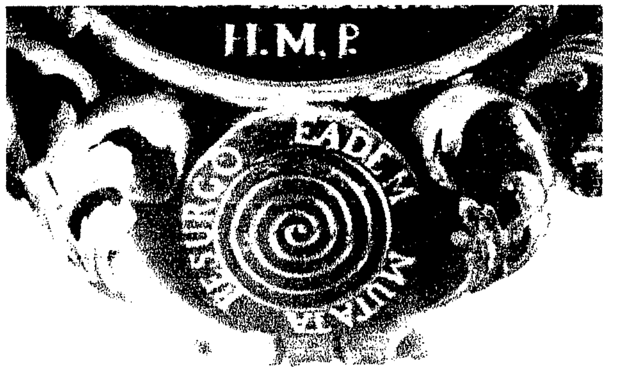


Détail de la pierre tombale de J. Bernoulli à Bâle. Remarquez que, contrairement au souhait de J. Bernoulli, le sculpteur a gravé une spirale d'Archimède et non une spirale admirable. (photo André Stoll)

10. Bibliographie

Fragments d'histoire des mathématiques II -Brochure APMEP n°65 -1987 -

ARCHIMEDE - Traduction Charles MUGLER - Edition "Les Belles Lettres" Tome II 1971.

ALBRECHT DURER - Géométrie - Traduction Jeanne PEIFFER - Editions du Seuil 1995.

Blaise PASCAL - Oeuvres Complètes - Bibliothèque de la Pléade - Editions Gallimard 1954.

P. J. DAVIS - Spirals from Theodorus to chaos - Editions A K PETERS Wellesley, Massachusetts 1993.

Brochure IREM de Strasbourg - Activités géométriques pour le collège et le lycée présentées dans une perspective historique - 1996 -

Dr Gino LORIA - Spezielle algebraische und transscendente Ebene Kurven. LEIPZIG 1902.

René DESCARTES - Œuvres de René DESCARTES - Editions Vrin - Tome 2 - 1996.

Jacob BERNOULLI - Opera - Acta eruditorum, 1692 - vol XLII et vol XLIX - Traduit du latin par Marga BUFFARD/André STOLL

PLATON - Théétète - Edition "Les Belles Lettres" Tome VIII 1963.

Revue du Palais de la découverte - numéro spécial 45 - Courbes mathématiques - 1995.

Dictionnaire des symboles.- Jean CHEVALIER et Alain GHEERBRANT- Editions Robert Laffont/Jupiter- Collection Bouquins- 1993.

Quelles sont les lignes courbes que l'on peut recevoir en géométrie ?

Jean-Pierre Friedelmeyer

Cette question, posée par René Descartes (1596-1650) au début du Livre II de sa *Géométrie*, accompagne en réalité toute l'histoire des mathématiques. Courbes mécaniques opposées aux géométriques, courbes transcendantes opposées aux algébriques, courbes tracées d'un mouvement libre de la main et donc " *ne suivant aucune loi* ",[1] courbe de Peano, courbes fractales, chaque génération de mathématiciens a eu la tentation d'exclure certaines courbes de son champ d'étude, comme ne correspondant pas à son idéal de rationalité ou à ses possibilités d'investigation. Ce qui nous instruit en profondeur sur cet idéal mais aussi sur sa remise en cause, sur ces possibilités supposées comme sur l'élargissement dont elles sont susceptibles. Ce qui peut également rejoindre des questions d'ordre pédagogique relatives aux courbes que nous " pouvons recevoir " dans nos classes.

Erreur significative : dans la présentation générale des ateliers de l'Université d'Eté de Nantes le mot ***ligne*** avait été oublié dans la transcription de la citation de Descartes. Cet oubli dit bien que, si l'on n'y prend garde, nous ne sommes jamais assez circonspect dans la lecture des textes anciens dont les mots sont compris et interprétés spontanément, dans leur acception actuelle. Or l'historien doit s'imposer tout un travail de distanciation et de retour aux sources pour que n'interfèrent pas les connaissances et les conceptions actuelles avec celles des époques du passé. *Il est essentiel* - disait Koyré - *d'intégrer dans l'histoire d'une pensée scientifique la manière dont elle se comprenait elle même et se situait par rapport à ce qui la précédait et l'accompagnait.*[2] Or le concept de ***courbe*** est un de ceux qui s'est le plus modifié et enrichi au fil de l'histoire, et d'abord dans sa nature grammaticale même. Jusqu'au milieu du XVIII^{ème} siècle, le mot ***courbe*** était uniquement utilisé comme adjectif du mot ***ligne***, caractérisant une qualité de nature physique et opposée à la qualité ***droit.*** Rappelons comment Euclide ouvre le Livre I des *Eléments* avec les quatre définitions suivantes :

Déf.1 : Le point est ce dont il n'y a aucune partie.
Déf.2 : Une ligne est une longueur sans largeur.
Déf.3 : Les limites d'une ligne sont des points.
Déf.4 : Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle.[3]

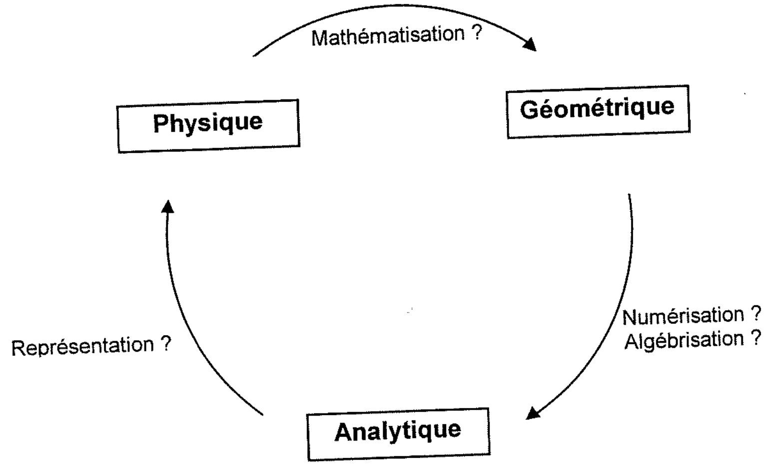
On conçoit que ces définitions ne soient guère exploitables car elles ne sont pas assez précises pour être mathématiquement productives, pour permettre d'initier un raisonnement mathématique à partir d'elles. C'est pourquoi historiquement on n'a pas étudié la *ligne* en général, mais seulement des lignes particulières. Ces lignes sont définies comme des *lieux* (des " ensembles de points ", dirions nous aujourd'hui) jouissant de certaines propriétés. Ou alors elles correspondent à l'intersection de surfaces, ou encore à la trajectoire d'un point dont le mouvement est bien spécifié. De **physique**, de sensible, l'objet ***ligne courbe*** devient **géométrique**, idéalisé, conceptualisé, la plupart du temps à partir de relations entre grandeurs. Plus tard ces relations donneront lieu à des ***équations*** [4]qui permettront de soumettre les lignes

[1] Voir plus loin le texte n° 7, d'Euler.
[2] A. Koyré, *Etudes d'histoire de la pensée scientifique*, p.14.
[3] Traduction B. Vitrac, Euclide, *les Eléments*, p. 151 - 154.
[4] Le mot *équation subit lui-même une évolution sémantique au fil de l'histoire, passant du statut de simple égalité à celui de formulation algébrique d'un problème au moyen d'une inconnue, puis de relation entre des coordonnées, les deux derniers sens continuant à cohabiter.*

courbes à toute la puissance du calcul numérique et algébrique. La ligne courbe devient ***courbe analytique***[5] et c'est à ce moment là qu'insensiblement l'adjectif ***courbe*** devient substantif, en même temps que ***les courbes*** se diversifient à travers toute la richesse des formules algébriques puis fonctionnelles.

Ainsi derrière l'objet ***ligne courbe*** se profilent trois réalités étroitement interdépendantes, mais dont la relation justement va poser chaque fois un problème spécifique .

Un objet : la ligne courbe.
Trois réalités ?



Entre chacun de ces trois pôles pris deux à deux va se poser un problème d'adéquation :
1.Parmi les lignes physiques, matérielles, quelles sont celles que l'on peut définir géométriquement, que l'on peut conceptualiser pour en faire une étude géométrique au sens des géomètres Grecs ?
2.Parmi les lignes géométriques ou physiques, lesquelles se prêtent à une mise en équation ou à une relation fonctionnelle ?
3.Une équation ou une fonction étant donnée :
   a) dans quelle mesure y a-t-il cohérence entre les données fournies par la représentation graphique et les résultats qui découlent de l'exploitation de cette fonction ?
   b) inversement, la richesse même des concepts numériques et algébriques a-t-elle toujours une traduction graphique et physique observable ? L'histoire des mathématiques nous montre comment l'analyse va créer des objets de plus en plus élaborés, que l'intuition ne comprend plus et pour lesquels aucun objet observable ne peut plus être mis en regard de l'objet calculé. (pensez à ces monstres mathématiques que sont les fonctions continues nulle part dérivables)

Ces questions dépassent le cadre mathématique mais sont à l'arrière plan de toute étude mathématique des courbes, en ce qu'elle suppose une certaine idée de régularité, d'ordre, de

[5] Nous utilisons ici le terme ***analytique*** au sens qu'il avait au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, défini par exemple dans *L'Encypclopédie :**Analyse** est proprement la méthode de résoudre les problèmes mathématiques en les réduisant à des équations.*

loi susceptible d'être traduite en termes géométriques ou numériques. Elles relèvent de ce que les Anciens appelaient la *métaphysique,* et que André Weil définit comme *un ensemble d'analogies vagues, difficilement saisissables et difficilement formulables,[...]* mais ajoutant aussitôt :*Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe ; le pressentiment se change en certitude ; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaître ; comme l'enseigne la* Gîtâ *on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir.*[6]
Peut on mieux décrire le rôle des *a priori* philosophiques, voire idéologiques ou religieux dans le développement des mathématiques ? Le texte qui suit, de G. W. Leibniz (1646-1716), et que nous souhaitons mettre en prologue à cette étude, condense à merveille l'ensemble des questions évoquées dans cette introduction.

Leibniz : Discours de métaphysique § VI

Les volontés ou actions de Dieu sont communément divisées en ordinaires ou extraordinaires. Mais il est bon de considérer que Dieu ne fait rien hors d'ordre. Ainsi, ce qui passe pour extraordinaire, ne l'est qu'à l'égard de quelque ordre particulier establi parmy les créatures. Car, quant à l'ordre universel, tout y est conforme. Ce qui est si vray que, non seulement rien n'arrive dans le monde qui soit absolument irregulier, mais on ne sçauroit memes rien feindre de tel. Car, supposons, par exemple que quelq'un fasse quantité de points sur le papier à tout hasard, comme font ceux qui exercent l'art ridicule de la geomance. Je dis qu'il est possible de trouver une ligne geometrique dont la notion soit constante et uniforme suivant une certaine regle, en sorte que cette ligne passe par tous ces points, et dans le même ordre que la main les avait marqués.

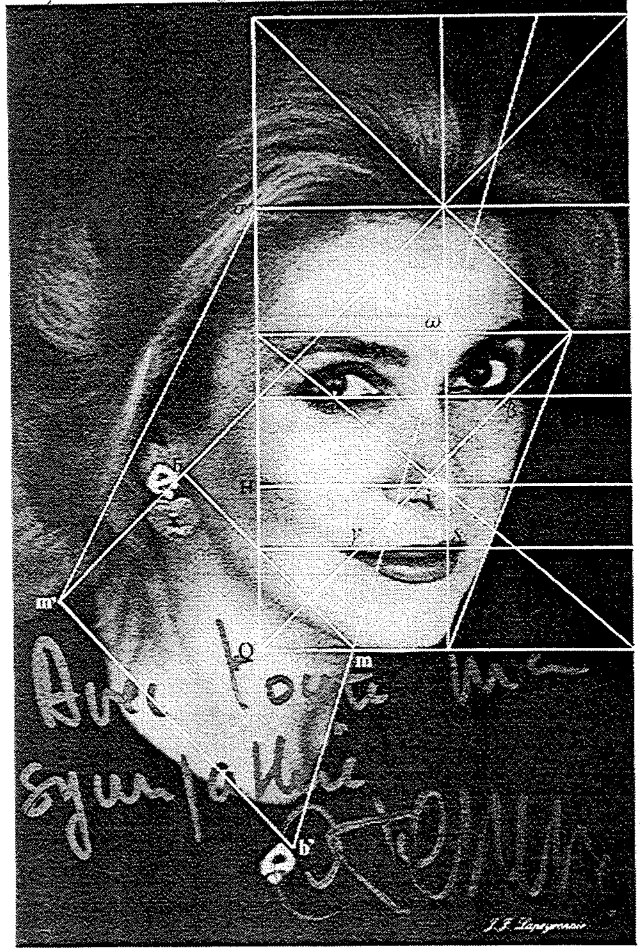
Et si quelqu'un traçoit tout d'une suite une ligne qui seroit tantost droite, tantost cercle, tantost d'une autre nature, il est possible de trouver une notion ou regle, ou equation commune à tous les points de cette ligne, en vertu de laquelle ces mêmes changements doivent arriver .Et il n'y a, par exemple, point de visage dont le contour NE FASSE PARTIE D' UNE LIGNE GEOMETRIQUE et ne puisse estre tracé tout d'un trait par un certain mouvement reglé. Mais quand une regle est fort composée, ce qui luy est conforme, passe pour irregulier .

Ainsi on peut dire que, de quelque maniere que Dieu auroit créé le monde, il auroit toujours esté regulier et dans un certain ordre general. Mais Dieu a choisi celuy qui est le plus parfait, c'est à dire celuy qui est en même temps le plus simple EN HYPOTHESES, et le plus riche EN PHENOMENES, comme pourroit estre une ligne de geometrie dont la construction seroit aisée et les proprietes et effects seroient fort admirables et d'une grande étendue.[7]

Ainsi pour Leibniz, une courbe peut apparaître complètement irrégulière, passant par des points pris totalement au hasard ; il existe néanmoins un concept (notion), une règle (relation) ou une équation qui rend compte de cette apparente irrégularité et de ce hasard. Toute ligne a sa *notion ou règle ou équation*, seule la complexité de celle-ci lui donne quelquefois son aspect irrégulier, et la ligne la plus parfaite serait celle qui serait la *plus simple en hypothèses et la plus riche en phénomènes.* Une telle conception de la réalité a des conséquences immenses au niveau de la mathématisation du réel ; rien ne semble pouvoir lui échapper. Mais d'autres ne partagent pas cet optimisme et seront plus prudents et sélectifs :

[6] A. Weil, *De la métaphysique aux mathématiques* , Œuvres Scientifiques, tome 2, p. 408.
[7] G. W. Leibniz, *Discours de Métaphysique,* p.32.

tout n'est pas mathématique, tout n'est pas mathématisable. Et alors nous retrouvons la question de Descartes : *quelles sont les lignes courbes que l'on peut recevoir en géométrie ?*



Leibniz : *Et il n'y a, par exemple, point de visage dont le contour NE FASSE PARTIE D'UNE LIGNE GEOMETRIQUE.*[8]

Il y aura en conséquence trois parties dans cette histoire qui pourrait être aussi longue et riche que celle même des mathématiques.

