CONCERTUM

Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques

En hommage à Hervé Péault

Hervé Péault était professeur de mathématiques et formateur d'enseignants au site d'Angers de l'IUFM des Pays de Loire. Il nous a quittés en 1997 des suites de ce qu'il est convenu d'appeler une longue maladie. Ses travaux sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et la formation des professeurs des écoles furent nombreux et exemplaires. Son implication au sein de la COPIRELEM débuta dans les années 1980 et devint chaque année plus conséquente. Il fut un des moteurs de la dynamique de publication dans laquelle s'engagea la COPIRELEM dans les années 1990 pour prouver au monde nouveau des IUFM que la formation mathématique des professeurs des écoles avait déjà une histoire et une culture.

Préface

Guy Brousseau

La Commission Permanente des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, pour l'École Élémentaire a trente ans. Elle aurait pu s'appeler platement COPIREMEE, mais COPIRéleM évoquait mieux sa spécificité, à la condition de mettre le M final en majuscule pour signifier « Mathématiques ». Vive donc la COPIREleM, sa longévité est un indice de sa pertinence et de son utilité. Comme son nom l'indique la COPIRELEM est une commission Inter-IREM. Elle a emprunté aux IREM leur indépendance par rapport aux institutions d'enseignement, leur autorité mathématique et leurs ressources. En retour elle a montré de façon exemplaire ce que pouvaient être des rapports sains entre les protagonistes de l'éducation, en exigeant davantage d'études, en résistant au prosélytisme inconsidéré, en stimulant la réflexion et les échanges. Elle a contribué au rayonnement des IREM parmi une population importante, difficile à atteindre pour eux, à leur réputation et à leur influence aussi bien lorsqu'elle s'exprime auprès des institutions, que lorsqu'elle publie ses activités (annales, comptes-rendus du séminaire et du colloque annuels).

J'ai eu la chance d'être de ceux qui l'ont conçue, qui l'ont fait naître, et qui l'ont accompagnée dans sa jeunesse. D'autres ont pris la relève mais j'ai suivi sa progression du coin de l'œil. C'est sans doute à ce titre que ses responsables actuels me font l'honneur de me demander de préfacer cet ouvrage, témoignage de leurs travaux.

C'est donc avec fierté que je présente aux lecteurs ce recueil de textes choisis parmi les plus représentatifs de l'activité de la commission depuis dix ans. Il faut remercier Catherine TAVEAU et Yves GIRMENS qui les ont réunis et les membres de la commission qui les ont produits.

Ce témoin de la vitalité de l'institution me donne ainsi le bonheur de retrouver aujourd'hui la COPIREleM dans sa maturité, et de constater qu'elle continue sa tâche avec courage et compétence, malgré les difficultés que je soupçonne. Je les soupçonne ces difficultés, mais je ne les connais plus, ce qui me donne quelques scrupules. Mon avis peut-il être très pertinent pour un jeune chercheur formateur dans un IUFM ?
Mon avis peut être pas, mais mon témoignage ?
Je veux ici rappeler la grandeur et la difficulté de la mission de cette commission, et sa gloire, aussi car elle a accompli à petit bruit, de grandes choses.

L'histoire d'une institution ne lui est utile que dans la mesure où la vérité historique y est accompagnée de façon heureuse par une certaine composante

mythique. Le mythe est constitué d'abord par les espérances des acteurs successifs - par les intentions réelles ou supposées qu'ils ont affichées, ou que leurs successeurs leur ont prêtées - ensuite par les justifications que se sont données les uns et les autres suivant les fortunes de la vie. Je laisse à d'autres le soin de faire une histoire de la COPIRELeM qui sera plus vraie et plus utile.

Je veux seulement évoquer ici quelques uns des espoirs que j'avais placés en elle. Mais rien ne se serait fait si ces espoirs n'avaient pas été partagés et enrichis par de nombreux collègues. Je vais donc parler au nom de tous ceux qui, par la COPIRELeM, ont voulu faire, dans les années 70, d'un mythe une réalité. J'espère qu'ils me pardonneront ce que je leur emprunterai ou que je leur prêterai indûment.

Officiellement la commission avait une mission de concertation entre les principaux partenaires de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire : le ministère (la direction des écoles), ses inspecteurs et ses moyens d'action (Institut Pédagogique National par exemple), les instituteurs, les formateurs en mathématiques et les mathématiciens, mais aussi les novateurs et les éditeurs qui par le biais des médias tenaient l'opinion en haleine.
Elle est pendant longtemps (et peut être encore) un exemple de coopération entre ces divers acteurs. Je veux rendre hommage ici en particulier à l'Inspecteur Général Duma qui prit part aux travaux et fut pour la commission un soutien sans faille. Mais il ne fut pas le seul.
Les vertus principales qui ont fondé la crédibilité de la commission sont sans aucun doute le sens de ses responsabilités, son réalisme et son ambition scientifique.

Trop faible pour intervenir sur les orientations et sur les programmes, elle a investi le champ des recherches, des expérimentations et du développement des réformes décidées. A l'époque, sous diverses impulsions, les « recherches » et les « expérimentations » pullulent et donnent lieu à des surenchères étonnantes. Les novateurs attendent que les IREM leur servent de caisse de résonance, les autres espèrent des conventions et des exemples pour fixer ce qui est raisonnable et rejeter le reste. La COPIRELeM débat et se débat pour faire émerger ou pour produire des aides, des commentaires, des exemples… Elle essaie en même temps de développer des recherches et de limiter la prolifération en augmentant les exigences éthiques et scientifiques à l'égard des promoteurs de recyclage.

Il apparaît bientôt à certains d'entre nous que le « bon sens » sera insuffisant pour prendre sérieusement en compte ou pour rejeter les objurgations péremptoires des « scientifiques » de divers domaines qui se pressent sur le marché de l'éducation.

La formation des instituteurs aux mathématiques et à leur enseignement devait être le creuset où les connaissances spécifiques nouvelles – appelons les « didactiques » - devaient naître et trouver leur territoire : il était impossible d'ignorer que les mathématiques enseignées dans la scolarité obligatoire doivent être aménagées en fonction de nombreux critères autres que mathématiques (tenir compte de l'âge des élèves ou de la fonction civique de l'enseignement par exemple). L'application brutale de la psychologie, même génétique, pas plus que les mathématiques elles-mêmes ne peuvent fournir une ingénierie utilisable et justifiable etc.

La formation mathématique des instituteurs devait donc inclure des savoirs spécifiques à la fois théoriques, techniques et pratiques. Lesquels ? Ce fut un travail constant de la commission que de promouvoir des recherches et de les discuter, mais aussi de lutter contre la tendance à l'émiettement, de les synthétiser et de leur donner un cadre théorique pour en tirer des éléments de formation utilisables.

Il apparaissait inéluctable à terme que la formation des instituteurs deviendrait une activité universitaire. La question du rattachement des connaissances spécifiques à une discipline se posait de façon aiguë, nous avons considéré que le rattachement aux mathématiques elles-mêmes s'imposait. On en discute encore.

En fait, la principale fonction de la commission est une fonction didactique en direction de tous ses partenaires.

- En direction des instances du ministère : leur légitimité est essentiellement politique, professionnelle et disciplinaire, mais le vocabulaire et les concepts qu'ils ont la possibilité effective d'utiliser ne sont pas ceux que les recherches pourraient leur fournir, quand bien même ils les connaîtraient. Disons que les conditions macrodidactiques qui leurs sont imposées ne s'articulent pas encore très bien avec les propositions microdidactiques que la recherche a été en mesure de leur fournir depuis trente ans. De ce fait, leur volonté et leur capacité à faire évoluer le discours des professeurs dans un sens contrôlé par des instances scientifiques sont très limitées.
- En direction des formateurs d'instituteurs puis des professeurs des écoles. C'est le travail le plus évident, celui qui a laissé le plus de traces. D'abord la formation des anciens professeurs d'écoles normales, puis celle des nouveaux formateurs, PRAG ou maîtres de conférences, ceux du moins qui pensent plus à leur travail qu'à leurs regrets de n'être pas dans une « vraie » université ! Ainsi le « séminaire des nouveaux formateurs » mis en place en 1997 réunit annuellement les membres de la COPIRELEM et une trentaine de nouveaux formateurs en IUFM.
- En direction des chercheurs en didactique des mathématiques par la même occasion.
- En direction des professeurs de mathématiques des autres niveaux. L'influence est claire, forte et durable.

En ce qui concerne les mathématiciens le bilan est plus contrasté. Après le départ d'une génération de grands mathématiciens tout dévoués à l'enseignement primaire et respectueux de ses pratiques, nous en avons connu d'autres. La COPIREleM a refusé de cautionner leurs déclarations fracassantes, hasardeuses et finalement irresponsables. Ce n'est pas son moindre titre de gloire. Son honnêteté et son sérieux lui ont valu quelques difficultés, le recrutement des mathématiciens didacticiens s'est un instant tari, mais grâce aux IREM l'institution a survécu et poursuit sa tâche.

Aujourd'hui, la COPIREleM poursuit sa tâche de rencontres entre les différents partenaires de l'enseignement élémentaire (enseignants, inspecteurs, formateurs, mathématiciens, et chercheurs en didactique), de modération des débats entre l'école et la noosphère, d'initiation d'expérimentations et de propagation de recherches.

Introduction

Depuis 30 ans, la COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'École Élémentaire) a mené, conformément à sa mission, une réflexion constante sur l'enseignement des mathématiques à l'école et sur la formation des maîtres devant assurer cet enseignement. L'engagement, dans cette commission, de formateurs émanant des IREM de diverses académies a permis le partage et la diffusion de travaux issus de recherches et d'expériences concernant l'enseignement des mathématiques à l'école.

L'action de la COPIRELEM s'est poursuivie, avec un souci de continuité, pendant la transformation des Écoles Normales en Instituts Universitaires de Formation des Maîtres. Ainsi les acquis, en matières d'expériences et de connaissances sur l'enseignement des mathématiques à l'école, élaborés conjointement dans les groupes élémentaires des IREM et au sein des Écoles Normales, ne se sont pas perdus et ont pu être actualisés afin d'alimenter les actions de formations dans le cadre des IUFM.

C'est ainsi qu'au cours de ces trente années, la COPIRELEM a organisé, sur le plan national, 30 colloques, 6 stages et 5 séminaires, réunissant des milliers de formateurs provenant, jusqu'en 1991 des Écoles Normales puis des IUFM, et aussi d'instituts de formation d'autres pays de l'espace francophone.

Les colloques et stages nationaux ont permis la mutualisation des expériences ainsi que la diffusion des travaux de recherche sur l'enseignement des mathématiques à l'école. Ils ont contribué, au fil des années, à stabiliser un corps de connaissances et à promouvoir une culture commune des formateurs pour l'enseignement des mathématiques à l'école.

Par ailleurs, depuis six ans maintenant, la COPIRELEM s'est également attachée à assurer la formation des formateurs nouvellement affectés en IUFM. Cette formation organisée, au sein de séminaires nationaux, permet à la commission de transmettre les connaissances constituées par la communauté des formateurs. Elle vise ainsi l'amélioration de la formation des professeurs des écoles.

Chacune de ces manifestations a donné lieu à la publication d'actes réunissant les réflexions, propositions de travaux, compte-rendus d'expériences et de recherches. La lecture de ces documents met en évidence la diversité des domaines de savoirs auxquels fait appel la formation des maîtres en mathématiques. Elle montre une évolution des questions didactiques et pédagogiques étudiées et des réponses qui leur ont été apportées.

Après ces trente années de travaux et de recherches, les membres de la COPIRELEM ont estimé le moment venu de faire une synthèse du capital de connaissances accumulées pendant toutes ces années.

Cette synthèse vise aussi à conserver la mémoire de l'évolution des questions de formation. Capitaliser et diffuser toutes ces connaissances sont les deux objectifs que cet ouvrage de synthèse a l'ambition de réussir.

Les membres de la COPIRELEM, à la fois animateurs IREM et professeurs en IUFM, ont sélectionné les articles issus de ses publications qui présentent un intérêt pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école. Certains articles constituent des repères intéressants sur l'histoire de la pensée didactique, d'autres restent des ressources pertinentes pour la formation. Le présent ouvrage est l'aboutissement de ce travail de sélection et de synthèse mené par les 19 formateurs, membres de la COPIRELEM.

Cet ouvrage rassemble des contributions d'auteurs venus de différents horizons. C'est ce qui en fait son originalité.

Il est composé de compte-rendus de situations d'enseignement des mathématiques à l'école primaire, et d'actions de formation développées par les différents formateurs dans le cadre de leur enseignement. Il comporte également des articles de chercheurs, issus de la didactique des mathématiques, de la psychologie cognitive ou de diverses branches des sciences de l'éducation.

Par leur participation à un colloque ou à un séminaire en tant que conférenciers, animateurs d'ateliers ou auteurs de communications de leurs travaux de recherche, tous ces auteurs ont apporté leur pierre à l'édifice des connaissances professionnelles dans le domaine de la formation des maîtres à l'enseignement des mathématiques.

La variété des travaux présentés témoigne de la fécondité de la réflexion menée depuis trente ans par les formateurs. La COPIRELEM s'est donnée pour tâche de la capitaliser.

Dans cet ouvrage, la COPIRELEM espère que tout formateur ou chercheur, s'intéressant à la formation en mathématiques des enseignants trouvera matière à nourrir sa réflexion, ses recherches et à enrichir son enseignement.

La parution de cet ouvrage marque une étape importante dans la vie de la COPIRELEM en lui permettant de renforcer le réseau des formateurs en didactique des mathématiques.

Il appartient à ce réseau, constituant une force institutionnelle non négligeable, de poursuivre sa mission première : promouvoir et améliorer l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

Yves Girmens et Catherine Taveau
Responsables de la COPIRELEM

SOMMAIRE

TOME 2 - Démarches et savoirs à enseigner

TOME 3 - Outils de formation

Quelles activités à caractère mathématique en maternelle ?

Yves Girmens - Françoise André

Extrait des actes du XXVII[ème] colloque inter-irem des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres - Chamonix 2000.

Cet article présente une réflexion approfondie sur des activités, dans le domaine logico-spatial, conçues avec des objectifs d'apprentissage sur les concepts de collection, d'énumération et d'ordre.

RÉSUMÉ DE L'ATELIER :

Des recherches récentes concernant les travaux à caractère mathématique en maternelle ont permis d'identifier des savoirs en mettant en évidence la nécessité de proposer aux enfants de maternelle des situations d'apprentissage autour de ces savoirs, à côté des activités rituelles ou fonctionnelles.

L'atelier a permis de mieux cerner ces hypothèses et d'étudier les conditions pour une transposition de ces travaux de recherche dans la pratique des enseignants.
Une recherche-action a été menée, pendant deux années, par des personnes enseignant en maternelle et des formateurs en IUFM, en vue de favoriser cette transposition.
Des exemples de travaux issus de cette recherche ont été présentés et ont fait l'objet d'un débat.

Pourquoi cet atelier ?

Pour faire partager une expérience de recherche de « didactique appliquée » en maternelle, menée conjointement par des maîtres et des formateurs.
Pour soumettre les travaux issus de cette expérience au regard des autres et recueillir critiques et suggestions éventuelles.

PLAN DE L'ATELIER

Présentation du contexte de l'action
Définition du cadre théorique
Choix et mise en oeuvre
Présentation de quelques travaux
Eléments de conclusion et perspectives

I. Présentation du contexte de l'action

Origine de la réflexion : Un questionnement sur les activités à caractère mathématique en maternelle

La réflexion a été initialisée par un certain nombre de besoins ou de questions formulés par des enseignants de maternelle, à l'occasion de rencontres organisées dans le cadre de l'AGIEM, auxquelles ont accepté de participer certains formateurs de l'IUFM de Perpignan :

- Le besoin de réfléchir sur les activités à caractère mathématique en maternelle doublé du besoin de mieux identifier des enjeux pour l'apprentissage des nombres.
- L'impression de ne pas proposer suffisamment d'activités pré-numériques en maternelle et en même temps, une panne d'idées pour renouveler les activités à caractère mathématique.
- Le sentiment qu'en parallèle des activités rituelles et fonctionnelles, et des activités dirigées qu'ils proposent aux enfants, il y a certainement d'autres formes de travail qu'ils ignorent et qui peuvent favoriser davantage l'initiative et la réflexion des enfants.
- Le constat de difficultés et de ratés dans l'apprentissage du nombre, relevés chez certains enfants, dont ils perçoivent mal les origines.
- Le besoin de mieux prendre en compte les différences d'aptitudes et de développement des enfants.
- Le besoin de mieux cerner les savoirs qui sont en jeu dans l'apprentissage du nombre pour mieux aider les enfants.

Objectifs du projet d'action

Les formateurs, en réponse à cette demande, ont proposé de constituer un groupe de recherche-action avec les objectifs suivants :

- Faire connaître certains savoirs logiques qui entrent dans l'apprentissage du nombre, qui, s'ils ne font pas l'objet d'un enseignement, peuvent entraîner des manques ou des ratés dans les connaissances des enfants.
- Favoriser un renouvellement des pratiques d'enseignement : faire découvrir qu'à côté des activités rituelles, fonctionnelles, d'activités guidées (où l'enfant apprend par frayage), il est possible de proposer des activités problématiques aux jeunes enfants, où ceux-ci pourront faire preuve d'initiative, mobiliseront des connaissances par nécessité et imagineront des solutions.
- Provoquer une réflexion sur le rôle du maître dans les apprentissages.
- Aider les enseignants à mieux cerner les notions de tâche (en liaison avec un savoir en jeu), de but à atteindre (critère de réussite), de dévolution de la situation à l'enfant, avec en particulier une réflexion autour de la consigne donnée par le maître, qui doit permettre à l'enfant d'assumer le problème et le pousser à agir.

- Etudier avec les enseignants de terrain comment et à quelles conditions, des travaux issus d'une recherche peuvent être transposés dans l'enseignement.

La démarche choisie

Après les apports théoriques nécessaires et l'identification d'un savoir, il est convenu avec les enseignants qu'ils inventeront eux-mêmes une situation visant l'apprentissage de ce savoir, qu'ils l'expérimenteront dans leur classe et qu'ils en feront ensuite un compte-rendu devant le groupe de recherche.
Dans un deuxième temps, à partir d'un questionnement collectif sur les situations présentées, est proposée l'étude d'une situation-témoin, à l'aide d'un document vidéo. Cela permet de mettre en évidence le modèle (la situation générique) et les variables didactiques sur lesquelles on peut jouer.
Dans un troisième temps, les enseignants peuvent choisir d'expérimenter à leur tour la situation présentée ou d'en fabriquer une sur le même modèle.

Ce choix repose sur l'hypothèse, faite par les formateurs, qu'en construisant eux-mêmes les situations, les enseignants identifieront mieux les enjeux (les savoirs visés), mobiliseront leur capacité d'invention (elle est grande chez des maîtres de maternelle), feront preuve de créativité, tireront le plus grand parti du matériel dont ils disposent et maîtriseront les modalités de réalisation.

Cette hypothèse a été confirmée par la richesse et la variété des situations imaginées par les enseignants.

II. Définition du cadre théorique

Identification de savoirs

La prise en compte des travaux menés par le groupe COREM, de Bordeaux, et en particulier, des recherches de Marie-Hélène Salin et Joël Briand, a permis d'identifier des savoirs pré-numériques et logiques constitutifs de l'apprentissage du nombre, qui ne font pas l'objet d'un enseignement spécifique.[1]

Le concept de nombre (aspect cardinal) s'appuie sur ***le concept de collection*** (nombre : mémoire d'une quantité d'objets d'une collection) et sur ***le concept de désignation*** d'une quantité.
Par ailleurs, le dénombrement d'une collection fait intervenir le comptage des objets de la collection qui fait appel à une connaissance spécifique : ***l'énumération.***

[1] Cf. l'article de J. Briand, « Enseigner l'énumération en moyenne section de maternelle », présent dans ce tome.

Enfin, ces connaissances font intervenir de différentes manières la notion ***d'ordre*** : dans une collection, l'ordre n'intervient pas ; l'énumération fait appel à un ordre.

Il a été nécessaire de définir ces savoirs puisqu'ils seront choisis comme objets de travail.

- ***La collection***

Une collection est un regroupement d'objets provoqué par un critère de fonctionnalité, un critère défini par un caractère commun, un critère généré par une circonstance.
Concevoir une collection, c'est accepter de voir un rassemblement d'objets comme un tout (un seul objet).
Une collection est invariante quel que soit l'ordre (la position) des objets (on ne tient pas compte de l'ordre).
Le concept de collection est un concept préalable (constitutif) du concept de nombre comme mémoire d'une quantité. La collection n'est pas quelque chose de donné ou d'inné, c'est quelque chose qui se construit.

- **L'énumération**

Le comptage (qui entre dans le dénombrement), exige l'exploration exhaustive d'une collection en passant en revue tous les objets de la collection et chacun d'eux une seule fois.
Cette connaissance relative à la collection est appelée : l'énumération (définie et étudiée par Joël Briand dans sa thèse).

- **La désignation**

La désignation est une connaissance que l'on met en œuvre lorsqu'on veut remplacer un objet ou une collection d'objets par un symbole pour conserver une mémoire de cet objet : la désignation doit permettre de conserver une connaissance de l'objet.

Ex : le dessin d'un objet est une désignation de cet objet,
un représentant d'une classe d'objets est une désignation de cette classe.
une liste formée d'une suite de symboles représentant des objets est le mode de désignation le plus simple d'une collection d'objets.

- **L'ordre**

L'ordre intervient lorsqu'on se donne des informations qui permettent de repérer la position des objets d'une collection organisée selon une direction donnée et pour laquelle a été défini un sens.
Pour une direction donnée, le sens peut être défini par :

un aspect physique : mouvement réel ou virtuel, le temps (la chronologie).
un aspect arbitraire : on décide d'un début et d'une fin.

La situation par adaptation

Le modèle de situation d'apprentissage choisi est la situation par adaptation (en référence à la théorie des situations de Guy Brousseau), où l'enfant confronté à un milieu constitué par l'enseignant, qui lui pose un problème, va devoir réagir à ce milieu avec ce qu'il sait faire et éprouver le besoin d'un savoir nouveau, comme moyen de résoudre le problème.

Chaque situation, autour d'un savoir déterminé, sera élaborée selon la démarche suivante :

1. Identifier un obstacle
Un savoir nouveau
Une conception (connaissance mal faite ou incomplète) que l'on veut faire remettre en cause.

2. Constituer un milieu
Milieu matériel (matériaux, supports de travail, outils utiles)
Tâche qui confronte à un problème (consigne)
Ce milieu doit mettre l'enfant en action (utilisation de ses connaissances) et doit lui permettre une validation de ses choix et de ses décisions (rétroactions).
Le milieu est entièrement organisé par l'enseignant pour que l'enfant y rencontre le savoir visé comme réponse à un problème.

3. Assurer la dévolution du problème
Prise en charge de la situation par l'enfant.

4. Mettre sur pied un scénario
Phase d'entrée dans le problème : l'enfant doit réussir la tâche avec les connaissances qu'il a.

Phase de recherche (action) : l'enfant est placée devant la même tâche qui maintenant, par un jeu sur des variables, pose problème (obstacle).
Il faut en fixer : les modalités – la durée – les aides éventuelles.

Phase de mise en commun : examen des productions – validation – formulation des stratégies utilisées – repérage et formulation des raisons de non – réussite.

Nouvelle phase d'action : prise en compte des éléments dégagés et nouvelle tentative.

Phase d'institutionnalisation : mise en évidence du savoir nouveau (formulation).

III. Les choix

Les savoirs pris comme objectifs de travail sont la collection, l'énumération (moyens de contrôle d'une collection), la désignation (d'un objet, d'une collection), l'ordre.
Les situations sont bâties autour d'un enjeu correspondant à l'un des savoirs mais font intervenir les autres savoirs de manière non problématique.
Mettre en place des situations d'apprentissage par adaptation où l'enfant, confronté à un milieu constitué par l'enseignant, qui lui pose un problème, va devoir réagir à ce milieu avec ses connaissances et être placé devant le besoin d'un savoir nouveau (d'un outil) (théorie des situations).

Pour l'un des savoirs repérés (la collection, l'énumération, la désignation, l'ordre), fabriquer un modèle de situation, pour laquelle le savoir est l'outil de résolution le mieux adapté (enjeu).

Par exemple, il s'agira de proposer une situation dans laquelle il sera nécessaire de concevoir et de fabriquer une collection pour résoudre le problème proposé (la fabrication d'une collection sera la solution au problème posé).
Exemples donnés : le tri de graines (proposé par l'équipe de recherche du COREM, école Michelet de Bordeaux) ; les cartes à jouer.

Adapter cette situation, l'habiller pour la rendre attrayante, en fonction de l'âge et des connaissances des enfants : chaque situation sera ainsi présentée sous la forme d'un jeu où il faut gagner, et où gagner se fera par la mise en œuvre du savoir visé.
Les situations proposées n'excluent pas le recours au nombre mais ne le nécessitent pas, dans les premières étapes du moins, car le problème peut se résoudre par des procédures non-numériques, mobilisant l'un des savoirs identifiés.

Les savoirs identifiés étant imbriqués, il n'est pas question de chercher à isoler l'un d'entre eux, mais pour chaque situation, l'un des savoirs sera choisi comme enjeu (les autres pouvant intervenir de manière non problématique).

IV. Présentation de quelques travaux

1- Sur la collection : les cartes à jouer

Niveau concerné : moyenne section.

Préalable à la situation
- manipuler des cartes (cartes à jouer de casino, c'est-à-dire sans écriture des nombres sur le côté)
- les nommer

- faire des classements divers. On obtient de manière générale les 4 familles (carreau, pique…), les 1 avec les 1...., les personnages et les autres, les rouges avec les rouges et les noirs ensemble...
Après toutes ces manipulations, retenir un critère, celui des 4 familles (cœurs avec cœurs…).

NB : Attention aux as, ils posent problèmes car les enfants peuvent ne pas les associer à la même famille (on peut décider, selon le contexte, de ne pas les mettre).

Objectif : à partir d'un jeu de cartes hétérogènes, réunir des collections de cartes d'une même famille.

But à atteindre : l'enfant doit placer les cartes dans les boîtes. Il aura réussi si, dans la boîte, il n'y a que des cartes appartenant à la même famille (ex : les cœurs avec les cœurs).

Matériel par groupe de deux enfants : des boîtes identiques vides où une fente permet juste le passage de la carte (4 boîtes) ; un paquet de 28 cartes (les as, 2, 3, 4, 5, 6, 7).

Dispositif : 4 groupes de 2 enfants travaillent en même temps ; dans chaque groupe, un enfant agit, un autre regarde ; l'enseignant, après chaque partie, fait valider par l'observateur et fait formuler les stratégies.

Définition de la tâche : l'enfant doit trouver une stratégie pour constituer dans chaque boîte la collection de cartes appartenant à la même famille.

Déroulement

- *Phase 1* : appropriation de la tâche, description du matériel.
  Les cartes sont à disposition et les 4 boîtes sont ouvertes.
  La consigne est : "*Mets les cartes de la même famille dans la boîte*".

- *Phase 2* : chaque binôme dispose maintenant de 4 boîtes fermées.
  La consigne est : « *Mets les cartes dans les boîtes. Dans chaque boite, il ne doit y avoir que des cartes de la même famille* ».

  Quand l'activité est finie, verbalisation par l'enfant des stratégies utilisées. L'observateur dit s'il pense que l'enfant a réussi ou pas.

  Validation : on ouvre les boîtes et on vérifie si les familles sont bien faites.

- *Phase 3* : inversion des rôles.

Stratégies attendues
- L'enfant constitue la collection devant chaque boîte avant de glisser le tout dans la boîte.
- L'enfant met un représentant de chaque collection devant chaque boîte : cette carte constituant une désignation de la collection.
- L'enfant glisse d'abord toutes les cartes qui concernent une famille puis passe à la 2ème.

Stratégies observées

- L'enfant met carte par carte en essayant de se souvenir de la place de la boîte et de la famille de cartes qui est à l'intérieur : quelques enfants de moyenne section réussissent avec cette stratégie-là. C'est d'ailleurs la non-réussite de cette stratégie-là qui permet aux enfants d'aller plus loin.
- L'enfant commence à faire une collection dans une boîte puis change de stratégie et finalement mélange les collections.
- L'enfant fait les collections les unes après les autres en rassemblant les cartes sur table ou dans sa main.

Variables de la situation
- le nombre de cartes données.
- le nombre de familles.

Prolongements
- jeu des 7 familles.
- même situation avec des objets divers différenciés par un seul critère (jetons de couleurs différentes…).

Remarques : la solution au problème est bien ici la constitution d'une collection dans chaque boite. L'enfant, pour réussir, doit concevoir la collection en l'anticipant pour ensuite trouver un moyen de l'obtenir en en contrôlant la réalisation.

2) Sur l'énumération : les polydrons

Niveau concerné : la grande section.

Objectif : mettre en œuvre une stratégie d'énumération d'une collection donnée en vue de constituer une collection identique.

But à atteindre : l'enfant a réussi s'il a constitué une collection formée de faces identiques à toutes celles d'un solide donné.

Matériel
- LOKON : matériel que l'on trouve dans le commerce (Celda)
- des barquettes pour rassembler les faces choisies.
- des solides construits avec les pièces du LOKON (solides complexes, difficulté pour compter les pièces)

Ex : solides formés de pièces de même couleur.
  solides constitués avec pièces d'une seule forme.

Dispositif : demi-classe, travail en binôme ou individuel.

La tâche : rassembler les pièces qui permettront de fabriquer un objet identique à celui qui est donné.

Déroulement

Phase 1 : Présentation et description du matériel

Phase 2 : Action
Consigne : *« tu dois préparer dans la barquette les pièces qui vont permettre à l'autre groupe de fabriquer le même objet que celui-ci* ».
Les enfants n'ont pas le droit de défaire le solide.
Chaque élève ou chaque binôme détermine et constitue la collection.

Phase 3 : Formulation - Mise en mots des procédures utilisées
« *Comment es-tu sûr qu'il y a toutes les pièces ? Tu n'as pas le droit de refaire le solide* ».
Verbalisation :
- des stratégies.
- des obstacles rencontrés.
- des idées de nouvelles stratégies.

Phase 4 ***:*** Validation du but à atteindre
Le solide référent et la barquette contenant les pièces préparées sont données aux autres élèves pour qu'ils construisent le solide.

Stratégies attendues
Comptage du nombre de pièces de chaque sorte en s'appuyant sur :
- marquage de chaque pièce par une trace indiquant qu'on l'a comptée.
- marquage à l'aide de gommettes des pièces qui ont été comptées.

Stratégies observées
- comptage des différentes pièces, avec un ordre défini mais oubli du point de départ (pas de marquage des pièces).
- comptage des pièces, les doigts servant de marqueurs : difficultés liées au nombre de doigts et à la manipulation.
- marquage de chaque pièce par un signe mais pas de comptage.
- numérotage de chaque pièce.

- repérage de chaque pièce par une gommette, les gommettes étant collées au fur et à mesure de la comptine récitée.
- repérage de chaque pièce par une gommette collée et numérotation de chacune des pièces.

***Remarque** : La situation a bien comme enjeu l'exploration exhaustive d'une collection d'objets (les faces du solide), par la mise en œuvre de stratégies d'énumération.*

3) *Sur l'ordre* : *les empilements*

Niveau concerné : la grande section.

Atelier proposé au moment de l'accueil
Appropriation du matériel, manipulation libre.
Montage à partir de la consigne : *« Avec quatre, cinq, six ou sept pièces, fais une construction. Les pièces doivent être les unes sur les autres. Aucune ne doit être cachée entièrement ».*
(Voir annexes 1, 2 et 3)

Prolongement
Photocopie des montages réalisés. Coloriage des pièces sur la copie à partir du modèle (le montage).
Verbalisation : forme - couleur – taille. Vocabulaire de l'ordre : **sur – sous - entre**.

PREMIÈRE SITUATION

Objectif : le concept de collection.

Dispositif : une demi-classe.

Matériel : des pièces géométriques de formes, tailles et couleurs différentes.

Déroulement
Phase 1 : montages (empilements) à réaliser. Rappel consigne : 5, 6, 7 éléments. Verbalisation, problèmes rencontrés. Photocopie (voir Annexe 1).

Phase 2 : présentation des montages dessinés.
Consigne : « Prépare les pièces qui vont permettre à l'autre groupe de réaliser les montages ».

Selon les montages produits dans les ateliers, propositions de montages plus ou moins complexes (5, 6, ou 7 pièces).

Phase 3 **:** validation des réponses, échange du matériel. Montage d'après le dessin et la collection.

Selon le montage, certaines formes sont difficiles à reconnaître.

Le dessin a été agrandi pour une meilleure lisibilité : certains enfants ont été gênés par ce changement d'échelle (les petites pièces agrandies ont presque la même taille que les grandes pièces réelles).

Une fois que toute la classe a fait l'activité, le matériel constitué par les pièces et le montage dessiné, est proposé dans un atelier.
Même travail sur de nouveaux montages, entraînement.

DEUXIEME SITUATION

Objectif : le concept d'ordre.

Dispositif : une demi - classe.

Matériel : montages dessinés, collection des pièces préparées pour chaque montage (dans une barquette).
Feuille de papier, crayon, crayons de couleur, boîte de pièces.

Déroulement
Phase 1 **:** chaque élève dispose d'un montage dessiné et de la barquette contenant la collection de pièces correspondante (voir annexe 2 qui présente des dessins de montages).
Vérification avec la consigne : « *La collection dans la boîte permet-elle de faire le montage ?* ».

Phase 2 : la consigne est « *Certains enfants, malgré le montage dessiné et la collection des pièces, ne savent pas refaire le montage. Il faut expliquer comment faire le montage* ».

Les stratégies relevées

- Les pièces servent de gabarit.
  Elles sont coloriées et numérotées, éparpillées sur la feuille.
  Les pièces sont alignées dans l'ordre de montage ; au bout de la feuille, virage signalé par des flèches.

- Les pièces sont dessinées à la main et coloriées (problème de forme et surtout de taille)
  Elles sont numérotées.
  Elles sont dessinées dans l'ordre (sens de lecture gauche - droite).

Phase 3 : validation des messages explicatifs, construire le montage à partir de la fiche et vérifier avec le modèle dessiné. Certaines fiches posent problème. Analyse collective.

Remarques : dans cette situation, la solution au problème est bien la prise en compte de l'ordre d'empilement des pièces. Pour réussir, il s'agit donc, pour l'enfant de trouver une manière d'indiquer l'ordre d'empilement.
Il est relevé que la situation nécessite un moyen de désignation des différentes pièces à empiler et fait intervenir, de manière incidente, des connaissances liées à l'espace (les enfants doivent en effet interpréter une image plane par la vue de haut de l'empilement pour concevoir l'empilement des pièces).

Activité de l'atelier : à la suite de la présentation de ces travaux, les animateurs suscitent un débat sur les choix et l'adéquation entre ces choix et la situation, sur la réalité des savoirs construits, sur l'articulation des connaissances visées avec les compétences numériques.

Conclusions et perspectives

La démarche menée

La démarche utilisée pour mettre en place et mener les expérimentations s'est déroulée en plusieurs temps : initialisation collective, élaboration et mise en œuvre individuelles, comptes-rendus devant le groupe, régulation par le groupe.
Cette démarche s'est avérée productive, car elle a permis conjointement une action de formation et une incidence sur les pratiques.

L'action menée a provoqué chez les enseignants qui s'y sont engagés : investissement, créativité, appropriation de nouvelles pratiques.

L'objectif de mettre sur pied des situations réellement utilisables en classe a conduit à sortir des conditions idéales utilisées dans les recherches théoriques.
Il a fallu parfois négocier sur certains points, en prenant en compte les contingences de l'enseignement en classe : gestion du temps, de l'effectif, de la programmation des travaux.
Par exemple, dans certaines situations, pour faire face aux contraintes d'effectif, des élèves ont été placés dans le rôle d'observateurs, alors que *la présence d'observateurs ne s'imposait pas toujours dans la logique de la situation.*

Les difficultés rencontrées

Les enseignants expérimentés ont une pratique « naturalisée ». Il leur est difficile de « penser » la situation, en anticipant la formulation de la consigne précise, la gestion qu'ils envisagent, leurs paroles et leurs actions aux différents moments de la situation.
En particulier, la recherche d'une consigne précise qui poussera les enfants à agir, c'est-à-dire qui définira clairement le but à atteindre sans induire de stratégie, ne leur est pas naturelle.

Les enseignants supportent mal que les enfants ne réussissent pas d'emblée et qu'ils « pataugent ». Ils sont portés à leur « souffler » des aides directes. De même, quand les enfants sont amenés à valider des productions, ils sont enclins à formuler, à la place des enfants, des raisons de non-réussite (image en négatif du savoir visé).
Ils acceptent mal de se mettre en retrait et de laisser les enfants « se débrouiller » dans la situation.
Ils ont eu du mal à distinguer le but à atteindre, qui définit la « tâche », en référence à un savoir identifié, de l'action concrète qui sera décidée et menée par l'enfant pour atteindre ce but.
Les enseignants ont eu du mal à parler de leur action lors de la mise en œuvre d'une situation.
Ils ont tendance, à ne voir, dans les paroles des enfants, que « du langage », ce qui ne leur permet pas d'identifier l'émergence d'un savoir.

L'impact espéré sur les pratiques

Ce travail de recherche-action a permis à beaucoup d'enseignants, d'expérimenter de nouvelles formes de travail (situation par adaptation) et de mieux cerner les savoirs en jeu dans l'apprentissage du nombre.
Il apparaît acquis que plusieurs d'entre eux, confortés par la réflexion en groupes, ont intégré dans leur pratique, de manière durable, ces travaux.
Cependant, la réticence affichée par plusieurs enseignants à travailler dans la durée, en faisant vivre une même situation en plusieurs étapes par un jeu sur les variables didactiques, atténue un peu l'espoir de retombées dans les pratiques. Ils estiment que conserver une même situation en classe, en faisant jouer les variables, risque de provoquer une lassitude des enfants (d'eux-mêmes peut-être ?)
Il serait aussi nécessaire, pour favoriser l'intégration de ces travaux, d'aider les enseignants à construire une programmation des situations que l'on peut proposer aux différents niveaux de maternelle.

La question du transfert en formation initiale

Est-il opportun d'aborder les contenus décrits ci-dessus, en formation initiale des Professeurs des Ecoles de deuxième année ?
Si l'on pense que oui, quelle est la place à donner à ces contenus par rapport aux priorités de formation sur l'enseignement en maternelle ?

Ces questions font actuellement l'objet d'une réflexion des formateurs ayant participé à cette action. S'ils ne peuvent pas pour l'instant donner leur point de vue définitif, ils sont en mesure d'avancer quelques idées en faveur de l'introduction de ces contenus en formation initiale :

- il est nécessaire que les professeurs des écoles connaissent les savoirs constitutifs du nombre décrits ci-dessus ;

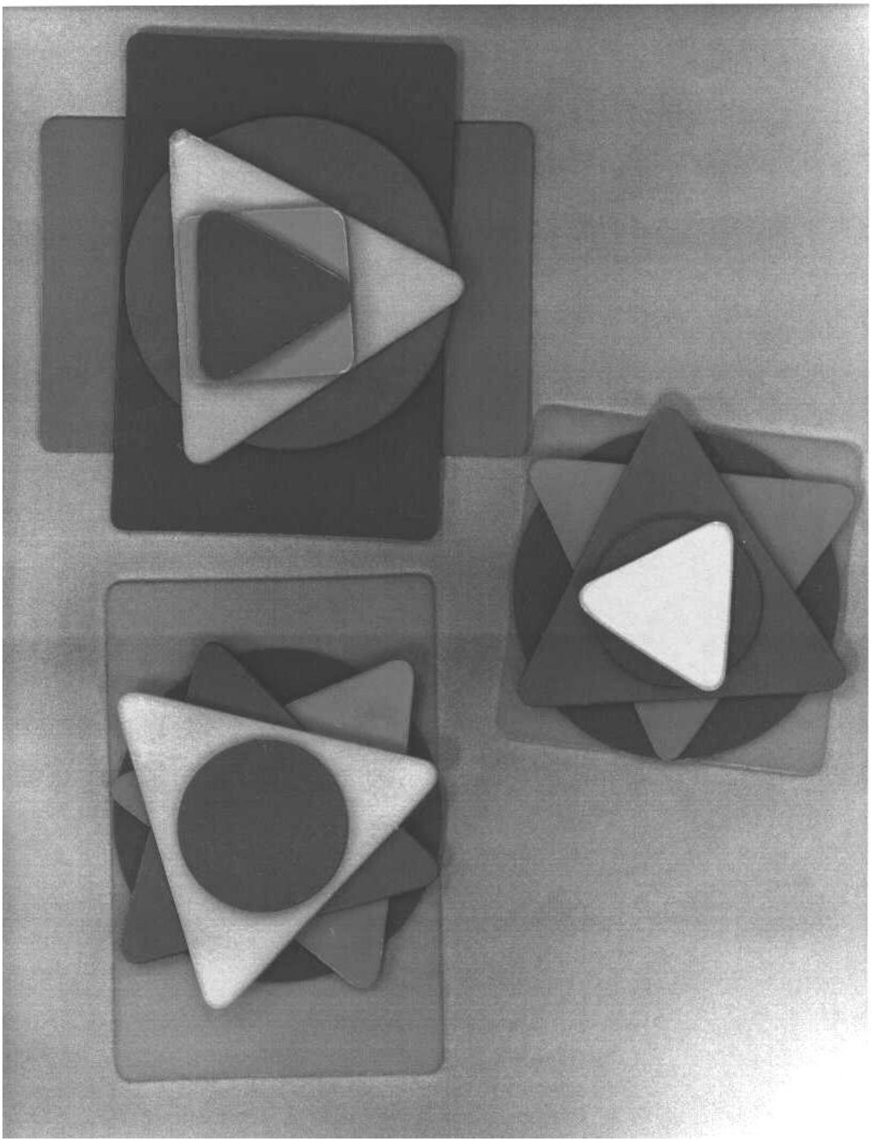
- il est indispensable qu'ils découvrent qu'il est possible de présenter très tôt aux enfants des travaux (sur la collection, la quantité, …) qui mobilisent des connaissances pré-numériques et qui participent, sur un plan conceptuel, de l'apprentissage du nombre ;

- il est important pour eux de saisir que l'articulation entre connaissances rituelles autour du nombre et connaissances conceptuelles se fait grâce à des situations où l'enfant, placé devant un problème, va tenter de le résoudre en mobilisant les connaissances qu'il fréquente et rencontre par ailleurs ;

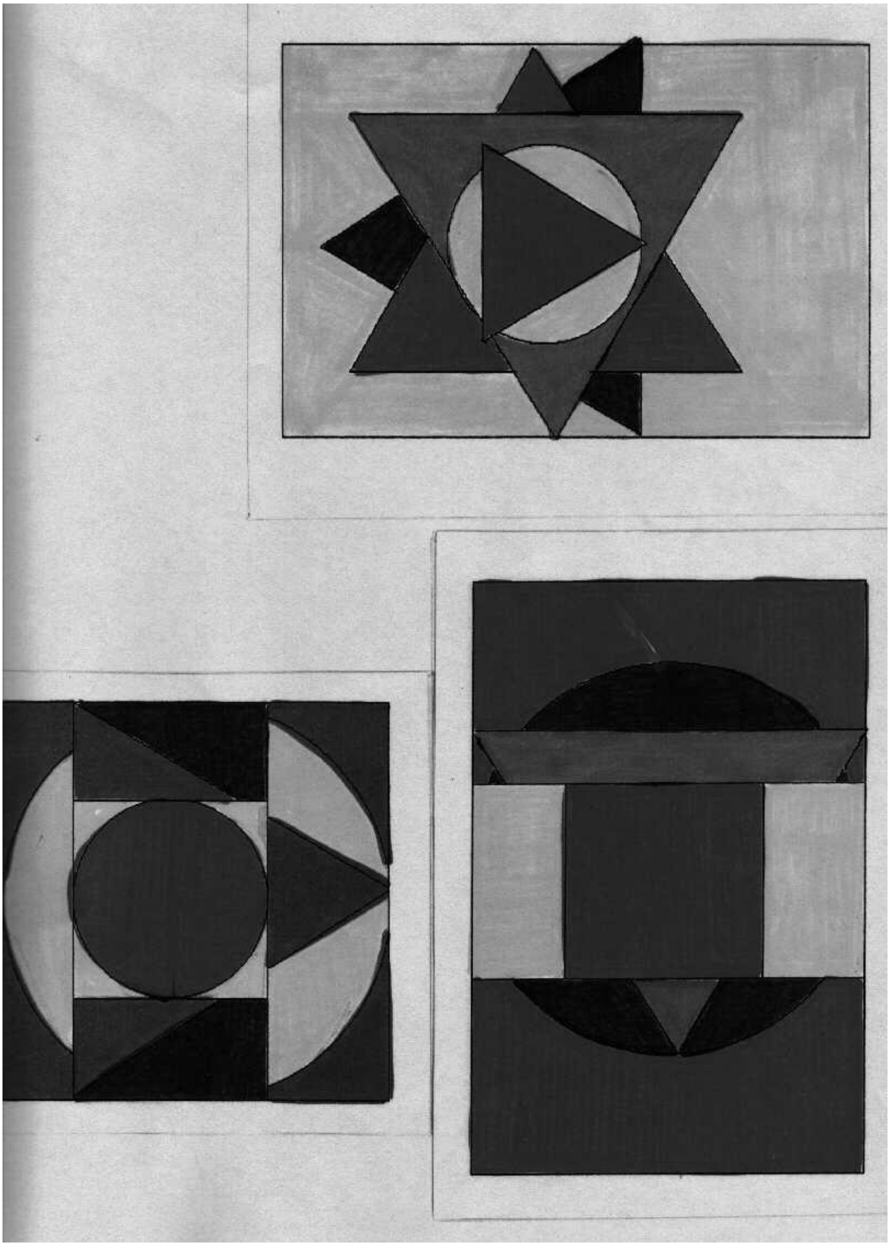
- il est essentiel qu'ils réfléchissent aux contenus de maternelle et qu'en particulier, ils comprennent l'intérêt de proposer de vraies situations à caractère mathématique et logique aux différents niveaux de l'école maternelle.

Enfin le fait d'envisager et d'expérimenter des « situations par adaptation » avec de jeunes enfants, qui ne disposent pas encore de connaissances étiquetées et formalisées, permet aux professeurs - stagiaires de mieux comprendre le fonctionnement du processus « par adaptation à un milieu » (voir théorie des situations de Guy Brousseau).

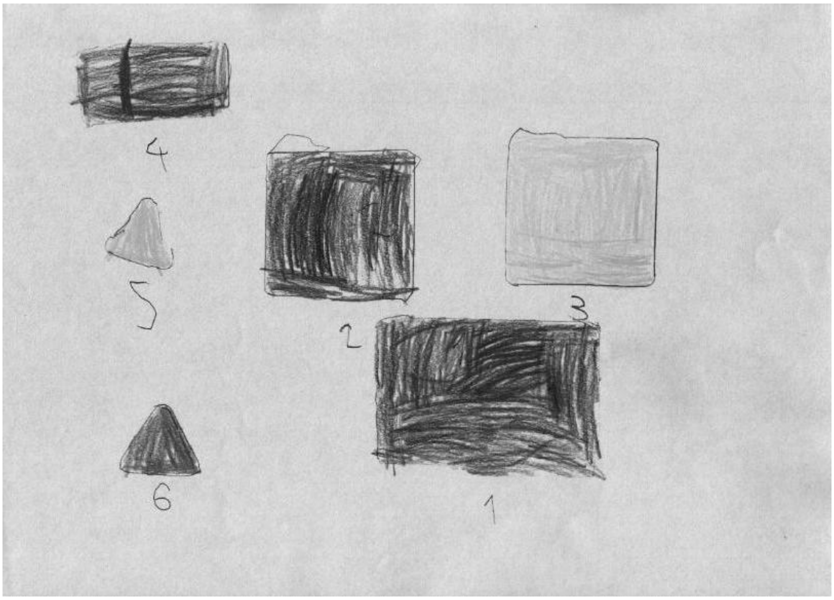
ANNEXE 1

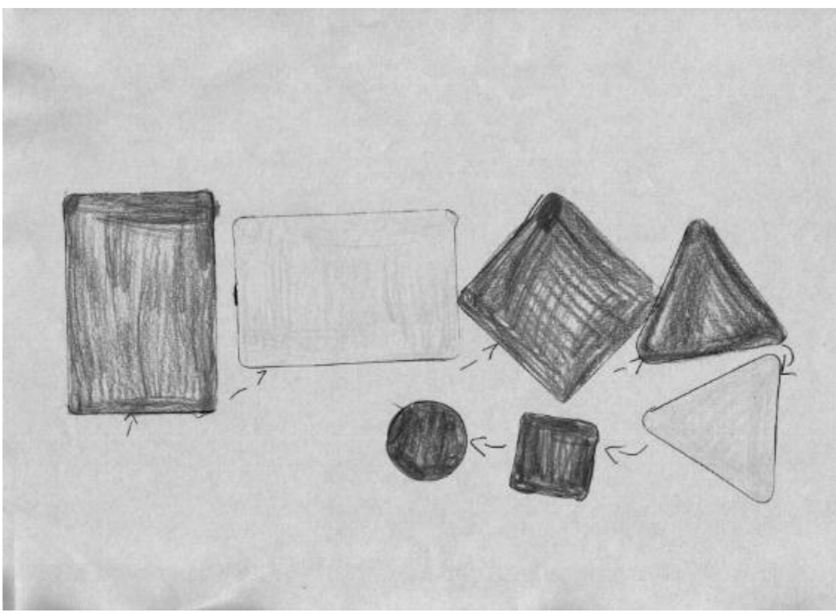


ANNEXE 2



ANNEXE 3 : Exemples de productions d'enfants


4
5
2
3
6
1



Enfants de moins de 6 ans

Enseigner l'énumération en moyenne section de maternelle

Joël Briand

Marie-José Lacave Luciani, Michèle Harvouët : COREM école Michelet de Talence
Dominique Bedère PEMF, Véronique Goua de Baix : PE2

Extrait des actes du XXI ème colloque inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres - Chantilly 1994.(article revu en 2003)

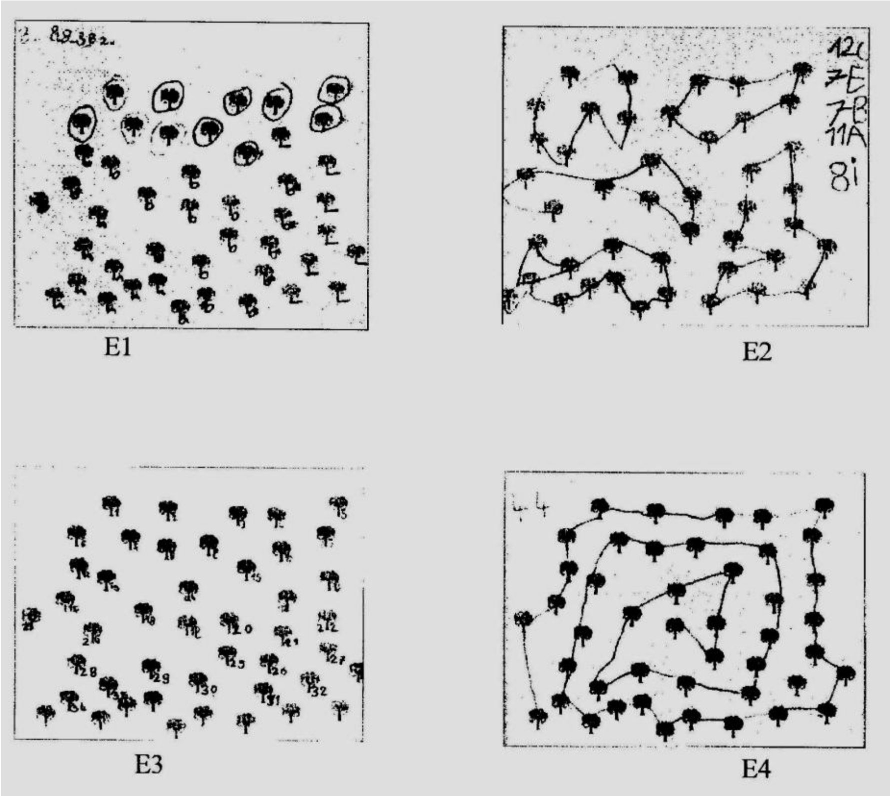
Cet article présente une étude détaillée du concept d'énumération d'une collection d'objets.

Introduction : existence d'une Connaissance nécessaire au comptage

Avant de décrire une suite de séances réalisées à l'école maternelle, nous allons étudier le travail d'élèves de cours préparatoire lorsqu'ils doivent compter le nombre d'éléments d'une collection. L'analyse qui suit nous permettra de mettre en perspective les séances de maternelle que nous proposons, avec ces activités numériques du cours préparatoire.

Les quatre travaux que nous étudions ici font partie d'une étude plus large qui a porté sur 50 élèves de deux cours préparatoires [Briand 1993]. Voici donc des travaux d'élèves de cours préparatoire (mois de mars). Ils disposent d'une feuille de papier sur laquelle sont représentés les arbres. Le professeur demande de trouver combien il y a d'arbres. Afin de répondre à cette question, l'élève peut dessiner librement sur la feuille qui lui est donnée.

Pour parvenir au résultat les élèves développent des stratégies variées :



E1 : construit des sous-ensembles d'arbres, tout en comptant (sans écrire) et en effectuant un marquage différent auprès de chaque arbre pour signifier le sous ensemble. Il effectue une partition de l'ensemble des arbres. Ensuite, il construit l'écriture 8 8 8 8 8 2. L'erreur vient sans doute de la non prise en compte du sous-ensemble désigné par un rond doublé d'une croix.

E2 : relie quelques arbres pour constituer un sous-ensemble et effectue une partition de l'ensemble des arbres. Il construit en même temps une désignation de chaque sous-ensemble par une lettre. Il construit ensuite le couple : (nombre, signe du sous-ensemble).

E3 : explore la collection en ligne. Les nombres sont inscrits, mais l'élève s'arrête lors du choix du 36^{ième} élément parce que la structure en ligne devient difficile à contrôler. (Dans l'observation, on s'est assuré que l'élève savait énoncer la suite des nombres bien au-delà de 35).

E4 : organise un chemin "en escargot" qui facilitera le comptage. L'élève trouve 44 parce qu'il a compté le nombre de "sauts" et non pas le nombre d'arbres.

On constate que les élèves développent des stratégies différentes [Briand, 1993]. Par exemple, dans les quatre travaux précédents on constate que E1 et E2 structurent la collection en sous-collections, selon des procédures différentes, et que E3 et E4 structurent la collection en y établissant un ordre, là aussi selon des procédures différentes.

Conclusion : lorsque le professeur commande une action de comptage, l'élève doit mettre en œuvre des connaissances (de nature spatiale) qui permettent d'explorer la collection à dénombrer afin de n'oublier aucun élément et de ne pas repasser deux fois sur le même. Ces connaissances ne font pas habituellement l'objet d'un enseignement. Leur dysfonctionnement entraîne pourtant des échecs dans le comptage.

Ces connaissances sont-elles mobilisées dans la vie courante ?
Prenons un exemple bien connu : aller faire des achats au supermarché à l'aide d'une liste préparée à l'avance. La tâche sera simple si la liste préparée correspond parfaitement à l'organisation des rayons du supermarché et aux habitudes du client. La liste elle-même apporte des moyens de contrôle des achats déjà effectués et de ceux qui restent à faire. Mais si la liste n'a pas été conçue en fonction de l'organisation des rayons du supermarché, notre consommateur devra exercer un contrôle, plus difficile, du passage en revue des éléments de sa liste. Il pourra s'aider du marquage s'il dispose d'un stylo, il pourra construire des sous listes par familles de produits, etc.

Ces connaissances sont-elles mobilisées à d'autres moments de la scolarité ?
Que ce soit dans le domaine de la construction des opérations arithmétiques, et plus tard, dans celui de l'analyse combinatoire, la question se pose toujours de contrôler les collections d'objets qu'il faudra dénombrer, mais nous ne pouvons pas, dans le cadre de cet article développer cet aspect.

Revenons donc à l'activité de comptage elle-même.
Pour compter le nombre d'éléments d'une collection finie montrée, l'élève doit nécessairement :
1- Être capable de distinguer deux éléments différents d'un ensemble donné.
2- Choisir un élément d'une collection.
3- Énoncer un mot nombre (« un » ou le successeur du précédent dans une suite de mot-nombres).
4- Conserver la mémoire de la collection des éléments déjà choisis.
5- Concevoir la collection des objets non encore choisis.
6- Recommencer (pour la collection des objets non encore choisis) 2-3-4-5 tant que la collection des objets à choisir n'est pas vide.
7- Savoir que l'on a choisi le dernier élément.
8- Énoncer le dernier mot nombre.

Les étapes en italiques (1,2,4,5,6,7) constituent une tâche spécifique que nous appelons **inventaire**, au cours de laquelle il s'agit de passer en revue tous les éléments d'une collection finie une fois et une seule. Cette tâche caractérise une connaissance non enseignée que nous appelons énumération, faute d'un autre nom.[1]

En se référant à la théorie des situations, la question se pose alors de mettre en place une situation fondamentale de l'énumération, c'est à dire une situation dans laquelle l'énumération d'une collection d'objets montrés soit (indépendamment de l'activité numérique) la solution au problème posé ?

Au cours de recherches antérieures, plusieurs dispositifs de mise en œuvre de la situation fondamentale de l'énumération (dans le cadre de collections finies d'objets visibles) ont été mis au point. En particulier une modélisation à l'aide de l'outil informatique a été réalisée [Briand J., Brousseau G., Oyallon J.L. 1985 puis 1995]. Les expérimentations ont déjà été rédigées [Briand J. 1985].

Nous proposons ici :
- un exemple d'organisation d'une situation d'apprentissage de l'énumération dans le cadre de la classe de moyenne section de l'école maternelle,
- l'étude d'effets produits par de légères modifications du dispositif, souvent à l'insu des enseignants.
  - les questionnements restés en suspens, en particulier dans des domaines connexes de savoirs tels que l'argumentation.

La situation fondamentale de l'énumération et son analyse

Présentation du dispositif et analyse a priori :

Le dispositif s'adresse donc à des élèves de 4-5 ans.
Un élève dispose devant lui (sur une table) d'un tas de boîtes d'allumettes identiques percées sur le côté d'un petit trou permettant le passage d'une allumette. Des bâtonnets sont les allumettes desquelles on a ôté le phosphore. Ces bâtonnets, en grand nombre, sont dans une boîte plastique. Il s'agit de placer une allumette et une seule dans chaque boîte sans l'ouvrir, et de savoir lorsque l'on a terminé. Lorsque l'élève estime avoir terminé, il vérifie ou fait vérifier par un autre élève (ou par l'enseignant au début). Pour cela, les élèves assistent à l'ouverture des boîtes. S'il y a une seule allumette dans chaque boîte et si aucune boîte n'est vide, alors l'élève a réussi.
Nous avons souhaité intégrer ce dispositif dans une pratique de classe habituelle : en collectif, la maîtresse présente l'activité en l'appelant « jeu des boîtes d'allumettes ». Elle ne fait pas travailler les élèves. Puis, après avoir lancé d'autres ateliers autonomes, la maîtresse appelle trois enfants : un va jouer et

[1] PETIT LAROUSSE - Énumérer : Énoncer successivement les parties d'un tout, passer en revue. LAROUSSE Dictionnaire étymologique 1992 p.267 : du latin enumeratio, action de compter complètement. Dans l'étymologie même du nom, le comptage paraît nécessaire, alors que la définition du petit Larousse ne fait pas référence au comptage.

deux observent. Ils joueront après. Nous verrons plus loin dans le texte comment ce dispositif peut être modifié.
Le rythme de travail choisi est de faire passer environ six élèves par séance, ce qui demande donc quatre à cinq séances pour que les élèves aient effectué le même type de travail. Cette expérimentation s'est déroulée de début novembre 96 à la mi-février 97.

Caractéristiques de cette situation a-didactique
Nous analysons quel peut être l'enjeu de cette situation pour l'élève, en fonction en particulier des possibilités d'action, de choix, de décision, de contrôle et de validation dont il dispose. Nous prévoyons les champs de comportements possibles.

Variables que nous avons repérées :

V1- Le type d'espace dans lequel l'élève va travailler. Ici, nous avons choisi de fixer cette variable. Il s'agit du micro-espace du plan de travail de la table. Chaque enfant travaille sur une table 120x80.
V2- Le nombre de boîtes.
V3- Le fait que les objets (boîtes d'allumettes) soient effectivement déplaçables ou non.
V4- La possibilité de déplacer les boîtes dans un espace restreint ou plus large. (liée à V1 et V3)
Remarque : le marquage des boîtes n'est ni suggéré, ni institué.

Analyse de la tâche, familles de stratégies attendues :
L'élève a devant lui des boîtes. Sa tâche consiste à constituer une collection nouvelle d'éléments « boîte-allumette » en distinguant en permanence cette nouvelle collection de la collection des boîtes « encore » vides.
Les stratégies possibles (gagnantes ou non) peuvent être les suivantes :

- l'élève prend une boîte, une allumette, met l'allumette dans la boîte, pose la boîte « à distance » des boîtes non encore remplies.
- l'élève prend une boîte, une allumette, met l'allumette dans la boîte, pose la boîte parmi les autres boîtes non encore remplies.
- l'élève associe une allumette à chaque boîte, puis met les allumettes dans chaque boîte. (Cette stratégie a peu de chances d'apparaître.)

VARIANTES PRÉVUES DE LA SITUATION

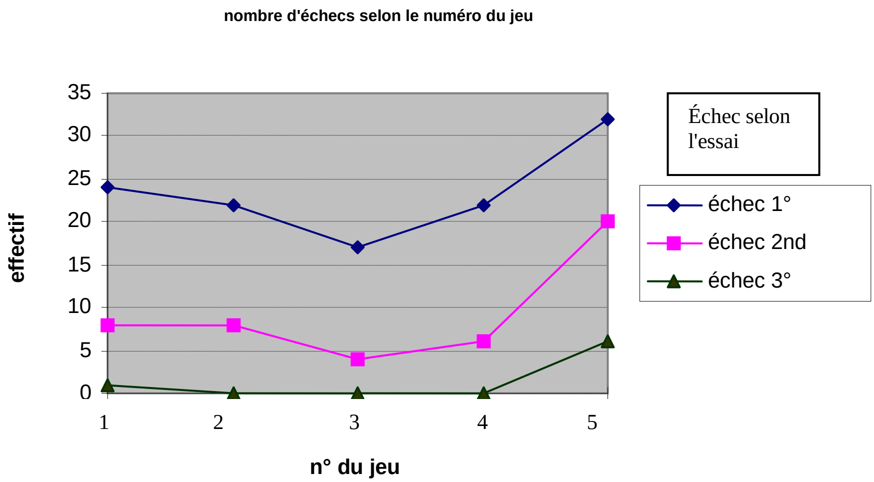
Première variante : 8 boîtes déplaçables sur une table 120x80.
Deuxième variante : 20 boîtes déplaçables sur une table 120x80.
Troisième variante : 20 boîtes fixées sur un support (vinyle blanc). Mise à disposition d'un stylo feutre.

Auxquelles nous avons ajouté deux variantes :

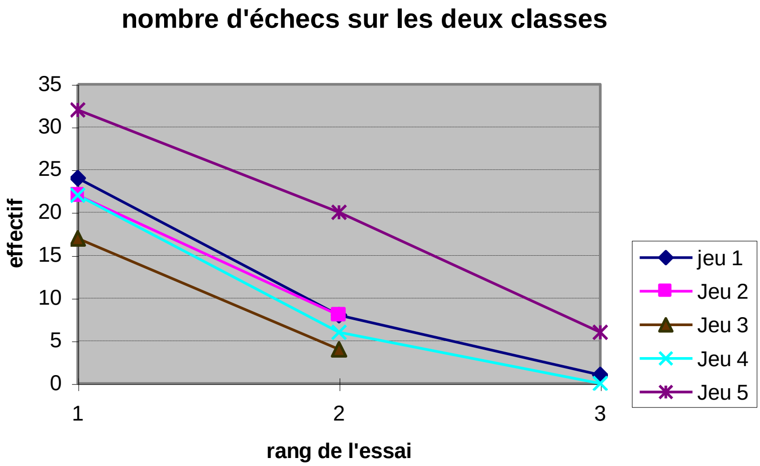
- Lors du deuxième jeu, nous avons constaté que les élèves secouaient les boîtes pour contrôler la présence ou l'absence d'allumettes. Nous avons donc décidé de placer une allumette dans les boîtes, la consigne devenant « il faut qu'il y ait deux allumettes par boîte ». Nous allons étudier dans la suite de cet article en quoi cette décision n'était pas utile.
- Une collection de 20 boîtes rend la situation inutilement complexe. Nous l'avons observé dès les premiers élèves. Aussi, nous avons rapidement réduit à 15 le nombre de boîtes.

	Configuration matérielle	**Raisons des choix**	**Analyses effectuées après l'expérimentation**
JEU 1	8 boîtes déplaçables		- Stratégies pour remplir des boîtes, élaborer une collection. - Étude d'énumérations induites involontairement.
JEU 2	20 boîtes déplaçables	Changement significatif du nombre de boîtes.	- Influence du passage de 8 à 20 sur les résultats et sur les stratégies mises en œuvre.
Première phase collective		Faire formuler les stratégies. Faire anticiper un résultat	- Passage des propositions aux prédicats puis aux calculs sur prédicats. - Traitement des erreurs par l'enseignant.
JEU 3 (2)	20 boîtes déplaçables		
JEU 4	15 boîtes déplaçables. Une allumette déjà présente dans la boîte.	Le secouage (deux allumettes) 15 car 20 rend trop long la validation	Étude détaillée du « secouage ».
Deuxième phase collective	15 boîtes déplaçables. Une allumette déjà présente dans la boîte.	Faire formuler les stratégies Faire anticiper un résultat	- Un savoir et son enseignement possible ou impossible. - Limites de ce type de séances. - Absence d'une situation a-didactique de formulation
JEU 5	15 boîtes non déplaçables. A nouveau une seule allumette.	Énumérer une collection d'objets non déplaçables. Faire des marques.	Analyse de la complexité de la tâche.

LES RÉSULTATS observés



Ce schéma montre que, pour chaque situation, les progrès sont évidents. L'enchaînement des jeux 1, 2 et 3 montre qu'à chaque jeu, le nombre d'échecs au premier essai redevient plus important que le nombre d'échecs au dernier essai du jeu précédent, mais en même temps, le progrès réalisé en trois essais par jeu reste très significatif. Le passage à deux allumettes et surtout le blocage des boîtes d'allumettes (jeu 5) vont augmenter le nombre d'échecs à rang d'essai identique.



Ce deuxième schéma montre que, quelque soit le jeu, il y a progrès. Le progrès ne se mesure donc pas uniquement d'une séance à l'autre, d'un jeu à l'autre, ce qui serait nier l'apport des modifications de variables significatives, mais à l'intérieur d'une même configuration de jeu.

Remarque : Peu d'élèves échouent après trois tentatives. Pour ceux-ci, nous prenons pour engagement de ne pas les confronter à l'échec répété. Nous proposons qu'ils demandent de rejouer lorsqu'ils en manifesteront le souhait. C'est un rapport non tendu à la situation qui doit être maintenu afin que l'élève ait envie de réussir, d'y voir un enjeu le concernant.

Analyse détaillée du jeu 1 : mise en évidence d'effets didactiques

Les stratégies repérées :

Les élèves parviennent à réussir au jeu 1 (24 échecs au premier essai, 7 au deuxième (donc 24-7 réussites) et 1 au dernier essai (donc 7-1 réussites))[2].

Les stratégies mises en oeuvre pour réussir sont :

1- Mise à l'écart des boîtes remplies
  - sur la table
  - sur la table et alignées, ou en bordure de table.
  - sur la table et alignées et empilées.

2- Repérage visuel d'un cheminement possible, a priori, permettant une exploration exhaustive de la collection première.
  - l'élève replace alors la boîte remplie à sa place initiale.
  - ou bien l'élève ne se préoccupe pas de la place de la boîte remplie.

3- Organisation préalable de la collection des boîtes vides.

Remarques :

- Nous mettons le « secouage » à part puisqu'il se greffe sur les stratégies repérées.
- Le rangement préalable des boîtes vides (en ligne) afin de mieux contrôler l'exploration future, n'est jamais apparu.
- La consigne empêche la réalisation de la stratégie qui consisterait à placer les allumettes sur les boîtes (une sur chaque boîte) ou à les enfoncer à moitié.

Deux effets d'ergonomie avec pour conséquences : une collection non construite et une énumération induite.

Premier effet :
Les résultats décrits sont issus de deux classes que nous nommons GM1 et GM2.
Les résultats obtenus en GM1 et GM2 au premier essai sont :

[2] Les élèves qui ont réussi ne rejouent pas.

E échecs

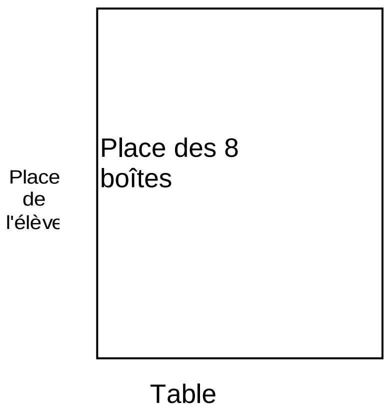
R réussites

	E	R
GM1	13	11
GM2	11	16

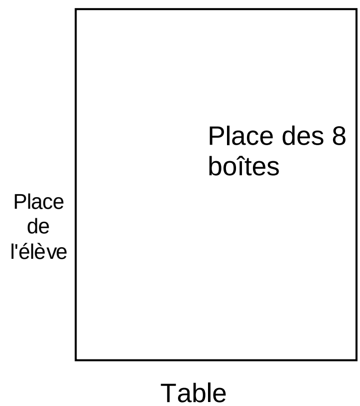
Ils paraissent semblables. Or, nous avons noté, en début d'observation (premiers groupes de 6 élèves) en GM1 puis en GM2, une différence sensible de résultats : 5 échecs sur 6 en GM2, 6 réussites sur 6 en GM1.

Nous nous sommes rendus compte que la situation n'était pas présentée de la même façon aux deux classes, que chaque maîtresse avait travaillé la séance à sa façon, et que deux interprétations de la séance s'étaient faites :

- Dans la classe GM2, la maîtresse pose, en vrac, les boîtes d'allumettes loin de l'élève. Pour cela, elle a mis les boîtes dans une grande boîte (à chaussure) qu'elle renverse sur la table. En GM1, les boîtes sont disposées assez près de celui-ci.



GM1



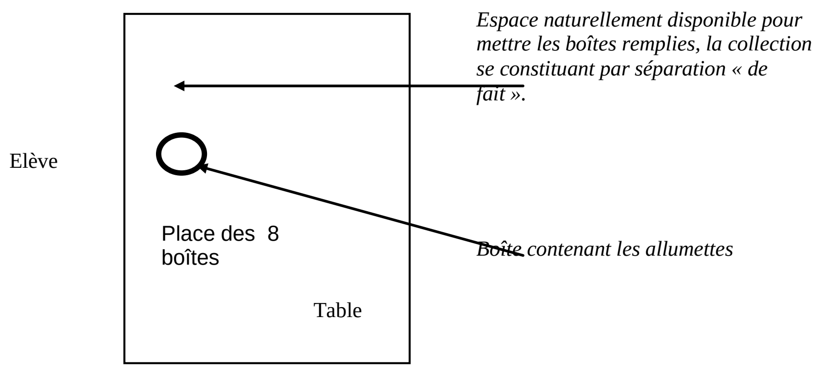
GM2

Pour mettre une allumette dans chaque boîte, l'élève doit :
1- Se saisir d'une boîte,
2- prendre une allumette *(ces deux actions peuvent être permutées*),
3- mettre l'allumette dans la boîte,
4- poser la boîte remplie en l'écartant des boîtes non encore remplies,
5- recommencer cette séquence.

Dès la deuxième boîte, la réussite impose la constitution de la collection des boîtes remplies.

Dans le cas de GM2, l’action 1 impose de tendre la main, se lever un peu de sa chaise. L’action 4 sera réalisée au moindre coût en reposant la boîte devant soi. Il n'y a aucune raison pour que l'élève repose la boîte parmi les boîtes non encore remplies. La réussite à l'activité peut donc être constatée alors que l'élève n'a pas décidé de séparer les deux collections. Dans le cas de GM1, l’action 1 n’impose aucun déplacement, l’action 4 doit alors s’accompagner d’un geste volontaire (coûteux) de mise à l’écart pour constituer les deux collections.
Dans le premier cas, pour des raisons ergonomiques élémentaires, l’élève n’a pas (ou peu) en charge l’énumération. La deuxième collection (boîtes-allumettes) peut se construire totalement à son insu.
On peut donc faire l’hypothèse que la différence de résultats est largement explicable par cette différence d’organisation.

Deuxième effet :
Une autre contrainte ergonomique a joué comme une variable de la situation : la place de la boîte qui contient les allumettes. Selon la place qu’elle occupait sur la table, la boîte constituait, ou non, un moyen (involontaire) mis à disposition des élèves pour qu’ils n’aient pas à confondre les boîtes remplies et les boîtes à remplir, en jouant le rôle de séparateur naturel :



Remarque : nous n’avons pris conscience de ces phénomènes qu’après la première observation de six élèves dans l’une et l’autre classe. Ensuite, les dispositifs furent identiques : boîtes placées devant l’élève, boîte contenant les allumettes en bord de table.

Étude détaillée de l’effet du secouage
A un moment ou à un autre, les enfants secouent pour savoir s’il y a une allumette dans une boîte.
Exemple 1 : Romain place les boîtes pleines avec les vides. Il perd. Au deuxième essai, il écoute le bruit en secouant. Il reprend toute la collection et trie les vides et les pleines.
Exemple 2 : Damien en GM1 prend une boîte, déjà remplie. Il découvre le bruit de l’allumette dans la boîte. Il secoue une autre, et recommence. Il fait un tri

fondé sur le bruit, secoue mais n'organise pas spatialement (ne conçoit pas) la collection des boîtes remplies. Il met alors deux allumettes dans une boîte.
Constats :

- Le bruit est un événement (qui peut avoir un caractère ludique évident).
- Il peut devenir une propriété qui caractérise un nouvel objet : boîte avec allumette.
- Il peut être un moteur de tri de ces objets afin de constituer une nouvelle collection.
- Il peut, en inter-action avec une organisation spatiale, être une aide au contrôle de l'énumération.

L'élève qui ne se fonde que sur le bruit pour trier, sans mettre à l'écart les boîtes remplies (donc sans contrôler la nouvelle collection des boîtes remplies), est devant une tâche très coûteuse et peu fiable. Par exemple, nous avons constaté que plusieurs élèves utilisaient la technique du secouage, mais pas systématiquement. Ils mettaient alors deux (ou plus) allumettes dans une boîte. Enfin, pour décider que la tâche est terminée, il faut être sûr que toutes les boîtes ont eu une allumette, il faut donc les secouer toutes, mais la question se pose à nouveau d'explorer la collection de façon exhaustive !

En conclusion, contrairement à une première analyse qui pourrait en être faite, le « secouage » d'une boîte n'est pas suffisant pour réussir. Il ne constitue pas une stratégie permettant totalement l'évitement de l'acquisition du savoir visé (constitution d'une collection par pratique énumérative). Toutefois, par le contrôle même incomplet qu'il permet, il augmente la probabilité de réussir sans avoir de procédure énumérative bien aboutie.
Analyse du passage du jeu 1 au jeu 2 (passage de 8 à 20 boîtes) :
Nous faisons l'hypothèse que le passage de 8 à 20 boîtes permettra de mieux expliciter les stratégies de contrôle et de constitution de la collection des boîtes pleines.[3] Les résultats examinés plus haut ont montré qu'il n'y avait pas de différence significative sur les résultats si l'on prenait en compte le travail sur deux essais.

Les résultats en GM2 sur les trois essais du premier jeu et les deux du second sont les suivants :

[3] Mais nous n'avons pas préparé les élèves à ce projet : les questions « Est-ce que tu saurais faire avec plus de boîtes », de même que « qui est-ce qui pense qu'il peut gagner ?», n'ont pas été proposées aux élèves.

STRATÉGIE	PRÉCISIONS	Jeu 1	Jeu 2
- Pas de stratégie observée		2	2
- Mise à l'écart des boîtes remplies.			
	- Sur la table	10	8
	- Sur la table et alignées, ou en bordure de table.	0	1
	- Sur la table et alignées et/ou empilées	8	11
- Repérage d'un chemin, a priori, permettant une exploration exhaustive de la collection première		2	
	- L'élève replace la boîte remplie à sa place initiale.		
	- L'élève ne se préoccupe pas de la place de la boîte remplie.	5	5
- Organisation préalable de la collection des boîtes vides.			1

6 élèves secouent les boîtes en Jeu1. 12 élèves secouent les boîtes en Jeu2 (à des moments différents de l'activité).

Une cause d'erreur repérée est une rupture dans la suite : (B : boîte ; A : allumette)

B-A, B-A, B-A, B-A,…

ou la suite A-B, A-B, A-B, A-B, …

Par exemple, la suite :

B-A, B-A, A-B-A, B-A.

conduit à la mise de deux allumettes dans une boîte ou à l'oubli d'une allumette, selon le moment où se fait la rupture.

Exemple : Tristan organise la deuxième collection par rangées de 4. Il effectue un empilage sur un plancher de 4x2 qui délimite l'espace de la deuxième collection. Mais il regarde ce que fait la maîtresse et, à la troisième boîte, il place une allumette puis une autre.
C'est le couple (allumette, boîte) qui a été rompu, le couple (boîte, allumette) se greffant, d'où deux allumettes dans la boîte.

Nous remarquons que la phase de validation est un moment au cours duquel les élèves :
- pensent qu'il est nécessaire d'ouvrir les boîtes qui restent, même après avoir ouvert une boîte qui ne contenait pas d'allumette ou qui en contenait plus d'une ;

- peuvent signifier les conditions de la réussite ou de l'échec.

Conclusions :

- le passage de 8 à 20 boîtes ne modifie pas significativement les résultats des élèves, en terme de réussite échec ;
- les nouvelles contraintes ont permis l'émergence de stratégies d'organisation plus marquées (empilages, mises en ligne, bordure de table) ;
- la phase de validation est très fastidieuse.

Analyse des phases collectives

Questions de logique

La première phase collective (à la suite du jeu 1) a permis :

- de formuler une stratégie (« il faut mettre de côté »). Cette stratégie est formulée huit fois au cours de l'entretien.
- de prendre conscience de toute la logique en acte qui se développe derrière cette expérience et qui n'a pas été prise en compte au départ ou qui a été sous-estimée. « Perdu», « perdu un peu plus », « gagné », « gagné pour cette boîte ». Les élèves passent de l'énonciation de la valeur de vérité d'une proposition ("il y a une allumette dans cette boîte") à l'élaboration conjointe de prédicats : « s'il existe une boîte sans allumette ... » « il y a une allumette dans cette boîte... », ainsi que d'un calcul sur ceux-ci : « donc il a perdu », « pour l'instant c'est juste ».

Il y a là un travail à poursuivre. Nous pensons que cette construction se fait dialectiquement avec la construction du concept de collection. L'hypothèse étant que la formulation de tels prédicats et des calculs sur ces prédicats participe à la constitution de la collection, que cela **« cimente » les objets pour en faire une collection**.

Dans les moments collectifs, nous avons constaté que les termes employés n'avaient pas de statut très clair. Par exemple, les termes « vérifier », « réussir », « échouer », qualifient tantôt une réussite locale (une allumette dans cette boîte) tantôt la réussite ou l'échec à l'activité (« tu as échoué »). L'enseignant doit alors improviser un discours qui tourne autour des prédicats sans qu'un contrat précis sur les exigences n'ait été négocié.

Le tableau suivant fait état des comportements attendus, des savoirs visés du point de vue du travail sur les propositions et les prédicats, et du point de vue des interventions du professeur.

moment étudié	**analyse logique**	**analyse des comportements**	**savoir qui peut être visé**	**intervention possible**
secoue les boîtes (secouer avant l'action , secouer après l'action)	l'information donnée par le bruit permet de savoir s'il y a une (ou plusieurs) allumettes dans la boîte.	Permet de s'assurer de la présence d'une allumette.	Secouer avant permet de contrôler s'il y a présence d'une allumette. Secouer après ne permet pas de contrôler si la boîte était vide.	
Découvrir une boîte vide.	Signifie l'échec au jeu	Peut signifier échec pour cette boîte. (proposition) Peut signifier échec au jeu (prédicat)	Il suffit qu'une boîte ne contienne pas d'allumette. Il n'est pas nécessaire de vérifier pour celles qui restent.	« Il suffit » peut être repéré dans l'action (s'interrompt-on lors de la validation au cas où une boîte vidée apparaît ?). Peut être repéré dans le langage.

Questions de contrat didactique

Au cours des observations, nous avons constaté des difficultés rémanentes pour les enseignantes. Nous décrivons ces difficultés, sans pour cela approfondir l'étude :

- Tout d'abord, le déroulement de ces séances pose la question de l'enjeu. Quelle forme d'enjeu faut-il maintenir pour que les élèves prennent ce problème à leur compte ? La situation permet à l'enfant de savoir s'il a échoué ou réussi. A la suite de l'ouverture d'une boîte, quelle attitude le maître doit-il avoir ? Il faut que celui-ci montre que réussir et échouer ne sont pas deux issues auxquelles il convient d'attribuer la même valeur. Or les enseignants en maternelle rechignent à tenir ce contrat, pensant décourager l'élève.
- Pour conduire cette phase, nous avons constaté que c'est en l'interrogeant sur ce qu'il compte faire la prochaine fois, et non sur ce qu'il vient de faire, que l'élève prend petit à petit le projet à son compte. Cela suppose chez l'enseignant qu'il envisage l'apprentissage se faisant non seulement dans les séances elles-mêmes, mais aussi d'une séance à l'autre, y compris chez de jeunes enfants.

L'anticipation d'une séance à l'autre nous semble être un élément du contrat didactique.
- La négociation du contrat n'est pas simple : l'enseignant est gêné lorsqu'il s'agit de trancher dans certaines circonstances. Par exemple : l'enseignant n'ose pas dire à T. qu'il a une bonne méthode mais qu'il s'est trompé parce qu'il a été distrait à tel moment.
- L'enseignant est souvent gêné lorsqu'une réponse juste a été donnée : le silence est interprété comme une annonce d'erreur.
- Le traitement des erreurs dans la relation didactique est aussi un point délicat ; certaines erreurs que les élèves font peuvent être traitées en classe, d'autres non. Telle erreur d'un élève peut être difficile à traiter en public. Les niveaux d'explication n'étant pas les mêmes d'un niveau de savoir à l'autre, une explication aisée à donner à un élève s'avérera intenable à entendre pour un autre élève. Le risque, pour l'enseignant, est de se contenter d'une interprétation scolaire, de se ramener au projet scolaire, alors que bien souvent il s'agit de conceptions plus fines en jeu. Il y a donc des erreurs que l'on a intérêt à corriger en public, d'autres qui se règlent avec un seul élève, et d'autres qui ne peuvent même pas être débattues (savoirs absents).

Analyse du jeu 4 : vers une situation a-didactique de formulation

Pour des raisons déjà évoquées, nous avons ramené le nombre de boîtes à 15. Les résultats ne sont pas significativement différents des précédentes séances. Le secouage est devenu un rite, certains élèves sourient, d'autres essaient de reconnaître le bruit de deux allumettes par rapport au bruit d'une allumette.

La phase de débat ne provoque pas de formulation interne à la situation : dans notre dispositif, un enfant regardait un autre effectuer le travail. Était-ce utile? Il nous semble que l'on se fait beaucoup d'illusions à ce sujet. Plusieurs rôles sont possibles pour l'élève observateur. Prenons deux rôles possibles courants : un élève regarde un autre travailler en vue de faire la même tâche, ou bien en vue de prévoir si celui que l'on observe a réussi ou non. Dans le premier cas, certains enfants prennent cette place comme une place dans une file d'attente. Ces enfants n'ont pas d'engagement, pas de responsabilité dans l'action ou dans la formulation. Dans le deuxième cas, bien souvent l'élève observateur ne peut pas expliquer les raisons d'un éventuel échec. Il répète alors une phrase toute faite : « il a oublié une boîte » et donne alors une (sa) méthode pour « mieux réussir ». Il est rare qu'un élève puisse analyser ce qui a échoué dans la méthode de l'autre. Un autre type de rôle, par une organisation du travail à deux, permettrait de rencontrer un nouveau problème dans lequel la connaissance interviendrait obligatoirement sous forme d'un langage. Il faudrait pour cela que l'équipe soit formée pour résoudre une tâche commune. Donnons un exemple de fonctionnement possible. Consigne *« Vous allez travailler à deux. À un moment donné, je demanderai à celui qui a commencé de laisser sa place à l'autre pour qu'il termine. Vous pourrez vous parler. Qui pense pouvoir réussir ? »*. Dans une perspective de travail sur le marquage (jeu 5 : voir ci-après) , l'interruption du jeu pourrait faire intervenir un marquage (un type de marquage, un repérage). Pour cela, il suffirait de préciser dans la consigne si les consignes de passage de relais peuvent s'effectuer par écrit ou oralement.

Analyse du jeu 5 (boîtes bloquées sur un plateau)

La construction du dispositif nécessite que l'on prenne en compte plusieurs problèmes :

- les boîtes sont collées sur un tableau blanc ;
- On peut ouvrir les boîtes sans être gêné (en vue de la validation) ;
- La disposition de la collection est choisie sans structure spatiale évidente.

Nous avons choisi quatre stratégies qui, à leur façon, contribuent à mettre en évidence la complexité d'une énumération. Nous définissons comme rupture le moment de l'activité de l'élève pendant lequel il devra abandonner la collection du regard. Pour réussir l'inventaire de la collection, l'élève doit donc mettre en mémoire la collection déjà constituée (boîtes-allumettes).

Élève	action bouclée	ruptures visuelles	charge mémoire	contrôle
S.	Ai : (rupture), prendre une allumette, choisir une boîte non entourée, mettre l'allumette, (rupture) prendre le stylo, entourer, (rupture) poser le stylo, Ai+1 : prendre une allumette, etc.	3 ruptures par boucle, autant de boucles que d'éléments N de la collection.	A partir de A2, l'élève doit mémoriser la dernière boîte entourée non encore remplie.	Contrôle par une mémorisation spatiale. N contrôles à effectuer
M.	Ai : entoure n boîtes (ne pose pas le stylo) , (rupture) prend n allumettes et met n allumettes. Ai+1 : entoure n boîtes, met n allumettes.	(n=2) 2 ruptures par boucle. N/2 boucles.	A partir de A2, l'élève doit mémoriser les n (n=2) dernières boîtes entourées non encore remplies.	Contrôle par une mémorisation spatiale. N/2 contrôles à effectuer.
E.	A1 : met une marque au pied de chaque boîte. Ai : met une allumette, efface la marque correspondante. (rupture) Ai+1 : met une allumette, efface la marque correspondante.	Une rupture par boucle	Il n'y a rien à mémoriser.	Aucun contrôle à effectuer.

C.	Ai : (rupture), prendre une allumette, choisir une boîte non entourée, mettre l'allumette, (rupture) prendre le stylo, entourer, (rupture) poser le stylo, Ai+1 : prendre une allumette, etc.	3 ruptures par boucle. Autant de boucles que d'éléments N de la collection.	A partir de A2, l'élève doit mémoriser (spatialement) la dernière boîte entourée non encore remplie.	Clément laisse la main sur la boîte. Ou bien il garde les yeux dessus.

Selon les démarches adoptées, le nombre de ruptures (qui contribue à la définition de la complexité de la tâche) varie de un à trois par boucle.

Conséquences sur la complexité, intérêt pour le comptage. Reprenons la situation fondamentale de l'énumération, cette fois sous la forme proposée par un logiciel [Briand J., Brousseau G., Oyallon J.L., 1995]. Le logiciel propose à l'élève de parcourir visuellement une collection de quelques objets. Le pointage (mémorisé par la machine) de chacun des objets inventoriés une fois et une seule est la solution du problème posé. Il n'est pas nécessaire d'effectuer une autre action que le seul passage d'un objet à l'autre. A la différence du logiciel, la situation des boîtes d'allumettes nécessite que l'enfant prenne, à chaque fois, en un lieu précis, les allumettes. Mais les boîtes sont déplaçables. Les élèves mettent ceci à profit pour dépasser la difficulté de la prise des allumettes. Il reste à ne pas commettre d'erreur dans la suite séquentielle allumette-boîte-allumette-boîte, etc. Par contre, la situation des boîtes fixées va créer les ruptures étudiées précédemment. Le marquage ajoute, provisoirement, une difficulté. Dans le cas où les boîtes sont déplaçables, le contrôle s'exerce par la force des choses puisque la boîte concernée est le plus souvent tenue en main.
On pourrait donc s'interroger sur l'intérêt à rendre la situation aussi difficile, puisque le but est de construire des situations d'énumération qui favorisent ultérieurement le comptage de petites collections. En effet, cette situation met en œuvre des procédures d'inventaire plus complexes que celles qui seront nécessaires au comptage. Le parcours exhaustif d'une collection montrée n'exige pas que l'on quitte des yeux la collection montrée en passant de l'un à l'autre de ses éléments. Dans le travail que nous venons d'étudier, seule la stratégie de C. permet, par un marquage « au préalable », de diminuer la complexité et de la rendre égale à celle qui est rencontrée lors de l'activité de comptage. Nous pensons toutefois que ce travail d'organisation de la tâche constitue en soi une activité cognitive intéressante.

Conclusion

Notre souci était de faire fonctionner des situations a-didactiques adaptées à l'enseignement de l'énumération de collections visibles dans le contexte de l'acquisition des premiers nombres, afin de transformer l'énumération en objet

de savoir. C'est pour cela que nous avons organisé l'ingénierie que nous venons de décrire. Nous pensons avoir réussi dans ce domaine du pré-numérique et contribué à identifier les savoirs qui peuvent être pris en charge par l'école maternelle, sans pour cela « faire du cours préparatoire avant l'heure ».
Les observations conduites ont montré un champ de recherches à effectuer au niveau de l'école maternelle. Cela concerne l'organisation de situations de formulation provoquant des activités spontanées de logique. Il y a là (au moins) deux aspects : la situation elle-même et les modalités de vérification du résultat qui sont accompagnées d'un discours, difficile à mener parce qu'il fait appel à des questions de logique en acte. Dans ce cas, nous avons repéré trois niveaux de discours[4] : celui de l'action (rapport technique), celui du vocabulaire d'action pour parler de l'action (rapport technologique), celui de l'énonciation de règles de généralités, des déclarations (rapport théorique). Or dans certaines phases, l'enseignant doit agir sur ces différents registres, de façon empiriste. Nous sommes persuadés qu'un travail dans ce domaine pourrait contribuer à faire progresser les élèves dans l'apprentissage de l'argumentation fondée sur des situations qu'ils maîtrisent.

[4] En nous référant à l'organisation praxéologique décrite par Chevallard Y.[Chevallard Y.,1997]

Appendice

A la suite de l'étude, décrite plus haut, nous avions décidé d'organiser le travail en moyenne et grande section selon un nouveau plan tenant compte des résultats. Voici le nouveau plan de travail actuel :

	Configuration	**raison des choix**
JEU 1	8 boîtes déplaçables	
JEU 2	8 boîtes déplaçables. 2 élèves. Un qui observe. Tâche interrompue.	Modifier le rôle de l'observateur.
Première phase collective	Simuler des phases de validation dans le but de faire formuler plus précisément.	Faire formuler les stratégies, Faire anticiper un résultat
JEU 3	15 boîtes déplaçables. 2 élèves. Le deuxième n'observe pas. Consigne orale du premier au deuxième au moment de la passation de rôle.	Faire formuler sur l'énumération et la constitution des collections.
JEU 4	15 boîtes déplaçables constituées de boîtes de différentes formes et de couleurs différentes.	Faire travailler sur les classifications croisées.
JEU 5	15 boîtes non déplaçables. Le deuxième n'observe pas. Traces écrites sur tableau pour le récepteur au moment de la passation de rôle.	Faire formuler, instituer des résultats sur l'énumération et les procédures de marquage.

Bibliographie

BRIAND J. (1985) *« Logiciels d'enseignement et situations didactiques »*. Mémoire de DEA Bordeaux I.

BRIAND J. (1993) *"L'énumération dans le mesurage des collections »*. Thèse Bordeaux I

BRIAND J., BROUSSEAU G., OYALLON J.L. (1995) : logiciel *« A nous les nombres »* Profil ed. PARIS.

BRIAND J. (1999) "Contribution à la réorganisation des savoirs pré-numériques et numériques" *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 19-1. la pensée sauvage Grenoble.

BRISSIAUD R. (1989) *"Comment les enfants apprennent à calculer ?"* RETZ, Paris.

BROUSSEAU G (1984) "*L'enseignement de l'énumération*" Congrès C.I.A.E.M. Adélaïde.

BROUSSEAU G. (1986) "*Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*". Thèse d'état Bordeaux I .

BRUN J. (1994) « Evolution des rapports entre la psychologie du développement cognitif et la didactique des mathématiques ».in *"Vingt ans de didactique des mathématiques en France*" (Artigue, Gras, Laborde, Tavignot). La pensée sauvage, Grenoble.

CHEVALLARD Y. (1997) "Familière et problématique la figure du professeur". *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 17- 3. la pensée sauvage Grenoble.

CONNE F. (1993) "Savoir et connaissance" *Recherches en Didactique des Mathématiques* : RDM vol 12/2.3 la pensée sauvage Grenoble.

DIGNEAU J.M. (1985) "*Le saut informationnel*". Mémoire de DEA Université Bordeaux I.

PIAGET J. (1955) "*De la logique de l'enfant à la logique de l'adolescent*" PARIS.

Viv(r)e le triangle à l'école maternelle

Claude Rimbault

Extrait de Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques - Cahors 1991.

Cet article a pour but de sensibiliser les maîtres au caractère réducteur de certaines conceptions du triangle et de proposer des activités, pour l'école maternelle, sur la notion de triangle.

Mode d'emploi

Ce texte a été le support d'une conférence pédagogique (durée : 3 heures) à l'intention d'enseignants d'école maternelle (40 personnes).

Déroulement

1 - Des feuilles A4 sont distribuées aux stagiaires : "Dessinez-moi, à main levée, un triangle sur votre feuille".

2 - Des feuilles circulaires, découpées dans un format A4 avec un compas coupeur, sont distribuées :

"*Dessinez-moi, à main levée, un triangle sur votre feuille*".

Bien observer la façon dont les stagiaires "reçoivent" la feuille ronde. Passer dans les rangs et faire faire environ un quart de tour aux feuilles rondes et observer les réactions des stagiaires.

3 - "Posez devant vous la feuille A4 et la feuille ronde et n'y touchez plus".

4 - Pour les feuilles A4 et leur triangle, recenser les positions relatives de la feuille A4 sur la table, la nature des triangles dessinés (isocèles, acutangles, obtusangles, rectangles, etc.), la position relative des triangles sur la feuille A4 (triangles "assis", triangles "pointe en bas",...), la place du triangle sur la feuille (dans le haut, dans le bas, dans un coin,…).

Faire le même travail avec les feuilles rondes.

5 - Demander à un stagiaire de dire comment on fait pour calculer l'aire d'un triangle.

6 - Discuter (échanger) avec les stagiaires sur les résultats obtenus en 4 et 5. On peut espérer qu'ils prendront conscience qu'ils ont, le plus souvent, une idée (sociale ?) réductrice du triangle (reliquat de la formation ?).

Par exemple, poser le problème du calcul de l'aire d'un triangle obtusangle dont un côté est parallèle au petit côté de la feuille A4. Même question avec *un triangle obtusangle dessiné sur une feuille ronde.*

7 - Définition du triangle

8 - Quelques activités sur le triangle à l'école maternelle dont on (moi !) pense qu'elles donneront une image moins réductrice du triangle.

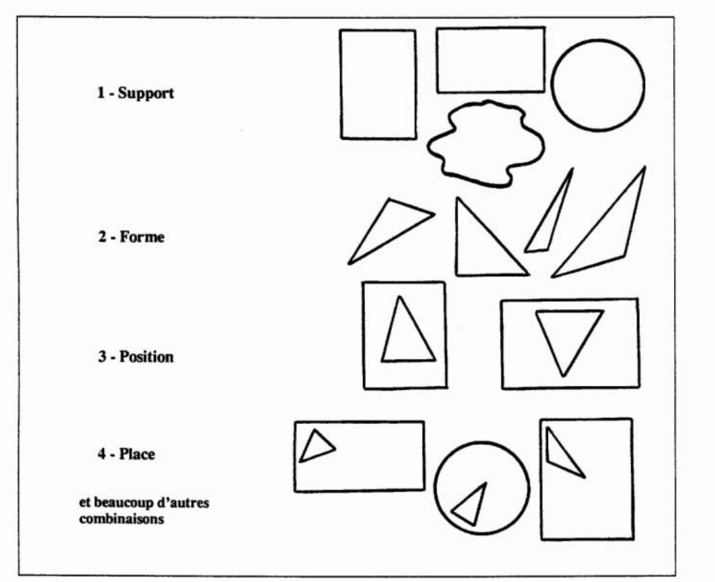
Exemple : l'activité décrite "Des trous et des triangles".

Présenter le matériel seulement et la consigne d'utilisation. Les stagiaires doivent rédiger la fiche d'utilisation : niveau, objectifs, consignes,...
Pourquoi les faces des triangles sont-elles de deux couleurs différentes ? Pourquoi les coins d'un des triangles sont-ils différenciés par des pastilles de couleurs différentes ? etc.

Travail à faire pour toutes les activités proposées par l'animateur.

9 - Demander si, dans l'assistance, quelqu'un a aussi des activités semblables à proposer.

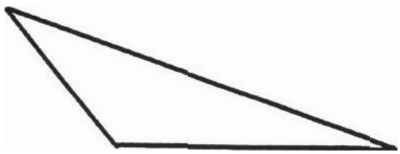
NB : Faire varier, si possible, la nature des supports, la forme, la position, la place du triangle.



Triangle (du latin triangulus) : "figure formée par trois points non alignés et par les trois segments qui les joignent deux à deux." Définition simple, s'il en est ! Pas si sûr.

Dessinez donc sur une feuille A4 non quadrillée un triangle. Presque toujours, le triangle dessiné est acutangle et a un côté parallèle au petit côté de la feuille... et tout le monde sait que "pour calculer l'aire d'un triangle, il faut multiplier LA base par LA hauteur et diviser par deux".

N'y a-t-il donc pas des triangles obtusangles ? Y a-t-il des triangles "assis" d'une part et des triangles"pointe en bas" d'autre part ? Un triangle a-t-il toujours une base ? Peut-il en avoir plusieurs ? Et peut-on calculer l'aire du triangle ci-dessous qui a SA hauteur à l'extérieur ?



Interrogations naïves peut-être mais qui empoisonnent élèves et enseignants.

Connaître le triangle, c'est, au moins, le manipuler, le reconnaître dans n'importe quelle position ; c'est donc donner un sens plein au préfixe TRI du mot triangle ; c'est aussi, mais plus tard, être capable de classer les triangles.

Il apparaît nécessaire de mettre en place dès l'école maternelle des activités permettant aux enfants d'appréhender le triangle. Les activités décrites ci-après trouvées dans les classes sont des débuts de réponse aux interrogations précédentes.

PAPIER POINTÉ

Niveau
Moyenne section.

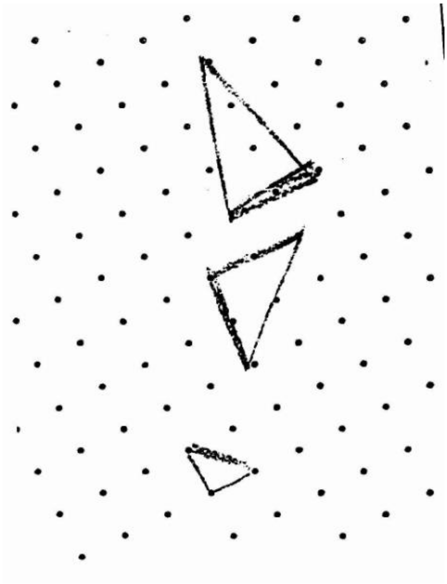
Matériel
Des feuilles de papier pointé.

Consigne
Dessiner des triangles en joignant trois points deux à deux.

Objectif
Prendre conscience que trois points non alignés déterminent un triangle.

Commentaire
Cette activité proposée en grande section peut inciter les enfants à utiliser la règle.

Origine
"Espace et géométrie avec des enfants de 4 à 6 ans" Danièle CHAUVAT et Annick DAVID (IREM de Nantes)



LE SPHINX

Niveau
Moyenne section

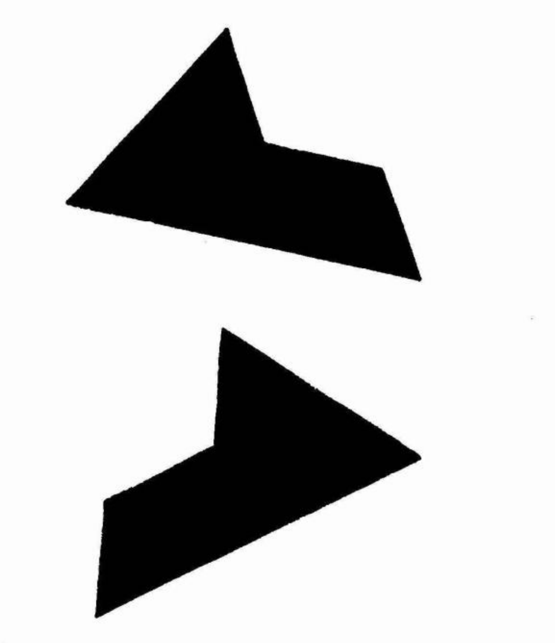
Matériel
- Des triangles équilatéraux de côté 2,5 cm de différentes couleurs (7 à 8 triangles pour chaque couleur).
- Des sphinx (hexatriangles) en carton

Consigne
Recouvrir exactement un sphinx avec des triangles et les coller.

Objectif
Approcher quelques propriétés du triangle équilatéral (rotations,..., le triangle équilatéral pave,...)

Commentaire
En prolongement, un sphinx étant ainsi recouvert, on peut en construire trois autres et assembler ces quatre sphinx pour obtenir un grand sphinx homothétique. (Il faut disposer 3 sphinx côté pile (ou face) et le quatrième côté face (ou pile)). On pourra différencier les couleurs des deux faces.

Origine
Classe de Nicole QUINTIN, I.M.F.A.E.N. (Ecole Marcelin Berthelot – 22000 Saint-Brieuc)



HABILLER DES TRIANGLES

Niveau
Grande section

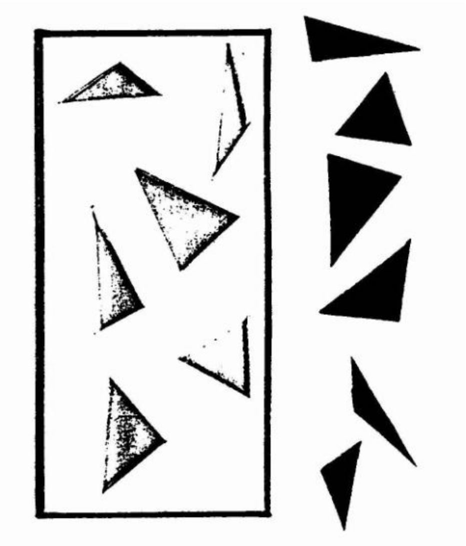
Matériel
- Des triangles tracés sur des feuilles A4.
- Des crayons feutres et des crayons de couleur.

Consigne
Faire un dessin prenant en compte le triangle déjà tracé.

Objectifs
- Se faire une image mentale du triangle.
- Savoir repérer des triangles.

Commentaire
La forme des triangles et leur position relative dans la feuille A4 induisent les habillages des enfants. Cette activité devrait être le sujet d'une étude plus approfondie et scientifique.

Origine
Classe de Michèle DAGORN, I.M.F.A.E.N. (Ecole de Kérénoc - 22 Pleumeur-Bodou)



PAPIER TRIANGULÉ

Niveau
Moyenne section.

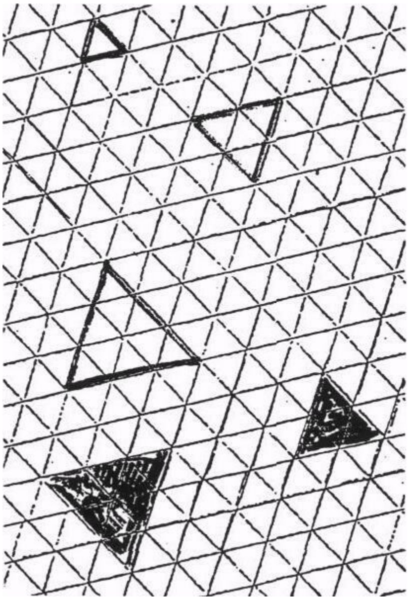
Matériel
- Des feuilles triangulées.
- Des crayons feutres ou de couleur.

Consigne
Dessiner des contours de triangles.
Colorier des triangles (un triangle peut être formé de plusieurs petits triangles).

Objectifs
- Reconnaître des triangles.
- Le triangle équilatéral pave.

Commentaire
On pourra utiliser du papier triangulé avec des mailles plus petites ou plus grandes selon les difficultés de dessin ou de coloriage rencontrées.
Une autre activité intéressante est le pavage d'une feuille de papier avec un triangle équilatéral qu'on déplace en s'en servant comme gabarit

Origine
"Espace et géométrie avec des enfants de 4 à 6 ans" Danièle CHAUVAT et Annick DAVID (IREM de Nantes)



JEUX DE CONTOURS

Niveau
Moyenne section

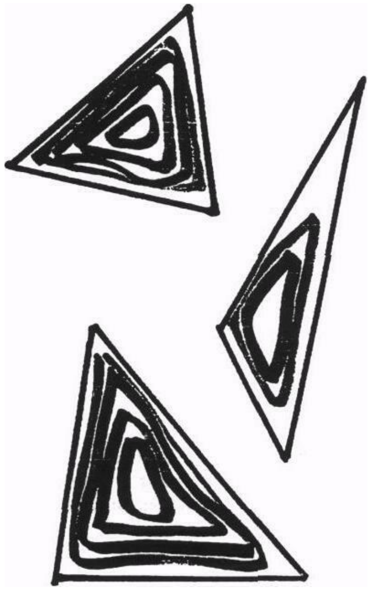
Matériel
- Des triangles de formes différentes sont tracés au crayon marqueur sur des supports différents (feuille A4, feuille ronde, feuille déchirée,...)
- Des crayons marqueurs de couleurs.

Consigne
Suivre, à l'intérieur, le contour des triangles tracés.

Objectif
Savoir dessiner un triangle (ou, du moins, une ligne fermée constituée de trois segments de droite).

Commentaire
En donnant deux ou trois marqueurs de couleurs différentes, on peut obtenir des tracés algorithmiques.
Cette activité proposée en grande section a incité les enfants à utiliser la règle.

Origine
Classe de Michèle DAGORN, I.M.F.A.E.N. (École de Kérénoc - 22 Pleumeur-Bodou)



LE MASSACRE DE PAUL KLEE

Niveau
Grande section.

Matériel
Ce puzzle orienté a pour support 4 cartes postales reproduisant "Rythmes d'une plantation" (1925), aquarelle sur papier de Paul KLEE (1879-1940) visible au musée d'art moderne Georges Pompidou.

Deux triangles rectangles non isocèles ont été découpés dans chaque carte de façon arbitraire. Les 8 pièces à remettre en place sont toutes identiques et peuvent donc prendre place indifféremment dans n'importe quelle case.

Pour réussir, il faut tenir compte de la forme de la pièce et de la continuité des lignes, chaque pièce ayant une place bien déterminée qui est unique.

Consigne
Remettre en place les 8 triangles.

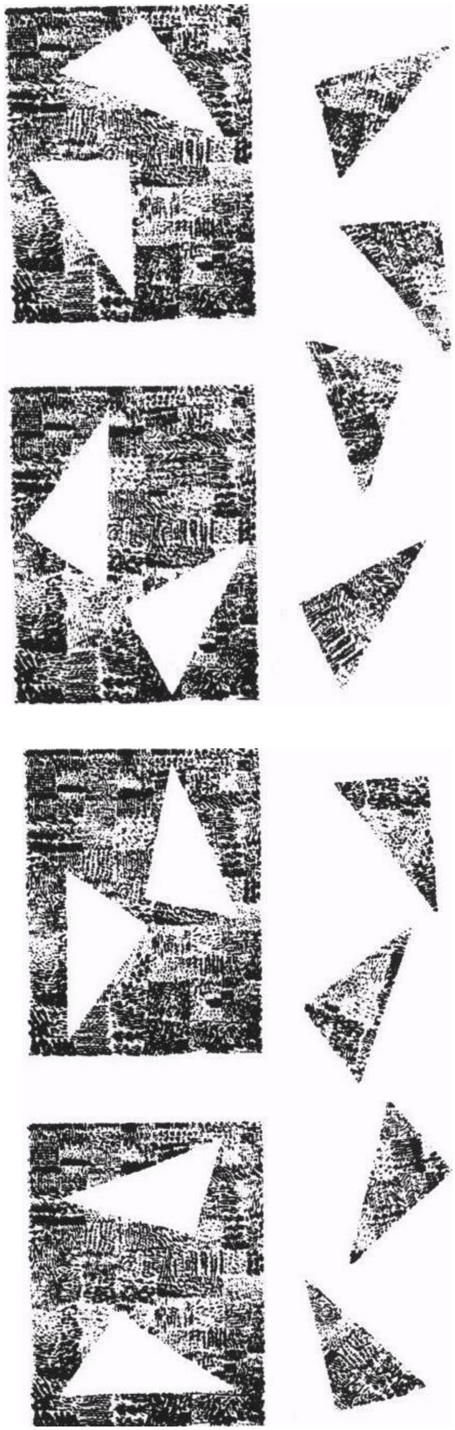
Objectifs
Affiner sa perception visuelle du triangle :
- l'orientation
- la continuité des lignes et des couleurs.

Commentaire
Plusieurs variables didactiques interviennent :

- Si les pièces découpées sont des triangles équilatéraux, seule la continuité des lignes interviendra dans la stratégie de recherche.
- Si le support est une reproduction d'un MONDRIAN, d'un ALBERS ou d'un VAN DOESBURG, aux couleurs vives, c'est le critère de continuité des couleurs qui prévaudra (on connaît les tons neutres de Paul KLEE).
- Si le support provient d'un TILSON ou d'un Frank STELLA ("Les Indes galantes", par exemple), les enfants prendront en compte l'un ou l'autre des critères : lignes, couleurs.

Origine
Claude RIMBAULT in "Bulletin n° 13 des professeurs d'école normale" (IREM de Rennes), d'après une idée de Geneviève ZIMMERMANN.

Enfants de moins de 6 ans



LE BAUTIERY

Niveau
Grande section.

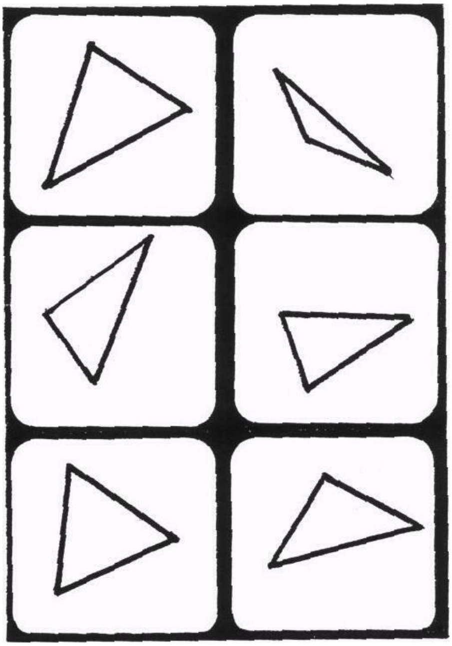
Matériel
- Deux jeux de 6 cartons (des sous-verres de bière, par exemple) sur lesquels sont dessinés des triangles différents.
- Des cartons vierges.

Consigne
Un enfant dispose d'un jeu de 6 cartons.
Il choisit un carton et reproduit sur un carton vierge le triangle qui y figure.
Il transmet sa reproduction à un autre enfant qui, en s'aidant de son propre jeu de cartons doit reconnaître le triangle dessiné par son camarade.

Objectif
Commencer à affiner ce qui peut différencier un triangle d'un autre triangle.

Commentaire
Cette activité de communication est très intéressante mais aussi difficile à bien conduire. Elle met en évidence les différences sur les mesures des côtés et des angles.

Origine
D'après une idée de Thierry BAUTHIER in "Bulletin des professeurs d'école normale" (IREM de Rennes)



MONDRIAN...ITÉS

Niveau
Grande section

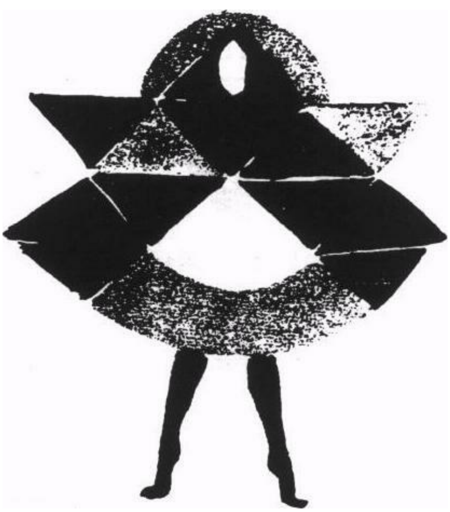
Matériel
- Des cartes postales reproduisant des tableaux modernes, par exemple des Sonia DELAUNAY, où apparaissent des triangles
- Du papier affiche de différentes couleurs
- Des rectangles de carton blanc du format de la carte postale à reproduire

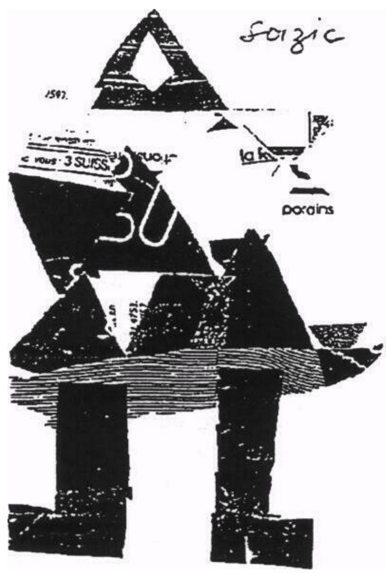
Consigne
Découper et coller des triangles de papier affiche pour reproduire la carte postale.

Objectifs
- Reconnaître des triangles et les agencer
- Découper des triangles

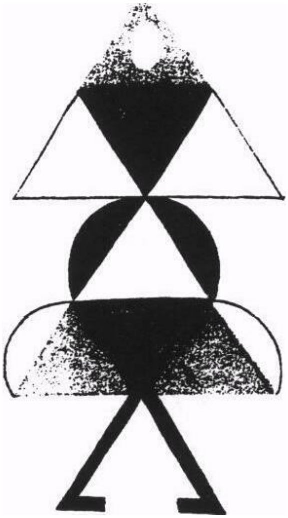
Commentaire
Une activité préalable est le découpage puis le collage libre de triangles. On obtiendra des sapins, des alignements de tentes, etc.

Origine
Article de Michèle KERNEIS (IREM de Rennes Diffusion restreinte)

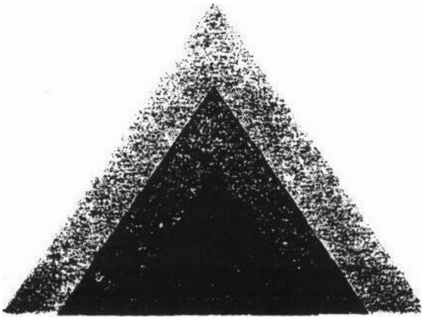




Danseuse Sonia DELAUNAY (1923)



La danseuse jaune pour l'entracte du "coeur à gaz" Sonia DELAUNAY (1922)



Across Kenneth NOLAND (1964)

Enfants de moins de 6 ans

Quelles mathématiques pour le cycle des apprentissages premiers ?

Danielle Vergnes

Extrait partiel des actes du 20ème colloque inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres - Aussois1993.

Cet atelier a réuni une vingtaine de personnes qui ont travaillé sur des documents fournis par les participants. Parmi ces documents, nous reproduisons ci dessous trois thèmes d'activités pour le cycle des apprentissages premiers
Activités pour le cycle 1 :
"Des triangles rectangles isocèles"par Colette Farge,
"Faire six " par Philippe Goudin,
"La météo" par Michel Courrière.

DES TRIANGLES RECTANGLES ISOCELES

L'intention est de faire réaliser aux enfants des activités de pavages, mosaïques, frises avec des triangles rectangles et isocèles qu'ils auront obtenus par pliage et découpage. Avec les jeux du commerce visant les mêmes objectifs, l'enfant est généralement amené à détruire sa production pour ranger le jeu en fin de séance.

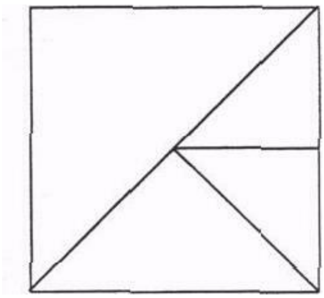
Cette activité a été expérimentée dans une classe de petits-moyens (3 à 4 ans) au cours d'un atelier.

Mise en place de l'activité

On donne aux enfants un carré de 21x21 (en centimètres).
Consigne : "Comment peut-on plier cette feuille pour obtenir 2 triangles ?"
Les trois quarts des enfants ont fait un pliage adéquat. La maîtresse a fait découper le long de la ligne de pliage aux ciseaux.

Consigne: "Comment plier un triangle pour obtenir 2 triangles plus petits ?"
On renouvelle la consigne. Les enfants ont obtenu 4 triangles : 1 grand, 1 moyen, 2 petits.

Avec des élèves de grande section (5 ans), voire CP (6 ans) ou CE1 (7 ans), on peut continuer les pliages et obtenir 4 ou 5 tailles de triangles. Tout au long de l'activité les mots carrés et triangles ont été réutilisés en situation.



La maîtresse a ensuite laissé les enfants faire avec leurs triangles un collage libre (on a obtenu beaucoup de sapins).

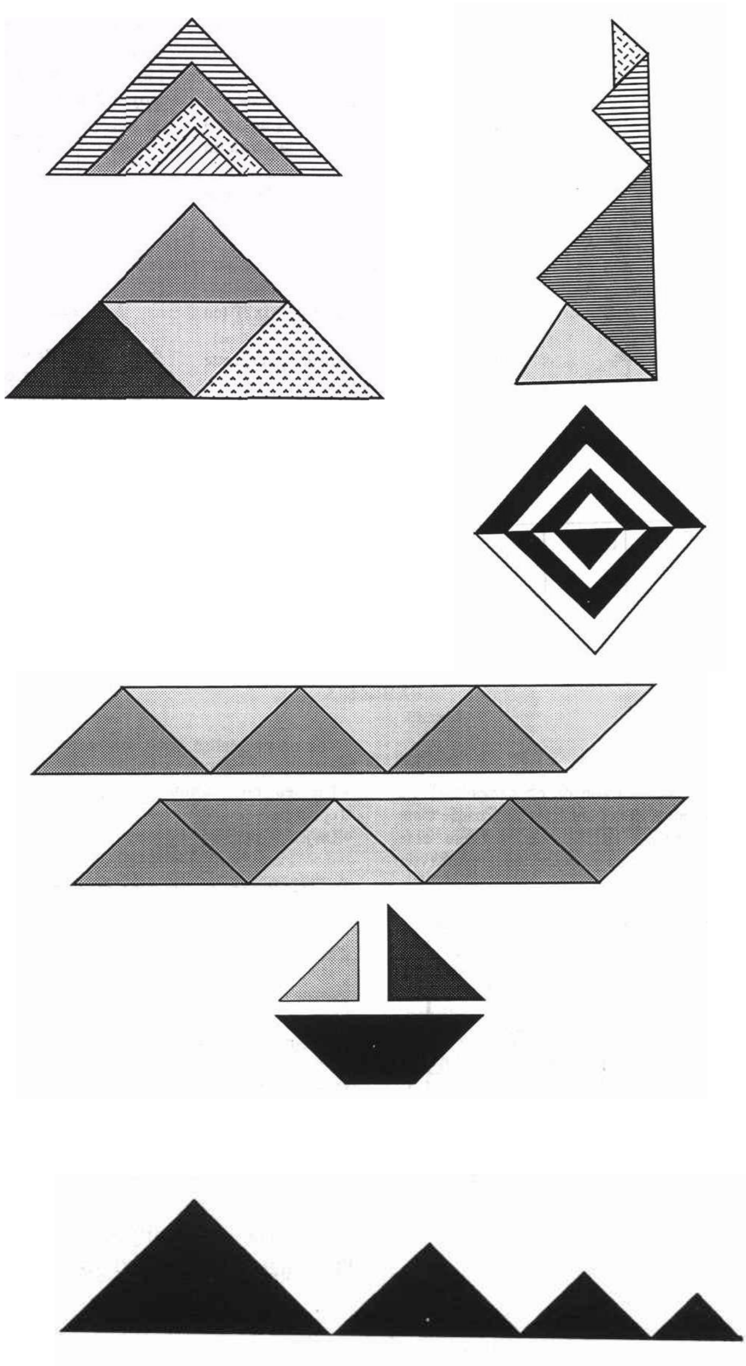
Fabrication de matériel

Constitution d'un stock de triangles à partir de carrés (2, 3, 4 voire 5 couleurs, 3, 4 peut-être 5 tailles).
L'atelier doit être dirigé par la maîtresse pour obtenir des résultats satisfaisants.

Exemples d'activités possibles

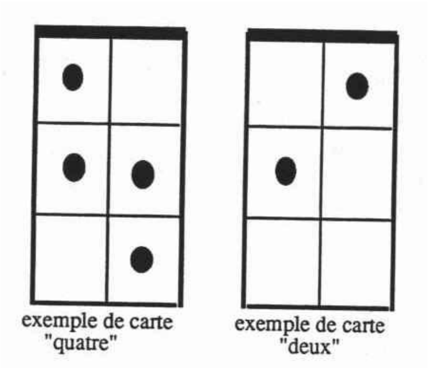
- Classement par taille ou par couleur ;
- Rangement
    - en ligne avec collage ;
    - en superposition avec collage ;
- Reconstitution du support avec deux ou plusieurs triangles en travail libre ou en donnant un gabarit qui peut-être obtenu par pliage d'un carré.
- Pavage libre, puis collage.
- Pavage avec la consigne d'obtenir un carré, puis collage.
- Pavage avec la consigne d'obtenir un grand triangle, puis collage.
- Suites algorithmiques, frises mettant en jeu couleur et orientation.
- Reproduire une figure.
- Faire compléter un dessin par symétrie.
- Agrandissement : faire un dessin avec des petits triangles, le reproduire avec de grands triangles.
- Travail en négatif-positif.
- Pour terminer, on peut faire coller par les élèves sur une grande feuille les triangles qui leur restent.

La liste des activités n'est pas close. Vous pouvez contempler ci-après quelques réalisations, malheureusement privées de leurs couleurs.



FAIRE SIX

Le jeu se compose de 62 cartes dont les dimensions en cm sont 8 x 12. Chaque carte est partagée en 6 cases. Chaque carte comporte une ou plusieurs gommettes (voir exemple).



Remarques

Les cartes sont orientées : un gros trait noir en haut indique la façon de poser la carte sur la table.

Il y a :
6 cartes différentes comportant 1 gommette, 15 cartes différentes comportant 2 gommettes, 20 cartes différentes comportant 3 gommettes, 15 cartes différentes comportant 4 gommettes, 6 cartes différentes comportant 5 gommettes.
Nous avons volontairement exclu la carte "zéro" et la carte "six".
Nous avons réalisé ces cartes avec deux matériaux différents :
- Un jeu en "carton plume" de 3mm d'épaisseur.
- Un jeu en verre organique anti-reflet.

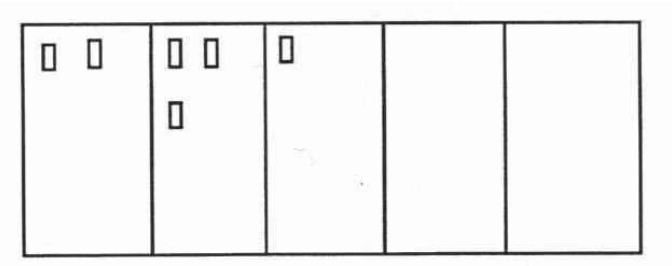
A l'expérience le deuxième matériau est beaucoup plus adapté aux activités proposées (le jeu est plus joli, plus robuste et permet d'utiliser la transparence).
Ce jeu se prête à beaucoup d'activités que nous avons testées dans des classes à différents niveaux: MS/GS et CP.

Exemples de déroulement d'activités

Phase 1

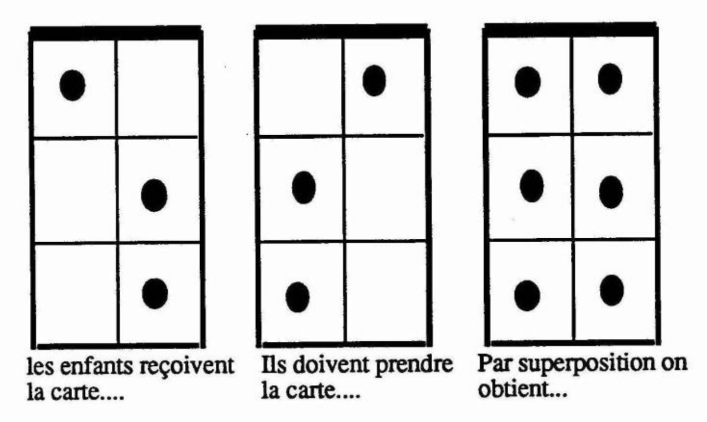
Dans un premier temps nous avons demandé aux enfants de classer les cartes éparpillées sur la table.
Remarque : si on prend soin de ne pas utiliser des gommettes de couleurs différentes, très rapidement les enfants utilisent le critère "nombre de gommettes" sur chaque carte, et se retrouvent donc avec 1 paquet de 6 cartes comportant 1 gommette, 1 paquet de 15 cartes comportant 2 gommettes, etc.

Nous avons utilisé ce classement pour placer les cartes sur un grand tableau.



Phase 2

Nous avons distribué une carte à chacun des enfants avec pour consigne :
"Allez chercher sur le tableau la carte qui complète la vôtre pour faire six".
(avec la bonne disposition des gommettes).



Variante :
Nous avons demandé aux enfants de respecter la même consigne, mais ils n'avaient plus le droit d'emmener avec eux la carte reçue (nécessité de mémoriser le nombre de gommettes de la carte reçue et leurs emplacements).

Phase 3

Introduction d'un dé. Nous avons travaillé avec un groupe de 5 enfants (MS/GS). Chacun à leur tour les enfants lancent le dé et vont chercher sur le tableau une carte comportant autant de gommettes que de points sur le dé. Si un enfant fait "six", comme il n'y a pas de carte "six", il prend autant de cartes qu'il veut pourvu que le total des gommettes fasse "six".
On fait "N" tours, avec à chaque fois la possibilité soit de prendre une carte comportant le nombre exact de gommettes indiqué par le dé, soit d'en prendre plusieurs, le total des gommettes devant correspondre au nombre de points sur le dé.
A la fin des "N" tours, nous avons demandé aux enfants quel était celui qui avait gagné (i.e celui qui avait le plus de gommettes !).

Phase 4

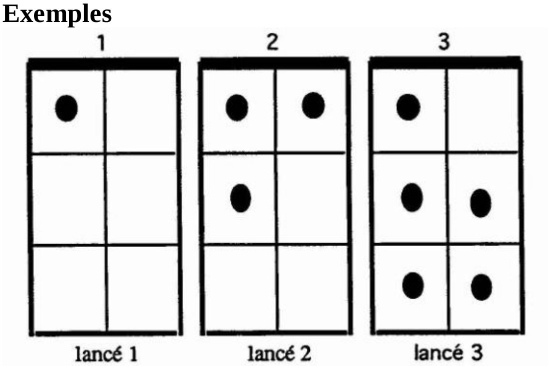
Changement de la consigne.
Même jeu que dans la phase 3 , mais on précise que si un joueur réussit à avoir une paire (deux cartes qui se complète pour faire "six") il pourra ajouter à son total de gommettes, 5 gommettes supplémentaires. Il marquera par exemple :

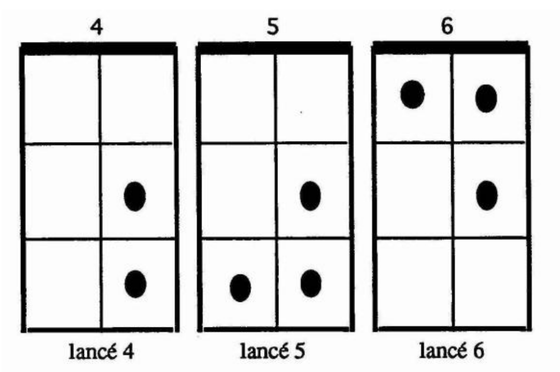
1+3+5+2+3+3+5 (car les cartes '2' et '5' se complètent).

Phase 5

Variantes possibles.
Le nombre de cases peut être adapté au niveau des enfants (cartes à 4 cases ou cartes à 10 cases).
Il n'est pas nécessaire de jouer avec le jeu complet (respecter seulement la complémentarité des cartes).

Exemples





HISTOGRAMME DE LA MÉTÉO

Contexte

Dans de nombreuses classes maternelles ou CP, les enfants complètent chaque jour le tableau "météo" (on retrouve fréquemment l'un des deux modèles ci-dessous) en indiquant pour chaque jour le temps qu'il fait à l'aide des signes qu'ils ont élaborés ou choisis.
On convient de n'indiquer qu'un signe (temps dominant) par jour. De plus pour que le tableau hebdomadaire soit complet, on pourrait en ce qui concerne le mercredi ou le dimanche, demander à 2 ou 3 enfants de faire le relevé chez eux et de venir le noter dans le tableau le lendemain. On adoptera la même démarche pour les petites vacances.

Tableau 1

Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	Dimanche

Tableau 2

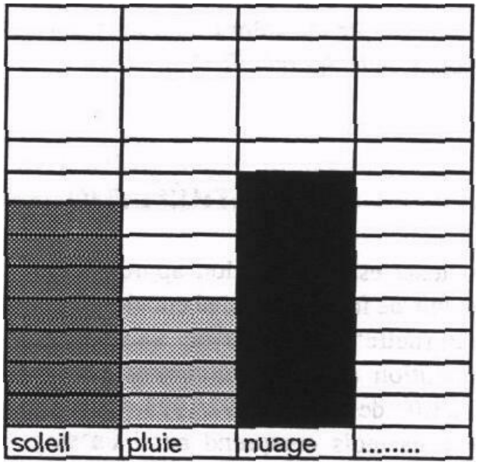
	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendre	Samedi	Dimanch
soleil							
pluie							
nuage							
....							

Histogramme du mois

Principe

II s'agit pour chaque mois de faire apparaître le nombre de jours de soleil, de pluie, de nuages...
Pour cela, le maître prépare un tableau du type ci-dessous :
- dans chaque colonne on a dessiné le code du temps,
- chaque case représente un jour.

Dans l'exemple ci-dessous il y a eu dans le mois 7 jours de soleil, 4 jours de pluie, 8 jours de nuage...
NB. Ces cases peuvent être numérotées ou non selon le niveau de la classe. Les nombres correspondent au nombre de jours de soleil, de pluie..



Modalités de mise en œuvre

Cette activité peut se réaliser dès que le tableau météo a été mis en place, au milieu de la moyenne section par exemple.

Moyenne section

Dans un premier temps et avant d'introduire le tableau, le maître propose des abaques avec des jetons forme et/ou couleur (type ASCO par exemple).
Les enfants choisissent un type de jeton pour désigner chaque type de temps. Chaque jour après le codage du tableau hebdomadaire (tableaux 1 ou 2), les enfants enfilent sur l'abaque un jeton correspondant au temps (une tige par type de jeton).
Dans un deuxième temps, le maître introduit le tableau 3. Chaque jour un enfant colorie une case dans la colonne du temps correspondant.

Grande section

Cette activité est à proposer lorsque les enfants sont familiarisés avec le relevé météo, la lecture de tableau à double entrée, et qu'ils commencent à pratiquer la comptine numérique.
En début de mois, le maître présente le tableau 3 non numéroté et la consigne :
"Chaque jour on colorie une case dans la colonne du temps qu'il fait".
En fin de mois, afin de comparer les différents types de temps au cours du mois on peut être conduit à numéroter les jours de manière à faire des remarques quantitatives (cf. partie exploitation).

Exploitation du tableau pour un mois donné

- Dans ce mois quel type de temps a-t-il fait le plus souvent : soleil ? pluie ? Rangements des types de temps selon leur fréquence dans le mois.
- Comparaison quantitative : combien de jours de soleil de plus (ou de moins) que de pluie ? Comparaison à l'aide des carreaux (aspect cardinal) ou de la file numérique (aspect ordinal) ; lien entre deux après et deux de plus.

Prolongements

Au bout de 3 ou 4 mois, à l'aide des tableaux précédemment établis, on pourra rechercher quel est le mois où il a fait le plus de soleil, le mois le plus pluvieux, etc.
De nombreux autres prolongements peuvent être envisagées, en particulier au CP.

Enfants de moins de 6 ans

Comment analyser un jeu mathématique ?

Jeanne Bolon

Extrait de Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques – Colmar 1993.

L'article propose une liste de questions que l'on peut se poser à propos d'un jeu mathématique, puis les réponses à ces questions concernant un jeu de L. Champdavoine.

1. Les questions

De très nombreux jeux sont apparus sur le marché éducatif. Apprendre à les analyser, apprendre à faire des variantes, sont des activités intéressantes en formation initiale ou continue.

Les questions que l'on peut poser à des personnes en formation sont toujours à peu près les mêmes, d'un jeu à un autre. En voici un exemple pour un jeu faisant intervenir le déplacement d'un pion de case en case sur une ou plusieurs pistes.

1-Lire la documentation sur le jeu :

* quel est le but du jeu pour l'enfant ?
* à combien joue-t-on ?
* quel est l'enjeu, pour l'enfant, de telle ou telle case ?
* comment se termine le jeu ?

2- Qu'y a-t-il à savoir (éventuellement apprendre) pour pouvoir respecter les règles du jeu ? Les savoirs peuvent porter sur le codage, l'organisation des déplacements géométriques, le nombre, la circulation du dé entre les enfants, etc.

3- Le jeu est-il un jeu de hasard (l'enfant n'a pas de choix), un jeu de stratégie (l'enfant subit le hasard, mais il a aussi des choix) ?

4- Après avoir appris aux enfants comment jouer, l'enseignant peut leur proposer une disposition des éléments du jeu, comme une sorte de jeu interrompu : dans les jeux de hasard, il fait parler les enfants sur ce qui serait favorable ou défavorable et expliquer en quoi ; dans les jeux de stratégie, il demande ce que l'on aimerait jouer et pourquoi.

Dans chacun de ces cas, quels savoirs mathématiques l'adulte fait-il émerger ?

5- En supposant que les enfants ont bien intégré l'anticipation décrite au paragraphe 4, prévoir une évaluation individuelle des acquis des enfants. Si elle se fait sous forme de papier-crayon, y a-t-il un apprentissage de la lecture/écriture à faire préalablement ?

6- Un support de jeu est coûteux à réaliser. Pour la majorité des jeux, on peut faire quelques modifications mineures, et, du coup, introduire des variantes qui rendent le jeu plus facile ou plus difficile du point de vue des apprentissages mathématiques[1] Proposer de telles variantes en argumentant.

2. Eléments de réponse pour le "jeu des chemins", de L. Champdavoine [2].

1- Lire la documentation

- L'enfant souhaite gagner pour pouvoir choisir une image : le dernier qui arrive n'a plus le choix.

- On joue à quatre enfants. Toutefois, on peut se limiter à deux ou trois enfants en neutralisant une ou deux pistes.

- Les cases sont toutes équivalentes, à part la couleur qui servira à faire avancer le pion de chaque enfant.

- Le jeu se termine quand tous les enfants sont arrivés à la case de leur piste qui jouxte la case centrale.

2-Le jeu oblige les enfants à :

- lire la face supérieure du dé,

- mettre en rapport la couleur d'une face et une ou plusieurs cases de la même couleur,

-jouer à leur tour (ce qui est difficile en petite section, puisqu'il faut toujours tourner dans le même sens),

- attendre le tour suivant sans jouer (case blanche du dé),

- respecter le sens de la file, depuis les cases près de soi, vers la case centrale,

- aller à la première case de la bonne couleur en respectant l'ordre de la piste.

3- Le jeu est un jeu de hasard, il n'y a pas de stratégie à mettre en œuvre.

4- Le "jeu interrompu" permet d'introduire le vocabulaire : ton pion est *plus près* des images que celui d'Aurélie, la *première case* verte est celle-là, la *suivante* est

[1] Ceux qui ne le permettent pas sont à éliminer !
[2] Mathématiques par les jeux, petite et moyenne section, éditions Nathan 1986, p 18 et 19.

celle-là, qui est arrivé le *premier* ? le *deuxième* ? le *troisième* ? le *dernier* ?

Contrairement à l'indication du bas de la page 19 du livre cité, la régularité des couleurs sur chacune des pistes ne joue pas de rôle particulier, sauf à donner à chaque couleur le même poids. On aurait pu imaginer des pistes avec des fréquences de couleurs différentes, d'une piste à l'autre, sans que cela change la nature mathématique des apprentissages en jeu.

5- Ce jeu est un des premiers que l'on puisse proposer en petite section : une évaluation papier-crayon serait hors sujet. Une évaluation individuelle peut se faire à l'occasion d'un atelier : elle peut porter sur les dénominations de couleur, la lecture du dé, le déplacement du pion vers la bonne case...

6- Le support de jeu peut servir pour un jeu de remplissage avec de petites quantités : 1 ou 2. Le dé de couleurs est alors remplacé par un dé qui comporte trois faces 1 et trois faces 2. Les enfants piochent des pions dans une réserve et les alignent du bord extérieur jusqu'à la case centrale. Gagne celui arrive le premier à la case centrale. Le jeu est alors plus difficile.

Pour des enfants qui ne connaîtraient pas bien leurs couleurs, on peut leur demander de remplir les cases avec des pions de la même couleur que la case, ou *seulement* les cases vertes..., ou *toutes les cases rouges de telle piste,* toutes les cases vertes de telle autre etc.

3. Annexe : la présentation du jeu des chemins

(extrait de « Les mathématiques par les jeux »)

OBJECTIF

Apprendre :
- à jouer chacun son tour,
- à déplacer un pion sur un chemin orienté,
- à associer la couleur d'une face du dé à la couleur d'une case.

RÈGLE DU JEU

L'enfant qui arrive le premier dans la case rouge qui est près de l'image peut choisir une des quatre images posées au centre.

L'enfant qui arrive le deuxième choisit à son tour.

Les joueurs lancent le dé chacun à leur tour et posent leur bonhomme sur la première case rencontrée correspondant à la couleur de la face retournée du dé. Si le dé se retourne sur une face blanche, le joueur passe son tour.

DÉROULEMENT DU JEU

II se joue avec quatre enfants et la maîtresse comme meneur de jeu.

Le plan de jeu est installé par terre sur un tapis ; chaque enfant s'assoit devant un chemin et choisit un petit bonhomme (il faut quatre bonshommes différents).

La maîtresse indique dans quel sens va passer le dé et montre aux enfants comment avancer leur bonhomme sur le chemin. Elle demande aux enfants de montrer où se trouve le départ du chemin et où est l'arrivée.

Elle explique la règle du jeu et comment on choisira les images (il est préférable que chaque joueur en fin de partie ait une image et que l'enjeu ne porte que sur le choix de l'image).

