

# LECTURE EN CLASSE DE LA GEOMETRIE DE DESCARTES

Maryvonne HALLEZ Marie - Françoise JOZEAU  
GROUPE M.A.T.H. IREM PARIS 7

---

## Introduction

**D**ans cet atelier, nous avons proposé une approche de *La Géométrie* de Descartes et de sa philosophie mathématique ; l'ensemble de ce travail a été mené avec des élèves de lycée ; seules certaines parties ont été abordées avec des élèves de collège.

La présentation biographique s'est faite à partir d'une cassette réalisée pour la radio suisse romande pour des collégiens de 11-12 ans dans laquelle Michel Serfati brosse à grands traits le parcours de Descartes<sup>1</sup>. Pour de nombreux points, elle recoupe les recherches biographiques faites par les élèves dans les différentes classes, et dont nous avons sélectionné quelques moments forts.

### Quelques repères bibliographiques, (sélections d'élèves)

31 mars 1596 Naissance à La Haye ( Indre-et-Loire ), village situé près de Tours et baptisé de nos jours Descartes. Etudes au Collège de la Flèche où ses supérieurs lui accordent le privilège de se lever tard car ils reconnaissent que c'est en faisant la grasse matinée qu'il peut exercer au mieux ses facultés. Quelle chance a le jeune René !

1619 La Guerre de Trente Ans vient d'éclater. Descartes décide de rejoindre l'armée catholique du Duc de Bavière.

---

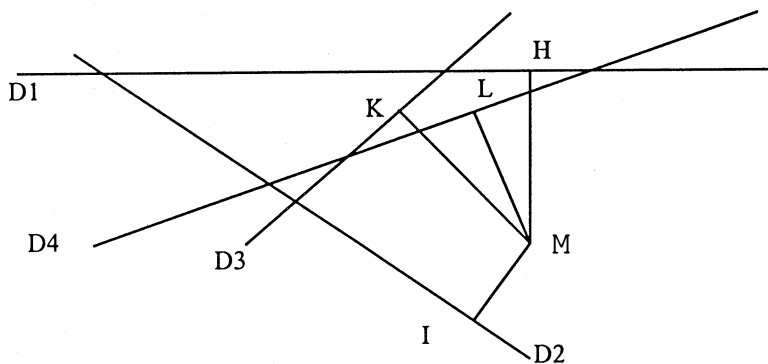
<sup>1</sup>Cette cassette n'est pas actuellement commercialisée. Nous remercions Michel Serfati de son autorisation d'utiliser cet enregistrement avec nos élèves et pour cet atelier.

novembre 1619 Découverte des fondements d'une science admirable. Descartes recherche une connaissance claire et assurée de tout ce qui est utile à la vie, *extrême désir d'apprendre à distinguer le vrai d'avec le faux, pour voir clair en mes actions et marcher avec assurance en cette vie* in Adam Tannery ( Oeuvres I p.10 ). Ce souci de fonder ses actions sur la connaissance de la vérité est un aiguillon constant des recherches cartésiennes. Une nuit, la nuit du 10 au 11 novembre 1619, trois songes viennent fonder la légitimité de sa recherche dans l'encouragement divin qu'il attribue à ses rêves et qui le mettent sur la voie de l'élaboration d' *une science entièrement nouvelle qui permette de résoudre généralement toutes les questions qu'on peut proposer en n'importe quel genre de quantité, continue ou discontinue*. Il passe cet l'hiver là enfermé, seul dans un "poêle"<sup>2</sup> à écrire le *Discours de la méthode*.

1631 - 32 Descartes invente sa *Géométrie*, publiée en 1637, en résolvant le problème de Pappus. Une version simplifiée du problème de Pappus permet aux élèves de s'en faire une idée.

Par exemple, avec 4 droites on obtient la figure suivante:

On cherche les points M vérifiant  $\frac{MI \times MH}{ML \times MK} = \text{constante}$  sachant que les droites (MH), (MI), (MK) et (ML) sont respectivement perpendiculaires aux droites (D<sub>1</sub>), (D<sub>2</sub>), (D<sub>3</sub>) et (D<sub>4</sub>).