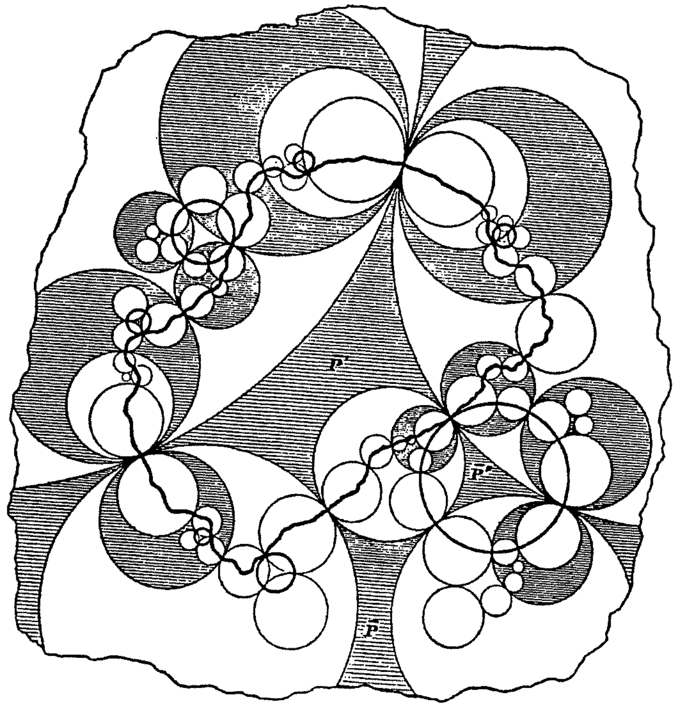
I. De la ligne courbe vers son équation, étude qui tente de dégager les difficultés, les blocages qui ont freiné le passage de l'objet physique ***ligne courbe*** à sa mathématisation géométrique ou analytique.

---

[8] Portrait tiré du livre de Claude-Jacques Willard :*Le Nombre d'or, Utilisation en mathématiques et dans les Beaux-Arts* ,p. 245 .

I. De l'équation vers la ligne, où l'on voit comment l'algèbre et le calcul infinitésimal enrichissent et épurent le concept de courbe, en formalisant et en numérisant des propriétés jusque là qualitatives (comme la continuité, l'existence de tangentes, etc...), mais qui par ailleurs aboutissent à des situations en contradiction avec l'intuition et perçues comme pathologiques.(courbes continues mais sans tangentes, courbes remplissant tout un carré, etc...)

II. Vers l'élargissement du concept de courbe, paragraphe qui mettra en évidence que l'analyse actuelle permet d'intégrer la compréhension des phénomènes pathologiques et de les cerner, tout en donnant accès à l'étude de nouvelles situations (celles où apparaissent les courbes fractales, chaotiques...) longtemps exclues des possibilités d'étude mathématique.[1]



Cette figure est extraite d'un livre de Robert Fricke (1861-1930) et Félix Klein (1849-1925), sur les fonctions automorphes.[2] Nous ne pouvons en donner ici l'explication précise. Nous l'avons mise parce qu'elle présente à la fois des lignes « régulières » et géométriques au sens des Anciens, telles le cercle, et une ligne purement abstraite et pensée comme limite d'une construction itérée indéfiniment, et qui à toutes les caractéristiques des lignes les plus sophistiquées qu'on peut rencontrer dans les mathématiques actuelles.

---

[1] Nous n'aborderons dans cette étude que les lignes **planes** qui concentrent en elles toutes les questions et toutes les étapes historiques de l'évolution du concept de **courbe**. Les courbes de l'espace ne posent pas de problème spécifique de ce point de vue.

[2] R. Fricke, F. Klein, *Vorlesungen über die Theorie der Automorphe Functionen,* Bd. I, p. 440.

BIBLIOTHEQUE IREM PARIS 7

A partir des quatre plus grand cercles de la figure, considerez les quatre inversions conservant l'un des cercles ; chacune transforme les trois autres cercles en de nouveaux cecles. La composition et l'itération à l'infini de ces inversions génère de proche en proche les autres cercles de la figure. La ligne « irrégulière » trace la limite entre deux domaines. Elle passe orthogonalement par tous les points de contact des différents cercles.

Première partie : De la ligne vers son équation.

Le travail en atelier a consisté en la lecture commentée et discutée par les participants de textes choisis pour leur caractère décisif dans la problématique que nous venons de présenter et que nous reproduisons au fil des pages qui suivent. Il n'est pas possible de rendre compte dans le détail des interventions des uns et des autres. Nous nous contenterons de dégager les thèmes principaux qui ont guidés et ponctué la lecture. Nous commencerons bien sûr par le texte de Descartes qui a donné le titre de cet atelier.

Texte 1. (Descartes, *La Géométrie*, 1637, Livre second : *DE LA NATURE DES LIGNES COURBES.*)[1]

LIVRE SECOND. 315

LA
GEOMETRIE.
LIVRE SECOND.

De la nature des lignes courbes.

LES anciens ont fort bien remarqué, qu'entre les Probleſmes de Geometrie, les vns ſont plans, les autres ſolides, & les autres lineaires, c'eſt a dire, que les vns peuuent eſtre conſtruits, en ne traçant que des lignes droites, & des cercles; au lieu que les autres ne le peuuent eſtre, qu'on n'y employe pour le moins quelque ſection conique; ni enfin les autres, qu'on n'y employe quelque autre ligne plus composée. Mais ie m'eſtonne de ce qu'ils n'ont point outre cela diſtingué diuers degrés entre ces lignes plus composées, & ie ne ſçaurois comprendre pourquoy ils les ont nommées mechaniques, plutoſt que Geometriques. Car de dire que ç'ait eſté, a cauſe qu'il eſt beſoin de ſe ſeruir de quelque machine pour les deſcrire, il faudroit reietter par meſme raiſon les cercles & les lignes droites; vû qu'on ne les deſcrit ſur le papier qu'auec vn compas, & vne reigle, qu'on peut auſſy nommer des machines. Ce n'eſt pas non plus, a cauſe que les inſtrumens, qui ſeruent a les tracer, eſtant plus composés que la reigle & le compas, ne peuuent eſtre ſi iuſtes; car il faudroit pour cete raiſon les reietter des Mechaniques, où la iuſteſſe des ouurages qui ſortent de la main eſt deſirée; plutoſt que de la Geometrie, ou c'eſt ſeulement la iuſteſſe du raiſonnemēt qu'on recher-

Quelles ſont les lignes courbes qu'on peut receuoir en Geometrie.

Rr 2 che,

41

316 LA GEOMETRIE.

che, & qui peut ſans doute eſtre auſſy parfaite touchant ces lignes, que touchant les autres. Ie ne diray pas auſſy, que ce ſoit a cauſe qu'ils n'ont pas voulu augmenter le nombre de leurs demandes, & qu'ils ſe ſont contentés qu'on leur accordaſt, qu'ils puſſent ioindre deux poins donnés par vne ligne droite, & deſcrire vn cercle d'vn centre donné, qui paſſaſt par vn point donné. car ils n'ont point fait de ſcrupule de ſuppoſer outre cela, pour traiter des ſections coniques, qu'on puſt coupper tout cône donné par vn plan donné. & il n'eſt beſoin de rien ſuppoſer pour traçer toutes les lignes courbes, que ie pretens icy d'introduire; ſinon que deux ou pluſieurs lignes puiſſent eſtre meuës l'vne par l'autre, & que leurs interſections en marquent d'autres; ce qui ne me paroiſt en rien plus difficile. Il eſt vray qu'ils n'ont pas auſſy entierement receu les ſections coniques en leur Geometrie, & ie ne veux pas entreprendre de changer les noms qui ont eſté approuués par l'vſage; mais il eſt, ce me ſemble, tres clair, que prenant comme on fait pour Geometrique ce qui eſt precis & exact, & pour Mechanique ce qui ne l'eſt pas; & conſiderant la Geometrie comme vne ſcience, qui enſeigne generalement a connoiſtre les meſures de tous les cors, on n'en doit pas plutoſt exclure les lignes les plus composées que les plus ſimples, pourvû qu'on les puiſſe imaginer eſtre deſcrites par vn mouuement continu, ou par pluſieurs qui s'entreſuiuent & dont les derniers ſoient entierement reglés par ceux qui les precedent. car par ce moyen on peut touſiours auoir vne connoiſſance exacte de leur meſure. Mais peuteſtre que ce qui a empeſché les anciens Geometres de reçe-

uoir

42

LIVRE SECOND. 317

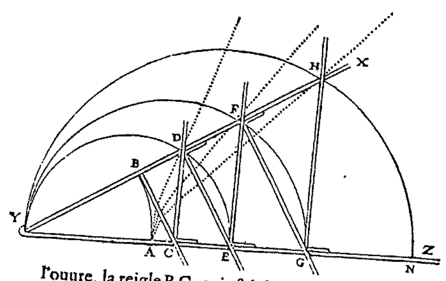
uoir celles qui eſtoient plus composées que les ſections coniques, c'eſt que les premieres qu'ils ont conſiderées, ayant par haſard eſté la Spirale, la Quadratrice, & ſemblables, qui n'appartienent veritablement qu'aux Mechaniques, & ne ſont point du nombre de celles que ie penſe deuoir icy eſtre receues, a cauſe qu'on les imagine deſcrites par deux mouuemens ſeparés, & qui n'ont entre eux aucun raport qu'on puiſſe meſurer exactement, bienqu'ils ayent aprés examiné la Conchoide, la Ciſſoide, & quelque peu d'autres qui en ſont, toutefois a cauſe qu'ils n'ont peuteſtre pas aſſés remarqué leurs proprietés, ils n'en ont pas fait plus d'eſtat que des premieres. Oubien c'eſt que voyant, qu'ils ne connoiſſoient encore, que peu de choſes touchant les ſections coniques, & qu'il leur en reſtoit meſme beaucoup, touchant ce qui ſe peut faire auec la reigle & le compas, qu'ils ignoroient, ils ont creu ne deuoir point entamer de matiere plus difficile. Mais pourceque i'eſpere que d'orenauant ceux qui auront l'adreſſe de ſe ſeruir du calcul Geometrique icy propoſé, ne trouueront pas aſſés dequoy s'areſter touchant les probleſmes plans, ou ſolides; ie croy qu'il eſt a propos que ie les inuite a d'autres recherches, où ils ne manqueront iamais d'exercice.

Voyés les lignes A B, A D, A F, & ſemblables que ie ſuppoſe auoir eſté deſcrites par l'ayde de l'inſtrument Y Z, qui eſt composé de pluſieurs reigles tellement iointes, que celle qui eſt marquée Y Z eſtant areſtée ſur la ligne A N, on peut ouurir & fermer l'angle X Y Z; & que lorſqu'il eſt tout fermé, les poins B, C, D, F, G, H ſont tous aſſemblés au point A; mais qu'a meſure qu'on

Rr 3 l'ouure,

45

318 LA GEOMETRIE.



l'ouure, la reigle B C, qui eſt iointe a angles droits auec X Y au point B, pouſſe vers Z la reigle C D, qui coule ſur Y Z en faiſant touſiours des angles droits auec elle, & C D pouſſe D E, qui coule tout de meſme ſur Y X en demeurant parallele a B C, D E pouſſe E F, E F pouſſe F G, cellecy pouſſe G H. & on en peut conceuoir vne infinité d'autres, qui ſe pouſſent conſequutiuement en meſme façon, & dont les vnes facent touſiours les meſmes angles auec Y X, & les autres auec Y Z. Or pendant qu'on ouure ainſi l'angle X Y Z, le point B deſcrit la ligne A B, qui eſt vn cercle, & les autres poins D, F, H, ou ſe font les interſections des autres reigles, deſcriuent d'autres lignes courbes A D, A F, A H, dont les dernieres ſont par ordre plus cõpoſées que la premiere, & cellecy plus que le cercle. mais ie ne voy pas ce qui peut empeſcher, qu'on ne concoiue auſſy nettement, & auſſy diſtinctement la deſcription de cete premiere, que du cercle, ou

du

46

Dans ce texte, la question des *lignes courbes qu'on peut recevoir en géométrie* est explicitement posée, et Descartes en donne le critère de distinction suivant:

- sont acceptables toutes les lignes, qu'elles soient simples ou composées, *pourvu qu'on puisse les imaginer être décrites par un mouvement continu, ou par plusieurs qui s'entre-suivent, et dont les derniers soient entièrement réglés par ceux qui les précèdent, car par ce moyen on peut toujours avoir une connaissance exacte de leur mesure,*
- sont à refuser, celles du genre spirale ou quadratrice, *à cause qu'on les imagine décrites par deux mouvements séparés, et qui n'ont entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement.*

Les Grecs, déjà, refusaient quelquefois de considérer comme faisant partie de la géométrie certaines courbes comme la spirale ou la quadratrice (cf. texte 2). Mais la raison avancée tenait dans le fait qu'elles sont « trop mécaniques », c'est-à-dire liées au mouvement. Le mouvement faisait problème pour les Grecs, comme l'infini, les deux étant d'ailleurs souvent associés par exemple dans les paradoxes de Zénon. A la fois manifestation et conséquence de ces difficultés, la science grecque s'est alors construite dans une véritable dichotomie. D'un côté, ou plutôt en bas, il y a la Terre et ses quatre éléments (la terre l'eau, l'air, le feu), lieu du changement et de la corruption : changement d'état ou changement de lieu, ce dernier correspondant à ce qu'Aristote appelle le mouvement local. Au dessus il y a le Ciel, lieu des astres célestes, sphériques, incorruptibles, décrivant des mouvements parfaits circulaires. Cette dichotomie se traduit par la constitution, côté Terre, d'une philosophie de la nature (la physique) coupée totalement, côté Ciel, des mathématiques, empêchant du même coup l'élaboration d'une physique mathématique telle qu'elle se créera au XVII$^{\text{ème}}$ siècle.

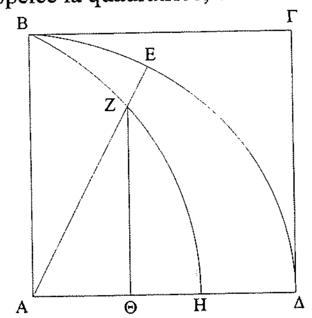
Le mathématicien construit sa théorie à l'aide des objets que lui fournit l'abstraction. Il spécule après avoir retranché tout ce qui tombe sous les sens, telles la gravité ou la légèreté, la dureté ou la mollesse, tels le chaud ou le froid et toutes les qualités sensibles qui s'opposent les unes aux autres ; il ne garde que la quantité et la continuité, pour certains objets suivant une dimension, pour d'autres objets suivant deux dimensions ;[2]

En conséquence, où faut-il situer une courbe définie comme la trajectoire d'un point telle la quadratrice étudiée dans le texte 2 qui suit ?

Texte 2 :Pappus d'Alexandrie, Livre IV (*Collections mathématiques*)[3]

XXX

Une ligne qui tire sa dénomination de sa propriété même a été adoptée par Dinostrate, Nicomède et certains autres auteurs récents pour effectuer la quadrature du cercle ; ils l'ont appelée la quadratrice, et voici sa génération.



Posons un carré ABΓΔ et décrivons l'arc BEΔ autour du centre A Faisons mouvoir la droite AB de telle sorte que, le point A restant fixe, le point B se déplace suivant l'arc BEΔ et que la droite BΓ, se maintenant toujours parallèle à la droite AΔ, accompagne le point B qui se déplace suivant la droite AB. De plus, que la droite AB, se mouvant d'une manière uniforme, parcoure l'angle compris sous les droites BA, AΔ, c'est à dire que le point B parcoure l'arc BEΔ dans le même temps que la droite BΓ se déplace le long de la droite c'est-à-dire que le point B se déplace suivant la droite BA.

