : quelques aspects de l'arithmétique pythagoricienne". Après un panorama de la doctrine pythagoricienne et de son environnement culturel, les deux sujets précédents sont introduits et développés sous forme d'activités pédagogiques destinées aux élèves des collèges et lycées.

I. Les nombres figurés

"Toute chose est nombre". Les Pythagoriciens associent de façon très étroite, l'étendue et le nombre. L'unité arithmétique est représentée par un point géométrique et joue le rôle d'un atome matériel. L'agencement des points produit des formes spécifiques aux nombres. Un nombre est dit figuré lorsqu'on lui associe une forme géométrique simple.

Ainsi 6 et 7 peuvent être représentés à l'aide de points alignés $\overset{6}{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}$ $\quad \overset{7}{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}$, mais on peut aussi associer à 6 les sommets d'un hexagone et à 7 ceux d'un heptagone. Ces représentations toujours possibles pour un nombre ne sont pas celles qui visualisent certaines propriétés arithmétiques. Par contre, prenons deux autres représentations de 6:


6 = 2x3 6 est le produit de deux entiers consécutifs (nombre hétéromèque)


6 = 1+2+3 6 est la somme des trois premiers entiers consécutifs (nombre triangle)

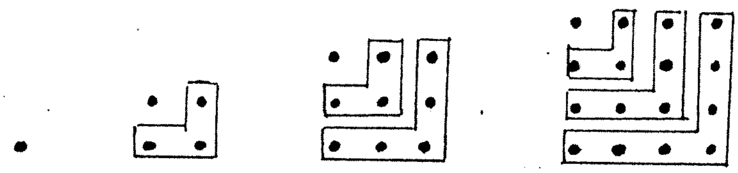
Les textes de NICOMAQUE DE GERASE et de P.H. MICHEL que nous allons étudier traitent des nombres carrés et des nombres hétéromèques, des relations entre eux et de la génération de tout nombre par des nombres triangles. D'autres textes ou citations permettent d'expliquer les notions abordées.

1°) Les nombres carrés

" les impairs ajoutés ensemble donnent les nombres carrés. Or les impairs successifs sont 1, 3, 5, 7, 9, 11. En les additionnant d'une manière continue, on obtient les nombres carrés. Ainsi l'unité est le premier nombre carré, car 1 X 1 = 1 . Vient ensuite le nombre impair 3. Si on ajoute ce gnomon à l'unité, on obtient un carré également égal, car il a 2 tant en longueur qu'en largeur. L'impair qui vient ensuite est 5. Si on ajoute ce gnomon au carré 4, on obtient un nouveau carré 9 , qui a 3 en longueur comme en largeur. Vient ensuite l'impair 7 qui, ajouté au carré 9, donne le carré 16, dont la longueur et la largeur valent 4, et ainsi de suite à l'infini. "

THEON DE SMYRNE

XIX pages 53 à 55



$p_4^1 = 1$ $\quad p_4^2 = 1+3$ $\quad p_4^3 = 1+3+5$ $\quad p_4^4 = 1+3+5+7$

$$\begin{cases} p_4^1 = 1 \\ \forall n \in N^* \quad p_4^{n+1} = p_4^n + (2n+1) \end{cases} \text{ d'où}$$

$$\text{pour } n \geqslant 1 \text{ , } n^2 = p_4^n = \sum_{n=0}^{n-1} 2k+1.$$

p_4^n désigne le nombre carré ayant n points sur chaque côté.

On obtient le carré p_4^{n+1} en ajoutant à p_4^n le gnomon 2n+1

2°) Les nombres hétéromèques

" l'unité, principe de tous les nombres, étant impaire et tendant à la production des autres, a fait en se doublant elle même,le nombre 2 qui est hétéromèque. C'est pourquoi le nombre 2, étant hétéromèque et surpassant l'unité d'une unité, rend hétéromèques les nombres pairs qui surpassent les impairs d'une unité.Or,les nombres dont il s'agit s'engendrent de deux manières, par la multiplication et par l'addition. Par l'addition, les nombres pairs ajoutés aux nombres pairs qui les précèdent, produisent les nombres hétéromèques. Soient, en effet, les nombres pairs successifs

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18.

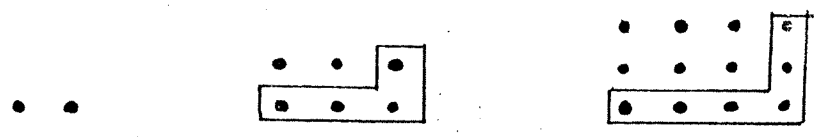
Par l'addition, on a 2 + 4 = 6 ; 6 + 6 = 12 ; 12 + 8 = 20 ; 20 + 10 = 30 ; en sorte que les sommes sont les nombres hétéromèques 6, 12, 20, 30 et ainsi des suivants. Les mêmes nombres hétéromèques sont également obtenus par la multiplication des pairs et des impairs successifs, le premier nombre étant multiplié par le suivant. Soit en effet,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

On a 1 fois 2 = 2 ; 2 fois 3 = 6 ; 3 fois 4 = 12 ; 4 fois 5 = 20; 5 fois 6 = 30 ; et ainsi de suite. Les nombres hétéromèques sont ainsi appelés, parce que c'est l'addition de l'unité à l'un des côtés qui fait la première diversité des côtés. "

THEON DE SMYRNE

XIII page 45



2 = 1x2 6 = 2x3 12 = 3x4 etc...

$$\begin{cases} H_1 = 2 \\ \forall n \in N^*, \quad H_{n+1} = H_n + 2(n+1) \end{cases}$$

$$\text{d'où} \quad \sum_{k=1}^{n} 2k = H_n = n(n+1)$$

$$5) \quad H_n = 2p_3^n = n(n+1)$$

On obtient le nombre hétéromèque H_{n+1} en ajoutant à H_n le gnomon $2(n+1)$

3°) <u>Opposition des nombres carrés et des nombres hétéromèques</u>

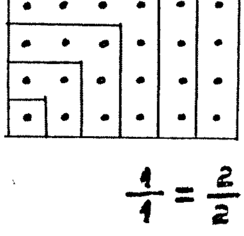
<u>Opposition impair-limité-carré , pair-illimité-hétéromèque</u>

" Dès lors l'opposition parallèle des couples carré-hétéromèque, impair-pair, limité-illimité se conçoit sans peine. Le carré est fondé sur l'unité et engendré par la somme des impairs; l'hétéromèque est fondé sur la dyade et engendré par la somme des pairs; le carré est toujours semblable au carré, toujours le MEME; les hétéromèques successifs sont perpétuellement différents, toujours AUTRES. D'un côté la fixité parfaite, de l'autre une modulation sans fin, d'un côté l'unité immuable de la perfection; de l'autre la diversité, le devenir, l'eternelle poursuite de cette perfection sans cesse approchée de plus près, jamais atteinte."

P.H. MICHEL
page 321

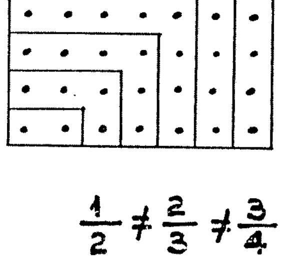
<u>IMPAIR - LIMITÉ - CARRÉ</u> ;

<u>PAIR - ILLIMITÉ - HÉTÉROMÈQUE</u>



$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{3}{3} = \cdots = 1$$

<u>LE MÊME</u>



$$\frac{1}{2} \neq \frac{2}{3} \neq \frac{3}{4} \neq \frac{4}{5} \quad \cdots$$

4°) "Amitié réciproque" des nombres carrés et des nombres hétéromèques

LE MELANGE DU CARRE ET L'HETEROMEQUE. LA NAISSANCE DES FORMES NUMERIQUES

" 1. Pour nous persuader clairement de ce qui est dit, à savoir que les êtres se constituent en partant d'éléments qui se combattent et sont contraires, et qu'ils reçoivent à bon droit l'harmonie (l'harmonie naît de toute façon des contraires; car l'harmonie est unité du mélange de composants multiples, accord de gens qui pensent différemment) exposons en deux lignes parallèles en longueur, non plus, comme peu auparavant, à part les uns des autres les PAIRS à partir de la dyade, les IMPAIRS à partir de l'unité, mais les nombres qui sont produits par l'entassement de ces derniers, les CARRES à partir des IMPAIRS, les HETEROMEQUES à partir des PAIRS; car, en fixant les yeux sur leur ecthèse, nous nous émerveillerons de leur amitié réciproque (....   ....).

2. Que ces deux lignes soient donc les suivantes, celle des CARRES à partir de l'unité :

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225 ;

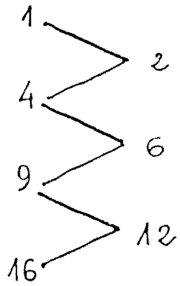
celle des HETEROMEQUES commençant à la dyade et se présentant ainsi:

2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72, 90, 110, 132, 156, 182, 210, 240 ;

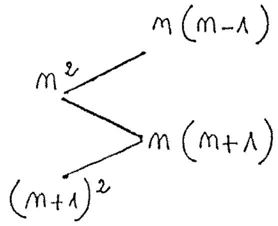
(....

4. ....) si nous plaçons le premier HETEROMEQUE aussi au milieu des deux premiers CARRES, le second au milieu des suivants, le troisième au milieu de ceux qui viennent après,le quatrième au milieu des suivants, on verra grace à eux des relations encore mieux ordonnées en trois termes: car la relation de 4 à 2, 2 l'a pareillement par rapport à l'unité: celle de 9 à 6 (....   ....) 6 l'a pareillement par rapport à 4; celle de 16 à 12, 12 l'a pareillement par rapport à 9, et ainsi de suite, les nombres et les rapports progressant en bon ordre; en effet, comme le grand est au moyen, ainsi le moyen sera au petit, et dans un rapport non identique, mais variable sans cesse en fonction de la progression dans tous les couples de relation, le produit des extrêmes est égal au carré du moyen, et alternativement une fois les extrêmes avec deux fois le moyen produira de toutes façon un carré : le plus élégant de tout cela, c'est que, des deux nombres reunis, se produit la genèse bien ordonnée des TRIANGLES ... "

NICOMAQUE DE GERASE
XIX page 121 122.

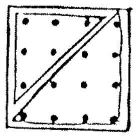


$$1^2 + 1 \times 2 = 3$$
$$P_4^1 + H_1 = P_3^2$$
$$2^2 + 2 \times 1 = 6$$
$$P_4^2 + H_1 = P_3^3$$

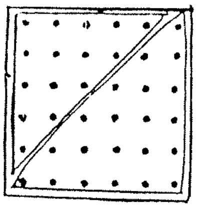


$$n^2 + n(n+1) = \frac{2n(2n+1)}{2}$$
$$P_4^n + H_n = P_3^{2n}$$
$$n^2 + n(n-1) = \frac{(2n-1)2n}{2}$$
$$P_4^n + H_{n-1} = P_3^{2n-1}$$

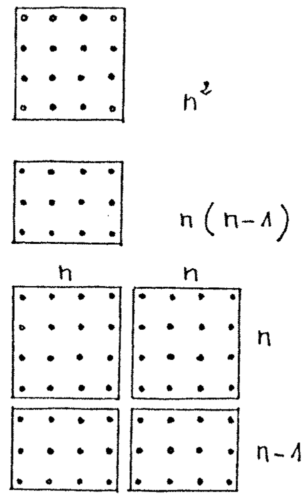
5°) Les nombres carrés et les nombres hétéromèques générés par les nombres triangles.



$$p_4^4 = p_3^4 + p_3^3$$



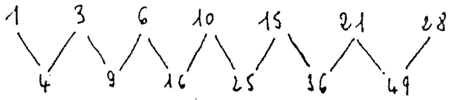
$$p_4^6 = p_3^6 + p_3^5$$

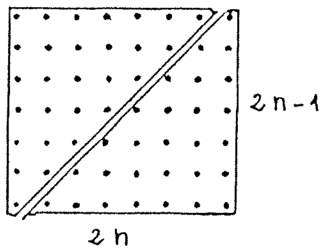


" LE PLUS ELEGANT DE TOUT CELA, C'EST QUE DES DEUX NOMBRES REUNIS, SE PRODUIT LA GENESE BIEN ORDONNEE DES TRIANGLES ..."

NICOMAQUE DE GERASE

$$p_4^n = p_3^n + p_3^{n-1}$$
$$n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}$$



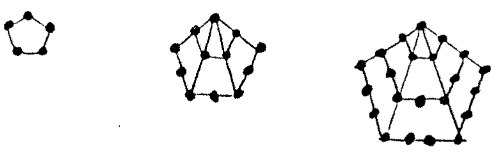


$$H_{2n} = 2n\,(2n-1)$$
$$H_{2n} = 2\,p_3^{2n-1}$$
$$p_4^n + H_{n-1} = p_3^{2n-1}$$

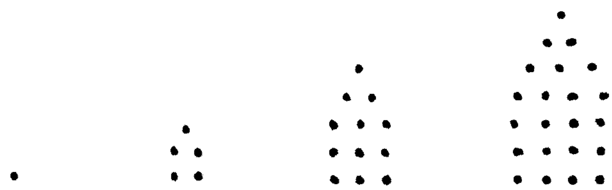
EN REUNISSANT DEUX TRIANGLES MUTUELLEMENT CONSECUTIFS, EUX QUE TU VOUDRAS, TU PRODUIRAS DE TOUTE FAÇON UN TETRAGONE, ET EN RESOLVANT N'IMPORTE QUEL TETRAGONE TU POURRAS EN CONSTITUER DEUX TRIANGLES."

NICOMAQUE DE GERASE

6°) Nombres pentagonaux



"Chacun est égal à la somme d'un carré de même côté et d'un triangle dont le côté est moindre d'une unité"



1 5 12 22

7°) Le gnomon. Relation entre le nombre de sommets et la raison du gnomon.

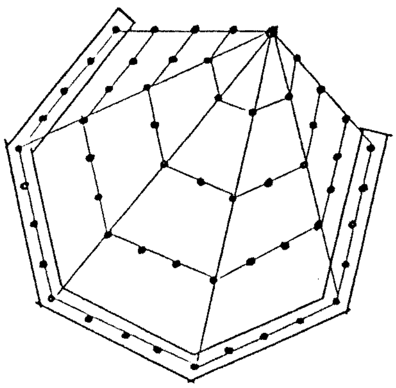
" Le gnomon est, tout ce qui, se joignant à quoique ce soit, rend le tout semblable à quoi il se joint. "

HERON D'ALEXANDRIE
cité par NICOMAQUE DE GERASE

note 5 page 202

" LA RAISON DES GNOMONS QUI DONNENT UN POLYGONE, EST TOUJOURS MOINDRE DE 2 UNITES, QUE LE NOMBRE DES ANGLES DE LA FIGURE "

THEON DE SMYRNE



g_n gnomon de p_k^n a $k-2$ côtés

$$g_n = (k-1) + (n-2)(k-2)$$

$$g_{n+1} = (k-1) + (n-1)(k-2)$$

$$g_{n+1} - g_n = k-2$$

8°) Génération des nombres figurés à partir des nombres triangles

		2	3	4	5	6	7	8	9	10
TRIANGLES	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
		3	5	7	9	11	13	15	17	19
TETRAGONES	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
		4	7	10	13	16	19	22	25	28
PENTAGONES	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
		5	9	13	17	21	25	29	33	37
HEXAGONES	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
		6	11	16	21	26	31	36	41	46
HEPTAGONES	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235

Chaque nombre polygonal à k côtés est la somme d'un nombre polygonal à (k-1) côtés et d'un nombre triangle ($p_k^n = p_{K-1}^n + p_3^{n-1}$).

Par exemple, l'heptagone 81 est égal à la somme de l'hexagone 66 et du triangle 15. Tout nombre polygonal peut donc s'exprimer comme une somme de nombres triangulaires.

II. Les médiétés

Le mot médiété, inusité de nos jours, correspond étymologiquement à notre notion de moyenne, même si ces deux termes ne sont pas exactement synonymes. A l'époque de PYTHAGORE étaient connues trois médiétés, dites plus tard "anciennes"*, celles qui sont passées à la postérité : les médiétés arithmétique, géométrique et harmonique.

a, b, c étant trois entiers tels que $a > b > c > 0$, (a,b,c) est une médiété arithmétique lorsque $a-b = b-c$, ou encore $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a}$ $(= \frac{b}{b} = \frac{c}{c})$.

(a,b,c) est une médiété géométrique lorsque $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$,

ou $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b}$ $(= \frac{b}{c})$

Dans la médiété géométrique, le moyen terme, comme nous l'avons dit, est contenu dans un extrême et contient l'autre dans le même rapport ($a : b = b : c$). Dans la médiété arithmétique, le moyen terme est surpassé par un extrême et surpasse l'autre, du même nombre ($a - b = b - c$).

THEON DE SMYRNE
(L. p. 175)

(a,b,c) est une médiété harmonique lorsque $\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c}$

"Il y a en effet au troisième rang la médiété appelée harmonique [...] lorsque, comme le plus grand terme est au plus petit, ainsi la différence du plus grand au moyen est à la différence du moyen au plus petit, par exemple 3, 4, 6 ou encore 2, 3, 6"
(II, XXV pp. 131-132)

NICOMAQUE DE GERASE (II, XXV p. 131-2)

On peut trouver aussi la définition suivante de cette dernière médiété: Si a-b est une certaine partie de a, alors b-c est la même partie de c.

Enfin, dans la médiété harmonique, le moyen terme est surpassé par un extrême et surpasse l'autre de la même partie des extrêmes *.

THEON DE SMYRNE
(L. p.175)

(si $a-b = \frac{a}{n}$, alors $b-c = \frac{c}{n}$, $n \in N^*$).Ce n'est pas équivalent à la première définition donnée, qui par contre équivaut à $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ soit à $(\frac{1}{c}, \frac{1}{b}, \frac{1}{a})$ est une médiété arithmétique. Là réside sans doute l'origine du nom de sub-contraire souvent donné à la médiété harmonique .

Les trois définitions précédentes conduisent à étendre l'appellation "médiété" à tout triplet (a,b,c) d'entiers [$a > b > c > 0$] tels que le rapport des différences entre deux des termes égale le rapport de deux quelconques de ses termes, par exemple : $\frac{a-c}{b-c} = \frac{b}{c}$.

Les 81 égalités possibles ne donnent en fait naissance qu'à 11médiétés distinctes qui ont été introduites plus tard par les néo-pythagoriciens.

> Nous avons maintenant à parler plus en détail des médiétés dont la théorie est indispensable pour comprendre les écrits de Platon. Il y a médiété quand, entre deux termes homogènes inégaux, on prend un autre terme homogène tel que l'excès du premier, qui est en même temps le plus grand, sur ce terme moyen, soit à l'excès de celui-ci sur le plus petit, comme le premier terme est à lui-même ou à l'un des deux autres, ou bien comme le plus petit est à l'un des deux autres.

THEON DE SMYRNE (LIV. p. 187)

> Parmi les proportions donc, il y a les premières, reconnues par tous les anciens, Pythagore, Platon, et Aristote , les trois fondamentales, l'arithmétique, la géométrique, l'harmonique, et les trois autres qui leur sont contraires, qui n'ont pas reçu de dénominations particulières, mais sont généralement appelées quatrième, cinquième, sixième médiétés ; après elles, les auteurs plus récents en trouvent quatre autres encore, en quoi ils achèvent le dixième nombre, qui de l'avis des Pythagoriciens est le plus parfait

NICOMAQUE (II, XXII, p. 126)

La musique était une discipline très à l'honneur à l'époque de PYTHAGORE et elle a été l'un des domaines privilégiés d'observations numériques. Les sons les plus harmonieux, selon PYTHAGORE, sont produits par les rapports des nombres les plus simples. La médiété harmonique, en particulier, est omniprésente dans les harmonies musicales et c'est peut-être aussi la musique qui justifie l'importance de la recherche du moyen terme d'une médiété lorsque les extrêmes sont donnés. En effet, lorsqu'une corde est fixée aux deux extrémités, où faut-il la pincer pour obtenir un son à l'octave ou à la quinte ? On sait par exemple que l'octave correspond à un rapport égal à 2 (Le son à l'octave supérieur est obtenu en pinçant la corde en son milieu).

> Tout de même que dans la division du canon musical , une corde étant tendue ou une longueur de flûte étant ménagée, les extrémités restant immuables, la médiété changeant dans la flûte par des trous, dans la corde par un chevalet, les médiétés dont on a parlé peuvent se réaliser, l'arithmétique, la géométrique et l'harmonique, si bien qu'elles sont dénommées avec justesse et pleine vérité, en tant que réalisées différemment par le déplacement et la translation du moyen terme ; tout de même aussi entre deux termes numériques , soit tous deux *impairs,* soit *pairs* , demeurant dans l'identité sans aucun changement, il est conforme à la raison et en même temps possible d'interposer un milieu qui s'accorde avec chacun des trois cas : suivant la médiété arithmétique, il dépasse et est dépassé d'une quotité égale, suivant la géométrique, il diffère d'un rapport semblable, suivant l'harmonique, il est plus grand et plus petit que les extrêmes de la même partie de ceux-ci .

NICOMAQUE DE GERASE (II,XXVII p. 135)

THEON DE SMYRNE ou NICOMAQUE DE GERASE explicitent donc la règle pour trouver ce moyen terme.

> Soit pour toi une méthode de ce genre, comme si tu façonnais artistement les termes qu'on vient de montrer et qui correspondent aux trois proportions : pour les termes impairs aussi bien que pairs qui ont été proposés, tu trouveras la médiété arithmétique en réunissant les extrêmes et en mettant au milieu leur moitié, ou bien en coupant en deux l'excès du plus grand sur le plus petit et en l'ajoutant au plus petit, tu auras le moyen ; pour la médiété géométrique, en trouvant le côté *carré* du *promèque* produit des extrêmes , tu feras le moyen terme, ou encore en voyant le rapport que les termes

ont les uns aux autres et en le coupant en deux, produis le moyen, par exemple dans le cas d'un rapport *quadruple*, le *double* ; pour la médiété harmonique, il faut multiplier la différence des extrêmes par le plus petit terme, diviser le produit par la réunion des extrêmes, et ensuite ajouter au plus petit terme le quotient de la division : le résultat sera la médiété harmonique .

NICOMAQUE DE GERASE (II, XXVII p. 135)

Mais le couronnement de l'édifice réside dans la "médiété parfaite" qui les "enveloppe toutes" (les trois anciennes) et qui est la plus utile pour tout progrès dans la musique et dans la connaissance de la nature" (voir annexe n° 1). Cette médiété parfaite dont l'exemple donné par NICOMAQUE est (6,8,9,12) renferme en effet les trois moyennes classiques : l'arithmétique (12,9,6), l'harmonique (12,8,6) et par "entrelacement" la géométrique car $\frac{6}{9} = \frac{8}{12}$. Nous remarquons ici qu'il s'agit d'une "médiété disjointe" mais NICOMAQUE en particulier consacre quelques pages à ces progressions. Or la musique est au centre de la médiété parfaite. L'octave apparaît avec le rapport double car 12 = 6x2 mais aussi la quinte caractérisée par le rapport "hémiole" (3/2) puisque $\frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, et la quarte avec le rapport $\frac{4}{3}$ dit "épitrite" : $\frac{8}{6} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$. Enfin nous découvrons entre les termes médians le rapport $\frac{9}{8}$ qui donne le ton. Ce sont ces mêmes rapports que reprend PLATON dans le Timée lorsqu'il définit la structure harmonique de l'univers. (voir annexe n° 2)

Bien que la découverte des irrationnels ait sanctionné l'échec de l'explication pythagoricienne du monde, cette philosophie du nombre imprègnera profondément notre culture.

ANNEXE 1

LA MÉDIÉTÉ PARFAITE.

1. Il me reste à analyser brièvement la médiété la plus parfaite, qui est étendue *en trois* dimensions* et qui les enveloppe toutes, la plus utile pour tout progrès dans la musique et dans la connaissance de la nature ; car elle est appelée *harmonie* au sens propre et véritable.

* les termes sont "solid" c.a.d. produit de 3 entiers.

2. C'est lorsque, étant donnés deux termes extrêmes étendus tous deux *en trois* dimensions, soit un nombre de fois égal égaux un nombre de fois égal, de façon à donner un *cube* , ou un nombre de fois égal égaux un nombre de fois inégal, de façon à être *docides* ou *plinthides* , un nombre de fois inégal inégaux un nombre de fois inégal, de façon à être *scalènes* , on découvre au milieu d'eux deux autres termes préservant vis à vis des extrêmes les mêmes rapports par alternation et mélange*, si bien que, n'importe lequel des deux préservant la proportion harmonique, l'autre réalise la proportion arithmétique ; car il est nécessaire que, si les quatre termes sont ainsi disposés, la proportion géométrique apparaisse, opposée aux deux autres médiétés par entrelacement : comme le plus grand terme est au troisième à partir de lui, ainsi le deuxième à partir de lui est au quatrième ; car un tel arrangement rend le produit des moyens égal à celui des extrêmes ; d'autre part, si le plus grand terme est apparu par rapport à celui qui vient après lui dans une différence de même quotité* que ce dernier par rapport au plus petit, une comparaison de ce genre est arithmétique, et la réunion des extrêmes est *double* du moyen terme ; mais si le troisième terme à partir du plus grand dépasse et est dépassé par la même partie des extrêmes eux-mêmes, elle est harmonique , et le produit du moyen et de la réunion des extrêmes est double du produit des extrêmes .

α^3 cube
$\alpha \times \alpha \times \beta$ { $\beta > \alpha$ docid ; $\beta < \alpha$ plinthi
$\alpha \times \beta \times \gamma$ scalène

* interversion des termes

* identique en quotité selon la différence en qualité selon le rapport.

3. Soit un exemple de cette proportion :

6, 8, 9, 12,

donc, 6 est scalène, venant d'une fois 2, trois fois ; 12 vient de deux fois 2 *allongé* continuement trois fois* ; des moyens, le plus petit vient d'une fois 2, quatre fois, le plus grand, d'une fois 3, trois fois ; les extrêmes sont *solides* et étendus *en trois* dimensions et les médiétés sont du même genre qu'eux ; selon la médiété géométrique, comme 12 est à 8, ainsi 9 est à 6 ; selon l'arithmétique, d'autant que 12 dépasse 9, d'autant 9 dépasse 6 ; selon l'harmonique, la partie dont 8 dépasse 6, partie considérée dans le même 6, est celle dont 8 est dépassé par 12 si on la considère dans le même 12.

* $1 \times 2 \times 3 = 6$
$2 \times 2 \times 3 = 12$
$1 \times 2 \times 4 = 8$
$1 \times 3 \times 3 = 9$

4. Mais assurément 8 à 6 ou 12 à 9 font une quarte, en rapport *épitrite**, 9 à 6 ou 12 à 8, une quinte, en rapport *hémiole**, 12 à 6, une octave, en rapport *double* ; reste 9 à 8, qui fait un ton, en rapport *épogde** : c'est la commune mesure de tous les rapports dans la musique, attendu qu'il est aussi le plus connaissable, parce qu'il est également la différence réciproque des consonances premières et les plus élémentaires.

* épitrite $\frac{4}{3}$ $(1+\frac{1}{3})$
hémiole $\frac{3}{2}$ $(1+\frac{1}{2})$
epogde $\frac{9}{8}$ $(1+\frac{1}{8})$

NICOMAQUE, II, XXIX, p. 139-140

dance[1]. *(a)* Voici de quels éléments et en quelle façon,

a) Sa composition dialectique.

de la réalité indivisible et qui toujours se conserve identique, et de celle qui au contraire s'exprime dans les corps, sujette au devenir et divisible, de ces deux il a tiré par mélange une troisième forme, intermédiaire, de réalité; pour ce qui est de ses rapports avec la nature du Même et celle de l'Autre, également il l'a de cette façon constituée intermédiaire entre ce qu'elles ont d'indivisible et de divisible selon les corps. Il prit donc, au nombre de trois, les termes que voilà et les mélangea tous en une seule substance : la nature de l'Autre était rebelle au mélange; pour l'unir harmoniquement au Même, il usa de contrainte; *(b)* puis dans le mélange il introduisit la réalité; des trois termes il n'en fit qu'un[2], et derechef, le tout ainsi obtenu, il le distribua en autant de parts qu'il convenait, chacune toutefois demeurant un mélange du Même, de l'Autre et de la réalité. Il se mit donc à faire

b) Sa structure harmonique.

les divisions que voici : il y eut en premier lieu une part qu'il préleva sur le tout; après celle-ci, il en préleva une seconde, double de la première; puis une troisième, qui valait une fois et demie la seconde, était le triple de la première; la quatrième fut double de la seconde, la cinquième triple de la troisième, *(c)* la sixième égale à huit fois la première, et la septième à vingt-sept fois la première[3]. Après quoi, *(a)* il combla les intervalles doubles ainsi que les triples, du mélange détachant encore des parts et les intercalant entre les premières, de sorte que dans chaque intervalle il y eût deux médiétés : suivant l'une, c'est d'une même fraction respective des extrêmes que le moyen surpasse le premier, est surpassé par le second; suivant l'autre, c'est d'une égale quantité numérique qu'il dépasse, d'une égale qu'il est dépassé. Des distances de un et demi, un et un tiers, un et un huitième s'étant manifestées à la suite de telles liaisons dans les intervalles primitifs, *(b)* au moyen de l'intervalle de un et un huitième il combla tous ceux de un et un tiers, laissant de chacun d'eux une fraction, cet intervalle restant ayant ses termes dans le rapport du nombre deux cent cinquante-six au nombre deux cent quarante-trois. Et voilà que le mélange, dont il avait détaché ces parties, de cette façon il se trouva l'avoir entièrement dépensé.

ANNEXE 2

PLATON

Timée - 35 abc
36 ab

Ed. La Pléiade - Tome 2
p. 450

NOTES

3. Le Démiurge divise le mélange en portions dont les rapports correspondent aux intervalles musicaux. Il fait d'abord sept parts, dont les grandeurs correspondent aux nombres 1, 2, 3, 4, 9, 8, 27. La succession naturelle des termes 8 et 9 est intervertie pour faire alterner les puissances de 2 et les puissances de 3; tous ces termes sont en effet empruntés à deux progressions géométriques, l'une de raison double, l'autre de raison triple.

4. Nous avons vu ci-dessus (n. 2, p. 447) la définition de la médiété géométrique; ici sont définies deux nouvelles médiétés : 1° la médiété harmonique, qui répond à la double condition $x - a = a : n$ et $b - x = b : n$; d'où l'on tire $(x - a) : a = (b - x) : b$; 2° la médiété arithmétique, répondant à la formule $x - a = b - x$. Ainsi, entre 1 et 2, le moyen harmonique est 4/3 (il dépasse 1 de 1/3, il est dépassé par 2 de 2/3, soit *un tiers* de 2), le moyen arithmétique est 3/2; entre 1 et 3, le moyen harmonique est 3/2, le moyen arithmétique est 2. Combler les intervalles doubles et triples, c'est, entre les termes des progressions ci-dessus, intercaler leurs moyens harmoniques et arithmétiques.

5. Il nous suffira maintenant de considérer les termes inclus dans l'intervalle de 1 à 2, soit 1, 4/3, 3/2, 2. Ces nombres correspondent à la tonique, à la quarte, à la quinte et à l'octave. L'intervalle de 9/8 apparait entre la quarte et la quinte ($3/2 : 4/3 = 9/8$); c'est le ton. Mais les intervalles de quarte et de quinte, qui ajoutés l'un à l'autre donnent l'octave ($4/3 \times 3/2 = 2$), peuvent se décomposer respectivement en deux et trois tons, être de la sorte « comblés », sauf un intervalle restant, qui équivaut dans les deux cas à 256/243, soit $2^8/3^5$. En effet $9/8 \times 9/8 \times 256/243 = 4/3$; $9/8 \times 9/8 \times 9/8 \times 256/243 = 3/2$. La gamme platonicienne se compose ainsi de cinq tons majeurs, tous égaux, où s'intercalent, à la place de nos demi-tons, des intervalles de 256/243, désignés du nom de *leimma* ou reste.

6. Ainsi, aux termes de cette réflexion, rien qu'à l'aide des nombres 2 et 3, de leurs puissances et de leurs rapports, le Tout se trouve intégralement distribué en proportions harmonieuses. Ce qui autorise cette conception, ce sont les propriétés des facteurs 2 et 3, qui, après avoir divisé harmoniquement l'octave en quarte et en quinte, permettent encore de la diviser *exhaustivement* en intervalles formés des puissances de ces mêmes nombres. Ce sont là les nombres consonants de *République*, VII, 531 *c*.

BIBLIOGRAPHIE

ARCHYTAS ; Traité de la musique (extrait) dans CAVEING M. La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque (3 volumes). Presses de l'Université de Lille III. 1982 p. 1179.

BAILLY, A ; Dictionnaire Grec-Français 26ème édition Hachette - Paris 1963.

BREHIER, E ; Histoire de la philosophie, tome 1. Antiquité et Moyen-Age Presses Universitaires de France. Paris 3è édition. 1985.

DE CRESCENZO, L ; PYTHAGORE Superstar Jean Claude Lattes. Paris 1985.

DAHAN-DALMENICO, A ; PEIFFER, J ; Une histoire des mathématiques Routes et Dédales Seuil. Paris 1986.

DHOMBRES, J et autres ; Mathématiques au fil des âges Gauthier-Villars. Paris. 1987.

DIOPHANTE D'ALEXANDRIE ; Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones. Oeuvres traduites pour la 1ère fois du grec en français par P. VER EECKE. Blanchard · Paris 1959.

D'OOGE, M, L ; Nichomachus of Gerasa. Introduction to arithmetic. The Macmillan Company. London. 1926.

EUCLIDE ; Les oeuvres d'EUCLIDE traduites littéralement par F. PEYRARD. Nouveau tirage augmenté d'une importante introduction par M. Jean ITARD. Blanchard. Paris. 1966.

HEATH, T. ; A History of Greek Mathematics. Tome I. From Thales to Euclid. 1ère édition 1921 Réimpression Dover New York 1981.

IBN MU^{C}NIM ; La neuvième espèce [du Fiqh al-Hisāb] sur les figures numériques.
dans DJEBBAR A. Les nombres figurés dans la tradition mathématique de l'Andalousie et du Maghreb. Université de Paris Sud. Orsay.

ITARD, J ; Les livres arithmétiques d'EUCLIDE
Hermann. Paris, 1961 .

LEVY, I ; La légende de PYTHAGORE. De Grèce en Palestine.
Champion. Paris, 1927.

MAUROLYCUS, F ; Le premier livre de l'arithmétique dans CASSINET J.
Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques de Toulouse 3 (1981) 1-21 .

MICHEL, P.H. ; De Pythagore à Euclide. Contribution à l'Histoire des Mathématiques pré-euclidiennes. Société des Belles Lettres.
Paris. 1950.

NICOMAQUE DE GERASE ; Introduction arithmétique .
Introduction, traduction, notes et index par J. BERTIER.
Vrin. Paris. 1978.

OZANAM, J ; Dictionnaire mathématique ou idée générale des mathématiques.
Estienne Michalet . Paris 1691.
reproduction IREM Paris VII, 1986 .

PAPPUS D'ALEXANDRIE ; Collection mathématique, traduite pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par P. VER EECKE. Tome I.
Desclee de Brouwer . Paris. 1933 .
Réimp. Blanchard . Paris .

PASCAL, B ; Oeuvres complètes. La Pléiade.
Gallimard. Paris. 1950.

PLATON ; Oeuvres complètes. Traduction nouvelle et notes par Léon ROBIN. Tome II. La Pléiade. Gallimard. Paris. 1950 .

PLUTARQUE ; Oeuvres morales. Traduction française par M. l'Abbé RICARD Tome XIII . Librairie Desaint . Paris . 1791 .

PORPHYRE ; Vie de PYTHAGORE. Lettre à Marcella. Les Belles Lettres. Paris. 1982.

PROCLUS DE LYCIE ; Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'EUCLIDE. Traduits pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes par Paul VER EECKE. Blanchard. Paris . 1946.

REY, A ; La Science dans l'Antiquité Albin Michel. Paris. 1939.

TANNERY, P ; Pour l'Histoire de la Science Hellène ; de THALES à EMPEDOCLE . Alcan. Paris. 1887.

TATON, R ; Histoire générale des Sciences. Tome 1. La science antique et médiévale (des origines à 1450) Presses Universitaires de France, Paris. 1966.

THEON DE SMYRNE ; Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de PLATON. Traduite pour la première fois du grec en français par J. DUPUIS. Paris 1892. Réimp. Culture et Civilisation . Bruxelles 1966.

ALGORITHMES DE CALCULS CHEZ ARCHIMEDE

Etude de "La mesure du cercle"

Martine BUHLER

Il s'agissait du récit d'une expérimentation en classe de terminale C sur le texte "La mesure du cercle" d'Archimède :

- les élèves ont fait les exercices joints (Annexe 1) en devoir à la maison
- nous avons corrigé les exercices et lu une partie du texte (Annexe 2) en classe : la première partie de la démonstration de la proposition 3 : "Le périmètre de tout cercle est supérieur au triple du diamètre augmenté d'une valeur supérieure à la dix-soixante et onzième partie du diamètre".
- nous avons examiné (trop) rapidement quelques méthodes d'approximation de racines carrées à l'époque d'Archimède ... et à la nôtre.

(En tout : 3 heures de travail en classe)

1 LECTURE DU TEXTE

La lecture du texte d'Archimède est intéressante à plus d'un titre.
La formulation entièrement géométrique de la proposition et de sa démonstration surprend les élèves. Archimède ne s'occupe pas d'un nombre (pour nous : π) mais du rapport du périmètre au diamètre.
On voit parfaitement en lisant le texte que le procédé d'Archimède est itératif : connaissant la longueur du côté d'un polygone régulier circonscrit au cercle, il donne une méthode du calcul du côté d'un polygone régulier circonscrit ayant le double de côtés.

En termes (trop) modernes :

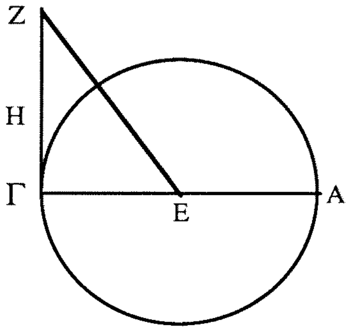


Fig. 64 du texte

(EH) : bissectrice de l'angle $\widehat{ZE\Gamma}$
[ZΓ] : demi-côté d'un polygone régulier circonscrit au cercle
[ΓH] : demi-côté du polygone ayant le le double de côtés

On a $\dfrac{E\Gamma}{\Gamma H} = \dfrac{ZE}{ZH}$ (car (EH) est la bissectrice de $\widehat{ZE\Gamma}$; ceci avait été démontré antérieurement en exercice

Donc $\dfrac{E\Gamma}{\Gamma H} = \dfrac{ZE + E\Gamma}{ZH + \Gamma H} = \dfrac{ZE + E\Gamma}{Z\Gamma}$

D'autre part : $\dfrac{EH}{\Gamma H} = \sqrt{1 + \dfrac{E\Gamma^2}{\Gamma H^2}}$ (théorème de Pythagore)

Autrement dit, pour un angle au centre $\widehat{\Gamma EZ}$ donné, on pose :

$u_n = \dfrac{\text{côté adjacent}}{\text{côté opposé}}$ $\quad$ $v_n = \dfrac{\text{hypoténuse}}{\text{côté opposé}}$

Alors, pour l'angle "suivant", i.e. moitié de $\widehat{\Gamma EZ}$, on a :

$$u_{n+1} = u_n + v_n$$

$$v_{n+1} = \sqrt{1 + u_{n+1}^2}$$

Connaissant u_0 et v_0 (Archimède part d'un angle de 30° : "Le tiers d'un droit"), on peut calculer u_n et v_n, ce qui donnera une majoration de

$\dfrac{P}{D}$ (rapport du périmètre du cercle au diamètre).

En effet, le côté opposé de l'angle au centre est le demi-côté du polygone et l'hypoténuse est le demi-diamètre.

Donc $v_n = \frac{D}{C_n}$, avec C_n : côté du polygone.

On obtient donc ainsi $\frac{D}{P_n}$, où P_n est le périmètre du polygone,
or $\frac{P_n}{D} > \frac{P}{D}$.

2 Approximations utilisées

Pour arriver à l'approximation

$$\frac{10}{71} \text{ pour le rapport } \frac{P}{D},$$

Archimède calcule le rapport du périmètre du polygone à 96 côtés (circonscrit au cercle) au diamètre du cercle, par approximations successives des rapports (vus en 1) relatifs aux polygones à 6, 12, 24, 48 côtés.

Comme le calcul final de $\frac{P_n}{D}$ nécessite une approximation par excès, il nous faut des approximations par défaut de ce que j'ai appelé u_n.

Le calcul d'Archimède est mené avec rigueur et on peut s'intéresser aux approximations de racines carrées utilisées.

Par exemple, Archimède utilise $\frac{265}{153}$ pour $\sqrt{3}$ (ligne 8 p. 1 du texte),

en précisant bien, quand cela est nécessaire, qu'il sagit d'une approximation par défaut (ligne 12). Quels sont, à l'époque d'Archimède, les moyens d'arriver à ce résultat ? Nous ne savons pas comment Archimède fait ce calcul, il ne l'explique pas. Nous ne pouvons que conjecturer des moyens possibles.

Théon de Smyrne (IIe siècle après J.C) compare (dans "Exposé des notions mathématiques utiles pour lire Platon") les carrés d'entiers et les doubles de carrés d'entiers, pour trouver des approximations de $\sqrt{2}$. Le même procédé fonctionne pour trouver des approximations de $\sqrt{3}$: il faut alors comparer les carrés de nombres entiers et les triples de ces carrés :

> par exemple $48(=3 \times 4^2)$ est "proche" de $49(=7^2)$
>
> donc $\frac{7}{4}$ est "proche" de $\sqrt{3}$. Mais il est long d'arriver ainsi à $\frac{265}{153}$! (On lira avec plaisir et profit les "leçons d'à peu près" de G. Th. Guilbaud)

La méthode babylonnienne ou de Héron, donne rapidement d'excellentes approximations, mais par excès. (On peut lire un extrait des "Métriques" de Héron d'Alexandrie (Ier siècle après J.C.) dans "Mathématiques au fil des âges" page 137). Rappelons la méthode brièvement et de manière moderniste : partant de u_o, approximation quelconque de $\sqrt{a}(a > o)$, on calcule par récurrence u_n défini par

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + \frac{a}{u_n}).$$

On peut cependant, de diverses manières, obtenir une approximation par défaut à partir d'une approximation par excès.
La méthode de Héron, partant de 1, donne comme approximations successives de $\sqrt{3}$:

$$\frac{1}{2}(1+\frac{3}{1})=2$$

$$\frac{1}{2}(2+\frac{3}{2})=\frac{7}{4}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{7}{4}+\frac{3\times 7}{4})=\frac{97}{56}$$

$$\frac{1}{2}(\frac{97}{56}+\frac{3\times 56}{97})=\frac{18817}{10864}$$ (approximation par excès à moins de 10^{-8} près !)

Or, les Grecs connaissaient des moyens de simplifier des fractions pour obtenir de bonnes valeurs approchées. Aristarque de Samos (IIe siècle avant J.C.) remplace - sans explication - dans ses calculs d'astronomie

$$\frac{71755875}{61735500} \text{ par } \frac{43}{37}.$$

On peut penser qu'il a utiliser l'algorithme d'Euclide (voir à ce sujet les textes d'Itard : "Essais pour une histoire des mathématiques p. 46), ce qui revient pour nous à développer

$$\frac{71755875}{61735500}$$

en fraction continuée et à arrêter le calcul à la quatrième réduite.

A partir de $\frac{18817}{10864}$, on peut ainsi arriver à $\frac{265}{153}$ en calculant la neuvième réduite.

Pour les courageux, on peut même examiner les calculs que donne l'utilisation de l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
18\,817 &= 10\,864 + 7953\\
10\,864 &= 7\,953 + 2911\\
7\,953 &= 2\times 2911 + 2131\\
2\,911 &= 2\,131 + 780\\
2\,131 &= 2\times 780 + 571\\
780 &= 571 + 209\\
571 &= 2\times 209 + 153\\
209 &= 153 + 56\\
153 &= 2\times 56 + 41
\end{aligned}$$

On néglige 41, on obtient :

$$\begin{aligned}153 &\approx 2 \times 56\\ 209 &\approx 3 \times 56\\ 571 &\approx 2 \times\ 3 \times\ 56 + 2 \times\ 56\\ &\approx 8 \times 56\\ 780 &\approx 11 \times 56\end{aligned}$$

et en remontant les calculs $10\,864 \approx 153 \times 56$

$$18\,817 \approx 265 \times 56$$

$$\text{d'où } \frac{18\,817}{10\,864} \approx \frac{265}{153}$$

Un autre moyen d'obtenir une approximation par défaut à l'aide d'une approximation par excès est de calculer des "moyennes".

La méthode de Héron donne $\frac{97}{56}$ comme approximation par excès de $\sqrt{3}$.

Alors $\frac{3 \times 56}{97} = \frac{168}{97}$ est une approximation par défaut de $\sqrt{3}$.

Calculons $\frac{97 + 168}{56 + 97}$.

On obtient $\frac{265}{153}$,

approximation "intermédiaire" de $\sqrt{3}$ dont on vérifie qu'elle est par défaut :

$$3 \times 153^2 = 70\,227 \text{ et } 265^2 = 70\,225.$$

(d'après une astucieuse remarque de J. Borowczyk)

Nous n'avons pas eu le temps de faire tous ces calculs en classe. Nous avons parlé de Théon et de Héron ; nous avions d'ailleurs examiné auparavant en exercice la méthode de Héron et une méthode proche de celle de Bombelli avec un point de vue moderne de suites définies par récurrence convergeant vers $\sqrt{a}$ et nous avons, à l'occasion de la lecture de ce texte, cherché une suite récurrente convergeant vers $\sqrt{3}$.

La lecture du texte d'Archimède a beaucoup intéressé la classe ; les élèves ont montré une grande curiosité pour les différentes méthodes de calcul de π : l'un d'eux a d'ailleurs fait remarquer plus tard, lors du cours sur les intégrales, qu'on devait pouvoir calculer π en calculant des intégrales puisque celles-ci servent à calculer des aires. J'ai alors donné un devoir (à la maison) reprenant les calculs de Newton permettant d'obtenir π (Voir "La méthode des fluxions").

En termes modernes, il s'agit de calculer une approximation de

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x - x^2}\, dx \text{ en développant en série } \sqrt{1 - x} \text{ (formule du binôme).}$$

Le problème et le texte de Newton se trouvent dans la brochure n°61 de l'I.R.E.M. Paris 7 M. : A.T.H. (Mathématiques : Approche par des Textes Historiques) p. 24.

ANNEXE 1

La mesure du cercle est un thème qui traverse l'histoire des mathématiques depuis l'Antiquité la plus reculée jusqu'aux recherches les plus récentes d'algorithmes performants pour calculer π.

Les exercices suivants permettent de trouver un algorithme de calcul de π, en suivant la méthode d'Archimède ; nous lirons d'ailleurs un extrait de “La mesure du cercle” d'Archimède.

Exercice 1 : encadrement de π

1° a) Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre 0 de rayon 1. Quel est son périmètre ?

b) Inscrire dans $\mathcal{C}$ un hexagone régulier $(A_1A_2A_3A_4A_5A_6)$. Quel est le périmètre de l'hexagone ?

c) La médiatrice de chaque côté $[A_iA_{i+1}]$ de l'hexagone coupe le petit arc $(\widehat{A_iA_{i+1}})$ du cercle en un point par lequel on mène la tangente au cercle.
Expliquer pourquoi on obtient ainsi un hexagone régulier circonscrit au cercle. Calculer son périmètre.

d) A l'aide de a), b), c), donner un encadrement de π (décimal).

2° a) Sur la même figure, inscrire dans $\mathcal{C}$ un dodécagone régulier. Calculer son périmètre.

b) Circoncrire à $\mathcal{C}$ un dodécagone régulier. Calculer son périmètre.

c) Donner un encadrement de π.

3° Algorithm de calcul

On appelle : . c_n la longueur du côté d'un polygone régulier à $2^n \times 6$ côtés inscrits dans $\mathcal{C}$ et p_n son périmètre (que valent c_0, p_0, c_1, p_1?)

. t_n la longueur du côté d'un polygone régulier à $2^n \times 6$ côtés circonscrit à $\mathcal{C}$ et q_n son périmètre (que valent t_0, q_0, t_1, q_1 ?)

a) Déterminer une relation de récurrence liant c_n et c_{n-1}.

b) Ecrire un programme permettant d'obtenir à l'aide de votre calculatrice une valeur approchée de c_n et $1/2p_n$ pour n quelconque.

Au choix c) ou c) bis :

c) Déterminer une relation de récurrence liant t_n et t_{n-1}. Programmer la machine pour obtenir $1/2p_n$ et $1/2q_n$.

c)bis Déterminer une relation liant c_n et t_n. Programmer la machine pour obtenir $1/2p_n$ et $1/2q_n$.

d) Donner à l'aide de la calculatrice des valeurs approchées par défaut de $1/2p_4$, $1/2p_5$ $1/2p_{10}$ et par excès de $1/2q_4$, $1/2q_5$, $1/2q_{10}$.
En déduire des encadrements décimaux de π. A quelle précision avez-vous obtenu π ?

e) Que pensez-vous de la convergence des suites$(p_n)_{n \in N}$ et $(q_n)_{n \in N}$?

Exercice 2 : étude des suites $(p_n)_{n \in N}$ et $(q_n)_{n \in N}$

1° On appelle [AB] un côté d'un polygone régulier à $2^n \times 6$ côtés inscrit dans un cercle C de rayon 1 de centre 0.
Soit θ la mesure en radians, comprise entre 0 et π, de l'angle non orienté $\widehat{AOB}$.

a) Déterminer θ.

b) Calculer $c_n = AB$ à l'aide des lignes trigonométriques de $\theta/2$. En déduire une expression de $1/2p_n$.

c) Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ (x étant exprimé en radians).
Etudier la convergence et la limite de $(1/2p_n)_{n \in N}$

2° Faire un travail analogue avec un polygone régulier à $2^n \times 6$ côtés circonscrit à C.
Etudier la convergence et la limite de $(1/2q_n)_{n \in N}$.
Que savez-vous d'Archimède et de l'époque à laquelle il vivait ? En avez-vous entendu parler en classe ? Dans quel cours et à quelle occasion ?

Annexe 2 : Archimède : "La mesure du cercle"

Traduction Ch. Mugler Ed. "Les Belles Lettres", t1, 1970

3.

Le périmètre de tout cercle est égal au triple du diamètre, augmenté d'un segment compris entre les dix soixante et onzièmes et le septième du diamètre[3].

Soit un cercle, ΑΓ son diamètre, Ε son centre, ΓΛΖ une tangente ; que l'angle ΖΕΓ soit égal au tiers d'un angle droit ; le rapport de ΕΖ à ΖΓ est donc égal au rapport[4] de 306 à 153, et le rapport de ΕΓ à ΓΖ est égal au rapport de 265 à 153. Bissectons l'angle ΖΕΓ par ΕΗ ; dès lors ΖΕ est à ΕΓ comme ΖΗ est à ΗΓ, et par permutation et par composition. Il s'ensuit que la somme de ΖΕ et ΕΓ est à ΖΓ comme ΕΓ est à ΓΗ ; le rapport de ΓΕ à ΓΗ est ainsi supérieur au rapport de 571 à 153. Le rapport du carré sur ΕΗ au carré sur ΗΓ est donc égal au rapport de 349 450 à 23 409 ; par conséquent ΕΗ est à ΗΓ comme 591 1/8 est à 153.

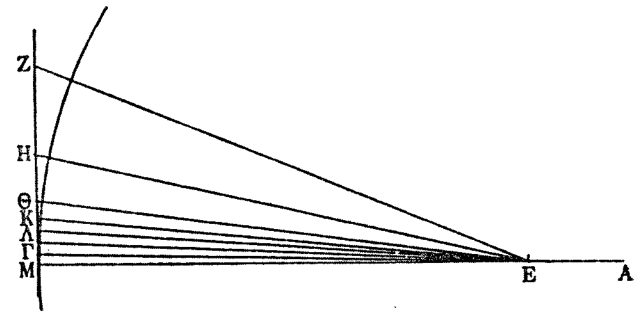


Fig. 64.

Bissectons de même l'angle ΗΕΓ par ΕΘ ; pour les mêmes raisons (sc. que plus haut), le rapport de ΕΓ à ΓΘ est donc supérieur au rapport de 1162 1/8 à 153 ; il s'ensuit que le rapport de ΘΕ à ΘΓ est supérieur au rapport de 1172 1/8 à 153. Bissectons encore l'angle ΘΕΓ par ΕΚ ; le rapport de ΕΓ à ΚΓ est donc supérieur au rapport de 2334 1/4 à 153. Bissectons encore l'angle ΚΕΓ par ΛΕ ; ΕΓ a donc à ΛΓ un rapport supérieur à celui de 4673 ½ à 153. Du moment donc que l'angle ΖΕΓ, égal au tiers d'un angle droit, a été bissecté quatre fois, l'angle ΛΕΓ est la 48e partie d'un angle droit. Donnons-nous un angle ΓΕΜ égal à ΛΕΓ de même sommet Ε[1] ; l'angle ΛΕΜ est ainsi la 24e partie d'un angle droit ; il s'ensuit que le segment de droite ΛΜ est un côté du polygone circonscrit au cercle ayant 96 côtés. Puisque, donc, on a démontré que le rapport

γʹ.

Παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἔτι ὑπερέχει ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει τῆς διαμέτρου, μείζονι δὲ ἢ δέκα ἑβδομηκοστομόνοις.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ καὶ κέντρον τὸ Ε καὶ ἡ ΓΛΖ ἐφαπτομένη καὶ ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΕΖ ἄρα πρὸς ΖΓ λόγον ἔχει, ὃν τϛ πρὸς ρνγ, ἡ δὲ ΕΓ πρὸς [τὴν] ΓΖ λόγον ἔχει, ὃν σξε πρὸς ρνγ. Τετμήσθω οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ δίχα τῇ ΕΗ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΓ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΓ [καὶ ἐναλλὰξ καὶ συνθέντι]. Ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΖΕ, ΕΓ πρὸς ΖΓ, ἡ ΕΓ πρὸς ΓΗ· ὥστε ἡ ΓΕ πρὸς ΓΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ φοα πρὸς ρνγ. Ἡ ΕΗ ἄρα πρὸς ΗΓ δυνάμει λόγον ἔχει, ὃν $\overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}}$,θυν πρὸς $\overset{\beta}{\mathrm{M}}$,γυθ· μήκει ἄρα, ὃν φϙα ηʹ πρὸς ρνγ. Πάλιν δίχα ἡ ὑπὸ ΗΕΓ

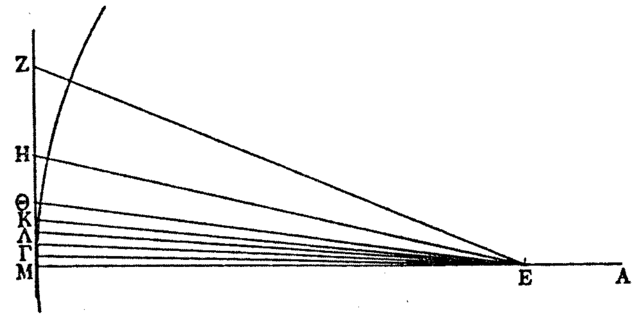


Fig. 64.

τῇ ΕΘ· διὰ τὰ αὐτὰ ἄρα ἡ ΕΓ πρὸς ΓΘ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αρξβ ηʹ πρὸς ρνγ· ἡ ΘΕ ἄρα πρὸς ΘΓ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αροβ ηʹ πρὸς ρνγ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΕΓ τῇ ΕΚ· ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,βτλδ δʹ πρὸς ρνγ· ἡ ΕΚ ἄρα πρὸς ΓΚ μείζονα ἢ ὃν ,βτλθ δʹ πρὸς ρνγ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΕΓ τῇ ΛΕ· ἡ ΕΓ ἄρα πρὸς ΛΓ μείζονα [μήκει] λόγον ἔχει ἤπερ τὰ ,δχογ ∠ʹ πρὸς ρνγ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΖΕΓ τρίτου οὖσα ὀρθῆς τέτμηται τετράκις δίχα, ἡ ὑπὸ ΛΕΓ ὀρθῆς ἐστι μηʹ. Κείσθω οὖν αὐτῇ ἴση πρὸς τῷ Ε ἡ ὑπὸ ΓΕΜ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΛΕΜ ὀρθῆς ἐστι κδʹ. Καὶ ἡ ΛΜ ἄρα εὐθεῖα τοῦ περὶ τὸν κύκλον ἐστὶ πολυγώνου πλευρὰ πλευρὰς ἔχοντος ϙϛ. Ἐπεὶ οὖν ἡ ΕΓ πρὸς τὴν de ΕΓ à ΓΔ est supérieur au rapport de 4673 ½ à 153, que ΑΓ est le double de ΕΓ et ΑΜ le double de ΓΛ, le rapport de ΑΓ au périmètre du polygone de 96 côtés est supérieur au rapport de 4673 ½ à 14688. Et 14688 est le triple de 4673 ½, avec un reste de 667 ½, qui est inférieur à la 7e partie de 4673 ½ ; par conséquent le (sc. périmètre du) polygone circonscrit au cercle est inférieur au triple du diamètre augmenté d'une partie du diamètre supérieure au septième. A plus forte raison[1] donc le périmètre du cercle est inférieur au triple du diamètre augmenté de plus d'un septième.

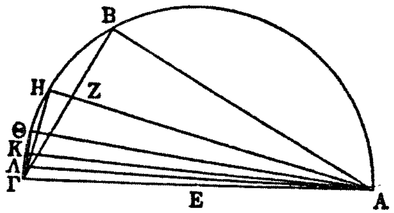


Fig. 65.

Soit un cercle, ΑΓ le diamètre, l'angle ΒΑΓ égal à la troisième partie d'un angle droit ; le rapport de ΑΒ à ΒΓ est donc inférieur au rapport de 1351 à 780, et le rapport de ΑΓ à ΓΒ est égal au rapport de 1560 à 780. Bissectons l'angle ΒΑΓ par ΑΗ. Du moment donc que l'angle ΒΑΗ est égal à l'angle ΗΓΒ[2] et aussi à l'angle ΗΑΓ, l'angle ΗΓΒ est aussi égal à l'angle ΗΑΓ. L'angle droit ΑΗΓ étant en commun[3], le troisième angle ΗΖΓ est égal au troisième angle ΑΓΗ[4]. Il s'ensuit que le triangle ΑΗΓ est équiangle au triangle ΓΗΖ ; ΑΗ est donc[5] à ΗΓ comme ΓΗ est à ΗΖ et comme ΑΓ est à ΓΖ. Mais ΑΓ est à ΓΖ aussi comme la somme de ΓΑ et ΑΒ est à ΒΓ[6], et par conséquent la somme de ΒΑ et ΑΓ est à ΒΓ comme ΑΗ est à ΗΓ. Pour ces

ΓΛ ἐδείχθη μείζονα λόγον ἔχουσα ἤπερ ,δχογ L' πρὸς ρνγ, ἀλλὰ τῆς μὲν ΕΓ διπλῆ ἡ ΑΓ, τῆς δὲ ΓΛ διπλασίων ἡ ΛΜ, καὶ ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς τὴν τοῦ ϟϛ γώνου περίμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ,δχογ L' πρὸς Μ ,δχπη. Καί ἐστιν τριπλασία, καὶ ὑπερέχουσιν χξζ L', ἅπερ τῶν ,δχογ L' ἐλάττονά ἐστιν ἢ τὸ ἕβδομον· ὥστε τὸ πολύγωνον τὸ περὶ τὸν κύκλον τῆς διαμέτρου ἐστὶ τριπλάσιον καὶ ἐλάττονι ἢ τῷ ἑβδόμῳ μέρει μεῖζον· ἡ τοῦ κύκλου ἄρα περίμετρος πολὺ μᾶλλον ἐλάσσων ἐστὶν ἢ τριπλασίων καὶ ἑβδόμῳ μέρει μείζων.

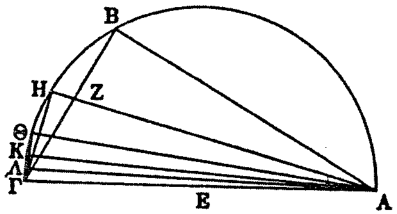


Fig. 65.

Ἔστω κύκλος καὶ διάμετρος ἡ ΑΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΒΑΓ τρίτου ὀρθῆς· ἡ ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,ατνα πρὸς ψπ [ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΒ, ὃν ,αφξ πρὸς ψπ]. Δίχα ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ΑΗ. Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΗ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ, ἀλλὰ καὶ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ, καὶ ἡ ὑπὸ ΗΓΒ τῇ ὑπὸ ΗΑΓ ἐστὶν ἴση. Καὶ κοινὴ ἡ ὑπὸ ΑΗΓ ὀρθή· καὶ τρίτη ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΖΓ τρίτῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΗ ἴση. Ἰσογώνιον ἄρα τὸ ΑΗΓ τῷ ΓΗΖ τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΖ καὶ ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ. Ἀλλ' ὡς ἡ ΑΓ πρὸς ΓΖ, [καὶ] συναμφότερος ἡ ΓΑΒ πρὸς ΒΓ· καὶ ὡς συναμφότερος ἄρα ἡ ΒΑΓ πρὸς ΒΓ, ἡ ΑΗ πρὸς ΗΓ. Διὰ raisons, le rapport de ΑΗ à ΗΓ est donc inférieur au rapport de 2911 à 780, et le rapport de ΑΓ à ΓΗ est inférieur au rapport de 3013 1/2+1/4 à 780. Bissectons l'angle ΓΑΗ par ΑΘ ; pour les mêmes raisons que plus haut le rapport de ΑΘ à ΘΓ est inférieur au rapport de 5924 1/2+1/4 à 780 ou de 1823 à 240 ; car chacun des termes (sc. du dernier rapport) est les 4/13 du terme (sc. correspondant du premier rapport) ; le rapport de ΑΓ à ΓΘ est donc inférieur au rapport de 1838 9/11 à 240. Bissectons aussi l'angle ΘΑΓ par ΚΑ. Le rapport de ΑΚ à ΚΓ est inférieur au rapport de 1007 à 66, puisque des seconds termes chacun vaut les 11/40 d'un autre nombre ; le rapport de ΑΓ à ΚΓ est donc inférieur à celui de 1009 1/6 à 66. Bissectons encore l'angle ΚΑΓ par ΛΑ ; le rapport de ΑΛ à ΛΓ est donc inférieur au rapport de 2016 1/6 à 66, le rapport de ΑΓ à ΓΛ est inférieur au rapport de 2017 1/4 à 66. Inversement donc le rapport du périmètre du polygone au diamètre est supérieur au rapport de 6336 à 2017 1/4 et 6336 est supérieur au produit de 3 10/71 par 2017 1/4. Il s'ensuit que le périmètre du polygone de 96 côtés inscrit dans le cercle est supérieur au triple du diamètre augmenté de 10/71 ; à plus forte raison[1] donc le (sc. périmètre du) cercle est supérieur au triple du diamètre augmenté de 10/71.

Le rapport du périmètre au diamètre est donc inférieur à 3 1/7 et supérieur à 3 10/71.

τοῦτο οὖν ἡ ΑΗ πρὸς [τὴν] ΗΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ βϡια πρὸς ψπ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΗ ἐλάσσονα ἢ ὃν ,γιγ ∠′ δ′ πρὸς ψπ. Δίχα ἡ ὑπὸ ΓΑΗ τῇ ΑΘ· ἡ ΑΘ ἄρα διὰ τὰ αὐτὰ πρὸς τὴν ΘΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν ,εϡκδ ∠′ δ′ πρὸς ψπ ἢ ὃν ,αωκγ πρὸς σμ· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας δ ιγ′· ὥστε ἡ ΑΓ πρὸς τὴν ΓΘ ἢ ὃν ,αωλη θ ια′ πρὸς σμ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΘΑΓ τῇ ΚΑ· καὶ ἡ ΑΚ πρὸς τὴν ΚΓ ἐλάσσονα [ἄρα] λόγον ἔχει ἢ ὃν ,αζ πρὸς ξϛ· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας ια μ′. Ἡ ΑΓ ἄρα πρὸς [τὴν] ΚΓ ἢ ὃν ,αθ ϛ′ πρὸς ξϛ. Ἔτι δίχα ἡ ὑπὸ ΚΑΓ τῇ ΛΑ· ἡ ΑΛ ἄρα πρὸς [τὴν] ΛΓ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἢ ὃν τὰ βιϛ ϛ′ πρὸς ξϛ, ἡ δὲ ΑΓ πρὸς ΓΛ ἐλάσσονα ἢ τὰ ,βιζ δ′ πρὸς ξϛ. Ἀνάπαλιν ἄρα ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ,ϛτλϛ πρὸς ,βιζ δ′, ἅπερ τῶν ,βιζ δ′ μείζονά ἐστιν ἢ τριπλασίονα καὶ δέκα οα′· καὶ ἡ περίμετρος ἄρα τοῦ ϟϛγώνου τοῦ ἐν τῷ κύκλῳ τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ῑ οα′· ὥστε καὶ ὁ κύκλος ἔτι μᾶλλον τριπλασίων ἐστὶ καὶ μείζων ἢ ῑ οα′.

Ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ ῑ οα′ μείζων.

BIBLIOGRAPHIE

Sur le nombre π :

Numéro spécial π	Supplément au petit Archimède	A.D.C.S. C61 Rue St Fuscien, 80000 AMIENS

Sur les approximations

Leçons d'à peu près	G. Th. Guilbaud	BOURGEOIS

Sur l'histoire des mathématiques

Mathématiques au fil des âges	I.R.E.M. Groupe Epistémologie et Histoire	GAUTHIER-VILLARS
Routes et Dédales une histoire des mathématiques	J. Peiffer A. Dahan-Dalmedico	POINTS - SCIENCE SEUIL
Mathématiques et Mathématiciens	P. Dedron J. Itard	MAGNARD

Sur les algorithmes

Mathématique élémentaire d'un point de vue algorithmique	A. Engel	CEDIC

LE SECRET DES LONGITUDES
ET LE PENDULE CYCLOIDAL DE HUYGENS

Evelyne BARBIN
IREM du Mans

> "Quant à l'utilité de mon invention, il n'est pasnécessaire, PuissantRoi, queje me serve de beaucoup de paroles pour la faire voir (...). Tu n'ignorespas les usages plus spéciaux auxquels je la destinais dès le commencement. Je veux parler des services qu'elle peut rendre tant dans les observations célestes que dans la mesure des longitudes des différents lieux pour les navigateurs (...) nous voyons que ce qui te plait le mieux c'est ce qui a le plus d'utilité publique".
>
> Dédicace de Huygens à Louis XIV Le Grand(1)

En 1656, le savant hollandais Christian Huygens cherche comment adapter un pendule pour réguler la marche des horloges, et il constate que pour obtenir l'isochronisme du pendule, il suffit de le faire balancer entre deux lames recourbées de métal. Trois ans plus tard, il découvre qu'en fait, ces lames doivent avoir exactement la forme de deux demi-cycloïdes. Cette invention va le rendre célèbre dans toute l'Europe car elle lui permet de prétendre à la résolution du fameux problème des longitudes, tant espérée par les marins, les marchands et les pouvoirs. Un contemporain s'extasie devant le "merveilleux talent" de Huygens "pour les mathématiques en ce qu'elles sont utiles à la société"(2). Nous voici devant l'un de ces miracles où l'on voit les mathématiques se développer dans un cadre strictement théorique et s'appliquer soudain, comme par magie, à un domaine éloigné en révélant toute leur bénéfique utilité ! Le but de cette étude est de remédier à cette vision naïve de l'histoire des sciences(3), en cherchant à comprendre dans quelles circonstances et selon quelle démarche Huygens a inventé le pendule cycloïdal et construit la théorie des développées.

I) LES VOYAGES EN MER : LE PROBLEME DES LONGITUDES

Dans son étude sur la naissance du capitalisme, l'historien Fernand Braudel montre que l'on assiste, indéniablement, au XVIIème siècle, à une mobilisation de capitaux et d'activités dans le secteur des grands voyages maritimes. Il voit dans le commerce lointain une condition nécessaire au développement du processus capitaliste. "Les conditions préalables à tout capitalisme dépendent de la circulation, on pourrait presque dire, à première vue, d'elle seule. Et plus cette circulation franchit d'espace, plus elle est fructueuse". Le faim d'or, ou faim du monde ou faim des épices, comme l'appellent les historiens, va s'accompagenr dans le domaine technique "d'une recherche constante de nouveautés et d'applications utilitaires"(4).

1) Le développement des voyages et les problèmes de navigation

L'expansion du commerce maritime au XVIIème siècle va de pair avec la fondation et l'organisation des premiers empires coloniaux et la création de comptoirs commerciaux. Cette expansion fait la richesse d'un tout petit pays, les Provinces Unies. Le véritable outil de la fortune hollandaise est sa flotte qui équivaut à celle de l'ensemble des autres flottes européennes. Le port d'Amsterdam, qu'occupent deux à huit mille vaisseaux est toujours plein à craquer. Au XVIème siècle, déjà, les navires hollandais assurent, de manière majoritaire, les trafics entre le Nord et les ports d'Espagne et du Portugal. Il se saisissent ensuite du trafic entre la péninsule ibérique et l'Atlantique Nord, puis on les trouve dans le reste de l'Europe, en Méditerranée, en Inde, au Japon(5). En 1602, est créée la Compagnie des Indes orientales -Siam, Chine, Japon-, puis en 1621 ce sera le tour de la Compagnie des Indes occidentales.

Le succès hollandais constitue un cauchemar pour Richelieu, puis pour Colbert. "Bien que cette nation ne retire de son pays que du beurre et du fromage, elle fournit presque à tout le reste de l'Europe la plus grande partie de ce qui est nécessaire. La navigation l'a rendue si célèbre, si puissante par toutes les parties du monde, qu'après s'être rendue maîtresse du commerce aux Indes orientales au préjudice des Portugais (...) elle ne donne pas peu d'affaires aux Espagnols dans les Indes occidentales, où elle occupe la plus grande partie du Brésil" écrit Richelieu dans son Testament politique. Les Français créeront des Compagnies de Commerce -les Compagnies des Indes-et les comptoirs de Pondichéry et de Chandernargor. L'entrepôt de Québec est créé en

Vue d'une rade hollandaise(6)

1608 et, en 1635, les Français s'installent aux Antilles vers lesquelles cinglent deux cent bateaux par an.

Les voyages vers les Indes occidentales supposent que les marins osent "s'engoulfer" contrairement à l'habitude, tenace au XVIIème siècle, de s'éloigner le moins possible des côtes. C'est que la navigation en haute mer demande que l'on sache convenablement faire le point, trouver longitude et latitude du bateau. La détermination de la latitude du bateau s'obtient en calculant, à l'aide d'un astrolabe par exemple, la hauteur du soleil au dessus de l'horizon. "La méthode ordinaire dont se servent les pilotes pour trouver leurs latitudes, consiste en deux choses, savoir est, dans la hauteur méridienne du soleil ou des étoiles qu'ils observent avec des instruments construits pour cet effet, puis ensuite ajoutant ou soustrayant de cette hauteur méridienne qu'ils ont trouvée la déclinaison du soleil ou des étoiles, qui est ce qu'elles sont éloignées de la ligne"(7). Cependant les mouvements du bâtiment ne permettent guère une bonne visée et une lecture correcte, ce qui entraîne des erreurs allant jusqu'à plusieurs centaines de milles. Quant à la longitude, il n'existe aucun moyen simple de l'évaluer. Aussi le navigateur n'a guère d'autre recours que de tenir compte de la route suivie -à l'aide d'une boussole- et de la distance parcourue à l'aide d'un loc(8). Ces deux indications lui permettent, à l'aide de la métrique du triangle rectangle, de calculer longitude et latitude. Le trésor de la navigation, proposé en 1673 par le Sieur Blondel St Aubin, enseigne "l'Art de naviguer par la supputation et démonstration des triangles rectilignes et sphériques, tant par les sinus que par les logarithmes". Il y montre, par exemple, comment "le rumb, ou ai de vent, et le chemin étant donnés, trouver la différence en latitude, et la différence en longitude"(9). Cette méthode fruste donnait de bien mauvais résultats, au désespoir des navigateurs : "Si la nature nous avait donné des moyens de trouver la longitude aussi assurés, que nous avons pour trouver la latitude, l'Art de Naviguer serait dans toute sa perfection, et jamais sinon par des tempêtes furieuses, il ne se perdrait de navires[10]. Celui qui percerait le secret des longitudes mériterait forte récompense, car que de cargaisons perdues et de fortunes gaspillées.

Les pouvoirs ont pris conscience de la puissance que confère la navigation et sont les premiers à promettre cette récompense. Le Stathouder de Hollande promet un prix de 25 000 florins à celui qui indiquerait une méthode susceptible de servir à la navigation. Ce prix encouragea Galilée à déterminer, par les observations célestes, les éléments des orbites des satellites[11]. La correspondance de Huygens nous apprend que "le Cardinal de Richelieu ayant

promis une notable récompense à quiconque trouverait le secret des longitudes, fit donner à l'ignorant Morin qui se vantait d'en être venu à bout, une pension de deux mille francs sur l'abbaye de Chailli"[12]. L'enjeu est tel que toutes les nations et tous les beaux esprits se mettent sur les rangs. "Ce qui fait que ce n'est pas de merveille si dans la conséquence qu'est la Navigation pour le bien public, toutes les nations ont proposé des récompenses très considérables pour celui qui aura tant de bonheur, non seulement à en donner les connaissances (de la longitude), mais encore de les réduire en pratique (...). Quantité de beaux esprits se sont étudiés à chercher des moyens de la trouver, attirés, soit par la vue de la récompense proposée, ou par l'honneur et l'utilité que le public en recevrait"[13]. Le lieu du premier méridien est objet de décision royale : "Louis XIII, d'heureuse mémoire, par un arrêt de 1638, pour ôter de la confusion de la diversité des longitudes dans les cartes de premiers méridiens, enjoint à tous ceux de sa domination qui en bâtissent, de poser leur premier méridien à l'île de Fer, la plus ouest des îles Canaries". Mais cette décision n'est pas suivie, loin de là, par tous : "La plupart des cartes hollandaises le posent au pic des Canaries par une fort haute montagne que l'on découvre de 30 à 40 lieues sur l'île de Ténériffe"[14]. D'autres le placent aux Açores. En 1675, Charles II d'Angleterre décide la fondation de l'Observation de Greenwich "en vue de la détermination des longitudes dans l'intérêt de la navigation et de l'astronomie", et nomme Flamsteed "Astronome royal", avec un traitement de 100 livres par an, dans le but de faire toutes "observations utiles à la navigation et à l'astronomie"[15]. Toutes ces résolutions et ces gratifications attisent l'imagination et l'ardeur des savants. "L'importance de cette recherche, et les récompenses qui ont été proposées pour ceux qui découvriraient une méthode sûre de pouvoir trouver, à quelques lieux près, la longitude d'un navire, au moins de temps en temps, ont fait imaginer divers moyens"[16]

2) <u>La détermination des longitudes</u>

Le premier principe qui se présente à l'esprit pour déterminer la longitude, est celui de comparer l'heure locale, à bord du bateau, à celle du méridien d'origine ou à celle du port d'attache. Pour cela il y a deux procédés : soit transporter cette heure sur le bateau avec une horloge, soit observer les mouvements célestes de sorte à obtenir un indicateur du temps. Dans ses <u>Principes de Navigation</u>, Dulague rappelle les motifs de cette alternative[17] :

"On peut réduire l'invention des longitudes sur mer à cette question, connaissant l'heure qu'il est sur le navire, trouver quelle heure on doit compter au même instant en un lieu dont la longitude est bien connue. Puisque les 24 heures du jour répondent aux 360 degrés de longitude, et que le lieu où l'on compte une heure de moins que dans une autre, est plus occidental que cet autre de 15 degrés, etc, on pourrait donc déterminer immédiatement les longitudes :

1°) Si l'on avait une horloge qui marchât si uniformément, qu'elle ne se dérangeât pas sensiblement dans la durée entière d'une traversée ; car ayant réglé cette horloge dans le port, et l'ayant mise à l'heure vraie au temps du départ, elle servirait à faire connaître à tout instant l'heure vraie qu'il serait dans le port, et autant de fois 4 minutes que l'on trouverait qu'elle retarderait ou avancerait à l'égard de l'heure qu'on aurait observé sur le navire (...) on compterait que le Navire aurait fait autant de degrés en longitude vers l'Est et vers l'Ouest, puisque l'on compterait moins ou plus de temps au lieu de départ, qu'au lieu où serait le navire.

2°) On pourrait encore trouver la longitude d'un navire, si l'on avait des Tables astronomiques, qui servissent à calculer pour un certain lieu déterminé, dont la longitude fut bien connue, toutes les circonstances des mouvements célestes, avec à peu près la même précision avec laquelle un astronome placé dans ce lieu les observerait, et si sur un navire on pouvait marquer le temps précis, auquel quelque phénomène céleste paraîtrait subitement ; car en comparant le temps auquel l'observation en aurait été faite sur le navire, avec le temps que le calcul des Tables donnerait pour le lieu que nous avons dit, la différence de ces temps donnerait la différence des longitudes, et par conséquent on aurait la longitude du Navire"(18).

Parmi les phénomènes célestes que le navigateur peut observer, il y a les éclipses de Soleil et de Lune -mais elles arrivent trop rarement- et les éclipses des étoiles et des planètes par la Lune -mais elles réclament de puissantes lunettes. Les éclipses des satellites de Jupiter fournissent une méthode commode pour observer les longitudes, en tous cas sur terre. Elles ont permis, à

l'époque, de déterminer la plupart des positions des lieux en longitude, et elles ont l'avantage d'être fréquentes, puisqu'hormis deux mois dans l'année on peut en observer presque toutes les nuits. Faute d'autres phénomènes célestes fréquents, le navigateur se trouve obligé d'avoir recours aux mouvements de la Lune, en observant la hauteur de la Lune ou sa distance aux étoiles voisines. Cette méthode est connue depuis longtemps puisqu'en 1499, lors de son premier voyage, Americo Vespucci fit le point par la mesure de la distance de Mars à la Lune, peu après une de leurs conjonctions(19). Le cosmolabe est un instrument construit par Besson en 1567 pour déterminer les longitudes par l'observation des distances de la Lune aux étoiles, le problème du mouvement de la mer est résolu en fabriquant une chaise marine -machine suspendue comportant une table pour l'instrument et une chaise pour l'observateur(20). En 1658 paraissent les tables du Comte de Pagan qui permettent de "trouver facilement les longitudes" à partir de la hauteur de la Lune et de la distance d'une étoile à la Lune. Au XVIIIème ciècle, de tous les moyens astronomiques propres à déterminer la longitude en mer, la mesure des distances de la Lune au Soleil ou aux étoiles reste le plus fréquemment utilisé(21).

La résolution du problème des longitudes par le moyen des observations célestes nécessite à la fois de bonnes tables astronomiques, des instruments d'observation précis et le moyen de faire commodément de telles observations sur le pont d'un navire. Aussi les navigateurs ont-ils depuis longtemps fondé de grandes espérances dans l'horlogerie. Dès 1530, Gemma Frisius propose de résoudre le problème des longitudes par la mesure du temps ou les horloges. Dans L'art de naviguer dans sa plus haute perfection publié en 1673 par Denys, l'auteur appelle de tous ses voeux l'horloger capable de fabriquer des pendules précises transportables sur mer :

> "Si le ciel jusques à présent ne nous a pu donner ce rare présent (le secret des longitudes), les horlogers faisant des horloges justes, y réussiraient bien plus heureusement, et rendraient la chose bien plus facile, puisque sans supputation qui est toujours embarrassante, l'on trouverait en un moment ce que l'on cherche. J'avoue que l'on voit par expérience que les horlogers participant à la qualité du temps, ne nous le peuvent donner précisément, à raison de leur retardement ou de leur avance, suivant que le temps sera humide ou sec, mais si les pendules dont l'on vante tant la justesse, se pouvaient ajuster sur mer, ce que l'on ne croit pas impossible, je ne désespérais pas que l'on n'en pût venir à bout (...). D'où je conclus que si Dieu donne bénédiction aux pendules, particulièrement sur mer, comme l'on éprouve sur la terre, il y a sujet d'espérer d'en tirer un grand fruit pour la Navigation du fait de la longitude"(22).