• La maîtresse donne le dé à l'enfant qui va jouer le premier: *« Eric c 'est toi qui commence la partie, lance le dé.»*. Le dé se retourne sur « vert » (la maîtresse donne le nom de la couleur). *« Eric, tu prends ton petit bonhomme et tu le fais avancer sur le chemin jusqu 'à ce que tu trouves une case de la couleur du dé. Et maintenant tu passes le dé à Isabelle ».*

• Isabelle à son tour lance le dé, qui se retourne sur la face blanche. La maîtresse demande à Isabelle si cette couleur existe sur le chemin. Après avoir constaté qu'il n'y avait pas de case blanche, la maîtresse explique à Isabelle qu'elle ne peut pas faire avancer son petit bonhomme et qu'elle doit *passer* le dé au suivant.

• Lorsqu'un des joueurs arrive sur la case rouge terminale, la maîtresse lui fait choisir une des quatre images. La partie continue entre trois joueurs, puis entre deux joueurs, le dernier se contentant de l'image restante.

• Au cours de la partie, la maîtresse donne à chaque fois le nom de la couleur qui se trouve sur la face du dé et sur la case correspondante.
Remarque : Pour 2 joueurs, utilisez un rectangle de 5 x 32 cm avec 2 chemins opposés.

NOTIONS MATHÉMATIQUES

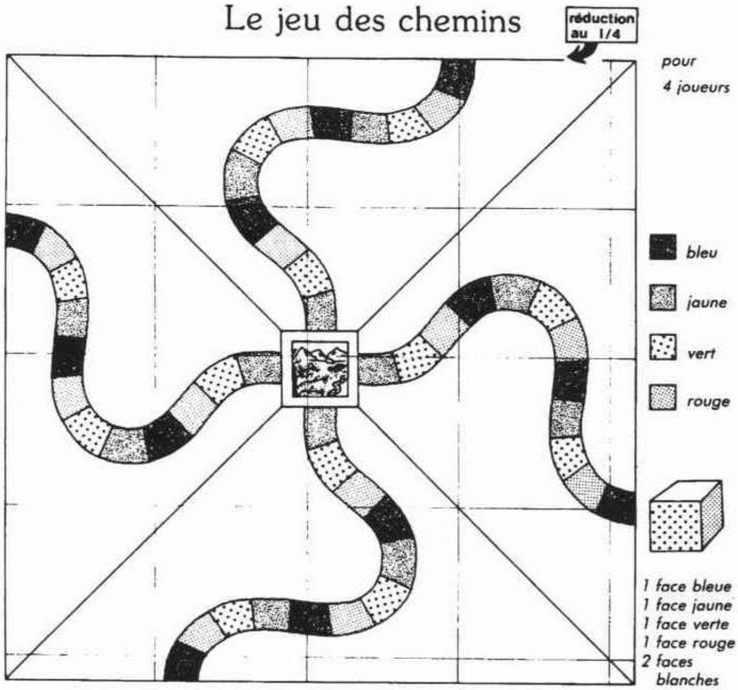
Correspondance terme à terme pour quatre couleurs entre cases du jeu et faces du dé (le dé a une valeur, celle des couleurs).

À chaque couleur correspond une face du dé, mais à chaque face du dé ne correspond pas une couleur, puisqu'il y a deux faces qui ne permettent pas de jouer.

De plus, à chaque couleur du dé correspondent plusieurs cases de chaque chemin.

La répétition cyclique des quatre couleurs forme un algorithme (« une suite de signes qu'ils soient gestuels, oraux ou graphiques est dite périodique si elle est construite à partir d'un élément simple répété. Cet élément simple porte le nom d'algorithme » - J.-S. Daniau).

Le jeu des chemins



MATÉRIEL

Pour 4 joueurs et la maîtresse comme MENEUR de jeu :
— Un plan de jeu carré de 50 cm de côté divisé en quatre parties par les deux diagonales ; sur chaque partie, un chemin de 2,5 cm de large divisé en 12 cases de 3 cm avec une structure cyclique de couleurs : bleu, jaune, vert, rouge.
Ces chemins conduisent à une case centrale sur laquelle on posera quatre images, enjeu de la partie (chaque enfant aura une image, mais le choix se fera par ordre d'arrivée au but).
— Un dé de couleurs avec une face bleue, une face jaune, une verte et une rouge et deux faces blanches (couleur ne figurant pas sur le chemin).
— Quatre petits bonshommes différents (lego ou autre).

Enfants de moins de 6 ans

Bibliographie pour l'école maternelle

François Boule

Extrait de Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématique - Colmar 1993.

Cet article est une bibliographie initialisée en 1993 et réactualisée.

Description d'activités

- Atelier d'Edition d'Auteuil : Situations mathématiques de la P.S. au C.P. IUFM Paris, 1990.
- M. BIDON, C. HOUDEMENT, M.L. PELTIER : Du Petit Ballon au Jeu de Cible. Faire des mathématiques en Grande Section. I.R.E.M, de Rouen, 1992.
- J. BOLON : Pourquoi pas des mathématiques à l'école maternelle, IREM de Paris7, 1997.
- F. BOULE : Manipuler, Organiser, Représenter. A.Colin Pratiques Pédagogiques, 1985.
- F. BOULE : 1, 2, 3, Jouez [Jeux en kit]. M.D.I - Nathan, 1991.
- R. BRISS1AUD : Comment les enfants apprennent à calculer, Ed. Retz, 1989.
- F. CERQUETTI, C. BERDONNEAU : Enseigner les mathématiques à la maternelle, Hachette Education, 1994.
- L. CHAMPDAVOINE : Les mathématiques par les jeux
    1. Petite section et moyenne section. Nathan, 1985.
    2. Grande section et C.P. Nathan, 1986.
- D. CHAUVAT & A. DAVID : Espace et géométrie de 4 à 7 ans. IREM de Nantes, 1980.
- G. DERAMECOURT : Mathématique en G. S., C.D.D.P. de Périgueux.
- ERMEL : Apprentissages numériques (GS), Hatier, 1990.
- Equipe I.N.R.P. et al. : « L'acquisition du nombre », Journal des Instituteurs, Juin 1987.
- D. CHAUVEL, V. MICHEL : Des jeux avec des règles, Ed Retz, 1984.
- M.L. WINNINGER : Des jeux de nombres et de logique à la maternelle, Ed Retz, 1990.
- G. ZIMMERMANN : Activités mathématiques
    1. Le développement cognitif de l'enfant. Nathan, 1985.
    2. Les apprentissages préscolaires. Nathan, 1986.

Études. Recherches

• A. BESSOT, C. COMITI, C. PARISELLE : Analyse de comportements d'élèves de CP confrontés à une tâche de construction d'un ensemble équipotent à un ensemble donné. Recherches en didactique des mathématiques, vol ½,1980.
• M.P. CHICHIGNOUD : Le développement du concept de nombre chez les jeunes enfants. Revue Grand N, n°35, 1980.
• M. FAYOL : Nombre, numération, dénombrement : que sait-on de leur acquisition ? Revue Française de pédagogie, n°70, 1er trim.1985.
• M. FAYOL : L'enfant et le nombre, Delachaux & Niestlé, 1990.
• J.P. FISCHER : Développement et fonction de comptage chez l'enfant de 3 à 6 ans. Recherches en didactique des mathématiques, vol 2/3, 1981.
• J.P. FISCHER : La dénomination des nombres par l'enfant, IREM de Strasbourg, 1984
• J.P. FISCHER : Etude complémentaire sur l'appréhension du nombre, IREM de Strasbourg, 1985.
• R. GELMAN : Les bébés et le calcul. La Recherche n°149, nov 1983.
• I.N.R.P. Recherches Pédagogiques n°78 : Intuitions et construction de l'espace, 1976.
Recherches Pédagogiques n°106 : La représentation de l'espace (5-6 ans), 1980.
• L. LURÇAT : L'enfant et l'espace. Le rôle du corps. PUF, 1976.
• L. LURÇAT : L'activité graphique à l'école maternelle. ESF, 1979.
• L. LURÇAT : L'espace vécu et l'espace connu à l'école maternelle. ESF, 1982.
• C. MELJAC : Décrire, agir, compter. L'enfant et le dénombrement spontané. PUF, 1979.

Revues pédagogiques

• Grand N, IREM de Grenoble
Deux numéros spéciaux Grand N Spécial Maternelle :
Approche du Nombre (tome 1)
Structuration de l'Espace (tome 2).. IREM de Grenoble 1999.

‘’Dix dans un dortoir’’ D. VALENTIN p.7-14, *Grand N* n°67, 2001.
“De l'exploration du quartier à la structuration de l'espace en Grande Section’’ *Grand N* n°69.
• Education enfantine, Nathan.
• Ecole Maternelle Française, A.Colin.

Guides pédagogiques

- *Atout Math GS* (Ed Hachette, 1993) : un guide pédagogique pour utiliser en ateliers du matériel associé.
- *Diagonale GS* (Ed Nathan, 1992) : un guide pédagogique proposant des activités et la possibilité de reproduire des fiches associées. Idem pour *PS* et *MS (Math en Pousse 1995).*
- *Nouvel Objectif Calcul GS Maternelle*, D.Vergnes, (Ed Hatier 1995) : une valise de matériel accompagnée d'un guide pédagogique détaillé.
- *J'apprends les math GS* (Ed Retz, 1995) R.Brissiaud : un guide pédagogique et du matériel associé.

Enfants de moins de 6 ans

À propos de la résolution de problèmes

Marie-Lise Peltier

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Besançon 1997.

Cet article propose des pistes de réflexion sur les diverses interprétations de l'expression « résolution de problèmes » et présente les choix de l'auteur en formation initiale des professeurs des écoles de deuxième année.

Quelques pistes de réflexion sur diverses interprétations de l'expression « résolution de problèmes »

L'expression "résolution de problèmes" me paraît très polysémique, de plus en plus polysémique.
Tout en restant dans son habitat d'origine les mathématiques et les sciences en général, elle s'est répandue dans pratiquement toutes les disciplines, et semble même se constituer en notion de pédagogie générale.

Dans ce domaine de la pédagogie, il s'agit alors d'une expression générique qualifiant un dispositif d'apprentissage contribuant à caractériser un modèle pédagogique parmi d'autres. Suivant les approches ou les courants, on trouve les situations problèmes comme alternative à d'autres modèles d'apprentissage normatifs ou incitatifs chez les uns, transmissifs ou investigatifs chez d'autres[1].
Dans cette dernière acception, la résolution de problème est une notion transversale, peu liée au champ disciplinaire dans lequel elle va prendre sa place.
Elle caractérise alors parfois l'activité de l'élève mis en situation soit de se poser des questions, soit de chercher des réponses, parfois le travail du maître qui doit construire ces situations, parfois le piège dans lequel le maître place l'élève pour le contraindre à apprendre.

Si maintenant nous regardons la notion de "résolution de problème" à l'intérieur du champ des mathématiques, nous trouvons à nouveau des points de vue très divers.

- Pour certains, résoudre des problèmes caractérise par essence même l'activité mathématique. En ce sens, proposer aux élèves de résoudre des problèmes, c'est un peu les mettre dans une posture voisine de celle d'un chercheur en mathématiques. On sait qu'il existe des différences notoires entre les problèmes que se posent et que cherchent à résoudre les mathématiciens, et les pro-

[1] cf. Pensée pédagogique et modèles philosophiques : le cas de la situation problème M. Fabre, dans RFP n° 120 (1997)

blèmes que le maître incite les élèves à se poser et à résoudre. Cependant, il semble raisonnable de proposer un apprentissage des mathématiques en permettant aux élèves de s'approcher progressivement de l'activité mathématique elle-même.

- D'autres mettent davantage l'accent sur l'activité de recherche elle-même. Le maître donne des problèmes aux élèves de manière à développer leur aptitude à raisonner, à émettre des hypothèses, à avoir des idées, à innover. Dans cette acception, c'est l'aspect heuristique qui est privilégié. Certains maîtres proposent alors des synthèses sur différentes manières de chercher, sur différents modes de raisonnement : déduction, analogie, généralisation, estimation et approximation par essais successifs, etc.

- Pour d'autres, parmi lesquels on trouve de nombreux maîtres de l'école élémentaire, l'activité de résolution de problèmes revêt plutôt un aspect méthodologique. On retrouve ici en quelque sorte un point de vue "transversal", à développer dans les différentes disciplines. Or, comme dans l'esprit de nombreux maîtres, "mathématiques" est synonyme de logique et de rigueur, c'est dans le temps consacré aux mathématiques que ces maîtres proposent des activités visant cet apprentissage méthodologique. On trouve alors un travail systématique sur la lecture et le recueil d'informations, la recherche de questions possibles, le tri des informations pertinentes pour la question posée, la recherche d'informations manquantes, l'organisation des informations sous forme de tableaux, de schémas, de graphiques, le traitement de ces informations (il s'agit généralement de traitements faisant intervenir la comparaison, l'ordre, les calculs, éventuellement les tracés), enfin la rédaction et la présentation des réponses (il est souvent difficile ici de parler de solutions, car il s'agit plutôt de réponses à des questions que de solution à un problème).

Les supports choisis pour développer ces compétences (dites transversales dans les textes officiels) sont souvent choisis dans l'environnement plus ou moins bien ciblé des élèves. Plusieurs choix peuvent être faits :

  - Certains maîtres, par le choix des documents supports, insistent sur un des aspects des mathématiques et le développent : les mathématiques sont des outils pour d'autres domaines scientifiques (biologie, géographie, histoire, …).
  - D'autres insistent davantage sur les mathématiques au service de la vie quotidienne, dans le but de préparer l'élève à ce qu'il peut rencontrer à l'extérieur de l'école (achats, dépenses, horaires, cartes et plans).
  - Certains maîtres développent ce dernier point de vue en y intégrant en plus un double objectif : éduquer l'élève en tant que futur citoyen (élections, environnement, graphiques économiques), et en tant que futur consommateur (comparaison de publicités, d'abonnements, etc.)

- D'un point de vue didactique, le problème est central dans le processus enseignement/apprentissage, puisqu'il va permettre aux élèves de construire des connaissances.

Pour assurer cette fonction les problèmes doivent respecter une sorte de cahier des charges important :

- Ils doivent mettre effectivement en jeu la notion dont l'apprentissage est visé.
- Ils doivent permettre à l'élève à la fois d'engager des connaissances anciennes, de les tester, de les éprouver dans le problème, et de les adapter, de les compléter ou de les rejeter si elles ne conviennent pas.
- Ils doivent également conduire l'élève à envisager en partie les nouvelles connaissances que ce problème met en jeu et qui sont justement celles visées par l'apprentissage.

Cet aperçu rapide montre qu'il peut y avoir parfois des divergences importantes sur les attentes des stagiaires en formation initiale ou continue, et parfois même des incompréhensions, si le formateur n'a pas pris soin de mettre au clair, pour lui-même, le point de vue qu'il va adopter pour travailler sur le thème "résolution de problèmes" et de le présenter aux stagiaires.

Mes choix en formation de professeurs d'école

Je ne souhaite pas faire ici une étude critique de telle ou telle prise de position ou de tel ou tel point de vue, tout d'abord parce que plusieurs me paraissent complémentaires, et d'autre part parce que cela aurait nécessité une étude plus approfondie, et un débat au sein de notre groupe de travail à Besançon. Mais il me semble important de dire qu'actuellement lorsque je propose aux stagiaires de réfléchir à cette question de la "résolution de problème", j'entends les faire réfléchir du point de vue de la didactique des mathématiques, en mettant l'accent sur le rôle de la résolution de problème dans le processus enseignement/apprentissage de notions mathématiques.

Les aspects méthodologiques, qu'ils concernent un apprentissage aux différents modes de recherches ou à la lecture et au traitement de l'information, me semblent bien évidemment nécessaires, mais ne devraient pas être confondus, d'après moi, avec l'activité de résolution de problème en tant que processus pour construire des connaissances. Cette confusion est pour de nombreux maîtres source de dérives dont la plus fréquente consiste à placer dans l'emploi du temps de la classe une séance intitulée "résolution de problèmes" au cours de laquelle les enfants font des apprentissages de nature méthodologique, totalement déconnectés des mathématiques ou du moins ne mettant pas en jeu des connaissances mathématiques dont l'apprentissage est visé dans ce niveau de classe tout en proposant aux autres séances de mathématiques un enseignement, souvent de type ostensif, où l'élève a seulement à écouter puis à imiter par des exercices d'application ce que le maître a montré.

Pour développer des compétences méthodologiques chez les élèves de l'école dans le cadre de l'enseignement des mathématiques, il me semble nécessaire de proposer des énoncés qui mettent réellement en jeu un savoir mathématique, en cohérence avec les notions dont l'apprentissage est visé. Ce travail méthodologique ne me semble pas devoir faire nécessairement l'objet d'une séance spécifique hebdomadaire, il devrait être proposé de manière habituelle, dans le cadre des séances ordinaires de mathématiques, et devrait faire l'objet de synthèses méthodologiques de temps à autre.

Dans deux contributions[2] qui suivent, je présente des séances de formation en PE2 ayant pour but de conduire les stagiaires à réfléchir à ce qu'est l'activité mathématique, à ce que j'entends par l'expression devenue slogan "apprentissage par la résolution de problème", aux dérives éventuelles, en articulant ce travail avec l'étude de certains thèmes mathématiques.

Je souhaite faire émerger certaines conditions que doit remplir un problème pour permettre une réelle activité mathématique chez les élèves en contribuant à l'apprentissage d'une notion mathématique bien définie. Pour cela, dans le domaine numérique, je choisis l'étude de la division euclidienne. C'est un thème que les étudiants connaissent généralement assez bien (ce qui me permet de ne pas consacrer trop de temps aux compléments d'informations mathématiques), et qui a l'avantage d'avoir été bien étudié d'un point de vue didactique.

Je choisis ensuite un thème géométrique (la symétrie axiale) car de nombreux stagiaires pensent qu'il est impossible de proposer des problèmes de géométrie à l'école élémentaire. Le problème proposé vérifie les caractéristiques dégagées pour les problèmes numériques. Le choix de la symétrie axiale est argumenté par le fait que cette transformation figure dans les programmes des cycles 2 et 3 et que bien souvent dans les classes, des activités très voisines sont proposées aux enfants de la grande section au CM, sans qu'il y ait de réflexion sur ce que pourrait être une progression sur un thème "longitudinal". De plus il me semble possible de faire prendre conscience aux stagiaires au cours de cette séance, que certaines propriétés de la symétrie axiale peuvent être utilisées implicitement par les élèves dans des tâches de reproduction par pliage (ayant ainsi un statut de connaissances - outils), et peuvent être explicitées et devenir objets de savoir, au cours de la synthèse. Enfin, ce travail me permet de faire un point sur les différents rôles des manipulations suivant les cycles de l'école primaire.

Les séances se réfèrent à une stratégie de type transposition[3]. Elles comportent une courte phase de mise en situation des stagiaires sur le(s) problème(s) et une synthèse composée d'une analyse didactique de la situation et d'un apport d'informations ou d'une organisation des connaissances des stagiaires sur la notion mathématique en jeu dans le problème.

Dans cette synthèse, je mets en avant le savoir visé par le problème et l'activité mathématique de l'élève. Il me paraît en effet primordial, pour éviter les

---

[2] NDLR : une des contributions est présente dans le tome 2 de cet ouvrage, sous le nom « Le napperon » ; la seconde est « le petit Poucet » présente dans les documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Besançon, 1997.

[3] Terme introduit par A. Kuzniak dans sa thèse de doctorat de l'Université de Paris 7 (1995).

dérives que j'ai mentionnées, de développer auprès des stagiaires le point de vue suivant lequel : "on résout des problèmes en mathématiques pour faire des mathématiques, mais aussi pour apprendre des mathématiques".

Au cours du module, j'articule l'étude d'autres thèmes mathématiques avec d'autres aspects professionnels du métier de professeur d'école.

Puis je consacre un temps court, à la fin du module, à une présentation rapide de l'évolution de la place et du rôle accordés aux problèmes dans les programmes officiels de mathématiques des différentes époques.

La résolution de problèmes : une activité qui fragilise l'enfant ?

Yves Girmens - Marcelle Pauvert

Extrait de Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques - Besançon 1997.

Cet article propose une réflexion de fond et ouvre un questionnement sur la difficulté de l'enfant placé dans une situation de recherche.
En présence d'un problème de recherche, l'enfant est déstabilisé : il doit accepter de ne pas pouvoir répondre aussitôt et de se tromper.
Comment faire pour que cette pratique ne soit pas source de difficultés ?
Comment faire pour préparer, en formation initiale, les professeurs des écoles à gérer cette situation autant déstabilisante pour l'enfant que pour le maître?

Qu'entend-on par fragilité d'un enfant ? L'enfant fragilisé est-il en difficulté ?

On peut penser que toute activité où l'enfant est confronté à une situation nouvelle pour lui (où il lui sera impossible de reproduire une conduite éprouvée) a un effet déstabilisant pour l'enfant.

Le moment de fragilité va commencer dés que l'enfant ne retrouve pas de repères connus.

A l'école, certaines activités telles que l'apprentissage d'une notion nouvelle, la résolution d'un problème, vont éprouver "l'équilibre" de l'enfant et vont engendrer des moments d'inquiétude face à l'inconnu.

On demande à l'enfant de tenter une expérience, de risquer une réponse, alors que, précisément, il n'a pas ou peu d'indices pour savoir si la réponse convient ou pas.

Toute situation de recherche nécessite de l'enfant qu'il accepte une instabilité, le risque de se tromper, de ne pas pouvoir répondre.

La fragilité de l'enfant qui est un état naturel par lequel il passe dans toute situation d'apprentissage, sera aggravée par des facteurs tels que troubles psychiques, carences sociales, rapport négatif à l'école ..., elle est susceptible d'évoluer vers une véritable inhibition devant le neuf, l'imprévu : on perçoit cela quand on voit un enfant bloqué !

Au fur et à mesure de la scolarité, l'adaptation demandée à l'enfant se faisant par rapport à un nombre croissant de connaissances, cette fragilité sera de moins en moins bien assumée par un élève qui a mal assimilé certaines connaissances, de sorte que cet élève risque d'être plongé dans un échec permanent.
Des questions auxquelles on ne peut échapper se posent alors :

- L'hétérogénéité des élèves, leur inégalité devant ce qui est inconnu et incertain seraient-elles mieux acceptées et mieux assumées par les maîtres aux cycles I et II qu'au cycle III ?

- Comment faire en sorte que les moments de fragilisation ne contribuent pas à la mise en difficulté de l'élève ?

- Comment un maître peut-il continuer à proposer des situations de recherche à des enfants en difficulté, en sachant qu'il va les placer dans un désarroi qui va révéler leurs échecs ?

- Est-il tenable, pour un maître, de poser des problèmes à des élèves en difficultés ?

- Une meilleure attention à la fragilité de l'enfant dans toute situation nouvelle peut-elle prévenir les difficultés futures de l'enfant ?

Comment préparer de futurs maîtres à accepter que, devant un problème, les élèves hésitent, se trompent et peut-être ne trouvent pas ?

Devant des élèves qui "sèchent", le maître (a fortiori débutant) est souvent déstabilisé : n'est-ce pas pour apaiser cette angoisse qu'il répond en fournissant à l'élève une aide directe de type injonctif ?

Résoudre un problème : une activité insécurisante

Du côté de l'élève :

En présence d'un problème, l'élève est placé dans une réelle insécurité. Il y a en effet plusieurs facteurs qui peuvent contribuer à fragiliser l'élève :

- *le fait qu'on ne peut pas apporter de réponse immédiate* ; il faut accepter de "ne pas savoir", de différer la réponse.

Cette attitude, propre à l'activité mathématique, va à l'encontre de la culture ambiante de l'immédiateté dans laquelle baigne l'enfant.

- *le fait qu'on ne sait pas ce qu'il faut faire* : l'enfant a la responsabilité de prélever des informations, de faire des choix, de s'engager dans des essais, de contrôler les effets de ses choix ...

Il n'y pas de méthode établie ; de plus, l'enfant qui ne parvient pas à entreprendre la résolution du problème commence à douter de lui ...

- *une représentation inadaptée de l'activité mathématique* : beaucoup d'enfants ont acquis la conviction que "pour répondre, il faut appliquer une règle ou faire une opération".

- *le temps imparti est défini par rapport au groupe classe* : certains élèves peuvent avoir besoin de plus de temps que prévu pour s'approprier le problème.

Que ressent l'enfant à qui l'on dit que le temps de recherche est terminé alors qu'il n'a pas eu le temps d'entrer dans le problème ?

- *le fait de se sentir seul* devant une tâche qui le dépasse peut être source de désarroi pour l'élève.

- *la difficulté liée au choix des connaissances à mettre en jeu* : les connaissances les plus récentes sont encore fragiles, pas encore disponibles alors que les connaissances anciennes, plus solides, semblent de meilleurs outils.

Du côté du maître :

Le malaise du maître débutant en face d'élèves en situation de recherche a plusieurs composantes :

- la réticence à accepter que les élèves ne trouvent pas la réponse tout de suite, tâtonnent, hésitent ..., ce qui peut provoquer une tension avec l'idée qu'il se fait de son métier d'enseignant.
- la réticence à laisser suffisamment de temps aux élèves (sensation de "temps perdu").
- la tentation de rectifier les erreurs et de répondre à la sollicitation de l'élève en lui indiquant ce qu'il doit faire.
- l'inquiétude provoquée par une certaine agitation liée à la recherche, ce qui peut le faire douter de sa capacité à "tenir" une classe.
- le désir de faire une correction, ce qui va se traduire, lors du moment de mise en commun, par une inclinaison à ne "montrer" que les réponses qu'il attend (là encore, c'est une certaine conception de son devoir d'enseignant qui l'emporte).

Ainsi, l'activité de résolution de problèmes place tout autant l'élève que l'enseignant dans une position inconfortable et les fragilise tous deux, l'un (l'élève) dans sa position d'apprenant et l'autre, (le maître) dans sa position de détenteur du savoir.

La fragilité de l'élève n'est-elle pas alors une condition normale, inhérente à l'acte d'apprendre ?
Dans cette hypothèse, elle ne demande pas de traitement spécifique mais elle est à prendre en compte dans la pratique d'enseignement.

Quelles pratiques instaurer pour permettre aux enfants de surmonter cette fragilité et d'éviter qu'elle devienne source de difficultés ?

- Mettre en œuvre des dispositifs qui peuvent amener l'élève à modifier son rapport à l'activité mathématique : *rallyes mathématiques*, *ateliers de résolution* de problèmes, problèmes finalisés par la réalisation d'objets, de manière à faire découvrir aux enfants le goût de la recherche, le plaisir de relever un défi.
- organiser, après les moments de recherche, des débats où les enfants pourront présenter leurs idées et les argumenter.
- valoriser et développer le travail en groupes.
- prévoir une gestion de la situation de recherche au niveau du groupe classe (déroulement, rôle du maître) et s'y tenir.
- analyser les procédures possibles et les difficultés que peuvent rencontrer les élèves et prévoir des aides à des moments précis dans le but de "débloquer" les élèves sans détruire le problème (c'est à dire sans transformer le travail de l'élève en tâche d'exécution).
- encourager les élèves à utiliser "des écrits de recherche" et valoriser ces écrits.

- distinguer l'écrit de recherche de l'écrit de communication de la solution.

Des pistes de travail en formation

Comment peut-on aider un maître débutant à gérer cet équilibre entre la nécessité de favoriser la recherche de l'enfant et la nécessité de se construire une identité d'enseignant ?

Comment peut-on aider le maître débutant à mettre en œuvre une pratique qui ne ferait pas de la résolution de problèmes une activité fragilisante pour l'enfant ?

a) agir sur les représentations qu'ont les maîtres des problèmes en mathématiques

Beaucoup de maîtres en formation ont un certain rapport au problème de mathématiques dans lequel on retrouve deux traits dominants :

- la représentation qu'ils ont de l'activité mathématique : "en mathématiques, on apprend des connaissances et on les applique" ; cela les amène à ne voir un problème que comme une situation d'application ou d'entraînement.
- la résurgence d'un certain complexe qu'ils ont éprouvé, quand ils étaient eux-mêmes élèves, en face de problèmes, ce qui les rend réticents à accepter que les élèves "cherchent".

Afin de leur permettre de démystifier ce type d'activité et d'en saisir les enjeux, il semble indispensable de leur faire vivre "de l'intérieur" des situations de recherche.

Une fois la séance terminée, il conviendra d'analyser le déroulement de la séance afin de mettre en évidence les rôles des différentes phases ainsi que la manière dont le formateur a géré ces différentes phases.

Dans les situations proposées, il sera fructueux de changer certains paramètres :

- travail individuel ou travail de groupe,
- moment de confrontation des productions suivi d'un débat argumenté ou d'une correction par le maître ...

afin de permettre aux futurs maîtres de mesurer l'impact et les conséquences des choix faits a priori.

On peut penser qu'un maître ne pourra gérer convenablement une situation de résolution de problèmes que s'il est convaincu, à travers son expérience propre, de la nécessité de fixer et de respecter certaines modalités.

b) permettre aux futurs maîtres de se construire une identité d'enseignant

Mettre en évidence qu'observer les élèves au travail, provoquer des verbalisations et écouter ce qu'ils expriment, apporte la satisfaction (le plaisir) d'être renseigné sur le fonctionnement cognitif des élèves. Cela permet de faire comprendre aux professeurs stagiaires comment l'on peut proposer des problèmes aux élèves, à partir de choix conscients, en s'appuyant sur des critères clairs.

Cela va de pair avec un travail sur la dédramatisation des erreurs, sur le sens qu'on peut leur donner et la manière dont on peut les exploiter.

c) faire travailler sur les exigences de la préparation d'une situation de recherche

Il sera bon de clarifier les critères de choix du problème puis de travailler sur l'élaboration de la consigne, l'organisation, la gestion collective et de prévoir les interventions du maître ainsi que les aides que l'on fournira en temps opportun.

d) aider les futurs maîtres à établir la relation maître - élèves en montrant la nécessité de l'inscrire dans la relation du maître à la classe

- travailler sur la relation d'aide : que signifie aider ? à quel moment aider? comment ?

Faire prendre conscience aux futurs maîtres que la position du maître face à des élèves en recherche est inconfortable :

* d'une part, il y a, chez l'élève qui cherche et qui "sèche", la demande, plus ou moins explicite, que le maître (l'adulte qui sait) l'aide à "faire". Or, comme de son côté, le maître a comme désir profond que l'élève "découvre une piste" et réussisse à résoudre le problème (ce penchant spontané étant exacerbé chez le maître débutant), il a la tentation, par une explication, par la donnée d'indications complémentaires, de mettre l'élève sur la voie et de raccourcir le temps de recherche.

* d'autre part, le maître est désireux de préserver le plus possible le caractère de "problème", aussi s'interdit-il de fournir à l'élève une aide directe, même si par ailleurs il s'efforce de soutenir et de stimuler l'élève dans sa recherche tout en le rassurant.

Afin de permettre aux maîtres débutants d'assumer cette tension, une réflexion pourra être engagée selon deux axes :

1. *l'aide individuelle à un élève en recherche :*

Comment s'adresser à lui ? quels types de questions lui poser pour le débloquer? Comment lui permettre d'utiliser ses erreurs ?

2. *le dispositif collectif d'aide dans un problème :*

Peut-il se résumer à une somme d'aides individuelles ?
N'y a-t-il pas nécessité de prévoir des temps de pause au cours desquels les enfants pourront trouver des aides ?
N'est-il pas indispensable de préparer, a priori, des éléments d'aide, sous la forme d'un support écrit, que l'on gardera en réserve et que l'on délivrera aux élèves en cas de besoin, le moment voulu ?

Comment préparer de tels documents d'aide ? En résumé, jusqu'où le maître peut-il aller dans la négociation pour qu'il y ait encore "problème" pour l'élève?

Il sera possible d'aborder ce questionnement avec les futurs maîtres à l'occasion d'une séance de "travaux pratiques" ayant pour objet de mettre en place, à un niveau donné, un atelier de résolution de problèmes.

- **travailler sur l'activité de formulation orale**

Il s'agit de faire prendre conscience que des sollicitations constantes de la part du maître, suivies de réponses brèves, ne laissent aucune place à la formulation ; mais au contraire, qu'un véritable travail de formulation exige que le maître pose des questions de manière calme et solennelle et qu'il attende de l'élève une réponse sous la forme d'une phrase complètement formulée.

Dispositifs d'aide à la résolution de problèmes

Catherine Aurand - Yves Girmens - Marcelle Pauvert

Extrait de Documents pour la formation des professeurs des école en didactique des mathématiques - Besançon 1997.

La recherche d'un problème est un moment souvent déstabilisant pour l'enfant. La réflexion présentée dans ce document a pour but de montrer qu'à l'aide de certains dispositifs, parfois connus, parfois originaux, on peut aider l'enfant à assumer ce type de situation.
Ce document essaie de faire un inventaire de ces dispositifs , tout en précisant les conditions de leur mise en œuvre.

L'ATELIER DE RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

1- Les modalités

Selon le dictionnaire, l'atelier est un lieu où des artisans, des ouvriers, ou un artiste avec ses élèves, travaillent en commun.

L'atelier est un lieu qui se définit par des outils, des techniques, des savoir-faire au service de la fabrication d'un certain type d'objets ou de produits.

A l'école, l'atelier est un espace où des écoliers travaillent en commun, tout en étant tenus de réaliser une production individuelle : c'est un lieu d'exécution et d'apprentissages techniques mais c'est aussi un lieu d'échanges, un lieu où il est possible de parler, de demander et d'expliquer.

On peut distinguer deux types d'ateliers répondant à des besoins différents :

a- l'atelier à fonctionnement autonome : les élèves y prennent des initiatives, ils traitent les exercices dans l'ordre qu'ils veulent, ils ont le choix des outils à utiliser, ils ont accès à leur cahier ou leur manuel qu'ils peuvent consulter quand ils le désirent, et ils peuvent questionner leurs camarades.

Ainsi, dans un tel atelier, les élèves peuvent travailler, à leur convenance, de manière individuelle ou à plusieurs, mais chacun devra fournir une production personnelle dont il est responsable.

Il convient de bien expliciter aux enfants ce contrat de travail, qui pour eux, est inhabituel.

Dans ce cas, le maître qui n'est pas présent dans les groupes, n'a pas à intervenir et l'activité des élèves lui échappe pour une grande part ; le seul support dont il dispose pour évaluer le travail des élèves est la production écrite (il pourra s'intéresser à l'écrit qui a servi de support à la recherche).

Aussi, dans un atelier autonome, bien qu'on ne puisse compter de manière certaine sur une interaction entre élèves, du fait de l'entière liberté laissée aux élèves, la probabilité d'échanges entre élèves doit être prise en compte, du simple fait que les enfants travaillent au sein d'un groupe.

C'est pourquoi, la dimension de groupe pour l'atelier autonome est importante, et la composition des groupes - ateliers ne peut être faite de manière aléatoire (cf. FIJALKOW (6)).

b- l'atelier dirigé par le maître : l'objectif est alors de permettre à l'élève de surmonter ses difficultés par un travail et une réflexion individualisés sous la conduite du maître. Le maître peut ici provoquer la réflexion des élèves, intervenir sur leurs stratégies et leurs représentations.

Après chaque atelier, il est nécessaire de faire un "retour" sur le travail réalisé afin de permettre aux élèves de faire un bilan et de "partager" le fruit de ce travail.

Le travail en groupes, quant à lui, est caractérisé par le fait qu'une tâche commune doit être réalisée avec le concours de tous les membres du groupe et qu'à l'issue du travail, le groupe devra rendre compte d'une production collective.

On a recours à un travail en groupe lorsqu'on veut favoriser un débat argumenté autour de la recherche d'une solution à un problème et susciter une collaboration entre élèves pour parvenir à une production commune : cela contribue aussi à développer chez les élèves l'aptitude à communiquer, à formuler, à justifier un point de vue, à coopérer (cf. J.P ASTOLFI (1), groupes d'apprentissage, page 170).

Lorsque un maître met en place un travail en groupes, il attend une interaction sociale forte entre les élèves (3).

On perçoit bien que, même si le travail en ateliers se distingue du travail en groupes, puisque contrairement au travail de groupes, on ne demande pas en général de production collective, l'efficacité du travail en ateliers repose pour une grande part sur le fait que les élèves peuvent échanger et communiquer au sein d'un groupe en présence ou en l'absence du maître.

Remarque : Si la structure d'ateliers est largement répandue à l'école maternelle, elle semble peu utilisée à l'école : en témoigne le peu de bibliographie disponible concernant le travail en ateliers à l'école.

Sous réserve d'une transposition prudente, il faut donc s'inspirer des ouvrages concernant les ateliers à l'école maternelle (ex. : Nicole DU SAUSSOIS (4)).

On pourra aussi se référer utilement à des documents concernant le travail en groupes, dont certains aspects sont transférables au travail en ateliers (voir bibliographie ci-dessous).

2- Questions relatives au travail en ateliers

a) Pourquoi à un certain moment choisit-on un travail en ateliers ?

- Après la mise en évidence d'un savoir au cours d'un temps de travail collectif (institutionnalisation), pour permettre à l'élève de s'approprier de manière individuelle les divers savoir-faire liés aux différents contextes où ce savoir intervient.

- Pour placer les élèves en face de problèmes non familiers, pour leur permettre de mettre en œuvre certaines stratégies ou d'acquérir certaines méthodes :

le fait pour l'élève de sentir qu'il n'est pas seul devant une tâche nouvelle et de savoir qu'il peut compter sur les autres ne peut que le rassurer.

Au contraire, un travail solitaire sur un problème inédit est de nature à fragiliser un élève, s'il n'est pas sûr de lui.

b) En quoi le travail en ateliers peut-il être une aide à la résolution de problèmes et quelles peuvent être ses répercussions dans l'apprentissage ?

- Pour un travail en ateliers, il convient de disposer d'un support pédagogique adapté (choix d'énoncés appropriés) qui offre aux élèves des travaux leur demandant des efforts à la mesure de leurs possibilités et qui, tout en tenant compte des décalages dans les apprentissages, permette aux élèves de progresser, en apprenant grâce à l'échange avec leurs pairs.

- On peut, dans un premier temps, proposer des travaux identiques à tous les élèves puis dans un deuxième temps, proposer des énoncés de problèmes identiques avec des données numériques différentes selon les individus ; les échanges (verbaux ou visuels) étant possibles, des transmissions de connaissances peuvent avoir lieu : elles concerneront les procédures et non la réalisation du problème.

Il peut être aussi intéressant d'utiliser des énoncés se référant à la "multiprésentation", proposée par J. JULO, toujours dans le but de s'adresser aux élèves selon leurs possibilités.

- L'atelier, qui est un espace d'initiative et de liberté, où la communication est facilitée, est un cadre propice à la recherche.
- L'enfant qui manque d'assurance peut trouver dans l'atelier une certaine sécurité, ce qui peut l'aider à s'investir sans complexes dans la tâche demandée. En outre, le fait de se trouver dans un petit groupe peut pousser l'élève à être moins "transparent" qu'en classe entière et à oser intervenir.
- Le bilan nécessaire en fin d'atelier doit permettre de revenir sur les difficultés rencontrées et de pointer certains savoir-faire.

c) Quelles sont les limites d'un tel dispositif ?

- Le travail en atelier doit privilégier un contenu mathématique et ne pas se cantonner à des visées méthodologiques (ex. : travaux sur énoncés).
- Le travail en atelier exige qu'un contrat spécifique (voir plus haut) ait été communiqué aux élèves et soit bien compris par eux.
- Pour la méthodologie, il semble souhaitable de laisser les connaissances fonctionner "en actes". Une institutionnalisation (guide ou méthode définie) serait de nature à scléroser ces connaissances et ainsi à les appauvrir.
- Si on permet à l'élève de choisir certains problèmes, il est nécessaire qu'il puisse y avoir de la part du maître un questionnement sur le choix, pour éviter que l'élève ne délaisse toujours les mêmes énoncés.
- Tout travail en autonomie suppose que les élèves disposent de moyens de validation de leur travail : situations elles-mêmes, fiche autocorrective, interaction entre élèves ...
- Le traitement des erreurs éventuelles pourra être réalisé à l'aide d'entretiens individuels avec le maître.

- Il est important de pouvoir identifier ce que les élèves ont appris : peut-on compter sur un transfert des acquis en atelier dans un travail solitaire ?

Remarque :

On trouvera dans l'annexe 1, à titre d'exemple, une fiche d'énoncés proposés par des maîtres lors d'un stage de formation continue animé par Marcelle PAUVERT, pour alimenter un atelier en CE2, en cherchant à favoriser l'autonomie des élèves.

Cette fiche est accompagnée d'un document d'aide qui peut être donné aux élèves afin d'éviter le recours au maître.

3- Constitution d'un atelier : rôle du maître

Pour mettre en place un atelier de résolution de problèmes, il incombe au maître :

- Le choix des objectifs mathématiques et méthodologiques de l'atelier,
- Le choix des élèves constituant l'atelier,
- Le choix des problèmes qui seront proposés aux élèves, des conditions de leur validation en fonction des objectifs retenus et du choix des élèves constituant le groupe,
- La définition du contrat de travail,
- La valorisation du travail effectué,
- Les entretiens individuels prévisibles.

Remarque :

La fabrication d'objets en géométrie est un contenu bien adapté à un fructueux travail en ateliers : à partir du cahier des charges de la construction, l'atelier pourra être un cadre propice à l'échange de compétences, mettant à profit celles de chaque élève.

Bibliographie : Le travail de groupes, les ateliers

(1) ASTOLFI J.P, 1992, L'école pour apprendre, ESF Editions.
(2) BARLOW M., 1994, Le travail en groupes des élèves, A. Colin.
(3) DOISE W., MUGNY G., 1981, Le développement social de l'intelligence, Interéditions.
(4) DU SAUSSOIS N., 1991, Les activités en ateliers, A. Colin.
(5) FERRY G., 1970, La pratique du travail en groupe, Dunod.
(6) FIJALKOW, 1993, Entrer dans l'écrit, Bordas.
(7) MEIRIEU P., 1993, Itinéraires des pédagogies de groupes.

AUTRES DISPOSITIFS PARTICULIERS D'AIDE À LA RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

On peut recenser d'autres moyens qui sont de deux types :

- soit un entretien avec le maître qui sera, pour l'élève, une occasion de prendre conscience, sous la conduite du maître, de sa manière d'aborder un problème.

- soit la proposition de problèmes sous forme de jeux, ce qui peut contribuer, pour l'élève, à "dédramatiser" la résolution d'un problème et à lui faire acquérir davantage d'assurance en présence d'un problème à résoudre.

1-L'entretien individuel

Il peut être inséré éventuellement dans un atelier : pendant que des élèves non repérés en difficulté travaillent en autonomie, le maître organise un atelier spécifique regroupant des élèves fragiles. Lorsque l'un d'entre eux est suffisamment avancé (au moment que le maître juge opportun), le maître réalise avec lui un entretien s'appuyant sur un protocole préparé à l'avance, dans le but de permettre à l'élève de revivre ses procédures et de lui faire expliciter les décisions qu'il a prises.

Un autre intérêt est de laisser le temps à cet élève de verbaliser une action, alors que dans un contexte de grand groupe, un enfant, peu à l'aise ou en difficulté, n'aura pas toujours le temps d'exprimer ses phrases hésitantes : cela permet à l'enfant de développer la représentation qu'il a du problème par une production langagière.

Le maître pourra mettre à profit l'entretien individuel avec un élève pour l'amener à découvrir une démarche, à choisir un outil approprié.

L'utilisation de ce dispositif au sein de la classe est forcément limité compte tenu du temps qu'il requiert et de la nécessité de ne pas délaisser trop longtemps les autres élèves.

On trouvera, en annexe 2, deux exemples d'entretiens individuels réalisés en CM1.

Référence : (8) VERMERSCH P., L'entretien d'explicitation, ESF Éditions.

2-Les rallyes mathématiques

L'intérêt d'un rallye réside dans le fait que c'est un jeu, qu'il peut y avoir coopération entre élèves et qu'il n'y a pas d'enjeu scolaire.

Cependant, lorsqu'un rallye est proposé sous forme de compétition individuelle, il y a le risque de mettre hors jeu les élèves en difficulté ou les élèves fragiles ; c'est pourquoi il est préférable de proposer un rallye sous forme de compétitions interclasses, ce qui exige une production unique par classe, à laquelle tous les élèves pourront apporter leur contribution.

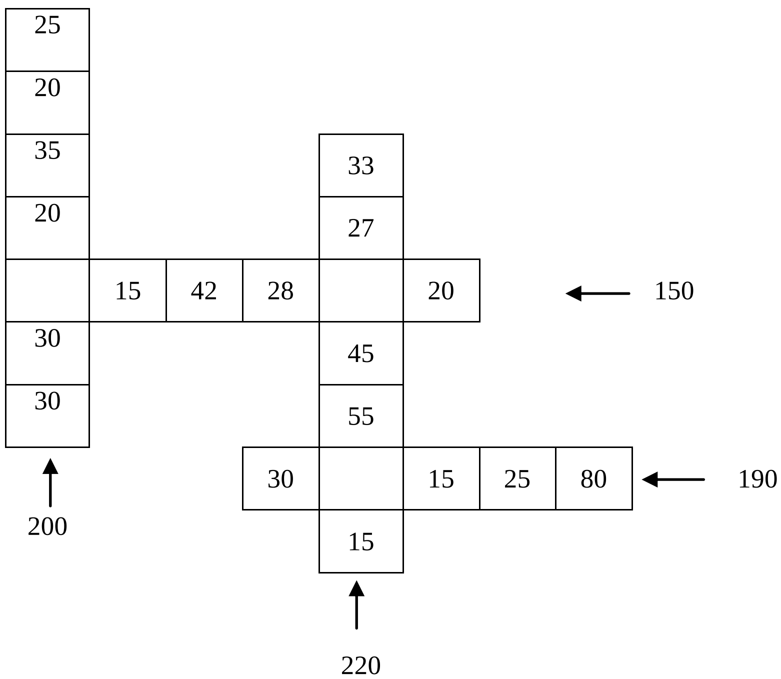
Il est alors intéressant de proposer des problèmes "ouverts" (par exemple de combinatoire ou reposant sur des tracés) qui sortent du modèle scolaire et qui peuvent ainsi contribuer à modifier le rapport aux mathématiques que peuvent avoir certains élèves : faire des mathématiques, cela devient "relever un défi", c’est "raisonner, chercher" et non pas "faire des opérations, appliquer des règles". Un rallye peut être aussi, pour l'élève, l'occasion d'éprouver le plaisir de venir à bout d'une énigme et peut ainsi aider l'élève peu sûr de lui, à retrouver un peu de confiance en lui-même.

ANNEXE 1

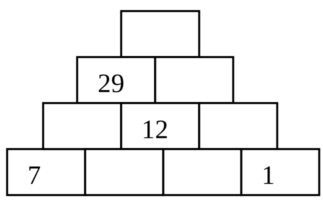
Présentation des problèmes

CE2 – atelier de calcul, sans calculatrice, 30 minutes.
Consigne : fais ces exercices dans l'ordre que tu veux.
Si tu as besoin, tu demandes une feuille d'aide.

- La grille à compléter :
La somme des cases de chaque colonne et de chaque ligne est indiquée par la flèche.



- La pyramide des nombres.
Dans cette pyramide de briques, chaque brique vaut la somme de deux briques sur lesquelles elle repose. Compléter les nombres qui manquent.



- Le train.
Un train circule avec 650 voyageurs. Il s'arrête dans une gare, 250 voyageurs descendent et 25 voyageurs montent. Il repart. Il s'arrête dans une deuxième gare, 75 voyageurs descendent et 38 voyageurs montent. Combien y a-t-il de voyageurs quand le train repart de la seconde gare ?

- Les âges.
Monsieur Durand a 47 ans, Madame Durand a 2 ans de plus. Ils ont une fille Sophie. Si Monsieur Durand, Madame Durand et Sophie ajoutent leurs âges, ils obtiennent 108.
Quel est l'âge de Sophie ?

- Le cinéma.
Au cinéma REX, les enfants paient 22 francs et les adultes paient 45 francs. Pierre a un billet de 100 francs. Combien de personnes peut-il emmener au cinéma REX ?

Analyse de ces problèmes

La grille

Problème à résoudre en 4 étapes, la disposition spatiale aide à les repérer.
Additionner en colonnes et en lignes, en regroupant éventuellement les termes.
Trouver les nombres manquants par différence avec les nombres-cibles ou en calculant les écarts.
Si erreur dans les premières cases, elle se répercutera. Repérage de l'erreur par comparaison avec les membres de l'atelier. Correction à réaliser seul ou avec de l'aide.

La pyramide

6 étapes de calcul : 3 différences ou 3 écarts 29 – 12 ; 17 – 7 ; 12 – 10 ; 3 sommes. Lecture de haut en bas puis de bas en haut pour terminer par la case supérieure.

Le train

La chronologie des évènements peut induire la chronologie des calculs en 4 étapes.
Des élèves plus indépendants pourront composer certaines transformations.
Possibilité de schématisation :
- soit des évènements de l'énoncé :

650 voyageurs

1er arrêt	250 voyageurs descendent 25 voyageurs montent	2ème arrêt	75 voyageurs descendent 38 voyageurs montent

Combien ?

- soit de la résolution :

650 --------(- 250) ? ----(+25) ---- ? ------(- 75) ? ------(+ 38) ------ ?

Les âges

Les étapes de résolution correspondent ici au traitement des informations.

Mr D : 47 ans Mme D : 2 ans de plus : 47 + 2 = 49; elle a 49 ans.
A eux deux ils ont 96 ans ; recherche de la différence ou de l'écart pour trouver l'âge de Sophie.
La résolution peut se schématiser en reprenant les cases superposées de la pyramide.

<table>
<tr><td>47</td><td>49</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">108</td></tr>
</table>

Le cinéma

Fonction numérique :				
	1 place enfant → 22F		1 place adulte → 45F	
	2 →	44F	2 →	90F
	3 →	66F		

Encadrement pour situer 50F.
Lecture de l'énoncé et sélection d'informations.
Possibilité de remplacer « personne » par « camarade » et de modifier la taille des nombres pour ouvrir ce problème.

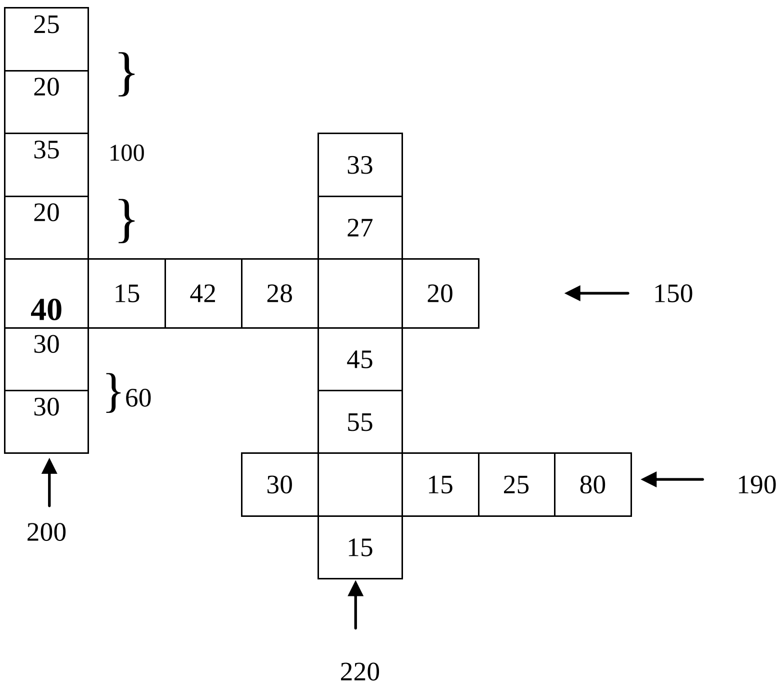
Cette analyse permet de dégager :

* un objectif méthodologique :
  - sensibiliser les élèves au nombre d'étapes utilisées pour résoudre un problème.
* un objectif notionnel :
  - notions d'écart, notion de différence, comparaison de nombres.
  - calculs d'additions et de soustractions
  - compréhension de l'expression : de plus

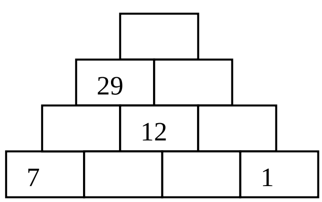
ANNEXE 1 (suite)

CE2- atelier de calcul : ELEMENTS POUR AIDER ET ENCOURAGER

1) Compléter la grille :
La somme des cases de chaque colonne et de chaque ligne est indiquée par la flèche



2) Dans cette pyramide de briques, de 12 pour aller à 29, quel écart y a-t-il ?



Par où continuer ?

3) Le train et les arrêts

650 voyageurs

1er arrêt { 250 voyageurs descendent
25 voyageurs montent

2ème arrêt { 75 voyageurs descendent
38 voyageurs montent

Combien ?

Organise les étapes de calcul.

4) Monsieur Durand a 47 ans, Madame Durand a 2 ans de plus. Ils ont une fille Sophie.
Faisons une pyramide

<table>
<tr><td>47</td><td>49</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">96</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">108</td></tr>
</table>

ANNEXE 2 : deux entretiens individuels

Ces entretiens ont été réalisés, avec deux élèves de CM1, à l'occasion de la résolution de problèmes additifs.

Les enfants ont été confrontés à deux problèmes à résoudre ; quand ils ont estimé avoir terminé et répondu à la question posée, le maître a engagé l'entretien d'explicitation avec ces élèves.

> Premier problème : Jeudi, maman dépense 350 francs ; vendredi, elle dépense 200 francs. Combien a-t-elle dépensé dans ces deux jours ?

Chaque enfant est d'abord invité à relire l'énoncé puis l 'entretien commence.

La première partie de l'entretien vise à faire expliciter à l'enfant l'idée qu'il se fait d'un problème ; la deuxième partie a pour but de l'amener à expliciter la procédure utilisée.

Les comptes-rendus suivants transcrivent fidèlement le dialogue entre le maître et l'enfant.

Entretien avec ANAÏS

Prof : ce que tu viens de lire, c'est quoi pour toi ?

Anaïs : l'histoire

P : c'est une histoire, mais encore ?

Anaïs : un conte

P : un conte ?

Anaïs : un problème.

P : et pourquoi c'est un problème ?

Anaïs : parce que si maman, le jeudi elle dépense 350 francs et le vendredi 200 francs donc elle va ...

P : à quoi tu reconnais que c'est un problème ?

Anaïs : puisqu'elle a 350 francs et si après elle dépense 200 francs, elle perdra de l'argent

P : tu m'as dit que ça pouvait être une histoire ou un conte ; il y a une différence entre un problème et une histoire ou un conte ?

Anaïs : non, ça peut être quelque chose.

P : qu'est-ce que tu veux dire ?

Anaïs : je veux dire, ça peut être deux choses, comme peut-être une histoire mais pas un problème ou un conte.

P : à quoi on le reconnaît que c'est un problème et pas simplement un conte ?

Anaïs : parce que le problème, c'est que si tu as 350 francs et qu'après tu as 200 francs parce que tu en as dépensé, tu as dépensé 250 francs de 350.

P : mais qu'est-ce qui fait le problème ? pourquoi il y a un problème ?

Anaïs : parce qu'on te demande combien tu as dépensé dans ces deux jours.

P : et ça, c'est une question ? Est-ce que c'est un problème parce qu'il y a une question ?

alors, un problème, comment tu te le représentes toi ? quand à l'école, on te dit "on va faire des problèmes", toi, tu te dis quoi ?

Anaïs : un problème, c'est peut-être comme si ... parce qu'il faut trouver combien c'est égal et la phrase.

P : quelle phrase ?

Anaïs : la phrase qui fait dire combien en tout elle avait au début ... quoi !

P : comme tu as écrit là : elle a dépensé 550 francs.

Anaïs : oui

P : et en général, quand il faut répondre à un problème, comment il faut faire pour y répondre ?

Anaïs : une opération il faut faire.

P : ah ! il y a une opération. Et là, dans ce problème, tu as fais une opération ? c'est quoi comme opération ?

Anaïs : une addition.

P : et comment tu as su que c'était cette opération et pas une autre ?

Anaïs : pour trouver le nombre du début, j'ai assemblé les deux. J'ai fait "plus" puisque les deux, ça me fera ce qu'elle avait au début quoi ! tu vois ?

Entretien avec Jessica

P : c'est quoi ce que tu viens de lire ?

Jessica : c'est un problème.

P : c'est quoi pour toi un problème ?

Jessica : un problème, pour moi qu'est-ce que c'est ?

P : si tu avais à dire à quelqu'un ce que c'est un problème, comment tu lui expliquerais ?

J : j'expliquerais que ... comment dire ?

P : à quoi ça se reconnaît un problème ?

J : ouf ! à quoi ça se reconnaît ? ... ça se reconnaît, parce que pour moi, ça se reconnaît par la ... j'allais dire par la question.

P : c'est déjà une chose ! mais il n'y a pas que dans les problèmes que l'on pose des questions ! Si je te demandais l'âge que tu as, c'est une question mais ce n'est pas un problème.

Alors qu'est-ce qu'il y a encore ? Qu'est-ce que ça représente pour toi un problème ?

J : pour moi, un problème, c'est aussi ... ça m'aide des nombres.

P : il y a des nombres dans un problème ?

J : oui, oui ... après, c'est tout ! je le vois comme ça que c'est un problème.

P : et quand il y a un problème, est-ce qu'on doit faire quelque chose ? Quand on a lu le problème, est-ce qu'on doit faire quelque chose ?

J : oui, on doit déjà faire une addition, une soustraction, ou si c'est par exemple, c'est ça qu'il faut faire, une multiplication.

P : donc quand il y a un problème, on regarde tout de suite s'il faut faire une opération ?

J : oui, oui, il faut regarder s'il faut faire « plus», «moins » ou « fois ».

P : et comment on sait s'il faut faire « plus », « moins » ou «fois » quand on lit le problème ? pour toi, comment tu le sais ?

J : comment je le sais ? ... je le sais ...

P : par exemple, dans ce problème, qu'est-ce que tu as fait comme opération ?

J : une soustraction.
P : et comment tu as su qu'il fallait faire une soustraction ?
J : parce qu'elle dépense.

« Dis, fais-moi un dessin !»

Yves Girmens

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Besançon 1997.

Ce travail est le compte–rendu d'une expérience menée dans une classe de cours préparatoire à l'occasion de la première rencontre avec un problème. Les enfants doivent représenter par un dessin un énoncé qui leur est donné. Ils doivent ensuite choisir parmi les dessins ceux qui peuvent aider à répondre à une question faisant appel à un dénombrement.

Origine de l'expérience et cadre de travail

L'entretien individuel avec des enfants en difficulté au sujet d'un problème qu'ils ont cherché à résoudre montre clairement que les enfants ne recourent pas à une schématisation (représentation sous forme de schéma) comme moyen pour s'approprier le sens du problème posé et peut-être pour le traiter.

Ce manque semble aggravé par l'idée qu'ils se font d'un problème : "résoudre un problème, c'est faire une opération".

En particulier, ils ne disposent pas de systèmes de représentations autres qu'iconiques où les objets de l'énoncé sont dessinés, ce qui, dans beaucoup de situations, est un obstacle à une représentation pertinente et fonctionnelle du problème.

On peut voir dans la schématisation d'un énoncé de problème, un moyen naturel de construire des significations de cet énoncé qui complète et corrige l'appropriation de cet énoncé dans le registre de la langue.

En particulier, la schématisation d'un énoncé peut aider à la mise en relation des données pertinentes et favoriser ainsi la représentation mathématique d'un problème.

On peut avancer l'hypothèse que l'élève en difficulté a beaucoup de mal à créer un schéma fonctionnel et qu'il ne peut, de sa propre initiative, faire évoluer ses schématisations vers des formes plus abstraites qui construisent le sens du problème.

Notre hypothèse :

La mise en place précoce d'activités autour des schématisations d'un énoncé peut contribuer à développer chez les enfants l'aptitude à comprendre un énoncé mathématique, à en construire une représentation et en même temps à leur donner des moyens d'améliorer leurs schématisations.

L'objectif sera, à terme, qu'ils choisissent la schématisation la mieux adaptée au problème à traiter.

Il ne s'agit surtout pas de "tomber" dans le travers d'un apprentissage méthodologique de la résolution de problèmes s'appuyant sur la schématisation, ce qui constituerait une dérive comparable à la pratique consistant à réduire l'apprentissage de la résolution de problèmes à un apprentissage méthodique de la "lecture d'énoncés mathématiques".

Il s'agit seulement, à l'occasion de la résolution de problèmes, d'accorder au schéma la place qui est la sienne, celui d'un "écrit intermédiaire" que l'élève peut utiliser pour s'approprier un problème et le représenter.

Présentation et analyse de l'expérience

L'expérience est menée dans un Cours Préparatoire, alors que les enfants n'ont encore jamais été confrontés à un problème de mathématiques.

La classe est composée en majorité d'enfants d'origine étrangère.

L'idée est de les mettre en présence d'un énoncé de type mathématique (contenant des données numériques qui peuvent être mises en relation), mais ne comportant pas de question, avec l'objectif de faire émerger les manières dont les enfants s'approprient et appréhendent cet énoncé puis, dans un deuxième temps, à partir des "représentations" qu'ils ont proposées, de mettre en évidence une interprétation de l'énoncé conforme au type de compréhension qu'exige un problème en mathématiques.

Il ne s'agit pas d'un dispositif en vue de répondre à des difficultés mais plutôt d'une première approche de la compréhension de ce qu'est un problème en mathématiques, proposée à des jeunes enfants dont on peut déceler une fragilité sur le plan scolaire.

Première étape :

Il s'agit d'amener des enfants (qui ne savent ni lire ni écrire) à expliciter, par un dessin (qui est le seul type d'écrit qu'ils peuvent produire), un énoncé qui n'a pas encore la forme d'un problème classique de mathématiques car il ne contient pas de question.

L'absence de questions ouvre sur tout un éventail d'interprétations qui se traduisent par des dessins divers (y compris des dessins qui font intervenir l'imaginaire) ; cela permet aux enfants de confronter les différentes interprétations possibles d'un énoncé et d'en débattre.

Deuxième étape :

Une question relative à l'énoncé est maintenant communiquée aux enfants : la réflexion consistera à chercher, parmi les dessins proposés, ceux qui peuvent constituer une aide pour répondre à la question posée.

Cela doit permettre de mettre en évidence les dessins qui organisent les données, autrement dit, ceux qui traduisent une "lecture mathématique" de l'énoncé mais aussi ceux qui font intervenir l'imaginaire (critère : "ils n'aident pas") ainsi que ceux qui ne respectent pas l'organisation mathématique des données.

Troisième étape :

Les enfants doivent maintenant chercher à répondre à la question en utilisant le schéma de leur choix parmi les schémas proposés.

Après un temps de recherche, la mise en commun vise à permettre l'explicitation des critères de choix puis la mise en évidence de différences dans les procédures de traitement selon le dessin choisi.

Ainsi, dans un premier temps, le dessin joue le rôle de médiateur dans la compréhension de ce qu'est un énoncé mathématique, et, dans un deuxième temps, on veut permettre à l'enfant de percevoir l'intérêt d'un certain type de schéma, obéissant à certains critères (mise en relation des données numériques), comme support de la pensée pour répondre à la question d'un problème.

Mise en œuvre

La séance a lieu dans une classe de CP.

Les enfants ont travaillé sur le nombre et le domaine numérique familier, variable selon les enfants, s'étend jusqu'à 50.

Les enfants n'ont jamais été confrontés à un énoncé "type problème".

Premier temps

Première phase :

L'énoncé suivant est écrit au tableau :

Dans un pays lointain, des chasseurs ont tué 12 tigres. Il faut deux chasseurs pour porter un tigre et le ramener au village.

(*énoncé emprunté à l'ouvrage ERMEL CP)*

L'énoncé est lu par la maîtresse qui le fait reformuler par quelques enfants. Quand elle est certaine que les enfants ont compris l'énoncé, elle leur communique la consigne :

«Tu vas faire un dessin qui raconte cette histoire.»

(elle explicite en ajoutant : « en regardant le dessin, je dois comprendre l'histoire. »)

Chaque enfant dispose d'une feuille A4 et travaille individuellement.

Deuxième phase :

La maîtresse sélectionne une douzaine de dessins qu'elle affiche au tableau. Elle rassemble les enfants et provoque un débat autour de la confrontation des dessins avec l'énoncé.

Le débat est initié par la question : « Est-ce que le dessin montre tout ce que nous dit le texte ? »

La discussion permet de classer les dessins en différents types :

- Ceux qui illustrent l'énoncé sur le plan sémantique, sans tenir compte des nombres et en faisant appel à l'imaginaire.

- Ceux qui tiennent compte du nombre de tigres mais qui n'utilisent pas la relation "un pour deux".
- Ceux qui représentent la relation "un pour deux" sans représenter le nombre total de tigres.
- Ceux qui ont tenu compte de toutes les données numériques mais qui ont rajouté une information non contenue dans l'énoncé : "certains hommes portent deux tigres.".

Deuxième temps

La maîtresse formule une nouvelle consigne :
« Maintenant, je vais vous poser une question : combien de chasseurs faut-il pour transporter tous les tigres ? On va regarder si les dessins affichés peuvent nous aider à répondre à la question. »

La maîtresse mène ensuite un débat collectif autour des différents dessins en amenant les enfants à expliciter la manière d'utiliser chaque dessin.

Au cours de cette discussion, certains dessins ne sont pas retenus car ils ne sont d'aucune aide pour répondre à la question (ceux qui illustrent l'histoire sans utiliser les nombres et ceux qui "rajoutent" de l'information).

Troisième temps

La maîtresse donne comme nouvelle consigne :
« Vous allez répondre à la question posée en vous servant d'un dessin. »
Les enfants ont repris leurs dessins et travaillent par deux.
La phase de recherche est suivie d'une mise en commun qui permet aux enfants de présenter leurs procédures de dénombrement en mettant en évidence qu'elles dépendent du dessin utilisé.

Prolongement

À partir d'une situation vécue à l'occasion du Carnaval, l'énoncé suivant a été proposé un peu plus tard aux enfants :

> Pour Carnaval, chaque enfant fabrique un masque. Il faut deux pièces pour faire un masque.
> Il y a 13 enfants. Combien faut-il de pièces ?

accompagné de la consigne suivante : "*tu peux écrire ou dessiner ce que veux pour répondre à la question. Tu écriras le nombre de pièces nécessaires au bas de la feuille".*

Il s'agit ici d'un véritable problème mathématique : l'objectif étant d'amener les élèves à produire "un écrit de recherche" (schéma ou écrit symbolique) pour représenter l'énoncé en vue de tenter de répondre à la question posée. Dans cette nouvelle situation, l'écrit de l'élève est finalisé par la recherche d'un nombre inconnu.

Chaque enfant dispose d'une feuille A4. La séance se déroule en trois parties : phase d'appropriation de l'énoncé, recherche individuelle, mise en commun et bilan.

La confrontation des productions des enfants a permis de mettre en évidence les points suivants :

- il faut utiliser tous les renseignements que donne l'énoncé et eux seuls.

- il n'est pas nécessaire de dessiner les objets de manière réaliste ; on peut utiliser des symboles ("barres" ou "ronds").

- il n'est pas nécessaire de dessiner toutes les pièces : à partir du dessin des masques, à l'aide de la comptine, en comptant de deux en deux, on peut trouver la réponse.

- au lieu de faire un dessin, on peut écrire la suite des entiers de 1 à 13 (représentant les 13 masques) puis en simulant mentalement "2 pièces pour 1 masque", écrire en correspondance la suite des entiers de 1 à 26 (production fournie par un enfant).

Ainsi cette situation a permis, à chaque enfant, en s'appuyant sur ce qu'il a été capable de faire pour représenter le problème, de découvrir et de faire fonctionner des représentations schématiques ou symboliques, autres que la sienne, que ses camarades ont mis en œuvre pour traiter le problème.

Remarque :

Sans remettre en cause le choix fait par certains auteurs d'ouvrages de faire réfléchir les enfants sur des schématisations de problèmes produites par des élèves fictifs, (car ce dispositif peut s'avérer pertinent à certains moments), il nous paraît nécessaire, de permettre aux enfants, **à l'occasion de la résolution de problèmes**, de découvrir d'autres manières de représenter un problème par un écrit : on donnera ainsi à l'enfant les moyens de développer leur compétence à représenter un problème par un écrit fonctionnel, et on les aidera progressivement à passer d'un écrit de type "schéma" à un écrit utilisant le symbolisme mathématique.

Comment ne pas être « chocolat » ?

Nicole Bonnet

Extrait de Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques - Besançon 1997.

Le travail présenté s'inspire d'un article écrit par Michel CHASTELAIN, dans la Revue MATH-ECOLE ; N°165 ; Novembre 1994.
Cette action de formation utilisable en formation initiale ou continue des professeurs des écoles, relève d'une approche constructiviste et se rattache à une stratégie de formation par homologie pour les problèmes de recherche.

Le descriptif de cette action de formation est issu d'un travail que j'ai mené cette année avec des PE sur le thème de la résolution de problèmes. Je leur ai proposé des situations qui permettaient de réfléchir aux différences entre exercices, problèmes, situations-problèmes, problèmes ouverts. Voici une activité qui a également débouché sur d'autres points abordés dans cet article comme l'analyse du jeu, le débat sur "l'utilité" d'une telle activité, les transformations possibles, etc.

OBJECTIFS :
Introduire un comportement de recherche par le biais d'un problème ouvert (5).
Permettre aux professeurs d'école en formation initiale d'entrer dans un contenu didactique et d'analyser une situation de recherche.

<u>*Enoncé :*</u>
La méchante sorcière a pris une plaque de chocolat et déposé un poison mortel sur un des quatre carrés d'angles. Elle veut proposer un jeu à Blanche-Neige : « Tu vois, lui dit-elle, j'ai déposé du poison sur le carré hachuré.
Je te propose les règles du jeu suivantes :

1. Chacune, à tour de rôle va prendre la plaque et en détacher une partie en la coupant suivant une ligne droite du quadrillage. Elle mange le morceau qu'elle a détaché ;
2. Celle qui mange le carré empoisonné meurt ! »

Mais la sorcière est aussi bête que méchante, elle ne sait pas que Blanche-Neige connaît une façon de jouer pour ne pas manger le carré mortel.
Et toi, comment vas-tu jouer pour ne pas être empoisonné ?

					POISON

Phase 1 : travail du professeur stagiaire en tant qu'élève.

Dispositif

C'est une situation de recherche par groupes de quatre (deux joueurs, deux observateurs avec changement de rôle), chaque groupe ayant à disposition 29 petits cubes identiques d'une même couleur et un petit cube d'une autre couleur qui est le morceau de chocolat empoisonné.

But recherché

- Faire trouver une ou des stratégies gagnantes ;
- Amener une discussion au sein du groupe quant à la rédaction de cette situation de recherche. Faut-il faire des dessins ? Le texte seul suffit-il ? Quelles cohérences exiger entre texte et dessins ? ... Peut-on généraliser à d'autres situations de recherche ?

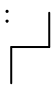
Consigne

La consigne s'articule en deux temps :

1. Vous allez tout d'abord vous placer dans le rôle de l'élève : « Jouez et cherchez une stratégie gagnante. Puis rédigez-la sur une feuille. » ;
2. Vous êtes maintenant le professeur : « Quel compte-rendu attendez-vous d'un groupe d'élèves de CM2 placé face à ce problème ? ».

Analyse

Difficultés dues à l'énoncé :

- J'ai remarqué en circulant entre les groupes que la consigne ne semblait pas claire pour tout le monde. J'ai dû préciser oralement les points suivants :
  - ∗ on ne peut pas couper comme cela : 

    ni en diagonale.
  - ∗ on peut prendre une ou deux barres, ou plusieurs, mais <u>en un seul coup</u>.

- Une difficulté de langage émerge vite : un "carré" de chocolat est en général rectangulaire. Ceux qui persistent à dessiner des carrés de chocolat en forme de rectangle, ont plus de peine à trouver une stratégie, et leur expression devient ambiguë. On a donc intérêt à schématiser l'énoncé, pour s'éloigner d'un modèle réaliste. En fait, la manipulation de petits cubes de 2 cm d'arête induit fortement des représentations carrées. Les stagiaires utilisent rapidement du papier quadrillé 5x5 lors des phases d'analyses de jeux.

Les temps de recherche et de rédaction durent environ 20 minutes chacun.
Parmi les groupes, aucun n'est en échec ; tous se sont engagés dans une solution.

Difficultés de rédaction

La rédaction de la procédure gagnante suscite de grandes discussions. Pour être claire, précise et concise, la rédaction nécessite un effort important d'analyse et de synthèse de la part des étudiants.

Ils pensent que le texte seul ne suffit pas à la bonne compréhension, qu'il doit être illustré de schémas.

Ce travail d'explicitation permet de mieux comprendre et de conceptualiser la situation. Les brouillons raturés des stagiaires montrent que cette action n'est pas simple.

Bilan

Cette activité est pour eux une leçon d'humilité car ils sont placés face à un problème qu'ils ne savent pas résoudre immédiatement. Certains groupes sont mal à l'aise en début de séance, ils ont peur de ne pas trouver de solution.

Dans la dernière phase, lorsque je leur distribue des exemples de travaux d'élèves, les critiques concernant la rédaction sont plus réfléchies. Les étudiants ont réalisé qu'il ne fallait pas demander aux élèves ce qu'on avait du mal à faire soi-même.

Je rajoute que le travail d'écriture me semble fondamental car il consolide les chemins mentaux. Il pourra être un outil qui permet un retour lors d'un problème analogue. En effet, l'élève peut reprendre ses notes et les consulter en cas de besoin.

Phase 2 : travail conjoint formateur / PE.

But recherché

Travailler sur les caractéristiques d'un problème ouvert (5) selon deux axes : l'un lié au problème, l'autre lié à la gestion de classe, et ouvrir un débat.

1. Dégager les caractéristiques liées au problème

1.1 Généralités

À l'école, on pose des problèmes proches soit de la vie quotidienne, soit du monde imaginaire des enfants, afin de leur permettre de créer des connaissances, d'apprendre des stratégies, des techniques, des algorithmes, ... qu'ils devront être capables de réutiliser lors de problèmes différents.

Les I.O. de 1995 précisent : « *La résolution de problèmes occupe une place centrale dans l'appropriation par les élèves des connaissances mathématiques. La plupart des notions ... peuvent être abordées par les élèves comme des outils pertinents pour résoudre des problèmes nouveaux, avant d'être étudiées pour elles-mêmes et réinvesties dans d'autres situations ...*
Par ailleurs, des activités sont proposées pour mettre en place et développer des compétences spécifiques d'ordre méthodologique ...
Les activités relatives à la résolution de problèmes portent sur :

- *de véritables problèmes de recherche, pour lesquels l'élève ne dispose pas de démarche préalablement explorée ; ...* »

Ici, nous avons un problème qui ne vise pas de notion spécifique, il s'agit d'un problème de recherche à support ludique, qui correspond à la dernière phrase de l'extrait des Instructions Officielles ci-dessus.

1.2. Analyse du problème

- Je questionne tout d'abord les PE stagiaires : « Comment avez-vous procédé pour arriver à la solution ? ».
- Leurs réponses sont :

« Nous avons :

- joué plusieurs fois, fait des essais ;
- émis des hypothèses, des conjectures ;
- testé ces hypothèses en faisant d'autres essais ;
- testé la validité de la conjecture.

C'est une démarche scientifique. ».

Ils ajoutent également :

- « Émettre des hypothèses est relativement difficile car chacun se forge les siennes qui dépendent fortement des réactions de l'adversaire. Quelquefois, nous pouvons mettre en oeuvre deux hypothèses dans la même partie, et il ne sort rien de cela. Il faut noter les coups. » ;
- « La solution n'est pas immédiate. » ;
- « Quand la procédure gagnante est trouvée, le jeu n'a plus d'intérêt. Il faut chercher un "naïf" (un camarade qui n'a jamais joué et qui va être "chocolat "). Il permet de contrôler que celui qui connaît la stratégie gagne toujours. ».

En conclusion :

C'est un jeu fermé : dès que la procédure est découverte, le jeu n'a plus d'intérêt.

J'ajoute :

Quand on résout ce problème, on développe une méthodologie utilisée dans le champ mathématique.

Elle consiste dans un premier temps à analyser les derniers coups de son adversaire : que fait-il quand il gagne ? puis à essayer de mémoriser les coups d'une partie entière, ce qui permet de capitaliser pour mieux anticiper. Enfin, on se rend compte qu'il faut hiérarchiser les fins de partie.

Comme dans le jeu de "la course à 20"[1], c'est en fin de partie que surgit l'idée qu'il ne faut pas jouer n'importe quoi.

Soit, par exemple, la course à 20, de pas 4. Le gagnant est celui qui dit 20 le premier. Le jeu se joue à tour de rôle. Chaque joueur peut augmenter le nombre annoncé par son adversaire de 0, 1, 2 ou 3.

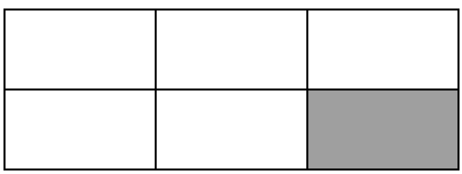
Si le but est 20, celui qui annonce 17,18 ou 19 a perdu, car son adversaire peut atteindre 20. Par contre, celui qui annonce 16 est sûr de gagner, car son adversaire ne pourra annoncer que 17, 18 ou 19.

Pour gagner, il faut donc jouer 16, qui n'est autre que 20-4.

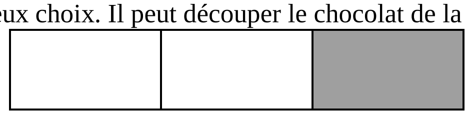
Le joueur réitère son raisonnement, et cela l'amène à découvrir une stratégie globale ...

Il en est un peu de même ici : rapidement, le joueur en vient à considérer la fin de partie.

Admettons que le joueur A laisse le rectangle suivant après avoir mangé son morceau :



Le joueur B a deux choix. Il peut découper le chocolat de la manière suivante :

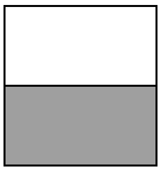


Il a alors perdu car le joueur A lui laisse :

[1] Situation présentée dans l'article « La division en formation initiale », tome 2 de cet ouvrage.

Ou bien, il peut découper le chocolat en laissant un "carré" :

Au coup suivant, A ne peut faire que :



ou

Dans ces deux cas, le joueur B a gagné : il coupe le chocolat et ne laisse au joueur A que le carré empoisonné.

La stratégie gagnante peut se résumer ainsi :
« Pour gagner, il faut laisser un carré. Celui qui a un rectangle devant lui peut toujours le transformer en carré. Par contre, celui qui a un carré ne peut qu'en faire un rectangle. Celui qui laisse un carré est donc toujours gagnant. »
Il suffit alors de "remonter" pour trouver une stratégie gagnante, dès le départ.
"Faire un carré" est un coup fort ou coup gagnant au sens de la théorie des jeux. On retrouve cette situation dans d'autres jeux. Je citerai par exemple le "squeeze" au bridge et le "sugswang" aux échecs.
Dans les premiers coups, il s'agira donc d'enfermer l'adversaire pour lui faire commettre une faute.
<u>Autre idée</u> : une stratégie gagnante répond à un argument de symétrie dans le sens que les positions fortes ont davantage d'éléments de symétrie.

1.3. Débat

Après cela, un débat peut naître avec les étudiants (ou stagiaires). Je les laisse s'exprimer librement tout d'abord, puis leur pose quelques questions.

- Les étudiants sont enthousiastes car l'aspect ludique l'emporte. Ils ont envie d'essayer avec leurs élèves ... Enfin des « maths-plaisir » ! Les enfants devraient apprécier ...
- Je ne les décourage pas car cet aspect me semble fondamental. De plus, les champs périphériques abordés sont à prendre en considération ...

- D'autres ont peur de passer trop de temps pour peu de savoirs mathématiques estampillés.

Outre l'aspect mathématique cité plus haut, lorsque l'on résout ce problème, on doit :

* Capitaliser, anticiper ;
* Argumenter ;
* Écouter les autres ;
* Rédiger un texte de nature scientifique (si le maître l'a demandé), un texte avec ses règles précises, qui peuvent être débattues à ce moment.

En conclusion, il est souhaitable de proposer ce problème au bon moment, sans y passer trop de temps, car il développe une méthode utile aux mathématiques.

Il s'agit bien ici d'une activité mathématique dans laquelle on met en œuvre un mode de pensée, un type de raisonnement spécifique, qui rompt avec le modèle pédagogique habituel - leçon puis exercices - si prégnant pour les étudiants ou stagiaires.

Remarques :

Mettre en situation les PE stagiaires dans le cadre de tels problèmes leur permet de prendre conscience de la diversité des démarches utilisées dans chaque groupe.

De plus, cela leur permet d'élargir leurs classes de problèmes de référence : il existe des problèmes autres que les problèmes pour apprendre des notions.

- Les étudiants ne nient pas l'activité mathématique dans ce problème, mais il est difficile de modéliser les processus de réussite.
- Un autre point fort de la discussion est la recherche de variantes du problème initial, pour modifier les procédures de résolution.

Voici celles proposées par les PE :

- **Augmenter ou diminuer le nombre de carrés de chocolat sur la plaquette, de manière à la laisser rectangulaire**.

Les procédures de résolution restent inchangées (c'est celui qui connaît la procédure gagnante qui est vainqueur, qu'il joue en premier ou en second). Seul le temps de jeu est modifié (et peut-être aussi la rapidité de découverte de stratégies).

- **Former une plaquette carrée ayant par exemple 5 x 5 morceaux de chocolat**.

Le problème est changé (celui qui connaît la procédure gagnante ne doit pas jouer en premier). C'est un jeu de hasard : tirer à pile ou face pour savoir qui joue le premier.

Inutile de jouer si les deux adversaires connaissent la stratégie gagnante !

- C'est l'occasion, à partir des questions des PE, de préciser ce qu'on entend par : situation-problème, problème ouvert, un problème. Le lecteur pourra se reporter utilement aux ouvrages ou articles cités en bibliographie pour des éléments de réponse.

2. Caractéristiques liées à la gestion de classe

Je rappelle l'organisation favorisant d'une part la responsabilité des PE (ou des élèves) face à la solution du problème et d'autre part leur autonomie dans la recherche :

- *Premier temps de la recherche : consignes initiales.*

Le formateur (moi-même) observe un assez long moment de silence où chaque PE (élève) s'approprie de façon individuelle la consigne et le jeu. Ce moment est fondamental car il permet la prise en main de la situation et l'émergence des premières conjectures. De mon point de vue, tout travail de groupe devrait débuter par un moment où chacun note par écrit ses premières idées. Ce procédé permet d'éviter que chaque élève soit entraîné trop rapidement dans la démarche proposée par un "leader".

- *Deuxième temps : phase d'action*

Le formateur circule entre les groupes, reprécise éventuellement la consigne. Nous avons vu que l'énoncé écrit ne suffisait pas.

Cette phase vise à la mise en place de stratégies. Le contexte est alors oublié : on ne pense plus à Blanche-Neige, la plaquette de chocolat est représentée, les carreaux de chocolat le sont aussi, sous forme carrée. On travaille en noir et blanc, les objets ont perdu leur couleur. Seules les données ayant du sens sont conservées.

Le professeur doit prendre garde de ne pas trop intervenir, être patient et laisser mûrir le problème. Son rôle consiste à encourager, essayer de rentrer dans la pensée des élèves. Il ne doit pas fermer le problème trop rapidement.

- *Troisième temps : phase de formulation*

Le compte rendu demandé aux PE (ou l'affiche pour les élèves) est un moyen de communication qui peut être exposé et laissé à la consultation libre. Dans un premier temps, la rédaction précise la pensée, dresse la liste des conjectures et permet leur exposition.

Dans un deuxième temps, le texte mathématique produit par les PE (ou les enfants) pourra être analysé, ce qui constitue un objectif intéressant.

- *Quatrième temps : phase de validation ou de débat*

C'est une activité de vérification qui ne se réduit pas au contrôle des procédures avec les PE. On cherche à établir la cohérence des résultats obtenus, à modéliser (si on le peut) la situation. Cette phase permet à chacun de prendre du recul, d'élucider la situation. Les questions ou réponses des pairs participent à cette compréhension.

Phase 3 : Analyse de travaux d'élèves.

Après le constat des difficultés de formulation écrite de leurs stratégies par les PE, j'ai distribué des productions d'élèves. Ces travaux proviennent d'une classe de 5ème (7ème année scientifique en Suisse (1)) et ont été élaborés en deux périodes de quarante-cinq minutes (cf. annexe).

Mon objectif est de leur faire analyser ces productions d'élèves puis de les amener à les comparer à leurs propres écrits.

Remarque importante :

Les critères d'analyse qui ont surgi le plus souvent sont :

- La qualité de la présentation : soin, dessins ;

(ce premier point semble fondamental pour les PE)

- La clarté des explications : précision du langage, sémantique, orthographe;
- La stratégie développée : est-elle générale ou s'appuie-t-elle sur un cas particulier ?
- La pertinence des remarques (surtout à cause de la première phrase du compte rendu n°3).

Ces critères s'appliquent au produit fini. Ils ne prennent aucunement en compte:

  - La description des recherches infructueuses, les pistes rejetées pour différentes raisons (traitement de l'erreur).
  - Le nombre, la variété des pistes de recherche.
  - L'appréciation personnelle du maître, etc.

Conclusion

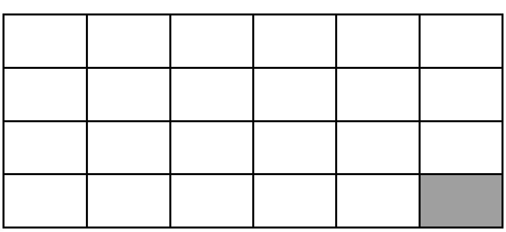
Cette activité de formation a été plébiscitée par les PE car elle leur a donné la possibilité d'être *élève* en leur permettant de participer à la construction d'outils pour être *maître*.
De plus, elle m'a permis d'illustrer des éléments de didactique, en cernant honnêtement leurs limites.

Enfin, leur meilleur souvenir, a été la dégustation collective d'une tablette de chocolat que j'avais promise au groupe qui trouverait le premier la stratégie gagnante ...

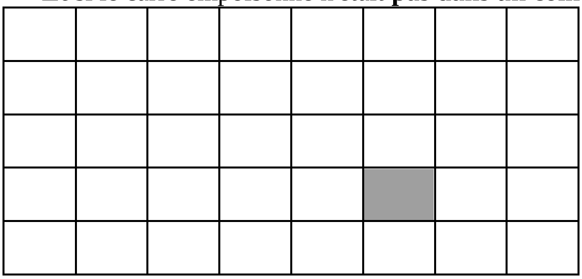
On excusera le côté affectif ... ! Cependant cette association travail-chocolat, ne peut-elle pas créer des connexions mentales fortes à propos de cette situation?
Cette récompense est-elle si gratuite que cela ? ! ...

Pour ouvrir encore le problème, je propose de nouvelles variantes destinées aux PE (ou aux collègues ?) qui trouveraient cette situation trop simple :

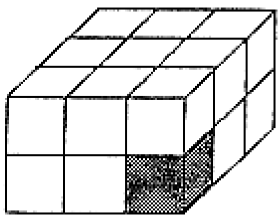
- **Et si** on jouait **à trois** et non à deux **?**



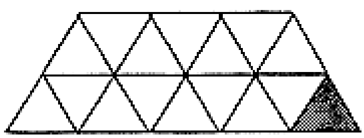
- **Et si** le carré empoisonné n'était **pas dans un coin ?**



- **Et si** on jouait dans **trois dimensions ?**



- **Et si** les carreaux n'étaient **pas carrés ?**



Enfin, je voudrais conclure par cette jolie phrase empruntée à Michel Chastellain : « toute situation mathématique mérite d'être dégustée ».

Bibliographie

(1) Article de Michel Chastellain (maître de didactique des mathématiques au SPES de Genève), intitulé "Évaluation d'une situation mathématique" in Math-Ecole n° 165 Nov. 1994

(2) "Jeux de cadres et didactique outil-objet" Régine Douady in RDM Vol 7-2 éd. La Pensée Sauvage 1986

(3) "Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles" Chapitres 1 et 2, Tome 1. R. Charnay et M. Mante

(4) "Théorisation des phénomènes d'enseignement" G. Brousseau Thèse d'état Bordeaux 1

(5) "Problème ouvert et situation problème" G. Arsac, G. Germain, M. Mante IREM de Lyon 1988

(6) "Comprendre les énoncés, résoudre les problèmes" A. Descaves Hachette-Education 1992

(7) "Apprendre (par) la résolution de problèmes" R. Charnay in Grand N n° 48
(8) « La Course à 20 », G.Brousseau, in Théorie des situations didactiques, La Pensée sauvage, 1998.

Compte rendu 1
(photocopie article maths école)

Compte rendu n°1

Comment ne pas être «chocolat»! Laurent, Matthieu, Nicolas

Il faut jouer de telle manière a ce qu'il ait le même nombre de carré horizontalement et verticalement.

ex :

//// joueur 1
\\\\ joueur 2
*P = Player

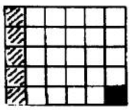
1, 2, 3, 4 après le *P" = nombre de coup

En jouant plusieurs fois, nous avons remarqué :
que celui qui connaît le "truc" est presque sûr de gagner, à moins que son adversaire connaisse aussi le "truc" !
qu'au début nous avions trouvé une solution mais elle ne marchait pas a tout les coups. Si l'autre en enlevait trois bandes à l'horizontale, on en enlevait trois aussi sauf à la verticale. mais comme il n'y a pas le même nombre horizontalement et verticalement, cela ne peut pas joué !

Compte rendu 2
(photocopie article maths école)

Compte rendu n°2 Julien / Romain

Pour gagner à coups sûr il faut manger la ligne A sur le tableau x

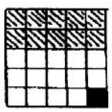


→ tableau x

= premier joueur

ABCDEF

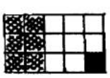
On obtient alors un carré et s'est à l'adversaire de jouer



= second joueur

ABCDEF

Le premier joueur doit reformer un carré.
L'adversaire mange une autre partie de la plaque et de nouveau le premier joueur reforme un carré jusqu'à ce que le second joueur mange le carré noir.



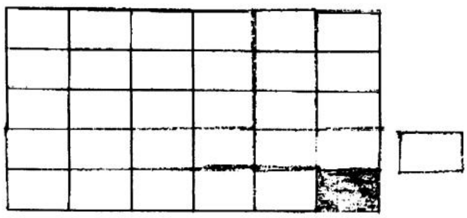
revoila le carré etc
Il faut commencé pour gagner

Compte rendu 3
(photocopie article maths école)

Compte rendu n°3

Comment ne pas être « chocolat » !

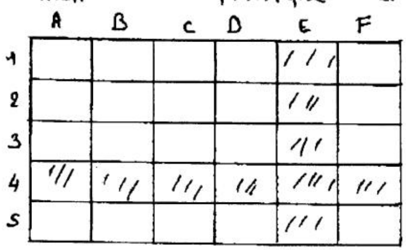
Seymour et Erwan



= lignes qu'il faut manger.

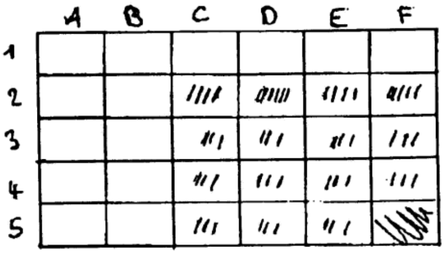
Celui qui commence n'est pas forcément le vainqueur, ça dépend comment il joue.

Quand on arrive dans ce stade, on peut mettre en pratique la stratégie.

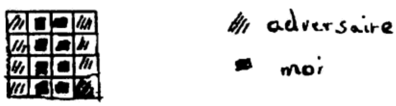


La stratégie consiste à pousser l'adversaire sur les lignes 1 et 3. Dans ce cas nous pouvons avaler les lignes E et 4. L'adversaire ne peut rien faire à par manger le chocolat vert.

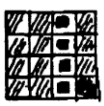
2ème solutions



A partir de ce stade là l'adversaire est perdu, même si il mange une ou deux ligne(s). C'est à lui de commencer.



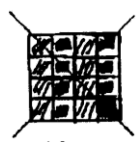
il a perdu.



il a perdu.

il a perdu

il a perdu

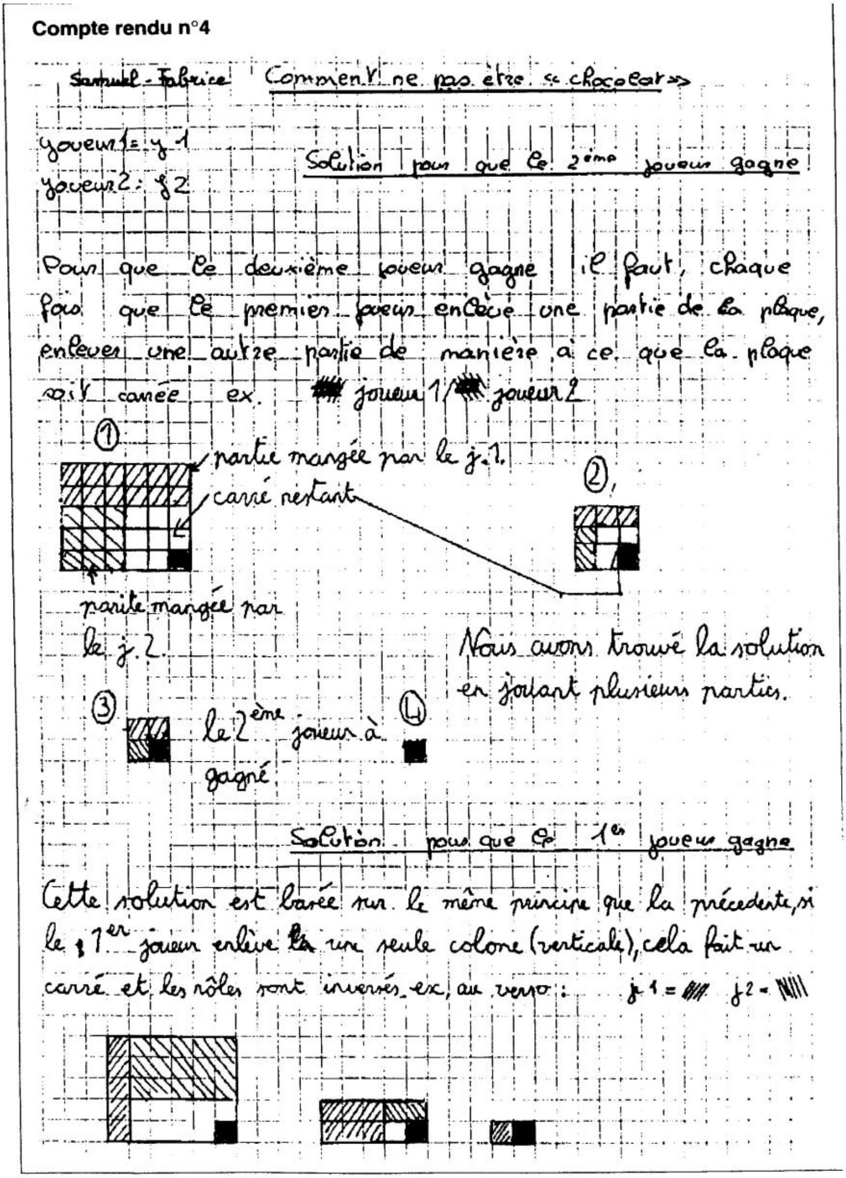


j'ai perdu

j'ai perdu

La tactique consiste à manger l'avant dernière ligne pour que l'adversaire mange la dernière.

Compte rendu 4
(photocopie article maths école)



Compte rendu n°4

Samuel - Fabrice Comment ne pas être « chocolat »

joueur 1 = j 1
joueur 2 : j 2

Solution pour que le 2ème joueur gagne

Pour que le deuxième joueur gagne il faut, chaque fois que le premier joueur enlève une partie de la plaque, enlever une autre partie de manière à ce que la plaque soit carrée ex. joueur 1 / joueur 2

Nous avons trouvé la solution en jouant plusieurs parties.

Solution pour que le 1er joueur gagne

Cette solution est basée sur le même principe que la précédente, si le 1er joueur enlève ~~la~~ une seule colone (verticale), cela fait un carré et les rôles sont inversés ex, au verso : j 1 = j 2 =

Les ateliers de recherches en mathématiques

Pierre Eysseric

Extrait de Cahiers du formateur Tome 2 – Tarbes 1998.

Cet article présente une expérimentation menée durant plusieurs années dans quelques classes d'écoles primaire du département du VAR : la mise en place d'un lieu et d'un temps pour le plaisir de chercher en mathématiques.
Après une présentation du projet initial assorti d'un bref historique de ce projet, l'article analyse quelques-unes des difficultés rencontrées et le décalage entre le dispositif projeté et les réalisations effectives.
Ensuite sont envisagées les perspectives d'un tel dispositif à travers un certain nombre de questions restant à étudier pour améliorer le fonctionnement de ces activités de recherche en classe et mieux cerner leur impact sur les divers apprentissages, en particulier celui des mathématiques.
Enfin, le texte s'achève par un compte-rendu d'une recherche effectuée à l'automne 1997, dans une classe de Cours Moyen deuxième année du village de Rians.

1- Présentation du dispositif.

Nous souhaitons commencer par une description du dispositif tel qu'il a été projeté et nous examinerons plus loin les écarts entre celui-ci et les réalisations dans les classes. Il s'agit de transposer dans les classes de l'école primaire le mode de travail qui est celui des chercheurs en mathématiques.

L'image de cercles concentriques centrés sur l'enfant (ou sur le chercheur) permet une description assez simple de cette transposition.

1.1 De la recherche à la publication.

Le <u>premier cercle</u> est constitué par l'enfant et son sujet de recherche, c'est à dire une question qu'il se pose, qui fait partie du champ des mathématiques et à laquelle il a envie de pouvoir répondre; le sujet peut être proposé par l'enfant ou par un tiers (l'enseignant par exemple) mais dans tous les cas, l'élève doit se l'être approprié et se sentir responsable de la recherche d'une solution au problème posé.

Le <u>deuxième cercle</u> comprend deux ou trois élèves: ceux qui ont le même sujet de recherche ou des copains avec lesquels on parle librement de son travail ; son équivalent dans la communauté scientifique, ce sont les collègues du laboratoire, ceux que l'on accroche au détour d'un couloir ou devant la machine à café pour leur faire part d'une idée, d'une question, d'un obstacle rencontré, d'un article intéressant, ... Ce cercle, bien que très informel, n'est pas sans importance ; c'est un espace de liberté: on peut travailler seul mais on a aussi le droit d'échanger avec d'autres, de parler sans contraintes de son travail ; cela a une incidence non négligeable sur l'implication des enfants dans l'activité de recherche et la découverte du plaisir de chercher.

Le troisième cercle, c'est la classe (les élèves et leur enseignant) qui fonctionne ici un peu comme un laboratoire avec son directeur de recherche. Après un temps de recherche plus au moins long, les enfants vont devoir présenter leur travail à toute la classe; on peut arriver avec des solutions à proposer mais aussi avec des questions restées sans réponse, sur lesquelles on ne parvient plus à avancer.

Dans ce cas, on explique ce que l'on a essayé, les impasses dans lesquelles on s'est retrouvé et chacun peut intervenir pour proposer de nouvelles pistes ou pour critiquer ce qui a été fait. A l'issue de ce débat, deux cas de figure peuvent se présenter : soit on estime que les idées échangées permettent de se remettre au travail sur ce sujet, soit on aboutit à un constat collectif d'impasse et on décide de se documenter ou de renvoyer la question au quatrième cercle (un référent mathématique extérieur à la classe qui peut être un chercheur ou un professeur de mathématiques). Lorsque par contre, l'enfant estime avoir résolu le problème qu'il s'était posé, ses solutions sont soumises à la critique sans pitié des autres élèves et de l'enseignant si cela est nécessaire; il s'agit alors de convaincre toute la classe de la valeur des réponses proposées. Si le travail présenté est accepté, validé par la classe, il va pouvoir sortir de celle-ci et être publié; cette publication pourra prendre des formes diverses : affichage dans le couloir, article dans le journal de l'école, fax adressé à une autre classe pratiquant la recherche en mathématiques, courrier envoyé à un chercheur correspondant de la classe, ... On entre alors dans le quatrième cercle, mais avant d'en arriver là, plusieurs allers et retours entre le premier et le troisième cercle sont souvent nécessaires et il n'est pas rare qu'un enfant arrivé convaincu d'avoir une excellente réponse doive, à l'issue d'une discussion parfois acharnée, convenir qu'il doit se remettre à l'ouvrage. On a, par exemple, le cas de cet élève de CM2 qui est arrivé un jour devant ses camarades très fier de sa découverte et persuadé de convaincre tout le monde. *« Il y a une infinité de fractions, et je vais vous le prouver » a-t-il déclaré et il a alors entrepris de dessiner au tableau un grand carré. « Je le partage comme ça, on a 1/2; je recommence et j'ai 1/4. »* Et il continue ainsi jusqu'au moment où son carré est entièrement couvert de craie blanche; il conclut alors en disant: *« et etc, on peut toujours repartager et donc, les fractions, c'est infini! »* Le résultat est alors vivement contesté par deux élèves qui pensent qu'on ne peut pas continuer : le carré est tout blanc, il n'y a plus rien à partager. L'élève reprend son argumentation mais ne parvient pas à les convaincre. Le maître conclut alors la discussion en renvoyant chacun à la recherche: *« Il faut que vous retravailliez là-dessus; lorsque vous aurez quelque chose de neuf, vous revenez en parler. »* La semaine suivante, l'élève a affiné sa démonstration ; il reprend comme la première fois, mais avant que tout le tableau ait blanchi, il s'arrête et leur dit: *« Vous voyez ce petit carré. Bon, je l'agrandis, je fais un zoom comme pour les photos et je recommence le partage et comme ça, je peux toujours continuer! »* Cette fois, tout le monde est convaincu mais les deux contestataires veulent tout de même intervenir : en cherchant des arguments pour convaincre la classe que leur copain avait tort, ils sont parvenus à la même conclusion que lui mais d'une autre façon. *« Quand on écrit les fractions 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, ... on multiplie le nombre du bas par deux et cela nous donne chaque fois une nouvelle fraction; comme on peut toujours recommencer et remultiplier par deux, et bien on voit que les fractions, c'est infini! »* Tout le monde étant d'accord, on décide de mettre ces deux argumentations au propre et de les afficher dans le couloir. Dans ce troisième cercle, le rôle de l'enseignant comme directeur de recherche est fondamental : c'est lui qui régule les échanges, qui gère les allers et retours entre recherche et communication jusqu'à la validation d'un résultat à publier ou au constat qu'on ne sait pas et au recours à une aide extérieure.

Le quatrième cercle est extérieur à la classe : à l'origine du projet, c'était un chercheur, un spécialiste des mathématiques auquel on peut envoyer les travaux de la classe (des résultats, mais aussi des questions restées sans réponse), quelqu'un d'extérieur à la classe, à l'école et qui peut être le garant de la qualité mathématique des travaux réalisés et ainsi autoriser leur publication. En fait, on verra que dans la pratique, les choses se sont souvent passées différemment, ce quatrième cercle se traduisant surtout par la publication , la communication hors de la classe, des travaux de recherche des enfants.

Enfin le dernier cercle est le congrès annuel des enfants chercheurs : tous les ans, les enfants qui ont fait, au cours de l'année scolaire, des travaux de recherche en mathématiques viennent les présenter au cours du congrès organisé par une association « Maths en Stock ». Lors des premiers congrès, les effectifs étant peu nombreux, la présentation prenait la forme de communications orales. Avec entre 300 et 450 participants aux derniers congrès, nous avons privilégié la communication par voie d'affiche et l'organisation d'ateliers de recherche en mathématiques. Ce congrès est un peu l'aboutissement du travail de toute une année tout en étant aussi, pour certains enfants, un tremplin vers d'autres recherches à travers les sujets découverts au cours de la journée. C'est une sorte de fête des mathématiques et l'engouement des enfants surprend souvent les parents accompagnateurs.

« Ils sont fous; c'est leur sortie de fin d'année, on leur fait faire des maths toute la journée, et en plus, ils sont contents! », nous a dit l'un d'eux.

1.2 Un lieu et un temps pour le plaisir de chercher en mathématiques.

Après cette description des différentes étapes de la recherche en classe, revenons sur quelques mots clefs qui permettent de mieux comprendre les activités proposées.

- "Un lieu".

Les recherches en mathématiques se déroulent dans la classe, avec l'enseignant de celle-ci. Il ne saurait être question pour nous de transférer cette activité en dehors de la classe et de faire une sorte de club mathématique, ou de la confier à un intervenant extérieur. Les ateliers de recherche en mathématiques (que nous désignerons par ARM dans la suite du texte) doivent faire partie du travail de la classe et ne pas se situer à côté. Dans la mesure où nous espérons un impact des ARM sur les apprentissages mathématiques des enfants, leur immersion dans les activités ordinaires de la classe nous semble fondamentale. Nous voulons éviter de produire un dédoublement des mathématiques dans la tête des enfants : d'un côté, les "maths sympa" du club mathématique ou de l'intervenant extérieur, et de l'autre les "maths rasoir" de la classe, du maître ou de la maîtresse.

L'unité de lieu est une condition nécessaire au maintien de l'unité des mathématiques.

- "Un temps".

Les ARM sont l’un des moments de l'activité mathématiques des enfants dans la classe; un moment important, mais un moment limité : selon les classes, les ARM représentent en moyenne entre 30 min et 1 h par semaine. L'ARM, lieu d'apprentissage d'une démarche, doit exister avec (et non remplacer) les situations d'apprentissage des savoirs figurant au programme de mathématiques de la classe. L'objectif à terme est de faire évoluer l'image que les enfants ont des mathématiques et de leur permettre d'aborder dans un autre état d'esprit les apprentissages plus classiques.

- "Le plaisir".

Nous voulons faire découvrir aux enfants des mathématiques qui peuvent être source de plaisir au même titre que la lecture, la musique, la peinture, ... Cette découverte passe par la liberté: peut-il y avoir plaisir si on fait des mathématiques parce qu'on y est contraint ? Et la question du caractère obligatoire ou facultatif de cette activité peut légitimement être posée. Nous avons choisi de proposer les ARM à tous les enfants pour deux raisons.

D'une part, un enfant ne peut découvrir qu'il est possible de chercher en mathématiques et d'y trouver du plaisir, si on ne lui en offre pas l'opportunité; d'autre part, cela nous semblait indispensable pour ne pas isoler les ARM des autres apprentissages. Mais par ailleurs nous ouvrons malgré tout, avec les ARM, un espace de liberté dans la classe du fait que nous nous affranchissons pour un temps de la contrainte des programmes, et que l'enfant a le libre choix des problèmes qu'il va chercher à résoudre : il n'est confronté qu'à des questions qui ont stimulé sa curiosité et qu'il se pose réellement.

- "Chercher en mathématiques".

Après l'évocation de l'espace de liberté des ARM, voici deux mots qui fixent le cadre, l'objet du travail. Tout est possible ; la seule contrainte est de <u>chercher</u> et de le faire dans le champ des <u>mathématiques</u>. Mais tous les acteurs de l'ARM (élèves, enseignant, chercheur) ne mettent pas les mêmes réalités derrière ces mots et tout au long de l'année, le contenu des ARM va être l'objet d'une négociation dans la classe. *« Est-ce bien de la recherche ? Sont-ce des mathématiques? »* Ces deux questions reviendront sans cesse dans la bouche de l'enseignant comme dans celles des enfants. Par un processus analogue à celui fonctionnant chez les personnages mis en scène par Imre Lakatos dans son ouvrage « Preuves et réfutations » au sujet des polyèdres convexes, les enfants vont, tout en pratiquant la recherche en mathématiques, faire évoluer leur définition de celle-ci. Cette négociation permanente est un élément fondamental pour comprendre l'impact des ARM sur l'ensemble des apprentissages à l'école (les élèves manifestent dès le démarrage d'un ARM leurs conceptions à la fois des mathématiques et de la recherche, et c'est la pratique de la recherche en mathématiques qui va les conduire progressivement à réviser celles-ci) et l'investissement des enfants dans ce type d'activité (beaucoup d'enfants se remettent à exister en tant que sujet face aux mathématiques, ce dont ils ne soupçonnaient plus la possibilité); nous essayerons d'illustrer cela sur quelques exemples dans la troisième partie.

1.3 Comparaison avec d'autres dispositifs.

Le dispositif qui nous a sans doute le plus influencé lors de la conception des ARM est certainement celui de Math en Jeans (acronyme de "Méthode d'Apprentissage des THéories mathématiques en Jumelant des Etablissements pour une Approche Nouvelle du Savoir") et on pourra trouver de nombreuses ressemblances entre les ARM et les recherches en mathématiques proposées aux collégiens et aux lycéens dans le cadre des actions "Math en Jeans". Cependant, dès le début, nos deux dispositifs se sont différenciés sur un point important : comme nous l'avons écrit plus haut, les ARM sont intégrés dans le fonctionnement ordinaire de la classe et sont proposés à tous les élèves de celle-ci, alors que les jumelages "Math en Jeans" concernent un groupe d'élèves volontaires et se déroulent en général dans l'établissement, mais en dehors des heures de cours.

D'autres dispositifs ont en commun avec les ARM l'objectif d'initier les élèves à la démarche scientifique ; leurs approches de celle-ci diffèrent : l'utilisation de situations-problèmes insiste sur le franchissement d'obstacles et, si la recherche tient une place importante dans ce dispositif, c'est parce qu'elle doit permettre la construction de nouveaux savoirs mathématiques par les enfants ; la résolution de problèmes ouverts (cf. travaux de l'Irem de Lyon) est, quant à elle, davantage centrée sur la recherche : faire des essais, conjecturer, produire des contre-exemples, valider une conjecture, ... ; enfin, le débat scientifique (cf. travaux de Marc Legrand, Irem de Grenoble) met lui l'accent sur la négociation de la preuve, de la validation. Les ARM empruntent beaucoup à chacun de ces dispositifs, mais leur spécificité réside surtout dans la volonté de transposer dans la classe le travail du chercheur en mathématiques, en se centrant sur le processus plus que sur les résultats.

Terminons ce panorama des dispositifs qui nous ont inspirés en citant les "chantiers" et les "coins" mathématiques expérimentés depuis plus de dix ans en Suisse romande par nos collègues du Groupe de travail pour l'Etude et la Recherche de Moyens d'Enseignement et d'apprentissage de l'IRDP. Ici encore, "apprendre à chercher" est l'objectif central, mais on peut noter deux différences fondamentales avec les ARM : la recherche est en général beaucoup plus cadré quant à son contenu qui doit rester dans les limites du programme de la classe et il n'y a pas de mise en contact des élèves avec le monde de la recherche en mathématiques.

2 Historique du projet.

2.1 Les débuts.

C'est dans une école de Draguignan utilisant les techniques Freinet que l'expérience a débuté au cours de l'année scolaire 91/92 ; elle concernait alors les soixante élèves du cycle 3 de cette école qui ont, pendant un an, effectué des recherches sur le thème des nombres et correspondu avec un chercheur de Jussieu. Pour une relation plus complète du travail réalisé au cours de cette première année, je renvoie à la lecture de [Eysseric & al 96].

A partir de l'année scolaire 92/93 et pour une durée de 4 ans, le projet a obtenu le soutien de l'IUFM de Nice par l'intermédiaire de son Département Interdisciplinaire d'Etudes, de Recherche et de Formation. Durant cette deuxième année, les classes du cycle 3 de l'école F.Mireur de Draguignan étaient toujours les seules concernées par les ARM ; leur thème de recherche était cette fois la géométrie et une vidéo [Eysseric & al 93] a été réalisé afin de présenter la démarche à d'autres enseignants. Enfin pour la première fois, un congrès a rassemblé au centre IUFM de Draguignan les enfants chercheurs : ce fut la première édition de Maths en Stock avec 70 élèves participants.

2.2 Expérimentation et formation.

Durant cette deuxième période (de fin 93 à juin 96), notre travail s'est articulé autour de deux axes principaux : diversifier les terrains d'expérimentation et les stabiliser ; intégrer les ARM dans la formation initiale et continue des instituteurs et professeurs d'école.

2.2.1 La diversification des terrains d'expérimentation.

Celle-ci s'est réalisée par deux canaux : d'une part, l'organisation en novembre 93 d'un stage de formation continue dont l'objectif était d'initier des enseignants volontaires à la pratique des ARM et d'autre part, un appel à volontaires lancé en mai 94 dans les différentes circonscriptions du Var, suivi de plusieurs conférences pédagogiques chez les IEN qui ont bien voulu nous inviter. L'organisation chaque année du Congrès Maths en Stock (120 participants pour la deuxième édition à Draguignan en avril 94, 220 pour le troisième congrès à Toulon-La Garde en juin 95 et plus de 300 à Draguignan en juin 96), la mise en relation des classes avec des personnes ressources (professeurs ou chercheurs en mathématiques) et en particulier, la collaboration de Y. Lafont, chargé de recherche au CNRS, qui a passé quatre journées dans des écoles de la circonscription de St Maximin (interview du chercheur par les enfants, animation d'ateliers de recherche, ...) ainsi que nos nombreuses visites dans des classes pour assister aux ARM et en enregistrer le contenu ont contribué à la stabilisation d'un noyau d'une dizaine d'enseignants qui pratiquent maintenant les ARM dans leurs classes depuis 3 ou 4 ans.

2.2.2 L'intégration dans la formation.

Dés le début, nous avons intégré la formation dans notre projet autour des ARM. En effet, c'est à grâce à un stage de formation continue de deux fois une semaine (novembre 93, puis mars 95) que nous avons pu commencer à étendre l'expérimentation à un plus grand nombre de classes. Ces stages avaient plusieurs objectifs : initier les enseignants à une pratique personnelle de la recherche en mathématiques ; les familiariser avec les ARM par des visites de classes, ainsi que par des séquences de recherche avec des enfants ; réfléchir ensemble aux difficultés liées à la mise en place de ces ARM ainsi qu'à leur incidence sur les apprentissages des élèves ; permettre à chaque enseignant de construire son projet d'ARM pour sa classe.

C'est dans le même esprit qu'un module de formation d'une semaine a été proposé en 96 et 97 à quelques PE volontaires.

Enfin, il faut signaler dans ce volet formation les huit mémoires professionnels réalisés entre 95 et 97 par des PE sur le thème des ARM ; une publication actuellement en préparation fera une synthèse de ces travaux.

2.3 L'association Maths en Stock.

La nouveauté de l'année 97 a été la constitution d'une association sans but lucratif (régie par la loi 1901), cadre juridique qui devrait nous faciliter la recherche de subventions et assurer l'autonomie financière du projet. Les deux objectifs principaux de l'association demeurent l'expérimentation avec le suivi des 20 à 30 classes qui pratiquent les ARM dans le Var, et la formation initiale et continue. Par ailleurs, un autre axe de travail pour Maths en Stock est la communication : diffusion de nos travaux via des publications et/ou des interventions dans des colloques, communication entre les classes pratiquant les ARM (publication des actes des Congrès Maths en Stock, utilisation d'internet, ...).

Actuellement, par le biais d'animations pédagogiques en circonscription, nous diffusons le dispositif auprès des enseignants des écoles de la région PACA : des classes des Hautes-Alpes, du Vaucluse et des Bouches du Rhône ont intégré en 99/2000et en 2000/2001 le dispositif Maths en Stock et il y aura bientôt une centaine de classes associées à ce projet.

Les nouvelles pistes que nous explorons sont :

- l'organisation de "classes mathématiques" sur une semaine, avec une forte connotation "recherche";
- l'extension du dispositif à des classes de sixième du collège (un obstacle important : l'horaire souvent très réduit dont dispose le professeur de mathématiques avec sa classe) ;
- le transfert du dispositif dans des classes de Maternelle: à ce jour, nous ne disposons que de l'expérience fort encourageante d'une classe de Moyens-Grands de Vitrolles en 99/00 ; plusieurs classes de Maternelle tentent l'expérience et un bilan en sera fait à la fin 2001 ;

- l'organisation de "défis mathématiques" autour de situations de recherche en mathématiques.

3. Du projet aux réalisations.

3.1 Une situation didactique inhabituelle.

Dés que nous avons présenté les ARM à des enseignants de l'école élémentaire afin de les expérimenter ailleurs qu'à l'école F. Mireur de Draguignan (cf. stage de formation continue de novembre 1993,...), nous avons été confrontés à un double mouvement qui peut paraître a priori paradoxal : d'une part, un engouement pour ce type d'activité et d'autre part, la crainte de s'y lancer. Et parmi les enseignants qui pratiquent actuellement les ARM dans leur classe, beaucoup ont hésité parfois plusieurs années avant de se lancer, remettant sans arrêt au mois ou à l'année suivante (cf. témoignage de P. Châtard en annexe). La peur de se retrouver face à des problèmes de mathématiques posés par les enfants et auxquels ils ne sont pas capables de répondre est un argument fréquemment avancé par ceux qui ont envie de commencer mais n'osent pas franchir le pas, ce qu'ils résument souvent en disant : *"nous ne sommes pas assez bons en mathématiques pour faire cela!"*. Le manque de temps est aussi souvent invoqué, en particulier par des enseignants qui ont essayé les ARM, puis ont arrêté : *"c'est très intéressant, mais le temps n'est pas élastique, on ne peut pas tout faire..."*. Téresa Assude, dans son mémoire professionnel de professeur des écoles [Assude 97], tente d'expliquer ces réticences par rapport à la temporalité du dispositif. Dans les situations didactiques traditionnelles l'enseignant a la maîtrise complète du temps ; en particulier, il sait toujours ce qui vient après, le déroulement des séquences et des apprentissages étant régi par un texte du savoir délimité par des programmes officiels et des manuels. Or la grande nouveauté dans les ARM, c'est qu'il n'y a pas de texte du savoir a priori, car ce qui est au centre de l'activité, ce n'est pas un savoir à construire, mais un style de travail (celui du chercheur en mathématiques). La conséquence en est une forte déstabilisation de l'enseignant qui ne peut plus maîtriser le futur, connaître la suite des événements, ce que T.Assude exprime ainsi : *"l'enseignant doit accepter le partage des responsabilités et la co-production du texte du savoir"* et cela lui permet d'énoncer *"cinq règles qui permettent de négocier le contrat de recherche et par là de faire avancer le temps de recherche :*

Règle 1 : on est co-responsable de la recherche du groupe.

Règle 2 : on se pose des questions et on étudie des problèmes.

Règle 3 : on communique l'état d'avancement de nos recherches.

Règle 4 : on doit aboutir à un produit fini.

Règle 5 : les travaux doivent être validés par la classe (l'enseignant inclus)."

[Assude 97]

3.2 Qu'est-ce qu'un sujet de recherche ?

L'action de chercher en mathématiques est-elle caractéristique des ARM ? Nous allons répondre par la négative à cette question. La pratique des ARM et l'analyse de celle-ci nous a conduit à bien distinguer ce que nous appellerons un sujet de recherche d'un problème de recherche ou de la phase de recherche d'une situation d'apprentissage.

Dans cette dernière, contrairement aux ARM, c'est le texte du savoir à construire qui est premier ; il y aura dans les phases de recherche d'une situation didactique réinvestissement mais pas apprentissage de la démarche de recherche. Par contre, lorsqu'un problème de recherche est proposé à des élèves, l'objectif est bien de leur apprendre à chercher et cela par le biais de la résolution d'un problème précis posé par l'enseignant.

Dans les ARM, nous voulons transposer le plus complètement possible la démarche du chercheur ; or, il nous semble que celle-ci commence souvent par la formulation du problème. C'est ce qui nous conduit à opposer le sujet de recherche au problème de recherche. Dans un cas, il s'agit de se poser des questions auxquelles on essayera ensuite de répondre sur un sujet que l'on choisit ou qui nous est proposé, dans l'autre, on doit répondre à une question posée par un tiers.

Confondre les deux aurait deux conséquences non négligeables :

1) restreindre très fortement l'espace de liberté des ARM ;
2) occulter l'aspect "formulation d'un problème" de l'apprentissage de la démarche de recherche.

A ce propos, il est important de remarquer que la différence entre un sujet et un problème de recherche ne se situe pas au niveau formel. Un sujet de recherche peut très bien être dévolu à la classe par l'intermédiaire d'un problème de recherche s'il est clair pour tous les acteurs que l'on attend pas seulement la solution du problème mais toutes les questions qu'il peut conduire à se poser. De même, certaines circonstances peuvent entraîner la fermeture d'une situation de recherche qui sera alors perçue comme un problème ordinaire. Nous en avons fait récemment l'expérience avec un groupe d'adultes : aussitôt le sujet exposé, un des participants a formulé <u>sa</u> question, et en raison de la personnalité de celui-ci et de sa situation dans le groupe, <u>sa</u> question s'est imposée au groupe comme <u>la</u> question à laquelle chacun devait répondre, entraînant chez certains un blocage du à la disparition d'un espace de liberté : ils ne se sentaient plus autorisés à poser <u>leurs</u> questions et, comme <u>la</u> question posée ne les intéressait pas, ils rejetaient l'activité.

3.3 Comment démarrer la recherche dans une classe.

Tous les enseignants ne démarrent pas la recherche dans leur classe de la même façon. Les témoignages recueillis et les observations réalisées depuis cinq ans nous permettent de proposer une classification de ces démarrages par rapport au degré d'ouverture de la situation de départ.

3.3.1 Ouverture totale.

Elle est en général le fait d'enseignants aguerris qui ne redoutent pas la non maîtrise du temps. Ce fut le cas d'une enseignante qui, au retour du stage de formation continue de novembre 93, a expliqué aux enfants de son CE2 les raisons de son absence d'une semaine et leur a dit qu'elle avait fait de la recherche en mathématiques ; puis, elle leur a proposé d'en faire autant et l'ARM a démarré ainsi avec cette seule consigne : tout est possible à condition que ce soit des mathématiques et qu'on cherche. Un autre exemple nous est fourni par une maîtresse de CE2 qui, elle, a commencé en distribuant à ses élèves une photocopie du sommaire d'un ouvrage intitulé "Contes de Provence" et avec la consigne: *"à partir de ce document, vous allez faire des recherches en mathématiques!"*. Dans un cas comme dans l'autre, on a été très rapidement confronté à des enfants qui faisaient des opérations ou qui se posaient des petits problèmes ayant la forme de ceux résolus en classe au cours des semaines précédentes. Ainsi les élèves manifestaient d'entrée leur représentation des mathématiques et le processus de négociation évoqué en 1.2 était lancé par des remarques de certains enfants: *"est-ce de la recherche ?, ..."*.

3.3.2 Situations ouvertes encadrées.

Il s'agit alors de proposer une situation aux enfants et de les amener à poser leurs questions. En général, un travail important sera fait avec la classe pour trier les questions de mathématiques et celles qui, sans être pour autant inintéressantes, relèvent d'un autre champ disciplinaire, ce qui est de la recherche et ce qui n'en est pas.

Quelques exemples :

- Un enseignant de CE2 a proposé la situation suivante: *"on jette trois dés"*, puis il a demandé aux élèves de rechercher toutes les questions que l'on pouvait se poser; celles-ci ont alors été inscrites au tableau et, dans une phase collective, on a trié les questions, ceci conduisant à donner une première définition de la recherche en mathématiques. Enfin, les enfants ont été invités à choisir une des questions dont il avait été décidé collectivement qu'elles entraient dans le champ de la recherche et des mathématiques, puis à essayer de la résoudre seul ou en groupe de deux ou trois.
- La même démarche peut être envisagée avec d'autres situations comme: *"on a des pièces de 1F, de 2F et de 5F"*, ...
- Dans un CE1/CE2 on a proposé le sujet suivant: *"on choisit un nombre de trois chiffres; avec ces trois chiffres ordonnés du plus grand au plus petit, on obtient un nouveau nombre ; avec ces mêmes trois chiffres ordonnés du plus petit au plus grand, on en obtient un deuxième ; on calcule la différence des deux puis on recommence toutes les opérations, mais cette fois à partir du résultat obtenu, ... on observe et on se pose des questions!"*.

Un groupe de cinq ou six enfants s'est passionné sur ce sujet durant plus de six mois. Ils ont conjecturé des résultats, tenté d'avancer des explications, élargi le problème aux nombres de 2, puis 4, 5 et même 6 chiffres ; ils ont fait un très grand nombre de soustractions, mais cela n'était pas gratuit ; cette situation avait aiguisé leur curiosité sur les nombres ; ils découvraient des phénomènes qu'ils avaient envie d'explorer, de comprendre et les opérations réalisées servaient à cette exploration.

3.3.3 Manipulation d'un matériel.

C'est sans doute le démarrage le plus fréquent dans les classes. Le passage par la manipulation d'un matériel permet dans un premier temps d'occulter la représentation dominante des mathématiques (*"faire des mathématiques, c'est faire des calculs"*), mais au cours des phases de communication, à travers des remarques comme: *mais est-ce que c'est des mathématiques?", ...* , le débat sur les représentations des mathématiques et de la recherche resurgira.

Voici quelques-uns des matériels qui ont été utilisés : jeux de stratégie, machines à calculer, ficelles et nœuds, motifs géométriques à reproduire, solides à construire, machines à jetons reproduisant le fonctionnement d'un ordinateur, ... Nous renvoyons à une publication ultérieure pour une description plus détaillée des travaux de recherche effectués par les enfants à partir de ces matériels. Mais une difficulté spécifique à ces points de départ mérite d'être signalée : il arrive que des enfants s'enferment dans la manipulation, jouent sans jamais faire de recherche en mathématiques ; comment faire évoluer alors la situation ?

Une première réponse peut être apportée par l'intermédiaire des phases de communication au cours desquelles chaque enfant devra exposer le résultat de son travail et affronter le regard critique de ces pairs ; c'est souvent à travers les questions que les autres vont lui poser au sujet de ses manipulations que l'enfant va être conduit à quitter le stade du jeu pour véritablement chercher. Mais on peut aussi se demander si cette manipulation, ce jeu n'est pas lui-même un élément important de la recherche : rendre le sujet suffisamment familier pour pouvoir ensuite le questionner. Cela pourrait expliquer le fait que certains enfants aient besoin de manipuler plus longtemps que d'autres avant de passer à une "véritable recherche", les matériels proposés étant plus ou moins connus de certains enfants. Le chercheur ne passe-t-il pas lui aussi parfois beaucoup de temps à se familiariser avec son sujet avant d'être capable de formuler la question qu'il va essayer de résoudre ? Et un observateur extérieur pourrait dans ces moments croire qu'il ne fait rien, car effectivement il ne produit rien, il n'y a aucune matérialisation de son travail. Certains enfants dont nous pourrions être tentés de dire qu'ils ne font rien ne sont-ils pas un peu dans la même situation ?

3.3.4 Questions fermées non traditionnelles.

Il s'agit essentiellement de problèmes ludiques extraits de rallyes mathématiques, qui, bien que généralement fermés, peuvent facilement déboucher sur une situation ouverte : une fois la question résolue (ou parfois avant même qu'elle le soit), la curiosité est aiguisée et on a envie d'aller plus loin, de se poser d'autres questions.

3.4 La communication dans les ARM.

Lors du premier contact avec les ARM, la plupart des observateurs néophytes remarquent surtout la phase d'action : la ruche bourdonnante des enfants effectuant leurs recherches en mathématiques. Et lorsqu'ils tentent de transposer l'activité dans leur classe, ils se limitent à reproduire celle-ci. Mais très rapidement, et c'est ce qui est unanimement ressorti du stage-retour de mars 95, l'activité ainsi mise en place ne les satisfait plus ; ils ont l'impression de tourner en rond. En analysant ensemble ce sentiment de frustration, ils ont alors pris conscience de l'importance de cette phase de communication qu'ils avaient jusqu'ici négligée parce qu'elle est coûteuse en temps, moins ludique et nécessite une organisation rigoureuse. En effet, c'est la communication plus que l'action qui constitue le véritable moteur de l'ARM : la communication favorise le processus de négociation évoqué en 1.2 et l'évolution des représentations des enfants à propos de la recherche en mathématiques ; c'est la communication qui permet, au travers des réactions suscitées, de relancer une recherche qui piétinait ; enfin, quelle signification peut avoir l'action de chercher si on n'a pas le projet de communiquer à autrui le résultat de son travail. La communication doit donc déjà exister "en projet" au moment de l'action (cf. Règles 3,4 et 5 proposées dans [Assude 97]) ; c'est elle qui va réguler l'ensemble du processus de l'ARM et la mise en place de celui-ci nécessite donc l'organisation par l'enseignant de cette communication des recherches dans sa classe (exposés, affiches, journaux, congrès, ...). On trouvera dans [Marill 96] (mémoire professionnel de PE) quelques analyses détaillées du rôle de la communication dans les ARM.

Enfin la communication des résultats des recherches hors la classe est en général l'occasion de réorganiser les savoirs produits, ce qui représente une part importante du travail des chercheurs.

4. Perspectives.

Après avoir évoqué, dans le paragraphe précédent, les points sur lesquels l'analyse des ARM a le plus avancé, il nous reste à faire un inventaire non exhaustif de questions encore très ouvertes sur les ARM. Pour beaucoup d'entre elles, nous avons des intuitions de réponses, quelques témoignages qui confirment des intimes convictions, mais le travail réalisé est encore insuffisant pour fournir des réponses bien étoffées et argumentées. Ces questions sont ici, comme au cours de l'atelier, livrées en l'état afin de mieux situer l'avancement de notre réflexion et de susciter d'éventuelles réactions susceptibles de faire progresser celle-ci.

4.1 A quoi servent les ARM ?

Y a-t-il un impact réel sur les apprentissages ? sur la façon d'aborder les mathématiques ? les problèmes ? De nombreux témoignages nous font penser que oui (cf. annexe).

Des enfants en particulier qui auparavant se plaçaient en position d'attente dès que l'enseignant annonçait un problème de mathématiques, se mettent à chercher (sans forcément trouver), à essayer de faire quelque chose pour résoudre le problème.

Mais une étude plus scientifique de cet impact reste à faire.

4.2 Le plaisir de chercher: réalité ou fantasme?

Là aussi, tous les témoignages concordent, mais il faudrait réaliser une étude comparative avec les enfants ne pratiquant pas les ARM, reprenant et améliorant celle amorcée dans son mémoire professionnel par V. Monteil [Monteil 95].

4.3 Les ARM: obligatoires ou facultatifs?

Nous avons dit plus haut dans quel sens (et pourquoi) nous avons tranché cette question, mais peut-être faudra-t-il se la reposer si on dépasse un jour le stade de l'expérimentation. La question peut alors rebondir à un autre niveau, celui de l'enseignant : jusqu'ici, tous les enseignants qui ont pratiqué les ARM étaient volontaires ; le dispositif qui a fonctionné ainsi peut-il survivre si l'ARM est imposé à chaque enseignant comme une activité du programme parmi d'autres ?

4.4 La recherche oui, mais pourquoi en mathématiques ?

Qu'est-ce qui peut justifier le fait de réaliser un apprentissage de la démarche scientifique par le biais de recherches en mathématiques? Le contenu des recherches ne doit-il pas être élargi aux sciences ? à d'autres disciplines? Comment situer le travail organisé dans les ARM par rapport à d'autres initiatives comme celle de Georges Charpak avec "La main à la pâte" ?

4.5 La mémoire du travail de la classe.

On a pu remarquer que, selon les classes, la mémoire du travail, d'une séquence sur l'autre, est organisée différemment : certains laissent cette mémoire entièrement à la charge des élèves, d'autres, à l'opposé, conservent l'ensemble des brouillons de recherche des enfants avec la date et le nom des auteurs. T.Assude dans son mémoire professionnel [Assude 97] a amorcé une étude du fonctionnement de la mémoire dans les ARM, mais ce travail encore embryonnaire mériterait d'être repris et complété.

4.6 Le rôle du chercheur.

Jusqu'à ce jour, seule l'école F.Mireur a pu fonctionner avec un chercheur durant une année (91/92) suivant le dispositif projeté. Depuis deux ans, Y.Lafont vient passer une journée dans deux écoles du département, mais nous ne sommes pas parvenus à mettre en place une communication régulière entre le chercheur et les classes pratiquant les ARM.

Plus généralement, nous n'avons pas et nous n'aurons jamais un chercheur pour chaque classe, alors... qui peut remplacer le chercheur et être cette personne-ressource, spécialiste des mathématiques, garante de la qualité mathématique des recherches effectuées ? Un professeur de mathématiques ? Un conseiller pédagogique spécialiste des mathématiques ? ... Ces différentes pistes ont été envisagées et demandent à être approfondies, mais un élément important est apparu : on ne peut remplacer le chercheur que par quelqu'un qui a lui-même une expérience, une pratique de la recherche. Sinon on risque, si l'on n'y prend garde, d'assister à un dérive des ARM vers la production d'un texte du savoir au détriment de la démarche de recherche. En bref, il nous semble que le chercheur (professionnel) ne peut être remplacé que par un chercheur (éventuellement amateur).

4.7 La formation.

La formation à la pratique des ARM a pour l'instant été réservée à quelques volontaires qui avaient été informés de l'expérimentation. Mais la place à donner à ce dispositif dans le cadre de la formation des professeurs des écoles, mais aussi des professeurs des lycées et collèges reste à réfléchir. En parallèle, c'est plus généralement la place d'une initiation à la recherche dans la formation des enseignants, tout comme les liens entre le monde de la recherche et celui de l'éducation qui sont à repenser, ou à penser.

5. Chronique d'une recherche:

Cette chronique a été rédigée à partir, d'une part, de la correspondance entre la classe du CM2 de l'école de Rians et M. Yves Lafont, chargé de recherches au CNRS (IML de Luminy), et de l'enregistrement audio du travail réalisé par les enfants lors de la visite du chercheur dans leur classe, d’autre part. Pour la retranscription des dialogues quelques abréviations seront utilisées : C désignera le chercheur, M le maître de la classe et E_i un élève.

5.1 Travail en Atelier de Recherche en Mathématiques:

- construction d'une dizaine de solides (le matériel utilisé est le matériel Polydron: faces polygonales en plastique rigide s'emboîtant les unes dans les autres).

- observation des solides ; comptage des faces, des arêtes et des sommets; organisation des résultats dans un tableau.
- formulation d'un premier problème :

"Les faces, c'est assez facile à compter; mais pour les arêtes ou les sommets, c'est plus dur! Est-il possible de trouver un moyen de calculer le nombre d'arêtes ou de sommets sans les compter ?"

- ce problème amène les enfants à rechercher une éventuelle relation entre le nombre de faces, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets d'un même solide.

5.2 Formulation devant la classe des résultats obtenus :

- plusieurs enfants ont redécouvert à partir des résultats consignés dans leur tableau la loi d'Euler:

  Nombre de faces + Nombre de sommets - 2 = Nombre d'arêtes
- cette loi est exposée à la classe, discutée et vérifiée sur les différents solides fabriqués.
- toute la classe s'étant mise d'accord sur la formulation de la loi, un courrier pour Yves Lafont est préparé.
- l'enfant qui tape le fax se trompe : il inverse arêtes et sommets; ainsi le document que recevra le chercheur (fax du 27/11/97) contiendra des résultats erronés, ce qui n'était pas le cas au moment de l'exposition en classe...En outre, deux questions sont posées au chercheur :

Est-ce que cette règle est générale pour tous les solides ?

Peut-on trouver une loi qui nous donne le nombre d'arêtes et de sommets en connaissant le nombre de faces?

5.3 Réponse par fax du chercheur:

" Bonjour la classe « Les Pies »

J'ai bien reçu votre fax, et j'aimerais en savoir un peu plus sur vous. Par exemple, en quelle année êtes-vous ? Combien êtes- vous ? Quel est le nom de votre professeur ?

Votre recherche porte sur un domaine très intéressant des mathématiques, qui s'appelle la *topologie*. Je pense que vous avez fait une confusion, sans doute entre les sommets et les arêtes. Pouvez-vous m'envoyer les dessins (ou les patrons) des solides que vous avez construits ?

Cela dit, il y a une formule qui vaut pour beaucoup de solides, mais pas pour tous. Essayez donc de construire un solide qui ressemble à une bouée, c'est-à-dire avec un trou au milieu (les mathématiciens appellent cela un *tore*).

Essayez aussi de construire deux solides (sans trous) qui ont le même nombre de faces, mais pas le même nombre de sommets. Cela peut répondre à votre deuxième question."

5.4 Arrivée du chercheur dans l'école:

- celle-ci coïncide avec la réception du texte ci-dessus par les enfants ; on retourne au travail en ARM pour :
  - corriger la loi si elle est erronée;
  - représenter les solides fabriqués pour illustrer la loi obtenue.

5.5 Travail en ARM en présence du chercheur:

- à partir des solides, tableau et loi sont rectifiés.
- plusieurs enfants se lancent dans la représentation des solides par un de leurs patrons; cela débouche sur de nouvelles découvertes :
  - des solides différents peuvent avoir le même nombre de faces avec des nombres d'arêtes et de sommets qui diffèrent;
  - Sébastien propose au chercheur une méthode pour compter les arêtes et les sommets d'un solide sur son patron.

5.6 Exposition, formulations des découvertes du matin:

- écriture de la loi corrigée :
  Nombre d'arêtes = Nombre de faces + Nombre de sommets - 2
- vérification collective de la loi sur les différents solides (de nouveaux solides ont été fabriqués au cours de l'ARM du matin).
- retour aux deux questions que les enfants avaient posées au chercheur :
  - à propos de la première, il leur rappelle la suggestion faite dans sa réponse écrite : essayer de construire un solide qui ressemble à une bouée.
  - mais la discussion s'engage rapidement sur la deuxième question :

peut-on trouver une loi qui nous donne le nombre d'arêtes et de sommets en connaissant le nombre de faces?

Marlène et Michaël répondent "non" en présentant les deux solides à 8 faces qu'ils ont fabriqués :

le solide de Marlène (prisme à base hexagonale)

8 faces 12 sommets 18 arêtes

le solide de Michaël (octaèdre régulier)

8 faces 6 sommets 12 arêtes

Ils recomptent, vérifient la loi devant la classe et disent :

"Non, on ne peut pas car 8 faces donnent 6 et 12, ou 12 et 18 pour les sommets et les arêtes."

Un autre élève prend alors la parole :

"Moi je dirais non, car on est obligé d'avoir les faces et les sommets, ou les faces et les arêtes. Si on a les faces et les sommets, on peut calculer les arêtes :

Nombre d'arêtes = Nombre de faces + Nombre de sommets - 2

Si on a les faces et les arêtes, on peut calculer les sommets :

Nombre de sommets = Nombre d'arêtes + 2 - Nombre de faces."

- l'enfant écrit les deux formules au tableau; il s'ensuit une discussion autour de différentes formules proposées par les enfants :

Nombre de sommets = Nombre d'arêtes - Nombre de faces + 2

"C'est la même chose dans un ordre différent :"

"Les deux formules, c'est pareil: dans la première, on ajoute 2 aux arêtes et ensuite on enlève les faces; dans la deuxième, on enlève d'abord les faces, puis on ajoute 2, c'est pareil !"

La formule: Nombre de faces = Nombre d'arêtes - Nombre de sommets + 2 , est proposée pour calculer les faces.

"Les faces, ça ne sert à rien de les calculer; c'est facile à compter !"

- les enfants prennent visiblement plaisir à ce nouveau jeu "trouver de nouvelles formules", mais il faut signaler que la plupart des formules sont énoncées en s'appuyant sur les nombres d'une ligne du tableau (un solide particulier) :

"8 (faces) = 12 (arêtes) -6 (sommets) + 2"

puis sont vérifiées sur les autres solides.

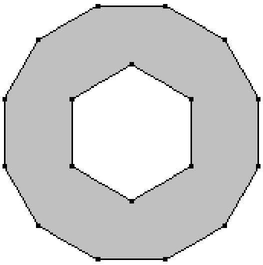
- le chercheur leur propose une formule qu'aucun élève n'a énoncée jusqu'ici : peut-on écrire Nombre de sommets = 2 - Nombre de faces + Nombre d'arêtes ?

