Conclusion

Notre sentiment est donc que la démarche générale de Cauchy concernant la question centrale des accroissements finis présente de nombreux avantages, essentiellement la simplicité des preuves et leur caractère opératoire.

Le problème épistémologique suivant se pose donc :

Pourquoi a-t-on, à un certain moment, décidé de faire compliqué quand on pouvait faire simple ?

En d'autres termes : pourquoi a-t-on choisi comme concepts de référence des concepts qui d'une part sont non opératoires et, d'autre part, rendent les preuves inutilement subtiles et compliquées ?

Des avantages de même nature s'appliquent aussi au traitement de la continuité en version "uniforme".

Néanmoins, il serait abusif de prétendre que tout est toujours plus simple en version uniforme. Les trois notions : "continuité en tout point", "continuité uniforme sur tout intervalle fermé borné", "continuité localement uniforme", ne sont pas équivalentes du point de vue algorithmique (opératoire), mais certaines preuves ne fonctionnent que dans le premier cadre, tandis que d'autres sont plus simples dans le deuxième cadre.

En outre des fonctions tarabiscotées de toutes sortes se sont imposées *dans la pratique* (fonctions intégrables au sens de Lebesgue, espace de Hilbert des fonctions de carré sommable...) sans qu'on se soit d'emblée rendu compte que ces objets n'avaient pas leur statut le plus naturel en tant que fonctions, mais en tant qu'éléments d'espaces fonctionnels. De même qu'un nombre réel est un objet idéal nécessaire pour comprendre des calculs dont les entrées-sorties sont des nombres rationnels, de même, il est nécessaire d'utiliser des fonctions de carré sommable abstraites, limites "en un sens bien précisé" de fractions rationnelles à coefficients rationnels, pour comprendre des calculs dont les entrées-sorties sont des objets de cette dernière sorte.

Dans une généralisation ultérieure, les distributions, ces nouvelles "fonctions" ne sont plus définies nulle part (au moins une fonction de carré sommable est-elle réputée définie presque partout). Et la "rigueur française" rejette la terminologie de "fonctions généralisées" pour les distributions. Cette même "rigueur" devrait en bonne logique bourbakiste frapper d'oukase la terminologie de "fonction de carré sommable" puisqu'une telle fonction, n'étant définie que "presque partout" n'est en fait définie nulle part (quoique en un sens moins fort que pour les distributions).

Il nous semble quant à nous que la vraie rigueur devrait se préoccuper des questions de fond plus que des questions de forme. Une terminologie intuitive nous semble toujours préférable à une terminologie abstraite. Une preuve qui se termine par "et ainsi de suite..." est tout aussi rigoureuse qu'une preuve formalisée par récurrence. Seul le degré de formalisation est en cause, non le fond de la démonstration. Par contre la différence entre théorèmes "opératoires" et théorèmes "non opératoires" en analyse est une réelle question de fond qui n'est pratiquement jamais prise en compte par les théoriciens. Enfin, la nécessité d'avoir des preuves simples pour les théorèmes intuitivement vrais et fondamentaux, comme le théorème des accroissements finis, devrait être un critère de discrimination décisif quant au choix du modèle mathématique et de l'exposé pédagogique.

NATURE ET FONDEMENT DES DIFFERENTIELLES LEIBNIZIENNES

Marc PARMENTIER

Université Charles de Gaulle
Villeneuve d'Ascq

Dans la présentation scolaire à l'usage des classes terminales, les différentielles sont introduites dans le cadre de la théorie des fonctions et dans le sillage de la notion de dérivée. Bel exemple d'inversion de l'ordre pédagogique par rapport à l'ordre historique. Le bien-fondé de cette inversion est cependant hors de doute dans la mesure où la théorie des fonctions fournit au calcul différentiel une assise solide et cohérente. Or au moment où Leibniz introduit son nouveau calcul, la théorie et l'idée même de fonction ne sont pas encore constituées, en outre la présentation qu'il en donne n'est nullement liée à une quelconque prémonition de l'idée de fonction au sens où nous l'entendons. La question est donc la suivante : la conception proprement leibnizienne des différentielles est-elle capable d'apporter à son nouveau calcul un fondement satisfaisant ?

La nature des différentielles

La difficulté semble d'abord tenir à l'introduction d'êtres mathématiques d'un type spécial, pouvant apparaître tantôt sous forme de rapport, tantôt de manière isolée [1], tantôt comme de vraies grandeurs, tantôt comme égales à zéro. Cette difficulté, qui ne tient pas seulement à leur petitesse, est bien résumée par Lazare Carnot dès les premières pages de ses *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitésimal* : « on n'a jamais pu se former qu'une idée imparfaite de ces éléments, espèces d'êtres singuliers, qui tantôt jouent le rôle de véritables quantités, tantôt doivent être traités comme absolument nuls, et semblent par leurs propriétés équivoques, tenir le milieu entre la grandeur et le zéro, entre l'existence et le néant » [2].