Il se fera évidemment que les droites AB et BΓ coïncideront simultanément l'une et l'autre avec la droite AΔ. En conséquence, un tel mouvement ayant lieu, les droites AB, BΓ se couperont mutuellement en un point qui est continuellement transporté avec elles, lequel décrira une ligne concave d'un même côté, telle que BZH, dans l'espace compris entre les droites BA, AΔ et l'arc BEΔ , ligne qui paraît commode pour trouver un carré équivalent à un cercle donné. Du reste, sa propriété principale est telle que, si une droite quelconque AZE est menée transversalement à l'arc, la droite BA sera à la droite ZΘ comme l'arc entier est à l'arc EΔ ; car cela résulte manifestement de la génération de la ligne.

XXXI.

C'est à juste titre cependant, que Sporos n'a pas agréé cette ligne parce qu'on y assume d'abord comme hypothèse ce à quoi elle semble pouvoir être utilisée.

En effet, si deux points commencent à se mouvoir à partir du point B, comment pourront-ils se stabiliser en même temps l'un au point A suivant une droite, l'autre au point Δ suivant un

[2] Aristote, *Métaphysique,* livre X, ch.III (Aristotelis *Opera,* éd. Didot, t. II . 588 ; éd. Bekker, vol.II, p. 1061, coll. a et b) in Duhem P, *L'aube du savoir,* p. 53.

[3] Pappus , *Collections mathématiques,* Livre IV, § XXX et XXXI.

arc, sans connaître au préalable le rapport de la droite AB à l'arc BEΔ ? Car, il faut nécessairement que les vitesses des mouvements soient dans le même rapport. Dès qu'on use de vitesses non ordonnées, comment ces points se stabiliseront-ils ainsi simultanément, à moins que cela n'arrive par hasard ? Or cela n'est-il pas déraisonnable ? Ensuite, l'extrémité de la ligne dont certains se servent pour la quadrature du cercle, c'est-à-dire le point où la ligne coupe la droite AΔ, n'est nullement trouvée. Représentons-nous d'ailleurs les choses que nous avons dites sur la délinéation proposée : lorsque les droites ΓB, BA mises en mouvement seront stabilisées simultanément, elles s'appliqueront sur la droite AΔ et ne feront plus de section entre elles ; car, la section cesse avant l'application sur la droite AΔ ; section qui deviendrait, au contraire, l'extrémité de la ligne où celle-ci rencontrerait la droite AΔ ; à moins qu'on ne dise d'imaginer la ligne comme étant prolongée jusqu'à la droite ΔA de la manière dont nous établissons les lignes droites. Or, cela ne répond pas à ce qui a été supposé au début, notamment que le point H soit pris en ayant pris au préalable le rapport de l'arc à la droite. D'ailleurs, à moins que ce rapport ne soit donné, il ne convient pas. que, se confiant à la réputation des hommes qui l'ont inventée, l'on admette une ligne qui soit en quelque sorte trop mécanique [et utile aux mécaniciens pour beaucoup de problèmes].

Dans ce contexte, la tradition attribue à Platon l'exigence de n'accepter, pour tracer ou construire des lignes, d'autres instruments que la règle et le compas. Ceux-ci sont en effet les seuls à posséder la pureté idéale exigée en géométrie et la compatibilité avec ses axiomes. Cet argument est combattu par Descartes qui explique que la règle et le compas sont aussi des machines, et que rien n'empêche de concevoir d'autres machines abstraites mettant en jeu des situations géométriques tout aussi rigoureuses qu'eux. C'est ce qu'il fait avec le mésolabum ou compas à équerres glissantes(cf. fin du texte 1). Ce compas permet de construire des lignes de plus en plus composées, sans pour autant échapper à la géométrie, car cette composition est parfaitement réglée (!) ; par elle *on peut toujours avoir une connaissance exacte de leur mesure.*

Comme une chaîne déductive, si longue soit-elle, peut mener à une conclusion exacte à condition que les règles de la méthode aient été respectées, de même l'engendrement d'une ligne courbe peut être fort composé à condition que les règles de composition soient respectées. Ces règles se ramènent en fait à une seule : que le mouvement qui fait passer d'une courbe à l'autre soit entièrement et continuellement déterminé. Dès lors, la connaissance certaine de la première induira la connaissance certaine de la seconde[4].

Le terme « *mesure* » est à prendre ici dans le sens développé dans le Livre I de grandeur constructible, entraînant avec elle l'idée que *les lignes courbes que l'on peut recevoir en géométrie* sont uniquement les courbes algébriques. (mais Descartes ne le dit pas ainsi). Il s'agit de « construire » les problèmes - entendez « résoudre » au moyen de lignes (cf. le début du texte 1.). Remarquons que l'équation des courbes tracées par le mésolabum est assez simple à trouver : en posant OA = a, n l'indice du point variable, (1 pour D, 2 pour F, 3 pour H, etc..) et en désignant par x et y les coordonnées de ce point, alors on a : $x^{4n} = a^2(x^2+y^2)^{2n-1}$

Et c'est bien là l'innovation principale de Descartes : élargir le champ des courbes que l'on peut étudier en géométrie en l'étendant à toutes les courbes dont on sait écrire l'équation et en montrant comment faire cette étude au moyen du calcul algébrique. Descartes accepte par

[4] V. Jullien, *Descartes, La Géométrie de 1637,* p. 88.

conséquent le mouvement pour définir des lignes, pourvu que le rapport entre deux mouvements réglés entre eux soit un rapport « mesurable ». Cela exclut pour lui aussi les courbes telles que la spirale d'Archimède ou la quadratrice, car la relation entre les deux mouvements qui engendrent ces courbes n'est pas mesurable : elle fait intervenir un rapport de courbe (ici le cercle) à une droite, rapport que Descartes a toujours considéré comme inaccessible à la raison humaine :

La proportion qui est entre les droites et les courbes n'étant pas connue, et même je crois ne le pouvant être par les hommes[5]...(en clair, on ne peut pas calculer la longueur d'une courbe, on ne peut pas la rectifier[6]).

Cet élargissement va rapidement dépasser l'objectif pour lequel Descartes l'avait créé : résoudre des problèmes de géométrie que les Grecs ne savaient pas résoudre, comme la duplication du cube ou le problème de Pappus. Il répond en effet également à une autre préoccupation fondamentale du temps, celui de la mathématisation des lois de la Nature.

Galileo Galilée (1564–1642) avait proposé de lire *cet immense livre qui se tient toujours ouvert devant nos yeux, je veux dire l'Univers. Mais on ne peut le comprendre si on ne s'applique d'abord à en comprendre la langue et à en connaître les caractères avec lesquels il est écrit. Il est écrit dans la langue mathématique et ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géométriques sans le moyen desquels il est humainement impossible d'en comprendre un mot. Sans eux c'est une errance vaine dans un labyrinthe obscur.*[7] On ne saurait mieux décrire le changement intervenu par rapport à la conception aristotélicienne de la physique : Galilée détruit la vieille cloison hermétique qui séparait le monde physique de celui des mathématiques ; mais à nouvelle philosophie de la nature, nouvelles mathématiques. L'outil mathématique dont dispose Galilée et qu'il croit encore suffisant est celui de la géométrie d'Euclide, « ses triangles, ses cercles et autres figures », alors que pour donner les *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* - titre du plus célèbre ouvrage de Newton (1687) - il faut bien autre chose. Le savant qui essaye de *lire le livre de la nature* y découvre des **lois**, c'est-à-dire des **relations** entre grandeurs **variables.** La géométrie des Anciens, qui avait renvoyé au domaine de la physique toute étude des changements, donc de la variabilité, était totalement inadaptée à l'expression de lois de la nature. Entièrement statique, cette géométrie ne pouvait répondre aux problèmes posés par la mathématisation de la physique qu'en changeant son point de vue sur les courbes : celles-ci doivent passer du statut de **lieu** à celui de **trajectoire.** Alors la rencontre de ce changement de statut avec l'algébrisation des courbes réalisée par Descartes pourra engendrer ce concept aux potentialités inouïes : la fonction (d'une ou plusieurs **variables** : remarquez la pérennité du mot **variable** utilisé encore aujourd'hui, qui garde bien la trace de cette irruption du changement dans la mathématique). Ainsi la relation entre grandeurs variables pourra s'exprimer grâce à l'outil algébrique au moyen de la fonction, et se représenter géométriquement au moyen de la courbe. On ne se rend pas compte de la difficulté qu'il y avait à énoncer une loi physique sans l'outil algébrique et fonctionnel ; voici en quels termes Galilée exprime par exemple la loi de la chute des corps soumis à la pesanteur, loi qui se traduit si simplement aujourd'hui par l'équation : $e = \frac{1}{2}gt^2$.

A propos d'un objet très ancien, nous allons développer une science toute nouvelle. Il n'y a peut-être rien de plus ancien dans la nature que le mouvement ; les chercheurs lui ont

[5] Descartes, *La Géométrie*, p.340.

[6] Pour une étude historique de ce problème, on peut consulter J-P Friedelmeyer, *Comment penser, comparer, mesurer le courbe ?* in *Le calcul des dérivations d'Arbogast*, chap. III, p.101-131.

[7] Galilée, *Il Saggiatore,* 1623, Le Opere VI p. 232, Trad. Fr. Ch .Chauviré, Les Belles Lettres, 1979, p. 141.

consacré des volumes nombreux et importants. En dépit de cela, je lui trouve plus d'une propriété digne d'être connue et qui n'a pas été observée, encore moins démontrée, jusqu'à présent. On a coutume de mentionner quelques-unes des plus faciles à observer, comme, par exemple, le fait que le mouvement naturel des corps pesants se trouvant en état de chute subit une accélération constante. Mais personne n'a encore fait connaître la quantité qui régit cette accélération. Car à ma connaissance, personne n'a démontré que ***les distances parcourues en temps égal par un corps auparavant immobile et qui s'est mis à tomber, se comportent comme la progression des nombres impairs en commençant par un.***[8]

On peut s'interroger sur la raison de la présence de cette *progression des nombres impairs.* C'est que, outre l'absence du symbolisme algébrique et de la notion de fonction , Galilée est encore prisonnier de la règle des homogènes qui veut que des grandeurs proportionnelles sont forcément de même dimension (en termes modernes). La distance (longueur - dimension un) ne peut être pensée comme proportionnelle à un carré (surface - dimension deux), encore moins à un carré de temps ; à moins de l'écrire en termes de « raison double » (sous la forme modernisée $\frac{e_1}{e_2} = \frac{t_1^2}{t_2^2}$) ce que fait effectivement Galilée :

Si un mobile partant du repos, tombe avec un mouvement uniformément accéléré, les espaces parcourus, en des temps quelconques par ce même mobile, sont entre eux en raison double des temps, c'est-à-dire comme les carrés de ces mêmes temps.[9]

Or c'est également Descartes qui mettra un point final à cette loi des homogènes en montrant dans le livre I de la *Géométrie* qu'un produit de deux longueurs peut très bien s'exprimer par une longueur, à partir du moment où l'on s'est donné une grandeur unité.

En ses débuts, la notion de fonction est tout à fait identifiée à celle d'équation entre deux variables, chacune étant de par cette équation fonction de l'autre. Et cette fonction était elle-même identifiée à la courbe définie par l'ensemble des points de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation, comme l'illustrent assez les textes qui suivent.

Le texte 3, extrait du premier dictionnaire français consacré aux seules mathématiques (1691), met en évidence l'irruption du mouvement dans la définition même des objets élémentaires de la géométrie (comparez avec les définitions d'Euclide données au début de cet article). Il est significatif aussi de la manière de *considérer* les lignes mécaniques (non recevables pour Descartes) comme *n'ayant point d'équation propre à exprimer la relation de tous ses points sur quelque ligne droite,* (entendez un axe de coordonnée servant de repère).

Texte 3. Jacques Ozanam, (1640-1717). ***Dictionnaire mathématique ou idée générale des mathématiques,*** **1691**[10]

Géométrie spéculative

Le Point est le principe de la quantité continue, qui se produit par le mouvement, à sçavoir la *Ligne* par le mouvement du point : la *Surface*, ou *Superficie* par le mouvement de la Ligne : & le *Corps* ou *Solide* par le mouvement de la Superficie.

La Ligne est une étendue en longueur sans largeur, ny profondeur. Il est évident que les

[8] G. Galilei, *Entretiens et démonstrations mathématiques à propos de deux sciences nouvelles*, Troisième journée, Le opere de G. Galilei, edizione nationale, Florence, 1890-1909. Voir aussi *Discours concernant deux sciences nouvelles,* présentation, traduction et notes de M. Clavelin, A. Colin, 1970, p 125.

[9] idem, p.140

[10] Ozanam, *Dictionnaire mathématique ou Idée générale des mathématiques,* p. 94.

extremitez d'une ligne sont des points : car puisqu'elle commence par un point, elle doit finir aussi par un point. Elle peut être *Droite*, & *Courbe*.
La *Ligne Droite* est celle qui a toutes ses parties également posées entre ses extremitez, en sorte que l'une de ces parties ne s'élève & ne s'abaisse pas plus que l' autre. Il est évident que la Ligne droite est unique ; c'est à dire qu'il n'y a pas de diverses especes de lignes droites.
La *Ligne Courbe* est celle qui n'a pas toutes ses parties également posées entre ses extremitez. Elle peut être *Régulière, & Irrégulière.*
La *Ligne Régulière*, est une ligne courbe, dont la courbure se conduit toujours d'un même sens : comme les Sections coniques ; & plusieurs autres.
La *Ligne Irrégulière* est une ligne courbe qui a un point d'inflexion, c'est à dire qui étant continuée se recourbe d'un sens contraire : comme la Conchoïde, la Parabole solide qui a un quarré pour Paramètre, & plusieurs autres dont nous parlerons par la suite.
Les Lignes régulières & irrégulières peuvent être *Mécaniques*, & *Géométriques*.
La *Ligne Mécanique* est une ligne courbe qui n'a point d'Equation propre à exprimer la Relation de tous ses points sur quelque ligne droite. Telle est la *Quadratrice de Dinostrate*, & plusieurs autres, dont quelques unes seront icy expliquées.

Le texte 4 accentue encore le partage des lignes courbes en lignes régulières, (celles qui ont une équation et sont recevables en géométrie, car *elles sont décrites suivant une Loi constante qui détermine la position de tous leurs points,)* et en lignes irrégulières, (décrites sans aucune règle précise et qui ne sont point l'objet de la géométrie).

Texte 4. Gabriel Cramer, (1704-1752). *Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques,* 1750[11]

Chapitre 1 : *De la nature des Lignes Courbes en général, & de leurs equations.*

1. Toute Ligne est *Régulière* ou *Irrégulière*. Les Lignes irrégulières sont celles qui sont décrites sans aucune règle certaine, ou connuë. Tel est le trait que forme au hazard un Ecrivain. Ces Lignes ne sont point l'objet de la Géométrie : elles ne lui donnent aucune prise. Car un Géomètre, pour chercher & démontrer les propriétés d'une Ligne, doit partir de la Définition, ou, ce qui est la même chose, de la manière dont cette Ligne peut être construite ou décrite. Mais les Lignes irrégulières n'ont aucune Définition ou Description réglée et connuë, qui les distingue de toute autre Ligne.

2. Les Lignes régulières sont, au contraire, celles qui sont décrites suivant une loi constante qui détermine la position de tous leurs points. Il y a quelque propriété uniforme qui convient également à tous les points d'une même ligne régulière, & ne convient qu'à eux seuls. Cette propriété constituë la *Nature* ou l'*Essence* de cette Ligne. Ainsi, la nature du Cercle consiste dans l'égalité de ses raïons. C'est cette égalité des raïons qui distingue la circonférence d'un Cercle de toute autre Ligne courbe, & qui détermine la position de tous les points de la Ligne circulaire, en les fixant tous à une même distance du centre.

8. Mais, avant que d'aller plus loin, il est à propos de remarquer ici, qu'il y a des Courbes régulières dont on ne peut pourtant exprimer la nature par aucune équation

[11] G. Cramer, *Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques,* p. 1 à 3.

analytique.