  E: *"oui, on a juste changé l'ordre; mais pour calculer, il faudrait aller dans les “moins”."*

5.7 La bouée de Vivien :

- pendant la discussion ci-dessus, Vivien a construit un solide en forme de bouée ; il vient le présenter et on organise le comptage des faces, des arêtes et des sommets.

C'est un prisme droit à faces latérales carrées (12 extérieures et 6 intérieures) et de base ci-dessous :



vue de dessus

- à propos des arêtes non saillantes "du trou de la bouée", surgit alors une question :

E_1: *"Est-ce que ça, c'est une arête?"*

E_2: *"Oui, c'est une arête, car là, on compte une face, et une autre face à côté."*

C: *"On peut décider qu'une arête, c'est toujours la limite entre deux faces; comme cela, on ne se trompera pas; d'habitude les arêtes sont un peu comme une montagne; là on a des arêtes "presque plates" ou comme des vallées."*

- Un enfant remarque que le "dessus" et le "dessous" sont identiques et que cela peut raccourcir le comptage.
  - Le comptage aboutit à: 42 faces 78 arêtes 36 sommets

On calcule alors: Nombre de faces + Nombre de sommets - 2
et on trouve ... 76.
La formule serait-elle fausse pour la bouée de Vivien ?
E_1: *"Il y a une erreur dans le nombre de sommets; on en a compté deux de moins."*
M: *"Et si c'était le nombre d'arêtes qui soit faux !"*
C: *"Ou une erreur pour les faces..."*
E_2: *"Non, les faces, on sait les compter; c'est facile sans se tromper !"*
E_3: *"Il y a une erreur de 2, ou alors la loi ne marche pas."*
C: *"Et pourquoi la loi ne marcherait pas avec ce solide ?"*
E_3: *"Il doit y avoir une autre loi."*
C: *"Une autre loi pour quels solides ?"*
E_3: *"A partir d'un nombre limité d'arêtes, de sommets, de faces, on change de loi."*
C: *"Quand il y a beaucoup de faces, de sommets ou d'arêtes ?"*
E_4: *"A partir d'un certain nombre de faces, il faut changer la loi !"*
On note la proposition au tableau:

Quand le nombre de faces devient grand, on change de loi.

C: *"Ce serait intéressant de fabriquer d'autres solides avec beaucoup de faces, de sommets, d'arêtes; avec au moins 42 faces... Il serait aussi intéressant de fabriquer une autre bouée."*

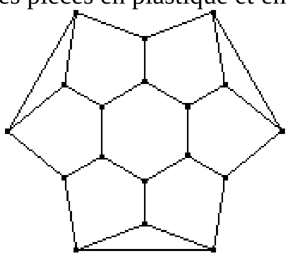
5.8 Retour à la recherche individuelle (ou en petits groupes) :

- On vérifie le comptage pour la bouée de Vivien.
- On fabrique d'autres solides pour savoir si la loi change, et quand est-ce qu'elle change.
- Certains utilisent ce temps pour s'approprier les lois qui ont été écrites au tableau au cours de la discussion en les vérifiant sur des solides.

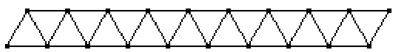
5.9 Le solide de Sébastien:

- L'annonce de la fabrication d'un nouveau "gros" solide interrompt le travail et ramène la classe à la discussion collective.

"Voilà le nouveau solide que j'ai fait ; bon là, il y a des trous, mais c'est des faces..." (il a manqué de pièces et il raisonne sur un solide en partie construit avec des pièces en plastique et en partie "pensé").



"dessus" ou "dessous" (les différents polygones ne sont pas coplanaires)



"le tour"

* le comptage aboutit à: 38 faces 36 sommets 72 arêtes
et on vérifie que la loi marche...
E: *"Peut-être que la loi change entre 38 et 42..."*
On en restera là pour l'instant : la recherche est à poursuivre...

5.10 Discussion autour du comptage des faces du solide de Sébastien :

E_1: *"Il n'y a que 19 faces, car "tout ça"* (en montrant la partie supérieure du solide), *c'est une seule face."*

* on recompte avec cette "convention" et on aboutit à 20 faces.

E_2: *"Je ne comprends pas pourquoi ça* (le tour), *tu dis que c'est plusieurs faces; si c'était rond* (allusion à un cylindre), *là, cela ne compterait qu'une seule face."*

C: *"Est-ce que cela change le nombre d'arêtes ?"*

E_2: *"Il compte les arêtes par petits morceaux et il dit que le haut, c'est une seule face !... Pour moi, il y a 3 faces, 2 arêtes ... et pas de sommets !"*

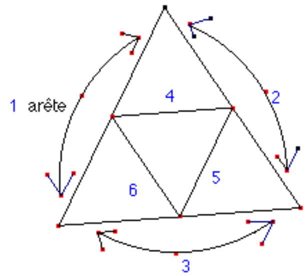
* La discussion est très animée sur ce qu'est une arête ou une face pour de tels "gros" solides; on touche là à des questions de nature topologique...(équivalence entre prisme et cylindre). La question ne sera pas tranchée et sera renvoyée à une éventuelle recherche ultérieure.

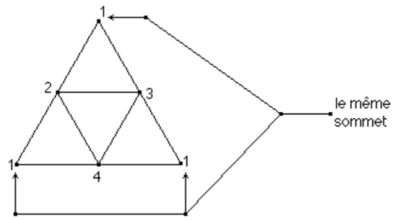
"Nous avons du mal à définir les faces dans le cas des bouées." (fax du 14/3/98)

5.11 Le comptage des sommets et des arêtes sur un patron :

Sébastien présente ce qu'il a trouvé le matin :

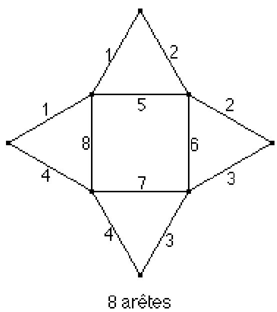
* la pyramide à base triangulaire (tétraèdre): *"4 faces: des triangles réguliers."*

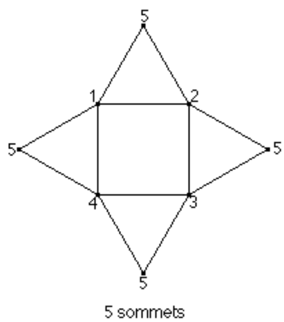




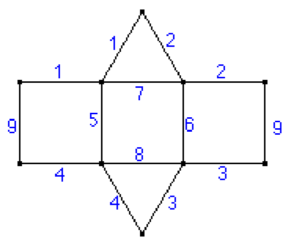
"Quand on referme "ça" et "ça", ça va se toucher ! ... donc 4 arêtes."
"Tout ça là, c'est un seul sommet, donc 4 sommets."
Critique: *"Et pour un grand patron ?"*
Réponse: *"C'est pareil! ça marche pour toutes les pyramides..."*

- Et il recommence avec la pyramide à base carrée :

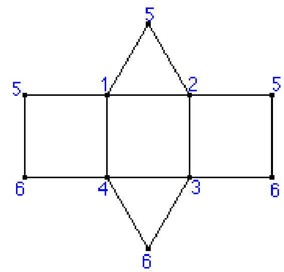




- Il ne parvient pas à retrouver l'extension de sa méthode qu'il avait proposée le matin pour le prisme à base triangulaire. Voici ce qu'il avait expliqué au chercheur :

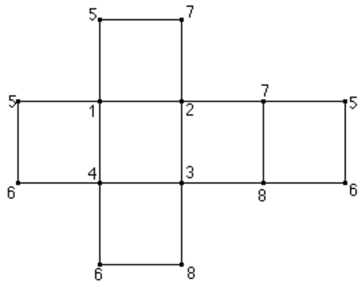


9 arêtes



6 sommets

- Il propose alors d'essayer sa méthode pour le cube; après quelques hésitations, il y parvient pour les sommets :



8 sommets

"5 "' et "6" sont identifiés moins rapidement que les autres:
"Quand on rabat, ça va se coller là-haut et ça fait le même sommet."
Pour les arêtes, un coloriage des regroupements 2 par 2 des segments du bord du patron lui permet de conclure avec l'aide du chercheur...

5.12 Conclusion de la journée :

- On renvoie au prochain ARM les questions en suspens et la mise au propre des formulations.
- Mais les enfants voudraient poursuivre et plusieurs, avant de sortir, annonce qu'ils ont de nouveaux solides à tester.
- On repart avec :

  - une loi reliant faces, arêtes et sommets, qui marche pour tous les solides fabriqués, sauf pour la bouée de Vivien; si cette loi change lorsque le nombre de faces est grand, c'est entre 38 et 42.

  - une méthode pour compter les arêtes et les sommets sur le patron qui fonctionne bien pour les pyramides, mais n'est pas encore tout à fait au point pour les autres solides.

6. Bibliographie :

Arsac G. & al [1991] : *Problème ouvert et situation-problème.* Irem de Lyon.

Assude T. [1997] : *L'atelier de recherche mathématique : problèmes de temps et de mémoire,* Mémoire professionnel PE2, IUFM de Nice, Centre de Draguignan.

Audin P. et Duchet P. [1989] : *La recherche mathématique à l'école: "Math en Jeans",* Séminaire de didactique des disciplines scientifiques, LSD2-IMAG, Grenoble.

Eysseric P. & al [1993] : *Le plaisir de chercher,* document vidéo, IUFM de Nice, Service audiovisuel du centre de Draguignan.

Eysseric P. & al [1996] : *Le plaisir de chercher,* in Le plaisir de chercher et autres textes ..., IUFM de Nice.

Eysseric P. [1999] : *Le plaisir de chercher*, in Repères, n° 35, avril 1999.

Legrand M. [1989] : *Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport à une communauté scientifique,* RDM, Vol. 9-3, p. 365 à 406, La Pensée Sauvage, Grenoble.

Legrand M. [1993] : *Débat scientifique en cours de mathématiques,* Repères Irem n° 10, Topiques éditions.

Marill F. [1996] : *La communication dans la recherche mathématique à l'école,* Mémoire professionnel PE2, IUFM de Nice, Centre de Draguignan.

Monteils V. [1995] : *Le plaisir de chercher,* Mémoire professionnel PE2, IUFM de Nice, Centre de Draguignan.

Vivre un Atelier de Recherche en Mathématiques

Pierre Eysseric

Cet article présente quelques sujets de problèmes proposés dans le cadre des Ateliers de Recherche en Mathématiques. Il a été publié sous cette forme dans le n° 70 de la revue Grand N ainsi que dans les n° 440 et 443 du bulletin de l'APMEP.

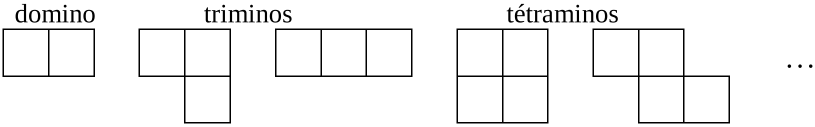
Les élèves sont répartis en ateliers regroupant trois ou quatre d'entre eux. Après avoir choisi l'un des sujets exposés ci-dessous, un groupe amorce son exploration selon les modalités des Ateliers de Recherche : formuler des questions (des problèmes) et tenter de les résoudre avec la perspective de communiquer à l'ensemble du groupe les résultats de la recherche (compte-rendu des essais infructueux, des impasses explorées, des pistes envisagées non abouties mais qui semblent intéressantes, des certitudes éprouvées…)

<u>Sujet n°1</u> : Pavage de polyminos.

Un polymino est un assemblage plan de carrés égaux (cases) tel que tout carré soit rattaché à la figure par au moins un de ses côtés.
Exemples de polyminos :

les dominos, les triminos, les tétraminos, les pentaminos, …

domino triminos tétraminos



Paver un polymino consiste à le recouvrir par des polyminos plus petits de telle sorte que toute case soit recouverte une fois et une seule.

Le problème général des conditions pour qu'on puisse paver un polymino par un type de polyminos donné n'est pas résolu à ce jour; mais de nombreux cas particuliers peuvent être abordés:

- Pavage d'un polymino carré par des dominos.
- Pavage d'un polymino carré privé d'une case par des dominos.
- Les deux problèmes précédents pour des polyminos rectangulaires.
- Pavage d'un polymino carré par des triminos.
- …

<u>Sujet n°2</u> : Les pesées.

On a un certain nombre de pièces en apparence toutes identiques. L'une d'elles est fausse (elle est plus légère ou plus lourde que les autres, on ne sait pas). On veut la retrouver en **<u>un nombre minimum de pesées</u>** à l'aide d'une balance à deux plateaux (une pesée indique si le contenu d'un des plateau est plus lourd, plus léger ou égal à celui de l'autre plateau).

<u>Sujet n°3 :</u> 22, v'la le chef.

On étudie le codage suivant :
On fait correspondre à chaque lettre le nombre correspondant à son rang dans l'alphabet, à chaque mot la somme de nombres codant ses lettres.

<u>Exemples:</u>
CHEF est codé par 3+8+5+6=22
Le mot-nombre DIX-HUIT est codé par 4+9+24+8+21+9+20=95

A partir de cette situation, envisager des recherches mathématiques à effectuer…

<u>Sujet n°4</u> : 6174, 495 et Cie.

Choisir un nombre de 4 chiffres; par exemple : **7148**
Ordonner les 4 chiffres du plus grand au plus petit ; sur l'exemple on obtient le nombre 8741
Ordonner les 4 chiffres du plus petit au plus grand ; sur l'exemple on obtient le nombre 1478
Calculer la différence des deux nombres ainsi obtenus :

8741 -1478 = **7263**

Recommencer toutes les étapes en partant du résultat obtenu :

7148 → 8741
-1478
7263 → 7632
-2367
5265 → 6552
-2556
3996 → 9963
-3699
6264 → 6642
-2466
4176 → 7641
-1467
6174 → 7641
-1467
6174

Essayer avec d'autres nombres !
Arrive-t-on toujours à 6174 ? Au bout de combien d'opérations ?
Les résultats des différentes soustractions ont-ils d'autres particularités ?
Et si on fait la même chose avec des nombres de 3 chiffres, que se passe-t-il ?
……Vous pouvez continuer et vous poser d'autres questions pour les nombres de 2 chiffres, 5chiffres, ……

Sujet n°5 : Kapla.

Les planchettes Kapla ont pour dimensions 8 mm, 24 mm et 120 mm:
3 épaisseurs dans une largeur; 5 largeurs dans une longueur.
Quels problèmes mathématiques se poser à partir de ce matériel?

Sujet n°6 : Le jeu de la vie.

Règles du jeu :

- Une case vide avec 3 voisins donne une naissance.

	X	**X**	
	X	**N**	

Si on part de la population ci-dessus(cases avec X), il y aura une naissance dans la case N.

- Un pion isolé, avec un seul voisin, 4 ou davantage, meurt...
- Un pion ayant 2 ou 3 voisins survit.

				X	**X**
X		**X**		**X**	**X**
		X		**X**	
	X	**X**	**X**		

Dans la population ci-dessus, les individus X vont mourir (certains d'isolement, d'autres d'étouffement), les individus X survivent et il va y avoir des naissances (A vous de les trouver !).

Pour jouer :

Vous placez vos pions dans un quadrillage pour former votre population initiale. Vous suivez ensuite chaque étape de son évolution.
A vous de trouver les populations initiales les plus aptes à la survie et au développement.

Sujet n°7 : Étude du jeu "AIRJEU".

Matériel : - des baguettes de longueurs variées en nombre suffisant (au moins 4 exemplaires de chaque)
- un sablier.
- du papier, des ciseaux, de la colle et du scotch.

Règle du jeu : (4 joueurs)

- on distribue à chaque joueur 4 à 8 baguettes (chaque joueur reçoit le même lot de baguettes); il est aussi possible de tirer au sort les baguettes qui seront utilisées.

- on retourne le sablier et chacun doit réaliser en utilisant toutes ses baguettes un polygone ayant la plus grande aire possible et le dessiner sur une feuille blanche.

- à l'issue de cette phase, on compare les figures obtenues, on les range de la plus grande à la plus petite aires et des points sont attribués à chaque joueur:

- 5 points pour la figure de plus grande aire
- 3 points pour la suivante
- 1 point pour l'avant-dernière figure
- rien pour la figure de plus petite aire.

Variantes:

- LA PLUS PETITE AIRE GAGNE avec la sous-variante :

les joueurs piochent chacun 5 baguettes au hasard : cette fois, les polygones n'auront plus le même périmètre et le gagnant (figure de plus petite aire) ne sera pas toujours celui qui aura la plus petite longueur de baguette.
- LE PLUS PETIT PERIMETRE ...

Sujet n°8 : Étude du jeu "PERIJEU".

Matériel : - des formes géométriques variées en nombre suffisant (au moins 4 exemplaires de chaque) ; on pourra utiliser des pièces d'un puzzle comme le tangram ou des pièces de la mallette "La moisson des formes"...
- un sablier.
- une ficelle et/ou un instrument de mesure des longueurs.

Règle du jeu : (4 joueurs)

- chacun pioche une forme géométrique.

- on distribue à chaque joueur un exemplaire des 4 pièces qui ont été piochées.

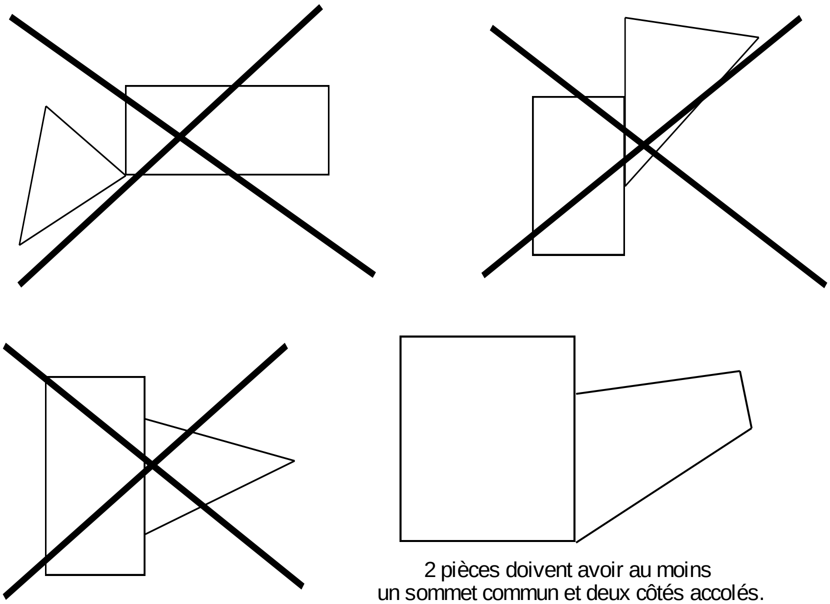
- on retourne le sablier et chacun doit réaliser en utilisant les 4 pièces une figure ayant le plus grand périmètre possible avec les contraintes de juxtaposition des pièces ci-dessous et en reproduire le contour sur une feuille blanche.

- à l'issue de cette phase, on compare les figures obtenues, on les range du plus grand au plus petit périmètre et des points sont attribués à chaque joueur:

- 5 points pour la figure de plus grand périmètre
- 3 points pour la suivante
- 1 point pour l'avant-dernière figure
- rien pour la figure de plus petit périmètre.

- variante : on mesure les périmètres et on le nombre de points attribués à chacun correspond à la mesure en mm du périmètre de sa figure.

Contraintes de juxtaposition des pièces :



2 pièces doivent avoir au moins un sommet commun et deux côtés accolés.

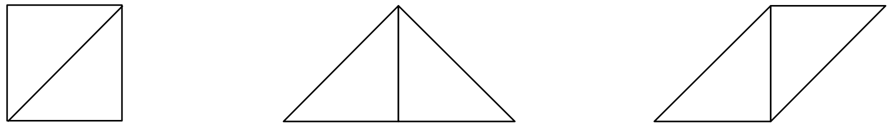
Variante :

- avec des lots de 4 formes qui ne sont pas les mêmes pour chacun des joueurs; cette fois, les figures n'auront plus la même aire et le gagnant (figure de plus grand périmètre) ne sera pas toujours celui qui aura les pièces ayant la plus grande aire.

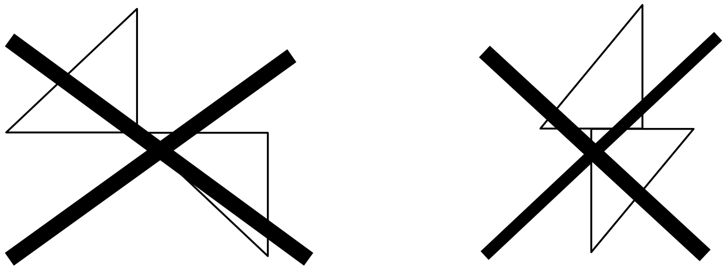
Sujet n°9 : LES POLYVOILES.

On réalise des assemblages de triangles rectangles isocèles identiques (des demi-carrés) par côtés entiers :

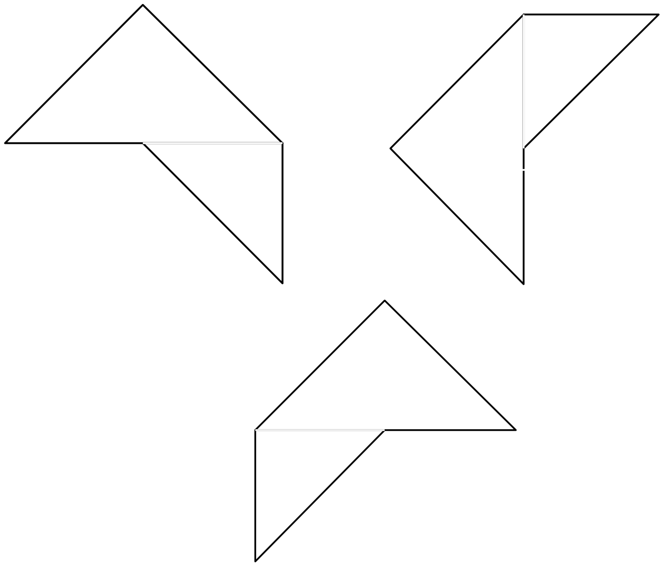
- un grand côté avec un grand côté ou un petit côté avec un petit côté :



- pas d'assemblages par les angles ou par portion de côté :

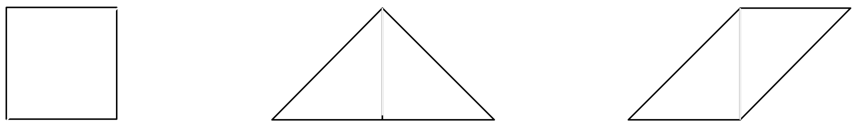


Deux pièces seront considérées comme identiques si l'une peut recouvrir l'autre, éventuellement après un retournement :



3 pièces identiques

On peut obtenir 3 pièces différentes en assemblant ainsi 2 triangles rectangles isocèles ; on les appelle des "bivoiles" :



Trouvez tous les assemblages différents de 3 triangles rectangles isocèles ("trivoiles"). Utilisez le papier quadrillé ci-joint pour dessiner les pièces trouvées !
On peut continuer la recherche avec les assemblages de 4 triangles rectangles isocèles ("tétravoiles") puis de 5 ("pentavoiles"), de 6 ("hexavoiles"), …

VOICI QUELQUES PISTES POUR POURSUIVRE, MAIS IL EST POSSIBLE D' EN IMAGINER D'AUTRES:

Quelle est la trivoile de plus grand périmètre ?

Quelle est la trivoile de plus petit périmètre ?

Rangez les trivoiles par périmètres croissants ?

Même question pour les tétravoiles, les pentavoiles, …

Assemblez les tétravoiles pour réaliser un "serpent" le plus long possible! Puis un serpent qui se mord la queue…

En utilisant toutes les tétravoiles une seule fois et en les assemblant par côtés entiers, peut-on obtenir un rectangle ?

Et toutes les questions que vous aurez envie de vous poser au sujet de ces polyvoiles et des puzzles qu'elles peuvent permettre de réaliser !…

<u>Sujet n°11</u> : Étude du jeu d'Oslo.

Le but du jeu d'Oslo est d'**obtenir n'importe quel nombre entier naturel non nul**, en partant de **4**, à l'aide d'**applications successives des trois règles suivantes**:

1. Mettre un 0 à la fin du nombre (c'est à dire multiplier par 10);
2. Mettre un 4 à la fin du nombre (c'est à dire multiplier par 10 et ajouter 4) ;
3. Diviser par 2 si le nombre est pair.

<u>Exemple :</u> on obtient le nombre 30 avec la séquence ci-dessous d'utilisation des règles:
N°3 N°2 N°3 N°3 N°3 N°1 (la suite des nombres est: 4, 2, 24, 12, 6, 3, 30)

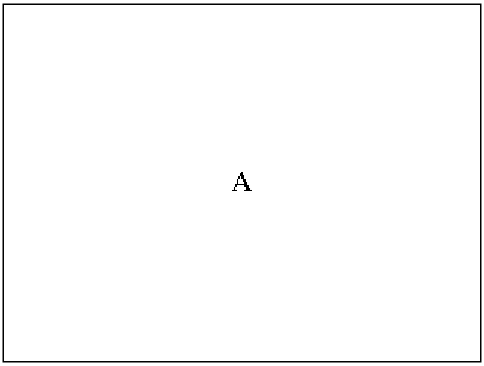
<u>Variantes :</u>
- changer le nombre de départ (6 au lieu de 4 par exemple) ;
- prendre d'autres règles ;
- limiter le nombre d'applications successives autorisées pour une même règle ; …

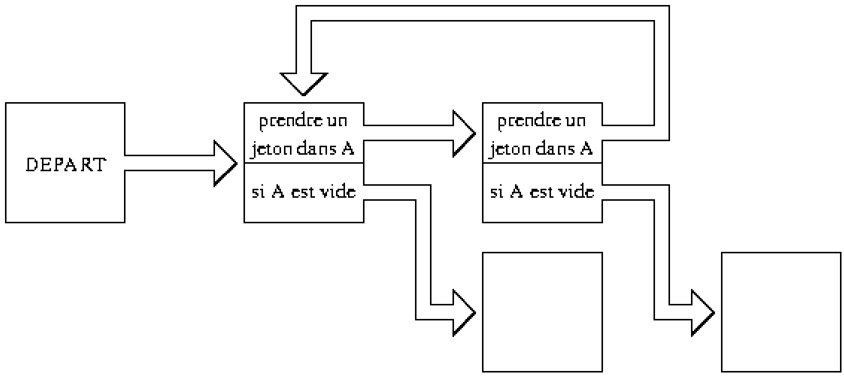
<u>Sujet n°12</u> : LESMACHINES A REGISTRES.

Trois machines sont proposées; elles sont constituées de deux parties :

- des registres : ce sont les mémoires; placer 8 jetons dans le registre A revient à mettre le nombre 8 dans la mémoire A;
- une sorte de jeu de l'oie avec un départ et une arrivée, sur lequel se déplace un pion : faire fonctionner la machine, c'est, à partir d'une configuration donnée pour les registres, amener le pion de la case DEPART à la case ARRIVEE.

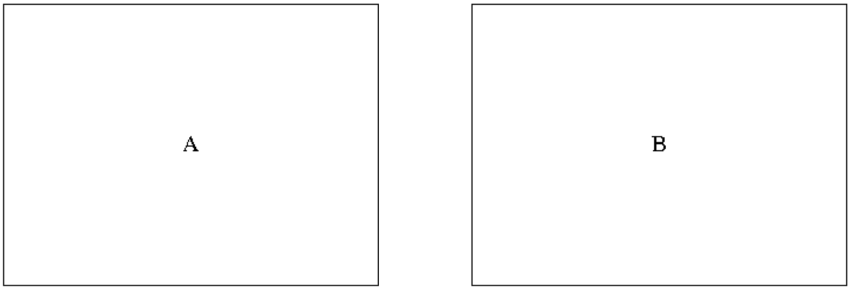
En faisant fonctionner les machines à partir de diverses configurations de départ pour les registres, il faut découvrir la fonction de chacune d'elles, … puis d'en inventer de nouvelles !

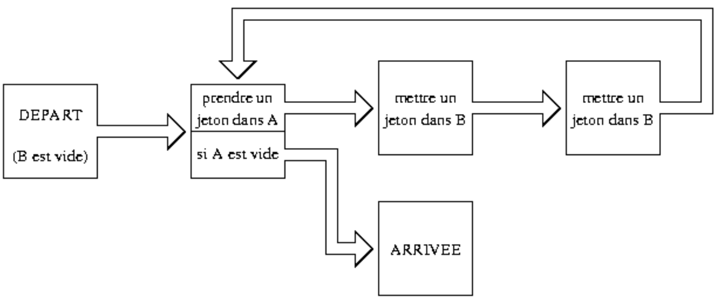


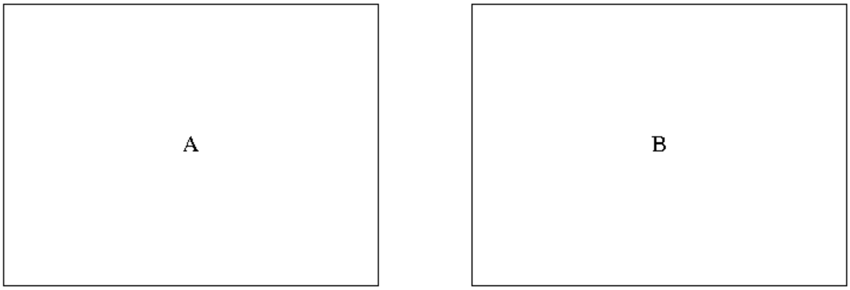


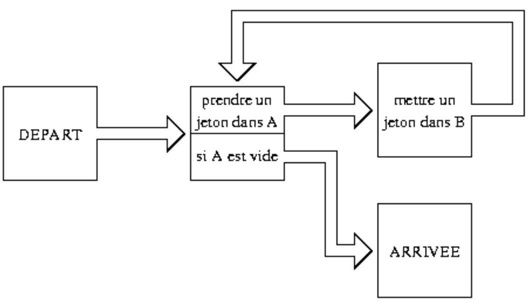
<u>Machine n°1</u>

Machines n°2 et n°3









Les méthodes d'éducation cognitive bilan et perspectives

Jean-Claude COULET

Document pour la Formation des Professeurs d'école en didactique des mathématiques élaboré lors du stage national organisé par la COPIRELEM à Rennes en mars 1996.

Il s'agit d'une conférence dont l'objet est de faire le point sur le concept d'éducabilité cognitive dans la mesure où des méthodes qui se réclament de ce cadre théorique sont de plus en plus utilisées à l'école.

Le concept d'éducabilité cognitive s'inscrit dans une prise de position en faveur de l'idée qu'il est possible d'apprendre à apprendre. Il apparaît au moment où l'école n'est plus la source quasi exclusive du « savoir savant » mais se trouve en concurrence avec de multiples sources de connaissances mises socialement à la disposition de chacun .

Toutes les méthodes qui se rattachent à ce concept, affichent la volonté de construire des capacités cognitives de portée générale et transférables ; de plus elles accordent une large place à la médiation.

Les programmes analysés ici sont : LOGO ; les Ateliers de Raisonnement Logique (ARL) ; le Programme d'Enrichissement Instrumental (PEI) ; la Programmation Neuro-Linguistique (PNL).

La démarche d'évaluation de ces programmes n'étant pas exempte d'erreurs méthodologiques, les résultats sont contrastés. D'ores et déjà il semble nécessaire de s'orienter vers la recherche de modèles moins généraux. L'idée serait d'identifier les mécanismes impliqués dans les constructions cognitives relatives à un domaine de connaissances, et partant de là , de fournir un étayage adapté.

INTRODUCTION

1 - Place de l'éducation cognitive dans les enjeux sociaux actuels

Si l'on veut comprendre l'engouement que produisent actuellement les méthodes d'éducation cognitive dans les établissements scolaires et les organismes de formation, il faut, me semble-t-il, s'intéresser à quelques caractéristiques du contexte social plus large dans lequel elles trouvent actuellement leur point d'ancrage. Sans entrer ici dans une analyse sociologique approfondie (qui pourtant mériterait d'être conduite), il est néanmoins possible d'avancer deux ou trois remarques susceptibles d'éclairer la place de l'éducation cognitive dans les enjeux sociaux actuels.

A un premier niveau, on ne peut que constater que le siècle qui s'achève (et qui est quasiment aussi celui de la naissance du modèle de l'école que nous connaissons aujourd'hui) est marqué par une extraordinaire croissance des connaissances produites du côté de ce que les didacticiens appellent "le savoir savant".

Par ailleurs, il faut également noter que l'éducation scolaire qui, au début du siècle constituait une source extrêmement importante (sinon exclusive pour beaucoup) de construction de savoirs issus du savoir savant, se trouve aujourd'hui en concurrence avec de multiples autres sources qui, souvent, s'avèrent beaucoup plus séduisantes, même si leur efficacité reste probablement à démontrer. Qu'il s'agisse des champs de découverte offerts par l'accroissement des distances parcourues, par le flot d'écrits mis à portée de main, par la télévision, les média et multimédia de toutes sortes, il est clair que la séduction est grande et les sources de savoir multiples.

Pourtant, face à ce flot grandissant, il reste une nécessité assez fondamentale : celle de devoir s'approprier individuellement un maximum des connaissances ainsi produites socialement et mises à disposition de chacun.

Dans un tel contexte, il n'est pas surprenant de voir fleurir les méthodes d'éducation cognitive qui prétendent constituer une immense économie dans cette nécessité sans cesse plus impérieuse d'acquérir individuellement des savoirs et savoir-faire toujours plus nombreux.

Mais, que sont ces méthodes d'éducation cognitive qui affichent de tels objectifs, notamment à travers leur postulat commun "d'éducabilité cognitive" ? Quel bilan peut-on tirer de leur mise en oeuvre à travers les multiples programmes qu'elles ont engendrés ? Quelles sont, enfin, les directions qui apparaissent aujourd'hui comme les plus pertinentes pour tirer le meilleur profit de ces diverses expériences ?

2 - Un peu d'histoire

Le concept d'*éducabilité cognitive* marque une prise de position très claire en faveur de l'idée, désormais bien connue, qu'il est possible d'apprendre à apprendre (Sorel, 1987). Très tôt exprimée par les psychologues - on peut ici citer Binet (1857-1911), le père de la mesure de l'intelligence en termes d'âge mental qui, dès 1909, dénonce les conceptions fixistes de l'intelligence - cette idée s'inscrit néanmoins dans un contexte historique beaucoup plus ancien encore. On peut en effet reconnaître (Paour, 1987 ; Loarer, 1992) dans les pratiques d'aide aux enfants déficients, des principes tout à fait similaires à ceux qui fondent aujourd'hui les programmes d'éducation cognitive. Depuis les travaux d'Itard (1775-1838) qui conçut l'éducation de l'enfant sauvage Victor de l'Aveyron jusqu'à des conceptions pédagogiques plus anciennes encore, telles que celle de Montaigne, le présupposé reste identique : l'intelligence est éducable.

I - LES FONDEMENTS DE L'EDUCATION COGNITIVE

1 - Caractéristiques communes aux différents programmes

Au-delà de la diversité des réalisations dans le domaine de l'éducation cognitive, il est possible de repérer un certain nombre d'aspects qui peuvent être considérés comme leurs caractéristiques communes fondamentales.

1 - 1 - Proposer une éducation compensatoire

Le point de départ des programmes est généralement à chercher du côté de préoccupations très pragmatiques concernant des sujets en grande difficulté. Ainsi, par exemple, le Programme d'Enrichissement Instrumental (PEI) de Feuerstein (Feueurstein & Jensen, 1989) a été élaboré pour tenter d'apporter une aide à des populations de jeunes migrants, déplacés par la seconde guerre mondiale et très fortement affectés sur le plan cognitif et relationnel. De la même façon, c'est par rapport aux difficultés d'adultes de bas niveaux de qualification (Higelé, 1987) qu'ont été conçus les Ateliers de Raisonnement Logique (Hommage & Perry, 1987). C'est encore une motivation tout à fait comparable qu'on retrouve avec les programmes d'éducation compensatoire développés aux USA dont, par exemple, dans les années 60, le gigantesque programme "Head Start" impliquant jusqu'à 13000 centres de formation préscolaires (Loarer, 1992). C'est, enfin (mais on pourrait certainement citer bien d'autres programmes), à des sujets déficients que s'adresse le programme mis au point par Paour (cf. Paour, 1978). Dès lors, il est important de noter que les concepts théoriques de ces programmes ne sont souvent apparus que dans un second temps, pour étayer, réorienter, rationaliser, voire justifier des pratiques déjà largement amorcées sur le terrain. Actuellement, les évolutions du monde du travail vers des tâches qui font de plus en plus appel à des activités de gestion et de contrôle de processus de production - devenus fortement automatisés - et vers une grande diversification des tâches au cours d'une même vie professionnelle, créent une importante demande sociale en direction de l'éducation cognitive qui reste ainsi très directement contrainte par des impératifs de terrain.

1 - 2 - Un postulat : la plasticité des capacités cognitives

A un deuxième niveau, en supposant que l'intelligence d'un sujet donné n'a pas une valeur immuable qui le caractériserait, quels que soient son âge et le type d'éducation qu'il reçoit, mais au contraire une certaine plasticité qui donne prise à l'intervention, les cadres conceptuels adoptés font incontestablement de l'*éducabilité cognitive* le premier concept fédérateur des différents programmes. On doit toutefois remarquer que les prises de position volontaristes qu'il engendre se traduisent, dans un très grand nombre de cas, par la négation implicite de contraintes développementales (De Ribaupierre, 1995) susceptibles, selon les cas, de permettre, de favoriser ou au contraire de réduire, voire d'annihiler les effets des interventions proposées. Plusieurs tentatives, qui seront évoquées plus loin, doivent très certainement leur échec relatif à une enthousiaste cécité de ce type.

1 - 3 - Construire des capacités transférables

Le troisième trait commun aux différents programmes, et sans doute le plus fondamental, découle assez directement du concept même d'éducabilité, puisqu'il s'agit de l'objectif d'induire chez le sujet la construction de *capacités cognitives à portée générale*. En effet, ce que l'on vise avant tout dans un programme d'éducation cognitive, ce ne sont pas des connaissances spécifiques, telles qu'elles s'expriment en termes de contenus d'enseignement dans les programmes scolaires, mais surtout et avant tout, un ensemble de savoirs et savoir-faire très généraux permettant au sujet d'acquérir une forte capacité adaptative pour faire face à des situations nouvelles. Ceci explique la place privilégiée qu'occupent les activités de résolution de problèmes dans le cadre de l'éducation cognitive et le consensus très marqué des auteurs pour insister sur le *transfert* des compétences construites aux autres situations de la vie quotidienne, scolaire ou professionnelle. Cependant, derrière cette unanimité, c'est à une très grande diversité qu'on se heurte lorsqu'il s'agit de donner un contenu à ce que les programmes considèrent comme "capacités générales, transférables".

1 - 4 - Eclectisme théorique des programmes

En quatrième lieu, on relèvera que les programmes d'éducation cognitive ont également une tendance marquée pour l'éclectisme quant à leurs emprunts aux modèles de la psychologie. Rares, en effet sont les programmes qui ont des référents théoriques identiques, mais rares aussi et surtout sont ceux qui se satisfont d'un cadre théorique unique pour formaliser leur démarche. L'une des conséquences de cette hétérogénéité est qu'il est extrêmement difficile de rendre compte des mécanismes en jeu lorsque, au-delà des problèmes d'évaluation qui se posent nécessairement pour en attester, les programmes se révèlent efficaces.

2 - Un lieu d'analyse privilégié : la fonction de Médiation

Par ailleurs, les programmes supposent l'intervention d'une personne chargée de moduler, même si c'est à minima (comme c'est le cas dans l'orientation "micro-mondes" qui sera abordée plus loin), les interactions du sujet avec les différentes tâches. C'est la fonction de *médiation*. Elle constitue un lieu d'analyse privilégié où se révèlent les choix théoriques des concepteurs de programmes ainsi que les différents niveaux d'intervention du médiateur sur la relation sujet-tâche. A ce titre, l'explicitation schématique de cette fonction de médiation, au regard des théories du développement qui constituent les principales sources d'inspiration de l'éducation cognitive, devrait susciter l'intérêt de tout éducateur.

2 - 1 - Le schéma bipolaire piagétien

Pour Piaget, le développement (depuis les réflexes du nourrisson jusqu'aux opérations formelles de l'adolescent lui permettant, par exemple, un raisonnement hypothético-déductif) se caractérise par le passage d'une structure logico-mathématique à une autre à travers la mise en oeuvre d'un *processus d'équilibration*. Celui-ci - à condition d'accepter l'extrême simplification adoptée ici - recouvre, dans la théorie, l'ensemble des réactions du sujet ayant pour but de faire face à la perturbation de ses structures cognitives et de leurs fonctionnements par un élément de son environnement ou de son propre système cognitif. Ainsi, chez Piaget, même si bien sûr sont mentionnés d'autres facteurs de développement (maturation, expérience ou transmission sociale), c'est essentiellement à partir de l'activité qu'il déploie sur son environnement que l'enfant construit ses structures. Dans la mesure où, par ailleurs (Doise & Mugny, 1981, pp. 15 et suivantes), il observe un certain parallélisme entre développement intellectuel et développement social, pour Piaget, l'objet social n'a pas de statut particulier. Cette position a donc souvent été résumée dans la littérature par un schéma bipolaire (fig. 1), marquant un développement construit de façon privilégiée dans une interaction sujet-objet. Ceci implique que la médiation exercée par autrui est réduite au strict minimum. Tout au plus, peut-on voir l'adulte ou l'éducateur aménager le milieu pour l'enrichir de situations ou d'objets intéressants à soumettre à l'activité du sujet. Les textes pédagogiques de Piaget vont clairement dans le sens d'une éducation active de ce type (cf. Piaget, 1969 et Piaget, 1975b).

sujet $\longleftrightarrow$ objet

fig. 1 - Le schéma bipolaire piagétien

2 - 2 - Du schéma bipolaire au schéma tripolaire

Une telle conception a soulevé des critiques qui se sont traduites par des propositions théoriques différentes visant à reconnaître qu'autrui joue un rôle plus déterminant dans le développement cognitif. A titre d'exemples significatifs d'une modification de ce schéma bipolaire, on peut citer la thèse du conflit socio-cognitif (Doise & Mugny, 1981), ou encore, celui de l'apprentissage social de Bandura (Bandura, 1980 ; Winnykamen, 1982). Dans le premier cas, grâce à l'interaction sociale mise en place entre personnes à propos d'une tâche, il est possible de voir apparaître une différence dans le fonctionnement cognitif des partenaires sociaux en présence, laquelle peut être à l'origine d'un conflit dit "*socio-cognitif*". Celui-ci, pour autant qu'il soit effectivement pris en compte au niveau individuel, peut alors déboucher sur des restructurations cognitives chez chacun des membres de l'interaction. En outre, une fois produite, cette restructuration peut permettre d'autres interactions sociales d'un niveau supérieur susceptibles, elles aussi, d'induire un nouveau conflit socio-cognitif source de développement, etc. Dans le second cas, il s'agit plutôt d'apprentissages "*par observation*" d'un modèle social. L'action sur l'objet n'a pas alors d'impérative nécessité pour qu'un apprentissage puisse avoir lieu (il n'est pas utile de mettre soi-même la main sur le poêle pour apprendre que l'on peut s'y brûler). Ces deux types de conceptions sont traduites par les auteurs dans un schéma tripolaire (fig. 2) qu'ils revendiquent. Du point de vue de la médiation, un tel schéma - qui peut d'ailleurs se déployer en spirale, comme chez Doise & Mugny - met surtout en exergue l'existence des trois pôles en interaction. Cependant, tel quel, il n'intègre que très peu ce qui caractérise les conceptions "médiationnelles" de Vygotsky et de Bruner.

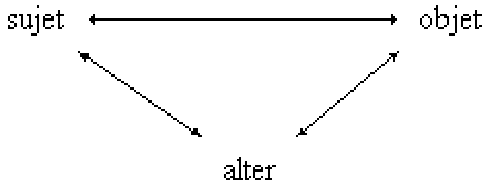


fig. 2 - Le schéma tripolaire

2 - 3 - La conception de Vygotsky

La conception de Vygotsky concernant le rôle d'autrui dans les constructions cognitives individuelles est en effet beaucoup plus évocatrice que ne le laisse supposer le schéma précédent d'une aide volontairement orientée vers le sujet qui résout une tâche. Elle apparaît notamment à travers le concept de "*Zone Proximale de Développement*" que Vygotsky définit comme l'écart existant entre le niveau actuel de l'enfant (ce qu'il est capable de produire seul) et son niveau potentiel (ce qu'il est capable de réaliser avec l'aide de l'adulte). On retrouve également exprimé ce rôle d'autrui dans ce que Vygotsky a dénommé la loi fondamentale du développement : "*Chaque fonction psychique supérieure apparaît deux fois au cours du développement de l'enfant : d'abord comme activité collective, sociale et donc comme* ***fonction interpsychique****, puis la deuxième fois comme activité individuelle, comme propriété intérieure de la pensée de l'enfant, comme* ***fonction intra psychique****.*" (Vygotsky, cité par Schneuwly & Bronckart, 1985, p. 111). En outre, pour Vygotsky, la nature de l'aide apportée par autrui renvoie d'une façon générale aux outils culturels que l'adulte introduit dans l'interaction sujet-objet et, plus particulièrement, au langage qui est supposé constituer un véritable support à la pensée ainsi qu'un *instrument* régulateur des autres formes de conduite. Son interprétation du langage égocentrique de l'enfant (les soliloques qui accompagnent quelquefois ses activités) s'inscrit indéniablement dans une telle perspective. Vygotsky y voit en effet, l'indice de l'appropriation par l'enfant de la fonction du discours que lui adresse l'adulte lorsque ce dernier interagit avec lui pour réguler ses activités. Dès lors, le schéma de la figure 2 ne semble plus suffire pour rendre compte de la manière dont Vygotsky pose le rôle d'autrui. Pour marquer nettement l'idée d'une intervention de l'adulte résolument centrée sur l'interaction sujet-tâche, il nous a donc paru utile d'y adjoindre une dernière flèche (fig. 3).

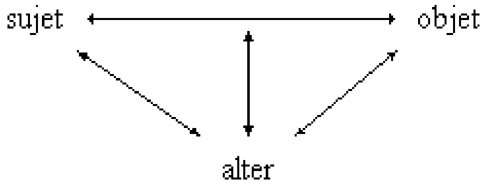


fig. 3 - Le schéma tripolaire caractérisant la médiation

2 - 4 - L'apport de Bruner

Néanmoins, c'est avec Bruner qu'on trouve les éléments les plus concrets pour caractériser les significations attachées à cette dernière flèche du schéma. S'inscrivant dans le droit fil des idées de Vygotsky, Bruner (Bruner, 1983, pp 261-280) tente en effet de préciser les caractéristiques de ce qu'il appelle "*l'interaction de tutelle*", en spécifiant quelles sont les fonctions régulatrices du tuteur, présenté tout à la fois comme celui qui :

- "*enrôle*" le sujet en suscitant chez lui de l'intérêt pour la tâche ;
- "*réduit le degré de liberté*" en simplifiant la tâche pour rendre le but plus accessible au sujet ;
- "*maintient l'orientation vers le but*", en veillant à ce que d'autres buts ne viennent pas interférer avec l'activité en cours, tout en maintenant la motivation du sujet ;
- "*signale les caractéristiques déterminantes*" de la tâche pour son exécution et, par là même, pointe les écarts entre ce qui est produit par le sujet et ce que serait une production correcte ;
- "*contrôle la frustration*", en rendant moins périlleuse la résolution de problème, notamment quant aux erreurs commises ;
- "*démontre*", en présentant des modèles de solution dans lesquels on trouve une certaine stylisation de l'action qui doit être exécutée.

De plus, en insistant également sur la *double fonction du langage* - fonction de communication d'abord mais aussi et surtout, fonction de représentation - comme Vygotsky, Bruner accorde au langage le statut d'outil privilégié des constructions cognitives réalisées dans les interactions sociales. Enfin, le concept de "*format*" qu'il introduit (Bruner, 1984), en marquant le rôle que peuvent avoir les routines de communication dans l'élaboration de présupposés sur les situations et les tâches, contribue encore à souligner toute l'importance que revêt la dimension sociale dans l'interaction sujet-objet.

3 - Les différentes formes de médiation

Deux remarques s'imposent alors. D'une part, on peut constater qu'avec les caractéristiques de la tutelle telles que les définit Bruner, on s'approche beaucoup de ce qu'on vise, dans le cadre de l'éducation cognitive, en termes de médiation.

Sur ce plan, la liste ci-dessus préfigure quelques éléments que l'on évoquera dans ce qui suit en termes de "principes généraux de l'éducation cognitive". D'autre part, si l'on se centre cette fois sur le schéma de la figure 3, il est possible de noter que ces mêmes caractéristiques de la tutelle pourraient, chacune, être prises en compte par une rotation de la flèche centrale soit du côté du pôle sujet, lorsqu'il s'agit par exemple de l'enrôlement du sujet à la tâche, soit du côté du pôle objet, quand il s'agit par exemple d'en réduire le degré de liberté (fig. 4). On voit alors que les formes de médiation qui peuvent être pratiquées dans le domaine de l'éducation (qu'il s'agisse de l'éducation cognitive au sens restreint ou, plus largement, de pratiques éducatives familiales et scolaires) couvrent un très large éventail de possibilités, situées entre deux positions extrêmes.

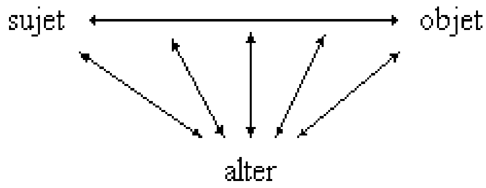


fig. 4 - Les différentes formes de médiation

3 - 1 - Centration sur le pôle sujet

A titre d'exemple, la première de ces positions extrêmes peut être illustrée par un certain nombre de travaux expérimentaux de psychologie sociale qui ont notamment pu démontrer qu'il est possible de modifier les performances cognitives d'élèves lorsque, placés en situation de comparaison sociale, on les assigne à une catégorie de sujets ayant ou non des caractéristiques congruentes avec leur statut scolaire. Ainsi, Monteil & Huguet (Monteil & Huguet, 1991) montrent par exemple, dans une tâche présentée aux sujets comme un exercice de géométrie, que les élèves ont de meilleures performances que ceux d'un groupe contrôle lorsqu'on induit chez eux la croyance qu'ils appartiennent à un groupe de sujets peu performants, par opposition à des sujets plus performants d'un autre groupe auxquels ils seront ensuite comparés. Ici, tout se passe comme si les sujets tendaient à prouver que, malgré le handicap qu'ils croient avoir, ils restent capables de se mobiliser efficacement pour amoindrir le contraste comparatif avec le groupe (fictif dans l'expérience) avec lequel ils croient être opposés. Dans un tel cas, il est clair qu'une intervention, située exclusivement sur le pôle sujet, suffit à modifier l'interaction sujet-tâche jusqu'à produire des performances significativement différentes. On voit bien également apparaître ici toute l'importance qu'il faut accorder aux *significations* que le sujet attribue à son activité, notamment à travers la lecture qu'il fait de la *situation* avant même de mobiliser ses ressources cognitives pour traiter la *tâche* proposée.

3 - 2 - Centration sur le pôle objet

Si l'on s'intéresse maintenant à la position inverse, représentée par une centration quasi exclusive sur l'autre pôle (le pôle objet), il est possible de voir dans la "philosophie des micro-mondes", telle qu'on la trouve développée, par exemple chez Papert (Papert, 1981), une très bonne illustration d'une relation sujet-tâche que l'on cherche à restructurer de façon importante, en procédant cette fois par une intervention uniquement centrée sur l'objet. Papert s'est en effet attaché à réaliser des dispositifs matériels proposant différents univers (les micro-mondes), relativement limités quant au nombre d'éléments et aux règles logiques auxquelles ils répondent, mais sur lesquels il est possible d'agir à partir d'un langage de programmation aussi naturel que possible. Grâce à leur *exploration active* par le sujet, ces micro-mondes sont considérés comme susceptibles de générer des situations d'apprentissage très différentes de celles que fréquentent habituellement les élèves et, ainsi, de changer radicalement leurs rapports à certaines notions mathématiques. La mise au point du langage LOGO, permettant notamment de piloter les déplacements d'un objet nommé "tortue" sur un écran dans le micro-monde "géométrie de tortue", a été réalisée dans cette perspective. L'espoir de Papert étant de "*déplacer la frontière entre concret et formel*" (Papert, 1981, p. 34), c'est-à-dire, en référence à la théorie piagétienne, de changer purement et simplement l'âge d'accession à la pensée opératoire formelle, il est difficile de ne pas y voir une tentative d'éducation cognitive à part entière. De plus, elle s'avère particulièrement intéressante quant aux enseignements qu'on peut en tirer. C'est à ce titre qu'un développement spécifique lui sera consacré dans ce qui suit.

II - LES FORMES D'EDUCATION COGNITIVE

Il faut dire d'emblée que le choix dont il sera question ici est loin d'être exhaustif puisque ce sont probablement plusieurs dizaines de réalisations dans le domaine qu'il conviendrait d'aborder (cf. Sorel, 1992, qui, après sélection, en retient déjà 27 !). L'objectif, ici, sera plutôt d'évoquer quelques démarches significatives quant aux principes utilisés.

1 - Une approche théorique : les apprentissages opératoires

Les travaux qu'on évoque classiquement dans la littérature sous les termes "d'apprentissages opératoires" ne relèvent pas à proprement parler de l'éducation cognitive puisque essentiellement orientés vers des aspects purement théoriques (les modèles de l'équilibration (Piaget, 1957 et 1975)). Néanmoins, leur démarche reste intéressante quant à l'éducabilité cognitive. Ainsi, par exemple, Inhelder, Sinclair & Bovet (1974) réussissent à activer les schèmes relatifs au comptage (ici, dénombrement d'allumettes disposées en ligne droite ou brisée) pour qu'ils entrent en contradiction avec ceux (fondés sur la mise en congruence topologique des extrémités) spontanément utilisés par le sujet lorsqu'on l'invite à juger de l'équivalence des longueurs (cf. fig. 5). De cette manière, les auteurs induisent la mise en oeuvre d'un processus d'équilibration source d'acquisition de la conservation des longueurs.

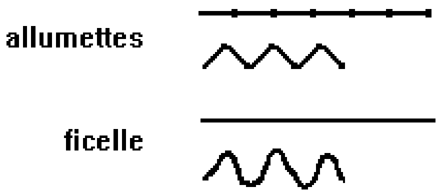


fig. 5 - Induction de la conservation des longueurs (d'après Inhelder & al., 1974)

L'intérêt de ce genre d'expérience est de mettre en évidence des effets, induits expérimentalement, qu'il semble possible d'attribuer à un processus précis et décrit par la théorie (déclenchement d'une équilibration à partir d'un conflit cognitif). Cependant, des critiques (notamment du travail d'Inhelder & al.) sont venues quelque peu minimiser ces résultats et pointer un certain nombre de problèmes qu'on évoquera plus loin.

2 - LOGO

Les situations LOGO ne se présentent pas comme un programme d'éducation cognitive puisqu'elles sont par essence, plutôt orientées vers une découverte autonome de l'enfant. Cependant, il reste intéressant de voir que ces activités reposent sur des principes qui gardent beaucoup de points communs avec ceux de l'éducation cognitive.

Ce n'est sans doute pas par hasard si Papert s'est intéressé à l'idée de micro-monde évoquée plus haut. Lui aussi, profondément imprégné de la théorie piagétienne, comme Piaget, il considère que le sujet est "*le constructeur de ses propres structures intellectuelles*" (Papert, 1981, p. 17-18), essentiellement grâce à l'exploration active de son environnement physique. Partant de là, il va pousser la logique piagétienne jusqu'à inventer des objets, absents de l'environnement habituel des enfants mais dont les caractéristiques soient telles qu'ils puissent susciter la mise en jeu de processus théoriquement favorables au développement.

Ainsi par exemple, dessiner un carré en LOGO, c'est tout d'abord passer d'une activité propre et familière, qu'un enfant d'école primaire réalise quasi automatiquement, à une activité consistant à organiser, dans un langage adéquat, une suite d'instructions données à la machine afin que, dans le respect de ses règles de fonctionnement, sa mise en oeuvre parvienne à produire le tracé attendu. Ce passage du « faire » au « faire-faire » (Samurcay & Rouchier, 1985) est alors supposé engendrer des progrès cognitifs dont on peut penser qu'ils se situent sur plusieurs plans.

2 - 1 - Décentration du point de vue propre

Tout d'abord, en ce qui concerne le niveau de la représentation de l'espace, la "tortue" répondant à des instructions de type "avance" et "tourne à droite" (ou à gauche), boucler le carré suppose une nécessaire *décentration du point de vue propre* (cf. Piaget, Inhelder & Széminska, 1948) pour programmer correctement les changements d'orientation. En effet, le traçage du dernier côté du carré, par exemple, nécessite un renversement complet des relations droite-gauche selon qu'on se situe dans l'espace du sujet qui regarde l'écran ou dans celui (c'est ce qu'il faut faire) de la tortue qui se déplace sur cet écran. En référence à Piaget, qui voit dans ce type de décentration chez l'enfant un indice du passage d'un espace topologique (où seules sont prises en considération les relations de voisinage) à un espace projectif (qui respecte les positions et orientations relatives), une telle activité recèle des potentialités de progrès cognitifs évidentes.

2 - 2 - Conflit cognitif

Deuxièmement, sur le plan de l'activité de programmation, pour programmer correctement les déplacements de la tortue, il y a la nécessité d'acquérir les règles de son fonctionnement qui, non seulement ne sont accessibles au sujet qu'à partir de son expérimentation du dispositif, mais qui en outre sont telles, qu'elles entrent en conflit avec celles que conçoit spontanément l'enfant (Coulet, 1989 ; Coulet, 1994a). En effet, l'instruction "tourne à droite" (ou à gauche) produit un pivotement de la tortue autour de son axe, alors que les changements d'orientation familiers (véhicules, corps propre) s'opèrent en réalisant des trajectoires en arc de cercle. Toujours en référence à la théorie piagétienne, c'est grâce au conflit et à la mise en jeu du processus d'équilibration qu'on peut ici attendre des progrès.

2 - 3 - Prise de conscience

Troisièmement, toujours sur le plan de l'activité de programmation, la nécessité pour le sujet d'expliciter, sous la forme d'un programme, les procédures qu'il utilise familièrement pour tracer un carré, peut être lue (Hoc, 1984) comme le passage de connaissances procédurales (le "savoir comment") à des connaissances déclaratives (le "savoir que"), mettant en jeu la prise de conscience, telle que la définit Piaget en tant que "*conceptualisation des schèmes d'action*" (Piaget, 1974a, p. 261). L'implication du processus d'abstraction réfléchissante décrit dans la théorie (abstraction des propriétés des actions sur les objets plutôt que des propriétés des objets, comme c'est le cas avec l'abstraction simple) jouerait alors un rôle déterminant dans les progrès cognitifs qu'il semble, à nouveau, légitime d'attendre d'une telle activité.

2 - 4 - Anticipation

Quatrièmement, dès qu'on a affaire à une suite d'instructions à organiser dans un programme, il est clair qu'on sollicite une certaine anticipation du but à atteindre, en même temps qu'une planification des actions permettant d'y aboutir. Or, force est de constater qu'une telle démarche est généralement connotée très positivement dans une activité de résolution de problèmes. Sa mise en oeuvre ici, qui passe nécessairement par des essais infructueux (les "bugs" ou erreurs du programme) et par un accroissement d'expertise dans ce que Papert appelle le "*debugging*", apparaît comme une source certaine de progrès cognitifs dont Papert va jusqu'à dire : "*apprendre à passer maître dans l'art de programmer, c'est devenir hautement habile à déceler où se nichent les bugs et à y remédier*" mais c'est aussi et surtout "*se lancer dans une étude plus systématique de ses propres stratégies de debugging, avec le ferme propos de les affiner*". Et Papert ajoute que l'enfant peut alors : "*se servir de modèles informatiques tout à fait concrets pour réfléchir sur sa pensée, apprendre comment on apprend et, par là même, s'enrichir en psychologie et en épistémologie*" (Papert, 1981, p. 36). Nul doute qu'on est ici dans le cadre d'une éducation cognitive.

3 - Un programme : Les Ateliers de Raisonnement Logique

Egalement directement inscrits dans la logique des considérations théoriques de Piaget, les ARL constituent probablement l'exemple le plus caractéristique d'un programme d'éducation cognitive fondé sur les concepts de conflits cognitif et socio-cognitif. La démarche adoptée peut être résumée de la façon suivante. Après avoir évalué le niveau initial des sujets sur la base d'épreuves inspirées du modèle piagétien (Test des Opérations Formelles, Echelle Collective de Développement Logique) et d'une épreuve composite tirée de la progression, il s'agit de proposer aux sujets plusieurs séries d'exercices, chacune se référant à une opération logico-mathématique spécifique. A l'issue du programme, on se propose de repérer les évolutions provoquées à l'aide des mêmes épreuves que celles qui ont été utilisées pour évaluer le niveau initial. Pour illustrer les principes mis en oeuvre, il faut encore souligner que chaque séance du programme est composée de 4 phases. Chaque sujet reçoit tout d'abord le contenu de la tâche (il s'agit de tâches papier-crayon) et participe à la lecture collective des consignes (détermination de l'espace problème). Par exemple, dans une série concernant la proportionnalité, la tâche consiste (fig. 6) à trouver lequel des deux poids dessinés de façon symétrique sur le fléau d'une balance, va faire pencher la balance. Puis, dans un deuxième temps, le sujet résout seul le problème posé (mise en oeuvre des outils cognitifs individuels). Pour produire sa réponse, il doit choisir parmi plusieurs réponses (par exemple : "*poids A*" ; "*poids F*" ; "*Ni l'un ni l'autre*" ; "*On ne peut pas savoir*"), la réponse qui lui paraît satisfaisante avant d'avoir à justifier son choix à partir de la consigne "*expliquez votre réponse*".

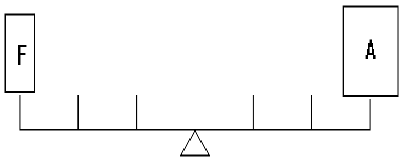


fig. 6 - Exemple de tâche (d'après Higelé & al.)

Au cours de la troisième phase, il y a mise en commun dans le groupe des solutions produites par chacun des sujets. Sous la responsabilité de l'animateur, ces réponses sont donc confrontées les unes aux autres (tentative de mise en jeu de conflits socio-cognitifs) avant que ne soit tentée dans une dernière phase, la généralisation à d'autres situations, des solutions reconnues par le groupe comme les plus pertinentes (recherche de transferts).

Les ARL se présentent ainsi comme une méthode d'éducation cognitive qui vise la construction d'opérations, au sens piagétien (actions intériorisées ou intériorisables, coordonnées dans une structure d'ensemble), grâce à un entraînement à résoudre des tâches censées les mettre en jeu mais aussi, grâce aux conflits socio-cognitifs susceptibles d'émerger des confrontations, dans le groupe, de solutions différentes.

4 - Un autre programme : Le Programme d'Enrichissement Instrumental (PEI)

A l'inverse des ARL, le PEI de Feuerstein & al. se caractérise par des emprunts théoriques très divers. Il se présente sous la forme d'une impressionnante batterie de problèmes à résoudre (plusieurs centaines d'heures pour la mise en oeuvre totale du programme) dont les contenus (cf., pour une présentation des tâches, Debray, 1989 et figure 7) sont très largement inspirés d'items de tests d'intelligence non verbaux, c'est-à-dire d'épreuves relativement neutres quant à des contenus de connaissances spécifiques. La série de problèmes d'organisation de points (où le sujet doit retrouver une figure donnée dans un embrouillamini de points, dont seulement quelques-uns en représentent les sommets à relier) en est une bonne illustration.

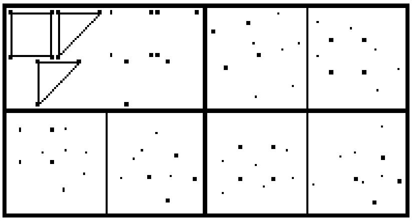


Fig. 7 - Exemple d'épreuves d'organisation de points (d'après Debray, 1989)

Parmi les différents principes mis en avant par les concepteurs du PEI, on trouve en premier lieu l'idée de fonctions cognitives déficientes (il existe dans le programme une liste de ces fonctions) dues à une insuffisance "d'*apprentissages médiatisés*" (apprentissages réalisés avec l'aide d'autrui, généralement, un adulte) permettant à l'enfant, notamment :

a) de s'orienter vers les stimuli adéquats et réaliser des prises d'information correctes,

b) d'élaborer et organiser ces informations (transformations, comparaisons, etc.),

c) de formuler des réponses précises, communicables.

On le voit, le modèle sous-jacent est ici celui des théories du traitement de l'information qui distinguent le niveau des entrées d'informations dans le système ("l'input"), celui de leurs traitements (comparaison, classement, transformations diverses) et, enfin, celui des sorties ("output") qui fournit les résultats des traitements effectués. Par ailleurs, il est aisé de reconnaître l'inspiration de Vygotsky et Bruner sur le plan de la médiation, notamment à travers le concept d'apprentissages médiatisés. Dans la mise en oeuvre concrète d'une séance de PEI, on retrouve les phases principales qui ont été décrites à propos des ARL mais avec une place primordiale accordée à l'activité du médiateur qui doit mettre en oeuvre des critères précis d'apprentissages médiatisés (expliciter pour le sujet la signification de telle ou telle situation, favoriser son sentiment de compétence, contrôler son impulsivité, ...). Quant à la première phase, elle va au-delà d'une simple lecture de consignes puisqu'on demande aux sujets de "réfléchir d'abord" (la première page des cahiers d'exercices porte le slogan : "*une minute, on réfléchit*") pour élaborer collectivement ce que vont être ces consignes. L'objectif de cette activité étant la maîtrise de l'impulsivité, on constate qu'on a affaire ici à des référents théoriques encore différents. C'est également le cas en ce qui concerne la place accordée à la prise de conscience, par les sujets, des éléments constitutifs de leur capacité à évoluer positivement, où la référence à la métacognition (cf. ci-dessous) est assez évidente.

5 - La PNL (Programmation Neuro-Linguistique)

Avec la Programmation Neuro-Linguistique qui semble vouloir pénétrer le champ scolaire (cf. Canal, Papillon & Thirion, 1994), on se trouve confronté à une démarche sensiblement différente des précédentes. Ce qu'on vise ici relève essentiellement de la personne et de ses rapports de communication avec les autres plutôt que de l'éducation cognitive au sens que l'on a donné à ce terme dans ce qui précède. Néanmoins, un certain nombre d'objectifs et de préconisations qui sont avancés par les auteurs peuvent être considérés comme semblables à ceux que l'on trouve dans les programmes classiques d'éducation cognitive. Ainsi, par exemple, propose-t-on (cf. Canal & al., p.89-90) à l'enseignant de "*repérer le ou les systèmes privilégiés de représentation d'un élève"* pour "*aider l'élève à en prendre conscience, élargir le ou les systèmes*" qu'il utilise et cela, en se mettant en situation de "*se synchroniser (utiliser le même canal sensoriel que l'élève privilégie) et se désynchroniser (utiliser un autre canal) consciemment*". Il est clair que ceci, indépendamment du contenu sur lequel on se centre (le sensoriel, qui reste problématique sur le plan théorique, comme le montre Lieury, 1990 et 1991), relève bien d'une attitude visant à amener le sujet à une prise de conscience de ses propres processus cognitifs. En outre, ce sont ces mêmes processus qu'on cherche à rendre plus performants grâce à une intervention censée être efficace (ici, synchronisation et désynchronisation).

Sur le plan des référentiels théoriques dont s'inspire la PNL, on ne peut qu'être frappé de l'extrême hétérogénéïté de ses emprunts. On y trouve en effet revendiqués pêle-mêle, les apports généraux de la linguistique, de la cybernétique, de l'informatique, de la théorie systémique, de la neurobiologie, de la psychologie cognitive, de la psychologie du comportement, etc., en même temps que le recours à tel ou tel cadre plus précis comme, par exemple, la théorie des types logiques de Russel pour une approche des contextes, sans que soient négligés des cadres moins académiques tels que celui de la gestologie définie comme "*science des gestes permettant de décoder les interactions humaines*" (Canal & al., p. 142). Ces nombreux emprunts n'excluent cependant pas des conceptualisations plus spécifiques. Ainsi, la PNL souligne-t-elle l'importance des sens que l'on utilise de façon privilégiée (système VAKOG : Visuel, Auditif, Kinestésique, Olfactif, Gustatif) en relation avec les "métaprogrammes", c'est-à-dire "*l'ensemble des processus que l'individu applique à sa perception de l'environnement*" (Canal & al., p. 87). Elle vise également à développer chez l'enseignant ou chez l'élève, son aptitude à "*établir le rapport*", c'est-à-dire à "*rentrer dans la perception que l'autre a du monde*" (Canal & al., p. 117), réaliser un "*ancrage*" "*(une ancre est "une connexion neurologique entre un stimulus et un état interne ressource (réponse)*" (Canal & al., p. 118), ou encore, opérer un "*calibrage*", ce qui consiste à "*détecter des micro-comportements, des enchaînements que les autres nous offrent en permanence et qui sont des révélateurs de leur état interne (EI) et de leur processus interne (PI)*" (Canal & al., p. 120). Ceci peut par exemple prendre la forme d'une observation des mouvements des yeux selon le modèle fourni (cf. fig. 8) qui "*permet de suivre les séquences qu'effectue une personne pour se souvenir de quelque chose, prendre une décision, etc.*" (Canal & al., p. 120).

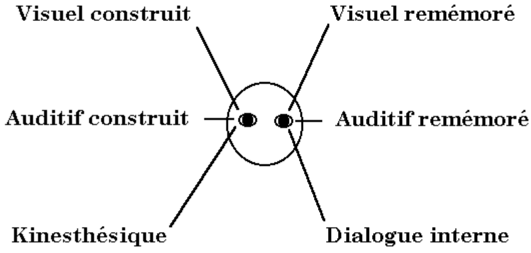


fig. 8 - Schéma du mouvement des yeux (d'après Canal & al., 1994)

On le voit, les objectifs de la PNL sont extrêmement ambitieux puisqu'il s'agit globalement d'adapter ses propres modalités de communication avec celles des autres, à partir de l'appréhension de leurs fonctionnements internes, eux-mêmes repérés grâce à une modélisation (cf., par exemple, fig. 8) ou encore à travers des prises d'information réalisées à l'aide des guides de questionnement préconisés (cf. fig. 9).

Les exemples rapportés ci-dessous concernent respectivement l'identification des "*tris*" (dimensions privilégiées) réalisés par un sujet dans une situation donnée et l'identification du "*système ou du sens privilégié utilisé par chacun, en fonction des contextes, pour entrer en contact avec l'environnement*". Ils sont tous les deux empruntés à Canal & al., 1994, p 88-89.

1) Identifiez ainsi quel(s) type(s) de questions vous aimez poser et à quels types vous aimez répondre
- Où êtes-vous allés en vacances ? (lieu)
- Qui a signé le traité de Versailles ?(personnes)
- Que voulez-vous ? (information)
- Qu'avez-vous fait pour obtenir un tel résultat ? (activité)
- Préférez-vous un cahier à petits carreaux ou à grands carreaux ? (objet)
- Est-ce que j'ai envie de participer à un PAE ? (expérience)

2) Questionnaire de mise à jour du VAKOG
- Quels sont les mots, phrases et détails que tu retiens dans le cas d'une présentation écrite, orale ou mixte d'une notion ?
- Que vois-tu précisément ?
- Qu'entends-tu précisément ?
- Que ressens-tu précisément ?
- As-tu envie de faire des mouvements ? Si oui, lesquels ?
- Sens-tu des odeurs particulières ? Des goûts particuliers ?

Quand l'élève répond de façon préférentielle dans une modalité, il suffit de mettre une croix dans la case correspondante.

fig. 9 - Guides de questionnement (d'après Canal & al., 1994)

Au regard de ces exemples, il apparaît clairement que les techniques utilisées pour atteindre les objectifs, ainsi qu'un certain nombre de modélisations théoriques avancées semblent relever d'une conception relativement naïve des processus psychologiques mis en oeuvre par les acteurs des situations éducatives. Comment, en effet, ne pas voir quelque naïveté à prétendre (et aucune justification scientifique précise n'est fournie pour étayer ce qui est avancé) pouvoir appréhender les représentations du sujet (ses métaprogrammes), ses modes sensoriels privilégiés ou encore ses stratégies (cf. Canal & al., p. 113) à partir de modèles ou questionnaires du type de ceux qu'on a présentés ci-dessus ?

Suffirait-il d'observer quelques mouvements d'yeux et poser quelques questions au sujet pour disposer ipso facto de ses fonctionnements les plus intimes tout en se dotant du pouvoir d'en jouer, comme le laisse entendre la citation suivante ? : "*Les métaprogrammes sont souvent inconscients ; l'art consiste alors à apprendre à les décoder pour jouer avec eux plutôt que d'être le jouet de ceux-ci. Leur recherche est associée avec profit à celle des critères et des croyances des personnes concernées. On accède ainsi à ce qui motive les individus et à la façon dont ils s'y prennent pour satisfaire ce qui compte pour eux.*" (Canal & al., p. 87).

Est-on vraiment, ici encore, dans le cadre d'une approche de type éducation cognitive ?

III - PRINCIPES GENERAUX ET EFFICACITE DES METHODES D'EDUCATION COGNITIVE

Au-delà des exemples ci-dessus, il s'avère important de préciser de façon plus systématique et plus générale ce que sont les principes généraux essentiels des programmes et les mécanismes sous-jacents, tout en essayant de voir ce qu'il en est de leur efficacité.

1 - Les mécanismes associés aux principes de l'éducation cognitive

L'intérêt des modèles psychologiques, en tant que cadres explicatifs, se manifeste clairement lorsqu'il s'agit de comprendre comment peuvent se réaliser les progrès visés par les principes mis en avant en éducation cognitive.

1 - 1 - Prise de conscience des processus cognitifs mis en oeuvre

Un des principes très souvent évoqué vise la centration du sujet sur ses processus cognitifs pour l'amener à mieux connaître son propre fonctionnement. C'est ce que les psychologues appellent le recours à la "métacognition" à la suite des travaux de Flavell sur la méta-mémoire (Flavell & Wellman, 1977 ou, en français, Melot & Corroyer, 1986). Mais on peut également retrouver derrière ce principe les travaux de Piaget sur la prise de conscience (Piaget, 1974a) tout en notant que la distinction qu'il introduit entre "réussir" et "comprendre" (Piaget, 1974b) peut s'avérer d'une grande valeur heuristique lorsqu'on propose des aides à des sujets en situation de résolution de problèmes. Selon les objectifs poursuivis, il peut s'avérer en effet utile de fournir des aides qui ont seulement pour but d'amener le sujet à réussir localement la tâche ou, au contraire, à comprendre l'ensemble des éléments de la situation (Coulet, 1992).

1 - 2 - Les pontages (bridging) entre connaissances

Avec le principe de centration sur les "pontages", qui constitue l'un des axes forts des méthodes d'éducation cognitive, ce sont cette fois les transferts de connaissances que l'on vise plus particulièrement. A ce niveau, les mécanismes cognitifs supposés être mis en oeuvre par le sujet sont généralement décrits de façon relativement vague en termes d'analogies. Pourtant, ce sont probablement des processus différents qui sont sollicités selon que ces analogies concernent respectivement, les situations, les tâches, les objets impliqués par ces tâches, leur contenu, les stratégies ou procédures mises en jeu, etc.

1 - 3 - Les justifications des démarches

En ce qui concerne le principe de centration sur les justifications des démarches du sujet, principe qui suppose l'expression par le sujet des moyens mobilisés au regard des buts, on peut dire qu'il renvoie à la fois, à une organisation de l'activité telle qu'elle est abordée dans une logique moyen-but et au passage par son codage au moyen d'outils symboliques (langage, représentations graphiques, etc.) très marqués culturellement. Clairement, les modèles de référence sont ici de type vygotskien ou brunérien, tels qu'ils ont été évoqués plus haut.

1 - 4 - La génération de règles

Les méthodes d'éducation cognitive font également souvent appel à une forme particulière de sollicitation du sujet auquel on demande de dégager de son activité des règles générales. C'est par exemple le cas dans le cadre des inductions opératoires à l'aide de la "boîte à transformations" mise au point par Paour. Confronté à une tâche qui consiste à introduire dans les cases supérieures de la boîte des objets qui lui sont immédiatement restitués au niveau des cases inférieures mais "transformés" (fig. 10), le sujet doit exprimer des règles de transformation mises en jeu par chacune des cases de la boîte. Ce faisant, on suscite chez lui la mise en oeuvre d'un raisonnement de type inductif qui l'amène à changer de niveau dans la représentation des éléments de la tâche.

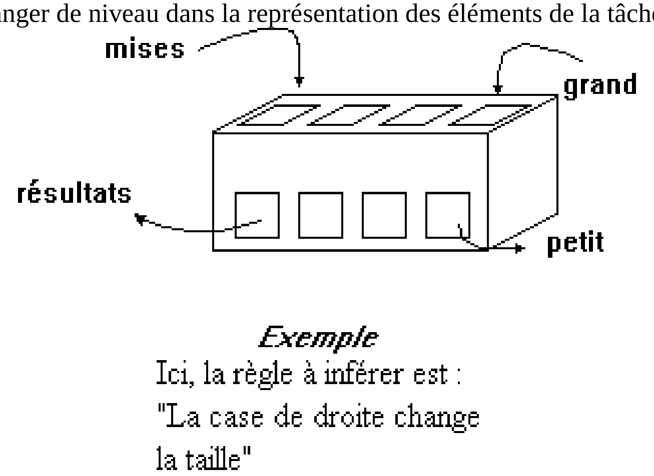


fig. 10 - La boîte à transformation de Paour (d'après Soavi, 1992)

1 - 5 - La prévisibilité

En mettant l'accent sur la prévisibilité, les méthodes d'éducation cognitive visent essentiellement à faire en sorte que le sujet s'engage dans une démarche de comparaison des résultats attendus et des résultats effectivement obtenus. Ici encore, on peut difficilement ne pas retrouver une référence aux processus anticipateurs du sujet décrits par Piaget mais également, à l'un des éléments constitutifs des schèmes tels que les décrit Vergnaud (cf. Vergnaud, 1991).

1 - 6 - Les échanges interindividuels

Au-delà des aspects qui relèvent directement de l'interaction de tutelle, avec le principe de centration sur les échanges, on a affaire dans de nombreuses méthodes d'éducation cognitive à une démarche qui s'appuie sur le groupe. Les échanges en son sein sont alors conçus de telle sorte que chacun de ses membres puisse y trouver l'occasion de voir ses positions discutées pour, éventuellement, être ré-élaborées dans un processus de type conflit socio-cognitif.

1 - 7 - Les aspects conatifs

On évoquera enfin la centration des méthodes d'éducation cognitive sur les aspects conatifs de la conduite (on désigne généralement sous ce terme les aspects non cognitifs : Reuchlin, 1990) pour souligner qu'ils y occupent une place importante. Celle-ci est marquée par des considérations qui touchent indifféremment la motivation (avec notamment, la tentative de développer une motivation intrinsèque plutôt qu'extrinsèque), l'attribution (avec cette fois le souci de développer chez le sujet une attitude le conduisant à "attribuer" ses réussites ou échecs à des causes internes plutôt qu'externes), le niveau d'exigence interne (dont on cherche à faire en sorte qu'il soit le plus élevé possible), etc.

2 - L'évaluation des effets des programmes

Les éléments qui précèdent laissent penser, comme on l'a vu, que des effets massifs peuvent être attendus des différentes tentatives d'éducation cognitive. Or, indépendamment de travaux qui ne sont pas toujours irréprochables sur le plan méthodologique, les résultats obtenus s'avèrent beaucoup plus mitigés qu'on aurait pu le penser a priori ou sur la simple base des considérations avancées par les auteurs de programmes. Ce qui suit a donc pour but de mettre en évidence quels sont les éléments qui peuvent expliquer cette relative déception, tout en s'attachant à dégager quelques-uns des problèmes posés par la démarche d'évaluation.

2 - 1 - L'efficacité des apprentissages opératoires

Concernant les apprentissages opératoires (au-delà de leur statut particulier souligné plus haut), les travaux réalisés concluent généralement à la possibilité d'induire, par exemple, l'accession des sujets à la conservation de la longueur, de la substance, du poids, etc. Cependant, toutes les recherches entreprises en référence au modèle piagétien n'obtiennent pas ce résultat (cf. Fortin-Thériault, 1977 ou Lajoie, 1983, cités par Laurendeau-Bendavid, 1985). Inversement, des inductions fondées sur des principes théoriques très différents aboutissent à des réussites similaires. De telles contradictions témoignent de l'existence de plusieurs problèmes qui dépassent très largement le cadre des apprentissages opératoires.

- Problèmes de méthode

A un premier niveau, il s'agit de problèmes d'ordre méthodologiques. Ainsi, par exemple, on a souvent reproché au travail d'Inhelder, Sinclair & Bovet (1974) de ne pas avoir pris la précaution de faire une comparaison entre au moins deux groupes de sujets (les sujets "expérimentaux" qui bénéficient de l'entraînement, d'une part et des sujets "contrôles" qui eux n'en bénéficient pas). De ce fait, il est difficile d'affirmer que les progrès cognitifs enregistrés sont dus à l'entraînement plutôt qu'à une évolution "normale" entre pré-test et post-test. De la même façon, l'identité des épreuves utilisées, à la fois, au niveau de l'entraînement et des pré-test ou post-test, ne permet guère de savoir si les progrès sont dus à une transformation structurale ou plus simplement à un apprentissage de réponses. Le nombre restreint de sujets soumis à l'expérience ne plaide pas non plus en faveur d'une grande généralisation possible des résultats obtenus. On le voit, ces critiques s'inscrivent dans le débat plus général portant sur l'administration de la preuve dans l'évaluation des changements cognitifs.

- Des mécanismes invoqués discutables

A un deuxième niveau, il s'agit du problème de l'attribution des résultats obtenus au mécanisme invoqué sur le plan théorique. D'autres expériences (cf., pour une présentation succincte, Bideaud, Houdé & Pédinielli, 1993, p. 409) ont en effet montré qu'il était possible de produire des effets cognitifs tout à fait comparables à partir d'entraînements reposant, eux, sur d'autres principes que celui du conflit cognitif (par exemple, l'explication, telle qu'on pourrait la donner dans le cadre scolaire). Ainsi, on voit combien il convient de rester prudent quant aux interprétations des phénomènes observés car ce n'est pas parce que les résultats produits sont conformes à ce que prévoit la théorie que pour autant la théorie est valide. Comme on vient de le noter ici, d'autres cadres théoriques restent toujours possibles pour expliquer les mêmes faits.

- Problème d'échelle de mesure

A un troisième niveau, il s'avère encore important de souligner un problème qui se pose avec beaucoup d'acuité dans le domaine de l'éducation cognitive, sans pour autant être souvent mentionné. Il s'agit du problème de l'évaluation du niveau initial des sujets avant toute intervention. En effet, comme le fait remarquer Laurendeau-Bendavid (Laurendeau-Bendavid, 1985), si, pour évaluer l'efficacité d'une méthode d'éducation cognitive, on est placé dans la même situation qu'un diététicien qui souhaite évaluer les résultats d'un régime amaigrissant mais en ne disposant pour cela que d'une balance qui permet uniquement de savoir si le sujet pèse plus ou moins de 100 kg, il est clair qu'on risque de tirer d'une telle expérience des conclusions fort peu fiables. Or, il se trouve que dans bien des cas (comme dans le paradigme de l'apprentissage opératoire), c'est d'un instrument à peine moins grossier dont on se sert effectivement, en repérant les sujets sur une échelle à seulement deux ou trois niveaux. A partir de là, on entrevoit toute la faiblesse des modèles théoriques qui ne permettent pas de disposer d'une échelle développementale suffisamment fine pour éviter de telles situations, ce qui indéniablement est le cas du modèle piagétien (Netchine-Grynberg, 1990).

2 - 2 - L'efficacité de LOGO

En ce qui concerne LOGO, les résultats sont là encore assez décevants, surtout si on les rapporte à l'extraordinaire espoir fondé sur les propos de Papert (Papert, 1981). Néanmoins, les travaux réalisés se révèlent d'une grande utilité pour, à l'avenir, éviter le même genre de déception. Sous forme de synthèse des nombreux résultats dont on dispose, Valcke (1991) a procédé à une analyse statistique des résultats produits par 76, recherches réalisées sur une période allant de 1969 à 1989. Au regard de ce travail, on constate en premier lieu que les problèmes méthodologiques évoqués ci-dessus n'épargnent pas les recherches sur LOGO (tableau 1). Celui-ci montre, en effet, que relativement peu de recherches utilisent un groupe contrôle. De plus, lorsqu'elles le font, très peu veillent à ce que ce groupe contrôle ne reste pas sans activité. On sait, en effet que le simple fait de s'occuper des sujets d'une expérience, indépendamment de ce qu'on fait avec eux, peut suffire à modifier leurs performances. C'est l'effet Hawthorne, du nom de la ville, près de Chicago, où un chercheur (Elton Mayo) l'a mis en évidence dans une étude de l'influence de l'éclairement d'un atelier sur la productivité de ses ouvrières.

Tableau 1 - Distribution des études selon leurs choix méthodologiques (d'après Valcke, 1991)

	Oui	**Non**	**Total**
Présence d'un groupe contrôle	49(**64,4 %)**	27 (**35,6 %)**	76
Présence d'un groupe contrôle actif	15(**19,7 %)**	61 (**80,3 %)**	76

Par ailleurs, lorsqu'on s'intéresse aux effets de la pratique de LOGO sur différentes variables telles que : mathématiques, cognition, résolution de problèmes, métacognition, créativité, affectif, social (à la réserve près que de telles définitions restent malheureusement bien vagues !), on remarque que peu d'effets significatifs sont à attribuer à LOGO (tableau 2). Bien que décevants, ces résultats restent malgré tout très intéressants sur plusieurs plans.

Tableau 2 - Effets de la pratique de LOGO sur différentes variables (d'après Valcke, 1991)

Types de variables	**Effets significatifs** (non dus au hasard)
Mathématiques	non
Cognition	non
Résolution de problèmes	non
Métacognition	non
Créativité	non
Affectif	non
Social	**oui**

A un premier niveau, ils mettent en garde contre un optimisme exagéré quant aux possibilités de produire des changements cognitifs dont l'importance serait en mesure de bouleverser (comme l'attendait Papert) le cours du développement.

Par ailleurs, ces résultats sont une confirmation éclatante du fait qu'il n'existe certainement pas une capacité générale à résoudre des problèmes (Crahay, 1987 ; Gurtner, Retschitzki & Léon, 1991). En effet, alors même que c'est l'effet qu'on a le plus souvent attendu et recherché d'une pratique du LOGO, il s'avère que la résolution de problèmes n'est pas améliorée par ce type d'activité. Dès lors, il apparaît difficile d'espérer d'un quelconque programme d'éducation cognitive l'induction d'une telle capacité.

Enfin, si l'on ne trouve pas ce qui était théoriquement attendu, il va de soi qu'une sérieuse révision des modèles théoriques s'impose. A ce niveau, il semble important de souligner la faiblesse des modèles généraux qui ne tiennent pas compte des contenus de connaissances impliqués par chaque tâche ou, tout au moins, par chaque classe de tâches.

2 - 3 - L'efficacité des ARL

En ce qui concerne les ARL, même si les auteurs du programme font état d'effets positifs sur le développement des sujets (cf., par exemple Higelé & Perry, 1991), il s'avère que tous les travaux d'évaluation ne concluent pas de la même façon. A titre d'exemple, la recherche de Chartier & Rabine (1989) fournit des résultats plus décevants. Ces auteurs ont travaillé avec des adolescents âgés de 15;8 ans en moyenne. Trois groupes ont été constitués : un groupe expérimental auquel on propose 11 séances d'ARL, un premier groupe contrôle "actif" (on tient compte ici de l'effet Hawthorne) auquel on propose une activité d'analyse de presse ou d'exploration de différents domaines intervenant dans le choix d'une profession et, enfin un deuxième groupe contrôle auquel on ne propose aucune activité particulière. Le Test des Opérations Formelles est administré en pré-test et post-test afin de saisir les progrès.

Tableau 3 - Scores moyens par groupe (d'après Chartier & Rabine, 1989)

	Pré-test	**Post-test**
Groupe ARL	16,02	17,15
Groupe contrôle "actif"	14,93	16,32
Groupe contrôle	16,02	16,61

Les résultats (tableau 3), analysés en termes de scores globaux ne font apparaître aucun effet significatif à l'avantage du groupe expérimental comparativement aux deux autres groupes. Cependant, les auteurs soulignent que les animateurs des séances ARL ont, eux, remarqué des changements au niveau des relations entre pairs et avec les adultes ainsi qu'au niveau métacognitif : un changement d'attitude face à la difficulté, une plus grande attention portée au raisonnement et à l'argumentation des résultats. Ces remarques les amènent alors à conclure que l'évaluation des méthodes d'éducation cognitive doivent s'efforcer de prendre en compte plusieurs dimensions d'observation des conduites susceptibles d'être induites.

2 - 4 - L'efficacité du PEI

En ce qui concerne le PEI, là encore, aux résultats positifs enregistrés par les auteurs (cf. par exemple Feueurstein & Jensen, 1989) qui constatent, outre une supériorité des groupes PEI sur les groupes contrôles, une augmentation de la différence à l'avantage des groupes PEI au fur et à mesure qu'on s'éloigne de l'intervention, s'opposent, par exemple, les résultats beaucoup plus nuancés de Loarer, Libert, Chartier, Huteau & Lautrey (1992). Ces auteurs ont travaillé à la comparaison des performances d'un groupe expérimental (soumis au PEI pendant environ 100 heures) et d'un groupe contrôle "actif". La population est constituée d'adultes d'âge moyen 25 ans, en stage de préformation à L'A.F.P.A (Association de Formation Professionnelle pour Adultes). L'originalité de ce travail réside à la fois, dans le grand nombre de précautions méthodologiques (Huteau & Loarer, 1992) prises par les auteurs, le nombre de dimensions évaluées et l'estimation de la taille de l'effet, exprimée par un nombre proportionnel à l'effet.

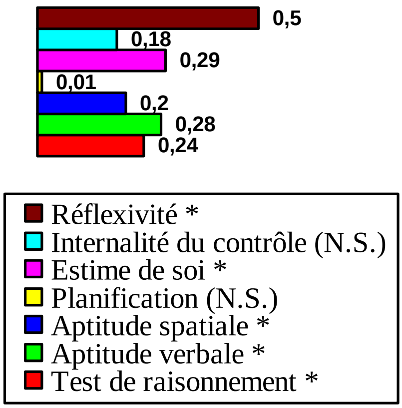


fig.11 - Amplitude de l'effet à l'avantage du groupe PEI sur différentes dimensions (d'après Loarer & al., 1992)

Les principaux résultats montrent (fig. 11) des différences significatives (* dans la légende) à l'avantage du groupe expérimental ou non significatives (N.S. dans la légende) quant à l'amplitude de l'effet. La figure 11 exprime des effets très contrastés : depuis ceux qui sont quasiment nuls, comme par exemple au niveau de la planification, (pourtant souvent évoquée comme fondamentale en résolution de problèmes), jusqu'aux différences très nettes entre les groupes comme au niveau de la réflexivité (relative au contrôle de l'impulsivité), par exemple. Cependant les auteurs insistent sur le fait que souvent les effets positifs sont limités aux tâches relativement proches de celles du programme et ne se retrouvent plus au niveau des performances relatives à des tâches plus éloignées. De plus, l'effet d'accroissement avec le temps des différences entre les deux groupes (cf. Feueurstein & Jensen, 1989) n'est pas retrouvée dans cette étude. On le voit, ici encore, le PEI ne se révèle pas être, aussi massivement que certains le pensent (cf., par exemple, Debray 1989), à la hauteur des attentes fondées sur lui. Il est cependant capable d'induire d'authentiques changements cognitifs. On remarquera toutefois que, lorsque ces résultats sont encourageants, ils restent malgré tout bien difficiles à comprendre en termes de mécanismes responsables des évolutions enregistrées. Très nettement ici, mise à part la dimension réflexivité, les résultats s'expliquent difficilement à partir des caractéristiques du programme. En particulier, alors que le programme s'efforce de travailler sur la dimension résolution de problèmes, on ne trouve aucun effet sur la planification pourtant directement sollicitée (par exemple, dans les épreuves d'organisation de points).

IV - NECESSAIRES EVOLUTIONS DE L'EDUCATION COGNITIVE

1 - Analyser encore les pratiques de l'éducation cognitive

L'éducation cognitive apparaît donc, à la fois comme un immense espoir pour des populations en difficulté sur le plan cognitif, mais aussi et en même temps, comme un énorme réservoir de pratiques dont les effets, loin d'être systématiques, restent difficilement explicables par les modèles invoqués. Dans ce contexte, il convient de poursuivre l'analyse de ces pratiques pour toujours mieux en saisir (sans passion ou croyance a priori !) les valeurs mais aussi les limites (Paour, Jaume & De Robillard, 1995), grâce à des méthodes rigoureuses d'évaluation. Par ailleurs, il semble utile de prendre en compte les principaux enseignements qu'il est d'ores et déjà possible d'en tirer pour s'orienter vers la recherche de solutions mieux maîtrisées quant aux processus sollicités chez les sujets. Ceci implique certainement l'abandon de modèles trop généraux et trop nombreux pour étayer théoriquement les démarches entreprises.

2 - Travailler sur des domaines de connaissances

Trop généraux ou encore trop hétéroclites, les modèles jusque là utilisés pour étayer les pratiques de l'éducation cognitive s'avèrent peu efficaces pour rendre compte de façon précise des changements cognitifs attendus ou même effectivement provoqués. L'analyse qui précède fournit de nombreux exemples qui permettent d'argumenter dans ce sens. Dès lors, et compte tenu de l'état actuel des savoirs construits par la psychologie - notamment en ce qui concerne les processus et les contenus relatifs à la généralisation des connaissances - l'abandon de tâches "sans contenu" au profit d'une éducation cognitive plus en prise avec des domaines de connaissances spécifiques devrait s'imposer comme une évolution significative des pratiques.

3 - Elaborer de nouveaux modèles

D'autre part, si les principes généraux de l'éducation cognitive, énoncés plus haut, semblent avoir beaucoup de pertinence pour concevoir et réguler la fonction de médiation de manière efficace, nul doute que de tels principes constituent un précieux capital pour toute pratique pédagogique à visée cognitive. Ils représentent d'ailleurs, probablement, l'une des meilleures sources de réflexion dont les pédagogues peuvent actuellement s'emparer pour s'engager sur la voie de la formalisation de leurs pratiques. Cependant, force est de constater que le nombre de ces principes, leur diversité ou encore l'hétérogénéité des modèles théoriques qui les fondent ou les justifient, donnent peu de prise à une vision d'ensemble des processus qu'ils sollicitent chez le sujet. Une autre évolution de l'éducation cognitive devrait donc consister à se doter de modèles théoriques susceptibles d'articuler dans un tout plus cohérent les composantes essentielles de l'appropriation par les sujets de connaissances nouvelles. Sur ce plan, il semble essentiel de s'orienter vers des modélisations comme, par exemple, la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1991), prenant en compte simultanément les organisations cognitives issues de l'*action* (à travers les schèmes mis en oeuvre par le sujet dans son activité autonome) et celles dépendant plutôt des *concepts* (notamment ceux que véhicule le langage adressé à l'enfant mais, aussi et plus largement, la culture à laquelle il appartient). Une recherche que l'on a conduite (Coulet, 1994b) chez des élèves de CE2 concernant la lecture de tableaux à double entrée peut permettre d'illustrer l'intérêt d'une centration sur cette double source des constructions cognitives réalisées à partir de l'action et/ou des concepts. Les 68 sujets de l'expérience ont été confrontés à une tâche de lecture de tableaux à double entrée comportant des doubles marges (fig. 12). Elle consistait pour eux à énoncer les propriétés inscrites dans ces marges (les mêmes propriétés occupaient des places différentes dans les 6 tableaux successivement proposés) pour indiquer à quoi correspondaient les nombres cerclés.

Tableau 1		rouge		bleu	
		mince	épais	mince	épais
triangle	grand	1	40	18	7
	petit	23	35	53	41
rond	grand	13	0	72	26
	petit	4	88	66	54

fig. 12 - Exemple de tableau à double entrée soumis aux sujets

Le relevé de l'ordre d'énonciation de ces propriétés fait apparaître deux grands types de stratégies utilisées par les sujets : une stratégie de cohérence "spatiale" consistant plutôt à parcourir les marges des tableaux toujours de la même manière (ce sont les sujets représentés sur la partie droite de la fig. 13) et une stratégie de cohérence "conceptuelle" consistant plutôt à garder invariant l'ordre d'énonciation des propriétés, quelles que soient leurs places dans les marges (ce sont les sujets représentés sur la partie gauche de la fig. 13). Les scores portés sur la figure 13 prennent en compte les 24 réponses fournies par chaque sujet.

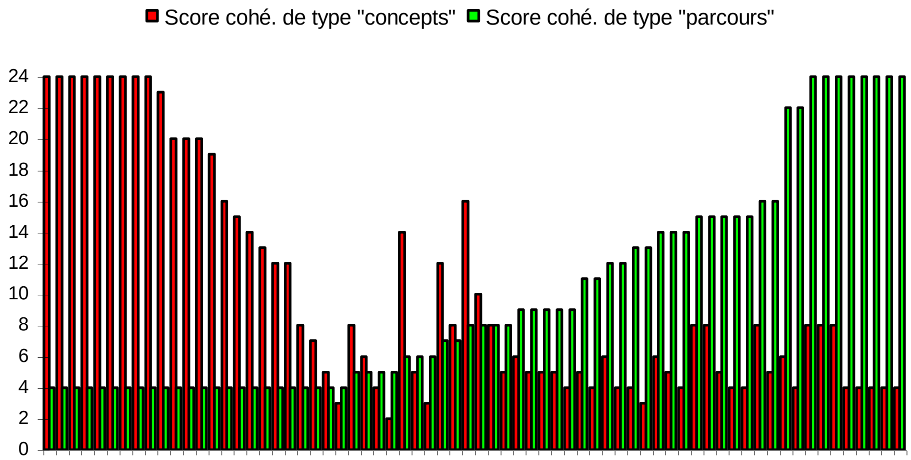


fig. 13 - Rangement des 68 sujets en fonction de leur type de cohérence (spatiale ou conceptuelle)

CONCLUSION

L'éducation cognitive constitue certainement une source d'expériences et d'inspiration non négligeable pour les pédagogues. Ses pratiques ainsi que l'évaluation de ses effets devraient susciter dans l'avenir de nombreuses collaborations entre psychologues et pédagogues. Par ailleurs, parce que les technologies rendent désormais possible d'imaginer des formes de préceptorat à distance, grâce notamment à ce qu'il est convenu d'appeler "les autoroutes de l'information", on peut s'attendre à ce que la problématique de l'éducation cognitive alimente celle des aides cognitives qu'il faudra concevoir puis fournir, en temps réel sur tel ou tel domaine d'activités scolaires ou professionnelles, à des sujets en situation d'apprentissage dans des réseaux informatiques. Relever le défi suppose, là encore, que psychologues et pédagogues collaborent très étroitement pour pouvoir comprendre quels sont les mécanismes impliqués dans les constructions cognitives relatives à tel ou tel domaine (Vergnaud dirait "à tel ou tel champ conceptuel") et, partant de là, être en mesure de fournir un "étayage" (on emprunte volontairement ici ce concept à Bruner) adapté et performant à ces constructions.

Références bibliographiques

BANDURA, A. (1980). *L'apprentissage social*. Bruxelles : Mardaga.

BINET, A. (1909). *Les idées modernes sur les enfants*. Paris : Flammarion.

BRUNER, J. S. (1983). *Le développement de l'enfant, savoir faire, savoir dire*. Paris : PUF.

BRUNER, J. S. (1984). Contextes et formats. In : M. Deleau (Ed.), *Langage et communication à l'âge préscolaire*. Rennes : PUR, 13-26.

CANAL, J.L., PAPILLON, P. & THIRION, J.F. (1994). *Les outils de la PNL à l'école*. Paris : Les éditions d'organisation.

CHARTIER, D. & RABINE, P. (1989). Evaluation d'une méthode de remédiation cognitive : le cas des Ateliers de Raisonnement Logique. *L'orientation scolaire et professionnelle*, 18, 2, 127-137.

COULET, J.C. (1989). *Les changements de systèmes de représentation et de traitement dans une tâche d'entraînement à la programmation informatique : étude différentielle chez des sujets de 8-9 ans*. Thèse de Doctorat non publiée, Université de Provence.

COULET, J.C. (1992). Induire des constructions cognitives : une hypothèse fondée sur une typologie des conduites d'apprentissage des règles de fonctionnement d'un mobile programmable. In : J. Drévillon (Ed.), *Les aides cognitives*. Caen : E.P.E.

COULET, J.C. (1994a). Psychologie comparative et étude des différences individuelles : continuité ou rupture ? In : M. Deleau & A. Weil-Barais (Eds.), *Le développement de l'enfant : approches comparatives*. Paris : PUF.

COULET, J.C. (1994b). *Stratégies d'appréhension de données dans un tableau à double entrée chez des enfants de 8-9 ans*. Communication affichée, XIèmes Journées de Psychologie Différentielle, Montpellier.

COULET, J.C. (sous presse). Résolution de problèmes et éducabilité cognitive. In : A. Lieury (Ed.) *Manuel de psychologie de la formation*. Paris : Dunod.

CRAHAY, M. (1987). LOGO, un environnement propice à la pensée procédurale. *Revue Française de Pédagogie*, 80, 37-56.

DEBRAY, R. (1989). *Apprendre à penser. Le programme d'enrichissement instrumental de Feuerstein : une issue à l'échec scolaire*. Paris : éditions ESHEL.

DE RIBAUPIERRE, A. (1995). Potentiel d'apprentissage et contraintes structurales : apports des modèles piagétiens et néo-piagétiens. In : F.P. Büchel (Ed.) *L'éducation cognitive, le développement de la capacité d'apprentissage et son évaluation*. Neuchâtel-Paris : Delachaux et Niestlé.

DOISE, W. & MUGNY, G. (1981). *Le développement social de l'intelligence*. Paris : Inter-éditions.

FEUEURSTEIN, R. & JENSEN, M.R., (1989). L'enrichissement instrumental : bases théoriques, objectifs et instruments. *Psychologie scolaire*, 67, 7-37.

FLAVELL, J.H. & WELLMAN, H.M. (1977). Metamemory. In : R.V. Kail & J.V. Hagen (Eds.), *Perspectives on the development of memory and cognition*. Hilsdale : Erlbaum.

FORTIN-THERIAULT, A. (1977). *Comparaison de deux méthodes d'apprentissage par conflit cognitif*. Thèse de Doctorat non publiée, Université de Montréal.

GURTNER, J.L., RETSCHITZKI, J. & LEON, C. (1991). Du jaillissement à l'épanouissement de l'esprit. In : J.L. Gurtner & J. Retschitzki (Eds.) *LOGO et apprentissages*. Neuchâtel - Paris : Delachaux & Niestlé.

HIGELÉ, P. (1987). Les activités de remédiation cognitive d'inspiration piagétienne. *Education permanente*, 88-89, 123-127.

HIGELÉ, P. & PERRY, E. (1991). Ateliers de Raisonnement Logique et transfert à des situations de la vie quotidienne. In : J. Drévillon (Ed.), *Les aides cognitives*. Caen : E.P.E.

HOC, J.M. (1984). Les activités de résolution de problèmes dans la programmation informatique. *Psychologie Française*, 29, 231-234.

HOMMAGE, G. & PERRY, E. (1987). Les ateliers de raisonnement logique : mise en oeuvre, diagnostic, évaluation. *Education permanente*, 88-89, 129-139.

HUTEAU, M. & LOARER, E. (1992). Comment évaluer les méthodes d'éducabilité cognitive ? *L'orientation scolaire et professionnelle*, 21, 1, 47-74.

LAJOIE, M. (1983). *Validation de deux nouvelles épreuves d'opérativité portant sur la notion de conservation*. Thèse de Doctorat non publiée, Université de Montréal.

LAURENDEAU-BENDAVID, M. (1985). L'apprentissage des structures logiques, perspectives d'avenir après 25 années de recherches. *Archives de Psychologie*, 53, 207, 495-501.

LIEURY, A. (1990). Auditifs, visuels, la grande illusion ? *Cahiers Pédagogiques*, 287, 58-62.

LIEURY, A. (1991). La confusion des codes symboliques : verbal et imagé. *Cahiers Pédagogiques*, 291, 57-59.

LOARER, E.(1992). L'éducation cognitive : repères historiques et enjeux actuels. *L'orientation scolaire et professionnelle*, 21, 1, 3-11.

LOARER, E., LIBERT, M.F., CHARTIER, D., HUTEAU, M. & LAUTREY, J. (1992). *L'évaluation du PEI dans les stages de préformation de l'A.F.P.A.* Paris : Service de recherche de l'I.N.E.T.O.P. et Laboratoire de Psychologie différentielle (Université de Paris V) en partenariat avec l'A.F.P.A.

LOARER, E., LIBERT, M.F., CHARTIER, D., HUTEAU, M. & LAUTREY, J. (1995). *Peut-on éduquer l'intelligence ? L'évaluation d'une méthode d'éducation cognitive*. Berne : Peter Lang.

MELOT, A.M. & CORROYER, D. (1986). *L'enfant et la mémoire*. Lille : PUL.

MONTEIL, J.M. & HUGUET, P. (1991). Insertion sociale, catégorisation sociale et activités cognitives. *Psychologie Française*, 36, 1, 35-46.

NETCHINE-GRYNBERG, G. (1990). Les modèles de développement et l'étude du fonctionnement cognitif de l'enfant. In : G. Netchine-Grynberg (Ed.) *Développement et fonctionnement cognitifs chez l'enfant*. Paris : PUF.

PAOUR, J.L. (1987). Quelques principes fondateurs de l'éducation cognitive. *Interactions didactiques*, 8, 45-62.

PAOUR, J.L., JAUME, J. & DE ROBILLARD, O.(1995). De l'évaluation dynamique à l'éducation cognitive : repères et questions. In :F.-P. Büchel (Ed.) *L'éducation cognitive : le développement de la capacité d'apprendre et son évaluation*. Neuchâtel - Paris : Delachaux & Niestlé.

PAPERT, S. (1981). *Jaillissement de l'esprit ; ordinateurs et apprentissage*. Paris :Flammarion.

PIAGET, J. (1957). Logique et équilibre dans les comportements du sujet. In : L. Apostel, B. Mandelbrot, J. Piaget (Eds) *Logique et équilibre*. Paris : PUF.

PIAGET, J. (1969). *Psychologie et pédagogie*. Paris : Denoël Gonthier.

PIAGET, J. (1974 a). *La prise de conscience*. Paris : PUF.

PIAGET, J. (1974 b). *Réussir et comprendre*. Paris : PUF.

PIAGET, J. (1975a). *L'équilibration des structures cognitives, problème central du développement*. Paris : PUF.

PIAGET, J. (1975b). *Où va l'éducation*. Paris : Denoël Gonthier.

PIAGET, J. (1975b). *Où va l'éducation*. Paris : Denoël Gonthier.

PIAGET, J., INHELDER, B. & SZEMINSKA, A. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris : PUF.

REUCHLIN, M. (1990). *Les différences individuelles dans le développement conatif de l'enfant*. Paris : PUF.

SOAVI, G. (1992). Induction opératoire et modification du fonctionnement cognitif. In : J. Drévillon (Ed.), *Les aides cognitives*. Caen : E.P.E.

SOREL, M. (1987). Apprendre peut-il s'apprendre ?, *Education permanente*, 88-89, 7-226.

SOREL, M. (1992). Peut-on classer les méthodes d'éducabilité cognitive ? *L'orientation scolaire et professionnelle*, 21, 1, 75-105.

VALCKE, M. (1991). Méta-analyse des recherches consacrées à LOGO. In : J.L. Gurtner & J. Retschitzki (Eds.) *LOGO et apprentissages*. Neuchâtel - Paris : Delachaux & Niestlé.

VERGNAUD, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 2/3, 133-170.

WINNYKAMEN, F. (1982). L'apprentissage par observation. *Revue Française de pédagogie*, 59, 24-29.

Deux exemples de situations d'enseignement de mathématiques pour des élèves en difficulté

COPIRELEM, sous un projet de Denis Butlen

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Rennes.1996.
Ce texte a été édité en plaquette en septembre 1996 et diffusé par la Direction des Écoles du Ministère de l'Éducation Nationale dans toutes les Inspections Académiques avec ce même titre et sous la rubrique Accompagnement des Programmes de Mathématiques.

Il essaie de caractériser les élèves en difficulté à l'école primaire et d'analyser des réponses habituelles de professeurs des écoles à ces difficultés. Il propose deux exemples de situations pour l'apprentissage mathématique de ces élèves.

A. INTRODUCTION

Cette contribution s'appuie sur les résultats de recherches sur l'enseignement des mathématiques à des élèves en difficulté de l'école primaire effectuées par D. Butlen et M. Pezard [5], par M.J. Perrin-Glorian [14, 15, 16].

Tout enseignement se proposant de lutter contre l'échec scolaire doit proposer aux élèves des situations d'apprentissage prenant en compte les caractéristiques spécifiques d'un public en difficulté.

Dans un premier temps, nous essayons de décrire quelques traits caractéristiques des élèves en difficulté, et nous dégageons certaines pratiques professionnelles d'enseignants s'adressant à une classe comprenant beaucoup d'élèves en échec.

Nous nous appuyons sur cette analyse pour décrire dans un second temps un dispositif de remédiation. Nous proposons ensuite des éléments de réponse aux questions suivantes :

1. Comment, à partir de la production régulière d'écrits collectifs résumant ce qui a été appris pendant une période donnée, aider les élèves à formuler, décontextualiser et plus généralement retenir les notions fréquentées en classe ? Comment des situations "de rappel" peuvent-elles contribuer à cela ?

Comment utiliser ces phases de rappel pour dépasser la simple description et le stade de l'action et apprendre aux élèves à anticiper sur les apprentissages scolaires ?

2. Comment aider les élèves à résoudre un problème complexe, en leur apportant des aides limitées, sans réduire la tâche à une simple exécution de règles et sans limiter le sens mathématique de la situation ?

B. ENFANTS EN DIFFICULTÉ. PREMIERE ANALYSE

1. Comment se manifestent les difficultés des élèves de l'école élémentaire ?

Nous nous appuyons sur deux articles : "Réflexions sur le rôle du maître dans les situations didactiques à partir du cas de l'enseignement à des élèves en difficulté - *PME* 1992, M.J Perrin" et "Une expérience d'enseignement des mathématiques à des élèves de 6ème en difficulté, *Repères-IREM* n°3, Topiques-Editions (1991), M.J. Perrin-Glorian et D. Butlen".

Voici plusieurs caractéristiques d'un élève en difficulté en mathématique, qui ne se retrouvent pas forcément toutes chez le même élève ; cependant, on constate souvent un effet d'accumulation à long terme.

Difficulté à capitaliser le savoir

Les élèves en difficulté ont du mal à retenir le cours, à mémoriser vocabulaire et propriétés. L'apprentissage par cœur n'apporte pas de solution ; on a pu constater, en sixième par exemple, que des élèves connaissent parfaitement deux définitions de la médiatrice d'un segment mais ne savent en utiliser aucune pour résoudre un exercice.

Manque de confiance dans les connaissances anciennes

L'absence de connaissances antérieures solides auxquelles se référer empêche chez ces élèves une organisation et une intégration des savoirs nouveaux : pour certains enfants, rien n'est sûr, tout peut toujours être remis en question, puisqu'ils ont l'habitude de se tromper.

Carence dans les représentations mentales et absence de projet implicite de réinvestissement

Il y a souvent, chez les élèves en difficulté, un divorce entre les situations d'action qui devaient servir à donner du sens aux notions enseignées et l'institutionnalisation[(2)] qui est faite ensuite par le maître.
Par exemple, pour introduire la notion de fraction, il est usuel d'amener les élèves à partager, par pliage ou report, des segments en parties égales ; les élèves en difficulté ne retiennent de cette séance que l'activité manipulatoire alors que d'autres y voient en plus l'illustration d'une définition de la fraction. Pour ces derniers, la notion de fraction prend du sens.

Au cours de l'action, dans les premières situations qui permettent d'aborder une notion nouvelle, on ne voit pas beaucoup de différences entre les élèves "ordinaires" et ceux qui sont en difficulté. En revanche, la différence entre ces deux types d'élèves s'accentue très vite dès qu'ils ont à réutiliser les connaissances nouvelles dans d'autres situations. Le savoir institutionnalisé par le maître, même dans le cas où il est mémorisé, semble coupé des situations d'action qui lui ont donné naissance et ne peut être utilisé pour résoudre de nouveaux problèmes.

Les élèves qui ne rencontrent pas ce type de difficulté ont conscience que, dès le début de l'activité, ce qu'ils vont faire pourra être réutilisé dans d'autres situations, autrement dit dans un autre contexte. Ils se créent des représentations mentales non seulement pour résoudre le problème posé mais pour pouvoir en rappeler et réutiliser des éléments à l'occasion d'autres problèmes. Ceci leur permet de réinvestir partiellement une connaissance, même si elle n'est pas encore totalement identifiée.

Pour d'autres enfants, ce "transfert" ne se fait pas à l'occasion d'autres problèmes ; il ne peut pas se faire car ils ne résolvent le problème que dans les termes où il est posé, sans idée de généralisation. Cela empêche la capitalisation et la mémorisation des connaissances. Ainsi, pour eux, chaque expérience est nouvelle, ou plus exactement, ils n'en reconnaissent que le contexte : "on a plié des bandes de papier, on a découpé des rectangles... "

[(2)] Institutionnalisation : phase de la séance où le maître extrait, souligne, pointe l'important mathématique ou méthodologique.

Absence d'identification de l'enjeu des situations d'enseignement

L'élève en difficulté identifie mal les enjeux d'apprentissage ; il ne résout pas toujours le même problème que ses pairs, ni le problème que le maître pense avoir posé. L'élève en reste souvent au niveau de l'action et ne peut faire le lien avec d'autres expériences et d'autres apprentissages.

Lassitude et manque d'investissement

Ce manque d'investissement se fait en particulier sentir dans les contrôles écrits et dans le travail à la maison où un certain nombre d'élèves n'aborde pas une partie des questions. Ceci est sans doute à mettre en relation avec un certain manque de méthodes et un défaut de confiance dans la réussite.

En classe, certains élèves peuvent se lasser très vite d'une situation. Il est de ce fait très difficile de mener à terme son exploitation de la situation et de tirer les bénéfices de la recherche amorcée.
Certaines situations, lorsqu'elles sont perçues par les élèves comme nouvelles, les "accrochent" particulièrement. Ces situations restent alors plus facilement dans la mémoire des élèves et peuvent jouer le rôle de situations de référence.

Manque de méthodes

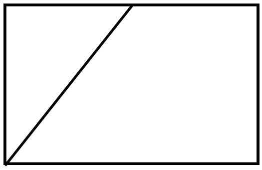
Les élèves ne savent pas comment aborder un problème. Le plus souvent, ils essaient de se souvenir du cours mais par contre, ils ne savent pas comment l'utiliser. Ils semblent manquer de situations complexes de référence, ce qui les amène à se précipiter sur la recherche d'une opération à effectuer ou d'une règle à appliquer. De plus, ils ne prennent souvent en compte qu'une partie de l'information et ont du mal à l'organiser pour se faire une représentation du problème.
Le manque de méthodes et d'investissement rend plus difficile le travail à la maison (par exemple lors de l'apprentissage des tables de multiplication).

Difficulté de socialisation et recherche d'une relation privilégiée avec l'adulte

Le travail de groupe et les phases collectives sont très difficiles à gérer parce que les élèves, comme ils le reconnaissent eux-mêmes lors d'entretiens individuels, ont des difficultés pour communiquer : ils ont du mal à s'exprimer, n'en ont pas toujours envie, ils sont incapables d'écouter leurs camarades et de respecter des règles élémentaires de prise de parole. Ils recherchent une relation privilégiée avec l'adulte.
Certaines activités permettent toutefois de favoriser le travail en groupe. Par exemple, celles qui utilisent l'informatique rendent la collaboration entre élèves nécessaire : les conditions matérielles sont particulières et le professeur n'est plus alors l'interlocuteur privilégié. En revanche, le travail sur ordinateur rend quasiment impossible les phases collectives car les élèves acceptent mal d'interrompre le travail en groupe : la machine joue un rôle "attracteur" et ils travaillent à des rythmes différents. Le bilan doit donc être fait dans une séance ultérieure.

Recherche d'algorithmes

Les élèves cherchent à utiliser le plus possible des algorithmes qui constituent des économies de pensée. Dès le début de l'apprentissage d'une notion, ils se construisent des règles de fonctionnement qui, souvent, ne prennent en compte qu'une partie de l'information et qui ont des domaines de validité très restreints, voire nuls. Par exemple, au moment de l'apprentissage des fractions , dès la première séance, l'écriture fractionnaire a été liée au à une action de report de longueur : 1/3 est la mesure de la longueur qui se reporte 3 fois dans l'unité. Les élèves retiennent le report mais non le rôle de l'unité.
Ainsi, alors qu'il s'agissait d'évaluer des portions de feuille de papier par rapport à la feuille entière, trois groupes d'élèves qui avaient évalué 2 pièces dont la réunion faisait une demi-feuille (figure ci-dessous), ont bien évalué le triangle en disant qu'il se reportait 4 fois dans la demi feuille mais ont estimé à tort que le trapèze valait 1/3 car le triangle se reportait 3 fois dans le trapèze.



Cela pose le problème de l'équilibre à adopter lors des bilans. S'il n'y a pas d'institutionnalisation à l'issue d'une phase de recherche, les élèves ne retiennent que le contexte et une partie de l'action sans réflexion sur celle-ci. Mais, dès qu'il y a institutionnalisation, une règle, éventuellement erronée, s'installe ; cette règle est souvent utilisée ensuite sans référence au sens. Le maître se trouve alors contraint de déstabiliser ces règles aussitôt qu'elles s'installent, ce qui fragilise davantage les apprentissages.

Difficultés à changer de point de vue

Une notion abordée dans un contexte est difficile à réutiliser dans un autre contexte. Par exemple, des élèves capables de résoudre des problèmes de proportionnalité dans un cadre numérique se retrouvent démunis devant un problème d'agrandissement de figures. Ils sont souvent incapables de percevoir le caractère commun à ces deux problèmes.

Problème d'expression et de lecture

A l'oral comme à l'écrit, les élèves en difficulté ne réussissent pas à faire des phrases simples ayant un sens, ni à utiliser correctement le vocabulaire. Leur expression est presque toujours partielle et imprécise : "la médiatrice, c'est la perpendiculaire" ; pour construire la médiatrice d'un segment, "on met le compas au milieu". Ils ne se dégagent pas de leurs actions.
En outre, la plupart rencontrent de grandes difficultés pour décoder, seuls, un texte de problème et prendre en compte la totalité de l'information.

Les problèmes de langage, d'expression et de lecture, sont ainsi à l'origine de difficultés mathématiques, qui sont au moins de trois ordres différents : la prise d'information, la conceptualisation, la production.

Les situations du quotidien, parfois considérées comme plus "motivantes"

Ces situations avec lesquelles les élèves ont une certaine familiarité, font souvent appel à des modes de raisonnement non conformes à ceux que l'on attend dans un cours de mathématiques. Il peut ainsi s'installer un véritable malentendu et une communication absurde entre le professeur et certains élèves. Par ailleurs, certains élèves refusent l'intrusion de la vie courante dans le cadre scolaire car cela leur rappelle trop leur vie quotidienne. L'expérience des élèves dans la vie quotidienne peut être utilisée à condition de poser aux enfants de véritables problèmes.

Représentation de soi de l'élève

Leur situation d'échec à l'école contribue à donner aux élèves en grande difficulté une image dévalorisée d'eux-mêmes. Cette image et la représentation qu'ils se font de leur place par rapport aux autres élèves de la classe ont des répercussions sur toute leur vie scolaire, y compris la difficulté à accepter certaines formes de travail (en groupes notamment).

2. Comment l'enseignant répond-il aux contraintes liées à une classe comportant de nombreux élèves en difficulté ?

L'enseignant est souvent impliqué dans un cercle vicieux : celui de la simplification des situations et de la "négociation à la baisse" des consignes (voir [14]).

Face à un élève qui :

- ne projette pas en terme d'apprentissage l'activité proposée,
- n'arrive pas à prendre en compte tous les cadres intervenant dans une situation,
- ne réinvestit pas dans une situation où se conjuguent ancien et nouveau savoir (la situation étant trop vite usée)
- ne perçoit pas le problème dans sa globalité,
- manque de méthode pour assumer seul, la résolution globale du problème,
- recherche des règles simples lui permettant de fournir une réponse quelconque,

l'enseignant est amené à :

- simplifier le problème posé, souvent à la demande de l'élève ou bien par souci d'anticiper un risque d'échec (donc d'abandon),
- poser des questions intermédiaires dont la réponse ne demande pas une prise en charge du problème général,
- proposer des algorithmes simples de résolution, des règles ou des opérations,
- concentrer son discours sur l'apprentissage de résultats du cours ou de savoir-faire algorithmisés
- réduire les situations à des répétitions d'autres situations non menées à terme, ou à des activités algorithmisées.

L'enseignant entre alors dans un cercle vicieux qui amène un appauvrissement des apprentissages et un renforcement des difficultés : l'élève se représente plus difficilement le problème, n'assume pas la responsabilité de la recherche, est réduit à un rôle d'exécutant....
L'enseignant a, de plus, tendance à se limiter à un domaine, le plus souvent numérique, rendant ainsi encore plus difficile les changements de point de vue ; il juge alors plus sage "*de faire le moins de mélanges possibles pour ne pas compliquer davantage les choses pour l'élève*".

3. Les idées retenues pour une remédiation

Une remédiation doit s'appuyer sur divers modes d'intervention et ne pas se limiter au niveau individuel. Elle doit être intégrée à l'apprentissage en cours ; une dialectique du réinvestissement et de la réussite doit s'instaurer entre les apprentissages collectifs et le "rattrapage" individuel ou par petits groupes.
Elle doit se construire autour de situations suffisamment complexes (pour donner du sens aux notions), mais pas trop difficiles, pour ne pas démobiliser les élèves.
Il est également nécessaire de s'appuyer sur les acquis des élèves et de les mettre en valeur.
La remédiation doit commencer suffisamment tôt dans l'année car elle nécessite la mise en place de méthodes de travail différentes.
Elle ne se limite pas aux seuls apprentissages mathématiques mais doit viser à la réduction des difficultés exposées dans le premier paragraphe.

Nous allons maintenant développer deux exemples de situations qui s'inscrivent dans un processus plus complet de remédiation (au sens de nouvelle médiation au savoir) : ils s'inscrivent dans un dispositif diversifié tant au niveau des contenus (mathématiques, méta-mathématiques, méta-cognitifs) que des modes de gestion (aide individuelle, travail en petits groupes homogènes, travail en groupes hétérogènes, travail en groupe classe...)

C. UNE PREMIERE SITUATION

Construction d'une mémoire collective et écrite

1. Présentation de l'activité

Nous décrivons ici un processus mis en oeuvre de mars à juin 1991, dans une classe de CE2 d'un quartier défavorisé de Seine et Marne ([5]).

Chaque semaine, deux élèves sont chargés de rédiger et d'écrire sur le cahier "mémoire de la classe", un résumé de cinq à dix lignes sur ce qui a été appris pendant la semaine en mathématiques. Ce texte est soumis à la critique de la classe qui peut l'amender et le préciser. La nouvelle version, rédigée collectivement, est adoptée et devient le texte de la classe.

Dans le débat collectif, la parole est donnée essentiellement aux élèves chargés de la rédaction. Le maître s'attache à valoriser leur production, mais aussi à solliciter le reste de la classe afin de l'enrichir.

La gestion du débat doit être souple. Le maître sollicite les élèves mais ce sont eux, collectivement, qui définissent les notions à retenir et les corrections à effectuer. Le texte final est celui des élèves, ce n'est pas la synthèse du

professeur. Bien sûr, le maître attire l'attention des élèves sur les erreurs mathématiques éventuelles et donne aux élèves les moyens de les corriger collectivement.
La gestion du débat doit tenir compte de la personnalité propre de chaque élève. Mis à part les cas de "blocage", le maître ne doit pas donner la parole systématiquement aux "bons" élèves. Il peut s'appuyer, pour alimenter le débat, sur des élèves de niveau moyen ou faible, susceptibles de prendre aisément la parole et de faire des propositions constructives, voire contradictoires. Il doit, simultanément, solliciter les élèves faibles.
Au besoin, il prend ponctuellement en charge la mise au point de certaines formulations mais s'interdit toute intervention portant sur le sens, le contenu, la nature des propositions. Il anime le débat mais ne prend pas position.

2. Objectifs de la situation

La situation ayant pour but de construire une mémoire collective et écrite du travail de la classe est une situation "de rappel". Elle a un triple but : diagnostic, apprentissage et régulation.

Diagnostic : le maître peut ainsi connaître ce que les élèves retiennent des activités de mathématiques faites en classe, ce qui est important pour eux, et l'état de leurs conceptions. La régularité de ces séances permet de reconstruire l'histoire de l'appropriation des notions enseignées : il est ainsi possible de recueillir des indices sur le niveau de disponibilité de ces connaissances chez les élèves.

Apprentissage, institutionnalisation : les séances de mémoire collective où les élèves doivent produire un écrit collectif permettent d'aider :
- à la dépersonnalisation du savoir en suscitant une rédaction collective (le savoir n'est plus du seul ressort du maître),
- à la décontextualisation du savoir, en suscitant une formulation tendant à exclure tout exemple particulier qui n'a pas un caractère générique
- à la construction et à l'appropriation des notions et méthodes étudiées
- à l'utilisation ultérieure de ces nouvelles notions, ainsi décontextualisées.

Régulation : le maître peut utiliser cette mémoire collective écrite, pour orienter son travail, revenir sur certaines notions, certains épisodes et ainsi enrichir son enseignement.

Grâce à des feed-back sur les situations d'apprentissage, leurs conditions, leurs contraintes et leurs objectifs, les élèves sont amenés à mieux comprendre les paroles du professeur lors des phases de bilan et à mesurer après coup, les enjeux didactiques (l'importance de ce qui a été appris, l'utilisation possible dans d'autres problèmes, dans d'autres domaines) ; prenant conscience des enjeux didactiques des situations proposées, ils deviennent progressivement capables d'anticiper à propos des apprentissages visés par les nouvelles situations.

3. Quelques éléments chronologiques sur ces séances de rappel

Séances 1 et 2 **: R**appel oral sur ce qui a été fait depuis le début de l'année :
Les élèves citent essentiellement des thèmes numériques et, en géométrie, les représentations figuratives ou conventionnelles. Ils ne parlent pas en terme d'apprentissage ("*j'ai appris ... telle notion...*"), ni a fortiori en termes de concepts. Ils décrivent les séances antérieures en termes d'action : par exemple, pour la pesée d'un objet (apprentissage en cours) : "*on pose sur la balance...., il y a équilibre quand la flèche c'est au milieu,...*"

La séance suivante est du même type.

Séances 3 et 4 :
Le texte initial écrit par les deux élèves responsables est le suivant :
"*Nous avons travaillé sur les balances. Il peut avoir des masses de 1 kg, 500 g 200 g 100 g 50 g 20 g 10 g 5 g 2 g et 1 g. Le lièvre pèse 1 kg 500, je mets une masse de 1 kg et une autre de 500 g.*"
Le maître demande : " *vous avez fait autre chose ?*"
Les élèves tentent d'évoquer un travail sur les opérateurs multiplicatifs.
Nous constatons, au départ, une incapacité à formuler ce qui a été fait : "o*n a fait un tableau...*"
A la question du maître : "*à quoi ça sert ?*", ils répondent "*ça sert à trouver des multiples*" . Les élèves décrivent les connaissances qui ont effectivement fonctionné dans l'activité. Une réflexion collective plus approfondie sur la notion de multiple, amène certains élèves à dépasser le stade de l'exemple, pour tenter une définition d'un multiple d'un nombre : "*un multiple c'est le total de trois contre un autre nombre*".

A la séance suivante, à la question du maître : "*comment reconnaître un multiple de sept ?*", des élèves répondent :
- "*il est dans la table de sept.*"
-"*on a multiplié un nombre par sept*"
C'est là un exemple de prise de conscience par les élèves, a posteriori, du savoir réellement en jeu. Ce savoir peut alors être institutionnalisé pour certains élèves.
Cette séance constitue pour nous une initialisation d'un projet d'éducation : il s'agit d'apprendre à l'élève à penser "*qu'est-ce que j'ai appris*" et non plus *"qu'est-ce que j'ai fait ?*".

A ce stade, ce sont les meilleurs élèves qui font le cheminement, mais on peut faire l'hypothèse que cela profite aux autres élèves et que cela entraîne une dynamique dans la classe.

Séances 5 et 6 : Les enfants se rappellent avoir travaillé sur les quadrilatères et en donnent spontanément une "définition". Par contre, dans un premier temps, ils décrivent en terme d'action le travail sur les angles droits (*"j'ai posé l'équerre")*. Une discussion collective entre élèves, en réponse à une demande insistante de nouvelle formulation de la part du maître, les amène à passer de la phrase " *on a regardé avec une équerre s'il y avait des angles droits*" à la phrase "*on a appris à reconnaître les angles droits avec l'équerre et à tracer un angle droit avec la règle et avec l'équerre*".
De même, à la séance suivante, les élèves se rappellent "*avoir mesuré les longueurs et les largeurs"*, mais ils ne savent plus du tout pourquoi !
Il a fallu une nouvelle intervention du maître précisant le but de cette activité pour que le texte adopté par toute la classe soit : "*Dans un rectangle, il y a quatre angles droits, on a mesuré les longueurs et les largeurs ; on a observé que les côtés opposés du rectangle avaient la même longueur"*.
Ces séances permettent à la classe de construire la mémoire collective des activités effectuées en terme d'apprentissage. Nous constatons que le contrat se transforme peu à peu mais qu'il est parfois nécessaire que le maître précise les finalités des activités en terme d'apprentissage.

Les séances suivantes font toutes référence à un travail sur la division.

Nous notons les premiers effets de ce nouveau contrat. Les élèves, dans un premier temps de rappel, après une séance de résolution de problème de division, citent un tableau permettant de trouver le quotient par encadrement et écart au but. C'est un exemple de mélange de projet d'apprentissage et de description de la résolution d'un problème par un algorithme formel. Lors d'un deuxième rappel, tout de suite, les élèves décrivent l'activité faite en classe en terme d'apprentissage : "*nous avons travaillé sur la division"* alors que l'activité consistait seulement en l'utilisation d'un matériel multi-base permettant de simuler un partage de centaines, dizaines et unités et que le maître n'avait pas mentionné ce mot. Les deux élèves chargés de la rédaction initiale ont consulté leur manuel à la page de l'exercice et retenu le titre de la séquence pour décrire l'activité.

4. Conclusion

Analysons les effets de cette activité.

- Du côté de l'élève

- Ces feed-back périodiques et étiquetés en tant que tels, permettent à la classe, collectivement, de décrire les activités effectuées en terme d'apprentissage.
- Ils permettent à certains élèves, de dépasser le stade de la description de l'action pour comprendre, **après coup**, le but de l'activité. On peut donc espérer que lors de cette nouvelle institutionnalisation, le savoir en jeu ne sera pas aussi séparé de l'action que précédemment. Cela peut initialiser l'attitude consistant, pour l'élève, **à anticiper dès la présentation d'une activité, sur l'institutionnalisation à venir**. Nous pensons de ce fait avoir une action sur le projet d'apprentissage de l'élève et sur le contrat didactique en vigueur dans la classe.
- Nous avons déjà signalé les difficultés de socialisation des élèves, en particulier leurs réticences à travailler en groupe. Ce type d'activité semble avoir des incidences sur ces comportements, en effet :
    - les deux élèves chargés de rédiger le texte sont responsables devant la classe,
    - lors des discussions, la classe entière et les élèves en difficulté en particulier, bénéficient de l'apport des bons élèves qui interviennent surtout quand il s'agit de faire progresser la formulation.

- Du côté du maître

- Cela lui permet de hiérarchiser les institutionnalisations : les formulations sont de plus en plus décontextualisées.
- A la demande des élèves le maître est amené à clarifier ses objectifs et à les expliciter. Le contrat est ainsi lui aussi plus explicite.
- C'est un outil de diagnostic qui contribue à une meilleure régulation de la classe.

D. UNE DEUXIEME SITUATION

Comment aider les élèves en difficulté lors de la résolution d'un problème sans réduire la construction du sens des notions mathématiques ?

Nous allons montrer sur deux exemples comment le maître peut apporter des aides aux élèves lors de la résolution de problèmes numériques sans pour autant rendre le problème trop simple.

1 Le jeu de l'autobus en CE2

Le problème est le suivant : *"dans un autobus, il y a **n** voyageurs. À un arrêt, il en "monte" **a** et en "descend" **b**. Combien y a-t-il de voyageurs quand l'autobus repart ?"*

Les valeurs de **n**, **a** et **b** sont fixées par le maître. Il peut inverser les termes monter et descendre et choisir **b** plus grand que **a**.

Il existe deux types de procédures pour résoudre un problème de ce type :
- une procédure E portant sur les états : elle revient à considérer un état initial **E1** (**n** personnes), à lui appliquer une transformation **T1** (ajouter **a**), à en déduire un état intermédiaire **E2** (**n** + **a** = n' voyageurs), à appliquer à **E2** la transformation **T2** (retrancher b) et en déduire un état final **E3** :
n" = (**n** + **a**)-**b** =n' - **b**
- une procédure T portant sur les transformations : elle revient à considérer un état initial **E1** (**n** voyageurs), à calculer une transformation **T3** obtenue par composition des transformations **T1** et **T2** (**a** - **b**), à appliquer cette transformation **T3** à **E1** afin d'en déduire l'état final **E2 :** n" = **n** + (**a**- **b**).

Les travaux de G. Vergnaud [18] montrent que ces procédures correspondent chez les élèves, à des étapes cognitives différentes. Pouvoir mettre en oeuvre ces deux types de procédures est la preuve d'une certaine maîtrise des structures additives. Certains élèves en difficulté du cycle 3 n'arrivent pas à mettre en oeuvre la procédure de composition de transformations (la procédure T). Cela les conduit à l'échec, quand les opérations font intervenir des "grands" nombres ou quand il y a des retenues.

Pour faire acquérir durablement ce type de procédure, on peut envisager de jouer à la fois sur les variables numériques intervenant dans l'énoncé et sur la forme de travail .

> Dans un premier temps, le maître propose de résoudre ce problème mentalement. Il fait varier **n** entre 20 et 40 et **a** et **b** entre 2 et 10.
> Il propose plusieurs exercices de ce type, plusieurs jours de suite. Dans chaque cas, il demande aux élèves d'expliciter leurs procédures de résolution.
> Quand les opérations à effectuer mentalement comportent des "passages à la dizaine" comme par exemple pour 25 + 8 - 4, certains élèves composent les transformations en jeu. Bien que cette procédure soit explicitée, les autres élèves ne la réinvestissent pas dans les calculs ultérieurs.
>
> Après s'être assuré que les élèves sont familiarisés avec le problème et qu'ils réussissent fréquemment dans ce domine numérique, le maître va proposer le même exercice à résoudre mentalement mais avec d'autres valeurs numériques. Il choisira toujours **n** entre 20 et 50 mais fera varier **a**

et **b** entre 10 et 20 avec |**a**-**b**| < 10 (par exemple 25 + 19-16 se calcule plus économiquement en faisant 25 + 3, qu'en faisant 44 - 16).
La difficulté à effectuer mentalement un calcul de ce type va amener les élèves, éventuellement sur la base d'un premier échec, à prendre conscience de l'économie réalisée lorsqu'ils composent les transformations. Cette prise de conscience est durable. En général, les élèves, par la suite choisiront, en fonction des données numériques, la procédure la plus économique.

De nombreuses expérimentations montrent que l'exposé seul de la seconde procédure, même longuement expliquée par le maître, n'est pas suffisant pour que les élèves en difficulté se l'approprient. **Il est indispensable de prouver à ces élèves que l'effort effectué dans le cas de la mise en oeuvre de la seconde procédure est payant car il peut dispenser de calculs difficiles**.

Pour cela, **un saut qualitatif portant sur les valeurs numériques intervenant dans le problème est indispensable**. De même, une résolution mentale est nécessaire, car par écrit, les élèves peuvent toujours se ramener à l'algorithme standard de l'addition et ne pas rencontrer de difficulté en se laissant conduire par l'énoncé.

2 Comment aider les élèves de CM2 à résoudre un problème de dénombrement complexe ?

Le problème suivant est très mal réussi par des élèves de CM2 et de sixième.

MENU

1 entrée au choix	*1 plat au choix*	*1 dessert au choix*
- Carotte à l'orange-	*- Ravioli gratinés*	*- Mousse au chocolat*
- Sardine	*- Poulet rôti, haricots beurre*	*- Pommes au four*
- Pizza	*- Steak haché, coquillettes*	*- Compote*
- Pamplemousse	*- Grillade de porc haricots bretc*	*- Lait gélifié*
- Friand au fromage	*- Hachis parmentier*	*- Pêches au sirop*
- Potage	*- Blanquette de veau riz créole*	*- Flan*
- Céleri rémoulade		*- Ananas*
- Salade composée		
- Oeufs durs, mayonnaise		
- Betteraves et maïs		
- Endives en salade		
- Quiche		

Combien peut-on composer de menus différents comprenant une entrée, un plat et un dessert ?

Les élèves résolvent, en général, ce problème en recherchant de façon exhaustive les différentes solutions. Cette méthode les conduit en général à l'échec car le nombre de menus 12 x 6 x 7 = 504 ne le permet pas.
A cause de l'impossibilité de dresser exhaustivement la liste des solutions, peu d'élèves perçoivent la structure multiplicative du problème.

Comment amener les élèves à savoir résoudre ce type de problème de dénombrement ?

Plusieurs scénarii sont possibles (voir [9]). Nous allons en exposer un qui semble avoir fait ses preuves. Il s'oppose au schéma de progression généralement mis en oeuvre à l'école élémentaire qui consiste, dans un premier temps à poser ce même exercice mais pour deux types de plats seulement et aux 3 à 5 choix possibles pour chaque plat.

Les élèves de CM2 ont déjà rencontré ce type d'exercice simplifié plusieurs fois dans leur scolarité. Une analyse des manuels de l'école élémentaire montre que ce problème de dénombrement est presque toujours présenté aux élèves dans le cas de deux ensembles dont le nombre d'éléments est très faible. Les élèves peuvent alors le résoudre **en recherchant toutes les solutions**, et le représenter, souvent avec l'aide du maître, par un arbre ou un tableau cartésien. Si le maître peut s'appuyer sur ces représentations pour montrer que le résultat peut se calculer à l'aide d'une multiplication, celle-ci ne s'impose pas aux élèves car ils ont, le plus souvent, fait autrement.

Ce type de présentation ne permet pas une réelle appropriation de la structure multiplicative en cause. Dans le cas plus complexe qui nous intéresse, les élèves ne mobilisent pas leurs connaissances sur la multiplication et essaient, en vain, de résoudre le problème par dénombrement de toutes les solutions. L'échec important rencontré montre que **le schéma apparemment séduisant allant du "simple" au "complexe" ne permet pas de surmonter des difficultés.**

Nous proposons donc un **autre dispositif** basé sur le schéma "complexe-simple-complexe".