L'ensemble des solutions est une réunion d'arcs de coniques.

1650

Mort de Descartes à Stockholm.

<sup>2</sup>Nom donné à une pièce chauffée par un poêle

## Le contexte épistémologique

Avant d'étudier les textes mathématiques de *La Géométrie* qui ont été abordés avec les élèves, voici un aperçu de quelques repères présentés aux élèves de tous les niveaux:

1) \* *L'art Analitic introduit [...] le plus ampoulé Problème des problèmes, qui est, donner solution de tout problème* in Viète-Vaulézard Introd. p. 66.(citation de François Viète, le père de l'Algèbre, dans son *Introduction en l'Art Analytique*, 1591).

\*Le XVII<sup>e</sup> siècle est celui de la recherche d'une méthode pour bien diriger son esprit.

C'est dans cet horizon de pensée méthodique et dans la continuité de l'ambition de François Viète que s'inscrit Descartes. Il se propose de faire en sorte qu'après lui *rien ne reste à découvrir en géométrie*. Quelque dense qu'elle soit, il veut chasser l'obscurité des sciences, par la lumière naturelle qui, comme toute chose, vient de Dieu.

2) Descartes expose dans *Le discours de la méthode* son projet de réforme des trois outils des mathématiciens que sont la logique, l'analyse des Anciens et l'algèbre des Modernes.

### \*La logique

*Bien qu'elle contienne en effet beaucoup de préceptes très vrais et très bons il y en a toutefois tant d'autres mêlés parmi qui sont nuisibles ou superflus, qu'il est presque aussi malaisé de les en séparer que de tirer une Diane ou une Minerve hors d'un bloc de marbre qui n'est point encore ébauché.* <sup>3</sup>

Sa critique la plus violente concerne le syllogisme qu'il récuse comme moyen de démonstration.

### \*L'analyse des anciens

Il reproche aux anciens d'être trop dépendants des figures, au point qu'elles limitent le travail de l'imagination. Pour Descartes, la figure est utile mais elle ne doit pas être trop complexe pour que l'entendement puisse s'en détacher et laisser la place au travail de l'intuition.

### \*L'algèbre des modernes

Pour Descartes, l'algèbre est, jusqu'à lui, un *art confus et obscur qui embarasse l'esprit au lieu d'une science qui le cultive*. Il explicite sa critique dans la Règle XVI *comme si j'écris  $2a^3$  ce sera tout de même que si je disais le double de la grandeur  $a$  qui contient trois relations*.

---

<sup>3</sup>Oeuvres philosophiques Classiques Garnier Bordas 1988 Ed.F.Alquié P.585

Ainsi, il propose une méthode qui garde les avantages des trois outils et est exempte de leurs défauts.

### La méthode en huit points

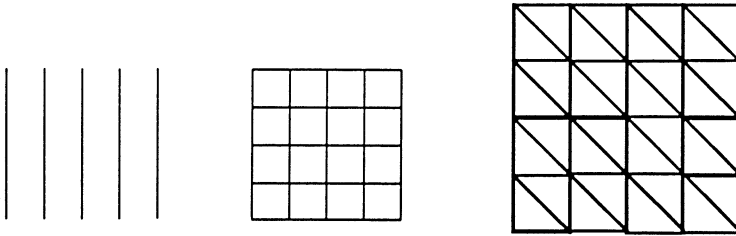
Descartes développe dans les *Règles pour la direction de l'esprit* (1628) les principes qui seront à l'oeuvre dans *La Géométrie* et qui sont présentés sous une forme très proche dans les deux ouvrages. Mais dans les *Règles*, il annonce que sa méthode n'a pas été inventée pour résoudre des problèmes mathématiques ; elle a pour but, avant tout, de cultiver la sagesse, en s'exerçant sur ces problèmes.

On peut résumer en huit points l'entreprise cartésienne de réduction des problèmes, les trois derniers ayant fait l'objet d'une lecture en classe avec les élèves.