Si on décrit, par exemple sur le diamètre AB, un Cercle ADB, & qu'abaissant de chaque point D de la circonférence une perpendiculaire DP sur le diamètre AB, on la prolonge en M, jusqu'à ce que PM soit égale à l'arc correspondant AD : la Courbe AMC, qui passe par tous ces points M, sera régulière, étant décrite suivant une loi uniforme. On ne sauroit pourtant la représenter par aucune équation algébrique, parce que prenant les Sinus verses AP pour les abscisses, on n'a aucune manière algébrique d'exprimer leur rapport aux arcs AD, ou aux ordonnées PM qui sont égales à ces arcs.

Ces sortes de *Courbes* sont appelées *transcendantes, méchaniques*, ou *irrationnelles* ; pour les distinguer de celles qu'on peut représenter par des équations algébriques, & qu'à cause de cela, on nomme *Courbes algébriques, géométriques*, ou *rationnelles.* C'est surtout pour les Courbes transcendantes qu'on a besoin du *Calcul des infiniment petits*, qui fournit des équations propres à exprimer la nature de ces courbes.

11. Toutes ces inflexions & ces courbures, & en général toutes les singularités des Courbes algébriques, dont le § précédent n'indique qu'une partie, sont si fidèlement exprimées par l'équation qui en marque la nature, que la Courbe tracée sur le papier ne présente rien aux yeux qu'on ne puisse lire dans son équation, quand on entend ce langage. Il arrive même souvent que l'Analyse trouve dans une Courbe, par le calcul de son équation, des singularités que les sens ne pourroient jamais découvrir.

Soulignons un nouveau qualificatif qui apparaît dans ce texte : celui de **courbe transcendante.** Ce terme avait été introduit par Leibniz pour tenir compte des avancées que permettait le calcul infinitésimal qu'il venait de créer avec Newton et qui fournissait un autre outil extrêmement performant, celui de l'*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696), selon le titre du livre fameux du Marquis de L'Hospital. Dans le texte 5 Leibniz se démarque nettement de Descartes car il a compris l'importance spécifique du calcul différentiel et intégral pour les questions de mesure. Revenant aux origines de la géométrie (*metria, mesure)*, il sait que le ressort principal de leur résolution réside dans des opérations qui ne sont pas algébriques mais analytiques (différentiation, sommations, séries), et qui toutes mettent en jeu l'infini.

Texte 5. Leibniz, *Extension des mesures géométriques grâce à une manière absolument universelle de réaliser toutes les quadratures par le mouvement...*1693[12]

La mesure des courbes, des surfaces et de la plupart des volumes, tout comme la détermination de leurs centres de gravité, se ramène à des quadratures de figures planes, tel est le point de départ de la *Géométrie des mesures*, qui diffère pour ainsi dire par nature de la *Géométrie de Détermination*, laquelle ne fait intervenir que des longueurs de lignes droites et détermine par elles des points inconnus à partir d'autres qui sont donnés. On peut naturellement ramener, en règle générale, cette Géométrie de détermination à des équations Algébriques, dont l'inconnue possède un degré déterminé. Mais, par nature, la Géométrie des mesures n'est pas régie par l'Algèbre, même s'il arrive parfois (à savoir lorsqu'il s'agit de

[12] G. W. Leibniz, *Suppementum geometria dimensoria...*Trad. Marc Parmentier, in *Naissance du calcul infinitésimal,* p. 252 à 255.

quadratures ordinaires) qu'elle se ramène à des grandeurs Algébriques ; de même que la Géométrie de détermination n'est pas du ressort de l'Arithmétique même s'il arrive (dans le cas où les quantités sont mensurables) qu'elle se ramène à des nombres, soit des quantités rationnelles. Il en résulte *trois sortes de grandeurs, rationnelles, Algébriques et transcendantes. L'origine* des grandeurs algébriques irrationnelles est l'ambiguïté d'un problème , c'est à dire sa *multiplicité* ; il serait en effet impossible de regrouper dans un même calcul les différentes valeurs solutions d'un problème, sinon au moyen de racines, or, à l'exception de certains cas particuliers, on ne peut ramener ces dernières à des grandeurs rationnelles. Mais *l'origine des grandeurs transcendantes* c'est *l'infinité*, si bien que *l'Analyse* correspondant à la *Géométrie des transcendantes* (dont fait partie la Géométrie des mesures) est très précisément la *science de l'infini*. De plus, quand il s'agit de construire des grandeurs Algébriques, on a recours à des mouvements déterminés ne faisant pas intervenir de courbes matérielles mais seulement des règles droites ou, lorsqu'on emploie des courbes matérielles, on ne doit considérer que leurs points d'intersection ; de même, pour construire les quantités transcendantes on a jusqu'à présent utilisé l'application de courbes sur des droites, c'est à dire l'ajustement des unes aux autres, comme dans le tracé de la cycloïde ou dans le développement d'un fil ou d'une feuille enroulés autour d'une courbe ou d'une surface. Voudrait-on tracer géométriquement (c'est-à-dire par un mouvement continûment réglé) la spirale d'Archimède ou la quadratrice des Anciens, on le ferait sans peine en ajustant une droite sur une courbe, de telle sorte qu'un mouvement rectiligne se règle sur le mouvement circulaire. Voilà pourquoi, bien que *Descartes* l'ait fait, je suis loin d'exclure de telles courbes de la Géométrie, car les lignes ainsi décrites sont exactes, elles recèlent des propriétés très utiles et sont adaptées aux grandeurs transcendantes. Il existe néanmoins d'autres façons de construire les courbes, comportant l'adjonction d'un élément Physique. Tel serait le cas si on résolvait un problème de Géométrie de détermination par des rayons lumineux (ce qu'on pourrait souvent faire avec profit) ou si on procédait comme je l'ai fait pour quarrer l'aire de l'Hyperbole, autrement pour construire les logarithmes, en composant un mouvement uniforme et un mouvement retardé par un frottement constant, ou encore grâce à une corde ou une chaîne pesantes qui donnent naissance à la Chaînette ou courbe funiculaire. Pourvu que le mode de construction soit exact, il entre dans la Géométrie théorique ; pourvu qu'il soit commode et utile, il a droit de cité dans la Géométrie pratique. Car un mouvement réalisé selon des hypothèses déterminées est du ressort de la Géométrie au même titre que le Centre de gravité.

Ainsi, à partir du moment où nous acceptons le mouvement parmi les réalités susceptibles d'être traitées mathématiquement, ce que Descartes ne conteste pas, il n'y a pas de raison d'exclure certaines courbes, sous prétexte qu'elles seraient engendrées par des mouvements composés n'ayant *entre eux aucun rapport qu'on puisse mesurer exactement.* Pour Leibniz, si nous voulons mettre les mathématiques au service de la compréhension de la Nature, rien ne doit être exclus *a priori* : *il existe d'autres façons de construire les courbes, comportant l'adjonction d'un élément physique. Pourvu que le mode de construction soit exact, il entre dans la Géométrie théorique ; pourvu qu'il soit commode et utile, il a droit de cité dans la pratique.* Le *Journal des Sçavans* publié par l'Académie des Sciences de Paris, (année 1692) entérine cette nouvelle manière d'aborder les problèmes posés par la Nature et par les multiples activités humaines. En voici le début.

Texte 6. Extrait du *Journal des Sçavans* (année 1692) : *De la chaînette, ou solution d'un problème fameux, proposé par Galilei, pour servir d'essai d'une nouvelle analyse des infini, avec son usage pour les logarithmes, et une application à l'avancement de la navigation.*[13]

DE LA CHAINETTE, OU SOLUTION D'UN PROBLEME FAMEUX, PROPOSE PAR GALILEI, POUR SERVIR D'ESSAI D'UNE NOUVELLE ANALYSE DES INFINIS, AVEC SON USAGE POUR LES LOGARITHMES, ET UNE APPLICATION A L'AVANCEMENT DE LA NAVIGATION *).

L'Analyse ordinaire de *Viete* et de *Descartes* consistant dans la réduction des problèmes à des équations et à des lignes d'un certain degré, c'est-à-dire, au plan solide, sursolide etc. *Mr. Descartes* pour maintenir l'universalité et la suffisance de sa méthode, trouva à propos d'exclure de la Géométrie tous les problèmes et toutes les lignes qu'on ne pouvoit assujettir à cette méthode, sous prétexte que tout cela n'étoit que mécanique. Mais comme ces problèmes et ces lignes peuvent être construites, ou imaginées par le moyen de certains mouvements exacts. qu'elles ont des propriétés importantes et que la nature s'en sert souvent, on peut dire qu'il fit en cela une faute semblable à celle qu'il avoit reprochée à quelques anciens, qui s'étoient bornés aux constructions, où l'on n'a besoin que de la règle et du compas, comme si tout le reste étoit mécanique. *Mr. de Leibniz* ayant remarqué qu'il y a des problèmes et des lignes qui ne sont d'aucun degré déterminé, c'est à dire, qu'il y a des problèmes dont le degré même est inconnu ou demandé, et des lignes dont une seule passe continuellement de degré en degré, cette ouverture le fit penser à un calcul nouveau, qui paroit extraordinaire, mais que la nature a réservé pour ces sortes de problèmes transcendans, qui surpassent l'Algèbre ordinaire. C'est ce qu'il appelle *l'Analyse des infinis*.[...] Elle montre un algorithme nouveau, c'est à dire, une nouvelle façon d'ajouter, de soustraire, de multiplier, de diviser, d'extraire, propre aux quantités incomparables c'est-à-dire à celles qui sont infiniment grandes, ou infiniment petites en comparaison des autres. Elle employe les équations tant finies qu'infinies, et dans les finies elle fait entrer les inconnues dans l'exposant des puissances, ou bien au lieu des puissances ou des racines, elle se sert d'une nouvelle affection des grandeurs variables, qui est la variation même, marquée par certains caractères, et qui consiste dans les différences, ou dans les différences des différences de plusieurs degrés, auxquelles les sommes sont réciproques, comme les racines le sont aux puissances.

Une partie des élémens de ce calcul, avec plusieurs échantillons, a été publiée dans la Journal de Leipsic, où l'auteur l'a appliquée particulièrement à quelques problèmes géométrico-physiques comme par exemple à la ligne isochrone, dans laquelle un corps pesant approche uniformément de l'horizon en descendant; à la ligne; loxodromique, ou des rhumbs de vent, pour résoudre les plus utiles problèmes géométriques de la navigation, où l'on n'étoit arrivé jusqu'ici qu'imparfaitement par certaines tables subsidiaires; à la résistance des solides ou des liquides, pour avancer la Mécanique, et particulièrement la Balistique; aux loix harmoniques des mouvement planétaires, pour approcher de la perfection de l'Astronomie ; et à d'autres usages de conséquence. Cette méthode fut applaudie et suivie d'abord par quelques personnes habiles. *Mr.Craige* s'en servit en Angleterre ; et ensuite *Mr. Bernoulli* Professeur de Bâle, connu par plusieurs belles productions de Mathématique, l'ayant étudiée et en ayant remarqué l'importance, pria l'auteur publiquement de l'appliquer à la recherche de la ligne d'une chainette suspendue par les deux bouts, que Galilée avoit proposée, mais qu'on n'avoit pas encore déterminée jusqu'ici.

[13] G.W. Leibniz, *Mathematische Schriften,* herausgegeben von C.I. Gerhardt, p.258-259.

Cette nouvelle analyse va rapidement faire exploser le champ des mathématiques de l'époque et ouvrir un domaine d'exploration aux ressources insoupçonnées.[14] Le moteur principal et déterminant de cette explosion est le concept de fonction qui fait son apparition dans un texte de Leibniz dès 1673[15] mais n'est défini pour la première fois qu'en 1718 par Jean Bernoulli :

On appelle fonction d'une grandeur variable une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes,

et il propose la lettre φ comme « caractéristique » d'une fonction, mais sans écrire l'argument entre parenthèse (donc sous la forme φ x).

La formule :*composée de quelque manière que ce soit*, laisse apparemment toute liberté d'invention, ; mais tous les textes de l'époque montrent bien qu'il s'agit d'une « composition » limitée aux opérations de l'algèbre et complétée par les « fonctions usuelles » qui se mettent en place l'une après l'autre au XVII^e siècle : fonctions logarithmes et exponentielles, puis fonctions circulaires et hyperboliques et leurs réciproques. La manière de les composer autorise aussi l'utilisation des itérations à l'infini ; d'où l'apparition des séries et des produits infinis. Mais finie ou infinie, la composition se fait toujours au moyen d'une équation qui traduit une propriété géométrique ou mécanique ou physique, définissant un lieu ou une trajectoire, ou exprimant une loi de la Nature. Il s'agit d'étudier et de rendre compte des régularités de la Nature en les traduisant en équations qui en favorisent la maîtrise au moyen du calcul. Et le premier caractère de ces régularités c'est la continuité .

Rappelons que pour Aristote, le continu est donné dans la chose sensible et est donc d'abord du ressort de la physique ; il est donné et non construit : ce n'est ni un composé de parties indivisibles, (*J'appelle continu ce qui est divisible en parties toujours divisibles)* ni un agrégat d'éléments infinis en acte. Il caractérise le temps et le mouvement,[16] mais aussi les grandeurs. Leibniz reprend cette théorie, mais en la transférant du domaine de la physique (où la cantonnait Aristote,) à celui des mathématiques, ce qui lui permet d'en préciser certaines caractéristiques :

1) le continu est donné comme un tout, il n'est pas composé de points,

2) les points et les parties n'apparaissent dans le continu que du fait du mathématicien qui, au cours de ces élaborations, effectue des divisions du continu,

3) le continu est divisible à volonté, mais toutes les divisions possibles ne peuvent jamais s'opérer en même temps. Le continu ne peut donc jamais être décomposé en points,

4) si l'on divise un continu en deux parties (qui à leur tour sont, bien entendu, des continus), alors les deux parties ont quelque chose en commun, à savoir un nouveau continu ou tout au moins un point.[17]

La conséquence au niveau des courbes et des fonctions, c'est que pour Leibniz il ne peut pas y avoir de discontinuité dans les lois de la Nature, ni dans les fonctions qui les expriment, ni dans les courbes qui leur sont associées :

Tout va par degrés dans la nature, et rien par saut, et cette règle à l'égard des changemens est une partie de ma loy de la continuité.[18]

---

[14] Pour un inventaire complet des courbes ayant joué un rôle en histoire des mathématiques et pour leur étude, voir Loria G., Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, 1902

[15] Cf. Youschkewitch, *Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^ème siècle*, p. 35.

[16] Cf. Hervé Barreau, *La physique du continu chez Aristote, sa réponse à Zénon*, in *Le Labyrinthe du continu*, p. 3 à 15.

[17] Cf. Herbert Breger, *Le continu chez Leibniz* in *Le Labyrinthe du continu*, p.76 à 84

[18] Leibniz, *Nouveaux Essais*, chap. XVI, § 12, p. 455.

D'une certaine façon, l'équation même de la courbe contient ce principe de continuité, puisque les variables, en passant d'une valeur à une autre, passent nécessairement par toutes les valeurs intermédiaires. Cela ne veut pas dire que le discontinu n'existe pas ; mais alors il ne traduira pas une loi déterminée. Il manifestera un changement de loi ou même, une absence totale de loi, c'est-à-dire l'irrégularité, l'absence d'ordre, tel ces courbes *tracées d'un mouvement libre de la main.* Cela apparaît nettement dans le texte n° 7 qui suit, dû à Euler.