Une autre nouveauté du calcul différentiel réside dans les différentielles d'ordre supérieur à un, nouvelle source de difficultés et d'incompréhensions. Car si on pouvait se faire une idée des différentielles d'ordre un par référence aux infiniment petits traditionnels, utilisés par exemple dans le calcul des tangentes, il n'en va pas de même des différentielles d'ordre supérieur ne correspondant à aucune réalité géométrique immédiate [3].

Ces remarques posent deux problèmes que la démarche leibnizienne permet de dissocier : celui de la nature des différentielles et celui de la rigueur des démonstrations.

La désinvolture de Leibniz

Ce qui surprend dans les articles publiés par Leibniz à partir de 1682 dans les *Acta Eruditorum*, et en particulier dans la *Nova Methodus pro Maximis et Minimis* de 1684 [4], c'est sa désinvolture à l'égard de ce qu'il nomme la *rigueur métaphysique*. Que signifie ici ce terme dont l'usage se prolonge au XVIII^e^ siècle [5] ?

On peut l'interpréter en disant que les mathématiques ont un objet. En particulier toute courbe géométrique possède une *nature*, et n'est pas une construction abstraite, encore moins la représentation d'une relation algébrique [6]. Or le rôle d'une équation est

[1] En particulier dans les équations différentielles.

[2] *Réflexions sur la Métaphysique du calcul infinitésimal*, réédition Blanchard, 1970, p. 3.

[3] C'est précisément le calcul différentiel qui permettra d'élaborer les notions de courbure et de rayon de courbure.

[4] *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus*, paru en Octobre 1684 (cf.. C.I. Gerhardt, *Leibnizens mathematische Schriften*, Halle, 1850-1863, cité M.S., réédition Olms, 1962, V p. 220).

[5] Comme en témoigne le traité de Lazare Carnot.

[6] De ce point de vue ce serait une erreur de considérer que la géométrie analytique de Descartes ait constitué

de représenter, pour employer le vocabulaire leibnizien *d'exprimer*, cette nature [7]. La désinvolture leibnizienne doit donc tout d'abord être située historiquement et nous devons nous garder de projeter sur les mathématiques du XVII^e siècle notre propre conception de la rigueur.

Une autre remarque historique s'impose : le calcul différentiel leibnizien n'a pas dû son succès à la force de conviction de ses principes, qui demeurent pour beaucoup énigmatiques mais à la force de conviction de ses « applications », bien que ce mot soit incorrect [8]. Ce fait historique est conforme à l'idée que Leibniz se fait lui-même de son calcul, conçu non comme une théorie relevant des mathématiques pures mais comme un instrument destiné à sonder les arcanes de la nature. Dès lors enseigner son maniement est aussi important qu'en assurer le fondement théorique. Or sa découverte répond à un impératif de rapidité. Il comprend qu'en ce domaine son siècle est celui des commencements et qu'il faut *aller de l'avant*, sans s'embarrasser de trop de scrupules. Néanmoins ce projet ne condamne nullement son calcul à reposer sur un fondement approximatif.

Il est vrai que les objets qu'il met en œuvre imposent de prendre quelque distance par rapport à la métaphysique, en apparaissant comme des êtres de raison, êtres proprement mathématiques, idéaux voire fictifs, sans correspondants directs dans l'ordre de l'être. Mais il s'agit moins d'une nouveauté radicale que du prolongement d'un mouvement déjà amorcé par l'emploi des racines négatives et « imaginaires ».

En outre dans le cadre de la philosophie leibnizienne, cet écart initial est suivi d'un *retour* à la métaphysique, ne serait-ce que parce que les différentielles vont trouver leur *analogon* dans d'autres domaines de la connaissance, en particulier dans la théorie des « petites perceptions » exposée dans la préface des *Nouveaux Essais sur l'Entendement humain* [9]. Ce double mouvement à l'égard de la métaphysique se fait conformément à une maxime souvent alléguée par Leibniz : il faut faire un saut dans l'inconnu pour trouver du nouveau. Voilà pourquoi Leibniz pourra déclarer que les règles de la véritable métaphysique sont d'un usage plus étendu qu'on ne pense, au point d'être capables de justifier des procédures de démonstration mathématique. Ainsi le principe de continuité (« la nature ne fait pas de sauts ») s'appliquera tant en mathématiques qu'en physique et en métaphysique. Mais il apparaît bien vite que la « véritable métaphysique » ne sera plus seulement une métaphysique de l'être, mais une métaphysique de la relation [10].

La diversité des fondements possibles

Le deuxième trait le plus surprenant à nos yeux est que dans les articles publiés, Leibniz non seulement n'aborde pas « de front » la question du fondement de son calcul, mais en suggère ici et là des justifications diverses et disparates. Donnons-en quelques exemples.