L'année de la parution du traité de Denys, Huygens publie son Horologium Oscillatorium dans lequel il prétend répondre aux attentes des navigateurs.

II) LA DEMARCHE DE HUYGENS

Le chemin qui conduit Christian Huygens de l'intérêt pour le mouvement du pendule en 1646 à l'édification de la théorie des développées quelque vingt ans plus tard est particulièrement intéressant à suivre. Nous y découvrons peut être le savant type de cette fin du XVIIème siècle : curiosité pour les grands problèmes de son époque, soif d'inventer, ingéniosité technique, intérêt pour l'étude des mouvements, savoir-faire d'un géomètre astucieux et souci de la gloire et de la fortune.

1) L'adaptation du pendule à l'horloge.

Dans son Histoire de la Mesure du Temps par les Horloges publiée en 1802, Ferdinand Berthoud estime fort ancien l'usage du pendule pour la mesure du temps : "Plusieurs astronomes se sont servis du pendule, pour leurs observations, longtemps avant qu'il fût appliqué à l'horlogerie, d'où l'on peut conclure que, dans l'application du pendule à l'horloge, l'auteur de cette application célèbre n'a rien inventé (...). Les arabes mesuraient les plus petites parties du temps par des clepsydres, par de grands cadrans solaires, ou par des pendules"(23). Le suisse Juste Birge, né en 1552, aurait appliqué le pendule aux horloges sans faire connaître cette trouvaille à ses contemporains. D'après son élève Viviani, Galilée aurait remarqué l'isochronisme

des vibrations du pendule dès 1583 dans le dôme de Pise, l'aurait employé dans ses observations célestes et il aurait également eut l'idée, en 1641, d'appliquer cette propriété à la correction des horloges(24). Il semble que ce fut le fils de Galilée, Vincentio Galilée, qui ait mis en pratique la découverte de son père, en 1649, en appliquant un pendule au mouvement de l'horloge(25). L'isochronisme du pendule fut connu, par l'intermédiaire de Mersenne, de plusieurs savants dès 1631. Dans les Discours concernant deux sciences nouvelles de 1637, Galilée semble admettre qu'un pendule "accomplit vraiment et avec exactitude toutes les oscillations grandes, moyennes et petites en des temps parfaitement égaux". Cependant les contemporains s'aperçurent rapidement que l'isochronisme du pendule pour des vibrations de différentes amplitudes n'est qu'approximatif.

A partir de 1646, Huygens s'intéresse à la théorie du pendule, mais il ne semble s'être occupé d'horloges que dix ans plus tard. La marche des horloges est irrégulière à cause de l'influence des saisons, du manque d'égalité des dents des roues et de la variation du poids moteur pendant la marche. Huygens peut espérer corriger ces trois défauts par l'adaptation d'un pendule, à condition de rendre la période des vibrations complètement indépendante de leurs amplitudes. Pour obtenir cet isochronisme parfait, il a l'idée de munir le pendule de deux arcs -deux platines courbes- entre lesquels ont lieu les vibrations. Il raconte dans une lettre à P. Petit comment il est arrivé à concevoir cette trouvaille technique : "Mais je puis vous assurer, que tant s'en faut que l'addition du poids se fasse hâter le pendule, que au contraire elle le rend tant soit peu plus lent, lui donnant un mouvement plus large, tout ainsi que du simple pendule les corps qui s'éloignent le plus de la perpendiculaire sont plus lents que les autres, et même pour remédier à ce défaut contraire à celui que vous craigniez je suspendais au commencement le pendule entre deux platines
courbes AB, CD (fig. 1) que l'expérience m'apprit de quelle manière et combien je devais plier, pour égaler entre eux les corps les plus larges jusqu'aux plus menus. Et je me souviens d'avoir si

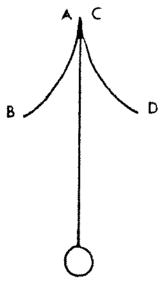


fig.1

bien ajusté deux horloges de cette façon qu'en trois jours il n'y eut jamais entre elles la différence de secondes quoique cependant j'en changeasse souvent les poids les rendant plus ou moins pesants"(26). Huygens présente sa première horloge à pendule aux Etats de Hollande le 16 Juin 1657. L'originalité de cette horloge à roues dentées est que le pendule, librement suspendu, règle le mouvement du mécanisme par l'intermédiaire de la fourchette.

Il est certain que Huygens a adapté le pendule aux horloges à roues dentées en premier lieu dans l'intérêt de l'astronomie et de la navigation. En juin 1658, il écrit qu'il est possible de déterminer les longitudes en mer au moyen d'horloges(27). Les horloges étant ballottées avec les mouvements du navire, il importait d'avoir un pendule dont les oscillations puissent être grandes et inégales sans que l'isochronisme soit altéré. Huygens poursuit donc avec ardeur ses investigations et découvre, en 1659, que les platines courbes doivent avoir exactement la forme de deux demi-cycloïdes. Il montre que la cycloïde possède deux propriétés qui font "qu'entre beaucoup d'autres belles propriétés elle a encore celle de réduire le mouvement des pendules à l'égalité en sorte que les grandes et petites vibrations d'un même pendule deviennent d'égale durée". Il s'en explique dans une lettre à Estienne de 1668 :

> "J'ai premièrement découvert et démontré cette propriété, que si dans un creux ou un canal qui ait cette forme de roulette ADB, dont les bouts A, B soient mis à égale hauteur, l'on laisse rouler une petite boule depuis le point G pris en quelque part que l'on voudra, elle arrivera toujours en même temps au point D, le plus bas et l'ayant passé, et retournant, continuera à faire des allées et venues toutes isochrones (fig. 2).

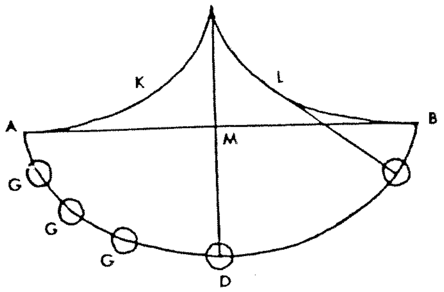


fig.2

L'autre propriété que j'ai trouvé est que joignant ensemble deux platines HKA, HLB qui aurait chacune la figure des demi-cycloïdes AGD, BD, en sorte que toute la hauteur HD devenue double de la hauteur de la cycloïde DM, la boule attachée au fil HD, en se pliant contre les platines HKA, HLB, parcourra avec son centre de gravité la roulette ADB, d'où il est aisé de voir que les vibrations d'un tel pendule doivent être isochrones aussi bien que les rouleaux de la boule GG desquels cela est démontré"(28).

Dans cette lettre, Huygens ne néglige pas de donner à son correspondant tous les détails techniques de son invention -la longueur précise du pendule, la composition du fil, la grandeur des roues dentées, les poids des plombs et de la verge- et il accompagne ses explications d'un croquis précis (fig. 3). Son invention est, en effet, le résultat à la fois d'une excellente maîtrise technique et d'une connaissance approfondie de la théorie du pendule et de la géométrie de la cycloïde. Comment Huygens en est-il arrivé à recourir à cette courbe pour résoudre son problème?

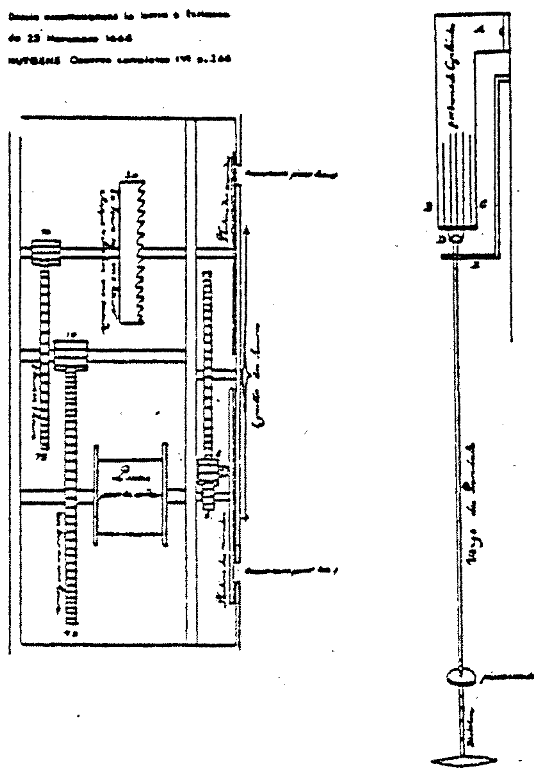


fig.3

Cette découverte intervient l'année suivant celle du fameux concours de Monsieur Dettonville, qui a remis à l'honneur chez tous les géomètres de l'Europe cette célèbre courbe, objet de nombreuses recherches depuis plus de vingt ans.

2) <u>Les travaux sur la cycloïde</u>

La cycloïde, ou trochoïde ou roulette, est une de ces "nouvelles" courbes qui incitent les mathématiciens du XVIIème siècle, mis au défi, à construire de "nouvelles" méthodes et leur servent aussi à tester et à comparer ces méthodes(29). Les "découvertes" concernant la cycloïde furent presque toutes l'objet de rivalités et de disputes de paternité, ce qui la fit appeler l'"Hélène des géomètres"(30).Les premiers travaux datent des années 1630-1640, quadrature et tangente, puis la courbe réapparaît en 1658 sous l'instigation de

Pascal qui écrit cette année là, pour calmer les passions, la première histoire de cette courbe intitulée "Histoire de la Roulette appelée autrement trochoïde ou cycloïde où l'on rapporte par quels degrés on est arrivé à la connaissance de la nature de cette ligne"(31).

Beaucoup se partagent déjà l'honneur d'avoir inventé cette courbe. Galilée écrit à Torricelli, en 1639, qu'il la considérait depuis une quarantaine d'années et l'avait même conseillée comme profil pour les arches d'un pont sur l'Arno(32). Wallis affirme que Nicolas de Cusa fut le premier, au XVème siècle, à avoir travaillé sur la cycloïde. Pascal dans son <u>Histoire de la Roulette</u> assure que le Père Mersenne fut le premier, en l'an 1615, à l'avoir remarquée en considérant le roulement des roues et qu'il la propose "à tous ceux de l'Europe qu'il en crut capables, et entre autres à Galilée". L'observation du roulement des roues a pu se faire à propos de la question du "paradoxe d'Aristote", beaucoup étudiée au XVIème siècle, qui est la suivante : deux cercles de diamètres différents, s'ils ont même centre et sont solidaires parcourent, en roulant -sans glisser- un même espace tandis que, s'ils sont séparés, ils parcourent des espaces proportionnels à leur diamètre. Cette question est analysée, en particulier, par Galilée dans la Première journée des <u>Discours concernant deux sciences nouvelles</u>(33).

Quoi qu'il en soit, Mersenne pose le problème de la quadrature de la cycloïde à Roberval en 1628. Quelques années plus tard, celui ci donne une solution en montrant, par la méthode des indivisibles(34), que l'aire sous la cycloïde est égale à trois fois celle du cercle générateur. En 1637, Mersenne fait connaître à ses correspondants, selon son habitude, le résultat de Roberval sans les raisons. Descartes et Fermat donnent, à leur tour, en Juillet 1638, deux nouvelles démonstrations. La recherche d'une méthode universelle -c'est-à-dire appliquable à toutes les courbes- pour trouver les tangentes est encore l'occasion, pour les géomètres, de s'intéresser à la cycloïde. Nous retrouvons sur les rangs les mêmes protagonistes. Roberval emploie la règle de la composition des mouvements élaborée en 1637, Descartes donne la solution à Mersenne en Août 1638 en assimilant le cercle à un polygône d'une infinité de côtés, Fermat utilise la méthode du maximum et du minimum. Pour appliquer cette méthode à la cycloïde, Fermat considère la "propriété spécifique" de cette courbe, à savoir que si R est un point de la cycloïde alors le segment RM est égal à l'arc de cercle MC (fig. 4).

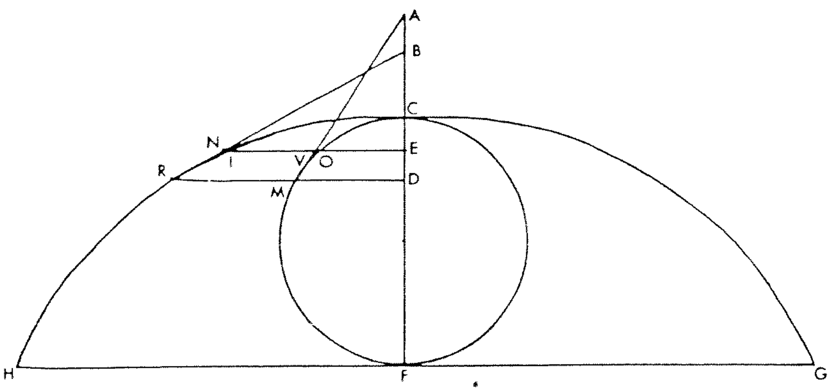
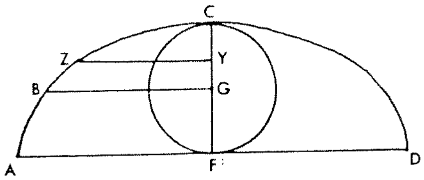


fig.4

Si RB est la tangente au point R, Fermat montre que les droites RB et MC sont parallèles. En Octobre 1646, l'inévitable Mersenne est en correspondance avec Huygens, il l'informe des récentes découvertes de Torricelli concernant les proportions qu'ont les solides de la cycloïde, engendrés par la rotation de cette courbe autour de la base ou de l'axe, avec les cylindres de même hauteur(35). Au début de l'année suivante, il l'entretient d'autres résultats dûs au même Torricelli(36). Grâce à Mersenne, Huygens est donc très au fait des travaux concernant la cycloïde.

Au début de l'année 1658, Pascal réfléchit sur la roulette et parvient à quelques démonstrations surprenantes, concernant les centres de gravité, qui le décident à lancer un concours. Au mois de Juin, Amos Dettonville -pseudonyme derrière lequel se cache Pascal- envoie une circulaire aux géomètres de toute l'Europe, à laquelle il doit être répondu avant le 1er Octobre 1658, à l'adresse de Monsieur de Carcavi, pour prétendre gagner les 40 pistoles du premier prix ou les 20 pistoles du second. Il s'agit de trouver l'aire CZY et son centre de gravité, les volumes et les centres de gravité des solides engendrés par la rotation de CZY autour de ZY et CY, et les centres de gravité des solides obtenus en coupant les précédents par un plan suivant CF (fig. 5). Dès le 28 Juin, Boulliau envoye la circulaire à Huygens : "Je vous envoie avec la présente

fig.5



une promesse faite par un inconnu à celui qui résoudra les problèmes qu'il propose, s'il vous plaît d'y travailler il y a des pistoles à gagner"(37). Huygens va donc pouvoir exercer ses talents de géomètre et s'évertuer à trouver de nouvelles propriétés de la cycloïde. Dans son Histoire de la roulette publiée en Octobre 1658, Dettonville-Pascal, soucieux de rendre à César ce qui lui appartient, mentionne parmi les belles choses qu'il a reçues celle de "M. Huygens, Hollandais, qui a le premier produit que la portion de la roulette retranchée par l'ordonnée de l'axe, menée du premier quart de l'axe du côté du sommet, est égale à un espace rectiligne donné"(38). En Novembre 1658, le Récit de l'examen et des jugements apprend que les prix n'ont point été gagnés parce que personne n'a donné la véritable solution des problèmes, et en Décembre 1658, dans la lettre de M. Dettonville à M. de Carcavi, Pascal peut enfin donner ses magistrales démonstrations. Huygens est tenu au courant des différentes péripéties de l'affaire grâce à son ami Boulliau.

Parmi les réponses, en quelque sorte hors sujet, qu'à reçues Pascal, il en est une qui frappe l'attention des mathématiciens, et en particulier Huygens. Pascal lui réserve ses louanges dans l'Histoire de la Roulette : "Mais entre tous les écrits qu'on a reçus de cette sorte, il n'y a rien de plus beau que ce qui a été envoyé par M. Wren, car outre la belle manière qu'il donne de mesurer le plan de la Roulette, il a donné la comparaison de la ligne courbe même et de ses parties avec la ligne droite. Sa proposition est que la ligne de la Roulette est quadruple de son axe, dont il a envoyé l'énonciation sans démonstration. Et comme il est le premier qui l'a produite, c'est sans doute à lui que l'honneur de la première invention en appartient". La rectification -c'est-à-dire la construction d'une ligne droite de même longueur- de la cycloïde n'était pas au concours, heureusement car elle est venue d'Angleterre en Août 1658, alors que Pascal ne la possédait pas(39). Il semble que la rectification d'une courbe ait déjà été donnée par un autre anglais, Guillaume Neil, mais que cette découverte n'ait traversé la Manche(40). Huygens, dans une lettre à M. de Carcavi datée du 16 Janvier 1659, nous apprend qu'il a travaillé sur cette question, puis a abandonné, mais il écrit : "Maintenant j'y suis retourné à cause de l'invention de Wren, qui rendra la courbe illustre, excellente, parce qu'elle est la première courbe et peut-être la seule qui puisse être rectifiée(41). Pourquoi cette surprise ? Tout indique que les géomètres de cette première moitié du siècle ont un préjugé selon lequel "c'est une loi et un ordre de la nature", pour utiliser l'expression de Fermat (42), que l'on ne puisse rectifier les courbes. Dans La géométrie, Descartes a rejeté l'idée de comparer courbes et droites : "la proportion qui est entre les droites et les courbes n'étant pas connue, et même je crois ne le pouvant être par les hommes"(43). Pascal, remis de ses émotions, éprouve sa méthode et va plus loin que Wren en donnant les rectifications de toutes les cycloïdes, allongées ou raccourcies. A la demande de Huygens, il envoie au Hollandais en Février 1659 "la dimension de toutes les cycloïdes"(44).

En Janvier 1659, Huygens annonce à Monsieur de Carcavi que la découverte de Wren l'incite à se remettre au problème de la cycloïde, et à la fin de l'année, il tient les deux propriétés de la cycloïde qui lui permettent de connaître entièrement la forme des lames recourbées de son horloge. La deuxième propriété est que la courbe décrite par le poids d'un pendule se balançant entre deux demi-cycloïdes est une cycloïde. Or cette propriété, comme le souligne Huygens dans l'Horologium oscillatorium, permet d'obtenir immédiatement en corollaire le résultat de Wren.

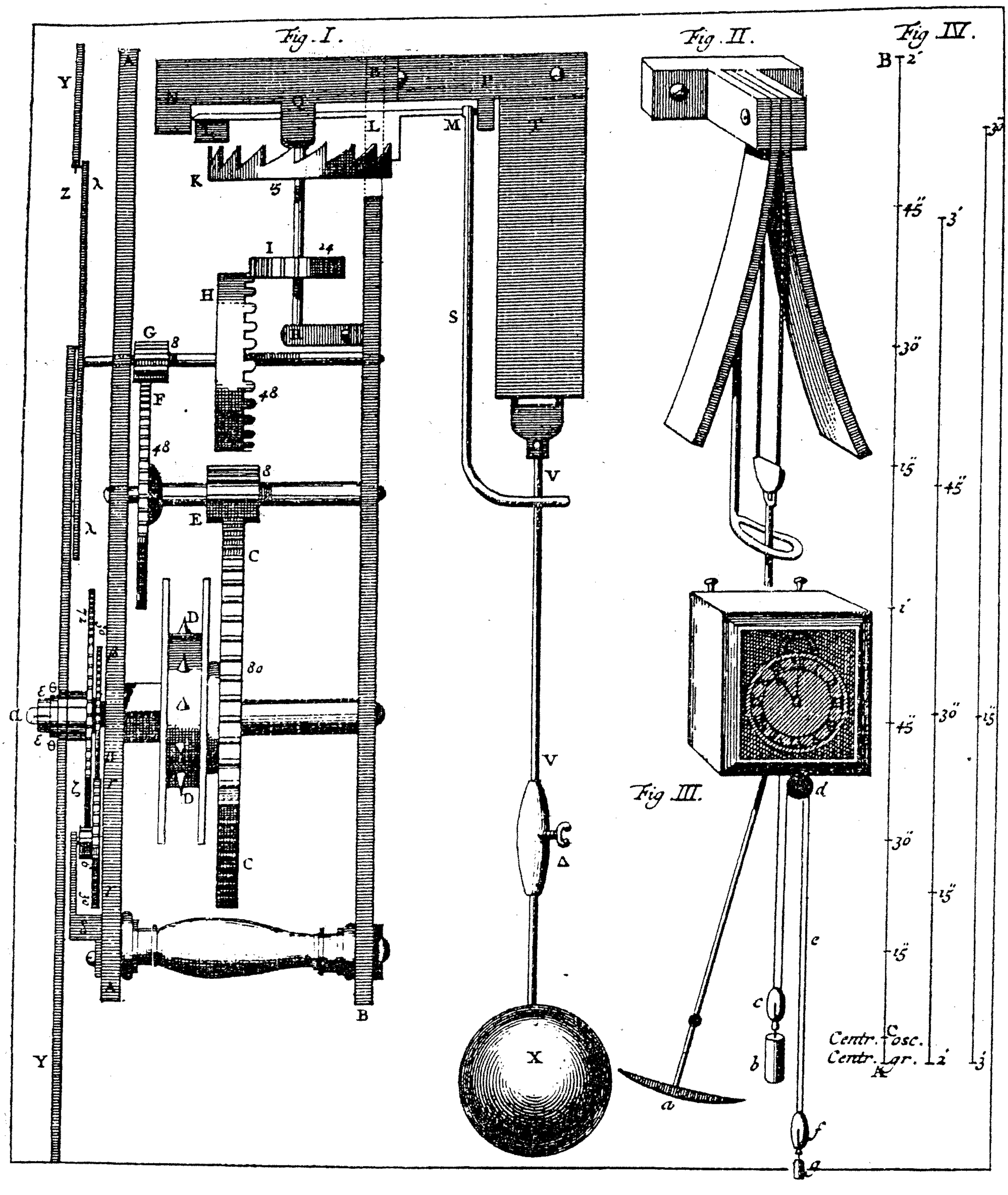
III) HOROLOGIUM OSCILLATORIUM

l'Horologium oscillatorium, publié en 1673, comporte cinq parties : I) Description de l'horloge, II) De la chute et des mouvements des graves sur une cycloïde, III) De l'évolution et de la dimension des lignes courbes, IV) Du centre d'oscillation ou d'agitation, V) De la construction d'une autre horloge à pendule circulaire et théorèmes sur la force centrifuge(45). Cet ouvrage représente, en quelque sorte, l'apogée des méthodes pratiquées au XVIIème siècle, et qui seront oubliées à la fin de ce siècle avec l'introduction du calcul infinitésimal par Leibniz et Newton(46). Huygens utilise des réductions par l'absurde à la manière d'Archimède aussi bien que la méthode des indivisibles à la Cavalieri, mais il se montre plus habile géomètre qu'algébriste à tout crin. Dans l'étude des mouvements des graves, il se révèle l'héritier de Galilée.

1) Mouvement d'un grave sur une cycloïde

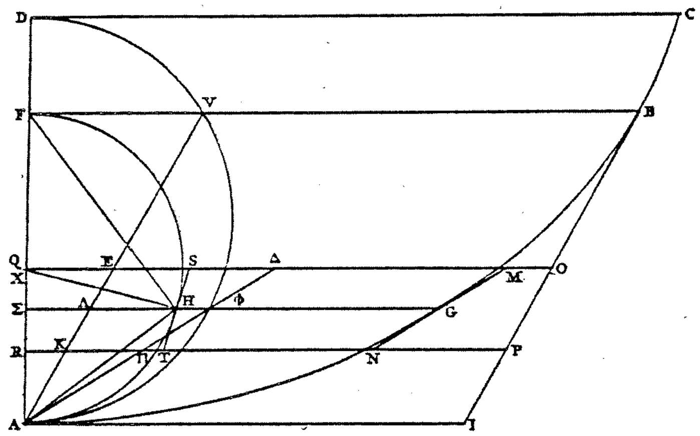
Dans la deuxième partie de son ouvrage, Huygens démontre la première propriété de la cycloïde : "il a été nécessaire de corroborer et d'amplifier la doctrine du grand Galilée touchant la chute des graves, dont le fruit le plus souhaité et, pour ainsi dire le plus élevé est précisément la propriété de la cycloïde que nous avons découverte". Par conséquent, il redémontre les lois de Galilée sur la chute rectiligne des graves et donne une démonstration du postulat de la Troisième journée des Discours concernant deux sciences nouvelles, à savoir que "les vitesses acquises par un grave en descendant sur des plans diversement inclinés sont égales quand les hauteurs des plans le sont"(47). Dans les propositions IX et X, les résultats sont étendus à une surface composée de surfaces planes contigües, puis à une surface quelconque : "Lorsqu'un mobile tombe perpendiculairement ou suivant une surface quelconque et qu'il est de nouveau porté en haut par la vitesse acquise suivant une autre surface quelconque, il aura toujours en montant et en descendant la même vitesse en des points situés à la même hauteur"(48). Cette extension s'obtient immédiatement en considérant, comme le font aussi Galilée ou Descartes, qu'une courbe est un polygône d'une infinité de côtés : "la démonstration est exactement la même quel que soit le nombre des plans suivant lesquels le mobile doit monter. Pourtant lors même que le nombre des plans est infini, c'est-à-dire lorsqu'on a affaire à une courbe, le mobile s'élèvera par celle-ci aussi jusqu'à la hauteur dont il est descendu". Dans la proposition XXI, Huygens montre que le temps de descente le long de surfaces plans contigus diminue quand l'inclinaison de ces plans augmente. Ce résultat est aussitôt étendu aux courbes : "Or il est manifeste par là, si l'on considère les lignes courbes comme composées d'une infinité de lignes droites, que lorsqu'on a affaire à deux surfaces inclinées suivant des lignes courbées de la même hauteur et dont l'inclinaison de l'une surpasse toujours celle de l'autre en des points quelconques de même hauteur, le corps descendra aussi en un temps plus court le long de la surface plus inclinée que le long de la moins inclinée"(49). L'inclinaison d'une courbe en un point est celle de la tangente à la courbe en ce point. L'application de ces résultats à la cycloïde va donc s'appuyer largement sur la propriété de la tangente à la cycloïde(50).

Horologium oscillatorium de 1673
Description de l'horloge



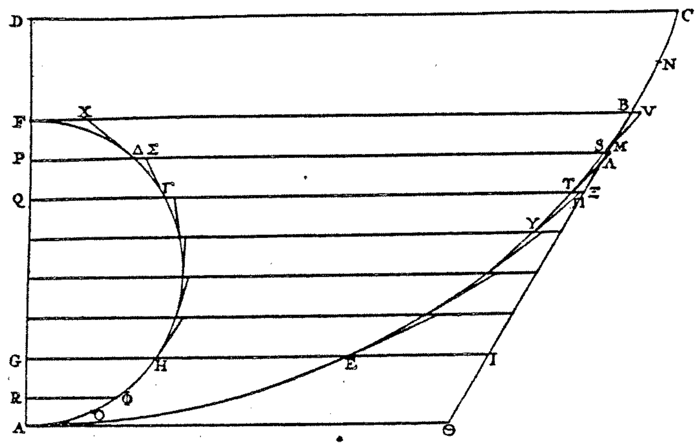
Dans la proposition XXIII[51], Huygens démontre que "le temps dans lequel un corps parcourra la droite MN avec une vitesse constante telle qu'il peut l'acquérir en descendant par l'arc BG de la cycloïde, sera au temps dans lequel la droite OP sera parcourue avec une vitesse constante égale à la moitié de celle qui est acquise par la descente le long de la tangente BI, comme la tangente ST est à la partie QR de l'axe" (fig. 6). Ceci lui permet de démontrer, dans la

fig.6



proposition XXIV[52], que le temps de la descente suivant l'arc de cycloïde $\overset{\frown}{BE}$ est à celui
suivant la tangente BI, avec la moitié de la vitesse acquise par une chute suivant B',
comme l'arc $\overset{\frown}{FH}$ est à la droite FG (fig. 7). Ce résultat s'obtient par une longue démonstration à la manière archimédienne, c'est-à-dire par une double réduction par l'absurde. Dans le cas où

fig.7



le rapport des temps de descente considérés est tel que, en notations modernes,

$$\frac{t_{BE}}{t_{BI}} > \frac{\overset{\frown}{FH}}{FG}$$

Huygens considère le temps Z, Z < t_{BE}, vérifiant

$$\frac{Z}{t_{BI}} = \frac{\overset{\frown}{FH}}{FG}$$

et il introduit un point N "si près de B" que le temps t'_{BE} mis pour parcourir BE après avoir parcouru NB soit supérieur à Z. Puisque :

$$\frac{t_{BE}}{t_{BI}} > \frac{\overset{\frown}{FH}}{FG}$$

on peut considérer le point O tel que

$$\frac{t_{BE}}{t_{BI}} = \frac{FO}{FG}$$

Il divise alors FG en parties égales FB, PQ, etc, telle que chacune corresponde à une hauteur inférieure à NB et à HO. Il parvient ainsi à démontrer que la somme des temps nécessaires pour parcourir chacun des morceaux de tangente à la cycloïde est à la fois supérieure et inférieure à t'_{BE}, ce qui est absurde.

Huygens obtient, comme conséquence, en proposition XXV(53) que "Dans une cycloïde à axe vertical et dont le sommet se trouve en bas, les temps de descente dans lesquels un mobile, partant du repos d'un point quelconque de la courbe, atteint le plus bas, sont égaux entre eux, et ont au temps de la chute verticale le long de l'axe entier de la cycloïde une raison égale à celle de la demi-circonférence d'un cercle à son diamètre". En effet, d'après la proposition XXIV nous avons, en notations modernes, que

$$\frac{t_{BA}}{t_{BG}} = \frac{FA}{FA}$$

Or $t_{BG} = t_{EA}$ d'après la propriété de la tangente à la cycloïde (fig 8), et $t_{EA} = t_{AD}$ comme l'avait déjà démontré Galilée. Par conséquent :

$$\frac{t_{BA}}{t_{AD}} = \frac{\pi}{2}$$

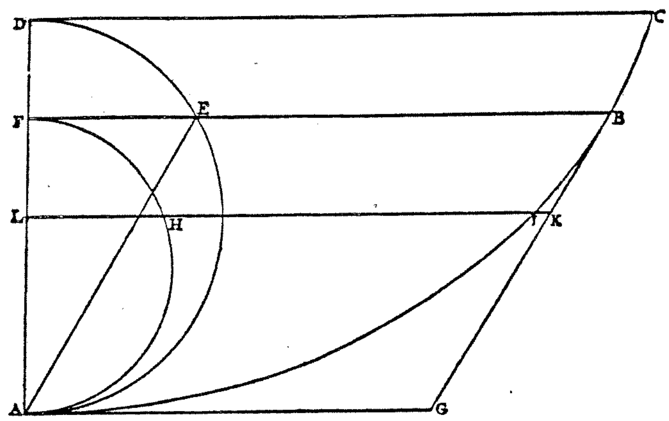


fig.8

Huygens tient ainsi la première propriété de la cycloïde. La seconde est démontrée, dans le cadre des propriétés des courbes, à la partie suivante.

2) La théorie des développées

Huygens a compris que la seconde propriété de la cycloïde peut prendre place à l'intérieur d'une théorie générale, qu'il appelle celle "de l'évolution et de la dimension des lignes courbes". Par conséquent, il aborde la troisième partie de son traité, Horologium oscillatorium, en donnant des définitions concernant toutes les courbes, celles de développante et de développée. "Si l'on considère un fil, ou une ligne flexible, enroulé sur une ligne courbée vers un seul côté, et que, une extrémité du fil demeurant attachée à la courbe, l'autre en est écartée de telle manière que la partie libre du fil reste toujours tendue, il est manifeste qu'une certaine autre courbe est décrite par cette extrémité du fil. Donnons lui le nom de Développante. Et que celle sur laquelle le fil est enroulé porte le nom de Développée. Dans la figure (fig. 9) ABC est la développée et ADE la développante

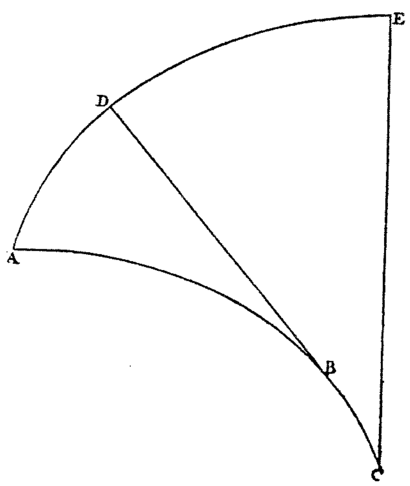


fig.9

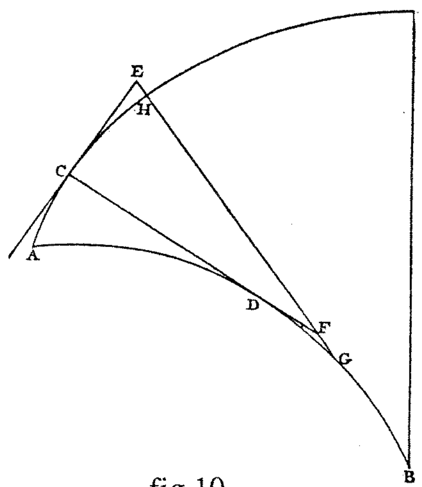


fig.10

correspondante de sorte que, lorsque l'extrémité du fil passe de A en D, la partie tendue du fil est la droite DB, le reste BC étant encore roulé sur la courbe ABC[54]. Huygens énonce, dans les propositions I et IV, deux propriétés qui expriment les relations réciproques entre développée et développante. La proposition I affirme que toute tangente à la développée rencontre la développante à angles droits. Il s'agit de montrer

que la perpendiculaire menée de C à la tangente CD de la développée est tangente à la développante, c'est-à-dire qu'elle ne rencontre la développante qu'au point C (fig. 10). Huygens procède, à la manière ancienne, en montrant qu'aucun point H de la développante, autre que C, n'appartient à cette droite. Dans le cas où le point H "est plus éloigné de l'origine de la développante que le point C", la tangente HG à la développée rencontre CD en un point F et sa perpendiculaire en un point E. Nous avons DF + FG > DG et CD + DG = HG, donc CF > HF. Par ailleurs, EF > CF car l'angle FCE est droit. Par conséquent, EF > HF et les deux points H et E sont distincts. L'autre cas se résout de la même façon, et Huygens relève que les deux courbes sont concaves du même côté. Dans la proposition III, Huygens montre que "deux lignes courbées l'une et l'autre vers un seul côté et concaves vers le même côté ne peuvent émaner d'un seul point dans une telle position l'une par rapport à l'autre que toute droite normale à l'une soit aussi normale à l'autre" (fig. 11). Ceci
permet à Huygens de démontrer la proposition IV, qui est la réciproque de la proposition I, à savoir que "si d'un même point partent deux lignes courbées l'une et l'autre vers un seul côté et concaves vers le même côté, et ainsi situées l'une par rapport à l'autre que toutes les tangentes à l'une d'elles coupent l'autre à angles droits, cette deuxième sera la développante de la première à partir du point commun"[55]. Ce résultat se démontre par l'absurde : si les lignes ABC et ADE remplissent les conditions de l'hypothèse et si la développante AFG de ABC est distincte de ADE, alors toute normale à AFG est normale à ADE, ce qui est impossible d'après la proposition III
(fig.12).

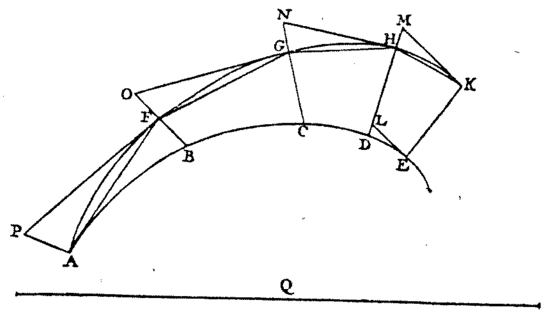


fig.11

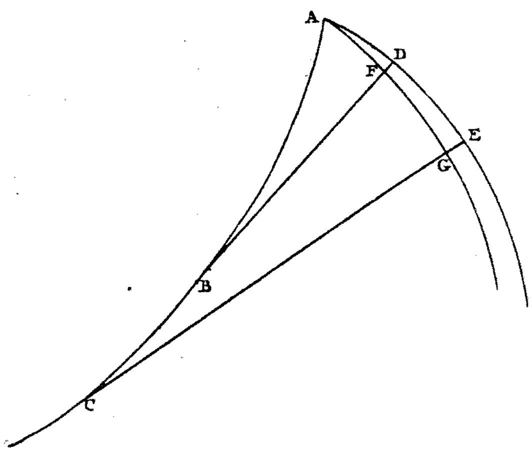


fig.12

La propriété remarquable de la cycloïde fait l'objet de la proposition V : "Lorsqu'une droite touche une cycloïde en son sommet et qu'on construit sur cette droite prise pour base une autre cycloïde, semblable et égale à la première, à partir du point coïncidant avec le sommet nommé, une tangente quelconque à la cycloïde inférieure sera normale à l'arc cycloïdal supérieure"[56]. Il s'agit de démontrer que la tangente BK à la cycloïde ABC rencontre la cycloïde AFN à angles droits (fig. 13). D'après la propriété de la tangente à la cycloïde, BK est parallèle à AH, et donc AK = BH = AH. Soit E le point d'intersection de BK avec le cercle générateur passant par K, puisque les angles EKA et KAH sont égaux, nous avons EK = AH. Par conséquent, EK = AK, c'est-à-dire que le point E appartient à la cycloïde supérieure AFN et que EK est normale à la cycloïde AFN, d'après la propriété de la normale à la cycloïde. Des propositions IV et V, Huygens conclut, en proposition IV, que "par l'évolution, à partir du sommet, d'une demi-cycloïde, une autre demi-cycloïde est décrite, égale et semblable à la première, dont la base coïncide avec la droite qui t ouche la cycloïde en son sommet". En

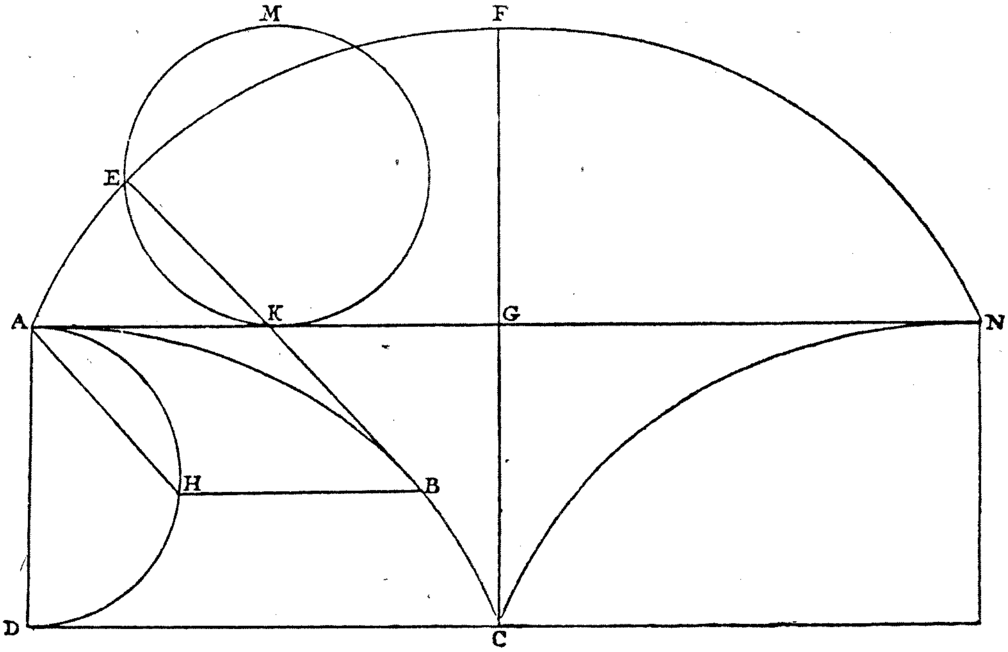


fig.13

rapprochant ce résultat de celui de la proposition XXV de la partie II de l'Horologium oscillatorium, consacrée à la chute des graves sur une cycloïde, Huygens aboutit à la validation de son horloge : "la vérité de ce que nous avons dit plus haut dans la Construction de l'Horloge sur le mouvement uniforme du pendule est présentement manifeste". En effet, "il est clair que le pendule, suspendu et mis en mouvement entre une paire de lames courbées en forme de demi-cycloïdes, décrit par son mouvement un arc de cycloïde et que par conséquent ses oscillations, quelle que soit leur amplitude, sont exécutées dans des temps égaux"(57).

Huygens obtient, en corollaire de la proposition VI, la longueur d'un arc de cycloïde. En effet, la longueur de la demi-cycloïde ABC est égale à FC, et la longueur de l'arc de cycloïde est égale à BE, c'est-à-dire à 2BK (fig. 13). Huygens salue les mérites de Wren qui a découvert ce résultat, et rend hommage à Mersenne, Roberval, Pascal et Wallis pour leurs travaux sur la cycloïde. Il conclut son chapitre par l'éloge de sa propre contribution : "Pour nous, nous avons rapporté ce qui précède puisqu'il nous semblait que nous ne devions pas passer sous silence des inventions si belles par lesquelles il est arrivé que de toutes les lignes aucune n'est maintenant connue mieux et plus à fond que la cycloïde"(58).

La démarche suivie par Huygens, dans cette troisième partie de l'Horologium oscillatorium, est suffisamment originale, en cette seconde moitié du XVIIème siècle, pour qu'on la souligne. En effet, Huygens part de considérations générales sur les courbes -les rapports entre développée et développante- et montre le comportement remarquable de la cycloïde à cet égard. Ceci le conduit à mettre en évidence une propriété des courbes -l'égalité de la développée et de la développante- et à se demander quelles sont les courbes qui vérifient cette propriété. Il écrit qu'"il ignore si cette propriété remarquable est donnée à aucune autre ligne, savoir celle de se décrire soi-même par son évolution"(59). Nous savons que la mise en évidence des propriétés des courbes sera une tâche systématique des mathématiciens du début du XIXème siècle. En 1678, de Vausmele découvre que la cardioïde se développe en une cardioïde triple de la première, et Huygens montre que l'évolution d'une épicycloïde donne une épicycloïde. L'épicycloïde est la courbe décrite par un point d'un cercle de rayon r roulant à l'extérieur d'un cercle de rayon R, la cardioïde s'obtient pour r = R. En 1692, Jacques Bernouilli montre la même propriété pour la spirale logarithmique -cette spirale a la propriété de couper tous ses rayons vecteurs à angles droits. Quelques années plus tard, Herman et Craft montrent que la cycloïde et la spirale logarithmique, à angle constant de 45°, sont les seules courbes se développant en courbes égales[60]. Huygens peut se féliciter de la portée mathématique de son invention, mais il en attend d'autres retombées.

3) **Le profit et la gloire**

Dès le début des années 1660, Huygens se préoccupe beaucoup d'essayer de tirer un maximum de profit de son invention, ainsi que l'indique sa correspondance avec des connaissances utiles, en particulier avec R. Moray et J. Chapelain -ce dernier était chargé de distribuer les pensions que servait Louis XIV aux artistes et savants. Huygens sait que les arcs cycloïdaux n'assurent pas, même sur terre ferme, un isochronisme parfait. Comme il l'écrit à Moray[61], ceci est dû au "médium de l'air, qui n'est pas considéré dans la théorie" et au "défaut du fil du pendule qui s'étend plus au moment que le plomb est au plus bas de l'arc qu'ailleurs". Il est vrai que, comme son maître Galilée, Huygens néglige la résistance de l'air dans l'étude de la chute des graves. Cependant, il prétend remédier à ces défauts par un procédé technique : "J'ai trouvé depuis quelques temps le moyen d'ajuster fort précisément à son heure mon horloge par un petit plomb mobile que j'applique à la verge de mon pendule". Huygens pense que les imperfections de son horloge ne sont nullement rédhibitoires en ce qui concerne la détermination des longitudes. Son ami, le Capitaine Holmes, s'embarque avec deux horloges qui "serviront à diriger les vaisseaux depuis leur départ jusqu'à l'île Saint Thomas, et à fixer la longitude à l'arrivée à l'île de Fuego"[62]. Huygens espère ainsi voir confirmées ses espérances, mais il ne veut pas attendre le retour du Capitaine pour demander privilèges ou récompenses. Le 11 Novembre 1663, il écrit à Moray : "Ne manquez pas je vous en prie à m'en envoyer au plus tôt la relation du Capitaine tant pour m'éclairer entièrement en ce qui regarde cette importante expérience qu'afin que je m'en puisse servir où il sera besoin. Car je suis d'avis ainsi que vous, et ceux de la Société Royale, qu'il faut commencer à agir tout de bon dans cette affaire, et qu'il y a assez de fondements pour demander sans hésiter les privilèges. Monsieur l'Abbé de Beaufort avec quelques autres de mes amis, à qui j'en parlai hier par occasion d'une promenade que nous fîmes ensemble hors de la ville me conseillèrent tous de demander plutôt une récompense ici au Roi qu'un Privilège, et proposèrent même les moyens dont il faudrait se servir pour l'obtenir. Pour moi je crois que ce ne serait pas mal, mais je désire d'en savoir votre avis, et j'en consulterai cependant avec d'autres personnes le privilège, et l'affaire réussissant bien, le prix qu'on y a destiné ne pourra pas nous manquer. Pour l'Espagne, le Danemark et la Suède, je sais des gens que j'y pourrai employer"[63]. Il lui écrit encore la semaine suivante : "Il vaut bien la peine cependant de demander les privilèges, et qu'on y travaille au plus tôt. Votre pays et le nôtre sont ceux où il y aurait le plus de profit à faire"[64].

Dans une lettre du 21 Juillet 1664, Moray établit pour Huygens le catalogue des lieux où prendre des privilèges et ceux en lesquels il vaut mieux demander des récompenses. "Pour ce qui est de la récompense que Messieurs les Etats ou autres ont promis à ceux qui trouveront une invention pour savoir les longitudes sur mer, sachez premièrement ce qui en est, et puis voyez s'il est encore temps d'y prétendre (...). Et si vous trouvez bon qu'on en fasse de même en France ou bien qu'on traite avec le Roi pour une récompense sans demander patentes vous n'avez qu'à me dire votre sentiment et je crois que je trouverais le moyen de faire ou l'un ou l'autre. Et pour la Grande Bretagne, il ne sera pas difficile d'en avoir le privilège mais je ne vois pas qu'on y puisse attendre récompense. Toutefois j'ai envie de tâter le pouls à ces Marchands qui ont fait de si belles offres au Portugais, pour voir s'ils veulent autant faire pour une chose réelle, comme ils ont fait pour une Chimère. Au reste pour l'Espagne, le Danemark, la Suède, les villes Antartiques etc., je crois qu'il ne sera pas difficile d'obtenir des patentes pourvu que le jeu vaille la chandelle, il est vrai que j'ai ouï dire, que le Roy d'Espagne a proposé quelque récompense pour le secret des longitudes et s'il en est ainsi, il faudra pour moins la peine de la demander". Cependant, Moray doit juger Juygens trop impatient et il ajoute : "Mais tout ce que je viens de dire présuppose que les Horloges vont sur mer avec exactitude ; et jusqu'à ce que nous soyons assurés de cela, la seule question est, savoir s'il est temps de demander les privilèges dans les lieux surnommés, ou bien s'il faut attendre encore jusqu'à ce que nous soyons hors de doute"(65). Le 23 Janvier 1665, Moray apprend à Huygens qu'"enfin le Capitaine Holmes est arrivé et la relation qu'il nous a faite de l'expérience des Pendules nous met hors de doute qu'elles ne réussissent"(66).

En attendant d'obtenir patentes, privilèges ou récompenses, Huygens se méfie beaucoup des espions ou des contrefacteurs qui pourraient lui ravir les fruits de son invention. Lors d'une visite chez un inventeur d'horloges d'Harlem, il devina, en entendant les coups dans l'horloge, qu'il y avait dedans un pendule, et fit remarquer à ce "petit mécaniste" qu'on pouvait lui défendre de se servir des pendules dont l'invention était privilégiée. Lorsque ces horloges sont embarquées, il demande qu'elles "soient tellement fermées qu'on ne peut voir que les indices"(67). Il se méfie également de ceux qui pourraient, par la suite, apporter des perfections à son horloge -qu'il reconnaît par ailleurs nécessaires-. Il écrit à Moray qu'il faut prendre, à cet égard, toutes les précautions possibles dans les termes de la demande de privilège : "Je crois qu'on ferait mieux de demander généralement le Privilège pour l'application des horloges à pendule à la Navigation, sans spécifier si fort toutes les parties de la machine, parce qu'autrement il viendra des horlogers ou autre gens, qui en diversifiant la construction de quelque chose prétendront d'apporter des inventions qui ne sont pas comprises dans le privilège(68).

Le Roi Louis XIV accorde le privilège en 1665, et Chapelain conseille à Huygens, comme marque de "gratitude à sa majesté, cela s'entend autant qu'il se pourra sans nuire à vos intérêts à l'égard des horloges", de dédier le traité des pendules au Monarque(69). Celui-ci suivra cette suggestion en dédicaçant l'Horologium Oscillatorium à Louis XIV Le Grand, dédicace dans laquelle il insiste sur l'utilité de son invention. Colbert est sensible à l'orientation utilitaire des travaux d' Huygens et il invite le Hollandais à faire partie de l'Académie Royale des Sciences à sa création en 1666. Plusieurs étrangers furent, en effet, invités à venir travailler en France et furent gratifiés par Louis XIV. Huygens écrit dans sa dédicace : "Tu protèges les sciences et ceux qui y excellent ; libéralité que les très grands frais des guerres, bien qu'ils surpassent énormément les dépenses ordinaires, ne diminuent en rien et que les confins de la France, Ton royaume, ne limitent point"(70). Le Hollandais accepta de devenir académicien et fut celui qui touchait le plus gros traitement. En tant que membre de l'Académie, il eut à défendre son horloge contre les "perfectionneurs" qu'il redoutait par avance. Il écrit à Colbert au sujet de Mercator qui "prétend perfectionner l'usage des pendules" alors "qu'on a remédié il y a longtemps à tous les inconvénients qu'il rapporte"(71). L'Académie s'était déjà réunie deux fois, en présence de Colbert, pour examiner de nouvelles propositions pour déterminer la longitude en mer, et elles avaient été jugées sans valeur.

Huygens proposa, lui même, en 1675 un nouveau dispositif : le régulateur est un ressort spiral solidaire d'une masse oscillante en forme d'anneau circulaire, le balancier. Ce dispositif fut adapté à la construction des montres de marine grâce aux efforts de Leroy et de Berthoud en France, et de Harrisson en Angleterre. Le problème des horloges marines ne fut donc véritablement résolu qu'en 1757 avec l'invention du chronomètre de marine par Harrisson, auquel le Parlement anglais attribua un prix de 20 000 livres(72). Tout ceci ne diminua point, aux yeux de la postérité, les mérites de Huygens. "C'est un vrai don que le génie de Huygens a fait à l'humanité et l'une des plus ingénieuses inventions dont elle puisse s'applaudir" écrit Bailly dans son Histoire de l'astronomie moderne(73).

NOTES

(1) HUYGENS, Oeuvres complètes, tome XVIII, p. 76.
(2) HUYGENS, Oeuvres complètes, tome V, lettre n° 1254 de J. Chapelain à C. Huygens du 5 Septembre 1664
(3) Voir l'article de R. BKOUCHE in La rigueur et le calcul
(4) BRAUDEL, Civilisation matérielle, économie et capitalisme, XVème-XVIIIème siècle, vol 2. Les jeux de l'échange.
(5) BRAUDEL, op. cit., vol 3, Le temps du monde.
(6) Tableau d'Abram Willaerts (1557-1664).
(7)01 DENYS, L'art de naviguer dans la plus haute perfection, p. 21.
(8) BERTHOUD, Histoire de la Mesure du temps par les Horloges, p. 258.
(9) BLONDEL ST AUBIN, Le trésor de la navigation, p. 41.
(10) DENYS, op. cit., p. 21.
(11) TATON, Histoire générale des sciences, tome II, La science moderne.
(12) HUYGENS, Oeuvres complètes, tome V, lettre n° 1334 de J. Chapelain à C. Huygens du 25 Février 1665.
(13) DENYS, op. cit., p. 23
(14) ibid, p. 26
(15) TATON, Histoire générale des sciences, tome II, La science moderne.
(16) DULAGUE, Principes de Navigation, p. 106.
(17) Il signale également l'usage de la boussole utilisée après les observations d'Halley.
(18) ibid, p. 107
(19) TATON, op. cit.
(20) BESSON, Le cosmolabe.
(21) DULAGUE, op. cit, p. 225.
(22) DENYS, op. cit., p. 30.
(23) BERTHOUD, op. cit., p. 95.
(24) Cette révélation, faite en 1659, intervient dans la mauvaise querelle que Viviani fit à Huygen sur la priorité de Galilée.
(25) BERTHOUD, op. cit. p. 98.
(26) HUYGENS, Oeuvres complètes, tome II, p. 271, lettre de C. Huygens à P. Petit du 1er Novembre 1658.
(27) ibid, p. 181.
(28) HUYGENS, Oeuvres complètes,, tome VI, p. 292, lettre de C. Huygens à Estienne du 23 Novembre 1668.
(29) Pour une analyse détaillée des travaux sur la cycloïde lire CLERO, LE REST La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle.
(30) MONTUCLA, Histoire des mathématiques, tome II.
(31) PASCAL, Oeuvres complète, p. 117.
(32) MONTUCLA, op. cit.
(33) GALILEE, Discours concernant deux sciences nouvelles, p. 22.
(34) Sur la méthode des indivisibles lire BARBIN, Heuristique et démonstration en mathématiques, la méthode des indivisibles au XVIIème siècle.
(35) HUYGENS, Oeuvres complètes, tome I, lettre n° 13a du 13 Octobre 1646, p. 559.
(36) idem, lettre du 8 Janvier 1647.
(37) HUYGENS, Oeuvres complète, tome II, lettre n° 493, p. 186.
(38) PASCAL, op. cit., p. 120.

(39) COSTABEL, Essai sur les secrets des Traités de la Roulette, p. 3284
(40) MONTUCLA, op. cit.
(41) HUYGENS, Oeuvres complètes, tome II, lettre n° 566, p. 315.
(42) FERMAT, Oeuvres, tome III, p. 181.
(43) DESCARTES, La géométrie, p. 61.
(44) PASCAL Oeuvres complètes, p. 182.
(45) HUYGENS, Oeuvres complètes, tome XVIII.
(46) CLERO et LEREST, op. cit.
(47) GALILEE, op. cit., p. 138.
(48) op. cit., p. 148.
(49) op. cit., p. 166.
(50) voir, plus haut, le résultat de Fermat.
(51) op. cit., p. 170.
(52) HUYGENS, op. cit., p. 172.

(53) HUYGENS, op. cit., p. 184.
(54) HUYGENS, op. cit. p. 188.
(55) HUYGENS, op. cit., p. 196.
(56) HUYGENS, op. cit., p. 198.
(57) HUYGENS, op. cit., p. 202.
(58) HUYGENS, op. cit., p. 204.
(59) HUYGENS, op. cit., p. 104.
(60) HUYGENS, op. cit., Avertissement p. 40.
(61) HUYGENS, Oeuvres complètes, tome III, lettre à Moray du 30 Décembre 1661, p. 438.
(62) BERTHOUD, op. cit., p. 273.
(63) HUYGENS, Oeuvres complètes, tome IV, p. 427.
(64) HUYGENS, op. cit., lettre n° 1167 du 18 Novembre 1663.
(65) HUYGENS, Oeuvres complètes, tome V, lettre n° 1247.
(66) HUYGENS, op. cit., lettre n° 1315.
(67) HUYGENS, Oeuvres complètes, tome IV, lettre du 4 Janvier 1663, p. 287.
(68) HUYGENS, Oeuvres complètes, tome V, lettre n° 1274 du 21 Novembre 1664.
(69) HUYGENS, op. cit., lettre n° 1349 du 10 Mars 1665.
(70) HUYGENS, Oeuvres complètes, tome XVIII, p. 76.
(71) HUYGENS, Oeuvres complètes, tome VI, lettre du 13 Mars 1669.
(72) TATON, Histoire générale des sciences, tome II...
(73) Cité par BERTHOUD, Histoire de la Mesure du Temps par les Horloges, p. 113.

BIBLIOGRAPHIE

BARBIN	Heuristique et démonstration en mathématiques. La méthode des indivisibles au XVIIème siècle in Fragments d'histoire des mathématiques, n° 2, A.P.M.E.P., Nov 1987.
BERTHOUD	Histoire de la mesure du temps par les horloges, Imprimerie de la République, Paris, 1802.
BESSON	Le cosmolabe, de Rouillé, Paris, 1567.
BLONDEL ST AUBIN	Le trésor de la navigation, Gruchet, St Aignan, 1673.
BOS	L'élaboration du calcul infinitésimal, Huygens entre Pascal et Leibniz in Huygens et la France, Table Ronde du C.N.R.S., Vrin, 1982.
BOUGHER	Nouveau traité de Navigation, Guérin, St Thomas d'Aquin, 1753.
BRAUDEL	Civilisation matérielle, Economie et Capitalisme, XV-XVIIIème siècle, Colin, Paris, 1979.
CLERO & LE REST	La naissance du calcul infinitésimal, Cahiers d'histoire et de philosophie des Sciences n° 16, C.N.R.S. Centre Documentation Sciences Humaines, Paris, 1980.
COSTABEL	Essai sur les secrets des Traités de la Roulette, Revue d'histoire des Sciences, t. XV, 1962, p. 321-350.
DENYS	L'art de naviguer dans sa plus haute perfection, Dubuc, Paris, 1673.
DESCARTES	La géométrie, 1637, édition David, Paris 1705.
DULAGUE	Principes de navigation, Racine, Rouen, 1787.
FERMAT	Oeuvres, Publication Tannery et Henry, Gauthiers Villars, Paris, 1896.
GALILEE	Discours concernant deux sciences nouvelles, 1632, Traduction Clavelin, Colin, Paris, 1970.
GROUPE INTER IREM	La rigueur et le calcul, Cédic, Paris, 1982.
HUYGENS	Oeuvres complètes, Publication Société Hollandaise Sciences, Nijkoff, La Haye, 1888-1950.
MANDROU	Histoire de la pensée européenne, Des humanistes aux hommes de science, Le Seuil, Paris, 1973.
MONTUCLA	Histoire des mathématiques, 1799, édition Blanchard, Paris, 1968.
PAGAN (Comte de)	Les tables astronomiques, Henault, Paris, 1658.
PASCAL	Oeuvres complètes, Le Seuil, Paris, 1963.
TATON	Histoire générale des sciences, P.U.F., Paris, 1958.

PLANETARIUM ET

FRACTIONS CONTINUES

Lecture d'un texte de Huygens dans une classe de 3e.

Marie Françoise JOZEAU
Maryvonne HALLEZ

L'atelier a consisté à raconter le travail fait à propos du texte au sein du groupe M.A.T.H. de l'I.R.E.M. de Paris VII et l'expérience de lecture dudit texte dans une classe de 3e.

Texte : **"Descriptio automati planetarii"**
Œuvres Complètes de Christiaan Huygens
T 21. p : 626 - 628 - 630
1728 3e ed.
(1e ed. 1703 posthume)

Nous avons présenté l'atelier en trois parties :

I CLIMAT DE L'EPOQUE

Les vieilles idées sur la terre centre du monde disparaissent. Les lunettes de plus en plus perfectionnées donnent un formidable essor à "l'astronomie d'observation". Galilée a publié son "Dialogo" en 1632. Les représentations des systèmes du monde de Ptolémée, Tycho Brahé et Copernic du tome 2 de l'Histoire Générale des Sciences de Taton sont fort éclairantes. (fig. 1-2-3.)

La description des orbes célestes de Ptolémée est abandonnée mais depuis peu. Tycho Brahé, observateur hors pair et passionné, invente le modèle compromis surprenant : la terre est au centre ; la lune et le soleil tournent autour d'elle, le reste des planètes tourne autour du soleil. Une lecture de la bible interdisait la théorie de Copernic.[1]

Le système de Copernic sera majoritairement accepté. "L'astronomie copernicienne n'apporte pas seulement un nouvel arrangement plus économique des "cercles", mais une nouvelle image du monde"[2]

Kepler (1571-1630) pensa en première hypothèse que la terre décrivait autour du soleil un cercle "excentré" ce qui était compatible avec les observations. Ses recherches sur Mars lui firent ensuite opter pour une orbite elliptique aplatie proche du cercle. Sa loi des aires infirmait l'uniformité du mouvement : le rayon vecteur qui joint une planète au soleil balaie des aires égales en des temps égaux. Kepler publia son hypothèse en 1609 ; mais la démonstration aux yeux de la communauté scientifique ne fût faite qu'en 1680 par Newton avec sa théorie de la gravitation.

1 *Constitution du modèle planétaire de Philolaos à Gassendi - I.R.E.M. de Picardie 1984.*
2 *A. Koyre - Etudes d'histoire de la pensée scientifique Paris. Gallimard 1973 p. 12.*

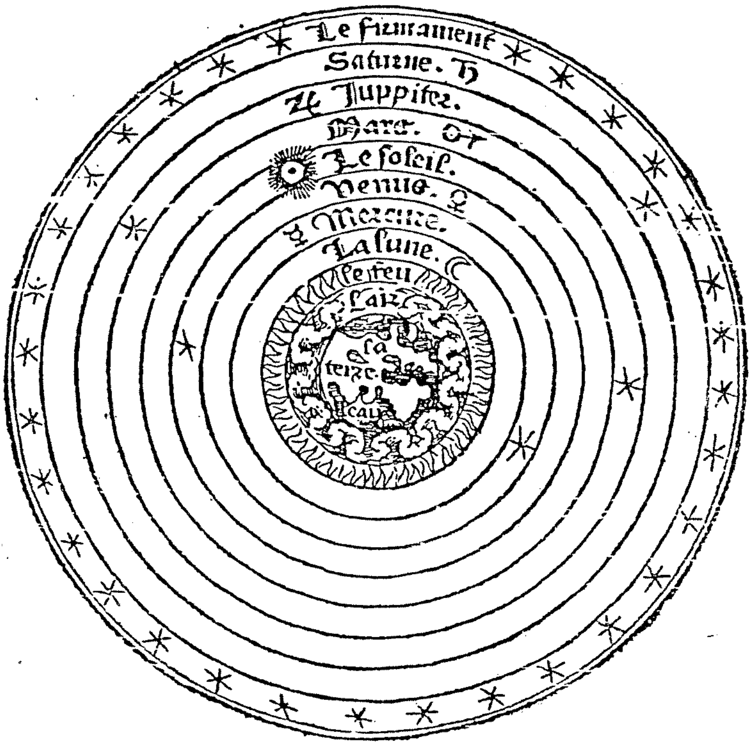


FIG. 3. — L'Univers médiéval : description des « orbes célestes » d'après Ptolémée (O. FINE, *Théorique de la huictième sphère et sept planètes*, 1523)

Fig. 1

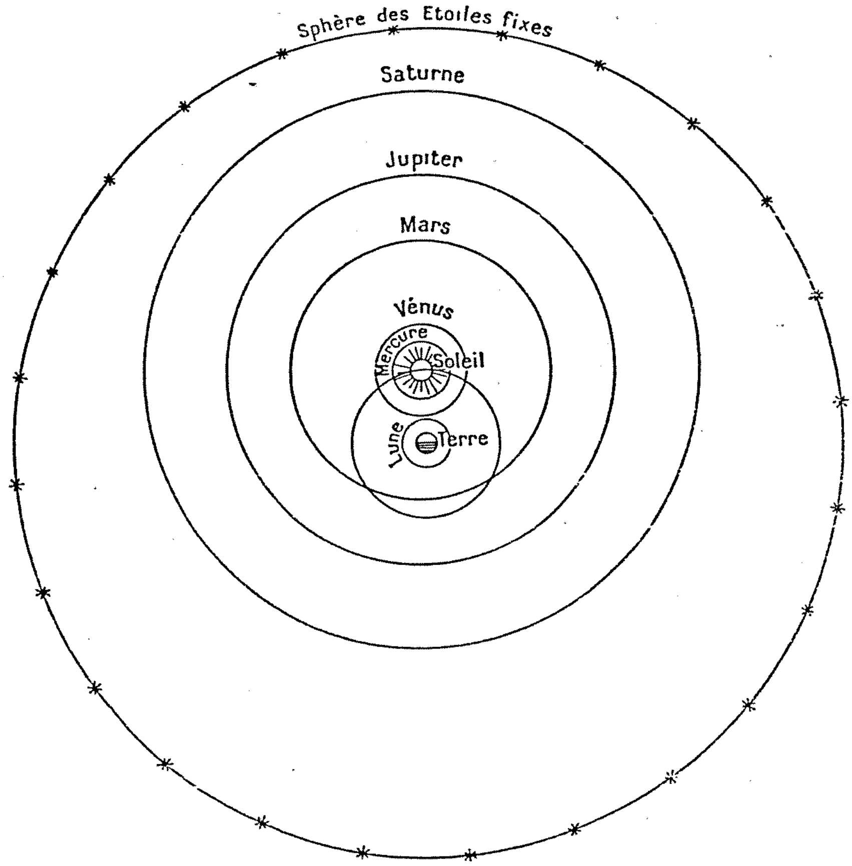


FIG. 5. — L'Univers de Tycho Brahé (d'après O. VON GUERICKE, *Experimenta nova*, 1672)

Fig. 2

Histoire générale des Sciences R. TATON

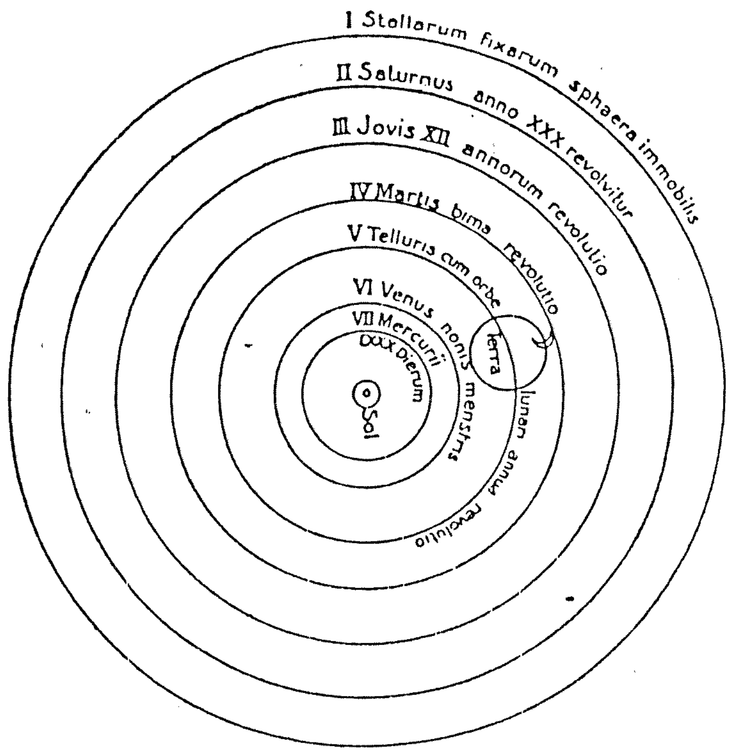


Fig. 3

Système de COPERNIC

La science devient à la mode après le retentissement des travaux de Descartes, Pascal, Galilée, Kepler ... Et, comme il est dit à propos de la portée du canon dans les Actes du Colloque de Montpellier : "Dès la fin du XVIe siècle, et au début du XVIIe siècle, une nouvelle "race" de savants est née, qui acceptent de s'intéresser aux nombreux problèmes techniques". [1] Christiaan Huygens, comme nous allons le voir, est un bon représentant de cette nouvelle "race".

Comment Colbert eût-il résisté à la tentation de mettre la main sur ce nouveau domaine ? La haute société du temps de Louis XIV n'interposait point de barrière entre les sciences et les lettres et s'exaltait sur les découvertes de Huygens, de Rœmer ou de Cassini après avoir discuté sur Tartuffe et sur Spinoza. Colbert constitua l'Académie des Sciences définitivement en 1666. Ses premiers membres comptèrent entre autres Huygens, Roberval, Picard, Claude Perrault, Rœmer, Mariotte ...

Olaf Rœmer, jeune paysan de 27 ans, né en 1644 est enlevé de Copenhague par l'abbé Picard qui le fait nommer professeur d'astronomie du dauphin, futur Louis XV ; il le fait aussi élire à l'Académie des Sciences et loger à l'Observatoire. Sitôt arrivé à Paris, Olaf Rœmer se signale par une activité débordante "se distrayant de ses travaux astronomiques en construisant des planétaires". [2] La grande découverte de Rœmer fut la vitesse du rayon lumineux qu'il évalua à 308000km/sec. Les machines planétaires de Rœmer furent expliquées au roi par Cassini le 5 décembre 1681. Ces détails sont nécessaires pour comprendre les lettres de Huygens à propos de son propre planétaire.

II HUYGENS ET SON SEJOUR à PARIS

Un élève fit le résumé suivant de la vie de Huygens : "Christiaan Huygens est un savant hollandais né le 14 avril 1629 et mort le 8 juillet 1695 à la Haye ; il est le fils de Constantin Huygens et de Suzanne von Baerle, originaire du Brabant du Nord. La famille entière eut un grand rôle dans la vie politique du XVIe et du XVIIe siècle. Chritiaan fit les mêmes études que son grand-père du même nom à l'Université. Il possèdait comme écrivain le secret d'être à la fois concis et très clair". Huygens apparaît comme un mathématicien et un physicien de premier ordre en même temps qu'un organisateur de la recherche scientifique. Par l'entremise de Colbert, la France offrit honneurs, pensions et titres de 1666 à 1681 au savant hollandais nommé membre de l'Académie Royale des Sciences. Il résida à Paris et travailla à l'Observatoire dès sa construction en 1672. Entre 1670 et 1680, il écrivit une description détaillée et précise de la construction d'un automate planétaire donnant une représentation des positions relatives et des mouvements respectifs des planètes. Cet écrit fut rendu public après sa mort et publié en 1703. L'automate fut réalisé en 1682 par Johanes van Ceulen à La Haye après que Huygens, malade, s'en fut retourner en son pays. Il est actuellement visible au Musée Bœrhave du Leyde.

1 *Actes du Colloque de Montpellier 1985 - Colloque Inter I.R.E.M. p. 78.*
2 *P. ROUSSEAU - Histoire de la science - Paris 1945 - Fayard p. 288.*

III ETUDE DU TEXTE. Experience avec des élèves de 3e

① Le texte

Lors d'une séance de travail du groupe M.A.T.H. à l'I.R.E.M. Paris VII, Jean-Luc Verley, entre autre pourvoyeur du groupe en textes historiques du groupe "textes historiques mathématiques", proposa un travail sur la "descriptio Planetarium" de Huygens. L'expérience relatée concerne un travail en classe de 3e. (Drôle de phrase !!)

② Les objectifs

Ils étaient de trois sortes.

2.a) Présenter un outil mathématique inconnu des élèves : la fraction continue, sa pratique, son utilité. Ce travail permettant en corollaires (?) de les familiariser avec les notions d'approximation et d'encadrement d'un réel et de réviser les théorèmes d'algèbre de compatibilité de l'égalité et de l'addition, de l'égalité et de la multiplication, la relation d'ordre, les proportions, le calcul dans l'ensemble des rationnels.

2.b) Montrer que la construction de machines est une des composantes de l'activité mathématique ce qui apparaît très clairement au 17e siècle et a quelque peu disparu au 20e siècle ! Ce texte illustre le va et vient entre pratique et théorie, précision des mesures et avancements de la science.

2.c) Montrer la vie d'une communauté scientifique où les échanges de lettres pouvaient être riches et féconds. Huygens s'intéressait aux mathématiques, à la physique, à la biologie, aux lettres, au dessin, à la musique.

③ L'expérience

Elle se déroula sur quatre séances.

3.a) Durant la première séance d'une heure, vingt minutes furent consacrées aux révisions d'arithmétique. Puis la classe fut divisée en cinq groupes. A l'un d'entre eux, un travail de documentation fut demandé pour gagner du temps. Les élèves de ce groupe furent prioritairement envoyés au tableau pour préparer le contrôle et rattraper le retard en maîtrise de calcul pris par rapport aux autres groupes.
Ce groupe eut à lire l'extrait suivant du texte et répondre aux questions qui le suivent.
Extrait du texte de Huygens "Descriptio" p. 326. L'omission de la valeur du rapport était voulue pour que les élèves fassent le calcul.

"Le mouvement annuel de Saturne – je me base, tant ici qu'ailleurs, sur les plus récentes Tables de Riccioli – est dit avoir la valeur 12° 13' 34" 18'".

Celui de la terre, que Riccioli appelle celui du Soleil, est de 359° 45' 40" 31'''.
Réduisant l'une et l'autre à des tierces, on obtient le rapport

Par conséquent, comme le dernier nombre est au premier, ainsi est la période de Saturne au temps dans lequel la Terre accomplit la révolution autour du Soleil."

Informations

12° 13' 34" 18''' se lit	12 degrés
	13 minutes
	34 secondes
	18 tierces

60 tierces = 1 seconde

Questions

① Calculez le rapport dont il est question dans le texte

② Analysez ce texte et allez chercher au C.D.I. les informations qui vous manquent pour la compréhension de ce texte

③ Devinette : Qui peut avoir écrit ce texte ?
A quelle époque

Les cinq autres groupes reçurent cet autre extrait avec encore un encadré blanc pour leur réponse et devaient répondre aux questions qui le suivent :
“Pour trouver des nombres plus petits que
expriment approximativement le rapport

$$\frac{77708431}{2640858\ldots}$$

je divise le plus grand nombre par le plus petit, puis le plus petit avec le reste de la première division et ensuite ce reste par le nouveau reste. Continuant ainsi, je trouve que la première division donne

c'est-à-dire un nombre plus une fraction à numérateur 1 dont le dénominateur possède de nouveau une fraction adjointe à numérateur 1.

Questions

① Donnez un exemple de :
un nombre (entier naturel) plus une fraction à numérateur 1
donnez ensuite l'écriture rationnelle du nombre, plus la fraction, choisi.

② Donnez un exemple de :
un nombre (entier naturel) plus une fraction à numérateur 1 dont le dénominateur possède de nouveau une fraction adjointe à numérateur 1 (autrement dit dont le dénominateur est de nouveau un nombre plus une fraction à numérateur 1).

③ Ecrivez l'égalité fondamentale de la division euclidienne de 77708431 par 2640858.

④ Sans effectuer d'opération, divisez les deux membres de cette égalité (du ③)) par 2640858.

⑤ Donnez l'égalité fondamentale de la division de 2640858 par le reste de la 1ère division r_1.

⑥ Sans effectuer d'opération , divisez les deux membres de l'égalité du ⑤ par le reste de la 1ère division r_1 .

⑦ On appelle r_2 le reste de la division effectuée en ⑤ . Donnez le quotient entier de r_1 par r_2.

⑧ On pose $a = 77708431$
$b = 2640858$

Exprimez :

① $\frac{a}{b}$ en fonction de r_1

② $\frac{b}{r_1}$ en fonction de r_2

③ $\frac{r_1}{b}$ en fonction de r_2

donnez la valeur entière de $\frac{r_1}{r_2}$.

⑨ Relisez le texte et essayez de remplir le rectangle blanc.

3.b) La deuxième séance au cours suivant comporta le compte-rendu du premier groupe, la présentation du travail d'un autre groupe volontaire pour l'exposer et la fin des exercices.

3.c) Durant la troisième séance de vingt minutes, la semaine suivante, nous lûmes le texte suivant qui englobait les deux premiers extraits déjà connus des élèves puis une lettre du 27 août 1682 adressée à Colbert par Huygens.

Les nombres des dents des roues ont été trouvés de la manière suivante. Nous avons comparé entr'eux le mouvement moyen annuel, ou de 365 jours, de chaque planète sous l'écliptique [29]) avec le mouvement moyen annuel de la terre, tels que l'un et l'autre sont consignés dans les tables astronomiques, en réduisant les mouvements dans les arcs entiers en tierces ou soixantièmes parties de secondes. Comme les nombres ainsi obtenus ont entr'eux la même proportion que les arcs des circonférences de cercle décrits simultanément dans leurs orbites par la planète considérée et par la terre, il s'ensuit que les périodes de l'une et de l'autre sont exprimées par le contraire du même rapport, lequel doit donc aussi, à moins que l'on ne prenne le même rapport exprimé par des nombres plus petits, être celui des dents des roues, savoir d'une part la roue planétaire, d'autre part la roue montée sur le grand axe laquelle engrène avec elle. En effet, par chaque révolution de l'axe la Terre parcourt son orbite entière, puisque nous donnons des nombres de dents égaux à la roue qui porte la Terre et à celle de l'axe qui lui correspond, p.e. 60 ou tel autre nombre qui leur convient.

Toute la question se réduit donc à ceci: étant donnés deux grands nombres ayant entr'eux un certain rapport, en trouver d'autres plus petits pour les dents des roues qui ne soient pas incommodes par leurs grandeurs et qui aient entr'eux à peu près le même rapport, de telle façon qu'aucun couple de nombres plus petits ne fournisse un rapport plus approchant de la vraie valeur. Mais nous rendrons la chose plus claire par un exemple. Supposons donc qu'il faille trouver les dents de la roue de Saturne et celles de la roue plus petite, indiquée par la lettre K dans la Fig. 144, qui la meut et est elle-même montée sur l'axe.

Le mouvement annuel de Saturne — je me base tant ici qu'ailleurs sur les plus récentes Tables de Riccioli — est dit avoir la valeur 12°13'34''18''' [30]). Celui de la Terre, que Riccioli appelle celui du Soleil, est de 359°45'40''31''' [31]). Réduisant l'une et l'autre à des tierces, on obtient le rapport 2640858 : 77708431 [32]). Par conséquent, comme le dernier nombre est au premier, ainsi est la période de Saturne au temps dans lequel la Terre accomplit sa révolution autour du Soleil; partant le nombre des dents de la roue de Saturne doit avoir, avec la meilleure approximation pratiquement possible, ce même rapport au nombre des dents de sa roue motrice. Pour trouver donc des nombres plus petits qui expriment approximativement ce rapport, je divise le plus grand nombre par le plus petit, puis le plus petit par le reste de la première division et ensuite ce reste par le nouveau reste. Continuant ainsi je trouve que la première division donne

$$29 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{1} + \frac{1}{4} \text{ etc.}$$ [33])

c. à. d. un nombre plus une fraction à numérateur 1 dont le dénominateur possède de nouveau une fraction adjointe à numérateur 1 et dont le dénominateur est composé de la même manière; et ainsi de suite. Poursuivant ce calcul aussi longtemps que possible, on parvient enfin par la division à un reste 1.

Or, lorsqu'on néglige à partir d'une fraction quelconque les derniers termes de la série, p.e. ici la fraction $\frac{1}{5}$ [33]) et celles qui la suivent, et qu'on réduit les autres plus le nombre entier à un commun dénominateur, le rapport de ce dernier au numérateur, sera voisin de celui du plus petit nombre donné au plus grand; et la différence sera si faible qu'il serait impossible d'obtenir un meilleur accord avec des nombres plus petits. Le mode de la réduction est aisé; en effet, les dernières fractions, par lesquelles nous commençons, savoir $\frac{1}{2} + \frac{1}{1}$ valent $\frac{1}{3}$; passant à celle qui précède immédiatement et réduisant, $\dfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}$ donne $\frac{3}{7}$; prenant ensuite avec la fraction le nombre entier et réduisant de nouveau, $29 + \frac{3}{7}$ donne $\frac{206}{7}$. Par conséquent le rapport 7 : 206 est voisin de 2640858 : 77708431. C'est pourquoi nous avons donné 206 dents à la roue de Saturne et 7 à sa roue motrice.