Texte 7. Leonhard Euler, (1707-1783) ***De l'utilisation des fonctions discontinues en analyse*****, 1765.**[1]

1) Ce qu'on enseigne habituellement en analyse sur les fonctions, ou quantités déterminées de quelque manière que ce soit par une variable, se réduit aux seules fonctions qu'on appelle continues et dont la formation dépend d'une certaine loi. Cela se voit principalement par la doctrine des courbes, pour lesquelles les ordonnées, en tant qu'elles sont déterminées par les abscisses, tiennent lieu de fonctions. Si bien que la nature de toutes les fonctions peut être très avantageusement représentée par des courbes. Ainsi, de quelque manière que la quantité y est déterminée par x, c'est-à-dire quelque fonction y qu'on ait de x, on peut toujours tracer une courbe dont l'ordonnée y corresponde précisément à une abscisse quelconque, et estimer que cette courbe représente convenablement la nature de cette fonction. D'où, réciproquement, si l'on pose une courbe quelconque, ses ordonnées exhibent certaines fonctions des abscisses. La nature de ces fonctions est constituée dans la nature même de la courbe. Tant qu'à chaque abscisse, en effet, correspond une certaine ordonnée, on considère à bon droit sa valeur comme une certaine fonction de l'abscisse. Et lorsque l'ordonnée devient imaginaire, ou lorsqu'elle prend simultanément plusieurs valeurs, on distingue parfaitement bien cette particularité à partir de la nature de la fonction.

2) Mais il est bien avéré qu'en Géométrie sublime on n'a point coutume de considérer d'autres courbes que celles dont la nature est définie par une relation précise entre les coordonnées exprimée par une équation ; en sorte que tous ses points soient déterminés par une même équation ; comme par une loi. Et parce que l'on pense que cette loi renferme en elle même le principe de continuité - car toutes les parties de la courbe se tiennent par un lien tellement étroit que l'on ne peut trouver de place entre elles pour un changement si l'on respecte le lien de continuité - pour cette raison dis-je, on appelle ces courbes des courbes continues. Peu importe que l'équation qui contient leur nature soit algébrique ou bien transcendante, connue ou même inconnue, à condition que nous nous rendions compte qu'est donnée une équation par laquelle la nature des courbes de ce genre est traduit. On n'envisage pas ici la continuité du tracé qui expriment les branches des courbes : les deux branches conjuguées de l'hyperbole constituent aussi bien une courbe continue que la parabole ou l'ellipse, même si les deux tracées de cette courbe sont tout à fait séparés l'un de l'autre. On attribue en effet la continuité à ces hyperboles séparées pour cette raison que toutes deux sont contenues dans une seule équation à partir de laquelle elles peuvent être formées. C'est sur cette base qu'il conviendrait que ce que l'on a l'habitude de discuter ordinairement ici ou là quant à la loi de continuité fût interprété et ramené à une notion déterminée.

3) Une fois posé le critère de la continuité, ce qu'est une fonction discontinue, ou dénuée

---

[1] L. Euler, *De l'utilisation des fonctions discontinues en Analyse,* Trad. fr. par J. Dhombres, Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques (1987b), tome 7, p.35.

d'une loi de continuité, saute aux yeux. Car toutes les courbes qui ne sont déterminées par aucune équation précise, ainsi celles que l'on trace habituellement à main levée, fournissent de telles fonctions discontinues. En effet, il n'est pas possible pour de telles courbes, de définir les valeurs des ordonnées selon une loi précise à partir des abscisses. Les courbes de ce genre, en tant qu'elles s'opposent au genre précédent défini par la loi de la continuité, sont appelées couramment " mécaniques ", mais avec plus de précision " discontinues " ou dénuées de la loi de continuité. En effet, ce n'est pas parce que leurs parties ne se tiendraient pas entre elles, mais parce qu'elles ne sont déterminées par aucune équation fixée. Ainsi des tracés quelconques qu'on dessine à main levée sur du papier, même s'ils ont progression continue, doivent être considérés, d'après cette définition, comme discontinus, sauf si, bien sûr, il arrive que des tracés de ce genre dépendent d'une équation précise. Dans ce genre également, on doit ranger les lignes communément appelées mixtes, celles où l'on joint ensemble des morceaux prélevés sur diverses courbes, voire même les morceaux d'une même ligne mais joints d'une autre manière. Dans ces conditions, le périmètre d'un polygone fait de pures lignes droites, et les lignes formées de droites et d'arcs de cercle, ou d'autres courbes quelconques, appartiennent également à ce genre. Même si dans ce cas, en fait, chaque morceau dépend d'une équation précise, on ne peut exhiber pour le tracé entier une unique équation, comme l'exige le caractère de continuité. C'est pourquoi il faut tenir tous les tracés de ce genre pour des lignes discontinues, exactement comme ceux que l'on trace à main levée.

4) Or, il est de soi évident qu'on n'accorde aucune place à toutes les lignes de ce genre et autres fonctions discontinues en Analyse géométrique, où l'étude est uniquement focalisée sur la recherche des propriétés des lignes considérées, travail qui ne peut en aucune façon être entrepris si la nature des lignes ne dépend d'une loi et équation précises. C'est pourquoi la plupart des géomètres, déterminées par cette raison, n'ont pas hésité à proscrire entièrement, tant de la géométrie que de l'Analyse universelle, toutes les lignes et fonctions discontinues et de les rejeter parmi les objets auxquels répugne cette science. Du moins le célèbre d'ALEMBERT a ouvertement soutenu cette opinion, alors que, quant à moi, j'avais déterminé le mouvement des cordes vibrantes en général de telle manière que ma solution s'étendît à tous les mouvements et figures qui ont été imprimés initialement à la corde. Peu après, un très éminent Monsieur m'a objecté qu'on ne peut pas du tout définir un mouvement si la figure initialement imprimée à la corde manquait de continuité en ne provenant d'aucune équation précise. S'il arrivait que la figure initiale de la corde fût discontinue, la détermination du mouvement ultérieur n'appartiendrait en aucune façon à l'Analyse et il serait tout à fait interdit de vouloir en faire l'étude. A cette objection, à la vérité j'ai répondu de manière satisfaisante et, récemment, le célèbre LAGRANGE a si bien défendu ma solution dans les actes de Turin qu'il n'y a place désormais pour aucun doute quelconque.

5) C'est pourquoi une question de très grande importance se pose ici : que doit-on penser des fonctions discontinues et des lignes décrites en l'absence d'aucune loi ? Peut-on, et dans quelle mesure, leur donner une place en Analyse ? Dans le problème mentionné à l'instant, il n'y a aucun doute que la corde qui a subi une perturbation initiale et dont la figure ne saurait être déterminée par une équation, acquerra un mouvement et, tant qu'il durera, recevra à chaque instant une figure et un mouvement précis. Leur détermination est assurément soumise à l'Analyse et à la science du mouvement, que les bornes imposées à notre connaissance y suffisent ou non. Dans les deux cas la question méritera toujours toute notre attention et puisqu'il s'agit de considérations sur des quantités, il ne fait pas de doute que cette question relève du domaine de l'Analyse. Et ici, point n'est besoin de demander jusqu'où s'étend notre pénétration puisqu'il n'est guère de géomètre qui n'est bien souvent sué sang et eau sur des

questions dépassant ses forces. Il n'est donc nullement interdit de songer à s'occuper de questions de ce genre et il faut bien plutôt s'y appliquer avec plus de soin. Après avoir estimé exactement les difficultés, j'ose en outre assurer que ma solution du problème des cordes vibrantes, prise au sens large, est bonne et que c'est cette solution qui, avec bonheur, justifie les fonctions discontinues. Mais je reconnais de surplus que ce problème doit être rapporté à un genre particulier d'Analyse, jusqu'ici peu travaillé, dont la force et la nature résident en cette intervention nécessaire des fonctions discontinues.

Une fois de plus des appréciations contradictoires sont portées sur un type de courbes que certains voudraient *rejeter parmi les objets auxquels répugne la géométrie*, alors que pour d'autres, comme Euler, *il ne fait pas de doute que cette question relève de l'Analyse.*
Qu'est ce qui a pu conduire à cette divergence, qu'est ce qui a amené certains mathématiciens à prendre en compte les lignes dont la nature ne dépend ni d'une loi ni d'une équation précise ?

Inventé pour gérer au moyen du calcul différentiel et intégral les multiples problèmes soulevés par la mathématisation des lois de la Nature, le concept de fonction s'avère à la fois trop imprécis et trop pauvre pour en décrire toute la richesse. Il est alors du plus grand intérêt épistémologique de comprendre sous quelles contraintes, en vertu de quelles exigences, un tel concept se précise, se détermine, s'enrichit. Il se passe un peu le même phénomène que celui qui s'est produit pour l'enrichissement par étapes du concept de nombre. Celui-ci était d'abord uniquement rationnel et positif. Peu à peu, des problèmes s'exprimant par la résolution d'équations numériques ont conduit les mathématiciens à introduire les nombres *sourds* (irrationnels), puis les négatifs, enfin les complexes.

D'une façon semblable l'enrichissement du concept de fonction va se faire principalement lorsque la fonction, d'abord simple outil de formalisation des propriétés des courbes, devient lui même un objet de calcul, de réflexion et de recherche propre. C'est par la résolution des équations différentielles que le stock des fonctions va rapidement s'élargir jusqu'à engendrer des monstres mathématiques totalement imprévus et surprenants. Un exemple simple et tout à fait représentatif nous est donné par Euler quand il résout l'équation différentielle :

$$y''+2\frac{y'}{x}-\frac{f^2y}{x^4}=0 \quad \text{(Euler écrit : } ddy+2\frac{dxdy}{x}-\frac{ffydx^2}{x^4}=0\text{)}$$

Il trouve comme solution générale les fonctions

$$y=A\,sin\left(\frac{f}{x}+\alpha\right) \quad \text{où A et } \alpha \text{ sont des constantes quelconques.}$$

Ces fonctions font tout à fait partie de ce que Euler appelle fonctions continues ; pourtant il remarque bien qu'elles présentent un problème inédit en zéro :

Lorsque x croit de o à ω, *l'angle* $\frac{f}{x}+\alpha$ *va de l'infini dans le fini, de sorte que le sinus prend une infinité de fois toutes les valeurs intermédiaires entre +1 et -1*[2]

Il y a cependant une différence essentielle avec ce qui se passe pour les équations numériques , du moins polynomiales .Pour celles-ci il existe un théorème d'inventaire : le théorème fondamental de l'algèbre, énoncé par Girard en 1629 et qui dit :*Toutes les équations d'algèbre reçoivent autant de solutions que la dénomination de la plus haute quantité le*

[2] Euler *institutiones calculi integralis* , vol II p. 355.

démontre. Ce théorème de dénombrement permet de vérifier qu'aucune racine n'a été oubliée, quitte, dans un second temps à écarter celles qui ne conviennent pas à la réalité du problème formalisé par l'équation.[3]

Mais au XVIII[e] siècle il n'existe pas de théorème analogue pour les équations fonctionnelles, qui permettrait de s'assurer d'avoir trouvé **toutes** les solutions, de quelque nature qu'elles soient. Les mathématiciens vont bien inventer un concept spécifique : celui de ***solution générale*** d'une équation différentielle. Mais le terme *solution générale* reste entouré de mystère. Comment être sûr que la solution générale contient bien toutes les solutions possibles ? Surtout si l'on sait, comme Euler encore l'avait découvert, que à la solution générale de certaines équations différentielles il faut ajouter une solution singulière définie par l'enveloppe des courbes données par la solution générale ![4]

Vers le milieu du XVIII[e] siècle, la problématique liée aux équations différentielles va subir une double évolution :

1) l'étude des équations différentielles ordinaires devient une discipline autonome séparée de ses origines physiques ou géométriques ; leur intégration devient un problème en soi, sans référence obligée à un problème de physique ou de géométrie,

2) la façon même de poser le problème de l'intégration change. Au début, on exigeait des solutions exprimées en termes de fonctions élémentaires, algébriques ou transcendantes. Bientôt, faute de mieux, on se satisfera de ramener l'intégration à un problème de quadrature, ou à un traitement à l'aide de séries, sans pour autant supprimer la question d'une possibilité d'achever l'intégration en termes finis et bien explicites.

Les équations aux dérivées partielles présentent un certain retard par rapport à ce phénomène. Elles restent encore très stimulées par des problèmes pratiques d'origine physique ou astronomique. Le meilleur exemple en est l'équation des cordes vibrantes.

Dans un Mémoire publié en 1847[5], d'Alembert étudie le mouvement d'une corde vibrante fixée aux points x = 0 et x = L d'un axe. Il montra en particulier que si y(t,x) représente le déplacement à l'instant t du point d'abscisse x de la corde, alors y(t,x) vérifie l'équation aux différentielles partielles (on ne disait pas encore dérivées) : $\frac{\delta^2 y}{\delta t^2} = a^2 \frac{\delta^2 y}{\delta x^2}$

Les solutions de cette équation sont de la forme $y(t,x) = \varphi(at+x) + \psi(at-x)$, où φ et ψ sont deux fonctions arbitraires. Les conditions initiales restreignent ces solutions aux fonctions vérifiant y(t,x) = $\frac{1}{2}[f(at+x) - f(at-x)]$ où f désigne la fonction associée à lacourbe génératrice du mouvement, c'est-à-dire la forme qu'a la corde avant de la lâcher et la faire vibrer. D'Alembert ajoute que cette courbe doit être " une fonction impaire, continue et périodique de période 2L. " Cette restriction ne convient pas du tout à Euler qui rétorque aussitôt que la courbe génératrice peut être n'importe quelle forme réalisable compatible avec la nature physique du problème. Par exemple , la façon la plus commode de mettre une corde en mouvement est de la tirer par son milieu avant de la lâcher, de sorte que sa forme initiale soit celle de la figure ci-contre. Seulement , une telle courbe n'est plus continue au sens d'Euler, mais mixte, car pour écrire son équation, il faut deux relations distinctes. La polémique va encore s'enrichir par l'intervention d'un troisième personnage,

---

[3] Cf. Jean Dhombres, *Un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18[e] siècle* p. 25

[4] Euler, *Exposition de quelques paradoxes dans le calcul intégral,* (1756) Opera omnia I 22 p. 214 à 236.

[5] D'Alembert, *Histoire de l'Académie de Berlin* , 1747, tome I, pp. 214-219, pp.220-249

Daniel Bernoulli, lequel est arrivé par une autre voie à la conviction que tous les mouvements possibles de la

corde pincée, y compris ceux proposés par d'Alembert et Euler, peuvent se traduire dans l'expression : $y(t,x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi \omega t}{L}\right)$. Cela ne peut convenir à Euler qui voit dans une telle expression une fonction continue, et qui par conséquent ne peut représenter la fonction génératrice obtenue par $y(0,x) = f(x) = \sum a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$

On voit bien au travers de cette controverse que le problème posé au mathématicien dépasse celui d'une simple résolution. Pour résoudre les équations fonctionnelles, il doit d'abord préciser le sens de sa recherche : la nature des objets qu'il cherche, leur forme, et l'écriture susceptible de les traiter par un calcul.

Nous sommes ainsi arrivés au terme de la première partie : l'équation s'est peu à peu substituée à la ligne courbe physique puis géométrique que certes elle représente, mais qui cache en elle une potentialité insoupçonnée de nouvelles courbes, que jamais l'esprit humain même le plus imaginatif n'eut pu inventer de par sa propre intuition. Un nouveau monde s'ouvre là où l'intuition géométrique n'a plus sa place, où la puissance du calcul crée ses propres objets. La question de concours posée par l'Académie de Saint-Petersbourg en 1787 et reproduite ci-dessous, est à l'interface de deux mondes : celui des courbes dont la réalité est d'abord physique, même si celle-ci est idéalisée par la géométrie, et celui des courbes définies par une équation mais dont la réalité physique peut être très difficile à imaginer.