À en croire un *Mémoire de Leibniz touchant son sentiment sur le calcul différentiel* [11], celui-ci ne serait qu'un abrégé, un raccourci d'écriture des méthodes anciennes, en particulier de la méthode d'exhaustion d'Archimède : « on ne diffère du style d'Archimède que dans les expressions qui sont plus directes dans notre méthode et plus conformes à l'art d'inventer » [12]. On pourrait penser à tort que toute démonstration

un tournant immédiat et définitif.

[7] Il en va de même des nombres.

[8] Les courbes que le calcul différentiel permet de découvrir (la trajectoire isochrone, la brachystochrone, trajectoire selon laquelle un mobile descend d'une hauteur h dans le temps le plus bref sous l'effet de la pesanteur, et surtout la plus prestigieuse, la Chaînette) ne sont pas des *applications* des mathématiques à la physique, mais relèvent d'un domaine propre, celui des « Mathématiques Mixtes ».

[9] Qui n'est pas seulement une théorie psychologique mais métaphysique.

[10] Ce point a été mis en évidence par Christiane Frémont (*L'Etre et la relation*, Paris, 1981).

[11] Paru dans le *Journal de Trévoux* en 1701 (M.S. V p. 350).

[12] Cette idée est de nouveau alléguée dans la *Réponse à Niewentijt* que nous étudierons plus loin, pour justifier une nouvelle définition de l'égalité : « Le procédé d'Archimède permet toujours de le confirmer au moyen d'un raisonnement par l'absurde. »

effectuée par le nouveau calcul pourrait être refaite à nouveaux frais par la méthode d'Archimède [13]. Or Leibniz est le premier à souligner que dans les nouveaux problèmes la « méthode directe » est en réalité la seule praticable, et que la méthode ancienne fondée sur des démonstrations par l'absurde conduirait à des calculs beaucoup trop complexes, au bout du compte irréalisables [14]. Or quelle est la valeur théorique d'un calcul ou d'une démonstration irréalisables ? A supposer que la référence aux méthodes anciennes ne soit pas de pure élégance, elle signifie que Leibniz ne voit aucun inconvénient à faire confiance à une « démontrabilité virtuelle ».

Une telle justification a le mérite de mettre en évidence le caractère indispensable des *abrégés*, des raccourcis d'écriture, en mathématiques et plus généralement dans toute pensée abstraite. On ne peut pas penser et inventer sans aller vite, et par conséquent sans user de raccourcis. D'où l'importance nouvelle accordée aux *caractères* : tout caractère est un abrégé dans la mesure où il représente toujours plusieurs choses à la fois, à savoir des termes et leur relation [15]. C'est pourquoi Leibniz situe la supériorité de sa méthode, en particulier sur la méthode des fluxions de Newton, dans la supériorité de sa notation, plus exactement de sa *caractéristique*, dx. Celle-ci est tout à fait nouvelle parce qu'elle comporte une « articulation » au sens linguistique du terme, dx indiquant non seulement un terme, mais aussi et surtout la relation opératoire entre d et x [16].

C'est néanmoins une autre « justification » qui a suscité le plus d'incompréhensions : l'analogie entre les différentielles et ce que Leibniz nomme les *incomparables*. Pour comprendre pourquoi on peut négliger certains termes dans les formules [17], Leibniz nous dit qu'on peut procéder comme s'il ne s'agissait que d'*incomparables*, par exemple un grain de poussière par rapport au diamètre de la terre, ou ce diamètre par rapport à celui de la sphère des fixes [18].

Ces déclarations suggèrent faussement que le nouveau calcul se fonde sur des procédures d'approximation apparentées à celles de la physique ou de l'astronomie et ne font que brouiller davantage les pistes. Il n'est donc pas surprenant que certains commentateurs aient jugé qu'effrayé par sa propre audace, Leibniz esquissait une sorte de « pas en arrière » et renonçait aux infiniment petits pris à la rigueur. En réalité, il faut comprendre que Leibniz ne cherche pas ici à fonder son calcul, mais à en faciliter l'usage ; son analogie est de nature pédagogique. Nous en trouvons la preuve dans une lettre à Varignon : « j'ai cru que pour rendre *sensible* le raisonnement, il suffisait d'expliquer l'infini par l'incomparable » [19]. En effet la logique de son calcul ne doit rien à celle de l'approximation, dans la mesure où une différentielle ne constitue pas une partie d'une grandeur, pas plus qu'un point n'est une partie d'une ligne.

Si la notion d'analogie peut servir à justifier le calcul, c'est prise dans son sens technique d'égalité de rapports, telle qu'elle apparaît dans une des deux découvertes qui ont rendu possible l'invention du calcul différentiel, le « triangle caractéristique ». Celui-ci résulte bien d'une égalité de rapports entre un triangle assignable et inassignable et permet de définir une différentielle comme une quatrième proportionnelle : « Les méthodes en usage... recourent à un segment DX ou autre du même type, mais non au

[13] Certains mathématiciens se sont consacrés à de telles justifications, par exemple La Hire, à l'intérieur d'une sorte de « querelle des anciens et des modernes ».