Descriptio Planetarium

Les nombres des dents des roues ont été trouvés de la manière suivante. Nous avons comparé entr'eux le mouvement moyen annuel, ou de 365 jours, de chaque planète sous l'écliptique 29) avec le mouvement moyen annuel de la terre, tels que l'un et l'autre sont consignés dans les tables astronomiques, en réduisant les mouvements dans les arcs entiers en tierces ou soixantièmes parties de secondes. Comme les nombres ainsi obtenus ont entr'eux la même proportion que les arcs des circonférences de cercle décrits simultanément dans leurs orbites par la planète considérée et par la terre, il s'ensuit que les périodes de l'une et de l'autre sont exprimées par le contraire du même rapport, lequel doit donc aussi, à moins que l'on ne prenne le même rapport exprimé par des nombres plus petits, être celui des dents des roues, savoir d'une part la roue planétaire, d'autre part la roue montée sur le grand axe laquelle engrène avec elle. En effet, par chaque révolution de l'axe la Terre parcourt son orbite entière, puisque nous donnons des nombres de dents égaux à la roue qui porte la Terre et à celle de l'axe qui lui correspond, p.e. 60 ou tel autre nombre qui leur convient.

Toute la question se réduit donc à ceci: étant donnés deux grands nombres ayant entr'eux un certain rapport, en trouver d'autres plus petits pour les dents des roues qui ne soient pas incommodes par leurs grandeurs et qui aient entr'eux à peu près le même rapport, de telle façon qu'aucun couple de nombres plus petits ne fournisse un rapport plus approchant de la vraie valeur. Mais nous rendrons la chose plus claire par un exemple. Supposons donc qu'il faille trouver les dents de la roue de Saturne et celles de la roue plus petite, indiquée par la lettre K dans la Fig. 144, qui la meut et est elle-même montée sur l'axe.

Le mouvement annuel de Saturne — je me base tant ici qu'ailleurs sur les plus récentes Tables de Riccioli — est dit avoir la valeur 12°13'34"18''' 30). Celui de la Terre, que Riccioli appelle celui du Soleil, est de 359°45'40"31''' 31). Réduisant l'une et l'autre à des tierces, on obtient le rapport 2640858 : 77708431 32). Par conséquent, comme le dernier nombre est au premier, ainsi est la période de Saturne au temps dans lequel la Terre accomplit sa révolution autour du Soleil; partant le nombre des dents de la roue de Saturne doit avoir, avec la meilleure approximation pratiquement possible, ce même rapport au nombre des dents de sa roue motrice. Pour trouver donc des nombres plus petits qui expriment approximativement ce rapport, je divise le plus grand nombre par le plus petit, puis le plus petit par le reste de la première division et ensuite ce reste par le nouveau reste. Continuant ainsi je trouve que la première division donne

$$29 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 \text{ etc.}}}}}}} \quad 33)$$

c. à d. un nombre plus une fraction à numérateur 1 dont le dénominateur possède de nouveau une fraction adjointe à numérateur 1 et dont le dénominateur est composé de la même manière; et ainsi de suite. Poursuivant ce calcul aussi longtemps que possible, on parvient enfin par la division à un reste 1. 34)

Or, lorsqu'on néglige à partir d'une fraction quelconque les derniers termes de la série, p.e. ici la fraction $\frac{1}{5}$ 33) et celles qui la suivent, et qu'on réduit les autres plus le nombre entier à un commun dénominateur, le rapport de ce dernier au numérateur, sera voisin de celui du plus petit nombre donné au plus grand; et la différence sera si faible qu'il serait impossible d'obtenir un meilleur accord avec des nombres plus petits. Le mode de la réduction est aisé; en effet, les dernières fractions, par lesquelles nous commençons, savoir $\frac{1}{2} + \frac{1}{1}$ valent $\frac{1}{3}$; passant à celle qui précède immédiatement et réduisant, $\frac{1}{2 + \frac{1}{3}}$ donne $\frac{3}{7}$; prenant ensuite avec la fraction le nombre entier et réduisant de nouveau, $29 + \frac{3}{7}$ donne $\frac{206}{7}$. Par conséquent le rapport 7 : 206 est voisin de 2640858 : 77708431. C'est pourquoi nous avons donné 206 dents à la roue de Saturne et 7 à sa roue motrice.

N° 2273.

CHRISTIAAN HUYGENS à J. B. COLBERT.

27 AOÛT 1682.

Appendice au No. 2272.

La minute se trouve à Leiden, coll. Huygens [1]).

Defcription de la Machine Planetaire Automate.

La boete octagone qui contient la machine eft large et haute de 2 pieds profonde de 6 pouces. La plaque dorée ou l'on voit le fyfteme planetaire eft couverte d'une glace enchaffee dans une bordure de cuivre dorè qui s'ouvre a charniere.

Les chemins ou orbites des Planetes font percées tout au tour, et les planetes paroiffent au deffus de la plaque, chacune eftant reprefentée par une petite demie boule d'argent placée et enchaffée au centre d'un petit rond dorè plat qui reprefente le ciel ou vortex particulier de la planete et qui la rend plus aifée a remarquer, outre que ces mefmes ronds fervent dans Saturne Jupiter et la Terre a porter leur compagnons ou lunes, defquelles noftre lune tourne regulierement autour de la terre, et montre par fa pofition les nouvelles et pleines lunes et les autres phafes.

Le nombre de l'année, et le jour du mois paroiffent a travers 2 ouvertures qui font entre les orbites de Saturne et de Jupiter vers le bas.

L'heure [a]) et les minutes fe voient dans l'ouverture en demi cercle qui eft entre les orbites de Jupiter et de Mars, ou le petit rond qui porte le nombre de l'heure, marche de gauche a droite et marque en paffant les minutes gravées a la circonference. Et quand cette heure fe cache, il en paroit une autre a l'oppofite et ainfi toutes fucceffivement.

Une horloge enfermée dans la machine, et que l'on monte tous les 8 jours, fait aller les heures ies jours les annees et toutes les planetes, fort precifement dans le temps de leur periodes, tant pour le moyen mouvement que pour l'inegalitè qui demande qu'elles aillent plus lentement a mefure qu'elles fe trouvent plus eloignees du foleil, en quoy j'ay reprefentè l'hypothefe de Kepler.

Quand on veut voir en un moment les mouvements des planetes qui fe font pendant plufieurs annees, ou que l'on fouhaite de fcavoir leur pofition a quelque jour donnè d'année paffée ou future, on applique la manivelle du cofté droit, et on la tourne d'un mouvement fort aifè, jufqu'a ce que l'an et le jour donnè paroiffent au milieu des deux ouvertures fufdites. alors toutes les planetes font dans leur

[1]) Dans le livre F des Adverfaria, p. 98.

pofition veritable pour le temps donnè. Et pour les remettre au jour prefent on n'a qu'a tourner la manivelle du fens contraire, jufqu'a ce que l'année et le jour ou l'on eft paroiffent comme auparavant au milieu des mefmes ouvertures. L'on peut fcavoir par ce moyen a quel jours toutes les conjonctions oppofitions et divers afpects des planetes doivent arriver et quand elles devienent vifibles ou fe cachent pres du foleil. Auparavant que de tourner la manivelle l'on lache une vis en dedans de la machine, par ou l'horloge ne luy communique plus fon mouvement aux planetes, mais les heures pourtant vont toufjours leur train et quand on a oftè la manivelle on ferre derechef cette vis a fin que tout reprenne fon mouvement ordinaire.

Afin de voir quand on veut le dedans de la machine on a fufpendu toute la boete a un chaffis de fer qui tourne fur deux pivots. Il eft cachè pour la plufpart derriere la boete. Par ce moyen on fait venir devant le coftè de derriere qui touchoit le mur ou la tapifferie, et alors en abatant le couvercle on voit toute l'invention de la machine et l'horloge qui donne le mouvement. La principale pièce qui paroift eft un grand axe couchè de travers le long de la placque de derriere dont il egale la largeur. cet axe porte les pignons qui engrainent dans les roues de chaque planete et dans celles des jours et des annees lefquelles roues font toutes enfermees entre les 2 plaques de devant et de derriere dont la diftance eft d'un pouce. Et la plaque de derrière eft [ ] [2]) droit de chaque [ ] [2]) à fin qu'ils puiffent toucher leur roues.

Avantages de ma machine par deffus celle de Mr. Romer [3]).

Que la miene reprefente toutes les orbites dans leur veritable proportion au lieu qu'il a falu a Mr. Romer faire celles de Mercure Venus la Terre et Mars
1. beaucoup plus grandes qu'il ne faut a proportion de Jupiter et Saturne. D'ou
2. s'en fuit que fa machine ne reprefente pas la veritable Idée du fyfteme du
3. monde ni ne montre point les lieux apparents de Saturne et de Jupiter, ni les conjonctions des 3 planetes ☿ ♀ ♂ ni de la lune avec Jupiter et Saturne.

4. Que mes periodes de toutes les planetes font beaucoup plus juftes que dans la machine de M. Romer, parce que j'ay une meilleure methode [4]) de trouver les nombres des dents des roues.

4. Que mes planetes courrent au deffus de la plaque au lieu que les fienes font

[2]) Mots illisibles.

[3]) Ce qui suit est écrit au recto de la feuille dont le verso contient la description précédente. Il est donc incertain, et même douteux, que cette pièce ait fait partie de la description envoyée à Colbert. Consultez, d'ailleurs, la Lettre N°. 2255.

[4]) Celle des fractions continues. A cette occasion Chr. Huygens fut conduit à la découverte des théorèmes fondamentaux bien connus qui les concernent. On les trouve exposés pour la première fois dans la description de son planétaire, citée dans la note 5 de la Lettre N°. 2255.

derriere et ne paroiſſent qu'a travers les cercles vuidez qui chacune en 4 endroits doivent laiſſer des morceaux pour tenir la plaque enſemble, derriere leſquels morceaux les corps des planetes s'eclipſent. Outre cela il y a encore
5. ces deux avantages, l'un que Jupiter et Saturne portent avec eux leur ſatellites.
6. l'autre qu'en mettant quand je veux une terre un peu plus grande, à la place de celle que l'on y voit ordinairement accompagnée de la lune, je repreſente par là les diverſes ſaiſons de l'année, et lè lever du ſoleil et des planetes au deſſus de noſtre horizon, et leur coucher. De meſme qu'en mettant un plus grand
7. Saturne je montre la cauſe de toutes les differentes apparences de l'anneau dont cette planete eſt entourée.

8. Que ma machine a ſon propre mouvement par le moyen de l'horloge que j'y ay enfermee qui montre les Heures et les minutes. au lieu que l'autre ne va que lors qu'on la tourne avec la main. Et ſon mouvement eſtant malaiſè il n'y auroit preſque point moyen de la faire aller par une horologe, de plus ce mouvement difficile fait que lors qu'on veut faire voir a l'œil le mouvement des planetes on ne peut pas appliquer une manivelle a l'arbre, mais il y faut neceſſairement une clef, ce qui produit un mouvement interrompu et par
9. repriſes; au lieu que ma machine tournant par le moyen d'une manivelle, fait voir un mouvement egal et continu dans toutes les planetes et qui va ſans peine.

10. Que celle de M. Romer ne peut eſtre ſuſpendue contre un mur comme la miene mais qu'elle doit eſtre ſur une table ou ſur un pied, en ſorte qu'on y puiſſe aller derriere pour la faire tourner avec la clef, et pour voir le jour de l'année.

11. Que l'on peut ouvrir la miene eſtant pendue contre un mur, de meſme que l'on ouvre une montre, pour faire voir le dedans et pour y toucher en cas de beſoin, ce qui n'eſt pas ainſi dans celle de M. Romer qui ne s'ouvre que par quelqu'un des coſtez.

12. Que le jour du mois ſe voit par devant ſur la plaque, au lieu que dans la machine de M. Romer ce jour eſt marquè ſur le coſtè de derriere.

13. Que dans la miene il y a un fil attachè a la Terre et un autre au ſoleil par le moyen deſquels on decouvre le lieu apparent des planetes dans le zodiaque, ce qui ne ſe peut faire dans la machine de Romer a cauſe des tenons.

---

[a]) Ce que cette machine a de particulier par deſſus celle de Mr. Romer.

3.d) Une semaine plus tard, la quatrième séance consista en une évaluation utilisant un autre extrait de la même description du planétaire. Des réutilisations de l'objet "fraction continue" furent faites durant cette semaine en interrogations orales de courte durée. Ci-dessous, texte du contrôle-évaluation de trente minutes.
Rappel de la méthode, énoncée par Huygens en ces termes : "Pour trouver donc des nombres plus petits qui expriment approximativement ce rapport, je divise le plus grand nombre par le plus petit, puis le plus petit par le reste de la première division et ensuite ce reste par le nouveau reste ..."

I Utilisez cette méthode pour justifier le résultat trouvé par Huygens dans le paragraphe suivant après avoir justifié la conversion en minutes des périodes.

> C'eſt auſſi à peu près de la même manière qu'ont été trouvées les dents des pignons qui meuvent Mercure: prenant 365 jours, 5 heures, 49' 15"46''' pour la période de la terre ſous l'écliptique [40]) et 87 jours, 23 heures, 14'24" pour celle de Mercure ſous elle [41]), ou plutôt, pour la facilité du calcul, reſpectivement 365 jours, 5 heures, 50' et 87 jours, 23 heures, 15' [41]), on trouvera pour le rapport des révolutions de Mercure à celles de la Terre 105190 : 25335 ou 21038 : 5067, par la diviſion deſquels nombres, exécutée ſuivant la méthode ſuſdite, il vient

$$\frac{21038}{5067} \;\Big|\; 4+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{7}\text{ etc.}}}}}}}}}$$

II Quelle fraction obtient-on si l'on stoppe les divisions faites par Huygens au trait noir dans le paragraphe suivant ? Quelle conclusion peut-on en déduire quant au nombre de roues.

> Pour établir les nombres des dents des rouages qui mènent la Lune [42]), nous prenons ici auſſi pour le même mouvement annuel 365 jours, 5 heures, 50' et pour celui de la Lune 29 jours, 12 heures, 44' 3" ou plutôt 45' pour la facilité du calcul, d'où l'on trouvera pour le rapport des révolutions de la Lune à celles de la Terre 105190 : 8505 ou 21038 : 1701; en diviſant comme auparavant il en réſulte

$$\frac{21038}{1701} \;\Big|\; 12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+1}}}}}}$$

III Observations sur l'expérience

a) Le premier groupe chercha la définition de la tierce, fit la conversion en tierces sans erreurs, rappporta les dates de Riccioli (1598-1611), sa professeion (astronome et géographe) et sa nationalité (italien). Quant à la devinette sur l'auteur du texte, ils conjecturèrent d'abord Descartes et écrivirent : "mais après réflexion c'est impossible car celui-ci est mort 21 ans avant Riccioli alors que l'auteur parle des "plus récentes tables de Riccioli" ; celui-ci n'établit des tables qu'à la fin de sa vie. Nous supposons donc que Pascal est l'auteur de ce texte : c'est le savant qui correspond le mieux.

b) Dans les autres groupes l'expression de Huygens pour ce que nous nommons fraction continue suscita beaucoup de commentaires. Un seul groupe donna un exemple conforme aux souhaits de Huygens.

c) La calculette utilisée par les élèves donne pour le quotient :

$$\frac{77708431}{2640858}$$

le nombre 29,425448. Devant leurs difficultés pour trouver le reste de la division euclidienne, je leur conseillais de taper $29 \times 2640858 - 77708431$ qui leur donnaient l'opposé du reste.

d) La division des deux membres de l'égalité $77708431 = 29 \times 2640858 + 1123549$ par 2640858 donna de la part de presque tous les élèves :

77708431 = 29 + 1123549
2640858

L'oubli du dénominateur pour le dernier terme me permit de leur rappeler l'importance de la notion de distributivité.

e) Le calcul de l'écriture rationnelle de

$29 + \frac{1}{2}$, $29 + \frac{1}{1+2}$ leur sembla un jeu amusant

f) Les élèves avaient déjà lu des textes anciens, la lecture des textes de Huygens les valorisent quant à cette maîtrise, elle me permet d'insister sur le fait que la parcellisation actuelle des connaissances n'a pas toujours régné.

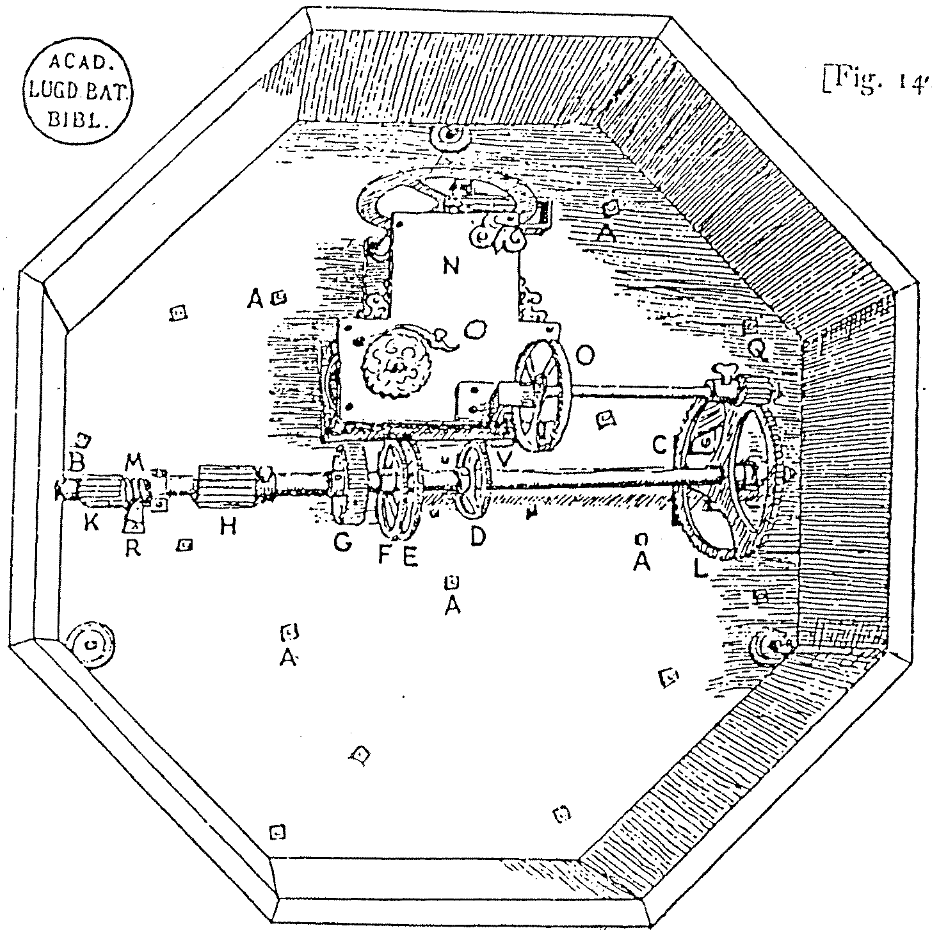
D'autres expériences sur ce texte ont eu lieu et auront lieu. Un collège de l'enseignement technique stagiaire du PAF "Approche des mathématiques par des textes historiques", que le groupe M.A.T.H. anime, propose une réalisation moderne d'un planétaire avec ses élèves utilisant les calculs de Huygens ; cette construction est presque achevée : il eut l'astuce de remplacer les roues dentées par de multiples disques de caoutchouc. Un travail sur l'apport théorique de Huygens à propos des "fractions continues" est entrepris avec une étude du livre VII des Eléments d'Euclide que cite Huygens à ce propos.

Et voici ce que Huygens dessina pour les besoins du technicien.

CB est l'axe de fer long de 2 pieds

D, E, F, G, H : roues dentées qui mettent en mouvement
Mercure, Vénus, la Terrre, Mars, Jupiter.

K,O : Saturne.



[Fig. 144].

BIBLIOGRAPHIE

P. ROUSSEAU Histoire de la Science - Paris - Fayard 1945

R. TATON Histoire Générale des Sciences - Paris PUF 1958

C. HUYGENS Œuvres Complètes T 21 Amsterdam 1728 par J.Van's Gravesand

A. KOYRE Etudes d'histoire de la pensée scientifique Paris- Gallimard 1973

J. ITARD Essais d'histoire des mathématiques. Paris- Blanchard 1984.

J. ITARD Arithmétique et théorie des nombres - Que Sais-je

U. FRANKFOURT et A. FRENK Christiaan Huygens - trad. Française - Edition Mai 1976 par I. Sokolov

VALIRON Mathématiques

Le temps en question 1979. Institut Néerlandais, 12 rue de Lille Paris VII

Endeavour Janvier 1959. Revue Bilingue - article le Planétarium par H.C. King

Actes du Colloque Montpellier - I.R.E.M.

A. KOESTLER Les Somnambules - Presse Pocket.

ATELIER : LA CARTE DE CASSINI

A. BOYE

X. LEFORT

A la suite de la création d'un réseau IREM centré sur l'élaboration de la carte dite de CASSINI (XVIIIème), une documentation conséquente a pu être réunie, utilisée en particulier au cours d'activités interdisciplinaires réalisées ces dernières années au Lycée de la Baule.

L'atelier proposé consistait à retracer par un bref exposé l'historique de la carte, puis à lire un texte de Jacques CASSINI, issu des Mémoires de l'Académie de 1718, exposant les méthodes des cartographes de l'époque.

Il était prévu ensuite de présenter l'expérience interdisciplinaire du Lycée de la Baule, en particulier l'initiation à la trigonométrie sphérique.

Le programme prévu était sans doute trop vaste, puisque la première partie a nécessité la quasi totalité de l'horaire prévu. Cette partie a cependant été l'objet d'échanges fructueux sur l'historique de la carte de CASSINI et son contexte.

* * *
* *
*

I) HISTORIQUE

C'est sous l'impulsion de COLBERT que fut fondée à Paris en 1666, l'Académie Royale des Sciences. Parmi les activités dont le ministre voulait charger cette nouvelle académie, venait en première place l'établissement de cartes précises du royaume. Les comptes rendus des premières séances en font foi. Il faut convenir que, jusqu'à cette date, la cartographie restait assez sommaire, malgré les progrès réalisés dans les claculs des coordonnées géographiques (longitude et lattitude).

Il se trouve que les préoccupations scientifiques de l'époque vont trouver un terrain d'entente avec les désirs de COLBERT. Il s'agissait alors pour les milieux savants de déterminer la forme et les dimensions de la terre, en particulier pour vérifier les hypothèses de NEWTON. En 1669, l'abbé PICARD entreprenait dans ce sens, aux environs de Paris, la mesure de la distance séparant deux points de même longitude et de lattitudes connues ; ceci permettait d'en déduire la longueur du degré de méridien, et, dans l'hypothèse de la sphéricité de la terre, de calculer le rayon terrestre. Cette mesure réalisée à partir d'une base, puis de triangles, permettait aussi de lever tous les points remarquables de la région et d'en dresser la carte précise. En 1671, PICARD rendait compte devant l'Académie de sa mesure du méridien, et la carte réalisée d'après ses relevés puis complétée sur toute la région parisienne paraîtra en 1678.

Par ailleurs, COLBERT avait remarqué en 1668 l'ouvrage de Jean Dominique CASSINI (1625-1712) sur l'utilisation des occultations des satellites de Jupiter pour calculer les longitudes. Ayant pris contact avec l'auteur, le ministre lui proposa une place importante à l'Observatoire de Paris, nouvellement crée sous la direction de PICARD. CASSINI accepta et sitôt arrivé à Paris, participa à la mesure du méridien, puis à la levée de la première carte. A la mort de PICARD, en 1682, il prenait la direction des opérations, prolongeant, en particulier avec LAHIRE le calcul du méridien vers Dunkerque et Bourges, et poursuivant par ailleurs la cartographie des côtes de France, travail entrepris également par PICARD.

La mort de COLBERT en 1683, ralentissait les travaux, son successeur, LOUVOIS, ayant d'autres objectifs à proposer tant à l'Académie qu'à l'Observatoire. De plus, la guerre réduisant les subsides, la survie de ces institutions devint précaire. CASSINI mourait en 1712, mais son fils Jacques CASSINI (1677-1756) reprenait ses travaux, notamment en ce qui concernait la poursuite et la vérification du calcul du méridien. Cependant, les résultats obtenus sur ce dernier point semblaient en faveur de l'hypothèse suivant laquelle la terre serait un ellipsoïde allongé vers les pôles (degré du méridien plus court vers le nord).

Tous ces problèmes n'avancèrent pas, ou très peu, jusqu'en 1733, date à laquelle les travaux destinés à dresser la carte de France furent repris par l'Académie. Le calcul de la "méridienne" permettant une bonne description des régions de même longitude que Paris. Jacques CASSINI commença le repérage des régions à l'Est et à l'Ouest par rapport à des perpendiculaires au méridien de Paris. Par ailleurs, le problème de la forme de la terre restant posé, l'Académie envoya deux expéditions, l'une en LAPONIE (MAUPERTUIS, CLAIRAUT), en 1735-1736, l'autre au PEROU (BOUGUER, LA CONDAMINE) en 1735-1746, lesquelles confirmèrent l'hypothèse de NEWTON, selon laquelle la terre est un ellipsoïde aplati aux pôles.

Jacques CASSINI vieillissant, son fils, César-François CASSINI de THURY reprenait le flambeau et achevait en 1744 une première carte de France au 1/878000.

En 1746, CASSINI DE THURY suivit l'armée en campagne dans les Flandres. Sa charge était alors de dresser la carte des différents champs de bataille. Au vu des travaux réalisés, ayant pris connaissance de la carte de 1744, et soumis à la pression tant des membres de l'Académie que de certains nobles et politiques, Louis XV ordonnait la réalisation d'une carte plus précise encore (1/86400) nécessitant la mise en oeuvre d'un matériel important et la formation d'un nombreux personnel ; l'échelle souhaitée permettait en effet la reproduction de nombreux détails. Quant aux problèmes financiers que posait une telle entreprise, Louis XV s'en remettait à son controleur général des finances, en qui CASSINI rencontrait alors plus qu'un allié.

Les premières mesures commencèrent en 1750, mais l'époque faste fut de courte durée. La guerre de sept ans, en 1756, absorbait énergie et subsides et les crédits furent coupés. CASSINI eut alors l'idée de financer la poursuite des travaux par la constitution en 1758 d'une association et l'ouverture d'une souscription. Le roi laissait à cette société tout le matériel et les souscripteurs devaient toucher à la fois les tirages des premiers feuillets lors de leur parution et des dividendes sur la vente au public. Par ailleurs, les provinces furent mises à contribution lorsqu'elles furent concernées par l'avance des travaux.

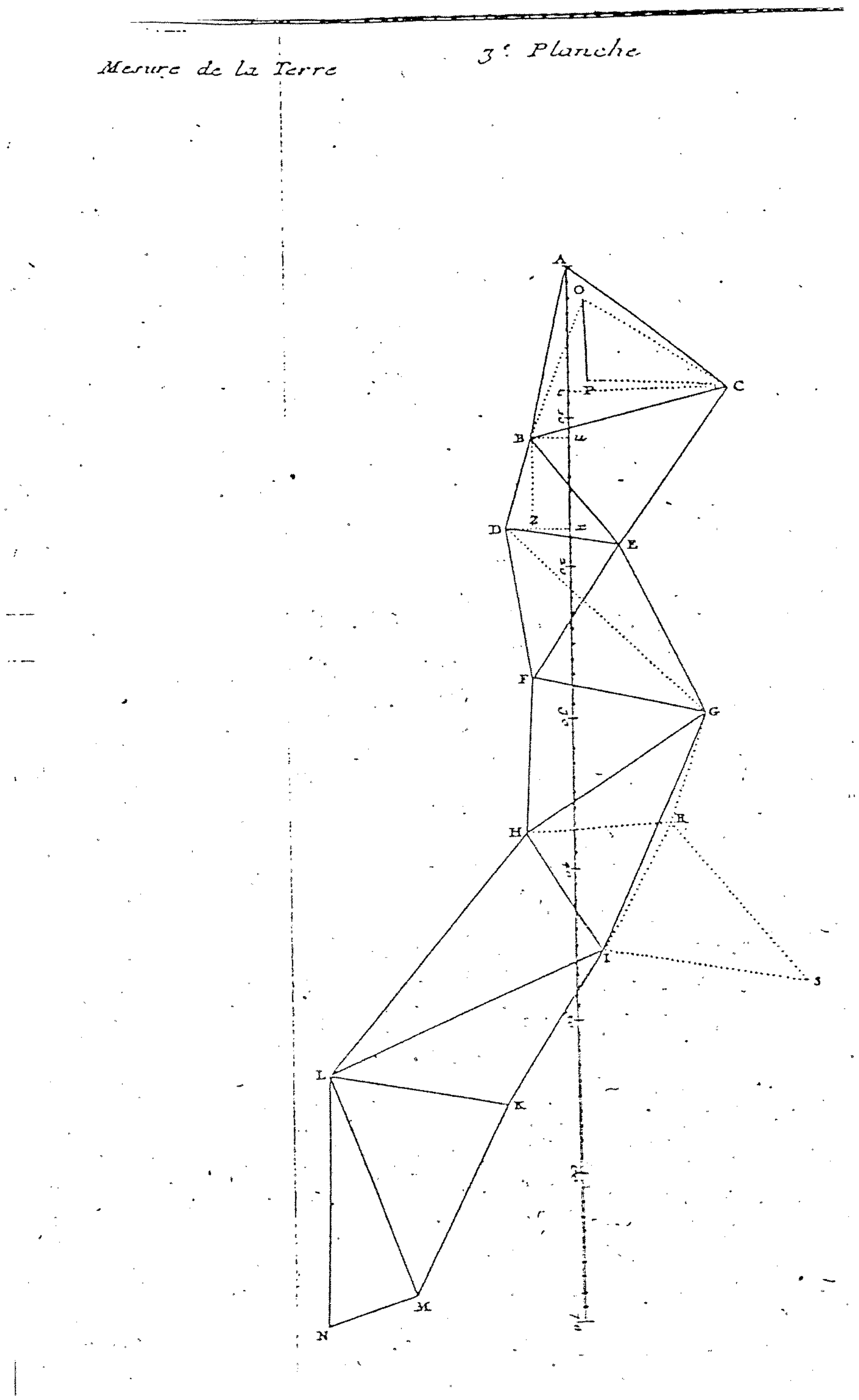
Dix ans après le début des premiers relevés, en 1760, 50 feuillets sur les 182 prévus étaient déjà imprimés. Cependant, les difficultés se multiplièrent, tant sur le plan financier, certaines provinces rechignant à payer, que sur le plan matériel, le personnel voyant son activité contrariée par les notables locaux, souvent désireux de le faire travailler à leur propre service. Il fallut attendre 1789 pour que la totalité des travaux sur le terrain soit terminée ; la Bretagne avait tergiversé jusqu'en 1781 pour verser sa contribution et permettre la réalisation des mesures sur son territoire.

L'histoire de la carte ne s'arrête pas là. Jacques-Dominique CASSINI, fils de CASSINI DE THURY (1748-1845) prenait la suite de son père mort en 1784, en particulier la direction de la société patronnant la réalisation de la carte. (Il s'agit donc de la quatrième génération des CASSINI). Les travaux sur le terrain s'achevaient, et il ne restait que quelques feuillets (17 sur 182) à graver (concernant la GUYENNE et la BRETAGNE) lorsque arriva l'année 1789. Les années révolutionnaires n'allaient pas favoriser l'achèvement de la carte, puisqu'en 1793 le gouvernement donnait au "Dépot de la Guerre" la charge de terminer les impressions en cours, d'entretenir le matériel et d'actualiser les mesures. La Société fondée en 1758 était sans doute spoliée, mais surtout, la carte, appartenant au domaine militaire, ne pouvait plus être librement publiée. Il fallut attendre 1815 pour qu'elle soit entièrement imprimée, avec divulgation des compléments et des corrections.

En 1818, Jacques-Dominique CASSINI entreprenait une action judiciaire pour récupérer le matériel et obtenir un dédommagement convenable. S'il fut confirmé comme directeur de l'Observatoire, le dernier des CASSINI n'obtint qu'une indemnisation bien inférieure à ce qu'il souhaitait. Il faut dire cependant qu'une grande partie des souscripteurs de 1758 avait disparu lors de la Révolution. Il demeurait une oeuvre remarquable, la première à avoir réalisé l'ambition de dresser la carte topographique d'un pays.

II) METHODES UTILISEES

A partir d'un extrait (pages suivantes) des "mémoires de l'Académie des Sciences" de 1718, texte rédigé par Jacques CASSINI, il est aisé de comprendre les méthodes géométriques utilisées pour déterminer la longueur de l'arc du méridien, puis pour lever ces points remarquables du pays et en dresser la carte.



II.

Methode dont l'on s'eſt ſervi, pour décrire la ſituation de la Ligne Meridienne de l'Obſervatoire, par rapport aux lieux differents compris dans les Triangles.

Pour décrire la ſituation de la Ligne Meridienne de l'Obſervatoire par rapport aux Triangles, on a d'abord obſervé du milieu de la face Meridionale de l'Obſervatoire, l'angle BAt, que la Tour de Montl'hery faiſoit avec le point horiſontal du Midi, qu'on a trouvé dans le chap. 5. de $11^d\ 57'\ 50''$. On a retranché cet angle de l'angle BAC, que la Tour de Montl'hery fait avec le gros Clocher de Brie-Comte-Robert, qui a été obſervé de $63^d\ 0'\ 15''$, & on a eu l'angle CAt de $51^d\ 2'\ 25''$, dont le complement ACt eſt de $38^d\ 57'\ 35''$; & par conſequent au Triangle rectangle AtC, dont le côté AC a été déterminé par le premier Triangle de 13238 toiſes 4 pieds; & les angles CAt & ACt ſont connus, on aura le côté Ct, diſtance Orientale du gros Clocher de Brie-Comte-Robert à la Meridienne, de 10294 toiſes 1 pied; & At, diſtance de l'Obſervatoire à la perpendiculaire tirée de Brie-Comte-Robert ſur la Meridienne, de 8324 toiſes 2 pieds.

On trouvera de la même maniere, la diſtance Bu de la Tour de Montl'hery à la Meridienne, & la diſtance Au, de l'Obſervatoire à la perpendiculaire Bu, tirée de la Tour de Montl'hery ſur la Meridienne; car dans le Triangle rectangle AuB, dont le côté AB a été déterminé par le premier Triangle de 11756 toiſes 2 pieds; l'angle BAu, que la Tour de Montl'hery fait avec la Meridienne de l'Obſervatoire, étant connu de $11^d\ 57'\ 50''$, & ſon complement ABu de $78^d\ 2'\ 10''$, on aura le côté Bu, diſtance Occidentale de la Tour de Montl'hery à la Meridienne, de 2437 toiſes, & Au, diſtance de l'Obſervatoire à la perpendiculaire tirée de la Tour de Montl'hery ſur la Meridienne, de 11501 toiſes.

Pour trouver preſentement la ſituation de Torfou & des

des autres lieux ſucceſſivement à l'égard de la Meridienne, il faut tirer du point B, Bz parallele à Ax, & perpendiculaire à Bu. On prendra enſuite la ſomme des angles ABC, CBE & DBE, qui eſt de $184^d\ 26'\ 55''$, dont on retranchera l'angle ABu de $78^d\ 2'\ 10''$ plus l'angle droit uBz, & l'on aura l'angle DBz de $16^d\ 24'\ 45''$; & dans le Triangle rectangle BzD dont l'angle DBz eſt connu & le côté BD de 6220 toiſes 3 pieds, on trouvera le côté Dz de 1757 toiſes 4 pieds, & le côté Bz de 5967 toiſes 2 pieds. Ajoutant Dz à Bu qui a été trouvé ci-devant de 2437 toiſes, on aura Dx, diſtance Occidentale de Torfou à la Meridienne, de 4194 toiſes 4 pieds. Ajoutant pareillement Bz ou ux à Au qui a été trouvé ci-devant de 11501 toiſes, on aura Ax, diſtance de l'Obſervatoire à la perpendiculaire tirée de Torfou ſur la Meridienne, de 17468 toiſes 2 pieds.

C'eſt de cette maniere dont on s'eſt ſervi, pour décrire la Meridienne de l'Obſervatoire par rapport aux Triangles, & déterminer ſa longueur en toiſes. L'on s'eſt contenté d'en rapporter ici quelques exemples, pour faire connoître la methode que l'on a pratiquée, pour trouver ſucceſſivement la poſition de chaque lieu à l'égard de cette Meridienne.

Diſtances entre divers lieux, déterminés par les Obſervations.

Toiſes.	
9824	Diſtance de Boiſcommun à Lorris.
11441	De Châteauneuf à Lorris.
10288	De Montargis à Lorris.
8206	De Châteauneuf à la Courdieu.
7324	De Boiſcommun à la Courdieu.
10976	D'Orleans à la Ferté-Saint-Aubin.
5821	De Vouzon à la Ferté-Saint-Aubin.
19458	D'Orleans à Sully.
8187	De Châteauneuf à Sully.

Suite des Mem. de 1718. H

II. TRIANGLE BCE.

BC 13121 4

BCE 40 34 0
CBE 65 16 30
BEC 74 9 30

Donc CE 12389 1
& BE 8870 3

Les angles de ce second Triangle ont été trouvés précisément de même que M. Picard les avoit observé.

III. TRIANGLE BDE.

BE 8870 3

DBE 55 8 55
BDE 81 0 35
BED 43 50 30

Donc BD 6220 3
& DE 7369 5

IV. TRIANGLE DEF.

DE 7369 5

EDF 72 38 50
DEF 65 46 30
DFE 41 34 40

Donc DF 10127 2
& EF 10599 5

V. TRIANGLE EFG.

EF 10599 5

FEG 58 26 20
EFG 69 47 40
EGF 51 46 0

Donc EG 12663 4
& FG 11498 2

Autrement pour EG, DF & FG au Triangle DEG.

DE 7369 5

DEG 124 12 50
EDG 35 51 20

Donc EG 12663 5
& DG 17878 3

Au Triangle DFG.

DG 17878 3

FDG 36 47 30
DFG 111 22 20

Donc DF 10127 1
& FG 11498 2

VI. TRIANGLE FGH.

FG 11498 2

GFH 82 7 35
FGH 45 40 25
FHG 52 12 0

Donc FH 10410 2
& GH 14414 5

VII. TRIANGLE GHI.

GH 14414 5

GHI 91 55 35
GIH 56 5 35

Donc GI 17358 3
& HI 9198 5

Autrement pour HI par Bromeille au Triangle GHR.

GH 14414 5

HGR 35 33 10
GHR 29 55 45
GRH 114 31 5

Donc GR 7904 4
& HR 9212 1

Au Triangle HRI.

HR 9212 1

HRI 58 56 10
IHR 61 59 50
HRI 59 4 0

Donc IR 9482 2
& HI 9199 3

VIII. TRIANGLE HIL.

HI 9198 5

LHI 72 57 55
HIL 80 38 5

Donc HL 20412 4
& IL 19780 5

IX. TRIANGLE ILK.

IL 19780 5

LIK 34 26 30
IKL 112 3 20
ILK 33 30 10

Donc IK 11780 4
& KL 12069 4

X. TRIANGLE KLM.

KL 12070 4

KLM 58 27 25
LKM 73 48 0
LMK 47 44 35

Donc KM 13899 3
& LM 15661 3

XI. TRIANGLE LMN.

LM 15661 3

MLN 22 7 55
LMN 87 38 30
LNM 70 13 35

Donc LN 16628 2
& MN 6269 5

Pour la Position de Montargis au Triangle IRS.

IR 9482 2

IRS 66 31 35
RIS 72 45 30

Donc RS 13883 3
& IS 13333 5

III) A PARTIR D'UN P.A.E. REALISE EN CLASSE DE SECONDE, QUELQUES "PISTES" POUR L'EXPLOITATION EN CLASSE DU THEME "LA CARTE DE CASSINI".

Notre propos, choisissant un thème d'histoire des sciences, est multiple.

Il s'agit en premier lieu d'apprendre aux élèves à réunir une documentation, l'exploiter, et présenter finalement leur travail ; le thème de la carte de Cassini, nous le verrons, présente sur ce plan plusieurs avantages.

Dans un second temps, il s'agit d'élargir la "culture scientifique" des élèves de replacer les mathématiques ou la physique dans le contexte plus global de l'évolution sociale ou historique, et, si possible d'intéresser les élèves qui ne sont pas particulièrement attirés par les sciences ou qui y sont en difficulté. Là aussi, le thème choisi est intéressant et permet très facilement de pratiquer une activité interdisciplinaire. Nous avons travaillé en mathématiques, histoire, français de façon très fructueuse ; un professeur de physique ou de technologie pourrait s'y joindre très bien aussi.

Enfin, il s'agit d'intégrer cette étude à la matière scolaire proprement dite. En mathématiques nous avons pu faire, en particulier, de la trigonométrie "active", mais le champ est vaste. Le professeur d'histoire, bien sûr, sur deux siècles peut trouver de nombreuses prolongations du cours et étudier les problèmes de cartographie ; le professeur de français quant à lui, a pu fixer l'époque sur le plan littéraire et trouver des textes se référant aux idées sur la forme de la terre ou les conceptions du monde.

J'exposerai principalement l'aspect "mathématique" du thème, puisque c'est celui que j'ai pris en charge.

Recueil de la documentation

C'est un aspect du thème qu'il faut souligner. Contrairement à d'autres sujets les élèves ont pu, ici, participer activement à la recherche. Nous sommes dans un petit lycée, éloigné de tout centre universitaire ou grande bibliothèque ; la plupart du temps nous sommes amenés à proposer aux élèves nos documents ou textes personnels qu'ils n'ont plus qu'à exploiter.

Mes collègues et moi-même ne nous étions jamais particulièrement penchés sur les problèmes de cartographie, aussi nous avons glané les premiers renseignements utiles dans les encyclopédies du CDI ; avec la documentatliste nous avons recensé quelques adresses et nous avons écrit. C'est un aspect du projet qui est finalement plein d'enseignement pour les élèves. D'autant que nous avons reçu une documentation substantielle et des indications bibliographiques fort utiles.

Les ressources locales ne sont pas non plus négligeables : recherche de cartes anciennes, comparaison avec les cartes IGN actuelles, recherche de lieu-dits disparus qui ont servi de repères pour la triangulation de Cassini...

Nous avons reçu des documents essentiellement de l'observatoire de Paris, quelques reproductions de cartes de l'IGN ; bien sûr aussi nous avons utilisé les textes fournis par X. LEFORT, et nous avons découvert une somme assez importante d'articles de journaux ou revues, et de livres, sur le sujet.

Lecture des documents, choix des thèmes d'étude

La lecture des textes du XVIIe, XVIIIe siècle par des élèves de seconde n'est pas très aisée tant à cause de l'écriture que de certaines notations aujourd'hui peu usuelles ou abandonnées. Et il faut reconnaître que de prime abord le sujet semble un peu ardu. Nous avons donc fait une liste d'axes de recherche (non épuisée...)

1) Eclaircir les notions de longitudes et lattitudes ; par exemple calculer la distance de deux points du globe dont on connaît les coordonnées. (Le sujet est assez délicat d'autant que les Cassini mesurent en général les distances en degré, minute, seconde comme arcs de cercle, le cas échéant convertis en toises).

2) Eclaircir la polémique sur la forme de la terre et les expéditions en Laponie et ou Pérou.

3) Se familiariser avec quelques systèmes de projection et les erreurs commises en représentant des portions de terre sur une surface plane (ce sujet est abordé assez longuement dans "description géométrique de la France" p. 23-24).

4) Comprendre les procédés techniques utilisés pour la carte de France et le principe mathématique de la triangulation.

5) Examiner les instruments de mesure, leurs perfectionnements, les procédés de visée, les calculs d'erreurs [nous avons laissé de côté cet aspect car nous manquions d'éléments, mais les écrits des Cassini donnent de nombreuses indications (cf : Degré du méridien entre Paris et Amiens... et de la grandeur et de la figure de la terre -suite des mémoires de 1718) et des élèves du technique par exemple pourraient s'y plonger fructueusement].

6) S'intéresser aux connaissances astronomiques du XVIIe et XVIIIe siècle pour comprendre comment faire le point à partir du soleil, des satellites de Jupiter... (ceci fut aussi laissé de côté mais serait sûrement une étude très riche).

7) Rechercher enfin les retombées de ce travail gigantesque dont la plus célèbre est peut être la mise en place du système métrique, mais aussi la descendance des cartes topographiques et la comparaison avec les cartes actuelles.

Quelques éléments du travail effectué

1) Très rapidement la nécessité d'une chronologie s'est fait sentir, pour avoir quelques repères historiques ou culturels car les mémoires de Cassini III et IV y font largement appel.

2) Après un rappel des définitions de lattitude et longitude nous avons entrepris le calcul de la distance de deux points du globe. Pour des élèves de seconde le calcul est un peu difficile car il fait appel entre autre à la trigonométrie du triangle sphérique mais ce n'est pas infaisable.

Pour la compréhension du texte de Cassini, ces calculs sont utiles pour :

a) convertir les distances exprimées en degré, minute, seconde en toises et réciproquement [nous avons pris comme référence la toise de Paris : 1 toise =1949 m ; mais c'est aussi l'occasion de faire le point sur les différentes toises et les difficultés que Picard par exemple eut pour ses mesures].

b) situer les problèmes de la mesure du méridien, le rayon de la terre, et les différences entre une terre aplatie aux pôles ou aplatie à l'équateur.

c) Comprendre les calculs que Cassini de Thury nous expose dans "description géométrique de la France" pour constater que dans la limite de 45 000 toises la confusion entre triangle plan et triangle sphérique donne une erreur négligeable.

3) L'étude de la triangulation elle même le long du méridien de l'observatoire de Paris d'abord, dans la France entière ensuite, nécessite des connaissances trigonométriques sur le triangle quelconque, en particulier la formule :

$$\frac{\sin \widehat{A}}{a} = \frac{\sin \widehat{B}}{b} = \frac{\sin \widehat{C}}{c}$$

les élèves de seconde ne connaissent pas la formule mais il est simple de leur faire trouver.

Deux études peuvent être faites : le calcul de la longueur du méridien [cf : De la grandeur et de la figure de la terre] et la carte topographique à partir des mesures des triangles successifs. Nous avons étudié la position correspondant à notre région car les calculs précis sont donnés par Cassini de Thury [description géométrique de la France p. 26-27-33].

Par ailleurs, pour bien comprendre le principe des mesures nous avons bénéficié du matériel de l'IUT de St Nazaire, prêté aimablement par l'intermédiaire de X. LEFORT et que les élèves ont manipulé. Nous avons constaté que les instruments modernes sont basés sur les mêmes principes que ceux du XVIIIe siècle.

4) Nous avons ébauché une petite réflexion sur le calcul d'erreurs, sur la précision des cartes (les cartes actuelles sont-elles "meilleures" que la carte de Cassini ou les précédents ?).

5) Enfin, notre travail trouvera sa conclusion dans une exposition à la rentrée.

Quelques indications bibliographiques

Outre les textes et mémoires des Cassini on peut consulter :

1° la cartographie ; collection histoire de ; périscope ; éditions C.E.L. (très abordable et première approche très intéressante pour les élèves).

2° l'élaboration d'une carte topographique (B.T.2 publication de l'école moderne française) (n°197).

3° la cartographie. Que sais-je ? n° 937.

4° Total information n° 92 (1982) (publication de Total, qui se trouve sans doute au CDI, très intéressante pour les élèves).

5° textes et documents pour la classe n° 1275 "le document et son histoire : la carte".

6° le catalogue de l'exposition "Cartes et figures de la terre" du centre Georges Pompi-

dou. 1980 (une mine de documents).

7° le monde de l'éducation : juin 1980 - dossier sur "les atlas".

8° la revue "géo" n° 99 - un article sur "IGN les arpenteurs du globe" (petit historique et comparaison entre les moyens du temps des Cassini et les moyens actuels).

9° la vie des sciences (comptes-rendus de l'académie des sciences) (G. Villars) (tome 3 n° 3) - un article sur "la figure de la terre" et les expéditions en Laponie et au Pérou.

10°le procès des étoiles de Florence Trystram (Seghers). Récit de l'expédition au Pérou, très bien documenté.

Les lecteurs qui aimeraient avoir des renseignements plus précis sur la chronologie que nous avons établi, les calculs de trigonométrie sphérique effectués, les détails d'organisation du PAE peuvent s'adresser à : Anne BOYE, 9 avenue des Mûriers - 44500 LA BAULE

* * *
* *
*

HUYGENS - DE WITT

Un modèle mathématique de calcul de la valeur des événements incertains

N. MEUSNIER

A Strasbourg , dans le cadre d'un atelier, j'ai communiqué aux personnes présentes le traité de De Witt de Juillet 1671 et sa correspondance avec HUDDE concernant les rentes viagères ; il est impossible ici de les reproduire in-extenso, mais je les tiens à la disposition de tout lecteur qui désirerait les consulter. Faute de place, je ne reprends pas ici la présentation du contexte socio-historique, de même que je n'analyse pas la "règle générale" concernant les rentes viagères sur plusieurs têtes ; je m'en tiens donc à ce qui est nécessaire à l'interprétation de la démarche de De Witt et à l'analyse de l'articulation entre les modèles théoriques et les données empiriques, selon le schéma suivant :

A - Chronologie et contenu des travaux de HUDDE, HUYGENS et DE WITT sur les rentes viagères pendant l'année 1671.
B - Contenu du traité de DE WITT présenté aux Etats de Hollande le 30 juillet 1671.
C - Problèmes d'interprétation
D - Annexe. (Calcul de la valeur d'une rente amortissable)
E - Bibliographie.

P.S. Des contraintes, impératives et justifiées, formulées par les éditeurs, me conduisent à ne publier ci- après que les paragraphes C, D et E.
A et B sont à la disposition de tout lecteur qui me le demanderait !

C PROBLEMES D'INTERPRÉTATION

I LA CORRESPONDANCE HUDDE - DE WITT

1) Dans la lettre du 24 Août, DeWitt écrit que les calculs effectués n'ont jamais donné une valeur inférieure à 18 fl. ce qui est manifestement en désaccord avec les données précédentes ; il doit s'agir d'une erreur typographique, et il faudrait 16 fl., ce qui est en accord avec ce qu'il écrit dans son mémoire : le calcul "ne conduit jamais à une valeur actuelle inférieure à seize florins" (p. 31)

2) Sur quelles données DeWitt travaille-t-il ?

Le 18 Août Hudde écrit à Huygens que DeWitt a effectué des calculs à partir de son registre. DeWitt nous le confirme dans sa lettre du 24 Août.
DeWitt dispose donc du tableau de mortalité dressé par Hudde, et que celui-ci lui a probablement communiqué en juillet, lorsqu'il est entré en contact avec lui au sujet de son mémoire. Le 22 mai, d'après la lettre de Hudde à Huygens, Hudde ne semble pas avoir encore des contacts très étroits à ce sujet avec De Witt.

Hudde nous apprend dans cette même lettre du 18 Août que De Witt utilise également les registres de La Haye et d'autres, postérieurs aux siens. Très probablement s'agit-il des listes "contenant les cas de décés des années 1600, 1601 ... jusqu'en 1610 "mentionnées dans la lettre du 2 novembre. De Witt insiste à plusieurs reprises sur le grand nombre "d'expériences" qu'elles contiennent (2 novembre), "mes expériences qui portent sur un grand nombre de têtes" (20 octobre), "la communication que j'ai fait tirer, avec le plus grand soin, des Registres de vos Nobles et Grandes Puissances, des données se rapportant à quelques milliers de têtes, choisies autrefois pour y faire reposer des rentes viagères..." (appendice du mémoire, p. 30) De Witt, dispose donc pourtravailler sur le mémoire du 3 juillet de ces données des registres de La Haye sur 11 années, et à coup sûr au mois d'Août, en plus de celles là, des 1495 du tableau de Hudde pour les registres d'Amsterdam sur 5 années.

3) Quelles tables de mortalité ?

Les tableaux dont nous venons de parler, ne sont pas des "tables de mortalités" telle que peut l'être, par exemple, celle de Graunt. Dans sa lettre du 22 mai, Hudde laisse entendre qu'il aurait trouvé "un tout autre ordre" que Graunt, et donc qu'il aurait déduit une table de mortalité des données qui étaient en sa possession. Si cette table a existé, ce qui est possible, nous n'en avons aucune trace.

Par ailleurs, dans sa lettre du 20 octobre, De Witt fait allusion à une supposition de Hudde : "Je vous fais observer que vous supposez que 50 ans après l'âge de 6 ans, c'est-à-dire à l'âge de 56 ans, sur 30 personnes, qui restent alors sur 80, il en meurt 5 dans les 5 années suivantes..." ; un peu plus loin, il écrit : ... "ce principe que les chances de mort de la personne sur la tête de qui la rente est supposée achetée d'abord auraient été les mêmes dans chacune des 80 années. Ce principe s'applique d'une façon absolue, c'est vrai, aux hypothèses de votre susdite règle, si l'on considère la personne en soi et sans aucun rapport avec nulle autre personne ..."

On peut conclure de ces deux passages que Hudde avait proposé une table de mortalité théorique, où sur 80 personnes de l'âge de 6 ans, il en mourait une tous les ans, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus, la dernière mourant donc à 85 ans. On peut supposer, un peu plus hypothétiquement, que sa table portait sur 100 nouveaux-nés, dont 20 mouraient avant 6 ans.

Soit sur 100 il en reste au bout de	6 ans :	80	64
	16 ans :	70	40
	26 ans :	60	25
	36 ans :	50	16
	46 ans :	40	10
	56 ans :	30	6
	66 ans :	20	3
	76 ans :	10	1
	86 ans :	0	0

Cette table est effectivement profondément différente de celle de Graunt dont les données se trouvent dans la colonne de droite.

Quant à De Witt, il utilise de fait dans son mémoire, une table de mortalité théorique, pour les personnes dont l'âge varie entre 3 ans (ou 4) et 80 ans (ou 81).

Elle est donnée par les différentes chances de mourir à ces différents âges, et ces chances ne sont par toutes égales à 1 comme chez Hudde, mais à 1 entre 3 et 53 ans, 2/3 entre 53 et 63 ans, 1/2 entre 63 et 73 ans et 1/3 entre 73 et 80 ans. Ce qui permet de reconstituer une table de mortalité telle que :

sur 384 personnes de 3 ans, il en reste à l'âge de	13 ans :	324
	23 ans :	264
	33 ans :	204
	43 ans :	144
	53 ans :	84
	63 ans :	44
	73 ans :	14
	80 ans :	0

Par ailleurs, dans sa lettre du 20 octobre De Witt corrige, à partir de l'observation des données dont il dispose, cette table théorique, pour les âges allant de 50 à 75 ans, puis de manière toute théorique et sans avoir encore eu le temps d'espérer un contrôle sur des observations, pour des âges allant de 75 à 80 ans. Les données sont les suivantes :

De 50 à 55 il meurt	1/6
55 à 60	1/5
60 à 65	1/4
65 à 70	1/3
70 à 75	1/2
75 à 80	3/5
80 à 85	2/3
85 à 90	7/9
90 à 100	1

Ce qui veut bien dire qu'un même nombre de personnes meurent par intervalle de 5 ans - et aussi, nous dit DE WITT, par an - jusqu'à 75 ans ce qui prolonge son schéma théorique du mémoire jusqu'à cet âge là [en effet, s'il reste n personnes à 50 ans,

$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} n = \frac{1}{6} n$ il en meurt 1/6n par période de 5 ans jusqu'à 75 ans].

Ce qui permet de reconstituer la table de mortalité théorique suivante :

De 135 personnes de 75 ans il en reste à l'âge de 80 ans :	54
de 85 ans :	18
de 90 ans :	4
100 ans :	0

et pour tous les autres intervalles de 5 ans et 75 ans, il en meurt 135, ce qui revient à considérer un total initial de 2025 personnes dont il en meurt 27 chaque année entre 5 ans et 75 ans, à peu près 16 entre 75 et 80 ans, à peu près 7 entre 80 et 85 ans, à peu près 3 entre 85 et 90 ans.

4) CONCLUSIONS

• Sur Hudde :

- La table de mortalité extraite du tableau de Hudde conduirait plutôt, en "négligeant" les variations dans la tranche 16-76, à une suite :
  5 - 10 - 10 - 10 - 10 - 10 - 10 - 5

- Le calcul de la rente viagère, en supposant une mortalité constante, donne une valeur de 17,2171771 fl ou 17 fl 4 s 17/1000 qui est remarquablement proche des valeurs trouvées par Hudde à partir du tableau (18 Août) :

  pour une personne de 6 ans : 17 fl 4 s 3 d
  pour les 796 personnes
  des 10 premières années : 17 fl 1 s 11 d [en fait 17 fl 6s 31/2d]

- Aussi, lorsque De Witt lui écrit qu'il est d'avis que sa "méthode qui est autre que la sienne est bonne et concluante", - cité par Hudde dans sa lettre à Huygens du 18 Août, et que "vous supposez que 50 ans après l'âge de 6 ans ... sur 30 personnes qui restent alors sur 80, il en meurt 5 dans les 5 années suivantes" - la lettre du 20 octobre - je pense que l'on peut faire l'hypothèse que la méthode dont il s'agit consiste à utiliser une table de mortalité théorique, à mortalité constante entre 6 et 86 ans, comme "modèle" de calcul de la rente viagère.

- La critique de la "table de mortalité" de Graunt (22 mai) est tout à fait justifiée (voir le tableau p. 25)

- Hudde est très probablement conscient que ses données ne lui permettront pas de dresser effectivement une table de mortalité - variations importantes d'un regroupement à l'autre - mais qu'elles lui permettent de constater la divergence flagrante avec celle de Graunt et de proposer, en l'état, un schéma de mortalité - le plus simple qui soit - permettant d'établir un modèle de calcul des rentes viagères, qui, testé sur les valeurs empiriques obtenues à partir des 10 premières années des tables paraît fiable.

- Pourquoi Hudde et De Witt cherchent-ils alors à établir et à utiliser une table de mortalité théorique, quand les données qu'ils possèdent leur suffisent pour estimer la valeur des rentes viagères sur une tête ? Je pense qu'en l'absence de données suffisantes cette table théorique est indispensable pour calculer les valeurs des rentes viagères sur plusieurs têtes, de même qu'elle est nécessaire à l'argumentation de style "géométrique" qu'adopte De Witt dans son mémoire. (Voir l'appendice du mémoire et ci-après CII).

• Sur De Witt

- La table théorique du mémoire (voir CII) est corrigée et affinée à partir des observations que permettent les tables d'Amsterdam et de la Haye. Soit :
- le prolongement jusqu'à 75 ans du principe de constance de la mortalité - qui est donc commun à De Witt et Hudde jusqu'à cet âge - ; les dernières années comptant pour si peu dans l'estimation de la valeur des rentes viagères, on comprend pourquoi De Witt peut considérer que la méthode de Hudde est "concluante".
- L'établissement d'une base de référence permettra la construction de la table de mortalité : un taux de mortalité de 1/5 entre 55 et 60 ans, appuyé sur les observations (voir tableau p.25).
- la proposition "provisoire" des taux de mortalité entre 75 et 100 ans : 3/5, 2/3, 7/9 et 1, dont l'origine paraît mystérieuse - d'autant plus que les tables de La Haye sont perdues -, mais à propos desquelles il n'est pas inutile de remarquer la proximité avec les données empiriques extraites du tableau de Hudde pour les 15 premières rubriques : 43/75, 23/32, 7/9 et 1.

- *Tableaux de mortalité extraits du tableau dressé par HUDDE.* -

	1	2	3	4	5	$T_{1\text{-}5}$	$T_{c1\text{-}5}$	6	7	8	9	10	$T_{5\text{-}10}$	$T_{c5\text{-}10}$	$T_{1\text{-}10}$	$T_{c1\text{-}10}$
							403									796
1-6	1	1	3	1	1	7	396							393	7	729
6-11	2	2	3	8	3	12	372	7	4				11	382	29	760
11-16	1	5	2		5	13	365	5	4	7	5	2	23	359	36	724
16-21	4	6	9	10	12	41	324	8	6	4	1	5	24	335	65	659
21-26	5	2	5	7	13	32	292	8	13	7	6	9	43	292	75	584
26-31	5	5	9	6	3	28	264	1	6	8	4	9	28	264	56	528
31-36	6	5	6	3	6	26	238	4	5	4	2	2	17	247	43	485
36-41	1	8	12	11		32	206	7	8	9	5	2	31	216	63	422
41-46	5		8	12	8	33	173	8	4	5	2	4	23	193	56	366
46-51	4	2	3	4	4	17	156	7	3	9	6	6	31	162	48	318
51-56	3	4	7	6	2	22	134	4	2	6	3	3	12	144	40	278
56-61	4	5	7	5	7	28	106	6	1	7	12	11	37	107	65	213
61-66		5	5	7	6	23	85	5	2	9	5	5	26	81	49	164
66-71	8	5	4	3	11	31	52	10	11	6	3	2	32	49	63	101
71-76	8	3	6	3	10	30	22	4	3	2	6	2	17	32	47	54
76-81	3	3	2	1	4	13	9	9	2	2	2	4	19	13	32	22
81-86	1	2	1	1	1	6	3	2	2	2		3	9	4	15	7
86-91		1	1	1		3	0	1			2		3	1	6	1
91-96						0	0		1				1	0	1	0
96-101						0	0						0	0	0	0
	61	64	93	89	96			96	77	87	64	69				

	11	12	13	14	15	$T_{10\text{-}15}$	$T_{c10\text{-}15}$	$T_{1\text{-}15}$	$T_{c1\text{-}15}$	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40	41-45	46-50	$T_{16\text{-}50}$	$T_{c16\text{-}50}$
									1071									
1-6								7	1064									
6-11							275	29	1035									
11-16		2	1	2		5	270	41	994									424
16-21	4	2	1	5	3	15	255	80	914	3							3	421
21-26	4	4	4	5		17	238	92	822	6	5						11	410
26-31	5	6	6	7	7	31	207	87	735	14	14	2					30	380
31-36	2	4	7	5	4	22	125	65	670	10	7	4					21	359
36-41	2	3	2	2	2	11	174	74	596	7	10	5	1	1			24	335
41-46	5	3	5	3	3	19	155	75	521	14	9	7	3	2	2		37	292
46-51	5	5	2	3	2	17	138	65	456	13	9	3	4	6	2	1	32	260
51-56	5	7	6	2	5	25	113	65	391	27	9	7	7	2	3	2	57	203
56-61	3	5		3	3	14	99	79	312	11	14	5	5	8	5	3	51	152
61-66	7	5	5	5	5	27	72	76	236	12	9	11	2	8	4	1	47	105
66-71	5	5	7	3	8	28	44	91	145	20	7	4	2	1		6	40	65
71-76	6	2	5	6	4	23	21	70	75	8	10	4	2	1		2	27	38
76-81		2	2	2	5	11	10	43	32	8	8	1	5	1		3	26	12
81-86	2	2	1	2	1	8	2	23	9	4	1	1	1	2		1	10	2
86-91		1				1	1	7	2		1						1	1
91-96						0	1	1	1	1							1	0
96-101				1		1	0	1	0								0	0
	55	52	54	56	52					158	113	54	32	32	16	19		

	T	T_c
		1495
1-6	7	1488
6-11	29	1459
11-16	41	1418
16-21	83	1335
21-26	103	1232
26-31	117	1115
31-36	86	1029
36-41	98	931
41-46	112	819
46-51	103	716
51-56	122	594
56-61	130	464
61-66	123	341
66-71	131	210
71-76	97	113
76-81	69	44
81-86	33	11
86-91	8	3
91-96	2	1
96-101	1	0

HUDDE		"mortalité annuelle"	"taux de mortalité conditionnelle"
6	80	1	$\frac{1}{16}$
11	75	1	$\frac{1}{15}$
16	70	1	$\frac{1}{14}$
21	65	1	$\frac{1}{13}$
26	60	1	$\frac{1}{12}$
31	55	1	$\frac{1}{11}$
36	50	1	$\frac{1}{10}$
41	45	1	$\frac{1}{9}$
46	40	1	$\frac{1}{8}$
51	35	1	$\frac{1}{7}$
56	30	1	$\frac{1}{6}$
61	25	1	$\frac{1}{5}$
66	20	1	$\frac{1}{4}$
71	15	1	$\frac{1}{3}$
76	10	1	$\frac{1}{2}$
81	5	1	1
86	0		

DE WITT (Mémoire)			
3	384		$\frac{30}{384} \simeq \frac{1}{13}$
[8]	354	(1) 6	$\frac{30}{354} \simeq \frac{1}{12}$
13	324		$\frac{30}{324} \simeq \frac{1}{11}$
[18]	294	(1) 6	$\frac{30}{294} \simeq \frac{1}{10}$
23	264		$\frac{30}{264} \simeq \frac{1}{9}$
[28]	234	(1) 6	$\frac{30}{234} \simeq \frac{1}{8}$
33	204		$\frac{30}{204} \simeq \frac{1}{7}$
[38]	174	(1) 6	$\frac{30}{174} \simeq \frac{1}{6}$
43	144		$\frac{30}{144} \simeq \frac{1}{5}$
[48]	114	(1) 6	$\frac{30}{114} \simeq \frac{1}{4}$
53	84		$\frac{20}{84} \simeq \frac{1}{4}$
[58]	64	$(\frac{2}{3})$ 4	$\frac{20}{64} \simeq \frac{1}{3}$
63	44		$\frac{15}{44} \simeq \frac{1}{3}$
[68]	29	$(\frac{1}{2})$ 3	$\frac{15}{29} \simeq \frac{1}{2}$
73	14	$(\frac{1}{3})$ 2	1
80	0		

DE WITT			
5	2025	(1) 27	$\frac{1}{15}$
10	1890	(1) 27	$\frac{1}{14}$
15	1755	(1) 27	$\frac{1}{13}$
20	1620	(1) 27	$\frac{1}{12}$
25	1485	(1) 27	$\frac{1}{11}$
30	1350	(1) 27	$\frac{1}{10}$
35	1215	(1) 27	$\frac{1}{9}$
40	1080	(1) 27	$\frac{1}{8}$
45	945	(1) 27	$\frac{1}{7}$
50	810	(1) 27	$\frac{1}{6}$
55	675	(1) 27	$\frac{1}{5}$
60	540	(1) 27	$\frac{1}{4}$
65	405	(1) 27	$\frac{1}{3}$
70	270	(1) 27	$\frac{1}{2}$
75	135	$(\frac{81}{135})$ $\frac{81}{5}$	$\frac{3}{5}$
80	54	$(\frac{36}{135})$ $\frac{36}{5}$	$\frac{2}{3}$
85	18	$(\frac{14}{135})$ $\frac{14}{5}$	$\frac{7}{9}$
90	4	$(\frac{2}{135})$ $\frac{2}{5}$	1
100	0		

Les données théoriques de HUDDE et DE WITT

et les tables de mortalité qui s'en déduisent.

II Le traité de De Witt

Le texte de De Witt du 30 juillet 1671 présente un certain nombre de difficultés dans l'interprétation que nous pouvons en faire, dont la plus intéressante est la contradiction apparente entre la 3ème présupposition et l'utilisation qui en est faite dans le calcul effectif de la valeur de la rente viagère (p. 21 du texte de De Witt).

- Dans la 3ème présupposition, De Witt parle de "l'apparence de mourir" d'un homme de 53 ans à 63 ans, comparée à celle d'un homme de 3 ans à 53 ans, que je note: $a_{53\text{-}63}$ et $a_{3\text{-}53}$;

$$\text{il pose :} \quad a_{53\text{-}63} \leq \frac{3}{2}(a_{3\text{-}53})$$

$$\text{de même :} \quad a_{63\text{-}73} \leq 2(a_{3\text{-}53})$$

$$\text{et :} \quad a_{73\text{-}80} \leq 3(a_{3\text{-}53})$$

- La 2ème présupposition nous aide à interpréter ce que De Witt tente de désigner par cette apparence de mourir : c'est l'apparence de mourir dans le semestre qui suit l'âge actuel de la personne considérée, cette apparence étant constante entre 3 et 53 ans, 53 et 63 ans, 63 et 73 ans, 73 et 80 ans (2ème présupposition et 3ème proposition, et 3ème présupposition).

- A nos yeux, en 1987, ces apparences de mourir peuvent être qualifiées de "conditionnelles" : $a_{53\text{-}63}$, c'est l'apparence de mourir pour un homme ayant entre 53 et 63 ans, au cours d'une demi-année comprise dans cette dizaine d'années. Il est bien sûr évident que cette "condition" n'est pas claire, pour ne pas dire "incohérente".
  Si l'on s'en tient au texte de la 3ème présupposition, il faudrait interpréter $a_{53\text{-}63}$ comme l'apparence de mourir dans une demi-année quelconque comprise entre 53 et 63 ans, pour un homme de 53 ans.
  Qu'en est-il alors pour un homme de 58 ans ? Il semble que pour De Witt ce soit justement la même.

L'interprétation la plus cohérente paraît donc être la suivante :

$a_{53\text{-}63}$ désigne l'apparence de mourir pour un homme de n ans - n étant compris entre 53 et 63 - dans l'une des demi-années comprises entre n et 63 ans.
(Je la note a_n, $53 \leq n < 63$).

- Maintenant, dans la démonstration qui suit la 3ème proposition (p. 21), De Witt qui calcule la valeur d'une rente viagère "reposant sur une tête encore jeune" - en fait une personne de 3 ans vivant 77 années - introduit les "expectatives ou chances" d'obtenir le versement de la rente entre 0 fois et 153 fois, ce qui correspond aux "expectatives ou chances" de mourir l'une des demi-années située entre la 1ère et la 153ème demi-année, donc entre 3 ans et 80 ans.

"En vertu de la teneur de la 3ème présupposition" De Witt pose que les 100 premières chances sont égales - "les choses auxquelles elles se rapportent offrent même facilité d'arriver" - et égales à 1 : je note $c_i = 1$ pour $0 \leq i \leq 99$ et :

$$c_j \geq \frac{2}{3} c_i = \frac{2}{3} \quad \text{pour} \quad 100 \leq j \leq 119$$

$$c_k \geq \frac{1}{2} c_i = \frac{1}{2} \quad \text{pour} \quad 120 \leq k \leq 139$$

$$c_l \geq \frac{1}{3} c_1 = \frac{1}{3} \quad \text{pour} \quad 140 \leq \ell \leq \frac{1}{3}$$

- Parmi les quelques auteurs qui ont étudié le texte de De Witt, certains comme Hacking ne relèvent pas les problèmes que soulèvent cette double série de coefficients, les autres comme Hendricks, Eneström, Sheynin, considèrent que De Witt a tout simplement modifié ces coefficients entre la 3ème présupposition et la 3ème proposition, s'étant aperçu du caractère irréaliste des premiers après avoir étudié les tables de données empiriques dont il disposait.

- Mon opinion est tout à fait différente ; pour moi, De Witt prétend pouvoir déduire la 2ème série de coefficients - les chances de mourir telle demi-année, ou de toucher telle somme - de la première - les apparences de mourir pour un homme d'un certain âge - et cela, en vertu des principes de la théorie de Huygens qu'il expose dans la première présupposition. Je remarque également, contrairement aux autres commentateurs que les coefficients proposés par De Witt ne sont pas 1, 3/2, 2, 3 pour la première série et 1, 2/3, 1/2, 1/3 pour la seconde, mais en posant $a_{3-53} = 1$:

$$a_{53\text{-}63} \leq \frac{3}{2} \quad / \quad a_{63\text{-}73} \leq 2 \quad / \quad a_{73\text{-}80} \leq 3$$

$$\text{et } c_i = 1$$

$$c_j \geq \frac{2}{3} \quad / \quad c_k \geq \frac{1}{2} \quad / \quad c_\ell \geq \frac{1}{3}$$

le calcul effectué avec $c_j = 2/3$, $c_k = 1/2$, $c_\ell = 1/3$ donnant de ce fait une valeur minimum de la rente viagère, ce qui correspond tout à fait aux nécessités de l'augmentation de De Witt.

- Si l'on peut envisager l'hypothèse que De Witt ait subrepticement remplacé les coefficients 1, 3/2, 2 3 par les coefficient 1, 2/3, 1/2, 1/3 il me paraît plus délicat de justifier ainsi le passage d'un système de majorants à un système de minorants !

- Comment expliquer par ailleurs qu'il revienne sur les anciens coefficients dans le point S de son argumentation !

- Par contre, un autre passage de la 3ème présupposition qui n'a jamais été relevé, sauf par J.B. Easton me paraît décisif :

De Witt prend l'exemple d'un homme de 40 ans et d'un homme de 58 ans qui conviennent qu'en cas où celui de 58 ans mourait dans un délai de 6 mois, l'autre toucherait sur ses biens 2000 florins quand celui de 58 ans toucherait 3000 florins dans les mêmes circonstances, sous entendu car l'apparence de mourir de celui de 58 ans est égale à 3/2 de l'apparence de mourir de celui de 40 ans :

ainsi

$$a_{40} = a_{3\text{-}53}$$

$$a_{53\text{-}63} = a_{58} \leq 3/2\, a_{3\text{-}53} = 3/2\, a_{40}$$

Ici De Witt raisonne avec $a_{58} = 3/2\, a_{40}$; le contrat est équitable car nous avons : $3000\, a_{40} - 2000\, a_{58} = 0$: ce qui vaut 3000 à la mort dans les 6 mois d'un homme de 40 ans vaut 2000 à la mort dans les 6 mois d'un homme de 58 ans et les valeurs sont dans le rapport inverse du rapport des apparences de mourir ; si le rapport des apparences est plus petit que 3/2, le rapport des valeurs sera donc plus grand que 2/3.

Je fais l'hypothèse que De Witt tient le même raisonnement pour calculer le prix actuel d'une rente : ce qui vaut A à la mort d'une personne de 40 ans vaut B à la mort d'une personne de 58 ans : $V_{40} = V_{58}$, si les personnes ont une même apparence de mourir.

Mais comme les apparences de mourir sont dans un rapport de 3/2, les valeurs doivent être "corrigées" dans le rapport inverse de 2/3 et les "chances" des 2 valeurs doivent être dans un rapport de 2/3. (Même raisonnement avec les inégalités, le but de De Witt étant d'obtenir une minoration de la valeur de la rente viagère). Je propose de dire que De Witt calcule ainsi des "CHANCES ACTUALISEES", de même qu'il calcule la valeur actuelle d'une rente amortissable de n années.

Les chances de mourir à tel âge pour un enfant de 3 ans, sont les "chances actualisées" à 3 ans, de mourir à cet âge, et le moyen d'actualisation c'est le contrat équitable que nous venons de mentionner. On peut facilement concevoir qu'il ne soit pas "réaliste" dans le cadre de l'argumentation du mémoire de Juillet 1671 d'énoncer d'emblée que les différentes chances de mort pour un enfant en bas-âge sont les chances qu'il utilise dans le calcul de la rente viagère. Comment les justifier, sinon celles de 50 premières années qui sont égales, du moins les suivantes qui vont en diminuant, quand un raisonnement "rapide" tend à ne retenir qu'un seul fait : qu'il est certainement plus facile de mourir à 80 ans qu'à 10 ans … !, plus précisément, qu'avec les années "l'apparence de mourir" ne peut que rester constante ou augmenter. Aussi De Witt utilise-t-il dans son mémoire cette notion subjective d'apparence de mourir qu'il quantifie en posant a priori dans les 2èmes et 3èmes présuppositions les rapports de proportionnalité entre ces apparences aux différents âges. Les chances de mort "actualisées" sont alors calculées implicitement - "en vertu de la teneur de la troisième présupposition" ! - d'après les principes que je viens d'expliciter. En définissant à partir de 53 ans des chances inférieures à 1, et donc une valeur de la rente viagère inférieure à 17 fl 4s 17/1000 (voir CI_4), cette théorie est en accord avec les résultats calculés à partir des tables empiriques utilisées par De Witt, sous réserve de donner un résultat qui ne soit pas inférieur à 16 florins ; (ce qui a pu le guider dans le choix des valeurs énoncées dans la 3ème présupposition).

Tout ceci est cohérent, du point de vue de De Witt, et les apparences de mourir doivent être prises pour ce qu'elles sont et non pour des chances de mort "conditionnelles", comme celles qu'il utilise dans sa lettre de 20 octobre. Même si alors il ne reprend pas le point de vue des "apparences de mourir", je pense qu'il n'y a à ses yeux aucune contradiction entre ces méthodes ; mais je n'ai pas la place ici d'étayer cette opinion !

D ANNEXE

• *Rente amortissable*

De Witt entend ici par rente amortissable, une rente avec remboursement du capital - la rente étant elle-même l'intérêt proprement dit du capital emprunté - versée annuellement pendant un nombre d'années fixé à l'avance.

• *Rente viagère*

C'est une rente qui s'éteind à la mort de la personne en faveur de laquelle elle est constituée.

• *Valeur d'une rente viagère rapportée à celle d'une rente amortissable*

Prenons l'exemple le plus simple : celui d'une rente viagère qui a été touchée une fois ; le problème est donc de savoir à quel prix son "bénéficiaire" aurait du l'acheter pour ne pas être lésé, si l'on prend pour étalon une rente amortissable, par exemple à 4%, - c'est-à-dire qui rapporte 1 pour 25 : "au denier 25", ou 1 denier pour 25 - versée pendant une année. Soit v la valeur d'un versement de la rente viagère, c_1 le capital de la rente amortissable, t le taux de la rente ici 4% ; nous avons donc à résoudre le problème suivant :

$$c_1 + c_1 t = v \text{ soit } c_1 = \frac{v}{1+t}$$

Si la rente viagère a été touchée 2 fois, v au bout d'un an, puis encore v au bout de 2 ans, dans ce cas le capital c_2 de la rente amortissable est tel que, cette rente étant amortie en 2 ans, ou 2 versements de v :

$$(c_2 + c_2 t - v) + (c_2 + c_2 t - v)t = v$$

$$\text{soit } (c_2(1+t) - c_1(1+t))\,(1+t) = v$$

$$\text{d'où } c_2 - c_1 = \frac{v}{(1+t)^2}$$

$$\text{et } \quad c_2 = v\left[\frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2}\right]$$

On voit de là que c_n, le capital d'une rente amortissable de n années est égal à :

$$c_n = v\left[\frac{1}{1+t} + \frac{1}{(1+t)^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(1+t)^n}\right]$$

$$\text{Soit } c_n = \frac{v}{1+t}\left[1 + \frac{1}{1+t} + \ldots\ldots + \frac{1}{(1+t)^{n-1}}\right] = \frac{v}{1+t}\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+t)^n}}{1 - \frac{1}{1+t}}\right]$$

$$\boxed{\text{d'où} \quad c_n = \frac{v}{t}\left[1 - \frac{1}{(1+t)^n}\right]}$$

On voit que si n tend vers l'infini, c'est-à-dire si la rente amortissable devient une rente perpétuelle, alors :

$$\boxed{c_n \rightarrow c = \frac{v}{t}}$$

C'est donc la valeur maximale d'une rente viagère.

- Ainsi, pour une rente annuelle de 1, la valeur de la rente viagère "à la limite", c'est-à-dire le capital de la rente perpétuelle équivalente avec $t = 0{,}04$ est donc : $c = 25$.
- Si la rente viagère a été touchée pendant 10 ans, on a : $c_{10} = 8{,}111$.
- De même on aurait
  $c_{20} = 13{,}590$ / $c_{30} = 17{,}292$ / $c_{40} = 19{,}793$ etc...

  Ce qui signifie dans les termes de De Witt que le prix d'une rente viagère de 1 denier touché pendant 30 ans vaut 17,292 deniers, ou qu'elle est "au denier 17,292"
- Ce sont les résultats de ces calculs que De Witt expose dans le corollaire de sa troisième proposition, à cette différence près que la rente étant versée tous les six mois, le taux t' est tel que pour un capital c :

$c(1+t')^2 = c(1+t)$

d'où $t' = \sqrt{1+t} - 1$

soit pour $t = 0{,}04$, $t' = 0{,}0198$

et ainsi pour $v = 10\ 000\ 000$ sous

$c_1 = 9805807$

$c_2 = 9805807 + 9615385 = 19421192$

etc...... jusquà

$c_{200} = 494.952\ 836$

On peut remarquer que le fait de payer la rente de 20 000 000 de sous annuels en deux versements semestriels à pour effet d'augmenter la valeur de la rente viagère ...