> *Déterminer si les fonctions arbitraires introduites par l'intégration des équations aux différentielles qui ont plus de deux variables, appartiennent à des courbes ou surfaces quelconques, soit algébriques, transcendantes ou mécaniques, soit discontinues ou produites par un mouvement libre de la main ; ou bien si elles ne peuvent légitimement être rapportées qu'à des courbes continues et susceptibles d'être exprimées par des équations algébriques ou transcendantes.*[6]

Deuxième partie : de l'équation vers la ligne.

Faisons le point : à la fin du XVIII[ème] siècle, quelles sont les courbes les plus générales que l'on sache imaginer ? Le lien toujours exigé entre l'intuition géométrique et sensible combinée avec une certaine idée de régularité d'une part, et l'équation analytique d'autre part, conditionne le classement des courbes en trois catégories : les continues, les mixtes, les discontinues. Toutes les courbes continues algébriques ont une équation qui peut s'écrire sous la forme d'un polynôme : $\sum a_{ij} x^i y^j = 0$. Toutes les fonctions transcendantes (dont les représentations sont aussi des courbes continues) ont une équation qui peut s'écrire, au moyen de la formule de Taylor, sauf peut-être en certains points : $y = \sum a_k x^{\alpha_k}$, les α_k étant des entiers et la somme infinie (ce qui définit

---

[6] cf. L. F. A. Arbogast (1759-1803), *Mémoire sur la nature des Fonctions arbitraires...*(1791)

justement son caractère transcendant). Mais deux types de problèmes perturbent rapidement cette trop simple situation.

1) D'autres fonctions et d'autres courbes commencent à apparaître, principalement issues de la physique mathématique, bien analytiques au sens qu'elles ont une écriture sous forme d'une (et une seule) équation, celle-ci se présentant comme somme infinie de fonctions trigonométriques mais présentant d'étranges discontinuités. Ainsi Joseph Fourier (1768-1830) avait découvert la série $\pm\frac{\pi}{4} = cos\,y - \frac{1}{3}cos\,3y + \frac{1}{5}cos\,5y - \frac{1}{7}cos\,7y + \ldots$[7]

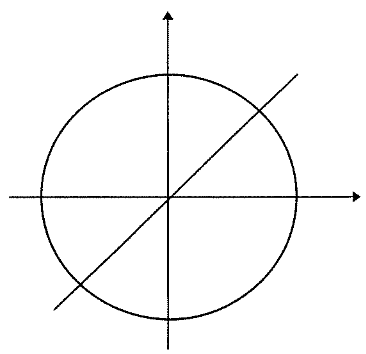
Ceci définit une fonction discontinue au sens actuel, donné par Bernard Bolzano (1781-1848) et Augustin Cauchy (1789-1857). Un peu plus tard, Niels Henrik Abel (1802-1829) considère la série : $f(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}sin(n\varphi)$, laquelle coïncide avec la fonction linéaire l(x) = $\frac{1}{2}x$ sur l'intervalle $]-\pi;+\pi[$, mais pas à l'extérieur de cet intervalle. Abel écrit timidement, comme s'il craignait d'affronter l'autorité de Cauchy qui avait " démontré " qu'une série infinie de fonctions continues était elle même continue :

Mais il me semble que ce théorème admet des exceptions. Par exemple la série

$$sin\,x - \frac{1}{2}sin\,2x + \frac{1}{3}sin\,3x - \ldots$$

est discontinue pour toute valeur (2m +1) π de x, m étant un nombre entier. Il y a, comme on sait, beaucoup de séries de cette espèce.[8]

2) Ces courbes font l'objet de questions nouvelles de caractère souvent topologique, comme par exemple, quel sens donner à l'expression : *une droite partage le plan en deux régions distinctes,* et surtout comment démontrer une telle affirmation ? De même, comment démontrer qu'une courbe joignant deux points situés de part et d'autre d'une droite coupe nécessairement cette droite en un point au moins ? On peut bien sûr considérer cela comme " évident ", et/ou intégrer ce fait dans les axiomes de bases de la géométrie. Mais où s'arrêter avec les axiomes, et cette propriété est-elle vraiment si évidente que cela ? Si nous nous plaçons dans une géométrie pythagoricienne, où seuls existent les nombres rationnels, le cercle de rayon 1 peut très bien se limiter aux points de coordonnées $\left(\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2};\frac{2mn}{m^2+n^2}\right)$ m et n entiers non simultanément nuls et premiers entre eux ; cet ensemble de points est partout dense et ne peutêtre distingué physiquement du cercle classique. Un tel cercle pythagoricien pourtant n'a aucun point commun avec la bissectrice d'équation : y = x. En effet : m^2-n^2 ne peut être égal à 2mn car ceci équivaudrait à $(m-n)^2 = 2n^2$ ce

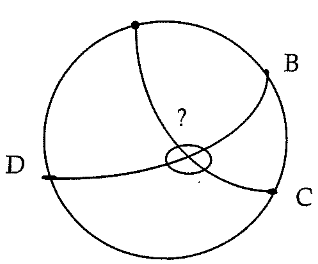


[7] Fourier, J.B., *La théorie analytique de la chaleur,* p.156.

[8] Abel, N.H., *Recherches sur la série :* $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$, Journal de Crelle, tome 1, Berlin 1826.

qui est impossible du fait que m et n sont premiers entre eux, (le raisonnement est du même type que celui qui établit l'incommensurabilité de la diagonale d'un carré avec son côté). Ainsi dans une géométrie pythagoricienne, le diamètre d'un cercle ne coupe pas forcément ce cercle !

Un problème particulièrement représentatif des questions posées par le traitement analytique des courbes nous est fourni par Carl-Friedrich Gauss (1777-1855) dans la première démonstration du théorème fondamental de l'algèbre[9]. L'argument utilisé se ramène à ceci : soient quatre points A ,B,C,D, consécutifs sur un cercle. Si une courbe relie A à C et une autre courbe relie B à D, nécessairement ces deux courbes ont un point commun. Peut-on considérer cela comme évident ou faut-il le démontrer ? Et s'il faut le démontrer, le meilleur moyen n'est-il pas de le faire en travaillant sur les équations, ce qui permet de remplacer un raisonnement sur les figures par un raisonnement sur les nombres ?



C'est par des questions de ce type que l'on constate un changement dans les critères de vérité et de démonstration rigoureuse. Ce changement s'effectue sous l'impulsion d'ailleurs de Gauss lui-même et de Cauchy, mais sous l'influence également de tout un courant philosophique qui tente de définir ce qu'est une science pure, c'est-à-dire dont la rigueur est purement logique, sans recours à l'intuition sensible. La *Critique de la Raison pure* (1781) de Immanuel Kant (1724-1804) a certainement joué un rôle important dans l'évolution sémantique de l'expression *Mathématiques Pures.* Georg Simon Klügel (1739-1812) dans son dictionnaire[10], consacrera plusieurs pages à cet ouvrage, dans l'article *mathématiques.* Rappelons la définition que donne Kant, d'une connaissance pure : il commence par reprendre la définition commune, en quelque sorte au premier degré : *"On appelle **pure** toute connaissance à laquelle rien d'étranger n'est mêlé"*). Puis il ajoute sa propre spécification, devenue classique : *"Mais une connaissance est surtout dite **absolument pure**, quand on n'y trouve en général aucune expérience ou sensation, quand elle est, par suite, possible complètement **a priori**."*[11]

Cette définition garderait cependant son caractère statique de simple dichotomie entre les connaissances pures et les connaissances empiriques basées sur l'expérience, si Kant en était resté là. Or l'apport essentiel de la *Critique de la Raison Pure* se situe à un autre niveau. Parmi les connaissances pures (a priori) Kant distingue celles qui découlent de jugements purement **analytiques** ou explicatifs[12], lesquels n'apportent rien de plus que ce qui est déjà dans un concept, de celles qui découlent de jugements **synthétiques** (extensifs) :*La Mathématique fournit l'exemple le plus éclatant d'une raison pure qui réussit à s'étendre d'elle-même et sans le secours de l'expérience*[13]car *les jugements mathématiques sont tous synthétiques*[14]. Le ressort de cette extension tient en ce que les mathématiques procèdent par **construction** des concepts. *Mais construire un concept c'est représenter **a priori** l'intuition qui lui correspond. La construction d'un concept exige donc une intuition **non empirique** qui, par conséquent, en*

[9] Cf. J-P Friedelmeyer, *La première démonstration de Gauss du théorème fondamental de l'algèbre,* L'Ouvert n°81, p. 1 à 12, déc. 1995.
[10] Klügel, *Mathematisches Wörterbuch*
[11] Kant, *Critique de la Raison pure,* p.46 ; introduction §VII.
[12] Idem p.37.
[13] Idem p.493.
[14] Idem p.40.

tant qu'intuition, soit un objet **singulier** *mais, qui, néanmoins, comme construction d'un concept (d'une représentation générale) doit exprimer dans la représentation (Vorstellung) quelque chose d'universel qui s'applique à toutes les intuitions possibles appartenant à ce concept*[15]. Kant appelle **intuition pure** une telle intuition non empirique, et il en dégage deux, fondamentales : l'espace et le temps. Par exemple en géométrie : *la figure singulière tracée est empirique, et pourtant elle sert à exprimer le concept sans porter préjudice à son universalité*[16].

La présentation des mathématiques comme jugements synthétiques **a priori** et surtout l'accent mis sur le thème de la construction des concepts vont clarifier le concept de mathématiques pures et leeurs exigences. Que les concepts de la géométrie soient construits était une caractéristique acquise depuis les *Eléments* d'Euclide, mais le texte de Kant n'en éclaire pas moins le caractère abstrait et général (non empirique) des constructions de figures (singulière et empirique) parce que *dans cette intuition empirique, on ne considère jamais que l'acte de la construction du concept*[17]

Dans un court essai publié en 1810, et intitulé *Contribution à une exposition des mathématiques sur de meilleurs fondements* , un jeune logicien praguois du nom de Bolzano, s'il se félicite de la distinction kantienne des jugements analytiques et synthétiques, conteste radicalement l'existence d'intuitions pures (concept qui lui paraît contradictoire en soi) et donc aussi le principe même de la construction des concepts au moyen de ces intuitions pures. Pour Bolzano, les mathématiques ne se distinguent pas des autres sciences par l'usage d'une forme d'intuition particulière, et n'ont besoin, pour leurs fondements, d'autre chose que de la logique elle même.

Du fait que depuis Descartes la géométrie et l'algèbre interféraient dans l'analyse par la traduction numérique des propriétés géométriques en termes d'équations et de fonctions, il devenait logique de vouloir séparer les critères qui relèvent du géométrique de ceux qui relèvent du numérique, et donc de mettre en place les règles de *pureté* mathématique.

Cette volonté stimula de façon extraordinaire les développements de l'analyse, surtout et d'abord en Allemagne, mais également redonna une nouvelle jeunesse à la géométrie qui pourra elle aussi se qualifier de **géométrie pure**.

Un exemple : la démonstration purement analytique du théorème des valeurs intermédiaires.

Dans son *Cours d'Analyse* publié en 1821 sous le titre *Analyse algébrique*, Cauchy énonce et démontre de la façon suivante le théorème dit *des valeurs intermédiaires* : *Théorème IV : Si la fonction $f(x)$ est continue par rapport à la variable x entre les limites $x=x_0$, $x=X$ et que l'on désigne par b une quantité intermédiaire entre $f(x_0)$ et $f(X)$ on pourra toujours satisfaire à l'équation $f(x)=b$ par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X. Démonstration : Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation $y=f(x)$ rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation $y=b$ dans l'intervalle compris entre les coordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et X ; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise.*[18]

[15] Idem p. 493.
[16] Idem p.494.
[17] Idem p. 494.
[18] Cauchy, *Analyse algébrique*, p.50.

C'est un argument géométrique sensible, intuitif. La nécessité d'une démonstration *purement analytique* n'est pas explicitée[19]. Elle était pourtant formulée dès 1817 par Bolzano :
Il n'y a absolument rien à objecter, ni contre la justesse, ni contre l'évidence de ce théorème géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la bonne méthode, faute qui consiste à vouloir déduire les vérités mathématiques pures (ou générales) (c'est à dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) des considérations qui appartiennent à une ***partie appliquée*** *(ou spéciale) seule, à savoir la géométrie"*[20]

Cette nécessité n'est pas ressentie justement parce que l'analyse n'est pas séparée encore de la géométrie, dont elle représente seulement l'outil d'investigation le plus efficace.

Ainsi l'une des contributions majeures des mathématiciens du 19e siècle, particulièrement germaniques, sera la reconstruction de l'analyse sur des bases non géométriques, à travers ce qu'on a appelé l'arithmétisation de l'analyse, qui d'une certaine façon illustre admirablement les thèses de Kant citées plus haut, dans ses deux aspects :

- celui d'une mathématique **pure** où tout recours à l'intuition sensible est banni, puisque s'appuyant sur le seul concept de nombre,
- celui de la construction des concepts mathématiques puisque cette arithmétisation trouvera son aboutissement dans la **construction des réels**, seul cadre théorique permettant de réaliser la coupure absolue de l'analyse avec l'intuition sensible. D'où la nouvelle situation qui s'impose aux mathématiciens du XIXe siècle, telle qu'elle est définie par Jean Cavaillès dans le texte n° 9.

Texte n° 9 : Jean Cavaillès (1903-1944), ***Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensembles.***

> Le XIXème siècle mathématique s'ouvre par une crise de l'infini : aux premières objections contre infiniment grand et infiniment petit, le XVIIIème siècle avait fait succéder une confiance aveugle, pour le passage à la limite, par exemple, et l'emploi des séries. En 1826, ABEL pouvait se plaindre qu'on raisonne encore sur des séries divergentes : " *elles sont quelquechose de bien fatal et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration... Ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et causé tant de paradoxes.* " Des malheurs et des paradoxes, la méthode d'exhaustion avait su se garder tant que réservée à la géométrie, garantie contre les absurdités par l'intuition sensible. La révolution cartésienne, en assurant un parallélisme complet entre nombres et étendue, en inaugurant l'étude des variations de fonctions, incorporait le continu à l'algèbre :celle-ci, devenue autonome, devait définir par ses propres moyens les objets employés, préciser, étendre elle-même les modes d'emploi. D'où deux sortes de problèmes : donner un fondement purement analytique aux notions et propriétés assurées jusque-là seulement par l'évidence de leur corrélât géométrique ; développer les unes et les autres hors des limites imposées par l'intuition. Etablissement rigoureux de la théorie des fonctions continues, extension des opérations analytiques, double travail du XIXème siècle qui exigeait, pour remplacer l'intuition défaillante, la création des notions essentielles de la théorie des ensembles.