[14] Elle exigerait notamment dans le calcul des tangentes des extractions de racines, difficulté à laquelle fait référence le titre de la *Nova Methodus*, cf. supra note 4.

[15] Ceci est particulièrement évident dans l'utilisation par Leibniz de « signes ambigus », par exemple ±, et dans la justification qu'il en donne (cf. *De la méthode de l'universalité*, publiée par L. Couturat, *Opuscules et fragments inédits*, Paris, 1903, réédition Olms, 1988, p. 99-105)

[16] En outre la méthode directe s'oppose aux méthodes anciennes dans la mesure où, comme nous le verrons, elle repose sur un infini actuel et non sur un passage à la limite.

[17] Par exemple pour établir la formule $d(xy) = xdy + ydx$.

[18] « ...quand il y a plusieurs degrés d'infini ou d'infiniment petits, c'est comme le globe de la terre est estimé un point à l'égard de la distance des fixes » (*Tentamen de coelestium causis*, M.S. VI, p. 144). La même analogie est reprise dans un autre article, *Observatio quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores, et de vero sensu Methodi infinitesimalis*, paru en Avril 1712 (M.S. V p. 387).

[19] M.S., IV p. 91.

segment dy, quatrième proportionnelle de DX, XY, dx, ce qui bouleverse tout » [20].

Or la considération de rapports peut servir de justification aux différentielles parce qu'un rapport n'est pas dans la géométrie du temps une simple fraction, pas plus que l'analogie une simple égalité. Un rapport, défini par Leibniz comme la plus simple des *relations*, ne peut intervenir qu'entre des termes homogènes, d'autre part il comporte une réalité autonome par rapport aux termes qui le composent (par exemple on peut connaître le rapport entre le nombre de nez et d'yeux dans une ville sans connaître le nombre de ses habitants), ainsi qu'une mesure spécifique, le logarithme. Ainsi un rapport est-il défini comme un invariant, ce qui signifie que ses termes ne sont plus des termes à proprement parler mais des « places » (en langage moderne des arguments) [21]. Leibniz assume donc une conception archaïque de la notion de rapport qui paradoxalement lui permet de faire un pas vers la notion d'application au sens moderne.

La considération des rapports de différentielles permet de dépasser une définition purement quantitative des dx (dans la *Nova Methodus* Leibniz ne dit pas que les différentielles sont des accroissements, mais qu'elles peuvent être considérées comme *proportionnelles* à des accroissements d'une variable), ainsi que leur définition « métaphysique », dans la mesure où les rapports sont des relations, des « notions idéales ».

Nous percevons ici l'effort de Leibniz pour séparer la question du fondement du calcul de celle de la nature de ses objets. Son idée est bien que les règles du nouveau calcul peuvent être non seulement utilisées mais en partie fondées sans référence à la nature propre des différentielles [22], et ceci pour une raison évidente : de son aveu même cette nature demeure « amphibie » et s'apparente tantôt à l'être de raison tantôt à la « fiction ». La nature des différentielles sera seulement précisée par leur rapprochement avec d'autres notions idéales du même type devenues indispensables en mathématiques, notamment les racines imaginaires [23].

Les objections et les fausses interprétations

Il ne faut pas sous-estimer les difficultés de compréhension rencontrées par les mathématiciens contemporains, difficultés accusées par le fait que dans la présentation de son calcul et de ses algorithmes [24], Leibniz se contente d'énoncer une série formelle de son calcul et de ses algorithmes, ne prenant même pas la peine de justifier la formule qu'il a eu cependant un certain mal à établir : $d(xy) = xdy + ydx$. On s'explique dès lors que pendant quelques années le calcul leibnizien ait suscité plus de réticences que d'adhésions.

Un des premiers mathématiciens à élever des objections est le hollandais Bernard Niewentijt [25]. La réponse de Leibniz constitue un des textes les plus féconds quant aux justifications de son calcul [26].

---

20 *Nova Methodus*, traduction in M. Parmentier, *Naissance du calcul différentiel*, Paris, 1989, p. 111.

21 Ceci apparaît clairement dans la cinquième lettre à Clarke : « ... il faut dire que ce rapport... est bien hors des sujets, mais que n'étant ni substance ni accident, cela doit être une chose purement idéale dont la considération ne laisse pas d'être utile... c'est ainsi que pour expliquer ce que c'est que la place, j'ai voulu définir ce que c'est que la même place. » (*Oeuvres de Leibniz*, éditées par L. Prenant, Paris, 1972, p. 440).

22 Tel est précisément l'intérêt des *caractères* adéquats permettant de raisonner sur les signes sans avoir à l'esprit leur signification, c'est-à-dire de pratiquer ce que Leibniz nomme la « pensée aveugle » ou symbolique. La « démontrabilité virtuelle » du calcul résulte dès lors du fait que la signification des symboles peut elle-même demeurer virtuelle.