Ainsi, pour 20 000 000 versés au bout d'un an, c_1 serait égal à 19 230 769, alors qu'il est ici de 19 421 192 ; et si l'on considère la rente perpétuelle qui lui correspond sa valeur égale à :

$$c = \frac{10\ 000\ 000}{\sqrt{1{,}04 - 1}} = 50\ 495\ 0980 \quad \text{au lieu de}$$

$$c' = \frac{20\ 000\ 000}{1{,}04} = 50\ 000\ 0000$$

L'augmentation n'est pas négligeable, puisqu'elle est d'environ 1%.

BIBLIOGRAPHIE

Les textes

DE WITT	WAERDE VAN LYF-RENTEN (1671) : reproduit dans "Die Werke von Jacob Bernoulli". Birkhaüser. Bâle 1975 [tome 3 p. 328-350]. Traduction française de P.I.J. De Chateleux : "Le rapport de Johan de Witt sur le calcul des rentes viagères". Martinus Nijhoff La Haye 1937.
DE WITT-HUDDE	Correspondance dans : Mémoires pour servir à l'histoire des assurances sur la vie et des rentes viagères aux Pays-Bas - Amsterdam 1898.

Etudes

F. LEBRUN	Le XVIIème siècle - A. Cotin Paris 1967.
K. HASS	"Hudde, Jan" dans le Dictionary of Scientific Biography Scribner's Sons - New York 1972 T. VI.
J.B. EASTON	"De Witt, Jan De" dans le D.S.B. 1976 T. XIV.
J.VAN BRAKEL	Some remarks on the prehistory of the concept of statistical probability. Archiv for History of Exact Sciences. Vol 16 n° 2 - 1976 - 119 - 136.
I. HACKING	Emergence of Probability - Cambridge 1975.
O.B. SHEYNIN	Early history of the theory of probability A.H.E.S. Vol 17 n° 3 1972 - 201-259.

COLLOQUE Inter-IREM

LES MATHEMATIQUES DANS LA CULTURE D'UNE EPOQUE

STRASBOURG 22-23 MAI 1987

RELIGION

CXLIII

SCIENCE

CLI

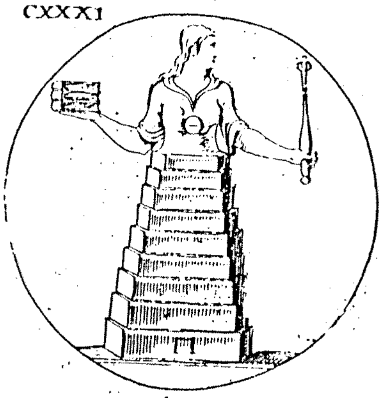
LES MATHEMATIQUES A L'AGE BAROQUE

SAPIENCE

CXLVIII

PHILOSOPHIE.

CXXXI



OPERA MATEMATICA

Dramma giocoso en quatre actes, un prologue et un épilogue

avec
(par ordre d'entrée en scène)

Catherine LANIER
André ROPERT
Jean-Pierre LE GOFF
Denis LANIER

Production du Séminaire Interdisciplinaire d'Histoire des Sciences du Lycée Malherbe de Caen, avec le concours de l'IREM de Basse-Normandie.

SEMINAIRE INTERDISCIPLINAIRE D'HISTOIRE DES SCIENCES DU LYCEE MALHERBE

Association régie par la loi de 1901

Lycée Malherbe, Avenue Albert Sorel, 14000 CAEN

PROGRAMME

* Claudio **MONTEVERDI** : *L'ORFEO* (1607), N. Harnoncourt

***

OUVERTURE

Présentation du "concert baroque".

* Giacomo **CARISSIMI** : *SALVE, SALVE, PUELLULE* (1670), M. Corboz

---

PROLOGUE : LE DECOR DU BAROQUE

(allegro pour baryton)

Clio sur une place devant une église de Rome

Le décor du baroque. Venu de l'histoire de l'art, le mot "baroque" recouvre aussi une sensibilité qui s'affirme en Europe entre 1590 et 1660. Que représente cette sensibilité? En quoi s'accorde-t-elle avec une approche nouvelle en mathématiques et en science?

***

* Marc Antoine **CHARPENTIER** : *LES LECONS DE TENEBRES* (1680), Concerto Vocale

---

1er ACTE : DESARGUES

(molto vivace pour haute-contre)

Erato dans une vigne près de Lyon

La personnalité et l'oeuvre d'un mathématicien injustement occulté dont la démarche, le langage, les préoccupations s'insèrent de façon révélatrice dans le climat mental de son temps.

***

* Constantÿn **HUYGENS** : *VOUS ME L'AVIEZ BIEN DIT* (1647), Concerto Vocale

---

2ème ACTE : DESCARTES

(adagio pour ténor)

Dans un palais de Stockholm avec Terpsichore

A partir d'hypothèses ou d'explications qu'il formule (la glande pinéale, la théorie des tourbillons), la mise en évidence d'une implication de Descartes dans les schèmes généraux de l'âge baroque.

***

SEMINAIRE INTERDISCIPLINAIRE
D'HISTOIRE DES SCIENCES
DU LYCEE MALHERBE

Association régie par la loi de 1901
Lycée Malherbe, Avenue Albert Sorel, 14000 CAEN

3ème ACTE : FERMAT

(largo pour basse)
Polymnie dans une maison de maître à Toulouse
Chez un "amateur" de talent, une démarche mathématique typiquement baroque; la méthode de la "descente infinie".

***

* Claudio **MONTEVERDI** : *GIRA IL NEMICO INSIDIOSO* (1638),
Les Arts Florissants

INTERMEDE COMIQUE ITALIEN

(alla turca pour baryton-basse)
Thalie au fond d'un cloaque à Gènes
Rivalités et sens de l'honneur chez les savants de l'âge baroque à travers une accusation de plagiat.

***

* Michel **LAMBERT** : *SOMBRES DESERTS, RETRAITES DE LA NUIT* (1659),
texte de J. Pascal, Concerto Vocale

4ème ACTE : PASCAL

(staccato pour contre ténor)
Une cellule à Paris avec Melpomène
La fascination des courbes et l'irruption du temps et du mouvement en mathématiques à partir de "L'histoire de la Roulette" de Pascal.

***

* Gregorio **ALLEGRI** : *MISERERE MEI* (1630),
Choeurs de la Cathédrale de Westminster

EPILOGUE : Tout cela a-t-il un sens?

(maestoso pour alto)
Calliope au Vatican
Le mathématicien comme homme de son temps intégré à un climat culturel d'ensemble.

***

* Glenn **GOULD** : *SO YOU WANT TO WRITE A FUGUE* (1963)

Le texte intégral de cette mise en concert de différents travaux du Séminaire paraîtra dans une prochaine publication de l'IREM de Basse-Normandie : *LA SCIENCE A L'AGE BAROQUE N°2.*
Le N°1 est disponible à l'IREM, IUT, bd Mal Juin, 14000 CAEN (15 F.)

PROGRAMME VISUEL

INTRODUCTION

1 - Bayreuth: la salle de l'Opéra des Margraves (1748)
2 - Eustache Le Sueur (1616-1655): Clio, Euterpe et Thalie
3 - Nicolas Poussin (1594-1665): le Triomphe de Neptune
4 - Les frères Le Nain (Antoine ? - ≈1590-≈1650): la réunion musicale
5 - Valentin de Boulogne (≈1591-1632): musiciens et soldats
6 - Giovanni Andrea Ansaldo (1584-1638): fresque de la villa Negrone, Gênes (1630)
7 - Valentin de Boulogne (≈1591-1632): les muses
8 - Valentin de Boulogne (≈1591-1632): les quatre âges de l'homme
9 - Costanzo (†1657) & Francesco (†≈1661) Arbaudi: château de Maresco (1613-1623)

PROLOGUE

1 - Opéra (1662) dans un théâtre à Münich
2 - Eustache Le Sueur (1616-1655): la mort de Saint Bruno
3 - Eustache Le Sueur (1616-1655): l'Ange quittant Tobie
4 - Jacopo Robusti, dit Le Tintoret (1519-1594): Suzanne au bain et les vieillards
5 - Francesco Castello, Borromini (1599-1667): collège de la Propagation de la Foi
6 - Michelangelo Merisi, dit Le Caravage (1573-1610): la crucifixion de Saint Pierre
7 - Jacques Callot (1592-1635): la pendaison
8 - Le Concile de Trente (Ecole venitienne, XVI°)
9 - Gian Lorenzo Bernini, Le Bernin (1598-1680): le baldaquin de Saint-Pierre de Rome (1624)
10 - Pierre Puget (1620-1694): Saint Sebastien, Ste-Marie de Carignan, Gênes (1663)
11 - Guarino Guarini (1624-1683): palais Carignano, Turin (1679-1684)
12 - Francesco Castello, Borromini (1599-1667): Saint-Charles aux-Quatre-Fontaines, Rome (1634)
13 - Pierre-Paul Rubens (1577-1640): la chute des damnés
14 - Michelangelo Merisi, dit Le Caravage (1573-1610): la mort de la Vierge
15 - Harmenstz van Rijn, Rembrandt (1606-1669): la ronde de nuit (1642)
16 - Pierre-Paul Rubens (1577-1640): l'adoration des bergers (1610-1615)
17 - Coupole de l'Eglise de Ravenne
18 - Andrea Pozzo (1642-1709): Gloire de François Xavier, Eglise du Gesù, Mondovi (1670)
19 - 20 - Andrea Pozzo (1642-1709): le Triomphe de Saint-Ignace, Eglise St-Ignace, Rome (1685-1694)
21 - Pierre-Paul Rubens (1577-1640): débarquement de Marie de Médicis à Marseille, le 3 nov. 1600
22 - Pierre-Paul Rubens (1577-1640): les trois Grâces
23 - Gian Lorenzo Bernini, Le Bernin (1598-1680): Francesco I d'Este, duc de Modène (1650-1651)
24 - Gian Lorenzo Bernini, Le Bernin (1598-1680): Constantin (1654-1670)
25 - Gian Lorenzo Bernini, Le Bernin (1598-1680): Louis XIV (1665)
26 - Gian Lorenzo Bernini, Le Bernin (1598-1680): Constantin et Bozzetto pour la statue équestre de L.XIV (1670)
27 - Gian Lorenzo Bernini, Le Bernin (1598-1680): la fontaine des Quatre Fleuves, le Gange (1648-1651)
28 - Frontispice du *Novum Organum* de Bacon
29 - Gian Lorenzo Bernini, Le Bernin (1598-1680): l'ange à INRI, Sant'Andrea della Fratte, Rome (1667-1671)

DESARGUES

1 - Arc de triomphe pour l'entrée de la reine Marie-Thérèse (26 août 1660)
2 - Condrieu: la maison de Desargues
3 - B. Blin de Fontenay (1653-1715): portrait de femme
4 - Couverture du n°1 de SCHOLIES
5 - La tapisserie de Bayeux, dite de la Reine Mathilde
6 - Page d'un manuscrit de Leibniz: la fenêtre de Viviani
7 - Mathieu Merian: portrait de Robert Fludd (1626)
8 - Gian Lorenzo Bernini, Le Bernin (1598-1680): Daniel, Sta Maria del popolo, chapelle Chigi (1655-1657)
9 - Gian Lorenzo Bernini, Le Bernin (1598-1680): la fontaine des Quatre Fleuves, détail
10 - Gian Lorenzo Bernini, Le Bernin (1598-1680): Apollon et Daphné (1622-1625)
11 - Abraham Bosse (1602-1676): l'impression des planches en taille-douce
12 - Claude Gellée (1600-1682): le siège de la Rochelle
13 - Abraham Bosse (1602-1676): l'atelier du graveur
14 - Philippe de Champaigne (1602-1674): autoportrait
15 - Curabelle: *Examen des oeuvres du Sieur Desargues*
16 - L'arbre de Jessé, détail, Oaxaca, Santo Domingo (1657)
17 - Mise en volume de la planche du *Brouillon project pour la couppe des pierres* (Compagnons du devoir)
18 - Abraham Bosse (1602-1676): les perspecteurs
19 - Abraham Bosse (1602-1676): pour prouver qu'il ne faut pas dessiner ni peindre comme l'oeil voit
20 - Francesco Mazzola Le Parmesan (1503-1540): autoportrait dans un miroir convexe (1524)
21 - Francesco Castello, Borromini (1599-1667): colonnade en perspective accélérée, Rome (1635)
22 - Jean-François Nicéron (1613-1646): planche pour une fresque anamorphotique
23 - 24 - Emmanuel Maignon: St François de Paule, cloître de la Trinité des Monts, Rome (1642)
25 - Giulio Benso (1601-1668): plafond du château Grimaldi, Cagnes sur mer (1648)
26 - Andrea Pozzo (1642-1709): corridor des chambres de St Ignace, collège Romain (1682-1686)
27 - Jacopo Robusti, dit Le Tintoret (1519-1594): débarquement du corps de St Marc (1562-1566)
28 - Pierre-Paul Rubens (1577-1640): Henri IV contemplant le portrait de Marie de Médicis (1622)
29 - Diego Velasquez (1599-1660): les Ménines
30 - Simon Vouet (1590-1649): anamorphose cylindrique à miroir
31 - Jean-François Nicéron (1613-1646): id. portrait de Louis XIII d'après Simon Vouet
32 - Jan Vermeer (1632-1675): l'atelier (1665)
33 - Giovanni Battista Gaulli (1639-1709): triomphe du Nom de Jésus, ég. du Gesu, Rome (1674-1679)
34 - Athanase Kircher (1602-1680)
35 - 36 - Id. planches de l'*Ars magna lucis et umbrae*
37 - Jacques Androuet du Cerceau (≃1510-≃1609): *Leçons de perspective positive* (1576)
38 - 39 - 40 - R.P. Dubreuil (1602-1670): *La perspective practique* (1642)
41 - Mario Bettini: l'oeil du cardinal Colonna (1642)
42 - 43 - 44 - Planches de la *Statique* de Simon Stevin
45 - Jacques Le Bicheur (1599-1666): planche du *Traicté de Perspective, faict par un peintre de l'Académie Royale, dédié à Monsieur Lebrun, premier peintre du Roy* (1661)
46 - Abraham Bosse (1602-1676): planche de perspective (1648)
47 - Abraham Bosse (1602-1676): id. usage de l'ombre au flambeau pour le tracé d'un treillis

DESCARTES

1 - Carlo Vigarani: décor pour les Plaisirs de l'Isle Enchantée (1664)
2 - J.-B. Weenix: portrait de Descartes (≃1647)
3 - P. Patel: vue perspective du château de Versailles (≃1668)
4 - Cabinet des Jeux du château de Vaux-le-Vicomte
5 - Pierre Mignard (1612-1695): décor du Val de grâce
6 - 7 - Descartes: *Le Traité de l'Homme* (la glande pinéale) (1633)
8 - Charles Ozanam: projection anamorphotique d'un oeil (1694)
9 - Frans Hals (≃1581-1666): portrait de Descartes
10 - Descartes: *Les principes* (les tourbillons)
11 - Salomon de Caus (1567-1626): *Les raisons des forces mouvantes* (Automates: Galatée et flûtistes) (1615)
12 - Villa Lante: fontaine della Catena, Bagnaia

FERMAT

1 - Abraham Bosse (1602-1676): les comédiens de l'Hôtel de Bourgogne
2 - Portrait de Fermat
3 - Pierre Puget (1620-1694): portail des Atlantes, Toulon
4 - Georges de la Tour (1593-1652): le souffleur à la lampe
5 - Portrait de Fermat
6 - Vignole: palais Farnèse à Caprarola (1534-1573)
7 - Caprarola: fontaine
8 - Villa Lante: fontaine della Catena, Bagnaia
9 - Caprarola: escalier
10 - Andrea Sighizzi (†1684): palazzo Reale, Gênes
11 - Giulio Benso (1601-1668): église de la Santissima Annunziata del Vastato, Gênes (1638)
12 - Pierre-Paul Rubens (1577-1640): Annonciation

INTERMEDE

1 - Giacomo Torelli: décor pour la Vénus Jalouse, Fano
2 - François II Quesnel: portrait posthume de Pascal
3 - La roulette
4 - Les frères Le Nain (Antoine ? - ≈1590-≈1650): les joueurs
5 - Charles Lebrun (1619-1690): le Chancelier Séguier et sa suite
6 - Jacques Callot (1592-1635): Cucurucu et Razullo
7 - Jacques Callot (1592-1635): Gian Farina
8 - Pierre-Paul Rubens (1577-1640): Abraham et Melchisedech

PASCAL

1 - Joseph Furttenbach: Architectura recreationis, Ulm (1640)
2 - Philippe de Champaigne (1602-1674): Mère Angélique, soeur du Grand Arnault et Mère Agnès
3 - Portrait de Pascal
4 - Philippe de Champaigne (1602-1674): le Miracle de la Sainte Epine
5 - Jean Domat: Portrait prétendu de Pascal
6 - La roulette
7 - Veronèse (1528-1588): trompe-l'oeil de la villa Mauser
8 - Agostino Tassi (≈1580-1644): palais Lancellotti ai Coronari, Rome (1617-1623)
9 - Francesco Castello, Borromini (1599-1667): Saint-Charles aux-Quatre-Fontaines, Rome (1634)
10 - Bronzino: allégorie du Triomphe de Vénus (1540-1545)
11 - Francesco Castello, Borromini (1599-1667): chapelle des Oratoriens, Rome (1636)
12 - Venise: Santa Maria della Salute (1631-1687)
13 - Gian Lorenzo Bernini, Le Bernin (1598-1680): le baldaquin de Saint-Pierre de Rome (1624)
14 - Francesco Castello, Borromini (1599-1667): St-Yves, chapelle de l'Université de la Sapience (1642)
15 - Charles Lebrun (1619-1690): Vénus coupe les ailes de l'amour

EPILOGUE

1 - Ballet à Prague, collège des Jésuites (1617)
2 - Pierre de Cortone (1596-1669): la Gloire du règne d'Urbain VIII (1633-1639)
3 - Gian Lorenzo Bernini, Le Bernin (1598-1680): la fontaine des Quatre Fleuves
4 - Valentin de Boulogne (≈1591-1632): concert au bas-relief antique
5 - Levin Vincent: cabinet de curiosités, *Description abrégée du Théâtre des Merveilles de la Nature* (1719)
6 - Hyacinthe Rigaud (1659-1743): Louis XIV (1704)
7 - Giovanni Francesco Marchini (XVIII°): chapelle de la Ste Croix, Wiesentheid
8 - Gian Lorenzo Bernini, Le Bernin (1598-1680): colonnade de St Pierre de Rome
9 - Le Guerchin (1591-1666): l'Aurore (1621)
10 - Gian Lorenzo Bernini, Le Bernin (1598-1680): l'extase de Sainte-Thérèse (1644-1652)

Table ronde: "Les mathématiques au XVIIe siècle"

AUX ORIGINES DE LA ROYAL SOCIETY DE LONDRES

par André ROPERT

Un article beaucoup plus développé sur cette question est paru dans LA SCIENCE A L'AGE BAROQUE N°1, *IREM de Basse-Normandie, 1984 (15 F.)*

Ces quelques remarques touchant les origines de la Royal Society, au delà d'apparences anecdotiques, visent à éclairer le climat intellectuel de la première moitié du XVII^{ème} siècle et à rappeler la complexité des choses sous leur illusoire simplicité.

Il est inutile de revenir sur l'importance du mouvement des Académies à cette époque, mais la genèse de la Royal Society s'accomplit dans des conditions si curieuses que l'étudier relève presque de l'enquête policière. Les contemporains semblent s'être ingéniés à entretenir le flou. Chercher à y voir clair, c'est aussi s'interroger sur la raison de ces mystères.

La première réunion indiscutable de ce qui va devenir la Royal Society a lieu le 28 novembre 1660, à Londres, dans les locaux de Gresham College. En décembre de la même année, le Roi Charles II approuve avant d'offrir sa protection en octobre 1661 (la compagnie devient alors la Société Royale) et de légaliser l'institution par une Charte d'Incorporation en Juin 1662. L'initiative est entièrement venue des fondateurs et, financièrement et politiquement, la Société est autonome.

Une telle démarche n'est évidemment pas sortie du néant. Nous pouvons consulter à cet effet Thomas Sprat, évêque de Rochester, auteur dès 1667 d'une *Histoire de la R.S. de Londres*, et John Wallis, mathématicien, qui a publié en 1678 une *Défense de la R.S.*. Ces deux hommes ont fait partie du groupe fondateur. S'y ajoutent les oeuvres de Thomas Birch, secrétaire de la compagnie, éditeur au XVIII^{ème} siècle de ses archives et auteur lui-même d'une *Histoire de la R.S.* parue en 1757.

Or, il ressort de ces sources des informations contradictoires, au point de donner même l'impression qu'on veut brouiller les pistes, sinon cacher quelque chose. On peut certes impliquer la situation politique. En 1660, l'Angleterre sort de vingt ans de troubles et de révolution sur fond d'intolérance religieuse et d'affrontements idéologiques. Mais l'argument vaut plus au plan des biographies des fondateurs qu'à celui des origines de l'institution. La version Sprat est la plus simple: en 1649, à l'Université d'Oxford (plutôt royaliste alors que Cambridge était puritaine), un groupe de savants non-conformistes soucieux de recherche hors d'un cadre institutionnel, aurait constitué un "Club de la science expérimentale". Chassé par les troubles en 1659, il se serait replié à Londres, au Gresham College, où il aurait formé le noyau constitutif de la R.S. sitôt la Restauration. Wallis a une autre version: la réunion se serait faite d'emblée à Londres et les personnes ne seraient pas les mêmes: Foster, professeur au Gresham College, et un Allemand de Cambridge, Theodor Haak. En 1649, l'équipe se serait scindée, l'une gagnant Oxford (rejoignant le Club de Sprat? allant le fonder?), l'autre restant à Londres, à Gresham. Or, en 1744, Birch publie la correspondance du physicien Robert Boyle, l'un des co-fondateurs de 1660. Elle nous apprend que dans les années 1646-47 un groupe confidentiel de savants se réunissait, comprenant avec lui les Allemands Haak et Samuel Hartlib, sous la mystérieuse appellation d'"Invisible College"... S'agirait-il du club mentionné par Wallis?

Que tirer de tout cela? Une constante: la volonté de créer une société de recherche et de coordination des recherches pratiquant la science expérimentale; des noms aussi qui reviennent: Boyle mais aussi, curieusement, ces Allemands immigrés, chassés de leur pays par la Guerre de Trente Ans.

A ce niveau, d'intéressantes convergences apparaissent.

D'abord, l'insistance sur le caractère expérimental de la science et l'idée d'une société de recherche. Impossible de ne pas évoquer Bacon, ce qui n'a rien de surprenant puisque Francis Bacon est depuis le début du siècle le maître à penser des anti-aristotéliciens anglais et le théoricien de la connaissance par l'expérience. De plus, en 1622, Bacon a publié la *Nova Atlantis* où, sous l'habituelle fiction du voyage imaginaire, il décrit une société gouvernée par les savants rassemblés dans un collège universel.

Mais, dans un contexte assez différent, des idées voisines sont à ce moment développées en Allemagne. J.V. Andreae, pasteur assez peu conformiste, lance de Tübingen en 1614 le bruit qu'il existe une Confrérie occulte (invisible) de savants, la Fraternité Rose-Croix, à laquelle devraient se rallier tous les savants d'Europe. Sans doute est-elle imaginaire mais la nouvelle fait sensation. Or, le discours d'Andreae est très différent de celui des admirateurs de Galilée ou même des Baconiens. Il s'inscrit dans le mode de pensée des sciences traditionnelles, comme le montre bien le second texte rosicrucien paru en allemand à Strasbourg en 1618, *Les Noces Chymiques de Christian Rosenkreutz*, parcours initiatique entièrement décrit et libellé en termes de symbolique alchimique.

La rumeur Rose-Croix a un grand retentissement en Angleterre. D'une part, la pensée anglaise, dans les années 1620, n'est pas encore engagée dans la révolution intellectuelle partie d'Italie. Elle demeure assise sur les bases scientifiques du temps de la Renaissance, privilégiant la démarche traditionnelle, l'approche amlchimique ou astrologique, l'hermétisme. Bacon lui-même réfute Copernic. Le grand homme est Robert Fludd, médecin paracelsien, théoricien des relations entre macrocosme et microcosme et défenseur des textes rosicruciens. D'autre part, il apparaît une singulière relation entre Angleterre et Allemagne. Critiques et historiens modernes ont établi la parenté évidente (même symbolisme, même enchaînement des faits) existant entre le livre 1, chant 10, du poème initiatique *La Reine des Fées*, d'Edmund Spenser (1589), le voyage mythique de la *Nova Atlantis* de Bacon, et le parcours symbolique des *Noces Chymiques* d'Andreae. S'il semble évident que Bacon ait lu Spenser, il se peut qu'Andreae, qui avait connaissance de la littérature élisabéthaine, s'en soit aussi inspiré. Ajoutons ce détail curieux, Robert Boyle était le neveu de Spenser.

Il pourrait donc y avoir une filiation souterraine de Spenser à Bacon/Andreae menant à la démarche de Boyle, selon Wallis, qui crée en 1646 un "Invisible College" au nom remarquablement rosicrucien.

Mais un autre personnage intervient, d'une manière sans doute décisive. Il s'agit de l'humaniste tchèque Jan Komensky, Coménius. Issu de la communauté des Frères moraves, philologue, théologien, pédagogue, Coménius a une réputation de savant universel. Chassé d'Allemagne par la guerre, il s'est réfugié en Pologne et c'est là qu'il conçoit, en 1639, son projet de Pansophie, sorte d'académie mondiale unissant les savants, définissant un langage international et préparant la paix universelle et la réunification des Eglises. La pensée de Coménius est dans le droit fil de la conception traditionnelle: "*tout procède de l'Un, tout tend vers l'Un*", Coménius perçoit le monde en termes d'analogie.

Coménius peut être le lien qui unit les futurs fondateurs de la R.S. et l'idée de collège universel. Il a lu Bacon. Il a rencontré Andreae en 1629. Il est aussi l'ami de Samuel Hartlib, le professeur allemand de Cambridge dont nous savons qu'il a participé à l'"Invisible College"... C'est Hartlib qui invite Coménius à venir en Angleterre, où il arrive en Septembre 1641. A Londres, Coménius expose ses thèses pansophiques devant un Parlement intéressé qui décide la création d'un Collège pansophique immédiatement, à Chelsea. Les développements de la guerre civile en 1642 effraient Coménius; il repasse sur le continent et l'entreprise tourne court. On peut néanmoins s'interroger: le programme de Chelsea et les principes qui le sous-tendaient ne seraient-ils pas à l'origine de la création de l'"Invisible College"?

Que conclure à partir de ces petits mystères, de cet imbroglio et de l'écheveau complexe de liens que nous devinons?

Nous constatons d'abord l'existence d'un puissant courant européen favorable à la collaboration des savants en dehors de toute autorité politique ou religieuse et visant à constituer une communauté internationale.

Nous pressentons la singularité de convergences et de cheminements dont l'Angleterre paraît être le point de départ et le point d'arrivée, une Angleterre en retard, néanmoins, au début du siècle sur l'Italie ou sur la France.

Précisément - et c'est peut-être le plus intéressant - cette conjoncture projette un éclairage particulier sur les mentalités de l'époque, et d'abord sur l'omniprésence d'un ésotérisme et d'une symbolique hermétique qui semblent en complète contradiction avec les objectifs poursuivis. Nous sommes à une articulation décisive des modes de pensée et pourtant, les contemporains perçoivent mal la différence radicale entre démarches et discours anciens et nouveaux. Il en résulte une permanente osmose entre les deux approches de la connaissance; d'un côté, la science traditionnelle, globalisante, ésotérique, à base révélée, dont le modèle est l'alchimie et que les textes rosicruciens prolongent; une science conçue comme une gnose. De l'autre, la science nouvelle, rationnelle, expérimentale, nécessairement publique. La frontière entre les deux est imprécise dans les esprits. A la limite, existe-t-elle? Ce n'est peut-être pas un paradoxe si Bacon et Descartes ont pris de l'intérêt aux écrits Rose-Croix au point que la postérité ait vu en eux des initiés. Kepler a pratiqué l'astrologie parce qu'il y portait crédit. Le dépouillement des manuscrits Keynes du King's College de Cambridge a montré que la grande affaire de la vie de Newton avait été la quête alchimique et que c'est dans cette perspective qu'il avait préalablement conçu l'attraction universelle. En revanche, Robert Fludd, hermétique affirmé, a publié une *Histoire du macrocosme et du microcosme* qui ressemble fort à une divulgation en clair comme si, pour contrer les progrès de l'empirisme rationnel, il choisissait d'user d'une de ses méthodes: l'exposé en termes accessibles...

Dans ces conditions, on peut avancer que projet pansophique à ses origines, la Royal Society, par les objectifs qu'elle se donne, rompt totalement et définitivement avec l'ésotérique, l'occulte, l'invisible qui sont pourtant loin d'être absents des principes qui l'ont inspirée. Qu'il y ait une telle part de pensée déjà anachronique dans la génèse d'une institution à ce point porteuse d'avenir révèle les confusions et les incertitudes du temps. Voyant les choses avec le recul de l'histoire, nous avons tendance à simplifier, à rendre compte des faits d'une manière réductrice et somme toute manichéenne. Il ne faut jamais oublier que l'âge de l'éveil de la science moderne est aussi l'âge baroque, avec toutes ses contradictions.

Table ronde: "Les mathématiques au XVIIe siècle"

PROPOS DE TABLE: DE LA RECETTE EN MATHEMATIQUES

par Denis LANIER

Un article beaucoup plus développé sur cette question est à paraître dans un prochain numéro de SCHOLIES, *Actes du Séminaire Interdisciplinaire d'Histoire des Sciences du Lycée Malherbe de Caen. (Renseignements et abonnements : D. Lanier, Lycée Malherbe ,14039 CAEN CEDEX.)*

Puisque ce colloque est consacré aux relations entre les mathématiques et la culture de l'époque, je voudrais aborder ici les rapports entre les mathématiques et une activité culturelle majeure: la cuisine. Il est frappant de constater l'évolution parallèle des traditions et écrits culinaires et mathématiques au XVIIème siècle; j'en prendrais pour exemple les créations conjointes des notions de recette, en cuisine, et de méthode, en mathématiques.

Peut-être est-il nécessaire de faire ici quelques rappels d'histoire culinaire? On peut noter dès à présent un premier rapprochement avec les mathématiques. En cuisine il est toujours tentant d'attribuer la recette d'un plat célèbre à un personnage non moins célèbre. On a ainsi longtemps attribué l'invention de la pâte feuilletée à Claude Gellée, dit Le Lorrain. En fait les recettes sont réécrites, reformulées, remaniées par chaque auteur. La cuisine serait ainsi, comme les mathématiques, "négatrice de sa propre histoire".

Du Moyen-Age à la Renaissance, jusqu'au début du XVIIème siècle, les recettes que l'on peut trouver dans les rares livres de cuisine connus (comme le *Viandier* de Taillevent, XIV° siècle) sont très imprécises aussi bien en ce qui concerne les quantités et les temps de cuisson que pour l'ordre des opérations à réaliser. C'est le résultat, et même le spectaculaire de son apparence, qui compte. Il n'y a pas de spécificité de la cuisine française qui, comme toutes les cuisines des cours européennes, est finalement assez frustre; les préparations sont fort simples, les goûts sont assez relevés, et surtout très épicés, peut-être pour faire passer la fadeur des viandes que l'on a fait cuire et recuire.

A partir du XVIème siècle un certain nombre d'innovations se font jour qui vont conduire à la création de ce qu'on appelle depuis la Grande Cuisine Française. L'imprimerie, tout d'abord, va, comme en sciences, contribuer à la diffusion d'idées nouvelles et obliger les auteurs à des présentations plus systèmatiques. De nouveaux aliments, généralement dûs aux grandes découvertes, font peu à peu leur apparition: la dinde, la pomme de terre, les haricots, le chocolat, le thé ,le café.

Vers le milieu du XVIIème siècle paraissent des ouvrages qui représentent une rupture avec la cuisine du Moyen-Age. Le *Cuisinier François* de La Varenne en 1651 inaugure la "nouvelle cuisine" qui est en train de naître. Le changement est venu principalement d'une organisation rationnelle de la cuisine, du travail du cuisinier, et donc du concept de recette lui-même. La technique culinaire se cristallise selon une façon modulaire de conjuguer travail et ingrédients, afin de permettre l'utilisation des deux pour produire des plats et des repas efficacement exécutés et infiniment variés. L'introduction du "potager" dans les cuisines a permis une maîtrise de la qualité de la cuisson et de ses variations pendant la préparation d'un plat. Le cuisinier a maintenant à sa disposition une palette de recettes de base (bouillons, sauces, liaisons, farces, mélanges d'herbes et d'épices) qu'il peut ensuite réutiliser à sa guise et au vu de ses possibilités. La recette fait donc appel sans plus de détail à ces préparations de base, qui sont détaillées au début, voire qui sont supposées connues de tous. Ces recettes isolent artificiellement les opérations et les ingrédients nécessaires pour confectionner un plat donné. C'est un échantillon du travail en cours dans une cuisine, où l'on prépare, par ailleurs et en même temps, de nombreux plats. C'est une série d'actions, abstraites de leur contexte, mais qui doit, justement à cause de cette abstraction, permettre de répéter ailleurs la même préparation et aboutir, en principe, au même résultat. On voit qu'on n'est pas très loin de l'idée d'expérience scientifique, voire de démonstration ou de construction géométrique. Ce souci géométrique se retrouve dans la recherche forcenée de la symétrie des plans de table du "service à la française".

Pourquoi ne pas renverser la métaphore et proposer une interprétation culinaire de l'histoire des mathématiques?

De nouveaux objets sont entrés, tels de nouveaux aliments, en mathématiques: les logarithmes, de nouvelles courbes comme la cycloïde, de nouveaux nombres comme les imaginaires, les points à l'infini de Desargues... D'autre part le premier XVIIème siècle est l'âge des "méthodes": les méthodes pour les tangentes de Descartes, Fermat ou Roberval, la méthode des indivisibles de Cavalieri et ses variantes, le classement des courbes par le degré des équations, les méthodes projectives de Desargues, la descente infinie de Fermat... Ces méthodes ne sont pas des théories au sens moderne, mais bien des recettes, en ce qu'elles ne sont pas toujours fondées solidement mais qu'elles marchent (plus ou moins bien suivant les ingrédients et les cuisiniers), mais elles donnent des résultats de plus en plus savoureux. Le mathématicien, muni d'une méthode ou d'une combinaison de ces recettes de base, peut alors se lancer dans des préparations plus compliquées: résolution du problème de Pappus, quadrature de la Roulette, ou encore une confiserie de luxe comme le grand théorème de Fermat. Chacun de ces plats a un goût particulier, lié à la méthode employée. Aucune recette ne peut se targuer d'être assez générale pour éclipser les autres, et elles font partie, sans les contestations et polémiques pourtant si fréquentes en ce siècle, du fonds commun à tous.

Les mathématiciens n'ont pas seulement créé de nouvelles préparations de base pour inventer de nouveaux plats. Les saveurs ont aussi considérablement changé. La redécouverte et la lecture minutieuse des textes de l'Antiquité grecque, les essais de reconstitution des textes perdus ou de la fameuse "analyse", bref l'autorité des Anciens, ont imposé une uniformité dans le style, dans le goût. Pour innover il faut arriver à des chefs d'oeuvre comme la divination des "Porismes" d'Euclide, ce qui n'est pas à la portée de tout le monde! Ces nouvelles méthodes de base, avec les nouveaux ingrédients cités plus haut, ont de plus le souci de concentrer comme en cuisine, la réalisation de la recette sur la "propriété spécifique" de la courbe (pour parler comme Fermat). Les recettes du XVIIème siècle essaient de conserver voire de sublimer la saveur de l'ingrédient principal du plat. De même, les mathématiciens essaient d'assurer une cohérence entre la définition de l'objet mathématique utilisé (son équation, sa propriété géométrique principale) et le traitement qu'on lui fait subir.

Chaque réalisation, chaque plat a donc une saveur pleine et particulière. C'est au XVIIIème siècle que, les méthodes étant devenues "calculs", les saveurs vont s'unifier, se standardiser. On pourrait dire méchamment que Newton et Leibniz inaugurent la cuisine industrielle voire le fast-food scientifique! En tout cas, la cuisine mathématique du XVIIème siècle doit avoir un goût fort savoureux qui explique peut-être l'intérêt que nous portons à cette période de l'histoire des sciences.

Depuis Platon, il est de bon ton de mépriser la cuisine. C'est une empirie et non une science; elle concerne la sensation et non l'intellect; elle cherche la séduction, le bariolé, le chatoyant plutôt que la lumière du vrai. Le XVIIème siècle est peut-être un moment de rencontre possible entre cette pratique, prétendue contraire à la raison, et la science en train de se faire. Cette rencontre ne pouvait être que passagère. La cuisine restera un art de l'éphémère s'adressant aux sens et non à la raison. La science, dans sa marche triomphale, se dépouillera des méthodes particulières et de la multiplicité baroque des goûts. Quitte à faire de la mathématique un objet de pure pensée, incolore, inodore et sans saveur. N'y aurait-il pas une fantastique faute de goût que de vouloir rechercher dans Bourbaki quelque chose comme une saveur?

Certains "soupçonnent que, pour être mathématiciens, il nous faudrait être des anges".

Mais, que mange-t-on au paradis?

Philosophie et Mathématiques au XVIIe siècle

J.P. et J. GUICHARD

Comment comprendre ce qui nous est donné au XVIIe siècle comme un fait à deux niveaux:

– le développement d'un type nouveau de penseur “philosophe-mathématicien", c'est-à-dire d'un homme à double compétence philosophique et mathématique, qui pratique et fait avancer les deux disciplines;

- l'impact de la démarche mathématique sur la pensée philosophique qui trouve dans les mathématiques son ou ses modèles.

Les caractérisations traditionnelles du XVIIe siècle comme "Age classique", "siècle du rationalisme", ou "siècle de la méthode" fournissent des pistes de réflexion et permettent de comprendre que le siècle qui privilègie la raison et cherche la rationalité de toute chose, ait pu voir dans les mathématiques la rationalité en acte et y trouver son modèle.

Les références sont, bien sûr, les grandes figures de ce siècle: Descartes, Spinoza, Leibniz, et Pascal auquel il faut faire ici une place à part.

Le XVIIe siècle, l'Age classique: ses références fondamentales, le classicisme gréco-romain, dont la Renaissance a remis les oeuvres à l'honneur en faisant de l'Antiquité gréco-latine la base de l'éducation. Et ce qui passe à travers ces références, c'est la définition de l'homme par la raison. L'homme défini par les Grecs comme animal doué de logos, c'est-à-dire indissolublement de raison et de langage, dont la faculté de discourir fait la synthèse.

Siècle du rationalisme donc, avec un double postulat métaphysique sur la raison et l'ordre de l'Univers:

- sur la raison comme "puissance de bien juger et de distinguer le vrai d'avec le faux", selon le début du <u>Discours de La Méthode</u>; puissance d'atteindre le vrai, donc de constituer une véritable connaissance de la réalité, de comprendre l'ordre rationnel des choses, et c'est le deuxième postulat:

- sur la rationalité de l'Univers: toute chose a une raison qui suffit à la comprendre, c'est-à-dire à rendre raison de son existence et de sa nature. C'est le principe de raison suffisante. Leibniz l'énonce au paragraphe 32 de <u>La Monadologie:</u>

"Nos raisonnements sont fondés sur deux grands principes, celui de la contradiction /.../ (§31). Et celui de la raison suffisante, en vertu duquel nous considérons qu'aucun fait ne saurait se trouver existant, aucune énonciation véritable, sans qu'il y ait une raison suffisante, pourquoi il en est ainsi et non pas autrement. Quoique ces raisons le plus souvent ne puissent point nous être connues".

Pour découvrir, pour comprendre cette rationalité universelle qui donnerait à l'homme la science universelle, "la mathésis universalis" dont le concept va dominer le XVIIe siècle, avec Descartes et Leibniz, il faut raisonner. La raison est donnée à l'homme, elle le définit comme homme, c'est le début du Discours de La Méthode, mais il lui faut apprendre à s'en servir.

Le XVIIe siècle est aussi le siècle de la méthode. Les siècles précédents, dominés par la Scolastique, s'attachaient aux formes du raisonnement vrai et trouvaient leur guide dans la Logique d'Aristote et sa théorie du syllogisme. Le XVIIe siècle, avec Descartes comme initiateur, perçoit l'insuffisance et éventuellement la stérilité d'une logique purement formelle qui statue sur les formes de la pensée vraie, mais est impuissante à indiquer comment s'y prendre pour résoudre un problème: par où commencer? quel ordre suivre? C'est la fonction de la méthode, qu'il faut trouver pour bien conduire sa raison dans la recherche de la vérité et la connaissance de la réalité, c'est-à-dire dans les sciences en ce siècle qui va tourner le dos à la conception grecque de la science comme savoir spéculatif, "théoria": pure contemplation intellectuelle de la réalité, pour développer une conception technique de la science comme ce qui doit viser à "nous rendre comme maître et possesseur de la Nature". (Discours de La Méthode. Sixième Partie.)

La méthode permet donc de bien user de la raison, lumière naturelle pour connaître la réalité. C'est la libération de la connaissance par rapport à l'autorité de la théologie. Le XVIIe siècle, siècle du rationalisme et de la méthode sera par là-même le siècle de la coupure entre science et théologie, raison et foi. La méthode doit donner à la raison les moyens d'atteindre le vrai par ses propres forces, sans les lumières de la foi. Coupure assurée par Descartes, avec:

- d'une part sa conception mécaniste de la Nature: on peut comprendre les phénomènes naturels, physiques, par de simples relations de cause à effet, sans avoir à se référer à la finalité d'une cause première qui aurait pensé l'organisation de l'ensemble;
- et d'autre part, avec ses démonstrations de l'existence de Dieu, par lesquelles la raison se donne elle-même le fondement métaphysique , c'est-à-dire absolu, de sa propre certitude.

La foi n'est pas rejetée, mais elle apparait d'un autre ordre que le savoir, domaine spirituel qui requiert l'adhésion de l'esprit, qui concerne le salut de l'homme, de son âme, non la connaissance de son monde et de son corps.

Pour ce siècle du rationalisme et de l'exigence méthodologique, les mathématiques avec "la certitude et l'évidence de leurs raisons" (Descartes. Discours...) vont apparaître comme la rationalité en acte, le modèle voire la forme même de toute véritable connaissance rationnelle. Elles sont le domaine où la raison montre ce qu'elle peut en suivant l'ordre des raisons, c'est-à-dire par ses propres forces.

Descartes ouvre la voie, en voyant en elles un modèle et en tirant sa méthode des "longues chaînes de raisons toutes simples et faciles dont les géomètres ont coutume de se servir pour parvenir à leur plus difficiles démonstrations" (Discours... Deuxième Partie.). Il dira au début du Discours avoir été surpris, étant jeune, qu'on n'ait rien bâti sur elles "de plus relevé" que les arts mécaniques; et il compte sur la méthode qu'elles lui ont inspirée pour réaliser son projet de connaître tout ce qu'il est possible de connaître, c'est-à-dire son projet de science universelle.

On peut penser que Spinoza va plus loin, lui qui écrit son oeuvre maîtresse, l'Ethique, "more geometrico" -à la façon des géomètres-: axiomes, définitions, propositions, démonstrations, lemmes, scolies, tout y est. Faut-il y voir une simple forme d'exposition qui resterait extérieure au contenu de la pensée et à la démarche métaphysique, mais qui garantirait la certitude de la démarche en empruntant à ce qui fait la force et le crédit des mathématiques? Ou bien, plus profondément, faut-il penser que l'exigence de rationalité absolue qui anime la démarche métaphysique a trouvé là la seule forme de pensée qui puisse l'accomplir de part en part en un savoir systématique et démonstratif qui, définissant ses points de départ, est en mesure, en déroulant l'ordre de ses raisons, de comprendre c'est-à-dire d'enfermer et de rendre compte de l'Univers et de son infinité en pensant l'ordre de la matière et l'ordre de l'esprit comme deux séries parallèles infinies qui ont leur raison en Dieu.

Par là se trouve accompli, à la manière spinoziste, ce qui était resté chez Descartes à l'état de projet: la mathesis universalis. Mais ce qu'on peut appeler le mathématisme de Spinoza s'arrête là.

Avec Leibniz, le mathématisme est total, absolu, métaphysique, ou, comme il l'écrit au Marquis de l'Hôpital (27 - 12 -1694):

"Ma métaphysique est toute mathématique ou le pourrait devenir".

Mathématisme absolu, puisque le monde doit son existence et sa structure à un Dieu géomètre qui, pour créer le meilleur des mondes possibles, a pratiqué le grand art de la combinatoire afin de réaliser le maximum de compossibilités.

L'Univers est fait d'une infinité d'êtres qui enferment en eux la série infinie de tous leurs caractères, de tous leurs comportements, de tout ce qui peut leur arriver. La raison de cette série est en Dieu qui a réglé toute chose de façon qu'elle représente ou exprime toutes les autres, c"est-à-dire tout l'Univers, de la même façon qu'il y a une relation d'expression entre l'ellipse et le cercle selon un rapport de projection, ou encore, comme "une projection de perspective exprime son géométral". A Arnault (9 -10 - 1687).

La série, le calcul infinitésimal, fournissent à la métaphysique sa structure qui lui permet d'enfermer l'infini dans le fini et donne au philosophe le moyen de penser l'Univers du point de vue de Dieu, seule vue sans point de vue.

Il semble difficile d'aller plus loin dans l'accomplissement métaphysique du projet de science universelle. Les mathématiques permettent de penser la structure métaphysique de toutes choses parce que cette structure métaphysique est mathématique: Dieu le Créateur est le Calculateur par excellence.

Dans ce courant rationaliste où l'harmonie mathématique-métaphysique va crescendo, une note discordante, un point distingué de la courbe rationaliste: Pascal pour qui la raison ne peut rendre raison de tout.

Il y a toujours une correspondance entre la pensée mathématique et la pensée métaphysique pour comprendre les différents ordres de grandeurs infinies et leur hiérarchie. Mais la raison trouve ses limites que Pascal ne cesse de mettre en évidence. Elle bute sur des paradoxes à l'intérieur même des mathématiques:

"Une division infinie est chose incompréhensible puisqu'elle échappe à toute représentation directe, pourtant, il est vrai de dire qu'il n'y a point de géomètre qui ne croie l'espace divisible à l'infini. On ne peut non plus l'être sans ce principe qu'être homme sans âme". Réflexions sur l'Esprit Géométrique.

Et la raison n'est pas en l'homme la faculté par excellence du vrai. Elle est dépassée par le coeur qui saisit les premiers principes dans une vue implicite et synthétique:

"Nous connaissons la vérité non seulement par la raison, mais encore par le coeur; c'est de cette dernière sorte que nous connaissons les premiers principes et c'est en vain que le raisonnement qui n'y a point part essaie de les combattre... Et c'est sur les connaissances du coeur et de l'instinct qu'il faut que la raison s'appuie, et qu'elle fonde son discours". Pensée 110 (Edition Lafuma) .

Corrélativement, la démarche et les modèles mathématiques n'ouvrent pas la voie à la Vérité métaphysique, si ce n'est négativement pour tourner en dérision les prétentions de la raison et instaurer une crise d'où doit ressortir qu'il faut croire en l'existence d'un ordre transcendant, divin dont la rationalité échappe à la raison, mais qui peut être senti, saisi par le coeur, ordre qui est donc objet de foi.

Notes pour une conférence à Port-Royal:

"Incompréhensible. tout ce qui est incompréhensible ne laisse pas d'être.Le nombre infini. Un espace infini égal au fini. Incompréhensible que Dieu s'unisse à nous". Pensée 149 (ib.) .

La vérité dernière n'est pas objet de démonstration mais de sentiment: "le coeur a ses raisons...".

LES DIFFICULTES THEORIQUES DE L'INTRODUCTION DES INFINIMENT PETITS EN MATHEMATIQUES

J.P. WURTZ

Comme il advient souvent en mathématiques lorsque apparaissent des notions nouvelles et fécondes, l'introduction des infiniment petits s'est d'abord opérée au détriment de la rigueur, et a donné prise, de ce fait, à des critiques qui, rétrospectivement, nous semblent relever de combats d'arrière-garde. Il n'empêche que ces objections n'étaient pas dépourvues de valeur, et que les obstacles théoriques ainsi recensés n'ont pu être vraiment surmontés, pour la première fois, qu'au 19e siècle. Nous allons examiner quels étaient ces obstacles théoriques auxquels se heurta le calcul différentiel à ses débuts [(1)]. Puis nous étudierons comment Leibniz, confronté à ces critiques, s'est tourné et retourné pour les désamorcer.

Lisons, pour découvrir les problèmes qui surgirent dès la fondation du nouveau calcul, le premier postulat introduit par L'Hospital dans son *Analyse des infiniment petits* , immédiatement après la définition des "différences"[(2)] : "On demande qu'on puisse

---

(1) *Le premier article consacré au calcul différentiel fut le mémoire de LEIBNIZ* Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, *paru dans les* Acta Eruditorum *d'octobre 1684. NEWTON, dont la découverte était antérieure, n'avait encore rien publié sur son nouveau calcul (appelé par lui "méthode des fluxions"). Le premier* traité *de calcul différentiel,* L'Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes, *du MARQUIS DE L'HOSPITAL, est paru en 1696. L'Hospital s'est d'ailleurs inspiré très largement de l'initiation au calcul leibnizien que lui avait donnée Jean BERNOULLI en 1691/92. Le premier ouvrage critique sur le calcul infinitésimal sera publié en 1694 par Bernhard NIEUWENTIJT, sous le titre :* Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis. *Il sera suivi en 1695 par un ouvrage beaucoup plus vaste du même auteur,* Analysis infinitorum, seu curvilineorum proprietates ex polygonorum natura deductae. *NiEUWENTIJT critique d'ailleurs moins l'analyse infinitésimale elle-même (qu'il développe sur des bases qui lui paraissent assainies) que les principes sur lesquels CAVALIERI, BARROW, NEWTON et LEIBNIZ l'avaient fondée. A l'Académie Royale des Sciences de Paris, le combat contre le nouveau calcul sera mené à partir de 1700 (si l'on fait abstraction de quelques réserves, plus ponctuelles semble-t-il, faites par LA HIRE dès 1697), essentiellement par Michel ROLLE, sans doute poussé et encouragé par l'abbé GALLOIS, qui interviendra d'ailleurs personnellement dans le débat.*

(2) *LEIBNIZ et L'HOSPITAL appellent "différences" des quantités comme dx et dy.*

prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entre elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même".

Cette "demande" soulève plusieurs difficultés. Tout d'abord, l'utilisation, dans les démonstrations, du signe d'égalité après suppression des quantités infiniment petites, donc négligeables en comparaison des autres pose problème, puisque la quantité supprimée n'est pas nulle. On pouvait considérer comme illicite l'utilisation de ce signe entre grandeurs différant d'une quantité même infiniment petite. Nieuwentijt et Rolle s'élevèrent en tout cas contre cette assimilation de deux quantités non égales. C'est ainsi que Nieuwentijt fit remarquer que "seules sont égales des quantités dont la différence est nulle, ou égale à zéro" ; et, après lui, Rolle, d'après les *Registres des procès-verbaux des séances de l'Académie Royale des Sciences*, a présenté la difficulté suivante : "Si une grandeur plus ou moins sa différentielle, peut être prise pour égale à cette même grandeur", difficulté qui à son tour en soulève cette autre : "Si les différentielles sont des zéros absolus". La difficulté est d'autant plus grande que les différentielles secondes sont elles-mêmes infiniment petites en comparaison des différentielles du 1er ordre, celles du 3e ordre infiniment petites par rapport à celles du 2e ordre, etc... Voilà donc des différentielles qu'on peut négliger dans des égalités comme si elles étaient assimilables à zéro, alors qu'elles doivent être considérées comme infiniment grandes à l'égard de différentielles d'ordre supérieur. Comme l'écrit d'une façon assez emphatique Fontenelle dans sa préface à l'*Analyse des infiniment petits* de L'Hospital : "L'analyse qu'on explique dans cet ouvrage ... compare les différences infiniment petites des grandeurs finies ; elle découvre les rapports de ces différences : et par là elle fait connaître ceux des grandeurs finies, qui comparées avec ces infiniment petits sont comme autant d'infinis. On peut même dire que cette analyse s'étend au-delà de l'infini : car elle ne se borne pas aux différences infiniment petites ; mais elle découvre les rapports des différences de ces différences, ceux encore des différences troisièmes, quatrièmes, et ainsi de suite, sans trouver jamais de terme qui la puisse arrêter. De sorte qu'elle n'embrasse pas seulement l'infini ; mais l'infini de l'infini, ou une infinité d'infinis". Rolle exposera ainsi cet aspect de la question : "Si en géométrie il y a des infiniment grands, infinis les uns des autres ; et des infiniment petits, infiniment les uns des autres"(1). Et en 1734, dans *The Analyst,* Berkeley (qui, lui, conteste non les résultats du calcul infinitésimal, mais la manière dont les mathématiciens y parviennent, la validité des principes sur lesquels ils se fondent) écrira au sujet des fluxions de différents ordres : "... les vitesses des vitesses, les seconde, troisième, quatrième et cinquième vitesses, etc..., dépassent, si je ne me trompe pas, tout entendement humain ... A coup sûr, en quelque sens que ce soit, une seconde ou une troisième fluxion paraît être un obscur mystère. La vitesse commençante d'une vitesse commençante, l'accroissement naissant d'un accroissement naissant, c'est-à-dire d'une chose qui n'a pas de grandeur, considérez-la sous quelque jour qu'il vous plaît, vous découvrirez, si je ne me trompe pas, qu'elle est impossible à concevoir clairement ... Et si une seconde fluxion est inconcevable, que devons-nous alors penser des troisième, quatrième, cinquième fluxions, et ainsi de suite sans fin ? "(2)

(1) *Les citations du* Registre des procès-verbaux des séances de l'Académie Royale des Sciences *(énoncé des difficultés soulevées par ROLLE), ainsi que le texte de BERKELEY qui va suivre (en traduction), sont donnés d'après : M. BLAY,* Deux moments de la critique du calcul infinitésimal : Michel Rolle et George Berkeley, *dans* : Revue d'Histoire des Sciences, *tome XXXIX/3,1986.*

(2) *Voir la note précédente.*

Mais une autre difficulté apparaît encore, qui, moins évidente à l'époque, ne peut manquer de nous frapper aujourd'hui. Si en vertu du postulat déjà cité de l'ouvrage de l'Hospital, une quantité donnée augmentée d'une quantité infiniment petite par rapport à elle doit être considérée comme demeurant la même, il s'ensuit qu'une quantité donnée augmentée un nombre fini de fois d'une quantité infiniment moindre qu'elle devra également être considérée comme demeurant la même. Le produit d'un infiniment petit par un nombre fini est donc négligeable à côté de la quantité à laquelle il est ajouté : les augmentations successives ne pourront jamais égaler une quantité du même ordre de grandeur que la quantité initiale. L'Hospital l'écrit d'ailleurs clairement dans la section IV de l'A*nalyse des infiniment petits*, lorsque, après avoir défini les différences secondes, troisièmes, etc..., il précise, dans une "remarque" : "Toute quantité qui est la somme d'un nombre fini de quantités infiniment petites ... par rapport à une autre ... demeure toujours infiniment petite par rapport à cette même quantité : et ... afin qu'elle devienne du même ordre, il faut que le nombre des quantités de l'ordre inférieur qui la compose, soit infini". Autrement dit, le produit d'un infiniment petit par un nombre fini ne pourra jamais égaler une quantité d'un ordre de grandeur supérieur. On ne saurait mieux dire que ce que nous appelons aujourd'hui l'axiome d'Archimède n'est pas respecté, ou, pour employer le langage d'Euclide, qu'il n'y a pas de "raison" entre une grandeur donnée et une autre, infiniment petite en comparaison d'elle. En fait, cela en soi ne paraissait pas gênant aux esprits de l'époque. Alors que pour nous aujourd'hui l'axiome d'Archimède est à l'arithmétique ce que le cinquième postulat d'Euclide, sous la forme que lui a donnée Posidonius, est à la géométrie, les contemporains de Leibniz n'étaient pas encore sensibles à cet aspect. Ainsi, ce qui dérangeait Nieuwentijt, ce n'était pas tellement la transgression de ce que nous nommons actuellement l'axiome d'Archimède. Il ne lui paraissait pas scandaleux d'admettre qu'un infiniment petit, multiplié par un nombre fini, ne puisse égaler une quantité ordinaire donnée. En revanche, il refusait d'admettre qu'une quantité infiniment petite, même multipliée par un nombre infini, puisse ne jamais égaler une quantité ordinaire donnée. Selon lui, "tout ce qui, multiplié par un nombre infini, ne peut égaler aucune quantité donnée, aussi petite soit-elle, ne doit pas être compté parmi les êtres, et doit être tenu pour égal à zéro *(nihilo)*" ; ce "n'est pas une quantité, mais, en matière de géométrie, c'est un simple rien *(merum nihil)*". Fort de ce dernier principe, il refusa non seulement des produits tels que dx dx, mais également les différentielles de degré supérieur à l, telles ddx, d^3x etc...

Leibniz laissera à Varignon le soin de répondre à Rolle ; mais il se donnera la peine de répondre explicitement à Nieuwentijt, et il est intéressant d'examiner sa réplique.

Mais auparavant, il est utile de noter que Leibniz semblait avoir compris très tôt que les fondements de son calcul étaient mal assurés. Dès ses premiers écrits s'y rapportant, il avait voulu, comme il l'expliquera plus tard, exposer ce calcul d'une façon qui écartât des scrupules d'ordre logique, et il avait essayé de le tenir à l'abri des controverses métaphysiques. C'est pourquoi, dans le mémoire de 1684, il avait appelé dx "une droite prise arbitrairement", et défini dy, pour un point de la courbe, comme la droite qui est à dx comme l'ordonnée à la sous-tangente, évitant ainsi de faire intervenir la notion d'infiniment petit dans la définition des différentielles, et ce bien que, des manuscrits et sa correspondance en témoignent, il les eût considérées depuis longtemps comme des infiniment petits. Et, si en 1686 il s'enhardira à publier un texte où les côtés du triangle caractéristique, "quantités différentielles", sont qualifiés d'infiniment petits, il ne tardera pas à s'efforcer de rendre son calcul acceptable également pour ceux que cette notion rebuterait. *Si quelqu'un se refuse*, écrit-il dans un mémoire publié en 1689, à employer des infiniment petits, il *peut* prendre des quantités d'une petitesse suffisante pour qu'elles soient incomparables aux quantités communes, et pour que l'erreur qu'elles produisent soit dénuée d'importance, inférieure à une erreur donnée. La différence de deux quantités communes, lorsqu'elle est incomparable à ces quantités, sera alors dite incomparablement petite. Ainsi la Terre peut être prise pour un point, ou le diamètre de la Terre pour une ligne infiniment petite relativement au Ciel. On pourra alors considérer des différences "infiniment petites" par rapport à des grandeurs déjà infiniment petites, autrement dit des différences "infiniment infiniment petites", et ainsi de suite, et définir ainsi une infinité de degrés de l'infiniment petit, tout comme, corrélativement, de l'infini. A titre d'exemple, si le mouvement est représenté par une ligne commune parcourue par un mobile en un temps donné, la vitesse sera représentée par une ligne infiniment petite, et l'accélération par une ligne infiniment infiniment petite. Ces considérations, précise Leibniz, doivent être prises pour des "lemmes" de sa "méthode des quantités incomparables" et de "l'analyse des infinis", qu'il appellera plus tard ses "lemmes des incomparables".

Dans sa réponse aux critiques émises par Nieuwentijt contre le fondement même de son calcul, Leibniz fut obligé de préciser sa pensée, et d'abandonner les faux-fuyants.

Il affirma d'abord qu'il faisait grand cas du zèle de ceux qui veulent tout démontrer rigoureusement jusqu'aux premiers principes, mais qu'il ne fallait pas qu'un excès de scrupule logique vînt créer une barrière, ou que sous un tel prétexte on rejetât des découvertes et qu'on se privât de leurs fruits. Il ajouta qu'il tenait pour égales non seulement des quantités dont la différence est tout à fait nulle, mais aussi des quantités dont la différence est incomparablement petite. Et Leibniz d'illustrer par un exemple et de définir cette idée de grandeurs incomparables. Si à une ligne on ajoute un point d'une autre ligne, ou si à une surface on ajoute une ligne, on n'augmente pas par cette opération la quantité initiale. Il en est de même si à une ligne on ajoute une portion de ligne incomparablement plus petite.(1) Ne sont comparables, explique Leibniz, que des quantités homogènes, c'est-à-dire des quantités dont l'une, multipliée par un nombre fini, peut surpasser l'autre (autrement dit celles qui satisfont à ce que nous appelons aujourd'hui l'axiome d'Archimède). Sont donc incomparables des quantités qui ne remplissent pas cette condition (c'est-à-dire qui ne respectent pas l'axiome d'Archimède). Et Leibniz pose que des quantités qui ne diffèrent que d'une quantité incomparablement petite par rapport à elles sont égales, comme l'ont admis aussi, écrit-il, Archimède et d'autres après lui. Or c'est précisément ce que l'on veut dire lorsqu'on affirme qu'une différence est inférieure à n'importe quelle quantité donnée.Rejeter une telle définition de l'égalité, c'est disputer de mots. Ainsi se justifie selon Leibniz, qui renvoie à ce sujet à ses "lemmes des incomparables" de 1689, que l'on néglige des quantités incomparablement inférieures aux autres.

Comment d'autre part, demande Leibniz, Nieuwentijt peut-il prétendre que des côtés dx et dy sont des quantités, et qu'un carré tel que dx dx, ou un rectangle tel que dx dy, ne sont rien ? D'autre part, lorsque les abscisses sont en progression géométrique et les ordonnées en progression arithmétique, x est à dx comme dx à ddx ; "or il serait étrange de dire que x et dx sont des grandeurs, et que leur troisième proportionnelle ddx ne le soit point". Certes, le produit de quantités telles que dx dx, dy dy, dx dy, ou encore telles que ddx, qui sont infiniment infiniment petites, par un nombre infini du premier

(1) *On voit que dans ces exemples, aussi bien les points que des portions infiniment petites de lignes semblent être considérés comme des rudiments de ligne. Dans la* Theoria motus abstracti*(1671), seuls les points apparaissaient comme des rudiments de lignes. Une lettre de LEIBNIZ du 11.9.1716 exclura au contraire cette possibilité : "les points ... ne sont que des extrémités et nullement des parties ou composants de la ligne".*

degré ne peut être une grandeur ordinaire. Mais, contrairement à ce qu'affirme Nieuwentijt, cela ne prouve en rien que ces quantités sont égales à 0. Car leur produit par un nombre infiniment infini ou infini du second degré est une grandeur ordinaire. De façon générale, un infiniment petit d'un certain degré, multiplié par un nombre infini du même degré, donne une quantité ordinaire.

Leibniz ne se contente d'ailleurs pas de montrer ainsi qu'il est légitime et nécessaire d'admettre des infinis et des infinitésimaux de degré plus élevé, ni même de rappeler la valeur heuristique, la fertilité de ces notions en mathématiques. Il invoque également leur utilité en physique : "la vérité de ces différenciations successives et la légitimité de leur usage sont confirmées par les choses mêmes" ; ainsi, pour reprendre un exemple déjà utilisé ailleurs, le mouvement, la vitesse et l'accélération se comportent comme une quantité ordinaire, une quantité différentielle et une quantité différentio-différentielle(1).

Ce qui nous paraît important dans ce texte, c'est tout d'abord que Leibniz y précise sa notion de quantités incomparables en en donnant une définition rigoureuse ; mais c'est surtout qu'il y affirme l'existence d'ordres, de degrés, dans l'infiniment petit comme aussi dans l'infiniment grand, et qu'il y assume l'idée selon laquelle l'ensemble formé des quantités assignables et des infiniment petits, tout comme d'ailleurs celui formé des quantités ordinaires et des infiniment grands, ne satisfait pas à l'axiome d'Archimède.

Cette position est cependant la plus radicale qu'il ait prise. Il l'infléchira progressivement par la suite, peut-être quelque peu ébranlé malgré tout par les objections qui lui avaient été opposées, ou encore rendu circonspect pour des raisons d'ordre physique. Pour bien nous en convaincre, abandonnons pour un temps l'ordre chronologique et intéressons-nous à un texte de 1701 où, après avoir relevé la sûreté du chemin proposé par le marquis de l'Hospital dans son *Analyse des infiniment petits*, il enchaîne : "J'ajouterai même à ce que cet illustre mathématicien en a dit, qu'on n'a pas besoin de prendre l'infini ici à la rigueur, mais seulement comme lorsqu'on dit dans l'optique, que les rayons du Soleil viennent d'un point infiniment éloigné, et ainsi sont estimés parallèles". Et même, comme pour relativiser la portée de ses affirmations et de ses exemples antérieurs, il illustre l'existence de plusieurs degrés d'infinis et d'infiniment petits par l'exemple que voici : le diamètre d'une boule que nous manions est un point en comparaison du rayon du globe terrestre, qui à son tour est un point à l'égard de la distance des fixes ; et réciproquement "la distance des fixes est un infiniment infini ou infini de l'infini par rapport au diamètre de la boule". Et il conclut par ces mots : "Car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantités aussi grandes et aussi petites qu'il faut pour que l'erreur soit moindre que l'erreur donnée, de sorte qu'on ne diffère du style d'Archimède que dans les expressions, qui sont plus directes dans notre méthode et plus conformes à l'art d'inventer".

Arrêtons-nous sur le premier exemple. Ecrire dans ce contexte que les rayons solaires peuvent être estimés parallèles, compte tenu de l'éloignement de leur source, n'est-ce pas confondre la précision exigible en mathématique et celle suffisante en physique ? Il n'est plus question ici d'erreur inférieure à n'importe quelle grandeur donnée, donc à toute quantité assignable, mais d'une erreur telle que la différence avec la réalité soit négligeable, en raison de la faiblesse des sens ou des instruments de mesure. Galilée ne

(1) *Dans un texte publié en août 1694, LEIBNIZ avait marqué plus explicitement encore que le fait même que ces notions s'appliquent aux choses est un garant de leur légitimité. Non seulement il y avait mentionné que les frères BERNOULLI avaient trouvé son calcul "propre pour résoudre des problèmes physico-mathématiques, dont la porte paraissait fermée auparavant", mais encore il avait précisé que ce nouveau calcul "enveloppe la considération de l'infini", pour conclure : "Enfin notre méthode étant proprement cette partie de la mathématique générale qui traite de l'infini, c'est ce qui fait qu'on en a fort besoin, en appliquant les mathématiques à la physique, parce que le caractère de l'Auteur infini entre ordinairement dans les opérations de la nature".*

s'exprimait pas autrement, quand il écrivait qu'on pouvait considérer avec Archimède le fléau de la balance comme "une ligne droite dont chaque point est équidistant du centre commun des graves", des fils perpendiculaires comme parallèles, et que la trajectoire d'un projectile lancé horizontalement pouvait être tenue pour parabolique, bien que les prémisses à partir desquelles ce résultat avait été démontré ne fussent pas rigoureusement exactes.

Le second exemple également est stupéfiant à un double titre. Tout d'abord le diamètre (ou le rayon) "d'une boule que nous manions" n'est pas incomparablement petit par rapport à celui de la Terre, au sens précis que Leibniz avait donné à cette expression dans sa réponse à Nieuwentijt. Car le rapport du diamètre (ou du rayon) du globe terrestre à celui de la boule est fini. Il existe un nombre fini n tel que le produit par n de la deuxième de ces mesures atteigne ou excède la première. L'axiome d'Archimède est donc ici respecté. En second lieu, le diamètre de la boule est une grandeur ordinaire, sensible, assignable ; il n'est pas inférieur à toute grandeur assignable, et n'est infiniment petit qu'en comparaison d'une distance infinie. Il est donc étrange (et peut-être significatif) que Leibniz ait choisi précisément une telle grandeur pour illustrer la notion d'infiniment petit. Or Leibniz ne reniera jamais cet exemple, puisqu'on en retrouvera un semblable, plus explicitement formulé, dans une lettre écrite en 1716, l'année de sa mort. Il y explique que si l'on considère le diamètre du globe de la Terre comme une ligne ordinaire assignable, il faut concevoir le diamètre d'un grain de sable comme une différence du premier degré, et celui d'un petit élément du grain de sable comme une différentielle du second degré. Là encore, force est de constater que ces "différentielles" ne sont pas des grandeurs "incomparablement" plus petites, au sens rigoureux que cette expression avait pour Leibniz en 1695, que celles dont elles sont dites les différentielles, et que l'axiome d'Archimède est donc respecté, et qu'au surplus le diamètre d'un grain de sable ou celui d'une petite partie de celui-ci ne sont pas des grandeurs infinitésimales, c'est-à-dire inférieures à toute grandeur assignable.

Certes, lorsque Varignon, troublé, lui demanda des explications, Leibniz lui répondit d'abord (en février 1702) que, une fois de plus, il avait voulu "marquer qu'on n'a point besoin de faire dépendre l'analyse mathématique des controverses métaphysiques, ni d'assurer qu'il y a dans la nature des lignes infiniment petites à la rigueur, en comparaison des nôtres". Et il ajouta : "C'est pourquoi, afin d'éviter ces subtilités, j'ai cru que pour rendre le raisonnement sensible à tout le monde, il suffisait d'expliquer ici l'infini par l'incomparable, c'est-à-dire de concevoir des quantités incomparablement plus grandes ou plus petites que les nôtres ; ce qui fournit autant qu'on veut de degrés d'incomparables ... Mais il faut considérer en même temps, que ces incomparables communs ... pouvant être pris aussi petits qu'on veut dans nos raisonnements géométriques, font l'effet des infiniment petits rigoureux, puisqu'un adversaire voulant contredire à notre énonciation, il s'ensuit par notre calcul que l'erreur sera moindre qu'aucune erreur qu'il pourra assigner, étant en notre pouvoir de prendre cet incomparablement petit, assez petit pour cela ... Si quelqu'un n'admet point des lignes infinies et infiniment petites à la rigueur métaphysique et comme des choses réelles, il peut s'en servir sûrement comme des notions idéales qui abrègent le raisonnement, semblables à ce qu'on appelle racines imaginaires dans l'analyse commune (comme par exemple $\sqrt{-2}$), lesquelles toutes imaginaires qu'on les appelle, ne laissent pas d'être utiles, et même nécessaires à exprimer analytiquement des grandeurs réelles".

Mais il est facile de se rendre compte que ce n'était derechef qu'un faux-fuyant de la part de Leibniz. Car celui-ci avouera peu après à Varignon (en juin 1702) qu'il n'est "pas trop persuadé" lui-même "qu'il faut considérer nos infinis et infiniment petits autrement que comme des choses idéales ou comme des fictions bien fondées", et dans une lettre déjà citée de 1716, il écrira à Dangicourt : "Quand ils [nos amis] disputèrent en France avec l'Abbé Gallois, le Père Gouge et d'autres, je leur témoignai, que je ne croyais point qu'il y eût des grandeurs véritablement infinies ni véritablement infinitésimales, que ce n'étaient que des fictions, mais des fictions utiles pour abréger et pour parler universellement, comme les racines imaginaires dans l'algèbre ... Mais comme Mr. le Marquis de l'Hospital croyait que par là je trahissais la cause, ils me prièrent de n'en rien dire, outre ce que j'en avais dit dans un endroit des Actes de Leipzig, et il me fut aisé de déférer à leur prière".

En fait, dès 1698, donc trois ans avant l'article qui avait déclenché cette discussion, Leibniz avait fait part à Jean Bernoulli de son doute concernant la réalité des infiniment petits : "Il se pourrait bien que les infinis que nous concevons et les infiniment petits soient imaginaires, mais aptes à déterminer le réel, comme le font d'ordinaire aussi les racines imaginaires". Supposons en effet que nous nous donnions des lignes réelles infiniment petites ; il s'ensuivrait que nous devrions admettre aussi l'existence de droites limitées de part et d'autre, qui soient aux ordinaires comme l'infini au fini, ce qui signifierait qu'il y aurait dans l'espace un point auquel il soit impossible de parvenir depuis un point donné en un temps assignable, par un mouvement uniforme. Il faudrait, pareillement , concevoir un temps limité de part et d'autre et pourtant infini, donc un certain genre d'éternité pour ainsi dire limitée : un vivant pourrait à la fois ne point mourir en un nombre assignable d'années et cependant mourir un jour, "toutes choses que je n'oserais admettre sans y être contraint par des démonstrations indubitables".

Peu après, s'étant demandé s'il peut y avoir une portion de matière dont la raison à une autre soit inassignable, ou s'il existe une ligne droite limitée des deux côtés et dont cependant la raison à une autre soit infinie ou infiniment petite, il avait noté : "nous l'admettons utilement dans le calcul ; mais il n'en découle pas que cela puisse exister dans la nature".

On devine l'étonnement de Jean Bernoulli, qui répliquera que, puisque Leibniz admet la division actuelle de la matière en des parties infinies en nombre, ce qui implique qu'un corps fini a des parties infinies en nombre, "la plus petite de ces parties doit avoir au tout une raison inassignable ou infiniment petite".

Leibniz se verra obligé de préciser sa pensée : "Quoique, je le concède, il n'existe pas de portion de la matière qui ne soit divisée en acte, on n'arrive pas pour autant à des éléments insécables, ou à des portions les plus petites, à des portions infiniment petites, mais seulement à des portions toujours plus petites, et cependant ordinaires".

Il n'est pas question ici de résumer toute cette discussion entre Leibniz et Jean Bernoulli, qui s'étend sur d'assez nombreuses lettres. Retenons simplement encore cette objection de Bernoulli : Supposons qu'une quantité finie soit divisée en des parties selon la progression géométrique

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

Tant que le nombre de termes est fini, chaque terme sera fini ; mais si tous les termes existent en acte, il y en aura bien dont la grandeur soit infiniment petite. Leibniz répondra à cet argument que, même si l'on suppose que tous les termes de cette série existent en acte, il ne s'ensuit pas qu'il y en ait un qui soit infinitésimal : il n'existe en acte que n'importe quelle fraction finie et *assignable* aussi petite que l'on voudra.

On retiendra essentiellement trois faits de cette discussion avec Bernoulli. Tout d'abord, qu'à cette époque Leibniz ne nie ni la réalité ni le caractère fictif des infiniment petits. *Peut-être bien*, dit-il, les infinis et les infiniment petits sont-ils imaginaires, et il *craint* que la nature ne souffre pas ce qui est ainsi conçu dans l'analyse nouvelle ; les arguments qu'il met en avant sont simplement présentés comme des raisons motivant ce doute et le refus des objections de Bernoulli, qui ne veut l'admettre. Leibniz prend bien soin de préciser qu'on ne peut vraiment démontrer ni la possibilité, ni l'impossibilité des infiniment petits : “la question reste en suspens”. On retiendra en second lieu que, dans la perspective envisagée, la notion de quantité inassignable semble être entièrement bannie : il ne reste que des parties toujours plus petites, mais “ordinaires”, et les termes décroissants de la série prise comme exemple sont toujours des fractions finies assignables aussi petites que l'on voudra. Il reste, et c'est là le troisième point, que le calcul infinitésimal n'est jamais remis en cause : même si les infinitésimaux sont des fictions, des êtres idéaux, ils n'en sont pas moins aptes à déterminer le réel, comme les racines imaginaires ne laissent pas de régir les choses, quoiqu'elles n'existent pas dans les parties de la matière. Donc, même s'il n'existe réellement ni infinis, ni infiniment petits, il suffit pour le calcul qu'ils soient conçus à titre de fictions, de notions idéales, comme les racines imaginaires ; “car toujours, ce qui est conclu moyennant ces infinis et ces infiniment petits peut être démontré par un raisonnement par l'absurde, par ma méthode des incomparables”.

Pour ce qui est de l'essai d'élimination de la notion de quantité inassignable, ces textes de 1698 paraissent avoir représenté la prise de position la plus extrême de Leibniz. Car cette notion réapparaîtra par la suite, sans que d'ailleurs Leibniz renie en quoi que ce soit ses autres positions nouvelles, et ce déjà fin décembre 1698, lorsque dans une lettre à Wallis il qualifie d'inassignable le triangle caractéristique, et fait intervenir dans son raisonnement des cordes inassignables et des segments inassignables d'un cercle. En revanche, Leibniz ne renonça jamais à l'idée selon laquelle la notion d'infinitésimale est une notion idéale, une fiction. Bien au contraire, ce qui lui était apparu en 1698 comme “en suspens”, ce qu'il avait présenté comme une croyance en 1702, est présenté comme une certitude dans un mémoire paru en 1712. Partant de ce que :

$$\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1} ,$$

ce qui conduit à ce paradoxe que la raison du plus grand au plus petit doit être dite égale à celle du plus petit au plus grand, Leibniz en conclut, par un raisonnement où intervient le logarithme de ces quantités, que ces raisons ne sont pas réelles, mais imaginaires (comme est imaginaire le logarithme de - 1). Il y a ainsi, écrit-il, des choses qui ne sont pas réellement vraies, même si elles sont employées de façon sûre et utile dans les calculs. On rencontre, de la sorte, des énoncés qui sont “vrais par tolérance”. Ils ne supportent pas la rigueur, mais sont d'une grande utilité dans les calculs et dans l'art d'inventer. Et Leibniz de poursuivre : “De même que je nie qu'un rapport dont un terme est une quantité inférieure à zéro soit réel, de même aussi je nie qu'il y ait à proprement parler un nombre infini ou infiniment petit”. Lorsque nous disons qu'une erreur est infiniment petite, il faut entendre par là plus petite que n'importe quelle erreur donnée. Leibniz reprend alors une comparaison qui nous est à présent familière : si nous parlons de quantités ordinaires, infiniment petites et infiniment infiniment petites, c'est comme si nous comparions le diamètre de l'orbe des fixes, celui de la Terre et celui d'un grain de poussière. Ces façons de parler sont des expressions commodes, courtes, mais qui ne sont vraies que par tolérance, et qui n'acquièrent consistance que par l'explication. Et, pour mettre définitivement les choses au point, Leibniz précise bien que ces remarques peuvent servir utilement à se préserver de “concepts chimériques”. Cette certitude sera confirmée dans une lettre de septembre 1713, où notre auteur assurera que sa pensée selon laquelle les quantités infiniment petites et les quantités infinies sont des fictions, mais des fictions utiles, repose sur des “preuves incontestables”.

Cette évolution des conceptions leibniziennes relatives au statut des infiniment petits ne doit cependant pas masquer la permanence de certains thèmes. Tout d'abord, qu'elles soient considérées comme réelles ou comme fictives, toujours les quantités infiniment petites sont telles par rapport à d'autres grandeurs. La définition même des différentielles de divers ordres, qui entraîne que des infiniment petits soient négligeables non seulement devant une grandeur ordinaire, mais encore devant un infiniment petit d'un ordre moins élevé, imposait d'ailleurs d'emblée cette relativité, sans laquelle le calcul infinitésimal n'est guère concevable. De ce fait - et c'est là la seconde idée toujours présente dans la pensée mathématique de Leibniz (sauf peut-être dans la période d'élaboration de ce calcul) - les infiniment petits ne peuvent être considérés comme égaux à zéro. Troisièmement enfin, Leibniz a toujours pensé que les infiniment petits obéissent aux mêmes lois que les grandeurs ordinaires. Dans tous ses calculs faisant intervenir des différentielles et des quantités assignables, il applique les mêmes règles à ces différents types de grandeurs. "Les règles du fini réussissent dans l'infini ... ; et ... vice versa les règles de l'infini réussissent dans le fini", comme il l'écrit à Varignon. De même que les racines imaginaires, les infinis et les infiniment petits, bien que fictifs, ont leur "*fundamentum in re*" ; ils "sont tellement fondés que tout se fait dans la géométrie, et même dans la nature, comme si c'étaient des parfaites réalités".