Première étape :
Le maître propose aux élèves de résoudre le problème dans le cas complexe exposé ci-dessus : trois ensembles dont le nombre d'éléments est compris entre 6 et 12, par exemple.
Les élèves, dans un premier temps, échouent car les procédures mises en oeuvre ne permettent pas un dénombrement facile. Devant cet échec et après explicitation des difficultés rencontrées, le maître peut proposer aux élèves de représenter le problème à l'aide d'un schéma. Cette proposition ne suffit pas en général à faire apparaître la structure multiplicative du problème, même quand les représentations en arbre sont familières aux élèves.

Deuxième étape
Le maître peut alors proposer deux types de simplifications :
- réduire le nombre d'ensembles en proposant par exemple de calculer dans un premier temps le nombre de menus différents que l'on peut composer avec tous des "carottes râpées" comme entrée, puis d'en déduire le nombre total de menus,
- réduire le nombre de choix de chaque plat, mais conserver trois types de plats.

Troisième étape
Le maître propose de résoudre ensuite le problème dans le cas complexe en utilisant les résultats ou démarches de la seconde étape.

Il est souvent nécessaire :
- d'expliciter plusieurs boucles du type "complexe-simple-complexe" afin de permettre aux élèves rencontrant des difficultés de maîtriser l'un de ces chemins,
- de traiter plusieurs problèmes de ce type avec des habillages différents.

Dans tous les cas, la maîtrise des différents modes de traitement de problème de dénombrement de ce type demande un temps d'apprentissage long et la mise en oeuvre de nombreux schémas de progression s'appuyant sur une dialectique entre le simple et le complexe. Mais il paraît indispensable **d'initialiser la réflexion dans le cas complexe** afin de mettre en échec les procédures primitives de recherche qui vont occulter la structure multiplicative du problème.

Cet exemple, comme le précédent, nous semble révélateur de la nécessité de mettre en oeuvre des **scénarii originaux** de séances de résolution de problèmes. Ils montrent également qu'il est possible de construire des **situations suffisamment complexes** pour que les élèves puissent acquérir les concepts en jeu **sans trop grande perte de sens**, mais **comportant des aides** leur permettant de surmonter leurs difficultés en abandonnant certaines procédures "primitives" inadaptées au problème au profit de procédures économiques mais plus difficiles, voire impossibles, à élaborer dans des cas trop simples.

E. CONCLUSION

Nous avons détaillé dans les seconde et troisième parties de ce texte, deux exemples de situations pouvant être mises en oeuvre par les maîtres de l'école élémentaire.

La première situation est une situation à la frontière entre les mathématiques et l'expression écrite en général, entre les mathématiques et le discours sur les mathématiques.

Elle est l'occasion de rappels indispensables pour les élèves en difficulté en mathématiques. Leur faible capacité d'anticipation sur les apprentissages, leur difficulté à dépasser le stade de l'action, à mesurer l'importance de certaines actions, à extraire de leur contexte les apprentissages du moment, à généraliser

les expériences vécues rendent nécessaires le détour par une phase de formulation collective et concise des notions fréquentées.
Les élèves pourront ainsi passer de la description du "qu'est-ce que j'ai fait" à la description du "qu'est-ce que j'ai appris".

Les exemples de scénarii de séances de résolution de problèmes ont pour but d'illustrer comment l'enseignant peut **briser le cercle vicieux de non apprentissage** décrit dans la première partie du texte.

Ce sont dans tous les cas des exemples de nouvelles médiations au savoir, de chemins vers la connaissance adaptés aux difficultés des élèves, mais gardant comme but de surmonter ces difficultés.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BAUTIER E. et ROBERT A. (1988) Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de Pédagogie* n°84 p.13-19, INRP, Paris

[2] BROUSSEAU G. et CENTENO J. (1991) La mémoire du système didactique *Recherches en Didactique des Mathématiques* n°11-2.

[3] BRUNER J.S. (1983) *Savoir faire, savoir dire.* Presses Universitaires de France, Paris.

[4] BUTLEN D. et PEZARD M. (1992) Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du CP au CM2. *Recherche en Didactique des mathématiques* n°12.2.3

[5] BUTLEN D. PEZARD M. Situations d'aide aux élèves en difficulté et gestion de classe associée, *Grand N* n° 50 p29-58, IREM de Grenoble.

[6] CHARLOT B. ; BAUTIER E ; ROCHEX J.Y. (1992) *Ecole et savoir dans les banlieues et ailleurs.* A. Colin.

[7] CHAUVEAU G. (1982) L'insuccès scolaire. Le rôle des rapports sociaux et culturels. *Psychologie scolaire* n°39 p21-39.

[8] CHEVALLARD Y. (1988) *Notes sur l'échec scolaire.* Publication de l'IREM de Marseille n°13.

[9] COPIRELEM Actes du stage national d'Angers organisé par la COPIRELEM - mars 1996 - *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques* - tome 5 - IREM de Paris VII

[10] HOUDEBINE J. et JULO J. (1988) Les élèves en difficulté dans le premier cycle de l'enseignement secondaire. *Revue Française de Pédagogie* n°84 p5-12 INRP Paris.

[11] INRP (1986) *En mathématiques peut mieux faire*, Rencontres pédagogiques n°12, INRP Paris..

[12] LAUTREY J. (1980) *Classes sociales, milieu familial, intelligence.* Paris, PUF.

[13] PERRENOUD P. (1984) *La fabrication de l'échec scolaire* Librairie Droz Genève

[14] PERRIN-GLORIAN M.J (1992) *Aires et surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM et 6ème.* Thèse de Doctorat d'Etat, Université de Paris VII, février 1992

[15] PERRIN-GLORIAN M.J. (1993) Questions didactiques soulevées à partir d'un enseignement des mathématiques dans les classes faibles. *Recherches en Didactique des mathématiques* vol. 13 n°1/2. Ed. La Pensée Sauvage Grenoble.

[16] PERRIN-GLORIAN M.J., BUTLEN D. et LAGRANGE M. (1991) Élèves en difficulté en classe de 6ème. *Repères*-IREM n°3 p97-139. Topiques Editions, 54700 Pont-à-Mousson.

[17] ROBERT A. et ROBINET J. (1989) Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier DIDIREM* n°3 et 4, IREM de Paris VII.

[18] VERGNAUD (1981) : *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Ed. P.Lang, Berne.

Jeux mathématiques et enfants en difficulté

François Boule

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Besançon 1997.

Il s'agit dans un premier temps, de préciser les directions d'exploitation de certains jeux mathématiques à l'école. Puis, de décliner des adaptations possibles. L'auteur s'appuie sur de nombreux exemples.

L'intervention possible des jeux en mathématiques a souvent été évoquée depuis quelques dizaines d'années. Cela semble une façon attrayante de donner, ou rendre goût aux mathématiques, et qui peut même faire plaisir aux adultes. Les exemples abondent (voir bibliographie). Bien des professeurs de mathématiques, en particulier en formation des maîtres inclinent vers cette approche, et souvent à la satisfaction de tous. On doit cependant indiquer fermement deux limites :

• **La première**, c'est qu'une *étiquette* ne suffit pas à donner le statut de jeu. N'est JEU que ce qui est accepté comme tel par les enfants, et non décrété par les adultes. Le jeu contient sa propre motivation et son but, qui est de gagner, contre un adversaire ou contre soi-même. Alors qu'une activité de consolidation a une motivation et un but externe *explicite*, qui est d'entraîner une compétence, ou de développer un savoir-faire. Les deux ne sont pas incompatibles : il se peut qu'une activité perçue comme un jeu par l'enfant soit en réalité promue par l'enseignant pour exercer une compétence. Mais dans ce cas, l'objectif doit être clair pour l'enseignant, et explicite.

• **La seconde limite,** c'est l'émiettement. Nous avons tous rencontré quantité de jeux stimulants, astucieux, à succès garanti. Ils donnent une assurance en formation continuée, quelquefois même font une carrière didactique, mais ils ne font qu'un manteau d'Arlequin. Il manque à l'ensemble une cohésion, et pour chacun une modulation *d'indication* et *d'emploi*.

Le but de cet atelier pourrait être de restreindre le catalogue d'exemples, mais de préciser l'usage.

À quoi peuvent servir les jeux mathématiques ?

Nous excluons pour l'instant les jeux *d'occupation*, c'est à dire ceux qui peuvent avoir un intérêt, mais sans objectif éducatif clair. Leur intérêt les situe dans la cour de récréation, ou hors de l'école.

Nous proposons trois directions d'exploitation des jeux mathématiques à l'école :

- **Jeux "pour voir" ou plutôt "pour parler"**

C'est en particulier le cas dans une première phase de rééducation : il s'agit de donner un support pour entrer en contact avec l'enfant, lui permettre une action, favoriser un échange, trouver un point d'appui.

On peut aussi placer dans ce champ la fonction sociale du jeu : jouer, c'est observer une règle (sans tricher), tenir compte des droits de l'adversaire, intégrer et si possible anticiper ses coups.

***Exemple* :** Un jeu de mémory a été proposé, par ateliers, dans une Moyenne Section. Deux enfants jouent, mais chacun pour soi, en retournant des cartes au hasard, sans tenir compte des tirages précédents, sans montrer les cartes à l'adversaire. Deux autres enfants de la même classe, pourtant plus jeunes, jouent *réellement*, en intégrant les informations à mesure. La pratique du jeu instruit sur le niveau d'interaction sociale, l'intégration des informations, la planification.

- **Un deuxième champ d'application est diagnostique.**

Il s'agit de repérer précisément des compétences ou des difficultés, éventuellement de confirmer une indication donnée par ailleurs. Dans ce cas, il est nécessaire d'avoir une idée précise de ce qui est mis en jeu dans l'activité proposée, et même si possible de se représenter ce que fait l'enfant aux prises avec le jeu : quelles connaissances, quelles représentations mobilise-t-il ? Peut-on distinguer la part de l'affect, du repli, du défi, etc. ?

C'est pourquoi chaque *support de jeu* doit permettre une gradation d'usages, une progression.

Exemple : les "petites boîtes". Il s'agit d'un puzzle–3D : remplir un parallélépipède avec quelques pièces en bois comme celles-ci :

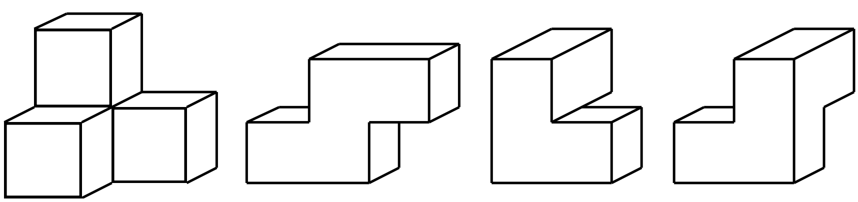


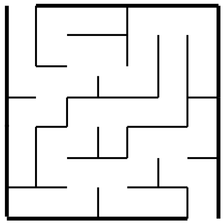
fig. 1 : pièces constitutives des "petites boîtes" (puzzles 3-D)

Cette manipulation, par exemple en Grande Section, fait apparaître la difficulté, que l'on ne rencontre pas avec les puzzles-plan habituels, qui est de *retourner* une pièce (la seconde notamment) ; cette difficulté est une étape caractéristique dans la disposition du "groupe des déplacements" de l'espace (comme disait Piaget).

- **Support de rééducation.**

Il s'agit de permettre de reconstruire des représentations et des procédures, par des moyens *différents* de ceux qui ont mis jusqu'ici l'enfant en échec, ou bien *d'adapter* une situation en fonction de paramètres spécifiques.

Exemple : Les labyrinthes habituellement utilisés ont deux défauts. D'une part ils "s'usent" vite, c'est à dire qu'en peu d'essais, ils sont mémorisés ; l'activité de représentation et de recherche en est détournée. D'autre part, il s'agit d'une activité "papier-crayon" qui ajoute à l'activité mentale représentative une difficulté graphique (motrice). C'est particulièrement évident par exemple pour des enfants trisomiques, qui ont de grandes difficultés à ne pas *franchir* les murs avec leur crayon. C'est pourquoi on peut imaginer, à l'aide d'une planchette rainurée à mi-bois et de languettes de carton, de construire un labyrinthe avec des murs, dans lequel on indique le déplacement en suivant avec le doigt.



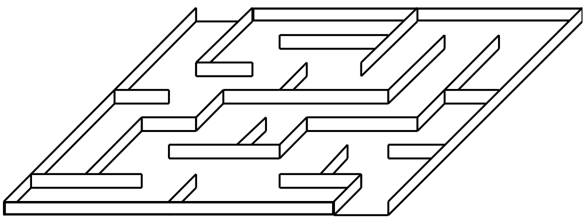


fig. 2.a et 2.b : Labyrinthe plat, et réalisation en volume

De plus, les languettes sont mobiles : une activité certainement plus enrichissante que de résoudre un labyrinthe, consiste à en **construire un** auquel on impose d'avoir une solution et *une seule* ; les autres chemins sont des fausses pistes, si possible pas trop évidentes. Il est réalisé par un enfant à destination d'un autre.

Ce dernier exemple fait émerger deux notions qui semblent didactiquement intéressantes :

Jeu faible – jeu fort

On parle de *jeu faible* dans le cas où les joueurs ont peu d'initiative, soit parce que le jeu comporte une structure profonde qui échappe aux joueurs (c'est le cas des dominos pour les très jeunes enfants), soit parce que le hasard intervient de façon dominante. Par opposition, on parlera de *jeu fort* lorsque le joueur peut acquérir une maîtrise du jeu. C'est le cas des jeux de stratégies, au moins à un certain niveau d'expertise.

Variabilité

Certains jeux sont susceptibles d'adaptation. On pourrait parler de "variable ludique" à l'instar des variables didactiques. Voici un exemple :

Tous connaissent les “cascades”, notamment grâce à une publication ancienne de Philippe Clarou à l’IREM de Grenoble :

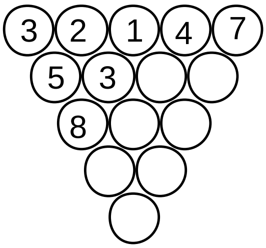


fig. 3.a

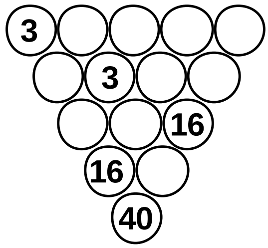


fig. 3.b

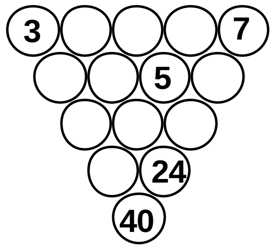


fig. 3.c

Le nombre occupé par une case est la somme des deux nombres voisins situés au-dessus de lui. Lorsque la première ligne est donnée (fig. 3.a), le problème, facile, n’est qu’une variante ludique des “tables” d’addition. Le jeu est un peu plus stimulant lorsque les cinq données nécessaires sont disposées autrement (fig. 3.b). Le jeu devient “fort” lorsqu’il s’agit de créer une grille : peut-on choisir des nombres arbitrairement ? La position de ces nombres est-elle libre (fig. 3.c) ? On fait apparaître ainsi une véritable *maîtrise* de la situation.

Le “jeu sur le jeu” est probablement une métaphore des mathématiques elles-mêmes. Analyser la construction d’un jeu, jouer avec les règles, *construire* un jeu ou une variante, c’est en prendre possession et faire jouer sa structure.

Adaptation d'un jeu et carte d'utilisation.

Exemple : voici un premier jeu proposé en M.S. (fig.4.a). Il s’agit de “dominos 2-D” ; la règle (topologique) consiste à assembler des hexagones de telle sorte que les sommets en contact comportent la même couleur. Il est apparu que cette règle était plus facile à utiliser dans la disposition de la fig. 4.b (disques à compléter). On peut prolonger cette activité au CP par une règle numérique : les disques à compléter doivent totaliser vingt (fig. 4.c) :

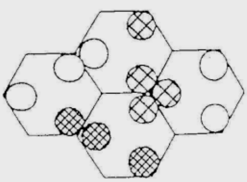


fig. 4.a

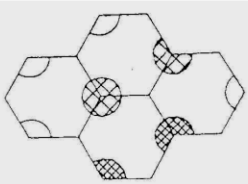


fig. 4.b

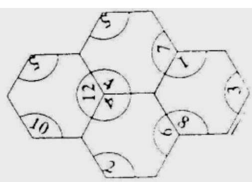


fig. 4.c

De plus, ce support peut donner lieu à des problèmes :

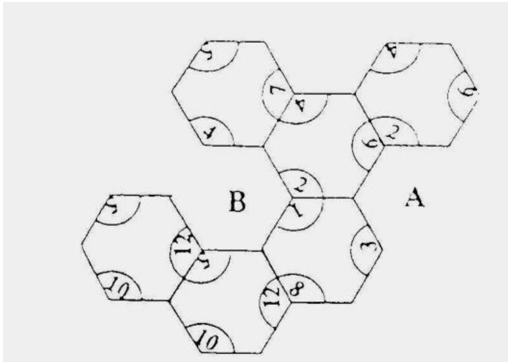


fig. 5

L'occupation de la position A est soumise à *une* condition (faire 20). Mais l'occupation de la position B est soumise à *deux* conditions.
Il est ainsi possible de partir d'un jeu “faible”, dont la règle est très simple, voire implicite, et de graduer l'usage, en fonction du sujet et de son expérience, en lui proposant des défis progressifs.

Un jeu **s’use.** C’est à dire que la recherche initiale est rapidement remplacée par une récupération en mémoire des résultats antérieurement rencontrés. C’est particulièrement vrai avec les plus jeunes enfants, par exemple pour les encastrements ou les puzzles. Il importe alors de *rafraîchir* l’intérêt par des variantes, c’est à dire de brouiller les éventuelles récupérations.

Exemple : Il est facile de fabriquer un puzzle avec un papier-cadeau dont le dessin est assez neutre (pas de figure d’ensemble) ; on découpe un rectangle selon des rangées et des lignes dont toutes les largeurs sont différentes (fig. 6.a). Lorsque ce puzzle devient familier, on le brouille par un nouveau découpage de la même surface ; la difficulté dépend évidemment du nombre de pièces (fig. 6.b).

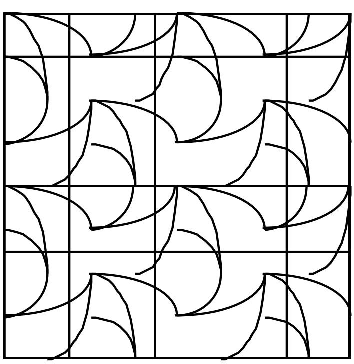


fig. 6.a

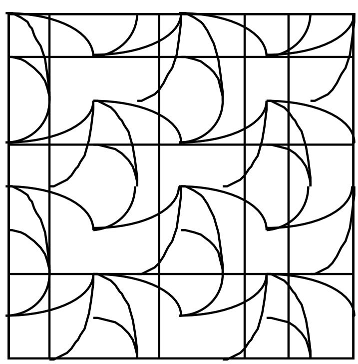


fig. 6.b

Renforcement d’une représentation

Certains jeux ont pour objectif explicite de renforcer un type particulier de représentation.

Exemple 1 : il est numérique. Il y a quantité de jeux qui visent à renforcer l’aspect “répertoire” (mémorisation des tables). Par contre certaines activités favorisent l’aspect “graduation” (droite numérique).

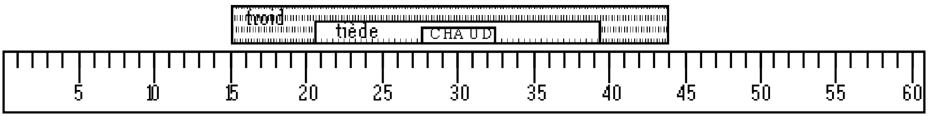


fig. 7. : chaud / froid

Un nombre est à découvrir, entre 1 et 99. Les joueurs proposent un nombre, à tour de rôle, auquel il est répondu “froid” si l’écart au but est supérieur ou égal à 10, “tiède” si l’écart est entre 3 et 10, “chaud” si l’écart est inférieur à 3. On peut s’aider d’une graduation, et d’un curseur, comme ci-dessus.

Exemple2 : il est aussi numérique
(mais est-ce un jeu ? ou : comment peut-on en faire un jeu ?)

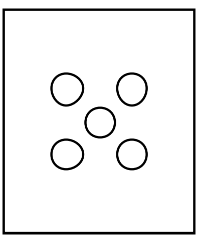


fig. 8.a

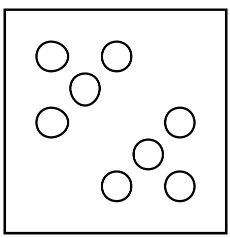


fig. 8.b

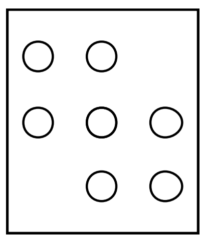


fig. 8.c

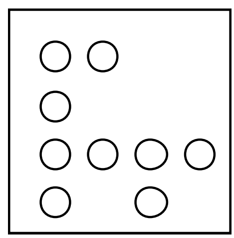


fig. 8.d

Les cartes ci-dessus sont présentées une à une rapidement (1 ou 2 secondes).

Combien de points ?

La première (a) est une constellation classique. On peut lire dans la seconde (b) deux constellations “4”, et faire appel à “4 et 4 : 8”. Pour les autres, le repérage est moins facile, et il est intéressant de faire expliciter les différentes tentatives. Par exemple pour (c) : voit-on 4 + 4 , ou bien 2 + 3 + 2 ? etc. Pour (d), on peut voir trois constellations identiques de 3, et conclure 3 × 3 = 9, ou encore … C’est la *pluralité des repérages*, l’*automatisation des constellations,* la *rapidité des rappels déclaratifs*, qui sont ici objets d’entraînement.

Jeux stratégiques

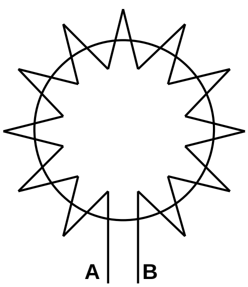
Un jeu stratégique ajoute à un support donné (par exemple une expertise numérique) deux composantes : l'une est de caractère social (respect des règles du jeu, et de l'alternance des coups), l'autre relève de la **planification** des actions (imaginer les coups possibles, et les ripostes de l'adversaire, à une "profondeur" un, deux, etc.). Ces composantes peuvent être prises comme objectif de jeu, ou bien permettre de "rafraîchir" l'intérêt d'un jeu dont le support est déjà connu.

Deux positions semblent défendables :

• D'une part, promouvoir des jeux à règles très simples, tels que le respect de la règle ne constitue pas une surcharge excessive au dépens de la capacité d'anticipation,

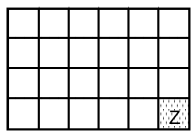
• D'autre part, admettre des jeux complexes (comme les Échecs), qui mettent en œuvre des expertises synthétiques, non réductibles à des modèles simples. Des retournements de situation ("à la mi-temps, on échange les camps") permettent de rééquilibrer les rapports experts / débutants.

Voici deux exemples de jeux "simples" dont la règle est très vite intégrée, ce qui permet d'envisager une analyse complète :



Les deux joueurs partent, l'un de A, l'autre de B. Ils avancent sur la ligne brisée, à leur choix, de 1, 2 ou 3 segments. Lorsqu'ils arrivent face à face (blocage), le gagnant est celui qui est en position extérieure.

fig. 9.a : jeu de l'étoile



Ceci est une plaque de chocolat. Chaque joueur à tour de rôle, brise la plaque (d'un bord à l'autre) et en prend une des parties détachées; celui qui doit prendre le carré marqué Z a perdu.

fig. 9.b : la plaque de chocolat[1]

Nouveaux jeux

D'autres jeux sont évoqués, qui semblent apporter des composantes originales, ou qui ont été expérimentés de façon méthodique dans les écoles. C'est le cas de Abalone (cf. F. HUGUET[2]), ou bien de Quarto (cf. Grand N, n°58) dont l'originalité tient à ce qu'un joueur choisit pour son adversaire la pièce à jouer.

---

[1] Ce jeux est décrit dans l'article de N. Bonnet, « Comment ne pas être chocolat ? » dans le chapitre 2, tome 1.

[2] Voir bibliographie à la fin de l'article.

Il a été question également des “jeux coopératifs”, développés en particulier par les Canadiens. Le but du jeu n’est pas de faire gagner un joueur contre un autre, mais de les faire coopérer afin qu’ils gagnent ensemble.

Exemple : dans un potager, il y a 4 tomates (rouges), 4 carottes (oranges), 4 petits pois (verts), 4 maïs (jaunes). On joue avec deux dés : un dé numérique, et un dé-couleur (rouge, orange, vert, jaune, blanc, noir). Le but du jeu est d’enlever tous les légumes avant l’hiver. Si “blanc” est tiré, c’est l’hiver qui gagne.

Trois heures d’échanges ne permettaient sans doute pas d’aller beaucoup plus loin dans ce programme, qui pourrait faire l’objet d’une sous-commission permanente, ouverte à qui veut.

Ce programme consiste à :

- Relever des jeux nouveaux, dont le fonctionnement semble original ;
- Développer *pour un support donné* un mode d’emploi (que faire ? ; dans quel but ? ; comment ?), des variantes graduées, si possible des comptes-rendus d’activités ;
- Développer *selon des entrées didactiques*, un répertoire de jeux disponibles (ou facilement constructibles).

Références

F. BOULE : Mathématiques et jeux, Cedic, 1976 [*mais seulement le chapitre 2 …*]
B. BETTINELLI : Mathématique et jeux de société, CRDP Besançon, 1976
M. MEIROVITZ, J. TRICOT : Le Mastermind en dix leçons, Hachette, 1979
N. PICARD et al. : Les jeux du Club des Cordelières, IREM Paris VII, 1980
Commission JEM : LUDI-MATH n°1 (1979), n°2 (1979), n°3 (1982), n°4 (1985), APMEP, Régionale de Poitiers
APMEP : Jeux 1, publication APMEP n°44, 1982
F. PINGAUD, J-F. GERME : Cinquante jeux papier/crayon, Ed. du Rocher, 1984
APMEP : Jeux 2, (numériques) publication APMEP n°59, 1985
B. BETTINELLI : Jeux de formes, formes de jeux, IREM Besançon, 1984
D. GRANDPIERRE : Le calcul mental, c’est simple, en s’amusant, Retz, 1985
L. CHAMPDAVOINE : Les mathématiques par les jeux (cycle I), F. Nathan, 1985-86
M. MEIROVITZ, P. JACOBS : La gymnastique de l’esprit, Hatier, 1988
F.BOULE : 1, 2, 3 … Jouez ! MDI [Nathan], 1991 ; jeux en kit
F. BOULE : Faites vos jeux, 1996
F. BOULE : Jeux de calcul, A. Colin, 1994
F. JACQUET : “Quarto”, Revue Grand N, n°58, 1995-96
Revue MATH-ECOLE (Case postale 54; CH 2007 Neuchâtel 7)
D. DJAMENT : Un petit jeu pour le C.E., APMEP n°408, Février mars 1997
F. HUGUET et alii : Jeux de stratégie au Cycle II., IUFM de Bretagne, site de Quimper

Multiplication en ZEP
Le jeu de Pythagore

Nicole Bonnet

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Rennes 1996.

Comment faire apprendre les tables de multiplications à des enfants réfractaires? Il s'agit de les faire mémoriser autrement que par le"par cœur", dans un va-et-vient "j'apprends pour jouer, je joue pour apprendre", grâce au jeu de la table de Pythagore.
L'auteur présente ici un dispositif pour la formation initiale et continue, étroitement articulé à une démarche d'enseignement éprouvée dans des classes de ZEP.

INTRODUCTION

Dans le cadre d'un travail avec une classe de CM1/CM2 en Z.E.P. de NEVERS, j'ai mis en place un dispositif visant l'apprentissage des tables de multiplication qui s'appuie sur le jeu de la table de Pythagore[1], légèrement modifié. Je décris ici la manière dont j'ai utilisé ce point de départ en formation de formateurs lors du séminaire de Rennes : j'ai proposé un parcours en quatre étapes visant l'appropriation du jeu et une analyse a priori de dispositifs d'enseignements s'appuyant sur cet outil.

- Première étape : appropriation du jeu
- Deuxième étape : dispositif de travail
- Troisième étape : mise en commun et synthèse des productions
- Quatrième étape : compléments et commentaires

Mon propos est complété par des commentaires consécutifs au transfert de la démarche en formation continue d'enseignants. En dernier lieu, je présente la mise en oeuvre effective telle qu'elle a été faite en classe de CM1 / CM2.

[1] In : « Jeux 2 », publication A.P.M.E.P. n° 59

PREMIÈRE ÉTAPE : APPROPRIATION DU JEU PAR LES FORMÉS

Travail par deux

Phase 1. Découverte « sauvage » du jeu (20 minutes) :

⊗ Consigne :
« Voici une description de jeu avec la règle (distribuer le document 1)[2]. Vous disposez en outre d'une planche de jeu et des cartons associés. Jouez ! ».

Phase 2. Repérage des stratégies locales (20 minutes) :

⊗ Consigne :
« Ce jeu n'est certainement pas un jeu entièrement de hasard. Repérez les stratégies locales et rédigez-les ».

Cette demande est faite pour que la formulation et l'énonciation soient plus claires.

Le formateur fera un tour des couples de partenaires en demandant d'énoncer les stratégies et les notera au tableau. Deux types de formulations possibles :

- celles qui relèvent des stratégies (tactiques locales) ;
- celles qui relèvent des connaissances en jeu,

Le formateur les notera dans l'ordre chronologique.

⊗ Remarques :
Je pense que ces stratégies locales n'émergeront pas toutes à ce stade. Si je me suis trompée, la phase 3 est inutile. Dans ce cas, il convient tout de même de trier les stratégies écrites en phase 2.

Phase 3. Émergence plus fine des stratégies (10 minutes)

⊗ Consigne :
« Voici une grille d'un jeu déjà commencé (document 2), vous allez tout d'abord déterminer un joueur A et un joueur B. Les règles du jeu ne sont pas modifiées, sauf qu'il n'y a pas de pioche. Si vous ne pouvez plus jouer, vous passez votre tour. Lorsque vous « posez un carton », il faut barrer le nombre dans votre colonne et le reporter sur grille du bas qui est la mémoire du jeu ».

⊗ Remarques pour le formateur :

[2] L'ensemble des documents (numérotés de 1 à 10) est situé à la fin de l'article

1. Les stratégies locales sont les suivantes :

- S1 : Se débarrasser des cartons trop éloignés du jeu
- S2 : Poser le plus tôt possible les cartons qui existent en plusieurs exemplaires (il convient donc de regarder son jeu, mais aussi celui de son voisin).
- S3 : Poser le plus tard possible les cartons qui n'existent qu'en un seul exemplaire (cases hachurées sauf 4, 9, 16 et 36)

2. Ces différentes phases permettront aux formés de se rendre compte que la bonne compréhension d'un jeu nécessite un temps assez long d'appropriation et qu'il est nécessaire de jouer plusieurs fois.
Faire émerger les stratégies donne un intérêt au jeu : ce n'est pas un jeu de hasard total, elles donnent le pouvoir de gagner pour le joueur. De plus, celui-ci aura intérêt à acquérir des connaissances mathématiques (répertoire multiplicatif, décompositions multiplicatives d'un nombre, disposition spatiale des nombres qui figurent dans la table de Pythagore, connaissance du nombre de répétitions de chaque nombre, lecture d'un tableau à double entrée ...)

DEUXIÈME ÉTAPE : DISPOSITIF DE TRAVAIL

Durée approximative : 1 heure

Cette étape devrait permettre aux participants de se construire des éléments de réponse pour la question surgie à l'issue de la première étape : « faut-il connaître la table de multiplication pour jouer ou bien jouer pour apprendre la table ? ».

Les formés sont répartis en groupes de 4 personnes. Une affiche doit être produite en fin de recherche.

⊗ Présentation de l'origine des supports et de la démarche :
Il s'agissait d'une recherche menée dans une classe de deux niveaux CM1/CM2 où les élèves étaient en difficulté par rapport à la table de Pythagore.

Le test initial (document 3) avait donné les résultats suivants :

CM1 A : moyenne 8,6 / 10 ; B : moyenne 2,5 / 10
CM2 A : moyenne 9,1 / 10 ; B : Moyenne 4,8 / 10

En regardant les résultats du test A, j'avais tout d'abord pensé que les élèves n'étaient pas en si grande difficulté que cela, mais le temps imparti avait été suffisamment long pour qu'ils utilisent des procédures autres que celle de mémoire rapide. Procédures du type calcul à partir d'un multiple connu, comptage sur les doigts ou tout simplement tricherie (rapides coup d'œil sur des tables cachées sur leurs genoux).

Le test B, mettant en jeu d'autres compétences que la seule mémorisation est plus révélateur.

Le même test final a été proposé dans cette classe après une progression d'une dizaine de séances. Les résultats sont les suivants :

CM1 A : moyenne 9,5 / 10 ; B : moyenne 5,5 / 10
CM2 A : moyenne 9,9 / 10 ; B : Moyenne 9,4 / 10
Une très nette amélioration globale peut se percevoir au travers des moyennes.

⊗ Consigne de travail pour les formés :

« Voici des outils (documents 1, 2, 3 (déjà donnés), documents 4, 5, 6, 7, 8), qui pourraient servir dans une classe de CM dont le problème principal est l'apprentissage de la table de Pythagore. Quelle mise en oeuvre envisageriez-vous ? »

Hypothèses :

- Le travail à partir de ce jeu favorise une autre forme de mémorisation que l'apprentissage par cœur : il s'agit ici de construire du sens et pas seulement de répéter des rituels du type : « 2 fois 3 font 6 ; 8 fois 5 font 40 ... »
- L'aspect ludique est motivant.

Remarque : Il se peut que la notion de repérage des cases, sur la table de Pythagore, soit à retravailler, mais ce n'est pas un objectif de cette étude.

TROISIÈME ÉTAPE : MISE EN COMMUN, SYNTHÈSE DES PRODUCTIONS

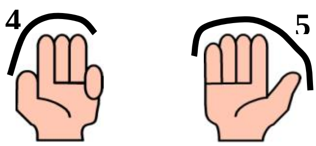
Durée approximative : 30 minutes

⊗Affichage des productions des stagiaires et commentaires :
Les questions suivantes ont fait et pourront faire l'objet de débats :

- A quoi sert le jeu de la table de Pythagore ?
- Selon les diverses propositions de mise en oeuvre, quelles sont les conceptions sous-jacentes de l'enseignement avec des élèves en difficulté qui émergent ?
- Quels autres intérêts, que celui de l'apprentissage de la table, voyez-vous dans ce jeu ?
- Avez-vous défini des objectifs préalables ? Lesquels ?
- Pourquoi avez-vous placé tel outil (document) à tel endroit ?
- Quels sont les obstacles potentiels qui peuvent arrêter les élèves, et dans ce cas, quelles aides suggérez-vous ?

⊗ Remarques pour le formateur :

- Remarque 1 : Le document 4 pourrait permettre l'élaboration de séances où les enfants redécouvrent la table de Pythagore et quelques propriétés :
  1. Echanges lignes/colonnes
  2. Diagonale axe de symétrie (commutativité) : 8 x 5 = 5 x 8
  3. Fréquence de répétition des nombres
  4. Observation des lignes : différence entre deux naturels consécutifs
  5. Particularités de la ligne des 9
     - Les unités diminuent régulièrement de 1 en 1, et les dizaines augmentent régulièrement de 1 en 1.
     - La somme des chiffres vaut toujours 9.
     - Cette observation débouchera peut-être sur le critère de divisibilité par 9 : seuls les nombres dont la somme des chiffres vaut 9 sont divisibles par 9. (Ouverture possible vers la preuve par 9 qui n'est plus enseignée dans les écoles aujourd'hui, mais qui peut constituer un objet de réflexion en formation initiale).
     - Montrer une aide mnémotechnique aux enfants : table des 9 sur les doigts des deux mains



Exemple 9 X 5 : on abaisse le cinquième doigt et on lit

- <u>Remarque 2</u> : Le document 5 peut permettre deux sortes de mises en oeuvre :
  - Problème : recherche des relations qui relient les nombres d'une même croix, puis jeux de découverte de deux nombres inconnus d'une même croix par exemple :

	9	
16		
	27	

Il s'agit de faire découvrir (par les formés ou par les élèves), la relation suivante :

Dans une « croix magique », on a :
a + b = d + e = 2 x c

	a	
d	**c**	**e**
	b	

  - Trouver des solutions à la croix suivante. Laquelle est une solution qui se trouve dans la table de Pythagore ?

	49	
	56	

- <u>Remarque 3</u> : Le document 6 permet aux enfants une première appropriation du jeu. Il est utile lors de l'analyse de plusieurs partie pour montrer que A ou B peuvent gagner (ce dont les enfants doutent au premier abord : ils pensent fréquemment que celui qui commence est le vainqueur). Il aide en outre à mettre en évidence les premières stratégies de jeu. Il devrait précéder le document 2.

- Remarque 4 : Le document[3] 7 et le document[4] 8 peuvent servir de soutien ou d'évaluation.

- Remarque 5 : En réponse à la question posée en deuxième étape : « Faut-il connaître la table de multiplication pour jouer ou bien jouer pour apprendre la table ? », je pense que les allers-retours table / jeu se font spontanément. La table de Pythagore (document 4) peut être une aide, un soutien pour que les enfants puissent jouer, au jeu de Pythagore. Mais rapidement, ils s'aperçoivent qu'ils perdent du temps à chercher les produits et qu'il vaut mieux les savoir par cœur. Le phénomène suivant peut alors s'observer : spontanément, sans que le maître leur impose, les élèves apprennent chez eux la table « *pour bien jouer et aller vite* ». Le jeu sert de motivation alors que le fait de calculer des opérations n'est absolument pas finalisé en soi pour un élève. Ils mémorisent donc pour jouer, sans se rendre compte qu'ils jouent finalement pour mémoriser ces tables.

QUATRIÈME ÉTAPE : COMPLÉMENTS

Des participants voudront rejouer au jeu de Pythagore, d'autres pourront utiliser les documents 9 ou/et 10.

- Document[5] 9 : puzzle à découper et à reconstituer.

Nous engageons le lecteur à se poser la question suivante : quelles nouvelles difficultés surgissent ?

- Document 10 : bataille navale sur table de Pythagore[6].

Ce jeu a pour objectif de réutiliser les tables de multiplication, afin que le phénomène de lassitude n'apparaisse pas.
Une difficulté que peuvent rencontrer les enfants est celle de l'identification d'une case. En effet, la case 4 X 3 n'est pas la même que la case 3 X 4. L'expression orale devra donc être : "12 colonne du 3 ou 12 ligne du 4"

[3] in « Jeux de calcul » du CP au CM2 de F. Boule, éditeur A. Colin.
[4] d'après une idée de F. Boule
[5] d'après une idée de F. Boule
[6] jeu inventé par N.Bonnet à l'issue de l'atelier.

COMMENTAIRES APRÈS EXPÉRIMENTATION

Une expérimentation de cet outil de formation a pu être menée en formation continue auprès d'instituteurs. Mais les étapes 3 et 4 n'ont pas eu lieu faute de temps.

Bilan de l'étape 1

Dès la distribution du matériel (pour deux stagiaires : un jeu de Pythagore sur feuille A4 en bristol, et une enveloppe contenant 100 cartons numérotés), un grand intérêt se manifeste et persiste tout au long de l'activité.

C'est la question suivante : « Peut-on regarder le jeu de l'autre ? » qui amène l'idée de stratégies possibles. Les stagiaires ont ensuite travaillé sur ces stratégies. En voici quelques unes « en vrac ». Il s'agit soit de morceaux de tactiques, soit de connaissances nécessaires pour bien jouer.

- Une ouverture du jeu qui permet plus de possibilités est de placer les cartons de manière dispersée, une fois qu'ils sont tirés.
- Connaître toutes les décompositions des nombres de ses cartons (connaissances).
- Déterminer la fréquence d'un carton dans le tableau (connaissance).
- Regarder s'il y a des cartons de la diagonale (de son jeu ou de celui de son adversaire) et les garder le plus longtemps possible si l'autre ne les a pas (stratégie incomplète car les nombres de la diagonale n'ont pas tous la même fréquence d'apparition).
- Parmi ses cartons, essayer d'organiser une ligne ou une colonne pour enchaîner ses placements. Par exemple, si on a 12, 14, 16, placer plutôt 12 en 2 x 6 qu'en 3 x 4. (morceau de stratégie).
- Essayer de poser le plus vite les cartons qui ont plusieurs places (voir S2 encadré).
- Placer dès que possible les cartons dans les coins (pour bloquer son adversaire ?).
- Eliminer les nombres que l'on a en double (S2).
- Eviter de se placer sur une case adjacente à une case hachurée (?).
- Rechercher les cases hachurées (S3).

Ces stratégies locales sont explicitées par leurs auteurs et discutées en grand groupe. Le temps prévu est assez facilement débordé, car chaque groupe de deux personnes veut tester les stratégies qui lui semblent prometteuses.

Bilan de l'étape 2

La consigne de cette étape doit être clarifiée en resituant la nature du document 3 : *" Dans cette classe, l'exercice B n'est pas réussi. Vous voulez remédier à cette méconnaissance de la table de Pythagore, vous réunissez alors les documents de 1 à 8. Dans quel ordre les introduisez-vous? "*

Quatre groupes de quatre stagiaires ont pu donner leur ordre de présentation :

Groupe 1	Groupe 2	Groupe 3	Groupe 4
1 ; 4	8	8	1 (table 5X5)
8	3	3A	6
3	4	$3B_1$	4
6	1	4	8
2	2	1	1
5	6 ; 7	6 ; 2	2
7	5	7	3A
9		$3B_2$	7 ; 3B
		5	5

$3B_1$ est la partie A du document 3
$3B_2$ est la partie B du document 3

On note que le plus souvent, le jeu (doc 1) n'est pas mis à la fin. Et aucun participant ne pense qu'il faut bien connaître la table pour bien jouer, les maîtres envisagent de se servir du jeu pour donner du sens à l'apprentissage.

PROPOSITION DE MISE EN ŒUVRE DANS UNE CLASSE DE CM

Pré-test et post-test doc3

Séance 1 : Découverte : La table de Pythagore et quelques propriétés
Les enfants sont invités à compléter une table de Pythagore, puis à mettre en évidence des propriétés caractéristiques de celle-ci. Ils s'intéressent également (pour des besoins ultérieurs) à la fréquence d'apparition de certains nombres. Doc 4

Séance 2 : Découverte : Quels nombres pour quel produit ?
Les enfants vont découvrir des règles sur les produits de deux entiers pairs, le produit de deux entiers impairs, le produit d'un entier pair et d'un entier impair. Doc 4

Séance 3 : « Une croix magique »

Les enfants vont découvrir des relations entre des nombres situés sur une même « croix », on leur proposera ensuite de découvrir 1 puis 2 nombres cachés d'une même croix. C'est une activité riche en calcul mental, qui fait fonctionner la réversibilité des opérations, qui est de plus motivante de part son aspect ludique. Doc 5

Séance 4 : Présentation du jeu
Une phase collective de présentation du jeu. Les enfants sont répartis en deux équipes de 12. Ils s'affrontent alternativement et s'approprient peu à peu des règles du jeu. Doc 1

Séance 5 : Découverte des stratégies de jeu
Pour aider les enfants à découvrir des stratégies, nous leur proposons des portions de tables où n'apparaissent que des nombres dont les produits leur sont bien connus. Doc 6, Doc 2

Séance 6 : Jeu par deux
Les enfants s'affrontent par 2. Ils réinvestissent dans le jeu complet, toutes les découvertes mathématiques ou stratégiques précédentes. Pas de document, mais il s'agit de jeux fabriqués en format 40 cm x 40 cm.

Séance 7 : Tables incomplètes
Nous proposons aux enfants (en évaluation formative) le jeu de la table incomplète : il s'agit de tables de multiplication dont on a effacé le contenu de certaines cases. Les têtes de lignes et de colonnes ne sont pas rangées dans l'ordre croissant. Doc 7

Séance 8 : Les tables-puzzles
Les enfants ont deux sortes de puzzles à reconstituer : Doc 8 ; Doc 9
Je n'ai personnellement pas utilisé le Doc 10, que j'ai fabriqué par la suite d'après les suggestions de quelques membres de l'atelier, je le placerais en séance 8.

DOCUMENT 1
LE JEU DE PYTHAGORE

Objectif : amélioration de la connaissance de la table de multiplication.
Durée : 20 à 30 minutes
Matériel pour deux joueurs :

- Une table de Pythagore de la multiplication pour les nombres naturels de 1 à 10 (plaque de carton fort ou de bois). Les cases de la diagonale principale sont hachurées.
- 100 petits cartons destinés à être placés dans les cases et sur lesquels sont inscrits les produits qui doivent figurer dans la table.
  On aura ainsi, 4 cartons portant le nombre 12 (pour 4x3 ; 3x4 ; 2x6 ; 6x2), 3 cartons portant le nombre 16 (4x4 ; 2x8 ; 8x2), 1 carton portant le nombre 81 (9x9).

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

But du jeu **:** Se débarrasser le plus rapidement possible de ses cartons.

Règles :

- Les cartons sont mélangés
- Les joueurs tirent à tour de rôle 2 cartons et les placent sur les cases convenables de la table de Pythagore (ils ont ainsi déposé 4 cartons sur la table)
- Chacun prend au hasard 20 cartons. Le reste de cartons constitue la pioche
- On joue à tour de rôle
- Un carton ne peut être posé que sur une case adjacente (1) à un carton déjà placé
- Celui qui place un carton sur une case hachurée a le droit de remettre dans la pioche un carton de son choix parmi ceux qui lui restent
- Celui qui ne peut pas jouer tire un carton dans la pioche et passe son tour
- Le vainqueur est celui qui, le premier, se débarrasse de tous ses cartons.

(1) Une case est adjacente à une autre si elles ont un côté en commun.

Document 2

Le jeu de la table de Pythagore

Règle simplifiée : il n’y a pas de pioche. Si on ne peut pas jouer, on passe son tour.

	X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
A	1											B
12	2			6		10	12					9
12	3				12	15	18					14
14	4						24					16
16	5						30					20
32	6											24
36	7											28
36	8											36
40	9											72
	10											

	1er tour	2e tour	3e tour	4e tour	5e tour	6e tour	7e tour	8e tour	9e tour	10e tour	11e tour	Elimine
A												
B												

Entoure le gagnant.

DOCUMENT 3 : TESTS

A Complète les tableaux suivants

a	2	7	5	3	4	6	10	1	9	8
a X 5										

b	4	6	9	1	10	2	7	5	3	3
b X 3										

c	5	7	9	3	1	8	2	4	6	10
c X 3										

d	7	3	6	10	9	4	2	5	1	8
d X 9										

e	8	9	1	6	4	10	3	7	2	5
e X 7										

B Complète les tables suivantes.

X	4		9	8
7		42		
			45	
			72	
	24			

X				
	27			
		35	49	
	15			
		40		16

DOCUMENT 4
LA TABLE DE PYTHAGORE

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

DOCUMENT 5
LA "CROIX MAGIQUE"

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Vous observerez que :
8 + 16 = 9 + 15 = 12 x 2 et que 42 + 54 = 40 + 56 = 48 x 2

DOCUMENT 6
LE JEU DE LA TABLE DE PYTHAGORE

<u>Jeu simplifié</u> : il n'y a pas de pioche. Si on ne peut pas jouer, on passe son tour

X	1	2	3	4	5
1					
2					
3		6			
4	4				
5					

A	B
4	2
8	4
9	6
25	12

	1er tour	2e tour	3e tour	4e tour	Elimine
A					

Entoure le gagnant

DOCUMENT 7
TABLES INCOMPLÈTES

	3		2	
		18		
			10	
	12			16
		54		36

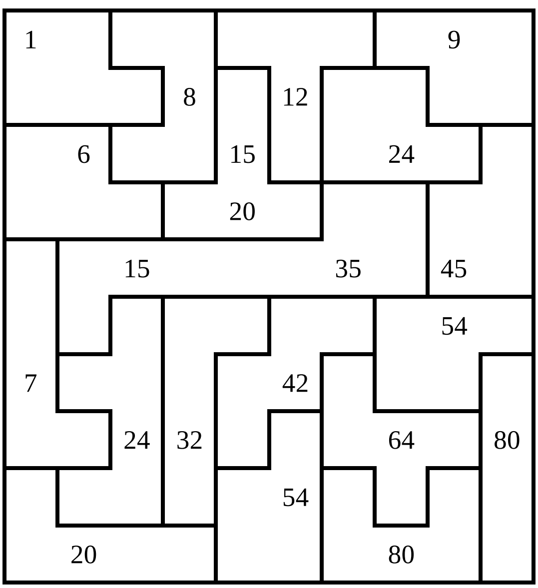
		6		4
	6		33	12
				4
7			77	
	12			

Il s'agit de tables de multiplications dont on a effacé le contenu de certaines cases. Mais attention : les têtes de lignes et de colonnes ne sont pas rangées dans l'ordre croissant.

DOCUMENT 8
Table- puzzle

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

DOCUMENT 9
table-puzzle



DOCUMENT 10
LA BATAILLE NAVALE DE PYTHAGORE

Le joueur A place sur sa grille :

- 1 porte avion de 5 cases
- 1 cuirassé de 8 cases
- 1 croiseur de 2 cases
- 2 sous-marins de 2 cases
- 2 canots de 1 case

Le joueur B dit : " **12 colonne du 4 (ou 12 ligne du 3)**
Le joueur A répond : "touché"
Le joueur B dit : "15 colonne du 5"
Le joueur A répond : "touché"
Le joueur B dit : "9"
Le joueur A répond : "coulé"
Le joueur B dit : "1"
Le joueur A répond : "touché"

Le joueur B adopte trois types de notations sur sa grille mémoire selon qu'il "touche" ; "coule" ; ou qu'il "tombe dans l'eau".

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3										
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Joueur A

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	X									
2								0		
3			~~X~~	~~X~~	~~X~~					
4										
5										
6										
7										
8										
9										
10										

Joueur B

Expériences en classes multi-niveaux

François Huguet

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Rennes 1996

Cet article présente trois activités menées dans des classes multi-niveaux de cycle 3 regroupant des élèves de classes de CE2, CM1 et CM2.
Le titre de ces activités est : « Le trio infernal », « Les rectangles semblables » et un rallye mathématique.

Problématique des travaux du groupe

L'existence des classes multi-niveaux est une réalité. De nombreux maîtres, débutants ou confirmés, sont confrontés d'une part à des problèmes de gestion de classe et d'autre part à des problèmes de choix de contenus à enseigner dans des classes à deux ou trois niveaux (pas nécessairement consécutifs) que l'on peut rencontrer de la Petite Section de Maternelle au CM2. Il nous semble donc très important, dans un objectif de formation, d'approfondir notre réflexion sur ce sujet en partant :

- des directives officielles concernant la mise en place des cycles à l'école élémentaire
- des travaux et réflexions de chercheurs mais aussi de nos propres expériences.

Dans cet esprit, après un tour de table permettant de faire le point sur les apports et les attentes des participants, nous avons pris comme point de départ un texte de Philippe Meirieu[1] intitulé « Groupes de niveau ? Groupes de besoin ? ». Un consensus s'est établi, en accord avec les idées de Philippe Meirieu, pour confirmer l'intérêt de créer plutôt des "groupes de besoins" en vue de mettre en oeuvre une pédagogie différenciée particulièrement adaptée à ce type de classes.

Nous avons choisi ensuite d'axer notre réflexion en soulevant deux sortes de questions :

1) Quels sont les principaux problèmes de gestion d'une classe multi-niveaux ? En particulier, quels conseils peut-on apporter pour tenter de répondre aux nombreuses questions touchant l'organisation des activités ?

[1]"*L'école, mode d'emploi ; des méthodes actives à la pédagogie différenciée*."
Pages 149 à 155, E S F, 1992.

Par exemple au cycle 3, comme le maître ne peut être partout à la fois, il nous semble important d'établir des “règles de vie” et de développer l'autonomie des enfants en exploitant l'idée de “contrat de travail” chère aux classes pratiquant la “pédagogie Freinet”.

Cependant, un groupe d'enfants ne peut rester seul trop longtemps. D'où l'idée d'alterner les “situations d'accompagnement” nécessitant la présence du maître et les situations de travail autonome.

A titre d'exemple, il existe pour la lecture des moyens audiovisuels et informatiques tels des logiciels adaptés à certains apprentissages.

Il n'est bien sûr pas nécessaire que tous les enfants travaillent simultanément en Mathématiques.

2) Peut-on proposer en mathématiques des activités communes, avec des objectifs différents, à tous les enfants d'une même classe multi-niveaux ?

Pour tenter de répondre à cette difficile question nous sommes partis d'abord du compte-rendu d'une expérience récente conduite dans plusieurs classes regroupant des enfants de CE2, CM1 et CM2, c'est-à-dire de tout le cycle 3.

En pratiquant nous-mêmes l'activité du “trio infernal”, sur une idée de Jean Kozérawski IMF à Quimper, nous avons voulu aussi tester si la fiche élaborée par le groupe de recherche “Math29”[2] et destinée à faciliter l'organisation de cette activité, était bien “fonctionnelle”. Vous trouverez plus loin un article sur l'activité géométrique du **“trio infernal**” ainsi que les questions soulevées et les enrichissements proposés par les participants à cet atelier.

Nous avons ensuite analysé ensemble une deuxième activité conduite dans la classe multi-niveaux regroupant des enfants de tout le Cycle 3.

Cette activité baptisée **“les rectangles semblables”** propose un travail autour de la notion de proportionnalité que l'on peut exploiter dans différents cadres (géométrique, numérique...). L'origine est un article d'Hervé Péault[3]. Vous trouverez aussi, dans ce deuxième article, les réactions et suggestions des participants à l'atelier.

Nous avons analysé enfin un document rendant compte d'un **“Rallye Mathématique”** organisé au cours d'un stage de Formation Continue mettant en concurrence 21 équipes formées d'enfants du Cycle 3. Vous trouverez donc ce troisième article et les autres idées d'exploitation proposées par les participants à l'atelier. Nous proposons en annexe quelques exemples d'épreuves de ce Rallye avec des références et des commentaires, ainsi que la grille des résultats.

---

[2] Groupe local de réflexion sur l'enseignement des mathématiques. Ce groupe n'existe plus actuellement.

[3] Voir la brochure tome 2, chapitre 3, article dont le titre est « *Proportionnalité* »

Conclusion

Le sujet est passionnant mais il nous reste du pain sur la planche et nous avons bien pris conscience des limites de notre travail !

1) Les problèmes de gestion n'ont pas été suffisamment abordés.

2) L'idée développée sur trois exemples, d'exploiter avec tous les enfants d'une même classe multi-niveaux une même situation tout en ayant des objectifs différents, est apparue à tous comme séduisante et originale mais, bien sûr, pas généralisable.

Nous constatons également que ces exemples ne concernent que le Cycle 3.

PREMIÈRE ACTIVITÉ
Le trio infernal

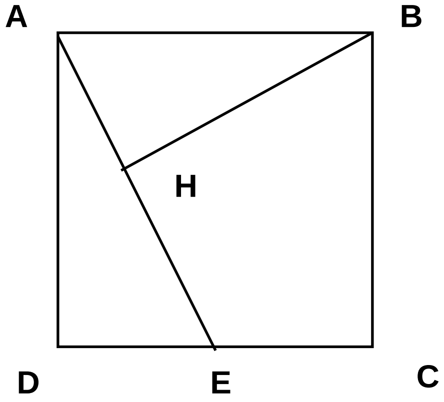
Niveau : CE2-CM1-CM2

Objectifs ou Compétences visées :
- Savoir reconnaître et réaliser des figures géométriques simples en résolvant un problème d'agencement.

Place dans une programmation ou acquis préalables et prolongements
- Pour le CE2 cela peut être une activité de découverte des propriétés de figures simples.
- Pour les CM1 et CM2 cela peut être une activité de réinvestissement utilisant les propriétés des quadrilatères et des triangles.

Situation (Présentation, texte du problème, consignes précises)
- 1ère variante : Fournir le puzzle et prévoir une phase d'appropriation en demandant de réaliser des formes variées à l'aide des trois pièces du puzzle. Demander ensuite de réaliser des figures géométriques imposées.

- 2ème variante : Demander de construire le puzzle
en imposant ou non l'usage d'instruments.
Proposer ensuite l'activité de recherche :
- Consigne possible :
"*Avec toutes les pièces de ce puzzle vous devez réaliser : un carré, un rectangle, un triangle rectangle, un parallélogramme, un trapèze isocèle, un trapèze quelconque*".



ABCD est un carré
E est le milieu de [DC]
(BH) est perpendiculaire à (AE)

Variables didactiques de cette situation

1) * Fournir des modèles des figures :
 - soit "à la taille"

- soit “à une autre échelle”.

* Ne pas fournir de modèle.

2) * Choix du support -

- soit du papier permettant des procédures par pliage.
- soit du carton

3) * L’organisation pédagogique

- Soit “travail individuel”
- Soit “travail en petits groupes”

Matériel

Pour chaque enfant :

- un puzzle ou du matériel (carton ou papier) pour le construire.
- une équerre et une règle graduée.
- Des modèles en ”silhouettes” pour les enfants en difficultés.
- Eventuellement, un puzzle “grand format” pour présenter l’activité à toute la classe.

Analyse a priori des difficultés possibles

- La compréhension du vocabulaire géométrique
- La notion de parallélisme et celle de perpendicularité.
- Les problèmes d’orientation des pièces pour réaliser des figures complexes.
- Penser à tourner et retourner les pièces du puzzle.
- Repérer les côtés de même longueur.

Possibilités d’aides envisagées

- Fournir des modèles “en silhouettes” à l’échelle ou non.
- Indiquer la possibilité de mesurer et même de colorier les côtés de même dimension.
- Donner l’idée de tourner et retourner les pièces du puzzle.
- Indiquer une méthode consistant à choisir une pièce et à étudier systématiquement les possibilités de juxtaposer l’une des deux autres pièces.

Analyse a priori des procédures possibles de résolution

- Procéder par tâtonnement. Ex : tourner autour d’une pièce.
- Utiliser les propriétés des figures demandées (Ex : côtés parallèles ou perpendiculaires)
- Mesurer afin de comparer les dimensions des pièces et voir celles qui “s’accordent”.

Questions et enrichissements proposés par les participants à l’atelier :

Cette activité testée par le groupe a été appréciée par sa simplicité et la richesse des possibilités d’exploitation mais elle a soulevé de nombreuses questions et permis d’instaurer entre nous un véritable débat d’idées.

Abordons tout d’abord quelques remarques de détail concernant le document :

- à propos de la variable didactique « choix du support », il pourrait être intéressant d'examiner si l'emploi d'un papier « quadrillé », permettant de repérer certains angles (droits ou complémentaires) et certaines longueurs sans instrument "externe", facilite ou non la résolution ainsi que la validation des problèmes posés.
- il est proposé pour cette activité que chaque enfant dispose d'une équerre et d'une règle graduée. On pourrait tout aussi bien laisser le libre choix des instruments ou bien imposer un autre outil tel que le pliage.

L'essentiel du débat a porté sur le problème de la "validation" du travail demandé et sur la phase "d'institutionnalisation". En effet, comme le suggèrent les deux variantes du scénario, on ne peut avoir les mêmes degrés d'exigence avec des enfants de CE2 qui découvrent certaines des figures simples à réaliser et des enfants de CM2 pour lesquels c'est plutôt une activité de réinvestissement de connaissances à propos de figures connues permettant de repréciser les propriétés et les critères de reconnaissance.

Concernant la « validation », prenons l'exemple du parallélogramme :

- Comment l'enfant peut-il prouver qu'il a bien réalisé cette figure ?

Nous pensons ici que la validation peut revêtir de multiples aspects :

- bien sûr le maître peut valider ou bien l'enfant peut se référer à un modèle de solution déjà réalisé.
- il nous semble plus judicieux de solliciter une formulation venant de l'enfant.

Cela peut aller du constat ou de la vérification que "les côtés opposés sont parallèles ou ont la même longueur" à une argumentation plus rigoureuse indiquant par exemple "ces deux côtés sont parallèles parce qu'ils sont perpendiculaires au même segment"

Concernant la phase de synthèse, l'exposé des travaux, l'exigence de mémoriser certaines réalisations ou d'élaborer une trace écrite de ces recherches, nous avons pensé que l'institutionnalisation devait revêtir un double aspect :
- le contenu : par exemple en faisant l'inventaire des noms et des propriétés qui permettent de reconnaître, de construire et donc de caractériser des figures simples et notamment des quadrilatères.
- les méthodes ou "savoir-faire" : voir l'importance pour l'enfant d'expliciter les difficultés rencontrées et d'identifier ce qui lui a permis de progresser dans sa recherche. Par exemple comprendre l'intérêt d'utiliser un codage, marquer les angles droits, repérer à l'aide d'un code couleur les côtés de même longueur, repérer deux angles qui permettent de réaliser un angle droit, numéroter les pièces...

Enfin, notre discussion a permis d'ouvrir des pistes de prolongements possibles à cette activité :

- un travail en géométrie orienté vers la réalisation d'un début de "carte d'identité" des principales figures simples,

- un travail plus technique concernant plusieurs procédés permettant de construire des droites parallèles ou perpendiculaires,
- une exploitation possible concernant les aires.

Par exemple dans l'activité de recherche proposée, passer de la réalisation du rectangle à celle du parallélogramme s'obtient par la simple translation d'une des pièces triangulaires. Ceci permet alors de donner du sens à une activité partant de l'aire connue d'un rectangle pour découvrir celle d'un parallélogramme.

DEUXIÈME ACTIVITÉ

Les rectangles semblables

Origine de l'activité : Brochure de l'IREM de Rouen "La proportionnalité existe, je l'ai rencontrée".
A partir de la résolution d'un même problème proposé à des enfants de CE2, CM1, CM2 regroupés dans la classe de Bertrand Lazennec à St Albin, école de campagne située dans un hameau près de Quimper, analyse et comparaison des procédures utilisées pour trier des rectangles de "mêmes formes".

Contexte de l'expérimentation

Dans son article, Hervé Péault[4] présente une suite d'activités possibles avec des étudiants en formation permettant d'approcher la notion de proportionnalité sous divers aspects.

Dans notre groupe de recherche « Math29 », nous essayons depuis trois années de prendre en compte l'organisation du travail par cycle et plus particulièrement au Cycle 3.

Nous avons essayé de mettre en place plusieurs situations ayant des points de départ communs pour des enfants de CE2, CM1 et CM2 réunis dans une même classe.
Parmi celles-ci, j'ai choisi d'analyser l'activité 4 proposée par Hervé Péault.

Objectifs :

- Pour le CE2, découvrir et utiliser des propriétés liées à la proportionnalité.
- Pour le CM, réinvestir dans un cadre géométrique ces propriétés.

Organisation de l'activité :

Les enfants sont répartis par groupes de 2 ou 3 et reçoivent une série de 12 feuilles numérotées et de même format (papier fin suffisamment transparent modèle A4) sur lesquelles sont dessinés 12 rectangles (1 par feuille) ayant leurs côtés non parallèles aux bords des feuilles. Les diagonales sont tracées pour quelques rectangles.

Détails concernant les dimensions des rectangles qui en fin d'activité devraient être répartis en trois "classes".
1) Rectangles de type A avec le rapport longueur / largeur voisin de 1,27

Longueurs	16	24	32	48
Largeurs	12,6	18,9	25,2	37,8
Numéros	N°1	N°5	N°7	N°10

[4] Voir article « Proportionnalité » dans le tome 2, chapitre 3.

2) Rectangles de type B avec le rapport longueur / largeur voisin de 1,63

Longueurs	18	33,3	36	48,6
Largeurs	11,04	20,42	22,08	29,81
Numéros	N°3	N°6	N°11	N°12

3) Rectangles de type C avec le rapport longueur / largeur voisin de 1,41.

Longueurs	18	27	33,3	54
Largeurs	12,76	19,14	25,6	38,28
Numéros	N°2	N°8	N°4	N°9

Consigne :

« Quels sont les rectangles qui se ressemblent, c'est-à-dire qui peuvent être considérés comme des agrandissements ou des réductions les uns des autres ? Classez-les selon ce critère. Vous avez le droit de mesurer mais vous n'êtes pas obligés ! »

Observations et analyse succincte des travaux d'élèves.

Comme l'indique Hervé dans son article, nous avons rencontré les mêmes procédures de résolution adoptées par les enfants et les adultes ! Par exemple :

- Les enfants de CE2 n'ayant pas connaissance des nombres décimaux ont vite abandonné les procédures de mesurage. (« les mesures ne tombent pas toujours juste ! »). Ils se sont alors tournés vers les procédures géométriques en traçant d'autres diagonales et en superposant les rectangles soit par un coin, soit par leurs centres c'est-à-dire les points de rencontres des diagonales. (on voit ici l'intérêt d'avoir choisi du papier fin transparent !)

- Les enfants du CM2, fiers de leurs connaissances concernant les nombres décimaux, se sont précipités sur les procédures de mesurage et de calcul en se heurtant à quelques nouvelles difficultés du domaine des techniques opératoires.

- Quelques enfants ont cherché à exploiter les "rapports scalaires" entre les longueurs ou entre les largeurs afin de différencier ou regrouper les rectangles.

(ex : le rectangle N° 11 a des dimensions doubles de celles du N° 3, tandis que le N° 2 et le N° 3 ont même largeur mais des longueurs différentes).

Analyse de quelques difficultés rencontrées

1) Concernant l'algorithme de tri.

De nombreux enfants ont eu tendance :

- soit à tout étaler et à procéder un peu au hasard après estimation visuelle.

- soit à prendre les rectangles deux par deux pour créer de nouvelles "classes" sans se référer aux classes déjà déterminées précédemment.

2) Concernant les mesures :
- que faut-il mesurer ? Les côtés ? Les diagonales ?...
- comment les comparer ?
- que peut-on faire de ces nombres ?
- les mesures “ne tombent pas toujours juste” !

3) Concernant les calculs en particulier avec des décimaux :
- comment calculer les rapports décimal / entier ou décimal / décimal ?
- faut-il comparer les longueurs ou les largeurs entre elles ?
- faut-il comparer les longueurs et les largeurs ?

4) Concernant le rôle des diagonales :
- faut-il les mesurer et à quoi cela peut-il servir ?
- faut-il comparer comment elles se croisent ? (Notion d’angle mal maîtrisée)

5) Concernant les procédures géométriques :
- comment faut-il chercher à superposer les figures ? (les coins, les centres?)
- intérêt de tracer d’autres diagonales pour constater certains alignements !

En guise de conclusion :

Lors de la synthèse, chaque groupe d’enfants est venu présenter ses résultats en expliquant les difficultés rencontrées et la démarche utilisée.

En constatant certaines divergences (certains groupes avaient proposé plus de 3 catégories !), certains enfants ont repris leurs calculs ou bien ont cherché à utiliser les procédures des autres.

Curieusement le taux de réussite des enfants de CE2 a été comparable à celui des enfants de CM ! Cela peut s’expliquer par le fait que les procédures géométriques adoptées par les plus jeunes sont ici relativement simples et fiables.

Toutefois le travail des enfants de CM avec les mesures et les nombres décimaux n’a pas lieu d’être dévalorisé car il montre aux plus jeunes qu’il existe d’autres méthodes accessibles si l’on possède d’autres “outils”.

Cette activité permet de mettre en lumière qu’il existe plusieurs procédures de résolution du problème posé, adaptées à différents niveaux de connaissances et de savoir-faire, et qu’il n’est pas utile de valoriser l’une d’elles, même si elle paraît plus simple car, en fait, elles se complètent et permettent d’élargir le regard sur la résolution d’un même problème !

Questions et suggestions des participants à l'atelier

Par manque de temps, cette seconde situation n'a pas été expérimentée par les membres de l'atelier. En conséquence, l'exploitation et l'analyse ont été plus succinctes.

* Certaines remarques soulevèrent des questions concernant la compréhension de la consigne et la négociation de la tâche :

- faut-il expliciter davantage la consigne en présentant des exemples de figures et de figures agrandies avec le risque d'orienter les recherches des enfants vers des procédures géométriques?
- faut-il au contraire prendre le risque de garder la formulation un peu floue qui est proposée afin de permettre une plus grande diversité des pistes de recherche ?

Cette question reste ouverte !
Une solution "médiane" consisterait à intervenir à la demande dans les groupes ayant des difficultés de compréhension.

* D'autres suggestions concernent le matériel qui peut être utilisé :

- par exemple : le papier calque ou du papier transparent.
- fournir des rectangles déjà découpés.
- permettre l'utilisation d'une calculette.

Par expérience, il me semble que l'idée d'Hervé Péault, de présenter les rectangles sur du papier fin modèle A4 et ayant leurs côtés non parallèles aux bords des feuilles, est intéressante.
Mais l'idée la plus importante à retenir est de tracer les diagonales de quelques rectangles pour suggérer aux enfants d'en tracer d'autres et s'en servir.

La richesse de cette situation réside dans la possibilité de résoudre le problème posé en utilisant les propriétés liées à la proportionnalité dans plusieurs cadres : numérique, géométrique et même graphique.
La phase d'échanges et de confrontation permettant de comparer les procédures est donc essentielle.

* La phase d'institutionnalisation pourra porter sur l'explicitation des propriétés utilisées :

- dans le "cadre numérique" : utilisation des propriétés de linéarité ou utilisation du rapport de proportionnalité entre les longueurs et les largeurs des rectangles d'une même classe,
- dans le "cadre géométrique", utilisation de propriétés d'alignements ou bien, en superposant des rectangles d'une "même classe", le constat que les diagonales coïncident. (Propriétés liées à l'homothétie, sans utiliser ce terme !)
- dans le cadre graphique, si par exemple on place en abscisses les longueurs et en ordonnées les largeurs des rectangles, on peut constater des

alignements avec l'origine. Cette procédure est d'ailleurs très voisine de celle qui consiste à superposer des rectangles en faisant coïncider un sommet.

* Enfin, comme prolongement à cette activité et en vue de réinvestir leurs nouvelles connaissances, on pourrait proposer aux enfants de construire un rectangle de chaque classe en leur laissant le libre choix de la méthode à utiliser.

TROISIÈME ACTIVITÉ

Le Rallye mathématique

Origine de l'activité : A partir de plusieurs références de "Rallyes Mathématiques" et en particulier concernant ceux organisés à l'initiative d'Hervé Péault durant 4 années en Maine-et-Loire.

Au cours d'un stage de Formation continue de 4 semaines organisé à Quimper, avec les stagiaires, nous avons organisé un rallye mathématique. Nous proposons ici une analyse succincte de cette activité.

Contexte de l'expérimentation

La conduite d'un stage de 4 semaines de Mathématiques centré sur l'apprentissage par la résolution de problèmes au Cycle 3 nous a semblé un contexte très favorable pour mettre en place une telle expérience.

A partir de nombreux documents fournis, ce sont les stagiaires eux-mêmes qui ont choisi les exercices et l'organisation pratique de ce Rallye.

Les enfants de 4 classes (une classe de CE2, une de CE2/CM1, une de CM1/CM2 et une de CM2) ont été répartis en 21 équipes (6 formées de 5 à 6 élèves de CE2, 8 de CM1, 7 de CM2) .

Volontairement les maîtres organisateurs ont choisi de proposer les mêmes séries d'exercices à chaque équipe.

Règlement du Rallye

* Une liste de 19 problèmes vous est proposée.

* Vous disposez d'un temps limité (1 heure 15) sans l'aide de l'enseignant, ni de qui que ce soit, pour vous organiser, choisir et résoudre des problèmes, débattre des solutions et noter la réponse directement sur la feuille correspondant à l'épreuve.

* A chaque problème correspond une valeur de points. Tout problème dont la solution est correcte fait gagner les points correspondants.

Consigne :

Apportez, dans la mesure du possible, une trousse individuelle comprenant :

- Un crayon gris, un taille-crayon et une gomme
- Des crayons de couleur
- Une paire de ciseaux
- Un double-décimètre
- Un compas et une équerre

Nature des exercices proposés

Les concepteurs des épreuves ont choisi délibérément de faire la part belle à la géométrie (10 exercices dont 2 de travail manuel et 1 concernant la mesure). Ils ont proposé aussi des problèmes de logique, des problèmes numériques simples et d'autres beaucoup plus complexes.

Observations et analyse succincte de l'expérimentation

Connaissant le nombre des points attribués à chaque épreuve, les enfants pouvaient estimer rapidement le degré de difficulté. Nous avons volontairement proposé plus d'exercices qu'ils n'ont le temps d'en résoudre individuellement. L'objectif est de les amener à s'organiser en équipe pour se partager le travail et aussi s'attaquer à des tâches restant dans les limites de leurs compétences.

Les difficultés :

- Nous avons pu constater que les enfants dans la plupart des équipes ont eu de grosses difficultés à se répartir le travail et à s'organiser.
- Ils ont souvent choisi les exercices "au hasard" et en cas de difficultés l'ont passé à leur voisin !
- Il semble aussi que peu de "procédures de contrôle" aient été utilisées.
- Certains enfants se sont réfugiés dans la réalisation d'un travail qu'ils se sentaient sûr de réussir (par exemple une reproduction de figure simple) sans aucun souci de rapidité et de performance de l'équipe.

Les résultats

- Sur 19 exercices proposés, un seul n'a été parfaitement réussi par aucune équipe comme vous pourrez le constater dans la grille des résultats donnée en annexe.
- Certains exercices mettant en jeu des connaissances opératoires complexes n'ont naturellement pas été traités par les élèves de CE2
- Par contre les exercices proches du travail manuel ont été aussi bien réussis au CE2 qu'au CM.
- C'est une équipe de CM2 qui a réalisé le meilleur score devançant de peu une équipe de CM1.
- Nous avions prévu de récompenser les 2 meilleures équipes par niveau de classe, mais le fait qu'une équipe du CE2 réalise un meilleur score que plusieurs équipes de CM2 n'a pas échappé aux enfants qui ont pensé que nous n'avions pas utilisé le même barème pour corriger le travail des plus jeunes. En fait, c'est une hypothèse erronée ! L'explication est à chercher davantage dans les difficultés rencontrées par certaines équipes pour se partager le travail et ne pas employer toute son énergie à vouloir résoudre des problèmes trop difficiles.

En guise de conclusion

Cette expérience enrichissante, intéressante à exploiter en stage, présente le grand avantage d'associer formateurs et formés pour la réalisation d'un même projet.

La présence de tous ces maîtres expérimentés permet de mettre en place un dispositif d'observation conséquent (2 maîtres responsables de 2 équipes d'enfants).

Le choix de privilégier les exercices de géométrie nous est apparu à l'analyse comme judicieux, car il met moins d'écart, nous semble-t-il, entre les compétences de début et de fin de cycle 3.

Dans la perspective de gestion de classes multi-niveaux, ce type d'activité nous semble adapté en vue de développer la coopération entre les enfants autour d'un même projet à réaliser bien dans l'esprit d'un travail par cycle

Il nous reste à expérimenter d'autres types d'organisation et d'épreuves en envisageant par exemple la constitution d'équipes hétérogènes formées d'élèves de CE2, CM1 et CM2.

Suggestions et autres idées d'exploitation proposées par les participants à l'atelier

* On peut aussi organiser de tels Rallyes dans une classe multi-niveaux. L'important est de proposer les bonnes contraintes obligeant les enfants à collaborer. Voici alors quelques idées :

- Former des équipes hétérogènes. Par exemple un enfant de CE2, un de CM1, un de CM2.
- Demander aux enfants de chacune des équipes de s'auto-évaluer à propos de la qualité de leur coopération.
- Exiger que tous les membres d'une même équipe soient en mesure de présenter la solution proposée des exercices traités.

* La forme même du Rallye, comme nous l'avons déjà expérimenté, peut s'envisager tout autrement.

- Par exemple on peut proposer un parcours d'épreuves, un peu comme un jeu de piste en prévoyant des "ateliers libres" de "délestage" avec des jeux, des "casse-tête" ou des énigmes afin de réguler le flux des passages aux différents ateliers.
- On peut proposer d'autres épreuves que la "résolution de problèmes".

  Par exemple proposer des exercices portant sur des techniques opératoires connues ou inconnues telles que l'utilisation de bouliers chinois ou japonais.

* La discussion a porté enfin sur l'intérêt ou non de publier les items du Rallye

- Il nous semble intéressant, au cours d'un stage de Formation Continue, de laisser aux stagiaires l'initiative et la responsabilité du choix des épreuves.

  C'est en quelque sorte vivre une coopération avant d'apprendre aux enfants à coopérer
- En revanche, c'est une aide précieuse pour un maître d'avoir quelques références de telles expériences.

- C’est pourquoi, à la demande des “relecteurs”, nous publions en annexe quelques exemples d’épreuves commentées.

Par ailleurs, la revue réalisée à l’initiative d’Hervé Péault, relatant l’expérience de quatre années de Rallyes mathématiques en Maine-et-Loire est une référence beaucoup plus complète sur ce type d’activités.

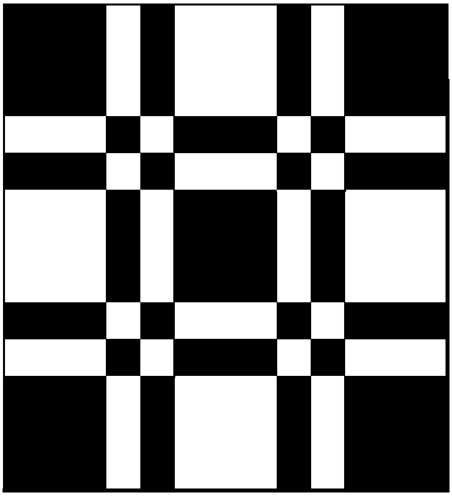
Annexes

A titre d'exemples : voici quelques exercices commentés

Epreuve N° 2 (2 points)" Le Carré "

Référence :
Cet exercice adapté s'inspire du " Motif " de l'exercice n°3 de l'ouvrage :
" Géométrie pour le plaisir " Tome I Editions KIM-Dunkerque

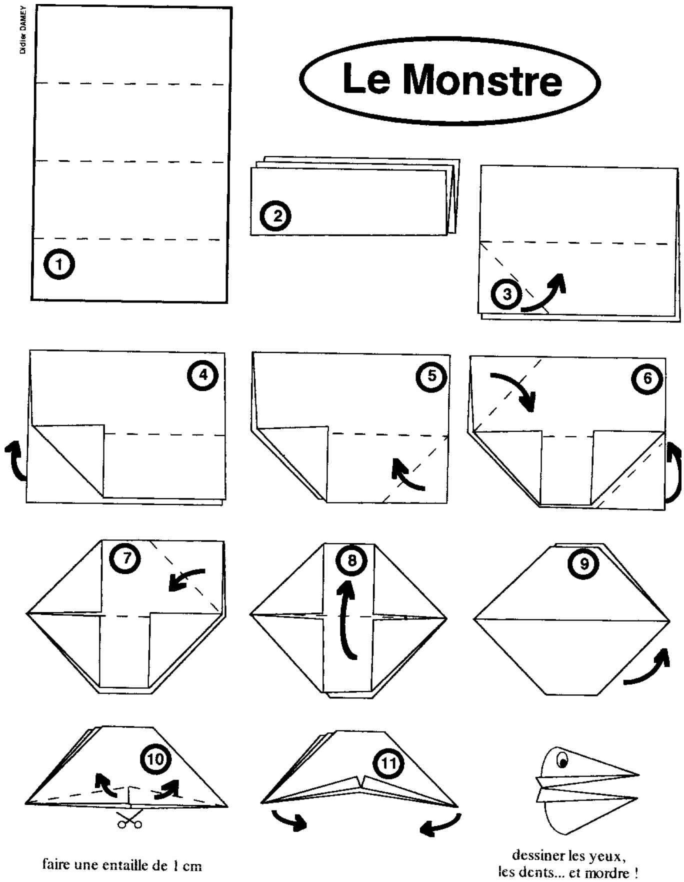
EPREUVE N° 2 (2 points)
Reproduis cette figure sur papier blanc Le Carré



Commentaires :
Les stratégies utilisées pour reproduire ce dessin ont été intéressantes à observer
Certains enfants du CE2 ont cherché à réaliser le dessin "case après case" sans réaliser le quadrillage.
Certaines productions ont respecté les mesures, d'autres se sont contentées de respecter le parallélisme.

Epreuve N° 16 : (8 points) Construire le “Monstre”

Référence : D’après une idée de Didier Damey PIUFM à Quimper.



Commentaires :

Nous avons pu observer que le taux de réussite des équipes du CE2 est tout à fait comparable à celui des équipes de CM !
Ceci tend à prouver que les schémas proposés ici pour coder la suite des actions à effectuer sont compréhensibles et adaptés pour des enfants de cet âge.
Il nous semble enfin, que dans les tâches d’action, la différence des compétences est moins sensibles. Sans doute devrions nous prendre en compte aussi les facteurs psychologiques liés à la motivation, au désir d’essayer et d’expérimenter en agissant.

Epreuve N° 17 : (15 points)   "Le rectangle fou"

Référence : Extrait du Rallye de Maine et Loire 1993 organisé par Hervé Péault PIUFM à Angers.

Problème   *2ième épreuve exercice n° 13*

J'ai une feuille rectangulaire de 17 cm sur 22 cm. Je dois y découper (en les plaçant comme je veux) des morceaux rectangulaires de 3 cm sur 5 cm.

Quel est le nombre maximum de morceaux entiers de 3 cm sur 5 cm que je peux découper ?

(Tu peux faire un dessin)

Voici une solution géométrique et les commentaires d'Hervé.

Réponse : 24 morceaux

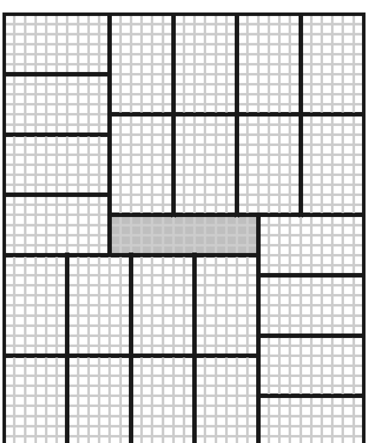
Le découpage peut être obtenu de la façon indiquée ci-contre où il reste un vide de 7 cm x 2 cm.

Plusieurs classes ont produit la réponse correcte à partir du raisonnement suivant :

"L'aire de la feuille est 17 cm x 22 cm, soit 374 cm^2. L'aire d'un morceau est 15 cm^2. Le quotient entier de 374 par 15 est 24 et il y a donc 24 morceaux."

Le raisonnement permet d'affirmer que 24 est le nombre maximum envisageable, mais ne prouve pas qu'il existe effectivement une disposition permettant le découpage. Toutefois, comme seul était demandé le nombre de morceaux découpables, nous avons accepté les réponses accompagnées d'une explication de type ci- dessus.

Les réponses erronées les plus fréquentes ont été celles où les morceaux étaient supposés être tous dans le même sens, ce qui donnait suivant le cas 21 ou 22. Quelques classes ont dû faire des essais de réarrangement et ont proposé 22 ou 23 accompagnant souvent leur réponse d'un dessin. A noter que deux classes ont proposé 25 et deux autres 26. Comme elles n'ont pas joint de dessin, il est difficile d'interpréter ces réponses.



Remarque :

Cet exercice très difficile n'a été réussi que par une seule équipe. Nous avons classé dans la catégorie "réussites partielles" les réponses non optimales mais argumentées.

A noter que les instituteurs en stage, confrontés au même problème, ont utilisé la stratégie de division indiquée par Hervé !

Epreuve n° 19 : (6 points)   Opérations codées

Référence : Extrait de l'ouvrage de François Boule : "Jeux et calculs" publié chez Armand Colin

Opérations codées

Dans les opérations qui suivent, un signe représente un chiffre.
Retrouver les opérations.
(N.B. : D'une opération à l'autre, le codage peut changer)

	£	*			**A**	**N**		**4**	♦	**?**
+	£	*		-	**N**	**A**	+	**4**	**?**	♦
♠	**7**	**2**			**2**	**A**		**?**	♦	**6**
	1 point				2 points				3points	

Réponses :

Pour la 1ère opération   **86 + 86 = 172**

Nous n'avons pas accepté   **36 + 36 = 072**

Pour la 2ème opération   **74 - 47 = 27**

Pour la 3ème opération   **479 + 497 = 976**

Commentaires :

Ces exercices sont incontestablement très difficiles pour des enfants de cet âge.
Aucune équipe n'a réussi à les effectuer toutes correctement !
Par exemple, les plus jeunes élèves, pour la 1ère opération en particulier, ont fait l'hypothèse que le " * " valait 1 et ont eu beaucoup de mal à quitter cette proposition qui leur semblait irréfutable !
Pour la deuxième opération, jugée la plus difficile, une aide envisagée consistait à présenter cet exercice sous la forme d'une addition. Cette idée nous semble intéressante pour insister sur l'importance de faire le lien entre le "sens" de l'opération et la technique opératoire !

									Résultats du Rallye											
	Mesure de longueurs	Reproduire une figure plane	Interpréter une représentation	Exercice de logique	Tracé d'un chemin : langage Logo	Reproduire une figure de l'espace	Reproduire une figure plane	Mesure du temps	Tri : descriptions de figures	Tangram : résolution de problèmes	Notion d'axe de symétrie	Exercices de numération	Numération et opérations	Logique : arbre généalogique	Reproduire des figures planes	Construire par pliage	Problème d'agencement	Mesure : lecture de cartes	Opérations codées	
	Mes l	Géom	Géom	Logique	Géom	Géom	Géom	Mes t	Géom	Géom	Géom	Num	Opérat	Logique	Géom	Géom	Géom	Mes l	Opérat	
	Ex1	Ex 2	Ex 3	Ex 4	Ex 5	Ex 6	Ex 7	Ex 8	Ex 9	Ex 10	Ex 11	Ex 12	Ex 13	Ex 14	Ex 15	Ex 16	Ex 17	Ex 18	Ex 19	Total
	1 pt	2 pts	2 pts	3 pts	3 pts	4 pts	4 pts	4 pts	6 pts	10 pts	6 pts	6 pts	10 pts	8 pts	12 pts	8 Pts	15 pts	5 pts	6 pts	115 pts
CE2 Eq 1	1	1	0	1	0	4	3				4	5		4	5			1	0	29
CE2 Eq 2	1	2	0	0	0	4	4			3		2		1	10		5	2	1	35
CE2 Eq 3	0	2	0	2	3	4	4					6			0	8			1	30
CE2 Eq 4	0	2	0	3		4	4	4						1	10	8				36
CE2 Eq 5	0	1	0	1	3	4	1				0	5		8		7		4	1	35
CE2 Eq 6	0	0	0	1	3	2	4	2			3	6		8	6	8		3		46
CM1 Eq 7	1		0	3	3	4	0		4		4	6	1	4	4		0		4	38
CM1 Eq 8	0	1	0	2	0	2	3	0	6	10	1	5	0	7	0			4	3	44
CM1 Eq 9	0	1	0	2	0	2	0	2	6		1	6	10	6	10	0	10	5	4	65
CM1 Eq 10	0	1	0	2		4	4	0		10	5	5		3	5		10	0	0	49
CM1 Eq 11	0	1	2	0		4	0		6	10	1	4	0	6	6	6	5	0	1	52
CM1 Eq 12	0	2	2	2	3	4	4	0	4		5	6		3	4	8	0		4	51
CM1 Eq 13	0	2	2	2		4	0	0			4	2		5	4	8		0	0	33
CM1 Eq 14	1	0	2	2	0	4	4	4	6	10	2	5	4	1	8	8	5	0	0	66
CM2 Eq 15		2	2	3	3	4	4				1	6		6	12	2	15	0	1	61
CM2 Eq 16	0	2	0	1	0	0	4	2	4	0	3	5	0	1	12	0	0	0	4	38
CM2 Eq 17	0	1	2	2	0	4	0	2	0	10	6	3	3	3	9	8	0	5	2	60
CM2 Eq 18	1	2	0	1	0	0	4	2	4	0	2	4	0	2	8	0	0	5	0	35
CM2 Eq 19	0	2	0	2	3	4	4	0	0	10	0	0	0	2	2	8	0	0	0	37
CM2 Eq 20	0	2	0	2	0	4	4	2	6	10	0	6	0	7	12	0	0	0	1	56
CM2 Eq 21	0	2	0	2	0	4	4	0	6	10	1	6	8	1	8	8	5	0	4	69
Réussites	5	12	6	3	7	16	13	2	6	8	1	8	1	2	3	9	1	3	0	
Réus part		6		16		3	3	6	4	1	14	11	14	18	15	3	6	5	13	
Echecs	15	2	15	2	10	2	5	6	2	2	3	1	3	0	2	4	7	9	6	

Actions spécialisées d'adaptation et d'intégration à l'école et au collège

Louis Roye

En guise d'introduction au chapitre "Dispositifs spécialisés", on trouvera ici des textes retraçant, depuis les travaux préparatoires en 1989 jusqu'aux décrets de mise en œuvre en 1998 pour les SEGPA, l'évolution de l'Adaptation et de Intégration Scolaires (A.I.S.) provoquée par la nouvelle nomenclature de l'Organisation Mondiale de la Santé (O.M.S.) relatives aux déficiences, incapacités et désavantages (Arrêté du 9 janvier 1989) et par la loi d'orientation sur l'éducation du 10 juillet 1989.
Les différents articles du chapitre "Dispositifs spécialisés dans les structures ordinaires" se situent en 1997:
- pour les Réseaux d'Aides Spécialisées aux Elèves en Difficulté à l'école, ils posent le problème de l' «indication» de la prise en charge et illustrent par des exemples ce que peuvent être des aides spécialisées auprès d'élèves présentant des "troubles dans l'appropriation des mathématiques et de la logique"[1]
- pour les SEGPA, ils anticipent pratiquement les Instructions Officielles parues en 1998.

> Le droit à l'éducation est garanti à chacun afin de lui permettre de développer sa personnalité, d'élever son niveau de formation initiale et continue, de s'insérer dans la vie sociale et professionnelle, d'exercer sa citoyenneté.
> *Extrait de la loi d'orientation sur l'éducation - BO du 31 août 1989.*

L'objectif de cet article est de montrer en quoi l'évolution des textes officiels va toucher à la fois les enseignements adaptés à travers la mise en œuvre de nouveaux dispositifs et les compétences requises en fin de formation professionnelle des maîtres spécialisés. La formation des maîtres spécialisés mais aussi, on le verra, celle des maîtres ordinaires sont concernées par la mise en œuvre de ces dispositifs.

[1] Cf. Référentiels de compétences de l'option E in Rénovation du CAPSAIS BO du 8 mai 1997

Dispositifs spécialisés dans les structures ordinaires de l'école et du collège

Actions spécialisées d'adaptation et d'intégration à l'école et au collège …

… à l'école (RASED et CLIS) :

L'école, qui accueille tous les enfants doit permettre à chacun d'entre eux de tirer le meilleur profit de sa scolarité. Adapter l'action pédagogique et le fonctionnement de l'institution scolaire aux caractéristiques des élèves, notamment de ceux qui éprouvent des difficultés particulières dans l'acquisition et la maîtrise des apprentissages fondamentaux, s'impose comme une nécessité et un devoir.
C'est ainsi que l'accueil des élèves handicapés, dans les conditions les plus proches de la scolarité ordinaire a largement progressé. L'effort doit être poursuivi afin que l'intégration scolaire des enfants handicapés devienne l'une des caractéristiques du fonctionnement de notre système éducatif.
D'autres élèves, cependant, éprouvent des difficultés à satisfaire aux exigences d'une scolarité normale difficultés qui ne peuvent être considérées comme des handicaps avérés.

Circulaire du 9 avril 1990 : " mise en place et organisation des réseaux d'aides aux enfants en difficulté"

Deux dispositifs bien distincts de prise en charge des élèves en difficulté d'une part, et des élèves handicapés d'autre part, sont mis en place dans le premier degré à partir de 1990. La circulaire du 9 avril 1990 définit l'organisation d'un dispositif départemental d'aides spécialisées aux élèves en difficulté (RASED) et la circulaire du 19 novembre 1991 précise à travers les Classes d'Intégration Scolaire (CLIS) un élément important du dispositif départemental d'intégration scolaire des enfants handicapés, à l'école primaire.

Ces deux dispositifs bien différenciés sont complémentaires. Cette complémentarité permet, par la diversité des formes de l'aide et de l'action pédagogique spécialisée, par la cohérence et la souplesse des organisations inscrites dans les projets d'école, d'apporter, aux besoins particuliers qu'appelle la scolarisation de certains élèves, les réponses les mieux adaptées.

A. Les aides spécialisées aux élèves en difficulté à l'école et leur organisation en réseaux (Réseaux d'Aides Spécialisées aux Elèves en Difficulté – les RASED)

La circulaire du 9 avril définit d'abord les aides spécialisées par leurs caractéristiques, leur nature, leurs formes, leur mise en œuvre et leur organisation en réseau et leur évaluation. La même circulaire précise aussi, à chacun des niveaux de cette organisation, le rôle des responsables ainsi que les fonctions et l'identité professionnelle des différents intervenants.

Des principes régissent le fonctionnement de ce nouveau dispositif.

1. Concernant leurs caractéristiques, les aides spécialisées s'insèrent dans l'ensemble des actions de prévention des difficultés que peuvent éprouver les élèves à l'école :

- "La prévention des difficultés des élèves est un objectif qui ne saurait être réalisé par les seuls intervenants spécialisés même si ceux-ci y apportent, par la spécificité de leurs actions, une contribution souvent décisive. Cette prévention concerne tous les partenaires de l'école."

- "L'attention aux comportements et aux conduites des enfants à l'école, le repérage et l'analyse de leurs éventuelles difficultés permettent de concevoir et d'organiser des interventions nécessaires. Ces interventions prennent effet avant que des difficultés, quelquefois mineures, ne s'accentuent et ne deviennent durables.

Cet aspect de la prévention prend une particulière importance dans le cycle des apprentissages premiers et dans celui des apprentissages fondamentaux."

Il est précisé que les aides spécialisées ne se substituent pas à l'action des maîtres dans le cadre d'une pédagogie différenciée, avec le concours éventuel des psychologues scolaires, et que "l'aide spécialisée n'est requise que lorsqu'une réponse pédagogique suffisamment efficiente n'a pu être apportée ou que le recours à l'aide spécialisée s'impose d'emblée, comme une évidence".

L'accent est mis sur le partenariat des intervenants du réseau, du maître de la classe de l'enfant et de ses parents. Il est mis aussi sur la nécessité d'évaluer les effets de l'aide, l'évaluation étant considérée comme une composante essentielle du processus d'intervention.

On voit comment la formation initiale professionnelle des professeurs des écoles est concernée par la mise en œuvre de ce dispositif.

Concernant la nature et les formes des aides spécialisées, elles sont mises en œuvre suivant deux modalités : les actions d'aide spécialisée à dominante "pédagogique" (maître AIS Option E) et les actions d'aide spécialisée à dominante "rééducative" (maître AIS Option G).

Les premières sont organisées par la constitution de classes d'adaptation (CLAD) à effectif réduit rassemblant de manière permanente des élèves en difficulté ou de regroupements d'adaptation rassemblant de manière temporaire des élèves en difficulté qui continuent à fréquenter leur classe ordinaire.

Les secondes mettent en œuvre des interventions spécifiques à l'école maternelle ou à l'école élémentaire d'élèves en difficulté scolaire, globale ou particulière.

L'indication de la prise en charge de tel ou tel enfant par un maître E ou par un maître G relève d'un bilan.

Cette "indication" et son fondement font l'objet d'une partie de la conférence de Dominique Barataud transcrite ci après dans ce chapitre. A la suite on y trouvera aussi un exemple de mise en place d'aide spécialisée à dominante rééducative à travers l'étude d'un cas.

2. Les aides spécialisées sont organisées en réseaux : les Réseaux d'Aides Spécialisées aux Elèves en Difficulté (RASED)

Un réseau d'aides spécialisées est un ensemble fonctionnel et cohérent d'actions destiné à apporter, dans les écoles maternelles et élémentaires où il intervient, des aides spécifiques différenciées aux élèves en difficulté.
Les intervenants spécialisés des réseaux contribuent, en liaison avec les parents et les enseignants exerçant dans les écoles, à prévenir, à réduire les difficultés éprouvées par les élèves, leur permettant ainsi de tirer le meilleur profit de leur scolarité

Aucune école ne doit être écartée d'une action possible des personnels spécialisés: une école où qu'elle se situe dans la zone d'action possible d'un RASED, doit en connaître l'existence et savoir qu'elle peut y faire appel.
Les RASED se trouvent dans l'école et leur mission s'exerce exclusivement dans l'école, ils constituent une des réponses possibles à des besoins particuliers qui se révèlent dans l'institution..
Les maîtres de l'école, à la fois à titre individuel comme maîtres d'une classe et à titre collectif comme maîtres d'un conseil de cycle ou membre du conseil d'école, sont intéressés institutionnellement à l'ensemble des actions du RASED. Le projet du RASED doit constituer un des éléments du projet de l'école. Les personnels du RASED ne peuvent travailler en marge du fonctionnement des classes, du projet d'école, du fonctionnement des cycles.

3. Evaluation interne et évaluation externe
L'évaluation interne par les intervenants de leurs propres actions d'aides spécialisées consiste à confronter aux différentes étapes de sa réalisation, le processus d'aide à son projet ou à établir le bilan lorsque l'action a pris fin. Ces évaluations doivent toujours pouvoir donner lieu à communication aux différents interlocuteurs concernés (maître de la classe, parents, élèves eux-mêmes, autres intervenants, autorités académiques, etc.).
C'est à l'Inspecteur de l'Éducation Nationale d'effectuer une évaluation des besoins de chacune des écoles de sa circonscription " et de définir aussi, par rapport aux projets d'école qui lui sont soumis, les zones d'intervention du RASED, en concertation avec celui-ci.
Des évaluations régulières des actions sont nécessaires pour formuler une nouvelle décision concernant le maintien ou non de la zone prioritaire.

4. Les identités professionnelles des maîtres spécialisés intervenant dans les réseaux d'aide spécialisée sont décrites dans la première partie de la conférence de Dominique Barataud sous le titre "Formations et AIS".

B. Scolarisation des enfants handicapés à l'école primaire. Les Classes d'Intégration Scolaire.

Extraits de la circulaire du 18-11-1991

Définition des CLIS

Les classes d'intégration scolaire (CLIS) accueillent de façon différenciée, dans certaines écoles élémentaires ou exceptionnellement maternelles, des élèves handicapés mentaux (CLIS 1) ou handicapés auditifs (CLIS 2) ou handicapés visuels (CLIS 3) ou handicapés physiques (CLIS 4) qui peuvent tirer profit, en milieu scolaire ordinaire, d'une scolarité adaptée à leur âge et à leurs capacités, à la nature et à l'importance de leur handicap. L'objectif des CLIS est de permettre à ces élèves de suivre totalement ou partiellement un cursus scolaire ordinaire.

Les CLIS se substituent aux classes spéciales : classes de perfectionnement, classes pour handicapés sensoriels, classes pour handicapés moteurs, etc.

Il faut rappeler par ailleurs que certains élèves handicapés peuvent être directement inscrits dans les classes ordinaires, lorsque la nature et le degré de leur handicap le permettent et que les conditions de leur accueil ont été étudiées et remplies, en référence aux circulaires précitées sur l'intégration. Ces intégrations individuelles, souvent soutenues par l'action pédagogique d'un maître spécialisé itinérant, continueront à être privilégiées.

L'admission et l'accueil des élèves en CLIS

Les CLIS accueillent des enfants dont le handicap a été reconnu par une commission de l'éducation spéciale. L'admission est subordonnée à la décision de l'une de ces commissions. Il s'agit généralement de la commission de circonscription de l'enseignement préélémentaire et élémentaire (C.C.P.E.). Dans certains cas, la décision de la commission départementale de l'éducation spéciale (C.D.E.S.) est cependant requise, en particulier lorsque l'organisation d'un soutien spécialisé, entraînant une prise en charge de nature financière, est liée à la décision d'admission.

Lorsque l'admission dans une CLIS est envisagée pour un enfant, la commission de l'éducation spéciale compétente recueille l'avis de l'enseignant de la CLIS concernée, qui l'informera sur la composition de sa classe et sur son projet pédagogique.

L'élève admis dans une CLIS doit être capable, d'une part, d'assumer les contraintes et les exigences minimales de comportement qu'implique la vie à l'école, d'autre part, d'avoir acquis ou d'être en voie d'acquérir une capacité de communi-

cation compatible avec des enseignements scolaires, les situations de vie et d'éducation collectives.
La situation des élèves est régulièrement révisée en application des dispositions de la circulaire du 22 avril 1976 relative à la composition et au fonctionnement des commissions de l'éducation spéciale. Le suivi de l'intégration rend nécessaire une telle révision chaque année."

Au niveau des incidences sur la formation initiale et la formation continue des professeurs des écoles, il faudrait que les maîtres ordinaires soient préparés à l'accueil d'un enfant handicapé dans leur classe; en effet une telle intégration peut se faire après acceptation du conseil d'école.

… au collège (SEGPA, UPI)

- le passage de "Sections d'Education Spécialisée" aux sections "Sections d'Enseignements Généraux et Professionnels Adaptés"

Le passage du concept d'éducation spécialisée au concept d'enseignement adapté marque une évolution radicale dans les approches proposées aux adolescents connaissant un échec scolaire massif au point de fréquenter les classes du secteur de l'Adaptation et de l'Intégration Scolaires. Cette évolution entraîne des transformations dans les représentations, dans les pratiques, dans les ambitions des enseignants à l'égard de leurs élèves.
Le renoncement au terme "spécialisé" pour caractériser les enseignements indique un changement de relations entre l'enseignement ordinaire et le champ de l'A.I.S. : alors qu'éducation spécialisée a longtemps rimé avec classes séparées, distinctes et diminuées par rapport aux exigences ordinaires, l'enjeu des enseignements adaptés est de favoriser l'ouverture à l'ensemble des réseaux de formation technologique et 'professionnelle du second degré.' Dans cette perspective, on rénove les enseignements, et l'on rend plus aisée la réorientation des élèves en fonction de leurs possibilités et de leurs projets personnels.

Ce passage de l'éducation spécialisée aux enseignements adaptés se concrétise plus précisément par :

- une approche différente des déficits de l'élève, car on passe d'une conception purement déficitaire et constitutionnelle à l'idée que le déficit est la résultante d'un trajet personnel complexe et qu'il n'est pas irréversible ;
- des actions pédagogiques nouvelles, fondées sur l'écart entre une pédagogie spéciale (de réparation, de re-motivation, de compensation, de rattrapage) et une pédagogie de la médiation (médiations et remédiations cognitives, pédagogies par objectif, évaluation formatrice, pratiques de la métacognition, etc.) ;
- une conception plus riche de l'accès aux savoirs (on est passé en particulier d'une pédagogie de la simplification, d'un trajet que l'on croyait imposé

allant toujours du simple au complexe, de l'utile à la généralisation... à une pédagogie de la complexité, une pédagogie de l'abstraction, la complexité[2] devenant le point de départ de l'apprentissage) ;

- une tout autre relation entre l'enseignant et l'enseigné, en passant d'une logique transmissive ou non directive à une pédagogie de l'appropriation et du transfert des compétences ;
- un objectif de formation rénové, puisque ce n'est plus une formation pré-professionnelle préparant, au travers des habitudes de travail, à l'occupation d'un poste précis de travail, mais bien une réelle formation professionnelle qualifiante, avec toutes les capacités d'adaptation que cela suppose, même si la poursuite de cette formation suppose une réorientation de l'élève ;
- une nouvelle place enfin et surtout de l'élève au cœur du système éducatif, car il passe d'un rôle passif à un rôle d'acteur décisif de sa formation et de son insertion. Mais elle cherche aussi à favoriser dans un même élan l'exercice de la citoyenneté et l'épanouissement de la personnalité.

Dans son esprit, le trait dominant du caractère adapté des enseignements dispensés en SEGPA et en E.R.E.A renvoie à une pédagogie de l'adolescence, une pédagogie de l'appropriation, une pédagogie de l'action et de l'abstraction :

- *" Une pédagogie de l'adolescence*

L'un des objectifs éducatifs est la recherche de la plus grande autonomie possible dans la vie personnelle et sociale, dans les activités physiques, intellectuelles, professionnelles et culturelles. Ce but donne sa cohérence aux différents enseignements, à la vie scolaire et aux activités socio-éducatives que les équipes doivent offrir au public qu'elles reçoivent. Même si des élèves semblent stagner dans les premiers apprentissages, ils ont des motivations, des expériences et des capacités d'abstraction que n'ont pas des enfants ; on ne peut se contenter de fonder des programmes et des progressions sur une logique " du plus simple au plus complexe " ou sur un cheminement d'enseignement primaire fondé sur l'évolution psychologique de l'enfance.

- Une pédagogie de l'appropriation des principaux savoir-faire et concepts des disciplines fondamentales d'une formation professionnelle. La construction des programmes ne peut supprimer a priori l'enseignement de contenus essentiels ou des disciplines de base proposées dans les autres cycles secondaires. C'est une pédagogie qui vise, au-delà des compétences et des performances, le développement de capacités transversales à toutes les activités, telles que les capacités de communication et de prise d'information dans des situations variées, de résolution et de décision face aux problèmes, d'organisation et d'évaluation.

[2] Au sens que donne Edgard Morin à la complexité caractérisé par le nombre d'informations et de relations entre ces informations.

- Une pédagogie de l'activité et de l'abstraction
Les situations d'apprentissage doivent être riches et significatives (c'est-à-dire rester liées aux objectifs terminaux que l'on veut atteindre). Leur présentation doit susciter une activité de recherche individuelle et collective. Grâce à des modes d'aide cognitive assurés par l'adulte ou le groupe, elles peuvent permettre, aux élèves, par la verbalisation et la confrontation, de découvrir des règles d'action et de prendre conscience de leur propre manière d'apprendre[3]."

Partie intégrante de l'architecture du collège, la SEGPA est organisée en trois cycles (cycle d'adaptation, cycle central et cycle d'orientation). Ils assurent une formation commune qui préparent les jeunes à accéder à des parcours de formation qualifiante.

La circulaire du 25 juin 1998 fixe les finalités poursuivies dans le cadre des enseignements adaptés qui ne "sauraient être fondamentalement différentes de celles poursuivies dans les autres enseignements du collège". Par exemple, ce qui nous intéresse plus particulièrement ici, sous la rubrique "mathématiques", on lit :
" *Il est possible de se livrer, à partir d'un nombre limité de connaissances, à une activité mathématique véritable. L'enseignement des mathématiques doit permettre à l'élève d'apprendre à :*
- identifier un problème,
- conjecturer un résultat,
- expérimenter sur des exemples,
- bâtir une argumentation, mettre en forme une solution,
- contrôler les résultats obtenus et évaluer leur pertinence en fonction du problème étudié.
Les travaux géométriques, les travaux numériques, l'organisation et la gestion de données, les fonctions, constituent un cadre de travail pertinent mais appellent des progressions adaptées aux compétences des élèves, des situations aussi diversifiées que possible permettant de transférer et de consolider les notions et outils mathématiques mobilisés.
Il est nécessaire de tout mettre en œuvre pour que les élèves perçoivent explicitement que ces notions et outils prennent sens par rapport à des problèmes qu'ils permettent de résoudre. Pour des élèves en difficulté, encore plus que pour les autres élèves, c'est cette préoccupation essentielle qui doit guider le travail de l'enseignant. "

Dans ce chapitre "Dispositifs spécialisés", on trouvera deux articles relatifs à la formation en mathématiques des maîtres spécialisés option F intervenant en SEGPA : le premier donne un plan des premiers cours pour la formation mathé-

---

[3] Extrait de la circulaire du 14 décembre 1990. Organisation des enseignements généraux et professionnels adaptés

matique et didactique des stagiaires AIS option F, le second donne des éléments de cours sur la notion de problème pour professeurs-stagiaires option E et F.

- Les UPI

La mise en place de dispositifs permettant des regroupements pédagogiques d'adolescents présentant un handicap mental : les U.P.I. (Unité Pédagogique d'Intégration (circulaire du 25 mai 1995) est une des voies offertes aux élèves de CLIS 1 (pour handicapés mentaux) après douze ans.
Leur fonctionnement est comparable à celui des CLIS. Les U.P.I. ont pour but de *« faciliter le passage de la logique de l'école primaire à celle du second degré»* en recherchant «*la participation la plus active et la plus fréquente possible des jeunes élèves intégrés aux activités des autres classes du collège»* Pour cela, les UPI embrassent les dimensions scolaire et sociale de toute intégration en tentant : *«d'une part, de scolariser ces élèves, même très partiellement, dans des classes ordinaires (intégration scolaire), d'autre part de les faire participer à la vie de la Communauté scolaire (intégration sociale)».*

Ces unités, implantées dans un collège, exigent la collaboration d'enseignants spécialisés, d'enseignants de collège ou de lycée, d'enseignants de SES/SEGPA et de différents partenaires : SESSAD (Section d'Education et de Soins Spécialisés à Domicile) préférentiellement rattaché à une section d'enseignement professionnel et de soins spécialisés, spécialistes du secteur privé, etc.
Un projet pédagogique et éducatif est défini pour le dispositif, il donne du sens à l'organisation d'ensemble des activités des élèves. Un projet individualisé et d'intégration doit permettre de définir pour chaque jeune intégré la nature et les formes de la scolarité en UPI de collège et les objectifs poursuivis.

Les maîtres spécialisés, leurs options, leurs missions

En liaison étroite avec les équipes des établissements scolaires, les actions pédagogiques spécialisées d'adaptation et d'intégration scolaires sont menées par des professeurs des écoles titulaires du certificat d'aptitude aux actions pédagogiques spécialisées d'adaptation et d'intégration scolaires comportant les options suivantes :
Option A : enseignants spécialisés chargés de l'enseignement des enfants et adolescents handicapés auditifs. BO n°27 du 9/7/87, BO n°3 du 16/01/92 ; circulaire du 18/11/91 pour ce qui concerne les CLIS 2.
Option B : enseignants spécialisés chargés de l'enseignement des enfants et adolescents handicapés visuels ou aveugles. BO n°27 du 9/7/87 ; Circulaire du 18/11/991 pour ce qui concerne les CLIS 3.
Option C : enseignants spécialisés chargés de l'enseignement des enfants et adolescents malades somatiques, déficients physiques, handicapés moteurs.

BO n°27 du 9/7/87 , BO n°3 du 16/01/92, BO n°3 du 16/01/92 ; circulaire du 18/11/91 pour ce qui concerne les CLIS 4.
Option D : enseignants spécialisés chargés de l'enseignement des enfants et des adolescents présentant des troubles importants à dominantes psychologiques précisés dans les textes suivants : BO n° 27 du 9/7/87, BO n° 45 du 14/12/89, BO n°3 du 16/01/92 ; circulaire du 18/11/91 pour ce qui concerne les CLIS 1.
Option E : enseignants spécialisés chargés de l'enseignement et de l'aide pédagogique auprès d'enfants en difficulté (écoles maternelle et élémentaire). Les actions de prévention des difficultés que peuvent éprouver les élèves à l'école sont précisées dont les difficultés sont précisées dans le BO n°16 du 16/04/90 (RASED) et dans BO n°3 du 16/l/95 ; circulaires n°91-304 du 18/11/91 (CLIS).
Option F : Enseignants spécialisés chargés de l'enseignement et de l'aide pédagogique auprès des adolescents et de jeunes adultes présentant des difficultés scolaires graves et persistantes auxquelles n'ont pu remédier les actions de prévention, de soutien, d'aide et l'allongement des cycles dont ils ont pu bénéficier; ces difficultés sont précisées dans le BO n°7 du 16/02/89, dans le BO n°20 du 16/05/96 et dans le BO n°26 du 27 juin 96 pour les textes essentiels. Des précisions sont apportées dans les circulaires de juin 1998.
Option G : Enseignants spécialisés chargés de rééducation à dominante psychologique. Cf. BO n° 6 du 16/04/90.

Les missions des maîtres spécialisés

1 - Une **mission d'enseignement spécialisé :** exercer, auprès des élèves handicapés ou en difficulté**,** toutes les missions d'un enseignant, en s'appuyant sur les valeurs fondamentales du système éducatif, en recherchant, pour chacun, les conditions optimales d'accès aux apprentissages scolaires et sociaux, dans des contextes professionnels variés.
2 - Une **mission de prévention et d'intégration :** prévenir les difficultés d'apprentissage et d'adaptation scolaires, promouvoir l'intégration scolaire et l'insertion sociale et professionnelle.
3 - U**ne mission de relation :** échanger et communiquer dans le respect d'une éthique professionnelle.

Ces missions et les compétences afférentes se déclinent dans le champ propre à chaque option. On pourra se référer an numéro hors série du BO du 8 mai 1997.

Formations et AIS

Dominique Barataud

Extraits de Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques - Besançon 1997.

Dans sa conférence, l'auteur s'intéresse à l'identité des maîtres spécialisés et plus particulièrement à ceux des options E, G (maîtres de RASED) et F (maîtres de SEGPA des collèges). C'est ainsi qu'il soulève, d'une part, l'importance de l'indication suivant laquelle un élève sera pris en charge, soit par un maître E, soit par un maître G et, d'autre part les difficultés auxquelles sont confrontés maîtres de SEGPA devant l'écart existant entre les objectifs à atteindre et les compétences apparentes des élèves qui leur sont confiés.
Pour ce qui concerne la formation des maîtres de RASED, à partir d'un travail de Gérard Vergnaud (CNRS), l'article développe plus particulièrement la question toujours actuelle des fondements de l'indication et de son processus entre le signalement et la prise en charge éventuelle d'un élève. Des exemples d'analyse de productions mathématiques d'élèves sont donnés.
Au niveau du collège, l'auteur souligne le défi ressent par les maîtres des SEGPA (Sections d'Enseignement Général Professionnel Adapté) à la lecture des "Référentiels des enseignements généraux de CAP" (BO spécial n°91)par rapport à l'écart existant entre les objectifs visés et les compétences apparentes des élèves.

Pour moi, une des questions centrales de toute pratique de formation dans le champ de l'A.I.S. est celle de l'identité professionnelle (si elle existe) de l'enseignant spécialisé. Or il me semble impossible de traiter cette question globalement. Le fait que ce maître exerce dans le champ de l'A.I.S. ne me semble pas une réponse, car cela suppose qu'il existerait un champ de l'A.I.S. A moins de se satisfaire d'une définition par complémentarité : le champ de l'A.I.S étant ce qui n'est pas du champ ordinaire. Réponse d'autant plus insatisfaisante que le rapport au "champ ordinaire" des professionnels de l'A.I.S. renvoie à des problématiques extrêmement diverses :

- Intervention au sein même de l'école (maître E et maître G).
- Intervention "en marge" maître F (bâtiments séparés, enseignement défini comme du second degré mais les maîtres F ne sont pas de "vrais" profs.). Institutions séparées (E.R.E.A).
- Intervention au sein d'institutions spécialisées à prix de journées, etc.

Bref,
- dans certains cas le professionnel de l'A.I.S. exerce au sein de la structure ordinaire avec la perspective de participer au maintien réussi de l'enfant au sein de la structure (réseau d'aides).
- dans d'autres cas, il exerce dans des structures plus ou moins séparées dans la perspective soit d'une sortie réussie du système scolaire (Niveau V), soit d'un retour au sein du système scolaire, mais dans les structures faisant suite aux siennes.

A l'exception des options A, B, et C, pour lesquelles des compétences professionnelles spécifiques peuvent être clairement identifiées (apprentissage du braille, de la langue des signes, minimum de connaissances médicales et psychologiques pour les I.M.C), il n'est pas simple de définir précisément ce que peut être l'identité professionnelle d'un maître de l'A.I.S.

Ma pratique de formateur étant essentiellement en direction des options E - G et F, c'est autour de ces options que j'interviendrai, et ce plus particulièrement en ce qui concerne notre discipline : les mathématiques.

LES RÉSEAUX D'AIDES

Le sens du dispositif

Il n'est pas inutile de rappeler quelques éléments du texte fondateur (Circulaire, avril 1990)

1) Rôle du maître de la classe

"Il faut rappeler que la première aide à apporter aux élèves relève de leurs propres maîtres, dans le cadre d'une pédagogie différenciée".

2) Maître E et maître G

"Si leurs finalités sont identiques, les aides spécialisées sont mises en œuvre selon deux modalités ".

Et c'est en terme de dominante que les actions sont définies :

- Maître E : aides spécialisées à dominante pédagogique

"Elles ont pour objectif d'améliorer la capacité de l'élève à dépasser les difficultés qu'il éprouve dans ses apprentissages scolaires, à maîtriser ses méthodes et ses techniques de travail, à prendre conscience de ses progrès, en suscitant l'expérience de la réussite."

Quant à l'intervention du maître E, elle “ implique la cohérence entre les caractéristiques psychologiques de l'enfant d'une part, les méthodes mises en œuvre et les finalités de l'enseignement d'autre part. ”

- Maître G : aides spécialisées à dominante rééducative.

" Ces interventions ont pour objectif, d'une part de favoriser l'ajustement progressif des conduites émotionnelles, corporelles et intellectuelles,

l'efficience dans les différents apprentissages et activités proposées par l'école et d'autre part de restaurer chez l'enfant le désir d'apprendre et l'estime de soi.
Ces interventions doivent permettre un engagement actif et personnel de l'enfant dans les différentes situations, la construction ou la reconstitution de ses compétences d'élèves. ”

Les aides spécialisées sont donc à "dominantes". Comment comprendre cette notion ?
Cela suppose, à mon sens, que l'on fasse l'hypothèse qu'au cours de leur développement, certains enfants passent par des phases où des modalités différentes de fonctionnement sont dominantes et nécessitent un accompagnement spécialisé. Il y a quelque chose de l'ordre du prioritaire, mais pas de l'ordre de l'exclusif ni même du préalable (ce qui traduit une rupture par rapport au G.A.P.P).
Il y a (il devrait y avoir) complémentarité entre le travail du maître de la classe et le travail des maîtres spécialisés. Qu'est-ce qui justifie l'existence de professionnels spécialisés ?
Deux hypothèses :
- Les carences et insuffisances des professionnels ordinaires. En admettant l'existence de telles carences et insuffisances, la seule réponse cohérente est celle d'une amélioration de la formation initiale et continuée et non pas celle de la formation de maîtres spécialisés.
- L'existence de problématiques de fonctionnement (psychologiques, cognitives, affectives,...) ne pouvant être totalement prises en charge au sein de la structure ordinaire. Cela implique alors que l'on se donne des outils de repérage, d'analyse et de prise en charge de ces fonctionnements particuliers. C'est sur cette hypothèse que mon travail est fondé.

Remarques

Le premier problème qui surgit est celui des représentations que les stagiaires entrant en formation (et que beaucoup de leurs collègues sur le terrain renforcent) se font de leur futur méfier. Elles sont, le plus souvent, extrêmement caricaturales et opposées.
Maître E : Parce que dans l'intitulé même de leur mission apparaît le mot pédagogie, ils sont très demandeurs de formation dans les divers champs disciplinaires, y compris en mathématiques[1].
Maître G : N'entendant que le mot "rééducatif" de leur mission, ils aspirent au statut de rééducateur[2] et non seulement ne sont pas demandeurs au départ mais

[1] L'absence de formation dans ce champ, ce qui est parfois le cas, est vécue comme un scandale par les stagiaires
[2] Que penser de cette remarque d'un maître G lors d'une journée d'animation: "Monsieur l'Inspecteur, vous nous avez traités d'instituteurs"

sont même surpris qu'une place puisse être réservée aux mathématiques dans leur formation[3].

Corrélativement
Maître E : tendance à vouloir être soit des enseignants modèles, soit de simples répétiteurs de l'enseignant de la classe.
Maître G : tendance à vouloir créer, au sein de l'école, un "espace rééducatif" totalement coupé de l'école et des apprentissages. Ceci est même "théorisé" et va jusqu'à la caricature avec l'interdit de toute trace et de toute sortie des traces hors de l'espace rééducatif (bien sûr ce n'est pas respecté par l'adulte qui ne se prive pas de remplir ses dossiers des dessins de l'enfant et d'en faire étalage dans les diverses réunions de synthèse et de coordination.

Autour de l'indication *(Elle concerne la prise en charge d'un enfant par un maître E ou par un maître G)*

Importance de la question

"Sur quelle base ? Par rapport à quels critères un enfant est-il "pris en charge" par le maître "E" ou le maître "G" ? sont des questions décisives. Entre le signalement et la prise en charge se joue un processus, souvent peu clair : celui de l'indication. Ma conviction est que l'analyse des conduites scolaires d'une part, des productions scolaires d'autre part, pour autant qu'elle sache ce qu'elle étudie et comment elle l'étudie, peut être d'une très grande utilité. En aucun cas elle ne prétend se substituer aux autres approches (observation clinique, bilan psychologique, entretiens, etc.).

J'y consacre un temps important dans les formations que j'assure en m'appuyant sur certaines références théoriques que je me propose de rapidement présenter.

La question est de savoir si, dans les conduites de l'élève face aux tâches scolaires et dans ses productions, des indicateurs peuvent être identifiés favorisant une prise de décision cohérente et fondée. Quels rapports aux savoirs, à la connaissance peuvent être révélés ? En quoi est-il possible de repérer dans ses conduites ou/et dans ses productions scolaires des indicateurs de la nature du rapport aux savoirs qui se joue ?

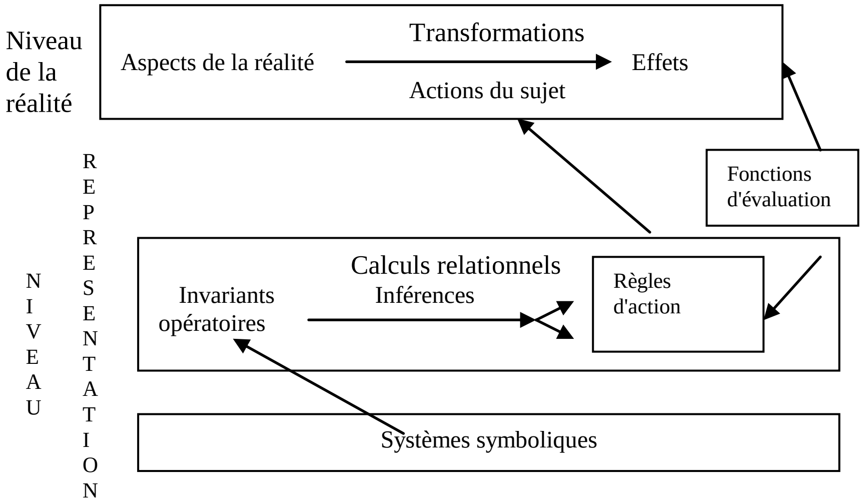
Sur quels fondements ?

La réponse ne saurait se trouver au niveau d'une analyse des performances de l'élève qui ne sauraient en elles-mêmes servir d'indicateurs. Ce que nous interrogerons dans les productions et les conduites de l'élève, c'est ce qu'elles

[3] Certains pensent que c'est une erreur quand, en début d'année, on leur donne leur emploi du temps dans lequel figure une plage obligatoire concernant les mathématiques

éclairent des rapports qu'il noue à la connaissance, des représentations qu'il se fait du sens même des activités proposées, de la place qu'il pense être la sienne. Avec G. Vergnaud (in Encyclopédie de la Pléiade: La psychologie, Paris, 1987, p 822), nous pensons que :
« [...] la représentation n'est pas un épiphénomène, une sorte de traduction a posteriori des rapports du sujet avec le milieu, lesquels seraient régis par des principes et des lois autonomes dans lesquels la représentation n'interviendrait pas. Au contraire la représentation est fonctionnelle. Sa fonction est de permettre, en reflétant certaines propriétés du réel, d'opérer sur les signifiés et les signifiants correspondant à ces propriétés, et de déterminer ainsi des règles qui déterminent la conduite du sujet. Plus précisément, il existe des homomorphismes entre la réalité et la représentation, qui font de celle-ci un moyen de "calculer" des relations, des règles d'action et des prévisions. »

Sur cette base, il propose un modèle général sous la forme du schéma suivant:



Pour nous, les actions du sujet traduisent la mise en chantier dans la réalité des règles d'actions qu'il a inférées par calculs sur les invariants opératoires[4] dont il dispose et qu'il a mobilisés.

Fondements d'une indication E ou G

Une des premières questions à se poser est alors la suivante : y a-t-il adéquation entre les invariants opératoires dont dispose l'enfant et ceux qu'il a mis en chantier par rapport à l'activité proposée ?

On ne peut pas mobiliser des invariants opératoires dont on ne dispose pas. Mais ce n'est pas parce qu'on dispose des invariants opératoires pertinents qu'on les mobilise. Cet écart éventuel entre les invariants construits et mobilisés est déterminant dans l'analyse des rapports que l'enfant établit aux tâches et objets scolaires.

Pour le repérer, il est nécessaire d'introduire une notion complémentaire, celle de fonctions d'évaluation. En effet, ce qui caractérise les conduites humaines c'est la possibilité qui est la nôtre de modifier nos règles d'actions en cours, en fonction des effets des actions engagées. Si toute action suppose un travail de représentation initiale, cela ne signifie pas qu'il y ait analyse exhaustive de la tâche à résoudre avant l'engagement des actions. Et la plupart du temps, nous ajustons nos conduites en fonction des résultats partiels obtenus, et de l'objectif poursuivi. Il y a donc bien nécessité de postuler l'existence, dans l'appareil psychique du sujet, de la capacité à mettre en relation les effets des actions et le

[4] A propos des invariants opératoires: Ils peuvent être de trois sortes :
1) qualitatifs (Formes, couleurs, trous dans un objet etc. ...).
2) logiques:
- inclusion
- disjonction
- union
- intersection

3) structuraux (structure = système stable, cohérent, réversible)
(Exemples classiques : structure additive, structure d'ordre)
Remarque : Piaget a essentiellement étudié, du moins jusque dans les années 60, les invariants opératoires de type logique. Inscrit dans un courant épistémologique qui pensait les mathématiques comme fille de la logique, il a tenté de déduire les invariants structuraux des seuls invariants logiques.

Ainsi :

- la structure additive est déduite de la relation d'union par:
  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$, [A et B étant supposés disjoints] ;
- la structure d'ordre est déduite, elle, de la relation d'inclusion par:
  $A \subset B \Longrightarrow \text{Card}(A) < \text{Card}(B)$.

On sait que cette tentative, en particulier à partir des travaux de Gödel, n'a pu aboutir et que les fondements des mathématiques ne peuvent être entièrement déduits de la logique formelle.
Pour dire les choses en termes imagés, les invariants opératoires peuvent être conçus comme les 'briques' à partir desquelles la pensée se développe. Bien sûr, comme tout matériau, ils doivent être construits et cette construction peut être de plus ou moins bonne qualité.

but poursuivi. C'est cette capacité qu'avec A. Connes nous appelons fonctions d'évaluation[5] et que nous avons introduite dans le schéma de G. Vergnaud.

Deux cas fondamentaux sont à envisager :

1) Le sujet mobilise ses fonctions d'évaluation et modifie ses conduites en fonction des effets de ses actions. Remarquons qu'il est possible que cette modification soit pertinente mais aussi qu'elle ne le soit pas. En effet, il n'y a pas toujours cohérence entre ce que le sujet prévoit comme effet(s) de ses actions et ce qu'elles produisent réellement. Il est fréquent de voir des sujets abandonner des conduites, qui seraient efficaces si elles étaient poursuivies, parce qu'elles ne produisent pas les effets attendus. Ce qui est essentiel, c'est qu'il mobilise bien ses fonctions d'évaluation et que par là-même il s'affirme comme un sujet.

2)L'analyse des conduites et des productions révèle une absence de mobilisation des fonctions d'évaluation, ce qui traduit, à cet instant, dans cette situation, la perte du statut de sujet.

Productions d'enfants

A partir de trois productions d'enfants, nous nous proposons maintenant de montrer ce que signifie cette approche et comment une telle lecture des conduites et productions de l'élève est possible.

Il s'agit d'abord de 2 travaux de même nature réalisés par 2 enfants (Chrystellc et Carole) d'âge normal en début de CEI. Ce choix n'est pas gratuit, car dans les deux cas :

- l'exercice est d'une grande "banalité" pédagogique ;
- la performance scolaire est la même (apparemment très mauvaise) ;
- 14 ans séparent ces 2 travaux (Carole en 1882 et Chrystelle en 1996) ;
- la démarche pédagogique est la même : réalisation individuelle de l'exercice, puis correction au tableau, puis correction individuelle sur la fiche de travail.

Pour l'analyse nous reproduirons les réalisations de ces deux enfants. On trouvera en annexe la photocopie de leur travail.

[5] Cf. A.Connes et J-P Changeux, *Matière à penser, éd.* 0. Jacob.

Situation initiale

Chrystelle

Mettre le signe qui convient :

35	89	58	46
86	48	29	57
56	78	47	84
38	52	67	56

Carole

Trouve le signe convenable (< , > , =)

36	24	50+7	60
71	92	70+2	72
62	47	60+8	62
45	91	90+5	95

Travail

Chrystelle

Mettre le signe qui convient: (< , > , =)

35 > 89	58 < 46
86 < 48	29 > 57
56 > 78	47 > 84
38 < 52	67 < 56

Carole

Trouve le signe convenable (< , > , =)

36 < 24	50+7 > 60
71 > 92	70+2 = 72
62 < 47	60+8 < 62
45 > 91	90+5 = 95

Correction

Chrystelle

Mettre le signe qui convient : (< , > , =)

35 ~~>~~ < 89	58 ~~<~~ < 46
86 ~~<~~ < 48	29 ~~>~~ < 57
56 ~~>~~ < 78	47 ~~>~~ < 84
38 ~~<~~ < 52	67 ~~<~~ < 56

Carole	
Trouve le signe convenable	
36 $\cancel{<}$ > 24	*50*+$\cancel{7}$ $\cancel{>}$60
71 $\cancel{<}$ 92	70+2 = 72
62 $\cancel{<}$ 47	60+8 $\cancel{<}$ > 62
45 $\cancel{>}$ 91	90+5 = 95

Analyse de l'erreur

Grand standard dans ce type d'exercices, les réponses, "toutes fausses", renvoient à notre avis à un mode de fonctionnement classique et très fréquent qui est le suivant :
L'enfant lit ce qui lui est fourni (les 2 nombres)
exemple : 58 puis 46
Il s'interroge sur le dernier
46 est plus petit
Il écrit, là où il y de la place le signe "plus petit"
D'où 58 < 46
Chrystelle n'a jamais pensé que 58 est plus petit que 46, de même que Carole n'a jamais pensé que 36 est plus petit que 24.
Toutes deux maîtrisent parfaitement bien l'ordre des nombres et ne confondent pas les signes < et > (sinon elles n'auraient pas "tout faux"). Ce qui est alors important, c'est d'analyser les réactions et les conduites de ces deux enfants face à la "correction" réalisée au tableau

Chrystelle :

Peut-on mieux imaginer soumission plus immédiate et plus absolue à ce que le “je ” croit être le désir de l'autre que cette correction qui consiste à barrer d'une seul trait tout ce qui a été produit (et qui, répétons-le, avait sens et était "exact") et à écrire 8 fois le signe “ < ” (plus petit).
Quel est le sujet producteur ? Est-ce un sujet portant évaluation de ses conduites ou n'est-ce pas plutôt un sujet totalement soumis à ce qu'il croit être le désir de l'autre ?
Cette disparition de toute mobilisation des fonctions d'évaluation, expression de la soumission à ce que l'enfant croit être le désir de l'autre, traduit la perte du statut de sujet et est, pour nous, un indicateur fondamental d'une indication d'aides spécialisées à dominante rééducative.

Elle est particulièrement repérable dans les temps de correction et se manifeste plus particulièrement dans certains types d'activités[6].

Carole :
Fantastique résistance de Carole qui :

- en première colonne,

- première ligne, accepte de barrer ce qu'elle avait écrit et de corriger;
- seconde ligne, commence à manifester de la colère et insère un double signe (< et =) et devant sa production ;
- troisième et quatrième ligne, accepte de barrer ses productions mais se refuse à écrire du "non-sens" (pour elle).

- en seconde colonne

- première ligne, surcharge son ancien écrit, manière élégante d'en laisser la pertinence ;
- ne touche pas à la seconde et dernière ligne reconnue comme exacte ;
- exprime par 2 traits sa colère sur la troisième ligne et inscrit un signe en partie tourné..

Cette résistance à ce qui pour elle est du non -sens, Carole va la maintenir dans les deux exercices suivants. Et puis elle cède et se soumet. Face à l'exercice :

"Complète la suite
23 - 33 - 43 - ……. "

Elle commence par écrire 53. Toute son expérience du jour l'amène alors à s'auto-corriger. Comme pour avoir bon il faut écrire le contraire de ce que l'on pense, elle surcharge son 53 d'un 43.

23 - 33 - 43 - 43 - 33 - 23

et achève à l'envers puisque tel est ce qu'elle croit être le désir de l'autre.

Pour Chrystelle, comme pour Carole, c'est bien leur statut de sujet qui est en cause. On comprend qu'il puisse devenir nécessaire " de restaurer chez l'enfant le désir d'apprendre et l'estime de soi " par des interventions visant à " permettre un engagement actif et personnel de l'enfant dans les différentes situations, la construction ou la reconstitution de **ses** compétences d'élèves ".
Il est tout à fait remarquable, dans ces cas-là, de voir la grande stabilité des invariants opératoires mobilisés par l'enfant et très souvent leur adéquation (contrairement à ce que laisse apparaître la performance brute) à ceux attendus par le maître.

Séverine ou ces sacrées parenthèses

Toujours en début de CE l :

Situation initiale

---

[6] Dans la génèse des apprentissages, il est possible de repérer certains « temps » particulièrement sensibles. Une authentique formation approfondie en didactique des disciplines est sans doute nécessaire pour permettre ce repérage.

(9 + 3) + 5 =

9 + (3 + 5) =

(8 + 5) + 2 =

8 + (5 + 2) =

Travail

Séverine

(9 + 3) + 5 =

12 + 8 = 20

9 + (3 + 5) =

~~8~~ + 1~~7~~ 8 + 12 = 20

(8 + 5) + 2

13 7 + = 20

8 + (5 + 2)

7 ~~6~~ ~~7~~ + 13 = 24

Analyse de l'erreur

On trouvera en annexe le travail de Séverine ainsi qu'une autre de ses productions prouvant que ce n'est pas le principe même de la réitération qui est en cause mais la signification de ces parenthèses qui n'ont aucun intérêt du point de vue de l'enfant.

Dès la première ligne, un premier processus de régression s'installe. Au lieu de réitérer (prise en compte du premier résultat pour effectuer la seconde addition), Séverine effectue les deux additions 9 + 3 et 3 + 5, d'où le 12 + 8 et l'obtention du résultat 20. Cette erreur très fréquente, Séverine ne la commet pas lorsqu'elle est libre de choisir l'ordre d'effectuation.

La seconde ligne est intéressante car après un passage par le résultat exact (17), sa certitude que cela doit faire pareil, l'amène à se corriger pour retrouver 20. C'est la preuve qu'elle mobilise bien des fonctions d'évaluation. Conjointement, un processus de désorganisation du système d'écriture s'enclenche, (écriture des seuls résultats 8 et 17).

La troisième ligne voit cette désorganisation se renforcer. (Oh ! Miracle, on retrouve ainsi le résultat précédent).

Resurgit un mode d'écriture fréquent chez les élèves de C.P. qui ont tendance à écrire, dans l'ordre, les nombres (13 ; 7), le signe opératoire (+), le signe d'effectuation (=), le résultat (20).

Enfin la quatrième ligne est extraordinaire.

Le doute est total qui la fait hésiter sur le résultat de 5 + 2

Remise en cause du 7, écriture de 6 et retour au 7 (remarquez la disparition de l'arbre à calcul).

8 + *(* 5 + 2) = 7 ~~6~~ 7

La suite se réorganise en + 13

Mais alors se produit une forme ultime de désorganisation qui va consister à ajouter tous les "chiffres" écrits, le statut de 13 comme écriture d'un nombre volant en éclat. D'où le 24 obtenu en faisant 7 + 6 + 7 + 1 + 3.

Ce qui est exemplaire ici, c'est que l'on voit comment la mobilisation de fonctions d'évaluation peut conduire un sujet à engager des processus de régression cognitive (au sens de retour vers des invariants opératoires plus archaïques). Cette instabilité des stratégies de résolution des tâches, cette tendance à la réactivation de conduites antérieures nous semblent caractéristiques de la problématique du maître E.

Et dans ce cas, une aide visant à « améliorer la capacité de l'élève à dépasser les difficultés qu'il éprouve dans ses apprentissages scolaires, à maîtriser ses méthodes et ses techniques de travail, à prendre conscience de ses progrès » se justifie. Elle visera bien à susciter « l'expérience de la réussite ». Plus que toute autre, l'aide spécialisée à dominante pédagogique « *implique la cohérence entre les caractéristiques psychologiques de l'enfant d'une part, les méthodes mises en* œuvre et les finalités de l'enseignement *d'autre part* ».

Le problème de la répétitivité

Soulignons un point fondamental. Dans presque tout cahier d'élève il est possible de repérer, à un moment donné, une production indiquant une perte du statut de sujet ou un processus de régression cognitive. Cela ne signifie pas que l'immense majorité des élèves devrait bénéficier d'une aide. En effet, ce qu'il s'agit d'identifier, c'est le caractère dominant ou non de cette perte ou de ce processus. Il est donc nécessaire de chercher s'il y a ou non répétitivité de cette attitude, celle-ci se manifestant souvent, au moins dans un premier temps, dans un champ didactique particulier, face à certains types de ces tâches.

La lecture des productions des élèves doit donc être prudente, circulaire et méthodique.

Elle ne peut être en elle-même source d'une décision d'indication mais complémentaire aux autres démarches d'investigation. Elle se révèle, quand elle s'appuie sur une méthodologie rigoureuse, d'une très grande puissance.
Dans tous les cas, le diagnostic ne saurait être établi à partir du repérage d'un cas de fonctionnement d'un quelconque type. Et c'est bien en terme de dominante que la question doit être posée.
Si cette courte introduction pouvait convaincre notre lecteur (praticien et formateur) de l'intérêt qu'il y aurait à développer les recherches et les formations prenant en compte cette approche, et ce dans l'intérêt des enfants, notre but serait atteint.

S.E.S ET E.R.E.A[7] : LA SPÉCIFICITÉ MAÎTRE F

Les questions en jeu, pour ces maîtres, me semblent être d'une toute autre nature. Depuis la circulaire fondatrice de février 1989, c'est à un défi d'une ampleur considérable que le maître F est confronté. Comment résoudre l'écart existant entre les objectifs visés et les compétences apparentes des élèves ?

Rappelons quelques unes des caractéristiques de ce texte :
1) Pour la première fois c'est un texte de la D.L.C. (Direction des Lycées et Collèges) qui fixe les objectifs de l'intervention du maître F. L'enseignement en S.E.S et E.R.E.A y est défini comme un enseignement du second degré.
2) L'objectif fixé est celui de l'accès au Niveau V de qualification ou du moins « la mise en position favorable » pour l'obtention d'un tel niveau.

Or, il suffit de jeter un regard sur les programmes de C.A.P. et de B.E.P., en particulier en ce qui concerne les mathématiques, pour être pris de vertige (cf. les articles concernant l'enseignement des mathématiques en S.E.S et E.R.E.A publiés par les deux numéros spéciaux des Cahiers de Beaumont de juin 1990 et juin 1991 et qui ont été diffusés dans l'ensemble des structures concernées).

Pour relever ce défi, un principe est affirmé. Celui de fonder les pratiques pédagogiques sur les référentiels.
Remarquons qu'il faudra attendre un an pour que le B.O. intitulé « Référentiel des enseignements généraux des classes de C.A.P. » (B.O. spécial N°2, janvier 1991) soit publié. J'ai, dans mon article intitulé « Vous avez dit Référentiel » (N° spécial des Cahiers de Beaumont de juin 1991) souligné les difficultés qu'il y a à en comprendre la pertinence. Sans reprendre dans le détail mon analyse, je me contenterai d'en rappeler les principales caractéristiques :

[7] Ce n'est que très progressivement que l' appellation SES (Sections d'Education Spécialisée) sera remplacée par "Section d'Enseignement Général Adapté".

a) Capacités et compétences : la grande confusion.