23 « Mais à vrai dire la Nature, mère des diversités éternelles, ou plutôt l'esprit Divin, sont trop jaloux de leur merveilleuse variété pour permettre qu'un seul et même modèle puisse dépeindre toutes choses. C'est pourquoi ils ont inventé cet expédient élégant et admirable, ce miracle de l'Analyse, prodige du monde des idées, objet presque amphibie entre l'Etre et le Non-être, que nous appelons racine imaginaire » (*Specimen novum Analyseos pro Scientia infiniti*, M.S., V p. 383, traduction in *Naissance du calcul différentiel*, p. 396).

24 Que constitue la *Nova Methodus*.

25 *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvas applicatae principia, et calculi differentialis usum in resolvendis problematibus geometricis*, Amsterdam, 1694, et *Considerationes secundae circa calculi differentialis principia, et responsio ad virum nobilissimum C.G. Leibnitium*, Amsterdam, 1696.

26 *Responsio ad nonnullas difficultates a Dn. Bernardo Niewentiit circa Methodum differentialem seu infinitesimalem motas*, A.E. Juillet 1695 (M.S. V p. 320, traduction in *Naissance du calcul différentiel*,

La première objection porte sur l'élimination des quantités infiniment petites dans les mises en équation. Le dilemme dans lequel Niewentijt prétend enfermer le calcul différentiel est le suivant : ou bien une différentielle est une véritable grandeur, et dans ce cas elle n'est pas négligeable, ou bien elle est nulle. Cette objection semble pétrie de bon sens et fondée sur une définition *évidente* de l'égalité : des grandeurs ne sont égales que si leur différence est nulle.

Niewentijt définit en effet l'infini comme une quantité infiniment grande m et une quantité infiniment petite comme la m$^{\text{ième}}$ partie d'une quantité finie, il en résulte qu'une grandeur qui, multipliée par un nombre infini, n'est pas égale à une quantité assignable est pur néant. En particulier le carré d'une quantité infiniment petite est nul, car son produit par m ne donne qu'une quantité infiniment petite, ce qui ôte toute réalité aux différentielles d'ordre supérieur à un et fournit le principe de sa troisième objection [27].

Lazare Carnot quant à lui, considérera que l'opération fondamentale du calcul infinitésimal consiste à exprimer un problème par approximation, faute de pouvoir le faire de manière exacte (par exemple en considérant une courbe comme un polygone ayant un grand nombre de côtés), pour ensuite *négliger* les termes très petits. L'ensemble des deux opérations se trouve justifié soit que parce que l'erreur n'est pas sensible, soit parce que les erreurs commises se « compensent ». Selon Carnot, on *voit* que les erreurs se sont compensées lorsque les grandeurs très petites disparaissent du calcul, après n'y avoir joué qu'un rôle d'auxiliaires. Résultant de la substitution de grandeurs à d'autres qui ne leur sont pas égales, les équations différentielles sont des équations imparfaites, dont l'exactitude n'est pas démontrée.

Or cette reconstitution de la méthode infinitésimale ne correspond pas à la conception leibnizienne, ne serait-ce que parce que, comme nous l'avons vu, Leibniz n'assimile nullement les différentielles à des accroissements de grandeurs.

Nous pouvons également mentionner la conception de D'Alembert, qui accentue le caractère purement algorithmique du calcul et avance l'idée que celui-ci porte ses preuves avec soi. Nous lisons à l'article *application* de l'Encyclopédie : « il suffit de savoir que les principes du calcul sont certains, la main calcule en toute sûreté et arrive presque machinalement à un résultat qui donne le théorème ou le problème qu'on cherchait ». Cette conception algorithmique, voire mécaniste, a le mérite de souligner une propriété remarquable du calcul différentiel, à savoir la possibilité d'en faire usage sans entendre parfaitement la logique de l'infini qui le sous-tend, D'Alembert poussant au paradoxe une suggestion contenue dans la réponse de Leibniz à Niewentijt : « la méthode directe consistant à négliger les quantités incomparablement plus petites... porte en elle-même sa propre justification » [28].

Caractères des différentielles leibniziennes

Il importe à présent de montrer en quoi les caractères propres au calcul différentiel leibnizien permettent de répondre à ces objections et de corriger ces interprétations.

Pour répondre à la première objection de Niewentijt Leibniz renverse le problème : plutôt que de chercher ce que doivent être les différentielles pour justifier les équations qui les font intervenir, il pose une nouvelle définition de l'égalité : « Je juge d'ailleurs que des termes sont égaux non seulement lorsque leur différence est absolument nulle, mais aussi lorsqu'elle est incomparablement petite. [29] » Il précise ensuite ce qu'il entend par *comparables* : des grandeurs sont comparables lorsqu'elles sont *homogènes* (c'est-à-dire en substance archimédiennes).

---

p. 316).

27 Objection partagée par exemple par Huygens qui déclare « ne rien entendre aux ddx ». La seconde objection prétend démontrer l'incapacité du calcul à traiter les équations exponentielles.