Le fondement purement analytique donné aux notions et propriétés assuré jusque-là seulement par l'évidence de leur corrélât géométrique sera construit entre autres par

[19] Cauchy, cependant, donne dans la note III p.460 et suivantes une preuve analytique. N'oublions pas la division du cours en parties obligatoires et parties facultatives.
[20] Bolzano, *Rein analytischer Beweis,* Trad. Fr. par J. Sebestik, p.137. *Revue d'Histoire des Sciences, t. 17, 1964, p.13 6 à164.*

BIBLIOTHEQUE

Karl Weierstrass (1815-1897). Mais il faut en payer le prix. Le prix à payer, c'est une certaine rupture, voire une contradiction avec l'intuition géométrique et sensible. Par exemple, on a cru longtemps qu'une courbe définie par une fonction continue avait automatiquement une tangente en chaque point où elle est continue. Joseph Bertrand (1822-1900), de L'Académie des Sciences, explique dans un texte publié en 1863 :

On peut demander, si une fonction continue quelconque f(x) a une dérivée. Nous répondrons d'abord, qu'en fait, nous allons trouver, dans les paragraphes suivants, les dérivées des principales fonctions ; ce qui démontrera leur existence a posteriori. *Nous ajouterons d'ailleurs, que la fonction étant continue, l'équation y = f(x) représente une courbe plane continue, rapportée à deux axes rectangulaires ; et l'on démontre, en géométrie analytique, que la dérivée représente la tangente trigonométrique de l'angle que fait, avec l'axe Ox, la tangente à la courbe au point (x , y). Comme, en chaque point, une courbe continue a une tangente bien déterminée, la fonction admet une dérivée.*[21]

La rupture entre l'analyse et son support intuitif va se traduire rapidement par l'irruption de " monstres " mathématiques, essentiellement de deux types :

1) les fonctions partout continues et nulle part différentiables,

2) les courbes qui rompent avec le principe de dimension, c'est-à-dire qui peuvent remplir tout une surface.

Monstres du premier type[22].

Weierstrass présente devant l'Académie de Berlin (18 juillet 1872)[23] toute une famille de fonctions partout continues mais nulle part différentiables ; il s'agit des fonctions définies par la série trigonométrique : $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$ où b est un réel compris entre 0 et 1, et a est un entier naturel impair tels que *ab* vérifie certaines inégalités. Une telle fonction n'est évidemment pas représentable graphiquement, mais on peut donner une idée de ce qui se passe en observant l'évolution des courbes représentant $f_p(x)=\sum_{n=0}^{n=p} b^n \cos(a^n \pi x)$. Nous avons pris b = 1/4 et a = 19.

La figure 1 présente $f(x)=\cos(\pi x)+\frac{1}{4}\cos(19\pi x)$ sur une période. Les figures 2-3-4 représentent $f(x)=\cos(\pi x)+\frac{1}{4}\cos(19\pi x)+\frac{1}{16}\cos(19^2\pi x)+\frac{1}{64}\cos(19^3\pi x)$, avec deux Zooms mettant en évidence les fortes oscillations sur chaque petit intervalle. L'adjonction du terme supplémentaire $\frac{1}{256}\cos(19^4\pi x)$, (figures 5 , 6 et 7) multiplie encore ces oscillations. Cela permet de comprendre pourquoi, lorsque l'on considère la série infinie au lieu d'une somme finie, la fonction ainsi définie, bien que continue, présente en chaque point x_0 des oscillations telles que, quel que soit $\varepsilon > 0$, le taux d'accroissement

[21] J. Bertrand, *Mathématiques Elémentaires - Algèbre,* à l'usage des classes de mathématiques spéciales, Livre II, 3ème éd. 1863, p 92. A la page précédente on trouve la définition suivante de la continuité :*La fonction est continue lorsqu'on peut donner à h (*dans l'expression f(x+h)) *une valeur assez petite pour que l 'accroissement de la fonction soit aussi petit que l'on voudra.* Signalons que tout cela est repris tel quel dans l'édition de 1882 *mise en harmonie avec les derniers programmes officiels.* Ce qui est instructif quant à la rapidité avec laquelle les nouvelles découvertes sont prises en compte dans l'enseignement.

[22] Pour une étude détaillée des " monstres ", voir Volkert K., *Die Geschichte der pathologischen Funktionen,* p.193 à 232.

[23] Weierstrass K., *Über continuirliche Functionen...*Mathematische Werke, Band 2 p. 71-74.

$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ne reste pas borné lorsque h décrit l'intervalle $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, et que donc la fonction f n'est pas dérivable en x_0.

Monstres du second type.

Les monstres du second type sont apparus à l'issue des travaux de Georg Cantor (1845-1918) sur la classification des cardinaux infinis, en particulier le fait que **R** et $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^p$ ont la même puissance, la puissance du continu. Jusqu'à ces travaux, il était évident à tout le monde qu'il fallait une variable pour définir tous les points d'un segment (ou d'une ligne), mais qu'il en fallait nécessairement deux pour déterminer l'ensemble des points d'un carré (ou d'une surface). Les interrogations que Cantor exprime dans sa correspondance avec Richard Dedekind (1831-1916) sont éclairantes sur l'adhésion qu'il apportait lui-même à cette évidence, et sur son évolution progressive vers des idées différentes.

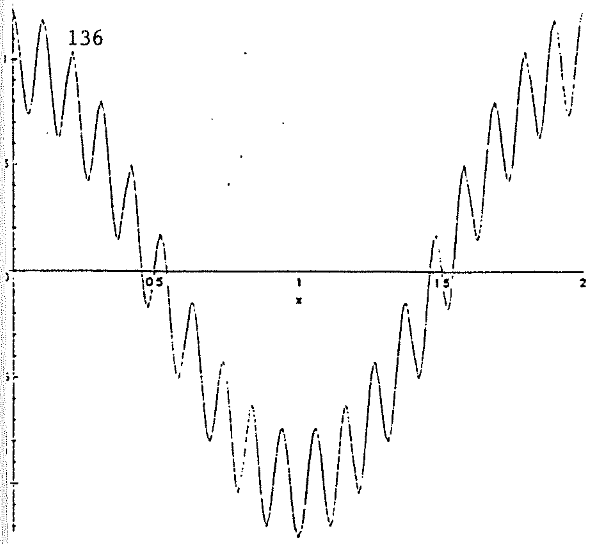


Figure 1

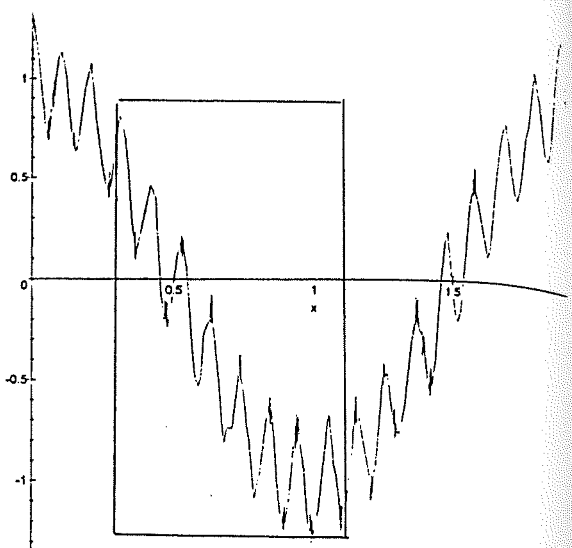


Figure 2

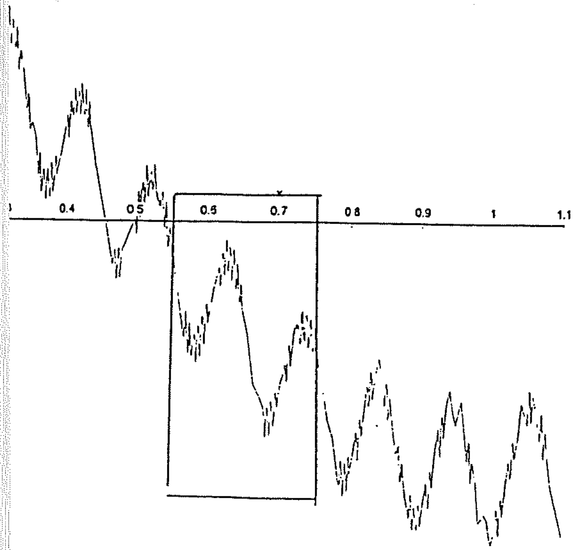


Figure 3

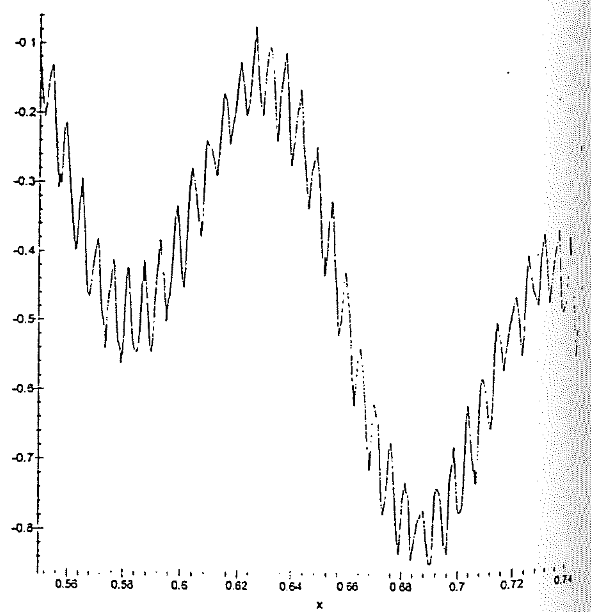


Figure 4

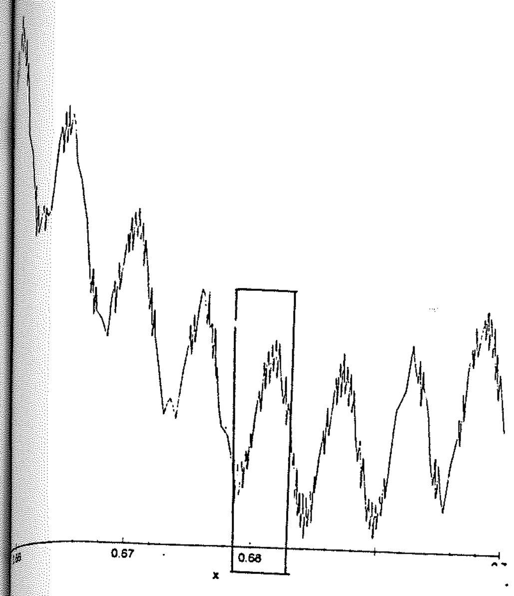


Figure 5

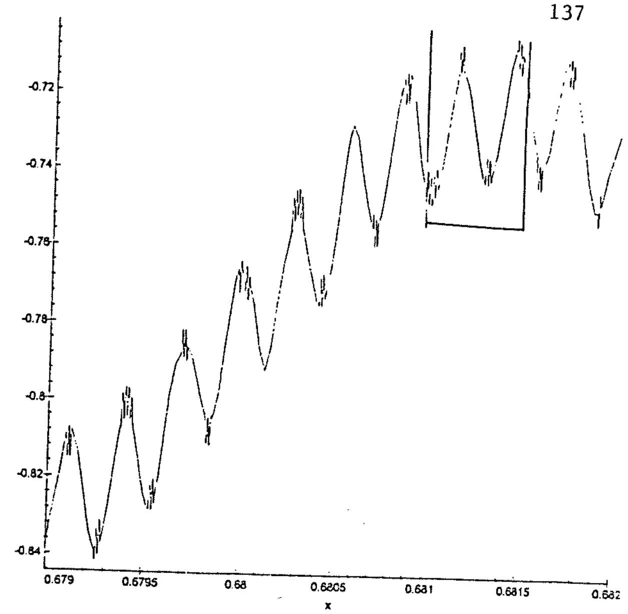


Figure 6

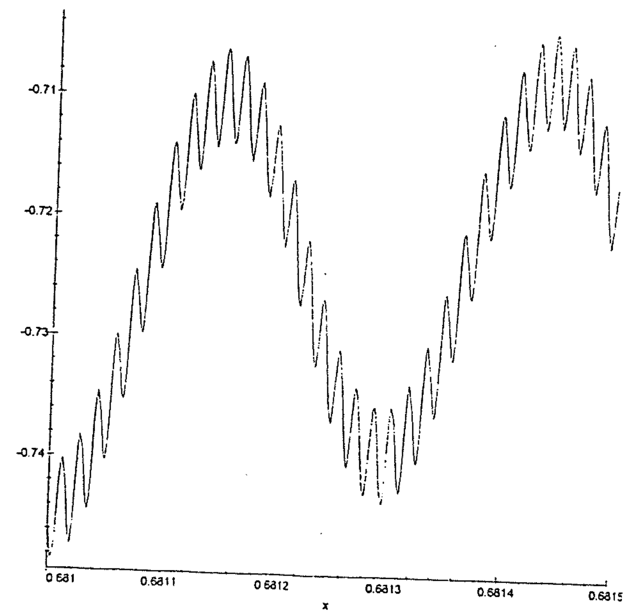


Figure 7

Texte n° 10 : Correspondance de Cantor et Dedekind.[24]

Cantor à Dedekind . Halle, 5 janvier 1874

A propos, des questions qui m'ont occupé ces derniers temps, je m'aperçois que, dans cet ordre d'idées, se présente aussi la suivante :

Est-ce qu'une surface (par exemple un carré, frontière comprise) peut être mise e relation univoque avec une courbe (par exemple un segment de droite, extrémités comprises), de telle sorte qu'à tout point de la surface corresponde un point de la courbe, et réciproquement à tout point de la courbe un point de la surface ?

Il me présente encore en ce moment que la réponse à cette question présente de grosses difficultés - bien que, ici aussi, l'on soit si fortement enclin à une réponse *négative,* qu'on pourrait presque tenir une démonstration pour superflue.

Cantor à Dedekind Halle, le 18 mai 1874

Eprouvant le besoin de m'entretenir avec vous de sujets scientifiques, et d'entrer en relations personnelles plus proches avec vous, je souhaiterais vous rendre visite un jour à Brunswick cet été.

... Si vous voulez bien à l'occasion me répondre à ce propos, j'aimerais savoir si vous trouvez la même difficulté que moi à la question que je vous ai posée en janvier sur la correspondance entre une surface et une ligne, ou si je me suis laissé induire en erreur à ce sujet ; à Berlin, mon ami, à qui j'ai exposé la même difficulté, m'a déclaré que la chose était pour ainsi dire absurde, car il se comprend de soi-même que deux variables indépendantes ne peuvent être ramenées à une seule.

Cantor à Dedekind Halle, le 20 juin 1877

J'ai suivi avec intérêt depuis plusieurs années les efforts que l'on a consacrés, après Gauss, Riemann, Helmholtz, et d'autres, à la clarification des questions qui touchent aux premières hypothèses de la géométrie. Il m 'est apparu à cet égard que toutes les recherches faites dans ce domaine partent *elles-mêmes* d'une hypothèse non démontrée, qui ne m'apparaît pas comme allant de soi, mais bien plutôt comme ayant besoin d'être fondée. Je veux parler de l'hypothèse selon laquelle une multiplicité continue ρ fois étendue nécessite pour la détermination des ses éléments ρ coordonnées réelles indépendantes entre elles, le nombre de coordonnées ne pouvant être, pour une même multiplicité, ni augmenté, ni diminué.

J'en étais venu à croire moi aussi à cette hypothèse, j'étais presque persuadé de son exactitude ; mon point de vue différait seulement de tous les autres en ceci, que je considérais cette hypothèse comme un théorème qui nécessitait au plus haut point une démonstration, et j'avais précisé mon point de vue sous forme d'une question que j'avais soumise à quelques collègues, en particulier aussi à l'occasion du jubilé Gauss, à

[24] Cavaillès, *Philosophie mathématique,* p. 196 et suivantes

Göttingen, savoir la question suivante :

" Une variété continue à ρ dimensions, avec $\rho > 1$, peut-elle être mise en relation univoque avec une variété continue à ne dimension, de telle sorte qu'à un point de l'une corresponde un point et un seul de l'autre ? "

La plupart de ceux à qui j'ai soumis cette question se sont beaucoup étonnés que j'ai seulement pu la poser, car il *se comprenait de soi* que, pour la détermination d'un point dans une extension à ρ dimensions, il fallait toujours employer ρ coordonnées indépendantes. Celui qui, pourtant, pénétrait le sens de la question, devait reconnaître qu'il fallait au moins démontrer pourquoi la réponse était " évidemment " *non.* Comme je l'ai dit, je faisais partie de ceux, qui tenaient pour *vraisemblable* que la réponse fût négative - jusqu'au moment tout récent où par une succession assez complexe de pensées, je suis arrivé à la conviction que la réponse était *affirmative* sans aucune restriction. Peu après, je trouvai la démonstration que vous avez aujourd'hui sous les yeux.