Présentée souvent comme fondamentale et essentielle dans la démarche référentielle, la différence entre ces deux notions n'est aucunement explicitée dans la partie Mathématiques de ce B.O. Il m'est souvent arrivé de demander à des stagiaires (y compris à des formateurs chevronnés), d'expliciter la différence qu'ils font entre ces deux notions. Il se révèle toujours le même phénomène. Lorsque l'on met en commun ces représentations l'affrontement est radical, les désaccords systématiques et souvent violents. Rien ne permet alors de comprendre en quoi un référentiel se distingue d'un programme. Quant aux fameux livrets de compétences, il suffit de les comparer pour se rendre compte de la confusion dans laquelle nous fonctionnons.

Remarquons de plus que, dans le B.O. il n'existe plus qu'une seule capacité (réaliser) alors que les référentiels expérimentaux étaient organisés sur 4 capacités (analyser - réaliser - critiquer/valider - rendre compte). L'existence de la seule capacité réaliser conduit à des amalgames étonnants, certaines compétences étant indexées de la même manière alors qu'elles ne renvoient pas à la même capacité. Se retrouvent ainsi indexés en choisir (l'une des 3 compétences de la capacité réaliser) des compétences clairement séparées dans les référentiels expérimentaux.

b) Tronc commun : appellation mensongère.

En l'absence d'explication, le lecteur ne peut comprendre cette expression que dans le sens de ce qui est commun à l'ensemble des formations C.A.P. Or, il n'en est rien. Ce tronc commun n'est pas un tronc commun d'enseignement. En clair, ne figure dans le tronc commun que ce qui est commun à l'examen. Or certains C.A.P. n'ont pas de géométrie à l'examen, ce qui ne signifie pas qu'il n'y ait pas d'enseignement de la géométrie dans ces classes. Cela a eu pour conséquence que lorsque s'est imposée l'idée d'un niveau intermédiaire, nombre de structures ont purement et simplement éliminé toute pratique pédagogique concernant la géométrie. Il suffit de regarder ce qui se passe pour le C.F.G. (tant au niveau de l'examen qu'au niveau des livrets de compétences correspondants) pour réaliser l'ampleur de ce que je n'hésite pas à qualifier de dérive dramatique. Car s'il est un champ d'activités mathématiques essentiel à la mise en place d'une pédagogie adaptée (aux objectifs poursuivis et à la réalité du fonctionnement cognitif du public concerné), c'est bien celui de la géométrie.

Choisir, traiter, exécuter: quelle hiérarchie ?

Trois types de compétences apparaissent dans la capacité "réaliser" **:** choisir, traiter, exécuter.

Les référentiels expérimentaux insistaient sur l'importance de les hiérarchiser ainsi. Le B.O. ne dit rien de cette question, mais force est de constater qu'il les présente dans l'ordre inverse exécuter, traiter, choisir.

Niveaux I et II, des niveaux qui n'en sont pas.

L'indexation des compétences en niveau I et II ne résiste pas à une analyse sérieuse. Ils n'étaient pas, du reste, à l'origine des indications de progression pédagogique. C'est pourtant ainsi que très souvent ils ont été interprétés.

C'est ainsi que, par glissements successifs, on en arrive à définir un niveau V bis, voire un niveau VI, basé sur les seules compétences du tronc commun indexées en 1.

A ceci il faut ajouter le problème du niveau de connaissances des enseignants, certains points du programme de mathématiques du niveau V posant de sérieuses difficultés à nombre d'enseignante fonction affine, Thalès, trigonométrie.

Fondements de la formation

Elle s'organise autour des axes suivants :

- Travail sur les contenus permettant une (ré)appropriation de contenus de connaissances indispensables par rapport aux objectifs visés. Ce travail est l'occasion d'une mise en pratique des principes pédagogiques constitutifs d'une pédagogie de l'abstraction et de l'appropriation.

- Clarification autour des notions de capacités et de compétences. Je rejoins là l'approche définie par les I.O. des classes de 4ème et 3ème de technologie qui précisent :

« Les capacités constituent le but à long terme de la formation, les axes de développement de l'élève ; elles ne sont pas en elles-mêmes objet d'évaluation directe mais constituent le principe organisateur et régulateur des situations d'apprentissage ... »

« Les compétences se manifestent par les comportements observables et sont évaluables par un ensemble de performances accomplies par l'élève : comme telles, elles constituent des objectifs de formation » (*Instructions Officielles des 4ème et 3ème technologiques, arrêté du 9 Mars 1990)*

- Instrumentation : une part importante de notre travail a consisté à développer des outils (papier crayon, informatique etc.) caractérisés par la volonté de traduire dans le champ mathématique les approches et démarches issues du champ des remédiations cognitives. Nous sommes en effet convaincus que les outils dits de remédiation cognitive (P.E.1, A.R.L. etc.) ont trouvé leurs limites dans ce que je qualifie volontiers de l'illusion du transfert. C'est au sein même de l'activité disciplinaire qu'il faut tenter d'appliquer les principes de la remédiation cognitive (place et rôle de la métacognition, de la prise de conscience, des explicitations langagières).

Cela suppose des démarches et des outils dont l'appropriation demande du temps...

ANNEXE

CAROLE

Les nombres

J'écris en lettres ou en chiffres

quatre-vingt treize 93

trente-huit 38

soixante-neuf ~~79~~ 69

soixante ~~cinq~~ quinze 75

Trouve le signe convenable (>, <, =)

36 > 24 mal

71 < 92

62 > 47

45 < 91

50 + 7 < 60

70 + 2 = 72

60 + 8 > 62

90 + 5 = 95

Trouve un nombre qui convient

37 > ~~40~~ 8

59 < ~~9~~ 69 très mal

61 > ~~78~~ 71 corrige.

78 < ~~1~~ 88

43 < 50 < 60

70 < ~~70~~ 72 < 80

69 < ~~80~~ 71

85 < ~~88~~ 80 < 90

Classe du plus grand au plus petit.

~~43~~ 78 96 83 18 52 68 23

~~23 - 43 - 52 - 68 - 78 - 83 - 96~~

18 - 23 - 43 - 52 - 96 - 83 - 78 - 68 à refaire

Complète la suite

23 - 33 - 43 - ~~63 - 73 - 93~~

53 - 69 - 73 - 83 - 93

CHRYSTELLE

① Mets le signe qui convient (<, =, >)

a/ 36	<	24	34	< >	43
19	< >	21	71	>	92
62	<	47	58	< >	85
45	< >	91	93	<	73

SÉVERINE

0000 0000 $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 4$

$20 + 20 + 10 + 4$

$40 + 10 + 4$

$50 + 4$

$\boxed{50 + 4 = 54}$

00000 00000 $10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 5$

$20 + 20 + 20 + 10 + 5$

$40 + 20 + 10 + 5$

$60 + 15$

$\boxed{60 + 15 = 75}$

Nul

$(9 + 3) + 5 =$

$12 + 8 = 20$

$9 + (3 + 5) =$

$8\ 17\ 8 + 12 = 20$

$(8 + 5) + 2 =$

$13\ 7 = 20$

$8 + (5 + 2) =$

$7\ 6\ 7 + 13 = 24$

La Rééducation mathématique à travers une étude de cas

Christiane Pezé

Extrait de Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques - Rennes 1996.

Dans le cadre des Réseaux d' Aides Spécialisées aux Elèves en Difficulté (RASED), et des deux types de dispositifs (aides à dominante pédagogique et aides à dominante rééducative), l'auteur se pose la question de savoir si l'activité mathématique peut être utilisée comme "médiateur" de la rééducation sans pour autant dénaturer la spécificité de celle-ci.
Après avoir indiqué ce qu'elle entend par rééducation mathématique, l'auteur en donne un exemple sous forme de chronique de l'aide spécialisée apportée à une enfant de CE1 relevant d'un RASED.
Un des intérêts de cette conférence est de montrer que, contrairement à certaines idées reçues, l'activité mathématique n'est pas un interdit dans le travail du rééducateur (option G de l'AIS).

Je vais vous présenter un travail de réflexion sur la rééducation mathématique que j'essaie de formaliser depuis 1994 par une recherche-action, que j'effectue au sein du COREM à l'école Jules Michelet de Talence, dont le directeur est Guy Brousseau et la responsable scientifique M. H. Salin.
Après avoir exposé le cadre de cette recherche je présenterai l'observation clinique d'une enfant de CE 1 qui a été suivie en rééducation au cours de l'année 1994.

1. Présentation du cadre de recherche

Objectifs

Les motivations qui m'ont conduite à engager ce travail concernent trois domaines :

- Le premier est celui du savoir mathématique.
Il s'agit de mieux repérer, analyser, comprendre ce qui est en jeu dans la difficulté d'accès à ce savoir et de rechercher s'il est possible de créer des situations de réappropriation de ce savoir dans le contexte particulier de la relation duelle adulte / enfant. Ceci en référence à la théorie des situations didactiques élaborée par Guy Brousseau.

- **Le deuxième domaine concerne la formation des enseignants** et plus particulièrement celle des stagiaires Département pour l'Adaptation l'Intégration Scolaire. Mon objectif étant de créer des documents théoriques et pratiques, sous une forme audio-visuelle, pour mieux définir le cadre et le contenu des aides spécialisées en mathématique.

- **Le troisième domaine est celui de la rééducation**.
La question que je me pose à c sujet est la suivante :
“ Est-ce qu'il est possible définir un cadre de la rééducation mathématique en référence au concept de rééducation en vigueur dans l'école ? ”

Cette dernière question a pour origine la différenciation des aides spécialisées dans les RASED (Réseau d'Aides Spécialisée aux Elèves en Difficulté). Dans ce dispositif il existe deux types d'aides spécialisées :
a) **L'Aide spécialisée à dominante pédagogique** qui se pratique avec de groupes d'enfants et qui est destinée restaurer les compétences cognitives et méthodologiques sous-jacentes aux apprentissages.
b) **L'Aide spécialisée à dominante rééducative, la Rééducation**, qui se pratique majoritairement en relation duelle, et qui se centre sur la restauration du désir d'apprendre et de l'estime de soi, l'ajustement des conduites émotionnelles et intellectuelles pour permettre l'investissement du savoir.
Ces deux modalités de l'aide articulent les deux pôles "pédagogie" et " psychologie" mais elles ne leur attribuent pas la même importance.

Ainsi les activités cognitives sont utilisées en Aide spécialisée à Dominante Pédagogique et sont la plupart du temps exclues du champ de la rééducation au profit de médiations éloignées des activités scolaires. La stratégie utilisée en rééducation est celle du détour (jeux sensori-moteurs, jeux à règles, jeu symbolique; marionnettes, dessin, pâte à modeler, etc ...). On n'affronte pas directement la difficulté scolaire qui est considérée comme un symptôme.

Ce modèle de réponse aux difficultés d'apprentissage est pertinent et opérant pour certains cas. Il est vrai que certains enfants ne peuvent, du moins dans un premier temps, supporter toute sollicitation ou proposition concernant leur difficulté scolaire sans pour autant nécessiter une approche psychothérapeutique. Il est vrai aussi que d'autres enfants relèvent clairement de l'approche pédagogique en groupe que propose l'aide spécialisée à dominante pédagogique. Mais pour d'autres enfants il paraît difficile et réducteur d'appliquer ce modèle.

La confrontation aux élèves en difficulté nous révèle que bien souvent l'origine et la nature de leur problématique scolaire est globale, que les aspects

cognitifs et affectifs sont imbriqués de telle manière que l'on ne peut déterminer une prépondérance étiologique de façon manifeste.
Ainsi ces enfants ont besoin d'être aidés dans une prise en compte associée des dimensions affective et cognitive de leurs difficultés.
La rééducation individuelle me semble alors l'indication d'aide la mieux appropriée car seule la relation duelle peut permettre d'assurer l'étayage affectif et cognitif au plus près des besoins de l'enfant.

Ceci me paraît d'autant plus vrai dans le domaine des difficultés en mathématique. La nature même de cette connaissance et de l'apprentissage qui y conduit, c'est à dire construire des concepts en résolvant des problèmes, met en cause l'image de soi plus fortement que les autres apprentissages, car la réalité de la réussite ou de l'échec apparaît plus nettement. Ainsi la réussite renforce positivement sa propre image alors que l'échec peut la remettre en question, surtout quand il intervient sur une estime de soi détaillante.
De ce fait, pour certains enfants, les facteurs affectifs et cognitifs de leurs difficultés en mathématique sont interdépendants.

Il me semble alors que le modèle de rééducation habituel : restaurer un rapport actif au savoir par un travail d'élaboration psychique indépendant de l'activité mathématique est insuffisant à la résolution complète des difficultés.
Aussi je pose comme hypothèses :

- qu'il est pertinent d'utiliser l'activité mathématique comme médiateur de la rééducation sans dénaturer la spécificité de cette dernière.
- que l'utilisation de ce médiateur cognitif - sous certaines conditions - n'entraîne pas automatiquement l'évacuation de la dimension affective du sujet.
- que cette approche rééducative peut avoir un effet de restauration narcissique grâce à la dialectique qui s'instaure entre une confrontation de plus en plus positive avec le savoir mathématique et le sentiment de dépassement de soi qui en découle.

Dispositif

Cette recherche - action s'effectue au COREM où je bénéficie de tout le dispositif de recherche et d'observation qui est mis en place. Elle s'actualise grâce à la collaboration de deux personnes : Manette POIRSON, psychologue scolaire et Denise GRESSARD, directrice de l'Ecole Elémentaire Jules Michelet, toutes deux chargées de recherche au COREM.
Toutes les séances d'observation et de rééducation que je conduis sont enregistrées en vidéo ce qui permet de recueillir un important corpus pour l'analyser ensuite.

Rééducation mathématique : éléments de définition

Objectifs

<u>Objectif général</u>

- Restaurer un rapport positif au savoir mathématique
- Permettre la construction ou la reconstruction des concepts mathématiques en créant un contexte didactique et un étayage relationnel appropriés.

<u>Objectifs sous-jacents:</u>

1- Permettre à l'enfant de modifier sa conception du savoir mathématique et de l'apprentissage qui y conduit:

- rendre cet objet désirable
- faire découvrir le plaisir du fonctionnement intellectuel
- faire expérimenter à l'enfant que ce savoir se construit

2- Aider l'enfant à conquérir les attitudes nécessaires à la construction du savoir mathématique :

- s'engager activement dans un processus de recherche
- établir un rapport objectif et distancié avec ce savoir

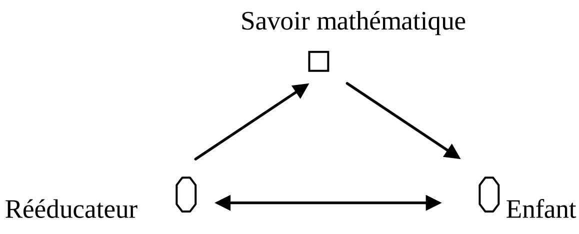
3- Aider l'enfant à assumer les avatars du processus de construction

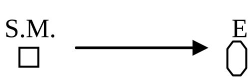
- ébranlement des certitudes
- perte de la " toute puissance " face aux erreurs et aux échecs.

Cadre

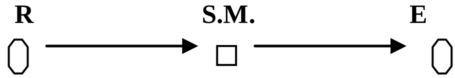
Pour atteindre ces objectifs le rééducateur devra créer un espace transitionnel dans lequel une rencontre positive avec le savoir mathématique pourra progressivement se réaliser.

Le schéma suivant permet de représenter le cadre de ce travail rééducatif :

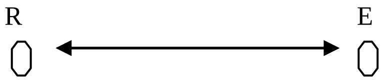




Cette partie du schéma symbolise la relation entre le savoir mathématique et l'enfant et représente l'objectif final de la rééducation mathématique. Cette relation devra se tisser progressivement au cours de la rééducation pour finir par devenir positive et autonome.



Cette partie du schéma symbolise le travail que le rééducateur devra réaliser pour permettre à l'enfant de modifier sa représentation du savoir mathématique et de l'apprentissage qui y conduit et de conquérir les attitudes nécessaires à cette construction (cf. objectifs sous-jacents 1- et 2-).



Cette partie du schéma symbolise la relation intersubjective entre 1"adulte et l'enfant sur laquelle va prendre appui le processus rééducatif. Cet étayage relationnel permettra notamment à l'enfant d'assumer les avatars du processus de reconstruction (cf. objectif sous-jacent (1)).

Chacune de ces relations est bien évidemment en interaction avec les autres. Leur séparation schématique n'a pour but que d'éclairer le propos.
Cet espace transitionnel de la rééducation que j'essaie de créer s'inspire de plusieurs références :

- La théorie psychanalytique pour analyser les composantes de la relation intersubjective et ses effets dans le processus rééducatif.
- Les théories cognitives du développement avec Piaget et Vygotsky.

Même si Piaget et Vygotsky ont des approches divergentes du développement et de l'apprentissage, certains aspects me paraissent pouvoir être complémentaires pour la rééducation mathématique.

Le rôle du rééducateur est double**:**

- il doit construire les situations favorables à l'émergence des conflits cognitifs, en s'appuyant sur la théorie des situations didactiques pour que l'enfant reconstruise les concepts mathématiques ;
- mais il doit aussi apporter l'étayage nécessaire à l'enfant, l'aider à réussir, l'accompagner dans ses tentatives de résolution, pour que l'enfant puisse avoir ensuite un rapport autonome avec le savoir**.**

Ainsi, le dialogue avec les situations et l'interaction avec l'adulte me semblent revêtir une égale importance pour permettre à l'enfant de dépasser ses difficultés.
Tout le problème consiste à pouvoir équilibrer et ajuster ces deux aspects c'est à dire : permettre que le conflit cognitif soit suffisant pour que l'enfant

réorganise ses connaissances à partir de son expérience, mais apporter aussi l'interaction de tutelle chaque fois que cela semble nécessaire.

Nous avons pu observer au cours du travail avec Magali les effets positifs ou négatifs de cet ajustement plus ou moins réussi.

Ces situations proposées, si elles s'inspirent de la théorie des situations didactiques, ne sont pas des situations d'apprentissage telles quelles peuvent être présentées en classe.
D'abord parce que les partenaires sont différents et que l'on ne peut s'appuyer sur le conflit socio-cognitif. Ensuite parce que la situation est davantage centrée sur la remise en œuvre d'un rapport efficient avec le savoir que sur la reconstruction d'un concept.

Ainsi il n'y a pas de progression préétablie mais un réajustement constant du contenu des situations en fonction des réactions de l'enfant, la visée étant de permettre à 1'enfant de réorganiser ses connaissances antérieures à la lumière de ses nouvelles découvertes.

L'étayage de l'adulte n'est pas seulement d'ordre cognitif, c'est un étayage relationnel qui s'adresse à la globalité du sujet
C'est grâce à la relation inter subjective entre l'adulte et l'enfant que le processus rééducatif pourra se dérouler.

Pour cela le rééducateur doit avoir une attitude d'acceptation positive de l'enfant et de ses difficultés tout en ayant confiance en ses possibilités de les dépasser.
" Accepter l'enfant tel qu'il est et lui faire découvrir qu'il peut être autre sans abandonner de lui-même " (R. Diakine).

Le rééducateur doit établir un espace de sécurité pour que l'enfant puisse s'engager avec confiance dans le cheminement difficile d'accès au savoir : *" ici on peut essayer, tâtonner, se risquer, se tromper, échouer sans danger ".*
Pour cela il doit être un référent stable et fiable aussi bien sur le plan cognitif qu'affectif. Il doit veiller à garder une implication distanciée, c'est à dire faire attention à ne pas se sentir atteint personnellement par les échecs ou les réactions émotionnelles de 1''enfant. Il doit également respecter le rythme d'évolution de l'enfant et ne pas avoir une volonté trop vive de changement.
Il doit aussi savoir s'effacer et favoriser la prise d'autonomie quand l'enfant peut assumer tout seul les situations.
Ceci est valable pour toute approche rééducative.

Concernant la rééducation mathématique il y a un autre aspect très important.

Pour rendre désirable à l'enfant le savoir mathématique il faut que le rééducateur éprouve lui-même du désir pour cet objet, c'est à dire qu'il ait clarifié, si nécessaire, son propre rapport avec les mathématiques.
Il doit montrer par son attitude que l'on peut ressentir de l'intérêt et du plaisir dans cette activité intellectuelle, proposer en quelque sorte un support identificatoire à l'enfant.

Il faut également rendre possible et valoriser ces moments-clé où l'enfant découvre qu'il peut conquérir ce savoir et passer d'un état de soumission à un état de pouvoir. Il faut alors pouvoir éprouver ce sentiment de jubilation avec l'enfant quand il accède à cette découverte.

2. Étude de cas

Présentation générale de la problématique de l'enfant

Magali est une enfant de CE1 qui a 7 ans et demi quand nous commençons à travailler avec elle en janvier 1994.
L'approche des difficultés de Magali a été effectuée à partir des observations des maîtres de la classe, du bilan psychologique et du bilan logico-mathématique. Ce dernier s'est déroulé sur quatre séances qui ont été enregistrées, et dont nous observerons deux séquences.
L'aspect dominant de la problématique de Magali consiste en un contraste important entre des potentialités intellectuelles qui s'actualisent parfois de manière remarquable et des performances très moyennes voire insuffisantes notamment dans la construction de la numération et la résolution des problèmes, alors que la pédagogie pratiquée dans l'école est très favorable à la construction du savoir mathématique.

Ses difficultés dans le domaine mathématique ne semblent pas liées à un problème de désir d'apprendre, d'investissement des apprentissages scolaires.
En effet, bien que timide, émotive et réservée sur le plan verbal elle va à l'école avec plaisir, est bien intégrée dans le groupe classe et intéressée par les activités scolaires à l'égard desquelles elle est attentive et concentrée.

Les difficultés semblent liées à une estime de soi défaillante liée à une relation précoce insatisfaisante, qui non seulement inhibe l'action et la parole mais empêche l'enfant d'établir un rapport distancié et objectif avec les situations d'appropriation dans le domaine mathématique.
Ceci se révèle tout au long de l'observation et dans le bilan psychologique ou l'investisement du réel est parfois défensif avec un recours à l'imaginaire.
Ainsi Magali a construit des savoirs hétérogènes dans lesquels des rituels qui n'ont pas de sens cohabitent avec des acquisitions souvent fragiles.

Notre souci était d'observer les procédures de résolution mises en œuvre pour mieux analyser ses difficultés à construire la numération.

Analyse des difficultés dans la construction de la numération

Présentation de la fiche *(voir annexe 1)*
Il s'agit d'un exercice similaire à celui effectué au cours de l'évaluation collective en classe et auquel elle avait échoué.

Analyse de la séance

- **Dénombrement de la collection 113**

L'organisation de la collection en paquets de dix qui permet et induit le comptage rapide de dix en dix n'est pas utilisée de manière opératoire.
Elle entoure rituellement chaque paquet de dix et compte les ronds un à un ce qui est source d'erreur: *114 au lieu de 113.* Elle entoure également les trois unités. Ainsi, entourer les paquets de dix est devenu un rituel vidé de sens.

- **Dessin des collections 102 et 78**

Elle est capable de lire la symbolisation de l'écriture usuelle : " *102 : 10 paquets de 10 et 2* ", et d'effectuer le dessin des collections en utilisant ce modèle. Cependant la prégnance du caractère formel de cette procédure au détriment du sens queue recouvre se révèle au cours de la phase d'analyse de l'erreur et de l'écriture additive des nombres.

- **Essai d'analyse de l'erreur: 114** au **lieu de 113**

- Elle ne peut pas identifier l'erreur : elle n'établit aucun lien entre le dessin des trois unités et l'écriture usuelle.
- Elle ne peut appliquer spontanément le comptage de dix en dix dont elle connaît la comptine jusqu'à cent, là aussi de manière formelle : elle a des connaissances sur les nombres mais elle ne peut les utiliser en tant qu'outils de résolution, et à deux reprises elle comptera les unités comme un paquet de dix.
- Sa difficulté à appréhender le nombre de dizaines dans la collection entraîne une impossibilité à effacer le lien avec l'écriture usuelle et elle n'est plus capable de dire combien il y a de paquets de 10 dans 103.
Se révèle aussi une méconnaissance des nombres au-delà de cent :
  - dans le comptage de dix en dix elle dit " 200 " au lieu de " 1 10 ",
  - pour écrire le résultat de " 110 + 3 " elle écrit " 103 "?

- **Écriture additive des nombres:**

113 : "11 + 3 = "
102 : "10 + 2= "

Usage rituel des symboles elle ajoute “ = ” aussi à “ 70 + 20 + 8 ”
Ceci révèle et confirme que le sens de la numération et de sa symbolisation par l'écriture usuelle n'est pas construit et que les énonciations telles que “ *102 c'est 10 paquets de 10 et 2* ” ne sont que formelles.
Ainsi un des objectifs de la rééducation sera de favoriser la reconstruction de la numération.

- Il faut également prendre en compte son attitude face aux difficultés qu’elle rencontre dans la phase d'essai d'analyse de l'erreur.

Sa difficulté à mettre du sens sur le problème posé entraîne une perte d'autonomie et une incapacité à examiner la situation.
Son regard se rive au visage de l'adulte au lieu de regarder la fiche comme si. elle essayait soit de décrypter ses attentes, soit de décrypter la solution.

Analyse du rapport au savoir à partir d'une situation-problème

Présentation de la situation

Il s'agit d'une situation destinée à repérer et analyser les démarches de résolution d'un problème dans laquelle les aspects numériques, situation additive avec des petits nombres, ne constituent pas un obstacle. Elle comprend trois phases :

1ère Phase. Classification de blocs logiques
Cette phase constitue un préalable à la situation-problème proprement dite destinée à familiariser l'enfant avec le matériel logique utilisé en suite.
Blocs à classer (3 critères):
Forme : Rond, triangle, carré
Couleur : Bleu, Rouge, jaune
Taille : grand, petit

2ème Phase. Constitution d'une collection de blocs logiques à partir de la lecture du tableau.
Il s'agit de mettre dans une boîte les blocs logiques en fonction des données du tableau.
Trois objectifs :

- Constituer la collection de référence qui permettra d'assurer le feedback de la situation à la phase 3.
- Observer les capacités de lecture d'une représentation symbolique.
- Favoriser l'accès à la phase 3 par les relations établies entre la représentation symbolique et le matériel concret.

3ème Phase : Calcul du nombre de blocs logiques à partir du tableau en fonction d'un critère donné.
La vérification du résultat du calcul s'effectue avec le matériel dans la boîte.

Analyse des deux premières phases

Au cours de la phase un, la réalisation des classifications a été laborieuse. Magali a eu des difficultés à s'approprier la consigne “ *Mets ensemble ceux qui vont bien ensemble* ” car elle a assimilé cette opération de classification à celle déjà réalisée au cours d'une autre épreuve (analyse catégorielle de l'EDEI). Ce transfert est compréhensible et même positif ; le problème c'est la grande difficulté de décentration qu'elle manifeste par rapport à cette assimilation et qui l'empêche d'envisager la situation sous un autre angle. De ce fait elle ne pourra réaliser les classifications en fonction des différents critères que sous amorce.

La faible performance à cette épreuve ne correspond pas à des difficultés logiques. Elle est le résultat de la déstabilisation provoquée par la nécessité d'appréhender la situation non pas en fonction de son attente et de son désir mais en fonction d'une réalité extérieure. Comme si le désappointement, la frustration qu'elle ressent à ne pas pouvoir utiliser son modèle entravait toute démarche cognitive.

Au cours de la phase deux elle a des difficultés, au départ, à interpréter la symbolisation des blocs logiques.

Elle introduit un autre critère taille : les moyens, pourtant absents des classifications qu'elle vient de réaliser et essaie de faire correspondre le matériel concret avec la symbolisation en posant un rond sur son symbole : elle a des difficultés à envisager la symbolisation de l'objet indépendamment de son exacte représentation.

Elle parvient cependant au bout de l'activité avec persévérance malgré l'effort de concentration que cela semble lui demander.

Analyse de la troisième phase

- **Transformation de la consigne due à la difficulté à établir un rapport distancié et objectif avec la réalité**

Magali compte les carrés bleus au lieu de compter les carrés et elle écrit ensuite “ bleu ” sur sa feuille. Après avoir compté les rouges, elle s'attend à compter les bleus, c'est-à-dire à rester sur le même critère. Elle essaie cependant d'intégrer la consigne “ compte les carrés ” en redisant pour elle-même “ carrés ”. Le conflit entre son attente et la réalité l'amène à élaborer une consigne intermédiaire “ compter les carrés bleus ”. Ce qu'elle fait effectivement (2+1=3). Mais lorsqu'elle écrit “bleu” sur la feuille au lieu de “ carré ” ou “ carré bleu ”, elle révèle à quel point il lui est difficile de se décentrer de son désir initial de compter les bleus.

La charge cognitive et affective qu'entraîne cette situation est telle qu'elle n'est plus disponible pour percevoir tout le sens de mon discours quand j'essaie de rétablir la consigne; ainsi elle persiste dans son projet en écrivant “ 3 ” à côté de “ bleu ”. Cependant elle est déstabilisée par mon intervention et perçoit qu'il y a un problème ; devant son impossibilité à le résoudre, elle régresse sur le sens de la symbolisation du tableau en comptant non plus les nombres mais les symboles.

A ce moment là, je suis moi-même déstabilisée par cette confusion à laquelle je contribue en lui disant *“ Alors tu dis qu'il y a 3 carrés... ”*
Cette difficulté de décentration par rapport à ses projections est telle qu'au moment de la vérification elle ne peut même plus envisager la réalité concrète : elle ne “ voit ” que 2 carrés (bleus). Il me paraît important de souligner ici une double nécessité pour aider Magali à dépasser ses difficultés :

- le feed-back de la situation
- l'accompagnement individuel de l'adulte

Le seul feed-back de la situation, ou le seul étayage de l'adulte ne peuvent permettre de résoudre le conflit. C'est la conjonction des deux qui va favoriser l'émergence progressive du sens.

Au moment de la correction sur la feuille nous voyons encore à l'œuvre la prégnance de l'association qu'elle a effectuée entre les 2 consignes. Elle semble faire le raisonnement suivant : *“ puisque “ compter les bleus ” était erroné c'est donc que “ compter les rouges ” était erroné aussi.* Ceci confirme les hypothèses interprétatives de son comportement au cours de cette activité. Magali ne peut intégrer l'information queue reçoit car elle ne correspond pas à ses attentes, à ses désirs, à sa propre représentation de la situation.

Ce n'est pas un problème de compréhension au sens commun du terme. Il s'agit d'une difficulté de décentration par rapport à ses projections subjectives qui l'empêche d'établir un rapport distancié et objectif avec la situation mathématique.

Cette attitude est peut-être à mettre en relation avec les mécanismes de défense qu'elle a mise en œuvre pour protéger une image de soi dévalorisée : c'est-à-dire transformer la réalité source de déception en y projetant ses propres désirs et pensées.

- **Au cours de la 3ème séquence " compter les bleus " on assiste à l'émergence de la distanciation.**

Elle commence d'abord à effectuer le calcul puis elle demande confirmation de la consigne *" Combien y a de bleus ?* "
Cela témoigne du fait qu'elle a perçu que son interprétation pouvait être en décalage avec la réalité de la consigne et qu'il est nécessaire qu'il y ait adéquation entre les deux.

- ***Son comportement au cours de la 4ème séance : " compter les ronds",*** consigne qu'elle se donne elle-même, révèle l'hypersensibilité au moindre obstacle.

Elle commence à compter les 2 grands ronds bleus mais elle est perturbée par le " 0 " (zéro) des grands ronds rouges. Devant cet obstacle conjugué à ses difficultés de calcul elle abandonne l'action de comptage et régresse en dénombrant les symboles.
Au cours de la vérification elle a encore des difficultés à appréhender la réalité concrète en dénombrant 5 ronds au lieu de 7.
Le feed-back de la situation et la réflexion qu'il suscite lui permet de prendre conscience de son erreur et de l'expliciter.
La dernière séquence est réussie sans problème.
Malgré les difficultés que Magali a rencontrées au cours de cette activité et le malaise qu'elles ont pu provoquer, il faut souligner l'investissement, la persévérance et la concentration dont elle fait preuve jusqu'au bout.

En conclusion, au cours de cette activité nous voyons à l'œuvre de façon manifeste la problématique dominante de Magali qui consiste en une difficulté de décentration par rapport à ses projections subjectives qui l'empêche d'établir un rapport distancié et objectif avec les situations problèmes et donc de les résoudre. Ce comportement sera observé à plusieurs reprises au cours des autres séquences d'observation. Nous constaterons également des difficultés d'organisation des actions qu'elle ne peut planifier ainsi qu'une hypersensibilité aux perturbations ou aux obstacles

3. Différentes phases de l'aide

Projet et cadre rééducatif

En s'appuyant sur son désir de dépasser ses difficultés et sur son investissement dans la relation duelle, il s'agira d'aider Magali à appréhender la réalité du savoir mathématique en lui faisant expérimenter progressivement que la conquête de ce savoir peut être source de satisfaction.

Parmi les objectifs de la rééducation déjà énoncés ceux qui paraissent les plus importants à atteindre pour Magali sont les suivants :

- Etablir un rapport objectif et distancié avec le savoir mathématique.
- Faire découvrir le plaisir du fonctionnement intellectuel.

Concernant les concepts mathématiques il s'agira de l'aider à reconstruire la numération.
Chaque séance de rééducation a lieu une fois par semaine et se déroule en trois temps :

1) Une séance - jeu où l'adulte et l'enfant ont un rôle équivalent. Il s'agit d'un jeu de cartes qui fait intervenir le hasard et la stratégie. De ce fait, la partie peut être gagnée aussi bien par 1'enfant que par l'adulte.

2) L'activité mathématique à partir d'une situation proposée par l'adulte.

3) Un dessin à deux. Cette dernière séance permet d'instaurer un espace de rencontre, d'échanges entre l'adulte et l'enfant autre que les mathématiques. Elle favorise l'installation de la relation inter - subjective et permet à l'enfant d'exprimer son imaginaire et de soulager les tensions éventuelles.

Cette séance, ainsi que le jeu initial ont souvent été indicateurs significatifs de l'évolution de l'enfant.
Au fur et à mesure de cette évolution Magali manifestera de plus en plus d'initiative et de créativité, surtout dans le dessin et apportera des commentaires verbaux complètement absents au début

Je vais présenter l'analyse de quatre séances de rééducation consécutives, situées en début de rééducation, car elles apparaissent comme les plus significatives du processus de changement de Magali aussi bien dans son rapport au savoir que dans la reconstruction de la numération.
Nous avons travaillé au cours de ces séances à partir d'une situation sur la numération dont voici la présentation.

Présentation de la situation "Numération"

Objectif

- Reconstruire la numération décimale
- Donner du sens à la symbolisation de numération, c'est-à-dire à l'écriture usuelle

Conception de la situation

- Matériel
  - 5 boites

- Dans chaque boîte, un certain nombre d'enveloppes (de 7 à 15)
- Dans chaque enveloppe un certain nombre de jetons.
- Pour une même boîte le nombre de jetons de chaque enveloppe est identique.
- Rien n'est écrit ni sur les enveloppes ni sur les boites.

<u>Exemple:</u>

Nombre d'enveloppes dans les boites

9 E		12 E		11 E		7 E		15 E
1		3		5		8		10

Nombre de jetons dans les enveloppes

- L'enfant doit constituer une collection de jetons dont le nombre est donné (désignation écrite et orale) en prenant les enveloppes nécessaires.

La vérification se fait par le dénombrement de la collection constituée.

- Les boîtes symbolisent le nombre qui préside au regroupement.

Outre les dizaines et les unités nous avons mis d'autres bases de regroupement pour que l'enfant redécouvre progressivement la spécificité de la numération décimale.
L'objectif final de la situation étant que l'enfant supprime les autres boîtes : la solution optimale pour réussir, quel que soit le nombre demandé, est de se servir des dizaines et des unités.

- Les enveloppes symbolisent le regroupement.

Nous avons également mis les unités dans une enveloppe pour symboliser la classe des unités au même titre que la classe des dizaines et ultérieurement celle des centaines. L'ensemble du dispositif a pour but de favoriser les relations d'équivalence entre les différents niveaux de la numération.

- Variables didactiques

On fera varier, dans la progression de la situation :
- les nombres qui président au regroupement pour chaque boîte
- le nombre d'enveloppes dans chaque boîte
- le nombre de jetons que l'on demande.

Ceci en fonction des obstacles que l'on jugera utile de créer pour favoriser la construction de la numération par l'enfant.

Analyse des séances

Analyse de la séance 2

Description de la situation

Nombre d'enveloppes dans les boites

15 E	7 E	11 E	12 E	9 E
10	8	5	3	1

Nombre de jetons dans les enveloppes

Nombres demandés : 74, 91, 103, 82

L'observation du contenu des boites et leur rangement sont effectués avec aisance et rapidité.

Appropriation de la situation : Ramener 74 jetons

- **Modèle implicite de résolution 7 + 4**

Magali ne peut ni agir ni demander de l'aide verbalement. Son sourire gêné, ses appels du regard en témoignent. La difficulté entraîne une inhibition générale.
Je dois prendre en charge la situation de communication ce qui permet à Magali de dire pourquoi elle ne peut agir « *y a pas de 4 ni de 7* » et de soulager la tension.
Mais cela ne lui permet pas de débloquer l'action malgré les encouragements : elle ne peut envisager un autre modèle de résolution.

- **Étayage:**

J'aide Magali à écrire 74 sous forme additive: 10 + 10 + 4
Ceci lui permet de s'engager vers le modèle de résolution.

Ébauche du modèle de résolution pour les dizaines blocage pour les unités.
Elle retrouve le sourire et réserve 7 enveloppes de 10 mais replonge dans la perplexité car elle ne peut résoudre le problème des unités.
Elle adopte la même attitude que précédemment ; appels du regard, mais avec moins de tension.
Mes interventions l'aident à formuler la raison de son blocage « *y a pas de 4* » et à proposer une solution « *Est-ce qu'on peut les enlever les enveloppes ?* »
L'échange qui s'ensuit et l'aide que je lui apporte lui permet de résoudre le problème. Au cours de cette phase Magali commence à affronter la difficulté avec plus de dynamisme.

- **Vérification**

Elle prend en charge la vérification de manière autonome. La stratégie est efficace, la voix et les gestes sont plus assurés. Elle réinvestit le comptage de 10 en 10 avec aisance et se montre capable de relier les écritures usuelles et additives de 74 aux enveloppes qu'elle a ramenées. Le plaisir de la réussite apparaît nettement.

Mise en œuvre du modèle implicite de résolution

- **Ramener 91 jetons**

Après quelques tâtonnements vers les boîtes 8 et 1 Magali réinvestit le modèle de résolution de manière autonome.
Elle prend en charge la vérification avec assurance, méthode et application.
Toute son attitude exprime la satisfaction d'avoir réussi.

- **Ramener 103 jetons**

Elle s'engage dans l'action avec entrain.
L'expérience de la réussite et le sentiment de maîtrise de la bonne stratégie renforcent sa position.
De ce fait elle est juste étonnée, mais pas déstabilisée, quand elle constate qu'il manque une enveloppe de 10 en raison d'une erreur de manipulation.

Explicitation partielle du modèle de résolution

- **Ramener 82 jetons**

Le lien entre les 8 dizaines de 82 et la présence de la boîte 8 entraîne une régression au modèle 8 + 2 ce qui montre bien que le modèle de résolution est encore empirique et lié aux circonstances.
A la fin de cette phase apparaît pour la première fois de façon manifeste la distanciation face à l'action et la capacité d'analyser et d'expliciter ses démarches.
Sa première formulation contient beaucoup d'implicite : *« Pasque j'avais compté 8 ; ça faisait 8 et 2 .... e t puis j'ai pris 10* »
Mais, alors même que je n'en demande pas plus, elle tient à la reprendre et à la compléter en donnant la preuve : *« Pasque si j'avais pris 8 et 2 ça aurait fait 10 »*
Ce moment est très important : à travers cet acte de parole Magali révèle et se révèle à elle-même :
- d'une part la capacité de raisonner explicitement sur ses démarches c'est-à-dire d'utiliser la fonction argumentative du langage, elle qui est si économe de ses paroles.
- d'autre part sa capacité à donner du sens à la numération en récusant ses représentations erronées.

Ainsi au cours de cette séance Magali amorce un changement significatif dans son rapport au savoir et dans la construction de la numération dont nous avons surestimé la solidité en préparant la séance suivante.

Analyse de la séance 3

Description de la situation

Nombre de jetons dans les enveloppes

12	10	9	2	1
15	10	9	2	1

Nombre de carrés dans les enveloppes

Nombres demandés : 83 - 129

Au cours de cette séance nous avons conjugué plusieurs obstacles que Magali n'était pas prête à surmonter.

Nous avons ajouté un autre support matériel : des carrés en papiers, pour empêcher que la construction de la numération soit dépendante d'un seul matériel concret et en vue de l'introduction des centaines.

Nous avons introduit le nombre 129. Jusqu'alors Magali a travaillé soit avec des nombres de 2 chiffres, soit avec un nombre de 3 chiffres n'excédant pas 10 dizaines. Au cours de l'évaluation nous avions observé qu'elle pouvait dire « *102 c'est 10 paquets de 10 et 2* » (modèle qu'elle a appliqué à la séance précédente), mais qu'en revanche, elle ne pouvait indiquer le nombre de dizaines pour 113.
De plus nous avons constitué les boîtes avec des nombres pièges en référence à 129 : 12,9,2.
J'ai donné une consigne trop complexe qui a été source de malentendus.
S'est ajouté à cela ma propre difficulté à gérer la situation pour apporter l'étayage cognitif approprié. Dans la confusion que tout cela a entraîné, je n'ai pu identifier sur-le-champ les différentes stratégies de Magali pour lui apporter l'interaction adaptée. On peut dire qu'il y a eu des déstabilisations contagieuses.

Néanmoins cette séance n'a pas été négative. Si elle a confirmé les difficultés déjà constatées chez Magali elle a en même temps révélé sa capacité à les dépasser et à poursuivre le changement amorcé à la séance précédente. Cette séance confirme aussi à quel point la conception de la situation et de ses variables didactiques ainsi que l'attitude de l'adulte sont déterminantes de l'échec ou de la réussite de l'enfant.

Déroulement et analyse de la séance

- **Rangement des boîtes de jetons - Ramener 83 jetons.**

Ces deux activités sont effectuées avec aisance.

- **Introduction des boîtes de carrés - Rangement des boîtes.**

L'introduction de ce nouveau matériel ne pose pas de problème à Magali. La perturbation surgit au moment du rangement des boîtes qu'elle doit effectuer parallèlement aux boîtes de jetons. Elle s'attend à ce que les nombres des boîtes de carrés soit identiques à ceux des boîtes de jetons, ce qui est effectivement le cas pour trois boîtes (1, 9, 10). De ce fait elle essaie de faire correspondre les boîtes, ce à quoi bien sûr elle échoue. Malgré mes précisions elle reste déstabilisée par le fait que la situation ne corresponde pas à ce qu'elle attendait.

La perturbation que cela entraîne rend difficile le rangement des boîtes qui dans un autre contexte était performant.

Nous retrouvons là sa problématique de décentration que nous avions déjà observée.

- **Ramener 83 carrés**

La stratégie de résolution est correcte mais il y a une erreur de manipulation (9 enveloppes de 10 au lieu de 8) non élucidée. Cela induit un malaise chez Magali et constitue une deuxième perturbation.

- **Consigne complexe - Nombre complexe: 129**

La consigne donnée est la suivante : *« Voilà le nombre de jetons et ensuite de carrés que je voudrais que tu me ramènes (129). Alors tu commences par ce que tu veux : soit les carrés, soit les jetons. »*

- 1er essai.

Dans un premier temps Magali croit qu'elle doit ramener le nombre avec des jetons et des carrés mélangés. Cette interprétation erronée est due à la fois au peu de clarté de la consigne et à l'attirance effectuée par le nombre 2 de la boîte de carrés, ceci en raison du modèle de résolution sous-jacent qui est le suivant :

- 1 enveloppe de 10 jetons pour le « 1 » de 129
- 1 enveloppe de 2 carrés pour le « 2 » de 129
- 1 enveloppe de 9 carrés pour le « 9 » de 129

J'interviens pour qu'elle ramène un seul matériel mais je ne l'aide pas réellement à sortir de la confusion dans laquelle elle se trouve. Elle repose les enveloppes de carrés, remplace celle de 2 carrés par 2 enveloppes de 1 jeton et ramène donc 12 jetons.

- <u>2ème essai</u>

Elle ramène :

- 10 enveloppes de 10 jetons
- 1 enveloppe de 9 jetons
- un nombre pris au hasard (5) d'enveloppes de 1 jeton

Elle commence donc à élaborer un modèle de résolution adapté puisque la centaine et les unités sont réalisées en référence peut-être à la désignation orale et au modèle déjà construit pour 103. Ce qui fait obstacle c'est le nombre 2 dont elle ne peut identifier la symbolisation.

La déstabilisation inhérente aux épisodes précédents conjugué à cet obstacle impossible à franchir entraîne ce comportement aberrant de prendre des enveloppes au hasard.

Au cours de la vérification elle réservera 2 enveloppes parmi les 5 enveloppes de 1 jeton en référence sans doute au « 2 » de 129.

Au début du 3ème essai, la confusion dans laquelle elle se trouve est telle qu'elle recommence à vouloir prendre des carrés à la place des jetons, sans doute attirée par la boite 2.
En réponse à mes sollicitations, elle s'engage ensuite vers la stratégie de prendre 10 enveloppes de 10 jetons pour la centaine qu'elle commence à exécuter mais le voisinage de la boite 12 (à côté de la boite 10) a l'effet d'un déclic et elle abandonne la boîte 10 pour prendre une enveloppe de 12 jetons. Sans doute a-t-elle pensé qu'elle avait enfin la solution à son problème. Mon intervention inappropriée et l'anticipation du caractère erroné de sa stratégie, qu'elle doit réaliser à ce moment-là, ont un effet de blocage.

Le dialogue qui s'ensuit lui permet d'expliciter la raison de son blocage et de tenter une autre solution :
CP - Quel est le problème dis-moi ? Qu'est - ce que tu as pris là, comme enveloppe ?
M – Y en a 12 là.
CP - Y en a 12. Et alors qu'est-ce qui te manque maintenant ?
M - 9.
CP - 9
Magali reste bloquée.
CP - Et alors quel est le problème Magali ? Hein ?
Elle sourit, gênée mais ne répond pas.
CP - Quel est le problème ?
M - …
CP -. Tu ne peux pas prendre 9 jetons ?
M - Si
CP - Si. Et alors qu'est-ce qui te pose problème ?

M - Le 12 et le 9.
CP - Le 12 et le 9 !
M - Parce que ça fait 21.
CP - Eh oui ça fait 21. Donc ça ne va pas marcher si tu me ramènes ça. Donc il faut trouver une autre solution pour que ça marche.

Bien que convaincue que son modèle de résolution est erroné elle ne peut abandonner complètement sa stratégie. Ainsi elle garde l'enveloppe de 12 mais remplace les 9 unités par 9 dizaines et elle ramène :

- 1 enveloppe de 12 jetons
- 9 enveloppes de 10 jetons

Elle semble penser au moment de la vérification de l'enveloppe des 12 jetons que cela ne marchera pas mais elle ne peut le dire et mon attitude, trop rigide, ne lui permet pas de le faire.

Je tente ensuite de l'aider à trouver la solution pour le 4ème essai, en comptant avec elle, de 10 en 10 à partir de 90 jusqu'à 129.
Elle dit avec le sourire : *« J'ai envie d'en ramener 20»* elle ne répond pas directement à ma question qui était *« qu'est-ce qui manque à 90 pour avoir 129 ?* » mais elle répond à la question fondamentale qu'elle se pose plus ou moins consciemment depuis le début : «*A quoi correspond le 2 de 129 ?* »

Il semble qu'elle ait résolu le problème en analysant la partie « 29 » du nombre en prenant sans doute appui sur la désignation orale, puisqu'elle décide de ramener « 20 et 9 ». La centration sur cette partie du nombre qui l'a aidée à trouver la solution l'empêche momentanément de prendre en compte simultanément tous les paramètres du nombre : elle oublie la centaine.

Au cours de la vérification finale, quand elle ajoute la centaine, son modèle de résolution est : 100 + 20 + 9. J'ai, là encore, une intervention inappropriée en ne l'acceptant pas et en lui imposant mon modèle : 120 + 9 en raison de mon souci de l'amener à appréhender les 12 dizaines de 129. Ce souci était légitime mais prématuré eu égard au lourd contexte de cette séance. Ceci montre bien à quel point il peut être difficile parfois d'être réellement à l'écoute de l'enfant, c'est à dire de pouvoir différer, laisser de côté son propre projet au profit de celui de l'enfant quand cela est nécessaire.
Si elle reprend le modèle que j'ai induit pour les 129 carrés qu'elle ramène sans problème, au cours de la séance suivante elle reviendra à son propre modèle.

Au cours de cette séance l'attitude de Magali révèle son malaise face à toutes les difficultés qu'elle rencontre. Elle parle du bout des lèvres, d'une voix peu assurée. Ses regards et ses postures expriment son attente à mon égard. Elle est

aussi aux aguets de mes réactions : elle essaie de repérer à travers mes réactions si elle a réussi ou échoué et comment je vais prendre son échec.
Elle ne peut demander de l'aide verbalement et je dois à chaque fois prendre en charge la situation de communication pour l'amener à exprimer ce qui lui pose problème. Chaque fois que j'interviens sa tension baisse, elle se met à sourire, soulagée sans doute de ne plus être seule face à son problème.

A plusieurs reprises je n'ai pas assuré l'étayage cognitif approprié, en revanche je crois avoir assumé avec sérénité les difficultés de Magali ayant confiance en ses possibilités de les dépasser ultérieurement.

Analyse de la séance 4

Description de la situation

Jetons	15	10	9	4	1
Carrés	15	10	9	2	1

Nombres demandés : 75 137 127 145 109
Nombre proposé par l'enfant : 159

En raison des congés scolaires et des jours fériés, cette séance s'est déroulée un mois après la précédente.
Eu égard aux difficultés de la séance trois, nous avions décidé de minimiser les obstacles dans le choix des nombres.
Nous observons au cours de cette séance trois phases significatives :

- La première phase est celle de la mise en œuvre et du perfectionnement du modèle de résolution et de l'expérience progressive de la maîtrise.
- La deuxième phase est celle de l'institutionnalisation de la connaissance sur la numération.
- La troisième phase est celle de la mise en œuvre maîtrisée du savoir sur la numération au cours de laquelle Magali commence à manifester le plaisir du fonctionnement intellectuel.

Mise en œuvre du modèle de résolution

- **Ramener 75 jetons** - carrés.

Nous commençons avec un nombre facile « 75 » pour lui permettre de se réapproprier la situation. Magali réussit facilement avec les deux matériels successivement. Nous constatons la mise en place d'un rituel qui s'arrêtera après le 5ème nombre (127 jetons) : elle vérifie le contenu des enveloppes pour les unités mais pas pour les dizaines.

- **Ramener 137 jetons,**

Magali réfléchit longuement derrière les boîtes. Cette attente est différente de celles déjà observées: je ne perçois pas d'appel. Elle réserve les unités, réfléchit encore un moment en regardant l'écriture du nombre et prend 13 enveloppes de 10.
Au cours de la vérification elle sépare les 13 enveloppes de 10 : elle compte jusqu'à 100, met ce tas de côté, puis compte les autres « *10, 20, 30* ».
Elle utilise donc le modèle de résolution - fondé sans doute sur la désignation orale - qu'elle avait élaboré pour « 129 » à la séance précédente et non celui que j'avais induit et qu’elle avait repris dans l'instant.
Son attitude est réservée, autonome dans l'action, mais pas encore très assurée et elle reste dépendante de mon approbation.

- **Ramener 137 carrés - 127 jetons.**

Elle réussit avec aisance en utilisant le même modèle de résolution.
100 + 30 + 7.
Au cours des vérifications je la sollicite pour établir les équivalences: 130 carrés / 13 enveloppes, 120 jetons / 12 enveloppes quelle parvient progressivement à maîtriser.
Son attitude est de plus en plus dynamique, assurée. Elle est souriante et moins dépendante de mon approbation.

- **127 carrés.**

Elle cesse le rituel de vérification des unités et utilise spontanément le modèle 120 + 7.

Institutionnalisation de la connaissance

En réponse à ma question *« Est-ce que tu as besoin de toutes les boîtes pour me ramener les nombres que je te demande ?* », elle écarte les boîtes inutiles pour les jetons et les carrés.
Ainsi l'objectif de redonner son statut à la numération décimale est atteint. Cependant le lien entre les boîtes et leur désignation officielle, même s'il est établi empiriquement doit être explicité. C'est l'objet du dialogue qui suit :
CP - Alors qu'est-ce que tu as gardé Magali ?
M- Les « 1 » *et les* « 10 ».
CP - Tu sais comment on les appelle encore les 1 ?
M - Non.
CP - Comment vous les appelez en classe ?
M - Les unités.
CP- Et les « 10 » *vous les appelez comment ?*

M- Les dizaines.

À propos de cette phase importante, je voudrais faire deux remarques.:

a) Il était important que le lien entre les connaissances de la classe et la reconstruction de la numération en rééducation puisse s'établir « officiellement » pour éviter le clivage possible entre les mathématiques en classe et les mathématiques en rééducation.
Par ailleurs, le lieu officiel des apprentissages c'est la classe. L'espace rééducatif permet une remise en œuvre d'un rapport efficient avec le savoir et une reorganisation des connaissances pour que l'enfant puisse bénéficier des apprentissages dans sa classe.
De ce fait l'institutionnalisation des connaissances doit se réaliser en référence à la classe.

b) Une deuxième remarque concerne 1'utilisation du langage codifié, ici : dizaines et unités. Magali connaissait déjà ces termes mais elle les a utilisés que très rarement en rééducation. Ce n'est qu'à partir du moment où elle a reconstruit la numération que ce langage codifié peut être reproposé pour être investi avec tout le sens qu'il recouvre.

Mise en œuvre maîtrisée du savoir

- **145 jetons - 109 carrés.**

Au cours de cette phase le changement d'attitude de Magali face au savoir est nettement perceptible. Elle s'engage avec plus de dynamisme et réussit rapidement la résolution pour les Deux nombres. Elle fait preuve de distanciation par rapport à son action dont elle peut anticiper le résultat avec assurance avant de procéder à la vérification.
Le plaisir de faire fonctionner sa maîtrise du modèle de résolution se manifeste notamment dans ses ponctuations verbales jusqu'alors très rares : *« Bon ! – Alors ! Voilà ! »*.

Prise en charge de la situation. Choix de poursuivre. Choix du nombre 159.

Avec cette dernière séquence de nombres, c'est Magali qui gère la situation. Elle décide de poursuivre l'activité et elle choisit le plus grand nombre de la séance : 159. Le fait de lui avoir proposé d'arrêter ou de continuer, ainsi que de choisir le nombre a été important, non pas pour la construction de la numération puisque l'objectif était atteint, mais pour le renforcement de l'attitude face au savoir et face à l'adulte.
Le lien entre le savoir mathématique et l'enfant se met à exister de façon plus autonome : son attitude révèle une prise de distance par rapport à l'adulte : ses

regards et son attention sont davantage centrés sur l'action réalisée que sur les réactions de l'adulte.
En choisissant de poursuivre avec un autre nombre elle fait durer le plaisir de la réussite, de la maîtrise et renforce ainsi, par les bénéfices narcissiques qu'elle en retire, son estime de soi.

Analyse de la séquence 5

Au cours de cette séance nous avons modifié la situation de départ dans la répartition des rôles entre l'adulte et l'enfant. Ce n'est plus Magali qui va chercher les enveloppes ; à partir du nombre donné elle doit me dire quelles sont les enveloppes que je dois ramener.
Nous avons introduit cette modification pour deux raisons:

- d'une part pour l'amener à énoncer le nombre de dizaines.
- d'autre part pour lui permettre de prendre en charge la situation en ayant un rôle de « supervision» à l'égard de l'adulte qu'elle fait agir et dont elle contrôle l'action.

Nous avons également proposé des nombres pouvant constituer des obstacles : 120, 172, 315, 273.

Évolution de la construction de la numération

• Lorsqu'elle donne les consignes à l'adulte elle énonce d'emblée les unités mais les dizaines apparaissent plus progressivement,

- 156 : *« 5 unités et 15 enveloppes ici* »
- 120 : « *l2 enveloppes !* » *… « des dizaines»*
- 172 *: «Alors aux unités il en faut 2 et 1 7 enveloppes aux dizaines ».*

• L'introduction des centaines est investie avec assurance, la présence des autres boîtes (20, 50, 70) s'est avérée superflue.
Nous constatons alors les traces de la difficulté à construire le statut des dizaines qui ne sont pas d'emblée explicitées et toujours prises et vérifiées en dernier pour 124-315-472.
Par exemple : pour 124 elle montre les boîtes correspondantes en disant : *« les unités, les centaines et* <u>ça</u> »

• Pour « 549 » où elle donne les consignes à l'adulte elle utilise l'ordre de lecture du nombre mais elle bute encore sur les dizaines: « *4 dizaines … 40 dizaines … non 4 ».*
Sa rectification a sans doute été induite par l'expression de ma surprise.
• Elle est capable d'effectuer les équivalences entre les différents niveaux de numération avec de plus en plus d'aisance.

- Les nombres « difficiles » ne lui posent aucun problème.

Évolution du rapport au savoir

Le dynamisme, l'assurance, voire la désinvolture dont elle fait preuve témoignent de son plaisir à maîtriser les stratégies de résolution. Le ton de sa voix, son attitude corporelle, ses accompagnements verbaux et gestuels expriment sa jubilation : son sourire est épanoui, son regard pétillant, son attitude énergique et enlevée, le ton de sa voix assuré. Elle n'est plus déstabilisée faces à des obstacles ou des situations nouvelles :

- L'erreur d'unités à 156 ; les nombres difficiles: 120 avec « 0 » unité, 172, 315 ; l'introduction des centaines et autres groupements. Elle va plus loin dans la prise de risques en se donnant elle-même des défis à dépasser
- Elle cherche spontanément à reconstituer le nombre 273 à la vérification.
- Pour la vérification des unités de « 129 » elle compte de 2 en 2.
- Elle choisit le nombre « 129 » pour l'exercice le plus difficile puisqu'il n'y a plus de support écrit.. Ce nombre est celui qui avait constitué un obstacle difficile à la séance 3.

Ce choix, conscient ou préconscient, est significatif sans doute a-t-elle voulu prouver et se prouver qu'elle avait vraiment dépassé ses difficultés par rapport à la numération.

Evolution de la relation à l'adulte

Son rapport à l'adulte commence à changer. La situation de supervision lui permet d'expérimenter un autre rôle, une autre position face à l'adulte, qu'elle investit avec efficacité et plaisir.
Elle me pilote, contrôle mon action, en évalue le résultat avec assurance et une certaine jubilation.
Cela lui permet aussi d'investir la parole différemment -et de co-gérer la communication verbale, alors que jusque là elle s'exprimait surtout en réponse à mes sollicitations.
Cette prise de distance et d'autonomie face au savoir, face à l'adulte se manifeste également face au dispositif d'observation elle ne regarde pratiquement plus la caméra. Ceci est le signe d'une réassurance narcissique qui n'est plus seulement reliée à l'approbation et au regard de l'adulte, mais qui s'enracine dans la prise de conscience de ses nouvelles possibilités, de son pouvoir personnel face aux mathématiques.
En cela Magali progresse vers une relation de plus en plus autonome avec le savoir mathématique.

Conclusion

Le travail rééducatif avec cette enfant s'est poursuivi jusqu'en novembre 1994 pour finaliser l'objectif de la rééducation.

L'évaluation finale de la rééducation fait apparaître que :

- Le sens de la numération et de sa symbolisation par l'écriture usuelle est reconstruit. Cette connaissance est reliée aux savoirs antérieurs et à ceux de la classe.

- Le rapport au savoir mathématique est nettement positif :

L'appropriation des situations problèmes s'effectue avec engagement, dynamisme, réflexion, autonomie, assurance et responsabilité.

- La capacité d'anticipation et la distanciation qu'elle nécessite est mise en œuvre de manière efficace.

- Le plaisir du fonctionnement intellectuel se manifeste pleinement : le désir et le plaisir de faire des mathématiques est clairement exprimé : *«j'adore l'école, j'adore faire des maths »*. Magali cherche à dépasser ses limites, n'est plus déstabilisée par les obstacles potentiels et recherche même la difficulté.

- La relation avec l'adulte devient de plus en plus autonome et distanciée. Magali devient capable de co-gérer la communication avec l'adulte et de s'impliquer à part entière en tant que partenaire, aussi bien dans la communication que dans la gestion des différentes activités de la séance.

En conclusion, la différence de comportement et d'attitude qui se révèle à l'observation comparée des premières et dernières séances nous donne à penser que ce travail a permis à Magali non seulement de reconstruire des connaissances mathématiques mais encore de restaurer son estime de soi.

Bilan des enseignants de la classe.

Les résultats des évaluations font apparaître des progrès dans tous les domaines.

L'écart entre la moyenne de l'enfant et celle de la classe (celle-ci restant stable au cours de trois trimestres) est de :

- 5,30 au premier trimestre
+ 0,75 au deuxième trimestre
- 1,50 au troisième trimestre.

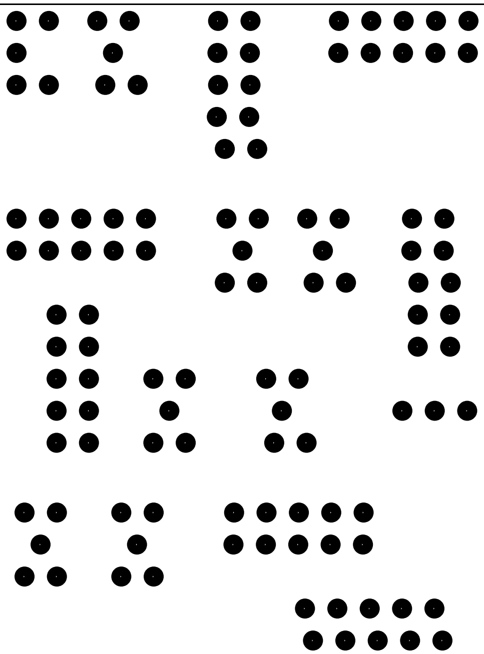
L'attitude face aux situations de recherche s'est améliorée sur certains points : elle s'engage davantage et fait preuve de réflexion. C'est sur le plan psychologique que l'action bénéfique de la rééducation apparaît le plus nettement : l'épanouissement et la prise d'assurance sont manifestes. Outre les effets positifs du travail rééducatif, le fait même de venir en rééducation est vécu par elle - même et les autres enfants comme un privilège ce qui lui donne une valorisation supplémentaire.

Cette évaluation sera confirmée par ses parents qui témoignent de leur satisfaction auprès de la psychologue.

Si le travail réalisé avec Magali permet de conclure positivement sur la pertinence de ce dispositif rééducatif pour cette enfant il reste à l'expérimenter avec d'autres enfants à la fois pour le mettre à l'épreuve et en approfondir les différentes composantes.

Annexe 1

Fiche numération

Ecriture usuelle	Dessine les jetons	Ecriture additive
102		
		
		50+20+8

Dispositifs spécialisés dans les structures ordinaires de l'école et du collège

Un plan des premiers cours pour la formation mathématique et didactique des stagiaires A.I.S. option F

Marie-Hélène Salin

Extrait de Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques - Besançon 1997.

L'auteur donne les grandes lignes du travail qu'elle a mené avec des stagiaires de l'option F en début de formation. Ecrit en 1997, cet article anticipe, pour ce qui concerne les mathématiques, la circulaire de 25 juin 1998 qui fixe les principes et méthodes pédagogiques sur lesquels doivent s'appuyer les enseignements en SEGPA : adaptation des enseignements, pratiques de projet, techniques et démarches de remédiation, accompagnement individuel, accès à la qualification et à l'insertion sociale et professionnelle, réflexion et travail d'une équipe pédagogique.

Remarques préalables

Ces cours s'adressent aux stagiaires, dès le début de l'année. Ils constituent un peu plus du tiers du temps pendant lequel ces derniers peuvent se former pour l'enseignement des maths en SEGPA. Parallèlement aux cours, ils préparent quelques séquences qu'ils effectuent dans les classes où ils sont en stage une journée par semaine. Je leur fournis une aide ponctuelle à la demande (non prise en charge dans mon service).

Cette première série de 6 cours de 3 heures intègre une formation en didactique dont ne dispose pas la majorité des stagiaires, mais ceci devrait changer au fur et à mesure que de jeunes professeurs des écoles postuleront.

Après une première séance consacrée à la prise de connaissance des divers programmes (des élèves et de la formation F), j'ai choisi de consacrer 15 heures à un minimum de formation didactique en m'appuyant sur la présentation d'un domaine très important pour les élèves de SEGPA et méconnu des enseignants du primaire : la géométrie du dessin technique Ceci me permet de présenter les éléments principaux fondant l'utilisation de situations d'apprentissage par adaptation et de montrer leur fonctionnement. Mais il est essentiel de prendre en compte la spécificité des élèves de SEGPA et leurs difficultés, c'est ce que j'essaie de faire dans le dernier cours de cette série.

Les cours suivants portent sur des thèmes négociés avec les stagiaires en fonction de leurs demandes. Les plus importantes me paraissent être l'enseignement de la mesure et du mesurage, l'enseignement de la proportionnalité, l'enseignement de la géométrie.

Séance 1

I. Recueil des questions posées par les stagiaires, concernant l'enseignement des maths, à l'issue de leur stage " Prise de contact avec la Segpa ".

- Y a-t-il un programme en SES ? quel est-il ? les outils du collège sont-ils utilisables ? comment organiser un parcours de 6 années avant le CAP ?
- Pourquoi l'évaluation prend-elle une telle place ?
- Pourquoi l'individualisation de l'enseignement ne semble-t-elle pas effective ? Que veut dire "enseignement adapté" ?
- Le bachotage est-il inévitable ? Peut-on proposer aux élèves de SES des activités de recherche ?

II. Présentation de quelques points de repères

- La question des programmes.

Elle est épineuse, parce qu'après une réforme de la SES en SEGPA, très influencée par le modèle "enseignement technique", le ministère Bayrou a réorienté la SEGPA vers le modèle "collège" (circulaire de 96). Et en novembre 97, on attend toujours ... la réforme Allègre ? Deux circulaires abordent très succinctement la question : celle de 90 (pas complètement abrogée) et celle de 96 (on attend toujours une nouvelle circulaire 'Pédagogique") - Les trois programmes : école primaire / collège CAP servent donc de références.

- comparaison rapide des programmes cycle 3 / collège / CAP
- principes et méthodes pédagogiques
- évaluation des acquis :
    * en cours de formation
    * un exemple de sujet de CAP (annexes 1)

Là aussi, rien n'est stable. Depuis la rénovation des CAP, de grandes différences apparaissent entre les académies. Le mouvement général est à la "mathématisation" des sujets d'examen et à l'abandon des habillages professionnels, mais en même temps, on note sur des sujets classiques, des problèmes de plus en plus simples et découpés en mini-questions, correspondant à l'évaluation d'un item des référentiels.

- un exemple de sujet CFG (voir texte spécifique).

III. Échanges sur " Pourquoi enseigner les maths aux élèves de SEGPA ? "

IV. Les axes de la formation de l'option F en mathématiques.

- Les textes la définissant :*voir bibliographie et tenir compte des modifications actuelles.*
- Les besoins nouveaux liés à la transformation des objectifs de la SES
- Mes propositions : essayer de prendre en compte plusieurs dimensions :

  - maîtrise mathématique du programme de CAP, sur quelques domaines, en particulier la géométrie, les fonctions ;
  - approfondissement, d'un point de vue didactique, de quelques thèmes (par exemple, mesures, proportionnalité, géométrie plane) ;
  - essai de compréhension des difficultés des élèves de SEGPA : spécificité, modèles explicatifs actuels, pistes pour l'action didactique ;
  - évaluation et référentiels.
- Moyens
  - activités mathématiques présentées de manières différentes,
  - observation de classes, et observations d'élèves pendant les journées en SEGPA ;
  - utilisation de "protocoles" recueillis dans des recherches ;
  - observations de tâches d'atelier où interviennent les savoirs mathématiques (pendant le stage) ;
  - analyse de documents (manuels, épreuves d'évaluation) ;
  - cours destinés aux apports d'informations, synthèses, comptes-rendus et analyse d'observations.

Séance 2

Objectifs du travail

Ils se situent à <u>4 niveaux</u> :

1) Poser le problème de la description des objets spatiaux par l'examen d'un sujet de CAP puis par une activité effective.

2) Analyser les résultats de cette activité du point de vue des connaissances et des compétences nécessaires à la réussite.

3) Prendre connaissance des difficultés des élèves de SEGPA sur ce domaine.

4) Commencer un travail de réflexion sur les situations d'enseignement, en s'appuyant sur l'analyse des situations proposées.

Activités

1) Réalisation d'une épreuve professionnelle de CAP "Tous métiers du bâtiment" (lecture de plans et coupes).(annexe 2)

2) Situation d'autocommunication

Il s'agit de fabriquer un objet identique à un objet donné, selon deux modalités différentes :

- l'objet modèle est constamment visible ;

- l'objet modèle est visible avant le début de l'action de reproduction mais pas pendant cette action ; l'évaluation de l'action se fait par comparaison du modèle et de sa copie ; les objets dont il s'agit sont des assemblages de cubes (empilables mais pas accrochables).

3) Situation de communication

Une personne dispose d'un objet. Elle doit en fournir une description à une autre personne pour que cette dernière puisse construire un objet identique. Aucune restriction n'est donnée sur la nature du message, sauf qu'il doit être réalisable sur une feuille de papier. Même forme d'évaluation.

Déroulement du cours

a) Réalisation des trois activités.
b) Examen comparatif des messages de l'activité 3.
c) Analyse au niveau 2, indiqué ci-dessus, guidée par les questions.
- Quelles connaissances sont nécessaires pour résoudre chacun des problèmes ?
- En quoi dépendent-elles de la nature des objets à reproduire ?
- Que produit le changement de modalités dans l'activité 2 ?
- À quelles conditions ces activités peuvent-elles produire des apprentissages ?

d) Les difficultés des élèves.
- Compte-rendu d'observations à propos d'une adaptation de "l'épreuve des trois montagnes" (de Piaget) avec des élèves de 3ème et 4ème de SES (documents personnels).
- "Les erreurs en dessin technique" repérées dans l'ouvrage de Husson-Charlet (1995).

Séance 3

Objectifs

1) Initiation au fonctionnement du dessin technique
2) Informations sur les difficultés rencontrées par les élèves de CAP
3) Analyse comparative de deux méthodes d'enseignement préparant au dessin technique :

- celle proposée par l'IREM de Grenoble dans la brochure de 1983 "Introduction à la géométrie dans l'espace"
- celle proposée par un polycopié diffusé dans le département de la Gironde (Kielen 1988) dont l'annexe 3 reproduit un exemple de fiche de travail.

Réalisation

Pour le premier objectif, utilisation de quelques-unes des activités décrites dans le document de l'IREM de Grenoble.

Pour le deuxième, prise de connaissance de résultats issus de "L'apprentissage de la géométrie du dessin technique ; des constats d'échec et des moyens de réussite" INRP Collection rapports de recherche 1984 n°9 et du livre de J-C Husson-Charlet "Les erreurs en dessin technique".

Pour le troisième, comparaison des deux démarches en répondant aux questions suivantes :

- caractérisez les différences entre les activités proposées par les deux sortes de document des points de vue suivants :
  * connaissances supposées des élèves en début d'apprentissage
  * connaissances développées par l'apprentissage
  * sens que les élèves peuvent donner aux activités
  * mise en œuvre dans une classe de SEGPA
- pouvez-vous rattacher ces deux "méthodes" à des conceptions de l'apprentissage différentes ?

Les critiques à formuler au document Kielen ne sont pas aussi unanimes qu'on pourrait le penser !

Séances 4 - 5

Cours.

Différents modes de transmission des savoirs mathématiques et leurs présupposés sur la nature des mathématiques et sur l'acquisition des connaissances

Il ne s'agit pas de présenter d'abord ce qu'il ne faudrait pas faire, puis le remède miracle, mais de montrer que l'enseignant dispose d'une variété de moyens, à adapter en fonction de ses buts et des contraintes qui pèsent sur son action. Aussi, chaque "modèle" présenté est accompagné de réflexions sur ses qualités et ses défauts.

I. Les deux versions du modèle "ostensif"

(s'appuyant sur la monstration des pratiques ou sur l'exposé du savoir)

a. L'important, c'est de "savoir-faire"
(enseignement primaire jusqu'en 1970)

b. L'important, c'est le "texte du savoir"
(enseignement secondaire à partir de 1970 et encore maintenant au lycée)

c. Conceptions de l'apprentissage correspondantes

II. L'ostension “ déguisée ”

(enseignements primaire et du collège actuels)

L'enseignant pose des questions fermées et ne retient que les réponses "attendues".

III . Le modèle des pédagogies actives

a. Leurs présupposés sur ce qui est susceptible d'intéresser l'élève

b. Trois difficultés :

1) Les situations "réelles" sont en général complexes et font intervenir plusieurs connaissances.

2) Dans la "réalité", on peut se contenter de solutions approchées et bricolées, qui ne font pas appel aux notions mathématiques à enseigner.

3) Un problème "réel" résolu est mort pour l'analyse. On n'exploite pas une situation mathématique a posteriori. Les mathématiques sont utiles pour prévoir et non pour décrire.

IV. Une alternative possible pour certains apprentissages, l'apprentissage par adaptation, développé par G. Brousseau dans sa théorie des situations didactiques (cf. Briand et Chevalier 1996)

a. Simuler dans la classe le fonctionnement du savoir

1) Pourquoi ?

2) Les fonctions du savoir mathématique dans les situations non didactiques

3) Les situations a-didactiques : définition

b. Les caractéristiques générales des situations d'enseignement développant cette forme d'apprentissage

1) Elles s'inscrivent dans un projet du maître de faire approprier un savoir spécifié

2) Elles sont construites autour de *situations a-didactiques* dont la résolution suppose le recours à la connaissance visée.

3) L'enseignant doit donc dans un premier temps faire la *dévolution* à l'élève de la responsabilité de résoudre le problème.

4) La situation doit être organisée de telle manière que les résultats des élèves soient validables par la situation ou par eux-mêmes.

5) En cours ou au terme du déroulement de la situation a-didactique, l'enseignant est responsable de *l'institutionnalisation* des connaissances élaborées par les élèves.

6) Les rapports enseignant-enseignés sont déterminés par le *contrat didactique.*

L'évolution des apprentissages correspond à des changements de contrat.

c. Les différents types de situations a-didactiques

1) Situations d'action

2) Situations de formulation

3) Situations de validation

d. L'effet des différents paramètres d'une situation sur la nature des connaissances nécessaires à leur résolution et leur utilisation dans la construction d'une situation a-didactique :

les variables didactiques.

e. Le déroulement d'une situation didactique d'apprentissage par adaptation

1) Les différentes phases
2) Nécessité de l'institutionnalisation des connaissances dégagées
de leur mise en *Le cours s'appuie sur des exemples de situations rencontrées dans les séances précédentes, et sur des situations d'apprentissage de la mesure faciles à communiquer.*

Séance 6

Quelques conseils pour l'enseignement des mathématiques en SEGPA.

Une mise en garde sur les conseils donnés : aucun n'est à prendre dans l'absolu. Tout est affaire d'équilibre.

A. Les pièges à éviter

- La mécanisation à outrance : l'élève peut réussir, mais le sens est absent ; l'élève est incapable d'utiliser ce qu'il a appris dans une situation un peu différente sans l'aide de l'adulte.
- En réaction, l'ouverture à tout vent.

L'apprentissage par adaptation a été conçu pour permettre l'acquisition d'outils mathématiques sans lesquels on ne peut pas "penser" ni résoudre les problèmes non didactiques qui sont posés. Il s'agit, pour l'enseignement, d'essayer de prendre en charge, sans les séparer, le sens et les modalités de fonctionnement des connaissances mathématiques.

B. Les difficultés sont nombreuses

Je voudrais vous signaler celles qui me paraissent les plus importantes ainsi que des pistes de solution.

1) Les problèmes de gestion de la classe liés à l'hétérogénéité des élèves
2) L'intériorisation de l'échec par les élèves
Deux attitudes :
* refus de l'échec qui aboutit à rejeter les situations à rétroaction ou au déni de la confrontation au réel
* passivité : inhibition de l'action ; peur de prendre une décision, besoin continuel de l'adulte.

3) Le nécessaire changement de contrat didactique (or tout changement est insécurisant).

* sens de "chercher" (lié à des problèmes socioculturels)
* rapport à l'erreur : de faute, elle doit devenir moteur du progrès

4) L'intégration des connaissances : certains élèves sont capables de "trouver" la solution d'un problème mais il n'y a pas de transformation de ce qui n'est qu'une connaissance contextualisée en un outil utilisable ailleurs. « Il faut toujours recommencer », disent les enseignants. (relation avec l'absence de projet "d'autodidactie")

C. Des pistes pour des solutions

1. Les problèmes d'organisation

Étant donnée l'hétérogénéité de ces classes, il est nécessaire de constituer, par moments, des groupes de besoins ou même, dans certains cas, des classes à plusieurs niveaux. Toutefois, il est essentiel de développer un rapport collectif aux activités d'apprentissage et de résister à l'individualisation totale qui s'est répandue dans les SEGPA et qui aboutit à un appauvrissement de l'enseignement.

Progressions : éviter de papillonner, en changeant de sujet très souvent. Travailler la géométrie ou la mesure une fois par semaine n'est pas bon. Il faut avoir terminé un apprentissage jusqu'à un minimum d'institutionnalisation avant de changer. Ensuite de courtes séances de rappel sont nécessaires.

Organisation du temps hebdomadaire

* Avoir si possible pour chaque groupe de la classe plusieurs plages d'une demi-heure par semaine disponibles pour un temps de travail avec la présence de l'enseignant, utilisées pour la mise en œuvre des situations a-didactiques.
* Proposer sur les autres plages, des activités reprenant le même problème dans un contexte permettant plus d'autonomie, puis des exercices d'entraînement.
* Penser à utiliser le plus possible les "occasions" extérieures de faire fonctionner sous la responsabilité de l'élève les connaissances enseignées.

2. Le rôle de médiateur de l'enseignant

* Expliquer le pourquoi des choses, montrer à quoi sert ce qu'on travaille. Les situations ne permettent qu'en partie de faire ce travail.
* Aider l'élève à prendre des repères sur ce qu'il sait et sur ce qu'il ne sait pas encore : une certaine façon d'évaluer et de communiquer les résultats de l'évaluation.
* Clarifier le statut des différents moments du travail d'apprentissage :

- Face à une situation a-didactique : « c'est à vous de chercher, d'essayer » ; Quand cela est possible, renvoyer aux élèves la responsabilité de déterminer s'ils ont réussi ou non, les assurer que, s'ils n'ont pas réussi, vous les aiderez à comprendre pourquoi ça n'a pas marché.

- Dans une fiche d'entraînement, aide ponctuelle

- Dans une fiche d'évaluation : "je ne vous aide pas, il faut que vous et moi nous sachions ce que vous savez faire seuls".

Ce qui est particulièrement difficile : s'empêcher d'aider l'élève à ne pas échouer, quand cet "échec" est nécessaire pour comprendre.

* Dans une situation a-didactique

- la consigne doit être très bien préparée ; elle doit être accompagnée de l'explicitation de ce à quoi on verra qu'on a réussi ; souvent, il peut être utile de faire un premier essai devant tous pour bien faire comprendre la consigne ;

- dans une situation de communication, pour éviter dans un premier temps la complexité de déterminer d'où vient l'erreur, le professeur peut être l'émetteur ou le récepteur ;

- au moment de la comparaison effets attendus - effets obtenus, le professeur a un rôle très important : explicitation, interrogation sur le pourquoi ;

- encouragement pour le nouvel essai ;

- si personne ne trouve la solution, ne pas s'acharner, aider à trouver la solution par des questions, la faire expérimenter avec votre aide mais ensuite laisser aux élèves la possibilité de s'approprier la connaissance en la faisant fonctionner dans cette situation qui a du sens ;

- tirer les conséquences, formuler ce qu'on a trouvé (le début de l'institutionnalisation) ;

- à la séance d'après, commencer par demander "qu'est-ce que vous aviez à faire la dernière fois ? qu'est-ce que vous aviez appris ? " puis proposer le nouveau problème en le reliant explicitement au début puis de moins en moins aux situations précédentes.

Il peut être intéressant de faire un journal de classe (ou de groupe) qui retrace l'histoire. Il s'agit de construire des références sur lesquelles le professeur peut s'appuyer quand c'est nécessaire.

* Ne pas oublier que les phases d'entraînement sont nécessaires : une technique se travaille, en maths comme en EPS. Si le sens est assuré, on peut proposer des tâches moins riches pour automatiser les apprentissages.

* Des ateliers "jeux" peuvent être mis en place avec profit en 6ème-5ème : jeux de société, (de stratégies), de cartes, jeux numériques adaptés, jeux d'échecs etc. Mais attention, cela ne doit pas prendre la place des maths et leur rôle doit être bien délimité. Ne pas appeler jeux les activités intégrées dans le cursus d'enseignement, même si elles ressemblent à des jeux.

D. Remarques pour une meilleure liaison enseignant général / enseignant professionnel

- Analyser dans le détail, ensemble PLP et enseignants généraux, un certain nombre de tâches professionnelles en explicitant les connaissances nécessaires pour les résoudre.
- S'interroger : qui est responsable d'enseigner cela ?

- Deux cas sont possibles :

  * Cela ne fait pas l'objet d'un enseignement . Pourquoi ? Peut-on modifier cet état de fait ?

  * Cela fait bien partie d'un enseignement mais le transfert ne se fait pas. Il faut sans doute alors repenser l'enseignement de manière à ce que les élèves n'apprennent pas séparément le concept et la manière de s'en servir.

En particulier l'enseignant chargé des maths peut simuler des problèmes professionnels et les poser aux élèves. Il est important que les élèves comprennent que les maths sont utilisées car elles servent à prévoir et à économiser du temps, des matériaux, etc. Et cela peut se faire dès la classe de 6ème.

L'enseignant professionnel doit connaître le contexte dans lequel le professeur de maths a introduit une notion, pour mesurer la distance entre ce dont il a besoin et ce que les élèves sont censés savoir maîtriser.
Il ne faut pas nécessairement se répartir les tâches de manière traditionnelle. L'enseignant de maths peut être celui qui permet les échanges sur des pratiques professionnelles différentes (selon les métiers) faisant appel à un même concept, qui établit des liens entre différentes activités, qui fait réaliser des « enquêtes », etc.

Lille

6 BEP/CAP Bâtiment
Durée : 2 heures

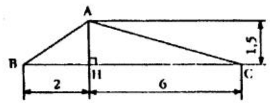
▪ Exercice 1

Compléter le tableau ci-dessous : *(BEP : 1 point ; CAP : 2 points)*

a	$2a - 3$	$\sqrt{a}$
9		
		2

▪ Exercice 2

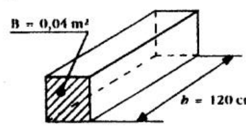
Vue de côté d'une toiture (Cotes en mètres)
(Les questions ci-dessous sont indépendantes).



1. Calculer la longueur AB (en mètres).
(BEP : 0,5 point ; CAP : 1 point)
2. Calculer l'aire du triangle ABC (en mètres carrés).
(BEP : 0,5 point ; CAP : 1 point)

▪ Exercice 3

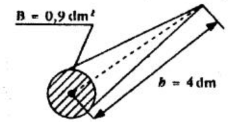
(Pour répondre placer une croix dans la case correspondante.)



1. Quel est le volume de ce madrier ? (C'est un prisme droit).
(BEP : 0,5 point ; CAP : 1 point)

☐ 0,048 m³ ☐ 480 cm³ ☐ 4,8 dm³

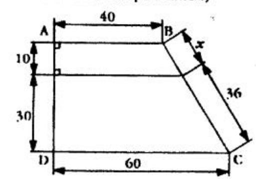
2. Quel est le volume de cette pièce conique ?
(BEP : 0,5 point ; CAP : 1 point)



☐ 1,3 dm³ ☐ 1,2 dm³ ☐ 3,6 dm³

▪ Exercice 4

Cotes en mètres
(Les questions ci-dessous sont indépendantes.)



1. Calculer la côte x (en mètre). *(BEP : 0,5 point ; CAP : 1 point)*
2. Calculer l'aire du terrain ABCD en mètres carrés.
(BEP : 0,5 point ; CAP : 1 point)

▪ Exercice 5

(Pour répondre placer une croix dans la case correspondante.)

1. Une boîte de peinture coûte 120 F. Elle est achetée avec une remise de 25 %.
Quel est son prix d'achat net ? *(BEP : 0,5 point ; CAP : 1 point)*

☐ 30 F ☐ 90 F ☐ 95 F

2. | Offre spéciale |
|---|
| Carrelage : 220 F le m² |
| Pour 5 m² achetés, vous n'en payez que 4 ! |

Dans les conditions de cette offre spéciale, quel sera le prix d'achat de 60 m² de carrelage ? *(BEP : 0,5 point ; CAP : 1 point)*

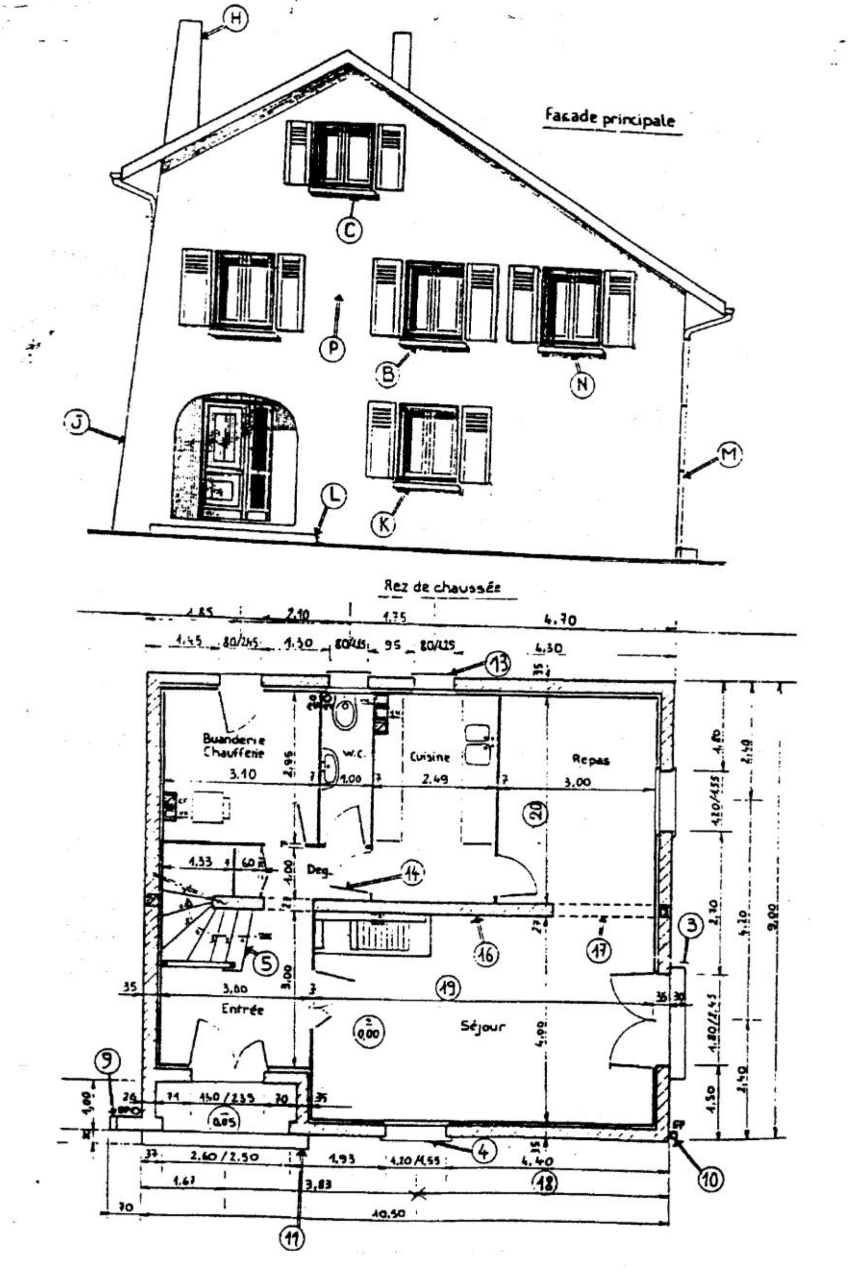
☐ 12 980 F ☐ 13 200 F ☐ 10 560 F

Annexe 2 a

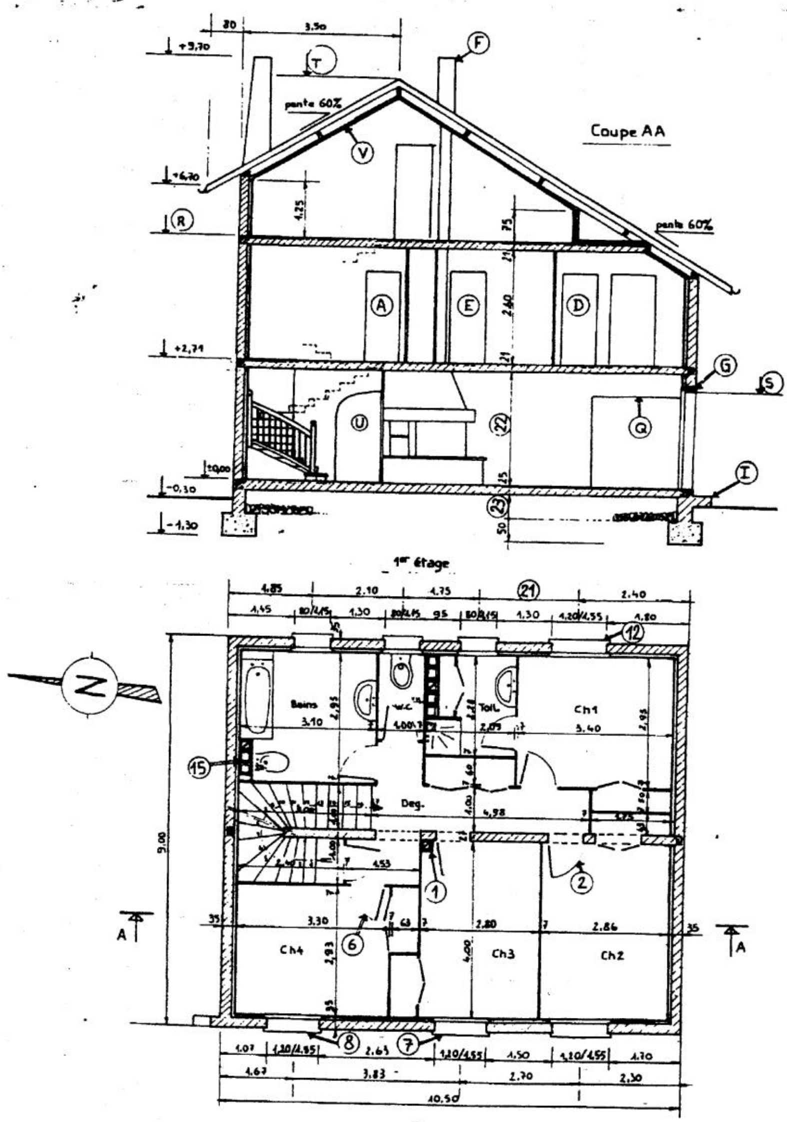
Académie de BORDEAUX			Dossier 8
C.A.P. Toutes options du bâtiment			
LECTURE DE PLANS	Année 1983	DURÉE : Oh 30	

Questions	Réponses	notation	
1. Chercher sur la coupe ou sur la façade la lettre correspondante au numéro sur les plans. n° 4 7 1 10 6 3 lettre			
2. Comment se nomment les détails repérés ?	H …………………….. G …………………….. P…………………….. 16…………………….. 12 ……………………..		
3. Quelle est l'orientation de la façade principale ?			
4. Dans quelle pièce donne la fenêtre N ?			
5. Calculer les cotes	18…………………….. 19 …………………….. 22……………………..		
6. Calculer les cotes de niveaux	R…………………….. T ……………………..		
7.Calculer la hauteur de marche de l'escalier d'accès au premier étage.	…………………… ……………………; …………………… …………………… ……………………; ……………………;		
	TOTAL		
	Note coefficientées		

Annexe 2 b


Facade principale
Rez de chaussée
Buanderie Chaufferie
W.C.
Cuisine
Repas
Deg.
Entrée
Séjour

Annexe 2 c


Coupe AA
pente 60%
pente 60%
1er étage
Bains
W.C
Toil.
Ch1
Deg.
Ch4
Ch3
Ch2
10.50
9.00

Éléments de cours sur la notion de problème pour professeurs stagiaires A.I.S. options E et F

Catherine Houdement

Extrait de Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques - Besançon 1997.

Cet article destiné à des formateurs de stagiaires AIS restitue la place de la résolution de problèmes dans les apprentissages et aborde la construction de situations destinées à des élèves relevant des RASED ou des SEGPA à partir de la distinction entre problématique mathématique et problématique de la réalité.
Prenant en compte les spécificités de l'AIS, l'auteur donne des pistes de réflexion pour les aides spécialisées en RASED et éclaire tout à fait les instructions données par la circulaire n°98 du 16 juin 1998 pour ce qui concerne l'enseignement des mathématiques en SEGPA
Une bibliographie est donnée par paragraphe.

Les stagiaires A.I.S. en formation, lorsque leur formation n'a pas été rénovée récemment, ont souvent besoin de "dépoussiérer" leur vision des mathématiques, a fortiori des problèmes de mathématiques. Leurs références sont quelquefois des manuels scolaires aux conceptions sous-jacentes un peu dépassées.

Ce cours essaie de pointer certaines remarques qu'il s'est avéré nécessaire de faire au cours des diverses séances de formation. Il ne prétend aucunement traiter le thème "problème mathématique" dans son intégralité, il jette quelques idées ou réflexions affinées au cours de la formation et évoquées avec les collègues formateurs.

I. Problèmes de mathématiques et manuels actuels

a. Les problèmes posés par les manuels

On appellera problème, dans un premier temps, tout support porteur d'informations relié à une question (ou plusieurs questions).

Les problèmes posés dans les manuels ont différentes finalités :

- avec les uns, on cherche à renforcer, consolider des savoirs et savoir-faire qui existent déjà chez l'élève ;

- avec d'autres, il s'agit de repérer, sur un thème précis, les compétences effectives des élèves, leurs difficultés spécifiques (à titre diagnostic ou à titre sommatif) ;

- d'autres encore offrent *a priori* une résistance aux élèves : les élèves n'ont en général pas encore le savoir ou savoir-faire expert qui permet de répondre aux questions ; ils vont donc, si le questionnement est bien construit, développer certaines attitudes, mettre en jeu certaines procédures qui vont contribuer à construire cette notion experte.

Ces derniers énoncés sont le plus proches des problèmes que rencontre le mathématicien, ce sont donc eux qui donnent du sens aux mathématiques. Ils doivent bénéficient d'un traitement particulier à l'école. C'est pour eux que le temps d'une réforme, on a inventé l'expression *situations - problèmes*[1]. Malheureusement on trouve peu de problèmes de ce type dans tous les manuels.

b. L'habillage, le contexte d'un problème

Dans les manuels, on trouve souvent, pour un texte associé à une question, deux libellés : exercices et problèmes. L'usage courant voudrait qu'on appelle exercice une suite de consignes décontextualisées (ou placées dans un contexte exclusivement mathématique), comme par exemple

(1) *Fais la division entière de 235 par 12*
(2) *Calcule 125 + 47 + 6*

et problème une suite de consignes placée dans un contexte dit "de la réalité" comme par exemple,

(3) C*ombien de boîtes de 12 œufs peut-on remplir avec 235 œufs ?.*
(4) *Chez le libraire, Pierre achète un livre à 125 F, une bande dessinée à 47 F et un journal à 6 F. Combien dépense-t-il ?*

Cette distinction ne porterait pas à conséquence si elle n'était suivie d'une hiérarchisation implicite : un exercice sur une notion serait résoluble par l'élève plus tôt qu'un problème comparable sur la même notion ; autrement dit un exercice serait plus simple qu'un problème, il intervient donc plus tôt dans les manuels. Examinons cette soi-disant hiérarchie.

***** Le problème des œufs (3) peut être résolu par un individu qui ne connaît pas la division : il peut en effet dessiner la situation et la résoudre par toute sorte d'approche (dessin effectif par paquets, approches additive ou multiplicative). Par contre l'énoncé (1) n'est compréhensible que par celui qui connaît le mot division et qui surtout sait que cette opération est liée à une répartition équitable avec reste minimum. L'énoncé contextualisé des œufs nécessite donc moins de connaissances préalables que l'autre énoncé (1), il peut donc être résolu plus tôt. Un "bon contexte" peut ainsi apporter du sens à une notion.

---

[1] cf. R. DOUADY (1984) *Cahier DIDIREM* n°3, IREM de Paris 7 et *Instructions officielles de 1980* où, déjà le sens premier était en partie perdu. Nous nous limiterons quant à nous au mot *problème*.

***** Pour un élève qui connaît l'addition, les énoncés (2) et (4) sont mathématiquement équivalents ; l'énoncé (4) n'offre pas plus de difficulté mathématique que l'énoncé (2).

L'habillage seul d'un énoncé, le fait qu'il soit référencé à une situation du côté de la réalité ou du côté des mathématiques n'est donc pas une distinction pertinente dans une problématique mathématique. Nous ne retiendrons pas la distinction exercice - problème sous cette forme.

II. Qu'est-ce qu'un problème mathématique ?

A. La distinction problèmes et exercices. Notion d'intention

Dans la vie courante, un problème est quelque chose qui résiste, qui crée un obstacle à un traitement immédiat. Un *problème mathématique* possède ce caractère, il doit offrir une résistance à l'apprenant. Cette résistance peut être vaincue en utilisant un ou plusieurs outils mathématiques[2]. Si l'énoncé n'offre plus cette résistance, il devient un *exercice*, une situation pour *exercer* un ou plusieurs outils mathématiques connus.

On peut donc parler de problèmes aussi bien en tout début d'apprentissage d'une notion, parce que l'élève ne possède pas encore l'outil expert qui lui permettrait de résoudre vite ce problème, qu'en fin d'apprentissage, lorsque l'élève doit combiner plusieurs outils mathématiques connus pour répondre aux questions. Dans tous les autres cas, où l'élève n'a qu'à appliquer un outil (ou plusieurs) qu'il a déjà acquis, on parlera d'*exercice*. Donnons deux exemples.

- Le texte « *partager équitablement 138 bonbons entre 15 enfants* » est en général un problème (dans un contexte lié au réel) pour un élève de CE2, mais devient un exercice pour un élève de CM2. C'est un problème de division, plus généralement appelé problème multiplicatif.
- En cycle 1, la situation suivante, « *poser devant l'élève côte à côte 5 cailloux et 3 cailloux et demander le nombre de cailloux* », n'est pas un problème additif, mais un exercice de dénombrement. Par contre, « *prendre une boîte vide, y déposer devant l'élève 5 cailloux, puis encore 3 cailloux, fermer la boîte et demander de trouver le nombre de cailloux dans la boîte* » est un problème (ou un exercice) additif (à condition qu'on ne puisse ouvrir la boîte que pour contrôler la solution proposée). En effet l'élève doit imaginer, penser le contenu de la boîte, il peut le matérialiser (avec ses doigts, des jetons), le dessiner, il peut compter 6, 7, 8, il peut aussi déclarer 8 car 5+3=8, etc. La recherche du mode de traitement du problème est à sa charge.

Remarquons que, si l'enfant ouvre la boîte pour chercher la réponse, il se situe dans une problématique du réel (il détourne l'intention mathématique du

[2] Mais qu'est-ce qu'un outil mathématique ? Nous nous contenterons d'une réponse naïve à cette question : le nombre est un outil au même titre que les opérations (et leurs algorithmes), la proportionnalité (et ses modes de résolution) ...

problème tourné vers l'addition, il retourne au dénombrement), mais non dans une problématique mathématique. Ainsi tout problème mathématique dans l'enseignement est donné avec une intention[3], celle de vouloir activer certaines notions ou de préparer la construction de nouvelles notions. On dit d'ailleurs que le problème (ou l'exercice) relève des outils mathématiques qui permettent de le résoudre. Le problème est bien construit quand il contient les contraintes qui exigent de rester dans l'intention souhaitée (dans l'exemple ci-dessus, la contrainte est de ne pas ouvrir la boîte pour anticiper sans se limiter à un constat). Une des tâches du professeur (et non des moindres) est de faire en sorte que les contraintes soient les moins artificielles possibles, qu'elles soient naturellement attachées à la situation, de façon à ce que l'élève les intègre pleinement dans sa recherche.

B. Situation réelle, situation évoquée et mathématisation

Un problème énoncé par écrit, quel qu'il soit, même s'il se réfère au réel, ne constitue pas une situation réelle, il ne fait (dans les meilleurs des cas) qu'évoquer le réel qui donne le cadre de la situation. La résolution d'un problème ou d'un exercice mathématique ne s'effectue pas dans la réalité, elle doit être pensée. Un problème se résout dans une problématique mathématique, l'accès au réel (quand la situation le permet) procure un contrôle des résultats et une validation. Mais l'accès au réel n'est pas total. Examinons cela sur un exemple.

1. La situation réelle

Acheter de la baguette de bois pour entourer un sous-verre de forme rectangulaire.

La résolution se fait alors dans une problématique de la réalité.

On peut prévoir d'en acheter un peu plus en cas d'erreur. Doit-on réfléchir à une taille en biseau pour encadrer joliment les quatre sommets du rectangle ou à un autre type de jonction ?

Plusieurs procédures sont possibles pour mesurer : on peut par exemple utiliser un mètre (ou une ficelle reportée sur un mètre rigide ou ...) pour simultanément mesurer et additionner les mesures de longueurs, mais on peut aussi mesurer longueur et largeur, puis les additionner deux fois ; cela suppose alors une connaissance au moins implicite de la notion de périmètre du rectangle.

[3] C'est une des différences avec un problème de mathématicien dont la seule intention est qu'il soit correctement résolu.

2. Une situation évoquée sur le même thème

Remarquons d'abord qu'il peut y avoir diverses évocations possibles de la situation réelle précédente : avec le dessin à l'échelle du cadre, avec un schéma sur lequel on reporte les mesures, etc.). Arrêtons nous sur l'énoncé suivant.

Paul possède un sous-verre de forme rectangulaire, dont les dimensions sont 42 cm sur 35 cm. Il veut construire un cadre autour. Quelle longueur minimum de baguette doit-il acheter ?
La résolution se fait dans une problématique mathématique.
Là le résultat attendu est l'exacte mesure du périmètre (154 cm). Le mot "minimum" essaie d'évacuer les références au réel que seraient une taille en biseau sur les quatre coins, ou un autre style de coupe.

Une procédure possible consiste à chercher un schéma : il s'agit de dessiner le rectangle, mais il ne tient pas sur une feuille, on peut alors dessiner un rectangle quelconque et chercher à voir comment obtenir son périmètre, pour ensuite additionner les longueurs deux fois.

3. Quelques remarques

• Dans des problèmes ou exercices mathématiques, certains mots font fonction de contrôle de l'évocation (ici minimum) ; ils ne sont pas toujours perçus en tant que tels ; c'est un phénomène de contrat.
• Cette dialectique entre problématique de la réalité et problématique mathématique est particulièrement sensible pour les élèves E et F. En effet les problèmes sur lesquels ils réagissent le plus sont ceux pour lesquels la réalité contredit leurs résultats[4]. Ils acceptent alors de remettre eux-mêmes en cause leurs procédures.

Il est nécessaire de faire prendre conscience aux apprenants F des deux problématiques en jeu, la problématique de la réalité et la problématique mathématique, celle qui fait partie du contrat pour l'école. Une des difficultés de l'enseignement en F sera d'ailleurs de relier problématique du réel, problématique mathématique et problématique professionnelle de l'atelier, où là, les objets d'étude sont plus réels, mais soumis à des contraintes liées aux instruments disponibles.

---

4 C'est pourquoi les activités géométriques sont particulièrement pertinentes pour les F. En effet pour certaines situations géométriques telles que reproduction de figures planes ou de solides, la distance entre problématique de la réalité (dessins ou solides) et problématique mathématique peut être réduite.

C. Qu'est-ce que faire des mathématiques à l'école ?

Faire des mathématiques à l'école, c'est donc :

- résoudre des problèmes, c'est-à-dire anticiper le résultat d'une action soit réelle, soit évoquée ou encore symbolique,

- sans mener effectivement cette action (si elle est réelle ou évoquée), mais en la représentant par des schémas, par des écritures symboliques, en utilisant des outils mathématiques
- soit directement (par appel à une démarche efficiente déjà connue ou à un outil particulièrement efficace), soit après avoir construit une stratégie,
- en ayant des moyens de contrôle de la stratégie et de validation des résultats produits ;

- mais c'est aussi s'entraîner au maniement d'outils efficaces, introduits à l'occasion de la résolution des problèmes qui précèdent.

Faire des mathématiques à l'école, c'est donc résoudre des problèmes dans une problématique mathématique.

III Exemples de problèmes à construire par le professeur

Le maître construit des situations qui donnent l'occasion aux élèves de faire des mathématiques. Ces situations sont tantôt des problèmes, tantôt des exercices. Sont alors à la charge de l'élève plusieurs tâches, pas seulement mathématiques : la lecture du texte, de la question, la compréhension, la représentation, le traitement (la construction d'une démarche de résolution), l'explicitation de la solution. Le professeur peut moduler ses exigences par rapport à ces différentes phases, par exemple il peut choisir de lancer le problème par oral (pour éviter lecture de texte avec image), il peut matérialiser le problème de façon à faciliter la représentation (attention au rôle du matériel), il peut laisser l'élève poser un problème au professeur (pour changer la rapport de l'élève à la question), etc.

Les problèmes choisis pour apprendre doivent permettre une entrée rapide dans le problème par l'élève, un intérêt de la part de l'élève pour la question posée, la construction possible de procédures de résolution par l'élève allant dans la direction visée par l'apprentissage, si possible un contrôle sur les procédures ...

Il est alors intéressant de prévoir une gestion du groupe ou de la classe, en plusieurs phases :
- un temps de recherche individuelle, avec l'aide éventuelle du professeur pour lancer la recherche, sans induire de solution,
- un temps de confrontation des procédures : les élèves constatent alors, avec l'aide du professeur, que certaines procédures ont abouti, mais qu'elles sont différentes les unes des autres, que d'autres n'ont pas abouti, mais qu'elles auraient pu se poursuivre ...

On constate que les élèves A.I.S., face à ces derniers problèmes, emploient des procédures particulièrement "dispersées", beaucoup plus que dans une classe "ordinaire". Quelques raisons peuvent être signalées a priori : la variété des parcours des enfants regroupés dans l'A.I.S., les effets des déperditions successives, le peu de contrôle qu'ils ont l'habitude d'exercer sur leurs productions.

La phase de synthèse par le professeur est l'occasion pour l'élève de porter un regard sur ce qui lui a permis de réussir ou sur ce qui l'a fait "perdre".

C'est la répétition d'activités de ce même type qui permettra à l'individu de se forger une idée du "résoudre un problème de mathématique" et d'acquérir une "certaine autonomie".

Un entraînement (série d'exercices) sur des activités de même type est indispensable pour fixer les connaissances et procurer à l'individu le plaisir de la réussite répétée.

Les problèmes classiques que l'on peut rencontrer dans les manuels n'offrent pas souvent de telles caractéristiques (même sous les expressions *activité de recherche*, *activité préparatoire*, *recherche*, etc.). Pour construire du sens et apprendre à raisonner en permettant un auto-contrôle de la situation, pour distinguer la problématique du réel de la problématique mathématique, il est nécessaire de vivre des problèmes réels (contextualisés) mais relevant d'une problématique mathématique, et ce avant de passer aux situations seulement évoquées.

Dans cette partie du cours, il s'agit de trouver, construire de tels problèmes avec les stagiaires et de leur donner des références bibliographiques qui devraient leur permettre de trouver de la matière (essentiellement nombre et numération pour les E, plus diversifié pour les F).

Suivent quelques exemples pour les E (déjà vus en numération).

a. Suite de situations pour la compréhension de l'aspect algorithmique de la numération écrite : le jeu du château

Lire *Apprentissages numériques ERMEL CP* (1991) éditions Hatier, page 281 et suivantes.

L'élève peut entrer dans le problème grâce au conte qui lui donne du sens. Il a plusieurs procédures à sa disposition, par exemple dans le champ numérique qu'il maîtrise oralement :

- parcourir la suite de cases et réciter la comptine jusqu'à la case du trésor, chercher sur la bande numérique l'écriture en chiffres du nombre cité ;
- prendre des indices sur la ligne de la case trésor et déduire l'écriture chiffrée ;
- prendre des indices sur la colonne de la case trésor et déduire l'écriture chiffrée.

Quand la situation globale a pris du sens, que l'élève a une représentation de la tâche finie, le thème du château peut être réinvesti dans plusieurs exercices individuels, qui permettront à l'élève de conforter et fixer ses connaissances.

b. Travail avec Magali sur la compréhension de l'aspect décimal de la numération

cf. C. PEZÉ, La rééducation de Magali[5]

IV. Résolution de problèmes par l'élève

Il s'agit ici de renvoyer le stagiaire à des lectures qui lui permettront d'affiner sa vision de la tâche de l'élève résolvant un problème.

Listons les différentes tâches :
- la lecture de l'énoncé, de l'image, des questions : notamment difficultés liées à la sémantique, à la syntaxe,
- la prise d'informations nécessaires au traitement, donc un passage obligé par une représentation du problème,
- le traitement du problème, et les difficultés liées notamment au décalage entre la structure sémantique et la structure mathématique d'un énoncé,
- la formulation de la réponse, la communication à un tiers.

Sur quels points pouvons nous avancer avec les stagiaires en formation AIS ?

a. La spécificité de la lecture d'un problème

S'agit-il de faire une lecture directe des informations ou, l'appropriation des informations nécessite-t-elle un travail de reformulation (lecture d'un tableau, d'un dessin, ...) ? Une fois la question lue, il est souvent nécessaire de relire l'énoncé pour en retirer des informations nécessaires au traitement : FAYOL[6] note que le placement en tête de la question entraîne une amélioration systématique des réussites aux problèmes additifs pour tout type de problème et tout âge. Quelle progression adapter pour améliorer en fin de cours l'autonomie du sujet sur la lecture du problème ?

Références

- dans la revue *Grand N* , I.R.E.M. de Grenoble :

- n°42 F. BOULE, C. WASSERER (1988) "Lecture des énoncés mathématiques"
- n°50 R. NEYRET (1992) "Lecture d'énoncés et progression thématique"
  D. BUTLEN (1992) "Situations d'aide aux élèves en difficulté et gestion de classe associée"
- n°51 J. BOLON (1993) "Regards insolites sur quelques manuels"

- dans les *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* volume 4, IREM de Strasbourg :

[5] Article présent dans ce tome.

[6] *L'enfant et le nombre*, 1990, page 174, éditions Delachaux et Niestlé, Neuchatel.

R. DUVAL (1991) "Interaction des niveaux de représentation dans la compréhension des textes".

b. La notion de structure : un exemple, les problèmes additifs

Dans ce paragraphe, on peut traiter
- de la notion de champ de problèmes, en liaison avec les champs conceptuels de G. VERGNAUD, en faisant travailler les stagiaires sur les problèmes additifs ;
- de l'impact des présentations et modes de formulation des énoncés, notamment des notions de structure sémantique et structure mathématique de l'énoncé.

Références

- EHRLICH S. (1990) *Sémantique et mathématiques. Apprendre / enseigner l'arithmétique simple*, éditions Nathan.
- FAYOL M. (1990) *L'enfant et le nombre. Du comptage à la résolution de problèmes*, éditions Delachaux et Niestlé.
- VERGNAUD G. (1981) *L'enfant, la mathématique et la réalité*, éditions Peter Lang.

Grâce à ces éléments d'information, on insistera en particulier sur les points suivants, avec les stagiaires en formation :

- couvrir le champ des structures additives, ne pas se limiter à un seul type de problèmes ;
- donner du sens à la soustraction en choisissant des problèmes appropriés.
- prendre garde à évaluer avec des problèmes de même type que ceux sur lesquels on a entraîné les élèves ;
- prendre garde à ne pas ajouter de difficulté sémantique aux problèmes d'évaluation ;

c. La notion de représentation d'un problème

On trouvera les références de quelques ouvrages récents sur la notion de "boîte noire" dans la psychologie cognitive, appliquée aux mathématiques. On citera brièvement :
- la représentation d'un problème par le dessin, par le mime ...
- les représentations plus élaborées : schéma ...
- les aides possibles à la représentation ...

Références

- DESCAVES A. (1992) *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes* Éditions Hachette.

Un début confus, plus intéressant après la page 18.

- JULO J.(1995) *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques*, éditions Presses Universitaires de Rennes.
- JULO J. (1996) Une séquence d'apprentissage autour du problème de la proportionnalité, pages 110-115, in *Documents pour la Formation des Professeurs d'École en Didactique des Mathématiques*, tome V, IREM de Paris 7.
- SARRAZY B. (1996) *Résolution de problèmes et représentation*. Thèse de 3ème cycle. Université de Bordeaux II.

d. Le transfert ou l'éducabilité cognitive

Qu'en est-il de l'existence d'une capacité générale à résoudre les problèmes ? On peut évoquer à cette occasion les propositions institutionnelles de médiation cognitive (ARL, PEI, etc.) auxquelles seront confrontés les stagiaires A.I.S, et leur redonner une plus juste place

Référence

COULET J-C. (1996) Les méthodes d'éducation cognitive, p. 145-168 in *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques (1997)* tome V, IREM de Paris 7.

Bibliographie pour les formateurs de mathématiques en AIS

Collectif : Renée Bosc, François Boule, Henri Delègue,
Catherine Houdement, Louis Roye,
Marie-Hélène Salin, Danielle Vergnes

Extrait de Documents pour la formation des professeurs des écoles en didactique des mathématiques - Besançon 1997.

Cette bibliographie tente de rassembler des ouvrages plus spécifiquement utiles aux formateurs de maîtres A.I.S. des options E, F, G et en partie, pour ce qui concerne les Classes d'intégration scolaire (CLIS), de l'option D. Elle cite aussi quelques ouvrages à caractère général, éclairant le formateur sur les dispositifs spécialisés dans les structures ordinaires de l'école et du collège. Elle évite les ouvrages désuets ou dépassés. Elle ne reprend pas les ouvrages qui font partie de la culture générale de base de tout formateur de professeurs d'école en mathématiques, sauf s'ils présentent des articles, études de cas, etc., particulièrement pertinents pour l'A.I.S. Cette remarque sur les ouvrages est aussi valable pour les jeux.

Le plan de classement retenu pour la bibliographie présentée est le suivant :

I.Présentation de l'A.I.S. et documents spécifiques

- 1.Les textes officiels.
- 2.Quelques livres généralistes sur l'A.I.S.
- 3.Revues A.I.S.

II. Pratiques pédagogiques (école / collège) :

- 1. Mathématiques de l'école (ou du collège)
- 2. Nombres entiers et opérations
- 3. Géométrie / Mesure
- 4. Fractions, nombres décimaux et opérations
- 5. Fonctions numériques et proportionnalité
- 6. Logique et raisonnement
- 7. Outils d'évaluation intégrée au cadre scolaire

III. Revues où figurent régulièrement des articles intéressants exploitables pour l'enseignement des mathématiques en formation A.I.S.

IV. Éléments d'informations psycho-cognitives particulièrement intéressants :

- 1) Concernant les dysfonctionnements cognitifs
- 2) Concernant l'aspect psycho-cognitif de certains apprentissages
- 3) Concernant l'approche psychosociologique de l'enseignement
- 4) Concernant les remédiations cognitives et le développement de compétences transversales

Dispositifs spécialisés dans les structures ordinaires de l'école et du collège

V. Des moyens d'investigations à propos de l'acquisition de certains concepts

VI. Études didactiques portant sur l'enseignement des mathématiques

VII. Études didactiques ou psychologiques utilisables pour analyser des productions d'élèves

NB : La lettre **D, E, F, G** figure lorsque l'ouvrage concerne plus spécifiquement l'option concernée. A défaut, l'ouvrage concerne toutes les options.
Un nombre suit parfois certaines publications. Il indique un niveau de difficulté de lecture : 1: *facile*, 2 : *moyen*, 3 : *difficile*.

I. Présentation de l'AIS et documents spécifiques

1. Les textes officiels

B.O. n°27 du 09/07/1987
** Organisation de l'examen du Certificat d'aptitude aux Actions Pédagogiques Spécialisées d'adaptation et d'intégration Scolaires (CAPSAIS)*
** Options et programmes du Certificat d'Aptitude aux Actions Pédagogiques Spécialisées d'adaptation et d'intégration Scolaires.*
B.O. n°6 du 11/02/1988
Compléments aux deux textes précédents
B.O. du 29/03/1990
Circulaire du 20/03/90 : *Enseignements généraux et professionnels adaptés : admission et orientation scolaires des élèves.*
B.O. n°16 du 16/04/1990
Circulaire du 09/04/90 : *Mise en place et organisation des réseaux d'aides spécialisées aux élèves en difficulté.*
B.O. spécial n°2 du 24/05/1990
Référentiels des domaines généraux des CAP
B.O. n°47 du 20/12/1990
Circulaire du 14/12/90 : *Organisation des enseignements généraux et professionnels* (SES EREA, Enseignement spécial, Intégration des Handicapés)
B.O. n°26 du 27/06/1996
Circulaire du 20/06/96 ; *Enseignements généraux et professionnels adaptés dans le second degré.*
Programmes de l'école primaire 1995 CNDP Hachette Éducation
Programmes des classes de 6ème (1996), 5ème et 4ème (**1997**) des collèges
B.O. spécial n°3 du 8/05/97
Rénovation du Certificat d'aptitude aux Actions Spécialisées d'adaptation et d'intégration Scolaires (CAPSAIS)
B.O. du 25 juin 1998
Note de service du 19-06-1998 : *Mise en œuvre des Enseignements Généraux et Professionnels Adaptés dans le Second Degré*.

B.O. n° 26 du 25 juin 1998
Circulaire du 19-06-1998 : *Orientations pédagogiques pour les enseignements généraux et professionnels adaptés dans le second degré*
Rapport de la Journée nationale des SEGPA, Paris janvier 2000, *10 priorités pour accueillir les élèves en grande difficulté dans le collège pour tous.*(disponible dans les collèges)

2. Quelques livres ou revues généralistes sur l'A.I.S.

- **GILLIG J-M** *L'aide aux enfants en difficulté à l'école,* (1998) Ed. Dunod
Incontournable pour les maîtres de l'option E de l'AIS. **E**

- **GILLIG J-M** *Intégrer l'enfant handicapé à l'école,* (1996) Ed. Dunod
Incontournable pour les maîtres qui accueillent un enfant handicapé dans leur classe et pour les maîtres de l'option D de l'AIS **D**

- **HERVÉ G**. (1997*) Intervenir en réseaux d'aides spécialisées aux enfants en difficulté : histoires de Paul, Hugo et Pierre,* Éd. Colin, Collection Formation des enseignants.
Intéressant sur les aspects généraux de la rééducation.

- **LAGUARDA** (1996) *Pour une classe réussie en A.I.S.* Éditions Nathan.
Des informations sur l'A.I.S. nécessaires pour un débutant et des fiches-exemples d'activités.

- **LESAIN DELABARRE** (1996) *Le guide de l'A.I.S.* Éd. Nathan Pédagogie.
Présentation générale de l'AIS.

- **COUSIN C**. (2000) *Enseigner en SEGPA et en EREA.* Ed. Delagrave **F**

3. Revues sur l'A.I.S.

- ***Cahiers de Beaumont***
- ***Courrier de Suresnes***
- **La nouvelle revue de l'AIS** (depuis 1998)

- N° 14 : Les enseignements généraux et professionnels adaptés, dossier coordonné par André Philip

- N° spécial (2001) : Élèves en difficulté : les aides spécialisées à dominante psychologique.

Qu'est-ce qu'un maître E ? Quelle connaissance de l'enfant en difficulté se doit-il d'acquérir? Quelles sont précisément ses missions? Comment fonctionnent les dispositifs d'aide? Quels outils d'observation, d'évaluation, d'intervention, de communication le maître E peut-il utiliser?

Dispositifs spécialisés dans les structures ordinaires de l'école et du collège

A partir de ces questions, une équipe de six formateurs impliqués de longue date dans la formation AIS approfondissent, à partir de réflexions pédagogiques, mais aussi institutionnelles et critiques, une culture et une identité professionnelle centrées sur la résolution des difficultés d'apprentissage.

E

Pour les trois revues voir Centres nationaux de l'A.I.S.,
CNEFEI, 58-60, avenue des Landes,
92150 SURESNES La nouvelle revue de l' AIS (depuis 1998)

II. Pratiques pédagogiques (École - collège)

1. Mathématiques de l'école (ou du collège)

• **CHARNAY R**. (1996) *Pourquoi des mathématiques à l'école* ? Éd. ESF. Collection Pratiques et Enjeux pédagogiques.
Point de vue sur fondements , enjeux et méthodes liés aux mathématiques et à leur enseignement.

• **ERMEL** *Apprentissages Mathématiques à l'École Élémentaire*, Éd. Hatier
- niveau CE (1979) tome 1 et tome 2
- niveau CM (1981-82)
  tome 1 : opérations, algorithmes et problèmes
  tome 2: décimaux, mesure
  tome 3 : fonctions numériques, géométrie. **EFG**

• **ERMEL** (1991) *Apprentissages mathématiques en sixième.* Éd. Hatier **F**
Des idées d'activités sur fonctions-décimaux, proportionnalité et symétrie.

• **IREM de Bordeaux** (1980) *Ateliers mathématiques*
Quelques jeux et exercices originaux destinés aux élèves à partir du CE2. **F**

• **IREM de Grenoble** (1987) *Activités mathématiques soutien* $6^{ème}$ -$5^{ème}$
Éd. Magnard. Des fiches d'exercices pour chercher en trois fascicules : activités numériques, partages activités géométriques/proportionnalité, graphiques. **F**

A l'origine, les trois ouvrages qui suivent sont des sources d'inspiration d'activités pour la maternelle. Elles donnent des idées d'activités **E** et **G**.

• **BOULE F**. (1985) : *Manipuler, organiser, représenter,* Pratiques Pédagogiques, Éd. A. Colin.

• **CHAMPDAVOINE L.** (1986) *Les Mathématiques par les Jeux.* (tome 2, *Grande Section)* Éd. Nathan

• **CHAUVEL D., MICHEL V.(**1984) *A la maternelle des jeux avec des règles,* Éd. Retz. Exploitation et fabrication de jeux de stratégie.

2. Nombres entiers et opérations

- **DELAHAXE A., GODENIR A**. (1991) *Agir avec le nombre (à l'école maternelle).* Éd. Belin

- **ERMEL** (1990) *Apprentissages numériques en grande section de Maternelle,* Éd. Hatier
- **ERMEL** (1991) *Apprentissages numériques au CP*, Éd. Hatier
- **ERMEL** (1993) *Apprentissages numériques au CE1*, Éd. Hatier
- **ERMEL** (1995) *Apprentissages numériques au CE2,* Éd. Hatier
- **ERMEL** (1997) *Apprentissages numériques au CM1*, Éd. Hatier
- **IREM Bordeaux** (1985) *La multiplication à l'école élémentaire.*
- **IREM Bordeaux** (1985) *La division à l'école élémentaire.*

Situations décrites et justifiées.
- **APMEP** (1 982).*Jeux 1. Les jeux et les mathématiques,* publication n°44 **GEF**
- **APMEP** (1985) *Jeux 2. Jeux et activités numériques,* publication n°59 **GEF**
- **BOULE F.** (1993) *Jeux de calcul.* Ed. A.Colin **GEF**
- **IREM Paris 7** (1985) *Jeux du Club des Cordelières.*

Matériel cartonné pour calcul mental et activités spatiales, puzzles ... **GEF**
- **BARATAUD D** (1992). *Les spirales.* Édité par les Centres nationaux AIS de Suresnes. Situations décrites sur la numération. **E**

Jeux
- ARCHITEK : Solides, de l'espace à leurs représentations dans le plan
- LOGIX : Traiter des informations positives et négatives.

L'éditeur de ces jeux est LEXIDATA, M. LYONS et R. LYONS, Éditions Mondia Laval Québec 1991. Ils sont actuellement distribués par les éditions ACCES et aussi par ÉCOLE ET BUREAU, Centre Commercial Bois l'Abbé, 1, rue Jean Goujon, 94500 Champigny. Tél: 01 48 80 31 72.
- ***Les Mathoeufs :***, Une cassette, éditeur CNDP/ASCO.

12 séquences de 4 min, posant des questions de reconnaissance logique.

3. Géométrie - Mesure

- **APMEP** (1983*) Aides pédagogiques pour le CM, tome Géométrie.*

Des idées et activités géométriques en dimension 2 et 3 **F**

- **BARATAUD D., LESTIEVENT P**. *Activités géométriques 1* (1990) et *Activités géométriques* 2 (1994).

Supports d'activités de construction de figures planes. **F**

• **BOULE F.** *Questions sur la géométrie et son enseignement Éd. Nathan-Pédagogie*
A quoi sert la géométrie ? Comment l'enseigner ? Selon quels objectifs et quels contenus ? Un ouvrage incontournable.

• **HUSSON-CHARLET JC** (1995) *Les erreurs en dessin technique, pourquoi ? Comment y remédier ?*
Éd. Collection Penser et Agir. **F**

• **INRP** (1984) *L'apprentissage du dessin technique : des constats d'échecs et des moyens de réussite.* Collection Rapports de recherche n°9(épuisé) **F**
Les deux ouvrages qui précèdent proposent des études d'erreurs d'apprenants formés au dessin industriel et des projets d'enseignement.

• **CRDP de Nice** (1990) *Géométrie pratique. Surfaces et lignes*
Des idées d'évaluation en géométrie plane. **F**

• **IREM et CRDP de Lille** (2000) *Travaux géométriques, apprendre à résoudre des problèmes, au cycle 3* **F**
Apprentissage à la résolution de problèmes de reproduction et de construction de figures. De nombreuses situations d'apprentissage sont décrites et analysées. Pour chaque situation les auteurs précisent les notions mathématiques en jeu, les compétences visées, les objectifs, l'analyse de la tâche, un déroulement possible.

• **IREM de Paris 7** (1983) *Mesure des longueurs et des aires (liaison école-collège).* **F**

• **IREM de Paris 7** (1987) *Situations d'apprentissage en géométrie 6ème-5ème.* **F**

• **IREM de Grenoble** (1983) *Introduction à la géométrie dans l'espace* **F**

• **IREM de Bordeaux** (1996) *Géométrie en 6ème* **F**

• **IREM de Rouen** (1986) *Géométrie, une approche par le dessin géométrique au CM2.* **F**

Les brochures IREM ou CRDP ci-dessus donnent des idées d'activités possibles pour les F.

4. Fractions, nombres décimaux et opérations

• **IREM Rouen** (1994) *La machine à partager, Fractions et décimaux au cours moyen.* Une progression sur les nombres autres qu'entiers, partant des fractions vers l'écriture décimale usuelle. **F**

• **IREM Paris 7** (1986) *Les décimaux (liaison école-collège)* .
Liste de situations décrites **F**

5. Fonctions numériques et proportionnalité

• **IREM Rouen** (198 8) *La proportionnalité existe, je l'ai rencontrée*.

Recensement de pistes d'activités possibles sur ce thème depuis le CE. **F**

- **BOISNARD, HOUDEBINE, JULO et al** (1994) *La proportionnalité et ses problèmes,* Éd. Hachette Éducation **F**

Une réflexion sur l'apprentissage de la proportionnalité par les problèmes.

6. Logique et raisonnement

- **APMEP** (1987) *Aides pédagogiques pour le CM, tome Situations-Problèmes* **.**

Des idées de problèmes intéressantes pour les maîtres de l'option F

- **INRP** (1986) *Apprentissage à la résolution de problèmes au cours élémentaire* **F**

Étude de jeux de stratégies organisée autour de l'idée d'un apprentissage à la résolution de problèmes. Édité par CRDP de Grenoble, 11, avenue Général Champon, 38031 Grenoble Codex.

- **IREM Bordeaux** (1985) *Construction et utilisation d'un code de désignation d'objets à l'école maternelle* . Situations décrites **E D**

7. Outils pour l'évaluation intégrée au cadre scolaire

- **EVAPM** *Évaluation du programme de mathématiques* **F**

Quatre tomes : fin de 6ème; fin de 5ème ; fin de 4ème ;fin de 3ème .Remises à jour régulières. A commander à l'APMEP, 26 rue Duméril 75013 Paris.

- **CRDP de Nice** (1 *990) Géométrie pratique* **F**

Des idées d'évaluation en géométrie plane pour les F.

- **IREM de Bordeaux** (nouvelle édition 1996)

Quatre étapes pour une évaluation continue en première partie de cycle 2.
Outils d'aide au maître pour concevoir une évaluation numérique à l'entrée de l'école élémentaire.

- **MEN** (1989 à 1996*) Évaluations nationales CE2 et 6ème.*

Les items choisis peuvent servir de supports à d'autres évaluations. **E G F**

- **MEN** Référentiels des CAP

Se renseigner auprès des inspecteurs de l'Enseignement Technique
Un document indispensable pour les maîtres de SEGPA **F**

III. Revues où figurent régulièrement des articles intéressants pour l'enseignement des mathématiques

- Revue **GRAND N** , publiée par l'IREM de Grenoble, B.P. 41, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex.

Cette revue est publiée 2 à 3 fois par an. On y trouve des articles de réflexion sur certains points particuliers de didactique des sciences, mais aussi beaucoup de descriptions et d'analyses précises de situations de classes, aussi bien pour la maternelle que pour l'école primaire.

- Revue **PETIT x,** publiée par l'IREM de Grenoble (adresse ci-dessus).

Cette revue est plutôt consacrée aux mathématiques du collège, mais elle n'est pas sans intérêt pour l'école primaire car elle sensibilise aux problèmes qui se posent en aval, et on y trouve des idées de situations transférables au CM. Intéressante pour les **F**.

IV. Éléments d'informations psycho-cognitives particulièrement intéressants

1. Concernant les dysfonctionnements cognitifs

- **BERGER M**. (1992) *Les troubles du développement cognitif Approche thérapeutique chez l'enfant et l'adolescent.* Éd. Privat.
Vers une tentative de classification des troubles de l'apprentissage et des propositions de prise en charge thérapeutique.
- **DOLLE J.M**.(1989) *Ces enfants qui n'apprennent pas,* Païdos, Éd. Bayard
Analyse des conduites cognitives des enfants qui n'apprennent pas et présentation de modalités de rééducation permettant à l'enfant d'agir sur le réel pour construire les structures qui lui font défaut. **F**
- **GIBELLO B**. (1984), *L'enfant à l'intelligence troublée (nouvelles perspectives cliniques et thérapeutiques en psychologie cognitive),* PaÏdos, Éd. Bayard.
Analyse d'un point de vue psychique des troubles cognitifs.

2. Concernant l'aspect psycho-cognitif de certains apprentissages

- **BIDEAUD J., MELJAC C., FISCHER J.P.(1991)** *Les chemins du nombre,* Presses Universitaires de Lille. **2 E G**
50 ans après Piaget, un aperçu de travaux de recherche internationaux (surtout anglo-saxons) sur la construction et l'utilisation du nombre et des opérations arithmétiques.
- **Collectif (Claire Meljac, Jacqueline Bideaud, et al.)** *Piaget après Piaget* (1998) Ed. La Pensée Sauvage.
Les apports théoriques de Piaget et leur enseignement sont ici interrogés, de même que les pratiques professionnelles ; en quoi le travail des psychologues et des pédagogues s'inspire-t-il des modèles piagétiens ?
- **FAYOL M**. (1990), *L'enfant et le nombre. Du comptage à la résolution de problèmes*. Delachaux et Niestlé. **2 E F G**
État actuel sur les connaissances de psychologie cognitive sur les apprentissages numériques.
- **JULO J** (1995) *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques,* Collection Psychologie, Éd. Presses Universitaires de Rennes . **2 EFG**
La résolution de problèmes passe par la représentation de ces problèmes. Comment se représente-t-on un problème ? Comment aider des élèves en difficulté à se construire des représentations performantes ?
- **PECHEUX M.G**. (1990) *Le développement des rapports des enfants à l'espace.* Éd. Nathan. Comment l'homme intègre-t-il les informations spatiales ? Quel rôle joue l'environnement ?

- **TAURISSON A**. (1993) *Pensée mathématique et gestion mentale*, Éditions Bayard. Un point de vue simple et concret sur le développement d'une pédagogie de l'intuition mathématique. **EFG**

3. Concernant l'aspect psychosociologique de l'enseignement

- **CHARLOT B., BAUTIER E**. (1993) *Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques*, Repères N° 10, Topiques Éditions.
Étude du sens que peut avoir pour des élèves le fait d'aller à l'école et d'apprendre des mathématiques.
- **NIMIER J.** (1988), *Les modes de relation aux mathématiques*, Éditions Méridiens Klincksieck. Comment les mathématiques sont souvent revêtues de fantasmes, appréhendées au travers de divers mécanismes de défense, pour être utilisées dans la dynamique psychique de chaque individu.
- **VERMERSCH P.** (1994), *L'entretien d'explicitation en formation initiale et en formation continue*, Éd. ESF.
Propositions d'outils méthodologiques pour aider l'enseignant à verbaliser ses actions d'enseignement, à permettre aux élèves d'expliciter et de prendre conscience de leurs propres démarches.

4. Concernant les remédiations cognitives et le développement de compétences transversales

- **COULET J.C** (1996), Les méthodes d'éducation cognitive, pp.145-168, dans *Documents pour la formation des professeurs d'école en mathématiques* COPIRELEM, tome V (Rennes), IREM de Paris 7
Un point sur fondements et efficacité des méthodes de remédiation cognitive.
- **REY B.** (1996) *Les compétences transversales en question*, Éd. ESF Collection Pédagogies.
L'analyse de la notion de compétence transversale et l'étude de la possibilité de transfert cognitif.

V. Des moyens d'investigations à propos de l'acquisition de certains concepts

A. Le test des concepts de base de Boehm (GS, CP et CEI)

Première édition en 1973. Le Boehm est révisé en 1981. Une version dite préscolaire s'adressant aux enfants de 3 à 5 ans est publiée en 1990. Ce test est basé sur des concepts dits de mise en rapport (plus, moins, premier, dernier, même, différent) : 50 concepts.

B. Test des Relations Topologiques (T. R.T)

Évaluation de la capacité à **utiliser** *(L'avion est dessous des nuages, là il est...... des nuages) ou* à **comprendre** *(montre moi l'avion qui est au dessus des nuages)* les prépositions ou adverbes qui, dans la langue, servent à indiquer la localisation

dans l'espace (25 locatifs, par exemple devant, en dessous, etc., id Boehm allégé).
Première version en 1977. La version définitive est étalonnée en 1981 sur des enfants de 3 ans à 6 ans (plus ou moins 6 semaines).

C. UDN 80, éditeur EAP
Construction et utilisation des premiers nombres. Travail de la section de bio-psychopathologie de l'enfant dirigée par C. MELJAC (Hôpital Henri Rousselle à Paris), édité en 1980.
Ce sont des épreuves et non des tests. Ces épreuves sont extraites pour la plupart du travail de Piaget. Du fait de l'interaction avec l'enfant, on peut voir autre chose que lors des tests papier-crayon. Les épreuves sont de plusieurs types :

- épreuves concernant les structures logiques élémentaires (classifications et sériations),
- épreuves de conservation : terme à terme, des longueurs,
- épreuves portant sur l'utilisation spontanée du nombre par l'enfant,
- épreuves mettant en cause la notion et l’origine, de point de départ d'une action.

D. ECPN: Épreuve Conceptuelle de résolution de Problèmes Numériques
Édité par le Groupe CIMETE (Compétences et Incompétences en Mathématiques chez des Enfants présentant des Troubles Exceptionnels), dirigé par Claire MELJAC, Hôpital Sainte Anne, Paris.
Cette épreuve consiste en une batterie applicable dans un temps limité (30 minutes), étalonnée auprès d'enfants tous venants et auprès d'enfants présentant différents troubles de développement. Cette batterie a été publiée en 1995 dans *l’ANAE* (numéro hors série janvier 1995), mais aussi dans la revue *Courrier de Suresnes* n°64 ("Une aide au diagnostic des compétences numériques destinée aux enfants affectés de difficultés sévères d'apprentissage", 1995, pages 29 à 38).

E. TAS : Tests d'Acquisition Scolaire, utilisés par les psychologues scolaires**.**
Ces tests sont les mêmes pour les enfants du CE1 au CM2. On mesure leur degré d'avancement dans le test.

VI. Études didactiques portant sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté

- **BRIAND J., CHEVALIER M.C.** (1995) *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques*, Éd.Hatier Pédagogie.
- **BROUSSEAU G.** (1980) *Les échecs électifs en mathématique dans l'enseignement élémentaire*. Bulletin de laryngologie n°2-3 1980 (article disponible au LADIST, 40, rue Lamartine, 33400 TALENCE) **2**
- **BUTLEN D.** (1991) *Situations d'aide aux élèves en difficulté et gestion de classe associée*, Grand N n°50,29-58 **2**

COPIRELEM (1996) ***Documents pour la formation des professeurs d'école en mathématiques*** **tome V (Rennes**), IREM de Paris 7. On y trouvera, en particulier, un article sur des caractéristiques d'enfants en difficulté et deux exemples de situations mathématiques (BUTLEN D., 9-22), un autre sur une action de formation continue sur ce thème (BUTLEN D., 65-86) et le texte de trois conférences :

- Que nous apprennent les enfants en difficulté ? (PERRIN M.J., 121-144)
- Les méthodes d'éducation cognitive (COULET J.C., 145-168)
- La rééducation mathématique à travers une étude de cas (PEZE C., 169-192)

• **FAVRE Jean-Michel** (1993) *La multiplication* Grand N n°53, pages 27 à 38, IREM de Grenoble. **D**

• **JULO J., HOUDEBINE J**., (1988) *Les enfants en difficulté dans le premier cycle : pour une intervention didactique différenciée,* Revue Française de Pédagogie, n'84, juillet 1988. **2**

• **LABORDE C., VERGNAUD G**. (1994) *L'apprentissage et l'enseignement des mathématiques,* pp. 63-130 in VERGNAUD G. dir, *Apprentissages et didactiques, où en est-on ?* Éditions Hachette Éducation **2 EFG**
Une présentation de certains concepts fonctionnels de la didactique des mathématiques.

• **LARÈRE C**.(1995) *Les chemins du nombre chez trois infirmes moteurs cérébraux sans parole*,Revue ANAE janvier 1995. **3**
Analyse fine des compétences d'enfants I.M.C. (Infirmes Moteurs Cérébraux) au cours d'activités de dénombrement de collections, de comparaisons de deux nombres, de calcul d'écart entre deux nombres. Cette analyse montre comment les procédures diffèrent en fonction des compétences et du champ numérique étudié.

• **PERRIN M.J.** (1993), *Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans les classes "faibles*",Recherches en Didactique des mathématiques, volume 3/1.2. **2**

• **TRUCHET J.** (1994) *Le problème ouvert en classe de mathématiques dans un institut médico-pédagogique*, Grand N n°54, 71-81, IREM de Grenoble. **1**

• **VERGNAUD G.** (1986) *Développement cognitif et didactique des mathématiques : structure additive*. Grand N n° 38 **EFG**
Un exemple d'étude didactique autour des problèmes additifs.