28 *Naissance du calcul différentiel*, p. 327.

29 *Loc. cit.*, p. 326.

Cette nouvelle définition est dans la ligne d'autres tentatives de redéfinitions de notions en apparence *évidentes* et fait apparaître que l'égalité n'est pas une relation primitive mais dérivée d'autres relations non quantitatives (par exemple la congruence). Il s'agit bien d'un renversement car la nouvelle égalité permet de *définir* l'infiniment petit : « C'est précisément dans ce cas qu'on dit qu'une différence est plus petite que toute grandeur donnée. »

La suite de la réponse montre que le calcul différentiel fait intervenir une infinité d'infinis, que l'infini n'est donc ni une grandeur ni un nombre, ce qui ouvre la possibilité des différentiations successives. Cette possibilité montre que l'élimination des différentielles n'est pas due à leur *nature* mais à leur relation avec les autres termes d'une équation.

Une telle définition de l'infiniment petit écarte toute confusion entre infiniment petit et très petit [30] et montre que la méthode différentielle ne doit rien à la logique du passage à la limite : il ne s'agit pas rendre une erreur très petite pour déclarer que deux grandeurs sont égales, mais de poser que deux grandeurs sont bel et bien égales dès que leur différence est (par définition) infiniment petite. Leibniz précise en effet qu'une erreur moindre que toute erreur donnée est nulle : « lorsque nous appelons une erreur infiniment petite, nous voulons dire moindre que toute erreur donnée et partant nulle en réalité. » [31]. Ces définitions se fondent sur la conception leibnizienne de l'infini actuel et sur les travaux de Leibniz sur les séries infinies, lesquelles ne sont pas approximativement mais *rigoureusement* égales à leur somme finie.

Le pendant géométrique de cette définition de l'égalité est fourni par ce que Leibniz nomme *principe général pour la mesure des courbes* : considérer qu'une figure curviligne *équivaut* à un polygone d'une infinité de côtés, ou polygone *infinitangulaire* [32]. La « relation d'équivalence » montre que ce principe n'est pas de nature métrique : le polygone infinitangulaire ne constitue pas une approximation de la courbe, mais *équivaut* la courbe, conformément au principe de continuité en vertu duquel toute ligne droite n'est qu'une ligne courbe particulière [33].

Mais la caractéristique principale des différentielles leibniziennes réside, comme l'a mis en évidence H.J.M. Bos [34], dans leur *indétermination*. Cette indétermination doit s'entendre en plusieurs sens.

En premier lieu les différentielles sont quantitativement indéterminées au sens où elles ne désignent aucune grandeur *assignable*.

Elles sont indéterminées dans leur définition : dans la *Nova Methodus* Leibniz n'identifie pas dx à l'accroissement de x mais considère les accroissements des variables comme une interprétation possible des différentielles [35].

Enfin et surtout elles sont indéterminées au sens où dans une équation différentielle elles ne sont pas rapportées à une variable de référence. Cette indétermination marque

---

[30] La distinction est bien formulée par Lazare Carnot : « les dx et dy sont des quantités infiniment petites non parce qu'on les regarde comme très petites, mais parce qu'on les considère comme pouvant devenir encore plus petites... il s'ensuit que toute quantité infiniment petite peut se négliger dans le cours du calcul, vis-à-vis de ces mêmes quantités dont on cherche la relation. » (*Op. cit.*, p. 4).

[31] *Observatio quod rationes*...M.S. V p. 389.

[32] Ce principe est énoncé dans le *De dimensionibus Figurarum inveniendis* paru en Mai 1684 (M.S. V p. 93) puis dans la *Nova methodus.*

[33] En vertu du principe de continuité, reposant en mathématique comme en physique, sur un infini actuel, la limite est toujours interne, intrinsèque à la série : « dans les continus on peut considérer une limite externe comme une limite interne. » (*Epistola ad V. Cl. Christianum Wolfium, Professorem Matheseos Halensem, circa Scientiam infiniti*, A.E. Supplementa 1713, M.S. V p. 382).

[34] H.J.M. Bos, « Differentials, Higher Order Differentials and the Derivative in the Leibnizian calcul », *Archive for history of exact sciences*, 1974.