Mais d'où vient que les propriétés des opérations licites dans le cas des grandeurs ordinaires puissent être appliquées impunément à des grandeurs "sur le point d'évanouir", lorsqu'on prend "tout d'un coup l'incomparablement petit au lieu de ce qu'on peut assigner toujours plus petit à l'infini" ? Leibniz l'explique par sa "loi de la continuité", applicable aussi bien en mathématiques qu'en physique, "en vertu de laquelle il est permis de considérer le repos comme un mouvement infiniment petit ... et la coïncidence comme une distance infiniment petite, et l'égalité comme la dernière des inégalités", donc de prendre "l'égalité pour un cas particulier de l'inégalité et le repos pour un cas particulier du mouvement", etc ..., "supposant non pas que la différence des grandeurs qui deviennent égales est déjà rien, mais qu'elle est dans l'acte d'évanouir, et de même du mouvement, qu'il n'est pas encore rien absolument, mais qu'il est sur le point de l'être". Bref, les infiniment petits sont conçus "comme s'évanouissant certes dans le rien, en conservant cependant le caractère de ce qui s'évanouit". Si ce caractère se conserve, c'est précisément parce qu'en application de cette loi, "tout changement doit arriver par des passages inassignables et jamais par saut". Dès lors "tout ce qu'on dit du mouvement, de l'inégalité ..., se doit vérifier aussi, quand on suppose ces choses infiniment petites ..."

On voit donc que Leibniz a eu clairement conscience à la fois de ce qui permettait et justifiait son calcul, et, sinon de la fragilité, du moins de l'absence de rigueur absolue de son fondement, à tel point que Fontenelle, qui croyait à la rigueur totale des notions d'infiniment petit et d'infiniment grand, a pu le comparer à un architecte qui "a fait un bâtiment si hardi, qu'il n'ose lui-même y loger". Nous constatons, quant à nous, que, dans sa quête d'un statut précis des infiniment petits, Leibniz a tour à tour, dans ses deux positions extrêmes de 1695 et de 1698, fait un premier pas dans les deux voies sur lesquelles le 19e siècle d'abord, le 20e ensuite, se sont engagés pour fonder son nouveau calcul en toute rigueur. Lorqu'en 1698, dans sa discussion avec Jean Bernoulli, il tend à écarter la notion même de grandeur infiniment petite et à ne retenir que des grandeurs assignables, inférieures cependant à n'importe quelle quantité également assignable que l'on veuille choisir, ne prépare-t-il pas la voie au courant qui, de Bolzano à Weierstrass et à Cauchy, fondera le calcul infinitésimal en éliminant toute référence à des nombres infiniment petits et en introduisant des différences dont la valeur absolue peut être rendue inférieure à quelque nombre positif ε que l'on se donne ? Et lorsqu'en 1695, répondant à Nieuwentijt, il affirme au contraire l'existence d'infiniment petits et d'infiniment grands qui, en vertu de leur définition même, joints aux nombres ordinaires, ne respectent pas l'axiome d'Archimède, mais sur lesquels on peut opérer comme sur ces nombres ordinaires, n'a-t-il pas préparé la voie à l'analyse non standard de Robinson, qui a pu affirmer que le contenu de son livre montre que ces idées leibniziennes "peuvent être pleinement justifiées", et qu'elles "mènent à une approche nouvelle et féconde de l'analyse classique et de mainte autre branche des mathématiques" ?

Jacques Borowczyk
IREM de Poitiers

Horner et la communauté mathématique du XIX^{e} siècle

L' an VIII de la République français, année 1800 de notre ère, les presses de l'imprimerie Levrault frères de Strasbourg faisaient paraître un ouvrage de 400 pages in-4° intitulé " *Du calcul des dérivations et de ses usages dans la théorie des suites et dans le calcul différentiel*". Son auteur Louis-François-Antoine ARBOGAST, professeur de mathématiques à l'Ecole Centrale de Strasbourg y travailait depuis de longues années et, cet ouvrage constitue avec un "*Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux dérivées partielles*" présenté à l'Académie impériale de Saint Petersbourg pour concourir au prix proposé en 1787 et qui fut couronné dans l'Assemblée du 29 novembre 1790 l'essentiel de son œuvre mathématique. Nous verrons l'usage qu'en fera quelques années plus tard en Angleterre W. G. Horner.

Pour faire plus ample connaissance de ce mathématicien alsacien, ajoutons qu' ARBOGAST, né à Mutzig le 4 octobre 1759 mort à Strasbourg le 8 avril 1803 (1), a reçu une formation juridique et, devenu avocat plaidant au Conseil souverain d'Alsace, dans la tradition amorcée par d'illustres juristes comme Viète ou Fermat ayant un goût prononcé pour les mathématiques, il s'adonna à cette science et se fit nommer en 1783 au collège de Colmar pour y enseigner la géométrie puis en même temps professeur de mathématiques au corps royal d'artillerie et professeur de physique au Collège national de Strasbourg dont il devint quelques années plus tard recteur. Il se fit connaître ainsi des électeurs du Bas-Rhin et qui l'élirent en août 1791 à l'Assemblée législative, et le réélirent, un an plus tard le 6 septembre 1792 membre de la Convention. Il participa aux travaux du Comité d'Instruction Publique jusqu'en l'an V-1795 . Il rédigea en son nom un "Rapport et projet de décret sur la composition des livres élémentaires destinés à l'instruction publique" présenté à la Convention nationale. Le citoyen ARBOGAST, député du département du Bas-Rhin , fit imprimer en 1793 un rapport "Sur l'uniformité et le système général des poids et mesures déterminé sur la mesure du méridien terrestre", proposa et fit décréter le nouveau système. Lors de la création de l'école polytechnique, il fut nommé instituteur d'analyse. Il devint associé à l'Institut le 9 ventôse an IV. Il retourna à Strasbourg lors de la création des écoles centrales en juillet 1795 et accepta d'enseigner la géométrie et les mathématiques à l'Ecole Centrale du Bas-Rhin de 1796 à 1802. Son intérêt se porta aussi sur l'histoire et la philosophie des mathématiques : il réunit des mémoires originaux ou des lettres de Fermat, Descartes, Jean Bernoulli, Varignon et L'Hospital. Ses manuscrits furent remis àun professeur de La Fère, M. François. L'un d'entre eux, un *Essai sur de nouveaux principes du calcul différentiel et intégral, indépendants de la théorie des infiniments petits* et de celle des limites figure au catalogue de la Biblioteca Medicea-Laurenziana de Florence. Refermons cette parenthèse alsacienne et tournons nous toujours en ce début du XIXe siècle vers le sud-ouest de l'Angleterre, dans le comté de Somerset .

C'est dans la ville principale de ce comté, à Bristol, que William George HORNER est né en 1786. Son père le Révérend William HORNER est un ministre wesleyen . Son éducation est confiée à la 'Kingswood School', près de Bristol et dès l'âge de 16 ans, William George HORNER exerce la fonction de maître assistant (assistant master) contre une rémunération 40 livres par an. En 1806, il prend la direction de l'établissement qu'il quitte en 1809 pour aller fonder à 'Grosvenor Place' près de Bath, ville distante de 11 Miles et 1/2 de Bristol sa propre école dont il assurera la direction sa vie durant. A sa mort le 22 septembre 1837, il laisse une femme et plusieurs enfants dont l'un William HORNER prend alors la direction de l'école.

Ainsi résumée la biographie de William George HORNER (1786 - 1837) ne comporte guère de faits saillants: des études à Kingswood School près de Bristol, et à partir de 1809 une carrière d'enseignant et de chef d'établissement à Bristol puis à Bath , dans le comté de Somerset .

(1) et non le 8 avril 1805 ou le 18 avril 1803 come l'indiquent respectivement le Dictionnaire de biographie française et le Dictionary of Scientific Biography : cf annexe 2 Correspondance sur l'Ecole impériale polytechnique , par M. Hachette, avril-mai 1808. Les registres des procès verbaux de la classe des sciences physiques et mathématique de l'Institut indiquent que leur associé Arbogast est décédé le 19 Germinal an 11 (t. II p. 643).

C'est à Bath, que son intérêt pour la résolution numérique des équations va se rmanifester et qu'il va proposer d'appréciables améliorations des techniques d'approximation des racines des équations polynomiales de degré quelconque auxquelles son nom reste attaché. Son apport principal à ces questions porte sur le calcul des coefficients des transformées de polynômes.

On connaît fort peu de choses de la formation mathématique de William Horner : il ne fréquente pas d'université. Cependant, il a certainement lu des grands traités de Newton ' De Analysi per Æquationes numero terminorum infinitas' ou 'Analysis per Quantitatem Series ' ou encore ' Arithmetica universalis'.

Il a pris connaissace des travaux de certains mathématiciens du continent comme Léonhard Euler, 'Introductio in Analysin infinitorum '(1748), et d' auteurs français . Le 'Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés' que Joseph-Louis Lagrange publie en l'an VI-1798, l'ouvrage d'Arbogast " Du calcul des dérivations", publié à Strasbourg en 1800 , et la première édition publiée à Paris en 18O7 de la "Nouvelle Méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque d'après laquelle tout le calcul exigé pour cette résolution se réduit à l'emploi des deux premières règles de l'Arithmétique" de François-Désiré Budan lui sont familiers. Il lit probablement le français et empruntera certaines expressions à ce dernier ouvrage, qui probablement a stimulé ses recherches. Son auteur François Budan est alors présenté comme docteur en médecine de l'Ecole de Paris; c'est un descendant de colons français de l'île de Saint-Domingue où il est né à Limonade en 1861 et qui a enseigné au collège royal de Nantes avant la Révolution . Budan deviendra en 1808 Inspecteur général des études de l'Université , fonction qu'il exerce auprès du Ministère de l'Instruction publique jusqu'en 1832.

Par contre, d'autres travaux de ses contemporains du continent ne semblent pas lui être parvenus: à l'occasion d'un concours organisé par la *Società Italiana delle Scienze*, un professeur de mathématiques de Modène, Paolo Ruffini présente en 1804 un procédé effectif de calcul par approximations des solutions d'équations de degré quelconque pratiquement identique (aux dispositions des calculs intermédiaires près) à la méthode que présente en 1819 Horner.

Paolo Ruffini (1765 - 1822) est connu par ailleurs pour ses contributions sur l'impossibilité de résoudre algébriquement une équation de degré 5.

La première publication des travaux de William George HORNER est un mémoire intitulé "*A new method of solving numerical equations of all orders by continuous approximation*" que Davies Gilbert présente devant la Royal Society le 1er juillet 1819 et qui sera publié dans le volume 109 des **Philosophical Transactions of the Royal Society** en décembre 1819 (pp. 308 - 335). Nous verrons les difficultés qui furent surmontées pour que cette publication se réalise.

Se souvenant des controverses entre Newton et Leibniz , Horner indique au bas de la première page, que s'il a tant tenu à soummettre son travail à la Royal Society c'est surtout par souci d'assurer la propriété de la découverte d'un Anglais. Il écrit : « *En soumettant à la Société Royale cet essai en vue de le publier dans les Transactions Philosophiques, le seul but de l'auteur est de parer à toute controverse en assurant à un Anglais la propriété d'une découverte utile. Il est certainement fondé à la qualifier d'utile, quoiqu'elle soit le fruit de spéculations purement mathématiques; car de toutes les recherches de mathématiques pures, l'approximation est le sujet qui rencontre le plus directement et le plus fréquemment les besoins pratiques du.calculateur.*

Jusqu'à quel point la manière dont il a eu l'avantage de l'envisager a conduit à satisfaire ces besoins, ce n'est pas à lui de le dire; mais sa conviction est qu'à la fois l'Arithmétique et l'Algèbre ont ainsi bénéficié de quelques améliorations et ont vu leur union renforcée. Le fossé qui séparait l'une et l'autre s'est ainsi comblé pour n'être plus qu'une pente douce et uniforme.»

Bien que cette méthode soit très proche des méthodes développées en Chine dès le 13e siècle, et dans le monde arabo-musulman, il ne semble pas que Horner en ait eu connaissance; de même il ne cite pas des travaux antérieurs sur les approximations de solutions d'équations numériques : cette publication comme les versions suivantes se réfère au "Calcul des dérivées " d'Arbogast déja cité, ce qui , que nos amis alsaciens ne nous en tiennent pas rigueur, n'en facilite pas la lecture ainsi qu'aux ouvrages suivants:

HALLEY *Speculum Analyticum* , et des articles de 1694 de la revue '*Philosophical Transaction*'

NEWTON *Arithmetica universalis* (1722)

BUDAN *Nouvelle Méthode pour la résolution des équations numériques* (1807)

LAGRANGE *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés* (1798-anVI)

EULER *Introductio in Analysin infinitorum* (1748)

et un ouvrage d'enseignement qui a cours à cette époque

HUTTON *A Course of Mathematics for the Royal Military Academy* (1798-1801).

Horner évoque aussi les noms de LEGENDRE, WOOD, DE GUA et les Tables de ... SHARPE pour ses calculs logarithmiques.

Ne sont pas mentionnées des contributions de certains auteurs à ce sujet tels François Viète (*De Numerosa Potestatum ad Exegesin Resolutione*, 1600), ou même celles d'Anglais comme Harriot (*Clavis*,1631), Oughtred (*Artis Analyticæ*, 1631) ou Wallis (*Algebra*) mais il est vrai que les ouvrages de Lagrange et de Budan commencent par des intoductions historiques qui situent les apports de ces auteurs.

Les travaux de Horner furent publiés de nouveau en 1838 dans le "**Ladies Diary** "; de nouvelles versions évitant le recours au Calcul infinitésimal ont paru à Londres en 1830 ("Horae arithmeticae ") dans **The Mathematical Repository** de T. Leybourn; parallèlement , Paolo RUFFINI publiait en 1813 un aritcle exposant cette méthode n'utilisant pas le Calcul différentiel et intégral. Enfin une version simplifiée et complétée a été publiée après la mort de son auteur sous le titre "*Sur la transformation algébrique telle qu'elle peut être déduite des principes premiers et en liaison avec l'approximation continue et la théorie des différences finies et infinitésimales comprenant également quelques nouvelles approches des solutions numériques* " en 1845 dans les volumes 1 et 2 de la revue **The Mathematician .**

Dans la présentation de ce texte, l'éditeur de la revue T. S. Davies écrit : « *La première publication de Mr Horner sur les équations a été imprimée dans les Transactions philosophiques en 1819 ; et Mr Horner m'a souvent dit que l'insertion de cette communication dans cette publication a rencontré beaucoup d'hostilité et que ce fut en effet davantage grâce à l'influence et au sérieux de Mr Davies Gilbert qu'en vertu d'un quelconque respect pour l'auteur que son sujet ou sa façon de le traiter lui permit que sa communication soit acceptée. Le caractère élémentaire était l'objection avouée, sa façon de le traiter a été finalement ce qui a déterminé l'accord pour le publier.* *La première publication de Mr Horner sur les équations a été imprimée dans les Transactions philosophiques en 1819 ; et Mr Horner m'a souvent dit que l'insertion de cette communication dans cette publication a rencontré beaucoup d'hostilité et que ce fut en effet davantage grâce à l'influence et au sérieux de Mr Davies Gilbert qu'en vertu d'un quelconque respect pour l'auteur que son sujet ou sa façon de le traiter lui permit que sa communication soit acceptée. Le caractère élémentaire était l'objection avouée, sa façon de le traiter a été finalement ce qui a déterminé l'accord pour le publier.*

Cet essai a été ré-imprimé dans l'Almanach des Dames en 1838 et la plupart de nos lecteurs connaissent certainement cette publication. Il n'y a pas de doute que la manière dont il a été rédigé a favorisé sa publication, cependant on peut la considérer comme malheureuse puisqu'elle requiert beaucoup plus de connaissances mathématiques de haut niveau pour suivre le raisonnement que la nature des investigations elles-mêmes ne le rendrait souhaitable. Mr Horner lui-même était si sensible à cette objection qu'il a immédiatement tenté une simplification des principes. En fin de compte et en conséquence de ces essais, le document que nous allons présenter au public pour la première fois est resté complètement inconnu pendant plus de vingt ans, l'objection faite était sa longueur, l'auteur l'a réduite parce qu'il avait l'impression que sa publication en serait facilitée. A la fin de ses travaux, l'article a été déposé aux archives : il n'y a pas de doute que la qualité qui rendait difficile sa publication dans les Transactions sera une recommandation pour la plupart des lecteurs du Mathématicien. En effet, ne serait-ce qu'en tant que méthode générale de recherche comme l'atteste la grande culture mathématique de l'auteur et comme l'atteste le caractère délicat et difficile de la pensée, cette communication ne saurait discréditer désormais aucun auteur ni aucune publication. Ce document en effet est plein de vues originales; on y verra aussi que même après un tel délai, chacune de ses parties est instructive».

Du schéma de Horner au triangle de Horner :

Le procédé d'évaluation de la valeur d'un polynôme par le procédé appellé désormais 'schéma de Horner' était connu en Angleterre dès le XVIIIè siècle : dans le traité 'De Analysi per Æquationes numero terminorum infinitas' (1669) Newton décrit "sa " méthode pour résoudre l'équation $x^3 - 2x = 5$: par des changements d'équations provenant de décalages de l'origine x= p + 2 , 0,1 + q = p , etc. Il ajoute : « Je ne sais si cette méthode de résolution des équations est largement répandue, mais elle me semble de façon certaine, être, au regard de toutes les autres, plus simple et mieux adaptée à la pratique.[...] Pour ce qui est du travail que cela représente, on le verra en substituant les quantités les unes aux autres, mais je pense, cela pouvant être réalisé de plusieurs manières, que la façon suivante est la plus commode, surtout quand les nombres coefficients sont composés de plusieurs chiffres. Soit p+3 à substituer à y dans l'équation

$y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12\ y + 17 = 0$.

Puisque l'on peut transformer cette équation en

y - 4   x y : + 5 x y : - 12 x y : + 17

On obtient une nouvelle équation de la façon suivante :
p - 1 x p + 3 = pp + 2p - 3
et pp + 2p - 3 multiplié par p + 3 égale $p^3 + 5p^2 + 8p - 18$
et $p^3 + 5p^2 + 8p - 18$ multiplié par p + 3 égale $p^4 + 8p^3 + 23pp + 18p - 18$
et , $p^4 + 8p^3 + 23pp + 18p - 1 = 0$ ce qu'on cherchait ».

Un ouvrage de Newton publié à Londres en 1711 *Analysis per Quantitatem Series* indique de la même façon comment calculer en peu d'opérations la valeur de $y^4 - 4y^3 + 5y^2 - 12y + 17$.
Plus tard d'Alembert démontre que si un nombre a mis à la place de x dans une équation polynomiale satisfait cette équation alors le premier membre est un polynôme divisible par (x - a), démonstration qui prouve que si, P(x)= Q(x) (x-a) + R alors P(a) = R.
Les résultats présentés en 1807 par F.-D. Budan pour résoudre des équations polynomiales méritent notre attention : l 'algorithme que Budan a soumis à la Classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut dès l'an XI (1804) permet d'obtenir par de simples additions et soustractions tous les termes des transformées en (x-1), (x-2) , etc ..., d'une équation polynomiale donnée en x.
Le procédé de Budan permet ainsi de connaître les valeurs entières qui sont solutions à une unité près d'une équation de degré quelconque. Ayant ainsi déterminé un encadrement par des entiers r et r+1 d'une (ou plusieurs) racine(s) par le procédé de Budan, on a obtenu l'équation transformée en (x-r) : cette équation a une (ou plusieurs) racine(s) entre 0 et 1. Celles-ci peuvent être approchées par la méthode de Newton en ne conservant que le polynôme de degré 1, ou par le même procédé par un balayage systématique après le changement d'inconnue y=10(x-r). On peut donc déterminer les racines à 1/10 près. Puis continuer ainsi. Les seules opérations arithmétiques utilisées sont l'addition et la soustraction. Mais elles sont fort nombreuses!
Budan semle pressentir la division des tâches de l'algorithmique et, avec une vision anticipatrice il note «*Notre principal objet dans cet Ouvrage, a été de présenter, pour la résolution des équations numériques, une Méthode qui fut praticable, comme mécaniquement ; la science du calcul pouvant, de même que les arts, avoir ses manouvriers , et en tirer , dans des travaux en grand de notables avantages.*»
Budan est plus connu pour la généralisation de la règle des signes de Descartes donnant un majorant du nombre de racines d'une équation comprises entre deux nombres donnés (par exemple entre 0 et un réel positif p) qu'il énonça dès 1803 avant d'en fournir en 1811 une démonstration complète. Ce résultat avait été enseigné à l'école polytechnique par Joseph Fourier qui ne le publia pour la première fois qu'en 1820.
Horner étend le procédé de Budan pour écrire l'équation transformée en (x-r) et s'autorise l'usage de la multiplication. C'est ici que la référence au Calcul intégral peut intervenir, mais comme on le verra , on pourra s'en affranchir:
le développement de Taylor du polynôme f permet d'écrire

$$f(r+h) = f(r) + f'(r).h + f''(r).h^2 + \ldots + f^{(n)}(r)h^n$$

Il peut être interprété comme résultant de divisions successives de polynômes

$$f(r+h) = [f'(r) + f''(r).h + \ldots + f^{(n)}(r)h^{n-1}].h + f(r)$$
$$[f'(r) + f''(r).h + \ldots + f^{(n)}(r)h^{n-1}] = [f''(r) + f'''(r).h + \ldots + f^{(n)}(r)h^{n-2}].h + f'(r)$$
$$[f''(r) + f'''(r).h + \ldots + f^{(n)}(r)h^{n-2}] = [f'''(r).h + \ldots \quad + f^{(n)}(r)h^{n-3}].h + f''(r)$$
$$[f'''(r).h + \ldots \quad + f^{(n)}(r)h^{n-3}] = [f^{(4)}(r) + f^{(5)}(r).h + \ldots + f^{(n)}(r)h^{n-4}].h + f'''(r)$$

La répétition de cette division va produire le triangle de Horner dont les éléments diagonaux vont fournir les coefficients du polynôme après un changement d'origine des abscisses (division synthétique).
Citons l'exemple II du mémoire de 1819 qui reprend l'équation cubique utilisée ci-dessus par Newton: la disposition des calculs sera systématisée plus tard :

« Ex II. Quelle est la valeur de x dans l'équation $x^3 - 2x = 5$.
La racine est manifestement légèrement plus grande que 2 . Faisons x = 2 + z , et l'équation devient
$1 = 10z + 6z^2 + z^3$.

Ainsi, en disposant les dérivées

6. 10..
1.000(
6

Le premier chiffre sera évidemment si près de 1 , que en anticipant son effet sur le diviseur, nous sommes assurés qu'il sera très prés de 106. Ainsi

10.6) 1.000(.094 première correction

Le carré est $94^2 = 8836$.

Ainsi nous aurons

6 . . .	10......	1.000000000(.094
094	572836	993846584
6094x94=	10572836	6153416
188	581672	
	3	

Le premier chiffre de la prochaine correction sera évidemment 5 ; comme précédemment nous anticipons son effet d'un chiffre de plus . Le diviseur sera donc 1158 correct jusqu'au dernier chiffre . Ainsi

	6094	10572836	
	18855148		5 8 1 6 7 2
	6153416		
	628255148x5&.=	34647014901904	61533978541781019
	110296.	111579727014901204	
1721458218981			
	34650056		
	[...]		

Et la racine est

x = 2.09445514815423265 90,&.

correcte jusqu'à la 18ème décimale avec trois approximations».

En 1822, soit 3 ans après la publication de Horner, Budan publie une réédition de son ouvrage de 1807 augmentée d'un appendice à la nouvelle Méthode et suivie d'un Aperçu concernant les suites 'syntagmatiques'. Sous ce vocable qu'il introduit pour indiquer que les termes sont coordonnés, Budan veut désigner des suites qui lui servent à exprimer un algorithme pour la transformation d'un polynôme en x du degré n, en un polynôme équivalent, du même degr, en (x- u) , u étant positif ou négatif , entier ou fractionnaire : pour Budan la syngtagmatique d'une suite $a_0, a_1, \dots a_n$ est la suite $a_0, a_1^{(1)}, \dots a_n^{(1)}$ définie par

$a_k^{(1)} = a_k + u\, a_{k-1}^{(1)}$ pour $k = 1 \dots n$.

On reconnaît là la systématisation du procédé signalé par Newton. Budan ajoute

« Ceci posé , pour obtenir les coefficients d'un polynôme en (x - u) équivalent au polynôme d'un même degré n, $a_0, a_1, \dots a_n$ dont les coefficients donnés sont $a_0, a_1, \dots a_n$, écrivez ceux-ci , comme formant une suite , en écrivant 0 pour un terme , quand 0 sera le coefficient d'une puissance de x ; c'est-à-dire, quand cette puissance manquera dans le polynôme : ensuite vous vous procurerez successivement la première de cette suite ; puis ses 2e.,3e.,4e.,etc, en calculant à chaque fois un terme de moins ; les derniers termes respectifs représentés par $a_0, a_1, \dots a_n$ seront respectivement les coefficients de $(x-u)^0$, $(x-u)^1$, $(x-u)^{n-1}$; quand au coefficient de $(x-u)^n$, il sera le même que celui de x^n ; c'est-à-dire a_0.»

C'est dire que Budan dans un langage différent prolongeant ses travaux de 1803 et 1807 donne le procédé de construction du triangle de Horner. A-il eu connaissance des résultats de Ruffini ou de Horner ? Le vocabulaire et les généralisations qu'il donne nous permettent d'en douter. V. Dans un essai historique sur la théorie des équations, Aubry écrira même en 1895 que Budan « a expliqué en détail ses divers procédés dans sa *Nouvelle Méthode pour la résolution des équations numériques* (Paris, 1808), méthode reproduite par Horner (*Phil.* Trans, 1819), dont elle a gardé le nom.»

La transformée mixte :

Dans la publication posthume de 1845 , Horner fidèle à ses propres notations donne cette disposition des calculs pour former le triangle du polynôme

$A_0\, x^n + B_0\, x^{n-1} + C_0\, x^{n-2} + \dots\dots + K_0\, x^3 + L_0\, x^2 + M_0\, x + N_0$

pour le changement d'origine x= z - r :

$$
\begin{array}{lccccccccc}
 & A_0 & B_0 & C_0 & \dots\dots & K_0 & L_0 & M_0 & N_0 \\
 & 0 & A_1 r & B_1 r & \dots\dots & H_1 r & K_1 r & L_1 r & M_1 r \\
\hline
r^n\,, & A_1 & B_1 & C_1 & \dots\dots & K_1 & L_1 & M_1 & N_1 \\
 & 0 & A_2 r & B_2 r & \dots\dots & H_2 r & K_2 r & L_2 r & \\
\hline
r^{n-1}\,, & A_2 & B_2 & C_2 & \dots\dots & H_2 & K_2 & L_2 & M_2 \\
 & 0 & A_3 r & B_3 r & \dots\dots & H_3 r & K_3 r & & \\
\hline
r^{n-2}\,, & A_3 & B_3 & C_3 & \dots\dots & K_3 & L_3 & &
\end{array}
$$

Horner introduit aussi un autre procédé pour construire les coefficients du polynôme provenant du décalage de l'origine des abscisses tout en conservant la possibilité d'évaluer le polynôme de départ à la nouvelle origine : en termes d'Algèbre linéaire le premier procédé correspond au changement de base des polynomes de $\{1\ x\ x^2 \dots\ x^n\}$ en $\{\ 1\ x-r\ (\ x-r)^2 \dots\ (x-r)^n\}$ la transformée mixte permet de prendre en compte différents décalages successifs et d'exprimer le même polynôme successivement dans les bases :

$\{\ 1, (x-r_1\ ), (x-r_1\ )\ x\ , (x-r_1\ )\ x^2, \dots\ , (x-r_1\ )\ x^{n-1}\ \}$

$\{\ 1, (x-r_2), (x-r_2\ )\ (x-r_1\ )\ , (x-r_2\ )\ (x-r_1\ )\ x\ , (x-r_2\ )\ (x-r_1\ )\ x^2, \dots\ , (x-r_1\ )\ x^{n-2}\ \}$

.

$\{\ 1, (x-r_2), (x-r_2\ )\ (x-r_1\ )\ , (x-r_2\ )\ (x-r_1\ ) \dots (x-r_m) \,..(x-r_2\ )\ (x-r_1\ )\ ,$
$(x-r_m) \,..(x-r_2\ )\ (x-r_1\ )\ x\ , (x-r_m) \,..(x-r_2\ )\ (x-r_1\ )\ x^2, \dots\ , (x-r_m) \,..(x-r_2\ )\ (x-r_1\ )\ x^{n-m}\ \}$

dans le formalisme utilisé par Horner à l'article 13, cela donne :

$$
\begin{array}{lccccccc}
 & A_0 & B_0 & \dots\dots & K_0 & L_0 & M_0 & N_0 \\
 & 0 & A_1 r_1 & \dots\dots & H_1 r_1 & K_1 r_1 & L_1 r_1 & M_1 r_1 \\
\hline
r_1{}^n\,, & A_1 & B_1 & \dots\dots & K_1 & L_1 & M_1 & N_1 \\
 & 0 & A_2 r_2 & \dots\dots & H_2 r_2 & K_2 r_2 & L_2 r_2 & M_2(r_2-r_1) \\
\hline
r_2{}^{n-1}\,, & A_2 & B_2 & \dots\dots & K_2 & L_2 & M_2 & N_2 \\
 & 0 & A_3 r_3 & \dots\dots & H_3 r_3 & K_3 r_3 & L_3(r_3-r_1) & M_2(r_3-r_2) \\
\hline
r_3{}^{n-2}\,, & A_3 & B_3 & \dots\dots & K_3 & L_3 & M_3 & N_3 \\
 & 0 & A_4 r_4 & \dots\dots & H_4 r_4 & K_3(r_4-r_1) & L_3(r_4-r_2) & M_2(r_4-r_3) \\
\hline
r_4{}^{n-3}\,, & A_4 & B_4 & \dots\dots & K_4 & L_4 & M_4 & N_4
\end{array}
$$

....

and generally,

$$
\begin{array}{lccccc}
 & \dots & K_{m-1} & L_{m-1} & M_{m-1} & N_{m-1} \\
\dots & & H_{mm}(r_m-r_{m-4}) & K_m(r_m-r_{m-3}) & L_m(r_m-r_{m-2}) & M_m(r_m-r_{m-1}) \\
\hline
 & \dots & K_m & L_m & M_m & N_m
\end{array}
$$

Nous reproduisons en annexe 5 un exemple de l'utilisation de la transformée mixte permettant d'aprécier la précision des calculs conduits par Horner.

Dans le langage de Budan , les transformées mixtes d'une suite $a_0, a_1, \dots a_n$ pour des syntagmes (des décalages) r_1 , $r_2 \dots r_m$ sont les suites $a_0, a_1^{(1)}, \dots a_n^{(1)}$ $a_0, a_1^{(2)}, \dots a_n^{(2)}$ .... $a_0, a_1^{(m)}, \dots a_n^{(m)}$ définies par

$a_k^{(p)} = a_k^{(p-1)} + r_p a_{k-1}^{(p)}$ pour $k = 1 .. n-p+1$

$a_k^{(p)} = a_k^{(p-1)} + (r_p - r_{p+1+k-n}) a_{k-1}^{(p)}$ pour $k = n-p+2 .. n$.

Malheureusement vers la fin du mémoire de 1819, Horner emporté par son enthousiasme a l'imprudence d'ajouter d'obscurs commentaires: « Etant donné que les notations utilisées peuvent être employées sans restriction, il est évident qu'il n'y a pas de classes d'équations tant finies, irrationnelles ou transcendantes auxquelles notre méthode ne puisse s'appliquer ». Mais des exemples convaincants manquent , et pour cause!

Diffusion de la méthode de Horner

La diffusion de la méthode de Horner dans le monde anglo-saxon a été favorisée par les écrits de J. R. Young et Augustus De Morgan qui la décrivent l'allègent et la complètent dans plusieurs de leurs ouvrages ou s'y réfèrent dans des articles. A. De Morgan calcule la racine de l'équation $x^3 - 2x = 5$ avec 1100 chiffres significatifs et, d'autres Anglais ayant revendiqué l'invention de Horner, De Morgan publie une étude historique pour défendre les droits d'antériorité de Horner; il la désigne sous le nom de méthode unifiée de Viète, Newton et Horner. Elle s'est très rapidement répandue en Angleterre (y compris au niveau scolaire) et aux Etats-Unis , puis plus tard dans les pays de langue allemande , mais d'après Florian CAJORI (1859-1930), elle était pratiquement inconnue en France au début du XX$^{\text{ème}}$ siècle bien que Budan en ait fournit une version dans sa réédition de 1822 de sa *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques*, livre qui était parmi les ouvrages recommandés pour l'enseignement par le Conseil de l'Instruction publique (compte tenu peut-être des fonctions de son auteur).

La préface de l'article du **Mathematician** ' On algebraic transformations' fait état cependant d' une certaine amertume de son défunt auteur : son éditeur T. S. Davies y écrit *«Aucun mathématicien n'a autant contribué que Mr Horner à l'amélioration de la résolution numérique des équations et peut-être qu'aucune autre personne n'a quitté le monde avec autant de raisons pour se considérer comme traité avec un mépris immérité et même une hostilité personnelle liés à ses recherches: il n'est pas très difficile d'expliquer cette situation et cela enseigne une leçon à chaque mathématicien : à savoir que pour obtenir une réputation à laquelle ses découvertes lui donnent droit le mathématicien doit non seulement faire ses découvertes mais aussi d'une manière ou d'une autre se rattacher lui-même à une classe de façon à assurer une publicité de ses travaux sur l'esprit public; une bonne dose d'intrigue et fort peu de science suffiront pour agir sur la réputation auprès des contemporains, bien mieux que beaucoup de science ne pourra jamais faire pour lui: ceci en fait est une vérité bien mélancolique mais néanmoins c'est une vérité »*.

Documents annexes :

1. Notes bibliographiques
2. Correspondance sur l'Ecole impériale polytechnique (1808)
3. Notice sur les travaux mathématiques de M Budan de Boislaurent,
Inspecteur général des études (sans date, probablementvers 1825) B. N. Ln27.3213
4. pages 326 et 327 du mémoire original de 1819
5. traduction des articles 27 à 31 de l'article posthume de 1845.

Bibliographie

AUBRY (V.) *Essai historique sur la théorie des équations*, Journal de mathématiques spéciales, 1895, t.19, p.40, , 1897, t. 21, p.61.

BUDAN (F. D.) *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque*, Paris, 1807.

BUDAN DE BOISLAURENT (F. D.) *Nouvelle méthode pour la résolution des équations numériques d'un degré quelconque*, revue, augmentée d'un appendice, et suivie d'un apperçu concernant les suites syntagmatiques, Paris , 1822.

CAJORI (F.) *A history of the arithmetical methods of approximation tto the roots of numerical equations of one unknown quantity* , Colorado college Studies, Sciences serie xii 7, 1910, pp. 171-215, 217-287.

CAJORI (F.) *Horner 's Method of Approximation Anticipated by Ruffini*, Bulletin of American Mathemetical Society, XVII , 1911, pp. 409-414.

DE GUA DE MALVES (abbé Jean-Paul) *Démonstration de la règle de Descartes, pour connaître le nombre de racines positives et négatives dans les équations qui n'ont point de racines imaginaires*, Mém. Ac. Sc., 1741, pp.72-96.

DE MORGAN (A.) *On Involution and Evolution* , The Penny Cyclopædia , vol. XIII, London, 1839.

Notices on the Progress of the Problem of Evolution , The Companion to the British Almanac, London, 1839, pp. 34-52.

FOURIER (J.) *Sur l'usage du théorème de Descartes dans la recherche des limites des racines*, Bulletin des sciences, 1820, pp. 156-165 et 181-187 ; Œuvres , II, pp 289-314.

FOURIER (J.) *Analyse des équations déterminées*. Première partie, Paris. 1831 (édité par C.L.M.H. Navier).

HORNER (W. G.) *A New Method of Solving Numerical Equations of all Orders by Continuous Approximation* , Philosophical Transactions of the Royal Society, 109, 1819, pp 308-335.

HORNER (W. G.) *Horæ arithmeticæ* , The Mathematical Repository [T. Leybourn ed.], n°18, vol 5, part II, London, 1830.

HORNER (W. G.) *On algebraic transformations*, The Mathematician, Vol 1, 1845, pp. 108-112, 136-142 , 311-316 ; Vol. II, pp. 32-37, 129-132.

HUTTON , (C.) *A course of mathematics ior the use of Cadets in the Royal Military Academy*, 1798-1801.

GOLDSTINNE (H. H.) *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century* , Springer-Verlag, 1977.

LAGRANGE (J.-L.) *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*, Paris , Duprat, 1798-an VI, 2e éd. augmentée1808; 3e éd. 1826 avec une introduction de Poinsot, T. VIII des Œuvres complètes.

RUFFINI (P.) *Sopra la determinazione delle radici nelle equazioni numeriche di qualunque grado*, Modena, 1804.

RUFFINI (P.) *Di un nuovo metodo generale di estrare le radici numeriche* , Memorie di matematica e di fisica della società italianna delle scienze, Verona, 1813, T XVI, parte I , pp 373-436; Parte II, pp.1-15.

YOUNG (J. R.) *An elementary Treatise on Algebra*, London, 1826.

YOUNG (J. R.) *The Theory and Solution of Algebraical Equations*, London , 1835, 2nd ed.1843

Poitiers, le 22 mars 1988

Jacques BOROWCZYK
IREM de Poitiers
40, avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS CEDEX

NOTES BIOGRAPHIQUES

Budan de Boislaurent **François-Désiré (Limonade 1761 - Paris 1840)**

Budan de Boislaurent est issu d'une illustre famille qui d'après la tradition serait originaire de Sicile et dont la venue en France est contemporaine des guerres d'Italie : l'un de ses ancêtres accompagnant l'un des comtes d'Anjou. La présence de membres de la famille Budan est attestée en Bretagne, à Saumur et en Guadeloupe dès le XVIIème siècle où elle a obtenu une concession du gouvernement.
François-Désiré Budan est né le 28 septembre 1761 à Limonade, village de la colonie de Saint Domingue devenue République de Haïti, il épouse le 13 février 1809 à Paris Thérèse-Désirée de PIOLENC, née le 20 septembre 1779 à Nances en Savoie dont il a eu un fils et deux filles ; il est décédé à Paris le 6 octobre 1840.
François Budan a enseigné au collège royal de Nantes d'octobre 1779 à 1787, et il était suppléant au collège de France lorsqu'fut nommé Inspecteur général des études le 21 septembre 1808, fonction qu'il exerça jusqu'à son départ à la retraite le 6 octobre 1835. Il fut décoré de l'ordre royal de la Légion d'Honneur en 1814. L'essentiel de son apport scientifique porte sur la résolution des équations numériques pour laquelle il proposa l'algorithme de l'an XI (1803) développé en calcul syntagmatique (méthode analogue à celle de Horner) et une extension de la règle des signes de Descartes connue désormais sous le nom de règle de Budan-Fourier, plus maniable que la règle de Sturm. Les polémiques avec Joseph Fourier sur des questions de priorité sur la découverte de l'extension de la règle de Descartes sont célèbres.
Caplat G. Les Inspecteurs généraux de l'Instruction publique. Dictionnaire biographique, 1802-1914, 1986, Paris.

De Morgan , Augustus (Madura 1806 - Londres 1871)
Fils du colonel De Morgan de l'armée des Indes, De Morgan est né à Madura mais, dès l'âge de 7 mois ses parents s'installèrent en Angleterre à Worcester et il fit ses études dans différents établissements dont le collège de la Trinité à Cambridge de 1823 à 1827. De Morgan fut professeur de mathématiques au nouveau collège de l'Université de Londres de 1828 à 1866 avec une interruption de 1831 à 1836 par solidarité avec un professeur d'anatomie. En 1837 , il épousa Sophia-Elisabeth Frend qui écrivit sa biographie en 1882. Il contribua à la création de la London Mathematical Society dont il fut le premier président en 1865. De Morgan fut un auteur prolifique de textes d'enseignements (The Differential and Integral Calculus en 1842 et d'articles de vulgarisation (pour la revue The Mathematician ou The British Almanac and Companion ou encore 850 articles de la 'Penny Cyclopædia', l'encyclopédie à un sous) . Ses principaux apports portent sur l'analyse et la logique. Il est l'auteur du terme 'induction mathématique'.
Vie et œuvre : L. Oppermann , Tidskrift for Mathematik (3), t 1 , 1871
John M. Dubbey D. S. B.

Young, John Radford (Londres 1799 - Peckham 1885)
Young est un autodidacte qui devint enseignant à partir de 1823, année où il commença à publier un traité élémentaire d'Algèbre en 8 volumes. Young favorisa la diffusion des méthodes d'analyse du continent en Grande Bretagne. Il écrivit de nombreux ouvrages d'enseignement.Young eu un emploi au collège de Belfast de 1833 à 1849.
Ses travaux portent surtout sur les racines imaginaires des équations numériques et, il donna en 1844 une preuve de la règle de Newton pour déterminer le nombre de racines imaginaires d'une équation.

Des raisons de santé empêchant M. Labey de faire cette année le cours d'analyse de la première division, il est suppléé dans ses fonctions par M. Ampère, répétiteur d'analyse.

M. Lancret, que nous avons cité dans cette Correspondance comme auteur de plusieurs mémoires de géométrie, qui avoit rempli avec la plus haute distinction une place de chef d'étude, tandis qu'il étoit encore élève de l'Ecole Polytechnique, a terminé sa carrière, à peine commencée, le 17 décembre 1807; il étoit né à Paris le 15 décembre 1774. Entré à l'Ecole le 1er. frimaire an 3, il a passé à l'Ecole des ponts et chaussées en nivose an 6; il fut nommé membre de cette célèbre commission des sciences et arts qui a été organisée à Paris au mois de germinal an 6, pour accompagner l'armée française en Orient. Le gouvernement ayant ordonné, en pluviose an 10, la formation d'un ouvrage sur l'Egypte, le Ministre de l'Intérieur nomma une commission spéciale chargée de diriger l'exécution de cet ouvrage, et la composa de MM. Monge, Berthollet, Fourier, Conté, Costaz, Girard, Desgenettes et *Lancret*. M. Conté étoit commissaire du ministre, et M. Lancret secrétaire de la commission; en décembre 1805, M. Conté mourut et fut remplacé par M. Lancret; les fonctions de secrétaire furent confiées à M. Jomard, ancien élève, ingénieur géographe, l'ami particulier de M. Lancret; à ce titre, M. Jomard se propose de consacrer quelques pages du grand ouvrage sur l'Egypte à la mémoire du savant et vertueux Lancret; il publiera la part qu'il a prise à cet ouvrage, ainsi que ses mémoires particuliers : ce tribut d'éloges payé à celui qui, jeune encore, se distinguoit et comme artiste et comme savant, le fera pleurer de ceux même à qui ses qualités personnelles n'étoient pas connues.

H. C.

M. Arbogast, nommé instituteur d'analyse de l'Ecole Polytechnique à l'époque de sa création (voyez la Correspondance, pag. 333), est mort à Strasbourg le 8 avril 1803 : il étoit né à Mutzig, département du Bas-Rhin, le 4 octobre 1759. Il se livra d'abord à l'étude du droit; mais entraîné par son goût pour les mathématiques, il sollicita et obtint en 1783 la chaire de géométrie au collége de Colmar; en 1789 il quitta cette place pour occuper celle de professeur de mathématiques à l'Ecole d'artillerie de Strasbourg; pendant la révolution, l'administration départementale le nomma recteur du collége

catholique de cette ville; son zèle à remplir les fonctions de recteur lui mérita les suffrages du corps électoral du Bas-Rhin, qui le nomma député à la Convention nationale; il étoit membre du comité d'instruction publique lorsqu'il fut nommé professeur d'analyse à l'Ecole Polytechnique; un an après (en ventôse an 4), il fut associé à l'Institut national. Il quitta Paris à l'époque de la création des Ecoles centrales, pour retourner à Strasbourg, où l'on établit une de ces écoles; il continua à y enseigner les mathématiques, jusqu'à l'époque de sa mort prématurée; il n'étoit pas marié, et il a laissé à ses héritiers une fortune assez considérable.

Son principal ouvrage est le *Calcul des dérivations*, qu'il a publié en 1800 (un vol. in-4°. de 400 pages, imprimé à Strasbourg); il a laissé plusieurs manuscrits à son ami M. François, professeur de l'Ecole d'artillerie de La Fère, qui a eu la bonté de m'envoyer des notes sur les travaux de ce géomètre.

H. C.

Examinateurs d'admission a l'École Polytechnique

Pour le Concours de 1807.

Paris, ...	M. Francœur.
Tournée du Sud-ouest, ...	M. Monge (Louis).
Tournée du Nord-ouest, ...	M. Levêque.
Tournée du Sud-est, ...	M. Dinet.

Les examens ont été ouverts le 15 août 1807; et les cours pour la 2e. division, formée par la nouvelle promotion, ont commencé le 9 novembre.

Notice sur les travaux mathématiques de M Budan de Boislaurent
Inspecteur général des études

M Budan de Boislaurent a publié , en 18O7, une Nouvelle Méthode pour la résolution des équations numériques ; ouvrage qui, a été compté, par la première classe de l'Institut, parmi ceux qui ont contribué au progrès de la science. M le Secrétaire de la Classe disoit à la même époque « que cette méthode est d'un degré de simplicité qu'on n'osoit espérer, et qui sera difficilement surpassé ».

La Grange, dans son Traité sur la même matière, imprimé en 1808, a bien voulu s'énoncer comme il suit, au sujet du même ouvrage : « L' auteur y donne un moyen simple et élégant de former les coefficients des transformées, et appliquant la règle de Descartes à ces transformées et à d'autres déduites de celles-là, il trouve les limites de toutes les racines et leurs valeurs aussi approchées qu'on veut. On peut dire que cet ouvrage ne laisse rien à désirer sur la résolution des équations numériques dont toutes les racines sont réelles, et il pourroit à cet égard, servir de supplément au présent Traité».

Et suivant le Rapport de la Classe sur le progrès des sciences : « Cette méthode qui, pour la facilité , ne laisse rien à désirer, est peut-être aussi la moins incomplète qu'il soit possible d'obtenir. C'est du moins le sentiment manifesté par M. La Grange qui, plus que personne, a le droit d'avoir un avis sur ce point si difficile et épineux».

En 1811 , M Budan de Boislaurent a donné un Mémoire contenant plusieurs Théorêmes nouveaux relatif aux successions de signes dans les Suites et les Equations. La première classe de l'Institut a donné son approbation au Mémoire, et a reconnu dans le dernier de ces Théorêmes une extension de la règle de Descartes qui méritoit son attention et l'insertion dans le Recueil des Savants étrangers.

Un Appendice à la nouvelle méthode, publié en 1822 par M Budan de Boislaurent contient plusieurs Théorêmes et Procédés nouveaux, ainsi qu'une Formule servant à la décomposition d'une équation de degré pair en facteurs réels du second degré.

L'Aperçu de M Budan de Boislaurent , imprimé la même année, concernant les Suites Syntagmatiques, traite d'une matière entièrement neuve, pour laquelle il a a dû créer un terme nouveau. Son travail l'a conduit à de nouvelles Formules. Des suites étant placées les unes au-dessus des autres, étant coordonnées entre elles terme à terme, et liées par cette équation de relation $A_n^{(m)} - A_{n-1}^{(m)} u_{n-1} = A_n^{(m-1)}$ dans laquelle l'ordre de la Suite est marqué par l'indice supérieur, le rang du terme par l'indice inférieur, et le facteur u_{n-1} appelé Module Syntagmatique, est sujet à varier d'un rang à l'autre, M Budan de Boislaurent présente l'expression générale d'un terme quelconque, pris dans ces Suites, en fonction, 1° des valeurs successives du module u_0 , u_1 , ... u_{n-1} 2° des termes de l'une quelconque de ces Suites depuis $A_0^{(m)}$ jusqu'à $A_n^{(m)}$, ou bien de ceux d'une Suite formée par les termes $A_0^{(m)}$, $A_1^{(m)}$, ...$A_n^{(m-1)}$; le premier terme dont l'indice est zéro, ayant une même valeur dans chaque Suite. Cette double expression est contenue dans les Formules suivantes :

1re Form. $$A_{n}^{m+m} = A_n^{(m-1)} + \frac{m}{1} A_{n-1}^{(m)} u_{n-1} + \frac{m(m+1)}{1.2} A_{n-2}^{(m)} u_{n-1} u_{n-2} + \dots$$
$$+ \frac{m\dots(m+n-1)}{1\dots n} A_0^{(m)} u_{n-1} \dots u_0 .$$

En échangeant m en *-m*, on obtient l'expression générale de $A_n^{(m-m)}$.

2e Form. $$A^{n}_{(m+m)} = \frac{(m+n)\dots(m+1)}{1\dots n} A_0^{(m)} u_{n-1}\dots u_0 + \frac{(m+n)\dots(m+2)}{1\dots(n-1)} \nabla_1^{\zeta} A_n^{(m)} u_{n-1}\dots u_1$$
$$+ \dots + \frac{m+n}{1} \nabla_{\zeta}^{n-1} A_0^{(m)} u_{n-1} + \nabla_{\zeta}^{n} A_0^{(m)};$$

dans laquelle Formule les termes $A_1^{(m-1)}$, $A_1^{(m-2)}$, etc , que l'auteur appelle différences syntagmatiques 1re, 2e, etc, de $A_0^{(m)}$, sont représentés par $\nabla_{\zeta}^{1} A_0^{(m)}$, $\nabla_{\zeta}^{2} A_0^{(m)}$, etc le Delta renversé est ici accompagné du caractère grec ζ pour distinguer cette notation de celle dont La Place s'est servi dans son Calcul des Fonctions Génératrices.

En changeant aussi m en -m dans cette seconde Formule, on obtient l'expression générale de $A_n^{(m-m)}$. Les valeurs désignées dans les deux Formules par les lettres A et u peuvent être tout ce qu'on voudra, constantes ou variables. Si dans la seconde, on fait m = 0 , $A_0^{(m)}$ une fonction de x, et le module constant, et égal à l'unité, on retrouve pour lors les différences ordinaires, et pour l'expression de $A_n^{(m)}$, la Formule connue qui n'est qu'un cas individuel de la Formule générale de l'auteur.

Peut-être, serait-il permis d'appliquer au Calcul des Suites Syntagmatiques ces paroles de Newton : *His via ad majora sternitur.*

A. PIHAN DELAFOREST , Imprimeur de Monsieur et de la Cour de Cassation, rue des Noyers, n° 37.

problem; and I say this to invite comparison, not so much with his mode of treating it, as with theirs.

Ex. II. What is the value of x in the equation $x^3 - 2x = 5$.

The root is manifestly a very little greater than 2. Make it $x = 2 + z$, and the equation becomes

$$1 = 10z + 6z^2 + z^3.$$

Hence, arranging the derivees,

6.	10 . .	1.000 (
	6	

The first digit will obviously be so nearly 1, that by anticipating its effect on the divisor, we are sure this will be very nearly 106. Hence

10.6) 1.000(.094 first correction

The square is $94^2 = 8836$.

Hence we have

6...	10......	1.000000000(.094
094	572836	993846584
6094×94=	10572836	6153416
188	581672	
	3	

The first digit of the next correction will evidently be 5; the effect of which we have as before anticipated as far as one digit. The divisor will therefore be 11158 correct to the last figure. Hence

11158)6153416(55148, second correction.

The square is 30413, &c. to 10 digits.

Hence,

6094	10572836	
18855148	581672	6153416
	34647014901904	6153396785417 81019
628255148×5 &c.=	111579727014901204	1721458218981
110296.	34650056	
	1	

Consequently,

1116143772)1721458218979(1542326590,22

This third correction is carried two places beyond the extent of the divisor, for the sake of ascertaining rigidly the degree of accuracy now attained. For this purpose, we proceed thus:

628 &c. × 154 &c. =, 968, &c. is the true correction of the last divisor. Our anticipated correction was 1,000. For which if we substitute 968 &c. it will appear that our divisor should have ended in 1,678, &c. instead of 2. The error is, ,322 &c. which induces an ultimate error of (111 &c. : 154 &c. : :, 322 &c. &c. :),44 &c. Consequently, our third correction should be .... 1542326590,66, &c. agreeing to 10 figures with the value previously determined. And the root is

$$x = 2.09455148154232659\text{o}, \&c.$$

correct in the 18th decimal place at three approximations.

So rapid an advance is to be expected only under very favorable data. Yet this example clearly affixes to the new method, a character of unusual boldness and certainty; advantages derived from the overt manner of conducting the work, which thus contains its own proof.

The abbreviations used in the close of this example, are of a description sufficiently obvious and inartificial; but in order to perfect the algorithm of our method in its application to higher equations, and to the progress by simple digits, attention must be given to the following general principles of

Compendious Operation.

27. We have seen that every new digit of the root occasions the resolvend to be extended n figures to the right, and the m^{th} derivee $n-m$ figures; so that if the work be carried on as with a view to unlimited progress, every new

'HORNER -

27. Nous en arrivons maintenant au sujet de la synthèse et de l'analyse numériques dans leur acceptation la plus large ; et comme les conditions du théorème général ne nous lient à aucune loi particulière de variation, nous prendrons la plupart du temps les incréments de la racine pour indiquer seulement les chiffres qui la composent, appréciés avec la valeur exacte dans les notations décimales.

L'ordre dans lequel nous prenons les chiffres n'a pas d'importance au moins dans les opérations synthétiques. L'un d'entre eux ou une tranche plus grande de l'écriture de la racine si c'est plus commode étant utilisé comme multiplicateur constant dans la première transformation, la procédure qui s'ensuit obéit à la loi générale.

Ex. 1 - Comme illustration familière soit à trouver le cube de 835 271.
<u>Premier mode</u>. En considérant le coefficient x^3 seulement et en commençant par le chiffre final : alors les multiplicateurs m sont utilisés p fois entièrement puis diminués à partir de la droite.

1	0	0	0
	1	1	1
$(m^3 =) 1^3$	1	1	$1 = 1^3$
	71	72	35791
	..	504	......
	72	5113	$357911 = 71^3$
$7, 1^2, 7$	271	2401	195446
	....	686	......
$2, 7, 1^3, 27, 2$	343	97723	$19902511 = 271^3$
	527	11226	146426615
	....	28065	....
$5, 27^3$, &c.	5613	29285323	$146446517511 = 5271^3$
	352	204065	4373220969
	......	122439	....
$3, 5, 2^3$, &c.	40813	1457740323	$43878656207511 = 35271^3$
	835	2627439	5827060242584
	......	7006504	....
$8, 3, 5^3$	875813	728382530323	$582749902914607511 = 835271^3$

Dans le calcul ordinaire, les deux premières lignes de ce travail peuvent être supprimées de même que l'évaluation des cubes successifs. Ces détails étant mentionnés ici uniquement dans un but d'illustration. Respectant le mode d'opération les règles d'additions de la première colonne sont suffisamment explicités : une partie de ces additions ne dépassant pas deux chiffres et une partie des derniers introduits est utilisée pour obtenir la somme figurant au-dessus.

Les produits partiels apparaissent à leur place dans la partie correspondante de la seconde colonne et le montant de cette partie étant multiplié par un chiffre seulement du même multiplicateur et celui-ci étant le dernier introduit dans le calcul, le produit est reporté à la colonne finale.

<u>Deuxième mode</u>, en commençant par le premier chiffre et comme il est habituel pour la racine cubique les coefficients de $(x_8 + 8)^3$.

	24 .	192 . .	
	3	729	512 . . .
			52787 . . .
3^2	243	19929	10395875 . . .
	35	7395	418435208 . . .
		12325	1464996761 83 . . .
			209303042 4511
$3,5^2,5$	2465	2079175	5827499029146075 11.
	352	125010	
		50004	the cube required.
$3,5,2^2,52,2$	25002	209217604	
	527	501094	
		1753829	
$5,2,7^2$, &c.	250547	20928525169	
	271	17540187	
		2505741	
$2,7,1^2$, &c.	2505741	209303042 4511	

Dans cet exemple et dans tous les exemples suivants les multiplicateurs sont diminués à partir de la gauche.

Article 28. Mais si nous réfléchissons sur les caractères distinctifs de l'évolution, qui ont été discutés antérieurement, il apparaîtra que dans ce mode-ci l'exemple est traité par la méthode la mieux adaptée au but de l'analyse. En commençant par les termes de plus haut degré nous assurons une stabilité croissante du diviseur et des coefficients en général. Et aussi, en prenant $fx + f(x_m + r_m)$ comme base du travail, nous faisons la même chose que ce qui est fait pour les équations dans la méthode des limites déjà expliquée : à savoir, la présence d'un diviseur assez fiable dans le premier cas. Par conséquent, nous prenons en considération la commodité du lecteur, en donnant une interprétation du théorème général telle qu'elle s'accordera avec cette procédure.

Multiplier le premier coefficient par les n derniers chiffres de la racine, ou par tous les chiffres de la racine s'il y en a moins que n, et ajouter le produit au second coefficient : au troisième coefficient, ajouter le produit de cette somme par les $(n-1)$ derniers de ses chiffres, ou par tous ses chiffres s'ils sont moins de $(n - 1)$: et ainsi de suite.

Le produit qui est reporté à la fin dans la dernière colonne sera à ajouter ou à soustraire, selon que le problème est synthétique ou analytique.

Ex 2. - Extraire la racine quatrième de 1 5171 0880 9900 6561.

	24.	216..	864...	1517108809906561(0241 *
	2	484	41168	1296
2^4	242.	22084	908168..	2211088
	24	4888	4534112	1816336
		9776	9068224	
				3917520990
24^3	2444.	2267056	962577344	3850309376
	241	49362	930614884	
		49872	232653721	972116146561
		24681		972116146561
241^2	24681	232653721	972116146561	......

Article 29. En multipliant, on observera que je commence par le chiffre de gauche du multiplicateur. L'utilité de cette disposition apparaîtra en formant les additions, et plus encore, quand les termes à ajouter les plus petits seront ignorés dans le travail de contraction. On ne doit pas non plus être perplexe à propos des termes du dessus. Nous devons seulement observer comment le premier chiffre du multiplicateur est situé en regard du coefficient situé au dessus dans la première colonne ; car les produits successifs se décaleront continuellement d'une position vers la droite.

Ou plus généralement, on a :

Si le nouveau coefficient d'une colonne quelconque avance de p chiffres vers la droite de l'ancien, et doit être multiplié par m chiffres, le premier terme à ajouter au prochain coefficient ancien doit commencer à $p + 1 - (m - 1)$, c'est à dire à $p - m + 2$ chiffres à sa droite. Si $m > 2$, ceci voudra dire à $p + m - 2$ chiffres à sa gauche.

30. En prenant p négatif, nous obtenons une règle semblable pour commencer les contractions : à savoir - si p chiffres sont enlevés de n'importe quel coefficient et que ce coefficient doit recevoir m additions alors p - m + 2 chiffres doivent être enlevés du prochain coefficient de gauche et ainsi de suite en reculant. Quand $m > 2$ ceci signifie que p + m - 2 chiffres ou certaines marques les représentant doivent être ajoutés.

L'étendue normale de la première addition étant ainsi assurée et désignée par des lignes verticales, les m - 1 places restantes de chaque nouveau coefficient peuvent être marquées par des points, et en partie négligées tandis que les additions qui restent à faire sont disposées selon la méthode habituelle de la multiplication contractée.

A chaque nouvelle étape de contraction, la ligne verticale doit être tracée à la même distance à gauche de tous les points.

Exemple 3. Trouver la racine de $x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 5x - 321 = 0$.

Une première solution approchée est fournie par la méthode de l'article (23),

	1	2	3	4	5	-321
1^5............	1	3	6	10	15	-306
2^4............	1	5	16	42	99	-207
3^3............	1	8	40	162	423	+216

Ainsi la racine commence par 2. Nous complétons la transformation ainsi par l'article (24),

	1	5	16	42	99	-207
2^3............	1	7	30	102	201	
2^2............	1	9	48	150		
2^1............	1	11	59			
1	1	12				

Précisons la solution. La racine de l'équation réduite

$$x_2^5 + 12x_2^4 + 59x_2^3 + 150x_2^2 + 201x_2 - 207 = 0$$

est plus grande que $\frac{207}{423}$ ou .5 et elle est plus petite que $\frac{207}{201+75+15}$ ou .7 . Par conséquent,

```
               12.        59..          150            201              207   (·638605803324
                6         756           39936          1139616          15897696
              ----       -----          -----          -------          --------
6⁵ .......... 126.        6656          189936         3149616          150230400000
               63       { 7938        { 4493694      { 1422718722       139304119743
              ----      {  3969       {  2246847     {   711359361      ------------
6,3⁴ ........1323.      --------      -----------    ----------------    10926280257
              638|        748949|       23711978|7     4643470658|1       8031030028
            ------|     { 83208|      { 5024561|04   {  87164285|82     ------------
6,3,8³ .....13|868|     {  4160|4     {  251228|05   {  23243809|55       2895250229
              |638|6    {  1109|44    {   66994|15   ---------------      2867504760
          |--------     ----------    -----------      475387875|3|47    -----------
6,3,8,6²  | ,,1,4|51     837|4,2,6|84   290547|6,1|94 {  2353102|0 8        27745469
                        { 87|06       { 2790|27      {   176482|6 5        23904796
                        {  4|35       {  744|07      ---------------     ----------
                        {  1|16       {   55|80        4779174|60|0 8       3840674
                        {   | 9       ------------     { 1769|58            3824781
                       |-----|--        234|13,7|76    {   14|75          ---------
                       | 9,3,0|09           |74        -----------          15893
                                            | 5        478095|8|93          14343
                                        |----|--            1|4 7          ------
                                        |2,9,4|93            |2 3           1550
                                                       -----------          1434
                                                       478097|5 9           ----
                                                                             116
                                                                              95
                                                                             ---
                                                                              21
                                                                              19
                                                                              --
                                                                               2
```

D'où il résulte que la racine est 2.638605803324, valeur exacte jusqu'à la 12ème décimale. Dans ma publication précédente, le dernier chiffre était trop grand, par suite d'une légère erreur commise dans la première colonne au début des contractions.

31. En proposant de nouveau ce problème, je souhaite inviter à comparer avec ma méthode par transformées pures, déjà connue du public. Il apparaîtra, je pense, que si la très grande précision de celle-ci assure infailliblement qu'il n'y aura pas d'erreur ni dans l'arrangement ni dans les contractions du travail, la nouvelle méthode a cependant des avantages importants qui lui sont particuliers. Elle nécessite un plus petit nombre d'additions et celles-ci sont déterminées par de simples multiplications et non par l'emploi mental combiné de multiplications et d'additions ; de plus il ne peut pas y avoir de changement de signe dans un ensemble d'additions.

De plus, il est clair que tout ce qui a été avancé pour déterminer l'adaptation universelle de la première méthode aux équations s'applique au moins avec la même force à celles-ci. Car dans la recherche, N, M, L, etc., sont interchangeables avec les expressions universelles f, Df, D^2f, etc., par lesquelles les quantités irrationnelles et transcendantes sont réduites à la forme algébrique régulière.

En fait, comme nous l'avons vu, la seule différence entre les deux méthodes est que les transformations de la nouvelle procédure ne portent que sur les chiffres de la racine alors que dans l'autre, à chaque chiffre s'ajoutent n incréments de zéros : en n'en utilisant qu'un certain nombre beaucoup de solutions diverses peuvent être obtenues mais il suffira de les avoir mentionnées.

32. Avant d'abandonner cette partie du sujet, il y a une caractéristique de la théorie des équations qui doit être mentionnée et qui s'harmonise tout particulièrement avec les principes de la transformation par division, à partir de laquelle procède la recherche des solutions. C'est ceci, à savoir que la dépressio et l'approximation continue sont une seule et même chose. Dès qu'une racine quel conque de l'équation est déterminée de manière précise ou avec assez de précision, le terme constant doit s'annuler effectivement ou virtuellement et les coefficients restants constituent la formule déprimée qui permet de déterminer les autres racines réelles.

Quand la méthode des transformations pures est utilisée la formule déprimée est déjà prête pour la solution, étant fonction pure des racines restantes, chacune étant déterminée de la racine connue en omettant le dernier incrément. Si les transformations sont mixtes et si un incrément zéro est utilisé pour rectifier le nouveau terme constant les racines sont les différences entre les racines inconnues et la racine connue. Ou bien si r est la dernière racine déterminée, on peut utiliser l'incrément -r pour retrouver les racines de l'équation d'origine.

Cependant divers inconvénients sont liés à l'utilisation pratique de ces principes pour trouver les autres solutions, dûs en particulier au grand nombre de chiffres des coefficients restants et la nécessité d'une gestion longue et compliquée des contractions. Pour ces raisons je pense que de manière générale l'on trouvera préférable de procéder séparément pour chaque racine à partir des données de la solution initiale. C'est donc surtout en référence à ce stade de l'approximation que les remarques précédentes ont une utilité pratique cela permet d'agir avec une plus grande commodité ce qui est le but de la méthode des diviseurs.

Exemple. Quelles sont les racines de $x^4 + 2x^3 - 22x^2 + 7x + 42 = 0$?

	1	2	-22	7	+42	
1^4........	1	3	-19	-12	+30	
2^3........	1	5	- 9	-30	+ 0	2 est une racine
2^2........	1	7	5	-25		
3^1........	1	10	25	0		3 est une racine
-1^1........	1	9	7			
-2	1	7				

En conséquence les racines sont 2, 3 et les racines de $x^2 + 7x + 7 = 0$ ou encore 2, 3 et $-\frac{1}{2}(7 \pm \sqrt{-11})$.
Ici l'incrément 1 est remplacé par 0 une fois la racine 2 déterminée ; et après avoir trouvé la racine 3 par -3, parce que tous les signes étant positifs cela montre que toutes les racines positives ont été trouvées puis deux fois par 0 pour compléter la transformée pure qui contient les autres racines.

LE DEFI DE LA VIE

A propos de la polémique BERGSON - BOREL

(1907 - 1908)

Stéphane CALLENS

COLLOQUE INTER - IREM

Strasbourg - 23 mai 1987

UN PASSE PROCHE

La polémique entre le mathématicien Emile BOREL et le philosophe Henri BERGSON se situe dans un passé proche, au moment où notre propre actualité scientifique se constitue.

Si BOREL, dans les colonnes de la Revue du mois qu'il a fondée avec LANGEVIN et PERRIN, se montre réticent devant l'exposé de la relativité fait par Henri POINCARE en 1906, son ouvrage d'introduction géométrique à quelques théories physiques, publié en 1914, expose les théories nouvelles. Les colonnes de la revue du mois accueillent également des articles de Marie CURIE, Henri POINCARE, Paul PAINLEVE.

Ce sont pourtant les questions liées au développement des sciences biologiques qui organisent un espace polémique : à la fois interne à la revue, débats entre PAINLEVE et DUCLAUX, BOREL et LE DANTEC, et externe lors de diverses passes d'armes avec Henri BERGSON et Edouard LEROY. La polémique avec BERGSON marquera profondément des gens proches de BOREL, pourtant de convictions opposées, Jacques MARITAIN et Julien BENDA.

L'autre élément de proximité historique est l'entreprise de rénovation de l'enseignement des mathématiques menée par BOREL. L'enseignement d'une géométrie moderne basée sur la notion de déplacement (ou mouvement dans la terminologie de l'époque) est effectif après les réformes de 1902 et 1905. Les années 20 verront l'abandon de cette tentative.

Nouvelles théories physiques, mathématisation des sciences de la vie, place de l'enseignement des mathématiques constituent donc la toile de fond de ce passé proche où vont s'affronter deux conceptions différentes du travail intellectuel créateur, celle du mathématicien et celle du professeur de philosophie.

UN DEFI AU NOM DE LA VIE

L'ouvrage de BERGSON, l'évolution créatrice, est un défi sans pareil, plus ambitieux que celui de l'évêque BERKELEY au XVIIIème siècle à propos du calcul infinitésimal, lancé à toute géométrie enseignée, ce terme étant compris dans son acceptions la plus large - puisqu'il propose de se défaire de ces habitudes apprises pour retrouver une intellectualité primitive.

Le caractère heurté des affirmations contradictoires de BERGSON et de BOREL pourrait cependant faire oublier un ensemble, commun aux deux protagonistes, d'aspirations partagées sur les concours à apporter à une entreprise scientifique dans le domaine du vivant et sur le rejet de toute forme d'enseignement trop figé.

La divergence de vue porte sur la vie, le terme ayant deux acceptions peu différenciées, par BERGSON en particulier :

a) En tant que matière vivante,
b) En tant qu'existence vécue.

a) Depuis BERTHELOT, la matière vivante est accessible aux procédés chimico-physiques. Les premiers biologistes sont un peu des artisans fervents et ne reculent pas devant des vues systématisantes à partir de leur pratique de laboratoire. Les Sciences de la Vie ne manquent pas: Jacques DUCLAUX, un proche de BOREL, en propose une, basée sur la physique de l'état colloidal; un autre collaborateur de la Revue du Mois, Félix LE DANTEC, en propose une autre basée sur l'observation microscopique et la comptabilité physico-chimique des échanges des êtres unicellulaires ou des cellules avec leur milieu. La Revue du Mois se désigne justement dans son texte introductif, comme un point de rencontre pour cette extension des sciences dites exactes dans le domaine du vivant.

D'un autre côté, le projet de BERGSON est bien de constituer, à proprement parler, une biologie à partir d'une science de l'homme basée sur ses ressorts psychologiques.

b) Mais plus fondamentalement, il y a une commune aspiration à la fraîcheur, devant la lourdeur d'un enseignement. Prenez la plupart des savants de cette génération : ils se posent en s'opposant pour reprendre une remarque de BACHELARD à propos d'EINSTEIN. Il en est de même pour BOREL qui rénove entièrement un domaine, le calcul des probabilités, marqué précédemment par l'enseignement conventionnel, encore centré sur les questions des erreurs de mesure, de Joseph BERTRAND. Le philosophe anglais Herbert SPENCER joue un rôle similaire pour Henri BERGSON. On aspire non seulement à renouveler le contenu des enseignements délivrés, mais aussi à intensifier la relation avec les élèves.

BERGSON, en particulier, souligne combien il fut important pour sa propre philosophie de s'être formé au contact d'un public. Maintenir cette sympathie lui a semblé être un impératif, modelant même quelques thèmes principaux de son enseignement, comme sa présentation des arguments de ZENON.

BOREL joue un rôle dans les réformes qui visent à introduire la géométrie conçue comme l'étude du groupe des déplacements dans l'enseignement secondaire. Les "BOREL - MONTEL" ont été une collection de manuels d'enseignement en usage pendant le premier tiers du siècle. Dans le vocabulaire de BOREL, il s'agit de rendre intuitif l'enseignement élémentaire. Par intuition, BOREL entend un apprentissage de la vision " des relations de forme et de position" (1) et un "moyen de se rendre compte sous une forme complète des diverses propriétés générales des figures simples".

Vie, Intuition, Evolution, Mouvement: BOREL et BERGSON emploient le même vocabulaire. Sous ces usages, il y a bien des aspirations communes, mais on va le voir, la divergence des points de vue va apparaître inconciliable.

(1): Bull. Soc. Fr. Philo. T.VII, 1907.

<u>UN DRAME EN CINQ ACTES</u>

Cinq textes constituent les cinq actes du déroulement dramatique de cette polémique, dans les années 1907 et 1908. Le paroxysme de la polémique se situe lorsque BOREL oppose "<u>L'évolution de l'intelligence géométrique</u>" à "<u>L'évolution créatrice</u>", titre de l'ouvrage d'Henri BERGSON où il fait référence aux théories darwiniennes. La "création se poursuit sans fin en vertu d'un mouvement initial"; il existe un élan originel de la vie, l'élan vital accessible par intuition: ceci pour présenter de façon contractée à l'excès, le thème du livre de BERGSON.

L'entreprise de BERGSON, tout comme celle de la <u>Revue du Mois</u>, critique un déterminisme héréditaire. L'introduction de la <u>Revue du Mois</u>, que BOREL a créé avec un groupe d'universitaires scientifiques dont les plus connus sont Aimé COTTON, Paul LANGEVIN et Jean PERRIN, dresse un constat qui est longuement développé dans <u>L'évolution créatrice</u> de BERGSON: "Il est nécessaire ... de libérer notre esprit ... de l'idée d'un mécanisme de l'hérédité et de renoncer à l'espérance d'obtenir une relation mathématique entre chaque être et chaque descendant" (1). Les conséquences tirées de cet échec sont cependant radicalement différentes: Pour BERGSON, l'échec d'une mécanique de l'hérédité doit pousser la biologie naissante dans la voie d'une recherche psycho-physiologique, tandis que l'auteur de ces lignes de la <u>Revue du Mois</u> Vito VOLTERRA, développera l'analyse fonctionnelle pour aborder des questions biologiques.

L'entrée en scène des protagonistes se fait de façon séparée. Le premier acte est un texte où BOREL conteste les vues du logicien COUTURAT et conteste la représentation scolaire des mathématiques dans l'enseignement de la philosophie. BERGSON s'en prend (second acte) au compte-rendu qui a été fait par le biologiste LE DANTEC de son livre.

Aux quatrième et cinquième actes, BERGSON et BOREL donnent chacun quelques précisions sur leurs positions, en particulier, ce qu'ils entendent par "sens de la vie".

(1): <u>Revue du Mois</u>, t. I, p. 16.

Nous ne pouvons détailler l'ensemble de la polémique. Précisons quelques points:

1°) Pourquoi, l'un comme l'autre, rejettent le logicisme?

2°) Qu'entendent-ils par "évolution de l'intelligence géométrique"?

3°) Qu'est-ce qu'avoir et transmettre "le sens de la vie"?

1°) Les deux premiers actes sont, d'une part, d'un commentaire de BOREL à partir d'un texte du philosophe COUTURAT, et d'autre part, une réplique de BERGSON au biologiste LE DANTEC qui avait vu dans le livre L'évolution créatrice, une évocation lyrique de la biologie scientifique. Ils sont, pour le philosophe, comme pour le mathématicien, mais pour des motivations étrangères, un rejet du logicisme: la crainte exprimée du professeur de philosophie est que l'enseignement de la philosophie ne soit plus qu'une "systématisation des sciences". Au contraire, la philosophie doit jouer un rôle dans l'unification méthodologique de la biologie.

Pour BERGSON, la biologie devrait emprunter des voies psycho-physiologiques: les schémas mécanistes, dit-il, ne peuvent avoir qu'un caractère artificiel dans le domaine du vivant. Ce n'est pas l'opinion de LE DANTEC qui intitulera un de ses livres La mécanique de la vie. Ce sont des schémas psychologiques qui doivent unifier la biologie. Car la nature de l'homme comprend, dans la conception de BERGSON, une intellectualité primitive.

Pour BOREL, on ne peut réduire les mathématiques à une logique. Ce qui est le projet même du logicisme. Il cite quelques arguments dont les trois principaux sont:

a) Vous fabriquez une machine logique qui vous donne par exemple, des expressions algébriques; on pourra bien constituer "d'innombrables volumes remplis d'identités" on n'aura plus pour autant fait des mathématiques, c'est-à-dire, distinguer celles qui sont intéressantes.

b) Les différents domaines mathématiques ont des architectures en évolution: ainsi, le théorème sur l'égalité des birapports n'a pu être signalé qu'en exercice dans les manuels du XVIIIème siècle; avec les géométries projectives, il devient un théorème fondamental, sans que le contenu logique de ces propositions ne soit en rien modifié.

c) Enfin, toute l'histoire de l'analyse complexe, comporte une progression construite en faisant appel à des notions comme celle de période, ou à des représentations géométriques: tout cela se situe bien loin d'une logique pure qui n'intervient que dans des tâches annexes de cette théorisation progressive pour la "recherche de la démonstration de propositions particulières que l'on pressent êtres vraies et qui sont nécessaires pour l'édification complète de la théorie" (BOREL). Pour BOREL, la logique fournit seulement des biens intermédiaires, pour reprendre une expression d'économiste, qu'il va s'agir de travailler, assembler, classer, comparer, réunir...

L'autre pilier du logicisme qui dit "l'invention n'a de valeur qu'au moment où elle cesse d'être invention pour devenir démonstration" (COUTURAT) est battu en brêche par l'affirmation suivante de BOREL: "L'invention féconde est la découverte d'un point de vue nouveau"; comme le sont les notions de puissance et de mesure d'ensemble, de probabilités dénombrables auxquelles l'oeuvre mathématique de BOREL reste attachée.

2°) L'expression "évolution de l'intelligence géométrique" est ambiguë, les deux protagonistes la comprennent de façon différente.

BERGSON comprend cette évolution comme le passage au rococo d'une intellectualité primitive qu'il avait cherchée à cerner par l'observation clinique en s'occupant des aphasiques. Ce pourquoi également, il affirme "qu'antérieurement à la géométrie savante, il y a une géométrie naturelle dont la clarté et l'évidence dépassent celles des autres déductions".

Pour BOREL, au contraire, "évolution de l'intelligence géométrique" veut dire qu'une géométrie moderne perfectionne l'ancienne.

Pour BERGSON, le terme évolution reste du vocabulaire d'histoire naturelle, il concilie Nature et Histoire; et pour la géométrie, on passerait de l'apprentissage inné à l'apprentissage acquis.

Pour BOREL, le terme évolution concilie Histoire et Progrès dans une modernité sobre et expansive: une géométrie plus vivante aura de nouveaux champs d'application. Il lui confère aussi un aspect institutionnel: l'introduction des nouvelles méthodes doit se faire de façon progressive et non d'un seul coup, comme MERAY le préconisait.

3°) Le thème principal abordé dans les deux derniers textes est celui du "sens de la vie" qui, dit BERGSON, "tranche sur l'entendement pur et qui a son origine dans la même poussée vitale que l'instinct".

C'est un peu en lieu et place de ce "sens de la vie" selon BERGSON que BOREL met un calcul des probabilités instantané, un repérage individuel éclair.

Pour BOREL les calculs, les évaluations de probabilités sont des opérations élémentaires quotidiennement mises en oeuvre. Mais pour lui, l'apprentissage est aguerrissement, exercice.

"Toute personne un peu habituée, - dit-il dans son premier article qu'il écrit sur les probabilités en 1906, la <u>Revue du Mois</u> - aux problèmes de probabilité, n'a l'avantage que de faire face "d'une manière presque réflexe" à des situations diverses, par rapport à une personne qui ne connaîtrait pas les rudiments du calcul". L'intuition, le sens de la vie, résulte d'un entrainement selon BOREL.

Par contre, BOREL critique BERGSON parce qu'il ne peut faire l'économie d'une ascétique.

<u>UN DEBAT SUR LE TRAVAIL CREATEUR</u>

BOREL et BERGSON souscrivent tous les deux à l'expression de Weierstrass que le véritable mathématicien est poète.

BERGSON a eu, dit Maurice BLANCHOT, le mathématicien et le poète contre lui: leurs activités sont des créations où la recherche de l'harmonie compose avec une métrique, des règles plus ou moins formalisées, un montage en cours d'édification.

Je verrai donc dans cette polémique une opposition entre praxis et poiésis dans le geste créateur.

Une commune préoccupation de l'industrie créatrice, de la poiésis, a probablement soudé l'amitié d'Emile BOREL et de Paul VALERY.

CIRCONSTANCES

Au moment où Borel commence à se tourner vers le calcul des probabilités, il crée, avec Perrin et Langevin, une petite revue, La Revue du Mois : elle comporte un programme de mathématisation des Sciences de la Vie exposé par Vito Volterra, ainsi que le premier exposé de Borel sur la " valeur pratique " du calcul des probabilités.

Le contexte philosophique de cette insertion culturelle des mathématiques se voit précisé lors de la polémique Bergson-Borel.

1. Borel

LA LOGIQUE ET L'INTUITION EN MATHÉMATIQUES

J'ai toujours admiré la facilité avec laquelle les philosophes parlaient de la « méthode des sciences mathématiques », comme s'ils la connaissaient. Et c'est un spectacle curieux que de voir un candidat au baccalauréat répéter à son examinateur ce que son professeur lui a appris à ce sujet, alors qu'examinateur, candidat et professeur ignorent également ce que sont ces mathématiques dont ils discutent la méthode.

J'entends bien qu'ils discutent cette méthode à propos d'exemples simples, d'un théorème du premier livre d'Euclide ou d'une proposition d'arithmétique élémentaire. Mais la science mathématique n'est-elle pas toujours semblable à elle-même dans sa perfection logique et ne suffit-il pas d'en avoir disséqué un raisonnement pour les connaître tous? Il y a bien quelques inventions toutes récentes, comme le calcul différentiel et le calcul intégral, qu'ignorait Euclide et qui ne paraissent pas absolument analogues à ses *Propositions*, mais ne suffit-il pas de rappeler à leur sujet le nom de l'auteur de la *Monadologie*? On y ajoutera, au besoin, quelques considérations sur l'infini actuel, et la philosophie des mathématiques sera terminée.