VII. Études pédagogiques ou psychologiques possibles pour analyser des productions d'élèves

• **INRP** Rencontres pédagogiques
1984 n° 4 *Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques.*
1986 n°12 *En mathématiques peut mieux faire, l'élève face à la difficulté*
1995 n°34 *Chacun, tous.. différemment Différenciation en mathématiques* .**EFG**

• **BARATAUD D., BRUNELLE D**. (1985) *De l'erreur à la réussite en math,* Éditions Nathan Des études de cas utilisables en formation. **1**

• **BARUK S.(**1977) *Fabrice ou l'école des maths,* Éditions Seuil. **1**

Les autres ouvrages du même auteur, rééducatrice, sont très polémiques.

• **JAULIN-MANNONI F.** (1977) *Le pourquoi en math*, Éditions ESF.
Une autre rééducatrice et un autre point de vue sur l'échec en mathématiques. **1**

• **WEYL KAILEY L**.(1985) *Victoires sur les maths*, Éditions R. Laffont.
Un autre point de vue sur l'échec en math. **1**

Index des sigles

APMEP	Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
CAFIPEMF	Certificat d'aptitude aux actions pédagogiques spécialisées d'adaptation et d'intégration scolaires
CDDP	Centre Départemental de Documentation Pédagogique
CNDP	Centre National de Documentation Pédagogique
CE1	Cours élémentaire $1^{ère}$ année (élèves de 7 à 8 ans)
CE2	Cours élémentaire $2^{ème}$ année (élèves de 8 à 9 ans)
CM1	Cours moyen $1^{ère}$ année (élèves de 9 à 10 ans)
CM2	Cours moyen $2^{ème}$ année (élèves de 10 à 11 ans)
COREM	Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Talence près de Bordeaux (sigle local)
CP	Cours préparatoire (élèves de 6 à 7 ans)
CRPE	Concours de recrutement des Professeurs des Écoles
Cycle 2, **Cycle 3**	Le cycle 2 regroupe les classes de CP et CE1 Le cycle 3 regroupe les classes de CE2,CM1 et CM2.
ERMEL	Équipe de didactique des mathématiques de l'INRP
F.P.	Formation Professionelle
FP2	Formation professionnelle 2ème année
GS	Classe de grande section de maternelle (élèves de 5 à 6 ans)
I.N.R.P	Institut National de Recherches Pédagogiques
IEN	Inspecteur de l'Éducation Nationale (pour l'école primaire)
IFM	Institut de formation des maîtres (sigle local)
IMFAIEN	Instituteur Maître Formateur Auprès de l'Inspecteur de l'Éducation Nationale. Ce sont des conseillers pédagogiques
IMF	Instituteur Maître Formateur
IREM	Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
IUFM	Institut Universitaire de Formation des Maîtres Crée en 1991, pour assurer la formation des professeurs d'école (primaire : élèves de 2 à 11 ans) et des professeurs de collège et lycée (secondaire : élèves de 11 à 18 ans).
MAFPEN	Mission Académique de la Formation des Personnels de l'Éducation Nationale
MS	Classe de moyenne section de maternelle (élèves de 4 à 5 ans)
Normaliens	Stagiaires en formation dans les Écoles Normales
P.E.	Professeur des écoles
PEMF	Professeur des écoles Maître Formateur
P.E.N	Professeur d'École Normale
PE1, PE2	Professeur des écoles $1^{ère}$ ou $2^{ème}$ année
PIUFM	Professeur en Institut Universitaire de Formation des Maîtres

PS	Classe de petite section de maternelle (élèves de 3 à 4 ans)
Q.C.M.	Questionnaire à Choix Multiple
ZEP	Zone d'Éducation Prioritaire

Index des sigles en AIS en 2002

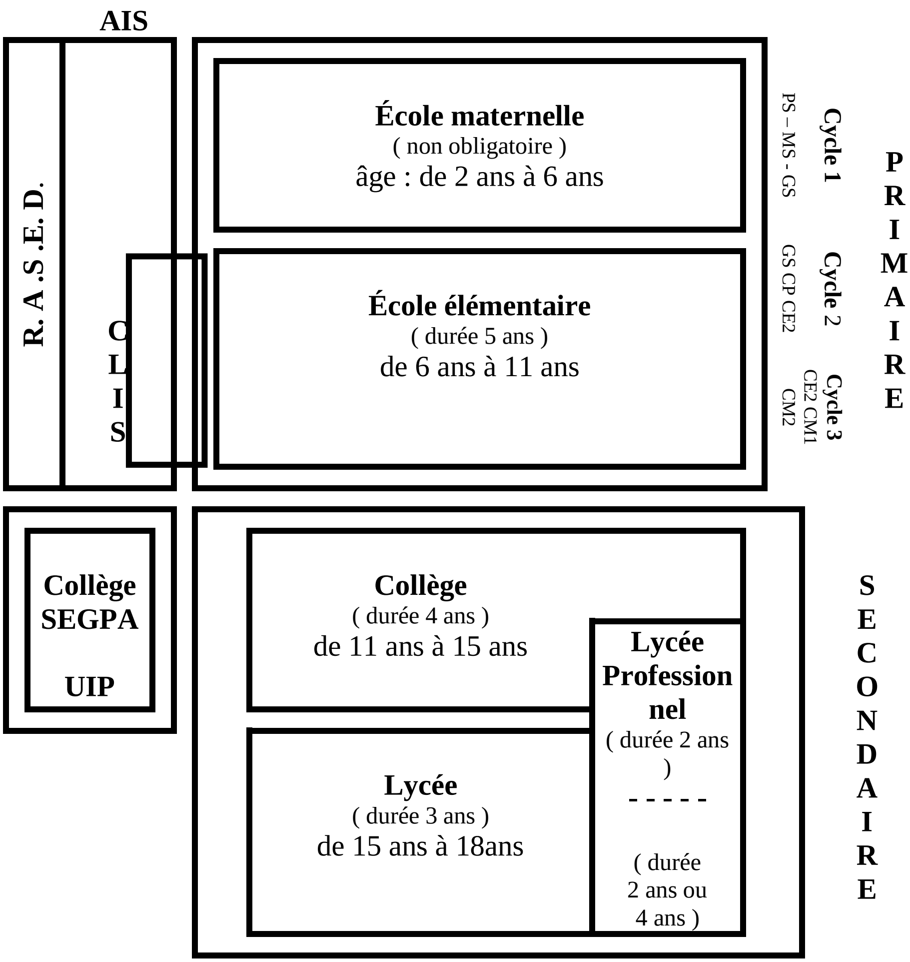
AIS	Adaptation et intégration scolaires
CAPSAIS	Certificat d'aptitude aux actions pédagogiques spécialisées d'adaptation et d'intégration scolaires, en 1987, se substitue au CAEI (Certificat d'Aptitude à l'éducation des enfants et adolescents déficients ou inadaptés)
CAT	Centre d'aide par le travail (pour adultes handicapés)
CCPE	Commission de circonscription préélémentaire et élémentaire
CCSD	Commission de circonscription du second degré
CDES	Commission départementale d'éducation spéciale
CLAD	Classe d'adaptation
CLIS 1	Classe d'intégration scolaire pour handicapés mentaux
CLIS 2	Classe d'intégration scolaire pour handicapés auditifs
CLIS 3	Classe d'intégration scolaire pour handicapés visuels
CLIS 4	Classe d'intégration scolaire pour handicapés moteurs
CMPP	Centre médico-psycho-pédagogique
COTOREP	Commission technique d'orientation et de reclassement professionnel
EREA	Établissement régional d'enseignement adapté
GAPP	Groupe d'aide psycho-pédagogique
IME	Institut Médico-Educatif antérieurement, il s'agissait d'un établissement comportant un IMP + un IMPro. Dorénavant, tout établissement avec **SSEGS** (Section de soins et d'éducation générale spécialisés) ou **SSEPS** (Section de soins et d'éducation professionnelle spécialisés) est appelé IME
IMP	Institut médico-pédagogique (de 6 à 14 ans) ; ils sont devenus des IME (Instituts médico-éducatifs) avec **SSEGS** (Section de soins et d'éducation générale spécialisés)
IMPRO	Institut médico-professionnel (de 14 à 20 ans) : ils sont devenus des IME (Instituts médico-éducatifs) avec **SSEPS**
IR ou IRP	Institut de rééducation (pour troubles du comportement)
LEA	Lycée d'enseignement adapté
LP	Lycée professionnel
RASED	Réseaux d'aides spécialisées aux élèves en difficulté (écoles maternelle et élémentaire)
SEGPA	Section d'enseignement général et professionnel adapté (collèges) . La SEGPA se substitue à la SES (Section d'Éducation Spécialisée)
SESSAD	Service d'éducation et de soins spécialisés à domicile (pour handicapés mentaux ou troubles du comportement)
UPI	Unité pédagogique d'intégration (collèges et lycées)

Voici la liste des auteurs avec leur laboratoire de recherche et leur lieu d'exercice en Janvier 2003.

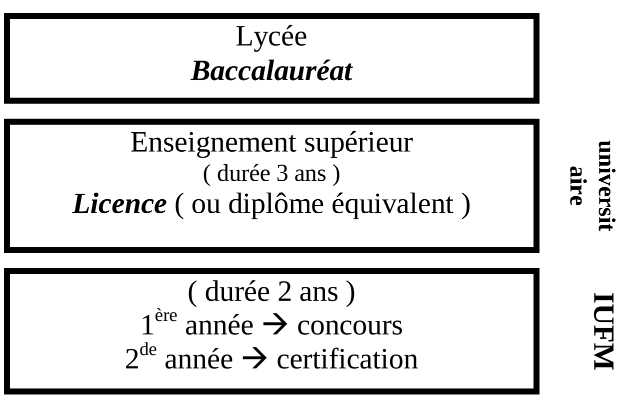
ANDRÉ Françoise	École Blaise Pascal Perpignan	IUFM de Montpellier *Perpignan*
AURAND Catherine		IUFM de Versailles *St Germain en Laye*
BARATAUD Dominique		CNEFEI de Suresnes
BEAUFORT Dominique		IUFM d'Orléans-Tours *Chartres*
BETTINELLI Bernard	IREM de Besançon	IUFM Franche-Comté *Besançon*
BOLON Jeanne	Équipe DIDIREM, Université Paris 7	IUFM de Versailles *Antony*
BONNET Nicole	IREM de Dijon, COPIRELEM	IUFM de Dijon
BOULE François	IREM de Dijon	CNEFEI de Suresnes
BRIAND Joël	DAEST Université V. Segalen Bordeaux 2, COPIRELEM	IUFM d'Aquitaine *Bordeaux*
BRONNER Alain	LIRDEF	IUFM Montpellier *Montpellier*
BROUSSEAU Guy	DAEST Université V. Segalen Bordeaux 2	Professeur émérite des Universités IUFM d'Aquitaine
BUTLEN Denis	Équipe DIDIREM, Université Paris 7, IREM paris 7	IUFM de Créteil *Melun*
CHEVALIER M.Claude	Professeur au lycée de Cahors	IUFM de Toulouse jusqu'en 1994
COLMEZ François	IREM paris 7	Université Paris 7
COULET Jean Claude	Laboratoire de Psychologie du Développement et de l'Education	Maître de conférences, Université de Rennes 2
DESCAVES Alain	IREM de Bordeaux COPIRELEM	IUFM d'Aquitaine *Périgueux*
DOUADY Régine	Université Paris 7 Professeur honoraire	
DUCORAIL J.Claude		IEN de Gironde
EYSSERIC Pierre	IREM d'Aix –Marseille COPIRELEM	IUFM d'Aix Marseille *Aix*
FENICHEL Muriel		IUFM de Créteil *Livry Gargan*
FREMIN Marianne		IUFM Versailles *Antony*
GIRMENS Yves	IREM de Montpellier COPIRELEM	IUFM de Montpellier Perpignan
HERVIEU Claudine		IUFM de Caen

HOUDEMENT Catherine	Équipe DIDIREM, Université Paris7 COPIRELEM, IREM de Hte Normandie	IUFM Haute Normandie *Rouen*
HUGUET François	Professeur Honoraire, IREM de Quimper	IUFM de Quimper *Quimper*
KUZNIAK Alain	Équipe DIDIREM, Université Paris7 IREM de Strasbourg	IUFM de Strasbourg *Strasbourg*
LE POCHE Gaby	IREM de Bretagne COPIRELEM	IUFM de Bretagne *Rennes*
LEBERRE Maryvonne	IREM de Lyon	Professeur en collège Charcot à Lyon
OYALLON Jean Louis	Professeur en lycée à Nouméa	IUFM d'Aquitaine jusqu'en 1996
OZAN Gérard		IUFM Versailles *Antony*
PARZYSZ Bernard	GReDiM (IUFM Orléans-Tours) Équipe DIDIREM, Université Paris7	IUFM Orléans Tours
PAUVERT Marcelle		IUFM de Créteil Professeur honoraire
PEAULT Hervé	Décédé en 1997	IUFM des Pays de la Loire
PELTIER Marie Lise	Équipe DIDIREM, Université Paris7 COPIRELEM, IREM de Hte Normandie	IUFM Haute Normandie *Rouen*
PERRIN -GLORIAN Marie-Jeanne	Équipe DIDIREM, Université Paris 7	IUFM Nord-Pas-de-Calais
PEZE Christiane	Formatrice AIS	IUFM d'Aquitaine
RIMBAUD Claude	IREM de Rennes Professeur honoraire	IUFM de Bretagne *St Brieux*
ROYE Louis	IREM de Lille	IUFM de Lille Professeur honoraire
SALIN Marie Hélène	DAEST université V.Segalen, Bordeaux2	IUFM de Bordeaux *Bordeaux*
TAVEAU Catherine	IREM Paris 7, COPIRELEM	IUFM de Créteil *Bonneuil*
VERGNES Danielle		IUFM de Versailles *Antony*

Présentation succincte du système éducatif français



Cursus pour devenir professeur des écoles



CONCERTUM

Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques

En hommage à Hervé Péault

Hervé Péault était professeur de mathématiques et formateur d'enseignants au site d'Angers de l'IUFM des Pays de Loire. Il nous a quittés en 1997 des suites de ce qu'il est convenu d'appeler une longue maladie. Ses travaux sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et la formation des professeurs des écoles furent nombreux et exemplaires. Son implication au sein de la COPIRELEM débuta dans les années 1980 et devint chaque année plus conséquente. Il fut un des moteurs de la dynamique de publication dans laquelle s'engagea la COPIRELEM dans les années 1990 pour prouver au monde nouveau des IUFM que la formation mathématique des professeurs des écoles avait déjà une histoire et une culture.

Préface

Guy Brousseau

La Commission Permanente des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, pour l'École Élémentaire a trente ans. Elle aurait pu s'appeler platement COPIREMEE, mais COPIRéleM évoquait mieux sa spécificité, à la condition de mettre le M final en majuscule pour signifier « Mathématiques ». Vive donc la COPIREleM, sa longévité est un indice de sa pertinence et de son utilité. Comme son nom l'indique la COPIRELEM est une commission Inter-IREM. Elle a emprunté aux IREM leur indépendance par rapport aux institutions d'enseignement, leur autorité mathématique et leurs ressources. En retour elle a montré de façon exemplaire ce que pouvaient être des rapports sains entre les protagonistes de l'éducation, en exigeant davantage d'études, en résistant au prosélytisme inconsidéré, en stimulant la réflexion et les échanges. Elle a contribué au rayonnement des IREM parmi une population importante, difficile à atteindre pour eux, à leur réputation et à leur influence aussi bien lorsqu'elle s'exprime auprès des institutions, que lorsqu'elle publie ses activités (annales, comptes-rendus du séminaire et du colloque annuels).

J'ai eu la chance d'être de ceux qui l'ont conçue, qui l'ont fait naître, et qui l'ont accompagnée dans sa jeunesse. D'autres ont pris la relève mais j'ai suivi sa progression du coin de l'œil. C'est sans doute à ce titre que ses responsables actuels me font l'honneur de me demander de préfacer cet ouvrage, témoignage de leurs travaux.

C'est donc avec fierté que je présente aux lecteurs ce recueil de textes choisis parmi les plus représentatifs de l'activité de la commission depuis dix ans. Il faut remercier Catherine TAVEAU et Yves GIRMENS qui les ont réunis et les membres de la commission qui les ont produits.

Ce témoin de la vitalité de l'institution me donne ainsi le bonheur de retrouver aujourd'hui la COPIREleM dans sa maturité, et de constater qu'elle continue sa tâche avec courage et compétence, malgré les difficultés que je soupçonne. Je les soupçonne ces difficultés, mais je ne les connais plus, ce qui me donne quelques scrupules. Mon avis peut-il être très pertinent pour un jeune chercheur formateur dans un IUFM ?
Mon avis peut être pas, mais mon témoignage ?
Je veux ici rappeler la grandeur et la difficulté de la mission de cette commission, et sa gloire, aussi car elle a accompli à petit bruit, de grandes choses.

L'histoire d'une institution ne lui est utile que dans la mesure où la vérité historique y est accompagnée de façon heureuse par une certaine composante

mythique. Le mythe est constitué d'abord par les espérances des acteurs successifs - par les intentions réelles ou supposées qu'ils ont affichées, ou que leurs successeurs leur ont prêtées - ensuite par les justifications que se sont données les uns et les autres suivant les fortunes de la vie. Je laisse à d'autres le soin de faire une histoire de la COPIREleM qui sera plus vraie et plus utile.

Je veux seulement évoquer ici quelques uns des espoirs que j'avais placés en elle. Mais rien ne se serait fait si ces espoirs n'avaient pas été partagés et enrichis par de nombreux collègues. Je vais donc parler au nom de tous ceux qui, par la COPIREleM, ont voulu faire, dans les années 70, d'un mythe une réalité. J'espère qu'ils me pardonneront ce que je leur emprunterai ou que je leur prêterai indûment.

Officiellement la commission avait une mission de concertation entre les principaux partenaires de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire : le ministère (la direction des écoles), ses inspecteurs et ses moyens d'action (Institut Pédagogique National par exemple), les instituteurs, les formateurs en mathématiques et les mathématiciens, mais aussi les novateurs et les éditeurs qui par le biais des médias tenaient l'opinion en haleine.
Elle est pendant longtemps (et peut être encore) un exemple de coopération entre ces divers acteurs. Je veux rendre hommage ici en particulier à l'Inspecteur Général Duma qui prit part aux travaux et fut pour la commission un soutien sans faille. Mais il ne fut pas le seul.
Les vertus principales qui ont fondé la crédibilité de la commission sont sans aucun doute le sens de ses responsabilités, son réalisme et son ambition scientifique.

Trop faible pour intervenir sur les orientations et sur les programmes, elle a investi le champ des recherches, des expérimentations et du développement des réformes décidées. A l'époque, sous diverses impulsions, les « recherches » et les « expérimentations » pullulent et donnent lieu à des surenchères étonnantes. Les novateurs attendent que les IREM leur servent de caisse de résonance, les autres espèrent des conventions et des exemples pour fixer ce qui est raisonnable et rejeter le reste. La COPIREleM débat et se débat pour faire émerger ou pour produire des aides, des commentaires, des exemples… Elle essaie en même temps de développer des recherches et de limiter la prolifération en augmentant les exigences éthiques et scientifiques à l'égard des promoteurs de recyclage.

Il apparaît bientôt à certains d'entre nous que le « bon sens » sera insuffisant pour prendre sérieusement en compte ou pour rejeter les objurgations péremptoires des « scientifiques » de divers domaines qui se pressent sur le marché de l'éducation.

La formation des instituteurs aux mathématiques et à leur enseignement devait être le creuset où les connaissances spécifiques nouvelles – appelons les « didactiques » - devaient naître et trouver leur territoire : il était impossible d'ignorer que les mathématiques enseignées dans la scolarité obligatoire doivent être aménagées en fonction de nombreux critères autres que mathématiques (tenir compte de l'âge des élèves ou de la fonction civique de l'enseignement par exemple). L'application brutale de la psychologie, même génétique, pas plus que les mathématiques elles-mêmes ne peuvent fournir une ingénierie utilisable et justifiable etc.

La formation mathématique des instituteurs devait donc inclure des savoirs spécifiques à la fois théoriques, techniques et pratiques. Lesquels ? Ce fut un travail constant de la commission que de promouvoir des recherches et de les discuter, mais aussi de lutter contre la tendance à l'émiettement, de les synthétiser et de leur donner un cadre théorique pour en tirer des éléments de formation utilisables.

Il apparaissait inéluctable à terme que la formation des instituteurs deviendrait une activité universitaire. La question du rattachement des connaissances spécifiques à une discipline se posait de façon aiguë, nous avons considéré que le rattachement aux mathématiques elles-mêmes s'imposait. On en discute encore.

En fait, la principale fonction de la commission est une fonction didactique en direction de tous ses partenaires.

- En direction des instances du ministère : leur légitimité est essentiellement politique, professionnelle et disciplinaire, mais le vocabulaire et les concepts qu'ils ont la possibilité effective d'utiliser ne sont pas ceux que les recherches pourraient leur fournir, quand bien même ils les connaîtraient. Disons que les conditions macrodidactiques qui leurs sont imposées ne s'articulent pas encore très bien avec les propositions microdidactiques que la recherche a été en mesure de leur fournir depuis trente ans. De ce fait, leur volonté et leur capacité à faire évoluer le discours des professeurs dans un sens contrôlé par des instances scientifiques sont très limitées.
- En direction des formateurs d'instituteurs puis des professeurs des écoles. C'est le travail le plus évident, celui qui a laissé le plus de traces. D'abord la formation des anciens professeurs d'écoles normales, puis celle des nouveaux formateurs, PRAG ou maîtres de conférences, ceux du moins qui pensent plus à leur travail qu'à leurs regrets de n'être pas dans une « vraie » université ! Ainsi le « séminaire des nouveaux formateurs » mis en place en 1997 réunit annuellement les membres de la COPIRELEM et une trentaine de nouveaux formateurs en IUFM.
- En direction des chercheurs en didactique des mathématiques par la même occasion.
- En direction des professeurs de mathématiques des autres niveaux. L'influence est claire, forte et durable.

En ce qui concerne les mathématiciens le bilan est plus contrasté. Après le départ d'une génération de grands mathématiciens tout dévoués à l'enseignement primaire et respectueux de ses pratiques, nous en avons connu d'autres. La COPIREleM a refusé de cautionner leurs déclarations fracassantes, hasardeuses et finalement irresponsables. Ce n'est pas son moindre titre de gloire. Son honnêteté et son sérieux lui ont valu quelques difficultés, le recrutement des mathématiciens didacticiens s'est un instant tari, mais grâce aux IREM l'institution a survécu et poursuit sa tâche.

Aujourd'hui, la COPIREleM poursuit sa tâche de rencontres entre les différents partenaires de l'enseignement élémentaire (enseignants, inspecteurs, formateurs, mathématiciens, et chercheurs en didactique), de modération des débats entre l'école et la noosphère, d'initiation d'expérimentations et de propagation de recherches.

Introduction

Depuis 30 ans, la COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'École Élémentaire) a mené, conformément à sa mission, une réflexion constante sur l'enseignement des mathématiques à l'école et sur la formation des maîtres devant assurer cet enseignement. L'engagement, dans cette commission, de formateurs émanant des IREM de diverses académies a permis le partage et la diffusion de travaux issus de recherches et d'expériences concernant l'enseignement des mathématiques à l'école.

L'action de la COPIRELEM s'est poursuivie, avec un souci de continuité, pendant la transformation des Écoles Normales en Instituts Universitaires de Formation des Maîtres. Ainsi les acquis, en matières d'expériences et de connaissances sur l'enseignement des mathématiques à l'école, élaborés conjointement dans les groupes élémentaires des IREM et au sein des Écoles Normales, ne se sont pas perdus et ont pu être actualisés afin d'alimenter les actions de formations dans le cadre des IUFM.

C'est ainsi qu'au cours de ces trente années, la COPIRELEM a organisé, sur le plan national, 30 colloques, 6 stages et 5 séminaires, réunissant des milliers de formateurs provenant, jusqu'en 1991 des Écoles Normales puis des IUFM, et aussi d'instituts de formation d'autres pays de l'espace francophone.

Les colloques et stages nationaux ont permis la mutualisation des expériences ainsi que la diffusion des travaux de recherche sur l'enseignement des mathématiques à l'école. Ils ont contribué, au fil des années, à stabiliser un corps de connaissances et à promouvoir une culture commune des formateurs pour l'enseignement des mathématiques à l'école.

Par ailleurs, depuis six ans maintenant, la COPIRELEM s'est également attachée à assurer la formation des formateurs nouvellement affectés en IUFM. Cette formation organisée, au sein de séminaires nationaux, permet à la commission de transmettre les connaissances constituées par la communauté des formateurs. Elle vise ainsi l'amélioration de la formation des professeurs des écoles.

Chacune de ces manifestations a donné lieu à la publication d'actes réunissant les réflexions, propositions de travaux, compte-rendus d'expériences et de recherches. La lecture de ces documents met en évidence la diversité des domaines de savoirs auxquels fait appel la formation des maîtres en mathématiques. Elle montre une évolution des questions didactiques et pédagogiques étudiées et des réponses qui leur ont été apportées.

Après ces trente années de travaux et de recherches, les membres de la COPIRELEM ont estimé le moment venu de faire une synthèse du capital de connaissances accumulées pendant toutes ces années.

Cette synthèse vise aussi à conserver la mémoire de l'évolution des questions de formation. Capitaliser et diffuser toutes ces connaissances sont les deux objectifs que cet ouvrage de synthèse a l'ambition de réussir.

Les membres de la COPIRELEM, à la fois animateurs IREM et professeurs en IUFM, ont sélectionné les articles issus de ses publications qui présentent un intérêt pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école. Certains articles constituent des repères intéressants sur l'histoire de la pensée didactique, d'autres restent des ressources pertinentes pour la formation. Le présent ouvrage est l'aboutissement de ce travail de sélection et de synthèse mené par les 19 formateurs, membres de la COPIRELEM.

Cet ouvrage rassemble des contributions d'auteurs venus de différents horizons. C'est ce qui en fait son originalité.

Il est composé de compte-rendus de situations d'enseignement des mathématiques à l'école primaire, et d'actions de formation développées par les différents formateurs dans le cadre de leur enseignement. Il comporte également des articles de chercheurs, issus de la didactique des mathématiques, de la psychologie cognitive ou de diverses branches des sciences de l'éducation.

Par leur participation à un colloque ou à un séminaire en tant que conférenciers, animateurs d'ateliers ou auteurs de communications de leurs travaux de recherche, tous ces auteurs ont apporté leur pierre à l'édifice des connaissances professionnelles dans le domaine de la formation des maîtres à l'enseignement des mathématiques.

La variété des travaux présentés témoigne de la fécondité de la réflexion menée depuis trente ans par les formateurs. La COPIRELEM s'est donnée pour tâche de la capitaliser.

Dans cet ouvrage, la COPIRELEM espère que tout formateur ou chercheur, s'intéressant à la formation en mathématiques des enseignants trouvera matière à nourrir sa réflexion, ses recherches et à enrichir son enseignement.

La parution de cet ouvrage marque une étape importante dans la vie de la COPIRELEM en lui permettant de renforcer le réseau des formateurs en didactique des mathématiques.

Il appartient à ce réseau, constituant une force institutionnelle non négligeable, de poursuivre sa mission première : promouvoir et améliorer l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

Yves Girmens et Catherine Taveau
Responsables de la COPIRELEM

SOMMAIRE

TOME 2 - Démarches et savoirs à enseigner

TOME 3 - Outils de formation

L'enseignement de la géométrie en formation initiale

Alain Kuzniak

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Angers 1995.

Cet article présente quelques réflexions sur l'organisation et sur la structuration globales d'un enseignement de la géométrie aux étudiants PE.

Nous avons organisé ces réflexions sur l'enseignement de la géométrie autour de thèmes qui fédèrent les objectifs d'un certain nombre d'activités que l'on peut trouver aisément dans les productions destinées aux formateurs d'enseignants.
Nous avons ainsi souhaité éviter la confusion fréquente entre le but d'une activité et son titre. En effet, plus que de savoir si l'on "fait" les polyèdres ou la boite du pâtissier, il importe de connaître les objectifs et la place de ces activités en formation des maîtres.
Il s'agit ici d'un premier état de la réflexion et l'angle choisi qui épouse un plan de cours à des PE, devra par la suite être enrichi et revu par d'autres entrées que celle présentée ici et par une étude plus approfondie des activités de formation.

1. Réflexions sur la géométrie

a) Une géométrie pour les enfants ?

La géométrie expérimentale.

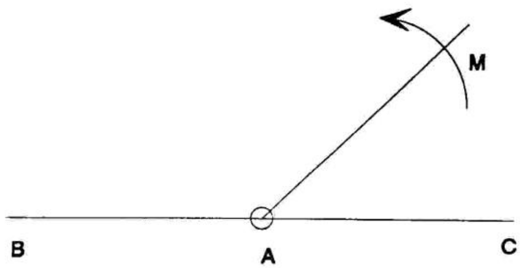
La géométrie de l'école élémentaire n'est pas celle du mathématicien pas plus que celle du lycéen. D'entrée, la géométrie élémentaire semble offrir divers visages et ce depuis longtemps contrairement au nombre.
Faisons un détour par Gonseth[1] pour tenter de voir le lien entre ces géométries. Selon Gonseth, l'activité géométrique résulte dans le meilleur des cas d'une articulation harmonieuse entre "intuition", "expérience" et "déduction".
L'expérience dont il s'agit ici est proche de celle des physiciens, elle apporte la preuve quasi matérielle de l'existence de propriétés. Ainsi Gonseth cite-t-il la "démonstration" que fait Legendre[2] du théorème suivant.

> *Par un point pris sur une droite, on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on ne peut en élever qu'une.*

[1] GONSETH F. (1926) 1974 Les fondements des mathématiques. Blanchard

[2] En fait, il s'agit d'une démonstration de Blanchet, professeur en classes préparatoires, dans sa réactualisation de la Géométrie de Legendre. Cette démonstration ne figure pas dans les éditions parues du vivant de Legendre.

Legendre (ou plutôt Blanchet) base son raisonnement sur la figure matérialisable suivante :



La droite AM d'abord couchée sur AC tourne autour du point A. L'angle MÂC d'abord petit devient grand contrairement à son angle adjacent MÂB qui devient petit pour atteindre 0. Ainsi l'angle MAC d'abord plus petit que MÂB devient plus grand que cet angle : par conséquent il y aura une position AM de la droite mobile où ces deux angles seront égaux et il est évident qu'il n'y en aura qu'une seule.

Je ne sais trop quel serait le destin d'un candidat au Capes présentant actuellement cette démonstration mais il serait certainement en dehors de l'éducation nationale et non enseignant en classes préparatoires comme Blanchet.
Rien ne correspond ici à la démonstration mathématique "suite de syllogismes enchaînés avec rigueur et continuité". Nous sommes dans le monde sensible et non dans l'abstrait et plus qu'à la raison et à la logique il est fait appel à l'expérience du monde sensible. On peut parler d'une "géométrie expérimentale".
Cette preuve dynamique s'oppose aux démonstrations statiques de la géométrie "abstraite", mais elle semble par contre très proche de la perception que peut avoir l'enfant de l'espace.
Une autre preuve peut aussi résulter de l'usage du pliage. Suivant la terminologie présentée par Lebesgue[3], il s'agira d'un pliage de deuxième espèce qui permet de partager un angle en deux parties égales.
Ainsi que ce soit par pliage ou par "mouvement virtuel", la construction et la perception sont au cœur d'une géométrie non déductive de type expérimental. Le raisonnement que privilégie cette approche est le raisonnement de type constructif que signale également J.F. Richard[4] dans sa réflexion sur la résolution de problèmes.

---

[3] LEBESGUE H. (1950) 1987 Leçons sur les constructions géométriques. Editions Jacques Gabay

[4] RICHARD J.F. 1984 *La construction de la représentation du problème* Revue de Psychologie Française 1984, 29, 3/4.

Le rôle du point.

Un autre aspect important de la géométrie concerne l'unité de base qui fonde la géométrie élémentaire et plus particulièrement la nature et l'importance du point. Celui-ci peut être soit la notion de base de toute la géométrie axiomatique, soit l'aboutissement de toute la géométrie du monde sensible.

Dans cette deuxième perspective, nous retrouvons Legendre, toujours cité par Gonseth, qui définit ainsi sa géométrie à partir des volumes.

> *Tout corps occupe, dans l'espace indéfini, un lieu déterminé qu'on appelle volume.*
> *La surface d'un corps est la limite qui le sépare de l'espace environnant.*
> *Le lieu où les surfaces de deux corps se rencontrent est appelé ligne.*
> *Un point est un lieu où deux lignes se coupent.*

La notion de point n'est donc pas ici la notion la plus simple mais au contraire elle apparaît comme le résultat d'un détour qui est loin d'être évident. Notons aussi que la droite n'est pas définie dans cette approche du point. Le point devient l'aboutissement d'un cheminement complexe qui part du monde sensible pour parvenir au monde abstrait de la géométrie.

Il ne faut pas croire qu'une géométrie axiomatique conforme au modèle d'Hilbert n'est possible que basée sur le point et Whitehead a bâti une géométrie de ce type sur la notion élémentaire de volume.

Le point dans la géométrie de l'enfant (extrémité de segments ou intersection de lignes) n'est pas une notion première mais une notion construite qui suivra assez bien la genèse proposée par Legendre.

Conclusion.

La géométrie élémentaire de l'enfant n'incorpore pas la dimension déductive et semble reposer sur l'intuition et l'expérience. Elle constitue le temps préparatoire de la construction de la géométrie chez l'individu apprenant.

Cette géométrie met en avant les formes et les volumes et conduit graduellement à la notion de point. Elle privilégie une approche constructive de l'espace et d'un certain nombre d'objets géométriques.

Il s'agit de développer des images et des représentations mentales grâce à de nombreuses expériences sur les objets. Ce temps préparatoire sera suivi par l'approche de la géométrie déductive basée sur le point.

Un des enjeux de la formation sera d'articuler ces deux phases de façon harmonieuse. Or tout semble montrer (par exemple l'analyse fine d'exercices de l'évaluation de sixième faite par M. Fenichel et M. Pauvert) qu'il y a une rupture de contrat brutale dans le cursus scolaire entre ces deux conceptions.

b) Quel enseignement de géométrie pour les Professeurs d'école ?

Le futur professeur d'école, même s'il n'a pas toujours un passé mathématique glorieux ne se situe plus dans ce temps préliminaire de l'activité géométrique que nous avons défini plus haut. Il conçoit la géométrie comme l'étude déductive d'un certain nombre de propriétés d'ensembles de l'espace.

Cet espace est devenu global et homogène avec le point de vue d'un observateur extérieur. Il s'agit d'une géométrie ponctuelle où la déduction logique est reine et où le vu et l'expérimenté n'ont plus la primauté, du moins dans la forme standard de l'activité qu'est la démonstration.
Le formateur d'enseignants va devoir poursuivre au moins quatre objectifs différents :

1. amener l'étudiant à envisager l'existence de différentes formes de l'activité géométrique et notamment celle basée sur l'intuition et l'expérience.
2. développer sa connaissance et son expérience sur un certain nombre d'objets géométriques.
3. redonner du sens à l'activité déductive.
4. l'aider à planifier et à organiser son enseignement de la géométrie.

Apprendre à enseigner la géométrie et apprendre la géométrie.

Dans les faits, on constate que les formateurs d'enseignants vont tenter simultanément de modifier la perception de la géométrie qu'ont les étudiants en tentant de leur apporter des connaissances sur les objets géométriques (polyèdres, figures planes) et ceci grâce à des situations d'enseignement proches de la pratique des classes élémentaires. Dans cette conception, les stratégies d'homologie sont privilégiées comme l'illustre de manière intéressante la situation de Jean Vincent sur les polyèdres.
Ces stratégies d'homologie s'appuient sur un modèle constructiviste conscient de la part du formateur. Elles sont bien définies par deux types de ressemblance :

- la ressemblance entre la démarche pédagogique prônée par le formateur et celle qu'il met en œuvre pour enseigner à ses étudiants.
- la ressemblance entre les situations proposées aux étudiants et aux enfants.

Plusieurs choix sont possibles pour les situations proposées :

a) La situation de départ est la même pour les enfants et les futurs enseignants.

b) La situation présentée aux adultes est légèrement plus complexe mais aisément transférable.

c) La situation présentée aux étudiants n'est pas susceptible d'un transfert simple à l'école élémentaire.

En fait, le choix de ces situations dépend de l'appréciation par le formateur des difficultés liées à la notion abordée. Nous avons étudié dans notre thèse[5] les deux hypothèses suivantes.

Une situation simple permet une prise de conscience nette de la démarche pédagogique suivie, mais en contrepartie elle risque d'infantiliser l'étudiant et/ou de provoquer son rejet.

[5] KUZNIAK A. 1994, Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré. Thèse, Université de Paris VII.

> Une situation plus complexe transmet un savoir mathématique non trivial aux étudiants, mais la nouveauté de ce savoir peut occulter la démarche pédagogique suivie.

Lorsqu'on souhaite faire quitter son statut d'élève à l'étudiant - professeur pour lui faire acquérir le regard de l'enseignant, on rencontre les stratégies basées sur la transposition.
Ces stratégies tentent de provoquer un recul par rapport à la pratique en transposant un savoir savant de type didactique. Les supports utilisés par le formateur peuvent être les analyses d'erreurs et les analyses de documents pédagogiques.
Une autre perspective plus ambitieuse et privilégiant la démarche pédagogique semble être celle de G. Le Poche qui tente une distanciation effective en revenant sur l'activité menée par le formateur auprès des étudiants grâce à un film qui a gardé la trace de cette activité. Cela donne une réalité plus importante à ce "pas de côté" qui doit faire basculer de l'étudiant au maître.

Redonner du sens à l'activité déductive en géométrie.

Un autre aspect important de la formation est celui du sens à donner à l'activité déductive et à la démonstration en géométrie.
La place du concours en fin de première année favorise un travail sur cette approche, mais il est fondamental de bien déterminer les thèmes prétextes à la démonstration ou à la preuve.
Ceux-ci ne doivent pas être définis en fonction de leur situation scolaire (troisième ou seconde) mais en fonction de leur coté exemplaire et intéressant pour la formation professionnelle des étudiants.
Plusieurs pistes nous semblent envisageables :

- problèmes de dénombrement
- problèmes dits de l'architecte ou du géomètre souvent liés à la mesure.
- problèmes liés à la recherche de lieux géométriques.
- problèmes dérivant de constructions qui amènent à se poser la question de la validité des observations faites (cercle des neuf points, points de concours surprenants).

Certains formateurs signalent une "résistance" des étudiants à cette approche basée sur les constructions et les pliages. Ce point mériterait une analyse et une confirmation.

2. Trois grands thèmes de structuration de l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres

a) Espaces(s) de la géométrie élémentaire.

Cette partie nous semble problématique dans la mesure où règne une certaine confusion provoquée par les différentes approches de l'espace que peuvent faire philosophes, psychologues et mathématiciens. Les mêmes noms sont donnés à des notions totalement différentes.

Nous ne remettons bien sûr pas en cause cette approche pluraliste d'un thème par essence pluridisciplinaire, mais nous souhaitons seulement tenter de clarifier ce qui relève des mathématiques et nous astreindre à n'employer des termes mathématiques que dans leur acception mathématique la plus courante.
Nous pensons ici plus particulièrement aux espaces affines et projectifs. Cet effort de clarification et de précision nous semble important à la fois pour les formateurs d'enseignants et pour leurs étudiants.
Les ouvrages mathématiques à tendance didactique ou pédagogique comme le ERMEL introduisent rapidement plusieurs types d'espaces géométriques. Il s'agit principalement des espaces topologiques, projectifs, affines et euclidiens. On trouve aussi l'espace cartésien et l'espace des similitudes.
Cette présentation repose sur une construction axiomatique qui ne tient pas compte de la genèse historique plutôt inverse de ces notions. Cet ordre et le choix des termes semble plutôt se référer à Piaget et à une genèse psychologique de l'espace chez l'enfant.
Il est impossible dans le cadre de la formation des PE d'ignorer l'apport piagétien, mais cela ne doit pas nous conduire à nous tromper sur le sens mathématique des mots employés.
Or la pensée mathématique moderne sur la géométrie est fondamentalement imprégnée par le programme d'Erlangen défini en 1872 par F. Klein. Dans cette conception, la géométrie n'est plus l'étude d'un espace doué de certaines propriétés mais la donnée d'un groupe de bijections d'un ensemble substrat.
L'objet de la géométrie est l'étude de sous ensembles de E "au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe". Dans cette perspective, l'idée d'invariant est fondamentale.
En formation des maîtres, cette idée d'invariant nous semble importante à préserver et ceci d'autant plus qu'elle ne semble pas contradictoire avec les apports de la psychologie génétique.
Nous allons rapidement passer en revue les différents espaces géométriques qui mettent en jeu ces invariants.

Espace topologique.

L'épistémologie[6] de cet ensemble est intéressante pour le sujet qui nous occupe. D'abord, il faut noter que contrairement à l'espace euclidien, cet espace n'est pas vu par les mathématiciens comme un espace proprement géométrique.
Ensuite, la notion fondamentale, celle d'ouvert, renvoie à une tentative de définition de la localité mais indéterminée non liée à la notion de point. Cette définition est asymétrique : la réunion quelconque d'ouverts est un ouvert, par contre seule l'intersection d'une famille finie d'ouverts est encore un élément de la famille.
De ce fait au moins dans les espaces séparés, le point ne fait pas partie de la famille de base. La réflexion topologique n'a pas le point à sa base mais est bâtie

[6] SALANSKIS J.M. 1991 L'herméneutique formelle. L'infini, Le continu, L'espace. Editions du C.N.R.S.

sur la notion locale de voisinage. La globalité se définit par extension (réunion) de localités (les ouverts).
Les propriétés topologiques seront celles qui seront invariantes par les applications continues (applications qui préservent la localité). II s'agit par exemple des notions d'extérieur et d'intérieur, de voisinage (par définition même), de connexité.

Espace projectif et espace affine.

Nous renvoyons aux ouvrages classiques de géométrie de Berger ou de Frenkel pour des définitions précises et claires de ces espaces[7]. Notons simplement

- il s'agit d'espaces définis à partir d'espace vectoriel soit par opération d'un groupe (espace affine) soit par passage au quotient (espace projectif), donc d'espaces "algébrisés" pour permettre des opérations.
- les "définitions axiomatiques" propres (qui permettent de définir l'espace directement à partir des droites et des propriétés ensemblistes d'intersection) existent mais ne font plus partie de la géométrie élémentaire.
- dans la pratique usuelle élémentaire, (espace projectif est surtout "vu" comme le complété projectif de l'espace affine qui évite les problèmes de parallélisme.
- il est en effet impossible de voir $P^2(R)$ dans l'espace R^3 autrement qu'avec des plongements avec singularités comme la surface de Boy.

Les notions fondamentales qui se dégagent ici sont celle d'alignements, de parallélisme et d'intersection de droite. Compte tenu des connaissances des étudiants, le risque est grand pour le formateur de pratiquer l'effet Jourdain.
Ainsi il parlera de propriétés affines là où légitimement l'étudiant ne voit que parallélisme. Que peut, en effet. représenter la notion d'espace affine ou d'espace projectif pour un étudiant polyvalent dont la dominante n'est pas les mathématiques ?

Espace euclidien ou métrique.

En fait, il s'agit d'espace affine euclidien c'est à dire d'espace affine dont l'espace vectoriel sous-jacent est euclidien. La notion fondamentale est donc celle de produit scalaire qui permet de définir une distance sur l'espace affine associé qui devient ainsi un espace métrique.
L'existence d'un produit scalaire permet de donner du sens à l'orthogonalité et à la notion d'angle par le biais du groupe orthogonal. C'est aussi cet espace qui permettra de définir toutes les transformations géométriques élémentaires. Il s'agit d'une certaine manière de l'espace paradigmatique de toute géométrie.
Là encore, la transposition que doit opérer le formateur de professeurs d'école pour passer de ce savoir savant à un savoir à la fois accessible au niveau de ses étudiants et opératoire pour leur métier futur paraît rendre pratiquement inévitable l'effet Jourdain.

---

[7] Pour une référence plus récente AUDIN M., Géométrie Belin.

La référence théorique éclaire peu les étudiants et semble plutôt les doter d'un vernis langagier inutilement pédant. Cette transposition nous paraît impossible si l'on reste dans le domaine des mathématiques, par contre elle est possible mais délicate s'il s'agit d'attirer l'attention de l'étudiant sur quelques notions fondamentales et élémentaires des mathématiques qui aident à définir l'espace de la géométrie.

En conclusion, il paraît nécessaire de dégager les invariants fondamentaux de la géométrie que nous avons vus précédemment en évitant tout formalisme inutile mais en utilisant les termes académiques lorsque ceux-ci sont facilitateurs. Notamment pour aider à l'identification de certaines classes d'invariants topologiques ou métriques. Les aspects projectifs et affines nous semblent a priori nettement moins pertinents.

Dans la formation, cela conduit le formateur d'enseignants à une institutionnalisation forte sur ces notions et à une stratégie de type transpositif sans l'appui (du moins à notre connaissance) de situation fondamentale de formation qui pourrait préparer un apport relativement magistral.

Les points qui apparaissent fondamentaux à soulever pour les étudiants sont donc les suivants :

- invariants topologiques simples.
- alignements
- parallélisme
- orthogonalité et notion d'angle mesure

De l'avis des membres de notre groupe de travail, ces aspects qui font partie des espaces de la géométrie sont parfois négligés dans leur transmission pratique à des élèves. En effet, l'idéologie dominante qui privilégie un enseignement qui part du complexe fait négliger l'enseignement direct de ces invariants

La rupture continu - discret : importance des réseaux.

Nous serons très brefs sur cette opposition fondamentale. Nous avons rappelé que le point apparaissait comme l'aboutissement d'une construction de l'espace qui partait du volume. Cette construction est commune à l'enfant et à la genèse historique mathématique de ces notions. Elle est en contradiction avec la genèse axiomatique privilégiée aujourd'hui dans l'enseignement de la géométrie.

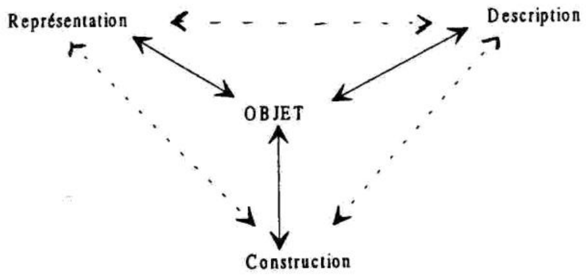
Comme l'affirme René Thom[8] (il en tente même une démonstration), le continu précède ontologiquement le discret. C'est à dire qu'il est plus facile de concevoir le discret à partir du continu que l'inverse. Ainsi la ligne brisée se conçoit comme un accident du continu alors qu'inversement un être discret ne peut accepter un accident continu sans être lui-même localement continu.

Cette conception intuitive permet de bâtir la notion de point comme accident du continu. Cette discrétisation nécessaire de l'espace va passer selon nous par l'usage et l'enseignement de réseaux de toutes sortes (le plus important mais non

[8] THOM R 1992 "L'Antériorité Ontologique du Continu sur le Discret" in Salanskis et Sinaceur, *Le labyrinthe du continu, pp. 37-143.*

le seul étant celui à maille carrée). Le point apparaît alors lié simultanément aux notions de mailles et de nœuds du réseau.
Les réseaux vont également permettre le codage des déplacements et la représentation de l'idée de direction. Enfin, ils permettent un passage progressif du local au global en ne privilégiant aucune case du réseau.
Les formateurs utilisent les réseaux de toutes sortes en opposition aux supports vierges pour introduire la notion de variable didactique. La construction de figures sur différents supports met bien en évidence les différences d'apprentissages qui peuvent être liées à une même consigne lorsque certains paramètres de la situation varient. Les réseaux semblent surtout enseignés au cycle II, mais leur usage et surtout leur construction au cycle III pourrait permettre de remédier à la carence d'activités sur le parallélisme et l'orthogonalité que nous avons pointée plus haut.

b) Activités sur l'objet.
On peut décrire l'ensemble du processus d'étude d'un objet tel qu'il est vu par les instructions officielles par le schéma suivant :



Un des buts essentiels de la formation est de permettre aux étudiants de structurer leur enseignement d'un certain nombre d'ensembles géométriques au travers de ce prisme. Les formateurs semblent d'ailleurs (hypothèse à confirmer) retenir cet aspect de la géométrie comme début de cours de géométrie et ceci souvent à l'aide d'activités sur les objets. Nous allons en voir différents aspects.

Étude d'objets géométriques particuliers.
Différentes figures géométriques sont étudiées de manière approfondie en formation des maîtres. II s'agit pour les formateurs de présenter les différents aspects de l'approche d'un objet géométrique à l'école élémentaire. Les activités porteront donc sur la représentation, la description et la construction de différentes figures

- des activités de représentation à partir des gabarits du cube ou des vues de l'octaèdre.
- des activités de description tel le jeu du portrait.

- des activités de construction surtout de polyèdres grâce à un matériel spécifique (Polydron ou le clone de Jovo), ou encore à partir de pliage ou de constructions papier (C. Rimbault).

Ces études visent à la fois un savoir mathématique et un savoir pédagogique. Pour mieux préciser la démarche pédagogique attendue, il est possible d'insister sur deux grands types d'activités pédagogiques fréquentes en géométrie : les activités d'émission/réception et les activités de classification de corpus.

Les activités d'émetteurs/récepteurs.

Il s'agit de mettre en œuvre la description d'un objet pour le construire ou pour le reconnaître grâce à l'émission de messages écrits.
Un exemple de ces activités est celui proposé par Jeanne Bolon[9] sur les constructions de quadrilatères. Là encore l'activité d'émission-réception est mise en œuvre avec les étudiants.
Ces activités sont également une source de travaux d'élèves pouvant être analysés en formation ou lors du concours.

La classification de corpus d'objets.

II s'agit cette fois de faire redécouvrir (ou découvrir) les propriétés des figures géométriques qui permettent d'organiser la connaissance de ces figures.
L'approche privilégiée n'est pas axiomatique *a priori* mais opératoire sur des ensembles qu'elle permet d'organiser comme les solides ou les figures planes.
Un grand nombre de comptes rendus de telles activités de formation figurent dans les productions de la Copirelem. Sans doute parce que souvent ces activités sont traitées sur le mode de l'homologie, le problème de la trace écrite et de l'institutionnalisation en géométrie nous semble trop négligé. On peut simplement signaler les cartes d'identité ou les dictionnaires de géométrie.

3. Aides pour la programmation d'un cours de géométrie.

Pour conclure, nous allons aborder très rapidement un point qui nous paraît négligé du moins dans les propositions d'activités de formation produites par la Copirelem.
Il s'agit de la structuration globale de l'enseignement de la géométrie. En effet, l'objet principal de la formation des PE n'est pas ou pas seulement la transmission d'un savoir mathématique sur la géométrie. II faut aussi aider les étudiants à mettre en place et à planifier leur propre enseignement de la géométrie.
Les stratégies d'homologie misent sur une sorte de transfert automatique par imitation de la formation à l'enseignement. Elles négligent les phénomènes de transposition opérés par les étudiants.

---

[9] Voir Géométrie, dictée de figures (PLOT n° 48).
Exemple: « Donner *une consigne permettant à un groupe récepteur de construire un rectangle de 4 cm sur 3 cm. Le message ne devra pas comporter le terme* rectangle.

Selon nous, la réflexion sur la programmation de l'enseignement de cet objet complexe qu'est la géométrie doit permettre une distanciation réflexive. Trop souvent, cet aspect essentiel est laissé à l'initiative de l'étudiant qui s'en remet alors soit à la progression proposée par les manuels, soit aux propositions du *"Babin"* souvent confondues avec les instructions officielles.

Nous proposons ici notre propre approche de ce problème en formation.

Pour être clair, notre but n'est pas de transmettre le modèle d'une progression type mais de sensibiliser l'étudiant à la notion moins rigide de programmation par thèmes. La structuration proposée aux étudiants repose sur le plan du cours de géométrie qui leur a été dispensé pendant le module.

L'activité proposée est une activité de synthèse effectuée en fin de module qui doit permettre aussi de familiariser les étudiants avec une certaine forme de vision de l'enseignement de la géométrie.

Les étudiants, répartis par groupes, doivent remplir une grille très succincte obtenue à partir de l'observation de la progression de différents manuels (trois par niveau du CP au CM2). II s'agit de noter la place et l'importance réservées aux différents types d'activités géométriques dégagés dans le module de formation.

1) Activités portant sur l'espace et les différents invariants (nature de ces invariants et type de supports utilisés).

2) Activités centrées sur l'étude d'un objet particulier en précisant cet objet et le type d'approche retenue (description, représentation ...).

3) Activités sur les transformations géométriques.

Les étudiants doivent également observer les rôles respectifs du plan et de l'espace à trois dimensions, le rôle des constructions et des instruments de géométrie, l'idée du simple et du complexe.

Enfin, ils doivent retenir une activité qu'ils jugent intéressante ou problématique.

Cette activité ne consiste pas en une découverte de manuels qui sont déjà connus par les étudiants. La synthèse effectuée à l'issue de la séance permet d'insister sur l'idée d'une programmation globale de la géométrie sur l'école élémentaire et sur le côté non obligatoire des regroupements proposés par les manuels.

L'objectif de l'enseignant doit être de ne pas négliger certains aspects de la géométrie. Le choix des objets étudiés dépend du niveau des élèves et de leur passé, ceci afin d'éviter les bégaiements fréquents constatés à l'école (travaux sur le cube ou surtout reprise constante des mêmes activités sur la symétrie).

Plan d'un cours de géométrie aux PE

	Activités proposées aux étudiants.
Introduction Rôle de la géométrie. 1) Société, histoire des maths • mesure • période classique • période contemporaine 2) A l'école primaire	*Le triangle de Pascal et les fractales*
I) Espaces de la géométrie 1) Caractéristiques de l'espace en maths. 2) Différents types d'espace de représentation pour l'enfant, classification par les invariants • "topologique" • alignements • parallélisme • orthogonalité • mesure 3) Importance des réseaux • notion de variable didactique. • discrétisation de l'espace.	*Les puzzles.* *Les marelles* *Étude du matériel Structuro* *Étude de travaux d'enfants*
II) Activités sur les objets géométriques 1) Reproduire, décrire, représenter et construire. 2) Deux grands types de situations pédagogiques a) Les situations d'émission réception. b) Les situations de classification de corpus.	*Les kaléidocycles* *L'octaèdre* *Description de quadrilatères* *Les polyèdres.*
III)Les relations entre objets : transformations géométriques 1) Recherche d'invariants dans les transformations • alignements. • angles • isométries 2) Etude de la symétrie.	*Transformations "conchoïdales " et"cissoidales "* *Frises* *Travaux à partir de la brochure Suivi Scientifique 6ème*
IV) Aides pour mettre au point une structuration de progression en géométrie.	*Analyse de manuels*

Polyèdres réguliers : compte rendu d'activité

Marie-Claude Chevalier

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.

Cet article présente des activités réalisées en formation initiale ou continu.
A travers l'activité vécue par les stagiaires, le formateur fait ressortir à la fois quelques notions de didactique (dialectique outil objet, situation didactique) et clarifie des notions de géométrie à propos des polyèdres réguliers.

Objectifs

Le principal objectif est de faire vivre une situation aux maîtres afin de conduire avec eux une réflexion sur l'activité mathématique et de pointer quelques concepts de didactique des mathématiques.

Les connaissances en géométrie sont relativement lointaines. peu disponibles, mal formalisées... Le cadre géométrique place les enseignants dans une position comparable à celle des élèves.

1-Déroulement de l'activité

Organisation et matériel
Les maîtres sont par groupes de 4 ou 5. Chaque groupe reçoit du matériel Plot[1]' (triangles équilatéraux. carrés, pentagones réguliers et hexagones réguliers).

Consigne
La consigne est donnée oralement et est écrite au tableau :
"Construire des polyèdres réguliers"

Première phase
Dans cette première phase, les maîtres construisent des polyèdres. Le matériel distribué plaît beaucoup. Chacun se lance dans des constructions. Dans certains groupes il y a coopération : un place les élastiques alors que l'autre tient les cartons, ou encore on voit une répartition des tâches d'assemblage.

Un oubli de la consigne est très net. Les gens sont pris par l'action.

[1] Plot - matériel n° 1 - APMEP - Orléans Tours

Deuxième phase

Un point est nécessaire. Le formateur choisit deux ou trois constructions réalisées, demande l'attention de tous et pose la question :
"Avons-nous des polyèdres réguliers?"

Dans le temps qui suit, les gens semblent découvrir la consigne. Ils interrogent l'animateur, en lui faisant même des reproches:
"C'est quoi un polyèdre régulier?"
"Vous nous laissez .faire des choses comme ça sans nous dire ce que vous attendez!"
…..
Des opinions sont émises à propos dos polyèdres construits. Il y a un accord rapide sur :
"Il faut que toutes les faces soient identiques. "
Le formateur se contente d'écrire cette phrase au tableau sans prendre position. Les maîtres pensent avoir trouvé là, la définition dont ils ont besoin.

Les maîtres connaissent la définition d'un polygone régulier. Ont-ils procédé par analogie, les côtés du polygone correspondant aux faces du polyèdre?

Obtient-on cette "définition" à partir de la représentation que chacun a d'un polyèdre régulier?

Troisième phase

Les enseignants reprennent le travail de construction qu'ils avaient interrompu, mais en ne recherchant cette fois ci que les polyèdres réguliers. Ils démolissent les solides obtenus en assemblant des polygones de nature différente.

Certains groupes assemblent des hexagones à n'en plus finir.

Quatrième phase

Le formateur guette la fabrication du polyèdre construit avec 10 triangles équilatéraux. Lorsqu'elle se produit, il montre le solide dans chaque groupe en demandant aux gens comment ils le trouvent. Les réactions tardent plus ou moins à se produire.

Un moment collectif est alors improvisé, souvent à l'initiative d'un stagiaire. Une vive discussion s'établit

"Toutes les faces sont égales !"
"Comment définit-on un polyèdre régulier ?"
"La définition est écrite au tableau !"

Un doute apparaît à propos de ce qui était accepté comme définition.
"Le polyèdre a un axe de symétrie ! "
" Il y a une rotation !"

Les transformations, jusque là ignorées, vont servir d'argument. Le solide est bien régulier puisqu'il peut tourner sur lui-même, ou bien puisqu'il est invariant par symétrie.

"Suivant l'endroit d'où on regarde ce solide, on ne le voit pas pareil !"
"Mais les angles ne sont pas les mêmes !"

Les isométries de l'espace apparaissent comme des connaissances peu sûres, elles sont abandonnées assez rapidement au profit de considérations sur les angles.

Le formateur fait remarquer que la notion d'angle dont on dispose est une notion de géométrie plane. Il aide à la reformulation de :
"Là, on a 5x60° alors que là on n'a que 4x60°" en suggérant de compter le nombre de faces réunies en un sommet.

A ce moment là, il y a accord à propos de la deuxième condition qui doit être réalisée :
"Chaque sommet réalise la réunion du même nombre de faces."

Cette phrase est écrite au tableau. La question sur la nature de ce que l'on est en train d'écrire se pose :
"Ce que nous avions écrit au début. ce n'était pas la définition !"
"Sommes-nous en train de donner une définition ou encore des propriétés ?"

L'animateur est sollicité en tant que détenteur du savoir mais ne donne pas son avis.

Cinquième phase
Au fur et à mesure de leur construction les polyèdres réguliers sont disposés sur un présentoir.

Le groupe qui assemble les hexagones commence à se désespérer. Bien que tous les membres du groupe coopèrent certains ont envie d'abandonner.
"De toute façon on n'aura jamais assez d'élastiques ou de cartons…"

Les autres groupes avaient codé leurs hexagones sans se poser de question mais certains enseignants commencent à s'intéresser à ce qui se passe.

"Ce n'est pas normal qu'ils n'arrivent pas à terminer !"
"Est-ce possible de construire un polyèdre régulier avec des hexagones ?"

Lorsqu'elle est formulée, la question est reprise collectivement. On arrive alors assez vite à l'idée de pavage du plan.
Avec les hexagones, vous ne sortez pas du plan !"
"On doit avoir 360°... "

Surgit une nouvelle question. II faudrait connaître la mesure d'un angle de l'hexagone Certains font appel à l'animateur, d'autres à leurs souvenirs mais devant la résistance rencontrée un stagiaire propose de calculer.
"Il suffit de trouver une méthode de calcul! "

Plusieurs stratégies pour calculer la mesure d'un angle d'un polygone régulier sont proposées par les maîtres en formation. Le polygone de n côtés est découpé en triangles :
- à partir d'un sommet : on obtient (n-2) triangles et la somme des angles est donnée par (n-2) x 180°.
- à partir d'un point intérieur : on obtient n triangles et la somme des angles du polygone est n x 180° - 360°.

Sixième phase
Des questions viennent tout naturellement :
"Y a-t-il un nombre fini de polyèdres réguliers ?"
"A-t-on construit tous les polyèdres réguliers qui existent ?"

On voit alors quelques souvenirs très confus :
"Il y a une relation entre le nombre de faces et le nombre de sommets. "
……..

En moment collectif, on cherche à vérifier si tous les polyèdres réguliers ont été construits.
En général, on découvre alors l'existence de l'icosaèdre, non réalisé jusque là. Des enseignants se lancent dans sa fabrication.

Septième phase
L'animateur distribue alors un polycopié reprenant les points importants[2] afin de répondre aux questions de plus en plus techniques qui se posent et de mettre fin à l'activité mathématique.

2 - Exploitation de l'activité

Le formateur propose aux maîtres de réfléchir à ce qui s'est passé au cours de l'activité. Pour cela il demande à chaque groupe de mettre rapidement par écrit quelques éléments de réflexion à propos des mathématiques rencontrées au cours de la situation mais aussi à propos du vécu de chacun en tant qu'apprenant.

Dans une synthèse collective, chaque phase est analysée sur le plan mathématique et sur le plan didactique.

---

[2] voir annexe p.26

Analyse de la 1ère phase

Dans la première phase, les enseignants utilisent des connaissances implicites sur les polyèdres réguliers.
Ces connaissances permettent des actions, des prises de décision.

La consigne n'est pas recevable par les stagiaires qui ont besoin de prendre connaissance du matériel mis à leur disposition, de manipuler en dehors de toute attente du formateur.

Cette première phase d'action permet en fait la dévolution du problème.

Analyse de la 2ème phase

Apparaît ici le problème de l'identité de l'objet mathématique "polyèdre régulier".
Les connaissances mobilisées permettent de formuler ce qui sera accepté comme une définition.
Cette "définition" reprend l'aspect le plus visible de l'objet et a un caractère fonctionnel. On peut tout de suite éliminer des solides construits en mélangeant triangles et carrés par exemple.

Dans cette deuxième phase, essentiellement de formulation, les connaissances mobilisées sont explicites, elles permettent des échanges de point de vue afin d'obtenir un consensus.
Le problème est la propriété de chacun.

Analyse de la 3ème phase

Les connaissances sont maintenant explicites, elles permettent des actions, des prises de décision.
On a une nouvelle phase d'action.

Analyse de la 4ème phase

La définition jusque là acceptée, est mise à l'épreuve des faits.

Les connaissances mobilisées lors des échanges ont pour but, soit de convaincre que le nouveau solide construit est bien un polyèdre régulier, soit au contraire de persuader qu'il n'est pas régulier.

Quel est le statut de la phrase : "Dans un polyèdre régulier, toutes les faces sont identiques" ? Une définition doit caractériser l'objet dont elle parle. Une propriété peut décrire partiellement un objet.

La définition initiale est actualisée pour rendre compte de la contingence.
Dans cette phase, les connaissances permettent des échanges d'information mais aussi des échanges de jugement.

L'appel au bon sens pour classer les solides ne suffit pas. II y a recherche d'arguments d'ordre mathématique.

Le formateur est censé détenir le savoir. On pourrait se contenter de son avis mais dans la mesure où il refuse de prendre position la nécessité de prouver apparaît.

Analyse de la 5ème phase
Lorsque le groupe qui travaille avec les hexagones commence à douter, il ne fait pas appel à des raisons mathématiques mais à des causes matérielles (nombre d'hexagones ou d'élastiques insuffisant). C'est un regard extérieur au groupe qui va permettre de replacer le problème dans son cadre.

La réponse : "on obtient un pavage du plan" parait évidente, cependant le besoin de preuve apparaît de manière très nette.

Les connaissances anciennes ne permettant pas de donner directement la mesure d'un angle d'un hexagone. Le formateur refusant à nouveau de livrer les informations, les stagiaires savent à ce moment là que ces informations sont à leur portée par le biais d'un calcul. Les mathématiques donnent un pouvoir sur les choses.

Les méthodes de calcul proposées sont pertinentes et se veulent générales. L'aspect universel des mathématiques est ici implicite.

Dans cette phase, la question d'existence de polyèdres construits à partir de polygones quelconques est posée pour la première fois. Des hypothèses sont alors formulées et validées.

Le savoir sur les polyèdres réguliers est en train de se construire.

Analyse de la 6ème phase
Dans cette phase, l'objet "polyèdre régulier" est étudié. Le souci d'exhaustivité apparaît. Les connaissances mathématiques permettent d'anticiper. L'icosaèdre est découvert théoriquement avant d'être réalisé.
Les connaissances mathématiques permettent de formuler des énoncés, des théorèmes : "il existe un polyèdre régulier dont les faces sont des triangles équilatéraux et tel que chaque sommet réalise la réunion de 5 triangles."
La réalisation de l'icosaèdre valide le théorème.

Analyse de la 7ème phase
Un point d'institutionnalisation est nécessaire pour répondre à une demande des maîtres en formation. Cela permet de dissiper toute ambiguïté : les connaissances établies au cours de la situation sont correctes.

Le formateur reprend ici sont rôle de garant du savoir mathématique.

Conclusion

La situation permet de parler des savoirs mathématiques. Ils apparaissent sous forme de connaissances implicites ou explicites dans la résolution de problèmes. On les rencontre à travers des définitions, des propriétés.
Ces savoirs sont tantôt objets d'étude, tantôt outils de résolution de problèmes.

A travers la situation, on voit un concept évoluer, s'affiner, prendre place à côté d'autres concepts. On peut parler de construction, de structuration, de réorganisation de connaissances...

La situation permet de pointer quelques caractères des mathématiques. Les connaissances donnent du pouvoir sur les objets, elles permettent des anticipations. Les énoncés mathématiques ont très souvent un caractère universel ou bien répondent à des problèmes d'existence. Enfin la nécessité de preuve, de démonstration fait partie de l'activité mathématique.

La théorie des situations de G Brousseau, donne un cadre de référence pour pointer :

- les moments où les connaissances permettent des actions ou des décisions.
- les moments où elles permettent des échanges d'informations codées dans un langage.
- les moments où elles permettent des échanges de jugement.

On a donc là une illustration des différentes fonctions des connaissances mathématiques dans les situations a-didactiques.

On voit très nettement quand le problème du formateur devient le problème des maîtres en formation. On a un exemple de situation où la consigne seule ne permet pas la dévolution de la situation a-didactique.

Les relations qui s'instaurent entre le formateur et les maîtres en formation à propos du savoir en jeu sont intéressantes à regarder à travers la notion de contrat didactique. Le fait que le formateur, qui détient le savoir, refuse de communiquer ce savoir est perçu comme une rupture de contrat. La dernière phase rétablit le contrat enseignant- enseigné dans sa forme classique.

Bibliographie

Douady R., " Jeux de cadres et dialectique outil-objet", Recherche en didactique des mathématiques, vol.7/2, Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 1987.
Briand J., Chevalier M.C., "Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques", Hatier, Paris, 1995.
Brouseau G., " Théorie des situations didactiques", Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble, 2001.

Annexe

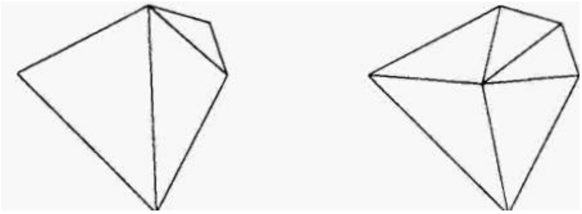
1 - Polyèdres réguliers
A partir du matériel Plot : triangles équilatéraux, carrés, pentagones et hexagones réguliers, on construit des polyèdres réguliers.

Dans un polyèdre convexe régulier :
- toutes les faces sont superposables.
- chaque sommet réalise la réunion du même nombre de faces.

2 - Mesure des angles d'un polygone régulier

La somme des angles internes d'un polygone (n côtés) est égale à :

$$(n - 2) \times 180° = n \times 180° - 360°$$



figures 1 et 2

La mesure d'un angle d'un polygone régulier de n côtés est : (n - 2) x 180° / n
Dans un pentagone régulier, un angle mesure : (5 - 2) x 180° / 5 = 108°
Dans un hexagone régulier, un angle mesure (6-2) x 180° / 6 = 120°

3 - Construction des polyèdres convexes réguliers

<u>Polyèdres dont les faces sont des triangles équilatéraux</u>

En réunissant 3 triangles autour d'un sommet (3x60° = 180°), on obtient le tétraèdre (4 faces).

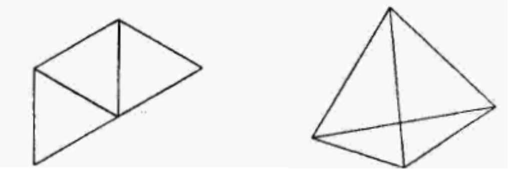


figure 3

En réunissant 4 triangles autour d'un sommet (4 x 60° = 240°), on obtient l'octaèdre (8 faces).

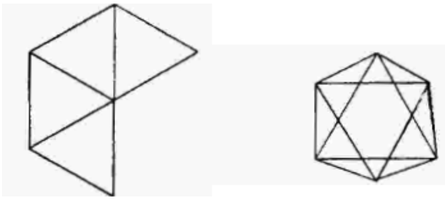


figure 4

En réunissant 5 triangles autour d'un sommet (5 x 60° = 300°), on obtient l'icosaèdre (20 faces).

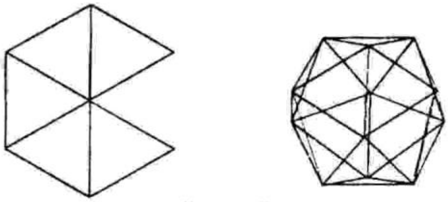


figure 5

Avec 6 triangles équilatéraux, on obtient le début d'un pavage du plan (6 x 60° = 360°).

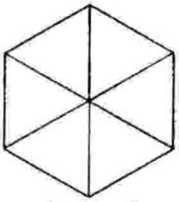


figure 6

Polyèdres dont les faces sont des carrés

En réunissant 3 carrés autour d'un sommet (3 x 90° = 270°), on obtient le cube (6 faces).

figure 7

Avec 4 carrés, on obtient le début d'un pavage du plan.

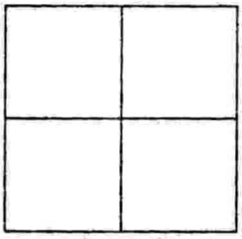


figure 8.

Polyèdres dont les faces sont des pentagones réguliers

En réunissant 3 pentagones réguliers autour d'un sommet (3 x 105° = 315°), on obtient le dodécaèdre (12 faces).

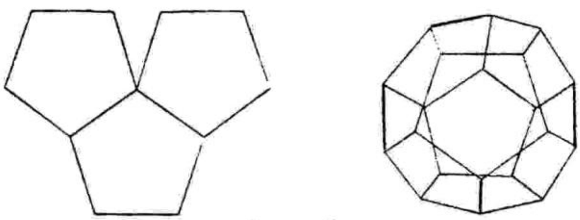


figure 9

4 x 105° > 360°

Avec les hexagones réguliers

Avec 3 hexagones réguliers. on obtient le début d'un pavage du plan.

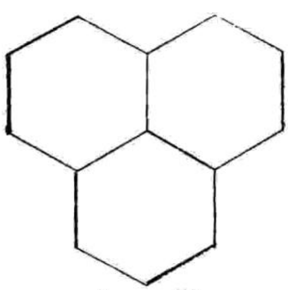


figure 10

Les polyèdres convexes réguliers ainsi construits sont les 5 solides de Platon.

4 - Des questions

Existe-t-il une relation liant le nombre de faces, le nombre d'arêtes et le nombre de sommets dans un polyèdre régulier ?

En prenant comme sommets les centres des faces d'un polyèdre régulier construit-on un nouveau polyèdre régulier?

Pyramides bizarres

Marianne Frémin

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.

Cet article est un compte rendu d'activités proposées en formation initiale ou continue.
La mise en situation des stagiaires par le formateur permet d'une part une analyse de la construction géométrique de pyramides "penchées" et d'autre part une ébauche de séance élèves prenant en compte les difficultés rencontrées.

1. INTRODUCTION

a) Contexte

En formation initiale ou continue, dans le cadre d'un enseignement de géométrie, séance de trois heures dont un peu plus de deux sont consacrées à la construction et son analyse au niveau des adultes, et le reste à l'élaboration et l'analyse d'une situation analogue pour des enfants.

b) Intention

1. Faire une construction en volume présentant des difficultés inédites et consistantes pour les adultes.

2. Analyser la situation, le rôle moteur des essais ratés... puis réinvestir en…

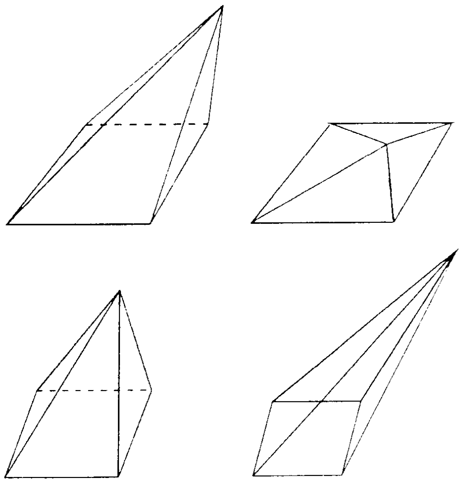
3. Comment faire faire une construction analogue à des enfants.

2. LES PYRAMIDES BIZARRES

a) Mise en place

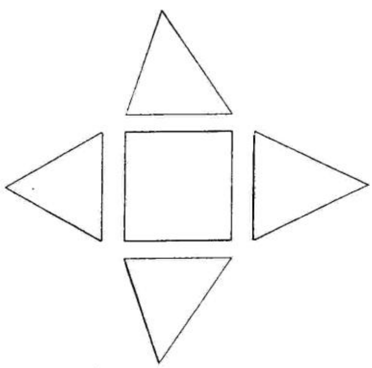
1. Consigne

Construire une pyramide, pas une belle régulière comme celle du Louvre, une vilaine comme ça (en montrer) :

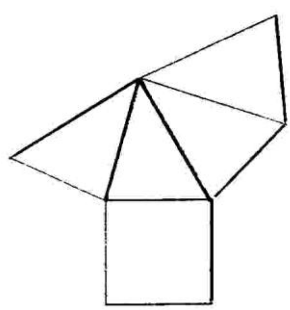


Après une petite pause, en dépecer une ou deux : elles ont une base carrée et quatre faces triangulaires.

Disposer les morceaux au tableau.



NB. Je fais attention à disposer les morceaux ainsi, pour induire un patron formé de quatre triangles bordant un carré, et éviter de me retrouver avec plusieurs personnes essayant ce genre de patron : (suite à un apprentissage récent au cours de technologie. Ce patron rend l'étude difficile).



2. Matériel animateur

Trois ou quatre pyramides à base carrée "bien asymétriques", c'est-à-dire dont le sommet ne soit visiblement pas à l'aplomb du centre ou des axes de symétrie du carré, en carton fort, à faces indépendantes scotchées (pour être démontables).

3. Matériel stagiaire

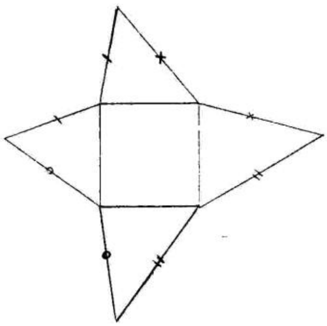
Matériel classique de géométrie (règle, équerre, compas,...), carton uni, scotch, ciseaux. Du bristol quadrillé peut faciliter la tâche à certains moments.

4. Précisions

Les stagiaires comprennent qu'il faut faire un patron. Il vaut mieux ne pas prévoir de languettes et coller bord à bord (les languettes perturbent l'analyse).

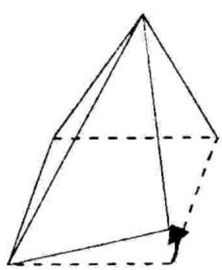
b) Premiers essais

1. Analyse technique

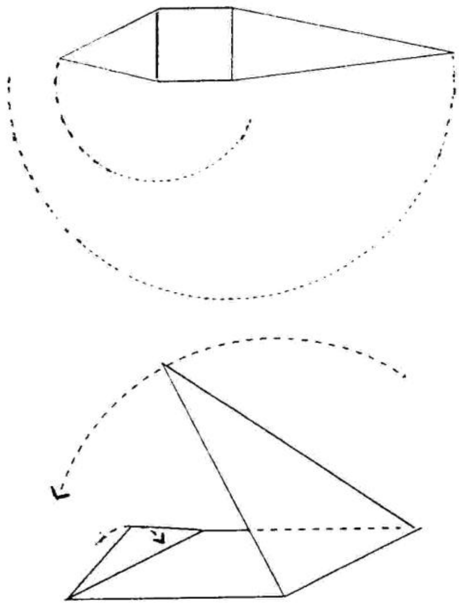


a) Contrainte sur les longueurs des arêtes: deux arêtes amenées à se coller ensemble doivent avoir même longueur.

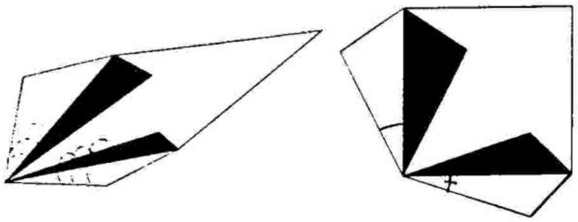
b) Risque de "gauchissement du carré"



c) Inégalités triangulaires sur les longueurs



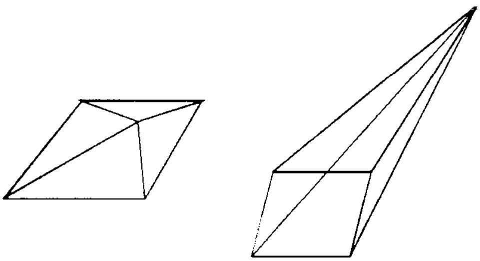
d) Inégalités triangulaires sur les angles



2. Comportements

Les stagiaires se lancent rapidement.
Les difficultés (a) et (b) apparaissent systématiquement à chaque essai, sont incontournables, et donc à traiter en priorité.

Les essais qui ne respectent pas les contraintes de longueur (a) vont pudiquement à la poubelle. Ces essais ratés permettent de réaliser où est la difficulté et de la surmonter aux essais suivants. Beaucoup de stagiaires n'ont pas besoin d'un essai raté pour penser à respecter les contraintes de longueur.
Le problème du "gauchissement" apparaît, mais n'est pas formulé (les pyramides ratées vont à la poubelle. sans que les suivantes soient meilleures).
Les difficultés (c) et (d) apparaissent sporadiquement, lorsqu'on cherche à faire une pyramide très longue et excentrée (inégalités triangulaires sur les longueurs) ou au contraire très plate : (inégalités triangulaires sur les angles), et qu'on n'a pas de chance. Quand une pyramide est ainsi ratée, il se peut que la suivante soit réussie sans que la raison de l'échec ou de la réussite soit élucidée.
C'est pourquoi je travaille d'abord sur (a) et (b), en laissant de côté les manifestations éventuelles de (c) et (d), puis quand l'élaboration de la "recette de pyramide" est bien engagée, je provoque l'apparition de (c) et (d) en proposant des pyramides longues et excentrées ou très plates, et l'on complète alors la recette.



c) Les réalisations

1. Trop régulières

Coins de cube
Symétrie par rapport à un plan médian (deux triangles isocèles se font face)
Elles sont produites par des stagiaires éludant ainsi le problème de gauchissement.

- demander une autre pyramide plus bizarre.

2. Légèrement gauche

La bascule peut passer sur le compte de l'imprécision des tracés et découpages.

- demander une autre pyramide plus soignée, ou différente.

3. Pyramide "à bascule"

- demander une autre pyramide stable.

4. Pyramide correcte

C'est rare.

- demander une autre pyramide très différente (plus pointue, ou plus plate, ou plus excentrée).

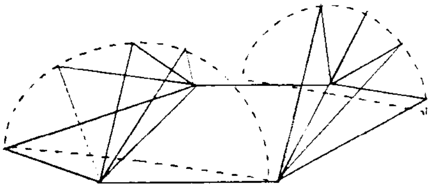
Dans le cas très improbable d'une personne ayant percé le secret des pyramides à base carrée, on peut lui proposer, pour patienter, de faire des pyramides à base quadrilatère quelconque, ou pentagonale...

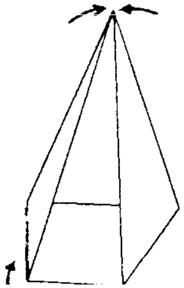
d) Première mise en commun

1. Le gauchissement est la difficulté essentielle, bien perçue, mais pas analysée. Questions: "comment éviter de faire gauche ?". "pourquoi ça gauchit ?"

Pour y répondre, on peut dépecer une pyramide "bien ratée", puis deux types de "monstration" sont possibles :

- faire tourner autour des côtés du carré les deux triangles, dont les pointes n'ont aucune chance de se rencontrer.





- tordre ostensiblement le carré pour que les sommets des triangles se rencontrent.

2. Les autres difficultés n'apparaissent pas (ou rarement): quand un stagiaire a butté sur (a), il a honte et ne s'en vante pas (inutile d'insister, on la retrouvera dans la recette), et (c) et (d) sont trop aléatoires pour être perçues.

e) Retour aux constructions

On demande à chaque stagiaire de construire une pyramide "encore plus irrégulière". C'est une phase où le formateur agit localement pour aider à formuler, pour proposer une construction très différente...

f) "Recette de pyramide"

Pendant la phase de construction. le formateur propose localement, quand la réussite s'installe, de rédiger une "recette de pyramide", sur papier affiche pour exploitation collective.

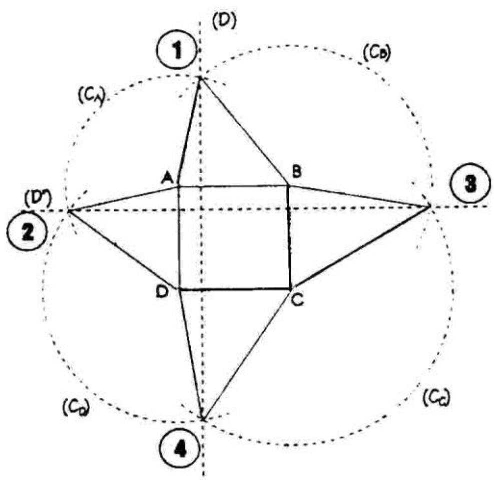
On remarque que la réponse au problème "comment ne pas faire gauche ?" est naturellement "faire attention de mettre les sommets en face".

g) Mise en commun

On exprime les dernières difficultés de construction.
On examine et compare les recettes (ce qui contribue à aider les stagiaires qui n'auraient pas réussi à construire).

Voici trois "bonnes recettes" susceptibles d'être obtenues :

Recette 1



Choisir ① (2 degrés de liberté)
Choisir ② sur (C_A) (1 degré de liberté)
Construire ③ intersection de (C_B) et (D') (0 degré de liberté)
Construire ④ intersection de (C_D) et (D) (0 degré de liberté)

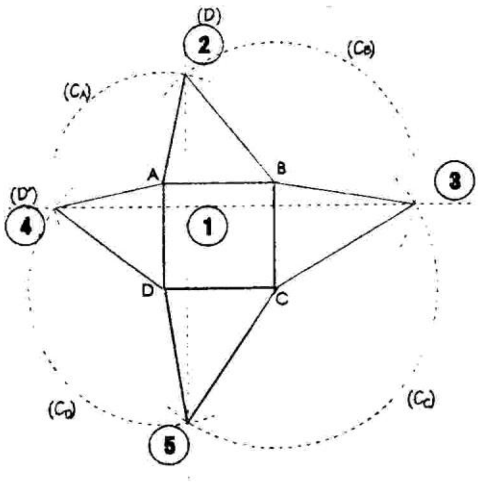
NB. La dernière égalité de longueurs est automatiquement vérifiée : ④ se trouve sur (C_C).

Recette 2 (même figure que ci dessus)

Choisir① (2 degrés de liberté)
Choisir ② sur (C_A) (1 degré de liberté)
Construire ③ intersection de (C_B) et (D') (0 degré de liberté)
Construire ④ intersection de (C_D) et (Cc) (0 degré de liberté)

NB. Le dernier face à face de sommets est automatiquement vérifié : ④ se trouve sur (D).

Recette 3



Choisir ① "aplomb du sommet" (2degrés de liberté)
Choisir ② sur (D) (1 degré de liberté)
Construire ③ intersection de (D') et (C_B) (0 degré de liberté)
Construire ④ intersection de (D') et (C_A) (0 degré de liberté)
Construire ⑤ intersection de (C_D) et (D)
(0 degré de liberté)

NB. La dernière égalité de longueurs est automatiquement vérifiée : ⑤ se trouve sur (C_C).

Degrés de liberté
Dans chaque construction, on a trois degrés de liberté. Déterminer une pyramide, c'est choisir un sommet quelque part au dessus du carré : trois degrés de liberté aussi.

Du matériel utile pour montrer (sinon démontrer)
Carrés et triangles rigides pivotant autour des côtés.
Carré et ficelles figées aux sommets.

3. TÉTRAÈDRES BIZARRES

L'activité "pyramide bizarre" qui paraissait a priori difficile aux stagiaires. est finalement réussie, et ils sont fiers et étonnés de cette réussite.

On peut leur demander de construire une activité analogue pour une classe de CM, ce qui de plus les oblige à dégager les caractéristiques intéressantes de la situation.

a) La situation
Faire construire des "tétraèdres bizarres" à des élèves de CM.

b) Caractéristiques communes avec "pyramides"
Situation de construction
Situation auto validante
Rôle moteur des essais ratés

c) Différences
Le problème du "gauchissement" ne se pose pas (Ouf!)
Ce soulagement rend les instituteurs confiants dans les possibilités de réussite des enfants.

Géométrie sur un cube

J.C. Ducorail - M.H.Salin

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Cahors 1991.

Cet article propose des activités de formation initiale permettant la construction de notions géométriques autour du cube (perspective cavalière, patrons et quelques propriétés de géométrie dans l'espace).

Le cube apparaît comme un volume simple et ses propriétés semblent évidentes (du moins celles que chacun croit connaître et chacun pense qu'il les connaît toutes). Objet d'étude sans mystère, il peut apparaître à l'enseignant et à l'élève comme étant un bon support de réussite immédiate ... et il ne présente plus alors le moindre intérêt. Nous allons essayer de prouver le contraire.

UTILISATION AVEC DES ENSEIGNANTS EN FORMATION INITIALE

Le cube va être étudié à partir de situations diverses qui feront appel à cinq types de représentations :
- le patron (le développement) du volume,
- le volume réalisé en "dur" (bois ou polystyrène),
- le volume réalisé à partir d'un patron,
- le volume représenté en perspective cavalière (même approximative),
- le volume représenté en dessin technique.

Ce sont les interactions entre ces cinq "écritures" du cube qui vont permettre :
- de faire des hypothèses,
- de vérifier, de valider les conjectures,
- de se familiariser avec des représentations de l'espace,
- de comprendre, dans et par l'action, la nécessité de tracés soignés et précis,
- d'anticiper les actions par un va-et-vient entre l'espace et sa représentation plane,
- d'utiliser en situation les outils du dessin géométrique.

Par exemple, la recherche de tous les patrons du cube peut être validée par la réalisation du cube construit ou par une réalisation rapide de bristol quadrillé (pour la rapidité du tracé). La dialectique du "plan" à l'espace, du "dessin" au concret doit toujours être présente dans les activités proposées.

SAVOIRS MATHÉMATIQUES VISÉS

- parallélisme de deux droites dans l'espace,
- orthogonalité d'une droite et d'un plan,

- plans perpendiculaires et section du dièdre droit.

…

CONTENUS DIDACTIQUES

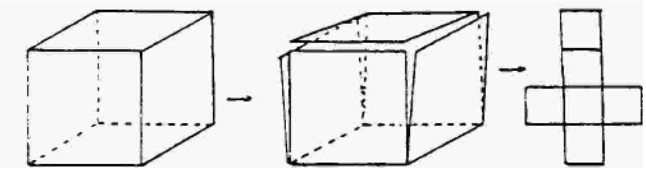
- montrer que la géométrie plane se fait dans un plan même si ce plan n'est pas celui de la feuille ou celui du tableau,
- dans le vécu des enseignants en formation, montrer que le constat d'erreur (ou de réussite) doit venir de la situation elle-même, c'est-à-dire ici de la transposition d'une "écriture" du cube dans une autre, ce qui permet de vérifier, de valider une action ou une hypothèse.
- chercher les transpositions didactiques possibles avec des élèves.

A LA RECHERCHED'UN PATRON DU CUBE

1) Situation de départ

Chaque stagiaire (ou chaque groupe de stagiaires), dispose d'un cube "en dur" (cf. paragraphe matériel). La consigne est de rechercher le développement de ce volume donné. Le développement étant réalisé, il faut alors construire un cube dont la longueur de l'arête est différente de celle du cube initial. Cette réalisation sert de validation de l'activité précédente.

On pourrait également partir de la représentation du cube en perspective cavalière. La consigne serait alors de désigner les arêtes selon lesquelles il faut couper pour "ouvrir" le cube et de passer ensuite au patron d'un cube d'arête donnée pour valider.



2) Notes sur la perspective cavalière

La perspective cavalière est un mode de représentation codée des volumes.

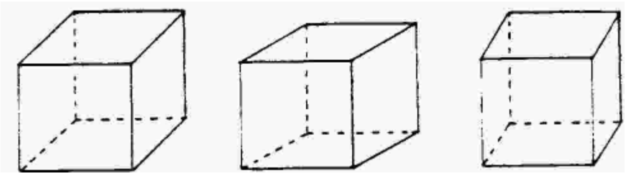
Principes :
- Toutes les figures des plans frontaux sont représentées sans déformation (conservation des propriétés angulaires et métriques) à l'échelle près.
- Contrairement au dessin habituel, le point de fuite est rejeté à l'infini. Il y a donc conservation du parallélisme. En général on choisit un "angle de fuite" par rapport à l'horizontale de 30°, 45° ou 60° à cause des instruments de dessin.
- Pour conserver à l'œil l'impression correcte du volume, on réduit les dimensions sur les fuyantes (2/3, 1/2, 3/4 ...) selon l'angle de fuite choisi. Tout dessin

en perspective cavalière devrait donc comporter l'indication de l'échelle et de la réduction sur les fuyantes.
- On représente en traits pleins ce qui est visible et en traits interrompus ce qui est caché.

Propriétés :
- Sur les tracés non déformés, toutes les propriétés de la géométrie plane sont conservées.
- Sur les autres faces sont conservées les propriétés du parallélisme et les propriétés des milieux.

Ci-dessous trois représentations d'un même cube avec 3 angles de fuite différents : 45°, 30°, 60°.

Les réductions sur les fuyantes sont respectivement 2/3, 2/3, 1/2[1]



3) Et ensuite .....

Si on en reste là, avec cette seule activité, on peut considérer que le tour du cube (au propre comme au figuré), a été fait et qu'il suffira d'ajouter la formule du volume pour que chacun sache ce qu'est réellement un cube. Malheureusement il n'en est rien et toute la richesse du cube reste inexplorée.

Ce que nous proposons ci-après est un essai d'exploitation des richesses du cube dans le but d'une approche différente de la géométrie.

4) Les patrons du cube

On peut proposer ensuite de rechercher tous les patrons possibles du cube.

On peut partir des divers patrons trouvés dans la classe lors de la situation (1) et se demander s'il existe d'autres modèles. On peut partir à nouveau du cube en "dur".

On peut se demander si tous les hexaminos sont des patrons du cube.

On peut partir de la perspective cavalière (situation difficile).

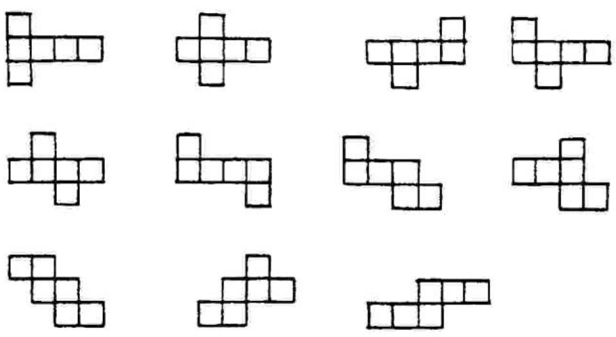
[1] NDLR : Le choix de ces coefficients est personnel aux auteurs de l'article

Quelque soit le point de départ choisi, il importe de pouvoir vérifier rapidement les hypothèses sans recourir à une réalisation soignée comme en (1). Du papier quadrillé sur lequel le tracé est facile et que l'on peut rapidement découper et plier permet cette vérification.

Ensuite il faut trier et classer les patrons trouvés. Ce tri va permettre :

- d'éliminer les patrons identiques (superposables par retournement ou par rotation),
- de vérifier s'il n'y a pas d'autre combinaison de six carrés adjacents par un moins un côté qui permette de construire un cube,
- de vérifier au moins qu'il existe des combinaisons de six carrés qui ne permettent pas de construire un cube.

Les onze patrons du cube :



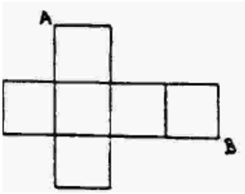
Toute cette activité ne peut se conclure que par la réalisation effective de cubes à partir des patrons ainsi trouvés.

5) D'autres exercices avec les patrons

Plusieurs exercices sont possibles. Ils conduisent tous à passer mentalement du patron au cube réalisé, de la représentation au patron.

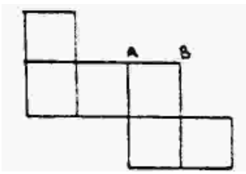
Voici quelques exemples :

- sur un patron, désigner le sommet extérieur d'un carré. Demander de désigner les autres sommets qui viennent se superposer à celui-ci lors du "montage" du cube.



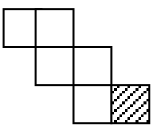
Sommets venant coïncider
avec A?
avec B?
etc...

- le même exercice peut être fait avec le côté d'un carré :



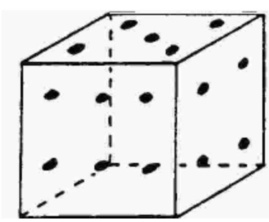
Quel côté vient se superposer sur AB?

- réaliser, sur un patron quelconque, le tracé effectué sur le cube en vraie grandeur (voir paragraphe suivant, tracés sur le cube).
- sur un cube réalisé, indiquer (en les repassant avec un feutre par exemple) les arêtes selon lesquelles, il faut couper pour "ouvrir" le cube et obtenir un patron désigné à l'avance.
- même exercice avec un carré. On peut chercher la face opposée :



Quelle est la face opposée à la face hachurée?

- un onglet (pour le collage) étant placé, indiquer où se placent les autres sur le patron.
- à partir d'un dé représenté en perspective cavalière



Sur un patron placer le 6 et le 4 ou le 6 et le 3, ou...et demander aux élèves de replacer les autres faces du dé sur le même patron.

Il faut alors considérer que le patron se plie à l'inverse des habitudes, c'est-à-dire que les faces sur lesquelles on écrit deviennent des faces extérieures du cube réalisé.

On peut recommencer avec divers patrons, avec diverses faces du dé.

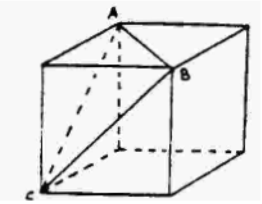
TRACÉS SUR UN CUBE

Ayant réalisé un volume, il est intéressant d'effectuer des tracés sur ses faces. C'est une première approche de la géométrie dans l'espace mais en vraie grandeur.

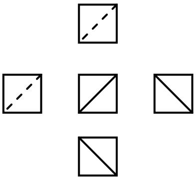
Le passage du tracé réalisé à ses représentations en perspective cavalière et en dessin technique devrait permettre :
- de se familiariser avec les représentations de l'espace.
- de rencontrer les projections orthogonales.
- de s'attacher davantage aux propriétés qu'aux représentations,
- de formuler des hypothèses à partir de figures "fausses".

Ici, dans ce document, la présentation ne peut se faire qu'avec des représentations en perspective cavalière ou en dessin technique mais il faut d'abord réaliser les tracés sur un cube réel avant de les représenter.

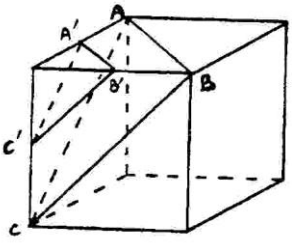
1) Quelques polygones



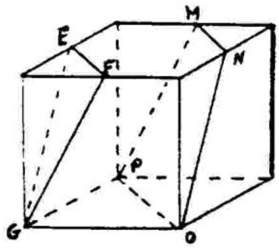
Nature du triangle ABC?
Calcul des côtés.



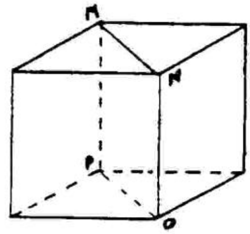
Dessin technique (projection et rabattement)

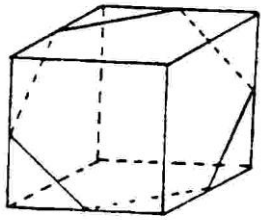


Nature du triangle A'B'C' ?
Rapport entre ABC et A'B'C'?



Nature de
EFG ?
Nature de
MNOP ?



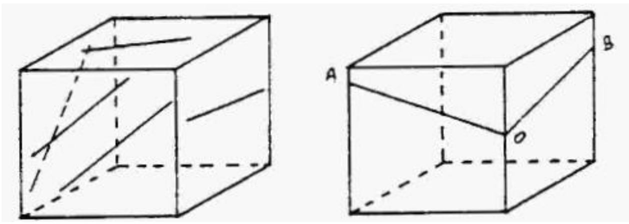


Nature du polygone construit en joignant les milieux des arêtes ?

Ces divers tracés de figures planes "dans l'espace" peuvent apporter une autre conception de la géométrie et montrer, par exemple, que la géométrie dans un plan n'existe pas uniquement sur le plan de la feuille de cahier ou sur le plan du tableau.

2) Droites sur un cube

Le tracé de droites sur les faces d'un cube peut permettre de faire découvrir la fausseté de quelques théorèmes erronés construits autour de l'orthogonalité ou du parallélisme dans l'espace.



AÔB est-il droit?

Le cube "dur" que l'on peut couper aide à prendre conscience de la fausseté de certaines intuitions. La représentation en perspective cavalière montre que des droites concourantes sur le dessin ne le sont pas dans la "réalité".

CUBES TRONQUÉS

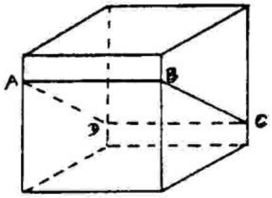
1) Sections du cube par un plan

Si un plan coupe une face du cube, combien en coupe-t-il au plus? au moins?

Dans tous les cas il serait souhaitable de partir de la représentation du cube en perspective cavalière, de demander de formuler des hypothèses, éventuellement de démontrer.

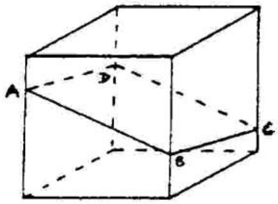
On pourra ensuite vérifier en réalisant une coupe du cube en "dur" ou en réalisant le tracé sur le cube (trace de l'intersection du plan sécant avec chacune des faces).

Vous trouverez ci-dessous quelques exemples et des pistes éventuelles de recherches à conduire.



Nature du quadrilatère
ABCD ?

Nature de ABCD ?



Quelques questions à chercher :

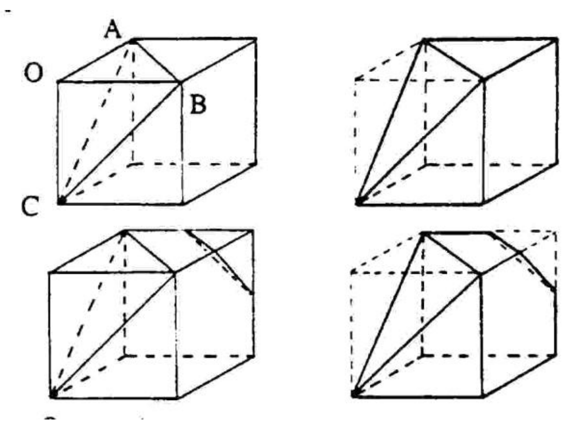
Quelles conditions doit remplir le plan sécant pour que la section soit :
- un quadrilatère ?
- un trapèze ?
- un parallélogramme ?
- un carré ?
- un rectangle ?
- un hexagone ? (pas forcément régulier)

La section du cube peut-elle être un losange ? Dans quel cas ?

2) Cubes tronqués et patrons

Certes on pourrait faire réaliser les patrons des troncs de cubes obtenus à partir de l'intersection d'un cube et d'un plan. Certains cas peuvent être délicats à réaliser. Il est plus simple de s'intéresser à des sections plus régulières.

Le point de départ pourrait être le dessin en perspective cavalière ou le tracé sur un cube complet.



On peut demander de réaliser le patron et le volume construit

- de la pyramide — en 2 groupes séparés
- du cube tronqué

- de la grande pyramide
- de la petite pyramide — en 3 groupes séparés
- du cube tronqué

Une représentation de ces volumes en dessin technique peut être un excellent exercice de projection.

On peut aussi demander de chercher combien de pyramides OABC on peut tirer d'un même cube et de faire des hypothèses sur ce qui reste à l'intérieur du cube.

3) Autres pistes

On peut aussi s'intéresser aux volumes obtenus à partir de l'octogone régulier inscrit sur chaque face du cube, à partir des centres de chacune des faces, etc.

MATÉRIEL ET MATÉRIAUX

- polystyrène et filicoupeur
- papier bristol ou à dessin
- colle
- ciseaux
- instruments du dessin géométrique
- papier ordinaire quadrillé pour les tracés rapides.

BIBLIOGRAPHIE

BOULE F., *"Espace et géométrie pour les enfants de 3 à 11ans*", 1979, Éditions CEDIC.

CUIVDY H.M., ROLLET A.P., *"Modèles mathématiques"*,Éditions CEDIC.

BALACHEFF N., KUNTZMANN J., LABORDE C., *"Formation mathéma-tiques des Instituteurs"*,1981,Éditions CEDIC.

Brochures de l'A.P.M.E.P (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public. 26, rue Duméril - 75013 PARIS)

"Aides pédagogiques pour le CM", tome I , "Géo*métrie",* 1983
"Géométrie au premier cycle", tomes 1 et 2
"Activités mathématiques en quatrième-troisième" tomes 1 et 2, 1981

"Introduction à la géométrie dans l'espace. Activités pour la 5ème (IREM de Grenoble)

La boîte cadeau

François Huguet

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Cahors 1991.

Cet article est un compte rendu d'activités en formation initiale.
L'objectif de l'auteur est de montrer aux stagiaires l'intérêt de penser l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire en terme « d'activités » même si cette situation se réfère aux Instructions Officielles de 1985, elle nous semble toujours pertinente et exploitable. Cette situation est proposée dans « Elem-Math VII » (publication APMEP).

"Lors de l'introduction de notions nouvelles, les élèves sont mis en situation d'apprentissage actif : ils découvrent les notions comme des réponses à des problèmes." (Instructions Officielles de 1985)

Contexte

J'ai utilisé cette situation récemment en 3 circonstances et sur une durée d'environ 2 heures avec des normaliens de 1ère et 2ème année en modifiant à chaque fois quelques variables didactiques de la situation.

Je me suis volontairement détaché de la présentation faite dans l'ouvrage cité en référence.

Cette situation me semble un bon prétexte pour convaincre les élèves en formation de l'intérêt d'une telle approche de notions mathématiques fondée sur la résolution de problèmes en « construisant du sens » et prenant le contre-pied d'une approche plus « formaliste », à base de définitions, qu'ils ont souvent mal vécue.

Matériel

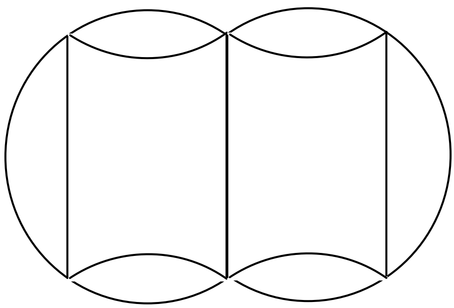
- Des feuilles de papier Canson, des ciseaux.
- Des règles, des doubles décimètres.
- Des compas, des équerres.

I - Mise en situation

1ère Phase : Appropriation du problème.

Consigne

"Nous allons tous construire des "Boîtes Cadeaux". Voici le modèle d un "patron" qui vous servira à construire différentes boîtes".



Mon rôle a consisté à répondre aux questions concernant la réalisation des patrons. Exemple: « *Je ne vous donne pas les positions des centres des cercles mais vous pouvez les trouver* ! »

Aides possibles

(voir codages sur le dessin de la page suivante)
- Coder des points particuliers A,.B, C, D, E, F.
- Les points A, B, C sont alignés.
- Les points D, E, F sont alignés.
- Tous les cercles ont même rayon.

Découverte des deux paramètres de la situation :

- R = Rayon des cercles.
- d = Distance des centres O_l O_2.

2ème Phase : Construction des « Patrons ».

Choix possible : fixer un paramètre (Exemple: R = 8 cm)

Proposer à différents groupes de normaliens des distances variées entre les centres. (Exemple : 3 cm ; 5 cm ; 7cm ;.. ; 15cm.).

Cela permet d'avoir une production riche, qui sera intéressante à exploiter.

3ème Phase : Analyse des difficultés rencontrées.

Par exemple pour trouver les centres des cercles :

- Utilisation des propriétés des diagonales ou des médianes du rectangle. (exemple : dans le rectangle ABED on peut déterminer ainsi la position du centre O_1)
- Utilisation des propriétés du losange. (Exemple: O_1 A O_3 B)
- Utilisation des propriétés de symétrie, etc.

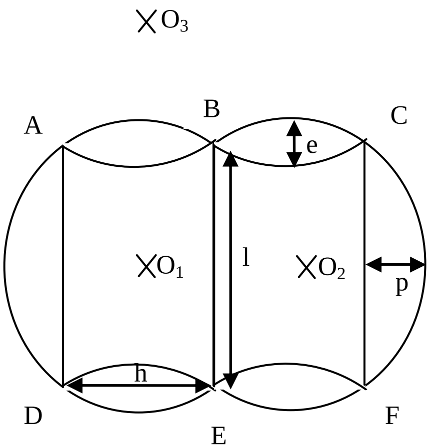
4ème Phase : Réalisation puis comparaison des boîtes obtenues.

Pour la construction, il me semble nécessaire, comme pour des enfants, d'être exigeant et attentif à la bonne utilisation des instruments tout en laissant un libre choix en ce domaine.

Pour faciliter la comparaison des boîtes obtenues, il est possible de s'accorder sur quelques dénominations utiles.

Par exemple :

- p = poignée.
- e = épaisseur de la boîte.
- 1 = largeur de la boîte.
- h = hauteur de la boîte.



5ème Phase : Premiers prolongements possibles.

Remarque : ces propositions de travail sont à la limite des possibilités d'enfants de CM.

1) Faire constater que pour un rayon fixé (Exemple : R = 8 cm), si « d » augmente alors « p » diminue, « e » augmente, « t » diminue, et « h » augmente.
   Bien sûr, la justification mathématique est du niveau du collège et peut être l'occasion d'utiliser le théorème de Pythagore.

   Pour justifier ces résultats constatés, certains de mes normaliens ont eu des difficultés à argumenter ! Cela a produit une intéressante confrontation permettant de montrer l'utilité des démonstrations et des connaissances mathématiques.

2) Poser le problème de l'adaptation des dimensions de la boîte à la forme d'un objet donné. Par exemple pour un objet de faible épaisseur et de forme « carrée », il faudra prévoir une boite telle que « l » = « h ». Dans ce cas, la figure O_1 B O_2 E est un carré.

   C'est alors l'occasion de redécouvrir de nombreuses propriétés de cette figure simple.

Autres prolongements pour un niveau plus élevé

Poser le problème des contraintes de construction. La construction d'une telle boîte est-elle toujours possible ?

Ceux qui ont choisi R = 8 cm et d = 15 cm ont constaté que la construction n'est pas possible !

La contrainte évidente $0 < d < 2R$ est donc trop large !

Une analyse plus fine, niveau Lycée ou fin de 3ème, permet de découvrir :

$$p = R - d/2$$
$$e = 2\,(R - \sqrt{R^2 - d^2/4}$$
$$1 = 2\sqrt{R^2 - d^2/4}$$
$$h = d.$$

L'étude de ces fonctions confirme les constats précédents.

La position « limite » correspondant à « 1 = e » peut être étudiée simplement en constatant que, dans ce cas, le triangle O_1 B E est équilatéral. Ceci confirme la solution algébrique qui donne le résultat suivant :

$$0 < d < R\sqrt{3}$$

II - Regard sur l'expérience vécue

Afin de faciliter l'analyse critique de l'activité proposée, je demande alors aux normaliens de comparer notre démarche avec celle indiquée dans un manuel scolaire.

Cette comparaison permet bien sûr d'identifier quelques « variables de commande » de la situation et de commencer une « analyse a priori » des procédures qui pourraient être utilisées par des enfants de CM.

Au cours de ces 3 expériences, les normaliens en très grande majorité ont « joué le jeu » et adhéré à la démarche proposée.

Ils semblent convaincus de l'intérêt d'une telle approche de la géométrie à partir d'une réelle situation-problème pour l'école élémentaire mais ils posent aussi deux types de questions :

- *"Quelles sont les limites de ces activités avec des enfants de CM ?"*
- *"Qu'ont appris les enfants et que faut-il « institutionnaliser »" ?*

Aux questions du premier type j'ai eu tendance à répondre: *« Vous essaierez ! »*

Pour répondre aux autres questions et relancer le débat, j'ai proposé que l'on fasse ensemble l'inventaires des propriétés géométriques concernant des figures simples et des notions mathématiques relevant du niveau de l'école élémentaire qui peuvent être évoquées ou utilisées au cours de ce type d'activité.

Comme vous pouvez le deviner, c'est très riche !

- On peut retrouver par exemple, pour le rectangle, le losange, le carré, les propriétés des diagonales et des médianes.
- On peut utiliser la symétrie et construire des médiatrices pour trouver la position des centres des cercles.
- On peut aussi rencontrer des parallélogrammes, des triangles équilatéraux, des triangles rectangles inscrits dans des demi-cercles.
- On pourrait même utiliser des propriétés liées à la proportionnalité !

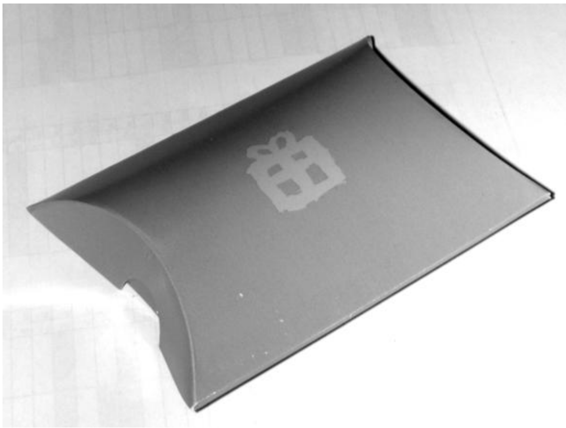
Je me suis permis enfin d'évoquer quelques notions didactiques concernant les situations d'apprentissage.

En effet, au cours de ce type d'activité les enfants sont mis en situation d'action puis de formulation et de validation avec la possibilité de confronter leurs méthodes de recherche.
Cette situation, ouverte pour l'élève, l'amène à faire des choix, tout en lui donnant des possibilités de contrôle, la validation n'étant pas nécessairement de la responsabilité du maître.

Enfin, même si les acquisitions de connaissances peuvent ne pas être négligeables, le plus important c'est :

- de construire du "sens" à travers des activités mathématiques.
- de permettre à l'enfant d'accumuler des expériences en développant son autonomie.
- de lui donner l'occasion d'argumenter et de communiquer.

Ce sont bien là les points forts et l'esprit des instructions officielles actuelles concernant l'Ecole Elémentaire.

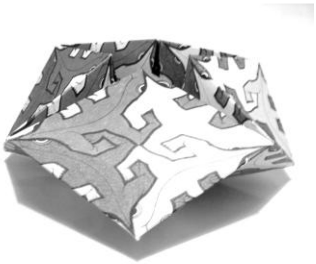


Des kaléidocycles

Gérard Ozan - Claudine Hervieu - François Huguet

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Angers 1995.

Les trois parties qui suivent sont trois articles présentant des compte-rendus d'activité en formation initiale ou continue ; ils abordent de façon différente l'étude des kaléidocycles.
L'activité du premier article propose au stagiaire de reproduire un objet donné, puis analyse les démarches et les difficultés rencontrées.
Dans l'article suivant, le choix est porté sur l'analyse géométrique de patron et permet ainsi l'étude d'autres kaléidocycles.
Quant au dernier article, les démarches proposées en formation permettent un réinvestissement immédiat en classe de cycle 3.



A - Des Kaléidocycles - Gérard Ozan

Introduction

Un kaléidocycle est un anneau à trois dimensions, constitué de tétraèdres identiques dont les faces sont quatre triangles isométriques. La jonction au niveau des arêtes communes à deux tétraèdres voisins est souple et on peut le faire tourner indéfiniment sur son centre.
J'ai utilisé pour cette séance les patrons fournis avec le livre M.C. Escher, Kaléidocycles de Doris Schattschneider et Wallace Walker aux éditions Taschen Ktiln (1992).

Ces kaléidocycles présentent la particularité d'être composés de six ou huit tétraèdres à faces isocèles et leur trou central est presque réduit à un point. (voir figures 1 et 2)

Ils sont en outre décorés par des motifs périodiques adaptés de dessins d'Escher, ce qui leur donne un aspect esthétique qui plaît beaucoup et permet d'annoncer un travail ultérieur sur les pavages.

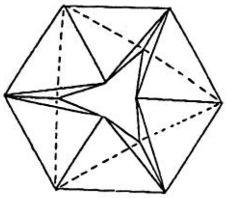


Figure 1

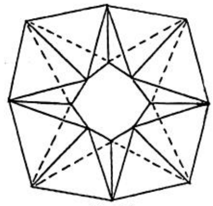


Figure 2

Contexte

J'ai utilisé cette situation en formation initiale avec des PE2 et en formation continue avec des instituteurs de cycle 3, dans des séances de 3 heures.

L'ACTIVITÉ

Objectifs
Aborder une démarche de reproduction d'un objet complexe mais motivant, posant de réels problèmes aux adultes en formation leur permettant de faire le point sur leurs savoirs et savoir-faire, puis de réfléchir à la mise en place d'une suite d'activités géométriques en classe :

- revenir sur leurs connaissances des solides,
- découvrir la variété des méthodes possibles.

Matériel
Un kaléidocycle par groupe de 4 ou 5 stagiaires, pouvant être manipulé sans l'endommager.
Double décimètre, équerre, compas, papier Canson, scotch, ciseaux, feuille format affiche.

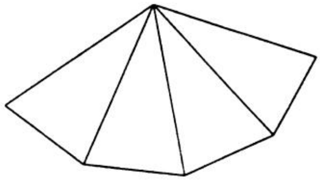
Consignes

1. *Reproduisez et décrivez ce solide.*
2. *Cherchez-en un patron.*

Déroulement
En général les stagiaires s'engagent rapidement dans une première analyse de l'objet (comptage des tétraèdres et des faces, mesure d'arêtes) puis tracent (au compas ou avec des gabarits), découpent et assemblent des figures planes (triangles quelquefois équilatéraux, losanges) puis essaient d'assembler leurs tétraèdres, pour vérifier enfin la bonne rotation de l'engin sur lui-même.

Certaines difficultés apparaissent :

- pour assembler des triangles, l'assemblage ne donnant pas toujours un tétraèdre,



- pour réunir les tétraèdres lorsque ne sont pas identifiées les deux arêtes opposées aux longueurs différentes des quatre autres,
- pour regrouper des losanges qui ne sont pas perçus "à cheval" sur deux tétraèdres,
- pour faire tourner le kaléidocycle constitué uniquement de triangles équilatéraux (figure 1) ou qui laisse un grand trou central (figure 2).

Certains groupes rédigent leur recherche au fur et à mesure de leur construction, mais les plus nombreux s'occupent de la description dans un deuxième temps.

Il arrive quelquefois que soient tracés directement des patrons de tétraèdres (un triangle central, les autres autour) ou encore un assemblage de triangles et de losanges donnant deux tétraèdres articulés... mais le plus souvent les PE2 ne démarrent la recherche du patron qu'après une première réalisation, comme l'ordre des consignes peut le laisser supposer. Par contre il est arrivé qu'un groupe de maîtres de cycle 3 s'obstine à chercher directement le patron pendant plus d'une heure avant d'accepter un premier objectif plus modeste : n'y a-t-il pas là un effet de leurs représentations ou de leurs habitudes ?

Mise en commun

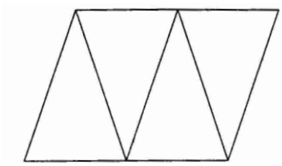
Après 1 h 45 environ, quand chaque groupe peut présenter une description, nous affichons les différentes productions, expliquons les démarches, analysons les erreurs et les blocages observés pendant la recherche, puis en synthèse nous rédigeons collectivement une description ayant l’accord de tous et utilisant un vocabulaire minimum, mais précis.

Institutionnalisation mathématique

Les notions de polyèdre, sommet, arête, face, côté sont redéfinies, celles de tétraèdre et de pyramide sont distinguées. Le nombre et la disposition des faces autour des sommets permet une description claire.
Les propriétés des triangles isocèles et équilatéraux sont rappelées et mises en relation avec des méthodes de construction.
Différentes méthodes de traçage et de construction sont passées en revue : empreinte, piquetage, gabarit, calque, papier quadrillé, patrons partiels...

Fin de l'activité

Il s'agit de relancer ensuite la recherche du patron : soit en partant des différents patrons possibles du tétraèdre et des façons de les assembler, soit en retirant le scotch de certaines arêtes pour mettre à plat toutes les faces... Je suis souvent obligé d'aider les groupes pour obtenir un résultat. Puis je distribue un document où figurent plusieurs patrons de kaléidocycles, construits en juxtaposant des bandes de quatre triangles.



Conclusion

La synthèse sur les contenus géométriques ayant été faite précédemment, je réserve le dernier quart d'heure pour faire une analyse pédagogique et didactique :

- il s'agit bien d'une séance de mathématiques avec les aller-retour entre l'action et la réflexion ;
- rappel de la nature des activités géométriques en référence aux instructions complémentaires parues en 1986 à la suite des programmes de 1985... : après lecture des programmes de 1995, elles semblent encore d'actualité ;
- comment on peut mener une activité en classe au cycle 3 à partir du modèle qui vient effectivement d'être vécu : j'aime à présenter le kaléidocycle comme un des objets terminaux d'une progression de cycle dont certaines étapes pourraient être des polyèdres réguliers ou semi-réguliers ou étoilés, d'autres des boîtes de formes diverses ;
- tout cela permettant aux élèves de travailler (articulation espace-plan avec des patrons pas toujours possibles, à partir d'instruments et de supports variés favorisant (évolution de leurs procédures de construction et de dessin en lien avec la technologie et les arts plastiques ;
- enfin ce que peut être une analyse a priori (d'après les exemples de démarches et d'erreurs qui ont été précédemment analysées) et son utilité pour la préparation de classe.

B - **Différents types de kaléidocycles** - Claudine Hervieu

I- Présentation de l'activité

I.1. Travail sur les patrons

Des patrons de solides déformables sont donnés en dimension réduite sur une feuille A4.

Dans un premier temps, il s'agit, uniquement par la perception visuelle, de les comparer (ressemblances, différences) et de faire des hypothèses sur les propriétés perçues en l'absence d'autres informations.

Dans un deuxième temps, où de nouvelles informations sont données, il s'agit d'affiner la perception visuelle, de rectifier le cas échéant et de compléter les hypothèses précédentes, afin de conclure sur les propriétés des figures et sur des stratégies de construction de ces patrons agrandis.

I.2. Kaléidocycles

Le travail porte sur des kaléidocycles de type hexagone, carré ou étoile pentagonale.

Réaliser des solides, à une taille convenable, avec un matériel adéquat ; utilisation liée à leur particularité (flexibilité).

Comprendre les contraintes mathématiques imposées pour la construction des 3 patrons.

Prévoir, éventuellement, des patrons d'autres types de kaléidocycles.

II. - Déroulement succinct

Organisation

Toujours par groupes de 3, sauf au moment des synthèses.

II.1. Travail sur les patrons

II.1.1. Observation

matériel

Une feuille A4 par personne avec les figures n°l, n°2, n°3 (cf. p.65).

consigne 1

Analysez ces 3 figures, patrons de solides déformables, dont les languettes pour le collage sont les surfaces ayant des signes + ; écrivez les hypothèses sur les propriétés des figures, leurs ressemblances, leurs différences.

Attention, il manque des informations.

quelques formulations obtenues
"..nombre pair variable (par la suite appelé 2n) de bandes de 4 triangles de même taille (2n = 6 ou 8 ou 10) .. rectangles .. droites parallèles .. parallélogrammes .. hexagones réguliers.. "

II.1.2. Informations et agrandissement

a) Informations

matériel
Le même que précédemment

consigne 2
Tous les petits triangles (sans signe +) de la figure n° 1 sont isocèles et isométriques, leurs bases ayant toutes la même direction (PS); il en est de même pour les figures n° 2 et n° 3. Enfin PQRS est un rectangle. Quelles conclusions en tirez-vous ?
Attention, il manque encore des informations.

quelques formulations obtenues
" .. on a bien des rectangles puisque toutes les bases de même longueur des triangles envisagés sont perpendiculaires à (PQ) .. losanges (4 côtés de même longueur) .. triangles isocèles mais aussi équilatéraux!"

consigne 3
Dernière information: on pose PA = x et PB = y (longueurs en mm); les rapports x/y ont pour valeurs 1, $\sqrt{2}$ *, (* $1+\sqrt{5}$ *)/2 respectivement pour les figures n° 1, n° 2, n° 3. Conclusions ?*

formulations obtenues
" .. d'une figure à l'autre, triangles de formes différentes mais non équilatéraux .. et donc pas d'hexagones réguliers.. "

conclusion
Les propriétés minimales pour l'agrandissement sont perçues.

b) agrandissement

matériel
Feuille A3 par personne et outils.

consigne 4
Toujours par groupes de 3, construire les 3 figures pour x = 40 (une seule sur un A3 dont les bords peuvent être astucieusement utilisés)

procédure la plus utilisée
Calculs de y à 1/10 près (40 ; 56,5 ; 64,7) puis construction d'un rectangle de dimensions 2nx sur 3y dans lequel on trace un quadrillage de mailles x sur y. On obtient aussi un quadrillage de mailles 2x sur y ; on trace les diagonales de ces dernières mailles. Il reste à bien délimiter le contour du patron et à gommer 2 lignes de construction.
Dans chaque groupe se fait à nouveau la comparaison des 3 figures avec des essais vains de superposition pour contrôler, d'une figure à l'autre, les différences de formes des petits triangles.

II.2. Travail sur les kaléidocycles (hexagone, carré et étoile pentagonale)

II.2.1. Réalisation
(si possible en temps libre)

matériel conseillé
Bristol fin (550 mm sur 600 mm) pour faire des bandes de largeur 3y

construction des patrons
Si x = 50 les valeurs approchées de y sont 50, 60, 70.

découpage

pliage
Plis (très bien faits) en crête pour toutes les bases y et en creux pour les côtés de même longueur des triangles isocèles (ainsi les lignes de construction seront cachées). Ceci permet d'obtenir une chaîne de 2n tétraèdres reliés par des arêtes de longueur y.

collage
Languettes (triangles avec signes +) sous les faces des tétraèdres; puis on ferme la chaîne avec les 2 autres languettes (situées à une extrémité des patrons).

II.2.2. Justification des choix
Il s'agit de justifier les choix des valeurs des rapports y/x en liaison avec les types hexagone, carre, étoile pentagonale.

a) rotation

L'utilisation de ces objets déformables par rotation fait apparaître une position particulière où tous les tétraèdres ont un sommet commun O, n arêtes de sommet O de longueur y sont dans un même plan (par exemple horizontal noté (P1)) et enfin n autres arêtes de longueur y sont verticales.

b) section par (P1)

consigne
Il s'agit d'étudier la section de chaque kaléidocycle par le plan (P1), plan qui est d'ailleurs un plan de symétrie, et de conclure sur y/x.

résultats
Dans chaque cas, la section est un polygone formé de 2n triangles d'angle 360°/2n en O, de côtés x, x, y.

c) étude détaillée

figure n ° 4
La section est un hexagone régulier si x = y (6 triangles isocèles d'angle 60° en O, de côtés x, x, y).

figure n ° 5
La section est un carré si $y = x\sqrt{2}$ (8 triangles isocèles d'angle 45° en O, de côtés x, x, y).

figure n° 6
La section est une étoile pentagonale (10 triangles isocèles d'angle 36° en O, de côtés x, x, y) ; on retrouve là la *divine proportion*. Cela nécessite une étude complémentaire (ci-dessous).

figure n ° 7
Étude complémentaire sur ces triangles d'or et sur la "divine proportion":
I, J, L étant alignés, dans les triangles 1JK et IKL on a :
(y + x)/y = y/x = k ce qui donne k * k - k = 1 puis 4(k*k) - 4k + 1 = 4+1
d'où (2k - 1) * (2k - 1) = 5.
On trouve pour k le nombre d'or : $(1 + \sqrt{5})/2$.

II.2.3. Autres kaléidocycles

Si 2n = 12, pour avoir un point O, la section par (P 1) doit être formée de 12 triangles isocèles d'angles 30° en O, de côtés x, x, y (figure non faite) ; 3 triangles comme ceux-ci donnent un triangle équilatéral de côté y, de hauteur(3/2)x, ce qui donne $(3/2)x = (\sqrt{3}/2)x$ d'où $y/x = \sqrt{3}$.

Remarque : si 2n ≥ 8, on peut faire des anneaux de tétraèdres réguliers mais le point O ne peut exister.

Figures

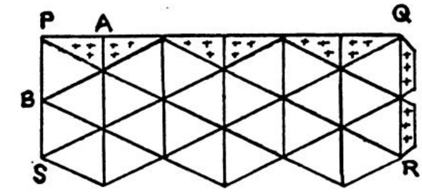


Figure n° 1

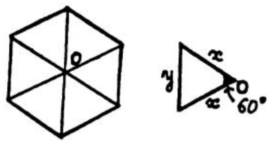


Figure n° 4

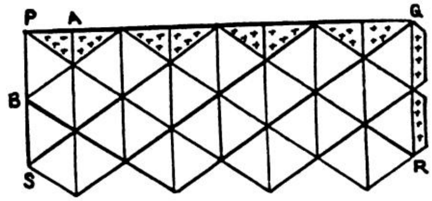


Figure n° 2

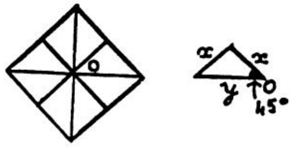


Figure n° 5

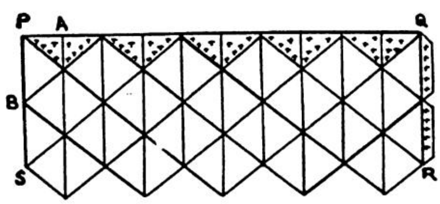


Figure n° 3

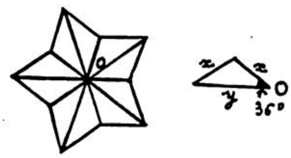


Figure n° 6

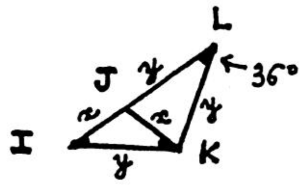


Figure n° 7

C - Le Kaléidocycle - François Huguet

"Lors de l'introduction de notions nouvelles, les élèves sont mis en situation d'apprentissage actif : ils découvrent les notions comme des réponses à des problèmes. " (I. 0.1985)

Contexte

J'ai utilisé cette situation plusieurs fois en Formation Initiale. Les étudiants doivent tout d'abord chercher à résoudre ce problème de construction de solide, puis après analyse des difficultés rencontrées nous essayons de concevoir ensemble une séquence d'une heure qu'ils pourront expérimenter au niveau d'un CM 1 ou d'un CM2.

Certains étudiants pensent qu'il serait intéressant de montrer l'objet fini à réaliser afin de motiver davantage l'activité des enfants.

Tout en respectant leur liberté de choix des variables didactiques de la situation, j'essaie tout de même de les convaincre d'expérimenter aussi une démarche inductive permettant de confronter l'enfant à une suite d'obstacles qu'il devra franchir avec l'aide ou la collaboration de ses camarades.

Travail possible en formation initiale ou continue

1. Faire vivre la situation en respectant la même démarche et organisation de travail
   - Résolution d'une suite de problèmes de construction
   - Travail individuel puis par groupes de deux...
   - Phase de validation

2. Faire une analyse a priori des procédures et des difficultés des enfants de CM
   - Réfléchir au problème de l'auto -validation
   - Envisager des aides pour faciliter la compréhension et la réalisation pratique.
   - Prévoir un déroulement possible dans une classe de CM, si possible ne dépassant pas une heure.

3. Analyser le problème de construction d'un point de vue mathématique.
   - Voir l'incidence de la contrainte de départ
     Base = Hauteur du triangle isocèle
   - Retrouver la propriété "Côté de l'hexagone = Rayon du cercle circonscrit".
   - Éventuellement s'intéresser au problème du patron du Kaléidocycle.
   - Faire découvrir qu'il existe d'autres modèles de Kaléidocycles. (Voir document annexe)

4. Faire une analyse de l'activité en relation avec les connaissances en jeu pour des enfants de CM.

- Recenser les notions abordées, voir le vocabulaire utilisable
- S'intéresser aux techniques et sa voir-faire mis en place
- Réfléchir à la « phase d'institutionnalisation »

Chronique d'une des séquences réalisées au CM

Matériel

• Des feuilles de papier Casson ou de carton fin mais rigide.
• Des règles, des doubles décimètres.
• Des ciseaux, des équerres et des rouleaux de scotch.

1ère phase : appropriation du 1er problème de construction en grand groupe

Consigne

Cette consigne est écrite au tableau.

Nous allons construire des triangles isocèles ABC dont la hauteur [AH] mesure 8 cm et le côté [BC] mesure 8 cm.

Lecture et questions à propos des mots inconnus "isocèle" "hauteur".

Les explications fournies par le maître ne vont pas reposer sur des définitions ! Par exemple, il montre un grand triangle construit en carton, fait constater par pliage que deux côtés ont même longueur et dit : "ce triangle est isocèle".

2ème phase : construction individuelle

Consigne

Choisis les instruments nécessaires pour la construction. Réalise 2 triangles isocèles comme indiqué précédemment. Compare les avec ceux construits par ton voisin.

Une validation peut être rapidement effectuée par diverses procédures :

- Comparaison avec un modèle donné
- Mesurage
- Retournement.

Remarques à propos des difficultés constatées.

- Certains enfants construisent [BC] puis [AH] sans placer H au milieu de [BC]. Ils constatent alors que les triangles ainsi construits ne sont pas isocèles. Ce type d'erreur va favoriser la découverte de cette propriété caractéristique de tous les triangles isocèles !
- Nous avons constaté aussi que peu d'enfants utilisent le compas !

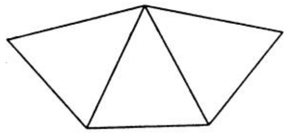
3ème phase : nouveau problème d'agencement (travail par équipe de deux).

Consigne

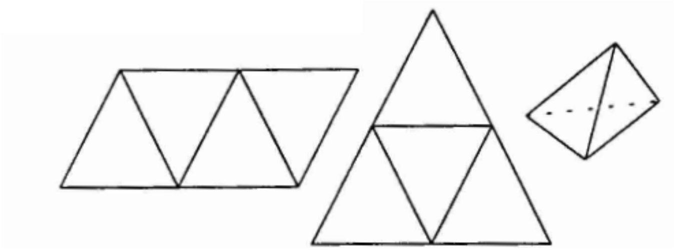
Avec 4 de vos triangles essayez de construire un solide " bien fermé". (Tétraèdre)

Remarques à propos des difficultés rencontrées.

• Le maître peut indiquer une technique pratique à deux pour l’assemblage à l’aide de scotch.
Par exemple l’un des enfants place et maintient tendu le scotch à l’envers contre la table, l’autre enfant peut alors aisément juxtaposer les côtés des triangles qu'il souhaite assembler.
• Certaines équipes essaient sans réfléchir d'assembler 3 triangles ainsi :



• Les enfants constatent alors que le 4ème triangle ne peut être placé pour "fermer" le solide !
• Certains enfants pensent alors à l'idée de "patron" et adoptent assez rapidement l'une des dispositions suivantes :

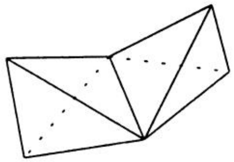


4ème phase : assemblage des solides réalisés (travail "Inter - Equipes").

Consigne

Essayez d'assembler les solides en juxtaposant les arêtes de 8 cm.

Remarques à propos des réalisations.



• Les enfants vont constater qu'après avoir assemblé 6 tétraèdres "en chaîne", il est possible de former une sorte de couronne en reliant, comme précédemment par l'arête de 8 cm, le 6ème solide au 1er solide !

• Ce nouvel assemblage possède des propriétés curieuses
Par un mouvement de rotation perpétuelle, les différentes faces vont apparaître les unes après les autres un peu comme dans un Kaléidoscope ! D'où son nom "Kaléidocycle" !
• Bien naturellement les groupes les plus rapides ont eu l'idée de colorier ou de décorer les différentes faces permettant ainsi de mieux mettre en valeur le phénomène.
• Beaucoup d'enfants ont reconstruit ensuite chez eux d'autres Kaléidocycles afin d'en avoir un personnellement.

5ème phase : institutionnalisation

Après analyse des productions et des difficultés rencontrées, nous avons pu constater la bonne compréhension par l'ensemble de la classe de termes géométriques utilisés lors de cette séquence (par exemple : face, arête, sommet, triangle isocèle ...)
Il aurait été possible aussi d'institutionnaliser certains "savoir-faire" concernant les techniques d'assemblage, l'usage du compas ...

Conclusion

Ce type d'activité a évidemment l'inconvénient de son caractère trop ponctuel par rapport à la vie d'une classe.

Cependant, les étudiants qui ont réalisé cette expérience, l'ont jugée fort intéressante et ont apprécié plus particulièrement la démarche consistant à faire résoudre individuellement ou collectivement une suite de problèmes.

Lors des diverses expériences réalisées, les enfants sont toujours restés motivés, actifs et coopérants. Bien évidemment s'est posé le problème de l'hétérogénéité car tous les enfants ne sont pas capables de travailler au même rythme et avec le même soin.

L'intérêt de cette forme de travail a été de permettre aux plus lents de travailler à leur rythme tandis que les autres pouvaient :
- soit construire d'autres kaléidocycles en partant directement de patrons de tétraèdres
- soit dessiner des motifs sur les faces des solides permettant de faire apparaître par rotation huit dessins différents !

Mais nous avons pu voir également les difficultés de gestion et aussi les techniques permettant de passer du travail individuel au travail en équipes. (voir l'avantage et le rôle des consignes écrites ...)

Nous avons pu enfin constater le niveau d'habileté manuelle des enfants et réfléchir aux activités à mettre en place pour les faire progresser dans ce domaine.

Remarque d'ordre mathématique
La contrainte AH = BC imposée au départ de ce problème a en fait une grande utilité ! En effet, c'est grâce à elle que le Kaléidocycle peut "juste" pivoter sur lui même.
Cela peut également servir pour la validation de ce travail. Par exemple avec 6 tétraèdres réguliers cela ne marcherait pas !
Mais cette contrainte est-elle "large" ou "précise" ? A vous de le démontrer !

Bibliographie

- Revue Pentamino - n° 6 et n° 8, année 1979 « La ronde des berlingots »

- M.C.Escher, « Kaléidocycles », Edition Taschen, 1992
De nombreux kaléidocycles constructibles à partir de patrons déjà faits

- Fénichel M., Dubois C.,.Pauvert M., « Se former pour enseigner les mathématiques », Tome 1, pp. 154 - 161, A.Colin, 1993
  Séances de classe autour des kaléidocycles

Représentations de solides

Dominique Beaufort

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Cahors 1991.

Cet article présente des activités menées en formation initiale pour sensibiliser les stagiaires aux différents types d'objets géométriques (différentes perspectives, le dessin technique et les vues).

Comment représenter un objet de l'espace sur une feuille de papier? Les solutions à ce problème ne sont pas simples, même si nos habitudes culturelles nous ont rendu familières certaines représentations. Depuis les Grottes de Lascaux jusqu'aux images de synthèse, les tentatives sont multiples : perspective centrale (Peintres de la Renaissance), perspectives cylindriques (géométrie projective), projections orthogonales sur plusieurs plans (dessin technique), topologie, anamorphoses,... II s'agit toujours d'un point de vue particulier sur un objet choisi en fonction de l'information (l'émotion) que l'on souhaite communiquer.

I - Objectifs

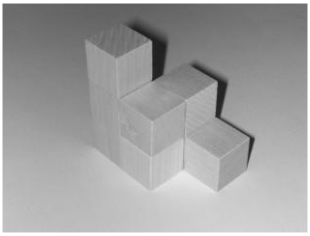
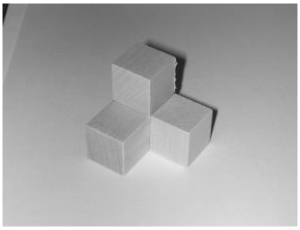
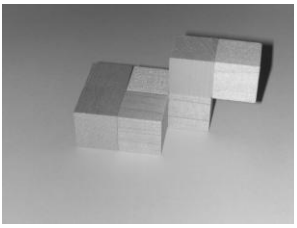
Placer les étudiants en situation de produire une représentation plane d'un solide. Les caractéristiques de celui-ci sont telles qu'une représentation en perspective est insuffisante pour rendre compte entièrement de l'objet; de plus, la validation des productions sera effectuée par la construction d'un solide semblable.

Placer les étudiants en situation de lire une représentation pour construire un solide.

Les sensibiliser à la variété des systèmes de représentations et à leurs intérêts respectifs selon l'objectif de communication visé (toute représentation est une perte d'information).

Faire analyser ces activités et préciser à cette occasion quelques concepts de didactique.

Informer sur les principaux systèmes de représentation conventionnels: dessin technique, perspectives.

II - Déroulement des activités

Durée
6 heures

Matériel

- 5 solides tous différents construits à l'aide de tasseaux de section carrée.
- cubes emboîtables (matériel de numération)
- feuilles format A3

1ère phase : élaboration d'une représentation
L'ensemble des stagiaires est divisé en groupes de 4 ou 5. Chaque groupe reçoit un solide et une grande feuille de papier.

Consigne: *"Élaborez un message sous forme d'un ou plusieurs dessins permettant à un autre groupe de construire un solide analogue. »* **On précisera en cours de travail qu'on ne s'attachera pas aux dimensions réelles de l'objet.**

Chaque groupe analyse le solide, le pose sur la table dans la position qui lui semble la plus appropriée (ce point de vue n'est pas identique pour tous les membres du groupe), se met d'accord sur un moyen de le représenter : perspective(s), sections. vues géométrales
Selon le système choisi, les étudiants collaborent à la réalisation, essaient au brouillon, exécutent une vue particulière.