[35] Philosophiquement parlant, la notion d'indétermination est d'autant plus essentielle que la notion de *détermination* est directement liée au principe de raison : plus un être est déterminé, plus grande est sa raison d'être (« Il y a toujours dans les choses un principe de détermination qui doit se tirer d'un maximum et d'un minimum, de manière, pour ainsi dire, que le plus grand effet soit fourni par la moindre dépense... », *De l'origine radicale des choses*, traduction Lucy Prenant, in *Oeuvres de Leibniz*, p. 340). Or le calcul différentiel révèle dans l'indétermination de l'infiniment petit une *condition* de la détermination.

l'indépendance de la logique des différentielles à l'égard de l'idée de fonction [36]. Ceci explique que dans la *Nova Methodus* les règles de calcul soient livrées sans hypothèse sur le mode de progression des variables : dans la mesure où abscisse, ordonnée, abscisse curviligne, constituent au même titre et de plein droit des réalités géométriques, un *polygone infinitangulaire* peut être segmenté d'au moins trois façons : en supposant égaux ses côtés, ses projections sur l'axe des x ou ses projections sur l'axe des y. Cette indétermination offre donc la possibilité d'un choix des variables différentiables. Or cette possibilité offre à Leibniz la solution d'une des versions du redoutable problème de l'*inversion des tangentes* : trouver la tangente unique à une infinité de courbes données [37] au moyen d'une permutation des rôles entre variables et constantes. La solution, constituée par l'enveloppe d'une famille de courbes, résulte d'une analyse des différents types de constantes intervenant dans une équation et met en évidence la possibilité de différentier selon certaines d'entre elles. En d'autres termes Leibniz invente ici la notion de *différentiabilité* (se traduisant par la formule « différentier selon... ») et dégage une opération autonome indépendante des objets auxquels elle devra s'appliquer.

C'est donc bien l'indétermination des différentielles qui rend leur maniement si aisé, en permettant par exemple, sans autre justification, de réitérer l'opération de différentiation, puis de noter par un simple exposant une différentielle d'ordre quelconque (Leibniz allant même jusqu'à s'interroger sur la possibilité de différentielles d'ordre non entier). En d'autres termes, l'indétermination des différentielles leur confère un caractère opératoire permettant de définir dx comme une *affection* de x et justifiant la supériorité d'une notation représentant distinctement l'opération d et son argument.

Ce caractère opératoire résulte également de la découverte de la relation de *réciprocité* entre différentiation et intégration. Cette réciprocité conduit Leibniz à établir une remarquable analogie entre l'opération de différentiation et l'opération puissance, rendue sensible par l'introduction artificielle d'un *opérateur* puissance p et des notations p^0 et d^0. L'analogie revient à considérer la différentielle du produit xy comme la somme des « différentielles partielles » selon x et selon y, de la même façon que prendre la puissance supérieure de x+y revient à multiplier un polynôme par x puis par y :

« Cette analogie entre la différentiation et l'élévation à une puissance se perpétue si nous poursuivons cette dernière (c'est-à-dire si nous prenons une puissance supérieure), ainsi que la différentiation. Car pour obtenir une nouvelle puissance du Binôme, nous multiplions le résultat antérieur tout entier à la fois par y et par x, dans le premier cas nous augmentons p d'une unité devant y, dans le second devant x. De la même manière, dans la différentiation, nous différentions l'ensemble du résultat antérieur à la fois par rapport à y et par rapport à x, dans le premier cas nous augmentons d d'une unité d'abord devant y, dans le second devant x. A titre d'exemple :

$$\left.\begin{matrix} p^1x\, p^0y \\ p^0x\, p^1y \end{matrix}\right\} \quad \text{multiplié par y devient :}$$

---

[36] Que la logique du calcul différentiel ne doive rien à la notion de fonction ne signifie pas que cette idée soit étrangère à Leibniz, ni que ses travaux n'aient pas contribué à sa constitution : d'une part Leibniz emploie le mot fonction, mais dans un sens purement géométrique, par exemple dans la *Nova calculus differentialis applicatio* : « J'appelle fonction un segment de droite déterminable exclusivement à partir de droites menées entre un point fixe et un point donné de la courbe, par exemple : abscisse, ordonnée, tangente, sous-tangente, normale etc... (traduction in *Naissance du calcul différentiel*, p. 280). D'autre part un appendice à la réponse à Niewentijt dégage la construction de la dérivée en considérant les rapports de différentielles (*Ibid.*, p. 336). Enfin Leibniz contribue à faire des relations en général (dont la plus simple est le rapport) l'objet principal des mathématiques, ce qui le conduit à l'idée d'application au sens moderne (par exemple dans les *Initia rerum metaphysicarum mathematica*, M.S. VII p. 17).

[37] La solution de ce problème conduit Leibniz à dégager la notion d'enveloppe d'une famille de courbes, cf. *Nova Calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data Tangentium conditione*, A.E. Juillet 1694 (M.S. V p. 301).

$$\left.\begin{matrix} p^1x\, p^1y \\ p^0x\, p^2y \end{matrix}\right\}$$ si au contraire nous le multiplions par x :

$$\left.\begin{matrix} p^2x\, p^0y \\ p^1x\, p^1y \end{matrix}\right\}$$ et ainsi de suite.