Tel était, à très peu d'exceptions près, l'état d'esprit des professeurs de philosophie il y a vingt ans. Depuis, un grand effort a été tenté — ce n'est pas aux lecteurs de cette *Revue* que nous avons à l'apprendre — pour donner aux philosophes des notions plus précises sur les sciences dont ils parlent, et le nombre des lecteurs qui suivent les articles et les livres de M. Poincaré est une preuve que cet effort n'a pas été vain.

Malheureusement, pour être lu, la première condition est de pouvoir être compris; les mathématiciens qui voulaient être compris de philosophes peu instruits en mathématiques, ont naturellement parlé surtout des parties élémentaires, des principes. Mais les principes des mathématiques ne sont pas les mathématiques tout entières et, si les principes sont mieux connus, la nature des mathématiques reste aussi généralement ignorée de tous ceux qui ne sont pas mathématiciens de métier.

Je laisserai de côté toutes les discussions relatives aux principes des mathématiques; leur étude constitue une science qui est réellement distincte de la science mathématique proprement dite; il suffit, pour s'en convaincre, de constater que beaucoup d'excellents mathématiciens ignorent systématiquement toutes les publications relatives aux « principes ». On ne doit d'ailleurs, ni les approuver, ni les blâmer; un mathématicien ne peut tout apprendre et la connaissance des théories et des faits physiques peut lui être plus utile que celle des axiomes irréductibles de la géométrie. En constatant ces faits, je ne prétends d'ailleurs nullement contester l'intérêt des recherches sur les principes, ni les répercussions qu'elles ont eu sur les progrès des mathématiques; je considère au contraire comme excellent que ces recherches aient eu lieu et soient connues d'assez nombreux mathématiciens, de même qu'il est bon que de nombreux mathématiciens étudient les travaux des physiciens et des astronomes; mais la connaissance des principes n'est pas nécessaire à la découverte des faits analytiques et des lois qui les régissent, ce qui est le travail propre du mathématicien.

Cette distinction entre les principes des mathématiques et les mathématiques sera, je le crains, regardée par beaucoup de lecteurs comme très peu « philosophique ». La seule chose importante pour le philosophe, ne sont-ce pas les principes? Et peut-il y avoir quelque chose d'intéressant en dehors de ces principes, sinon pour les spécialistes? Il me paraît au contraire qu'il est vain de discuter éternellement les principes sans se demander jamais ce qu'est la science elle-même. Et si l'on ne se pose pas cette question primordiale parce qu'on croit en avoir la réponse et si cette réponse est inexacte, les discussions sur les principes ne risquent-elles pas d'obscurcir les idées au lieu de les éclaircir?

Qu'il me soit permis de citer tout d'abord un passage de M. Couturat qui m'a décidé à ne pas retarder la rédaction de ces pages, en projet depuis plusieurs années :

> Un autre reproche que le psychologisme adresse à la logique c'est de ne pas s'occuper de l'invention, de ne pas l'expliquer, et de ne lui fournir aucune méthode générale et sûre; peu s'en faut qu'on ne l'accuse de paralyser l'invention et de stériliser le génie. Aussi lui oppose-t-on une Logique de l'invention dont l'unique règle serait, semble-t-il, de se moquer de toutes les règles et de prendre le contre-pied de la Logique démonstrative et vulgaire, bonne tout au plus pour les professeurs et les pédants. Le génie réclame ses coudées franches et ne peut s'épanouir que dans la liberté absolue; il ignore les barrières et les entraves, il se joue dans l'illogisme, la contradiction est son élément et la condition essentielle de toute invention. Pour un peu, il n'y aurait de pensée juste et féconde qui ne fût contradictoire; et, pour le dire en passant, il y a un grain de vérité dans ce paradoxe, car la Logique formelle établit que de l'absurde on peut tout déduire, le faux comme le vrai, de sorte que l'erreur est plus féconde, en un sens, que la vérité.
>
> Mais la thèse que nous discutons repose sur une complète « ignorance de la question ». La logique n'a pas plus à inspirer l'invention que la métrique n'inspire les poèmes. L'explication du fait de l'invention appartient à la psychologie. Mais l'invention, comme fait psychologique, n'est pas plus vraie que fausse. Les mêmes lois psychologiques expliquent les inventions scientifiques les plus fécondes et les innombrables essais de démonstration

du postulatum d'Euclide. Or qu'est-ce qui distingue l'invention *vraie*? C'est qu'on peut, *après coup*, la démontrer, la justifier *logiquement*. L'invention n'a donc de *valeur* qu'au moment où elle cesse d'être invention pour devenir démonstration. Et, même psychologiquement, ce qui distingue l'invention vraie, c'est qu'elle est le produit, non d'un caprice imaginatif ou d'une fantaisie comme il en vient en foule à l'esprit des ignorants et des fous, mais d'une Logique instinctive, spontanée, inconsciente tant qu'on voudra, mais toujours conforme, au fond, à la Logique consciente et réfléchie. La première ne fait qu'anticiper, par un sentiment obscur, mais sûr, qui est le tact ou le flair de la raison, les démarches de la Logique discursive, qui vérifie et contrôle les résultats de la première. Il n'y a donc pas opposition entre la Logique d'invention et la Logique de démonstration, mais au contraire accord et harmonie préétablie [1].

Je me bornerai, naturellement, à interpréter ce passage au point de vue des mathématiques. Il me paraît témoigner d'une complète « ignorance de la question » si la question est de savoir ce qu'est l'invention en mathématiques et quel rôle elle joue dans la construction même de la science.

Je voudrais montrer que la logique fournit seulement aux mathématiques leur matière, c'est-à-dire un ensemble innombrable de formules possibles. La science commence lorsque l'on choisit parmi ces formules, pour les classer, les comparer, les réunir par des théories générales. De même, la nature donne au physicien ou au botaniste d'innombrables sujets d'études, mais ces sujets d'études ne constituent pas la physique ou la botanique. Une formule logique est un phénomène comme la chute d'un corps ou comme un arbre et les mathématiques sont une science naturelle dans laquelle la logique ne joue pas plus de rôle que dans les autres sciences naturelles.

Voici un théorème de géométrie.

Soient A, B, C, D *quatre points situés sur une droite* Δ, O *un point extérieur à* Δ *et* Δ' *une autre droite, distincte de* Δ *et ne passant pas en* O. *On joint* OA, OB, OC, OD *qui rencontrent* Δ' *en* A', B', C', D'; *l'on a*

$$\frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB} = \frac{C'A'}{C'B'} : \frac{D'A'}{D'B'} \qquad (2)$$

Ce théorème est aisé à démontrer de bien des manières; l'une des plus brèves consiste à évaluer chaque membre de la relation (2) au moyen des sinus des angles en O. Cette question aurait pu être proposée comme exercice, à la fin du XVIII[e] siècle, à un étudiant quelconque en mathématiques; elle a même été peut-être proposée dès cette époque par un professeur à ses élèves, résolue, puis oubliée, comme tant d'autres questions, analogues en apparence, que l'on trouve par milliers dans les livres de géométrie élémentaire.

Mais, pour tirer de l'égalité (2) la théorie du rapport anharmonique et ses innombrables applications, il fallait le génie d'un Chasles [1]. Au lieu d'exprimer un simple théorème de géométrie élémentaire, l'égalité (2) est alors la clef de la géométrie projective. Elle fait connaître l'invariant projectif fondamental, duquel tous les autres peuvent être déduits. Elle fournit à la fois une méthode de démonstration et une méthode de découverte.

Et cependant, au point de vue logique, l'égalité (2) n'a pas changé; seulement, elle est lue avec des yeux éclairés et considérée sous un autre aspect.

Les exemples précédents se rapportent chacun à l'une des branches des mathématiques : algèbre élémentaire, géométrie élémentaire, théorie générale des fonctions. On pourrait les multiplier en s'adressant à d'autres branches. Mais l'insuffisance de la logique apparaît bien davantage encore lorsque l'on étudie des questions dont l'intérêt réside dans le rapprochement établi entre deux ordres de recherches en apparence différents.

Par exemple, lorsque M. Klein fait voir que la théorie algébrique de l'équation du cinquième degré est notablement simplifiée par l'étude préalable des propriétés de l'icosaèdre régulier et que ce rapprochement permet aussi d'étudier avec fruit certaines équations différentielles du second ordre, on admire comment cette vue d'ensemble éclaire les faits épars, mais on est obligé d'avouer que le seul rôle de la logique dans cette construction a été d'en fournir les matériaux, et l'on ne confond pas le tailleur de pierres avec l'architecte.

Dans cette théorie intervient en particulier une identité algébrique de la forme

$$aP^3 + bQ^2 + cR^5 = o$$

dans laquelle a, b, c désignent des constantes, P, Q, R étant des polynomes des degrés respectifs : 20, 30 et 12. Pour arriver à écrire une telle identité par les procédés déductifs dont nous parlions tout à l'heure, il faudrait plusieurs vies humaines employées à des calculs stériles donnant des formules sans intérêt, et il resterait encore à *découvrir* la formule intéressante, supposée écrite parmi les autres, et à l'interpréter.

2. Bergson

Lettre au directeur de la *Revue du mois* après l'article de Le Dantec sur l'*Évolution créatrice* (1)

Saint-Cergues (Suisse), le 20 août 1907.

Monsieur le Directeur,

L'article que M. Le Dantec a bien voulu consacrer à mon *Évolution créatrice* me plonge dans la plus grande perplexité. Je ne puis, malgré tous mes efforts, trouver le moindre rapport entre ce que j'ai dit et ce que M. Le Dantec me fait dire.

(1) *Revue du Mois*, 10 sept. 1907 (pp. 351-354).

Convaincu que je dois croire, comme lui, à une mathématique de la vie et de la conscience, il en a conclu que mon dernier livre ne pouvait être qu'une transposition « poétique » de ce mécanisme mathématique. Mais la vérité est que mon travail, d'un bout à l'autre, est la négation même d'un mathématisme de ce genre. Je n'entreprendrai pas de définir ici le point de vue que la philosophie me paraît devoir adopter sur les phénomènes de la vie. Si je pouvais m'expliquer là-dessus en quelques lignes, je serais inexcusable d'avoir écrit un volume de 400 pages. Qu'il me suffise de dire que, partant des données de la biologie actuelle, on peut se proposer de les relier entre elles, ou par des schémas mathématiques (c'est, je crois, ce que fait M. Le Dantec), ou par des schémas psychologiques (c'est ce que j'ai tenté de faire). Ce ne sont pas là, comme M. Le Dantec paraît le croire, deux manières différentes de dire les mêmes choses. Ce sont deux points de vue opposés sur l'évolution de la vie. La première méthode élimine de l'évolution de la vie toute espèce de contingence. La seconde fait à la contingence une part, qu'elle vise précisément à délimiter.

C'est pourquoi les conclusions où j'aboutis ne peuvent pas rejoindre celles de M. Le Dantec. Pour ne parler que de l'essentiel, de ce que j'appelle « élan vital », je ne vois ni en quoi il est « lutte universelle », ni comment on pourrait le confondre avec « l'hérédité ». Comme le fait remarquer M. Le Dantec lui-même, c'est un principe de changement bien plus que de conservation. Mais surtout, c'est un principe dont on n'obtiendra jamais une approximation que par des schémas d'ordre psychologique.

Je ne puis d'ailleurs que me féliciter de m'être rencontré avec M. Le Dantec dans le choix de certaines formules. Mais, là même où nous parlons la même langue, je crains que nous ne soyons encore très loin de nous entendre. En disant, dans mon dernier livre, que notre logique est surtout la logique des solides, je n'ai fait que rappeler une thèse que je soutiens depuis bientôt vingt ans, à savoir que la fonction essentielle de notre intelligence est de « spatialiser » et de « solidifier » ; c'était déjà une des idées directrices de mon *Essai sur les données immédiates de la conscience*. Elle m'a toujours servi à montrer le côté illusoire du déterminisme radical, lequel consiste à ériger en réalités absolues les symboles mécanistiques dont se sert habituellement notre intelligence, tournée comme elle l'est vers l'espace, et absorbée surtout par la considération des solides. Dans le même *Essai sur les données immédiates*, j'insistais sur la nécessité où se trouve l'intelligence de n'envisager dans le temps que des moments, dans le devenir que des états, dans le mouvement que des positions, et de reconstituer alors artificiellement la mobilité, en combinant des immobilités les unes avec les autres. Je n'ai pas qualifié ce procédé, dès alors, de cinématographique. Mais le cinématographe n'était pas encore inventé. Quoi qu'il en soit, et de quelque nom qu'on l'appelle, ce mécanisme inhérent à notre intelligence est, à mes yeux, la véritable cause de notre tendance à éliminer du réel la *durée concrète*, à ne tenir compte que du temps mathématique, à ne voir que des arrangements, dérangements et réarrangements de parties, là même où il y a un devenir indivisé et irréversible. C'est dire que la seconde remarque, comme la première, m'a servi à montrer le caractère artificiel que prennent les schémas mécanistiques, quand on les emploie à représenter l'évolution de la conscience et de la vie.

3. Borel

L'ÉVOLUTION DE L'INTELLIGENCE GÉOMÉTRIQUE

Je voudrais présenter brièvement quelques réflexions qui se rattachent à la fois à mon précédent article [1] et à l'ouvrage récent de M. Bergson, l'*Évolution créatrice* [2]. Bien entendu, je ne prétends pas discuter en quelques pages cette œuvre si importante et si suggestive ; je ne parlerai que d'un point particulier : la notion de l'intelligence géométrique. Je voudrais essayer de montrer que l'idée que M. Bergson se fait de l'intelligence géométrique, idée qui paraît jouer un rôle important dans son système, est adéquate à l'intelligence géométrique des Grecs; mais que l'intelligence géométrique a évolué et qu'actuellement elle est beaucoup moins rigide et beaucoup plus vivante.

En quoi consiste la première des grandes transformations de la géométrie dans les temps modernes? A introduire, sous une forme voilée, il est vrai, le temps et le mouvement jusque dans la considération des figures. Pour les anciens la géométrie était une science statique. Les figures en étaient données tout d'un coup à l'état achevé, semblables aux idées platoniciennes. Mais l'essence de la géométrie cartésienne (bien que Descartes ne lui ait pas donné cette forme) fut de considérer toute courbe plane comme décrite par le mouvement d'un point... Substituer une équation à une figure consiste, en somme, à voir où l'on en est du tracé de la courbe à n'importe quel moment, au lieu d'envisager ce tracé tout d'un coup (pp. 361-362).

Seulement, au lieu de développer ces indications en recherchant comment se sont poursuivies, après Descartes, les transformations dont il vient de définir si nettement le principe, M. Bergson passe à une discussion métaphysique de la notion de temps dont nous n'avons rien à dire ici. Mais il ne paraît pas avoir réellement cru à la possibilité d'une évolution de l'intelligence géométrique depuis Euclide ; sinon, comment aurait-il écrit un passage tel que le suivant, que je dois citer en entier, car il est caractéristique :

Commençons par la déduction. Le même mouvement par lequel je trace une figure dans l'espace en engendre les propriétés; elles sont visibles et tangibles dans ce mouvement même; je sens, je vis dans l'espace le rapport de la définition à ses conséquences, des prémisses à la conclusion. Tous les autres concepts dont l'expérience me suggère l'idée ne sont qu'en partie reconstituables *a priori*; la définition en sera donc imparfaite, et les déductions où entreront ces concepts, si rigoureusement qu'on enchaîne la conclusion aux prémisses, participeront de cette imperfection. Mais lorsque je trace grossièrement sur le sable la base d'un triangle et que je commence à former les deux angles à la base, je sais d'une manière certaine et je comprends absolument que, si ces deux angles sont égaux les côtés le seront aussi, la figure pouvant alors se retourner sur elle-même sans que rien s'y trouve changé. Je le sais, bien avant d'avoir appris la géométrie. Ainsi, antérieurement à la géométrie savante, il y a une géométrie naturelle dont la clarté et l'évidence dépassent celles des autres déductions (p. 230).

1. L'intuition et la logique en mathématiques. *Revue de Métaphysique et de Morale*, mai 1907.
2. Paris, Alcan, 1907.

Il y a dans ce passage bien des idées qui mériteraient qu'on s'y arrête; je ne parlerai que de l'emploi du procédé de démonstration par retournement : « la figure pouvant alors se retourner sur elle-même sans que rien s'y trouve changé ». Je m'étonnais tout à l'heure que M. Bergson n'ait pas cru devoir étudier les méthodes nouvelles des géomètres; j'avais tort : il a fait mieux que les étudier, il les a redécouvertes pour son usage personnel. La « démonstration » qu'il donne, en effet, c'est la démonstration moderne, plus simple, plus intuitive que la démonstration euclidienne, et tout aussi « rigoureuse », c'est-à-dire aussi satisfaisante pour l'esprit du géomètre (plus satisfaisante même, parce qu'elle est plus simple).

L'expression de Weierstrass, que le véritable mathématicien est poète, peut paraître au grand public singulièrement étrange. Il en est pourtant ainsi. L'expression n'implique pas seulement qu'il faut au mathématicien, de même qu'au poète, de l'imagination et de l'intuition. Ceci est vrai pour toutes les sciences, nulle part toutefois au même degré que dans les mathématiques. Mais l'expression a aussi une signification d'une portée plus grande. Les meilleurs travaux d'Abel sont de véritables poèmes lyriques d'une beauté sublime, où la perfection de la forme laisse transparaître la profondeur de la pensée, en même temps qu'elle remplit l'imagination de tableaux de rêve tirés d'un monde d'idées écarté, plus élevé au-dessus de la banalité de la vie et plus directement émané de l'âme même que tout ce qu'a pu produire aucun poète au sens ordinaire du mot. Il ne faut pas oublier, en effet, à quel point la langue mathématique, faite pour les besoins de pensée les plus hauts de l'humanité, est supérieure à notre langue ordinaire. Il ne faut pas oublier non plus que la pensée intérieure y est plus complètement et plus clairement exprimée que dans aucun autre domaine humain [1].

J'ai tenu à citer ce passage, comme l'expression la plus autorisée de la pensée de l'école de Weierstrass, c'est-à-dire de l'école mathématique où la logique et la déduction sont le plus en honneur. Je n'insisterai pas davantage sur l'intuition en analyse pure, car je serais vite amené à parler un langage trop spécial.

Je préfère rester sur le domaine géométrique, où l'on est plus aisément suivi. J'ai déjà signalé l'importance de la notion de mouvement dans la géométrie moderne; il n'est pas inutile d'y insister, au point de vue historique, et de remarquer que tous les grands géomètres du XIX^{e} siècle ont fait de la « géométrie du mouvement » ou, plus généralement, « de la transformation », la notion de transformation étant une généralisation de la notion de mouvement. Il suffit de citer les noms de Poncelet, Chasles, Darboux en France, Möbius, Plücker, Klein en Allemagne, Sophus Lie en Norvège, Cremona en Italie, pour que cette remarque apparaisse comme évidente [2].

1. *Revue du Mois*, 10 août 1907; t. IV, pp. 219-221.
2. J'ai déjà développé ces idées, il y a quelques années, dans la préface d'une géométrie élémentaire (A. Colin).

4. Bergson

A propos de *L'évolution de l'intelligence géométrique*
Réponse a un article de É. Borel (1)

L'intéressant article que M. Borel a consacré à « L'évolution de l'intelligence géométrique » (2), contient, au sujet de l'*Évolution créatrice*, certaines erreurs d'interprétation que je crois devoir relever. M. Borel suppose d'abord que je tiens l'intelligence géométrique pour chose rigide, incapable d'évoluer, et qui serait aujourd'hui ce qu'elle était au temps des Grecs. Cette assertion pourra surprendre mes auditeurs du Collège de France, qui savent que j'ai consacré deux années entières (3) à montrer (autant qu'on peut le faire quand on n'est pas un « mathématicien de profession ») quelles transformations radicales la pensée scientifique abstraite a subies, depuis l'antiquité jusqu'au siècle dernier, et comment la géométrie elle-même a été revivifiée par des appels conscients ou inconscients, explicites ou implicites, à des considérations de mouvement. Peut-être étonnera-t-elle aussi un peu les lecteurs de cette *Revue*, s'ils se souviennent d'un article que j'ai publié ici même, il y a quelques années, sur les rapports entre l'intuition et l'intelligence (4). Que M. Borel veuille bien se reporter à ce travail : il verra si j'adhère au « dogme de l'unité de la pensée mathématique », et si je dénie au savant en général, au mathématicien en particulier, le don de vision imaginative.

Nulle part je n'ai prétendu qu'il fallût « remplacer l'intelligence par une chose différente », ou lui préférer l'instinct. J'ai simplement essayé de montrer que, lorsqu'on quitte le domaine des objets mathématiques et physiques pour entrer dans celui de la vie et de la conscience, on doit faire appel à un certain *sens de la vie* qui tranche sur l'entendement pur, et qui a son origine dans la même poussée vitale que l'instinct — quoique l'instinct proprement dit soit tout autre chose. Ce sens de la vie n'est que la conscience s'approfondissant de plus en plus, et cherchant, par une espèce de torsion sur elle-même, à se replacer dans la direction de la nature. C'est un certain genre d'expérience, aussi vieux que l'humanité, mais dont la philosophie est loin d'avoir obtenu tout ce qu'elle en pourrait tirer. Décrire cette expérience particulière, déterminer les limites exactes de sa compétence, montrer comment elle se superpose à l'expérience sensible qui, elle, est orientée dans le même sens que l'intelligence, est-ce là prendre une attitude « anti-intellectuelle » ? L'autre expérience aussi, l'expérience sensible elle-même, celle qui importe aujourd'hui à la science positive, fut pratiquée grossièrement pendant des siècles d'humanité sans qu'on cherchât à l'épurer. Et les

(1) *Revue de Métaph. et de Morale*, janv. 1908 (pp. 28 et suiv.).
(2) Voir le dernier numéro de la *Revue* (juillet 1907).
(3) Années 1901-1902 et 1902-1903.
(4) *Revue de Métaph. et de Morale*, janv. 1903 (art. Introduction à la métaphysique), voir en particulier les pp. 25-36. Cf. le *Bulletin de la Soc. franç. de Philos.*, juin 1901, pp. 44-45 (exposé sur Le parallélisme psycho-physique et la métaphysique positive).

créateurs de notre science moderne, quand ils vinrent protester, au nom de cette expérience sensible, contre les constructions superbement intellectuelles qui étaient la science d'alors, quand ils vinrent dire qu'aucun raisonnement ne peut prévaloir sur une expérience, aucun principe sur un fait, passèrent sans aucun doute pour des anti-intellectuels. Si l'on prend le mot dans ce sens, acceptons d'être des anti-intellectuels à notre tour. Nous serons en bonne compagnie.

Mais l'anti-intellectuel véritable est bien plutôt celui qui, persuadant à la philosophie de n'être qu'une systématisation des sciences (c'est-à-dire, au fond, de combler par quelque hypothèse arbitraire les vides de l'actuellement connu), l'achemine tout doucement vers un point où elle n'aura plus le choix qu'entre un dogmatisme insoutenable et un agnosticisme résigné, deux manières de tomber en faillite. L'anti-intellectuel véritable est celui qui, pour n'avoir pas voulu distinguer entre les cas où l'intelligence atteint la réalité et les cas où elle n'en manipule plus que le symbole, en viendra à tenir toute connaissance pour symbolique et toute science pour relative à notre intelligence. S'il est une conclusion qui se dégage de l'*Évolution créatrice*, c'est au contraire que l'intelligence humaine et la science positive, là où elles s'exercent sur leur objet propre, sont bien en contact avec le réel et pénètrent de plus en plus profondément dans l'absolu.

5. Borel

DISCUSSIONS

Mon cher Directeur,

Je ne désire pas prolonger indéfiniment la polémique soulevée par mon article sur *L'Évolution de l'intelligence géométrique*, mais je voudrais vous demander l'autorisation de répondre quelques mots à M. Bergson. j'ai expressément distingué entre la science grecque et la philosophie grecque et c'est seulement de la première que j'ai dit qu'elle ne me paraissait pas intéressante, *sinon au point de vue historique*. Car, en science, quand la maison est construite, on enlève les échafaudages, et l'esprit d'un écolier d'aujourd'hui n'est pas obligé de parcourir tout le chemin de l'esprit humain : il n'y suffirait pas. C'est pour cela que, depuis Leibniz, aucun mathématicien proprement dit ne s'est intéressé à l'*Achille* de Zénon, car la difficulté était résolue pour lui par Leibniz. De même, un élève de troisième acquiert aujourd'hui facilement, sur les solutions négatives des équations, des notions qui ont coûté beaucoup de peine à découvrir. Je serais tenté de croire, malgré ce que l'on pourrait induire du texte de M. Bergson, qu'il en est de même en philosophie et que, là aussi, certains résultats se dégagent avec le temps d'une manière plus simple et plus claire. S'il fallait, avant de commencer à penser, suivre dans tous ses détours la pensée de tous les grands philosophes, on ne commencerait jamais : la vie est trop courte.

Pour me résumer, je crois être, dans le fond, plus en accord qu'il ne paraît avec M. Bergson; je pense avec lui que l'intelligence doit être accompagnée d'intuition; ou, si l'on veut, d'un certain « sens de la vie »; seulement, je crois constater que l'intelligence mathématique, à laquelle je me suis borné, évolue naturellement dans cette direction, et je continue à lui conserver le même nom d'intelligence, malgré son évolution.

H. Gispert : Développement des mathématiques (contenus et pratiques) et cadre social et institutionnel au dix-neuvième siècle.

Je me propose, dans cet exposé, de dégager le rôle que peuvent jouer les institutions et les conditions sociales de l'exercice de la recherche dans le développement du savoir mathématique. Je prendrai pour cela deux exemples qui se situent dans le dernier tiers du dix-neuvième siècle. Ces deux exemples sont de nature différente, l'un se rattachant à une branche particulière des mathématiques, à savoir la refonte des principes en analyse, l'autre, aux productions mathématiques italienne et française dans les années 1868-1875. Ils conduiront, tous les deux, à l'affirmation suivante que j'essayerai de justifier : la connaissance des milieux mathématiques nationaux, de leurs pratiques et de leur production est une nécessaire à la connaissance du développement du savoir mathématique et de ses orientations.

1. La refonte des principes de l'analyse

Le premier exemple que j'ai donc choisi de traiter est celui du mouvement de refonte des principes de l'analyse dans le dernier tiers du dix-neuvième siècle, à l'occasion duquel se développent en Allemagne les premières notions de topologie à partir des années 1860.

1.1 Les résultats

Les premiers résultats essentiels sont exposés par Weierstrass dans son cours à l'Université de Berlin à partir des années 1860 jusque vers 1874. Ce sont les énoncés sur les réels (leur construction date de 1870) et les suites infinies, l'introduction de notions topologiques sur les ensembles et des démonstrations de propriétés des fonctions continues, dont certaines très élémentaires, qui, jusqu'alors, n'avaient jamais été démontrées rigoureusement.

Mais Weierstrass n'a jamais publié ses cours, et ce n'est qu'à partir de 1870, avec la parution d'articles de Schwarz, Thomae et Heine[1] que ses idées commencèrent à être connues. Quelque temps plus tôt, en 1868, Dedekind publiait un mémoire de Riemann de 1854 [2] dans lequel ce dernier présentait une fonction bornée ayant une infinité dénombrable de points de discontinuité et intégrable. Enfin en 1872, Cantor définit entre autre les notions d'ensemble dérivé et de point d'accumulation (appelé point limite), de voisinage et d'intérieur, dans son article *Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques* paru dans les *Mathematishe Annalen* en 1872.

En dehors de l'Allemagne, on peut citer la publication en France du mémoire de Darboux de 1875 sur les fonctions discontinues (Annales de l'Ecole Normale) et du traité de Dini : *Fondements pour la théorie des fonctions de variables réelles*, paru en 1878.

Dans ces années 1870 une exigence plus grande de rigueur dans les énoncés et les démonstrations des propositions élémentaires du calcul infinitésimal a ainsi abouti à une accumulation de résultats visant à poser les principes de l'analyse sur des bases plus solides. Mais l'énoncé des résultats trouvés et démontrés à cette époque, leur énumération, ne peut suffire à caractériser l'état de ce mouvement de refonte des principes à cette période. Il faut en effet souligner le caractère épars et marginal de ces résultats pendant toute la décennie et plus encore. Personne ne voyait alors encore, ni leur globalité, ni leur cohérence, ni leur utilité.

Or ce mouvement qui, au départ, se situe essentiellement en Allemagne et ne concerne que peu de mathématiciens et reste très marginal par rapport à toute l'activité mathématique, va provoquer à la fin du siècle la naissance de la théorie des fonctions et de l'analyse moderne avec les travaux en France de Baire, Borel et Lebesgue. Il y a donc besoin, si l'on cherche à savoir comment s'est développé ce mouvement, d'informations supplémentaires que ne nous fournissent pas, seuls, le recensement et l'analyse des articles importants.

1.2. Les traités de calcul infinitésimal

Il y a ainsi nécessité d'étudier d'autres sources qui puissent fournir des informations sur la prise en compte par les mathématiciens de ces résultats établis mais, encore une fois, épars et marginaux. Cette prise en compte est en effet essentielle pour la portée de ces résultats dans le domaine de l'analyse, donc dans l'évolution de l'analyse au tournant du vingtième siècle.

L'étude des traités d'analyse parus en France entre 1860 et 1900, ainsi qu'en Italie et en Allemagne m'a conduit à distinguer des situations différentes dans les trois pays.

En Italie tout d'abord, Dini enseigne tout de suite à Pise les nouvelles exigences et les nouveaux résultats de Weierstrass que Schwarz lui communiqua par courrier à sa demande. Il écrit alors son cours qu'il ne publiera qu'en 1878. Il s'agit là d'un nouveau type de traité dont la différence est très marquée par rapport à tous les autres traités d'analyse existant. Cette nouveauté s'affirme quant à l'objet d'étude : les fonctions de variable réelle, quant aux exigences : démontrer des propositions élémentaires intuitivement considérées comme évidentes, et quant au plan de l'ouvrage où des paragraphes et même des chapitres entiers font leur apparition dans un traité d'analyse.

Peano, en publiant un traité dans l'introduction duquel il critiquera les "faiblesses", les manque de rigueur dans les démonstrations, des grands traités classiques du moment, affirme une continuité du mouvement initié par Dini. Ces deux traités sont ainsi des témoignages d'une prise en compte, dans la vie mathématique italienne, dans la formation des mathématiciens, des nouveaux résultats. Ceci a abouti à la création d'une puissante et importante école d'analyse en Italie, alors qu'aucun résultat initial n'avait été établi par des mathématiciens italiens.

En Allemagne, la situation n'est pas la même. Les cours publiés ou réédités dans les années 1870 et jusqu'en 1885 ne tiennent aucunement compte des résultats et des méthodes de l'Université de Berlin qui, non publiés et seulement enseignés par Weierstrass puis par quelques uns de ses élèves, ne se répandent que très lentement dans le milieu mathématique. Le mouvement de recherche stagne également dans ces années où, mis à part les articles de Cantor, peu de choses importantes paraissent après le début des années 1870.

En France enfin, on peut présenter l'évolution du mouvement à partir de la parution d'importants traités d'analyse. En 1882, Jordan publie le premier tome d'un traité d'analyse et n'intègre pas les nouveaux résultats sur les fondements qu'il connait cependant[3]. Malgré l'article de Darboux de 1875 déjà cité, tous les traités publiés, utilisés ou réédités jusqu'en 1886 sont dans le même cas. La parution en 1886 du traité de Tannery : *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable*, puis les compléments que Jordan apporte sur les fondements dans une annexe au troisième tome de son *Cours d'Analyse* en 1887 se font dans un contexte différent. La traduction en français d'articles de Cantor, leur prise en compte par Poincaré dans ses recherches mathématiques sur les groupes kleinéens qui entame l'argument de l'inutilité des notions élaborées dans les travaux sur les fondements, font peu à peu sortir ces travaux de leur marginalité.

Mais le vrai tournant de la situation en France, l'affirmation du mouvement qui conduit au renouveau de l'école française d'analyse, est provoqué par la parution de la deuxième édition du Cours d'Analyse de Jordan en 1893. Dans ce traité, totalement novateur, Jordan surmonte les limites du mouvement de refonte des principes à ses débuts. Il fait une synthèse des idées nouvelles, les introduit dans le champ classique de l'analyse, conduisant ainsi à la naissance d'une nouvelle théorie. Evoquant ce traité, Lebesgue considérait qu'avant Jordan il y avait "des remarques ingénieuses, des résultats isolés"; "après lui, il y avait une science claire et ordonnée". Jordan assure l'irréversibilité du mouvement sur lequel il influe de façon importante avec son traité.

Ainsi, les parutions de premiers traités d'analyse intégrant les nouveaux concepts et les nouvelles démonstrations, se font sur vingt ans, à des moments différents dans les trois pays considérés. Elles témoignent de trois situations différentes, et indépendantes des découvertes initiales, dans le mouvement de prise en compte des résultats.

1.3. Nouvelles problématiques

Ces nouveaux éléments d'information provoquent de nouvelles questions, et de nouvelles problématiques qui élargissent le cadre de la réflexion sur l'histoire des mathématiques et la plongent dans la société de son temps.

En effet, ces traités d'analyse sont des sondages sur l'état de maturité, l'état d'assimilation des résultats de pointe chez leurs auteurs, à savoir parfois de grands mathématiciens. Et, cette maturité, comme le montre les exemples de la production de manuels en Italie, en France et en Allemagne, ne se fait pas que sur des bases individuelles. Les traités rendent compte du regard des auteurs sur les mathématiques, dans un milieu scientifique donné et pour un milieu scientifique donné.

Le contenu des traités d'analyse publiés, réédités à cette époque, met en lumière des situations différentes dans les pays considérés, tout à la fois dans le contenu des recherches mathématiques du moment, et dans les formes sociales de l'exercice de ces recherches. Ceci est particulièrement important dans ce dernier tiers du 19ème siècle, période charnière du développement des mathématiques et de transformations sociales et institutionnelles profondes dans l'activité scientifique.

Reprenons par exemple les choix différents que firent, autour de 1880, deux grands mathématiciens italien et français, Dini et Jordan, pour le contenu de leur cours d'analyse. Alors qu'ils connaissaient et maîtrisaient tous les deux les nouveaux concepts et les nouveaux résultats sur les réels et les fonctions, Dini décide, contrairement à Jordan dans son tome de 1882, de les enseigner et de les intégrer dans son traité. Jordan s'en explique dans la préface de son traité, le "Cours d'analyse à l'Ecole Polytechnique" où il écrit qu'il n'abordera pas les points trop difficiles pour des commençants. Mais remarquons qu'il ne verra plus d'obstacle à leur introduction dans la nouvelle édition de ce même cours de l'Ecole Polytechnique en 1893, et qu'il fera alors un choix analogue à celui de Dini, presque vingt ans plus tôt. Leurs choix, dès lors qu'on les resitue dans le contexte des productions de manuels italiennes et françaises, ne peuvent plus être considérés uniquement comme individuels et deviennent, en partie, fonction de la situation des mathématiques dans leur deux pays au moment de l'écriture des traités.

Je vais essayer de montrer que deux ordres de facteurs entrent ainsi en jeu : des facteurs conceptuels liés aux courants de recherche développés alors en France et en Italie d'où résultent des priorités différentes dans les recherches, et des facteurs institutionnels liés à l'état et au rôle du système universitaire ou des Grandes Ecoles, différents dans les deux pays.

2. Les productions mathématiques française et italienne

Pour mener à bien ce travail, il est nécessaire de se plonger dans la production et la vie mathématique de tout un milieu, au delà du cercle des personnalités d'exception les plus brillantes. L'objet d'étude n'est plus alors le corpus des recherches de pointe, mais celui constitué par l'ensemble des articles parus dans les journaux mathématiques ou scientifiques, ainsi que les ouvrages, ou les traductions d'ouvrages parus et réédités.

Dans ces années de la deuxième moitié du dix-neuvième siècle, cet aspect de masse de la production s'affirme. Le nombre de journaux augmente, le nombre d'articles également. Il passe par exemple de moins de 900 à presque 1500 articles recensés entre les années 1868 et 1875 dans les Fortschritte. Autour de 1870 apparaissent en France et en Allemagne les premiers journaux spécifiques consacrés au recensement et à l'analyse des articles parus dans l'ensemble des journaux mathématiques. La situation a donc profondément évolué depuis le siècle précédent où les informations circulaient surtout grâce aux contacts personnels et aux correspondances particulières.

L'histoire des mathématiques retient ces années 1860-1880 comme un moment de l'essor de recherches avec des orientations radicalement nouvelles en analyse, comme en géométrie, à la suite des travaux de Riemann, ainsi qu'en algèbre où de nouvelles recherches s'affirment. Ainsi, des recherches sur la théorie de l'intégration, sur la théorie des fonctions abéliennes en analyse complexe, sur les courbes et les surfaces et leurs invariants. Ces recherches portent sur des objets nouveaux tirés de la généralisation des objets particuliers des champs antérieurs, et sont porteuses de nouveaux objectifs et de nouvelles méthodes qui préparent, par exemple, la naissance de la géométrie différentielle et de la géométrie algébrique.

Une première question se pose ici : **quelle est, par rapport à cette image reçue, la réalité de la production mathématique dans les années 1870?** Question, que je prolongerai aussi tôt par la suivante : peut on dégager des particularités dans le développement des productions mathématiques nationales? En effet, un travail sur le Bulletin des Sciences mathématiques, journal qui recense à partir de 1870 les travaux et ouvrages publiés en Europe, m'a convaincu de ce que, quoique juste en première approximation, cette image ne saurait rendre compte, par exemple, de l'activité mathématique en France dans ces années 1860-1870, alors qu'elle correspond assez bien à la situation italienne.

Pour l'Italie, on retrouve ainsi, en géométrie comme en analyse, de nombreux articles se rattachant à ces nouvelles recherches dans les grandes revues italiennes ou étrangères, ainsi que dans les journaux d'étudiants. De grands traités sont écrits dans plusieurs branches dès les années 1860-1870 et exposent l'appareil théorique nécessaire à ces recherches et leurs premiers résultats.

En France, la situation n'est pas la même. On retrouve dans toutes les branches, dans les années 1865-1875, des caractéristiques permanentes. L'activité mathématique, quoique riche et diverse, se fait à l'écart des domaines les plus nouveaux et s'attache à la résolution de problèmes particuliers. En analyse, par exemple, les articles sont essentiellement consacrés à la résolution d'équations aux dérivées partielles induits par des problèmes de géométrie infinitésimale ou à l'étude de fonctions particulières ou d'intégrales elliptiques ou abéliennes particulières. En géométrie, là encore, comme en algèbre, les articles français sont toujours consacrés à l'étude des propriétés élémentaires de courbes ou de familles de courbes particulières (par exemple les coniques et les faisceaux de coniques), et la recherche d'invariants particuliers de formes algébriques. Or ce sont là des objets privilégiés des recherches des géomètres jusque dans les années 1860, alors que dans le cours des années 1860 et le début des années 1870, les auteurs de nouvelles recherches ont su délaisser les cas élémentaires pour aborder l'étude générale des courbes et des surfaces algébriques de dimension quelconque et de leurs invariants. Même Jordan, dont l'apport est essentiel à la constitution de l'algèbre moderne, développe sa théorie indépendamment des mutations en cours en algèbre et en géométrie.

Ainsi, pour reprendre l'exemple développé précédemment, Jordan et Dini appartiennent à des milieux mathématiques nationaux où les orientations de recherche, les priorités reconnues sont différentes.

3. Contexte culturel et institutionnel

Le contexte culturel et idéologique n'est pas non plus le même dans ces années pour les deux pays. Une différence fondamentale porte sur l'attitude envers l'étranger. On en voit toute l'implication sur le développement de l'activité mathématique à un moment où, pour l'Italie comme pour la France, beaucoup des travaux qui provoquent les grandes modifications évoquées, ont lieu en dehors de leurs frontières.

Dans l'Italie du Risorgimento, les mathématiciens ont su investir et enrichir des champs nouveaux ouverts hors d'Italie, essentiellement en Allemagne. Prenons en pour preuve, les voyages de formation en Europe des jeunes mathématiciens, les traductions d'oeuvres importantes, ou de grands traités, le nombre de publications dans des revues étrangères, la part importante réservée dans leurs revues aux auteurs étrangers.

En France par contre, le milieu mathématique travaille en autarcie, sans s'occuper des recherches effectuées à l'étranger et en langue étrangère. Là aussi, plusieurs faits en témoignent. Sur le plan de la vie mathématique française ou parisienne en premier lieu, les grandes bibliothèques parisiennes ne disposent pas de collection systématique de recueils étrangers, les savants de l'Académie ne lisent pas de travaux en langues étrangères, en particulier en allemand, langue qui ne sera d'ailleurs enseignée à l'Ecole Polytechnique qu'après la défaite de 1870, et l'on pourrait citer d'autres exemples[4]. Sur le plan de la production mathématique, en second lieu, il faut noter que les travaux français, les bilans de recherche publiés dans la fin des années 1860 [5], ne comportent que très rarement des références à des travaux étrangers, et que les français publient peu dans les journaux étrangers, cela jusque à la fin du siècle d'ailleurs; les traductions de grands traités novateurs sont écrites avec beaucoup de retard, celles de mémoires étrangers sont le fait de quelques rares mathématiciens et paraissent souvent dans des revues marginales.

La défaite de 1870, le traumatisme qui en découla y compris dans les milieux scientifiques, la fascination exercée par "l'exemple allemand" provoqua une certaine évolution durant le dernier tiers du dix-neuvième siècle. On créa par exemple dans les années 1880 des bourses de voyages à l'étranger et les liens se resséşèrent avec les mathématiciens étrangers.

Les particularités institutionnelles, liées au rôle et à la conception du système universitaire, par exemple à la place qu'y a la recherche, contribuent également à l'établissement de particularités culturelles dominantes dans les milieux scientifiques. Mais l'organisation même du système d'enseignement en 1870 influe sur le développement des recherches mathématiques dans les deux pays qui font l'objet de ma comparaison.

Jusqu'aux réformes de J. Ferry dans les années 1880, le premier rôle des facultés en France, mis à part les facultés de droit et de médecine, était la délivrance du premier grade universitaire, le baccalauréat, et donc la constitution de jurys. Il n'y avait alors dans ces facultés que très peu d'étudiants. Par exemple, toutes disciplines confondues, seulement 111 diplômes furent délivrés entre 1866 et 1870. L'université était en fait pilotée par le secondaire et ses exigences, c'est à dire pilotée par les exigences des classes préparatoires donc des grandes écoles, et en particulier la plus célèbre d'entre elles, l'Ecole Polytechnique.

Ainsi, les lieux les plus importants, dans les structures de l'enseignement secondaire et universitaire, après les grandes chaires de prestige de la Sorbonne et du Collège de France, se trouvent donc être les classes préparatoires des grands lycées parisiens. Ceci a des conséquences évidentes sur la place des activités de recherche. L'agrégation, nécessaire à tout poste de lycée, est le diplôme décisif, et rien n'incite à passer un doctorat. Le nombre des thèses de mathématiques est d'ailleurs très faible (24 par exemple entre 1860 et 1869) et il est remarquable de noter que certains grands professeurs de mathématiques de la Sorbonne en fin de carrière vers les années 1860, n'en ont pas soutenues.

Je voudrais retenir deux autres aspects de la réalité institutionnelle dans ces années. Le premier concerne la rigidité des structures universitaires, et l'autoritarisme de la politique scolaire et universitaire à la fin du second empire. Dans les conclusions d'un rapport officiel publié en 1870, le mathématicien Chasles considère explicitement cette rigidité comme un frein au développement de nouvelles recherches en France. L'introduction d'une nouvelle discipline dans l'enseignement ne peut avoir lieu, d'après lui, qu'avec la création de nouvelles chaires, leur intitulé imposant l'enseignement dispensé. L'absence de création de chaires limite donc la diversité des enseignements et freine la diffusion de nouvelles branches du savoir. Une des conclusions de Chasles pour rattraper le retard de la France dans certaines branches de la géométrie, est d'ailleurs la nécessité de la création de nouvelles chaires.

Cette rigidité des structures, allait de pair jusqu'au milieu des années 1860, avec une politique de purge et de répression parmi les enseignants. Le ministère Duruy apporte quelques changements, mais ce n'est qu'avec les réformes de Jules Ferry, que les enseignants deviennent, dans les textes officiels, maîtres du contenu de leur cours.

Le centralisme est le deuxième trait institutionnel dont je voulais souligner l'importance. Il a déjà été évoqué à propos du rôle des classes préparatoires parisiennes par rapport à celui des facultés de province. Les salaires même en témoignent, les professeurs de lycées parisiens gagnant plus que les professeurs de faculté de province. Le centralisme est d'ailleurs particulièrement poussé en mathématiques, comme l'indiquent les données sur les thèses. Sur ce point particulier, il faut insister sur la différence entre les systèmes universitaires italien et français.

L'Italie de la fin des années 1860 est le lieu d'une activité de recherche qui se déroule dans de nombreux centres universitaires. L'existence, la création de plusieurs journaux mathématiques ou scientifiques italiens publiés dans diverses villes, en est une manifestation. La place des nouvelles recherches dans les revues écrites à l'intention des étudiants montre que l'activité spécifique de recherche est un des éléments de la vitalité de ces centres universitaires[6].

Dresser un tel tableau noir de la situation en France pose malgré tout une question qui nécessite d'approfondir ces quelques généralités et d'étudier l'évolution parallèle du mouvement des institutions et des mathématiques sur la fin du siècle. La question est la suivante : vers la fin du siècle apparaît en France, une nouvelle génération de mathématiciens qui vont être à l'origine de l'école française d'analyse, dont Baire, Borel, Lebesgue, pour ne citer que les plus illustres; formés dans ces "années noires", ils revendiquent cependant l'héritage des mathématiciens précédents. Quels sont donc la part, le rôle des aspects particuliers, culturels, institutionnels dans cette évolution de l'activité mathématique. Et cette question se pose d'autant plus que les institutions vont également profondément évoluer à partir des réformes de Jules Ferry.

4. Cadre social et institutionnel: la Société mathématique de France

C'est par le biais de l'étude d'une institution justement, que je veux essayer de traiter cette question. Il s'agit de l'étude de la Société mathématique de France, société fondée en 1873, dont un but est de structurer le milieu mathématique et de publier, grâce à son Bulletin, les recherches mathématiques françaises. L'exploitation de deux séries de données devrait permettre de trouver des éléments de réponse. La première est relative à l'état de la société - nombre et qualité des sociétaires, leurs travaux - à sa création, la seconde à son évolution jusqu'à la fin du siècle. Je ne fais que commencer cette étude, mais les premiers résultats, bien qu'ils demanderaient à l'évidence à être compléter, me semblent assez instructifs pour risquer de les présenter ici.

La création de la Société

Les données sur les toutes premières années de la Société sont révélatrices de l'état du milieu mathématique et des intentions de ses fondateurs. Les premiers membres essentiellement français sont au nombre de 186 en 1874. Adhérant les premiers, ils se sont donc reconnus dans les buts et les projets de la Société que nous ne connaissons pas explicitement. Il n'a pas été conservé d'archives des premières années de la Société. L'analyse des professions, des carrières, des travaux -articles ou ouvrages- de ces sociétaires permet ainsi d'esquisser le cadre social et institutionnel dans lequel fut élaboré la production mathématique des années 1865-1875.

Il y a alors dans la Société autant d'enseignants que d'ingénieurs civils ou de militaires non-enseignants. Ces deux groupes représentent 80% des sociétaires. Parmi les enseignants, un quart sont enseignants à l'Ecole Polytechnique ou dans une Grande Ecole, un sur cinq est enseignant en faculté. Dans la première année de la Société, le groupe qui augmente le plus est celui des ingénieurs et des militaires.

La proportion d'enseignants membres de la Société dans l'ensemble des enseignants de mathématiques permet de connaître la représentativité de la Société parmi les différents corps. Ainsi, un tiers de professeurs de faculté (qui sont alors 35), et des enseignants à l'Ecole Polytechnique (qui sont alors 32) sont membres de la Société, contre un quart des professeurs des classes préparatoires (au nombre de 43).

Dans quelle mesure ces sociétaires participent-ils à la production mathématique? Est-ce un élément déterminant pour leur adhésion à la Société? Il semble que non. Seulement 30% des sociétaires ont écrit des manuels, dont un tiers, des ouvrages de niveau primaire ou secondaire. Il y en a à peu près autant de mentionnés dans le tome de 1872 du Bulletin des Sciences mathématiques comme auteurs de livres ou d'articles, sans que cela soit nécessairement les mêmes. Par contre il n'y en a que un sur sept qui ait -ou qui aura - publié au moins deux ou trois articles dans des revues mathématiques importantes.

En regard des éléments que j'ai rappelés sur la place de la thèse et de la recherche dans la carrière d'un enseignant en France, on peut noter que les trois quarts de ces sociétaires "productifs" sont enseignants. Il s'agit de la moitié des professeurs de faculté sociétaires, mais seulement d'un tiers des enseignants de l'Ecole Polytechnique.

L'écart entre le profil des professeurs de faculté et les professeurs de Polytechnique dans la Société se creuse lorsqu'on considère la part de docteurs parmi eux. 70% des professeurs de facultés ont une thèse, alors que deux seulement parmi les treize enseignants de Polytechnique sont docteurs. En fait, un peu moins d'un enseignant sur trois parmi les sociétaires, a une thèse et, ce qui ne surprendra pas, la quasi totalité des docteurs dans la Société sont des enseignants. Mais la Société est loin de regrouper la totalité des docteurs en mathématiques : moins de la moitié des docteurs ayant soutenu leur thèse entre 1850 et 1872 sont membres de la Société en 1874.

Ainsi la coïncidence entre le milieu mathématique et la Société ne peut être envisagée de façon mécaniste. Je pense toute fois que l'étude d'une société savante comme la S.M.F., peut être un moyen de reconnaître et de préciser les liens entre la société, les contraintes qu'elle peut engendrer et les mathématiques qui s'y produisent. Les données que j'ai pu rassembler et exploiter, sur l'évolution de ces caractéristiques des sociétaires sur les trente années suivantes, ne sont cependant pas encore assez complètes pour me permettre de montrer dans quelle mesure l'évolution des contraintes institutionnelles et autres dans la France des années 1880 et 1890 a provoqué, a participé, à une évolution parallèle de l'activité mathématique.C'est là, il me semble, que se trouve l'intérêt de prolonger ce travail pour continuer à aborder l'histoire des mathématiques en référence à la culture et à la réalité d'une époque.

Notes :

1. Il s'agit des articles de Schwarz : *Sur l'intégration d'une équation différentielle partielle* (Journal de Crelle 1872),de Heine : *Eléments de la théorie des fonctions* (Journal de Crelle, 1872), dans lequel il définit la continuité uniforme, et de Thomae : *théorie des fonctions complexes et théta fonction d'une variable* (Halle, 1870).

2. Il s'agit du mémoire *"Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique"*, dans lequel Riemann donne une nouvelle définition de l'intégrale définie.

3. Son article *Sur les conditions de convergence de certaines séries multiples* (Comptes Rendus de l'Académie, 1881) en témoigne amplement.

4. Ces exemples sont tirés de la correspondance de G.Darboux à J.Houël

5. Il s'agit par exemple du rapport de Chasles publié en 1870 : *Rapport sur les progrès de la géométrie,* qui ne comporte aucune référence à la géométrie non-euclidienne ainsi qu'à des travaux précis de Riemann ou de ses successeurs.

6. Sur la réalité italienne, on pourra consulter le livre de Brigaglia et Masotto : *Il Circolo matematico di Palermo* et les communications de Volterra aux congrès internationaux des mathématiciens de 1902 à Paris : *Betti, Brioschi, Casorati, trois analystes italiens et trois façons d'envisager l'analyse,* et de 1909 à Rome : *Les mathématiques en Italie dans la seconde moitié du dix-neuvième siècle* .

M. GUILLEMOT

Georg CANTOR et son époque

Cet atelier s'est déroulé selon les objectifs que les animateurs avaient fixés :

- présenter certains travaux du réseau "CANTOR" constitué lors de l'Université d'Eté de Toulouse (juillet 1986),

- réfléchir aux liens de dépendance entre mathématique et philosophie dans l'élaboration des concepts cantoriens.

A ces deux objectifs correspondent deux comptes rendus. En ce qui concerne le premier, nous ne donnons ici qu'une introduction à plusieurs documents qui seront publiés ultérieurement.

Le réseau "CANTOR" regroupe une vingtaine de participants : tous n'ont pu se déplacer mais d'autres l'ont rejoint. L'étude et la traduction des textes cantoriens nous paraissent très importantes. En effet, par l'examen des différents aspects biographiques, philosophiques ou mathématiques, nous sommes amenés à conduire une approche interdisciplinaire du vaste mouvement qui s'est déclenché dans la deuxième moitié du XIXème siècle dans les Universités allemandes et qui a abouti à ce qu'il est convenu d'appeler le fondement des mathématiques modernes.

1. Quelques éléments biographiques sur la jeunesse de Georg CANTOR

Georg Ferdinand CANTOR naquit le 3 mars 1845 à Saint Petersbourg. L'histoire de sa famille a donné lieu à diverses interprétations servant à accréditer les thèses plus ou moins fantaisistes de leurs auteurs. Mais il écrit à Paul TANNERY le 6 janvier 1896 :

> "Feu mon père, Georg Woldemar CANTOR, décédé en Allemagne en 1863, vint enfant avec sa mère à Saint Petersbourg et y fut aussitôt baptisé comme luthérien. Mais il est né à Copenhague (je ne sais pas exactement quelle année, environ entre 1810 et 1815) de parents israélites, qui appartenaient à une communauté juive portugaise de là-bas et qui donc avaient très probablement une origine hispano-portugaise. Ma mère, Marie CANTOR, née BOHM, qui vit maintenant depuis 1863 à Berlin, est une authentique Pétersbourgeoise et appartient à une famille catholique romaine, originaire d'Autriche.*

(*) Les traductions des textes allemands ont été effectuées par Jean Pierre FRIEDELMEYER.

Le père de CANTOR était un riche commerçant. Bien qu'ayant fait faillite en 1838, il eut "trop de ressources intérieures et de détermination" pour s'avouer vaincu et il sut mettre à profit ses talents d'agent de change à la Bourse de Saint-Petersbourg. Pour des raisons de santé, il partit pour l'Allemagne en 1854 - le jeune CANTOR n'avait que neuf ans ! À l'occasion de la confirmation de son fils, il lui écrit une lettre que Georg ne devait jamais oublier et dans laquelle il insistait plus particulièrement sur la nécessité "d'une foi victorieuse, inébranlable" et "l'acquisition et la domination du maximum de connaissances et de techniques fondamentales les plus diverses" tout en espérant que son fils soit "si Dieu le veut, une étoile de première grandeur au firmament de la science". Trois points que nous retrouvons tout au long de la correspondance échangée entre le père et le fils.

Du côté maternel, la famille BOHM était une grande famille musicienne Georg CANTOR se décrira lui-même comme tourné vers les arts et à l'occasion formulera des regrets de ne pas avoir poursuivi cette voie.

2. Les études de CANTOR

A son arrivée en Allemagne, le jeune CANTOR suit les cours de l'école de Wiesbaden puis ceux de la Realschule et enfin de la Höhere Gewerbschule (école supérieure de commerce) de Darmstadt, jusqu'en août 1862. C'est au printemps de cette année qu'il "se sent entraîné corps et âme par une voie inconnue et secrète vers l'étude des mathématiques". Durant le semestre d'hiver 1862-1863, il suit les cours de l'Ecole Polytechnique de Zürich, mais la mort de son père -le 6 juin 1863- l'amène à quitter cette ville pour rejoindre Berlin.

L'Ecole Polytechnique de Zürich

L'Ecole Polytechnique de Zürich fut ouverte en 1855 et Joseph RAABE (1801-1859) en fut le premier professeur de mathématiques. Lorsque ce dernier tomba malade, en 1858, Richard DEDEKIND(1831-1916) "pédagogue exceptionnel" et auteur "d'excellents travaux scientifiques" fut préféré à Bernhard RIEMANN (1826-1866) "trop absorbé dans ses pensées" pour lui succéder.

CANTOR n'a pas le temps de rencontrer ce brillant professeur car le 23 octobre 1861, DEDIKIND est nommé dans sa ville natale, Brunswick. Au mois d'août 1862, Edwin CHRISTOFFEL (1829-1900) lui succèdera.

Pour notre étude, nous retiendrons ici seulement deux faits. Le premier concerne DEDEKIND. Lorsque, le 20 mars 1872, il rédige sa préface à "Stetigkeit und irrationale Zahlen" (Continuité et nombres irrationnels), il n'oublie pas le rôle de l'enseignement qu'il a donné à Zurich :

"Les considérations qui font l'objet de ce court essai datent de l'automne 1858. Je me trouvais alors, en tant que professeur, au Polytechnikum fédéral de Zurich, obligé pour la première fois d'exposer les éléments du calcul différentiel et je ressentis à cette occasion, plus vivement encore qu'auparavant, combien l'arithmétique manque d'un fondement véritablement scientifique".

Sentant la nécessité d'élaborer une théorie des nombres réels, DEDEKIND répètera ce cours durant les semestres d'hiver zurichois puis à Brunswick. Quant à CANTOR, nous ne sommes pas renseignés sur l'enseignement qu'il y suivit. Mais nous pouvons noter l'encouragement constant que lui apporte son père pour mener à bien sa vie d'un "futur savant". Toutefois, si cette voie est "promesse de réussite", il n'en demeure pas moins que le chemin pour y parvenir n'est pas facile. Le jeune CANTOR s'épuise au travail. Le 21 janvier 1863, son père est très inquiet de son humeur mélancolique et il regrette de ne pouvoir être auprès de lui : "en moins d'une demi-heure, il lui chasserait toutes ses idées noires et il égayerait son état d'esprit de telle sorte qu'il n'y aurait aucune rechute avant au moins trois ans". Est-ce là une allusion à des accès d'angoisse antérieurs et la préfiguration ou les premiers symptomes de la maladie qui frappera plus tard CANTOR ?

L'Université de Berlin

De 1863 à 1866, CANTOR suit pendant huit semestres, à Berlin, les cours de "ARNDT, DOVE, KRONECKER, KUMMER, TRENDELENBURG, et WEIERSTRASS".

Sous la direction de Ernst KUMMER (1810-1893) et Leopold KRONECKER (1823-1891), il rédige sa thèse relative à la théorie des nombres. Mais le jeune CANTOR reste très profondément marqué par l'enseignement de Karl WEIERSTRASS (1815-1897). Ce dernier est l'étoile montante de l'Université berlinoise et il ne tardera pas à s'opposer à KRONECKER : les travaux de CANTOR amplifieront cette polémique. Même si les cours de WEIERSTRASS sont difficiles à suivre", à cause de leur densité et de leur niveau élevé" - l'effectif tombait de 117 à 7 ! - CANTOR suit aussi les séminaires. Ainsi il peut prendre connaissance des premiers exposés où WEIERSTRASS développe sa théorie des nombres irrationnels dont la trame ensembliste est un des éléments très importants.

L'Université de Göttingen

Durant le semestre d'été 1866, CANTOR suit à Göttingen, les cours de "LOTZE, MINNIGERODE, SCHERING et WEBER".

S'il ne semble pas que cet enseignement ait eu une grande influence sur la carrière de CANTOR, nous nous devons de souligner que l'Université de Göttingen était très réputée à cette époque et que l'enseignement de ses maîtres marqua profondément DEDEKIND. Sous la direction du prince des mathématiciens, Carl Friedrich GAUSS (1877-1855), il soutint sa thèse où il annonçait son goût profond pour la justification de l'introduction de nouveaux concepts en mathématiques. Outre GAUSS, DEDEKIND sera aussi profondément marqué par Gustav Peter Lejeune DIRICHLET (1805-1859). Ce dernier invitera son ancien élève Bernhard RIEMANN (1826-1866) à relever le "défi" posé par WEIERSTRASS. Ainsi, en schématisant, DEDEKIND se situera dans un champ algébrique par opposition au champ analytique cantorien. Les conceptions des deux mathématiciens sont très bien exprimées aussi dans leurs thèses. Pour CANTOR

"dans le domaine des mathématiques, la manière de poser les questions est plus importante que celle de leur résolution".

Quant à DEDEKIND, il affirme :

"Ce qui distingue les mathématiques des autres sciences c'est que les élargissements des définitions ne laissent aucune place à l'arbitraire, mais résultent, avec une nécessité impérieuse, des définitions restreintes antérieures, à condition d'appliquer, à cette occasion, le principe de considérer comme universellement valables les lois qui résultent des définitions initiales et qui sont caractéristiques des concepts définis".

Nous retrouverons cette opposition lors de la construction des nombres réels. CANTOR préfèrera les suites dites de CAUCHY aux coupures introduites par DEDEKIND. C'est seulement en 1872 que ces deux brillants mathématiciens se rencontreront "par hasard" à Gersau sur le lac des Quatre-Cantons. Ceci donnera lieu à une collaboration étroite d'où naîtra la théorie naïve des ensembles.

L'influence de BOLZANO

Les idées mathématiques de Bernard BOLZANO (1781-1848) étaient sans doute trop avancées pour l'époque et leur diffusion trop restreinte pour que celles-ci aient pu atteindre les autres mathématiciens. Même si Augustin Louis CAUCHY (1789-1857) et BOLZANO se sont rencontrés à Prague, nous pouvons affirmer avec Hourya SINACEUR :

> "Les oeuvres de BOLZANO et de CAUCHY [...] ne se rencontrent pas avant les années 1870, avec les travaux de WEIERSTRASS, CANTOR [...] BOLZANO n'explique pas CAUCHY, mais il peut certainement être considéré comme un précurseur de WEIERSTRASS, même si c'est en fait, sous l'impulsion imprimée par CAUCHY et à partir de l'héritage qu'il a laissé que WEIERSTRASS a développé sa propre manière de faire des mathématiques".

Dès 1870, Karl Hermann SCHWARZ (1843-1921) -compagnon d'étude berlinois de CANTOR peut proposer à ce dernier l'opuscule de BOLZANO relatif à la démonstration du théorème des valeurs intermédiaires et lui écrire :

> "Je suis d'accord, comme toi, avec l'opinion soutenue par Monsieur WEIERSTRASS dans ses leçons que, sans les conclusions qui ont été développées par Monsieur W. à partir des principes de BOLZANO, on n'aurait pas pu réussir dans de nombreuses recherches."

A son tour, mais le 7 octrobre 1882, CANTOR fera connaître à DEDEKIND les "Paradoxes de l'infini" de BOLZANO. Nous savons qu'après cette lecture, DEDEKIND pourra "démontrer" l'existence des systèmes infinis dans son fameux ouvrage "Que sont et que signifient les nombres" (Was sind und was sollen die Zahlen). Autrement dit, BOLZANO a eu une influence certaine à la fois sur CANTOR et DEDEKIND.

3. La nomination à Halle

Après ses études, CANTOR commence à enseigner dans une école de jeunes filles à Berlin, puis il passe les formalités prussiennes du Staatsprüfung et il rejoint le prestigieux séminaire SCHELLBACH pour les enseignants de mathématiques. En 1869, il quitte Berlin pour accepter le poste de privatdozent -laissé vacant par SCHWARZ nommé à Zurich- à l'Université de Halle. Il y effectuera toute sa carrière jusqu'à sa mort, survenue le 6 janvier 1918.

L'Université de Halle a été fondée en 1694 par Frédéric III de Brandebourg. Mais elle n'a pas la renommée des Universités de Berlin ou de Göttingen et, toute sa vie, CANTOR souffrira de ne pas avoir pu obtenir un poste plus prestigieux : le syndrome de la capitale n'est pas seulement français ! Toutefois, étant peu éloigné de Berlin -environ cent cinquante kilomètres- CANTOR pouvait effectuer de fréquents voyages dans cette ville.

Ceci était aussi le cas de Heinrich Eduard HEINE (1821-1881), professeur à Halle depuis 1848, qui avait sa famille et sa belle famille à Berlin. HEINE était aussi un farouche partisan de l'école weierstrassienne. Dans son fameux article "Die Elemente der Functionenlehre" (les éléments de la théorie des fonctions) publié en 1872, il affirme que nous trouvons là "pour l'essentiel ce qui provient de communications orales avec d'autres chercheurs et, en particulier avec Monsieur WEIERSTRASS". Au rang des autres chercheurs figurent SCHWARZ et CANTOR.

L'introduction d'une construction rigoureuse des nombreux réels n'avait pas échappé à WEIERSTRASS et par suite à HEINE. CANTOR lui-même sera amené à publier une construction semblable à celle exposée par HEINE dans un de ses articles. Le terreau mathématique en était, pour ces deux auteurs, l'étude de l'unicité du développement d'une fonction donnée à l'aide des séries trigonométriques.

Nous touchons là le contexte mathématique proprement dit. Au cours de l'atelier, nous avons examiné la démonstration cantorienne de la non-dénombrabilité de l'ensemble des nombres réels. Nous en donnons un résumé en annexe.

BIBLIOGRAPHIE

La bibliographie touchant à ces aspects est très nombreuse. Nous citons seulement:

CAVAILLES, J ; Philosophie mathématique Hermann Paris 1962

DAUBEN, J,W ; Georg Cantor. His mathematics and Philosophy of the infinite Harvard. Cambridge 1979.

DUGAC, P ; Richard Dedekind et les fondements des mathématiques Vrin Paris 1976

SINACEUR, H ; Cauchy et Bolzano. Revue d'histoire des sciences 26 (1973) 97-112.

Michel GUILLEMOT

ANNEXE

Lettre de CANTOR à DEDEKIND

in CAVAILLES Philosophie mathématique Hermann 1962 pp. 189-191.

Halle, le 7 décembre 1873

Ces derniers jours, j'ai eu le temps d'étudier, d'une façon un peu plus suivie, ma conjoncture dont je vous avais parlé ; c'est seulement aujourd'hui que j'en ai terminé, me semble-t-il, avec cette affaire ; si je devais pourtant me tromper, je ne trouverais certainement pas de juge plus indulgent que vous. Je prends donc la liberté de soumettre à votre jugement ce que j'ai couché sur le papier, dans toute l'imperfection de ce premier jet.

Supposons que l'on puisse ranger tous les nombres positifs $\omega < 1$ en une suite :

$$\text{(I)} \qquad \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n, \ldots$$

Après ω_1 soit ω_α le premier terme plus grand, après celui-ci soit ω_β le premier terme plus grand, et ainsi de suite. Posons : $\omega_1 = \omega_1^1$, $\omega_\alpha = \omega_1^2$, $\omega_\beta = \omega_1^3$, etc..., et extrayons de (I) la suite infinie ([a]) :

$$\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \ldots, \omega_1^n, \ldots$$

Dans la suite restante, soit ω_2^1 le premier terme, ω_2^2 le pre-

([a]) Le terme allemand que nous traduisons par « *suite* » est « *Reihe* », sauf mention expresse du contraire (actuellement, on dit « *Reihe* » pour « *série* », et « *Folge* » pour « *suite* »).

mier terme suivant ω_2^1 qui soit plus grand, etc.... et extrayons la 2e suite :

$$\omega_2^1,\ \omega_2^2,\ \omega_2^3,\ \ldots,\ \omega_2^n,\ \ldots$$

En continuant ainsi, on reconnaît que la suite (I) peut être décomposée en une infinité de suites :

(1) $\omega_1^1,\ \omega_1^2,\ \omega_1^3,\ \ldots,\ \omega_1^n,\ \ldots$

(2) $\omega_2^1,\ \omega_2^2,\ \omega_2^3,\ \ldots,\ \omega_2^n,\ \ldots$

(3) $\omega_3^1,\ \omega_3^2,\ \omega_3^3,\ \ldots,\ \omega_3^n,\ \ldots$

mais dans chacune d'elles les termes vont en croissant de gauche à droite ; on a :

$$\omega_k^\lambda < \omega_k^{\lambda+1}.$$

Choisissons maintenant un intervalle $(p \ldots q)$ de telle sorte qu'aucun élément de la suite (1) ne s'y trouve contenu ; on peut, par exemple, prendre $(p \ldots q)$ à l'intérieur de l'intervalle $(\omega_1^1 \ldots \omega_1^2)$; il se peut alors que tous les termes de la deuxième suite, ou de la troisième, se trouvent à l'extérieur de $(p \ldots q)$; mais il faut qu'il y ait une première suite, disons la k^{ieme}, dont tous les termes ne se trouvent pas à l'extérieur de $(p \ldots q)$; (car sinon, les nombres qui se trouvent à l'intérieur de $(p \ldots q)$ ne seraient pas contenus dans (I), contrairement à l'hypothèse) ; on peut alors déterminer, à l'intérieur de $(p \ldots q)$, un intervalle $(p' \ldots q')$ tel que les termes de la k^{ieme} suite soient tous à l'extérieur de celui-ci ; $(p' \ldots q')$ se comporte évidemment de la même manière relativement aux suites précédentes ; mais, parmi les suivantes, on arrivera à une k'^{ieme} suite dont les termes ne sont pas tous à l'extérieur de $(p' \ldots q')$, et l'on choisit alors, à l'intérieur de $(p' \ldots q')$, un troisième intervalle $(p'' \ldots q'')$ tel que tous les éléments de la k'^{ieme} suite soient à l'extérieur de cet intervalle.

On voit ainsi qu'il est possible de former une suite infinie d'intervalles :

$$(p \ldots q),\quad (p' \ldots q'),\quad (p'' \ldots q''),\ \ldots$$

dont chacun contient les suivants ; ces intervalles relativement à nos suites (1), (2), (3), ..., se comportent comme suit :

Les termes de la 1re, de la 2e, ..., de la $k - 1^{\text{ieme}}$ suite sont à l'extérieur de $(p \ldots q)$.

Les termes de la k^{ieme}, ..., de la $k' - 1^{\text{ieme}}$ suite sont à l'extérieur de $(p' \ldots q')$.

Les termes de la k'^{ieme}, ..., de la $k'' - 1^{\text{ieme}}$ suite sont à l'extérieur de $(p'' \ldots q'')$.

Mais il y a toujours *au moins* un nombre, que j'appellerai η qui se trouve à l'intérieur de tous ces intervalles ; on voit immédiatement que ce nombre η, qui est évidemment $\begin{smallmatrix}> 0\\ < 1\end{smallmatrix}$, ne peut appartenir à aucune de nos suites (1), (2), ..., (n), ... Ainsi, en partant de l'hypothèse que tous les nombres $\begin{smallmatrix}> 0\\ < 1\end{smallmatrix}$ sont contenus dans (I), on arriverait à ce résultat opposé qu'un nombre déterminé $\eta \begin{smallmatrix}> 0\\ < 1\end{smallmatrix}$ n'appartient *pas* à (I) : par conséquent, cette hypothèse est incorrecte.

Je crois donc être finalement arrivé à la raison pour laquelle l'ensemble appelé (x) dans mes précédentes lettres *ne* peut *pas* être mis en correspondance univoque avec celui désigné par (n).

RESUME DE LA DEMONSTRATION

L'ensemble des nombres réels considéré

On considère l'intervalle]0,1[qui, comme l'ensemble R des nombres réels, n'a pas de plus grand élément.

Le raisonnement par l'absurde

On suppose]0,1[dénombrable, c'est à dire que tous éléments de]0,1[peuvent être rangés en les termes distincts d'une suite (ω_n)

L'extraction d'une première suite

La suite extraite (ω_1^n) est définie comme suit : son premier terme ω_1^1 , est aussi le premier terme de la suite de départ (ω_n) et pour tout entier n, le "successeur" ω_1^{n+1} de ω_1^n est le premier terme, dans l'ordre des indices, strictement supérieur à ω_1^n : $\omega_1^{n+1} = \omega_{\min\{p \in \mathbb{N}^* \,:\, \omega_p > \omega_1^n\}}$

La décomposition de la suite donnée

A partir des termes restants on définit de même une deuxième suite extraite (ω_2^n) strictement croissante et plus généralement on peut décomposer la suite initiale en les suites extraites (ω_k^n) strictement croissantes de sorte que tout élément de]0,1[est un terme d'une et d'une seule de ces suites extraites.

La suite des intervalles emboîtés

L'intervalle fermé $[p_1,q_1]$ est intérieur à l'intervalle constitué par les deux premiers termes de la première suite et il ne contient aucun terme de cette suite.
A partir de l'intervalle $[p_n,q_n]$, on définit un intervalle $[p_{n+1},q_{n+1}]$ inclus dans $[p_n,q_n]$, et ne contenant aucun terme des (n+1) premières suites extraites.

L'axiome des intervalles fermés (segments) emboîtés ou axiome de CANTOR DEDEKIND

Toute intersection de segments emboîtés non vides de nombres réels est non vide.

La contradiction :

Tout élément appartenant à tous les intervalles $[p_n,q_n]$ vérifie

- il est un élément de]0,1[donc un terme de (ω_n) donc un terme d'une suite extraite
- il n'est le terme d'aucune suite extraite (ω_k^n) par construction de $([p_n,q_n])$

LA METAPHYSIQUE DE CANTOR

d'après les FONDEMENTS D'UNE THEORIE GENERALE DES ENSEMBLES §8

J. GUICHARD

Dans le paragraphe 8 des FONDEMENTS D'UNE THEORIE GENERALE DES ENSEMBLES, Cantor explicite l'arrière-plan métaphysique de sa mathématique. L'étude de ce paragraphe est inséparable du projet du Groupe Inter-IREM qui s'est constitué pour travailler l'oeuvre de Cantor. Il n'en est qu'un moment à prolonger par une réflexion mathématico-philosophique sur l'infini cantorien.

L'objectif de ce texte de réflexion métaphysique sur la réalité des nombres (1) , c'est *d'assurer la réalité objective* , c'est-à-dire extérieure à l'esprit, des objets mathématiques qui apparaissent pourtant comme des créations de l'esprit des mathématiciens, et c'est par là-même de *fonder l'indépendance des mathématiques* par rapport à la réalité: liberté du travail du mathématicien qui n'a pas à se préoccuper de la correspondance de ses objets avec la réalité et l'intuition sensible que nous en avons, qui n'a pas à chercher dans une quelconque vérification expérimentale le critère de la vérité de ses théories.

C'est le sens de la référence à deux philosophies qui ont en commun d'être des philosophies de la Totalité, de l'unité du Tout dans lequel l'ordre naturel et l'ordre spirituel se correspondent ou s'expriment mutuellement parce qu'ils ne sont que les deux faces d'une même réalité qui a en Dieu son principe. Les philosophies de Spinoza et de Leibniz sont des philosophies du Tout qui se manifeste en une infinité d'éléments ordonnés se correspondant ou s'exprimant mutuellement.

La pensée peut donc travailler dans l'ordre spirituel ou dans l'ordre matériel sans avoir à se préoccuper de sa correspondance avec l'autre, puisque celle-ci est par nature, c'est-à-dire métaphysiquement assurée.

1. LA CONCEPTION METAPHYSIQUE DE CANTOR

La façon dont Cantor pose le problème de la réalité des nombres montre que *ce problème n'a pas pour lui de caractère spécifique* dans la mesure où *le nombre est concept..*

Le problème de sa réalité est donc celui de tout concept qui a une existence dans l'esprit qui le conçoit, en tant qu'il est le produit de son acte de conception, et qui a une dimension, une portée extérieure à l'esprit dans la mesure où il représente quelque chose.

Ce sont ces deux aspects que Cantor va exposer et expliciter sous les vocables *"réalité intrasujective ou immanente"* et *"réalité transsubjective ou transcendante"* . (2)

Il explicite ensuite les liens qui existent entre ces deux modes de réalité en indiquant le *sens philosophique* de sa conception: deux types de réalité conjoints, conjonction qui amène à revoir l'alternative idéalisme-réalisme, le premier réduisant la réalité à ce que l'esprit conçoit, le second affirmant l'existence d'une seule réalité qui existe hors de l'esprit.

Le fondement de cette conception, c'est le postulat métaphysique de la Totalité comme unité dont l'homme fait partie:

- si l'homme est une partie du Tout, sa raison , son esprit sont aussi une partie de ce Tout et, pourrait-on dire, raisonnent partiellement comme lui; donc ce que l'esprit conçoit bien, c'est-à-dire sans faillir à ses propres règles correspond à une parcelle de cette réalité dont l'homme est partie;
- si le Tout est un et comprend dans son unité la diversité de l'ordre des idées et de l'ordre des choses, c'est que ces deux ordres ne sont pas radicalement, ou ontologiquement, différents: ils se correspondent en deux séries dont la structure est la même.

La conséquence métaphysique que visait l'analyse de Cantor, c'est donc de fonder la *liberté du travail de l'esprit en mathématiques*, l'indépendance des mathématiques par rapport à toute condition empirique ou expérimentale. Travaillant sur des notions, elles n'ont pas à se préoccuper de la correspondance de celles-ci avec des choses extérieures à l'esprit; elles n'ont pas à se laisser arrêter par les critiques de l'intuition lorsque celle-ci, bornée par le savoir qui l'a formée s'érige en censeur des leurs créations.

L'ordre des idées n'est soumis qu'à lui-même, c'est-à-dire aux conditions formelles, logiques qui font qu'il est un ordre: la cohérence interne des notions et leur cohérence entre elles, d'une part, c'est l'exigence du principe de non-contradiction, et la distinction des définitions données, assurée par leur précision d'autre part.

*

Les mathématiques sont donc indépendantes, autonomes parce qu'elles ont en elles-mêmes leur critère de vérité : la non-contradiction, mais aussi le correctif aux égarements des notions arbitraires: la stérilité. La liberté est ainsi une caractéristique inaliénable des mathématiques: "l'*essence* de la *mathématique* réside précisément dans sa *liberté* ". Mais ce qui les fonde métaphysiquement, ce qui fait qu'elles ne sont pas une simple construction de l'esprit, une fiction bien faite, c'est une conception du réel fondée sur le postulat métaphysique de l'*unité du Tout* qui fait qu'on peut travailler uniquement dans l'ordre des idées pour constituer une connaissance par construction de concepts, sans avoir à se préoccuper de la correspondance avec la réalité, puisque celle-ci est métaphysiquement assurée par cette unité.

Les références métaphysiques de Cantor éclairent ce point de vue.

2. LA REFERENCE A LA METAPHYSIQUE DE SPINOZA.

La philosophie de Spinoza est un monisme, c'est-à-dire une philosophie qui conçoit le tout comme *une seule substance* , qu'on peut envisager sous l'angle spirituel ou sous l'angle matériel.

- Dieu ou la Nature -

Ou, *sive* dans le texte latin: *si vous voulez*;
c'est la même chose, sous deux vocables différents:

substance infinie qui a une *infinité d'attributs* qui constituent son essence et dont nous ne connaissons que deux:

- la pensée, dont la pensée humaine est un *mode déterminé,* c'est-à-dire fini, limité;
- l'étendue dont le corps humain est un *mode déterminé.*

Ce qui fonde deux idées qui vont dans le même sens:

* la distinction entre pensée et étendue ou matière, comme deux choses de nature complètement différente, qui obéissent à des principes différents, est une différence que fait notre esprit guidé par l'imagination, parce que nous n'avons qu'une perception déterminée, c'est-à-dire limitée de la réalité du fait que nous ne sommes qu'un mode et non la substance infinie.

Mais cette distinction n'a pas de raison d'être dans l'être, c'est-à-dire du point de vue de la Totalité, ou substance infinie. Du point de vue de l'essence de l'être, c'est la même chose, c'est-à-dire le même ordre. (3)

On peut donc en déduire qu'il est possible de travailler dans un ordre indépendamment de l'autre, et c'est ce que fait Cantor.

* L'homme, son esprit, ne sont pas en marge de la Nature: il n'est pas "un empire dans un empire" (4). Sa nature, son esprit, suivent les Lois de la Nature. Quand il pense, c'est Dieu qui pense en lui de façon déterminée, plus ou moins adéquate selon l'usage qu'il fait de sa raison par rapport à l'imagination et aux passions.

Penser adéquatement, c'est s'élever à la considération de la Totalité, autant que faire se peut. La pensée humaine a donc son fondement dans l'être.