2ème phase : construction d'un solide à l'aide d'un message
Les productions sont échangées d'un groupe à l'autre, et chaque groupe reçoit une collection de cubes emboîtables . Ils doivent construire, à l'aide de ce matériel, un solide selon les indications fournies par le message.

Remarque : les cubes emboîtables ne sont fournis qu'à ce moment de l'activité, afin de ne pas induire des modes de représentations trop particuliers dans la première étape.

3ème phase : comparaison des solides construits avec les originaux
La non conformité peut provenir :

- soit d'une lecture erronée de la représentation : codage mal interprété, lecture fausse.
- soit d'une représentation ambiguë, insuffisante.

4ème phase : confrontation des systèmes utilisés
Chaque groupe présente à l'ensemble de la classe, le mode de représentation qu'il a utilisé, tandis que le groupe récepteur indique la plus ou moins grande facilité avec laquelle il a construit le solide. Cette phase permet de prendre conscience de

la variété des solutions au problème, d'en mesurer pour chacune d'elles l'adéquation au problème de construction et de rechercher les causes d'erreur.

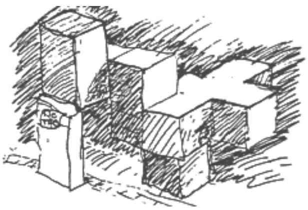
Une première classification des systèmes de représentations est établie : perspectives, projections orthogonales sur plusieurs plans, coupes,…..

5ème phase : analyse de l'activité
Elle est menée de manière collective et porte sur les objectifs, ainsi que sur les caractéristiques de la situation. Le débat autour de ces questions permet d'éclairer quelques concepts de didactique : situation, problème, variables didactiques, validation, institutionnalisation, communication-formulation,...

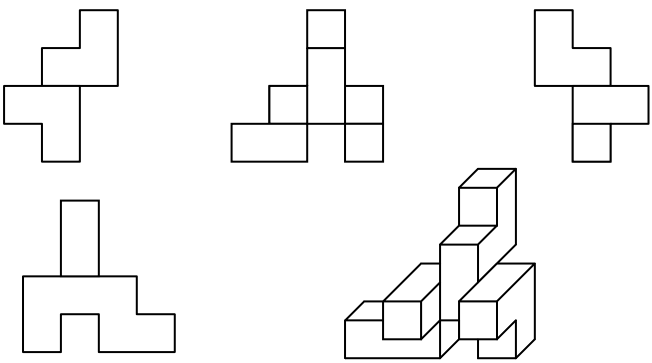
6ème phase : information sur les principaux modes conventionnels de représentation
Voir paragraphe IV

III - Exemples de productions

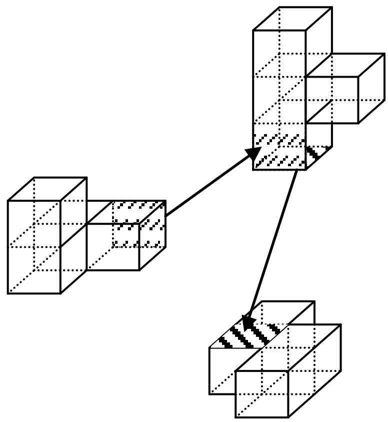
- Perspective : ces représentations (parfois mal maîtrisées) ne permettent pas, seules, de fournir toutes les informations nécessaires à la construction. Elles donnent par contre une vue globale du solide.



- Projections orthogonales et perspectives : les conventions de disposition de ces vues ne sont en général pas respectées. Reproduction aisée du solide.

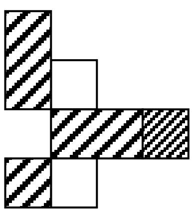


- Vues éclatées en perspective avec schéma de montage : on trouve parfois le plan de montage en différentes étapes à la manière des plans de constructions de jeux d'assemblage.

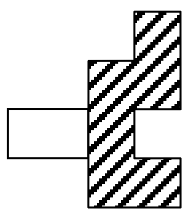


- Projections orthogonales sur plusieurs plans et indications des différents niveaux.

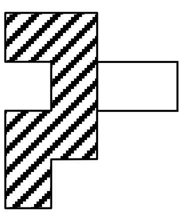
Vue de face



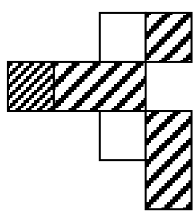
Vue de dos



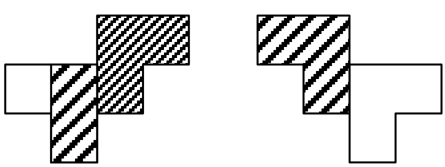
Vue de dessus



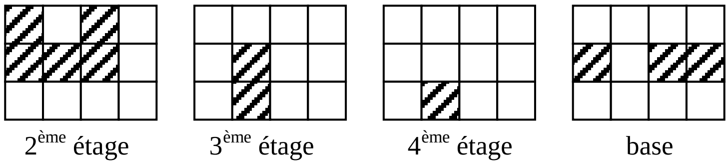
Vue de dessous



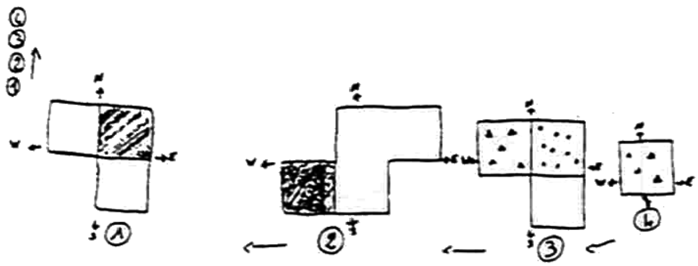
Vues de côté



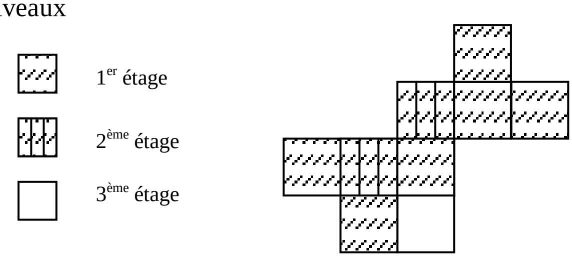
- Sections du solide en surimpression de la vue de dessus



- Sections et plan de montage



- Section sur un seul dessin avec légende des différents niveaux



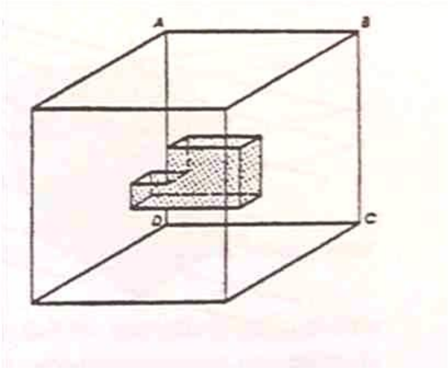
IV - Principaux systèmes de représentations

1) Classification des méthodes de projection

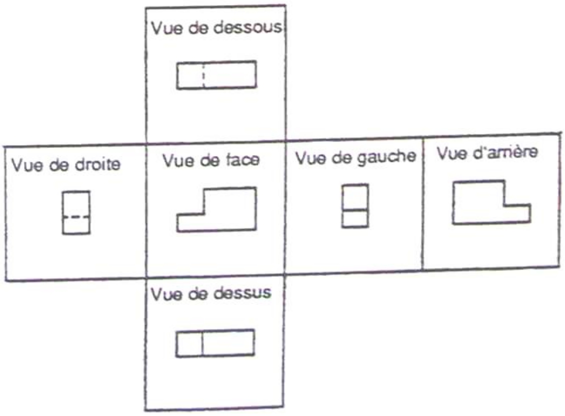
- projections cylindriques (ou parallèles)
  - projection orthogonale de l'objet sur plusieurs plans orthogonaux : dessin technique, géométrie descriptive
  - projection de l'objet sur un seul plan :
    - *projection oblique : perspective cavalière, perspective "militaire"
    - *projection orthogonale : perspective axonométrique
- projection conique : perspective centrale

2) Dessin technique

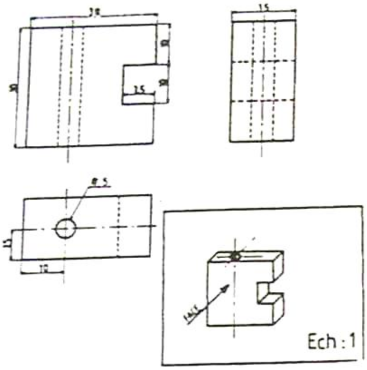
On imagine l'objet dans un parallélépipède rectangle et l'on projette cet objet sur les 6 faces de celui-ci. Ces projections peuvent être assimilées aux images perçues par un observateur placé à différents endroits : face à l'objet, à droite, à gauche, au-dessus, ... D'où la terminologie utilisée: vue de face (ou parfois élévation), vue de gauche, etc.



La disposition des différentes vues sur la feuille de dessin résulte d'un développement du parallélépipède : c'est le système européen où la vue de gauche est placée à droite de la vue de face.



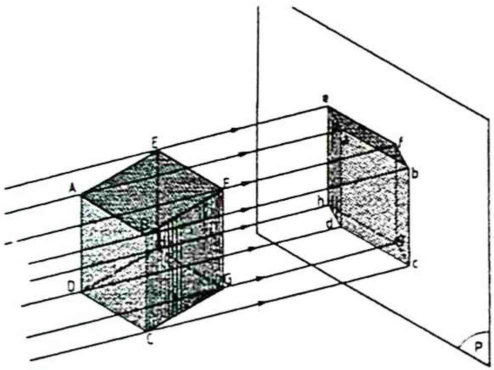
En fait on ne représente le plus souvent que 2 ou 3 vues. celles qui donnent le maximum d'informations.



Conventionnellement, les arêtes vues sont représentées en traits pleins alors que les arêtes cachées le sont en traits pointillés.

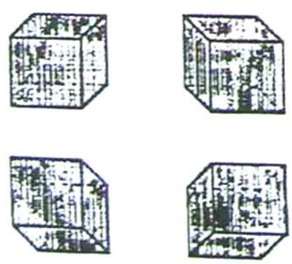
3) Perspective cavalière

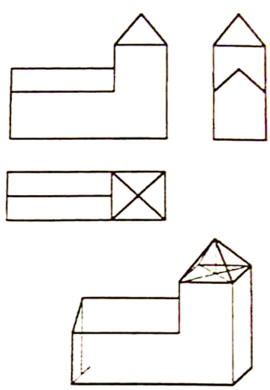
(du nom d'un ouvrage de fortification appelé "cavalier")



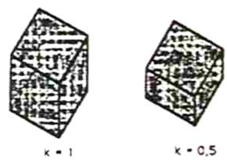
Il s'agit d'une projection oblique sur un plan (le plus souvent vertical) parallèle à l'un des plans principaux de l'objet.
Les éléments situés dans des plans parallèles au tableau (plan de projection) se projettent sans déformation et en vraie grandeur (à une échelle prés) : les distances et les angles sont conservés.

Les droites perpendiculaires au tableau se projettent selon une même direction, dite *direction des fuyantes*, faisant un angle donné avec l'horizontale. Cet angle est le plus souvent égal à 45°. Les distances sur cette direction des fuyantes sont multipliées par un coefficient de réduction : 0,5 en général.

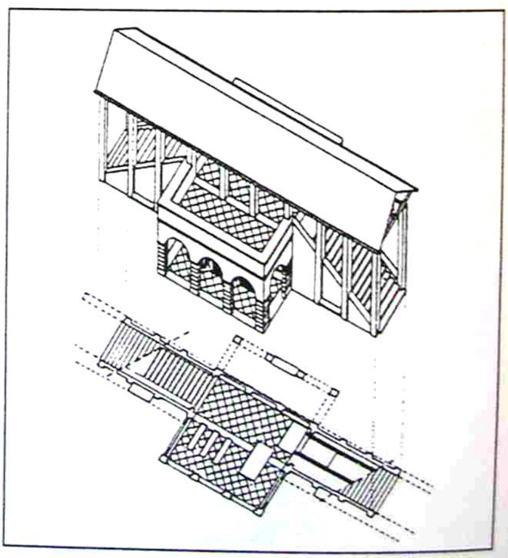

Perspective cavalière du cube


Perspective cavalière construite à partir des projections orthogonales

Remarque : en architecture, on utilise une perspective qui suit un principe semblable : mais cette fois, le plan de projection est horizontal (sol). Les éléments situés dans les plans horizontaux sont projetés en vraie grandeur : on peut donc partir du plan de l'édifice pour construire en perspective. Dans ce contexte, cette technique est appelée, selon les auteurs, *« perspective axonométrique »* ou encore « *perspective militaire* ».

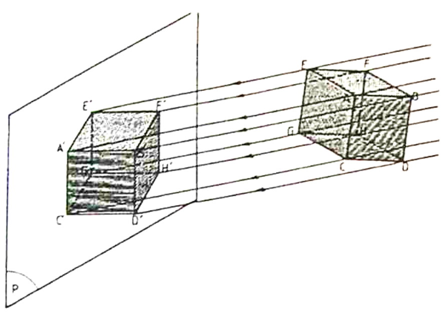


Perspective militaire du cube



4) Perspective axonométrique

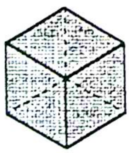
Il s'agit d'une projection orthogonale de l'objet sur un plan parallèle à l'un des plans principaux de l'objet.



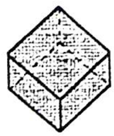
Elle se caractérise par les angles formés par les projections des 3 directions du repère associé à l'objet, ainsi que par les coefficient de réduction sur chacune de ces directions :

Perspective isométrique : 3 angles égaux (120°) ; $k_x = k_y = k_z = 0{,}82$
Perspective dimétrique : 2 angles égaux (a = b= 131°30' ; c = 97°)
$k_x = k_y = 0{,}94$; $k_z = 0{,}47$

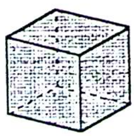
Perspective trimétrique : les 3 angles sont différents
a= 105° $k_x = 0{,}65$
b= 120° $k_y = 0{,}86$
c= 135° $k_z = 0{,}92$



Perspective Isométrique



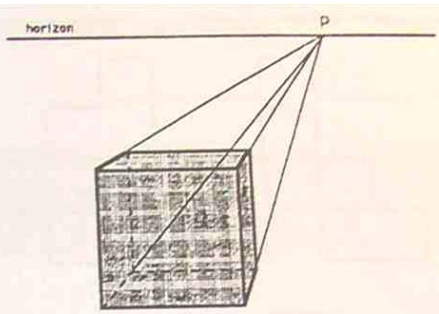
Perspective dimétrique



Perspective trimétrique

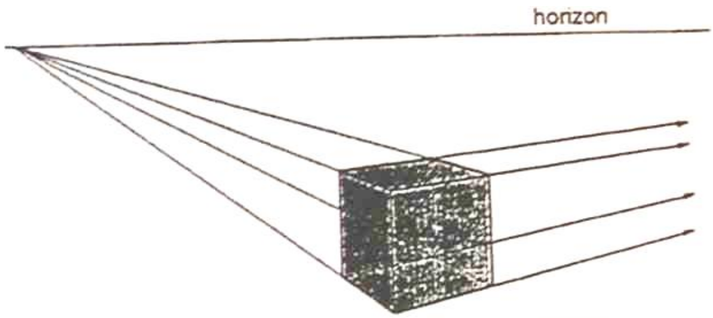
5) Perspective centrale

Ce procédé mis au point par les peintres et architectes de la Renaissance (Alberti, Brunelleschi, Dürer,..) est un système de représentation de l'espace visant à produire une image identique à celle que perçoit un observateur.



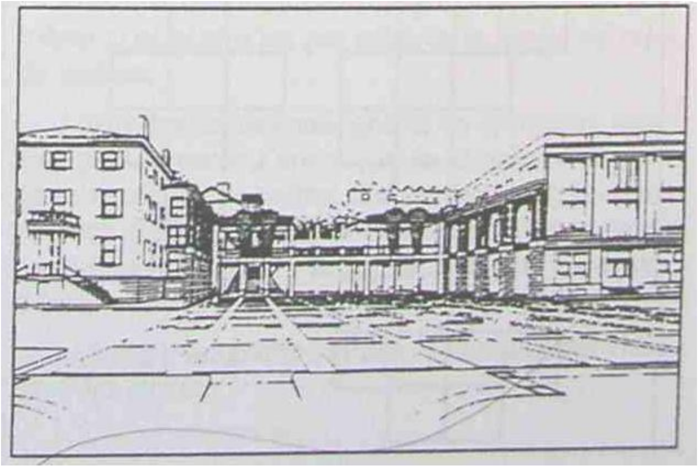
Une face du cube est parallèle au tableau

Tous les plans de même direction (elle- même non parallèle au tableau) convergent vers une ligne de fuite : ainsi ligne d'horizon est la « fuite » des plans horizontaux.



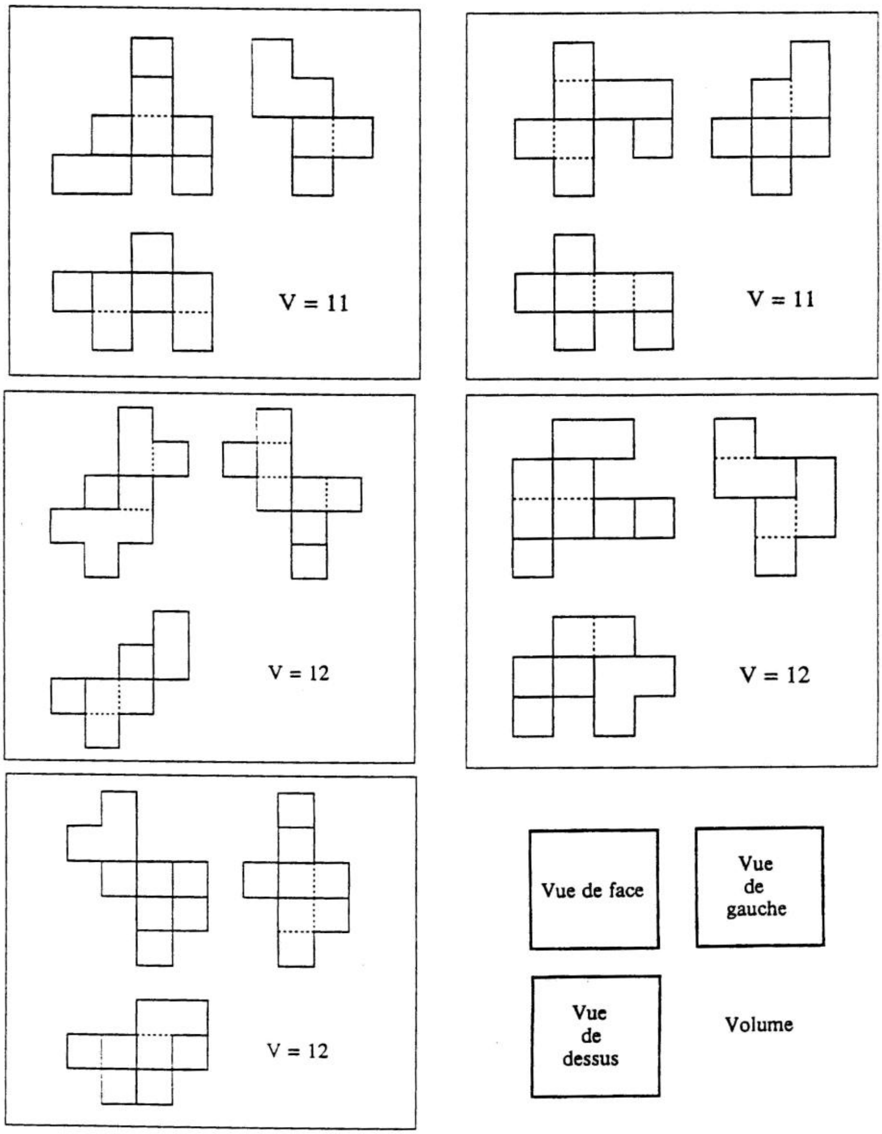
Les horizontales des 2 directions principales fuient vers 2 points

Toutes les droites de même direction (elle- même non parallèle au tableau) convergent vers un point de fuite : toutes les droites horizontales ont un point de fuite sur la ligne de l'horizon, le point principal étant le point de fuite des horizontales perpendiculaires au tableau.
Enfin toute droite parallèle au tableau se projette dans la même direction.



Annexe

Vues des solides utilisés (cf. II et III)



Les objets de l'école : l'octomobile[1]

Nicole Bonnet

Extrait des actes du XXVIIème Colloque Inter-IREM des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres - Tours 2001.

Cet article présente le compte rendu d'un atelier du colloque.
A partir d'un objet, les participants sont invités à mettre en œuvre une démarche scientifique pour le fabriquer. Il s'agira ensuite d'exploiter ses propriétés intrinsèques qui sont prétextes à travailler des concepts de géométrie plane.
Cette activité est directement exploitable en formation initiale et continue des professeurs des écoles.

1. Introduction

Dans ce qui suit, il y a lieu de distinguer deux niveaux. Le premier consiste en l'étude, en vue de la fabrication, d'un objet non plan nommé octomobile. Il peut être considéré comme une sorte de "solide". C'est un objet technologique. En second lieu, cet objet est considéré comme producteurs d'objets aplatis variés sur lesquels un regard géométrique va être porté.

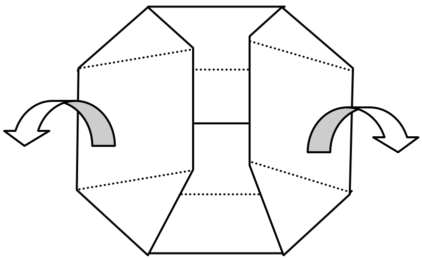
2. Mise en oeuvre et consigne

L'objet est présenté de façon rapide en faisant remarquer qu'il est fabriqué en bristol blanc donc peu coûteux, peu volumineux, facile à transporter, à conserver et réutilisable.
Il est très peu manipulé par le responsable de l'atelier qui en laisse la découverte aux participants. La consigne orale s'avère très stricte : "vous pouvez le tourner et le retourner dans tous les sens, mais vous n'avez pas le droit de le démonter, d'écrire dessus. Il devra m'être rendu intact. Dans un premier temps, vous devez l'observer afin d'en fabriquer un qui soit pareil. Vous noterez tout ce qui semble vous poser problème ou ce qui vous questionne. Puis, vous allez réfléchir à de possibles utilisations en classe".

Un octomobile est distribué par personne.

---

[1] Pour une meilleure compréhension de l'octomobile le lecteur pourra se reporter à la brochure du même nom éditée par l'IREM de Dijon en septembre 2000.Université de Bourgogne. UFR Sciences et Techniques IREM. 9 rue Savary BP 47870 – 21078 DIJON Cedex au prix de 30 F soit 4,60 euros plus frais de port. Il pourra également se reporter à l'annexe 1.

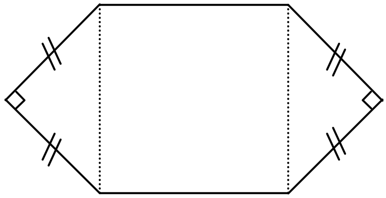


Pendant le temps de première appropriation de l'objet, du matériel est disposé sur une table, sans commentaire : bristol blanc et bristol quadrillé, règles, ciseaux, compas, colle.

3. Procédures de construction

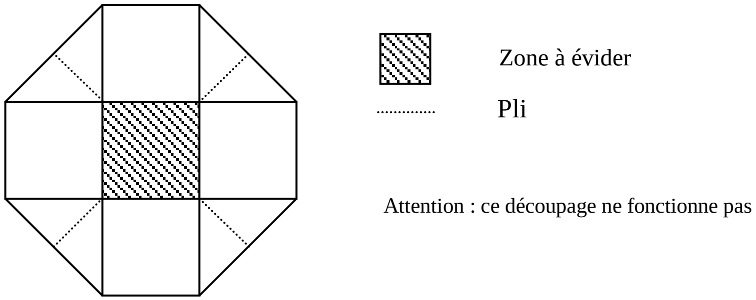
Le temps de construction est approximativement de trois quarts d'heure.
Un stagiaire a utilisé du bristol quadrillé et du bristol blanc uniquement pour la différence de couleur. Cela lui a permis de découvrir certaines symétries axiales des différentes figures que prend l'octomobile plat lorsqu'on le manipule. Une des difficultés réside en la distinction de l'objet manipulé en trois dimensions et de l'objet considéré "à plat" (voir les remarques du groupe 2)
Il a également fabriqué des octomobiles de dimensions différentes. En général, lorsqu' après une première construction maladroite, les élèves me demandent l'autorisation d'en fabriquer un autre, ma réponse est : "oui, mais un plus grand".
D'autres stagiaires ont choisi le bristol blanc et ont fait des tracés au compas ou ont utilisé le modèle comme gabarit.
Deux collègues ont préféré le bristol quadrillé "pour aller plus vite".
A la fin de la construction une personne a décoré l'octomobile avec des petites images issues des brochures touristiques. Elle a tenté de chercher si certains agencements permettaient des décompositions/recompositions d'images intéressantes après les rotations successives.

Les pièces de base sont rapidement apparues sur les brouillons



Un stagiaire a cherché s'il pouvait réaliser l'octomobile sans collage. Cela a induit l'idée qu'il pouvait se fabriquer d'un seul morceau. Cette réaction se

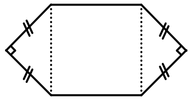
présente avec certains PE2[2] (à peine un quart d'entre eux) mais jamais spontanément chez les enfants de CM1 ou de CM2. ce qui tend à montrer que l'idée de "patron" (développement en un seul morceau) n'est pas naturelle.
Une erreur fréquente chez les PE2 est de tracer la pièce suivante, qui ne fonctionne pas :



Tous les participants sont conscients qu'il est nécessaire de soigner les tracés et les découpages, sinon l'octomobile fonctionne mal. Cet exercice finalise donc une demande de soin que nous avons souvent en géométrie avec les élèves.
Dans une phase collective, chaque représentant a proposé le fruit des réflexions de groupe.

4. Productions et remarques des différents groupes

Groupe 1 :
Les participants ont observé et décrit les "sous" figures présentes par le jeu des épaisseurs dans l'octomobile posé à plat : carré, triangle rectangle isocèle, hexagone, octogone, croix, diagonale. La figure qui sera ultérieurement nommée "figure ou pièce de base" est celle-ci :



En fin de cycle III, le travail de rappel du vocabulaire géométrique semble souvent opportun.
Des variables didactiques leur sont apparues rapidement. Nature du support utilisé : bristol quadrillé ou blanc ; instruments de tracé : compas, équerre…
Des observations quant aux symétries (retournement) ont été faites.
Ils ont finalement trouvé un développement en un seul morceau puis ils ont cherché s'il était possible de ne pas ou peu coller.

2 Stagiaire Professeur des Ecoles deuxième année

Une dernière question les a interpellés : "Quelle doit être la taille de l'hexagone pour que le développement soit possible dans une feuille donnée ?" Une réponse est donnée page 4, mais il n'est pas sûr qu'elle soit du niveau du cycle III.

Groupe 2 :
Les participants se sont demandés s'il s'agissait d'un objet mathématique pour en conclure que l'appellation serait plus sûrement celle d'objet technologique. Il va induire un travail mathématique qui semble tout à fait pertinent : description, recherche des propriétés de l'objet aplati ou non, reproduction, etc.
Ils ont cherché s'il était possible d'associer des ribambelles d'octomobiles collés, fonctionnant de telle façon que l'action sur l'un déclenche des actions sur les autres.
Note de l'auteur : je n'ai pas trouvé de pistes intéressantes en ce sens, par contre, je me suis demandée ce que l'objet devenait lorsqu'on utilisait 5, 6, 7, 8, … pièces de base. Implicitement, je me suis fixée une épaisseur au maximum si on considère que les deux collées comptent pour une.

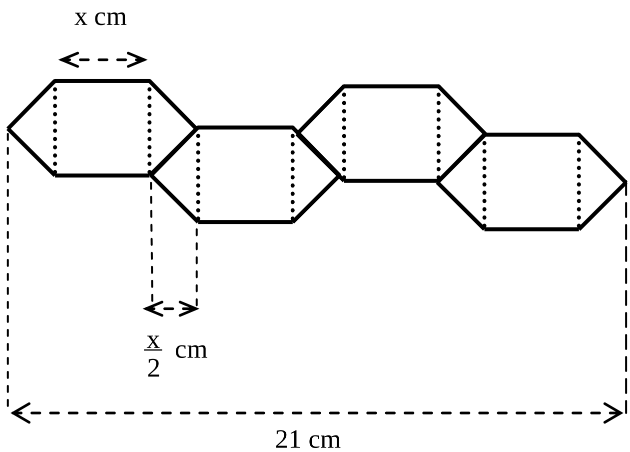
Le groupe a proposé les utilisations suivantes :
Le changement d'échelle s'accompagne des deux problèmes suivants :
construire un triangle rectangle isocèle connaissant son hypoténuse.
construire un octomobile dont le carré de la "pièce de base" possède un côté de longueur 6 cm.
La construction d'un octomobile en un minimum de coups de ciseaux (ce problème rejoint celui du groupe qui cherchait un "patron" en un seul morceau).
Les compétences visée peuvent se décliner en anticipation et création d'images mentales. Une fiche de fabrication (annexe 1) utilisée en classe a été distribuée aux stagiaires (il s'agit pour les enfants de remplir les cadres vides qui sont écrits ici en italiques).
L'étude des symétries axiales des figures que l'on obtient après manipulations de l'objet et positionnement à plat.
La recherche du nombre de rotations de l'objet en trois dimensions afin qu'il reprenne sa position de départ. Elle est favorisée par une construction avec du bristol de deux couleurs différentes.
Le calcul du nombre de "photos" de l'objet aplati (appelées "différentes positions" en annexe 3). Ce nombre est limité.
La constitution d'un projet interdisciplinaire mathématiques/arts plastiques/technologie.

Groupe 3 :
Des questions ont provoqué des débats entre les membres du groupe. Elles sont de deux sortes : les questions technologiques et les questions mathématiques. (Il en est de même chez les élèves.)
L'hexagone est-il régulier ou non ? Réponse non.
L'octogone est-il régulier ou non ? Réponse non.

Peut-on fabriquer un octomobile sans colle ? Réponse oui : du scotch posé en cavalier suffit.
Il est également intéressant de faire constater aux élèves que les dimensions de l'objet plat fini sont proportionnelles à celles de la "pièce de base".

Le groupe a proposé deux séances qui permettent d'utiliser l'octomobile
Séance 1 : observation, reproduction
Stratégie : faire quatre hexagones réguliers. Il semble impossible que lors de l'appropriation les élèves puissent imaginer un tracé en un seul morceau.
Bilan : mise en évidence des difficultés rencontrées, description des figures obtenues.
Séance 2 : projet de pavage
Consigne : j'ai du beau bristol à vous proposer, mais je souhaite l'économiser. Combien de pièces de base puis-je construire dans un format A4 ?
Un pavage est proposé en annexe 2.

<u>Groupe 4</u> :
Ce groupe s'est demandé :
Comment circonscrire les collages aux zones utiles (une des réponses est de faire hachurer ces zones aux élèves avant qu'ils ne déposent la colle).
Quel type de colle employer ? (il faut une colle forte type scotch en tube, colle contact, sinon le collage ne tient pas).
Peut on fabriquer un objet mobile proche de l'octomobile qui posséderait deux triangles isocèles non rectangles (ou équilatéraux) sur la pièce de base ? (Je ne crois pas…)
De plus, les points suivants ont été abordés concernant :
Les compétences technologiques indispensables en cycle III : la fabrication de l'octomobile nécessite l'art du trait, la pratique du pliage et la maîtrise des collages. En effet, les tracés doivent être le plus juste possible sinon l'octomobile ne fonctionne pas bien, et le bristol quadrillé aide en cela. Quant au pliage sur bristol, il n'est pas évident avec les enfants. Certaine méthodes ont été employées : plier le long d'une règle plate ou utiliser des stylos n'ayant plus d'encre pour créer un sillon sur le trait de pliage. En ce qui concerne le collage, les adultes se sont rendus compte que la colle pouvait déborder et assembler ainsi des parties inutiles restreignant les fonctions mobiles de l'objet.
Les connaissances géométriques pour fabriquer l'octomobile : reconnaître des figures simples dans une figure complexe qu'est la forme de base, savoir construire cette forme. A ce propos, ce groupe a beaucoup travaillé sur bristol blanc. J'ai montré des productions d'élèves et les membres se sont rendus compte de la difficulté pour des enfants d'école primaire de tracer un carré et deux quarts de carrés assemblés sur des côtés opposés de celui-ci. Il s'agit là d'un exercice de précision finalisé. Le maître ne demandera pas un effort de soin uniquement pour lui faire plaisir, mais pour que l'objet tourne sur lui-même.
Le problème de la construction d'une suite de quatre figures de base d'un seul tenant a également été soulevé. Quel doit être le côté du carré pour que la ribambelle entre dans une feuille de format 15 x 21 ?



Un rapide calcul ($4x + 5\frac{x}{2} = 21$) donne avec les conditions imposées ici,

$x = 3{,}5$ cm.

5. Conclusion

J'ai proposé le travail décrit dans la brochure de l'IREM[3]. L'octomobile proposé aux élèves est fabriqué en bristol quadrillé. Le carré central mesure 4 cm de côté.

Séance 1 :

Observation où le vocabulaire émerge, manipulation et fabrication de l'objet.

Les plus rapides construisent un octomobile de dimensions différentes.

Séance 2 :

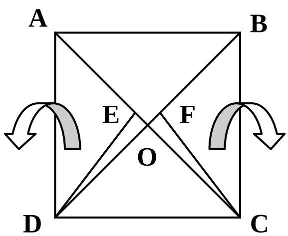
Rechercher toutes les photographies possibles quand l'octomobile est en position "plan" (annexe 3) et redécouverte de cette forme lorsque le maître la montre sur un poster.

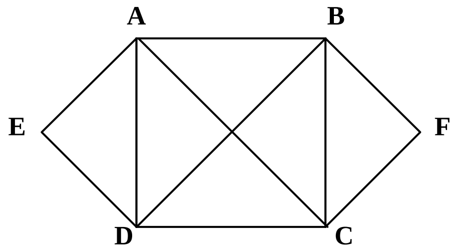
Compléter la fiche technique ou bien remettre en ordre les quatre étapes de la fabrication avant de compléter la fiche.

Séance 3 : travail au choix

Ecriture du ou des programmes de construction pour réaliser une pièce de base sur papier blanc (plutôt en CM2 ?). Il est judicieux de remarquer que la figure de base présente des plis selon [AD] et [BC] et que les sommets E et F des triangles rectangles se confondent en O centre du carré.

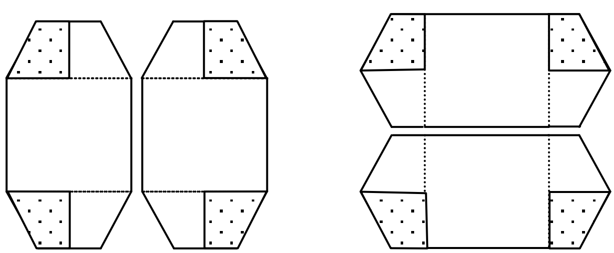
[3] IREM de Dijon

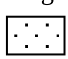




Lecture de programmes de construction écrit par le maître et tracé de cette pièce de base sur papier blanc non quadrillé (plutôt CM1 ?)
J'ai pu remarquer que les élèves de CM1 ou de CM2 ne savaient pas tracer des arcs de cercles et surchargeaient la figure de cercles complets. Un travail plus approfondi de constructions des figures complexes semble opportun.
Séance 4 : fabrication d'un octomobile sur bristol
Je ne fais fabriquer qu'une seule pièce de base avec beaucoup de soin.
Pour les trois autres, j'ai indiqué "la méthode des trous" : à l'aide de la pointe sèche du compas, on place les points A, B, C, D, E et F, puis on trace au crayon et on découpe…

J'ai donné des pistes de perspectives : fabrication de deux quadrimobiles dont l'empreinte (trace de l'objet sur le papier) est un carré ou un rectangle. Fabrication d'un hexamobile, d'un octomobile régulier, d'un cyclomobile dont les empreintes sont un hexagone régulier, un octogone régulier et un disque.[4] La question posée par le groupe 4 (*Peut-on fabriquer un objet mobile qui posséderait deux triangles isocèles non rectangles ou équilatéraux* ?) sur la pièce de base ne s'est pas avérée possible. Cependant, elle m'a permis de trouver un autre octomobile.



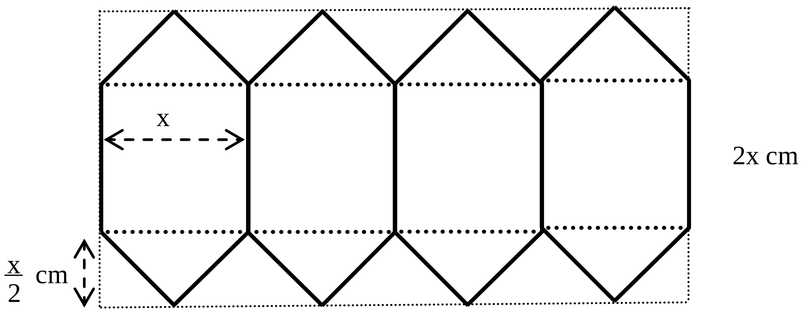
Voici les quatre pièces de base. (deux à deux identiques)
Découper sur le trait continu extérieur aux figures. Plier selon les pointillées
Coller sur les surfaces pointées 

[4] Voir la brochure de l'IREM de Dijon.

Enfin, une autre piste consiste en la résolution d'un problème qui pourrait donner lieu à une recherche en cycle III.
"Fabriquer un octomobile le plus grand possible dans une feuille de format A4.
On prendra un nombre entier de centimètres.

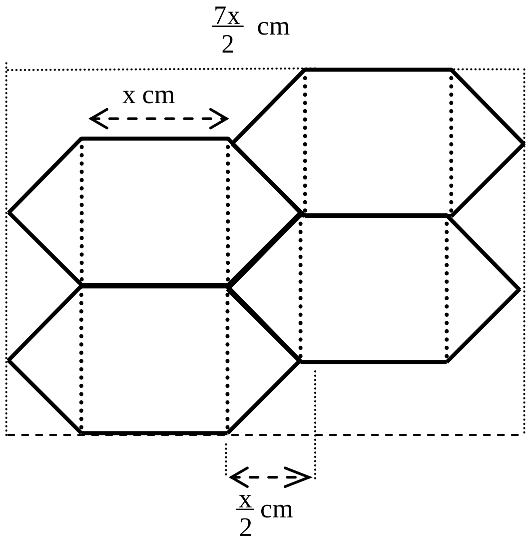
Voici quelques indices de solution :

Proposition 1



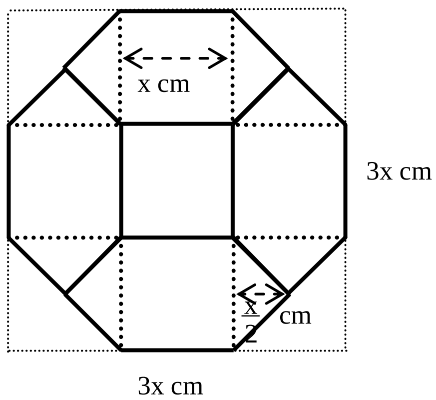
Encadrement par un rectangle de 4x x 2x

Proposition 2



Encadrement par un rectangle de $\frac{7x}{2}$ x $\frac{5x}{2}$

Proposition 3



Encadrement par un rectangle de 3x x 3x

La solution étant demandée en un nombre entier de centimètres, la proposition 1 donne x = 7 cm, alors que la proposition 2 donne x = 8 cm et la proposition 3 donne 7 cm. La deuxième proposition est donc la meilleure.

Annexe 1 **FICHE DE FABRICATION DE L'OCTOMOBILE**

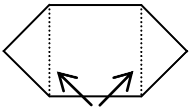
1. Matériel

- *Bristol quadrillé ou blanc*
- *Crayon de papier*
- *Paire de ciseaux…*
- *Règle.*
- *Compas (**si on trace sur bristol blanc)***
- *Colle*

2. Fabrication

- Tracer quatre figures de base identiques en s'aidant du quadrillage.
- Décrire la figure de base :

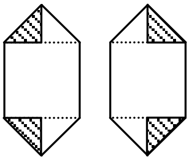
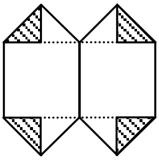
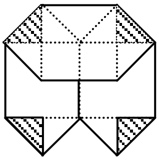
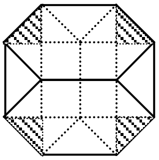
La figure de base est un hexagone non régulier. Il est formé d'un carré et de deux triangles isocèles rectangles.
Le côté du carré mesure 4 cm et la base du triangle mesure aussi 4 cm. Les triangles sont adjacents à deux côtés opposés du carré.



Plis à marquer

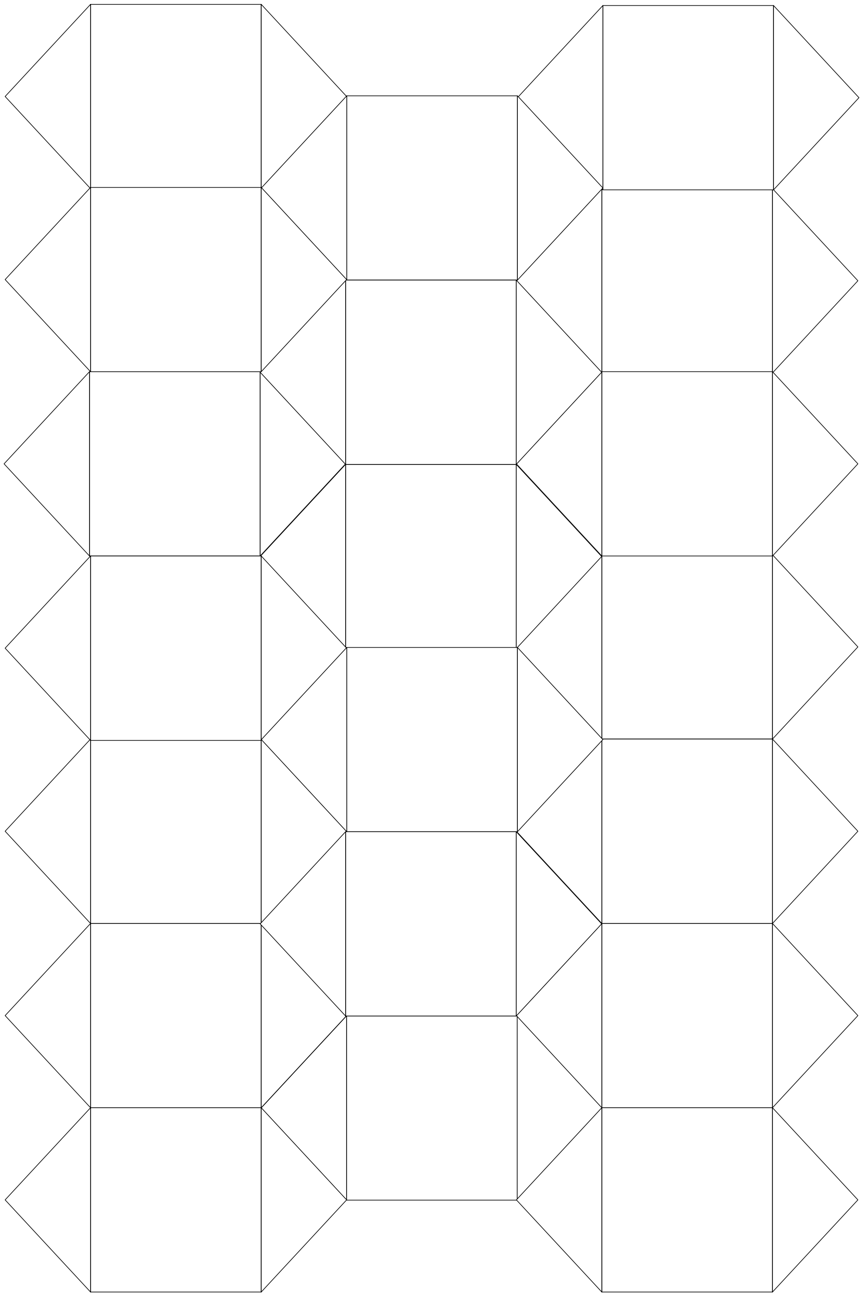
- Découper ces quatre figures et plier selon les pointillés

3. Assemblage

Première étape : *Disposer deux pièces de base verticalement.* *Disposer la colle sur les parties hachurées* 	**Deuxième étape** : *Mettre côte à côte deux pièces* 
Troisième étape *Poser une troisième pièce dessus comme indiqué par la figure et appuyer. Attention que rien en bouge !* 	**Quatrième étape** *Poser la quatrième pièce comme indiqué sur la figure et appuyer.* *Attendre que la colle soit bien sèche.* *Vous pouvez maintenant jouer avec l'octomobile.* 

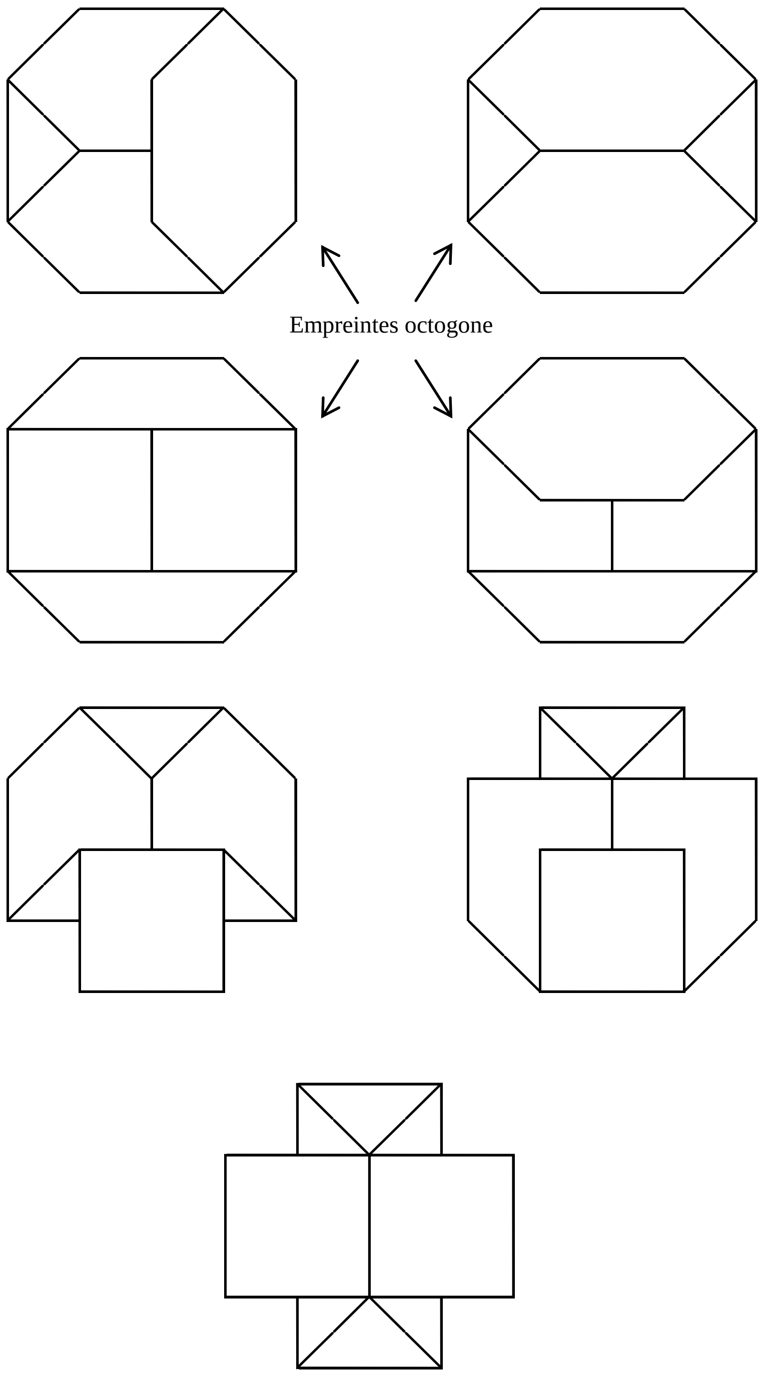
Annexe 2

PAVAGE



Annexe 3

LES DIFFÉRENTES POSITIONS DE L'OCTOMOBILE



Epistémologie et didactique : un exemple de cadre conceptuel pour analyser l'enseignement de la géométrie

Catherine Houdement - Alain Kuzniak

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Angers 1995.

Cet article, présente une réflexion globale sur l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres. Il s'interroge notamment sur le sens et la cohérence à donner à cet enseignement. Il propose de fonder cette cohérence sur une approche épistémologique de la nature de la géométrie et des relations entre la géométrie et la notion d'espace.

I - Position du problème.

I.1 Un vieux débat

L'enseignement de la géométrie a toujours tenu une place à part dans l'édifice des mathématiques. Il a suscité des polémiques sur sa nature et ses formes d'enseignement, et cela non seulement chez les spécialistes des mathématiques, mais même dans les sphères politiques responsables des contenus d'enseignement.

Illustrons notre propos par un débat à la chambre des députés le 29 avril 1833, entre M.Guizot, ministre de l'instruction publique, et d'autres députés, débat qui porte sur la rédaction des contenus de l'instruction primaire et primaire supérieure. Des avis différents se manifestent d'une part sur la nécessité d'un enseignement des éléments de la géométrie aux instituteurs et d'autre part sur la différence entre dessin linéaire[1] et éléments de géométrie (au sens d'Euclide). Le débat oscille entre la nécessité d'enseigner les fondements avant de passer aux applications pratiques (les tracés) ou bien l'enseignement préalable des savoir-faire pratiques, accessibles à tous, pour garder l'enseignement des fondements pour plus tard (éventuellement). Notons ces deux citations :

“ Les éléments de géométrie sont le principe, le dessin linéaire n'est que l'écriture de la géométrie ; il faut dire éléments de géométrie, dessin linéaire, arpentage et autres applications ” (M de Tracy, député).

[1] Dessin linéaire : tracé aux instruments des lignes droites, des parallèles, des perpendiculaires, des courbes, des figures, des polygones inscrits ; division des lignes ; solides, usage de l'échelle, perspectives...Le tout sans essai de fondement, ni de justification théorique

“ Le dessin linéaire ne suppose pas la connaissance de la géométrie, c’est une chose purement mécanique ; l’on interdit même aux enfants qui apprennent le dessin de se rendre compte de ce qu’ils font ”. (M de Laborde, député).
Un autre débat met particulièrement en scène la géométrie. Doit-on enseigner des éléments de raisonnement (et donc des éléments de géométrie) aux enfants du peuple et à leurs enseignants issus des mêmes milieux sociaux ? Ou doit-on seulement leur enseigner des savoir-faire pratiques liés à l’arpentage ou aux problèmes concrets de mesure de l’époque ? Témoin de ces hésitations, la géométrie disparaîtra de l'enseignement en France (loi Falloux 1850) pour réapparaître quelques années plus tard.

I.2 Aujourd’hui

Les mêmes oppositions réactualisées s’exercent sur la formation actuelle en géométrie des professeurs d’école et rendent cette formation particulièrement problématique.
En effet on assiste à ce niveau à un phénomène de double évacuation de la géométrie :

- La tendance concrète tend à réduire la géométrie à une appropriation de connaissances spatiales basées sur la manipulation de différents matériels. Les objets de cette géométrie sont situés dans le monde 1 de Popper K. (1972), celui des objets physiques et matériels.
- La tendance abstraite fait évoluer la géométrie (des mathématiques en général) vers une étude des structures (groupe, espace vectoriel, programme d'Erlangen de Klein 1872) et regroupe des secteurs "anciens" par analogies structurales ; dans cette conception, la géométrie élémentaire n'existe plus en tant que telle ; elle n'est plus qu'une partie de l'algèbre linéaire. Or l'algèbre linéaire n'est pas un objet d'étude mathématique de l'école (ni des professeurs d'école). Cette fois, il s’agit clairement d’une géométrie insérée dans le monde 3 de Popper, celui des figures idéales et des théories.

La première difficulté de l'enseignement de la géométrie aux professeurs d'école provient des différentes conceptions de la géométrie qui apparaissent au cours de la formation des étudiants. Nous reviendrons sur cette question mais nous pouvons affirmer grossièrement que nos étudiants, avant leur entrée à l’IUFM ont généralement suivi des cours de géométrie de “ type Lycée ou Université ”et auront à enseigner une géométrie de type différent, pour faire bref disons de “ type école ”.
Le second problème est celui de la définition et même de l'existence de cette géométrie de “ type école ”, compte tenu du rôle du raisonnement dans l’enseignement. Certains auteurs pensent que sans démonstration, il n'y a pas de géométrie ; or les capacités de l'élève de l'école ne lui permettent pas d'accéder à cette maîtrise bien calibrée du raisonnement. Donc la géométrie de l'école n'est au mieux qu'un ensemble de recettes (... de la cuisine !).
Les conséquences de ces conceptions vont se faire sentir dans les centres de formation (I.U.F.M.) des enseignants. En effet, s'il n'y a pas de véritable

géométrie à l'Ecole Elémentaire, faut-il continuer à enseigner la géométrie en formation des maîtres du premier degré ? De même si la géométrie de l'école se réduit à un ensemble de recettes, ne vaut-il pas mieux laisser les futurs maîtres faire leur propre cuisine et restaurer le vieux clivage entre dessin linéaire et éléments de géométrie ?

II - Un exemple de cadre conceptuel.

Il nous semble qu'une grande partie de la confusion qui règne dans l'enseignement autour de la géométrie résulte de la diversité de points de vue qui renvoient finalement à des conceptions et à des approches méthodologiques différentes. Or, dans une perspective de formation d'enseignants il est nécessaire de s'interroger : " *pourquoi faire de la géométrie ?*" et *" pourquoi faire faire de la géométrie ?*". Cela suppose un détour épistémologique mais ce détour peut envisager de multiples chemins. Dans le cadre de notre étude qui concerne des enseignants apprenant les mathématiques pour les enseigner ensuite à des élèves, il nous semble important de privilégier les approches épistémologiques qui valorisent la relation entre le sujet et l'objet de connaissances.
Nous avons choisi comme première approche des problèmes posés précédemment d'utiliser les travaux de Ferdinand Gonseth en les interprétant en fonction de notre position de formateur d'enseignants.
Gonseth est né en 1890 dans le Jura bernois et est mort à Lausanne en 1974. C'est un mathématicien, contemporain de Piaget (1896-1980) qu'il a côtoyé et dont il a dit :"Piaget n'a aucun sens des mathématiques. Tout ce qu'il en dit, c'est moi qui le lui ai appris ...". Gonseth a été presque aveugle assez jeune. Il a été Professeur à l'école polytechnique de Zurich. Il a également formé pendant deux ans des enseignants, ce qui a donné naissance à son ouvrage *Les fondements des mathématiques* (1926 Editions Blanchard). Il est surtout connu pour ses écrits en philosophie des sciences. Parmi ses autres ouvrages traitant de la géométrie citons notamment :

1936 *Les mathématiques et la réalité*, Editions Blanchard

1945-1955 *La géométrie et le problème de l'espace*, Editions du Griffon, Lausanne

Un colloque a été consacré en 1990 à Gonseth dont les actes sont parus sous le titre suivant :

1992 *Espace et horizon de réalité*, colloque sur GONSETH, par Panza et Pont, Editions Masson

Gonseth intègre sa réflexion sur la géométrie dans le cadre plus vaste d'une réflexion sur la démarche scientifique. Son approche n'est pas historique mais dialectique et vise à mieux comprendre l'effort qui construit et fédère la géométrie dans son rapport à l'espace et au monde sensible. Pour cela, il dégage différentes synthèses dialectiques de la géométrie qui s'organisent précisément autour de trois piliers essentiels : intuition, expérience et déduction.

II.1. Intuition, expérience et déduction

Dans la perspective pédagogique qui est la notre, il importe de bien comprendre l'évolution et les rapports existants entre géométrie et réalité. Pour un sujet confronté à l'apprentissage de la géométrie, cette articulation passe par une meilleure définition des trois modes de connaissances de l'espace que constituent la déduction, l'intuition et l'expérience.
Nous allons maintenant préciser le sens que nous attribuons à ces trois termes en revisitant ces expressions. Puis nous développerons notre propre synthèse qui résulte d'une adaptation à notre sujet d'étude des travaux de Gonseth.

II.1.1. L'intuition.

Prendre en compte l'intuition nous semble fondamental dans l'approche de la géométrie. Mais le premier embarras que l'on éprouve en mettant l'accent sur l'intuition provient de la difficulté à définir précisément ce qu'englobe ce terme. A moins d'admettre que tout le monde a une intuition de ce qu'est l'intuition. Mais il nous importe ici d'être opératoire.
L'approche de l'intuition relève, sans doute, de différents champs de connaissance comme la logique ou la psychologie. Nous suivrons Gonseth lorsqu'il reprend l'idée kantienne de forme intuitive comme forme a priori de la connaissance de l'espace. L'intuition apparaît comme le réceptacle interprétatif de nos sensations, elle structure la pensée en terme d'évidence. L'intuition peut se caractériser alors comme une prise de contact immédiate, directe, concrète avec son objet. Mais ce contact direct réalise en même temps la compréhension la plus intime avec son objet, le saisissant dans son essence et dans sa singularité. L'intuition s'opposerait ainsi à tout ce qui est pensée discursive, "*chaîne de raisons ", détours de la démonstration, mise en œuvre formelle, application minutieuse d'une méthode*.
Dans notre conception, l'intuition peut évoluer avec le sujet grâce à un ensemble d'expériences et donc de connaissances a posteriori. La contradiction n'est qu'apparente : il faut voir l'intuition structurée au niveau de l'individu en un ensemble de strates qui se superposent et font oublier les premières intuitions. Certaines de ces strates seraient communes à tous les individus ; c'est le travail des psychologues de les mettre en évidence (théorie des stades), d'autres dépendraient de la pratique du sujet et seraient dépendantes du passé scolaire ou professionnel.

II.1.2. L'expérience.

L'expérience permet d'approcher la géométrie en restant proche de l'action et d'une certaine réalité physique. La nature de l'expérience géométrique va dépendre des objets sur lesquels elle s'exerce.
Ainsi dans un premier cas, faire une expérience en géométrie ce sera tenter de vérifier matériellement ce que l'on avance. On montrera par exemple que la somme des angles intérieurs d'un triangle est un angle plat en rapprochant des gabarits des trois angles du triangle. Pliages, découpages et constructions à la règle et au compas constituent la base de cette approche expérimentale qui peut

déjà être développée à l'école. Cette approche se développe dans un espace mesurable, grâce à la perception ou à des instruments.
Aux moyens traditionnels d'expérimentation s'ajoutent désormais les possibilités offertes par l'informatique avec certains logiciels (Cabri-géométre ou Logo). Il s'agit ici de simulations qui opèrent sur des objets virtuels. Ainsi peut-on découvrir certaines intersections de droites, certains alignements de points ou des lieux géométriques. Les fractales sont l'illustration la plus contemporaine de ce lien entre géométrie et expérience par l'intermédiaire de la simulation.
Enfin une dernière forme d'expérience peut être mentale, *experimental thought*, elle consiste à mettre en œuvre mentalement des déplacements, des découpages sans les effectuer réellement.

II.1.3. La déduction ou ratio.

On peut définir la déduction en disant que, certaines connaissances étant considérées comme acquises, elle consiste à en tirer d'autres qui en sont les conséquences. La déduction permet d'atteindre de nouvelles informations à partir de celles déjà acquises, sans recours à l'expérience ou à toute autre source extérieure. Elle est basée sur le raisonnement logique et elle permet de réorganiser les apports de l'expérience. Nous employons le mot **déduction** mais l'usage que nous en faisons est plus vaste et proche du raisonnement dans son ensemble.
Le pôle déductif et logique est certainement le plus naturel quand on pense à la géométrie. Certains ne justifient le maintien de l'enseignement de la géométrie que pour les apports logiques qu'elle est censée apporter. Mais il est important de ne pas réduire ces aspects déductifs à la démonstration basée sur des axiomes bien définis et en nombre réduit. L'enfant peut aussi faire des déductions et prouver des affirmations déduites de ses observations et basées sur des constructions. C'est graduellement qu'il lui sera demander d'argumenter à partir de certaines propriétés des figures qui auront été définies avec lui. Ces figures deviennent alors le support adapté pour guider l'intuition mais elles ne suffisent plus à fournir une preuve. Nous illustrerons plus loin ce point de vue.

II.1.4. Articulation entre intuition, expérience et déduction.

Chez Gonseth, l'intuition et l'expérience “ constituent le pôle empirique de la géométrie, la déduction participe du pôle théorique ”. Gonseth illustre le lien entre ces trois aspects par cette affirmation : “ être géomètre c'est ne pas confondre une évidence issue de l'intuition avec un renseignement issu de l'expérience et le résultat d'une expérience avec la conclusion d'un raisonnement ”.
Ainsi les élèves réussissent à tracer un "vrai" triangle dont les dimensions sont 8, 6 et 14. Le résultat de l'expérience est invalidé par la déduction (inégalité triangulaire) qui permet de conclure à la nature "aplatie" du triangle en question.
Enfin, René Thom illustre la nécessaire relation entre intuition et déduction par cette métaphore très audacieuse : “ La déduction est à l'aveugle ce que l'intuition est au paralytique, l'une avance et ne voit pas, l'autre voit mais n'avance pas ”.

II.2. Nos propres synthèses.

Gonseth propose trois synthèses dialectiques de la géométrie qui réorganisent les trois composantes précédentes. Nous avons repris son idée et l'avons transformée pour l'adapter à notre propos. La synthèse que nous présentons nous est personnelle et ne doit pas être comprise comme une présentation fidèle des idées de Gonseth.

II.2.1. La géométrie naturelle ou la confusion entre la géométrie et la réalité.

La géométrie naturelle a pour source de validation la réalité, le sensible. Elle comprend les trois aspects, intuition, expérience, déduction, mais la déduction s'exerce prioritairement sur des objets matériels à l'aide de la perception et de la manipulation d'instruments. En ce sens la géométrie d'Euclide n'est pas naturelle ; il s'agit plutôt de celle de Clairaut[2] (ou dans certains cas de Legendre) où la déduction peut être liée à une expérience mécanique et où on ne doit pas encombrer l'esprit en démontrant des choses évidentes.
Cette idée de preuve dynamique et mécanique s'oppose aux démonstrations statiques de la géométrie axiomatique, mais elle semble par contre très proche de la perception que peut avoir l'enfant de l'espace.
Une autre preuve peut aussi résulter de l'usage du pliage.
Ainsi que ce soit par pliage ou par "mouvement virtuel", la construction et la perception sont au cœur d'une géométrie naturelle de type expérimental. Le raisonnement que privilégie cette approche est le raisonnement de type constructif qui est fréquent dans la résolution de problèmes.

II.2.2. La géométrie axiomatique naturelle. La géométrie comme schéma de la réalité.

Dans la synthèse axiomatique euclidienne, les aspects " non rigoureux " et les appels à l'intuition de l'espace cèdent la place à la déduction logique et à la démonstration au sein d'un système axiomatique le plus précis possible. Gonseth pose un certain de nombre de questions sur cette géométrie. Quelle est la place de l'axiomatique ? Peut-on choisir n'importe quel type d'axiomes ? Quelle est la place de la réalité quand on axiomatise ?
Si l'axiomatisation est une formalisation, mais elle n'est pas nécessairement formelle, la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique. La deuxième synthèse dialectique propose une géométrie qui n'est pas réduite au naturel, mais qui conjugue les notions d'horizon de la réalité, de schéma et de modèle. Cette géométrie ne prétend pas comme la géométrie naturelle qu'elle est la réalité, mais elle aspire à être un schéma de la réalité.
La géométrie euclidienne classique est basée sur ce pas de côté, mais tout l'effort de schématisation est dissimulé et reste implicite.

[2] Clairaut, (1741) Éléments de géométrie.

II.2.3. La géométrie axiomatique formaliste. Indépendance de la géométrie et de la réalité.

Cette fois, à la suite de l'apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique s'impose. L'approche axiomatique formaliste est bien explicitée par la rude affirmation de Wittgenstein qui clôt le débat entre géométrie et réalité :

" Les axiomes d'une géométrie peuvent ne contenir aucune vérité."

Dans l'enseignement, cette conception a permis d'introduire une géométrie élémentaire basée sur l'algèbre linéaire dont l'espace sous-jacent est l'espace R^3 muni d'un produit scalaire. Poussant jusqu'au bout les conséquences de cette vision algébrique de la géométrie Dieudonné peut affirmer dans l'introduction de son traité : " Je me suis permis de n'introduire <u>aucune</u> figure dans le texte, ne serait-ce que pour faire voir que l'on s'en passe fort bien. ".

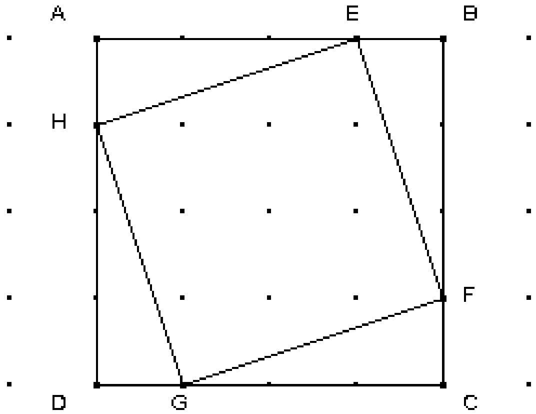
II.2.4. Notre synthèse dialectique.

Plutôt que de voir l'évolution de la géométrie comme une suite de ruptures irréconciliables, nous adoptons, à la suite de Gonseth, une vision unificatrice de la géométrie grâce à cette idée de synthèse dialectique évolutive entre divers pôles. Ce point de vue nous parait fondamental dans une perspective de formation des maîtres. La géométrie peut contenir les trois pôles (intuition, expérience, déduction) ; il y a malaise si l'un des pôles est perdu (exemple hypertrophie du pôle déductif).

II.3. Un exemple illustratif.

La figure suivante, sur papier pointé, est proposée aux élèves.

La question porte sur la nature du quadrilatère EFGH. Dans un premier temps les



seules hypothèses (on verra qu'elles peuvent dépendre du type de géométrie dans laquelle on souhaite implicitement que l'élève se place) sont la nature du support (réseau à mailles carrées) et le fait que les points soient des nœuds effectifs de ce réseau.

Telles quelles les hypothèses restent floues pour un vrai "mathématicien".
Les hypothèses à saisir sont-elles

- hypothèses 1 : ABCD est un carré, E, F, G, H quatre points situés sur les quatre côtés du carré pris dans cet ordre [AB], [BC], [CD] et [DA],
- hypothèses 2 : les hypothèses 1 et aussi les vecteurs AE et CG puis DH et BF sont égaux en longueur et opposés deux à deux
- hypothèses 3 : hypothèses 2 et aussi AE = 1/4 AB

Il existe des réponses relevant de chacune des géométries définies précédemment

Dans le cadre de la géométrie naturelle (géométrie I).

Le seul dessin permet de prendre position à l'intérieur de la géométrie I. On peut tout voir et tout lire sur la figure. Le problème se construit en suivant les étapes de construction de la figure : d'abord un carré initial, puis de segments intérieurs particuliers [EF], [FG], [GH] et [HE], apparaît alors une nouvelle figure EFGH. Quelle est sa nature ?
La première solution (**Solution 1**), purement <u>intuitive</u>, indique que EFGH est un carré, ça se voit, il a les cotés égaux et ses angles sont droits.
Cette appréhension intuitive de la figure sera à la base de toutes les solutions qui vont suivre. Elle est à rapprocher de la construction sur un géoplan ou planche à clous d'un carré avec un élastique. La seule justification donnée par les enfants est purement perceptive et intuitive : on allonge plus ou moins l'élastique. Elle pose parfois des problèmes lorsque des enfants ne sont pas d'accord sur la conservation des longueurs.
Une solution (**Solution 2**) basée sur <u>une expérience</u> va passer par la vérification de l'égalité des cotés avec un compas et de l'orthogonalité des cotés grâce à une équerre. On retrouve ici l'idée de Gonseth d'une première expérience liée à l'idée d'un espace mesurable. L'expérience doit rester proche de l'intuition pour garantir des résultats cohérents.
La solution (**Solution 3**) qui suit lie <u>déduction et expérience</u> dans le monde 1 de la géométrie naturelle : par superposition du gabarit d'un triangle rectangle égal à AEH, les élèves vérifient leur idée que l'angle AHE est égal à BEF. Ils utilisent une expérience antérieure qui leur avait permis de montrer que la somme des angles d'un triangle valait 180° pour en déduire que HEF est un angle droit.

Dans le cadre de la géométrie axiomatique naturelle (géométrie II).

Cette géométrie doit s'appuyer sur des hypothèses énoncées et non lues sur la figure : par exemple les hypothèses 2. Le texte de départ doit dégager de la figure ce qui peut y être lu (sous-entendu ce qui n'est pas écrit ne doit pas y être lu, mais déduit).
Commençons par une solution mixte (**Solution 4**) courante chez les élèves. Ils vérifient l'égalité des quatre côtés avec la règle graduée ou le compas, puis

constatent l'existence d'un angle droit avec l'équerre, enfin ils concluent que "EFGH est un carré comme losange avec un angle droit" . Cette solution est à mi-chemin entre la géométrie naturelle, expérience, et la géométrie axiomatique naturelle (puisque la conclusion est fournie par une définition-axiome).
Cette preuve présente un défaut de cohérence, puisque certains résultats sont vérifiés sur la figure, et d'autres sont montrés comme connaissances d'une certaine axiomatique. Notons que ce défaut de cohérence est d'ailleurs très courant dans les productions des élèves de collège, peut-être parce que justement les cadres respectifs des géométries où on se place pour la preuve ne sont jamais suffisamment explicités.
Envisageons maintenant une solution (**Solution 5**) homogène. L'intuition nous dit que les triangles AEH, BFE, CFG et DHG sont superposables. Confirmons cette intuition grâce à une démonstration : par hypothèse AE=BF=CG=DH et EB=FC=GD=HA et par le théorème de Pythagore, les côtés HE, EF, FG et GH sont de même longueur. Notre intuition est confirmée.
Donc les angles AEH, BFE, CGF et DHG ont même mesure, qui correspond au complémentaire des angles AHE, BEF, CFG et DGH. Les angles du quadrilatère sont donc droits (comme dernière partie d'un angle plat)
Le quadrilatère EFGH est donc un carré.
Voici une autre solution (**Solution 6**).
Les segments HE, EF, FG et GH sont des diagonales de rectangles (par exemple AEE'H). par déduction des égalité des longueurs de l'hypothèse, les rectangles sont superposables, donc les diagonales ont même longueur et font le même angle avec le côté correspondant. On obtient déjà que EFGH est un losange.
On considère la rotation de centre E et d'angle (EH, EA) : le point H se transforme en H' sur [EA) et simultanément F se transforme en F' sur la perpendiculaire à (AB) qui passe par E
F se transforme en F' sur la perpendiculaire à (AB) qui passe par E. G se transforme en G'.
On obtient un losange EF'G'H' avec un angle droit. C'est donc un carré. Par suite EFGH est aussi un carré.

Dans le cadre de la géométrie axiomatique formaliste (géométrie III).
L'énoncé est donné par exemple avec les hypothèses 2.
Dans cette géométrie qui utilise le substrat euclidien au sens du produit scalaire, la première étape consiste à écrire les coordonnées des vecteurs EF, FG, GH et HE issues de la perception (seule concession nécessaire à l'intuition) et des hypothèses. Ensuite le calcul des normes des vecteurs et du produit scalaire permet de montrer que EFGH est un carré. On peut s'aider de la figure, mais on ne peut pas utiliser des données évidentes, comme les égalités des longueurs EF, FG, GH et HE.

Conclusion.
L'existence de ces différentes façons d'envisager un même problème est une source constante de difficultés dans l'enseignement de la géométrie. De plus, elle nous semble spécifique de cette partie des mathématiques élémentaires. En effet,

prenons le problème concret suivant : 9 objets coûtent 15 F, quel est le prix de 15 objets ? La résolution de ce problème passe par l'utilisation d'un modèle, celui de la proportionnalité. Il existe plusieurs procédures de résolution, mais un seul choix de modèle (tout autre modèle contient la proportionnalité).
Prenons maintenant un problème géométrique, dans quel paradigme se placer pour le résoudre : géométrie I , II ou III ? Si le problème est théorique au départ, on reste dans la géométrie théorique (II ou III). Dans l'exemple que nous venons de traiter, la nécessité d'expliciter les hypothèses place la résolution en géométrie II ou III. Par contre si la question à résoudre se présente dans le monde physique ou si même si elle l'évoque, il existe un véritable choix de traitement : reste-t-on dans la géométrie I, ou passe-t-on dans la géométrie II ?
En résumé, il est en général demandé de traiter un problème dans une géométrie de niveau égal ou supérieur (géométrie I, II ou III) à celui dans lequel le problème est posé. Mais cette demande n'est pas explicitée, il n'existe même pas de mot pour dire, en général, ce niveau de géométrie.
Cette distinction de niveaux est pourtant reconnue dans certains problèmes, ainsi la construction effective d'un pentagone ou d'un heptagone régulier convexe se place dans la géométrie I (avec de l'intuition, de l'expérience et de la déduction notamment pour travailler sur des mesures approchées d'angles), mais le problème de la constructibilité (à la règle et au compas) se place en géométrie II ou III. Pour ces problèmes de reproduction de figures, il existe bien deux expressions différentes pour désigner le paradigme dans lequel on se place : construction et constructibilité. Par contre, et c'est un peu l'objet de nos écrits, il n'existe pas, pour la géométrie en général, de double ou triple expression pour désigner le paradigme dans lequel on travaille.
Pour nous, l'approche de la géométrie structurée autour de trois modes de connaissance identiques mais évoluant dans le temps peut constituer une source de clarification pour les futurs enseignants. Elle doit leur permettre d'enrichir leur propre conception de la géométrie et de la confronter avec une conception précise de la géométrie qu'il doivent enseigner à leurs élèves.

Conclusion générale

Nous avons tenté de poser différemment le problème de l'enseignement de la géométrie en fédérant celle-ci principalement autour des trois modes d'approche de connaissance que sont l'intuition, l'expérience et la déduction. En nous inspirant de Gonseth, nous avons dégagé trois synthèses possibles qui permettent d'articuler de manière cohérente la progression globale de l'enseignement de la géométrie : la géométrie naturelle (géométrie I), la géométrie axiomatique naturelle (géométrie II) et la géométrie axiomatique formaliste (géométrie III). Cette dernière, sans doute à cause du niveau d'enseignement étudié est restée à l'arrière-plan.
Nous avons appliqué à l'analyse de manuels de l'école élémentaire et aux sujets de concours de recrutement d'enseignants. Cette analyse nous a permis certains constats :

- Il n'y a pas à l'école de cohérence au sens de notre synthèse, il n'y a que des formes appauvries de la géométrie. Le pôle déductif est réduit à sa plus simple expression. Il s'agit là d'une forme de dénaturation simplificatrice que nous avions déjà pointée dans notre étude des stratégies de formation des enseignants.

- Dans les sujets de concours, il existe un flou sur la nature du contrat attendu des candidats et espéré par les formateurs

Ce constat est renforcé et expliqué par l'analyse des conceptions des différents acteurs du systèmes qui se situent implicitement dans différents types de géométrie. Cette conception paraît diffuse et peu cohérente.

Pour nous, l'approche de la géométrie structurée autour de trois modes de connaissance identiques mais évoluant dans le temps peut constituer une source de clarification pour les futurs enseignants. Elle doit leur permettre d'enrichir leur propre conception de la géométrie et de la confronter avec une conception précise de la géométrie qu'il doivent enseigner à leurs élèves.

Cette clarification doit permettre d'éviter le type de confusion rapportée par Nimier[3] et qui est due à la juxtaposition de géométries différentes où le rôle respectif de l'intuition, de l'expérience et de la déduction ne sont pas les mêmes.

> "*On nous avait donc fait ça avec les vieux bouquins que vous trouverez de cette époque là, les cas d'égalité des triangles avec calque, etc… Et puis, on nous avait donné après un problème, alors moi j'ai fait le problème par la même méthode, c'est-à-dire : je prends un calque, je fais ci, je fais ça, j'ai répété le discours qu'on avait fait pour les cas d'égalité des triangles et mon prof m'a expliqué que c'est pas du tout ça qu'il fallait faire, que maintenant on avait les cas d'égalité des triangles et il fallait les appliquer et … démontre…, bon je ne sais pas pourquoi*."

Cependant de nombreuses questions restent en suspens même si l'on admet la pertinence de notre synthèse.

Notre cadre permet-il de donner une véritable cohérence de la géométrie à l'école ? Permet-il d'en faire un tout, préalable à celle du collège ? Permet-il réellement de favoriser l'articulation entre les différents cycles d'enseignement ? Enfin, comment sensibiliser les futurs enseignants à cette approche de la géométrie ?

[3] *Les modes de relation aux mathématiques* (Editions Méridiens-Klinsieck), 1988

Tableau général des différentes géométries

	Géométrie naturelle I	Géométrie axiomatique naturelle II	Géométrie axiomatique formaliste III
Intuition	Sensible, liée à la perception, enrichie par l'expérience	Liée aux figures	Interne aux mathématiques
Expérience	Liée à l'espace mesurable	Schéma de la réalité	De type logique
Déduction	Proche du réel et liée à l'expérience par la vue	Démonstration basée sur des axiomes	Démonstration basée sur des axiomes
Espace	Espace intuitif et physique	Espace physico-géométrique	Espace abstrait euclidien
Statut du dessin	Objet d'étude et de validation	Support du raisonnement et "figural concept"[4]	Schéma d'un objet théorique, outil heuristique
Aspect privilégié	Evidence et construction	Propriétés et démonstration	Démonstration et lien entre les objets

[4] FISCHBEIN (1993) The Theory of Figural Concepts dans *Educational Studies in Mathematics* N°24 (2) pages 139-162.

Articulation entre perception et déduction dans une démarche géométrique en PE1

Bernard Parzysz

Extrait du XXVIII ème colloque de la COPIRELEM – Tours 2001.

Cet article précise le rapport à la géométrie des PE. L'analyse s'appuie sur l'articulation Géométrie I/ Géométrie II que l'auteur définit dans la première partie de l'article.

1- Le cadre théorique

1.1 Un modèle synthétique

Le cadre théorique dans lequel se place la recherche menée actuellement à l'IUFM Orléans-Tours par le GReDiM résulte d'une synthèse réalisée à partir de recherches antérieures dans le domaine de l'enseignement de la géométrie[1].

a) Notre première référence est relativement ancienne, puisqu'il s'agit du modèle de P. van Hiele [van Hiele 1984], qui distingue cinq niveaux dans le développement de la pensée géométrique chez l'enfant que je rappelle brièvement :

- niveau 0 (visualisation) : les figures sont identifiées uniquement par leur aspect général;
- niveau 1 (analyse) : l'enfant commence à discerner les propriétés des figures, mais sans pouvoir encore les expliciter;
- niveau 2 (déduction informelle) : l'enfant peut établir des relations intra- et inter-figurales. Les définitions font sens, les résultats obtenus empiriquement sont souvent utilisés conjointement avec des techniques déductives;
- niveau 3 (déduction formelle) : la déduction est perçue comme outil de validation, à l'intérieur d'un système axiomatique; il en est de même du rôle respectif des notions primitives, des axiomes, des définitions, des théorèmes.

[1] Ce cadre théorique a déjà été exposé, de façon succincte, au précédent colloque de la COPIRELEM par Brigitte NICOLAS-LORRAIN [Nicolas-Lorrain 2000].

- niveau 4 (rigueur) : l'élève (l'étudiant) est capable de se placer dans différents systèmes axiomatiques (géométries non euclidiennes, par exemple) et de les comparer.

Comme on le voit, les niveaux 0 et 1 sont fondés sur les "figures" (au sens de "dessins" [Parzysz 1989]) : la géométrie correspondante est donc une géométrie "concrète", dont les objets sont matériels (dessins, maquettes, objets de la vie courante...), et dans laquelle l'argumentation s'appuie essentiellement sur des critères perceptifs. Au contraire, la géométrie des niveaux 3 et 4 est une géométrie "théorique", dont les objets sont conceptuels, et dans laquelle la seule argumentation acceptable est la démonstration.

Reste le niveau 2, qui constitue en quelque sorte le niveau-charnière entre ces deux types de géométrie, dans lequel la théorie est en train de se mettre en place chez l'élève -principalement sous l'effet de l'éducation-, en se construisant contre la perception, jusque-là acceptée. C'est le moment où apparaît le plus clairement le conflit entre le su et le perçu, que j'ai déjà étudié dans le cadre de la géométrie de l'espace [Parzysz 1989, Colmez & Parzysz 1993].

Cette distinction en niveaux, prise au pied de la lettre, risque cependant de laisser penser qu'un individu donné, à un moment donné de son développement, doit se situer à un niveau donné. Mais ce serait faire abstraction de la *situation* dans laquelle se trouve cet individu à cet instant, et qui peut jouer un rôle déterminant : on sait qu'un "expert" d'un domaine particulier peut ne plus se comporter en expert lorsqu'il est placé dans une situation non familière, même lorsqu'elle ressortit à son domaine d'expertise.

b) S'inspirant des idées développées par Ferdinand Gonseth dans "La géométrie et le problème de l'espace" [Gonseth 1945-1955], Catherine Houdement et Alain Kuzniak [Houdement & Kuzniak 1998] définissent trois types de géométrie qu'ils distinguent par les rapports qu'entretiennent intuition, expérience et déduction, et qu'ils dénomment respectivement *géométrie naturelle* (G1), *géométrie axiomatique naturelle* (G2) et *géométrie axiomatique formaliste* (G3). La première "confond géométrie et réalité" (comme dans les niveaux 0 et 1 de van Hiele) et la seconde est conçue comme un "schéma" de cette réalité (niveaux 2(?) et 3 de van Hiele); dans la troisième, enfin, on "coupe le cordon ombilical" avec la réalité (niveau 4 de van Hiele).

c) Dans un article récent, Michel Henry, opérant un parallèle entre probabilités et géométrie [Henry 1999], distingue lui aussi trois types de rapports à l'espace dans l'enseignement / apprentissage de la géométrie :

(i) la situation concrète ;

(ii) une première modélisation, consistant en *"l'observation d'une situation réelle et sa description en termes courants. (...) La description qui en découle est alors une sorte d'abstraction et de simplification de la réalité perçue dans sa complexité, dans la mesure où certains choix sont faits pour ne retenir que ce qui semble pertinent de cette situation vis-à-vis du problème étudié."* (loc. cit. p. 28)

(iii) une mathématisation, qui s'opère à partir du modèle précédent.

A première vue, ce modèle présente de fortes analogies avec celui développé par Houdement-Kuzniak. Cependant, l'expression "géométrie axiomatique naturelle" que ceux-ci utilisent les distingue, puisque chez Henry la présence d'une axiomatique sous-jacente n'est pas indispensable dans la première modélisation, même si parfois *"(la) description peut être pilotée par ce que l'on peut appeler un* "regard théorique", *c'est-à-dire une connaissance de type scientifique s'appuyant sur des modèles généraux préconstruits"* (ibid). Cette "première modélisation" se placerait donc entre G1 et G2, et constituerait une étape intermédiaire précédant la construction de l'axiomatisation (correspondant *grosso modo* au niveau 2 de van Hiele).

D'autre part, la terminologie de Houdement-Kuzniak semble établir une sorte de tuilage -donc de continuité- entre les trois "géométries" ainsi définies : G1 et G2 ont en commun d'être "naturelles", tandis que G2 et G3 sont toutes deux "axiomatiques". G2 apparaît alors comme une géométrie intermédiaire entre G1 et G3. Il semble cependant que l'articulation entre G1 et G2 -de nature épistémique- est plus fondamentale que celle qui sépare G2 et G3; en fait, elle correspond en quelque sorte au niveau 2 de van Hiele, lequel se situe au cœur de la question de la modélisation géométrique. En effet, dans G1 les objets de la géométrie sont encore des éléments physiques idéalisant plus ou moins des situations de la "réalité" (maquette d'une pièce d'habitation, dessin d'un champ...), et la validation reste d'ordre perceptif (instrumenté ou non). Au contraire, dans G2 comme dans G3, les objets en jeu sont des éléments situés hors de toute réalité (mais *représentés* par des objets physiques), la validation des affirmations étant d'ordre déductif : *"l'élève est invité à abandonner un contrôle empirique de ses déclarations au profit d'un contrôle par le moyen de raisonnements"* [Berthelot & Salin 1992, p. 32]. La distinction de G2 par rapport à G1 et à G3 tient alors essentiellement à deux aspects :

1° G2 est une *modélisation de l'espace "physique"* (c'est-à-dire de G1), alors que G3 ne fait plus référence à aucune "réalité";

2° G2 est en quelque sorte une G3 *incomplètement axiomatisée*, ou plutôt une géométrie dont les "axiomes" (canoniques ou non) sont partiellement implicites (que ce soit de façon consciente ou non)[2]. Plus précisément, G2 s'appuie sur des raisonnements déductifs opérant à partir d'un certain nombre de faits considérés comme "évidents"; en cela elle est analogue à G3 (version "euclidienne"). *Grosso modo*, à certains endroits, là où G3 comporterait un axiome, et éventuellement des définitions et des théorèmes qui en découlent, G2 se contente d'un "on constate que" (qui peut même être implicite). La perception est encore présente, mais elle est censée servir uniquement à construire une théorie de l'espace perçu, et non plus -tout au moins en principe- à appuyer une argumentation (même si les "on constate que" contredisent *de facto* cette remarque).

---

[2] Même si on n'y utilise pas le terme "axiome" (on lui substitue en général le mot "propriété", terme "passe-partout" qui en fait obscurcit plus qu'il n'éclaire).

d) En suivant les distinctions faites ci-dessus, nous proposons un essai de synthèse des modèles précédents, comportant en particulier une articulation légèrement différente de celle proposée par Houdement-Kuzniak pour les raisons évoquées plus haut. Les éléments sur lesquels repose ce modèle sont, d'une part la nature des objets en jeu (physique *vs* théorique), d'autre part les modes de validation (perceptif *vs* logico-déductif). Partant de la "réalité", ou encore du "concret" (G0), qui n'est pas géométrique, nous opposerons d'une part une géométrie non axiomatique, s'appuyant sur des situations concrètes[3] qui sont idéalisées pour constituer le "spatio-graphique"[4] (G1) et d'autre part une géométrie axiomatique, l'axiomatisation pouvant être explicitée complètement (G3) ou non (G2), et la référence au "réel" étant facultative pour G2 (mais pas pour G1); dans le dernier cas, nous parlerons de géométrie *proto-axiomatique*. La situation peut alors être schématisée par le diagramme ci-après :

<table>
<tr><td></td><td colspan="4">géométries non axiomatiques</td><td colspan="3">géométries axiomatiques</td></tr>
<tr><td>type de géométrie</td><td colspan="2">géométrie concrète (G0)</td><td colspan="2">géom. spatio-graphique (G1)</td><td colspan="2">géom. proto-axiomatique G2)</td><td>géométrie axiomatique (G3)</td></tr>
<tr><td>objets</td><td colspan="4">physiques</td><td colspan="3">théoriques</td></tr>
<tr><td>validations</td><td colspan="4">perceptives</td><td colspan="3">déductives</td></tr>
<tr><td>van Hiele</td><td>niveau 0</td><td colspan="2">niveau 1</td><td colspan="2">niveau 2</td><td>niveau 3</td><td>niveau 4</td></tr>
</table>

Du point de vue didactique, la distinction entre ces géométries apparaît dans les *ruptures de contrat* qui se produisent entre l'une et l'autre, et plus précisément:

- passage de G0 à G1 : matérialité des objets en jeu (bois, carton, paille...)

[3] D'après le Petit Larousse (éd. 2000): "1. qui se rapporte à la réalité, à ce qui est matériel (...) 2. Qui désigne un être ou un objet réel".
[4] Qualificatif dû à Colette Laborde (voir par exemple [LABORDE & CAPPONI 1995]).

- passage de G1 à G2 : épaisseur des traits, des points; justification par le perçu
- passage de G2 à G3 : propriétés jugées "évidentes".

En se référant à la théorie anthropologique du didactique [Chevallard 1999], on peut considérer G1 et G2 comme deux praxéologies qui, pour un même type de problèmes (comme par exemple les problèmes de construction sous des contraintes fixées) se distinguent à la fois au niveau des *techniques* , des *technologies* et des *théories* :

∗ pour G1, les *techniques* utilisées pour la résolution de ce type de tâches sont essentiellement liées à l'usage d'instruments tels que règle graduée, compas, équerre, rapporteur (perception instrumentée). Les *technologies* (mode de validation) font également usage des instruments, qui sont alors utilisés pour contrôler le dessin construit par la constatation visuelle de coïncidences ou de superpositions : graduations de la règle, pointes du compas, bords de l'équerre, rayons du rapporteur ... Le *niveau théorique* -absent dans la pratique usuelle- serait une théorie relative à la précision ou à l'économie des tracés (qui est effectivement attestée au début du 20^{e} siècle).

∗ pour G2 et pour le même type de tâches, les *techniques* concernent des objets géométriques (droites, points, segments, cercles...) dont l'existence est assurée par des énoncés (définitions, axiomes, propriétés admises...), et l'usage des instruments permet d'en obtenir des représentations (dessins). Les *technologies* correspondantes consistent en la production d'un discours de type déductif appliqué aux données de l'énoncé et utilisant des éléments de G2 rencontrés antérieurement. Le *niveau théorique* est constitué par une géométrie axiomatique de type G3 (la géométrie affine euclidienne). Comme nous l'avons dit cependant, une technique très générale dans G2 est la réalisation et l'étude de "figures" (dessins) sur lesquelles on fera éventuellement agir des techniques de G1 dans le but de rechercher des indices qui permettront d'aboutir à une démonstration.

En ce qui concerne les institutions dans lesquelles vivent ces différentes géométries, on peut dire que, de façon très grossière, G1 correspond à l'école élémentaire, tandis que G2 correspond au lycée et G3 à l'université. Mais qu'en est-il pour le collège ? En fait, ce sont essentiellement les "figures", objets communs à G1 et G2, qui mettent ces deux géométries *en concurrence* chez des non-experts comme le sont les élèves de collège. Plus précisément, pour un élève donné confronté à une tâche de géométrie :

- si elle est perçue comme relevant de G1, elle conduira à s'appuyer sur des techniques de G1 (réalisation d'une "figure" + comparaison, superposition, mesurage...)

- si elle est perçue comme relevant de G2, elle conduira à s'appuyer sur des techniques de G2 (réalisation d'une "figure" + démonstration).

Notons enfin que G1 et G2 sont susceptibles de se contrôler l'une l'autre :

- *G2 contrôle G1 :* si une contradiction perceptive est relevée sur la "figure" (G1), on peut rechercher dans G2 l'erreur de démonstration qui l'a produite ;

- *G1 contrôle G2* : si la conclusion d'un raisonnement géométrique surprend, le retour à la "figure" et aux techniques de G1 peut permettre de confirmer ou d'infirmer ce résultat.

1.2 La relation G1 / G2 dans l'activité géométrique

Pour préciser ce qui précède, plaçons-nous maintenant au niveau de l'activité géométrique. Dans G1 les objets en jeu sont *matériels* (maquettes, dessins...), et les propriétés de ces objets sont des propriétés *physiques*, qui sont validées (déterminées, vérifiées et éventuellement contredites) par des techniques spécifiques (méthodes de comparaison, mesures, etc.), et par exemple un dessin sera accepté comme triangle si ses "côtés" (= traits) sont "droits". De même, ce triangle sera accepté comme isocèle si, à l'aide d'un compas dont la pointe sèche est piquée en l'un des sommets (bien choisi), on peut tracer un cercle passant par les deux autres sommets; ou bien si la mesure de deux de ses côtés fournit le même résultat. Au contraire, on pourra lui refuser la propriété si l'on constate un écart, éventuellement même minime). On se situe donc ici dans une *problématique de la précision*.

Par contre, dans G2 les objets en jeu sont des concepts *abstraits*, qui peuvent être *représentés* par des objets physiques *mais ne se réduisent pas à ces objets*. Ce qui était objet dans G1 devient donc, dans G2 ou G3, simple *représentation* d'un objet, c'est-à-dire qu'il s'intègre à un concept d'ordre supérieur[5]. Par exemple, un dessin de triangle sera considéré comme une représentation de l'objet “triangle“ de G2 dans le registre figural de Duval [Duval 1996], de même que la phrase “Soit un triangle ABC“ en constituera une représentation dans le registre langagier. On se situe donc ici dans une *problématique de la déduction*.

Considérons maintenant un utilisateur “expert“ de géométrie : pour résoudre un problème dans G2, il se place dans le registre de représentation qui lui semble le mieux adapté et en change aussi souvent qu'il en ressent le besoin, tout en conservant en permanence à l'esprit que *l'objet sur lequel il travaille reste le même* à travers les formes sous lesquelles il se (re)présente, et ceci même s'il n'en est pas réellement conscient.

Par contre, pour un non-expert, le changement de registre s'accompagnera d'un changement d'objet ; c'est ainsi que la “figure“ (= dessin) réalisée à partir de l'énoncé d'un problème de géométrie deviendra pour lui l'objet même à propos duquel sont posées les questions du problème (il passe ainsi, sans même s'en rendre compte, de G2 à G1). Et, inversement, une propriété contingente du dessin réalisé, une fois qu'il l'aura constatée, pourra être comprise -et annoncée- comme une propriété de la configuration (= objet géométrique) définie par l'énoncé[6] (il passe cette fois, toujours sans s'en rendre compte, de G1 à G2; c'est ce que nous appelons la "contamination du su par le

[5] On pourrait ici, comme pour l'interprétation d'un texte, parler de “premier degré“ et de “second degré“: un dessin peut être considéré au premier degré (G1) ou au second degré (G2), c'est-à-dire comme ne représentant que lui-même (en tant qu'objet physique localisé dans l'espace, et alors un “carré posé sur sa pointe“ n'est pas un carré mais un losange) ou comme représentant un objet géométrique (abstrait), comme par exemple l'objet “triangle équilatéral“. La notion de *concept figural*, développée par Fischbein [Fischbein 1993], dans laquelle les images sont partie intégrante du concept, s'avère ici pertinente.

[6] Il ne s'agit pas d'un simple passage du particulier au général, mais bien d'une confusion de deux types d'objets (et, partant, de deux géométries).

perçu" (CSP)). Bien entendu, cette distinction G1 / G2 n'est pas perçue par l'apprenti géomètre, pas plus que les passages de l'une à l'autre.

Ce caractère permanent de l'objet d'étude, ainsi que la versatilité des registres de travail susceptibles d'être mis en œuvre de façon consciente lors de son étude, constituent en fait deux aspects fondamentaux de l'expertise, et l'acquisition par l'élève de ces deux capacités en quelque sorte antagonistes est l'une des finalités que doit à mon avis viser l'enseignement de la géométrie.

2- La recherche en cours

2.1 Contenus et finalités

La recherche que nous avons entreprise concerne les étudiants admis en IUFM pour y préparer le concours de professeur des écoles (PE1). Elle a d'abord commencé à l'IUFM de Lorraine puis s'est poursuivie à l'IUFM Orléans-Tours[7]. Elle est partie du constat selon lequel le rapport personnel des professeurs des écoles à la géométrie ne leur permet pas toujours d'être à même de préparer efficacement leurs élèves à entreprendre une démarche de conceptualisation géométrique qui s'étend sur toute la durée du cursus obligatoire (et même-au-delà pour certains d'entre eux). Nous nous sommes alors posé la question de la nature des insuffisances constatées et des moyens possibles pour y remédier. D'où la double dimension de notre travail, qui comprend :

- un volet "fondamental", constitué d'une recherche destinée en partie à tester la validité de notre cadre théorique, mais surtout à préciser le rapport personnel des PE1 à la géométrie;
- un volet "développement", consistant à élaborer, à mettre en œuvre et à évaluer des ingénieries didactiques prenant en compte les résultats obtenus dans l'autre volet et destinées à prendre place dans la formation des PE1.

Plus précisément, et en référence à notre cadre théorique, les finalités de notre recherche peuvent s'établir comme suit :

[7] J'en profite pour exprimer mes plus vifs remerciements aux collègues formateurs PE de ces deux IUFM qui m'ont accompagné-et m'accompagnent encore- dans cette recherche.

(F1) établir un inventaire et une classification des types d'argumentation utilisés en géométrie par les PE1.
(F2) mettre à l'épreuve le cadre théorique et les hypothèses de recherche.
(F3) élaborer et tester des ingénieries didactiques (en environnements papier / crayon et informatique) destinées à faire prendre conscience aux PE1 de la distinction G1 / G2 et à les amener à un comportement plus expert en géométrie
[Notons que, du point de vue déontologique, la présence du concours de recrutement nous impose, vis-à-vis de nos étudiants, la contrainte d'intégrer les divers éléments de notre recherche dans le cadre du plan de formation de l'IUFM.]

2.2 Nos hypothèses

Les études préliminaires nous ont conduits à formuler les *hypothèses de recherche* suivantes, que nous allons chercher à valider, à modifier ou à infirmer :
(R1) Certains PE1 ne distinguent pas clairement G1 et G2.
(R'1) *Conséquence :* certains PE1 ne distinguent pas les validations théoriques de G2 (démonstration) des validations perceptives de G1 (constatation, mesure).
(R2) Même chez un PE1 qui a conscience de travailler dans G2, l' "évidence" de la figure peut provoquer une contamination du su par le perçu.

D'autre part, nous nous appuyons sur les *hypothèses de travail* suivantes :
(T1) Dans les conduites expertes en géométrie élémentaire (G2), les géométries G1 et G2 sont susceptibles de se contrôler l'une l'autre (dialectique G1 / G2) (voir plus haut).
(T2) Il est nécessaire qu'un professeur des écoles ait une conscience claire de la distinction G1/G2.

Il n'est peut-être pas inutile de justifier sur un exemple ce dernier point. Par exemple, dans une tâche de construction aux instruments, un professeur des écoles est amené à valider / invalider les productions de ses élèves et il faut donc qu'il soit en mesure de pouvoir distinguer les propriétés intrinsèques d'une figure géométrique des propriétés contingentes d'une représentation dessinée de cette figure (contrôle des techniques de G1 par la technologie de G2).

3- Une séance de travaux dirigés

Dans l'état actuel, le volet "fondamental" de notre recherche se compose lui-même de deux éléments méthodologiques distincts et complémentaires :

- un *questionnaire* passé par les PE1 à leur arrivée à l'IUFM, avant toute formation en géométrie
- une *séance de travaux dirigés*, réalisée au tout début de la formation.

L'état actuel de l'analyse du questionnaire a été présenté au colloque inter-IREM de Montpellier [Parzysz & Jore 2001]. Nous présentons ici la séquence de travaux dirigés et les premiers résultats qu'elle nous a permis d'obtenir.

3.1 La situation proposée

L'idée qui a gouverné l'élaboration de cette séance est de proposer aux étudiants une situation géométrique "ambiguë" (en ce sens qu'on ne précise pas si on se place dans G1 ou dans G2), dans laquelle les validations usuelles de type perceptif (relevant de G1) risquent d'être mises en défaut. Une telle situation conduit normalement un "expert" à rechercher une validation au niveau technologico-théorique (G2/G3), mais, avec des "non experts" comme le sont la plupart des PE1 (dont seulement une minorité a fait des études scientifiques), nous espérions voir apparaître des références à des validations alternatives relevant de G1. En outre, nous ne souhaitions pas voir les étudiants résoudre le problème posé (ce qui risquait d'introduire des difficultés au niveau de la mise en œuvre des techniques), mais seulement *indiquer des possibilités de validation*.

Une technologie de G2 nous semblait faire partie des connaissances -sinon disponibles, du moins mobilisables- de la quasi-totalité des étudiants : la "propriété de Pythagore". C'est pourquoi nous avons recherché une situation fondée sur la notion de triplets pythagoricien[8] (TP) ou pseudo-pythagoricien[9].

[8] C'est-à-dire un triplet (a, b, c) d'entiers naturels tels que = $a^2 + b^2 = c^2$. Exemple: (5, 12, 13).

(TPP) : un tel triplet sera utilisé pour construire, à la règle et au compas, un triangle qui dans G2 sera rectangle (TP) ou non (TPP), mais qui dans G1 sera sans doute perçu comme rectangle. Finalement, la situation retenue a été celle de l'exemple suivant :

> *Tracer une droite d. On appelle O un point de cette droite.*
>
> *Tracer le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O et de rayon 2. Ce cercle coupe la droite d en deux points A et B.*
>
> *Tracer le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre O et de rayon 3,5.*
>
> *Tracer le cercle $\mathcal{C}_3$ de centre A et de rayon 4. Ce cercle coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ en deux points C et D.*
>
> *Quel(s) moyen(s) pouvez-vous mettre en œuvre pour savoir si la droite (CD) est, ou non, la médiatrice du segment [AB] ?*

Commentaires :

1) Les valeurs numériques données aux trois rayons constituent une variable didactique qui (à un facteur multiplicatif près) peut correspondre, au choix, à un TP ou à un TPP (sur l'exemple ci-dessus, il s'agit du TPP (4, 7, 8)).

2) L'unité n'est pas précisée, de façon à permettre aux étudiants de jouer sur la taille du dessin.

3) En se plaçant dans G2 : d'après la symétrie de la construction, (CD) est dans tous les cas perpendiculaire à (AB); la seule question est donc théoriquement de savoir si (CD) passe par O ou non.

4) La consigne ne fait référence ni à G1 ni à G2 : on demande de "mettre en œuvre" des "moyens", et non de "démontrer" ou de "vérifier".

3.2 Le déroulement

La mise en œuvre de cette situation, au cours d'une séance de deux heures, s'est opérée selon un scénario inspiré de l'équipe lyonnaise de G. Arsac. On trouvera les justifications du recours à ce type de fonctionnement dans [Arsac *et al.* 1992].

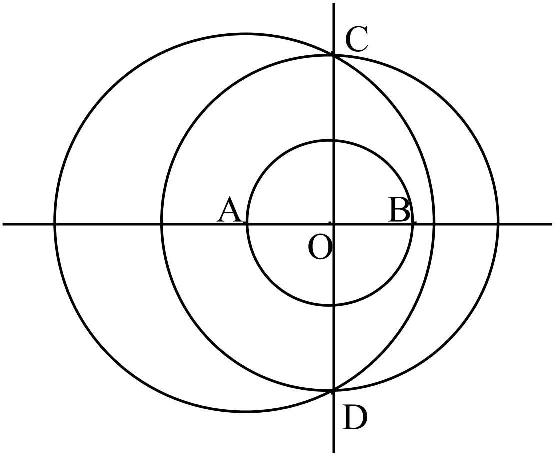
[9] C'est-à-dire un triplet (a, b, c) d'entiers naturels tels que $a^2 + b^2 = c^2 \pm 1$. Exemples: (4, 7, 8) et (4, 8, 9).

1) Mise en place : les étudiants d'un groupe de formation sont répartis en équipes de 4 (avec éventuellement un ou deux groupes de 3). Les étudiants d'origine scientifique sont regroupés, afin d'éviter d'éventuels phénomènes de "leadership". Une feuille comportant un énoncé est distribuée à chacun.

N.B. Dans l'équipe, chaque étudiant dispose d'un énoncé dans lequel les valeurs numériques sont différentes. Le tableau ci-dessous indique, pour chacune des 4 versions de l'énoncé, les valeurs numériques choisies, le triplet correspondant et la nature de celui-ci :

version	**valeurs des rayons**	**triplet correspondant**	**nature du triplet**
A	1 1 1,5	(2, 2, 3)	TPP
B	2,5 6 6,5	(5, 12, 13)	TP
C	2 4 4,5	(4, 8, 9)	TPP
D	8 15 17	(8, 15, 17)	TP

Voici à titre d'exemple un dessin obtenu à l'aide de Cabri-Géomètre pour la version C :



2) *Séquence individuelle :* réalisation de la construction demandée et recherche d'une réponse possible à la consigne.

3) *Travail par équipes :* comparaison des productions obtenues à la séquence précédente; réalisation d'une affiche qui sera exposée au tableau avec les autres à la fin de la séquence.

4) *Séquence collective :* un membre de chaque équipe vient commenter l'affiche de son équipe et répondre aux questions individuelles. Puis une synthèse est réalisée par l'enseignant(e).

3.3 Les résultats

Nous nous contenterons ici d'étudier, du point de vue des validations, les 31 affiches produites dans 5 groupes de PE1 de l'IUFM Orléans-Tours (chaque groupe comportant de 5 à 7 équipes).

[N.B.: les groupes sont identifiés par le prénom de leur enseignant(e) (Laurence ayant en charge deux groupes , ils sont notés B et C). Dans chaque groupe les équipes sont numérotées de 1 à 5, 6 ou 7 selon le cas.]

Nous appelons ici "validation" une technique proposée par une équipe de PE1 pour déterminer si (CD) est médiatrice de [AB] ou non. Nous avons distingué les validations figurant dans les affiches selon qu'elles relèvent de G1 ou de G2. Lorsqu'il y a plusieurs validations proposées dans une même affiche, les cas suivants ont pu être constatés :

(i) soit ces validations ressortissent toutes à l'un des deux paradigmes géométriques G1 ou G2 (et alors l'affiche est classée dans G1 ou dans G2).

Exemples : affiche 4 chez Ghislaine (dans G1) et affiche C7 chez Laurence (dans G2) :

<u>Définition de la médiatrice</u> :

C’est une droite qui coupe un segment en son milieu perpendiculairement.

Donc tout point situé sur la médiatrice d’un segment [AB] est situé à égale distance de A et de B.

<u>Moyens</u> :

* pour vérifier que (CD) passe par le milieu de [AB] :

  - O milieu de [AB]. (CD) passe-t-elle par O?
  - avec compas ou règle graduée : est-ce que CA = CB? ou DA = DB?

* pour vérifier que (CD) ⊥ [AB] :

  - avec équerre

* pour vérifier que (CD) est la médiatrice de [AB] :

- construire la médiatrice de [AB], si elle est confondue avec (CD) alors (CD) est la médiatrice de [AB].

- construction du losange ACB'D. B = B'?

[Commentaire : Malgré le vocabulaire, les notations et la définition de la médiatrice, on se trouve ici sans ambiguïté dans G1 (le "donc" de la partie "définition" montre déjà qu'on n'a pas affaire à une équipe experte de G2). Tous les moyens listés ici relèvent de la perception, instrumentée ou non. En particulier, le principe consistant à dessiner aux instruments l'objet conjecturé, puis à observer s'il y a ou non coïncidence avec le tracé existant revient à plusieurs reprises.]

La médiatrice du segment [AB] le coupe perpendiculairement en son milieu O.

Si AOC est triangle rectangle en O, alors la droite (CD) est la médiatrice de [AB]. On applique la réciproque du théorème de Pythagore :

Si $AC^2 = CO^2 + OA^2$, alors AOC est triangle rectangle en O.

Même chose avec le triangle AOD.

Si AOC et AOD sont triangles rectangle en O, alors C, O, D sont alignés et (CD) est la médiatrice de [AB].

[Commentaire : Il s'agit d'une démonstration classique de G2.]

(ii) soit certaines validations se situent dans G1 et les autres dans G2, sans qu'il soit établi de distinction entre les deux types de validation (et alors l'affiche est considérée comme mettant sur un pied d'égalité G1 et G2).

Exemple : affiche C4 chez Laurence :

Méthode arithmétique :

Médiatrice : passe par le milieu de [AB] et perpendiculaire

∗ on suppose $CD \perp AB$, et O milieu de [CD].

Donc si $OB \perp OC$ d'après Pythagore dans le triangle BOC rectangle en O on a :

$BC^2 = OB^2 + OC^2$

$(4,5)^2 = 4^2 + 2^2$

$20,25 \neq 20$ ∗ Donc le triangle BOC n'est pas rectangle en O et

∗ BO n'est pas perpendiculaire à OC

Donc (CD) n'est pas médiatrice de [AB]

Méthode géométrique :

∗ Médiatrice : tout point sur la médiatrice est équidistant à [AB]

Or en vérifiant avec le compas AC ≠ BC

∗ Par la figure en traçant la médiatrice à [AB] passant par O on s'aperçoit que (CD) et la médiatrice ne sont pas confondues.

[<u>Commentaire</u> : La méthode “arithmétique” se situe dans G2: c’est une démonstration par l’absurde exemplifiée par la version C de l'énoncé. La méthode “géométrique” se situe clairement dans G1. Les deux méthodes sont placées sur un pied d’égalité. A noter que, pour cette équipe, le qualificatif “arithmétique” semble correspondre à la présence de calculs numériques, tandis que “géométrique” paraît lié à l’utilisation d'instruments.]

Lorsque l'affiche propose une seule validation, celle-ci peut se situer dans G1 (perception instrumentée) ou dans G2 (démonstration). Un autre cas se présente également, celui dans lequel, bien que la démarche argumentative se situe clairement dans G2 (vocabulaire, référence à des résultats de G2, etc.), s'opère à un moment donné une CSP, c'est-à-dire que la démonstration inclut, de façon plus ou moins implicite, des éléments relevant de la perception.

Exemple : affiche 3 chez Ghislaine :

C_1 est le cercle de centre O: tous les points du cercle sont situés à égale distance du point O.

Donc: * OA = OB

* O milieu de [AB]

Comme A et B ∈ à (d), les points A, O, B sont alignés.

- C et D sont sur les cercles C_2 et C_3 respectivement de centre O et A.

Donc: * OC = OD, O milieu de [CD]

* AC = AD.

- le triangle ACD est isocèle en A car AC = AD. La demi-droite [Ad) issue de A coupe [CD] en O. Comme O est milieu de [CD], [AO] est la hauteur et la médiatrice de [CD].

- On en déduit que [AB] et [CD] sont perpendiculaires en O. Donc [CD] médiatrice de [AB].

[<u>Commentaire</u> : cette démonstration en 4 points fait preuve d'une certaine expertise dans G2 : le vocabulaire et le symbolisme sont correctement utilisés (y compris la demi-droite), le développement de l'argumentation est clairement exposé et les affirmations justifiées, à l'exception d'une seule : l'alignement sous-entendu des points C, D, O : le perçu est venu mettre à bas le bel édifice soigneusement construit.]

Le tableau ci-dessous indique la répartition que nous avons obtenue en nous situant selon les types de validations indiqués et exemplifiés plus haut:

	Edith	Ghislaine	Jean	Laurence B	Laurence C	Total
validation dans G2	4	5	4	1. 3. 4. 5. 6	2. 7	**10**
val. dans G2 + CSP		1. 3	1. 3	2. 7	3	**7**
parité G1 - G2	3. 6	2			4. 5. 6	**6**
validation dans G1	1. 2. 5	4	2. 5. 6		1	**8**

Tout d'abord, ce tableau met en évidence la grande disparité des 5 groupes étudiés, du point de vue du rapport à la géométrie; ceci n'est guère étonnant étant donné la diversité des origines scolaires et universitaires des PE1. On peut au passage noter le "haut niveau" relatif du groupe B de Laurence.

On peut ensuite constater que seules quelques équipes (10 sur 31) se placent sans ambiguïté dans G2. Quelques autres (8 sur 31) travaillent uniquement dans G1, mais il n'en reste pas moins qu'une part importante des équipes (13 sur 31) font "coexister" d'une façon ou d'une autre les deux géométries, le plus souvent de façon non consciente. En fait, la distinction claire entre les modes de validation de G1 et ceux de G2 n'est le fait que d'une faible minorité des PE1 : elle n'est exprimée que dans 3 affiches, parmi les 10 qui se placent dans G2.

D'autre part, 12 équipes ont formulé une assertion relative à la véracité de l'affirmation "(CD) est médiatrice de [AB]" (ce qui n'était pas demandé). Dans 3 cas les situations pour lesquelles la réponse est "oui" (versions B et D de l'énoncé) et celles pour lesquelles elle est "non" (version A et C) ont été correctement identifiées (au moins partiellement). Par contre, dans les 9 autres cas, une réponse unique a été donnée pour les 4 versions : "oui" pour 8 équipes (effet de contrat ?) et "non" pour la dernière. Ceci confirme notre intuition initiale que la seule validation perceptive (instrumentée ou non) se révèlerait insuffisante pour déterminer la réponse à cette question, d'autant plus qu'aucun étudiant n'a indiqué le "changement d'unité" comme moyen de validation (relatif à G1).

4- Conclusion

Comme on le voit, l'ensemble de ces premiers résultats tend à confirmer nos hypothèses de recherche R1 et R2 quant au rapport qu'entretiennent les PE1 avec la géométrie. Ainsi, nombre d'entre eux n'établissent pas de différence de nature entre les divers modes de validation, et ne sont apparemment pas conscients du fait qu'ils ne portent pas sur les mêmes objets. Il s'agit pourtant d'étudiants qui ont été confrontés à la totalité du cursus obligatoire, et qui donc, en particulier, ont eu des activités géométriques jusqu'en classe de Seconde inclusivement. Ils montrent d'ailleurs qu'ils disposent dans ce domaine, dans leur quasi-totalité, d'un ensemble de connaissances non négligeable, comprenant en particulier du vocabulaire ainsi qu'un certain nombre de constructions "classiques" aux instruments (médiatrice, losange) et d'énoncés (définitions, théorèmes), ce qui pourtant n'empêche pas qu'ils se comportent dans leur grande majorité comme des "non experts". Ceci renforce notre conviction qu'une formation initiale des PE1 doit viser à les amener à un niveau minimum d'expertise géométrique, et c'est à cette tâche que nous travaillons, en particulier par la recherche d'ingénieries didactiques susceptibles de favoriser une évolution de leur rapport personnel aux savoirs géométriques.

Bibliographie

ARSAC Gilbert et al. (1992) : *Initiation au raisonnement déductif au collège.* Presses Universitaires de Lyon

BERTHELOT René & SALIN Marie-Hélène (1992) : *Espace et géométrie dans la scolarité obligatoire*. Thèse, Université de Bordeaux 1

CHEVALLARD Yves (1999) : L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, in *"Recherches en Didactique des Mathématiques"* 19/2, 221-266

COLMEZ François & PARZYSZ Bernard (1993) : Le vu et le su dans l'évolution de dessins de pyramides, du CE2 à la Seconde, in *"Espaces graphiques et graphismes d'espaces. Contribution de psychologues et de didacticiens à l'étude de la construction des savoirs spatiaux"* (sous la direction d'A. Bessot et P. Vérillon), 35-55. Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble

FISCHBEIN Ephraim (1993) : The theory of figural concepts, in *Educational Studies in Mathematics* 24/2, 139-162.

GONSETH Ferdinand (1945-1955) : *La géométrie et le problème de l'espace.* Ed. du Griffon, Lausanne

HENRY Michel (1999) : L'introduction des probabilités au lycée: un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie, in *Repères-IREM* 36, 15-34

HOUDEMENT Catherine & KUZNIAK Alain (1999) : Quelques éléments de réflexrion sur l'enseignement de la géométrie : de l'école primaire à la formation des maîtres, in *Petit x* n°51

LABORDE Colette & CAPPONI Bernard (1995) : Modélisation à double sens, in *Actes de la 8ème Ecole d'été de Didactique des mathématiques*. Ed. IREM de Clermont-Ferrand

NICOLAS-LORRAIN Brigitte (2000) : Conceptualisation géométrique en formation de PE, in *Actes du colloque COPIRELEM de Chamonix)*. Ed. Univ. Joseph-Fourier, Grenoble , 165-178

PARZYSZ Bernard (1989) : *Représentations planes et enseignement de la géométrie de l'espace au lycée. Contribution à l'étude de la relation voir/savoir.* Thèse de doctorat. Université Paris-7. Ed. IREM Paris-7

PARZYSZ Bernard & JORE Françoise (2001) : Qu'ont-ils retenu de la géométrie du collège ? Le rapport à la géométrie des futurs professeurs de écoles, in *Actes du colloque inter-IREM de Montpellier*). Ed. Univ. de Montpellier (à paraître)

Van HIELE Pierre (1984) : A child's thought and geometry, in *English translations of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre M. van Hiele* (D. Geddes, D. Fuys & R. Tischler, eds.). Research in Science Education Program of the National Science Foundation (USA)

Pour une définition dynamique des figures planes

Bernard Bettinelli

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Besançon 1997.

Cet article présente certains travaux, menés par l'auteur, sur une approche dynamique des figures planes (parallélogrammes, polygones réguliers, triangles). Des pistes d'activités pour les classes sont présentées. Les élèves, par l'usage d'un matériel adapté, sont amenés à découvrir des propriétés géométriques des figures de base.

1 - L'origine du langage géométrique

Si on ouvre les « Éléments » d'Euclide [1], à la première page du Livre 1, on trouve une longue liste de définitions qui constitue le langage que le grand Géomètre va utiliser tout au long de son œuvre. En voici quelques-unes :

> *1 - Le point est ce dont la partie est nulle*
> *2 - Une ligne est une longueur sans largeur*
> *3 - Les extrémités d'une ligne sont des points*
> *4 - La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points*
> *5 - Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur*
> *6 - Les extrémités d'une surface sont des lignes*
> *8 - Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction*
> *10 - Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit ; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée*
> *14 - Une figure est ce qui est compris par une seule ou plusieurs limites*
> *20 - Les figures rectilignes sont celles qui sont terminées par des droites*
> *21 - Les figures trilatères sont terminées par trois droites*
> *22 - Les quadrilatères, par quatre*
> *23 - Les multilatères, par plus de quatre*
> *24 - Parmi les figures trilatères, le triangle équilatéral est celle qui a ses trois côtés égaux*
> *25 - Le triangle isocèle, celle qui a seulement deux côtés égaux*
> *26 - Le triangle scalène, celle qui a ses trois côtés inégaux*
> *27 - De plus, parmi les figures trilatères, le triangle rectangle est celle qui a un angle droit*

[1] Les œuvres d'Euclide, trad. Peyrard

30 - Parmi les figures quadrilatères, le quarré est celle qui est équilatérale et rectangulaire
31 - Le rectangle, celle qui est rectangulaire et non équilatérale
32 - Le rhombe, celle qui est équilatérale et non rectangulaire
33 - le rhomboïde, celle qui a ses côtés et ses angles opposés égaux entre eux et qui n'est ni équilatérale, ni rectangulaire
34 - Les autres quadrilatères, ceux-la exceptés, se nomment trapèzes
35 - Les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan et prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté, ni de l'autre

On peut découvrir que le langage actuel est en grande partie fixé dès cette époque :
• Les premières définitions partant directement de l'observation, sont parfois obscures (point, ligne, droite, …), et confondent l'objet et sa mesure (ligne et longueur),
• Une ligne (ou surface) n'est pas un ensemble de points ; seules ses extrémités en sont,
• La droite est ce qu'on nomme aujourd'hui segment,
• La première grandeur définie est l'angle de deux lignes, et la première configuration particulière, l'angle droit, qui utilise une notion d'égalité non précisée (superposition),
• les classes de triangles et de quadrilatères sont désignées, mais définies de manière exclusive (Le rectangle, celle qui est rectangulaire et non équilatérale). Certains mots ont changé, en particulier le rhombe est devenu losange (vers 1 300), mot formé à partir de «losa» devenu lauze, qui désigne les pierres plates dont on recouvrait les toits des maisons,
• Le parallélogramme quelconque est désigné du mot « rhomboïde », c'est-à-dire « faux-losange » et que le mot parallélogramme n'y figure pas.
Cependant, en feuilletant le Livre 1, on le voit apparaître, après la construction de la parallèle à une droite donnée passant par un point donné (qui se fait par l'intermédiaire de deux triangles isométriques formant un parallélogramme !), à la proposition XXXIV :
« Les côtés et les angles opposés des *parallélogrammes* sont égaux entre eux, et la diagonale les partage en 2 parties égales. »
Ceci veut dire que ce mot englobe toutes les familles de quadrilatères qui ont leurs côtés opposés parallèles : carrés, rectangles, rhombes et rhomboïdes.
On peut faire une autre constatation, en comparant les classes de triangles et celles de quadrilatères : Euclide (et nous à sa suite !) désigne les classes de quadrilatères par des noms (carrés, rectangles, …) , alors qu'il différencie les triangles par des adjectifs (triangles rectangles, isocèles, …) : ne serait-ce pas un indice des qualités premières des parallélogrammes, dont celles des triangles et polygones se déduisent ?

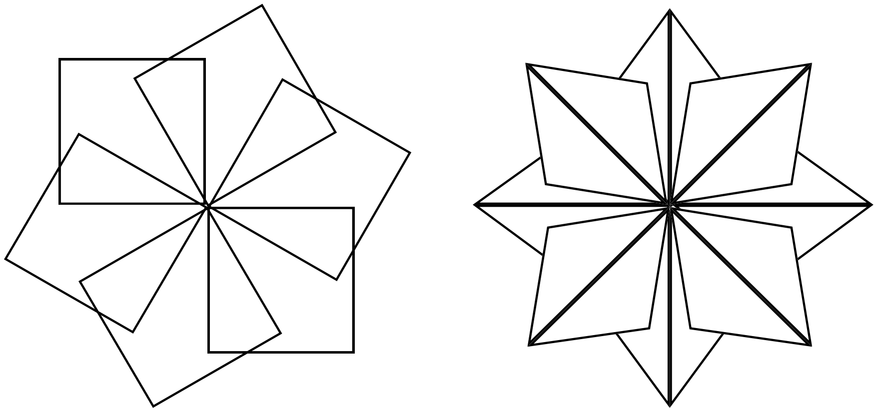
2 - Position du problème

Les figures planes sont utilisées depuis la Maternelle dans des jeux de mosaïques, puzzles, … et les plus simples sont reconnues globalement : carrés, rectangles, losanges, ronds. Les petits refusent souvent d'appeler "triangles", des triangles quelconques : beaucoup réservent ce nom aux triangles équilatéraux ou isocèles.

Lorsqu'on veut faire des dessins géométriques, les outils qui me semblent premiers sont ceux qui permettent une reproduction conforme des figures : les gabarits. L'avantage des gabarits - et en même temps leur inconvénient - est de porter en eux la forme qu'on désire produire, et donc de ne servir qu'à elle. Leur usage nécessite, de ce fait, l'emploi de toute une « boîte à outils » de gabarits différents. Cette boîte à outils devient plus souple quand on commence à découvrir que les formes contenues ne sont pas indépendantes et qu'on peut se servir des unes pour dessiner soit les autres, soit des figures non contenues. Par exemple, on peut faire un carré avec un losange, un octogone régulier avec un carré, ou une étoile à 8 branches avec un octogone régulier. En procédant ainsi, on prend petit à petit conscience que chaque figure possède un grand nombre de qualités cachées, communes avec d'autres figures, et qu'elles entretiennent des « liens de famille ».

L'observation de figures planes placées entre deux miroirs reliés par un dos et s'ouvrant comme un livre à angle variable est une autre source d'observation d'une multiplicité de dispositions de figures (sur le principe du kaléidoscope). Je me suis donné comme projet de faire reproduire de telles configurations, et d'autres encore plus complexes, en cycle III, avec le jeu de gabarits [2].

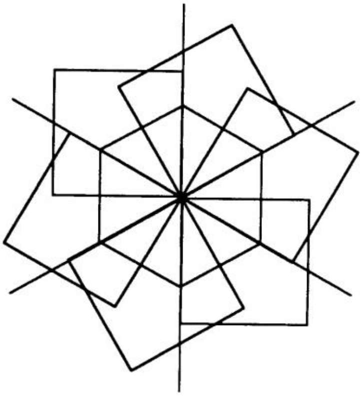
Voici deux exemples :

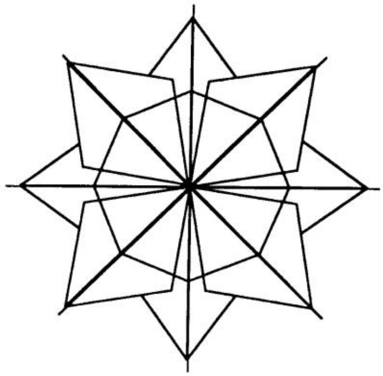


La figure reproduite est facilement repérable dans la boîte à outils (carré ou triangle isocèle), mais comment faire pour disposer correctement les différentes copies ? Les « fleurs » ont 6 et 8 pétales qui tournent comme un manège ; et ces nombres 6 et 8 sont inscrits l'un dans l'hexagone, l'autre dans l'octogone réguliers qui peuvent devenir le moteur de ces manèges. Les enfants ont très vite compris

[2] La Moisson des Formes, B. Bettinelli

cette relation, et sur de multiples dessins, en ont utilisé les effets en choisissant comme dans les exemples ci-dessus, deux pièces : soit un carré et un hexagone, soit un triangle et un octogone. Le polygone régulier est utilisé en premier et permet la construction d'une sorte d'échafaudage formé de ses grandes diagonales, dessiné au crayon, et dont le rôle indispensable pour le placement de l'autre figure doit s'effacer en fin de tracé.





Ces exemples parmi beaucoup [3] montre les deux rôles : objet (figure faisant partie du dessin final) ou outil (producteur de lignes de construction) que peut prendre un gabarit. Et ce sont des déplacements et retournements qui peuvent décrire les étapes de la construction.
Voici un autre élément de réflexion : on présente souvent les figures simples (en particulier les différentes classes de parallélogrammes) à l'aide d'une liste de propriétés de mesures (un losange est un quadrilatère qui a 4 côtés de même longueur, des diagonales perpendiculaires, …). L'élève du Primaire devra comprendre qu'on différencie l'une d'elles pour définir, et les autres comme conséquences non équivalentes en général dans une liste où toutes les propositions sont de même nature ; celui du Collège aura à faire un retournement de pensée important en triant ce qui est caractéristique parmi toutes ces propriétés. Souvent, il vérifiera un excès de ces propriétés avant d'oser donner la classe de la figure, et cela mérite que nous y accordions une grande importance car c'est à peu près la première forme de démonstration qu'il rencontre : *si je sais que ..., alors je peux affirmer que c'est un ...*
Pour toutes ces raisons, j'aimerais proposer une présentation des figures planes à l'aide de définitions dynamiques qui se décrivent en termes de mouvements et reproductions et non par une liste de propriétés de mesure, propriétés que l'élève découvrira lui-même à travers les actions.
Voici quelques propositions qui me semblent répondre à cette question :

---

[3]Instruments géométriques à l'École élémentaire, IREM de Besançon

3 - Reconnaissance des invariants

a) Le dessin géométrique

L'organisation de figures complexes faites à l'aide de gabarits permet une imprégnation des qualités de mesure : juxtaposition de pièces dans une frise ou un pavage, qui ont même longueur de côté, pièces qui s'alignent parce que leurs angles sont supplémentaires, …

L'utilisation de la règle et du compas permet une intégration d'un dessin dans un contexte plus vaste (par exemple un dessin de base de pentagone régulier permet avec une grande règle de construire une grande imbrication d'étoiles et de pentagones gigognes aussi bien à l'intérieur qu'à l'extérieur du premier tracé, le compas permet de créer des polygones réguliers de toutes tailles à partir de ceux de la boîte à outils, …) ; mais ils permettent aussi la construction de lignes supports sur lesquelles se placeront les éléments du dessin comme dans les exemples décrits ci-dessus.

Certaines activités forceront la prise de conscience de l'originalité fonctionnelle de ces figures qui ont un nom : carré, rectangle, hexagone régulier, …

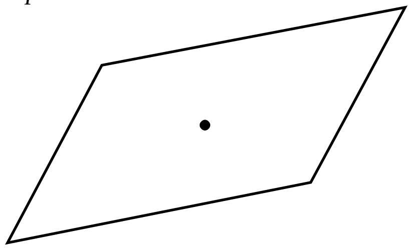
b) Le jeu des traces

Wheeler[4] en 1970 proposait de découper au cutter une figure dessinée sur carton et d'essayer de la replacer dans le trou ainsi formé. Chaque famille intéressante a ses propres façons de se replacer. Plus simplement, en disposant de figures matérielles, on peut, au crayon, tracer le contour de chacune et la placer et replacer pour qu'elle rentre dans sa trace, en analysant les mouvements permis.

Les mouvements les plus faciles à repérer sont les retournements (demi-tours dans l'espace qui correspondent aux réflexions du plan) qui permettent de replacer :

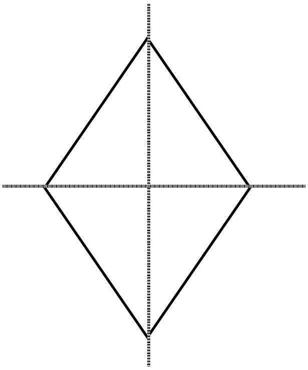
- un losange, en le retournant autour des diagonales
- un rectangle, en le retournant autour des médianes
- un carré, en le retournant autour des médianes et des diagonales.

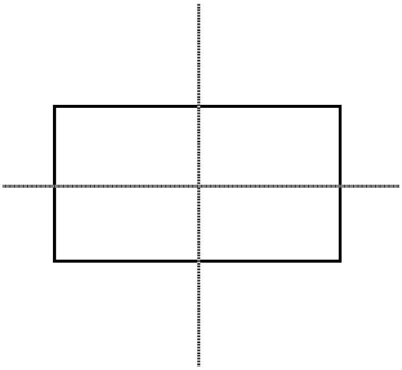
Les rotations qui transportent chaque côté sur le suivant dans les polygones réguliers (et donc dans le cas du carré) sont, elles aussi, familières. Par contre, il est beaucoup moins naturel de penser à faire exécuter un demi-tour « complet » à un parallélogramme (symétrie centrale) pour le replacer « tête en bas ». *Et c'est cependant l'invariant commun à tous les parallélogrammes, particuliers ou non*.



[4]Wheeler D., (1970) : « Mathématiques pour l'École élémentaire », O.C.D.L.

Il est facile de découvrir, en retournant un losange dans sa trace, que ses 4 côtés ont même longueur, ou que chaque diagonale est bissectrice des angles au sommets qu'elle partage et aussi médiatrice de l'autre :
- par l'un des retournements, les côtés « supérieur » et « inférieur » s'échangent (donc ont même longueur) ; par l'autre, c'est les côtés « droit » et « gauche ».
- de même les petits secteurs formés par une diagonale dans chaque secteur au sommet qu'elle découpe, s'échangent 2 à 2, ainsi que les 2 segments découpés sur l'autre diagonale et les angles qu'ils font avec elle.





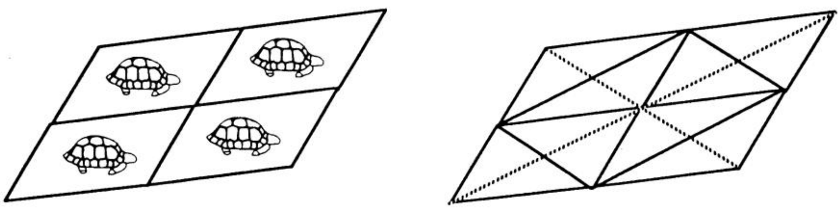
Mais en retournant un rectangle dans sa trace, chaque secteur prend la place des 3 autres et ils font le même angle, mais faut-il savoir que la somme des angles de tout quadrilatère est 360° pour pouvoir affirmer qu'il a 4 angles droits ?

Pour que cette analyse soit plus facile, on peut charger le gabarit de différents repères :
• un dessin figuratif non symétrique (animal ou personnage) collé sur les deux faces par transparence, et qui va se retrouver retourné de droite à gauche ou de haut en bas, ou tourné « les quatre fers en l'air »,
• des lignes colorées sur les côtés ou les diagonales, pour voir où elles vont et affirmer que des segments qui prennent la place l'un de l'autre on même longueur (par exemple un polygone régulier a tous ses côtés de même longueur ; un rectangle a deux diagonales de même longueur, un losange a ses 4 côtés de même longueur, …),
• de petits secteurs circulaires colorés pour voir comment ils s'échangent et donc ont le même angle (deux secteurs opposés d'un parallélogramme, les secteurs découpés par une même diagonale d'un losange, les secteurs aux sommets des polygones réguliers, …).

L'idée d'agrandissement est elle aussi porteuse d'un grand nombre de renseignements faciles à lire.

c) Agrandissements « par translations » et parallélogrammes

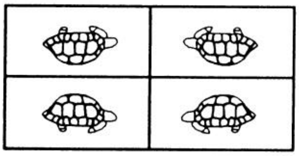
D'où viennent les particularités des parallélogrammes ? du parallélisme de ses côtés, bien sûr ! et comment faire intervenir ce parallélisme dans un jeu de manipulation ?
C'est en essayant de répondre à cette question que j'ai découvert un fait simple mais étonnant :
Je peux agrandir un parallélogramme - particulier ou non - et doubler ses dimensions en glissant un gabarit le long de ses côtés, et ce sont les seules figures (pas seulement quadrilatères, mais surfaces compactes) auxquelles je peux appliquer ce procédé.
Et voilà, en termes de transformations, une caractérisation des parallélogrammes!

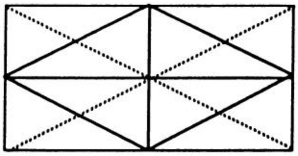


Une première chose saute aux yeux : j'ai placé les 4 secteurs autour du point central et ils remplissent le plan, c'est à dire : la somme des 4 angles de tout parallélogramme est 360°.
Une deuxième : les côtés opposés se sont recollés en glissant et sont donc parallèles et de même longueur.
Une troisième : les diagonales du grand parallélogramme sont formées chacune de 2 exemplaires d'une diagonale du gabarit, donc se coupent en leur milieu
Et d'autres encore : les secteurs opposés se retrouvent au centre, opposés par leur sommet, les autres diagonales du gabarit forment un nouveau parallélogramme joignant les milieux des côtés du grand, …

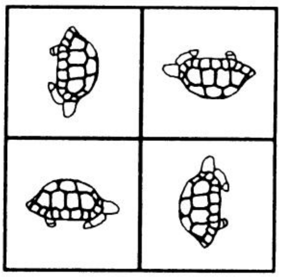
Y aurait-il alors un agrandissement particulier rendant compte de la particularité des rectangles ?
L'agrandissement « par translations » est toujours possible **parce que tout rectangle est un parallélogramme** et c'est donc un moyen de le faire admettre comme élément de cette famille. Mais le même grand rectangle peut être construit <u>en retournant le gabarit</u> successivement autour de chacun de ses côtés. Et cette fois les qualités qu'on lui découvre par ce nouveau procédé sont celles qui lui sont particulières :
• D'abord, on voit que c'est le même secteur qui remplit 4 fois le secteur plein central, et donc : chaque angle est le quart de l'angle plein, soit ce qu'on nomme angle droit (comme dans le pliage en 4 de la feuille de papier).

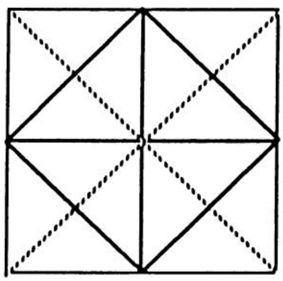
• Ensuite, c'est la même diagonale qui construit les 2 diagonales du grand rectangle par son double : donc elles ont même longueur (et même milieu)
• Enfin l'autre diagonale construit un losange joignant les milieux de ses côtés.



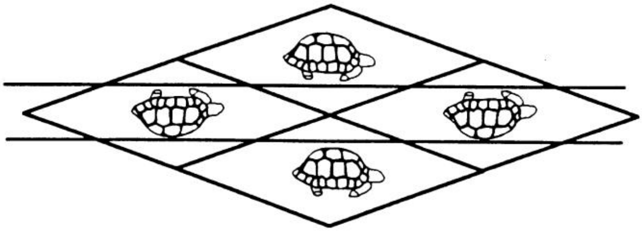


Et de même, peut-on agrandir un carré d'une manière qui lui est propre ? Par quarts de tour autour d'un de ses sommets, bien sûr ! Les résultats qui s'en déduisent sont comparables à ceux qu'on obtient par quarts de tour à l'intérieur de la trace.





Et pour les losanges, qu'en est-il ? Il y a aussi un type d'isométries qui lui est propre : des symétries glissées d'axes passant par les milieux de 2 côtés consécutifs. Elles ne sont ni connues, ni simples à utiliser ; mais heureusement pour nous, comme je l'ai décrit plus haut, le jeu des traces, dans leur cas, nous donne tous les renseignements que l'on peut désirer. En particulier, les deux diagonales le partagent en 4 triangles, deux à deux juxtaposés et symétriques.



On peut remarquer que pour tous les parallélogrammes, il existe encore une autre façon de se déplacer dans son double : par demi-tours autour des milieux des côtés jointifs.
Il n'est pas très « naturel » de définir une figure par rapport à son agrandissement (de rapport 2) ; je vais donc plutôt comparer la figure à une partie propre capable de produire la figure complète par certaines transformations.

4 - Propriétés de mesures et « classements inclusifs » des quadrilatères

En exploitant conjointement les 2 méthodes de découverte décrites plus haut : jeu des traces et agrandissements, les propriétés des parallélogrammes qu'on enseigne au Collège sont accessibles directement par les étudiants. Si un côté vient sur un autre par glissement le long d'une règle, ces 2 côtés sont parallèles ; si un côté prend la place d'un autre par un mouvement quelconque, ils ont même longueur ; si un secteur prend la place d'un autre par un mouvement quelconque, ils ont même angle.
Quelles propriétés fondamentales des différentes familles de parallélogrammes ne peut-on découvrir, soit par l'une, soit par l'autre de ces 2 dynamiques, soit par les deux ?
Les propriétés-outils utilisées implicitement dans cette démarche sont les suivantes :
• Conservation des longueurs et angles par les translations, réflexions et rotations,
• L'image de toute droite par une translation ou une symétrie centrale est une droite parallèle.
On peut remarquer que le jeu des traces sert aussi à trier les polygones réguliers et à découvrir leurs propriétés, puisqu'ils sont les seuls polygones invariants par une rotation amenant un côté sur un côté consécutif. Et c'est ainsi qu'avec ses quarts de tour, le carré est comme on l'écrivait avant : un quarré ou quadrilatère régulier.
Doit-on demander à nos élèves de toujours disposer de figures gabarits ? Certainement pas, et à l'image des enfants qui tournent naturellement la feuille pour se mettre dans l'axe d'un losange, nous devons leur proposer une action symbolique, par la pensée, directement sur de dessin, dès qu'ils en ont conscience.
C'est en voyant dans leur tête tourner et retourner les figures qu'ils auront des critères intérieurs de la vérité de leurs propositions.

5- Définitions et propriétés dynamiques

Parmi les figures planes, une définition dynamique $\mathcal{D}$ et une propriété de reproduction[5] $\mathcal{P}$ (par isométries) sont intéressantes pour les classes de parallélogrammes et les polygones réguliers. Elles peuvent avoir la forme suivante :

[5]Un rectangle, un carré, un triangle demi-rectangle et un triangle demi-carré placé entre 2 miroirs à angle droit donnent la vision de toutes les propriétés de reproduction par réflexion des parallélogrammes particuliers.

• 𝒟 : Un **parallélogramme** est un quadrilatère invariant (c.-à-d. qu'il revient dans sa trace) par demi-tour (symétrie centrale).

𝒫 : On peut partager tout parallélogramme en quatre parties par des parallèles aux côtés passant par le centre. Il est engendré à partir de l'une d'elles par des translations[6].

• 𝒟 : Un **rectangle** est un quadrilatère invariant par réflexions autour de ses médianes (droites passant par les milieux de côtés opposés).

𝒫 : On peut partager tout rectangle en quatre parties par ses médianes et il est engendré à partir de l'une d'elles par des réflexions.

• 𝒟 : Un **losange** est un quadrilatère invariant par réflexions autour de ses diagonales.

𝒫 : On peut partager tout losange en quatre triangles par ses diagonales et il est engendré à partir de l'un d'eux par des réflexions.