De même :

$$\left.\begin{matrix} d^1x\, d^0y \\ d^0x\, d^1y \end{matrix}\right\}$$ différentié selon y devient

$$\left.\begin{matrix} d^1x\, d^1y \\ d^0x\, d^2y \end{matrix}\right\}$$ si au contraire nous le différentions selon x

$$\left.\begin{matrix} d^2x\, d^0y \\ d^1x\, d^1y \end{matrix}\right\}$$

Il s'ensuit également que $d^3(xy)$ vaut $1d^3x\, d^0y + 3d^2x\, d^1y + 3d^1x\, d^2y + 1\, d^0x\, d^3y$, ou encore, dans la notation habituelle : $y\, d^3x + 3ddx\, dy + 3dx\, ddy + x\, d^3y$. Plus généralement nous obtenons en différentiant, au moyen de la lettre d, le résultat suivant, analogue à celui que nous avions obtenu pour les puissances au moyen de la lettre p :

$$d^e(xy) = 1d^ex\, d^0y + \frac{e}{1} d^{e-1}x\, d^1y + \frac{e.e-1}{1.2} d^{e-2}x\, d^2y$$
$$+ \frac{e.e-1.e-2}{1.2.3} d^{e-3}x\, d^3y + \frac{e.e-1.e-2.e-3}{1.2.3.4} d^{e-4}x\, d^4y + \text{etc.}$$ » [38]

L'indétermination caractéristique des différentielles leibniziennes conduit donc à l'intuition d'un calcul symbolique dont on a toutes les raisons de penser qu'elle aurait été impossible si Leibniz avait été trop préoccupé par l'ancienne rigueur « métaphysique ». Mais Leibniz n'abandonne cette dernière que pour jeter les bases d'un nouveau type de fondement en mathématiques voire d'une nouvelle conception de la rigueur.

38 *Symbolismus memorabilis Calculi Algebraici et Infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum, et de Lege Homogeneorum Transcendantali*, M.S. V p. 377-382, traduction in *Naissance du calcul différentiel*, p. 409-421.

MATHEMATIQUES MESOPOTAMIENNES

James RITTER — Université Paris VIII

INTRODUCTION

A notre programme figurent en particulier l'élaboration lente et complexe du concept même de nombre, et la mise en place d'un système scolaire à forte composante mathématique, dont les problèmes et les solutions proposées nous semblent parfois très proches. J'aborderai aussi à la fin la difficile question de l'interprétation des textes paléobabyloniens et essayerai de justifier leur organisation très poussée sans pourtant recourir à une prétendue « algèbre babylonienne ».

Commençons donc par une brève présentation de la Mésopotamie.

I. LES COMMENCEMENTS (avant 2700)

La Mésopotamie (qui recouvre essentiellement l'actuel Iraq) et l'Élam (correspondant à l'Iran de notre époque) forment deux plateaux séparés par des montagnes. Le premier est bordé à l'Ouest par le désert syro-arabien, au Nord par les montagnes et plateaux d'Anatolie et au Sud par le Golfe arabo-persique. Les régions montagneuses constituent les zones de premier peuplement avant que la révolution néolithique du VII^e^ millénaire avec son invention de l'agriculture ne voit une occupation des plateaux et la formation de villages. Mais il faut attendre quelques trois millénaires, ponctués d'avances cruciales, sur le plan technologique (tour de potier, moule à briques, fusion du cuivre et production de bronze) et social (croissance démographique, développement d'une société de classes), pour assister à la formation de véritables villes par amalgame de villages et drainage de la population rurale. C'est ainsi qu'Uruk en Mésopotamie et Suse en Élam deviennent les centres les plus importants pendant le IV^e^ millénaire. Cette éclosion urbaine est essentielle pour nous car c'est dans ce cadre que vont naître écriture et mathématiques.

L'invention de l'écriture

Les fouilles archéologiques faites à Suse depuis les années soixante et leur interprétation ultérieure ont permis de suivre presque étape par étape l'invention et développement d'un système d'écriture. La stratigraphie du site, mieux préservée qu'à Uruk, nous permet d'avoir un aperçu sur les premières étapes du processus en Élam, d'ailleurs cohérent avec les vestiges plus éparpillés trouvés à Uruk[1].

Au tout début, pendant le quatrième millénaire, on trouve couramment des bulles creuses d'argile contenant de petits jetons de même matière, de taille et de forme variées; la surface des bulles porte des impressions faites par des sceaux-cylindres. L'interprétation généralement admise est que ces bulles sont des registres de comptabilité primitifs. La forme et la taille des jetons à l'intérieur représentent la nature des objets comptés et/ou les unités employées (moutons, mesures de blé, huile, etc.); le nombre de jetons de chaque sorte indique le nombre d'objets comptés; la marque du sceau indique le propriétaire ou les parties contractantes.

[1] Je suis dans ses grandes lignes la reconstitution proposée par SCHMANDT-BESSERAT **1977** et **1978**. Cependant certaines de ses affirmations sur l'ancienneté et l'universalité de ce système me semblent grossièrement exagérées. Le meilleur article de synthèse récent sur la Mésopotamie est NISSEN **1985** (en anglais) et NISSEN, DAMEROW & ENGLUND **1990** (en allemand); pour Suse on peut consulter LE BRUN & VALLAT **1978**.