3. LA REFERENCE A LA METAPHYSIQUE DE LEIBNIZ.

Autre pensée de l'unité du Tout, à laquelle Cantor renvoie dans la même note 6 et sans référence précise, la philosophie de Leibniz se concentre en un postulat:

L'*harmonie préétablie* ou *théorie de l'expression universelle,* qui assure l'unité du Tout en même temps que sa diversité, a sa cause en Dieu.(5)

Toute chose dans la nature exprime tout l'univers, à sa façon, c'est-à-dire selon sa nature, qui est créée et réglée d'avance par Dieu.

* Ce qui assure la réalité de toute chose, c'est *la monade:* unité substantielle, principe métaphysique sans laquel la matière serait sans forme et ne pourrait pas subsister.

"*...la matière, prise pour un* être complet... *n'est qu'un amas, ou ce qui en résulte, et...tout* amas réel *suppose des substances simples ou des* unités réelles, *et quand on considère encore ce qui est de la nature de ces unités réelles, c'est-à-dire la* perception *et ses suites, on est transféré pour ainsi dire dans un autre monde, c'est-à-dire dans le* monde intelligible des substances, *au lieu qu'auparavant on n'a été que parmi les* phénomènes des sens...
...la matière ne saurait subsister sans substances immatérielles, c'est-à-dire sans les unités."

<u>NOUVEAUX ESSAIS...</u> (6)

* En effet, n'existe que ce qui est *un* (être); l'unité est principe d'être: de réalité et d'existence.
"*Pour trancher court, je tiens pour un axiome cette proposition identique qui n'est diversifiée que par l'accent: que ce qui n'est pas* un *être n'est pas véritablement un* être. *On a toujours cru que l'un et l'être sont des choses réciproques. Autre chose est l'être, autre chose est des êtres, mais le pluriel suppose le singulier et là où il n'y aura pas un être, il y aura encore moins plusieurs êtres".*

<u>A ARNAULT</u>, 30 Avril 1687

C'est la substance simple - *monas* : unité, en grec - , c'est-à-dire sans parties (7) qui seule peut assurer l'unité et qui confère l'être aux êtres :
"Il n'y a que les points métaphysiques ou de substance constitués par les formes ou âmes qui soient exacts et réels et sans eux, il n'y aurait rien de réel, puisque sans les véritables unités, il n'y aurait point de multitude".

<u>SYSTEME NOUVEAU DE LA NATURE...</u> (8)

* Or ces unités substantielles sont indépendantes les unes des autres; étant sans parties, elles ne peuvent recevoir des modifications de l'extérieur: il n'y a *pas d'action d'une substance sur l'autre* .

"Il n'y a pas moyen... d'expliquer comment une monade puisse être altérée, ou changée de son intérieur par quelque autre créature; puisqu'on ne saurait rien transposer, ni concevoir en elle aucun mouvement interne, qui puisse être excité, dirigé, augmenté ou diminué là-dedans; comme cela se peut dans les composés, où il y a des changements entre les parties. Les Monades n'ont point de fenêtres, par lesquelles quelque chose y puisse entrer ou sortir".

<u>MONADOLOGIE</u> §7

Ce qui arrive aux êtres ne fait, en réalité, que *développer leur nature.* La substance possède en elle-même le principe de sa spontanéité et contient la suite infinie de tous ses prédicats ou attributs.

"Enfin pour ramasser mes pensées en peu de mots, je tiens que toute substance renferme dans son état présent tous ses états passés et à venir...; et par conséquent, rien ne lui arrive que de son propre fonds, et en vertu de ses propres lois, pourvu qu'on y joigne le concours de Dieu ".

A ARNAULT 9 Octobre 1687 (9)

Il reste à comprendre qu'il y ait correspondance entre les faits extérieurs et ce qui est ressenti à l'intérieur: entre l'aiguille qui pique et la douleur ressentie.

* Toute chose a été *conçue et réglée par Dieu* de façon que ce qu'elle est, ce qu'elle fait, ce qu'elle devient, c'est-à-dire ses états *s'accordent avec tout ce qui existe dans l'univers.*

C'est l'hypothèse de l'harmonie préétablie:

"...étant d'ailleurs persuadé du principe de l'harmonie*en général et par conséquent de la préformation et de l'harmonie préétablie de toutes choses entre elles, entre la nature et la grâce, entre les décrets de Dieu et nos actions prévues, entre toutes les parties de la matière et même entre l'avenir et le passé, le tout conformément à la souveraine sagesse de Dieu, dont les ouvrages sont les plus harmoniques qu'il soit possible de concevoir;..."*

ESSAIS DE THEODICEE §62 (1710) (5)

Cet accord est *correspondance ou expression:* étant accordée à la totalité de l'Univers, elle le représente ou l'exprime d'une façon déterminée par sa nature; elle représente un point de vue sur l'Univers qui se trouve exprimé d'un certain point de vue:

"... *cette* liaison *ou cet accommodement de toutes les choses créées à chacune, et de chacune à toutes les autres, fait que chaque substance simple a des rapports qui expriment toutes les autres, et qu'elle est par conséquent un miroir vivant perpétuel de l'Univers.*
Et comme une même ville regardée de différents côtés parait tout autre, et est comme multipliée perspectivement; il arrive de même que par la multitude infinie des substances simples, il y a comme autant de différents univers, qui ne sont pourtant que les perceptions d'un seul selon les différents points de vue de chaque Monade".

MONADOLOGIE § 56-57

* En quel sens il faut entendre *exprimer:*

"Une chose en exprime une autre (dans mon langage) lorsqu'il y a un rapport constant et réglé entre ce qui peut se dire de l'une et ce qui peut se dire de l'autre. C'est ainsi qu'une projection de perspective exprime son géométral. L'expression est commune à toutes les formes, et c'est un genre dont la perception naturelle, le sentiment animal et la connaissance

A ARNAULD 9 Octobre 1687 (9)

* Application aux rapports de *l'esprit et de la matière:*

L'esprit est *"comme un automate spirituel"* qui comme toute substance contient en lui le principe de sa spontanéité, la loi de la série de toutes ses pensées, et exprime tout l'Univers:

" ..pourquoi Dieu ne pourrait-il pas donner d'abord à la substance une force interne qui lui pût produire par ordre (comme dans un automate spirituel ou formel , *mais libre en celle qui a la raison en partage) tout ce qui lui arrivera, c'est-à-dire toutes les apparences ou expressions qu'elle aura et cela sans le secours d'aucune créature ?*

<u>SYSTEME NOUVEAU DE LA NATURE... ,</u> §15

Le corps n'a donc pas d'action directe sur l'esprit, mais les deux sont réglés de telle sorte que ce qui se passe dans l'un corresponde à ce qui se passe dans l'autre:

"Le monde corporel est fait si artistiquement qu'en vertu de ses propres lois, il répond à ce que l'âme demande et qu'il en est de même à l'égard de l'âme qui est naturellement représentative du corps".

<u>A JACQUENOT</u> , 3 Février 1704

Ou encore:

" ... la nature (de chaque substance singulière et par conséquent) de toute âme est d'exprimer l'Univers: elle a d'abord été créée de telle sorte qu'en vertu des propres lois de sa nature il lui doit arriver de s'accorder avec ce qui se passe dans les corps et par conséquent dans le sien: il ne faut donc pas s'étonner qu'il lui appartient de se représenter la piqûre lorsqu'elle arrive à son corps".

<u>A ARNAULT ,</u> 9 Octobre 1687 (9)

* L'esprit contient donc en lui les principes de la connaissance, et la connaissance est développement, explicitation:

"... les idées sont originairement dans notre esprit et... même nos pensées nous viennent de notre propre fonds sans que les autres créatures puissent avoir une influence immédiate sur l'âme".

<u>NOUVEAUX ESSAIS</u> ... L.IV, ch.IV.(5)

Ces idées sont le fondement de la certitude véritable qui est donnée par les vérités de raison:

"D'ailleurs , le fondement de notre certitude à l'égard des vérités universelles et éternelles est dans les idées mêmes, indépendamment des sens, comme aussi les idées pures et intelligibles ne dépendent point des sens..." ib.

Par conséquent, en vertu de cette correspondance universelle, de cette harmonie préétablie entre toutes choses, et particulièrement entrer l'ordre des pensées et l'ordre des choses dans l'Univers, la pensée qui raisonne juste à partir de ses idées est assurée de sa vérité, c'est-à-dire de sa correspondance avec la réalité, ou encore d'être une expression distincte de l'Univers sous un certain angle.

* * *

Si malgré leurs différences, Cantor renvoie également à la philosophie de Spinoza et de Leibniz pour éclairer les fondements métaphysiques de sa conception des mathématiques, c'est parce qu'il perçoit dans les deux le refus de l'hétérogénéité radicale de la Totalite de ce qui est: matière et esprit ne sont pas séparés par une différence de nature -une coupure ontologique- qui ferait de la réalité et de la connaissance deux ordres totalement hétérogènes entre lesquels il faudrait travailler à établir des ponts pour fonder le second sur le premier, -l'épistémologique sur l'ontologique-. L'autonomie de l'ordre épistémologique, ordre des idées, par rapport à l'ontologique, ordre des choses, qui fonde la liberté du travail de l'esprit en mathématiques, est assurée par l'unité ontologique de l''infini en Dieu, qui ramène la diversité des ordres à une simple affaire de perspective, point de vue limité d'une perception par nature bornée.

Cantor se réfère également à la pensée de Platon, plaçant la réalité dans les formes ou essences que vise l'esprit quand il pense: ces idées constituent la réalité. Même en l'absence de cette référence, on peut parler de conception platonicienne à propos de Cantor, au sens où cette expression est habituellement utilisée pour désigner toute conception qui ne voit pas dans les objets mathématiques des créations de l'esprit, mais des réalités ayant une existence hors de l'esprit qui les pense.

---

(1) Voir ANNEXE I

(2) Voir Tableau en ANNEXE II

(3) Voir ETHIQUE, L.II, prop.VII, reproduit en ANNEXE III (1661 - 1675)

(4) ETHIQUE, LIII.

(5) Voir ANNEXE IV

(6) NOUVEAUX ESSAIS SUR L'ENTENDEMENT HUMAIN, L.IV, Ch.III,§1 reproduit en ANNEXE IV (1703)

(7) MONADOLOGIE , §1 (1714)

L'emploi du mot *monade* date de 1695, chez Leibniz.
(Première apparition chez J. Bruno , 1550-1600)

(8) SYSTEME NOUVEAU DE LA NATURE ET DE LA GRACE, (1695)

(9) Voir ANNEXE V.

ANNEXE I. Extrait de: CANTOR, G; UBER UNENDLICHE LINEARE PUNKTMANNING-FALTIGKEITEN,

Mathematische Annalen 21 (1883) 545-586

= ABHANDLUNGEN MATHEMATISCHEN UND PHILOSOPHISCHEN INHALTS,

OLMS LEIPZIG 1966, pp. 165-208

Traduction MILNER,J; FONDEMENTS D'UNE THEORIE GENERALE DES ENSEMBLES, Cahier pour l'Analyse 10 (1969) 35-52

§ 8

Nous pouvons prendre la réalité ou existence des nombres entiers, tant finis qu'infinis, en *deux* sens, qui, à les prendre exactement, sont deux aspects sous lesquels on peut considérer la réalité de n'importe quel concept ou notion. Nous pouvons pour attribuer une réalité aux nombres entiers, retenir le fait que sur la base de définitions, ils occupent dans notre entendement une place tout à fait déterminée, se distinguent parfaitement de toutes les autres parties constitutives de notre pensée, entrent avec elles en des relations déterminées et ainsi modifient la substance de notre esprit d'une façon déterminée; qu'il me soit permis de nommer ce type de réalité de nos nombres, leur *réalité intrasubjective* ou *immanente* [5]. Mais l'on peut aussi, pour attribuer une réalité à ces nombres, retenir le fait qu'ils doivent être considérés comme l'expression ou la reproduction de processus et de relations existant dans le monde extérieur opposé à l'intellect, et que de plus les diverses classes de nombres I, II, III etc., représentent des puissances qui existent en fait dans la nature physique et spirituelle. J'appelle ce deuxième type de réalité, la *réalité transsubjective* ou *transcendante* des nombres entiers.

Le fondement de mes réflexions étant entièrement réaliste, mais non pas moins idéaliste, il ne fait pour moi aucun doute que ces deux types de réalité se trouvent toujours conjoints, en ce sens qu'un concept à caractériser comme existant sous le premier rapport, détient toujours aussi sous certains aspects, qui peuvent même être infiniment nombreux, une réalité transcendante [6] dont l'établissement, il est vrai, est l'une des tâches les plus ardues et les plus difficiles de la métaphysique; il faut bien souvent le remettre à des temps où le développement naturel d'une autre science dévoile la signification transcendante du concept en question.

Cette solidarité entre les deux réalités a son fondement propre dans l'*unité du tout dont nous faisons partie nous-mêmes*. Si je me réfère ici à cette solidarité, c'est en vue d'en tirer une conséquence qui me paraît très importante pour la mathématique, à savoir que cette dernière doit prendre en considération pour constituer son matériel notionnel *uniquement* et *seulement* la réalité *immanente* de ses concepts, et n'est par conséquent aucunement obligée de les éprouver du point de vue de leur réalité *transcendante*. En raison de cette position éminente, qui la distingue de toutes les autres sciences et peut expliquer la manière relativement aisée et sans contrainte dont on peut la pratiquer, elle mérite tout particulièrement le nom de *mathématique libre*; et si je pouvais choisir, je donnerais la préférence à cette désignation sur celle devenue usuelle de mathématique « pure ».

La mathématique est pleinement libre dans son développement, et ne connaît qu'une seule obligation (et sur un point qui va de soi) : ses concepts doivent être non contradictoires en eux-mêmes et soutenir d'autre part avec les concepts formés antérieurement, déjà présents et assurés, des relations fixes, réglées par des définitions [7]. En particulier, pour pouvoir introduire de nouveaux nombres, elle est seulement requise d'en donner des définitions leur conférant une précision et le cas échéant une relation aux anciens nombres telles que l'on puisse dans des cas donnés les distinguer les uns des autres de manière déterminée. Dès qu'un nombre satisfait à toutes ces conditions, il peut et doit être considéré comme existant et réel dans la mathématique. Je vois dans ce fait la raison, indiquée par allusion au paragraphe 4, pour laquelle on doit accorder aux nombres rationnels, irrationnels et complexes tout autant d'existence qu'aux nombres entiers positifs finis.

Il n'est pas nécessaire, je crois, de redouter de ces principes aucun danger pour la science, comme le font bien des gens; d'une part les conditions que j'ai dites

5. Ce que j'appelle ici réalité « intrasubjective » ou « immanente » des concepts ou des notions pourrait légitimement coïncider avec la détermination « adéquate » au sens où ce mot est employé par Spinoza, *Éthique*, II, def. IV : « *Per ideam adaequatam intelligo ideam quae quatenus in se sine relatione ad objectum consideratur, omnes verae ideae proprietates sive denominationes intrinsecas habet.* »

6. Cette conviction coïncide pour l'essentiel aussi bien avec les principes fondamentaux du système platonicien qu'avec un trait essentiel du système spinoziste; sur le premier point, je renvoie à Zeller, *Philosophie der Griechen*, 3[e] éd., II, 1, 541-602. Il y est dit tout au début du chapitre : « Seul le savoir conceptuel peut (selon Platon) garantir une véritable connaissance. Mais au degré de vérité que détiennent nos représentations — Platon partage ce présupposé avec Parménide — doit répondre un degré égal de réalité pour leur objet, et réciproquement. Ce qui peut être connu, est; ce qui ne peut être connu, n'est pas, et c'est dans l'exacte mesure où elle est, qu'une chose est connaissable. »

En ce qui concerne Spinoza, je n'ai qu'à rappeler sa proposition (*Éthique*, II, prop. VII) : « *Ordo et connexio idearum idem est ac ordo et connexio rerum.* »

Dans la philosophie de Leibniz également, l'on peut retrouver le même principe de théorie de la connaissance. Ce n'est que depuis l'empirisme, le sensualisme et le scepticisme modernes et depuis le criticisme kantien qui en est issu, que l'on croit devoir situer la source du savoir et de la certitude dans les sens ou les dites « formes pures de l'intuition du monde représentatif », en la confinant dans ces bornes; je suis convaincu que ces éléments ne fournissent aucune connaissance assurée, parce que cette et sans l'observation desquelles la liberté de former des nombres ne peut être mise en exercice, sont telles qu'elles ne laissent à l'arbitraire qu'une place extrêmement réduite; ensuite tout concept mathématique porte en lui-même son correctif nécessaire; s'il est stérile ou inadéquat, il le manifeste très vite par son peu d'usage, et il est alors abandonné pour manque d'efficacité. En revanche toute restriction superflue imposée à l'appétit de recherche mathématique me paraît comporter un danger bien plus grave, d'autant plus grave que l'on ne peut de l'essence de la science rien tirer qui la justifie. Car *l'essence* de la *mathématique* réside précisément dans sa *liberté*.

Si même cette constitution de la mathématique ne résultait pas pour moi des raisons que j'ai dites, tout le développement de la science elle-même, tel qu'il s'est offert à nos regards durant notre siècle, devrait me conduire exactement au même point de vue.

Si Gauss, Cauchy, Abel, Jacobi, Dirichlet, Weierstrass, Hermite et Riemann s'étaient trouvés contraints de toujours soumettre leurs idées nouvelles à un contrôle métaphysique, en vérité le plaisir que nous procure le superbe édifice de la moderne théorie des fonctions nous serait refusé; celui-ci pourtant, bien que projeté et exécuté de manière totalement libre et dépourvue de tout but transcendant, a déjà manifesté sa signification transcendante par des applications à la mécanique, l'astronomie et la physique mathématique — et il ne fallait pas s'attendre à autre chose. Il ne nous serait pas donné d'observer le grand essor de la théorie des équations différentielles, amené par Fuchs, Poincaré et bien d'autres, si ces talents exceptionnels avaient été arrêtés et ligotés par des influences étrangères; et si Kummer n'avait pas pris la liberté si riche de conséquences d'introduire les nombres « idéaux » dans la théorie des nombres, nous ne serions pas en mesure aujourd'hui d'admirer les travaux algébriques et arithmétiques de Kronecker et Dedekind, si importants et remarquables.

Encore que la mathématique obtienne ainsi le droit à une entière liberté de mouvements, hors de tout lien métaphysique, je ne puis d'autre part reconnaître le même droit à la mathématique « appliquée », par exemple la mécanique analytique ou la physique mathématique; ces disciplines sont à mes yeux *métaphysiques*, dans leurs fondements aussi bien que dans leurs buts; si elles cherchent à se libérer de ce caractère, comme la chose a été récemment proposée par un physicien célèbre, elles dégénèrent alors en une « description de la nature », à qui nécessairement font défaut tout à la fois le souffle vif de la libre pensée mathématique et le pouvoir *d'expliquer* et *d'établir* les phénomènes naturels.

dernière ne saurait être atteinte que par des concepts et des notions qui tout au plus sont suscités par l'expérience extérieure, mais sont pour l'essentiel formés par une induction et une déduction internes, comme une chose qui dans une certaine mesure était déjà en nous, et se trouve seulement éveillée et portée à la conscience.

7. Pour correctement former un concept, le processus est toujours le même : on pose un objet (*Ding*) dépourvu de propriétés, qui tout d'abord n'est rien qu'un nom ou un signe A, et l'on confère à celui-ci de manière ordonnée des prédicats intelligibles divers ou même infiniment nombreux, dont on peut connaître la signification par l'examen de notions déjà données, et qui ne doivent pas se contredire entre eux; ainsi se trouvent déterminées les relations de A aux concepts déjà donnés et spécialement aux concepts apparentés; quand on a mené ce procès jusqu'à son terme, toutes les conditions sont données pour éveiller le concept A qui sommeillait en nous et il parvient à l'existence tout achevé, revêtu de la réalité intrasubjective qui seule peut être requise des concepts; constater sa signification transcendante est alors la tâche de la métaphysique.

LE NOMBRE
=
1 concept :
2 types de réalité
ou
modes d'existence

réalité intrasubjective
=
immanente au Sujet
=
interne à l'esprit

existence
idéelle
=
en tant qu'IDEE,
reliée à d'autres
idées dans l'esprit

= point de vue idéaliste

niveau
MATHEMATIQUE

Liberté de l'esprit :
la non-contradiction : critère du Vrai et de l'existence mathématiques.

L'ordre et la connexion des idées
sont les mêmes que
l'ordre et la connexion des choses"
SPINOZA

toujours conjoints
=
2 points de vue différents d'une MEME REALITE

postulat métaphysique de L'UNITE DU TOUT
(= monisme)

réalité transubjective
=
transcendante au Sujet
=
extérieure à l'esprit

existence
réelle
=
en tant que
REPRESENTATION
DE FAITS (relations...)
existant hors de l'esprit

= point de vue réaliste

niveau
METAPHYSIQUE

ANNEXE III. Extraits de SPINOZA,B; ETHIQUE (1661-1675. Publication posthume: 1677)

traduction CAILLOIS,R. OEUVRES COMPLETES.

Bibliothèque de La Pléiade. NRF (1967), 309-596.

Livre II, définitions III & IV, et proposition VII:

III. PAR IDÉE, J'ENTENDS UN CONCEPT DE L'ESPRIT QUE L'ESPRIT FORME PARCE QU'IL EST UNE CHOSE PENSANTE[3].

EXPLICATION

Je dis concept *plutôt que* perception, *parce que le mot perception semble indiquer que l'Esprit est passif à l'égard de l'objet, tandis que concept exprime plutôt une action de l'Esprit.*

IV. PAR IDÉE ADÉQUATE, J'ENTENDS UNE IDÉE QUI, EN TANT QU'ELLE EST CONSIDÉRÉE EN SOI, SANS RELATION A UN OBJET, A TOUTES LES PROPRIÉTÉS OU PRÉSENTE TOUS LES SIGNES (DENOMINATIONES) INTRINSÈQUES D'UNE IDÉE VRAIE[1].

EXPLICATION

Je dis intrinsèques, *afin d'exclure celle qui est* extrinsèque, *à savoir la convenance de l'idée avec l'objet qu'elle représente.*

/.../

PROPOSITION VII

L'ordre et la connexion (ordo et connexio) *des idées sont les mêmes que l'ordre et la connexion des choses*[2].

DÉMONSTRATION

Cela est évident d'après l'axiome 4 de la première partie. Car l'idée de chaque chose causée dépend de la connaissance de la cause dont elle est l'effet.

COROLLAIRE

D'où suit que la puissance de penser de Dieu est égale à sa puissance actuelle d'agir[1]. C'est-à-dire que tout ce qui suit formellement[2] de la nature infinie de Dieu, suit objectivement en Dieu de l'idée de Dieu, dans le même ordre et selon la même connexion.

SCOLIE

Ici, avant de poursuivre, il faut nous rappeler notre précédente démonstration : tout ce qui peut être perçu par un entendement infini comme constituant l'essence de la substance n'appartient qu'à une substance unique, et par conséquent substance pensante et substance étendue sont une seule et même substance, qui est comprise tantôt sous cet attribut, tantôt sous l'autre. De même aussi le mode de l'étendue et l'idée de ce mode sont une seule et même chose, mais exprimée de deux façons : ce que certains d'entre les Hébreux semblent avoir vu comme à travers un brouillard, puisqu'ils admettent que Dieu, l'entendement de Dieu et les choses comprises par lui sont une seule et même chose. Par exemple, un cercle qui existe dans la Nature et l'idée du cercle — idée qui est aussi en Dieu — sont une seule et même chose, qui s'explique par des attributs différents; et ainsi, que nous concevions la Nature soit sous l'attribut de l'Étendue, soit sous l'attribut de la Pensée, soit sous quelque autre[3], nous trouverons un seul et même ordre, autrement dit une seule et même connexion de causes, c'est-à-dire les mêmes choses se suivant de part et d'autre[4]. Et lorsque j'ai dit que Dieu est cause de l'idée, par exemple du cercle en tant seulement qu'il est chose pensante, et du cercle en tant seulement qu'il est chose étendue, c'est uniquement parce que l'être formel de l'idée du cercle ne peut être perçu que par un autre mode du penser qui en est comme la cause prochaine, celui-ci à son tour par un autre, et ainsi à l'infini; de sorte que, dans la mesure où nous considérons les choses comme des modes du penser, nous devons expliquer l'ordre de la Nature entière, autrement dit la connexion des causes, par le seul attribut de la Pensée; et en tant qu'elles sont considérées comme des modes de l'Étendue, l'ordre de la Nature entière doit être expliqué par le seul attribut de l'Étendue. De même pour les autres attributs. C'est pourquoi Dieu est réellement cause des choses comme elles sont en soi, en tant qu'il est constitué par une infinité d'attributs. Je ne puis pour le moment expliquer cela plus clairement.

ANNEXE. IV. Extraits de LEIBNIZ, G.W:

NOUVEAUX ESSAIS SUR L'ENTENDEMENT HUMAIN

(1703. Publication posthume: 1765).
Garnier-Flammarion 1966.

Livre IV, ch. III, §1:

(Nécessité d'unités substantielles: less Monades.) - 332-333.

/.../ Il faut considérer que la *matière*, prise pour un *être complet* (c'est-à-dire la *matière seconde* opposée à la *première*, qui est quelque chose de purement passif, et par conséquent incomplet), n'est qu'un amas, ou ce qui en résulte, et que tout *amas réel* suppose des *substances simples* ou des *unités réelles*, et quand on considère encore ce qui est de la nature de ces unités réelles, c'est-à-dire la *perception* et ses suites, on est transféré pour ainsi dire dans un autre monde, c'est-à-dire dans le *monde intelligible des substances*, au lieu qu'auparavant on n'a été que parmi les *phénomènes des sens*. Et cette connaissance de l'intérieur de la matière fait assez voir de quoi elle est capable naturellement, et que toutes les fois que Dieu lui donnera des organes propres à exprimer le raisonnement, la substance immatérielle, qui raisonne, ne manquera pas de lui être aussi donnée, en vertu de cette harmonie, qui est encore une suite naturelle des substances. La matière ne saurait subsister sans substances immatérielles, c'est-à-dire sans les unités; après quoi on ne doit plus demander s'il est libre à Dieu de lui en donner ou non; et si ces substances n'avaient pas en elles la correspondance ou l'harmonie, dont je viens de parler, Dieu n'agirait pas suivant l'ordre naturel. Quand on parle tout simplement de *donner*, ou d'*accorder* des puissances, c'est retourner aux *facultés nues* des écoles et se figurer des petits êtres subsistants, qui peuvent entrer et sortir comme les pigeons d'un colombier. C'est en faire des substances sans y penser. Les *puissances primitives* constituent les substances mêmes, et les puissances *dérivatives*, ou, si vous voulez, les facultés, ne sont que des *façons d'être*, qu'il faut dériver des substances, et on ne les dérive pas de la matière en tant qu'elle n'est que machine, c'est-à-dire en tant qu'on ne considère par abstraction que l'*être incomplet* de la matière première, ou le passif tout pur. C'est de quoi je pense que vous demeurez d'accord, Monsieur, qu'il n'est pas dans le pouvoir d'une machine toute nue de faire naître la perception, sensation, raison. Il faut donc qu'elles naissent de quelque autre chose substantielle. Vouloir que Dieu en agisse autrement et donne aux choses des accidents, qui ne sont pas des *façons d'être* ou modifications dérivées des substances, c'est recourir aux miracles, et à ce que les écoles appelaient la *puissance obédientiale*, par une manière d'exaltation surnaturelle, comme lorsque certains théologiens prétendent que le feu de l'enfer brûle les âmes séparées. En quel cas l'on peut même douter si ce serait le feu qui agirait, et si Dieu ne ferait pas lui-même l'effet, en agissant au lieu du feu.]

Livre IV, ch. IV, §1:

(Les idées sont originairement dans notre esprit) -345-

THÉOPHILE. Notre certitude serait petite ou plutôt nulle, si elle n'avait point d'autre fondement des idées simples que celui qui vient des sens. Avez-vous oublié, Monsieur, comment j'ai montré que les idées sont originairement dans notre esprit et que même nos pensées nous viennent de notre propre fonds, sans que les autres créatures puissent avoir une influence immédiate sur l'âme. D'ailleurs le fondement de notre certitude à l'égard des vérités universelles et éternelles est dans les idées mêmes, indépendamment des sens, comme aussi les idées pures et intelligibles ne dépendent point des sens, par exemple celle de l'être, de l'un, du même, etc. Mais les idées des qualités sensibles, comme de la couleur, de la saveur, etc. (qui en effet ne sont que des fantômes), nous viennent des sens, c'est-à-dire de nos perceptions confuses. Et le fondement de la vérité des choses contingentes et singulières est dans le succès, qui fait que les phénomènes des sens sont liés justement comme les vérités intelligibles le demandent.

ANNEXE IV. (suite) Extraits de LEIBNIZ, G.W:

ESSAIS DE THEODICEE (1710), § 62.

préface et notes JALABERT, J.
Aubier - Montaigne, 1962.

62. Ainsi, étant d'ailleurs persuadé du principe de l'*harmonie* en général, et par conséquent de la *préformation* et de l'harmonie préétablie de toutes choses entre elles, entre la nature et la grâce, entre les décrets de Dieu et nos actions prévues, entre toutes les parties de la matière et même entre l'avenir et le passé, le tout conformément à la souveraine sagesse de Dieu, dont les ouvrages sont les plus harmoniques qu'il soit possible de concevoir; je ne pouvais manquer de venir à ce système, qui porte que Dieu a créé l'âme d'abord de telle façon, qu'elle doit se produire et se représenter par ordre ce qui se passe dans le corps; et le corps aussi de telle façon, qu'il doit faire de soi-même ce que l'âme ordonne. De sorte que les lois, qui lient les pensées de l'âme dans l'ordre des causes finales et suivant l'évolution des perceptions, doivent produire des images qui se rencontrent et s'accordent avec les impressions des corps sur nos organes, et que les lois des mouvements dans le corps, qui s'entre-suivent dans l'ordre des causes efficientes, se rencontrent aussi et s'accordent tellement avec les pensées de l'âme, que le corps est porté à agir dans le temps que l'âme le veut.

SYSTEME NOUVEAU DE LA NATURE ET DE LA COMMUNICATION DES SUBSTANCES (1695), § 15.

traduction ROBINET, A; LEIBNIZ, Seghers,1962. 117-118.

15. Cette hypothèse* est très possible. Car pourquoi Dieu ne pourrait-il pas donner d'abord à la substance une nature ou force interne qui lui pût produire par ordre (comme dans un *automate spirituel ou formel, mais libre* en celle qui a la raison en partage) tout ce qui lui arrivera, c'est-à-dire toutes les apparences ou expressions qu'elle aura, et cela sans le secours d'aucune créature ? D'autant plus que la nature de la substance demande nécessairement et enveloppe essentiellement un progrès ou un changement sans lequel elle n'aurait point de force d'agir. Et cette nature de l'âme étant représentative de l'univers d'une manière très exacte, quoique plus ou moins distincte, la suite des représentations que l'âme se produit répondra naturellement à la suite des changements de l'univers même : comme en échange le corps a aussi été accommodé à l'âme pour les rencontres où elle est conçue comme agissante au dehors ; ce qui est d'autant plus raisonnable, que les corps ne sont faits que pour les esprits, seuls capables d'entrer en société avec Dieu et de célébrer sa gloire. Ainsi, dès qu'on voit la possibilité de cette *hypothèse des accords,* on voit aussi qu'elle est la plus raisonnanable, et qu'elle donne une merveilleuse idée de l'harmonie de l'univers et de la perfection des ouvrages de Dieu.

* L'hypothèse de l'Harmonie Préétablie.

ANNEXE V. Extrait de LEIBNIZ, G.W; LETTRE A ARNAULD (9 octobre 1687)

LEIBNIZ. OEUVRES. Editées par PRENANT,L. Aubier-Montaigne 1972.-261-274.

Monsieur,

Comme je ferai toujours grand cas de votre jugement lorsque vous pouvez vous instruire de ce dont il s'agit, je veux faire ici un effort pour tâcher d'obtenir que les positions que je tiens importantes et presque assurées vous paraissent, sinon certaines, au moins soutenables. Car il ne me semble point difficile de répondre aux doutes qui vous restent, et qui, à mon avis, ne viennent que de ce qu'une personne prévenue et distraite d'ailleurs, quelque habile qu'elle soit, a bien de la peine à entrer d'abord dans une pensée nouvelle, sur une matière abstraite des sens [2], où ni figures, ni modèles, ni imaginations nous peuvent secourir.

J'avais dit que l'âme exprimant naturellement tout l'univers en certain sens, et selon le rapport que les autres corps ont au sien, et par conséquent exprimant plus immédiatement ce qui appartient aux parties de son corps doit, en vertu des lois du rapport qui lui sont essentielles, exprimer particulièrement quelques mouvements extraordinaires des parties de son corps ; ce qui arrive lorsqu'elle [en] sent la douleur. A quoi vous répondez que vous n'avez point d'idée claire de ce que j'entends par le mot d'exprimer ; si j'entends par là une pensée, vous ne demeurez pas d'accord que l'âme a plus de pensée et de connaissance du mouvement de la lymphe dans les vaisseaux lymphatiques que des satellites de Saturne ; mais si j'entends quelque autre chose, vous ne savez (dites-vous) ce que c'est, et par conséquent (supposé que je ne puisse point l'expliquer distinctement) ce terme ne servira de rien pour faire connaître comment l'âme peut se donner le sentiment de la douleur, puisqu'il faudrait pour cela (à ce que vous voulez) qu'elle connût déjà qu'on me pique, au lieu qu'elle n'a cette connaissance que par la douleur qu'elle ressent. Pour répondre à cela, j'expliquerai ce terme que vous jugez obscur, et je l'appliquerai à la difficulté que vous avez faite. Une chose *exprime* une autre (dans mon langage) lorsqu'il y a un rapport constant et réglé entre ce qui se peut dire de l'une et de l'autre. C'est ainsi qu'une projection de perspective exprime son géométral [3]. L'expression est commune à toutes les formes, et c'est un genre dont la perception naturelle, le sentiment animal et la connaissance intellectuelle sont des espèces. Dans la perception naturelle et dans le sentiment, il suffit que ce qui est divisible et matériel, et se trouve dispersé en plusieurs êtres, soit exprimé ou représenté dans un seul être indivisible, ou dans la substance qui est douée d'une véritable unité [4]. [On ne peut point douter de la possibilité d'une telle représentation de plusieurs choses dans une seule, puisque notre âme nous en fournit [5] un exemple. Mais] cette représentation est accompagnée de conscience dans l'âme raisonnable, et c'est alors qu'on l'appelle pensée [6]. Or, cette expression arrive par tout, parce que toutes les substances sympathisent avec toutes les autres et reçoivent quelque changement proportionnel répondant au moindre changement qui arrive dans tout l'univers, quoique ce changement soit plus ou moins notable à mesure que les autres corps ou leurs actions ont plus ou moins de rapport au nôtre. C'est de quoi, je crois, que M. Descartes serait demeuré d'accord lui-même, car il accorderait sans doute qu'à cause de la continuité et divisibilité de toute la matière le moindre mouvement étend son effet sur les corps voisins, et par conséquent de voisin à voisin à l'infini, mais diminué à proportion ; ainsi notre corps doit être affecté en quelque sorte par les changements de tous les autres [7]. Or, à tous les mouvements de notre corps répondent certaines perceptions ou pensées plus ou moins confuses de notre âme, donc l'âme aussi aura quelque pensée de tous les mouvements de l'univers, et selon moi toute autre âme ou substance en aura quelque perception ou expression. Il est vrai que nous ne nous apercevons pas distinctement de tous les mouvements de notre corps, comme par exemple de celui de la lymphe, mais (pour me servir d'un exemple que j'ai déjà employé [8]) c'est comme il faut bien que j'aie quelque perception [9] du mouvement de chaque vague du rivage afin de me pouvoir apercevoir de ce qui résulte de leur assemblage, savoir, de ce grand bruit qu'on entend proche de la mer ; ainsi nous sentons aussi quelque résultat confus de tous les mouvements qui se passent en nous ; mais, étant accoutumés à ce mouvement interne, nous ne nous en apercevons distinctement et avec réflexion que lorsqu'il y a une altération considérable comme dans les commencements des maladies. Et il serait à souhaiter que les médecins s'attachassent à distinguer plus exactement ces sortes de sentiments confus que nous avons dans notre corps. Or, puisque nous ne nous apercevons des autres corps que par le rapport qu'ils ont au nôtre, j'ai eu raison de dire que l'âme exprime mieux ce qui appartient à notre corps ; aussi ne connaît-on les satellites de Saturne ou de Jupiter que suivant un mouvement qui se fait dans nos yeux. Je crois qu'en tout ceci un cartésien sera de mon sentiment [10], excepté que je suppose qu'il y a à l'entour de nous d'autres âmes que la nôtre, à qui j'attribue une expression ou perception inférieure à la pensée, au lieu que les cartésiens refusent le sentiment aux bêtes et n'admettent point de forme substantielle hors de l'homme ; ce qui ne fait rien à la question que nous traitons ici de la cause de la douleur. Il s'agit donc maintenant de savoir comment l'âme s'aperçoit des mouvements de son corps, puisqu'on ne voit pas moyen d'expliquer par quels canaux l'action d'une masse étendue passe sur un être indivisible. Les cartésiens ordinaires avouent de ne pouvoir rendre raison de cette union ; les auteurs de l'hypothèse des causes occasionnelles croient que c'est *nodus vindice dignus, cui Deus ex machina intervenire debeat* [11] ; pour moi, je [l'explique] d'une manière naturelle par la notion de la substance ou de l'être accompli en général, qui porte que toujours son état présent est une suite naturelle de son état précédent ; il s'ensuit que la nature [de chaque substance singulière et par conséquent] de toute âme [12] est d'exprimer l'univers ; elle a été d'abord [13] créée de telle sorte qu'en vertu des propres lois de sa nature il lui doit arriver de s'accorder avec ce qui se passe dans les corps, et particulièrement dans le sien ; il ne faut donc pas s'étonner qu'il lui appartient de se représenter la piqûre lorsqu'elle arrive à son corps [14]. Et pour achever de m'expliquer sur cette matière, soient :

Etat des corps au moment A.	Etat de l'âme au moment A.
Etat des corps au moment suivant B (piqûre).	Etat de l'âme au moment B (douleur).

Comme donc l'état des corps au moment B suit de l'état des corps ou moment A, de même B état de l'âme est une suite d'A. état précédent de la même âme, suivant la notion de la substance en général [15]. Or, les états de l'âme sont naturellement et essentiellement des expressions des états répondants du monde, et particulièrement des corps qui leur sont alors propres ; donc, puisque la piqûre fait une partie de l'état du corps au moment B, la représentation ou expression de la piqûre, qui est la douleur, fera aussi une partie de l'état de l'âme au moment B ; car, comme un mouvement suit d'un autre mouvement, de même une représentation suit d'une autre représentation dans une substance dont la nature est d'être représentative. Ainsi il faut bien que l'âme s'aperçoive de la piqûre lorsque les lois du rapport demandent qu'elle exprime plus distinctement un changement plus notable des parties de son corps. Il est vrai que l'âme ne s'aperçoit pas toujours distinctement des causes de la piqûre et de sa douleur future lorsqu'elles sont encore cachées dans la représentation de l'état A, comme lorsqu'on dort ou qu'autrement on ne voit pas approcher l'épingle, mais c'est parce que les mouvements de l'épingle font trop peu d'impression alors, et quoique nous soyons déjà affectés en quelque sorte de tous ces mouvements et les représentations dans notre âme [16], et qu'ainsi nous ayons en nous la représentation ou expression des causes de la piqûre, et par conséquent la cause de la représentation de la même piqûre, c'est-à-dire la cause de la douleur, nous ne les saurions démêler de tant d'autres pensées et mouvements que lorsqu'ils deviennent considérables. Notre âme ne fait réflexion que sur les phénomènes plus singuliers, qui se distinguent des autres ; ne pensant distinctement à aucun, lorsqu'elle pense également à tous. Après cela, je ne saurais deviner en quoi on puisse [plus] trouver la moindre ombre de difficulté, à moins que de nier que Dieu puisse créer des substances qui soient d'abord faites en sorte qu'il leur arrive en vertu de leur propre nature de s'accorder dans la suite avec les phénomènes de toutes les autres. Or, il n'y a point d'apparence de nier cette possibilité, et puisque nous voyons que des mathématiciens représentent les mouvements des cieux dans une machine (comme lorsque

Jura poli rerumque fidem legesque deorum
Cuncta Syracusius transtulit arte senex [17],

ce que nous pouvons bien mieux faire aujourd'hui qu'Archimède ne pouvait de son temps), pourquoi Dieu, qui les surpasse infiniment, ne pourrait-il pas d'abord créer des substances représentatives en sorte qu'elles expriment par leurs propres lois, suivant le changement naturel de leurs pensées ou représentations, tout ce qui doit arriver à tout corps, ce qui me paraît non seulement facile à concevoir, mais encore digne de Dieu et de la beauté de l'univers [18], et en quelque façon nécessaire [19], toutes les substances devant avoir une harmonie et liaison entre elles, et toutes devant exprimer en elles le même univers, et la cause universelle qui est la volonté de leur créateur, et les décrets ou lois qu'il a établies pour faire qu'elles s'accommodent entre elles le mieux qu'il se peut. Aussi cette correspondance mutuelle des différentes substances (qui ne sauraient agir l'une sur l'autre à parler dans la rigueur métaphysique, et s'accordent néanmoins comme si l'une agissait sur l'autre) est *une des plus fortes preuves de l'existence de Dieu* [20] ou d'une cause commune que chaque effet doit toujours exprimer suivant son point de vue et sa capacité. Autrement, les phénomènes des esprits différents ne s'entr'accorderaient point, et il y aurait autant de systèmes que de substances [21] ou bien ce serait un pur hasard s'ils s'accordaient quelquefois. Toute la notion que nous avons du temps et de l'espace est fondée sur cet accord [22], mais je n'aurais jamais fait si je devais expliquer à fond tout ce qui est lié avec notre sujet. Cependant j'ai mieux aimé d'être prolixe que de ne me pas exprimer assez. /.../

[Enfin[92] *, pour ramasser mes pensées en peu de mots, je tiens que toute substance renferme dans son état présent tous ses états passés et à venir, et exprime même tout l'univers suivant son point de vue, rien [n']étant si éloigné de l'autre qu'il n'ait commerce avec lui, et cela[93] * particulièrement selon le rapport aux parties de son corps, qu'elle exprime plus immédiatement ; et par conséquent, rien ne lui arrive que de son fond, et en vertu de ses propres lois, pourvu qu'on y joigne le concours de Dieu. Mais elle s'aperçoit des autres choses parce qu'elle les exprime naturellement, ayant été créée d'abord en sorte qu'elle le puisse faire dans la suite et s'y accommoder comme il faut[94], et c'est dans cette obligation imposée dès le commencement que consiste ce qu'on (appelle) l'action d'une substance sur l'autre[95]. Quant aux substances corporelles, je tiens que la masse, lorsqu'on n'y considère que ce qui est divisible, est un pur phénomène ; que toute substance a une véritable unité à la rigueur métaphysique, et qu'elle est indivisible, ingénérable et incorruptible ; que toute la matière doit être pleine de substances animées ou du moins vivantes ; que les générations et les corruptions ne sont que des transformations du petit au grand ou *vice versa*[96], et qu'il n'y a point de parcelle de la matière dans laquelle ne se trouve un monde d'une infinité de créatures, tant organisées qu'amassées[97] ; et surtout que les ouvrages de Dieu sont infiniment plus grands, plus beaux, plus nombreux et mieux ordonnés qu'on ne croit communément ; et que la machine ou l'organisation, c'est-à-dire l'ordre, leur est comme essentiel jusque dans les moindres parties[98]. Et qu'ainsi il n'y a point d'hypothèse qui fasse mieux connaître la sagesse de Dieu que la nôtre, suivant laquelle il y a partout des substances qui marquent sa perfection et sont autant de miroirs[99], mais différents[100], de la beauté de l'univers ; rien ne demeurant vide, stérile inculte et sans perception. Il faut même tenir pour indubitable que les lois du mouvement et les révolutions des corps servent aux lois de justice et de police[101], qui s'observent sans doute le mieux qu'il est possible dans le gouvernement des esprits, c'est-à-dire des âmes intelligentes qui entrent en société avec lui et composent avec lui une manière de cité parfaite dont il est le monarque[102]]. /../

Institutions sociales et statistiques en France à la fin du XIXe siècle et au début du XXe siècle

Y. MAREC

L'histoire des statistiques sociales depuis la fin du XVIIIe siècle reste un terrain à défricher. Les études réalisées jusqu'à présent portent essentiellement sur la démographie ou concernent surtout les trois premiers quarts du XIXe siècle.

Or la fin du XIXe siècle et le début du XXe siècle ont été marqués par l'adoption d'une législation sociale de plus en plus précise, même si le retard français par rapport à d'autres pays comme l'Allemagne est patent en ce domaine.

Certains de ces textes législatifs ont fait l'objet de vifs débats et suscité d'importantes enquêtes statistiques, parfois contestées, dont les enjeux idéologiques sont riches d'enseignement. Dans cette perspective nous nous attacherons à dégager la signification des modifications intervenues dans la législation sociale à la fin du XIXe siècle et au début du XXe siècle en étudiant plus particulièrement leurs conséquences dans le fonctionnement des sociétés de secours mutuels. Nous serons ainsi amenés à préciser les rapports entretenus entre le développement de l'approche statistique et la gestion des institutions sociales.

I LE REFUS DES STATISTIQUES

En mars 1905, Henri Vermond, président de la société de secours mutuels, l'Emulation Chrétienne de Rouen justifie ainsi son refus de fournir les renseignements statistiques demandés par le préfet de la Seine-Inférieure : "Pendant les seize ans qui ont précédé la loi de 1898, nous avons constamment lutté contre la prétention par laquelle Messieurs les actuaires et les membres des commissions parlementaires voulaient bureaucratiser la mutualité, changer son administration et la transformer en assurances en lui appliquant toutes les règles de ces associations financières et commerciales. J'ai plus que personne lutté contre cette déformation. Toutes les mutualités doivent à mon avis rester simples pour rester démocratiques et sont faites pour donner beaucoup de secours et non beaucoup de statistiques. Nous avons fini par triompher, et la loi de 1898, qui sera l'éternel honneur de la République Française, a augmenté notre liberté qu'on voulait supprimer à certains égards, et nous a laissé libres ou bien d'adopter le système dit des retraites garanties ou bien de conserver le nôtre. L'Emulation Chrétienne, comme presque la totalité des sociétés de secours mutuels de France, a pris le deuxième parti, et comme le système dit des retraites garanties exigereait quantité de travail et de renseignements, nous avons modifié nos statuts afin d'y échapper".(1)

Cette lettre est due à un personnage important de la mutualité. En effet, Henri Vermont est alors vice-président de la Fédération Nationale de la Mutualité Française et membre du Conseil Supérieure de la Mutualité crée par la loi du 1er avril 1898. C'est un des chefs de file des catholiques ralliés à la République dont beaucoup se méfient de l'ingérence de l'Etat dans le domaine de l'économie sociale. Les propos du mutualiste normand, président de l'une des plus puissantes sociétés de secours mutuels de province, traduisent aussi l'hostilité d'un courant important de la Mutualité à l'égard de l'introduction des procédés actuariels dans la gestion des mutuelles au début du XXe siècle. Lors de l'élaboration de la loi de 1898, Henri Vermont a combattu l'idée de l'obligation en matière de prévoyance, mais aussi celle d'une spécialisation des cotisations selon les services rendus.

(1) Archives départementales de la Seine Maritime 4 x 246 - Lettre d'Henri Vermont au préfet de la Seine Inférieure, le 15 mars 1905 sur H. Vermont. Se reporter à notre article "L'apôtre de la Mutualité : Henri Vermont (1836-1928)" La Revue de l'Economie sociale. Janvier 1987.

En n'imposant pas de cotisations spécifiques pour les maladies et les retraites les législateurs ont semble-t-il, donné raison à l'auteur de la lettre qui considérait les mutuelles "comme une seconde famille, dont tous les membres se portent un mutuel intérêt et qui, pour le plus grand bien du pays, réunissent une foule de braves gens, heureux de s'entr'aider, faisant eux-mêmes leurs petites affaires, payant chaque année une somme déterminée qui leur donne droit à tous les avantages que leur société procure, s'administrant d'une manière simple, claire, à la portée de tous".(1)

Pour Henri Vermont la solution aux problèmes financiers des sociétés de secours mutuels passe par le recours systématique aux cotisations des membres honoraires et aux versements des donateurs. De ce point de vue l'Emulation Chrétienne de Rouen est exemplaire puisqu'au début du XXe siècle la société présidée par le mutualiste normand compte plus de 800 membres honoraires pour environ 4300 participants. Il faut aussi encourager l'épargne en accordant des subventions plus élevés aux mutuelles. Mais ceci ne doit pas s'accompagner d'un contrôle accru de la gestion des institutions de prévoyance dont l'aspect "interclassiste" doit favoriser la paix sociale. D'une certaine manière les sociétés de secours mutuels restent des oeuvres pour Henri Vermont, catholique convaincu et méfiant à l'égard du processus de laïcisation engagé dans le domaine social par les gouvernements de la Troisième République, tout particulièrement au début du XXe siècle.(2)

Son refus de répondre aux demandes du préfet et du gouvernement lui paraît d'autant plus justifié que diverses sociétés se sont plaintes de l'accroissement des renseignements réclamés depuis quelques années. Il fait ainsi allusion au développement des enquêtes statistiques au début du XXe siècle. En fait ce mouvement a commencé plus tôt. Il s'est déjà affirmé à la fin du XIXe siècle avec notamment la création en mai 1884 du conseil supérieur de statistique rattaché officiellement au ministère du commerce en février 1885.(3)
Cette structure joue un rôle non négligeable dans l'avènement de la société assurantielle et de l'Etat providence étudié par F. EWALD.(4) Dans les documents préparatoires à la session de 1903 du conseil supérieur de statistique E. CHEYSSON, Inspecteur Général sur les tableaux de la statistique des sociétés de secours mutuels où il écrit après avoir évoqué la loi du 1er avril 1898 : "En tous cas, la mutualité est devenue une puissance, sur laquelle on peut compter, ou du moins avec laquelle on doit compter, et le Parlement ne manque pas de lui faire sa place dans les lois sociales qu'il vote ou dans les projets qui occupent son ordre du jour. Cette évolution de la mutualité a pour conséquence naturelle d'accroître nos exigences statistiques à son endroit (...) A cette première raison d'élargir le cadre des statistiques antérieures, s'en joint une autre, non moins péremptoire. La loi de 1898 a noblement reculé les limites du domaine de la mutualité, en l'enrichissant d'attributions multiples, qui lui étaient autrefois interdites (...) Il importe beaucoup aux hommes d'Etat, aux économistes, au mutualistes eux-mêmes, de connaître l'usage que la mutualité fait déjà ou fera de ces diverses facultés".(5)

(1) H. Vermont. Une oeuvre mutualiste. Rouen 1900. Ouvrage publié à l'occasion des 25 ans de présidence d'Henri Vermont à la tête de l'Emulation Chrétienne; p. 53.

(2) Sur cette période se reporter à Monsieur REBENOUX. La République radicale ? 1898-1914. Nouvelle histoire de la France contemporaine. Le Seuil 1975 ; J.M. Mayeur. La vie politique sous la IIIe République. Le Seuil 1984.

(3) Bulletin du conseil supérieur de statistique. Voir en particulier le N° 5, session de 1894. On trouve une table analytique pour les numéros 1 à 11 (1884-1912) dans le N° 11 pp 75-102.

(4) F. EWALD , L'Etat-providence. Grasset. Paris 1986.

(5) Conseil supérieur de statistique. Session 1903 (documents préparatoires) Bulletin N° 8.

Cette interprétation de la loi de 1898 est donc bien différente de celle qu'en donne H.Vermont, dans sa lettre de 1905. Pourtant les deux hommes se réclamaient tous deux de Le Pay et collaboraient aux mêmes revues, en particulier à la Réforme sociale. On ne peut donc réduire les positions du catholicisme social sur l'organisation mutualiste au refus de toute innovation en matière de gestion et ceci d'autant plus qu'E. CHEYSSON a joué un rôle déterminant dans le développement de la société assurantielle.(1) En fait au début du XXe siècle les idées défendues par le mutualiste normand sont contestées d'autant plus qu'elles vont à l'encontre des progrès réalisés par l'approche statistique et probabiliste dans le domaine social depuis la première moitié du XIXe siècle.

II VERS UNE RATIONALISATION DE LA GESTION DES INSTITUTIONS SOCIALES ?

Dès le début du XIXe siècle certains écrits condamnent le caractère empirique du fonctionnement des sociétés de secours mutuels dont beaucoup disparaissent très rapidement. Ainsi dans une étude remarquée sur les sociétés de prévoyance, publiée à Rouen en 1844, L. DEBOUTTEVILLE énumère les principaux vices de leur organisation : "1° Admission à des âges différents moyennant un droit d'admission semblable ou non proportionné à la différence des âges ; 2° Allocations trop élevées, en égard à la quotité des contributions ; 3° Accumulation insuffisante de fonds, pendant la jeunesse, pour les besoins de la vieillesse ; 4° Confiance mise dans les cotisations des jeunes membres pour l'entretien des vieillards de la génération précédente ; 5° Partage des fonds de la société dans l'intérêt passager de quelques membres influens".(2) Selon l'auteur, une gestion saine doit reposer sur l'utilisation de "tables de mortalité bien établies, et sur la connaissance acquise de la fréquence des maladies et de leur durée aux différents âges", ce qui n'est pas le cas pour la plupart des sociétés existantes. Certes, les données "sur lesquelles doit être fondée l'organisation des sociétés d'amis n'ont pas encore acquis le degré de précision et de certitude désirables dans un objet de cette importance. Toutefois, on peut dès à présent, établir ces institutions sur des bases telles, qu'elles présentent aux classes laborieuses toutes les chances d'une pleine réussite, et ne laissent place à aucune appréhension raisonnable"(3)

L'étude de L.DEBOUTTEVILLE vise donc à constituer des tables suffisamment fiables et à élaborer un projet de règlement permettant la survie, voire le développement des sociétés de secours mutuels. L'auteur, membre de la société d'Emulation de Rouen, estime "de la plus grande importance que les versements faits par les membres honoraires ne prennent point le caractère de charité, et que la stabilité des sociétés soit fondée sur les seules contributions des intéressés ; autrement l'institution perd son caractère d'assurance mutuelle, et les souscripteurs sont déchus de leur dignité d'hommes indépendants".(4)

(1) Sur l'action de Emile Cheysson voir B. Gibaud De la Mutualité à la Sécurité Sociale. Les éditions ouvrières Paris 1986 ; le N°28 (1987) de la revue Milieux . Parios 1987.

(2) L. Deboutteville. Des sociétés de prévoyance ou de secours mutuels ; recherches sur l'organisation de ces institutions, suivies d'un projet de règlement et de tables à leur usage. Rouen. Paris 1844 p.26. Pour une synthèse de ces questions se reporter à A. Gueslin. L'invention de l'économie sociale, le XIXe siècle français. Economica.

(3) Ibidem p 34.

(4) Ibidem p 63, note 1.

Dans son ouvrage important sur le Paupérisme et les Associations de Prévoyance, E. LAURENT -qui fait référence aux travaux de L. DEBOUTTEVILLE- montre la nécessité d'une gestion rationnelle des sociétés de secours mutuels dont, selon lui, le fonctionnement doit s'inspirer de celui des assurances. "toute entreprise d'assurance s'efforce, avec raison, de connaître la moyenne probable des sinistres qu'elle peut être appelée à réparer dans une période donnée, afin de pouvoir déterminer sérieusement la rétribution que doit payer chaque assuré. Ce souci doit être aussi, et au plus haut point, celui des sociétés de secours mutuels. La science seule fécondera véritablement l'association ; nous aurons plus tard à insister longuement sur cette idée beaucoup trop laissée dans l'ombre jusqu'à présent".[1]

Il faut donc pourchasser "l'imprévoyance dans les institutions de prévoyance", pour reprendre le titre d'une communication faite à la Société d'économie sociale par E. Cheysson en mai 1888.[2] Deux ans plus tard, il précise les lacunes de la statistique officielle utilisée pour élaborer les lois sociales, lors du congrès national des sociétés savantes.[3] A la même époque le Sénateur républicain H. MAYE dénonce la routine qui sévit dans le fonctionnement de nombreuses sociétés de secours mutuels. "Ah ! Sans doute, il est commode et doux de s'en tenir aux traditions du passé, de s'endormir dans le lit paternel ! Mais est-ce que, par hasard,, nous pouvons, nous mutualistes du XIXe siècle, nous isoler de ce grand, de cet admirable mouvement scientifique qui entraîne la société française et européenne, qui la pousse sans cesse en avant ? Est-ce que nous considérons comme nuls et non avenus tant d'efforts accomplis dans cette voie, tant de lumières répandues sur le monde depuis le XVIIIe siècle jusqu'à nos jours ? Est-ce que cela est possible ? Elle est fausse, elle est dangereuse cette doctrine qui, sous prétexte de fidélité à de vieilles traditions, à d'anciennes pratiques, tendrait d'exclure de nos Associations les solutions raisonnées, la part nécessaire de la Science. Non ! Non ! Poser la question, c'est la résoudre. Je dis que notre devoir est de rester avant tout des hommes de fraternité, il faut voir aussi comment l'esprit de solidarité doit s'accorder avec l'expérience et avec la Science, dont nous serions coupables de ne pas tenir un compte décisif." (Ces propos sont repris par Prosper de Lafitte dans son *Essai d'une Théorie rationnelle des Sociétés de Secours Mutuels* publié en 1892.[4] L'auteur, actuaire et ancien élève du mathématicien Joseph Bertrand à l'école polytechnique, avait vivement critiqué, un an plus tôt, l'insuffisance des rapports officiels sur les opérations des Sociétés de secours mutuels. Ceux-ci ne permettent pas en effet d'améliorer la gestion des mutuelles. "Lorsqu'il s'est agi de construire une table de mortalité nouvelle pour remplacer celle de Deparcieux, quelles ressources a-t-on trouvées dans la série des rapports annuels ? -Aucune ; pas une donnée, pas un chiffre ! Il a fallu tout demander aux archives de la Caisse Nationale des Retraites ; tout le monde réclame, en France et partout, une bonne table de maladies ; quelles ressources trouve-t-on dans toute la série des rapports annuels pour mener à bien cette difficile entreprise ? - Aucune ; pas une donnée, pas un chiffre, rien ! Que de travail et que d'agent gaspillés !"[5]

(1) E. LAURENT. Le Paupérisme et les Associations de Prévoyance. Nouvelles études sur les Sociétés de Secours Mutuels. Paris 1860 p.78.

(2) E. CHEYSSON. L'imprévoyance dans les Institutions de Prévoyance. Communication faite à la Société d'Economie Sociale le 27 mai 1888. Paris Guillaumin 1888.

(3) E. CHEYSSON. Les lacunes de la statistique et les lois sociales. Communication faite au congrès des Sociétés Savantes le 30 mai 1890. Bulletin du comité des travaux historiques et scientifiques. Section des Sciences économiques et sociales. Paris Guillaumin 1891.

(4) P. de LAFITTE. Essais d'une théorie rationnelle des sociétés de secours mutuels. Deuxième édition. Paris Gauthier-Villars 1892. Préface.

(5) F. de LAFITTE. Statistique Officielle des Sociétés de Secours Mutuels. Extrait de la Revue des Institutions de Prévoyance. Parie, Berger-Levrault. 1891.

La volonté de modifier le fonctionnement des sociétés de secours mutuels est à rapprocher des progrès enregistrés par l'introduction des procédés statistiques et probabilistes dans le domaine social dans le dernier quart du XIXe siècle, avec notamment le vote de la loi de 1898 sur les accidents du travail qui a consacré la notion de risque professionnel.[1] L'idée d'assurance tend alors à supplanter celle de prévoyance ce que n'accepte pas Henri Vermont qui s'oppose à la spécialisation des cotisations, technique empruntée aux assurances. “Vos sociétés, nous a-t-on dit, ne sont qu'une forme de l'assurance, elles doivent donc en suivre les règles, et comme il est de règle en assurance que chaque risque doit être garanti par une prime, vous aurez autant de cotisations que vous aurez de buts différents. Chaque genre de cotisations aura sa caisse spéciale et distincte, vous devrez d'avance spécialiser chaque recette et chaque dépense et affecter l'une à l'autre en les prévoyant toutes deux, et pour cela vous aurez notamment l'obligation de faire, au moins tous les cinq ans, un inventaire, prévoyant et spécialisant ce que chaque sociétaire, chaque année, devra verser et devra dépenser pour chacun des buts de la société.”[2] C'est pourquoi le mutualiste normand souligne les différences qui existent entre les compagnies d'assurances et les sociétés de secours mutuels tout en mettant en cause les savants coupés de la réalité ainsi que les politiciens qui voient surtout dans les mutuelles “un appoint électoral d'autant plus souple qu'une loi despotique, détruisant notre indépendance, nous obligerait trop souvent à les implorer : nos votes paieraient leur protection.”[3]

Si Henri Vermont estime que la Charte de la Mutualité lui a donné raison nous avons vu que celle-ci pouvait faire l'objet d'une interprétation différente. Certes la loi de 1898 n'impose pas de spécialisation pour les services habituellement rendus par les mutuelles. Et l'article premier qui prévoit qu'elles “peuvent, en outre accessoirement, créer au profit de leurs membres des cours professionnels, des offices gratuits de placement et accorder des allocations, en cas de chômage, à la condition qu'il soit pourvu à ces trois ordres de dépenses au moyen de cotisations ou de recettes spéciales” paraît bien timide dans sa formulation. Il n'empêche qu'il ouvre une brêche dans la conception rigide et traditionnelle du rôle et du fonctionnement des sociétés de secours mutuels. Il ouvre aussi des perspectives qui sauront utiliser les dirigeants les plus actifs. D'autre part, avec le début du XXe siècle, d'autres problèmes se posent. D'une certaine manière la question de la spécialisation des cotisations est remplacée par celle de l'obligation en matière de prévoyance. Cela contribue à marginaliser les idées ultra libérales du président de l'Emulation Chrétienne de Rouen.

III PREVISION STATISTIQUE ET PREVOYANCE SOCIALE

Lors du huitième congrès national des sociétés de secours mutuels, qui se tient à Nantes en mai 1904, le projet de loi sur les retraites ouvrières et paysannes, en discussion à la chambre suscite des débats animés entre partisans et adversaires de l'obligation. Léopold Mabilleau, président de la Fédération Nationale de la mutualité française, parvient à en faire admettre le principe en s'opposant aux thèses libérales défendues par Henri Vermont comme rapporteur de la commission des retraites. Celui-ci a vainement rappelé le voeu du Conseil supérieur de la Mutualité en faveur de la prévoyance volontaire et d'une augmentation des subventions allouées aux mutuelles. Le mutualiste normand a aussi contesté l'affirmation selon laquelle l'épargne populaire était insuffisante pour remédier à l'extension de la misère, celle-ci étant souvent le résultat du vice et de la mauvaise conduite.

(1) F. EWALD. L'état providenct. op. cit.
(2) H.VERMONT. Une oeuvre mutualiste. op. CIT. P 53.
(3) Ibidem p 53.

Selon lui, l'adoption de l'idée d'obligation ne fera que multiplier les fonctionnaires et accroître les impôts.(1) Mais grâce à son éloquence et à des artifices de procédure, Léopold Mabilleau réussit à faire adopter ce texte, certes ambigu, auquel le président de l'Emulation Chrétienne s'est rallié en désespoir de cause : "Le congrès convaincu que la mutualité soutenue par les divers concours sociaux et encouragée par les pouvoirs publics, est le meilleur moyen de réaliser toutes les institutions de prévoyance sociale, mais soucieux de voir constituer des pensions de vieillesse suffisantes au profit de tous les travailleurs sans exception, ne se croit pas en droit de repousser l'aide éventuelle de la loi dans cette entreprise, pourvu que l'établissement d'un système obligatoire respecte absolument l'autonomie et la variété des oeuvres mutualistes et que l'accès de ces oeuvres, toujours préférables pour l'intérêt comme pour la dignité des travailleurs, reste ouvert à tous les assurés de la renaissance de la liberté des moyens et de l'équivalence des services ; émet le voeu que les retraites ouvrières soient organisées par la mutualité avec l'aide et sous le contrôle de l'Etat ou, tout au moins, que l'Etat organise ce service sur les bases et avec le concours des sociétés de secours mutuels."(2)

La prévoyance forcée suppose donc une accentuation des contrôles de l'Etat ce que n'accepte pas Henri Vermont hostile à tout "socialisme d'Etat". Les atermoiements de Léopold Mabilleau, mis en évidence par Jaurès dans plusieurs articles de l'Humanité de mars 1905 lui servent d'ailleurs d'arguments pour critiquer le projet de la Millerand-Guieysse qu'il avait condamné dès 1903 dans la Réforme sociale comme étant "faux dans son principe, injuste dans ses dispositions, effrayant dans ses conséquences."(3) Les personnalités de Millerand, socialiste indépendant, et de Guieysse, député radical et président de l'Institut des Actuaires français, ne pouvaient que renforcer ses convictions. C'est pourquoi, à partir de 1905 le président de l'Emulation Chrétienne effectue dans différentes villes une série de conférences où il dénie toute valeur au texte adopté à Nantes. Selon lui, les mutualistes ont été trompés par le président du congrès et Léopold Mabilleau "favorables à l'obligation, ce que nous ignorions alors."(4) Dans l'esprit d'Henri Vermont il y a sans doute aussi conjonction entre la volonté d'imposer la prévoyance, celle de développer l'usage des statistiques ou des techniques assurantielles et le renforcement de l'intervention de la puissance publique en matière sociale ou dans d'autres domaines.

Il est vrai que certains faits semblent corroborer cette opinion. Ainsi, sans son rapport sur les tableaux de la statistique des sociétés de secours mutuels au conseil supérieur de statistique (session de 1903) E. Cheysson fait référence aux travaux de la commission des tables de mortalité et de morbidité instituée en 1899 par le Ministère de l'Intérieur et présidée par P. Guieysse. Au nom du comité permanent sur les statistiques de la Mutualité et de la Criminalité, il se félicite de ce que les précisions concernant les sexes, les professions et les âges des sociétaires soient désormais prises en compte. Il va même plus loin puisqu'il suggère, de remplacer les tableaux collectifs par un système de fiches individuelles adressées au Ministère de l'Intérieur. "Ce procédé consisterait à demander à chaque société de dresser, pour chacun de ses membres, une fiche d'un modèle déterminé. Ces fiches seraient ensuite confiées par le Ministère de l'Intérieur à la Direction du Travail, qui les lui retournerait après les avoir dépouillées, comme elle le fait aujourd'hui pour les fiches des enfants protégés. Avec les fiches, on est maître de pousser plus ou moins loin les investigations statistiques suivant les besoins de l'Administration ou des Chambres. Ce sont des

(1) Congrès national des sociétés de secours mutuels de prévoyance et de retraites tenu à Nantes du 16 au 21 mai 1904. Nantes 1905. 624 pagrs, p. 380.

(2) Ibidem pp 418 et 421.

(3) H. VERMONT. "Le projet de retraltes ouvrières obligatoires et la solution des mutualistes" La réforme sociale 1903 pp552-571. Sur le débat entre Jaurès et Mabilleau voir les textes présentés par B. Gibaud dans la Revue de l'économie sociale d'avril juin 1985 pp 73-83.

(4) H. VERMONT. "les pensions de retraite". Conférence publique. Fécamp 1905 p 12 note 1.

minerais qu'on exploite à volonté pour en extraire tel ou tel classement, dont un problème administratif social ou législatif, fait apparaître un jour la nécessité. Si leur cadre est bien conçu et bien rempli, elles contiennent en puissance toutes les réponses aux questions qu'on peut avoir éventuellement à leur faire. La fiche est le véritable instrument de la statistique, qui veut être prête à satisfaire aux sommations, même les plus inattendues, de la pratique ou de la science."(1)

Faut-il ranger parmi ces "sommations inattendues de la pratique" le scandale de "l'affaire des fiches" qui se développe à cette époque et entraîne en novembre 1904 la démission du général André, ministre de la guerre dans le gouvernement Combes ?(2) Toujours est-il que l'extension des enquêtes statistiques peut menacer la liberté individuelle, ce qui ne peut qu'alimenter les critiques d'un Henri Vermont à leur égard.

Cependant celles-ci ne peuvent véritablement s'opposer aux progrès de l'approche statistique. Certes l'enseignement de cette discipline n'en est encore qu'à ses débuts. Les quelques cours professés depuis la fin du XIXe siècle dans des établissements comme le conservatoire national des Arts et Métiers, l'Ecole des Ponts et Chaussées ou l'Ecole des Sciences Politiques ne forment pas un enseignement constitué. Toutefois une authentique chaire de statistique est créée en 1892 à la Faculté de Droit de Paris. Elle est confiée à Fernand Faure qui consacre notamment une partie de son cours à la statistique sociale. Autre étape, à partir de la fin de 1907 le recrutement des statisticiens de la statistique générale de la France est assuré par un concours de haut niveau. Ce qui domine alors c'est surtout l'usage des statistiques descriptives qui constituent l'essentiel du contenu des ouvrages publiés sur la matière.(3) Cependant avant 1914 on voit émerger des écrits faisant aussi appel à des développements probabilistes. En 1908, Hermann Laurent, membre de l'Institut des actuaires français et répétitieur à l'Ecole Polytechnique, publie une Statistique mathématique où il s'en prend à ceux qui ne voient dans la statistique qu'un maniement empirique de données numétriques, allant jusqu'à affirmer que "les statistiques officielles sont dirigées par des gens incompétents."(4) Quelques années plus tôt H. Laurent avait fait paraître un ouvrage Théorie et Pratique des Assurances sur la vie faisant appel à des notions de probabilité.(5) S'il n'évoque guère le cas des sociétés de secours mutuels "aujourd'hui en nombre très considérable", par contre P.J. Richard et E. Petit, anciens élèves de l'Ecole polytechnique et actuaires, critiquent fortement leur gestion dans leur Théorie mathématique des assurances publiée en 1908. Il montre que c'est uniquement grâce aux versements des membres honoraires, aux subventions de l'Etat et aux bonifications d'intérêts que la plupart des mutuelles peuvent faire face à leurs obligations. "L'assistance vient en somme compléter et rendre efficace l'oeuvre de la prévoyance." Sans cette aide, "Il serait nécessaire alors de procéder à une répartition équitable des indemnités et de soumettre la question au calcul, en se basant sur les statistiques et en utilisant les tables de morbidité qui en traduisent d'une façon pratique les résultats."(6)

(1) *Bulletin du Conseil Supérieur de la statistique N° 8 (documents préparatoires à la session de 1903) Extrait p. 7.*

(2) *Le scandale éclata lorsque fut divulgué en 1904 un système qui subordonnait l'avancement des officiers à leurs opinions politiques et religieuses consignées sur des "fiches" alimentées notamment par des renseignements provenant de la franc-maçonnerie. Sur cette affaire voir M. Rébérioux La Rébublique radicale ? op.cit p 73-74.*

(3) *R. PRESSAT. "L'enseignement de la statistique en France à ses débuts (ca.1850-1939)" Journal de la Société de statistique de Paris, tome 128 N° 1 1987.*

(4) *Ibidem*

(5) *H. LAURENT. Théorie et Pratique des Assurances sur la vie. Encyclopédie scientifique des aide-mémoire. Paris Gauthier-Villars et Masson s.d 1901 (?).*

(6) *P.J. RICHARD et E. PETIT. Théorie Mathématique des Assurances. Encyclopédie scientifique. O. Doin Paris 1908 p 303.*

On trouve des considérations similaires dans les Errements des Sociétés de Secours Mutuels publiés par Anatole Weber en 1913. Il s'en prend explicitement aux propos tenus par Henri Vermont qui, dans l'Almanach des mutualistes, de 1909, écrivait "que la prévoyance ne coûte rien, nos fonctionnaires étant aussi désintéressés que dévoués, tandis que l'assistance coûte fort cher parce que beaucoup de ceux qui s'en occupent sont très largement rétribués." En s'appuyant sur les rapports annuels, A. Weber montre "combien est flagrante la contradiction entre la réalité des faits et la soi-disant gratuité de gestion dont la mutualité argue vraiment trop."(1)

D'ailleurs, à cette époque, l'Emulation Chrétienne elle-même connaît des difficultés financières dues à la diminution du nombre de membres honoraires qui est passé de 840 en 1904 à 533 en 1914. C'est la traduction d'une crise de confiance à l'égard de la gestion de son président. En effet à la suite d'une plainte adressée en juillet 1907 au ministre du travail et de la prévoyance sociale, une vérification des comptes de la plus importante mutuelle rouennaise a été effectuée. Le rapport d'inspection souligne l'insuffisance des informations comptables communiquées aux sociétaires et l'inexistence de budgets prévisionnels, contrairement aux statuts. Le percepteur chargé de la vérification s'étonne des arguments avancés par Henri Vermont qui déclare qu'il est impossible de connaître et d'annoncer d'avance le nombre et l'importance des dons, le nombre des naissances et des décès, le nombre, l'importance et le coût des maladies, etc... C'est pouquoi le compte de l'année est considéré à l'Emulation Chrétienne, comme le budget de l'exercice écoulé ! Selon l'inspecteur la réponse d'Henri Vermont, questionné sur ce point, "est la négation même de toute idée de budget. Les prévisions dont elle nie la possibilité, sont pourtant le fondement même des idées de retraite et de mutualité."(2)

Cette imprévoyance dans une institution de prévoyance n'est pas spécifique à l'Emulation Chrétienne de Rouen et il convient de relativiser les insufisances de la gestion de son président. Au début du XXe siècle les mutuelles ne disposent pas encore des instruments permettant des prévisions correctes. Ainsi le rapport définitif de la commission des Tables de mortalité et de morbidité des sociétés de secours mutuels n'a été publié qu'en 1911. De plus, son auteur A. Quiquet, membre de l'Institut des Actuaires Français détaille les lacunes des résultats obtenus, les déménagements consécutifs à la formation du Ministère du Travail et de la Prévoyance sociale en 1906 ayant d'ailleurs entraîné une grande confusion. "Si la nature a horreur du vide,la statistique a davantage horreur des déménagements. Les états de la Mutualité n'ont su résister à des épreuves aussi répétées, qui les ont bouleversés et confondus. Plus d'une même manquerait à l'appel."(3) Néanmoins la publication des tables obtenues paraît utile et même nécessaire, le vote de la loi de 1910 sur les retraites ouvrières et paysannes leur donnant un caractère d'urgence. "Peut être les tables de mortalité commenceront-elles à éclairer celles de ces préoccupations, si complexes, si multiples, auxquelles des solutions sont à trouver à bref délai, ne serait-ce que pour la collaboration des sociétés de secours mutuels au régime des retraites ouvrières et paysannes, collaboration prévue par la loi du 5 avril 1910."(4)

(1) A. WEBER. Les Errements des sociétés de secours mutuels. Rivière 1913 pp 26-27.

(2) A.D.S.M. 4x 201 Rapport du Percepteur Brèque p 3.

(3) A. QUIQUET. Rapport définitif sur les travaux organisés par la Commission de 1899 à 1910 et sur leurs résultats. Ministère du Travail et de la Prévoyance Sociale. Paris Imprimerie Nationale 1911 p 13.

(4) Ibidem pp 18-19

En fait, les difficultés d'application de cette loi vont conforter les adversaires de l'idée d'obligation dans leurs convictions ainsi que la plupart des mutualistes qui attribueront son échec à la méfiance du législateur à l'égard de la mutualité.(1) Ce n'est que dans l'entre-deux guerres qu'apparaît un système d'assurance obligatoire où la mutualité joue un rôle essentiel. Cette période est aussi celle de l'essor en France de la statistique mathématique.(2)

(1) B. GIBAUD. *"Jean Jaurès, la mutualité et les retraites ouvrières". La revue de l'économie sociale. Avril-Juin 1985 pp73-83.*

(2) R. PRESSAT. *"L'enseignement de la Statistique en France à ses débuts". art. cit.*

Michel SERFATI

La question de la "chose "

(Mathématiques et Ecriture)

1) Introduction.

Au colloque de Strasbourg , j'avais eu la très ambitieuse intention de parler de tout ce qui concerne, selon moi, " Mathématiques et Ecriture". J' y ai seulement trouvé le temps de mon introduction (un commentaire composé sur le style de Lambert en Mathématiques - il peut être fascinant -), et de brèves autres prémisses.
C'est donc une part de ce que je n'ai pu y dire que j'écris ici : un essai sur le statut du signe en Mathématiques.
A l'inevitable question première qui se pose ici clairement : pourquoi des signes ? la réponse, au fond banale, ne peut qu' être ici la même ,que ce soit en Mathématiques ou ailleurs : un signe doit servir à différencier. Comme dit excellement F.de Saussure, un signe , ce doit être " la fin de l'ambiguité." .Désir très légitime, certainement fécond, et ,à chaque instant, très fondateur. J'essaierai pourtant de montrer dans ces pages pourquoi ,à mon sens, c'est seulement apparemment que bien souvent ce désir se réalise , puis il bute et se contredit , enfin et ,d'une certaine façon - elle aussi féconde - "échoue."

Comme dit Paul Ricoeur ([8] ,page 881) "Les signes ont en effet un étonnant pouvoir substitutif : mis pour les choses, ils peuvent aussi être mis les uns pour les autres.." Etranges signes en effet qui se concatènent, s'agglutinent... : il y a un "jeu autonome des signes" ..

Certes, on peut dire aussi qu'un signe sert à" soulager la mémoire", " ne pas se perdre", "faire court "etc.... C'est vrai, sans doute, mais à un autre niveau, plus superficiel que le précédent .
D'abord, la mémoire n'est sans doute jamais vraiment aussi "soulagée",que devant la constatation d'une irréductible différence, celle entre le 0 et le 1, (exemple archétypique) , mais aussi la différence entre le fond de la feuille de papier d'une part, et d'autre part, à la fois la géométrie d'un signe (qui le différencie des autres) et l'encre dont il est écrit (qui le différencie du fond). En second lieu , que veut dire " faire court, " si ce n'est ,me semble-t-il , tâcher de rassembler , de subsumer ,sous une même différence,(celle du signe exposé) un ensemble d'autres : celà peut être efficace,(c'est ce qu'écrit Descartes) ,ce n'est évidemment jamais équivalent.

C'est sur des exemples ,et en particulier sur celui de l'avènement de la la notation cartésienne, que je traiterai de l'étude des signes en

Mathématiques ; c'est là où l'on observe, me semble-t-il, *in statu nascendi*, la façon dont tout système de signes se constitue d'abord chez un sujet, puis dans le *socius*.

A cet effet , je puiserai abondamment dans "A history of Mathematical notations " ([9]) de Florian Cajori. Ces deux tomes sont un vrai monument . Cajori , entomologiste minutieux, a en effet partout fouillé et recherché les diverses occurences de signes divers : il consacre par exemple seize pages ([9] p.200/216) à la description des signes, ou ensembles de signes, ou encore absence de signes ou dispositions typographiques destinées à rendre compte dans le passé et le présent ,de ce qu' aujourd'hui on appelle somme ou différence. Autre part, il consacre un chapitre à la dénotation de ce qui est inconnu dans un calcul ("signs for Unknown numbers" ; [9] p 339/341), ou bien à ce que j'appelle " comment on déroge dans l'écriture mathématique à l'ordre linéaire ": la question des signes d'agrégation. ([9] p. 342/356).)

Ce qui frappe tout d'abord le lecteur moderne, c'est le caractère contingent des ensembles de signes en Mathématiques.,qui, longtemps,ont été une affaire privée.

L' émergence d'un système de signes accepté par tous se fait lentement et douloureusement au cours des siècles ,se heurtant d'abord aux intérêts individuels dans tous les sens du terme : tel symbole émane de celui-ci , homme plus célèbre ou mieux en cour, ayant donc une plus grande faculté de publier, aussi aux rivalités de diverses sortes (on pourrait s'accorder autour d'un signe qui résume une ville contre une autre , ou bien rassemble une petite cour allemande contre sa rivale,etc..), aussi au caractère longtemps insulaire des travaux en Mathématiques : les chercheurs relativement éloignés géographiquement s'ignorant pour une part ,et développant chacun dans son coin un morceau de théorie ancré dans la notation.