On voit ici quelle force prodigieuse il y a dans les nombres réels habituels, rationnels ou irrationnels, si bien que par elle on peut déterminer de façon univoque, *à l'aide d'une seule coordonnée* les éléments d'une multiplicité continue ρ fois étendue ; et je veux ajouter tout de suite que leur force va plus loin encore, puisque, comme vous ne manquerez pas de le voir, ma démonstration peut s'étendre, sans que les difficultés en soient sensiblement accrues, à des multiplicités à un nombre infini de dimensions, pourvu que ces dimensions en nombre infini prennent la forme d'une suite simplement infinie.

Il me semble donc que toutes les déductions philosophiques ou mathématiques qui utilisent cette hypothèse erronée sont inadmissibles. Il faut donc plutôt rechercher la différence qui existe entre deux variétés à un nombre *différent* de dimensions, dans quelque raison tout autre que celle, généralement tenue pour caractéristique, du nombre de coordonnées indépendantes.

Les travaux de Cantor conduisent à deux conséquences catastrophiques pour l'intuition du mathématicien :

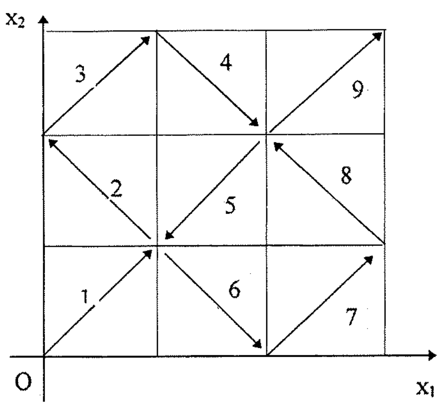
1) la dimension d'un continu n'est pas définie par le nombre des coordonnées nécessaires pour repérer un point quelconque de ce continu. Il faut inventer une autre définition de la dimension.
2) On peut imaginer une courbe qui remplit tout un carré dans le sens qu'elle passe de façon continue par tous les points de ce carré. C'est la courbe de Giuseppe Peano[25](1858-1939) dont voici une construction.

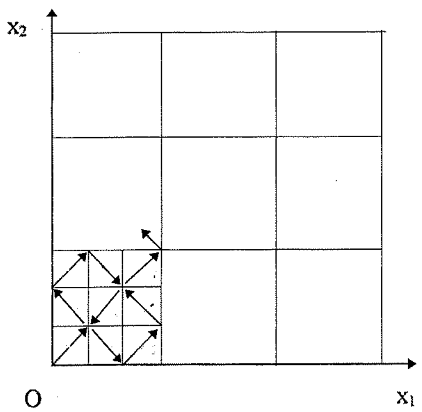
Considérons le carré **Q** $(0 \leq x_i \leq 1; i = 1,2)$. Divisons le en neuf carrés égaux, de côté $1/3$, par des parallèles aux axes, et numérotons-les ainsi qu'il est indiqué sur la figure ci-contre. La courbe C_1 comprend les 9 segments de droite dessinés sur la figure, parallèles à l'une ou l'autre des diagonales de **Q** et parcourus dans le sens indiqué par les flèches dans l'ordre des numéros attribués aux petits carrés ; elle part du sommet O du carré pour arriver au sommet opposé.

[25] Peano, *Sur une courbe qui remplit toute une aire,* Mathematischen Annalen, tome 36

Soit S le segment $0 \leq t \leq 1$ de l'axe des t ; divisons le en 9 parties égales, alors une représentation de C_1 sera donnée par :

$x_1 = f_1^{(1)}(t)$; $x_2 = f_2^{(1)}(t)$ où les fonctions $f_1^{(1)}(t)$ et $f_2^{(1)}(t)$ sont continues et peuvent être prises affines (de la forme $\pm 3t + k$) sur chacun des petits intervalles $\frac{i-1}{9} \leq t \leq \frac{i}{9}; (1 \leq i \leq 9)$, l'image de celui-ci étant le segment numéroté i .





La courbe C_2 sera obtenue en opérant sur les carrés de côté 1/3 comme sur le carré primitif, les courbes tracées dans chacun d'eux étant homothétiques à la courbe C_1, ou à sa symétrique par rapport à O x_1, et partant dans chacun des carrés des mêmes sommets que les segment de C_1. (Sur la figure la construction est faite dans le carré 1). Remarquons de plus que tout point de Q est à une distance de C_1 inférieure à 1/3, à une distance de C_2 inférieure à $1/9 = 1/3^2$. La courbe C_3 sera obtenue à partir de C_2 comme C_2 à partir de C_1, et ainsi de suite ; en général C_n comprendra 9^n segments qui chacun sera l'image de l'un des segments obtenus en divisant l'intervalle S en 9^n segments égaux. La courbe C_n aura pour représentation $x_1 = f_1^{(n)}(t)$ et $x_2 = f_2^{(n)}(t)$ où les fonctions $f_1^{(n)}$ et $f_2^{(n)}$ sont continues et affines par morceaux. Tous les points de Q sont à une distance C_n inférieure à $1/3^n$. Il est facile, à partir de là de démontrer :

1) que les suites de fonctions $\{f_1^{(n)}\}$ et $\{f_2^{(n)}\}$ convergent uniformément vers des fonctions limites continues,
2) que la courbe C qu'elles définissent passe par tout point du carré Q.
3) que cependant la correspondance définie par les fonctions continues limites entre l'intervalle S et le carré Q n'est pas bijective, et l'on peut d'ailleurs démontrer qu'il n'existe pas de correspondance à la fois bijective et bicontinue entre l'intervalle S et le carré Q, C'est cette propriété qui différencie le segment de droite du carré : c'est d'elle que l'on partira pour dire que ces deux êtres géométriques n'ont pas la même dimension et pour inventer un nouveau concept de dimension.

Troisième Partie : vers l'élargissement du concept de courbe.

Nous ne développerons pas cette partie car elle concerne les mathématiques récentes ou en train de se faire, avec des noms comme Félix Hausdorff (1868-1942) et Benoit Mandelbrot né en 1924. Le mieux que je puisse faire est de vous renvoyer à un ouvrage remarquable qui vous donnera l'approche actuelle de tout ce que l'on sait dire aujourd'hui sur les courbes et que vous n'avez peut-être même jamais imaginé. Il s'agit du livre de Claude Tricot : ***Courbes et dimension fractale***[26]. Vous y trouverez à la fois une étude systématique des courbes classées en deux grandes catégories : courbes rectifiables, courbes non rectifiables, mais aussi des exemples particuliers très variés, ainsi que des références bibliograhiques commentées d'une grande richesse.
Et voici un extrait de la préface écrite par Michel Mendès-France, qui peut très bien servir de conclusion à l'étude précédente. Elle reprend le problème dans sa formulation du début, mais l'étude de C. Tricot bénéficie à présent de tout le travail d'élucidation et d'enrichissement réalisé par les générations de mathématiciens dont quelques uns seulement ont été évoqués ici.

Un mathématicien, pur et authentique, n'a jamais vu de courbe. Une courbe est un objet mathématique infiniment mince, donc invisible.[...]Claude Tricot nous dit ici qu'une courbe, c'est une courbe dessinée, c'est-à-dire une courbe épaisse et visible. Elle a l'épaisseur du crayon, de la plume, de la craie au tableau noir .Elle est la trace laissée par la particule fantôme dans la chambre à bulles. La courbe abstraite, celle qu'on ne voit pas et qui ne nous concerne pas, c'est l'intersection de toutes les courbes épaisses qui la contiennent. Il s'intéresse en particulier à la façon dont les détails et les irrégularités apparaissent alors que l'épaisseur décroît.[...]

Le livre qu'on va lire ne s'adresse pas seulement au mathématicien perdu dans son univers abstrait, mais aussi à l'ingénieur qui se bat contre la rigueur incontournable de la réalité. Le mot rigueur pourrait être rapproché du mot rugosité. On aimerait arrondir et contrôler l'un et l'autre. La matière est rugueuse ; sa description exige donc une approche "fractale ".

La rigueur a sa beauté et la beauté possède sa poésie. Le mathématicien, l'ingénieur, le physicien et le biologiste trouveront dans le livre de Claude Tricot matière à réflexion et à rêverie

[26] Claude Tricot, *Courbes et dimension fractale*, Springer-Verlag, Editions Sciences et Culture, 1993.

Bibliographie

Abel, N.H., *Recherches sur la série :* $1+\frac{m}{1}x+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots$,Journal de Crelle, tome 1, Berlin 1826.

Arbogast L.F.A., *Mémoire sur la nature des Fonctions arbitraires...*présenté à l'Académie Impériale de Saint-Petersbourg, pour concourir au prix proposé en 1787 et couronné dans l'assemblée du 29 novembre 1790, par M. Arbogast, professeur à Colmar, Impr. à l'Académie Impériale des Sciences à S^t-Petersbourg, 1791.

Bertrand J., Mathématiques *Elémentaires - Algèbre,* à l'usage des classes de mathématiques spéciales, Livre II, 3ème éd. 1863.

Bolzano B., *Rein analytischer Beweis,* Trad. Fr. par J. Sebestik, p.137. *Revue d'Histoire des Sciences, t. 17, 1964, p.13 6 à164.*

Cauchy A., *Analyse algébrique,* Œuvres complètes Ii^{ème} série, Tome III, Gauthier-Villars, Paris 1897.

Cavaillès J., *Philosophie mathématique,* Correspondance Cantor-Dedekind, Paris Hermann,1962.

Cramer G., *Introduction à l'Analyse des lignes courbes algébriques,* Genève 1750.

D'Alembert J., *Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration,* Histoire de l'Académie de Berlin , 1747, tome I, p. 214-219, p.220-249

Descartes, R., *La Géométrie* , Leyde, 1637, facsimile et trad., D., E., Smith, M. L. Latham, *The geometry by R. Descartes,* New York, Dover 1954.

Dhombres J.,*Un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au 18^e siècle.* Commentaire au texte d'Euler intitulé , *De l'utilisation des fonctions discontinues en Analyse.* (voir Euler)

Duhem P., *L'aube du savoir,* Epitomé du *Système du Monde, Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic,* Paris, Hermann, 1997.

Euclide, *Les Eléments,* trad. Fr. B., Vitrac, Paris, P.U.F., 1990-1994.

Euler L. , *De l'utilisation des fonctions discontinues en Analyse,* Novi commentarii academiae scientiarum petropolitnae 11 (1765-1767), p. 67 à 102, trad. fr. par J. Dhombres, Cahiers du Séminaire d'histoire des mathématiques (1987b) , tome 7, p. 35 à 115.

Euler L., *Exposition de quelques paradoxes dans le calcul intégral,* (1756), Opera omnia I 22 p. 214 à 236.

Euler L., *institutiones calculi integralis*

Favard J., *Espace et dimension,* Albin Michel, Paris, 1950.

Fourier, J.B., *La théorie analytique de la chaleur,* Paris, 1822 in Œuvres de Fourier, publiées par les soins de M. G. Darboux, Gauthier-Villars, 1888.

Fricke R. et **Klein** F., *Vorlesungen über die Theorie der Automorphe Functionen,* 2 vol., Leipzig, Teubner 1897.

Friedelmeyer J-P., *Comment penser, comparer, mesurer le courbe ?* in *Le calcul des dérivations d'Arbogast,* chap. III, p.101-131. Cahiers d'histoire et de Philosophie des Sciences, n° 43, 1994, Diffusion A. Blanchard, Paris.

Friedelmeyer J-P., *La première démonstration de Gauss du théorème fondamental de l'algèbre,* L'Ouvert n°81, p. 1 à 12, déc. 1995.

Galilée G., *Entretiens et démonstrations mathématiques à propos de deux sciences nouvelles,* Troisième journée, Le opere de G. Galilei, edizione nationale, Florence, 1890-1909. Voir aussi *Discours concernant deux sciences nouvelles,* présentation, traduction et notes de M. Clavelin, A. Colin, 1970.

Galilée G., *Il Saggiatore,* 1623, Le Opere VI p. 232, Trad. Fr. Ch .Chauviré, Les Belles Lettres, 1979,

Jullien V., *Descartes, La Géométrie de 1637,* col. Philosophies, P.U.F. 1996.

Kant I., *Critique de la Raison pure,* trad. Fr. par A. Tremesaygues et B. Pacaud, Paris, P.U.F., 1965.

Klein F., *Anwendung der Differential-und Integralrechnung auf Geometrie,* Vorlesung, Sommersemester 1901, Leipzig, Teubner, 1902.

Klügel G. S., *Mathematisches Wörterbuch,* Leipzig, 5 vol. 2 supl. 1803-1836.

Koyré, A., *Etudes d'histoire de la pensée scientifique,* P.U.F. 1966, *Tel* Gallimard 1973.

L'Hospital G., *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes,* Impr. Royale, Paris 1696, rééd . A.C.L., Paris 1988.

Le Labyrinthe du continu, colloque de Cerisy, ed. J.M. Salanskis et H. Sinaceur, Springer Verlag, France, Paris 1992.

Leibniz, G.,W., *Discours de métaphysique,* Paris Vrin, 1983.

Leibniz, G.,W., *Mathematische Schriften,* 7 vol., éd. C. J. Gerhard, Berlin, Halle, 1849-63, rééd. Hildesheim, 1962.

Leibniz, G.,W., *Nouveaux Essais sur l'entendement humain,* Paris Flammarion, 1966.

Leibniz, G.,W., *Supplementum Geometriae seu generalissima omnium Tetragonismorum effectio per motum* (Extension des mesures géométriques...) in Parmentier, M., *Leibniz, Naissance du Calcul différentiel,* Paris Vrin, 1989, p. 247-267.

Loria G., *Spezielle algebraische und transcendente ebene Kurven, Theorie und Geschichte,* Leipzig, Teubner, 1902.

Newton I., *Principes mathématiques de la philosophie naturelle,* 1687, trad. Fr. par la marquise Du Châtelet, rééd. J. Gabay, Paris 1990.

Ozanam J. , *Dictionnaire mathématique ou Idée générale des mathématiques,* Paris, Michallet, 1691.

Pappus, *Collections mathématiques,* trad. Fr. Ver Eecke, rééd. Paris Blanchard, 1982.

Peano G., *Sur une courbe qui remplit toute une aire,* Mathematischen Annalen, tome 36

Tricot Cl. *Courbes et dimension fractale,* Springer Verlag, Editions Sciences et Culture, Canada, 1993.

Volkert K., *Die Geschichte der pathologischen Funktionen,* in Archive for History of exact Sciences, 17. VIII. 1987, Vol. 37, n°3, Springer-Verlag. p.193 à 232.

Weierstrass K., *Über continuirliche Functionen...*Mathematische Werke, Band 2 Berlin, 1895 Nachdruck Hildesheim/ New-York o.J ; p. 71-74.

Weil A., *Œuvres scientifiques,* Collected Papers, Springer Verlag, 1979.

Willard Cl.-J., *Le Nombre d'or, Utilisation en mathématiques et dans les Beaux-Arts ,* Paris Magnard 1987.

Youschkevitch, *Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^{ème}siècle* trad. Fr. par J.M. Bellemin, in Fragments d'histoire des mathématiques, Brochure APMEP n° 41, 1981.