#### 1) Tout peut être figuré.

Son idée, fort provocante, est de représenter les différences entre les choses sensibles par des figures. On peut représenter tout ce que l'on perçoit par les sens ; ainsi, il donne comme exemple dans la Règle XII, les figures ci-dessous, pour représenter les différences de couleur bleu, blanc, rouge. Car si l'entendement seul a le pouvoir de percevoir la vérité il doit se faire aider par l'imagination, les sens et la mémoire.

*Il est d'un grand secours de se représenter tout cela de cette manière, car rien ne tombe plus facilement sous le sens que la figure : on la touche en effet, et on la voit. Que rien de faux ne s'ensuive plus de cette supposition que de n'importe quelle autre, c'est ce qui se démontre du fait que la notion de figure est si commune et si simple qu'elle est impliquée dans toute représentation sensible. Supposez par exemple que la couleur soit tout ce qu'il vous plaira : vous ne nierez point cependant qu'elle soit étendue, ni par conséquent qu'elle soit figure. Quel inconvenient y aurait-il dès lors, si, dans le souci de n'admettre inutilement et de ne forger témérairement aucune nouvelle espèce d'être 1, nous faisons, sans rien nier de ce qu'ont pu penser les autres de la couleur, abstraction de tout en elle, sauf de ce qui possède la nature d'une figure, et si nous nous représentions la différence qui sépare le blanc, le bleu, le rouge, etc., comme celle qui sépare les figures ci-dessous, ou d'autres semblables, etc. ?*



*Et l'on peut , en dire autant de tout le reste, puisqu'il est sûr que la diversité infinie des figures suffit à exprimer toutes les différences des choses sensibles.*

2) Tout est question de proportion, ou rapport.

*Toute connaissance qui ne s'obtient pas par l'intuition simple et pure d'une chose isolée s'obtient par la comparaison de deux ou plusieurs choses entre elles. Cette comparaison consiste à chercher les rapports ou proportions où la nature des choses s'enveloppe. Règle XII*

3) Tout peut être ramené à une égalité.

*La majeure partie du travail humain ne consiste en rien d'autre qu'en une réduction de ces rapports, réduction destinée à faire apparaître avec clarté une égalité entre le terme cherché et quelque terme connu. Règle XIV*

4) Il n'y a d'égalité qu'entre grandeurs.

Dans toute comparaison il faut dégager des grandeurs susceptibles de plus ou de moins pour pouvoir établir une égalité.

5) La grandeur de base : l'étendue.

*Rien ne se peut dire des grandeurs en général qui ne se puisse rapporter à l'une quelconque d'entre elles en particulier, à savoir l'étendue et toutes les questions sont amenées au point où on n'y cherche rien d'autre qu'à connaître une certaine étendue. Règle XIV*



6) L'idée géniale : l'unité dont le principe est exposé dans la Règle


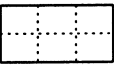
XV




### RÈGLE XV

Il est utile aussi, la plupart du temps, de dessiner ces figures et de les présenter aux sens externes, afin que par là notre pensée soit plus aisément retenue en état d'attention.

La manière dont ces figures doivent être tracées pour qu'en les présentant aux yeux, on aide leurs images à se former distinctement en notre imagination, est par elle-même évidente : nous représentons en effet l'unité, pour commencer, de trois manières :

savoir, par un carré,  si nous la considérons en tant que possédant longueur et largeur, par une ligne,  . si nous la prenons seulement en tant qu'ayant une longueur, ou enfin par un point, • , si nous n'avons égard qu'au fait qu'elle sert de composante à une multiplicité ; mais de quelque manière qu'on la dessine et qu'on se la représente, nous la comprendrons toujours comme un sujet étendu de toutes les manières et capable d'une infinité de dimensions. De même aussi pour les termes d'un problème proposé, si nous devons fixer notre attention sur deux de leurs grandeurs différentes en même temps, nous les représenterons visuellement par un rectangle, dont les deux côtés seront les deux grandeurs proposées : de la manière suivante, si elles sont incommensurables

avec une unité,  de celle-ci,  ou de celle-ci

 si elles sont commensurables; sans rien de plus, à moins que la question ne porte sur une multiplicité d'unités. Si enfin nous ne prenons en considération que l'une de leurs grandeurs, nous la représenterons soit par un rectangle dont l'un des côtés sera la grandeur proposée, l'autre étant l'unité, de la manière suivante,  , ce qui se fait chaque fois qu'il faut la comparer avec une surface; soit par une longueur seulement, de la manière suivante,  , si on ne la considère que comme une longueur incommensurable; soit enfin de cette façon-ci, • • • • • , si c'est une multiplicité.