"Enfin", vient le XVII° siècle , et des intérêts un peu plus légitimes parviennent à se superposer aux précédents : pour perdurer, un signe doit certes être déjà reconnu et utilisé par un assez grand nombre de mathématiciens.,ceci pouvant figer une situation de rapports de force déjà établie.,mais il doit désormais aussi montrer efficacité et plus grande adéquation à ses objectifs initiaux : distinguer, séparer, à quoi s'ajoute maintenant , être simple à imprimer.

L'analyse de la venue au jour d'un ensemble de signes " modernes " reconnus par tous , a donc pour moi quelque chose qui se décrirait en terme de sélection naturelle.

2) * Diophante et le cubo-cube.

Au début (enfin presque : 3° siècle avant J.C !), était Diophante
Descartes se réfère souvent à Diophante ,qu'il estime être un maître de ce qu'il appelle " l'Analyse des Anciens." De quoi s'agit -il ? Ecoutons Diophante en ses oeuvres dans les premières pages du livre I de"l'Arithmétique "([1] page 2) :

"Ainsi on appelle puissance le carré et sa marque distinctive est un Δ ayant comme indice un Y ; c'est à dire que la puissance est Δ^{Y} .On appelle cube ce qui résulte de la multiplication du carré par sa propre racine,et sa marque distinctive est un K ayant comme indice Y ; c'est à dire que le cube est K^{Y} .On appelle bicarré...c'est à dire que le bicarré est $\Delta^{Y}\Delta$."

Enfin,et plus bas (et après le cubocube,en passant par le carré-cube........!):

"Enfin,le nombre qui ne possède aucune des particularités précédentes,mais qui ne possède une quantité indéterminées d'unités s'appelle l'arithme et sa marque distinctive est ζ ."

On peut sûrement croire ici qu'il y a autant de "nombres" aux statuts distincts,, grandeurs connues ou inconnues de genre différent, avec des "marques distinctives" : les grandeurs -quarré, les grandeurs -cube, et puis la grandeur-inconnue tout court (l'arithme) ,qui ,venant après toutes les autres , est encore d'une autre nature. Toutes ces grandeurs sont désignées dans l'écriture par des symboles différents et sans grand véritable rapport logique entre eux .
Telle qu'elle est donc posée dès l'abord (début du livre I.des "Arithmétiques"), cette distinction entre type de grandeurs, - au moins pour les arithmes, carrés et cubes-, est clairement d'origine et intuitive , géométrique et semble un des piliers du temple mathématique chez Diophante . Cependant, et c'est ce qui s'offre à Viète et au premier Descartes (celui des *Regulae*) comme une contradiction , dans la suite de son texte , Diophante passe sans remords d'un type de grandeur à l'autre par un très long ensemble de règles-comptines (en mots ,donc.......) ,comme :" Le carré de l'arithme multiplié par son cube donne son carré-cube." ([1] page 4) ..De plus ,et surtout , les textes de problèmes de Diophante mélangent allègrement à chaque pas - et c'est évidemment leur intérêt !- les inconnues de divers types .Par exemple : " Trouver trois nombres tels que le produit de deux quelconques d'entre eux ,diminué du nombre restant,forme un quarré."([1] page 99 ; Problème XIII);

D'un côté ,donc : origine géométrique des choses et des noms de choses : côté ou racine,carré, cube etc.... ; de l'autre , calcul numérique sur des nombres .Pour Diophante, il n'est pas même question ici de confusion : s'agissant de nombres entiers : à un nombre , Diophante associe une longueur ,et à une longueur un nombre ; Il peut adapter la chose au cas des nombres fractionnaires.

Quant aux symboles, Diophante note donc ς d'une part , et Δ^{Υ} d'autre part. N 'importe quoi ferait évidemment l'affaire, pourvu qu'il ne se confonde pas avec un symbole que Diophante utilise à d'autres fins.

De sorte que Diophante nous livre par exemple ceci :

$K^{\Upsilon}\bar{\alpha}\,\Delta\,\overline{\iota\gamma}\,\varsigma\,\bar{\varepsilon}\,\overset{0}{M}\,\bar{\beta}$ " où $\overset{0}{M}$ est utilisé pour les unités et montrer que $\bar{\beta}$ ou 2 est le terme absolu et non une partie ......" ([9] , page 73)(*)

On peut appeler cette période le moment du *graffiti*, adéquat à dénoter le caractère individuel, presque clandestin ,de ce qui se met en place chez un écrivain lorsque, pour lui même et pour faire court dans la rude élaboration d'un texte , il fait choix d'un symbole ,que, confusément,il pense devoir être momentané, et ,en tous cas, le concerner seul. De cet instant, j'en parlerai aussi comme du "moment de la notation ", opposé donc à celui du signe,qui est social par nature.

3°)Res in Rem

C'est une situation courante en Mathématiques que quelque chose manque quelque part,et en même temps (car çà ne va pas necessairement ensemble), qu'on la recherche...Alors , d'une part, on lui donne un nom symbolique de "ce qui manque.", d'autre part - mais parfois seulement - on lui attribue un graffiti spécifique.

D'abord,et comme on sait ,ce qui manque, c'est ce qu'on désire .
C'est donc : "Couleur" pour les Indous, " dirham " (c'est à dire argent) ,ou encore "bien", ou "fondement" pour les Arabes , plus récemment et plus essentiellement en Europe : "la chose" ..De nos jours ,on dit "l'inconnue."
Les Indiens , donnent des noms de couleurs aux choses qui leur font défaut . Dans Brahmagupta,on trouve, par exemple : le noir, le bleu ,le jaune le blanc et le rouge (respectivement la seconde, troisième,quatrième,cinquième et sixième inconnue) ([9] ,p 379)(**)

(*) $(X^3 + 13X^2 + 5X + 2)$

(**) *ca* pour *calaca*(**noir**)(la seconde inconnue)
ni pour *nilaca*(**le bleu**)(la troisième inconnue)
pi pour *pilaca*(**le jaune**)(la 4°)
pa pour *pandu*(**le blanc**)(la 5°)
lo pour *lohita*(**le rouge**) (la 6°) ([9] ,p 379)

Dans cette histoire, les Arabes , voient pour leur compte des questions pratiques de possession matérielle, d'argent ,et d'héritage : Abou-Kamil (900 après J.C) modifie la pratique indoue , pour désigner les inconnues par des noms de pièces de monnaie. C'est encore un Arabe ,Al -Karkhî, qui,le premier , appele la première inconnue " la chose", la seconde "la mesure " (ou la partie)([9] ,p 379)
Mais c'est chez al -Kwarismí que la dénominations est encore la plus claire .Ecoutons Youschkevitch là dessus :

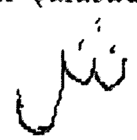
"En Algèbre,on considère trois sortes de nombres : les nombres simples ou dirham (de la drachme grecque ; unité monétaire) ,le gîzr (racine) ou say' (chose)....Le mâl est le produit de gîzr par lui-même........Dans la partie consacrée aux héritages et testaments, mâl signifie " bien." .le mot est très probablement la traduction du mot sanscrit mula qui signifie la racine d'un arbre ou d'une plante,mais aussi le fondement, l'origine,etc.... "([10] p. 35)

Plus tard et ailleurs, en Europe, Leonard de Pise , pour dénommer ce qui lui manque, utilise le nom latin, véritablement essentiel de " res." (la" chose ") , et l 'accord semble se faire autour de ce mot-valise .

Luca Pacioli ([9] , p 107) la dénomme pareillement "la chose" (la *cosa* italienne) ,et la *coss* allemande : aux XVI et XVII° siècles , l'inconnue-carré est ,de son côté, pareillement désignée d'un nom latin "census", qu' utilise par exemple Régiomontanus . Et c'est une maxime à l'époque que : "Res in rem fit census", (la chose multipliée par la chose fait de "l'inconnue carré") qui traduit bien le côté structurellement différent de "res" et de "census".

4) la question de la chose : le moment du graffiti :

C'étaient là les noms qu'on donne ' à ce qui manque".Il y a aussi la façon dont on l'écrit , c'est à dire, et s'il existe, le signe, et c'est une autre affaire : on a tout à l'heure vu le ζ, graffiti de Diophante ,
Voici des exemples d'autres graffiti bien connus des spécialistes :
Al-Qalasâdî utilise son graffiti pour l'inconnue :



et un autre différent (tout comme Diophante) pour l'inconnue-carré :

inconnues qui *surmontent* chacune leur coefficient ! ([9] p.93).

De même, pour les Européens : .Regiomontanus écrit un graffiti ressemblant à un $\bar{\psi}$ ([9], p 95) , un autre(ȡ) pour le carré .

Rudolff utilise un graffiti bien à lui (sorte de ℛ) ([9], p 135)

Stiefel ,de son côté, reprend bien la notation ℛ de Rudolff s'il utilise une seule inconmue ,mais change d'idée s'il en veut d'autres, qu'il dénomme alors A ,B ,C ,D ([9], p 139/41) .

Au milieu du 17° siècle (1647), l' anglais Oughtred, un homme plein de ressources en matière de notations ,écrit :

$$- 2 \text{ q} + 3 \text{ l} = 21$$

pour : *"moins deux fois le carré de la chose, à quoi s'ajoute la chose elle-meme valent 21"* ([9], p 190/91 et 337).
Oughtred repère donc logiquement ce qui manque dans le calcul par une absence ambigue : celle de toute notation.
Relativement à l'écriture de l'inconnue , Oughtred s'est donc ici comporté comme Cardan (non comme Viète) : il l'a indiquée par son absence (dans d'autres textes , Oughtred note l'inconnue A et Aq)

5) quadratus ,quadrata ,quadratum.

Commençons par un conte vraisemblable : au nombre 5 , écrit sur ma feuille de papier (ou sur le sable des iles grecques, ou sur un papyrus alexandrin......), j'associe 25, que j'écris côte à côte ,un peu à droite. Avec la même disposition, à côté de 13 , j'écris 169.

C'est maintenant la Renaissance,en Italie..Avec ce même objectif immédiat , Luca Pacioli écrit (dans " *Summa di Aritmetica*") d'un côté les nombres simples (*"simplices"*) de l'autre les carrés des *simplices"* (les "*quadrata* "), avec un trait horizontal tout simple entre les deux.

simplices		*quadrata*
5	____________________	25
13	____________________	169

([9], p. 111)

L'adjectif latin " quadratus" (convenablement décliné, bien entendu.......) rencontre un certain succès social, puisque de son côté , Cardan par exemple l'utilise isolément plus tard

5 quadratus ou 13 quadratus.

En sorte que dans l' *Ars Magna* vous pouvez par exemple lire :

"Probatio ut in exemplo , cubus & quadratus 3 aequantur 21".)

c'est à dire " la preuve est la même que dans l'exemple : "l'inconnue au cube à quoi s'ajoute trois fois l'inconnue au carré, valent 21." ([9],p. 116) L'inconnue en tant que telle ne figure donc pas dans l'enoncé de Cardan . Par contre, l''adjectif "cubus" qui s'y trouve a le même type de fonction que le "quadratus" (adjectif qualificatif latin , décliné, associé au nom d'une grandeur,qui doit être consécutivement et deux fois de suite multipliée par elle-même) .C'est à dire qu'en regard de : "5 cubus" , j'écris 125.

.Ce "quadratus" peu à peu se répand et se transforme chez certains auteurs, par exemple en se raccourcissant en " q" , plus simple et plus court à imprimer.

6) Cossiques (?)

L'idéologie véhiculée par le type de notations de Diophante , relayée par les Arabes se répand tant bien que mal en Europe au Moyen-Age et à la Renaissance..Pour les dénominations, on voit que c'est désormais "la chose" que l'on recherche : "Res" , donc, en Latin, elle est donc "cosa" pour les Italiens ,et "coss" pour les Allemands .Quant aux symboles ici employés, bien que peu reconnus et mal répandus ,on les appelle "cossiques". J'ai plus haut décrit la diversité et contingence des symboles pour désigner ce qui manque dans le calcul. Mais pour d' autres affaires mathématiques ,c'est pareil : le cossique, c'est un univers médiéval de symboles mal arrimés, divers ,contradictoires, pour désigner par exemple les injonctions mathématiques les plus courantes comme "fais la somme de ces deux grandeurs." ...." égale ces deux autres.",etc.....Néanmoins,et avec le temps , on se dégage peu à peu de l' écriture mathématique en langue naturelle (c'est à dire en latin !) comme tout à l'heure l'exemple de Cardan :

cubus & quadratus 3 aequantur 21

et vient laborieusement au jour la pratique et l'idée d'une écriture nouvelle qui serait faite de symboles spécifiques,(même s'ils continuent de différer beaucoup d'un homme à l'autre) ,qu'on peut commencer d'appeler une écriture mathématique,une écriture de l'Algèbre.......Cependant, plus on symbolise, plus on s'éloigne - mécaniquement - de la géomètrie et de ce support visuel intuitif très efficace qu'elle offre pour se représenter les grandeurs, qu'elles soient ou non. connues.

En d'autres termes,ce que commencent à écrire Regiomontanus ou Tartaglia par exemple c'est bien souvent une écriture formelle (la " chose " y est bien lointaine) , avec ce qu'elle recèle désormais de ludique et d'abstrait , où il n' y a plus guère de support géométrique à l'imagination dans le calcul.
Un exemplaire à l'état d'achèvement relatif et que , pour faire bref, je prendrai pour exemple , est cet ensemble de notations cossiques que, Descartes utilise dans le début de ses écrits mathématiques (1619 ! il a vingt trois ans) ,"Cogitationes Privatae "([3] ,pages 213 /256) , et sa lettre à Beeckman du 26 Mars 1619 ,([3] ,pages 154 / 156),où on lit par exemple :

"Atque hac arte quadruplo plures quaestiones et longe difficiliores solvi poterunt..........;13 enim diversa genera aequationes cubicarum numero,qualia tantum sunt tria aequationum communium :
nempe inter 1 ξ et 0 χ + 0 vel 0 χ - 0N, vel denique 0N - 0 χ ."

C'est à dire : " Et par ce quadruple moyen ,on pourra résoudre de nombreuses et difficiles questions : en effet je compte 13 sortes de cubiques,sur lesquelles trois équations communes :
c'est un fait que l'on a ou bien 1 ξ égalé à 0 χ + 0, ou bien à 0 χ - 0 N, ou bien enfin à 0 N - 0 χ ....."

Une 'équation commune " est une équation du second degré , que Descartes fait donc ici figurer dans son inventaire des cubiques. χ est est la chose cherchée (*res*) , ξ (*Census ou Quadratus*) est le carré, N (*Numerus*) le nombre absolu, et 0 une quantité connue, mais quelconque. Descartes attribue probablement à 0 (qui précède χ ou N) un statut d'opérateur , par quoi il le distingue donc de N. Tout ceci est un modèle de l'écriture cossique,avec chaque fois un mélange particulier de symboles et de langue naturelle (ici , par exemple, il y a un symbole + ; pas de signe spécifique pour l'égalité , représentée ici par "*et*".).

7) Viete et les constantes : la logistique suit

C'est la fin du XVI° siècle, le temps de Viète . François Viete construit une part de son système de notations contre un ordre (bien) établi : grandeurs données/ inconnues du calcul: il introduit en effet une notation symbolique par des lettres aussi bien pour les unes que pour les autres .Si pour les quantités inconnues, il y était d'une certaine façon tenu, (précisément parce qu'elles sont inconnues........) ,il n'en est pas de même pour les grandeurs constantes dont il peut s'assurer au contraire de la constance en écrivant chaque fois leur valeur numérique.

C'est donc une manière de procédé révolutionnaire . Voici Viète :

" Que ce travail puisse être facilité par un certain artifice,il est necessaire de distinguer les grandeurs données de celles inconnues et que l'on recherche par un symbolisme bien reperé,uniforme et facilement visible,comme on peut l'effectuer en désignant les quantités recherchées par la lettre A,ou par une autre voyelle E,I,O,U,Y et les grandeurs données par B,G,D ou d'autres consonnes. "(Viète ; Opera Mathematica ; 1646 p .8. Cité dans [9] p 183)

La " chose" devient donc chez Viète une grandeur inconnue que l'on recherche, avec pour exacte contrepartie la grandeur donnée. Ce qui frappe en effet dans ce texte, c'est que les deux types de grandeur (données/inconnues) sont ,par la notation de Viète ,mises sur le même plan (c'est ce qui est tout à fait nouveau) ,avant d'être à nouveau séparées et, par cette même écriture.

Son procédé, que Viète appelle " logistique spécieuse" , traite et manipule donc des lettres qui valent (?) pour des choses abstraites ,des "espéces", et prend sens de s'opposer à la logistique "numéreuse",qui ne veut connaître que des nombres.Celà autorise en même temps Viéte à changer de niveau et à passer (et nous faire donc passer......) d'un lot d'exemples spécifiés à un concept : celui de constante, implicitement dotée de ce statut paradoxal de grandeur fixée mais non explicitée, ni explicitable, quantité immuable mais qui ne peut être exhibée.On fournira du sens,dans l'après-coup , presque trois siècles plus tard avec la construction d'un endroit (ensemble) où "puiser" les constantes.

.Comme on peut le penser ,la notation de Viète était ,dans une certaine mesure, psychologiquement dangereuse et difficile à assumer - même si Viète prend soin de réserver deux types de lettres différents à des usages différents-, par le risque latent de confusion et donc le danger imaginaire de les voir se confondre qu'elle pouvait impliquer entre des objets jusque là posés comme distincts, et soigneusement étudiés comme tels.
Il ne faut pas aller chercher ailleurs,me semble-t-il, la durée extraordinaire entre les Grecs et Viéte : vingt siècles.

8) Viete : genres et scalaires.

Diophante,on l'a vu, associe (implicitement) un nombre à une grandeur, et une grandeur à un nombre.C'est sans problèmes s'il s'agit de nombres au sens de Diophante ,c'est à dire des entiers,éventuellement des fractions.

Mais dès lors qu'il s'agit peut s'agir de quantités imprécises, indéterminées - d'autant plus qu'elles sont désormais représentées par des lettres - alors , il y a un défaut chez Diophante, dit Viète ([2] ,page 24) ,qui estime que :

" La cause de l'obscurité des Analytiques des anciens est qu'ils n'ont pris garde à ces genres et n'ont entendu ces choses."
Les Anciens qui ont traité de l'Algèbre sans acception des genres adjoustoient et soustraoient indifféremment toutes les grandeurs les unes des autres,soit qu'ellès fussent de mesme ou divers genres,comme une ligne et superficie,un quarré avec son costé...."

Viète critique donc la position de Diophante ,(peut-être parce qu'il envisage sans le dire -et sans le savoir - de s'occuper, lui Viète ,d'autres choses que de nombres entiers ou fractionnaires), position qu'il juge inconséquente, et c'est lui qui propose une distinction nouvelle,en forme de compromis historique : *distinguer deux types* de qualités dans les grandeurs (qu'elles soient connues ou inconnues)..

Distinction majeure : d'abord, leur "genre " , qu'il définit par un premier type d'adjectif : planus ,solidus, planus-planus....Par exemple, A planus : signifie que A est une grandeur-carré ,ou ce que j'appelle une <u>inconnue-carré</u> ; de même ,A solidus que A est une inconnue-cube. etc......) . Au delà de planus-planus, il en est nombre d'autres : planus-solidus,solidus-solidus, etc...... Viète a évidemment puisé l'origine de ce concept de genre dans la distinction intuitive que lui procure la géométrie.

D'autre part, Viète examine la "scalarité" d'une grandeur , à laquelle il associe une seconde batterie d'adjectifs : quadratus, cubus, biquadratus..: A quadratus , par exemple, c'est l'inconnue A ou la grandeur A multipliée par elle-même , le <u>carré de l'inconnue</u> donc; de même, A cubus ,l'inconnue-cube. C'est un concept de distinction numérique sans doute valable pour lui à partir du support des nombres entiers ou fractionnaires.

Pour ce qui est du " quarré " ,chose essentielle , je dis donc que Viète a mis en forme quelque chose d'une distinction radicale entre "quadratus' et "census" .

Armé de cette distinction , Viète prescrit donc la régle d'or de l' 'homogénéité dans le calcul :" Pour autant qu'une grandeur doit estre adjoustée à une grandeur,et que les Homogènes n'affectent les Hétérogènes,les grandeurs proposée à adjouster sont Homogènes" ([2] page 30)

Il écrit donc légitimement

" Et si A q - D planus estoit donnée à adjouster à B planus - 2 D plani,la somme serait Aq + Bp - 3 Dp " ([2] page 31)

Ou encore,ailleurs,dans *l'Isagoge*, cette équation :

" B in A quadratum plus D plano in A aequari Z solido."(*) ([9] ,p. 379)

Récapitulons : D est un nom de grandeur connue , affublée de l'adjectif *planus*- à l'ablatif - qui attribue à D le genre" plan ". A est un nom de " chose" , c'est à dire d'inconnue , " *quadratus*" est l'adjectif latin (au nominatif....) et " A quadratus " est le carré de l'inconnue . " *Aequari* " est le verbe latin qui vaut pour l'égalité (dans sa necessaire forme passive).

Ouf...! Avec Viete ,on ne mélangera donc plus les torchons ("planus") et les serviettes ("solidus").......Le " 2" de l"exemple de la page 10 est un nombres entier , simplement mis pour la quantité de la chose considérée ,c'est à dire ici :"deux fois celle-ci qui s'écrit après ".

Comme d'autres, Viète peut aussi vouloir faire bref, (et aussi éviter les déclinaisons.......) , donc noter A q au lieu A quadratus .
Mais ,il lui faut également ,et comme chez Diophante ,des règles de composition des adjectifs : quadratus,cubus ,sursolidus etc..., ou des symboles : q, c, qq , qc , ..&c. .Viète en fait donc une table ([2] ,p. 41) Cette systématisation des comptines de Diophante ,est devenu ici un jeu codifié (par une table) sur les symboles :En voici le début :

Table des produicts des grandeurs scalaires

[illegible]	q	c	qq	qc	cc	qqc
q	qq	qc	cc	qqc	qcc	ccc
c	qc	cc	qqc	qcc	ccc	qqcc
qq	cc					
qc						
cc						
qqc						

Une fois assumées ses distinctions,et établies ses règles - qu'il veut intangibles- d'homogéneité ,Viète ne se pose pas,me semble-t-il, la question de "représenter à son imagination" le résultat de ses écritures,ce qui est au contraire un problème majeur de la psychologie et donc de la philosophie de Descartes , (Il y a une génération et demie entre Viète (1540- 1603) et Descartes (1596 - 1667))..Descartes,en effet, ne veut pas quitter le terrain de ce qui est pour lui la réalité interprétable.

(*) $B.A^2 + D^2A - Z^3$,où A est l'inconnue ,et où les consonnes sont les grandeurs connues.

9) Les "Cogitationes privatae" de Descartes

C'est faute de mieux, et à contre-coeur,que Descartes commence par utiliser pour ses débuts en Mathématiques (nous sommes en 1619 ; Viète est mort depuis seize ans) ,ce qu'il trouve sur le marché, c'est à dire les notations cossiques de Clavius .Dans ces écritures barbares , Descartes en effet, ne trouve pas - et c'est important pour lui- de signification intuitive aux symboles employés, ni même de ce qu'il recherche,c'est à dire le résultat du calcul. Milhaud ([4] ,page 42) note que Descartes cherche même à obtenir comme solution à ses équations cubiques des "longueurs" , et non pas des formules calculables. Descartes juge les notations cossiques compliquées (c'est à dire qu'elles ne parlent pas à son imagination ,ce qui n'était pas une question pour Viète), et ,dans ces premiers écrits, se trompe abondamment dans le calcul........

10) $2a^3$: *les "Regulae "*

Neuf ans plus tard, autour des années 1628, l'ambition de Descartes est devenue bien grande : il veut donner au monde " des Règles pour la direction de l'esprit" (*Regulae ad directionem ingenii,* ci-dessous notées *Regulae*),règles directement inspirées des reflexions et des prescriptions que lui procurent les mathématiques. Ce texte,ensemble de vingt et une règles ,dont seules dix-huit sont développées ,est une sorte de monument .Par le constant parallèle entre des prescriptions provenant du pur registre des mathématiques et celui des principes qui doivent gouverner,selon Descartes, tout esprit humain bien fait, ce texte est probablement,et avec le "Discours de la Méthode" ,où il reprend et épure les *Regulae*, un texte majeur de l'humanité en Occident, par ce qu'il y définit d'une forme de sujet.

Par exemple,le Régle IV ([5],page 15), est intitulée : *"La méthode est necessaire pour la recherche de la vérité".* Ce qui peut paraître un énoncé ontologique universel. Descartes , y cependant traite très abondamment des Mathématiques. Voici Descartes en ses oeuvres :

" Et maintenant ,il existe une espèce d'arithmétique,qu'on nomme algèbre,faite pour exécuter sur les nombres ce que les anciens faisaient sur les figures.............."" En vérité,il me semble que des traces de cette vraie mathématique se voient encore chez Pappus et Diophante,qui,sans appartenir aux premiers âges,ont cependant vécu bien des siècles avant nous. ([5],page 17)

(p 18) il y eut enfin des hommes d'un grand esprit qui se sont efforcés en ce siècle à la ressusciter: car la méthode qu'on appelle du nom étranger d'algèbre,n'est pas autre chose,semble-t-il, pourvu toutefois qu'on parvienne à la débarrasser des chiffres nombreux et des figures embrouillées qui la surchargent,afin qu'elle possède désormais cette clarté et cette facilité suprême qui doit se trouver comme nous l'avons dit,dans la vraie mathématique."

C'est en effet dans ce qu'il appelle la vraie mathématique que Descartes s'est proposé de trouver/retrouver la vérité ; pour atteindre ce grand résultat, il lui faut , à la fois se souvenir que Diophante en a détenu une part ,et aussi que les algébristes cossiques modernes, ses contemporains se sont " essayés à la ressusciter", mais,dit-il ,sans y parvenir , du fait d'une l'écriture qu'il faut donc absolument, selon Descartes, purger de tout ce qu'elle contient- cossiquement - de multiple ou d'embrouillé .

Comment faire ? Il s'en explique dans la règle XVI : Ce texte,est à juste titre considéré comme l'acte de naissance de toute la notation moderne , cartésienne . Il contient ,à mon avis, une contradiction féconde :

Voici d'abord l' énoncé même de la Règle XVI : ([5], p. 76)

"Quant aux choses qui n'exigent pas l'attention immédiate de l'esprit,quoiqu'elles soient nécessaires pour la conclusion,il vaut mieux les désigner par des signes très courts plutôt que par des figures complètes : car ainsi la mémoire ne pourra faillir,et la pensée ne sera cependant pas forcée de se partager pour les retenir,tandis qu'elle s'appliquera à en chercher d'autres."

et,plus loin (p 76) :

" ....et celà au moyen de signes très courts afin qu'après avoir examiné chaque chose distinctement suivant la Règle IX, nous puissions suivant la Régle XI, les parcourir d'un mouvement très rapide de pensée et avoir l'intuition du plus grand nombre possible d'entre elles en même temps."

Admirons au passage l'abnégation de celui qui , avant d'agir , étudie la règle IX, avant de lire la XI, pour enfin pouvoir aborder la XVI,et retenons que , pour Descartes,Il est essentiel donc que les signes soient" très courts ".C'est la seule exigence qu'il mette ici en avant.
Cette position me semble bien discutable .A mon sens,une "bonne " notation doit en effet gérer un compromis entre l'efficacité et la rigueur : des signes courts sont efficaces ; des signes trop courts portent en germe un risque de confusion avec d'autres.......ce dont Descartes ne semble pas se soucier ici.

.Descartes , dans les lignes qui suivent, et après avoir vanté les avantages de l'écriture ,déclare qu'il lui semble donc necessaire de rassembler sous un même signe,le plus court possible, tout ce qui est "unique dans la résolution d'une difficulté ". Par difficulté , Descartes entend ici problème ou question de mathématique à résoudre, et, par " ce qui est unique " toute quantité connue ou non. Ecoutons Descartes :

" Donc,dans tout ce qu'il faudra considérer comme un dans la solution d'une difficulté,nous le désignerons par un signe unique,qu'on peut imaginer comme on voudra. Mais pour plus de facilité,nous nous servirons des lettres a,b,c,etc...pour désigner les grandeurs déjà connues et A,B,C, etc...pour les grandeurs inconnues puis souvent nous placerons devant elles les chiffres 1,2,3,4 etc... pour exprimer leurs quantités,et d'un autre côté,nous leurs ajouterons ces mêmes chiffres pour exprimer le nombre de relations qu'on devra y comprendre "

Descartes est donc d'abord impeccablement fidèle à Viète qu'il a déclaré n'avoir pas lu.
Ensuite de quoi, viennent dans le texte ,ces trois assertions P1, P2, P3:

P1
" ainsi, si j'écris 2 a^3, c'est comme si je disais deux fois la grandeur dans laquelle entrent trois relations et qui est désignée par la lettre a ." (page 76)

On note d'abord en passant que Descartes pense - fort justement - qu'écrire (ici, des Mathématiques) ,ce n'est pas tout fait désigner la réalité des choses,mais seulement leur "comme si" , et plus précisement le "comme si " de leur énonciation . Plus essentiellement , P1 est un énoncé fondateur, véritable acte de naissance de tout simplement ceci : l'écriture d'une grandeur avec un petit chiffre à sa droite, en haut ,notation dite aujourd'hui exponentielle. Descartes,plus loin :

P 2 "' Il faut remarquer encore que,par nombre de relations,il faut entendre les proportions qui se suivent en ordre continu ,proportions que,dans l'algèbre ordinaire,on chercher à exprimer par plusieurs dimensions et plusieurs figures ,et dont on nomme la première *racine*,la seconde *carré*, la troisième *cube*, la quatrième *bicarré*, etc.." (page 77)

Ceci est une respectueuse paraphrase de la première partie du texte de Diophante ,cité plus haut. Ensuite :

P3".Ces termes m'ont moi-même longtemps trompé, je l'avoue,car après la ligne et le carré, rien de plus clair ne semblait pouvoir être proposé à mon imagination que le cube et d'autres figures semblables .Mais après beaucoup d'expérience,je m'aperçus ....qu'il faut rejeter entièrement de telles dénominations,de peur qu'elles ne troublent la pensée, car, quoiqu'on puisse appeler une grandeur cube ou bicarré,on ne doit jamais la présenter autrement à l'imagination que comme une ligne ou une surface ......" (page 77)
Par ligne , entendez la ligne droite : *linea recta* : une portion rectiligne du plan, et par surface quelque chose comme une portion du plan suffisamment régulière .
L'ensemble de ces trois énoncés me paraît contradictoire . Revenons d'abord à P1 : Utilisant une terminologie à la Viete ,on peut comprendre 2 a^3 dans P1 , ou bien comme : " deux fois **a cubus**" (interprétation "scalaire" ,"numérique", où"nombre " est pris ici au sens de Descartes, sans doute différent à la fois de Diophante et Viète), ou bien : "deux fois **a solidus**" (interprétation "géométrique", "en genre" au sens de Viète)

Si on choisit l 'interprétation "a cubus", alors la grandeur concernée est effectivement dénommée a ,mais le *"dans laquelle entrent trois relations"* n'a plus de sens selon P 2, puisque, dans ce cas, une grandeur dans laquelle entrent trois relations est par nature un solide, ce que a n'est pas nécessairement ici . Dans cette interprétation, néanmoins , P3 pourrait être rendue intelligible en termes numériques,car, ici, 2 étant un nombre entier, et moyennant une "unité d'emprunt " chère à Descartes , 2 a^3 peut désigner le volume double de celui du cube matériel de côté a .

Si on retient l'interprétation " a solidus" , alors P1 et P2 sont acceptables pour signifier deux fois la grandeur : "a solide." .Mais P3 devient énigmatique puisqu'il faut *"présenter à l'imagination"* un solide comme une ligne, alors que cette dernière espèce de grandeur est précisément construite de cette distinction.

La notation de Descartes assume donc une contradiction : à mon sens, elle désigne **à la fois** A cubus et A solidus , c'est à dire qu'elle mêle précisément ce que Viète prenait tant de soin à distinguer. Et je crois que Descartes dit vrai ,en assurant contre toute vraisemblance,qu'il n'a pas lu Viète,pourtant publié dans cette Hollande que Descartes connait bien.

Cette contradiction se trouve à la conjonction de deux mouvements de pensée : l'Analyse des Anciens et l'Algèbre des Modernes.et Descartes s'est par ailleurs très clairement situé à cette croisée des chemins ,déclarant vouloir prendre dans chacun ce qu'il y trouve de bon, les mêler et les concilier dans son oeuvre rejetant ce que chacun d'eux lui semble présenter d'imparfait pour corriger " l'un par l'autre"..Neuf ans après les *Regulae*, dans le "Discours de la Méthode , " le second Descartes , désormais plus sûr de lui, devient tout à fait clair sur le sujet :

"mais que,pour les retenir,ou les comprendre plusieurs ensemble,il fallait que je les expliquasse(*designarem* ; [7], p 221) par quelques symboles,les plus courts qu'il me serait possible ; et que par ce moyen,j'emprunterais tout le meilleur de l'analyse géométrique et de l'algèbre et corrigerais tous les défauts de l'une par l'autre." ([7],**page** 19.)

Descartes reconnait ici que dans la fabrication de sa notation, Il a été contraint par cette necessité de "comprendre ensemble " des objets dissemblables, c'est à dire de faire s'interpénètrer dans une même écriture (un calcul) des "res " et des "census" , des "x^2" et des "x^3" , choses qui sont à la fois homogènes et in-homogènes., semblables et différentes. On comprend aujourd'hui que le concept de polynôme est ici en germe dans la pensée même de Descartes.

Revenons donc à l'interprétation de 2 a^3 : c'est donc une certaine quantité (la quantité deux) d'une certaine grandeur.(a solide) Certes, Descartes peut numériser l'ensemble : il suffit simplement accompagner 2 a^3 (imaginairement ?) d'une" unité d'emprunt."(qui n'est là que par convention) Alors , 2 a^3 désigne une certaine quantité d'unités......Descartes pourrait s'arrêter là : c'est à mon sens la position définitive, l'aboutissement de Viète.
Ce qui est au contraire essentiel pour Descartes ,c'est - à si juste titre !-"son imagination. et ses sens" ("Discours" ,[7],page 19.,ligne 26) .Pour exister, pour lui, les choses doivent en effet pouvoir être représentées aux sens ..

Est donc , pour Descartes, ce qu'il peut être se représenter comme étant construit : les archétypes de ces existants sont ,dans cette ébauche que sont, pour une part, les *Regulae*,- la <u>ligne</u> et la <u>surface</u> . A ce moment , (1628), il lui est necessaire donc de montrer,- c'est ce qu'il fait dans les *Regulae* - comment il passe , pour ce qui est de la construction de la ligne à la surface et vice-versa.

<u>10) Le passage à la "ligne"</u>

Ce n'est pas commode d'assumer ouvertement en mots une contradiction inscrite et dissimulée dans une notation, et l'embarras de Descartes est manifeste dans la Règle XVI „ce que souligne le choix de ses mots (" Ces termes m'ont moi-même longtemps **trompé**, je l'avoue,car je m'aperçus ....qu'il faut rejeter entièrement de telles dénominations,de peur qu'elles ne **troublent la pensée**,.")

On peut d'autre part aussi penser qu'en1628, Descartes ,un peu effrayé par l' audace de sa démarche première, ne va pas jusqu"au bout d'une pensée subversive : à quoi bon en effet maintenir les surfaces, puisque les lignes peuvent suffire, et les lignes seulement ? nécessairement présentes dans toute construction ,les lignes sont aussi les plus simples..C'est sans doute ce que Descartes n'ose pas encore faire en 1628. .Et il est bien possible que son éditeur Hollandais, Van Schooten, ait ici mieux entendu Descartes que Descartes lui- même :
Ecoutons Cajory :

" Descartes préférait la notation a.a à a^2.....Fr. Van Schooten ,en 1646 ,suivait Descartes en écrivant q.q, x..x plutôt que q^2 , x^2 ,; mais dans l'édition de 1649 de la "Géomètrie",il utilisera de préférence x^2 " ([9]; p349)

Dans le "Discours de la Méthode " postérieur,et point d' achèvement sur cette question de l'évolution chez Descartes, seule demeure en effet " la ligne " :
"Puis,ayant pris garde que,pour les connaître,j'aurais quelquefois besoin de les considérer chacune en particulier,je les devais supposer en des lignes,à ,cause que

je ne trouvais rien de plus simple,ni que je pusse plus distinctement représenter à mon imagination et à mes sens "

Pour le premier Descartes ,il y a d'un côté les grandeurs qui existent dès qu'elles peuvent être construites,et de l'autres les "nombres ." Mais quelle est l'image (puisque c'est bien de celà qu'il s'agit) des nombres "cartésiens" ? Si , à tout" nombre" il peut associer une grandeur, qu'en est-il pour Descartes de l'autre question : à toute grandeur,quel que soit son genre, peut-on associer un nombre ?

Or, ce que postule implicitement la notation $2\ a^3$, c'est que c'est effectivement possible quelque part : en celà , cette notation est un coup de force fondateur : celui donc de dire qu'il est un endroit où puiser les nombres associés aux figures. Mais celà est compliqué, d'abord parce que c'est abstrait,c'est à dire précisément ce que Descartes voulait éviter ! (*)

D'autre part et surtout, cette notation ,me semble-t-il , va ici, et comme chez Viète, localement à l'inverse de sa fonction usuelle de séparation ,opération psychologiquement difficile : elle mélange par l'écriture " A cubus" et "A solidus". Il ne faut pas non plus ,à mon sens, chercher ailleurs l'extraordinaire longévité des notations de type diophantien,relayées dans l'algèbre cossique.

Dans la "Géométrie", Descartes a bien fait taire et scrupules et hésitations, et pris de l'assurance sur tous les plans. D'abord, seule demeure, royale, "la ligne." . Et c'est un achèvement :

Voici Descartes :

" Où est il est à remarquer que,par a^3, ou b^3 ou semblables, je ne conçoy ordinairement que des lignes toutes simples,encore que, pour me servir des noms usités en l'Algèbre, je les nomme des quarrés ou des cubes, &c. " ([6] , p.371)

En conséquence, l'écriture mathématique dans la "Géomètrie" ([6] , p. 373) est devenue ceci :

" ce que j'écris en cette sorte

.... ou $z^3 = + a z^2 + bb z - c^3$ ......

c'est à dire....... le cube de z est égal à a multiplié par le quarré de z,plus le quarré de b multiplié par z , moins le cubde c ; & ainsi des autres..........." ([6] , p.371)

(*) ,c'est aussi une contradiction peu simple à gérer mathématiquement : en droit mathématique pur, le bulletin de naissance des nombres réels,signé de Dedekind, date de 1873 ! C'est lui qui fait droit à la notation de Descartes.

Descartes a donc réglé ses problèmes de conscience avec l'homogénéité:

" je fais le triangle rectangle dont le côté LM est égal à b, racine carrée de la quantité connué bb & l'autre, LN, est 1/2 a, la moitié de l'autre quantité connue,qui était multipliée par z que je suppose être la ligne inconnue.." ([6], page 375)

Pour contourner ce roc de l'homogéneité, remarquons aussi (voir à ce sujet [13], page 48) que Descartes a utilisé ce que j'appellerai l' artifice de l'unité (qu'il dit parfois "d'emprunt "), qu'il avait introduite dans les *Regulae* , et qu'il érige en système dans la" Géométrie" :

" comme ,s'il faut tirer la racine cubique de $aabb$ - b, il faut penser que la quantité $aabb$ est divisée une fois par l'unité , & que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la mesme." ([6], p.371)

Je crois bien qu'il faut ici parler d'artifice : car, bien entendu ,en Géométrie , l'homogénéité demeure et demeurera un concept opératoire : une vraie tentative pour la prendre en compte (et non la faire disparaître) est sans doute la géométrie projective et ses coordonnées homogènes.

Cette notation cartésienne vient à son heure : pour Descartes d'abord, dont on comprend à la lumière de ceci combien il est hanté par ce que Milhaud appelle le "continu de la quantité.", qui me paraît en effet être le très nécessaire produit du rejet par Descartes (dans le" Discours") d'une certaine forme de contingence des objets mathématiques :

"..........ces sciences particulières qu'on nomme communément mathématiques ; et voyant qu'encore que leurs objets soient différents,elles ne laissent pas de s'accorder toutes,en ce qu'elles n' y considérent autre chose que les divers rapports ou proportions qui s'y trouvent,je pensai qu'il valait mieux que j'examinasse seulement ces proportions en général et sans les supposer que dans les sujets qui serviraient à m'en rendre la connaissance plus aisée.;même aussi sans les y astreindre aucunement,afin de pouvoir d'autant mieux les appliquer après à tous les autres auxquels elles conviendraient."

Ce qui 'émerge en effet ici, sous l'aspect contingent ,anecdotique, des carrés ,des cubes,etc.....,et en général de tous les "sujets" spécifiés , particuliarisés ,c'est l' aspect universel des "divers rapports ou proportions qui s'y trouvent. ".Descartes dit ici : "Il y a du Nombre."

Elle vient aussi à son heure sur le plan de l'efficacité. En effet, la nouvelle notation (dite désormais " exponentielle ") , est adoptée et répandue, ; on est désormais autorisé à écrire :

$$a^3.a^2 = a^{3+2} = a^5 \quad .$$

de sorte que le jeu sur les mots de Diophante et Viète devient ici un jeu sur les nombres : jeu connu ,éprouvé, permis,mémorisable .D'autre part ,la classification des inconnues- puissance (et aussi donc des puissances de l'inconnue) se fait désormais suivant l'ordre naturel de l'ensemble des nombres entiers d'où, en germe désormais, une rassurante classification d'équations et de courbes selon leur degré ,- instaurant enfin , là où c'était magma, l' ordre dans la nature et la maison - à terme aussi le concept de polynôme, en place d'un lot d'exemples spécifiés, concept qui se clive à son tour par le jeu d'une nouvelle différenciation : la distinction entre fonction et polynôme,etc....

Après Viète et Descartes, et par la grâce (douloureusement acquise) de la notation, rien n' a plus été comme avant en Mathématiques : il suffit pour s'en convaincre de comparer un texte du XVIII° siècle ,d'une part à un texte moderne, d'autre part à un texte du XVII° ou évidemment antérieur.Il y a, donc en cette première moitié du XVII° siècle, un saut épistémologique, permis par la reconnaissance d'une nouvelle écriture : en d'autres termes encore, les mathématiques,ont à ce moment accédé à un certain âge adulte,qui est celui de l'assomption du symbole.

11) Le moment du signe pur

Exit donc le moyen-âge cossique: la notation cartésienne nouvelle se .répand aussitôt presque partout en Europe:
Constatons que celle-ci est contingente : fruit du désir d'un homme, elle s'inscrit elle -même dans le cadre de sa conception d'un sujet coïncidant avec sa conscience, maître de sa raison, soumis à un Dieu lointain,mais présent. Cette notation cartésienne des puissances est là, me semble-t-il comme l'aboutissement d'une suite de syllogismes que je résume (un peu vite) : Dieu est garant de la clarté des Idées .La vérité ne s'atteint que par des idées claires. L'archétype de la vérité est la vraie mathématique. Or,elle-même ne se trouve authentiquement que dans une écriture qui ne soit ni confuse ,ni embrouillée.

Toujours est-il qu'en la seconde moitié du XVII° siècle, la notation de Descartes se répand à la fois très vite, chez de grands auteurs, et dans tous les pays. "La notation cartesienne fut utilisée par C. Huyghens et P.Mersenne dans leur correspondance....En Angeleterre, J.Wallis fut l'un des premiers auteurs à utiliser le symbolisme exponentiel de Descartes."([9], page 351).

Presque tous les mathématiciens s'accordent donc à noter X^2,X^3, X^4 .On a donc désormais $X.X = X^2$ Plus besoin de réciter la maxime : "Res in rem fit Census" , ici désormais résumée en trois signes.

On constate qu'aujourd'hui, et sur ce point , les mathématiciens de tous les coins de la planète utilisent la notation cartésienne pour ensemble de signes commun.

Remarquons en passant, et pour conclusion provisoire ,comment chacun d'entre nous sait bien ,qu'il est cependant tenu de le retrouver à l'occasion,ce moment historique du graffiti. Hier comme aujourd 'hui, pour véritablement "entrer" dans la démonstration d'un autre, la comprendre ,se l'approprier, pour pouvoir l'utiliser librement, (c'est à dire à autre chose.....) , il est nécessaire de la "rejouer", ,la plume à la main (comme dit Apéry) ,et pour celà d 'y introduire *nos notations* : en effet, il ne s'agit plus ici de signes, mais d'un mot qui fait retour : de notations, par quoi nécessairement le sujet se réintroduit dans son calcul.

Observons aussi que les mathématiques sont (avec la musique) la seule activité humaine où l'on parle de "notations."

Revenons aux puissances : " je " sais donc noter X^2 ou X^3 . Noter X^n est encore une autre affaire ; sa genèse est trop longue à exposer ici : un enfant demanderait, naturellement : que vaut n ? Sans doute requiert-elle le même type de démarche doublement difficile de Viète pour prendre en charge ces deux contradictions : d'une part, " le symbole " n " est arbitraire ,mais fixé ! d'autre part, qu'il faut un endroit où puiser les "n"......

Il y a cependant un temps,où "tout le monde " écrit X^n:.

Alors on a , avec deux nombres entiers n et p quelconques ,cette belle écriture

$$X^n . X^p = X^{n+p}$$

qu'on peut regarder , pour une part ,comme signant la fin d'une certaine préhistoire des mathématiques.

On pourrait appeler ce moment celui du "signe pur", succédant à celui de la "notation" ,un moment de vérité , avec un beau signe bien précis, à la signification assurée, si ce n'était me semble-t-il, un moment virtuel , théorique,davantage inscrit dans le temps "logique" que dans la chronologie.

13) Puissances,puissances.

En effet le signe , social par nature ,subit le sort des objets sociaux : dès qu'il est prétendument fixé par l'usage ,à la suite de la démarche personnelle de son créateur, il "travaille" chez les autres,à divers niveaux .Ce que j'appellerai le "jeu autonome des signes."

Commençons par une fable , qui prolonge l'exemple de X^n : aussitôt cette dernière nouvelle notation adoptée ,elle fait se poser ,en vertu de sa forme même , des questions dont l'énoncé n'était pas seulement pensable avant sa création . Je sais écrire un exposant . pourquoi pas alors un exposant sur un exposant ? Superposer deux nombres ? ceci désormais apparaît comme un assemblage permis par la nouvelle langue mathématique .Et donc cette question :

Que vaut X^{n^p} ? Par exemple 2^{3^4} ? Or si l'on se prend à calculer $(2^3)^4$ d'une part ,et $2^{(3^4)}$ d'autre part ,on comprend vite la différence !

Notation nouvelle , à peine créée pour mettre fin à l'ambiguité,elle en appelle aussitôt d'autres ,qu'il faut à nouveau prévenir par une autre notation , ici un signe d'agrégation : des parenthèses. Sous ce manque dans la notation cartesienne, pointe un concept : l'associativité : penser la non associativité, c'est en effet pouvoir penser l'associativité.

Ce premier effet des signes ,est de type "conscient" . C'est à dire que c'est de façon directe et "légitime," que le mathématicien s'aperçoit que cette superposition de deux tels assemblages récemment permis n'est pas autorisée, puisqu'ambigue. Quelque chose vient à manquer,aux effets cependants féconds, mais qui n'étaient en aucune façon le problème de Descartes : sa notation travaille ici chez d'autres évidemment en dehors de lui.

14) Exponentielles ,dit-il.........

Le second effet des signes est plus subtil,car,ancré me semble-t-il dans l'inconscient du sujet. Poursuivons la fable du "je."
"je" croit donc savoir ce que veut dire : 2^3, 2^4,.....2^n .

Et puis un jour,un jour de rêve éveillé, "je " se dit : "et si je remplaçais n par 1/2 . Ca n'a pas de sens............Une demi-fois deux ! Je peux toujours l'écrire avec des symboles ; çà ne garantit pas son existence,c'est de l'impossible,mais de l'impossible écrit ,ce qui n'est pas la même-chose......C'est ,par contre, carrément absurde à écrire en langue commune (une demi fois deux.).........Mais essayons néanmoins de trouver un lieu où gérer ceci."

"Supposons donc -pour un instant ,bien sûr ! - que $2^{(1/2)} = \alpha$ existe, et "vérifie les lois de l'Algèbre ordinaire" , c'est à dire l'écriture précedente :

$$\text{Alors} : \quad 2^{(1/2)}\, 2^{(1/2)} = 2^{(1/2)+(1/2)} = 2^1$$

$$\text{et donc} \quad \alpha^2 = 2.$$

De sorte que "je "est très enclin à *définir* $2^{(1/2)}$ par $\sqrt{2}$, et que, si "je "s'autorise à le faire de la sorte , alors la belle relation précedente

$$\alpha.\alpha = \alpha^2$$

sera une fois de plus vérifiée, ce qui au fond me satisfait pleinement.."

Ici donc, et pour donner sens à un symbole qui n'en n'a pas, on cherche et trouve particulièrement adaptée à l' objet du moment, dont on fait en sorte par la nouvelle définition qu'elle soit encore et toujours vérifiée.

L'écriture joue donc ici le rôle de pôle, je dirai de *paradigme*; ce mot un peu galvaudé me semble ici prendre un plein sens.

A ce stade,on sait écrire et comprendre $2^{\frac{p}{n}}$ avec p et n entiers . par exemple $2^{3/2}$.

Un autre jour de rêve éveillé," je" se propose de remplacer n par $\sqrt{3}$! Que pourrait bien signifier $2^{\sqrt{3}}$? Racine de trois fois deux ! Ca a certainement moins de sens encore.! Et un peu moins aisé , le détour pour trouver un lieu où ceci est jouable. A cette fin, on utilise encore une autre écriture ailleurs valide,dont on veut qu'elle le demeure ici. Pour ce faire,on utilise des Logarithmes,définis depuis le dix-septième siècle par Napier à son usage personne, fort différent ,de ce qui suit:.Voici l'histoire :

" Je " sait que par exemple : $\text{Log}\,(2^3) = 3\,\text{Log}\,2$,

Relation toute aussi vraie avec toute " puissance "r , entiere ou fractionnaire,c'est à dire qu'est valide la relation :

$$\mathrm{Log}(2^r) = r\,\mathrm{Log}2 \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Pourquoi donc ne pas définir $2^{\sqrt{3}}$ par la propriété :

$$\mathrm{Log}(2^{\sqrt{3}}) = \sqrt{3}\,.\mathrm{Log}\,2. \qquad ???$$

C'est possible, car d'une part : $\sqrt{3}$ .Log 2. est un nombre fort calculable, D'autre part, si le logarithme est connu, il est sûr que le nombre est connu. " Je "connait donc Log ($2^{\sqrt{3}}$). Et " je" en déduit" donc une valeur pour ($2^{\sqrt{3}}$).

C'est à nouveau ici le même mécanisme ; pour donner sens à un symbole qui n'en n'a pas, on cherche et trouve une écriture équivalente à d'autres, mais localement adaptée , et dont on fait en sorte par la nouvelle définition qu"elle soit encore et toujours vérifiée.

L'écriture paradigmatique est donc dans cet exemple :

$$\mathrm{Log}(2^r) = r\,\mathrm{Log}2.$$

Je n'en ai pas terminé avec le cas de l'exponentielle : x^r a désormais un sens avec r réel positif, et même irrationnel.,comme $\sqrt{3}$. Peut-on maintenant remplacer r par un nombre complexe ? Que peut bien signifier par exemple 2^i ? Procédé de définition analogue , mais un peu plus long : une écriture le rend également " possible" ,et je ne le développerai pas ici , :

Restant dans le cadre des puissances,on peut en effet encore raffiner : Et si " je" remplaçait r par une matrice (c'est à dire un tableau de nombres) ?

C'est encore une autre question, apparemment encore plus dépourvue de sens ,et évidemment encore plus loin de Descartes.....

Que peut bien signifier par exemple $2^{\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & -9 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$?

Clairement ,il me semble qu'il s'agit ici de la mise en acte d'un désir inconscient de mettre en rapport deux objets absolument dissemblables ; (ici un nombre, ayant pour exposant un tableau de nombres) , et qu'il arrive en Mathématiques - c'est le cas ici, mais je ne développerai pas davantage la technique spécifique de la chose , faite de matrices et de convergence de séries entières - qu' on puisse trouver un lieu où ceci soit jouable , un endroit mathématique donc où fournir sens à l'écriture.

Il s'agit là,à mon sens, d'une création métaphorique d'objet par rupture de sens , qui se fait à un moment où,comme dit quelque part " Schiller," la raison baisse la garde", et cesse de veiller aux portes...".

15)Paradigmes.

Voici d' autres mises en actes , plus récentes , donc un peu plus compliquées, mais aussi très exemplaires de cette même démarche.
Je crois d'abord qu'on peut y rattacher en Algèbre l'étude systématique des anneaux, dont on peut dire qu' elle a été entreprise afin qu'y soit toujours vérifiée d'une certaine façon, un théorème fondamental de l'arithmétique des entiers : la décomposition en facteurs premiers. Comme il apparaît que ce n'est pas possible sur un anneau quelconque, on fabrique des structures successives ,objets intermédiaires(idéaux de diverses sortes) ,en place de facteurs premiers,etc...Bref, l'écriture du théorème de décomposition en facteurs premiers joue ici le rôle de paradigme.

Un second exemple est celui des "fonctions de Dirac", qui étaient une authentique absurdité logique pour les mathématiciens et n'étaient certes pas des fonctions (nulles en dehors de l'orgine ,leur intégrale sur $\mathbb{R}$ est égale à 1 ! (cf;par exemple :[12] page 295), mais une métaphore opératoire pour les physiciens. Cà marchait quand on substituait ces pseudo-fonctions dans le théorème sur la transformée de Fourier d'un produit de convolution ,dont on voulait qu'il soit, lui , toujours vérifié .

Pour rendre ceci possible ,c'est à dire pour faire venir à l'existence mathématique une métaphore opératoire pour d'autres ,Laurent Schwartz a mis sur pied ce qu'il a "appelé une généralisation des fonctions : la notion de "distributions" qui, prend pour *définition* des nouveaux objets une des *propriétés* des fonctions bornées . Le procédé,modèle favori de l'axiomatisation consiste donc en un échange des places du sujet et de l'objet) : toute fonction localement intégrable est en ce sens une distribution,mais il y a des distributions que ne sont pas associées à des fonctions.Le résultat est donc que le théorème de la la transformée de Fourier marche "au sens des distributions", (elles sont faites pour çà !),mais qu'on récolte alors toute une dialectique de problèmes inouïs (en ce sens où il me semble que ,comme tout à l'heure Descartes, Schwartz n'y avait pas pensé en créant sa théorie) due ici à la bifurcation qui désormais peut se poser pour presque tout problème fonctionnel : telle propriété est elle valable "au sens des distributions"? ou seulement au "sens des fonctions"). L'écriture paradigmatique est donc ici le théorème sur la transformée de Fourier.

Restant dans cette même théorie des distributions , mais ayant changé d'écriture paradigmatique ,pour choisir cette fois la très immédiate formule d'intégration par parties, on parvient à trouver "dérivables" - au sens des distributions - ,des fonctions qui ne le sont pas.

Fournir des solutions à une équation qui n'en a pas, rendre dérivables des fonctions qui ne le sont pas,c'est une part du mouvement des mathématiques que de trouver un autre lieu ou poser et gérer les contradictions. L'écriture codée,en vertu de sa forme, postule ,mieux que d'autres,l'existence d'êtres écrits, et suggére métaphoriquement la création d'autres.

Rupture de sens qui n'est jamais plus sensible ni , comme on l'a vu, davantage appréciée , que lorsqu'elle met en rapport deux objets absolument hétérogènes : par exemple un sinus et une matrice ; ou bien un espace fonctionnel et une projection orthogonale. ou encore l'ensemble de matrices orthogononales et la compacité . Il y a une sorte de plaisir,comme une jouissance à mettre en relation deux objets tout à fait dissemblables. Dans un registre autre , Proust que c'est là une marque distinctive de son propre style.
La mathématique est donc un peut être un lieu d'où l'on se poser (et espérer résoudre) le type de question suivante : "Etant donnés une table de dissection et un fer à repasser existe t-il une place d'où l'on puisse les considérer comme équivalents ? " (selon un mot de Lautréamont)

On songe aussi irrésisitiblement à "l'Interprétation des Rêves" où ,selon Freud, ,l'inconscient apparaît comme un lieu d'où l'on peut considérer comme équivalents - pour le sujet, et par une longue chaîne d'équivalences valides pour lui dans sa logique structurelle inconsciente- deux hannetons et l'"Adam Bede" de George Eliot. (*le Rêve des hannetons*, [11] ,p. 252)

16) Un sens est une forme

On dira : et le sens dans tout celà ? Où le trouve-t-on. ? Comment peut on se permettre da pareilles fantaisies ? Comment expliquer qu'elles soient légitimées dans l'après-coup à la fois en Mathématiques et dans les sciences appliquées ? Quel rapport en Mathématiques entre le signe et le sens ?
Ces questions méritent évidemment une autre étude. Je voudrais conclure - sans clôturer - par deux remarques éparses sur le signe, les Mathématiques et le sens.

D'une part il faut noter que la linguistique contemporaine a quelque peu bousculé des conceptions naïves du signe et du sens : le signifiant mathématique (comme tout autre) ne se définit ,ni plus,ni moins., que par tout ce qu'il n'est pas : seules signifient des différences , les oppositions à tous les autres symboles : .C'est une position constante des linguistes depuis Saussure, qui se redouble en ceci : il en est exactement de même du sens , qui n'est autre chose que la contrepartie du signifiant (l'autre "face de la feuille" de papier) : dès lors, " un sens , c'est une forme." (.[11] ,page 882),

J'ai, pour ma part , essayé de montrer dans cet article, que le libre jeu sur les signes est, en Mathématiques , bien davantage clair, possible et licite (si ce mot a un sens) qu'ailleurs , dès lors que les Mathématique s'écrivent par symboles hors la langue commune .C'est donc pourquoi ceci est demeuré difficile - presque impossible peut être , à l'exception de ce qui s'écrit en chiffres dans un système de numération - tant qu'elle s'est inscrite dans le cadre de la langue naturelle , qui est donc paradoxalement ici bien plus strict .Sans doute ce phénomène tire -t-il son orignie de l'écart très grand qui existe en Mathématiques entre symbole et réel , écart qui autorise donc- en dépit ,bien entendu , de la prétendue univocité du signe - tous les jeux de l'imagination, mais à la condition expresse de trouver ensuite un lieu - mathématique - où les légitimer .

Michel SERFATI

Bibliographie

[1] **Diophante d'Alexandrie** ;"Les Arithmétiques " ; avec une introduction et des notes par Paul Ver Eecke ; Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard ; Paris 1959

[2] **François Viète** " INTRODUCTION EN L'ART ANALYTIC" ou "NOUVELLE ALGEBRE" *OEUVRE DANS LEQUEL SONT* veus les plus miraculeux effects des sciences mathématiques pour l'"invention et solution tant des problèmes que des Théorèmes proposez en icelles ; TRADUIT EN NOSTRE LANGUE et commenté et illustré d'exemples par J.L Sieur de VAU-LEZARD Mathématicien ; Fayard Editeur . Paris .

[3] **Descartes** : Oeuvres de Descartes .Edition Adam et Tannery. Tome X ; Librairie Philosophique J.Vrin. ; Paris 1986.

[4] **Gaston Milhaud** : "Descartes savant" ; Librairie Félix Alcan .; Paris 1921

[5] **Descartes** : " Oeuvres et lettres " ;Edition de la Pleïade. (pages 5/87) " Règles pour la direction de l'esprit" . ; traduction de G.Le Roy.

[6] **Descartes** : Oeuvres . Edition Adam et Tannery ; Tome VI (pages 39/488) *"Regulae ad directionem ingenii"* ; Librairie Philosophique J.VRIN Paris 1986.

[7] ;**Descartes** . "Discours de la Méthode " ; texte et commentaire de E. Gilson ; Librairie Philosophique J.VRIN ; .Paris 1962.

[8] **Paul Ricoeur** ; "Signe et Sens " ; Encyclopaedia Universalis ; tome XVI p.881/884

[9] **Florian Cajory** ; "A history of Mathematical notations " Volume 1 ; " Notations in elementary Mathematics" ; The Open Court Publishing Company (La Salle . Illinois)

[10] **A.P Youschkevitch** : "Les Mathématiques Arabes.(VII° - XV° siécles) ".; avec une préface de René Taton ; J. VRIN Editeur Paris 1976.

[11] **S. Freud** :" L'interprétation des Rêves." traduit par E .Meyerson Presses Universitaires de France ; Paris ; édition de 1980.

[12] **Paul Kree** " Distributions" ; Encyclopaedia Universalis. (tome VI page 295).

[13] **Gilles G.Granger** : "Essai d'une philosophie du style " ..Armand Colin éditeur ; Paris 1968.

****

Histoire des mathématiques dans la formation des professeurs de collège

(F. Eyssette et M. Zerner)

Le stage

Il s'agit d'un stage dit de "didactique" : 20 journées de deux fois 3 heures (hebdomadaires); 6 stagiaires professeurs de collège (certifiées ou PEGC formées dans le Centre de Formation de PEGC), très motivées (presque pas d'absences alors que certaines avaient 2h de trajet dans chaque sens). Le gros de l'encadrement était assuré par deux groupes IREM; quelques intervenants universitaires.

Le stage comprenait 5 modules:

1. Initiation au raisonnement géométrique
2. Activités numériques comme préparation à l'analyse
3. Activités géométriques centrées sur l'utilisation de Logo
4. Histoire des maths
5. Gestion de données et fonctions.

Conception du module d'histoire des maths

Sa place dans le stage. Il occupait 6 séances. Pour l'insérer dans un minimum de cohérence du stage, on a cherché à en faire un appui aux modules géométriques. Il faut noter qu'avec le module Logo (où l'acquisition de la technique a pris trop de temps) il était le seul à ne pas s'appuyer sur des activités expérimentées en classe.

L'organisation générale a été la suivante. Trois séquences de deux séances chacune. Par ordre chronologique:

- programmes et manuels du premier cycle vers 1910
- Euclide
- naissance de la géométrie analytique (Fermat, Descartes)

Pour chaque séance (rappelons qu'elles sont de trois heures), on a prévu un exposé magistral et une étude de textes, la plus grande partie du temps étant consacrée à la deuxième. Nous ne parlerons pas ici de la troisième séquence. Les deux premières ont été centrées sur le deuxième cas d'égalité des triangles pour deux raisons. *Primo*, les cas d'égalité des triangles ont été un morceau typique de l'enseignement de la géométrie jusqu'à la réforme "des maths modernes". *Secundo*, le deuxième cas est démontré très au début des éléments d'Euclide (prop. 4 du livre I) d'où la possibilité de l'aborder avec un minimum de préliminaires.

Première séquence: 1910

Les textes avaient été distribués à l'avance.

Première séance: lecture et discussion des programmes(1) avec quelques indications sur l'organisation scolaire de l'époque (qui sera reprise plus en détail dans la séance suivante). Comparaison des démonstrations dans trois manuels:

Ch. VACQUANT et A. MACE DE LEPINAY *Premiers éléments de géométrie* 4ème édition conforme aux programmes du 27 juillet 1905, Masson 1911 (un manuel de lycée standard de l'époque)

E. BOREL *Géométrie* Armand Colin 1910 (un manuel soi-disant destiné aux élèves des Ecoles Normales primaires, des Ecoles Primaires supérieures,des aspirants et aspirantes aux Brevets de l'Enseignement primaire et des Lycées et Collèges de jeunes filles; en fait, il s'adressait surtout aux professeurs)

LACABE-PLASTEIG *Géométrie Expérimentale appliquée aux travaux de la femme* Juven, sans date (même destination scolaire).

Nous profitons de cette occasion pour remercier la bibliothèque de l'INRP qui a mis ces ouvrages à notre disposition. (On trouvera en annexe ces trois démonstrations, ainsi que celle d'Euclide.)

Deuxième séance: exposé d'un Maître de Conférences d'histoire sur l'histoire de l'enseignement en France de Jules Ferry à nos jours, puis travail sur des exercices de Lacabe-Plasteig.

---

(1) On les trouve naturellement dans les recueils de lois et règlements de l'instruction publique, mais aussi dans Th. ROUSSEAU Rapport sur la géométrie dans SFCIEM *Rapport sur l'enseignement des mathématiques en France* vol. 2 Enseignement secondaire, sous la direction de M. Bioche, Hachette 1911 (le sigle signifie "Sous-commission française de la Commission internationale pour l'enseignement des mathématiques"; il existe des rapports contemporains pour une série de pays).

Deuxième séquence: Euclide

Nous avions distribué à l'avance une brochure de l'IREM de Nice donnant un résumé de l'histoire des mathématiques grecques. Le début de la première séance est consacré à la lecture du début des *Eléments* jusqu'à la proposition 4 (traduction de Peyrard 1814). Nous avons ensuite demandé aux stagiaires de comparer la démonstration avec celles des manuels de 1910. Pour finir, nous leur avons distribué une page de l'exécrable "traduction" de Kaias, avec le texte grec (la différence saute aux yeux, même si on ne connaît pas de grec).

Nous tenions à ce que les stagiaires comprennent qu'en histoire des maths comme ailleurs il n'y a pas de vérité révélée. La deuxième séance a donc commencé par quelques explications que nous avons données sur la transmission du texte. Il peut être utile de donner ici quelques détails. Jusqu'au début du XIXème siècle, tous les manuscrits qu'on connaissait, qu'ils soient arabes, traduits de l'arabe ou grecs portaient la trace d'une révision faite à la fin du IVème siècle après Jésus Christ par Théon d'Alexandrie. C'est Peyrard qui s'est aperçu que le manuscrit appelé *Vatican 190* n'était pas passé par cette révision (on l'a appelé par la suite manuscrit P en son honneur). A ce jour c'est toujours le seul manuscrit "préthéonien" qu'on connaisse. En 1804, Peyrard publia une première traduction. Il connaissait déjà le manuscrit P mais n'en a tenu compte que pour indiquer certaines modifications en note. La distribution des axiomes et des demandes est un point où la différence entre les deux versions est nette. Nous avons donc fait comparer ce passage dans les deux traductions de Peyrard.

Comme il restait du temps, nous avons encore travaillé la suite du texte, sur le thème du postulat des parallèles.

Les réactions des stagiaires

Lors de la préparation du stage , les stagiaires avaient déclaré préférer faire de l'histoire des maths plutot que de l'histoire de l'enseignement . Ceci nous avait semblé curieux , mais qu'attendaient-elles de ces séances ?

A la première séance de la première séquence on leur donna les démonstrations du deuxième cas d'égalité des triangles chez Borel , Vacquand et Lacabe-Plasteig avec comme consigne de les lire et de les comparer . La lecture fut lente et difficile par manque d'éducation géomètrique chez les plus jeunes (en grande majorité) puis suivie d'un long silence et même de réactions énervées : " que doit-on faire ? " , "c'est tout pareil" . On dut un peu leur tirer les vers du nez pour faire démarrer la discussion . Nous voulions entre autre leur faire remarquer des différences de rigueur : pour amener les deux triangles à coïncider Borel utilise la notion de symétrie (qu'il a introduite au début) , Vacquand une notion de "du même coté" (il ne traite la symétrie qu'à la fin de son livre) et Lacabe évacue le problème en utilisant des triangles "semblablement disposés" . La discussion s'orienta ensuite sur la définition des angles , point noir de l'enseignement .

La deuxième séance de la deuxième séquence débuta par un exposé sur les différent manuscrits des éléments d'Euclide , la transmission arabe , la révision des éléments par Théon d'Alexandrie au IV° siècle . Les stagiaires étaient plus à l'aise devant ce retour au cours magistral . Ensuite on compara deux traductions des éléments par Peyrard avec moins de difficulté qu'à la séquence précédente .

Lorsqu'on fit le bilan avec les stagiaires il apparut qu'elles attendaient plus des exposés de culture générale , qu'elles avaient été surprises par le fait que remonter dans l'histoire n'était pas remonter dans la scolarité ("Euclide ne fait pas le programme de sixième , c'est compliqué") , qu'elles auraient voulu quelque chose de plus directement utilisable dans leur enseignement (mais n'est-ce pas contradictoire avec leurs vœux initiaux ?) , et qu'elles se demandaient souvent ce que l'on cherchait dans ces comparaisons de texte .

Nous pensons que nous aurions dû commencer par faire nous mêmes une comparaison de textes . Il est cependant difficile de faire comprendre l'importance de ces analyses souvent perçues comme du pinaillage : il manquait aux stagiaires tout un acquis culturel pour voir dans ces textes des évolutions de ce qui est implicitement admis , du concept de rigueur .

Discussion

Elle a surtout été marquée par deux interventions d'enseignants qui ont participé à des actions de formation permanente des enseignants en histoire des maths dans des cadres différents. Ces interventions n'ont pas été notées sur le moment et les intervenants n'ont pas envoyé de résumé. Dommage!

LACABE-PLASTEIG

Inspecteur de l'Enseignement primaire à Paris

Géométrie Expérimentale

Appliquée aux travaux de la femme

Coupe, Couture, Dentelle, Dessin, Ouvrages de fantaisie

Écoles primaires supérieures, Cours complémentaires, Écoles normales, Écoles professionnelles, Lycées et Collèges de jeunes filles.

PARIS

Société d'Édition et de Publications

Librairie FÉLIX JUVEN

13, Rue de l'Odéon, 13

§ 2. CAS D'ÉGALITÉ DES TRIANGLES

68. Triangles égaux. — Deux triangles sont égaux quand ils sont superposables.

On fait glisser un triangle sur le plan, pour l'amener sans déformation au-dessus d'un autre triangle, après lui avoir imprimé une suffisante rotation à droite ou à gauche, au cas où deux côtés ne sont pas parallèles. Si le premier triangle se superpose exactement au second, que les sommets et les côtés coïncident, on dit qu'ils sont égaux.

Deux triangles égaux ont leurs côtés et leurs angles deux à deux égaux.

Il n'est pas indispensable de démontrer l'égalité des six éléments d'un triangle (3 côtés et 3 angles) aux six éléments d'un autre triangle, pour établir que ces deux figures sont égales. Un triangle est déterminé quand on connait trois de ses éléments, dont un côté au moins. Il suffit donc de démontrer l'égalité de trois de ces éléments dans un triangle avec les éléments correspondants dans un autre triangle, pour conclure à l'égalité des deux figures : c'est ce qui résulte des trois cas d'égalité ci-après des triangles.

69. **Théorème I.** — Premier cas d'égalité. — *Deux triangles sont égaux, quand ils ont un côté égal adjacent*

à deux angles égaux chacun à chacun, et semblablement disposés.

Par hypothèse, dans les triangles ABC et A'B'C' (*fig.* 128), le côté AC = A'C', l'angle A = A', l'angle C = C'.

Pour démontrer l'égalité de ces deux triangles, il suffit de faire glisser A'B'C' dans le plan, ce qu'on peut faire en le décalquant, jusqu'à ce que le côté A'C' recouvre le côté AC, son égal, A' étant en A, C' en C. Comme l'angle A' égale l'angle A, A'B' s'applique sur AB ; de même, en raison de l'égalité des angles C et C', le côté C'B' s'applique sur CB. Le sommet B' appartient, par suite, aux côtés AB et BC : il concorde avec le seul point commun à ces droites, B. Les triangles coïncidant dans toute leur étendue sont égaux.

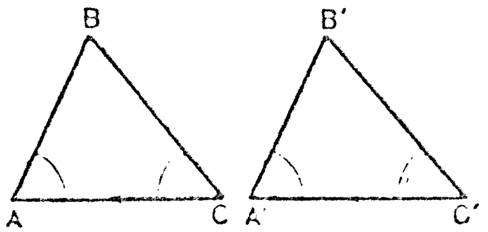


Fig. 128. — Premier cas d'égalité des triangles.

70. **Théorème II.** — Deuxième cas d'égalité. — *Deux triangles sont égaux, quand ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun, et semblablement disposés.*

Par hypothèse, les triangles ABC et A'B'C' (*fig.* 129) ont été construits de telle manière que le côté AB = A'B', le côté AC = A'C' et l'angle A = A'.

Transportons par glissement le triangle A'B'C' sur le triangle ABC et amenons le côté A'C' à recouvrir le côté égal AC, les extrémités A' et C' étant en A et C. L'angle A' égalant l'angle A, le côté A'B' se place sur AB ; comme le côté A'B' égale AB, le sommet B' s'applique sur B. Par suite, B'C' recouvre BC, et les deux triangles coïncident ; ils sont égaux.

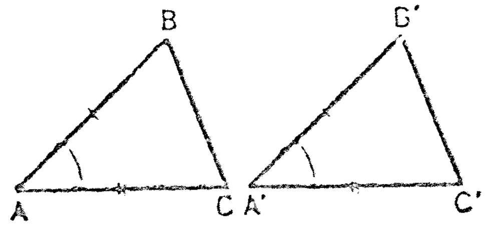


Fig. 129. — Deuxième cas d'égalité des triangles.

71. **Théorème III.** — Troisième cas d'égalité. — *Deux*

TABLE DES MATIÈRES

PREMIÈRE PARTIE

Géométrie plane

DEUXIÈME PARTIE

Géométrie dans l'espace.

Imp. PAUL DUPONT, 4, rue du Bouloi. — Paris. — 780.10.1909. (Cl.).

LISTE DES PARTICIPANTS

ANDREIS A.M.	14, rue Jean Jaurès 83100 TOULON
ANGERS Françoise	109 rue Pierre Brossolette 93160 NOISY LE GRAND
ANNOYE Marc	23 Avenue H. Pauwels 1200 BRUXELLES BELGIQUE
BAILLY Dominique	5 rue Massenet 67000 STRASBOURG
BARBIN Evelyne	6, bis rue de la Pelouse 72000 LE MANS
BARREAU	23 rue Goethe 67000 STRASBOURG
BARTEZ Annie	S.P. 69037
BELLEMIN J.M	8, Rue Vau de Levée 89700 TONNERRE

BRASSELET A.Marie	132 Avenue de la République 59110 LA MADELEINE
BREGEON J.L.	La Croix de la Faloterie 03400 YZEURE
BUHLER Martine	16 allée de Fontainebleau 75019 PARIS
BUSSER Elisabeth	90 Lauchwerb 68000 COLMAR
CALLENS Stéphane	485 Résidence Deleneuville 59134 FOURNES
CHAMPIER Sylvie	1 CHAMP CLAUDINE 55100 VERDUN
CHEMLA Karine	3, Squarte Bolivar 75019 PARIS
CLAPIE Mireille	Rue Chèlève 32000 AUCH
CLAUSS Evelyne	36A Champenay Plaine 67420 SAALES
CLEMENTZ Christine	12 rue du Renard Prêchant 67000 STRASBOURG

DEMARS Michel	11 rue des Tilleuls - SURBOURG 67250 SOULTZ SOUS FORET
DENEUFBOURG Carine	2, Venelle de Octroi "Les Bouleaux" App. 1300 WAVRE BELGIQUE
DERVIEUX Martine	3 rue Watteau 59800 LILLE
DIEBOLT Catherine	22 route de Schweighouse 67500 HAGUENAU
DJEBBAR Ahmed	11 rue des Quatre Vents 92380 GARCHES
DOPFFER Martin	11 Rue du Taur 31000TOULOUSE
DOSTAL Françoise	Saint Sulliac - LEHON 22100 DINAN
DREYER Robert	4 rue du Cimetière ?
DULAC- FAHRENKRUG	Dreikönigstrasse 13 7800 FREIBURG R.F.A.
DURAND Jean Bruno	3 rue de la Savonnerie 76000 ROUEN

GESLIN Simone	14 Rue A. Soury 72540 LOUE
GIANORDOLI Monique	16 rue Pasteur 51370 SAINT BRICE
GIRAULT Dominique	3 Place de l'Europe 68300 SAINT LOUIS
GISPERT Hélène	4 rue Carnot 91120 PALAISEAU
GLAESER Georges	2A rue de Neuchatel 67000 STRASBOURG
GOMEZ-BERMUDEZ	c/Puig d'en Colomer 64 BANYOLES GERONA ESPAGNE
GOURET Alain	32 Rue des Essarts 69500 BRON
GRENIER Dominique	Les Ormeaux - Avenue de Solages 81400 CARMAUX
GUICHARD J.Paul et Jacqueline	Le Chemin Vert Boisvert-Letallud - 79200 PARTHENAY
GUILLEMOT Michel	10 Impasse de la Pélude 31400 TOULOUSE

HUG Eliane	30 rue Daguerre 68200 MULHOUSE
ITARD Gilles	Les Hugaux Luceau 72500 CHATEAU DU LOIR
JABOEUF François	Bt A Résidence Les Cèdres 253 rue de la 34000 MONTPELLIER
JAMM Francis	20 Avenue R. Schuman 68100 MULHOUSE
JOZEAU M. Françoise	12 Clos des Gatines 95270 LUZARCHES
JUNG Claude	Rue des Bergers WITTERSDORF 38130 ALTKIRCH
KAHN Claudine	20, rue de Copenhague 67000 STRASBOURG
KELLER J.Paul	48 rue des Martyrs de la Libération 31400 TOULOUSE
KELLER Olivier	2, rue de Bruxelles 69100 VILLEURBANNE
KNERR Paule	25 rue Michel le Comte 75003 PARIS

LEGER Christian	9 rue des Prairies 75020 PARIS
LEGRAND Eliane	2 Place R. Schuman 67500 HAGUENAU
LELOUARD Monique	Le Frontonnais 14, Av. F. Roosevelt 76120 LE GRAND QUEVILLY
LEVY Tony	17 rue Auguste Comte 92170 VANVES
LORIT Serge	9 Avenue du Père Lachaise 75020 PARIS
MAA Abderrazzak	20 quai des Pêcheurs 67000 STRASBOURG
MAGGION Jean	Lycée Gabriel Fauré 09000 FOIX
MAREC Yannick	101 rue de Bihorel 76000 ROUEN
MARIN Francine	7 Impasse des Frênes 42100 ST ETIENNE
MARTIN J.Marie	Ap. 67 79 Chaussée de César 18400 SAINT FLORENT/CHER

MOLARD Janie	Darfstrasse 68 8126 ZUMIKON SUISSE
MORELL Paule	38 A rue Lanchy 25000 BESANCON
MULLER Alfred	18 rue du Meunier 68200 MULHOUSE
NOTTARA Danielle	16 rue E. Chatrian 67000 STRASBOURG
OLIVIER J.Pierre	13 rue des Essieux 34660 CRURNONTERRAL
OSIUK Annie	8 rue Vincent d'Indy 07300 TOURNON
PAQUELIER Yves	44 rue du Muguet 78120 RAMBOUILLET
PAUL Philippe	8 rue Pépin 93100 MONTREUIL
PAUMIER Alain	35 rue Marguerite EBERENTZ 24000 PERIGEUX
PEREZ Monique	9 rue de Londres 67000 STRASBOURG

ROMMEVAUX M.Paule	26 Rue du Petit Chênois 25200 MONTBELIARD
ROPERT André	L'ancien Presbytère de Vasteville 50440 BEAUMONT-HAGUE
ROUCHE Nicolas	12 Place de la Neuville B-1248 LOUVAIN la NEUVE BELGIQUE
SAMON Françoise	50 rue Marie Noël 78180 MONTIGNY LE BRETONNEUX
SCHIESSER Frédéric	28 Avenue Kennedy 68200 MULHOUSE
SCHLADENHAUFEN Odile	24 Avenue de la Forêt Noire 67000 STRASBOURG
SERFATI	47, rue Mr le Prince 75006 PARIS
SICRE J.Pierre	78 P.F Proust 79000 NIORT
SIP Jacky	4 rue H. Berlioz 59135 WALLERS
SOKELAND Simone	5 rue d'Oseille 51100 REIMS
SOR Solange	430 Résidence des Coteaux 31520 RAMONVILLE ST AGNE

VITORGE NICOLE	31 Rue de Maubeuge 75009 PARIS
VOGEL Nicole	48 rue des Carrières 67500 HAGUENAU
WILL Emmanuel et Anne	26 rue du Muguet 67470 SELTZ
WURTZ Jean Paul	11 rue du Barrage 67300 SCHILTIGHEIM
ZERNER Martin	Villa Stella Chemin des Pins 06000 NICE
ZILLIOX André	26 rue du Président Pompidou 67270 HOCHFELDEN