Comme il l'annonce dans la Règle XIV *L'unité est cette nature commune dont doivent participer à titre égal toutes les choses que l'on compare entre elles.*

Le coup génial de Descartes pour pouvoir comparer les grandeurs est l'introduction d'une unité choisie à discrétion.

### 7) Tout est ligne. Règle XVI

*Il faut remarquer aussi que c'est par le nombre des relations qu'on doit comprendre les proportions qui se suivent en ordre continue proportions que l'on essaie d'exprimer, en algèbre ordinaire, par plusieurs dimensions et figures, et dont on nomme racine la première, carré la seconde, cube la troisième, bicarré la quatrième, etc. Ces noms m'ont trompé moi-même, je l'avoue, pendant longtemps : car il me semblait que rien de plus clair, après la ligne et le carré, ne pouvait se proposer à mon imagination que le cube et les autres figures construites à l'image de celles-ci; du reste je m'en servais pour résoudre plus d'une difficulté. Mais après beaucoup d'expériences, je finis par m'apercevoir qu'avec cette façon de me représenter les choses, je n'avais jamais rien découvert que je n'eusse pu reconnaître sans elle avec bien plus de facilité et de distinction ; et qu'il fallait entièrement rejeter les termes de ce genre, sous peine de rendre confuse la représentation, attendu qu'une grandeur, même si on l'appelle cube ou bicarré, ne doit jamais se proposer à l'imagination sous une autre forme que celle d'une ligne ou d'une surface, conformément à la règle précédente. Il faut donc bien remarquer que la racine, le carré, le cube, etc., ne sont rien d'autre que des grandeurs en proportion continue, que l'on suppose toujours précédées de cette unité d'emprunt dont nous avons déjà parlé plus haut : et c'est à cette unité que la première proportionnelle se rapporte immédiatement et par une relation unique, tandis que la seconde s'y rapporte par la médiation de la première, et donc par deux relations ; la troisième, par la médiation de la première et de la seconde et donc par trois relations, etc. Nous appellerons donc dorénavant première proportionnelle la grandeur qu'en algèbre on appelle racine ; seconde proportionnelle celle qu'on appelle carré, et ainsi du reste.*

### 8) Toute équation peut être résolue en ligne

Ce qui est l'objet de *La Géométrie* dans laquelle Descartes met en place le double mouvement:

- > numériser, algébriser les problèmes géométriques
- > résoudre géométriquement les équations

La lecture de la Règle XV et des extraits de la Règle XVI peut être l'occasion de débat avec les élèves. Durant l'atelier, une question a été posée concernant l'utilisation par Descartes du mot "multiplicité" dont l'usage est source de questions depuis l'antiquité et qui sera l'objet de débat lors de l'établissement de la théorie des ensembles. Nous avons proposé

comme réponse que, pour Descartes, multiplicité signifiait multiplicité discrète, quasi synonyme du mot nombre, et qu'il en prenait la figuration pythagoricienne. La Règle XVI fournit la possibilité de se libérer de la loi des homogènes pronée par Viète. Descartes dans ce texte affirme et met en évidence que *Tout est ligne que la racine, le carré, le cube, etc., ne sont rien d'autre que des grandeurs en proportion continue*. Remarquons que la représentation de toutes les puissances par une ligne est une étape importante vers la construction des réels de Dedekind.

### Les quatre règles du discours

La lecture des quatre règles du *Discours de la Méthode* est un moment clé du travail mathématique avec les élèves. Elle peut se faire à tous les niveaux et peut servir de références toute l'année lors de la résolution de problèmes.

*Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle : c'est-à-dire, d'éviter soigneusement la précipitation et la prévention ; et de ne comprendre rien de plus en mes jugements, que ce qui se présenterait si clairement et si distinctement à mon esprit, que je n'eusse aucune occasion de le mettre en doute.*

*Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre.*

*Le troisième, de conclure par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour monter peu à peu, comme par degrés, jusques à la connaissance des plus composés ; et supposant même de l'ordre entre ceux qui ne se précèdent point naturellement les uns les autres. Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre.*

*Ces longues chaînes de raisons, toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir, pour parvenir à leurs plus difficiles démonstrations, m'avaient donné occasion de m'imaginer que toutes les choses, qui peuvent tomber sous la connaissance des hommes, s'entre-suivent en même façon et que, pourvu seulement qu'on s'abstienne d'en recevoir aucune pour vraie qui ne le soit, et qu'on garde toujours l'ordre qu'il faut pour les déduire les unes des autres, il n'y en peut avoir de si éloignées auxquelles enfin on ne parvienne, ni*



*de si cachées qu'on ne découvre.*

La lecture de Descartes est certes difficile. Mais la citation ci-dessous est propre à aiguillonner l'intérêt des élèves.

*Mais je ne m'arrête point à expliquer cecy plus en détail à cause que je vous ôterais le plaisir de l'apprendre de vous même et l'utilité de cultiver votre esprit en vous y exerçant qui est à mon avis le principal qu'on puisse tirer de cette science.*

Descartes qui a résumé sa méthode en quatre règles explique que les deux théorèmes suivants lui suffisent pour résoudre les problèmes de géométrie ainsi qu'il l'expose à la Princesse Elisabeth dans une lettre de novembre 1643 :

*J'observe toujours en cherchant une question de Géométrie, que les lignes dont je me sers pour la trouver soient parallèles, ou s'entrecoupent à angles droits, le plus qu'il est possible ; et je ne considère point d'autres théorèmes, sinon que les côtés des triangles semblables ont semblable proportion entre eux et que, dans les triangles rectangles, le carré de la base est égal aux deux carrés des côtés.*

Il continue à exposer sa démarche: *en minimisant le nombre de théorèmes il peut arriver que le nombre de lignes inconnues qui aient à entrer dans les équations de résolution du problème donné soit en nombre conséquent, l'élimination se faisant petit à petit ; mais le chemin déductif parcouru pour cette élimination se fait avec une rigueur déductive qui porte en elle une conviction de justesse. Le chemin le plus court n'est pas forcément le meilleur.*

Dans *La Géométrie* se dessine le visage classique de Descartes que je viens d'esquisser, celui du Descartes méthodique qui se restreint volontairement à l'étude des courbes algébriques, rejetant l'étude des courbes transcendantes, trigonométriques, logarithmiques, exponentielles et du calcul infinitésimal. Je signale qu'il n'en est pas de même dans ses lettres, où il n'hésite pas à faire des recherches concernant ces différentes notions. Mais *La Géométrie*, comme propédeutique à une bonne philosophie, à une bonne méthode de pensée peut être vue comme la mise en oeuvre de l'outil proportion, pour produire son champ complet d'applications.

### Pour des activités en classe

L'introduction et quelques extraits de *La Géométrie* qui ont été lus pendant l'atelier peuvent faire l'objet d'activités en classe. Ils portent notamment sur:

- la construction en lignes du produit, du quotient de deux grandeurs, de la racine carrée d'une grandeur
- la théorie générale des équations
- la résolution d'équations du troisième degré (insertion de deux moyennes proportionnelles, trisection de l'angle)

Certaines de ces activités sont détaillées dans la brochure M:A.T.H. n° 79 de l'IREM de Paris -7



Museo de Toulouse  
PORTRAIT DE DESCARTES JEUNE  
École française

### Bibliographie

Barbin.E, Bonnefon.E, Itard.G "Démontrer, convaincre ou éclairer ?"  
in *Actes du colloque Inter-IREM*, La Rochelle, 1988

Bkouche.R "Quelques grandes problématiques de l'histoire de la géométrie" in *Actes de l'université d'été sur l'histoire de mathématiques*, p.41-73, Toulouse, 1986

Brunschwig L. *Les étapes de la philosophie mathématique*, PUF, 1947  
Cedic Paris 1982