• 𝒟 : Un **carré** est un quadrilatère invariant par un quart de tour (rotation à droite ou à gauche de 90°).

𝒫 : On peut partager tout carré en quatre parties triangles ou quadrilatères et il est engendré à partir de l'une d'elles par quarts de tour répétés.

• 𝒟 : Un **polygone régulier** est un polygone qu'on peut tourner dans sa trace pour amener un côté sur le suivant.

𝒫 : On peut partager tout polygone à n côtés régulier en n triangles et il est engendré à partir de l'un d'eux par rotations répétées de $\frac{1}{n}$ tour.

Tout triangle est un « demi-parallélogramme » : tout parallélogramme se partage en deux triangles symétriques par rapport à son centre par l'une ou l'autre des diagonales ; tout triangle peut être « doublé » de 3 façons en un parallélogramme par demi-tour autour du milieu de chacun de ses côtés.
Pour les différentes classes de triangles - leurs définitions se réfèrent aux précédentes :
• Un **triangle isocèle** est un « triangle demi-losange ».
• Un **triangle rectangle** est un « triangle demi-rectangle ».
• Un **triangle isocèle rectangle** est un « triangle demi-carré ».
• Un **triangle équilatéral** est un « triangle régulier ».

Ces propriétés des parallélogrammes et des polygones réguliers sont fonctionnelles. J'ai montré qu'elles permettent la découverte des propriétés de mesures ; elles donnent aussi celles des triangles : par exemple, l'aire des polygones se réfère à celle des triangles par découpages, qui se réfère à celle des triangles rectangles, qui se réfère elle-même à celle des rectangles par moitié ; la somme des angles d'un parallélogramme est naturellement de 360° puisque ses quatre secteurs se placent au centre de l'agrandissement ; donc la somme des angles d'un triangle est moitié, soit 180°, celle d'un quadrilatère 360° parce qu'il se coupe en deux triangles, …

[6]On peut faire le rapprochement avec les notions de domaine fondamental et de motif minimal d'un pavage du plan.

Une question se pose au sujet de ces définitions : doit-on les transmettre ou peut-on les faire découvrir par les élèves ? Le fait d'avoir utilisé les isométries dans la construction de dessins complexes ne suffit pas à en prendre conscience, mais en donne la chance. Les images mentales laissées par ces dynamiques peuvent permettre, au moment opportun, de découvrir les qualités de conservation qui leur ont donné ce nom.
La qualité « être un rectangle, parallélogramme, polygone régulier, … » n'est jamais le propre d'une figure particulière, mais d'une famille infinie. Et pour qu'un élève ait la chance de découvrir cette qualité, il doit exercer sa sagacité sur un grand nombre d'exemples de deux familles complémentaires : celles qui la possèdent et celles qui ne la possèdent pas.

Le travail remarquable de Britt-Mary Barth[7] donne des moyens que je vais esquisser sur l'exemple de la définition des polygones réguliers :
L'objet d'étude est inconnu, donc n'a pas encore de nom ; et pour éviter que le nom crée une image fausse préétablie, appelons-le « la chose ». Dans un premier temps, il s'agit de donner la règle du jeu :
« Je vais vous présenter des objets séparés en 2 familles par un critère que j'ai en tête et que vous allez découvrir. La première contient les exemples "OUI", qui vérifient tous le critère ; l'autre contient les "NON" qui ne le vérifient pas. Vous allez essayer de deviner ce critère. Toutes les idées seront notées au tableau. Elles seront ensuite rayées si elles ne sont pas un attribut essentiel de tous les "OUI" ».
Le premier exemple "OUI" sera par exemple un hexagone régulier et le premier "NON", un cercle. Chacun tente une distinction que l'enseignant écrit.
Les exemples "OUI" et "NON" seront ensuite choisis pour confirmer ou infirmer les hypothèses jusqu'à l'obtention d'un critère ou d'une liste de critères tous vérifiés par chaque "OUI" ; jamais totalement par chaque "NON".
Les questions posées par l'enseignant forceront les élèves à affiner leur analyse : Est-que ce critère est vérifié par *tous* les "OUI" ? Voyez-vous une autre *propriété commune* à *tous* les "OUI" ? ; Est-que cet exemple "NON" remet en cause certains critères énoncés précédemment ?
L'auto-évaluation consistera, pour chacun, à dessiner un essai de "OUI" et de "NON" ; l'enseignant saura si le critère est intégré en totalité ou si de nouveaux exemples ou un retour sur ceux qui sont présentés est nécessaire.
La difficulté est d'avoir présente une batterie significative d'exemples "OUI" et "NON" et de les donner au bon moment pour faire sentir l'adéquation ou la non-adéquation d'une hypothèse. Les exemples doivent présenter au départ une opposition franche ; puis, petit à petit, permettre de cerner le concept.

Traces graphiques, traces écrites

Quelles traces peut-on demander aux élèves dans l'optique envisagée ?

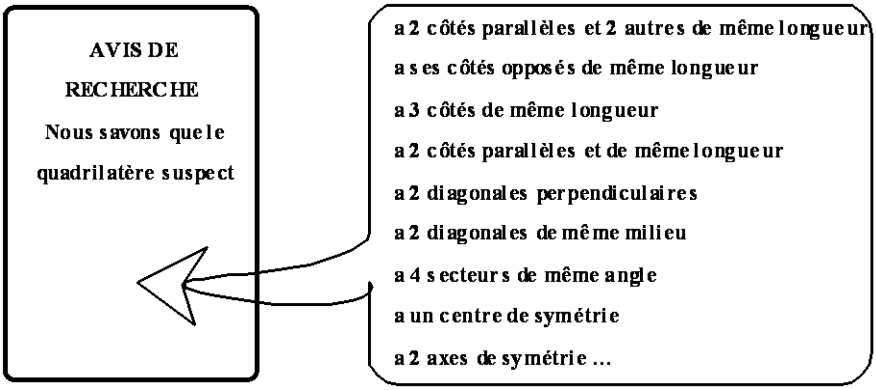
---

[7] L'apprentissage de l'abstraction, Britt-Mary Barth, 1987, Ed Retz

• D'abord le dessin géométrique, brouillon et définitif d'une configuration réalisée avec les gabarits, la règle et le compas qui peut être soit une création sur un thème (frise, pavage, mosaïque, étoile, couronne, …), soit la reproduction fidèle d'un modèle.
• L'explication écrite par un petit texte de la chronologie des tracés.
• L'analyse, dans une page de modèles, du « programme de construction » de chaque dessin (sans les réaliser effectivement).
• Sur des traces d'un gabarit, le collage de gommettes - ou le dessin figuratif - d'un animal, drapeau ou objet repère du mouvement.
• Dans l'angle de 2 miroirs placés à angle droit, placer successivement un gabarit rectangle, un carré, un triangle demi-rectangle, un triangle demi-carré pour former un parallélogramme particulier et représenter avec ces gabarits les configurations observées.
• Sur la trace double d'un gabarit de parallélogramme, rectangle, carré, le collage de gommettes de l'objet repère des mouvements.
• Sur la trace d'un parallélogramme, losange, rectangle, carré, le partage en quatre et le collage de gommettes de l'objet repère des mouvements.
• Sur une (ou des) trace(s) d'un gabarit, la mise en même couleur des propriétés de mesures repérées.
• La liste écrite de ces propriétés.
• Sur une fiche identité contenant une liste préétablie de propriétés, des cases "Vrai" ou "Faux" à cocher pour une figure donnée.

L'action réciproque, qui demande de savoir choisir parmi la liste des propriétés de mesure, lesquelles - ou quels sous-ensembles desquelles - permettent d'étiqueter la figure dans une famille, doit être abordé avec des activités adaptées, afin d'en permettre la prise de conscience.
Pour aborder ce point, j'ai essayé de construire plusieurs jeux de cartes où une propriété de mesure (*Polygone mystérieux, Avis de recherche*) est inscrite. (Le nom de ces jeux inclut une part de mystère, comme dans une enquête policière où on dispose d'indices parfois insuffisants, parfois suffisants pour découvrir un coupable). On tire une ou plusieurs cartes d'un jeu et, comme l'inspecteur, on essaie de trouver - ou construire - la figure inconnue à travers les indices recueillis [8].

[8] Voir les documents (manuel et cahiers) accompagnant la Moisson des Formes.



Plusieurs types d'actions sont possibles :

• A partir d'une figure, un « codeur » trie les cartes qui sont vraies ; le « décodeur » tire successivement des cartes et essaie de bâtir une sorte de « portrait-robot » de la figure à découvrir. Certaines cartes donneront des indices nouveaux, d'autres n'apprendront rien de plus.

• Avec le même départ, le codeur insère un « faux-témoignage » (incompatibilité). Le but est de trouver le « faux-témoin ».

• Par un tirage aléatoire dans l'ensemble des cartes, on peut chercher à construire une figure. Il est important alors de reconnaître les « faux-témoins ».

• Les cartes du jeu peuvent aussi être classées et rangées :

  - classées par piles donnant des informations équivalentes.
  - piles rangées lorsque les informations sont rangées par implication.

Bibliographie

PEYRARD, *Les œuvres d'Euclide,* trad., Librairie Blanchard [1966]
D. WHEELER, *Mathématiques pour l'École élémentaire*, . OCDL [1970]
B.-M. BARTH, *L'apprentissage de l'abstraction,* RETZ [1987]
B. BETTINELLI, *La Moisson des Formes* (livre et matériel) [1994] ; 5 cahiers (*Le dessin géométrique avec la Moisson des formes, niveaux 1, 2, 3* [1995] ; *Mesures* [1996] ; *Géométrie au Collège,* [98], 1 rue de la Perrouse 25 115 POUILLEY LES VIGNES

Quadrilatères particuliers

Hervé PEAULT

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactiques des mathématiques - Cahors 1991.

Cet article présente des activités réalisées dans le cadre de la formation initiale des professeurs des écoles.
A partir de quelques activités visant à resituer les connaissances géométriques sur les quadrilatères, on propose un essai d'analyse didactique et une étude comparée de séquences figurant dans des manuels.

Parmi les figures géométriques étudiées à l'école élémentaire, les quadrilatères occupent une place importante.

J'ai choisi cette année d'y consacrer plusieurs séances en FP2 (4 fois 2 h, plus une cinquième séance ultérieure sur le thème des triangles qui était à la fois un prolongement du travail et un moyen d'évaluation).

Objectifs

Permettre à chacun de *se* s'approprier *les* connaissances sur *les* quadrilatères particuliers

Faire vivre sur ce thème des activités à base de problèmes

Faire analyser ces activités en les resituant dans une conception de l'apprentissage et travailler à cette occasion quelques concepts de didactique (peu abordés en 1ère année pour certains des groupes concernés)

Donner les moyens d'analyser d'autres activités (notamment extraits de manuels) à partir de ces concepts de didactique

Ces objectifs ont été présentés dès le départ aux normaliens

Déroulement

I) Activités (4 h)

2) Analyse des activités (2 h)

3) Étude d'extraits de manuels sur les quadrilatères particuliers (2 h)

4) Étude d'extraits de manuels sur les triangles (2 h)

I - ACTIVITÉS

<u>Activité 1</u>

Apprentissage visé

Savoir reconnaître et définir par des conditions nécessaires et suffisantes les différents types de quadrilatères

Prendre conscience des relations entre ces différents types.

Situation

Deviner un quadrilatère en posant des questions

Matériel

Chacun dispose d'une feuille sur laquelle sont dessinés 25 quadrilatères divers (cf. page suivante). Un intrus (le 26) est un pentagone.

Organisation

par groupes de 3 ou 4

Consigne

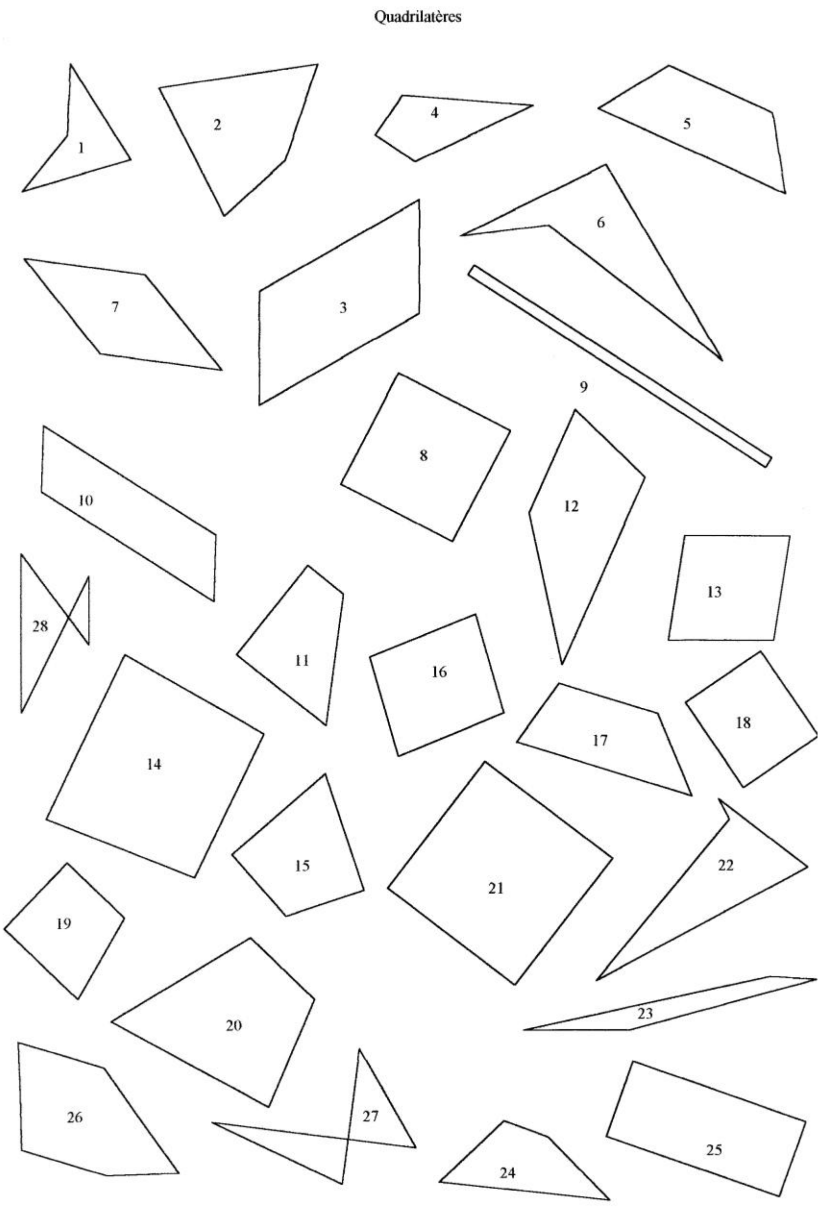
"J'ai choisi un des 25 quadrilatères de la feuille : vous devez deviner lequel. Pour cela, vous devrez me poser par écrit des questions (n'importe lesquelles sauf demander le numéro); je répondrai par écrit à toute question pourvu qu'elle ait du sens. Quand une équipe sera sûre d'avoir trouvé, elle indiquera le numéro de la figure. Essayez à la fois d'être rapides et de poser un minimum de questions. "

Déroulement

Une première fois, la figure choisie est le n° 10 (parallélogramme non rectangle), une seconde fois le 11 (trapèze rectangle avec 2 côtés consécutifs égaux) avec la consigne complémentaire de ne pas utiliser les dénominations usuelles des quadrilatères. Ceux qui terminent plus tôt sont invités à rechercher un système de questions qui, a priori, permettraient de reconnaître n'importe quel quadrilatère.

Remarques

- Le complément de consigne pour la deuxième recherche (ne pas utiliser les noms usuels des quadrilatères) s'est avéré inutile, aucun groupe n'ayant fait référence aux noms de quadrilatères (effet de contrat ?).
- Perpendicularité et parallélisme sont presque toujours estimés "à vue", ce qui conduira à des erreurs d'appréciation pour certaines figures.
- La distinction entre le 3 et le 10 ne pouvait se faire qu’à partir de considérations de longueurs ou d'angles. Aucune demande de mesure n'a été formulée (effet de contrat ?), les questions pour permettre la différenciation étant le plus souvent du genre "est-ce que le plus grand côté mesure moins de trois fois plus que le petit côté ?".



Pour enlever toute ambiguïté due à la photocopie, les dessins 8 et 18 sont bien des carrés, les dessins 7 et 16 sont bien des losanges, les dessins 1 et 4 sont bien des cerf-volants, etc.

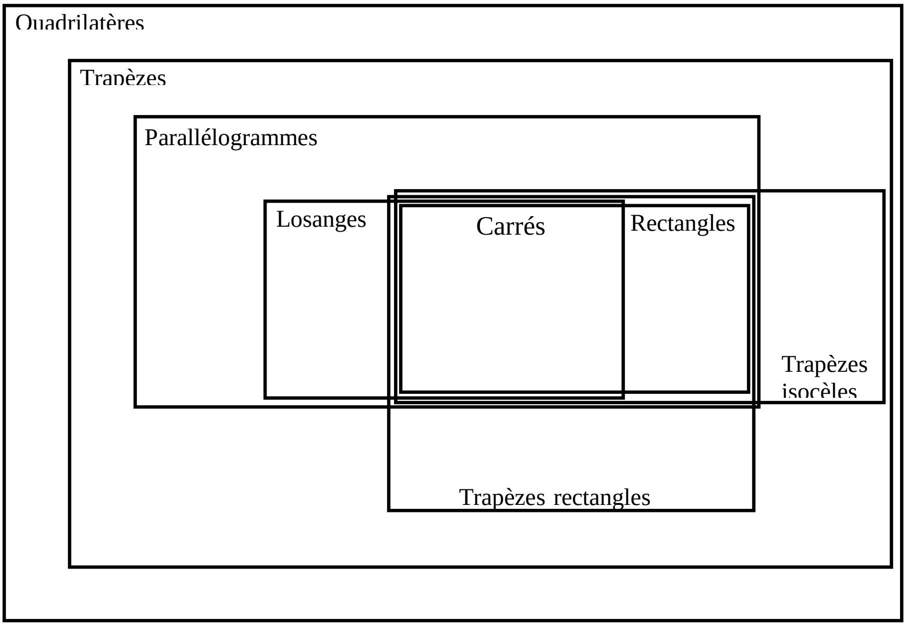
Mise en commun
Elle concerne le listage des différents critères utilisés (convexité, parallélisme, perpendicularité, égalité de longueurs, égalité d'angles. diagonales - auxquelles je fais référence si aucun groupe ne les a utilisées), l'examen de quelques questionnements (notamment ceux pour lesquels j'avais repéré des erreurs ou des redondances) et se prolonge à partir d'une nouvelle consigne.

Nouvelle consigne pour les groupes
"On ne conserve que les critères de convexité. Parallélisme de côtés, perpendicularité de côtés, égalité de côtés opposés, égalité d'angles.

1) Classer les figures en mettant ensemble celles qui sont indiscernables lorsqu' on s'en tient à ces seuls critères

2) Indiquer pour chaque classe une ou plusieurs caractérisations suffisantes à l'aide de ces critères. Attribuer les noms génériques, lorsqu'ils sont connus aux classes ou groupements de classes."

Mise en commun
Elle vise à caractériser de façon précise (conditions nécessaires et suffisantes) différents types de quadrilatères : quadrilatères convexes, trapèzes, trapèzes rectangles, trapèzes isocèles, parallélogrammes. rectangles, losanges, carrés, et à repérer les inclusions diverses. Celles-ci sont récapitulées par un schéma du type :



Activité 2

Apprentissage visé

Savoir organiser des informations géométriques sur des quadrilatères et en tirer d'autres par déduction

Réaliser des constructions élémentaires à l'aide des instruments usuels.

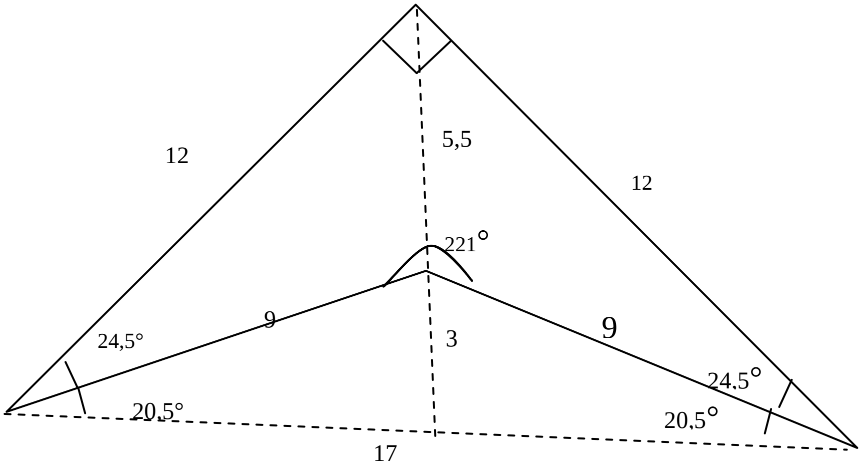
Situation

Reproduire un quadrilatère caché, à partir d'informations données ou à demander

Matériel

La figure ci-dessous est cachée

Chaque groupe dispose de papier blanc et de tous les instruments de tracé qu'il désire.



Organisation

par petits groupes

Consigne

"Sur une feuille j'ai dessiné un quadrilatère. Vous devez reproduire ce quadrilatère. Le dessin que vous réaliserez devra être superposable au mien. On vérifiera par transparence.

Vous ne pouvez voir mon dessin, mais je vous livre une partie des informations le concernant

- *il a au moins deux côtés perpendiculaires ;*
- *il a au moins deux angles égaux ;*
- *les côtés sont égaux deux à deux ;*
- *une diagonale mesure 17 cm ;*

- il a au moins un axe de symétrie ;
- l' un des côtés mesure 9 cm.

1l n'est pas sûr que les informations soient suffisantes ; si vous estimez qu'il vous en manque, vous pouvez poser par écrit de nouvelles questions (sans utiliser des noms de polygones), mais le moins possible. Chaque question supplémentaire donne un point de pénalisation. plus un autre si la demande porte sur une mesure de longueur. Si votre dessin me parait trop éloigné de l'original, vous ne serez pas autorisés de le vérifier et vous écoperez de 3 points de pénalité."

Mise en commun

Elle porte sur les déductions effectuées et les erreurs**.** Notamment, la plupart estiment d'emblée qu'il s'agit d'un quadrilatère particulier (effet de contrat ?) et donc d'un rectangle, puis d'un quadrilatère convexe de type "*cerf-volant*". Pour beaucoup, il faut longtemps avant de penser qu'il puisse s'agir d'une figure concave.

Par ailleurs, à la question "*les diagonales se coupent-elles en leurs milieux ?"* j'ai répondu "*au milieu de l'une d'elles seulement*". Cette réponse a soulevé par la suite des contestations et nous a amenés à rechercher des mots du type "diagonale" (diamètre, côté, hauteur, médiane,...) susceptibles d'être utilisés tantôt pour désigner un segment tantôt pour désigner la droite support.

Activité 3

(d'après une fiche de J. Bolon)

Apprentissage visé

- savoir organiser une construction géométrique de quadrilatère en fonction des informations disponibles
- pouvoir envisager diverses méthodes de construction

Situation

Élaborer des consignes pour la construction d'un quadrilatère avec des contraintes

Organisation

par groupes de 2

Consigne

"Je vais donner à chaque groupe un papier précisant une construction à faire faire par un autre groupe (il s'agit chaque fois d'un quadrilatère). A partir de ce papier, vous devrez rédiger un message permettant au groupe destinataire de réaliser la construction.

Aucun terme de désignation de polygone (trapèze, carré, etc..) ne devra être employé dans le message. Celui-ci devra être rédigé sous forme de succession d'actions élémentaires dont chacune sera de l'un des types suivants ;

- *marquer un point*
- *tracer un segment de longueur donnée ou joignant 2 points donnés*
- *tracer une droite passant par 2 points*
- *reporter une longueur*
- *tracer une perpendiculaire à une droite passant par un point donné*
- *tracer un cercle ou un arc de cercle de centre et de rayon donnés.*

Les messages seront échangés; pour la construction, vous pourrez utiliser la règle graduée, l'équerre et le compas; une fois la construction réalisée, les récepteurs essaieront de deviner quelle était la consigne donnée aux émetteurs et on comparera les réalisations et les messages."

Constructions à effectuer

- faire construire un carré ayant une diagonale de 10 cm

- faire construire un parallélogramme dont un côté mesure 5 cm et une diagonale 10 cm
- faire construire un losange dont les côtés mesurent 5 cm
- faire construire un trapèze ni rectangle ni isocèle dont les côtés parallèles mesurent 4 cm et 7 cm
- faire construire un parallélogramme dont une diagonale mesure 5 cm et l'autre 10 cm
- faire construire un parallélogramme non rectangle dont les côtés mesurent 5 cm et 10 cm
- faire construire un trapèze isocèle dont les côtés parallèles sont distants de cm et dont l'un mesure 7 cm
- faire construire un rectangle avant un côté de 5 cm et une diagonale de 10 cm
- faire construire un losange non carré avant une diagonale de 8 cm

Mise en commun

Elle s'effectue après que chaque groupe ait réalisé au moins une construction. Les plus rapides sont chargés d'écrire un message pour une nouvelle construction.

Plusieurs messages sont analysés avec chaque fois la question suivante renvoyée à tous : "*existe-t-il à votre avis une méthode de construction plus simple ?"*

Elle s'est prolongée autour de problèmes rencontrés : *"quelles procédures pour tracer la parallèle à une droite passant par un point donné ?". "quelles procédures pour tracer le milieu d'un segment ?"...*

II - ANALYSE DES ACTIVITÉS

Elle est menée de façon collective à partir du questionnaire ci-dessous. Pour chaque question, chacun prend un temps de réflexion et on note toutes les idées. J'essaie d'aider à synthétiser. Le débat ne suit pas vraiment l'ordonnancement des questions.

1) A travers ces 3 activités, quelles connaissances mathématiques, quels savoir-faire ont été étudiés? Estimez-vous que cela a été l'occasion pour vous d'un apprentissage?

2) Parmi les termes suivants ou d'autres encore. lesquels vous paraissent caractériser le mieux la façon. dont vous avez travaillé: observation, initiative, manipulation, écoute, activité, imitation, recherche, application, passivité, motivation, mémorisation, apprentissage, jeu, invention .... Lorsque plusieurs vous paraissent convenir, en quel ordre et dans quelle mesure les dispositions correspondantes vous paraissent avoir été sollicitées?

3) A votre avis, ces 3 activités ont-elles été conçues dans le même esprit? Qu'est-ce qui pourrait les caractériser par rapport à d'autres façons d'enseigner sur le même sujet ?

4) Au cours de ces activités, vous est-il arrivé de vous imposer des contraintes qui n'avaient pas été explicitement énoncées?

5) Pour chacun des problèmes posés lors de ces activités, essayez de retrouver les différentes procédures de résolution. qui sont apparues. Ces procédures étaient-elles conditionnées par la façon dont le problème était posé? Imaginez des "variations" de ces problèmes qui auraient entraîné d'autres modes de résolution.

6) Comment avez-vous su si votre travail était réussi ou non? Par une appréciation extérieure ou par vous-mêmes? comment?

Le débat autour de ces questions donne un support pour les notions de "problème", "situation d'apprentissage", procédures de résolution", "variables didactiques", " validation" "institutionnalisation", "contrat didactique", "connaissances outils/ connaissances objets".

Très rapidement viennent se greffer des questions liées à la transposition à l'école: "Peut-on faire ça dans sa classe? ou du moins travailler de façon analogue? Ne serait-ce pas coûteux en temps et difficile à mettre en œuvre ? " et ce travail est parfois perçu plus en tant que nouvelle norme de méthode d'enseignement ("il nous montre comment il faut faire") qu'en tant que moyen de s'approprier des instruments d'analyse.

III - ÉTUDE DE MANUELS SUR LES QUADRILATÈRES

Suivant les cas, j'ai proposé des extraits de manuels de CEl sur le thème "carré, rectangle" ou des extraits de manuels de CM2 sur le thème "quadrilatères particuliers".

Modalités de travail

- lecture individuelle de chacun des extraits
- étude par groupes du questionnaire proposé
- mise en commun

Questionnaire proposé

- Quelles sont, pour chacun des extraits. les connaissances et compétences auxquelles il est fait référence ?

- Y a-t-il des cas où les auteurs prévoient que l'apprentissage s'effectue à partir de problèmes que les enfants doivent résoudre?

- Dans ces cas, énoncer les problèmes et préciser les procédures de résolution qu'on peut attendre des enfants ainsi que les variables didactiques de la situation.

- Comment peut être envisagée dans chaque cas !a validation du travail des enfants ?

- Quel est chaque fois le savoir institutionnalisé ? A quel moment ?

- Pour autant qu'on puisse en juger sur cette documentation parcellaire, voyez-vous des différences, entre les différents manuels, dans les conceptions sous-jacentes de l'apprentissage ?

- Comment envisageriez-vous une ou plusieurs séquences sur le même thème, au même niveau ?

Extraits utilisés[1]

- *"Mathématique contemporaine CE1"* Thirioux (Magnard, 1975) p. 136-137

- *"Autour du carré à partir du cube"* (séquence R.T.S. – CE1 -juin 1975)

---

[1] NDLR : ce sont les manuels scolaires utilisés à cette époque dans les classes.

- *"Vivre les mathématiques CE1"* Jardy... (A.C. Bourrelier 1986) p. 77

- *"Objectif calcul CE1"* Clavier... (Hatier 1988) p.183-184

- *"L'Univers Mathématique CE1 "* Goergler... (L'école 1979) p.236-237

IV - ÉTUDE DE MANUELS SUR LES TRIANGLES

Modalité de travail
Travail écrit individuel
Les étudiants disposent du questionnaire et des extraits indiqués ci-dessous.

Questionnaire

1) Les triangles particuliers auxquels on s'intéresse généralement sont

> *- les triangles **isocèles**" (qu'on peut caractériser par l'égalité d'au moins 2 côtés)*
> *- les triangles "**réguliers**" dits "**équilatéraux**" (qu'on peut caractériser par l'égalité des 3 côtés)*
> *- les triangles "**rectangles**" (qu'on peut caractériser par la présence d un angle droit).*

Réalisez un schéma analogue à celui réalisé pour les quadrilatères, mettant en évidence ces différentes catégories et leurs éventuels recoupements.

2) Vous trouverez ci-joints 4 extraits de manuels de CM2 concernant l'étude des triangles.

a) Pour chacun d'eux, quels sont les connaissances et les savoir-faire auxquels il est fait référence ? Quelles remarques vous inspirent les propositions des différents auteurs ?

b) En vous inspirant ou non de ces extraits, donnez des exemples de situations-problèmes qui vous paraissent pertinentes pour un apprentissage sur les triangles avec des enfants de CM2

c) Développez l'un ou l'autre de ces exemples dans la perspective d'une mise en oeuvre dans une classe. en précisant vos choix didactiques.

Exploitation

Lors d'une séance ultérieure, nous sommes revenus sur ce travail à partir d'un document que j'ai proposé, apportant des éléments de réponse aux questions précédentes.

Extraits utilisés[2]

- *"Math et calcul* CM2" Eiller (Hachette 1988) p. 154-155

-*"Objectif calcul* CM2"Clavier... (Hachette 1988) p. 44-45

- *"La mathématique a*u CM1 et2"Caparros (Bordas 1981) p. 110.111

- "Maths CM2 - Calcul et géométrie" Chapuis (Nathan 1989) p. 54-55

[2] NDLR : ce sont les manuels scolaires utilisés à cette époque dans les classes.

Assemblages de triangles équilatéraux

Catherine Houdement - Marie-Lise Peltier

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Cahors 1991.

Il s'agit d'une activité à proposer en formation initiale ou continue à des professeurs d'école pour traiter de questions géométriques relatives aux polygones, à la symétrie axiale et à la symétrie centrale et de questions de mesure relatives à l'aire et au périmètre de figures planes. Cette situation permet par homologie de réfléchir à la construction d'une séquence d'apprentissage pour des élèves de cycle 3. Cette situation a été initiée par Cécile Véron, ancien professeur d'école normale à Rouen et intègre un prolongement en logo sur l'idée de Sylviane Dupuis-Cogens, IEN à Neufchâtel en Bray

1- OBJECTIFS

a) Objectifs mathématiques

- Sans rappel préalable, réactiver les connaissances des étudiants ou stagiaires sur polygone, aire, périmètre, convexité, symétrie axiale, symétrie centrale.

- Illustrer l'émergence d'une propriété mathématique par le tri entre objets ayant cette propriété et objets ne l'ayant pas.

b) Objectifs didactiques

- Montrer une utilisation première du travail de groupe : échange et confrontation en vue de la constitution d'un matériel de travail commun.

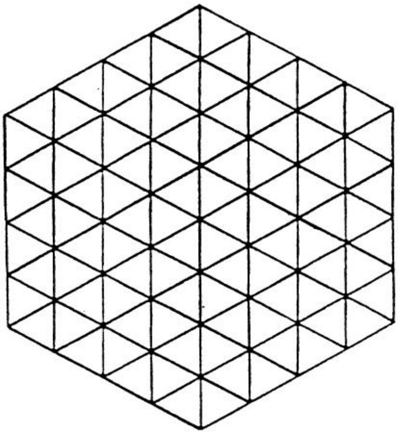
- Pointer la notion de cadre dans l'exploitation faite des classements : cadre numérique (dénombrement, mesure) et cadre géométrique.

2- ACTIVITE 1

But : constitution d'un stock de figures planes obtenues par assemblages de triangles équilatéraux.

Organisation : jeu à deux.

Matériel pour chaque groupe de deux
- Grille hexagonale de 96 triangles équilatéraux de côté 3 cm
- Dés à jouer classiques
- Crayons de couleur
- Ciseaux



a) Phase 1

Consigne 1

"Vous disposez pour deux d'une grille constituée de cases triangulaires. Vous décidez par un jet de dé le joueur qui va commencer; puis alternativement vous lancez le dé et vous coloriez autant de cases adjacentes que le nombre de points indiqué sur le dé, en essayant de faire le maximum d'assemblages différents. Si vous ne pouvez pas jouer, vous passez votre tour.
Des assemblages adjacents obtenus par des jets de dés différents doivent être de couleurs différentes. Si vous ne pouvez pas jouer, vous passez votre tour.
Le gagnant de cette phase est celui qui finit le premier le coloriage de la grille."

Remarques

1 - Le professeur peut demander aux joueurs de remplir une feuille de route avec les points tirés par chacun en cochant ceux qui n'ont pas pu être joués, ceci afin de permettre une vérification en fin de partie.

2 - Il peut également demander aux joueurs de mettre un signe de reconnaissance sur les assemblages qu'ils ont eux-mêmes coloriés (par le choix de couleurs attribuées à chacun par exemple).

3 - On observe différentes stratégies chez les étudiants ou stagiaires : certains partent d'un bord, d'autres du centre; certains collaborent, d'autres jouent de façon dispersée jusqu'au moment où ils constatent que cette stratégie est bloquante pour les deux joueurs.

b) Phase 2

Objectif
Distinguer la superposition sans retournement (nous dirons "mêmes formes" pour désigner des formes directement superposables) de la superposition après

retournement (nous parlerons alors de "formes symétriques" ou de formes “ jumelles ”).

Consigne 2

"Lorsque la grille est complètement coloriée, vous découpez les différents assemblages et vous gardez un seul exemplaire de chaque assemblage (deux assemblages qui ne sont superposables qu'après retournement sont considérés comme distincts).
Le groupe gagnant de cette phase est celui qui a obtenu le maximum d'assemblages différents ”.

Remarque

Dans cette phase, le fait que les assemblages aient été coloriés facilite la distinction entre superpositions directes et superpositions après retournement.

c) Phase 3

Objectifs
- Réinvestir l'analyse précédente : distinction entre “ mêmes formes ” et formes symétriques.
- Augmenter le stock de formes.

Consigne 3
"Par groupes de 4 (puis de 8), vous comparez les formes obtenues et vous ne conservez qu’un seul exemplaire de chaque sorte."

Remarque

A l'issue de cette phase, le professeur peut comptabiliser le nombre d'assemblages distincts de chaque groupe. Il peut également demander à chaque groupe de constituer un deuxième jeu pour avoir plus de matériel par la suite.

Il est intéressant de pointer le fait qu'à chaque regroupement le nombre d'assemblages distincts augmente, mais la recherche exhaustive de tous les assemblages possibles n'est pas un but de l'activité.

3- ACTIVITE 2

But
Faire émerger un certain nombre de propriétés des assemblages obtenus.

a) Déroulement

Matériel
Le jeu de pièces obtenues lors de la consigne 3

Organisation
Par groupes de quatre (ou de huit)

Consigne

"Avec le jeu de pièces que vous avez obtenues précédemment, vous allez proposer divers classements de ces pièces en essayant de préciser le critère qui vous permet de réaliser ce classement.
Dans chaque groupe, un secrétaire note les critères retenus et les classements correspondants."

Remarque

Le professeur précise les conditions requises pour qu'il s'agisse d'un classement effectif.

Mise en commun

Chaque groupe vient présenter les classements réalisés.

b) Les divers classements : analyse et exploitation en termes de propriétés mathématiques

1) Le **classement par le nombre de triangles** constituant l'assemblage permet de pointer la notion d'aire (si on choisit le triangle de base comme unité d'aire, la mesure de l'aire de l'assemblage est le nombre de triangles utilisés).

2) Le **classement par le nombre de côtés** permet de préciser l'origine du vocabulaire lié aux polygones, de l'associer au classement par le nombre de sommets et de rappeler la propriété : pour les polygones, le nombre de sommets est égal au nombre de côtés.

3) Le **classement par le nombre de côtés de triangles de base** dans le contour de l'assemblage permet de pointer la notion de périmètre et notamment de différencier numériquement les notions de périmètre et d'aire. On constate en effet que deux assemblages peuvent avoir même périmètre sans avoir la même aire, d'où une nouvelle question : peut-on trouver des assemblages ayant même aire et des périmètres différents, des assemblages ayant même aire, même périmètre mais de formes différentes ?

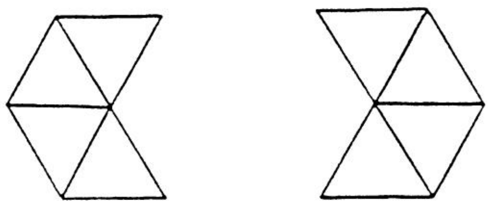
4) Le lot d'assemblages comporte toujours des **figures superposables** non pas directement, mais **après retournement**. Deux telles figures seront désignées par la suite par l'expression "figures jumelles".
Le classement des assemblages selon l'existence ou non de figures jumelles est retravaillé collectivement même s'il n'est pas proposé par les différents groupes.

Consigne

"Dans chaque groupe, vous effectuez le classement en deux classes : figures ayant leur jumelle et les autres; et pour chaque figure n'ayant pas de jumelle dans le stock de vos pièces, cherchez s'il est possible de construire sa jumelle."

Constats

- Deux figures jumelles se superposent seulement après retournement.
Ceci n'est pas évident pour tous les étudiants ou stagiaires ; par exemple, les deux assemblages ci-dessous leur paraissent jumeaux alors qu'ils se superposent sans retournement.



- Lorsque deux figures sont jumelles, on peut les positionner dans le plan de telle sorte qu'il existe une symétrie axiale transformant la première en la seconde (et vice-versa).

- Certaines figures n'admettent pas de jumelle.

Consigne

"Dégagez les particularités des figures n'admettant pas de figure jumelle."

Il s'agit ici de dégager la notion d'axe de symétrie : les figures n'ayant pas de jumelles admettent au moins un axe de symétrie.

5) Cette phase peut être prolongée par un **classement suivant le nombre d'axes de symétrie.**

6) **Autres classements**, proposés ou imposés :
- figures convexes, figures non convexes ;
- figures ayant un centre de symétrie (elles coïncident exactement avec leur empreinte après un demi-tour), mise en relation avec la parité du nombre d'axes de symétrie ;
- assemblages réalisant ou non un patron de solide (tri par anticipation, validation éventuelle par construction).

c) L'institutionnalisation choisie

- La symétrie axiale

Notion d'axe de symétrie, notion d'invariant (figures ayant des axes de symétrie), aspect *statique* de la symétrie axiale.

Notion de transformation (figures se déduisant l'une de l'autre par symétrie axiale), aspect *dynamique* de la symétrie axiale..

Mise en relation de ces deux aspects : une figure possède un axe de symétrie **d** si et seulement si elle est invariante par symétrie axiale d'axe **d**.

- Lien avec la symétrie centrale.

d) Petite analyse didactique

- L'aspect ludique de la phase 1 permet une entrée rapide dans la tâche d'analyse des figures obtenues.
- La construction du matériel par les étudiants ou les stagiaires au cours du jeu permet une appropriation rapide des propriétés des figures obtenues.
- La mobilité des figures étudiées permet de dégager les propriétés intrinsèques des figures indépendamment de leur orientation dans le plan.
- Les activités de classement dichotomique ont pour but l'émergence de certains concepts (convexité, existence d'axes de symétrie...). On retrouve ici un point de vue piagétien de l'émergence de certains concepts.
- Le matériel se prête bien à une distinction aire périmètre des figures planes et permet de pointer l'importance du choix des unités de mesure pour effectuer des comparaisons.

L'étude a posteriori du déroulement de la séance permet de pointer les différents rôles des phases d'action, de formulation, d'institutionnalisation dans un processus d'apprentissage.

e) Travail individuel

- **Rédiger une fiche de préparation** pour une activité pour des élèves à partir d'assemblages de figures (carrés, triangles rectangles isocèles ou triangles équilatéraux).

- **Construire un jeu de cartes** permettant un travail de reconnaissance de formes à partir des assemblages obtenus (le jeu est constitué d'assemblages jumeaux dans des positions variées et d'un assemblage n'ayant pas de jumeau). Proposer diverses règles du jeu (jeu de mariage, mémory, jeu de l'intrus ou du pouilleux, etc.).

4 - ACTIVITE 3

Prolongements possibles avec LOGO
(Ce prolongement a été mis au point après un échange avec Sylvianne Dupuis – Cogens)

Objectifs
- Etude de triangles réguliers ; propriétés angulaires.
- Comparaison d'unités de longueur.

Reproduction d'assemblages à l'écran

- En mode direct avec les primitives usuelles.
- En mode direct avec la primitive “ triangle régulier ” .
- En mode programme avec deux options :
    - le professeur impose le côté du triangle-écran en pas de tortue;
    - le professeur demande un triangle-écran superposable au triangle du jeu. On pourra ensuite dans ce cas proposer une étude des périmètres des différents assemblages en fonction de l'unité de longueur choisie : côté de triangle équilatéral, centimètre, pas de tortue, et pointer la proportionnalité entre les différentes mesures obtenues.

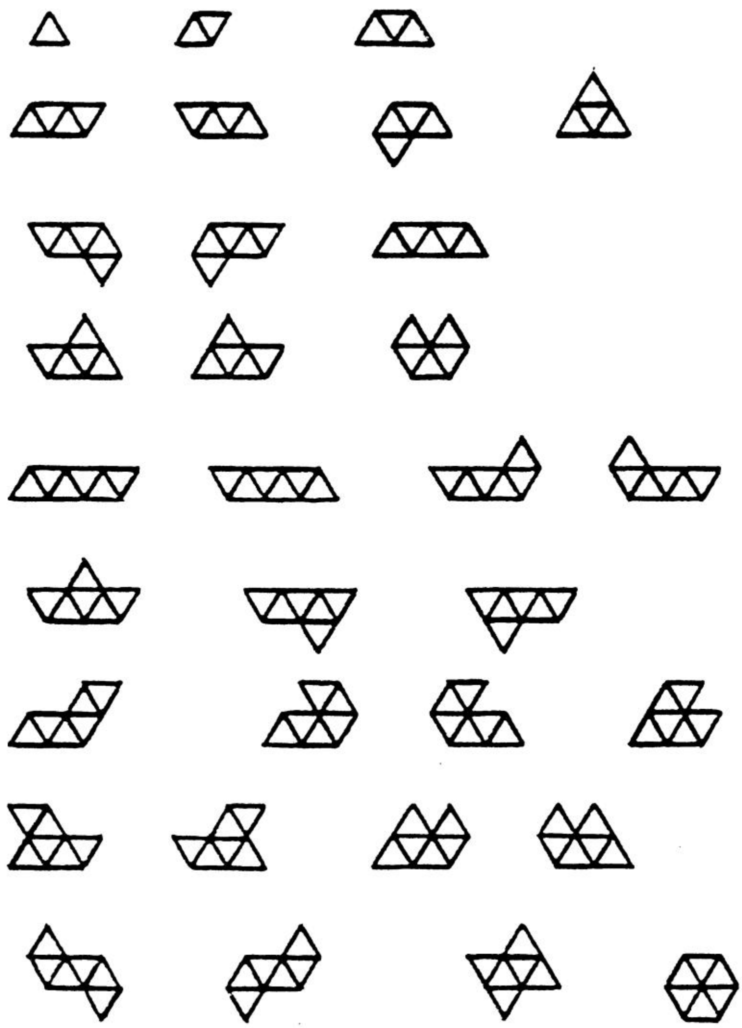
Fabrication d'assemblages

- Avec contrainte de périmètre.
- Avec contrainte d'aire.

Travail individuel

Construction d’une situation de classe présentant une démarche analogue.

Recensement des différents assemblages pouvant être obtenus



« Le napperon » Un problème pour travailler sur la symétrie axiale

Marie-Lise Peltier

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Besançon, mars 1997. Reprise également d'un article publié dans la revue grand N(n° 68 en 2000-2001).

Cet article relate une situation de formation initiale ou continue de professeurs d'école. Il présente une situation de formation de type homologie transposition en PE2 ayant pour bu d'initialiser un cours sur la symétrie axiale et de conduire *les stagiaires à réfléchir sur la notion de problème en géométrie à l'école élémentaire.*

Introduction

Les instructions officielles de l'école primaire mettent l'accent sur le rôle de la résolution de problèmes dans l'apprentissage des mathématiques. Mais si dans le domaine numérique les professeurs stagiaires se sentent généralement à même de construire ou de choisir des problèmes permettant aux élèves de développer une réelle activité intellectuelle et de construire certaines connaissances, il leur est souvent plus difficile d'envisager en géométrie une activité qui puisse être un "problème" pour les élèves. Pour nombreux d'entre eux, les problèmes en géométrie sont liés à la notion de démonstration, et relèvent donc du collège. L'enseignement de la géométrie à l'école leur paraît souvent proche de la "leçon de chose", c'est à dire une succession de séances où il s'agit d'introduire du vocabulaire, de donner quelques définitions, de faire "manipuler" les élèves.

La situation de formation présentée ici fait intervenir la notion de symétrie axiale comme réponse à un problème et permet de mettre en avant :
- le rôle de l'anticipation : il est nécessaire de faire des hypothèses, d'anticiper l'action, avant de l'exécuter ;
- le rôle de la manipulation : ici la manipulation est support pour l'anticipation.

Elle a donc pour objectifs de permettre aux stagiaires PE2 ou aux professeurs d'école en formation continue de mener une réflexion sur les problèmes tout en revisitant la notion de symétrie axiale dans le plan et quelques unes de ses propriétés. Dans l'analyse didactique de la séance, la réflexion porte aussi sur le rôle de l'erreur dans la situation, sur la notion de théorème en acte, sur la validation.

Description de l'activité

Les stagiaires doivent reproduire un "napperon" en papier qui est affiché au tableau. Il est précisé que ce napperon doit être réalisé en pliant une feuille de papier et en découpant tout ce que l'on souhaite, puis de déplier et de comparer avec le modèle. Une contrainte est imposée : les stagiaires doivent effectuer tous les pliages souhaités avant de découper puis tous les découpages souhaités avant de déplier le napperon.

1. Analyse préalable

1.1. Les variables de la situation

Le choix des découpes du napperon est très important. En fonction de ce choix, la réflexion pourra être centrée :
- sur les positions relatives des différentes découpes et sur des questions d'orientation
- sur la forme des découpes : celles-ci peuvent être choisies de telle sorte que l'exécutant utilise implicitement des "théorèmes en acte"[1] relatifs à l'existence d'axe(s) de symétrie dans certaines figures pour obtenir le résultat souhaité. Par exemple pour obtenir une découpe ayant la forme d'un triangle isocèle, on coupe perpendiculairement au pli, ce qui revient à appliquer la propriété suivante "dans un triangle isocèle l'axe de symétrie est également hauteur".

Le nombre d'axes de symétrie du napperon est également une variable à étudier (Annexe1).

- Un seul axe rend la tâche trop aisée pour être proposée en formation (exemple 1)
- Le choix de deux axes est intéressant dans la mesure où le degré de complexité est raisonnable et le temps est assez facile à gérer (exemples 2, 3)
- Le cas de 4 axes, également intéressant, peut être choisi pour travailler sur les axes de symétrie des polygones usuels. (exemples 4, 5, 6, 7).
-Celui de 6 axes (exemple 8) nécessite un pliage en trois qui permet de proposer la situation en tant que prolongement aux stagiaires les plus rapides.

Le fait de laisser apparents ou non les plis du modèle, d'introduire des plis parasites, ou de les supprimer complètement peut avoir une incidence sur les stratégies des stagiaires dans la mesure où ils sont des indices pertinents ou non à prendre en compte.

Une photocopie du modèle pour chaque stagiaire est souhaitable de manière à permettre une analyse individuelle précise, mais cette reproduction du modèle doit être de dimension différente de celle des feuilles qui seront distribuées pour

[1] Notion empruntée à G.VERGNAUD

être découpées afin d'éviter le recours au décalquage des découpes sur le modèle.

1.2. Les critères de conformité au modèle

Les réalisations seront considérées comme conformes au modèle lorsque les éléments suivants auront été respectés :

le nombre de pliage
le nombre de découpes
la forme[2] des découpes
les positions relatives des différentes découpes
l'orientation des découpes.

1.3. Les procédures envisageables

- Identification du nombre d'axes de symétrie et réalisation des pliages associés, repérage des éléments à découper,
- Pliage en deux quel que soit le nombre d'axes de symétrie et reproduction des découpes sur ce pliage en deux,
- Pliage en deux ou en quatre puis reproduction par découpage sur le papier ainsi plié de toutes les découpes du modèle complet,
-Pliage en deux ou en quatre , découpages de certaines parties, dépliage et rectification sur la feuille dépliée.

1.4. La validation

La validation se fait par confrontation visuelle au modèle. Bien évidemment les réalisations obtenues ne sont pas superposables au modèle. Ce qui doit être respecté, comme il a été indiqué ci-dessus, ce sont les formes géométriques des découpes, leur nombre, leurs positions relatives, leur orientation.
Il est nécessaire de proposer des modèles tels que les stagiaires puissent décider tout seuls s'ils ont ou non réussi, il est donc important que les erreurs éventuelles soient visibles et pour cela il importe de choisir des napperons avec des découpes de formes différentes et en nombre différent sur chacun des axes et sur deux côtés consécutifs du carré.

1.5. La prise en compte des essais et des erreurs

Les essais erronés sont intéressants à conserver. Ils ont plusieurs fonctions.
- La première, tout à fait fondamentale, est de permettre à son auteur de mener une réflexion et une analyse fine des effets d'un découpage sur un papier plié en 2, en 4, ou en 6. L'erreur peut alors être un point de départ pour affiner la ré-

[2] La notion de forme d'une découpe est délicate. Pour les stagiaires, c'est la forme au sens euclidien qui devra âtre conservée, ainsi par exemple les quadrilatères et les triangles particuliers devront être reproduits comme tels, les alignements devront être respectés, c'est la raison pour laquelle il est souhaitable que les stagiaires disposent d'un modèle individuel pour pouvoir l'analyser..

flexion : en analysant l'effet de telle découpe sur le papier déplié, le stagiaire fera des hypothèses sur les modifications à effectuer pour obtenir le résultat souhaité[3]. L'erreur acquiert ainsi un statut positif, voisin du statut qu'elle a dans la recherche.
-Une seconde fonction provient du fait que chaque réalisation, ayant été obtenue, par pliage admettra au moins un axe de symétrie. Il sera donc possible dans une seconde partie de travail de mettre en évidence les axes de symétrie des différents napperons, de faire des constats sur le motif minimum à conserver dans chaque cas pour obtenir le napperon complet en appliquant à ce motif les symétries axiales mises en évidence.

1.6. La synthèse et l'institutionnalisation

La synthèse portera à la fois sur les aspects mathématiques et didactiques :

- la notion d'axe(s) de symétrie d'une figure plane ;
- les axes de symétrie de figures usuelles (triangles, isocèles, losange, rectangle, orthogone, carré, demi cercle, cercle etc. ;
- La notion de centre de symétrie dans le cas d'un nombre pair d'axes de symétrie ;

ainsi que sur les notions didactiques de variables, dévolution, théorème en actes, validation, institutionnalisation.

2. Déroulement de la séance

Sur le plan matériel, il est important de prévoir :
- deux modèles grand format du napperon pour le tableau afin de pouvoir plier et manipuler l'un d'eux lors des mises en commun,
- des modèles individuels comme il a été indiqué au paragraphe 1.1,
- de nombreuses feuilles de papier aux dimensions souhaitées pour la réalisation des napperons (dimensions différentes de celles des modèles individuels),
- un ou plusieurs napperons supplémentaires plus complexes pour gérer le temps (napperons présentant davantage de découpes, éventuellement plus d'axes de symétrie pour les stagiaires rapides),
- des paires de ciseaux pour chaque stagiaire.

2.1. Phase de recherche

Un "napperon" est affiché au tableau (cf. annexe 1).
Consigne :
Vous devez reproduire le napperon qui est affiché. Pour cela vous devez effectuer tous les pliages que vous jugez nécessaires, puis, sans déplier, vous devez

[3] Ainsi par exemple, si un stagiaire effectue une découpe en forme de demi cercle sur un bord du papier plié en quatre au lieu de l'effectuer sur un pli, il constate en ouvrant qu'il n'obtient pas les cercles souhaités mais des demi cercles sur les bords du napperon. Lors de l'essai suivant le stagiaire prend en compte la position du cercle à découper par rapport au pli effectué donc à l'axe de symétrie concerné.

effectuer tous les découpages que vous jugez nécessaires, enfin vous déplierez et comparerez votre réalisation avec le modèle. S'il y a conformité, vous avez "gagné", sinon, vous conservez votre réalisation, sans la froisser, sans la jeter, pour pouvoir l'étudier et vous recommencez avec un autre papier.

Les critères de réussite sont précisés :
Un napperon sera considéré comme "conforme" au modèle si les formes géométriques des découpes sont respectées ainsi que leur nombre, leurs positions relatives, leur orientation.

Après un temps de recherche, on constate que les stratégies sont nombreuses et variées :
- certains identifient rapidement le nombre d'axes de symétrie et font des pliages en conséquence
- d'autres plient seulement en deux et essaient de reproduire les découpes sur ce pliage en deux
- d'autres sont encore plus déroutés et effectuent un premier pliage en deux ou quatre, découpent certaines parties ouvrent et oubliant la contrainte imposée par la consigne, complètent les découpages sur la feuille dépliée.

Dans tous les cas, on peut noter une attention soutenue.
Lors du dépliage, les stagiaires peuvent être très surpris des résultats obtenus car leur napperon est souvent extrêmement différent du modèle. Les erreurs peuvent porter sur la forme des découpes, leur nombre, leurs positions relatives, leur orientation.

La validation se fait individuellement par confrontation au modèle en s'appuyant sur les critères de réussite définis précédemment.
La quasi totalité des stagiaires n'a aucune difficulté à effectuer correctement cette comparaison individuelle avec le modèle. Il se peut cependant qu'un ou deux stagiaires croient, à tort, avoir réussi. Un questionnement dirigé du formateur permet généralement à la personne concernée de prendre conscience de ce qui ne convient pas. Dans certains cas, il est nécessaire que le formateur attire l'attention d'un stagiaire sur certaines “ erreurs ” de sa réalisation en particulier pour les questions d'orientation ou les questions de positions relatives.
Généralement au premier essai peu de stagiaires réussissent la tâche. Après constat de la non conformité au modèle, la majorité des stagiaires reprennent le premier essai, le replient, l'ouvrent plusieurs fois, avant d'effectuer pliages et découpes sur la nouvelle feuille. Les erreurs sont donc ici analysées pour être dépassées.
Le nombre d'essais avant l'obtention d'une réalisation conforme au modèle est très variable suivant les stagiaires. Quelques uns réussissent du premier coup, dans ce cas le formateur leur donne individuellement un autre napperon plus complexe à reproduire pour permettre aux autres stagiaires de terminer l'activité. Pour d'autres, plusieurs essais sont nécessaires pour que le résultat soit jugé satisfaisant par son auteur.

2.2. Mise en commun des productions et des stratégies

Lorsque la totalité des stagiaires a obtenu un résultat satisfaisant, le professeur propose une mise en commun des différentes stratégies utilisées, qu'elles aient abouti ou non, et des productions correspondantes (le professeur prend soin de choisir des productions erronées qui relèvent de types différents[4]).
Lors de cette mise en commun, les stagiaires proposent généralement deux types de stratégies :

- Repérer les axes de symétries, déterminer un domaine fondamental dans lequel se trouve le motif minimum, déterminer le pliage à effectuer pour obtenir ce domaine fondamental, positionner le papier plié de manière à pouvoir exécuter les découpes en fonction du motif identifié dans le domaine fondamental. Cette stratégie est efficace et experte, elle est proposée par les stagiaires avec des formulations diverses.
- Identifier les découpes qui se répètent, plier en fonction du nombre de répétition, découper des moitiés ou des quarts de motifs à partir de l'analyse des répétitions. Cette stratégie peut être efficace, mais dans de nombreux cas, les stagiaires ont tellement fait tourner le papier plié que les découpes qui devraient se trouver au centre se trouvent sur les bords et vice versa.

Les productions correspondantes sont étudiées collectivement. Pour celles qui ne sont pas conformes au modèle les erreurs sont repérées et analysées (nombre de découpes, place des découpes, position relatives, forme, orientation).

2.3. Synthèse

Point de vue mathématique

Notion d’axe de symétrie d’une figure plane.
Eléments de symétrie des figures usuelles (triangle isocèle, losange, rectangle, carré, demi cercle, cercle, etc.)
Lien entre symétrie axiale et symétrie centrale : lorsqu'une figure admet deux axes de symétrie et deux seulement, ces axes sont perpendiculaires et leur point commun est un centre de symétrie de la figure.

[4] Le professeur choisit des napperons qui ont été abandonnés parce que considérés comme non conformes par leurs auteurs, éventuellement des napperons que leurs auteurs considèrent à tort comme conformes. Il est souhaitable de présenter au débat des napperons ne présentant pas le nombre d'axes de symétrie requis, des napperons ne présentant pas le nombre correct de découpes, des napperons présentant des inversions dans les positions relatives des découpes, des orientations erronées, de manière à ce que l'analyse menée sur ces réalisations conduise à mettre en évidence les différents critères de conformité au modèle. On trouvera en annexe 2 des exemples de napperons réalisés par des stagiaires ayant été affichés pour la mise en commun lors de la réalisation du modèle n°3.

Point de vue didactique

Le rôle de l'anticipation : l'anticipation est nécessaire pour répondre à la consigne et effectuer le découpage demandé.

Le rôle de l'erreur : dans cette situation, le rôle positif de l'erreur est mis en évidence : en effet, c'est bien souvent en analysant une production erronée qu'il est possible de prévoir ce qu'il faudrait faire pour obtenir tel ou tel résultat.

La validation : elle est ici en partie à la charge du stagiaire

La notion de théorème en acte. Donnons deux exemples.
Pour obtenir une découpe ayant la forme d'un triangle isocèle, le stagiaire découpe perpendiculairement au pli. Il utilise ici en acte une propriété relative au triangle isocèle : “ l'axe de symétrie d'un triangle isocèle est également hauteur du triangle ”
Pour obtenir un carré à partir d'un pliage en quatre, le stagiaire découpe en formant un angle de 45°, il utilise ici implicitement la propriété relative au carré : “ les diagonales du carré sont axes de symétrie et bissectrices des angles ”.

Le rôle des manipulations en géométrie. Il est clair que pour la majorité des stagiaires que les manipulations en géométrie ont pour rôle de permettre aux élèves de se constituer un lot d'expériences. Il est nécessaire de rappeler cependant que ces expériences ne pourront être mobilisées que si elles ont été décrites au moment de l'action et surtout évoquées après avoir été menées, de manière différée et sans retour à la manipulation. Mais les manipulations ont d'autres fonctions qu'il est nécessaire de mettre en avant : elles peuvent servir de support à l'anticipation, ce qui est le cas dans cette situation du napperon, elles peuvent également permettre une forme de validation pragmatique à l'école élémentaire.

La gestion du temps : le temps pour réaliser correctement la tâche est très variable. Il est donc nécessaire de prévoir des prolongements, ici d'autres napperons, pour les plus rapides afin de gérer convenablement le temps de la séance et l'hétérogénéité du groupe.

Transfert à l'école élémentaire

Une adaptation de cette situation est envisagée pour des élèves de classes de cycle 2 et 3.
L'article publié dans grand N n° 68 (2000-2001) est distribué.
Le rôle des variables didactiques est alors mis en avant.
L'activité des élèves au cours de cette situation est étudiée.
Une première phase de manipulation libre permettant l'entrée dans l'activité est nécessaire pour pouvoir dévoluer la tâche de reproduction aux élèves. Dans cette phase d'accumulation d'expériences, la main travaille, mais l'esprit est peu sollicité. Au moment de l'observation de leurs réalisations, certains élèves peuvent

développer une activité de pensée en cherchant à justifier les constats qu'ils peuvent faire, mais cette activité n'est pas à proprement parlée requise pour réaliser la tâche demandée.
Dans la deuxième phase, lorsqu'il s'agit de reproduire le modèle, l'esprit est mobilisé en même temps que la main. L'enfant développe une réelle activité cognitive, il anticipe son action, il la prévoit, la manipulation sert à réaliser matériellement cette anticipation et à la valider. C'est dans cette deuxième phase que l'on peut parler d'activité mathématique.
Pour prendre tout son sens dans une progression sur la symétrie axiale, la situation présentée ici, devra être adaptée à la classe dans laquelle elle sera proposée et devra bien sûr être suivie de nombreux exercices d'entraînement et de nouveaux problèmes avant de donner lieu à des exercices d'évaluation qu'il sera d'ailleurs judicieux de différer dans le temps. Ce n'est pas en effet après une seule rencontre avec une notion qu'il est possible de savoir si les élèves se sont approprié certaines propriétés de cette notion. Il faudra de même attendre que d'autres notions aient été étudiées, pour évaluer la capacité des élèves à reconnaître par eux-mêmes des situations relevant de la symétrie axiale et à les traiter correctement.

Conclusion

Pour conclure cette séance, le formateur revient sur la notion de problème et sur l'activité mathématiques. Les point suivants sont mis en avant.
Faire des mathématiques, c'est résoudre des problèmes en développant un raisonnement. Pour que cette activité cognitive puisse avoir lieu le problème doit vérifier certaines caractéristiques[5] notamment les suivantes :
- **Le problème doit mettre en jeu la connaissance (la notion, la technique) dont l'apprentissage est visé**. Ici, une reproduction conforme au modèle du napperon nécessite la reconnaissance de l'existence d'un ou plusieurs axes de symétrie, et l'utilisation de ces axes comme droite de pliage.
- **Le problème doit être "consistant", c'est à dire que la réponse ne doit pas être évidente sinon ce serait simplement un exercice d'entraînement**. Dans l'activité proposée, c'est le choix du modèle pour le niveau de classe déterminé qui assurera la consistance.
- **L'élève doit pouvoir s'engager dans la résolution avec ses connaissances antérieures, mais il doit aussi avoir à chercher pour les adapter et les faire évoluer**. La phase initiale de manipulation libre permet aux élèves de s'engager dans la tâche de reproduction, mais les critères de conformité au modèle le conduisent à éprouver ses connaissances et éventuellement à les faire évoluer.
- **La validation doit être le plus possible à la charge de l'élève (on parle d'auto validation)**. Dans la situation du napperon, cette auto validation est assurée pour un grand nombre d'élèves. Mais pour certains autres élèves, le professeur

[5] Ces caractéristiques ont été mises en évidence par R. DOUADY, RDM.7.2. La pensée sauvage (1987).

devra jouer son rôle de médiateur en questionnant l'élève de manière à le guider vers les bonnes questions.
- **Le problème doit pouvoir servir de référence pour la notion et pour la classe**. Cet aspect me paraît très important à souligner. En effet, s'il est nécessaire de penser l'enseignement en prenant en compte l'hétérogénéité des élèves et en prévoyant de différencier certaines tâches, une différenciation a priori au moment où les élèves vont avoir à travailler sur une notion nouvelle (ou reprise d'une année antérieure), à construire certaines de ses propriétés ou à se les approprier, il serait très regrettable et dommageable d'exclure certains élèves des situations censées permettre de construire du sens et d'hypothéquer ainsi toutes possibilités ultérieures de faire appel à cette situation pour mobiliser la mémoire de tous les élèves. Par ailleurs, il me semble important que chaque élève ait à chaque fois "sa chance" sur l'étude d'une nouvelle notion et n'ait pas à subir son éventuelle image d'élève faible ou en difficulté[6] avant même d'avoir été confronté au problème posé.

Séance suivante

Cette séance est suivie d'une séance consacrée à des rappels mathématiques relatifs à la symétrie axiale dont les grandes lignes sont les suivantes.
Différents aspects de la symétrie axiale sont présentés :
➢ La symétrie axiale est une transformation ponctuelle qui transforme une figure en une autre figure, c'est une isométrie négative involutive (aspect dynamique)
➢ La symétrie axiale est une transformation ponctuelle ayant de nombreux invariants (point de vue statique) ce qui pédagogiquement correspond à la recherche des axes de symétrie des figures usuelles.

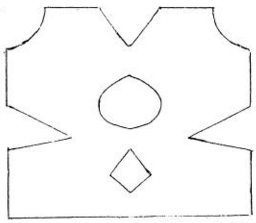
Sur le plan didactique, le formateur met en évidence le rôle de l'analyse mathématique pour concevoir une progression sur la symétrie axiale à l'école élémentaire, pour envisager les situations et les matériels favorisant les changements de points de vue statique et dynamique, le passage du global au local, etc.

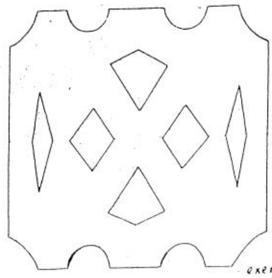
La séquence de formation sur le thème de la symétrie se termine par l'étude de quelques pages de manuels. Cette étude est focalisée sur un point précis, Par exemple l'étude de l'introduction de la notion dans différents manuels à un niveau donné, ou bien l'analyse de la progression sur le cycle 3 dans les manuels d'une même collection, ou encore l'analyse des résumés ou aide mémoire pour repérer ce qui est institutionnalisé dans un ou plusieurs manuels, etc.

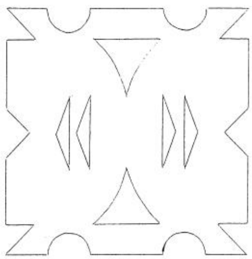
[6] "L'effet Pygmalion" a été mis en évidence par plusieurs chercheurs, notamment ROSENTHAL et JACOBSON (1975). Les prédictions négatives des enseignants sur certains de leurs élèves se vérifieraient d'autant plus qu'elles seraient "attendues" et par certains aspects construites par les enseignants eux-mêmes. On pourraient dire que certains enfants se conformeraient à l'image que l'enseignant leur renvoie.

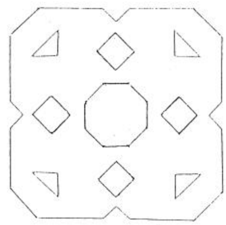
Dans certains cas, ce travail sur la symétrie axiale peut être repris dans le cadre d’un module optionnel “ arts et mathématiques ” consacré à l’étude des dessins à motifs répétitifs rosaces, frises, pavages dans les arts graphiques, plastiques ou dans l’architecture.

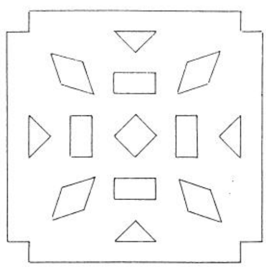
Annexe 1

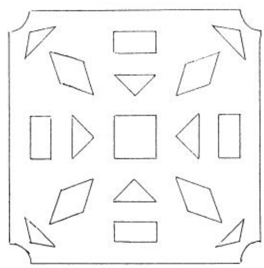

exemple 1

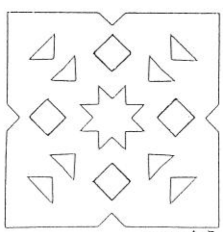

exemple 2


exemple 3


exemple 4

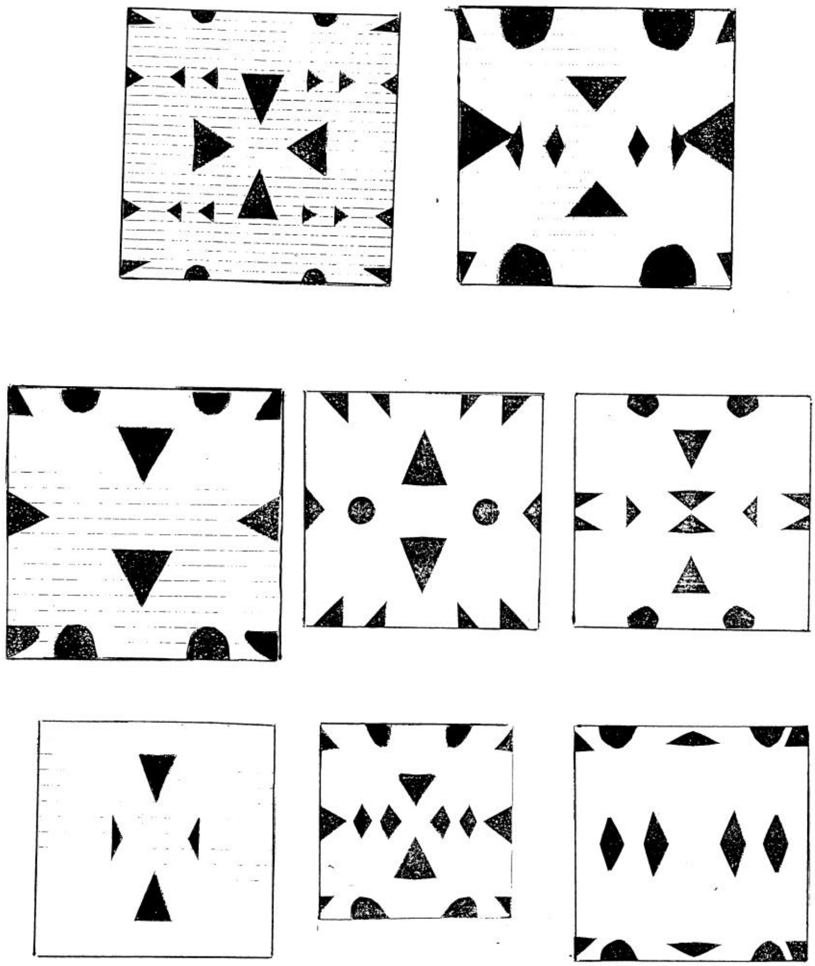

exemple 5


exemple 6


exemple 7


exemple 8

Annexe 2



Reproduction de figures géométriques

Hervé Péault

Extrait des actes du XVII ème colloque - Paris 1990

Cet article présente une séquence de formation initiale ou continue sur la reproduction de figures planes. Les activités proposées ont un double but :
- *réactiver les connaissances des étudiants ou stagiaires sur des propriétés de géométrie plane, en particulier sur le cercle.*
- *travailler un certain nombre de notions didactiques telles que analyse a priori, variables didactiques, et envisager la question de l'observation, de l'analyse d'erreur et de l'organisation de séances.*

1. Préparation de la première activité

Plusieurs jours avant la première séance, j'ai expliqué en quoi celle-ci consistait : une activité de reproduction d'une figure géométrique pour la moitié du groupe, l'autre moitié observant ceux qui reproduisent.

Les futurs observateurs ont alors reçu un exemplaire de la figure à reproduire et ma *fiche de préparation" (annexe1)* avec mon *"analyse a priori des procédures de résolution" (annexe2),* cette dernière conçue en partie en fonction de mes observations sur un groupe précédent.

Ils devaient étudier ces documents, s'assurer qu'ils les avaient bien compris, me demander des précisions le cas échéant.

2. Première activité

Le jour venu, je mène l'activité en essayant de me conformer à ce qui est indiqué sur la fiche.

Dans un premier temps, c'est une activité individuelle (chacun étant observé par un autre) suivie d'une mise en commun (c'est alors moi qui suis observé), et se termine par un exercice individuel d'évaluation.

Pendant que le demi-groupe effectue ce dernier exercice, chaque observateur doit rédiger un court compte-rendu mettant en évidence :

- la ou les procédures utilisées par la personne observée,
- les principales erreurs ou difficultés rencontrées,
- le degré de prise en compte de ces éléments lors de la mise en commun.

Il effectue ensuite avec la personne observée, le contrôle de la réussite à l'exercice*,* lui fait lire son compte-rendu, la personne observée pouvant, si elle le désire, ajouter des observations.

3. Deuxième activité

La séance suivante se déroule en échangeant acteurs et observateurs qui avaient eux aussi reçu au préalable ma « *fiche de préparation* » *(annexe 5).*

Il s'agit de reproduire une figure présentée au rétroprojecteur et sur laquelle figurent divers renseignements *(annexe 6).* Le déroulement est à peu près du même type.

A la réflexion, je pense qu'il serait préférable de procéder différemment pour mettre davantage l'accent sur la variable didactique *"indications données".*

On pourrait proposer la figure *"nue"* aux observateurs en leur demandant d'y porter des indications : suffisamment pour que la figure puisse être reproduite sans prise d'informations supplémentaires, mais avec peu d'indications déductibles d'autres. Ils devraient en plus prévoir comment pourrait s'y prendre la personne chargée de la reproduction.

Le jour dit, chaque observateur présenterait sa figure, le reproducteur ne devant pas y prendre d'autres informations.

On comparerait ensuite les renseignements proposés par chacun et les figures obtenues.

4. Prolongement

Après ces séances, je pose le problème suivant faisant l'objet d'une réflexion par petits groupes suivie d'une mise en commun : « *on veut faire reproduire une figure géométrique. Cherchez des variables sur lesquelles on peut jouer pour influer sur les procédures de résolution* » .

La mise en commun débouche sur le repérage de divers éléments :

- choix de la figure et de ses caractéristiques géométriques ;
- renseignements fournis (longueurs, angles, parallélisme, perpendicularité,...) ;
- accès au modèle (modèle non accessible ou modèle sur lequel il est possible de prendre des informations) ;
- outils autorisés ;
- échelle de reproduction demandée ;
- support de reproduction (papier blanc, quadrillé, planche à clous, assemblage de morceaux de puzzle, ordinateur..).

5. Dans les classes

Je distribue divers documents, notamment :
- le chapitre XI *"Reproduction de dessins*" des Aides pédagogiques CM de l'APMEP.
- la fiche "*Copie de dessins" de* F. Boule parue dans J.D.I. n°2 de novembre 1983.
- et bien sûr l'article de : M.L. Peltier et Y. Ducel paru dans le Bulletin 371 de l'A.P.M. de décembre 1989 : "*Géométrie* : *une approche par le dessin géométrique CM 2 - sixième*".

En général, nous terminons par la préparation et la réalisation dans les classes de séquences *"reproduction de figure géométrique*" dans un CE ou un CM.

ANNEXE 1

OBJECTIFS

Expliciter (ou réexpliciter...) les notions de médiatrice d'un segment, de tangente à un cercle, de cercle circonscrit à un polygone...

Utiliser ces notions dans la recherche de procédures de détermination du centre d'un cercle.

S'entraîner à une utilisation précise de l'équerre, la règle et le compas.

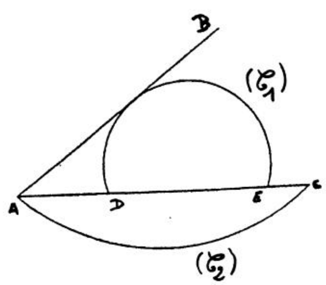
CHOIX DE LA SITUATION

Il s'agit d'un problème consistant à reproduire une figure ; la difficulté principale est de retrouver des centres de cercles.
Les caractéristiques de cette figure ont été choisies de façon à amener une diversité des procédures, certaines étant plus efficaces.

MATERIEL

- La figure ci-contre (agrandie) est proposée (sans les repérages avec les lettres) sur une feuille distribuée à chacun.

- Chacun dispose d'une feuille blanche, de crayons, d'une équerre, d'un compas et d'une règle non graduée, à l'exclusion de tous autres instruments.



CONSIGNE

"Vous devez reproduire le dessin sur votre feuille. Vous n'avez pas le droit de décalquer; par contre vous pouvez écrire ou rajouter des tracés sur la feuille où se trouve le dessin.

La copie obtenue devra être superposable à l'original, mais la vérification ne devra se faire que lorsque vous serez sûrs de vous. "

RECHERCHE

On peut penser que la détermination des divers points ne posera pas trop de problèmes. L'essentiel des difficultés réside dans la détermination des centres des cercles (C1) et (C2).

En cas de blocage, on pourra suggérer un tracé auxiliaire mais sans indiquer de méthode.

MISE EN COMMUN

On mettra en évidence les différentes procédures utilisées, les difficultés et les erreurs rencontrées. A cette occasion, on théorisera les outils apparus :

- notion de médiatrice d'un segment comme ensemble des points équidistants des extrémités et correspondant à la perpendiculaire au milieu du segment.
- notion de corde.
- notion de tangente à un cercle qu'on se contentera de définir ici comme la perpendiculaire à un rayon en un point du cercle.
- notion de cercle circonscrit à un polygone. On examinera en particulier le cas d'un triangle quelconque, d'un triangle rectangle, d'un rectangle.

On mettra aussi en évidence :

- les problèmes de précision et de fiabilité des procédures utilisées : en particulier devra apparaître la non-pertinence de procédures basées sur la construction de tangentes.
- la différenciation des procédures suivant qu'on dispose de plus ou moins d'un demi-cercle.
- la procédure d'intersection des médiatrices de deux cordes comme procédure experte.

EVALUATION

Chacun recevra une feuille comportant 3 points. La consigne sera : "*Construire un quatrième point tel que les 4 points soient situés sur un même cercle, sans tracer ce cercle.*" (Celui-ci pourra être tracé ensuite pour vérification).

Annexe 2

REPRODUCTION DE FIGURE (1) - OBSERVATION DES PROCEDURES

On peut considérer que 3 grandes étapes seront nécessaires pour effectuer la reproduction (l'ordre pouvant varier) :

- Marquage des différents points, après détermination de l'angle de(AB) et (AC).
- Recherche du centre de (C1) et tracé de (Cl).
- Recherche du centre de (C2) et tracé de (C2).

La première étape indiquée correspond en fait à la reproduction d'un triangle (triangle BAC par exemple ou triangle ABE, etc..) mais il pourrait y avoir des difficultés liées au fait qu'aucun triangle n’apparaît complètement tracé. Dans ce cas on pourra suggérer de tracer par exemple [BC].

L'essentiel du problème réside dans la détermination des centres de (C1) et (C2). C'est ce qu'on observera de façon plus particulière en notant :

- les procédures utilisées ;
- les procédures abandonnées et celles retenues ;
- les procédures erronées.

Pour vous aider, voici une liste de procédures susceptibles d'apparaître. Mais il y en aura sans doute d'autres, notamment erronées (par exemple tentative de tracer (C1) en prenant comme centre le milieu de [DE], tracé de la médiatrice de [DE] pour chercher le centre de (C2), etc..).

a) Tâtonnement complet : détermination approximative d'un centre, essais puis réajustements successifs au voisinage.

b) Tracé d'une médiatrice (de [DE] en général pour (C1) et de [AC] pour (C2)) et recherche du centre par tâtonnement avec des essais successifs de tracés de cercles centrés sur cette médiatrice.

c) Détermination par intersection des médiatrices de deux cordes.

d) Construction d'un rectangle inscrit (réalisable seulement pour (Cl); par exemple tracé de [DD’] et [EE'] perpendiculaires à [DE].

Identification du centre à l'intersection des diagonales (ou des médianes..).

e) Essai d'inscription d'un triangle rectangle (réalisable seulement pour (Cl) ; on prend une corde ([DE] ou une autre), une corde perpendiculaire et on cherche le milieu du diamètre obtenu.

f) Construction (nécessairement approximative) d'une tangente auxiliaire (pour (C1), si l'on fait l'hypothèse que (AB) est une tangente) ou de deux tangentes (pour (C2)) et des perpendiculaires aux points de tangence.

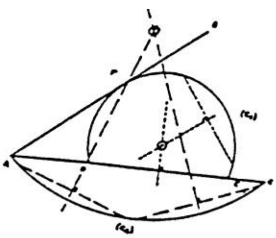
g) Recherche de l'intersection de la médiatrice d'une corde et de la perpendiculaire à une tangente.

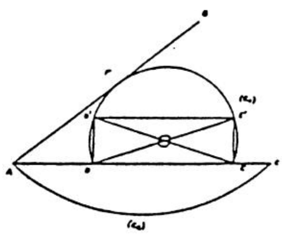
h) Recherche de tangentes parallèles : pour (Cl) par exemple en faisant glisser l'équerre sur (AC) et recherche du milieu du diamètre obtenu en joignant les points supposés de tangence.

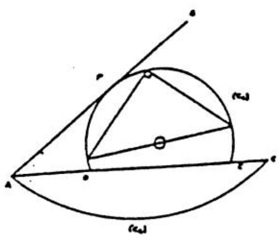
i) Par pliage, en faisant coïncider 2 morceaux de l'arc de cercle, recherche de diamètres et marquage de leur intersection.

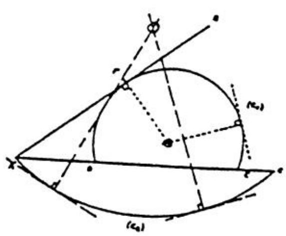
j) Une procédure peut aussi apparaître pour la recherche du centre de (C2) : construction d'un carré de cité [AC] et marquage de l'intersection des diagonales. Bien qu'a priori non légitime, cette procédure fonctionne dans le cas particulier de ce dessin.

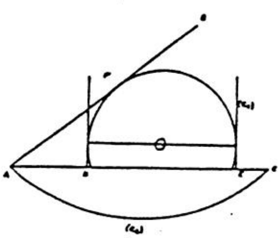
k) Autres procédures...



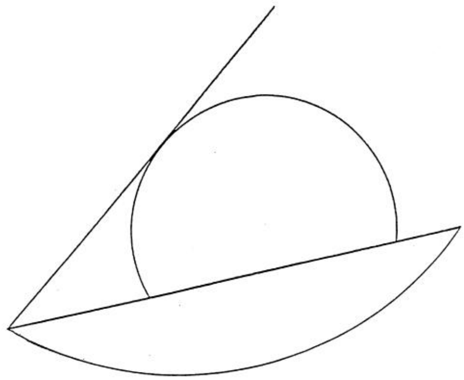




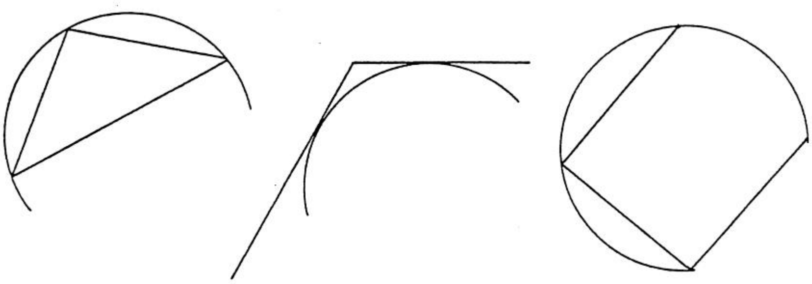




Annexe 3



Annexe 4



Annexe 5

OBJECTIFS

- Utiliser des propriétés de polygones simples pour leur construction.
- Organiser un tracé en fonction des renseignements disponibles.
- Expliciter les notions de bissectrice et de cercle inscrit dans un triangle.

MATERIEL

- La figure ci-après est présentée à l'aide du rétro-projecteur.
- Chacun dispose d'une feuille blanche et des instruments usuels de tracé.

CONSIGNE

" *Vous devez reproduire la figure projetée. La vérification se fera en superposant votre réalisation à l'original sur le transparent. Les décalages éventuels ne devront pas excéder 1 mm*."

RECHERCHE

- Une première difficulté est liée ici au choix d'un point de départ pertinent. En particulier le tracé préalable du carré, puis du losange ne peut conduire à une figure correcte en l'absence d'indications complémentaires.

- Une mauvaise interprétation des indications peut engendrer diverses erreurs, notamment :
    - estimer que le centre du cercle est sur [GJ] .
    - estimer que JI = 3 cm et JK = 5 cm.

- Des difficultés pourront apparaître :
    - pour la précision des tracés.
    - pour construire un point à des distances données de 2 autres.
    - pour tracer un cercle inscrit dans un triangle (d'autant qu'ici le triangle n'apparaît pas en entier).

- Observer et noter :
    - l'ordre dans lequel s'effectue la reproduction.
    - les difficultés et erreurs rencontrées.

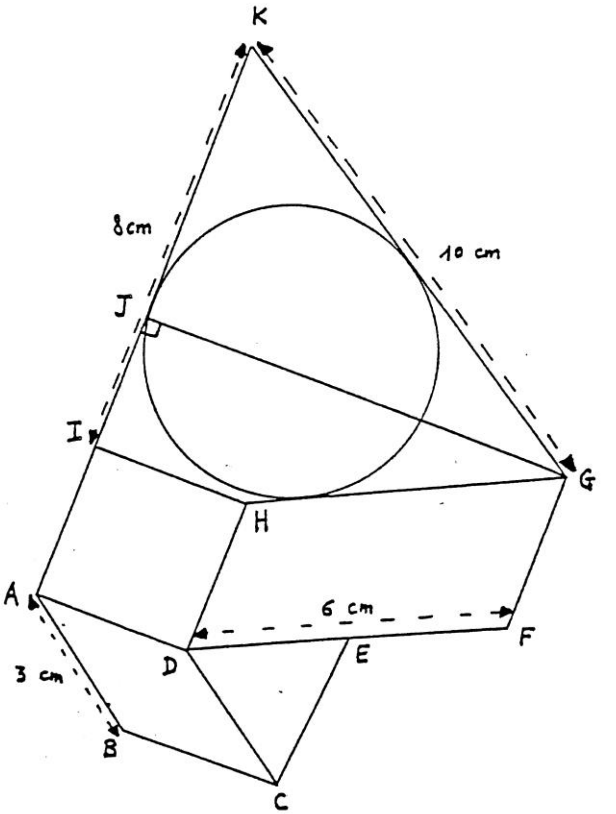
MISE EN COMMUN

Faire ressortir les différentes procédures et mettre en évidence :

- une procédure de construction d'un point à des distances données de deux autres.

- une procédure de construction du cercle inscrit dans un triangle, à partir des bissectrices.
- le caractère déformable d'un quadrilatère dont on ne connaît que les longueurs des côtés.

ANNEXE 6



ABCD est un losange
DCE est un triangle équilatéral
DFGH est un parallélogramme
ADHI est un carré
Le cercle est tangent aux droites
(KI) (HG) et (GK)

La fleur

Marie-Lise Peltier

Extrait des actes du colloque des PEN de Paris (1990) qui s'appuie sur un article publié dans le bulletin de l'APMEP n° 371 (1989) "Géométrie, une approche par le dessin géométrique, CM2-sixième ", Yves Ducel, Marie-Lise Peltier.

Cet article relate une séquence de formation initiale ou continue de professeurs d'école. Il présente un scénario de formation de type homologie transposition, permettant au formateur de travailler un certain nombre de questions géométriques en faisant vivre aux étudiants ou aux stagiaires une situation transférable à l'école élémentaire et d'aborder ou d'illustrer un certain nombre de concepts de didactique lors de l'analyse a posteriori de la situation

ACTIVITE 1

1. Reproduction du dessin

Le professeur affiche au tableau le dessin en couleur et en grand format (annexe 1).

Consigne 1.
" Vous allez reproduire le dessin qui est affiché sur une feuille blanche avec les instruments de géométrie, vous pouvez vous déplacer au tableau, vous pouvez échanger avec vos voisins, mais chacun doit réaliser le dessin. "

Aide prévue
Le formateur distribue un dessin sans couleur pour permettre une analyse plus précise, à chaque stagiaire qui le désire.

Consigne 2
" Lorsque vous pensez avoir réalisé un dessin conforme au modèle, vous rédigez un programme de construction permettant de construire cette figure sans l'avoir vue ".

Cette consigne a pour but de travailler sur la formulation écrite de consignes de construction, mais son rôle essentiel ici est de permettre une bonne gestion du temps et de l'hétérogénéité du groupe (les étudiants ou stagiaires qui peinent sur la reproduction n'ont pas à élaborer ce message).

2. Recensement des méthodes utilisées

Il n'est pas rare que certains étudiants ou stagiaires construisent au départ une rosace à six branches. Le travail d'analyse sur le modèle individuel est nécessaire pour beaucoup.

Pour la recherche du centre des cercles, les procédures les plus fréquemment rencontrées sont
* le tâtonnement,
* la construction du cercle circonscrit à la figure,
* la construction des diamètres des demi-cercles,
* la construction du petit cercle passant par les points d'intersection des arcs de cercles,
* la construction du carré circonscrit à 4 branches.

Pour la construction des centres, les étudiants ou stagiaires utilisent généralement l'une des méthodes suivantes :
* la construction d'un cercle et la division de ce cercle en huit arcs isométriques, soit par le tracé de deux diamètres perpendiculaires et des bissectrices des secteurs obtenus, soit par le tracé de deux rayons perpendiculaires, de la bissectrice et par report de cordes au compas,
* la construction de deux carrés concentriques déduits par rotation.

Il peut se faire qu'un étudiant ou stagiaire propose une procédure par pliage.

3. Analyse des messages produits

Les messages produits sont échangés de manière à tester leur efficacité.
Puis ils sont rapidement présentés à l'ensemble du groupe et comparé quant à la méthode choisie, au vocabulaire utilisé, à la présence de lettres pour coder certains points, à la forme choisie. Les messages inefficaces sont modifiés.

ACTIVITE 2

Analyse de la situation

Le but de cette phase est de permettre aux étudiants ou stagiaires de prendre du recul par rapport à la situation qu'ils ont eux-mêmes vécue. Il s'agit de changer de posture, de passer du statut d'élève à celui de professeur. Pour cela le formateur propose un questionnement sur lequel les stagiaires réfléchissent tout d'abord individuellement, puis par groupe de quatre. Le formateur propose ensuite une synthèse collective en prenant en compte et discutant les réponses des différents groupes.

1. Questionnement sur le choix du dessin

- Quelles notions mathématiques sont en jeu dans la tâche de reproduction de ce dessin ? Parmi elles, quelles sont celles qui pourraient faire l'objet d'une institutionnalisation ?
- Quelles variables didactiques sont à disposition ?
- Quelles aides sont envisageables ?
- Quel type de validation envisager ?

2. Questionnement sur le mode de travail proposé

- Quelle incidence le mode de travail proposé a-t-il sur le déroulement de la séance ?
- Quelles seraient les différentes options que l'on pourrait prendre et leur incidence respective sur la tâche à effectuer ?

3. Questionnement sur un éventuel transfert de cette situation à l'école élémentaire

- Pour une séance de reproduction de ce dessin dans une classe de CM, quel mode de travail choisiriez-vous et pourquoi ?
- Quelles sont vos prévisions sur les procédures que pourraient mettre en œuvre les élèves ?
- Quels éléments mathématiques choisiriez-vous d'institutionnaliser ?

ELEMENTS DE REPONSES RELATIVES A L'ANALYSE DE LA SEANCE

1. Choix du dessin

a) Notions mathématiques en jeu

cercle diamètre, centre, division du cercle en arcs isométriques, carrés inscrits dans un cercle, éléments de symétrie, rotations, droites perpendiculaires, bissectrice d'un angle.

Remarque : dans cette tâche de reproduction, ces notions sont rencontrées sous leur aspect outil et non objet.

b) Les variables à disposition

Le nombre de " pétales " de la fleur[1], la présence de couleurs, leur répartition[2], le support (papier uni ou quadrillé) sur lequel est proposé le dessin, le support sur lequel il devra être reproduit.

[1] Le nombre de pétales de la fleur (8 grands, 8 petits) provoque une déstabilisation des savoir-faire chez les élèves ou chez les stagiaires, lesquels activent spontanément un

c) Les contraintes à respecter pour que la tâche d'analyse soit consistante
L'existence d'éléments non apparents sur le dessin, mais indispensables pour la construction ayant le statut d'outil provisoire (par exemple deux diamètres perpendiculaires et les bissectrices, ou les carrés sous-jacents) est un point fondamental pour que la reproduction impose une tâche d'analyse préalable.

d) Les aides
Les éléments qui auraient pu être ajoutés sont envisagés en fonction de leur incidence sur les procédures. Ceci permet la création " d'aides " (voir annexe 2)
La gestion de l'hétérogénéité est également envisagée par la prévision d'une consigne de travail supplémentaire qui contribue à approfondir la tâche à effectuer initialement.

e) Les modes de validation
Ici la conformité au modèle est repérée essentiellement visuellement, par dénombrement des " pétales " et par estimation de la régularité de la rosace obtenue. Une validation par superposition avec un calque nécessiterait de fixer la dimension du diamètre du cercle circonscrit à la rosace, ce qui rend la tâche plus difficile en bloquant certaines procédures.

2. Analyse de la tâche

Pour reproduire la rosace à 8 branches, une observation méthodique et une analyse sont nécessaires : elles concernent le nombre de branches, la régularité de la figure (existence de huit axes de symétrie, d'un centre de symétrie, d'un centre de répétition d'ordre 8).
La construction peut être effectuée à partir de la division du cercle en huit arcs isométriques par le tracé de deux diamètres perpendiculaires et des bissectrices des angles obtenus. Elle peut également être obtenue à partir de la construction de deux carrés concentriques se déduisant l'un de l'autre par une rotation d'un huitième de tour. D'autres méthodes peuvent être envisagées, construction d'un carré, de son cercle circonscrit, de ses médianes prolongées jusqu'au cercle ou bien pliage en huit d'une feuille de papier, puis tracé du cercle sur le papier déplié, tracé d'un angle droit, de sa bissectrice, tracé d'un cercle centré au sommet de l'angle puis report au compas de la corde déterminée sur le cercle par deux demi-droites formant un angle de 45°, etc...

---

schème d'assimilation et se heurtent à une contradiction (obtention d'une rosace à 6 branches). Les recherches et les débats pour dépasser cette contradiction vont permettre une rééquilibration des conceptions des élèves ou des étudiants. Ce jeu de déséquilibre-rééquilibration contribue à la construction et à l'appropriation d'un nouveau savoir-faire.
[2] Le choix et la disposition des couleurs peuvent être des variables didactiques. La répartition peut contribuer par exemple à la mise en évidence des carrés sous-jacents, et avoir ainsi une incidence sur les procédures utilisées.

La phase de travail d'analyse collective a pour but de permettre d'émettre des hypothèses, des déclarations, d'essayer de les argumenter, ou de les prouver verbalement sans avoir recours à l'action, mais en anticipant cette action.
Ce travail collectif s'appuie sur l'hypothèse que l'appropriation collective de certaines connaissances peut précéder l'appropriation individuelle et a pour but de permettre de franchir une étape difficile dans la résolution du problème sans pour autant qu'il y ait intervention directe du maître.

3. Modes de travail et gestion associée

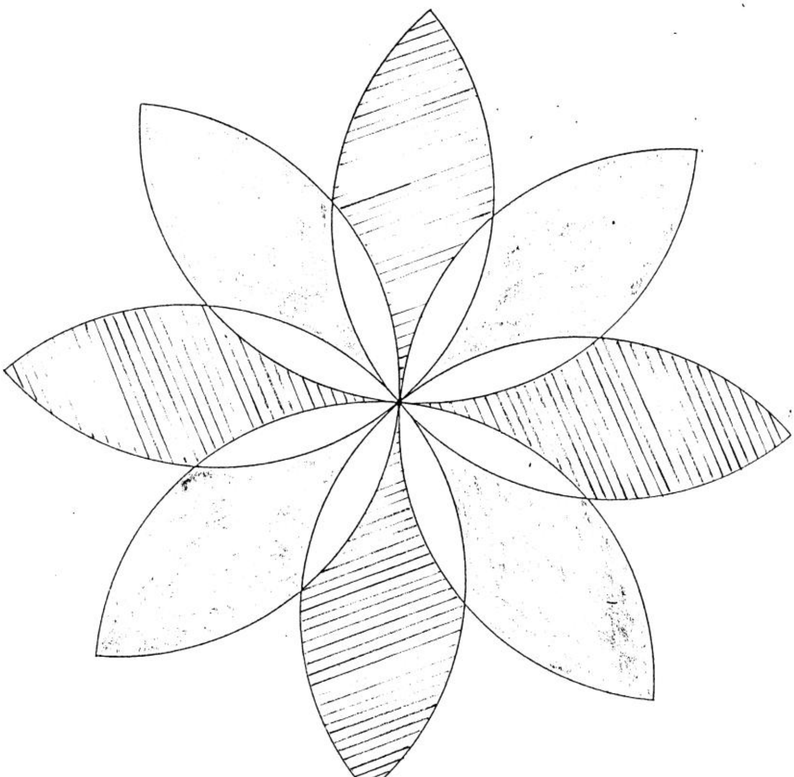
Plusieurs options sont envisageables :
- Analyse collective du dessin affiché puis reproduction individuelle, avec ou sans modèle individuel
- Analyse à deux du dessin affiché ou distribué et reproduction individuelle
- Analyse individuelle du dessin affiché ou distribué et reproduction à même échelle ou à échelle différente.

Gestion de l'hétérogénéité
Aides prévues en cas de difficultés, incidences sur les procédures
Consigne supplémentaire pour les plus rapides consistant à rédiger un message pour construire la figure sans l'avoir vu.

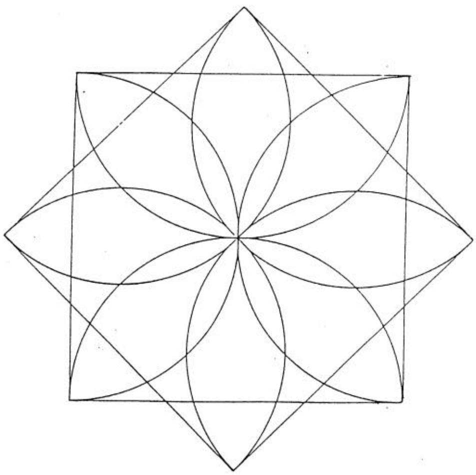
4. Transfert à l'école élémentaire

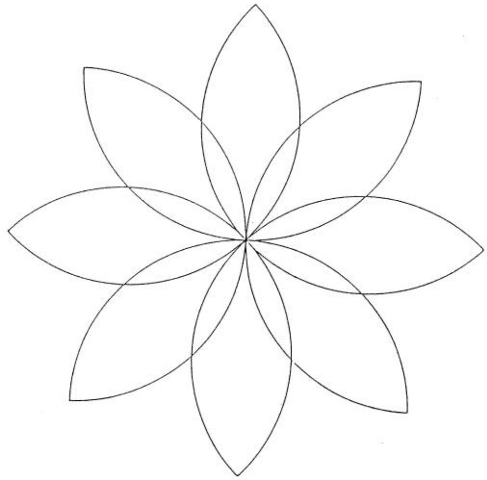
Présentation de l'article paru dans le bulletin de l'APMEP n° 371 (1989) " Géométrie une approche par le dessin géométrique CM2-sixième ". (Y. Ducel, M-L. Peltier) ou de la brochure de l'IREM de ROUEN (1987) portant le même titre.

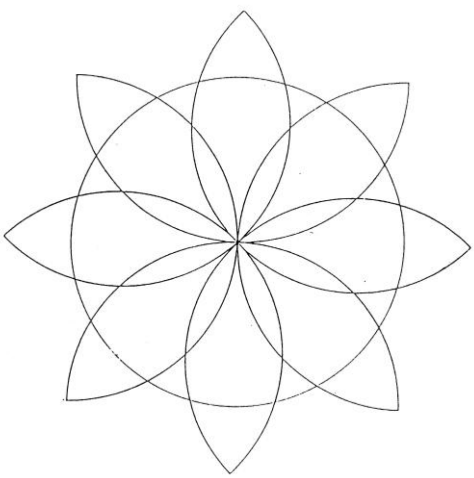
ANNEXE 1

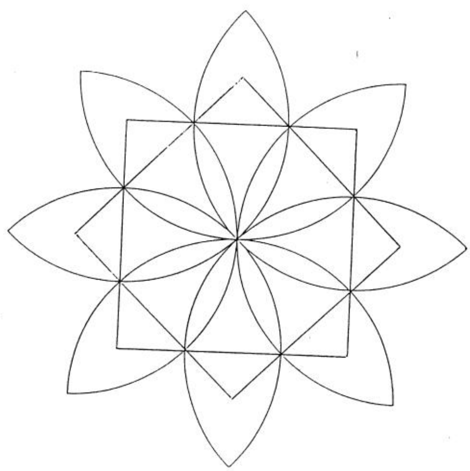


ANNEXE 2









Autour du thème de la mesure

Joël Briand - François Colmez - Guy Brousseau.

Extrait de Document pour les formateurs, qui accompagne les annales du CRPE 1998.

La rédaction des annales 1998 a mis en évidence certaines ambiguïtés relatives aux questions sur la mesure. Il a alors semblé nécessaire de faire un état des lieux à l'intention des formateurs ainsi que de formuler quelques recommandations, pour préciser les attentes vis à vis des PE1. Il est apparu nécessaire de s'interroger sur les abus de langage qu'il est normal d'accepter. L'article commence par l'examen de quelques extraits de sujets, puis propose une mise au point mathématique.

1. Examen des sujets 1998 et du traitement de la mesure

a) Longueur et mesure :

Sujet de Bordeaux 98

Un grand cube est constitué de 512 petits cubes identiques juxtaposés, de 2 cm de côté chacun. Quelle est, en centimètres, la longueur d'une arête du grand cube ? Quel est, en litres, son volume ? Quelle est, en décimètres carrés, son aire ?

Il s'agit de la mesure en cm et non de la longueur[1].

Sujet de Bordeaux 98

Il est écrit : « En déduire la longueur en millimètres du côté d'un octogone régulier ».

Il s'agit de la mesure en millimètres et non de la longueur.

Sujet d'Orléans 98

Page 2 Exercice 2
Une unité de longueur est fixée.
On constitue un puzzle en découpant…..
Les longueurs sont toutes égales à 5.

L'énoncé est incorrect : il introduit une unité de longueur qu'il ne nomme pas et écrit : les longueurs sont toutes égales à 5. Il faut le signaler et rectifier, par exemple en nommant cette unité u et en écrivant 5u. Ce qui évitera de passer

[1] NDLR : ce qui est écrit en italique correspond aux remarques faites, par les auteurs de cet article, concernant les énoncés des sujets du CRPE.

subrepticement au centimètre carré au lieu de u² (manifestement en contradiction avec les dimensions du dessin fourni par le sujet).

Sujet de Rouen 98 (2ème sujet)

Exercice 1
a) « quelles relations doivent vérifier les dimensions x et y d'un rectangle de la famille F »
b) « si une dimension d'un rectangle R de la famille F est 3 cm, quelle est l'autre dimension ? »

L'énoncé laisse entendre que x et y sont des longueurs ; il sera plus commode de décider que x et y sont les mesures en cm des côtés d'un rectangle.

On dira ainsi correctement

- Ce segment a pour longueur 11 cm ou est de longueur 11 cm
- La longueur de ce segment est 11 cm
- La mesure en cm de ce segment est 11

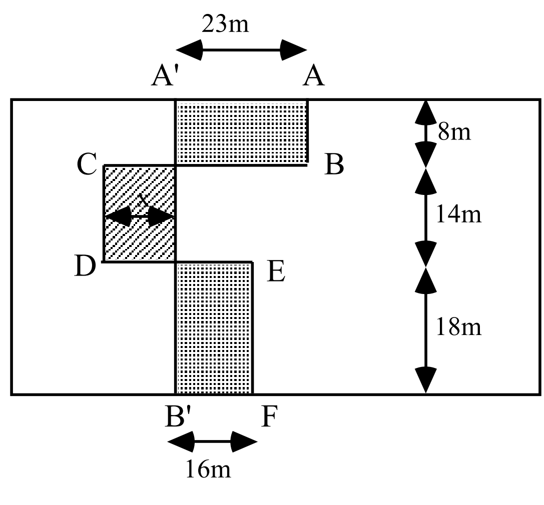
Par contre sont incorrectes des phrases telles que :

- La mesure de ce segment est 11 cm
- La longueur de ce segment est 11 en cm
- Dans les écritures symboliques : 3x 4 = 12 cm est à proscrire.

b) Cohérence texte - dessin :

Il y a souvent aussi un problème de cohérence entre le texte et le dessin.

Sujet de Nice 97



D'après le dessin, conforme au sujet, x est une longueur et non une mesure ; ce qui compliquerait la rédaction, si on suivait cette indication.
Ce qui explique le texte dans la correction : « Nous désignerons par x la mesure, l'unité étant le mètre, de la longueur cherchée ».

Si, sur le dessin figurent des indications de longueurs connues (3 cm) et une longueur inconnue notée x, alors x désigne une longueur et non une mesure. On ne peut donc pas utiliser la même lettre x pour désigner la mesure.
Si on veut travailler avec des nombres (mesures) il faut donc introduire une nouvelle lettre et écrire, par exemple, x = a cm, faire les calculs avec le nombre a et en conclusion écrire : x =...cm.
On peut aussi travailler sur les grandeurs et écrire une aire sous la forme : 3 cm (multiplié par) x. Mais ce qui est de loin le plus commode, c'est, dès l'énoncé, porter sur le dessin non pas x mais x cm, ce qui fait de x une mesure (un nombre).

c) Lettres dans formules :

Dans les formules, le choix des lettres est généralement consacré par l'usage et a une fonction mnémotechnique (B ou b pour base, h pour hauteur, R pour rayon, A pour aire, V pour volume). Par ailleurs, ces lettres peuvent désigner :

- Soit des grandeurs,
- Soit des nombres, mesures de ces grandeurs ; dans ce cas, dans le cours du calcul, on sous-entend les unités, QUI DOIVENT ÊTRE COHÉRENTES.

Pour les angles c'est la même chose :
L'angle droit n'a pas pour mesure 90° ou $\pi/2$ rad ; il est égal à 90° et il est égal à π /2 rad. On peut écrire 90° = π /2 rad, comme on écrit 1 m = 1000 mm ou 1L = 1 dm^3. L'expression « angle de 90° » est correcte.

d) Abréviations :

Le symbole du litre est L (majuscule) pour éviter la confusion avec le nombre 1 qui ne se distingue pas, très souvent, de la lettre l (minuscule). Alors le symbole de centilitre est cL. C'est le seul symbole majuscule utilisé en tant qu'initiale de nom commun ; par contre les initiales de noms propres sont systématiquement majuscules. Ces normes sont celles de l'AFNOR ; elles sont internationales et ont valeur légale.

2. Mise au point théorique

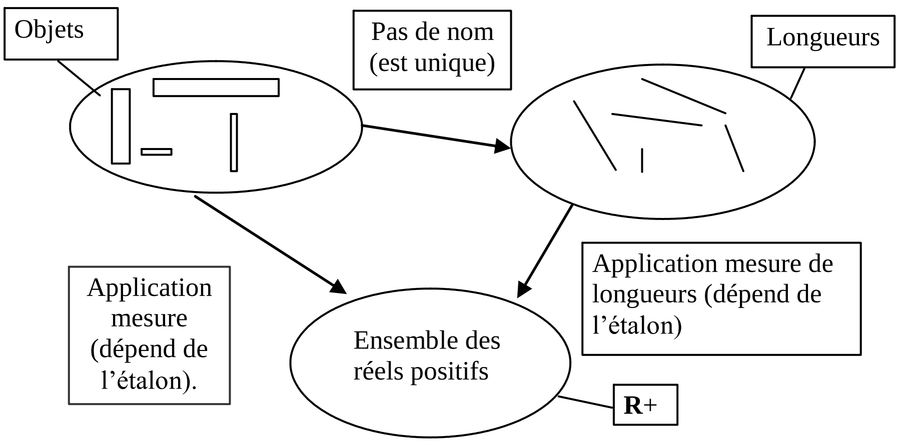
Le modèle mathématique comporte trois ensembles : les objets, les grandeurs, les nombres et trois applications.

- La première à chaque objet associe sa grandeur, pour une grandeur donnée (par exemple, à un segment sa longueur, à une surface son aire).

- La deuxième à chaque objet associe sa mesure : c'est la modélisation d'un protocole expérimental qui permet d'obtenir le rapport entre la grandeur de l'objet générique et la grandeur d'un objet étalon choisi arbitrairement et dont la grandeur est appelée unité ; il y a donc autant d'application de ce type que de choix d'objet étalon, alors que la première application est unique.

- La troisième associe à chaque grandeur sa mesure pour la grandeur unité choisie (le rapport de ces grandeurs). Ce nombre est un réel positif.

Ces applications ne sont pas indépendantes : la deuxième est la composée de la première par la troisième. On peut aussi considérer que l'ensemble des grandeurs est le quotient de l'ensemble des objets par la relation d'équivalence, indépendante de l'unité choisie, "a même mesure que" (mais ceci est hors de propos dans l'enseignement élémentaire).



Le vocabulaire n'est pas satisfaisant

- Il n'y a pas de mot, pour désigner chaque application, autre que le nom des éléments de l'ensemble d'arrivée (on serait obligé de dire, par exemple, application longueur) ; ce qui induirait une confusion entre cette application et l'image d'un élément par cette application ; mais en fait, on ne parle pas de l'application.

- C'est le même mot "mesure" qui sert pour les deux dernières applications, et, qui plus est, pour toutes les grandeurs.

Convenons de :

  - ne pas appeler grandeur ce qui est une mesure (un nombre)
  - ne pas appeler mesure ce qui est une grandeur
  - ne pas mélanger dans une expression ou une égalité des grandeurs et des nombres.

Remarques

- Toute relation entre grandeurs génère une relation entre mesures (la même) à condition que les unités soient cohérentes : si, par exemple les longueurs sont mesurées en pouce, les aires doivent l'être en pouce carré.

- En particulier, le rapport de deux grandeurs de même nature est le même nombre que le rapport de leurs mesures (quelle que soit l'unité).

- Par contre le quotient de deux grandeurs de natures différentes est une grandeur et non pas un nombre.

Exemple : 6 m²/3 km = 2 m²/km = 2km.mm/km = 2 mm ;
ce qu'on peut écrire aussi : 6 m²/3 km = 2 m²/1 km = 2mm. 1km/1 km = 2 mm ;
ou en faisant d'abord des conversions : 6 m²/3 km = 6m²/3000 m = 0,002 m = 2 mm.

Complément : Texte de Guy Brousseau. *Extrait des annales du CRPE de 1995, p.263.*

La mesure

La mesure et le mesurage sont des pratiques complexes bien que très anciennes. Le mot mesure est employé dans des sens très différents. Pour éviter les malentendus, quelques termes techniques sont indispensables. Il faut maintenir clairs leurs différents emplois **par l'usage :**

1. Il faut d'abord distinguer l'objet matériel, support de la mesure (un petit pain par exemple), le type de « grandeur» (son poids, son prix?) et l'objet souvent immatériel de la mesure (sa « longueur», son diamètre). Et ceci, même lorsqu'on commet des abus pour éviter des expressions ridicules (on pourrait dire « la longueur de la longueur du petit pain», c'est à dire la longueur - type de mesure - de la longueur – segment le plus long contenu dans l'objet – du petit pain).

2. La mesure d'un objet est aussi la classe de tous les objets immatériels équivalents du point de vue de ce type mesure : segments susceptibles de coïncider par un déplacement, masses s'équilibrant dans une pesée, etc.

3. L'emploi mathématique du mot « mesure» est limité aux cas où les objets sont « mesurables» c'est à dire où ils possèdent certaines propriétés (la température n'est pas une mesure en ce sens) qui permettent de faire correspondre à ces objets des nombres réels positifs. Cette correspondance s'appelle une *mesure,* c'est une fonction. L'image d'un objet mesurable par une mesure s'appelle aussi sa mesure : c'est donc un nombre. La mesure des mathématiciens ne comprend pas d'indication d'unité. C'est parce que l'objet de la théorie de la mesure ne dépend pas des unités choisies.

4. Dans les situations concrètes, au contraire, la mesure d'un objet est formée d'un couple: (un nombre; une unité de mesure socialement convenue ou un étalon improvisé). On pourrait appeler ce couple *mesure concrète.*

5. Le mesurage est l'opération par laquelle on veut

- soit assigner à un objet « une» mesure concrète. En fait, on doit se contenter d'un intervalle d'incertitude : soit un encadrement, soit une valeur approchée ou estimée et une approximation (un intervalle de confiance, une « erreur maximum » etc.). On pourrait appeler *mesure effective* le triplet (unité de mesure, valeur approchée, intervalle, d'approximation).
- soit réaliser un objet dont la mesure concrète a été donnée (dessiner un segment de droite de longueur 8 cm). La précision est alors une indication fournie avec l'objet.

6. L'indication d'une mesure, même concrète et effective, est, généralement, insuffisante pour indiquer la « grandeur de l'objet» au sens de sa taille relativement aux objets de même nature (si ces derniers ne sont pas familiers, par exemple : une vitesse de sédimentation de 75). Cette « mesure» (qui n'a pas besoin d'unité) s'exprime par la rareté» de la mesure concrète, par exemple par le pourcentage d'objets de cette famille plus grands ou plus petits que l'objet en question.

Aire de surfaces planes.

Marie-Lise Peltier - Catherine Houdement

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.

Cet article propose un dispositif destiné à la formation initiale et continue prévu pour deux séances de trois heures. Il s'appuie sur un problème très simple : chercher un maximum de façons de partager une feuille de papier rectangulaire en deux parties superposables.
Les auteurs décrivent le déroulement en plusieurs phases distinctes dont les objectifs sont clairement identifiés au départ. En fin d'article, le dispositif est analysé à la fois sur le plan mathématique et sur le plan didactique.

1. Objectifs

a) Objectifs mathématiques

- Indépendamment, dans un premier temps, du dénombrement sur quadrillage, du calcul numérique et de l'utilisation de formules :
  - Construire le concept d'aire,
  - Construire la notion de mesure,
  - Faire fonctionner l'additivité des mesures d'aire.
- Distinguer aire, périmètre et forme d'une surface.
- Utiliser la symétrie centrale comme outil de résolution de problème et en déduire quelques propriétés.
- Introduire les fractions, produire des égalités entre fractions, les comparer, les ranger.

b) Objectifs didactiques

La situation présentée illustre les notions d'outil et d'objet puisqu'elle permet de mettre en jeu deux concepts mathématiques : l'aire en tant qu'objet, la symétrie centrale en tant qu'outil implicite de résolution du problème posé. Cette situation permet en outre d'introduire les fractions comme des codages nécessités par l'insuffisance des entiers pour des classes de surfaces de même aire.

2. Activité

a) Première phase

Objectif

Construire des surfaces de même aire, mais de formes différentes et définir la notion d'aire (hors contexte numérique).

Matériel

- Feuilles d'annuaires téléphoniques (format A4) en grand nombre.
- Ciseaux, instruments usuels de géométrie.

Organisation

Travail individuel

Consigne 1

« Vous devez partager chaque feuille en deux parties exactement superposables sans perte et sans recollage (c'est-à-dire qu'avec les deux parties il sera possible de reconstituer la feuille initiale) : vous devez chercher un maximum de partages différents répondant à cette consigne de partage que nous désignerons par (P) ».

Procédures observées

- Les étudiants commencent par plier en deux suivant les médianes, puis les diagonales du rectangle. En général à ce moment, certains pensent qu'ils ont trouvé tous les partages possibles, il est alors nécessaire de redonner la consigne en précisant qu'ils doivent essayer d'en trouver d'autres.
- La procédure suivante consiste à plier la feuille de telle sorte que deux sommets opposés se superposent. Ce partage permet généralement à l'idée qu'il existe un nombre infini de solutions de se répandre.

Les autres procédures que l'on rencontre sont les suivantes :

- Des pliages en 8 ou 16 suivis de dépliages et découpages en suivant certaines lignes de pliages plus ou moins bien choisies (d'où des réussites ou des échecs !).
- Des recherches en construisant des segments de même longueur en partant de deux sommets diamétralement opposés.
- Des procédures consistant à construire une ligne de partage symétrique par rapport à une médiane, puis en raison de l'échec, évolution de cette procédure vers la construction d'une ligne de partage symétrique par rapport au centre de la feuille.

Remarque

On peut constater de très nombreux essais qui n'aboutissent pas, mais ces essais permettent à leurs auteurs de faire de nouvelles hypothèses sur les propriétés de la ligne de partage. De nombreux étudiants trouvent assez vite comment construire une ligne de partage polygonale qui permet de résoudre le problème en faisant des tracés symétriques de part et d'autre du centre de la feuille, puis certains cherchent des lignes de partage curvilignes à main levée ou en traçant des cercles.

Synthèse

Les étudiants viennent afficher un certain nombre de partages réalisés. Ils vérifient à chaque fois la superposition exacte des deux parties et la reconstitution possible de la feuille initiale avec les deux parties, ils expliquent à leurs camarades le procédé utilisé pour obtenir la ligne de partage.

b) Apport du professeur et première institutionnalisation

Sur l'aire

- Les deux parties issues d'un même partage (P) sont superposables, elles ont donc même forme et même périmètre.
- Deux parties issues de deux partages (P) différents ne sont pas directement superposables, pourtant elles vérifient toutes les deux la propriété : *« avec deux parties analogues à chacune d'elles on peut reconstituer la feuille entière »*. Elles sont donc aussi « étendues » l'une que l'autre, elles contiennent toujours la même quantité de papier, elles correspondent toujours à une « demi feuille », on dit qu'elles ont **même aire**.

Constats

- Deux surfaces de **même aire** n'ont pas nécessairement la **même forme**.
- Deux surfaces de **même aire** n'ont pas nécessairement le **même périmètre**.
- Deux surfaces **superposables** ont **même aire, même forme**, même périmètre.
- A partir d'une partie quelconque issue d'un partage (P), on peut, par **découpage et recollement**, sans chevauchement et sans perte de papier, construire n'importe quelle autre partie issue d'un autre partage (P).

On conviendra d'appeler momentanément famille G, la famille des parties obtenues.

Sur la symétrie

La propriété vérifiée par la ligne de partage pour répondre à la consigne est la suivante : cette ligne est **symétrique par rapport au centre du rectangle**.

c) Deuxième phase

Objectifs mathématiques

- Réinvestir la notion d'aire et celle de symétrie centrale.
- Constituer un stock de formes d'aires différentes mais facilement comparables.
- Introduire un codage fractionnaire et le faire fonctionner.

Enjeu

Permettre à tous de créer des surfaces de formes originales et tarabiscotées.

Organisation

Travail individuel ou par groupes de deux.

Matériel

Le même que précédemment.

Consigne 2

« Vous devez recommencer l'activité de la consigne précédente mais avec des rectangles ayant même aire que les formes précédentes, c'est-à-dire avec des demi-feuilles rectangulaires ».

Remarques

Les étudiants peuvent ainsi réinvestir ce qu'ils ont fait, ou ce qu'ils ont vu faire par d'autres, lors de la phase1. On note, à ce stade, qu'ils prennent plaisir à laisser libre cours à leur imagination et qu'ils prennent conscience que ***l'on peut augmenter à loisir le périmètre de la surface sans en augmenter l'aire.***

On constitue ainsi une seconde classe de surfaces de même aire que l'on désigne par H. On matérialise les deux classes déjà obtenues par des grandes feuilles de papier (type *paper board*) sur lesquelles on colle plusieurs surfaces de la classe.

Lorsqu'il s'agit d'introduire un codage des classes ainsi construites, rendant compte des surfaces qu'elles contiennent, l'ensemble du groupe s'accorde généralement pour désigner la classe G par ½, car elle contient des demi-feuilles et la classe H par ¼, car elle contient des quarts de feuilles. Ce codage est retenu et noté sur les grandes feuilles qui matérialisent les classes.

Consigne 3

« Vous allez construire, par groupe de deux (ou de quatre), des surfaces ayant même aire que la feuille d'annuaire, mais de formes différentes ».

Procédures observées

Les étudiants placent côte à côte de diverses façons :

- Deux surfaces de la famille ½, issues d'un partage (P), c'est-à-dire exactement superposables.
- Ou deux surfaces de la famille ½, issues de deux partages (P) différents, donc de même aire mais de formes différentes.
- Ou une surface de la famille ½ et deux surfaces de la famille ¼.
- Ou quatre surfaces de la famille ¼.

Synthèse

Les différentes propositions sont présentées et discutées. En cas de désaccord, on reconstitue par découpage et recollement la feuille d'annuaire à partir de la feuille proposée.

Les surfaces retenues constituent une nouvelle classe de surfaces de même aire que l'on décide de coder par 1 puisqu'il s'agit de surfaces ayant même aire qu'une feuille d'annuaire.

La description des différentes procédures donne lieu à leur traduction en terme de codage fractionnaire :

- Les deux premières procédures citées se traduisent par
  ½ + ½ = 1 ou par 2 x ½ = 1 (lu comme « *deux fois un demi* »)
- La troisième par
  ½ + ¼ + ¼ = 1 ou par ½ + 2 x ¼ = 1.
- La dernière par
  ¼ + ¼ + ¼ + ¼ = 1 ou par 4 x ¼ = 1.

Consigne 4

« Vous allez travailler par groupes de quatre, construire de nouvelles classes de surfaces de même aire ».

Procédures observées

- Partage en deux parties superposables de rectangles correspondant au quart de la feuille d'annuaire.
- Assemblage de surfaces de différentes classes obtenues.

Mise en commun

Les différentes classes proposées sont comparées, des surfaces de chaque classe sont collées sur de grandes feuilles, chaque classe est codée en fonction des surfaces qu'elle contient et l'on donne des écritures variées rendant compte des différentes procédures utilisées pour construire les surfaces de la classe.

Lors de cette mise en commun, on obtient généralement de très nombreuses classes et donc de très nombreuses écritures, par exemple :

1/8 + 1/4 = 1/8 + 1/8 + 1/8 = 3 x 1/8 = 3/8
1/2 + 1/4 = 3/4 ; 1 + 1/4 = 5/4 ; 1 + 1/2 = 3/2 = 6/4 ;
1 + 1/2 + 1/4 = 7/4 ; etc.

Consigne 5

« Vous allez mettre en ordre les différentes classes obtenues : pour cela, vous pouvez construire pour chaque classe, un rectangle de la famille dont une des dimensions est fixée, par exemple, la largeur de la feuille d'annuaire ».

Mise en commun

Le rangement des classes en fonction de la relation « … est moins étendue que… » est matérialisé par la mise en ordre des grandes feuilles représentant les classes, elle est justifiée par la superposition des rectangles des différentes classes qui ont une dimension commune, elle donne lieu à une série d'écritures du type :

$$1/8 < 1/4 < 3/8 < 1/2 < 3/4 < 1 < 3/2 < 7/4 < 2$$

Un réinvestissement individuel de ces différentes phases peut être proposé à partir de surfaces planes distribuées (cf. annexe). Lors de la mise en commun de ce travail individuel, on constate qu'il est possible de choisir n'importe quelle classe comme unité et que les codages qui s'en déduisent sont proportionnels aux codages de départ.

3. Analyse de l'activité

Analyse mathématique

Cette série d'activités est un exemple d'une progression sur une grandeur et la mesure liée à cette grandeur.
Le professeur reprend avec les étudiants l'explicitation du rôle des différentes étapes :
1. Pour définir la grandeur aire :

- Définition d'une relation d'équivalence sur un ensemble de surfaces, ici la relation « avoir même aire ».
- Construction de l'ensemble quotient, ici les classes des surfaces ayant même aire.
- Caractérisation des classes, ici par un codage fractionnaire et par le choix d'un représentant « rectangle » de chaque classe.
- Construction d'une relation d'ordre sur l'ensemble quotient.

2. Pour construire un codage numérique qui est une mesure : construction d'une application de l'ensemble quotient dans l'ensemble des nombres réels :

- Positive
- Additive
- Monotone
- Parfaitement déterminée par le choix d'une unité, ici la feuille A 4.
- Vérifiant les propriétés suivantes : l'inégalité triangulaire, les surfaces vides ont une aire nulle, il existe des surfaces non vides d'aire nulle.

Remarque

Cette situation permet de distinguer naturellement objet mathématique, grandeur mesurable, mesure.
D'autre part, elle apparaît comme une introduction pertinente de la nécessité des nombres non entiers, et plus précisément des fractions. En effet, elle permet de donner du sens à des écritures fractionnaires :

- Définition de $1/n$ par $1/n + 1/n + \ldots + 1/n = 1$

  et par $n \times 1/n = 1/n \times n = 1$;
- Production d'égalités variées sur ces nombres ;
- Comparaison et rangement de fractions et d'écritures fractionnaires.

Enfin elle permet de faire des rappels sur la symétrie centrale qui est apparue comme un outil de résolution du problème de partage.

Analyse didactique

Cette situation permet de pointer :

- L'aspect auto-validant de la première consigne de la première phase : c'est l'étudiant lui-même, sans intervention de quiconque, qui décide si le partage qu'il vient de réaliser convient ou s'il est à rejeter ;
- Le rôle de l'hypothèse erronée dans cette phase : en effet c'est très souvent à partir d'une ligne de partage qui ne convient pas que l'étudiant réussit à trouver les propriétés que doit vérifier cette ligne pour répondre à la consigne ;
- L'aspect outil de la notion de symétrie centrale qui est utilisée par tous les étudiants après un certain temps de recherche, bien qu'elle n'ait pas fait l'objet d'un apprentissage antérieur : la notion de symétrie centrale n'est donc pas abordée par sa définition, elle est perçue par son aspect fonctionnel ; il est possible ici de faire le choix d'institutionnaliser (ou non) cette notion pour dégager son aspect objet de savoir et d'étudier les propriétés utilisées pour construire la ligne de partage ;
- L'aspect objet du concept d'aire, qui est ici mis en évidence non pas par une définition, mais par une relation d'équivalence ;
- L'aspect outil de la notion de fraction, qui apparaît ici comme un codage rendant compte de manipulations finalisées avant de devenir objet de savoir institutionnalisé et d'être réinvesti dans d'autres contextes.

4. Prolongements

a) Sur l'aire

Au niveau mathématique

Transfert des notions étudiées sur d'autres matériaux.
Activités de réinvestissement.

Au niveau didactique

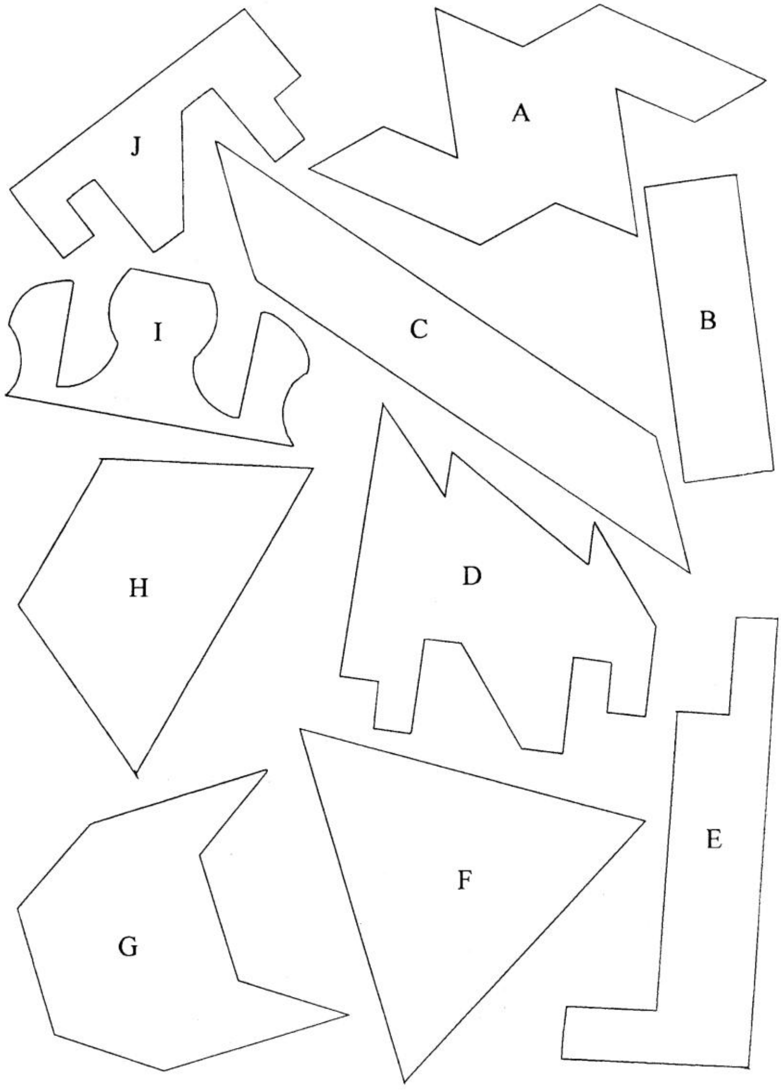
Etude de manuels à partir d'un questionnement du type :

- Comment est introduite dans les manuels scolaires la notion d'aire ?
    - Aspect dénombrement ;
    - Aspect encadrement ;
    - Rôle des quadrillages ;
    - Introduction de l'unité ;
    - Formules.
- Quels sont la part et le type des manipulations proposées aux élèves ?
- Comment le manuel prend-il en compte les distinctions :
    - Aire / dénombrement ;
    - Aire / nombre ;
    - Aire / surface ;
    - Aire / périmètre ?

b) Sur les rationnels

Cette situation est l'une des situations phares pour travailler l'extension de la notion de nombre entier. Elle fait partie à ce titre de la progression sur l'introduction des rationnels.

ANNEXE



Une approche minimale de la notion de grandeur en PE1

Maryvone Le Berre - Catherine Taveau

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Angers 1995.

Cet article propose un dispositif destiné à la formation initiale prévu pour deux séances de trois heures. Les situations décrites visent à dissocier « aire » et « forme », « aire » et « nombre – mesure », « aire » et « périmètre ». Les modalités d'organisation s'efforcent de prendre en compte la diversité des réponses que les étudiants peuvent produire aux exercices proposés.

Ce texte décrit deux séances de formation de trois heures conçues pour des étudiants de PE1 sur le thème « aires et périmètres ». Le dispositif complet est le suivant :

- Un test diagnostique (30 minutes) utilisé pour constituer les groupes de travail de la première séance.
- Une première séance de trois heures sur la notion d'aire.
- Une deuxième séance de trois heures pour différencier aire et périmètre et une synthèse générale.
- Plus tard dans l'année, un test final et une analyse avec les étudiants de la démarche suivie.

Objectifs notionnels

Appréhender les notions de longueur et d'aire en tant que grandeurs mesurables, sur lesquelles on peut définir des opérations (comparaison, addition, multiplication par un scalaire), avant tout passage à la mesure.
Nous faisons l'hypothèse que la plupart des étudiants ont, sur le sujet, des connaissances et des représentations tronquées, par exemple qu'il s'agit essentiellement pour eux, comme pour leurs futurs élèves, de connaître et d'appliquer des formules.
La plupart n'ont jamais entendu parler de « grandeurs ». Or nous estimons que sous le chapeau « mesure », dans le libellé des programmes, les PE devraient reconnaître qu'il s'agit de « grandeurs et mesure de ces grandeurs ». Ils devraient savoir ce qu'on entend par exemple par « dissocier grandeur et forme, grandeur et nombre ».

Objectifs didactiques

- Entraînement à l'analyse à priori ;

- Reconnaissance sur des exemples de la notion de variable didactique ;
- Notion de « théorème élève ».

En cohérence avec la priorité donnée aux objectifs notionnels, les étudiants sont placés en situation d'élèves durant la plus grande partie des deux séances. Cependant le dispositif lui-même est conçu pour permettre une transposition, ce qui suppose de prendre du temps, durant les séances, et /ou lors d'un rappel, pour expliciter et analyser certains choix, en particulier :

  - Repérage des connaissances et représentations initiales des étudiants ;
  - Travail différencié sur un même problème en jouant sur les variables de la tâche ;
  - Appui sur la mise en commun et le débat entre pairs.

1. Le test

Voir fiches 1 à 3 en annexe.

<u>Fiche 1</u> : Elle a pour unique fonction de permettre de lever les ambiguïtés éventuelles sur les termes employés.

<u>Fiche 2</u> : Elle vise à repérer différents niveaux de connaissance à propos de l'aire du triangle.

<u>Inventaire des procédures prévues</u>

- Blocage (il n'y a pas de hauteur pour le triangle B) et non réponse.
- Jugement à vue : « A est plus grand ».
- Mesurage des bases et hauteurs « prototypiques » et calcul. Même sans erreur de calcul, les réponses pourront être : *aires égales, presque égales, ou inégales.*
- Mesurage et calcul en prenant la largeur de la bande comme hauteur pour les deux triangles.
- Raisonnement du type *« même base et même hauteur pour les deux triangles ».*
- Utilisation de surfaces intermédiaires (parallélogrammes, rectangles,…).
- Découpage d'un triangle pour le comparer à l'autre.

<u>Fiche 3</u> : Tirée d'une évaluation nationale à l'entrée en sixième, elle sert de détection éventuelle d'un théorème-élève très persistant.

<u>Inventaire des procédures prévues</u>

<u>Pour l'aire</u> :

- Comptage des carreaux.

<u>Pour le périmètre</u> :

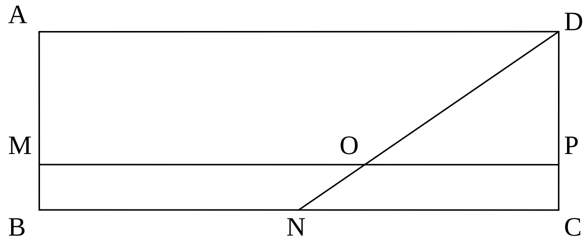
- Jugement à vue (donc sur l'aire).
- Mise en œuvre du théorème – élève : *« si l'aire est plus grande, le périmètre est plus grand ».*
- Comptage des « carreaux du bord ».

- Comptage des côtés des carreaux du bord.
- Décomposition des deux périmètres en deux parties : une « frontière commune » et deux parties de même longueur.

2. Première séance : comparaison d'aires.

Cette première séance a pour objectif la distinction entre surface, aire, mesure de l'aire, objectif qui peut être annoncé dès le départ. Elle doit faire émerger des procédures de comparaison d'aires ne faisant pas appel à la mesure, d'autres faisant intervenir la mesure soit d'un point de vue unidimensionnel, soit d'un point de vue bidimensionnel.

a) Un problème.



MB est égale au quart de AB, N est le milieu de [BC].
Les surfaces MBNO et ODP ont-elles la même aire ?

b) Analyse a priori des procédures de résolution.

Raisonnement par différence

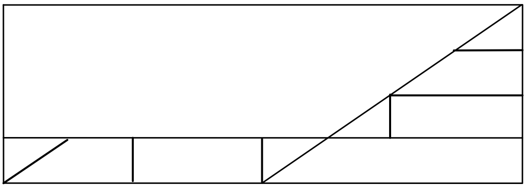
Pour démonter l'égalité des aires, il suffit de démontrer celle des aires du rectangle MBCP et du triangle NCD.
Celle-ci peut être obtenue de différentes façons :
<u>Algébriquement</u> : en appelant a et b les mesures des côtés du rectangle ABCD, on obtient facilement qu'elles sont toutes deux égales à ab/4.
<u>Géométriquement</u> : le rectangle est pavable par quatre rectangles superposables à MBCP, et par quatre triangles superposables à NCD.
<u>Numériquement</u> : si l'énoncé ne donne aucune information sur les longueurs, cela suppose un mesurage, donc en principe une incertitude. En fait il peut y avoir deux démarches assez différentes :

1. Mesurage des données « utiles au calcul », longueur et largeur du rectangle, base et hauteur du triangle, sans tenir compte des contraintes de l'énoncé.
2. Prise en compte des contraintes de l'énoncé soit pour guider, soit pour corriger le mesurage. Par exemple, on peut mesurer AB et en déduire BM, ou mesurer les deux « en s'arrangeant » pour que l'un soit quatre

fois l'autre, et c'est un arrangement qui peut rester implicite. La prise en compte explicite des relations entre longueurs rapproche la procédure numérique de la procédure algébrique, bien qu'elle ne porte pas sur le même objet.

Comparaison directe

Algébriquement : cela suppose de déterminer les longueurs MO et OP (respectivement 5a/8 et 3a/8) en utilisant le théorème de Thalès ou une relation de similitude, par exemple, puis de conduire un calcul algébrique relativement lourd pour des PE (on trouve 9ab/64).
Géométriquement : pavage des deux surfaces avec unité commune. Découpage d'une surface pour paver l'autre, par exemple :



Numériquement : après mesurage. Si les mesures sont des nombres entiers, l'incertitude liée au mesurage risque évidemment d'être complètement évacuée.

c) Composition des groupes et choix des énoncés.

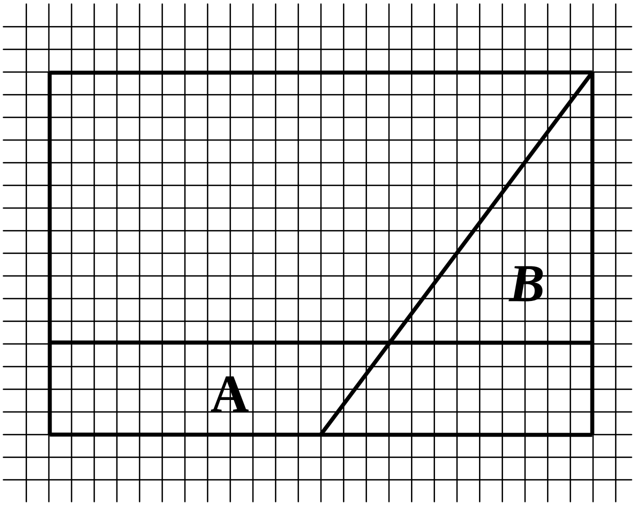
L'hétérogénéité des étudiants peut être maximale devant un tel problème. Il nous semble capital que chacun puisse travailler à son niveau. La fiche 2 du test (comparaison des aires de deux triangles) permet de prévoir au moins deux types de difficultés : (1) blocage, hésitation à « bricoler », en l'absence de connaissances suffisamment sûres.

(2) recours systématique au mesurage des longueurs, et calcul, sans analyse de la figure.

Il nous paraît judicieux de constituer des groupes « homogènes » par rapport à ces comportements prévus, en proposant des versions différentes du problème.

Première version

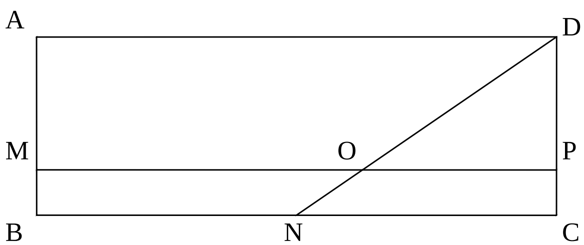
Pour ceux qui ont produit des réponses erronées ou n'ont pas répondu à la fiche 2, il paraît important dans un premier temps de faciliter la mobilisation des procédures par découpage - recollement ou pavage, d'où le choix d'un support quadrillé, et de valeurs « sympathiques » pour a, b et a/b.
Le papier quadrillé permet également de communiquer graphiquement les données.



Les aires des surfaces A et B sont-elles égales ?

Deuxième version

Pour ceux qui privilégient mesurage des longueurs et calcul, le choix vise à disqualifier (relativement) cette méthode, au profit de méthodes géométriques, d'où le choix du papier blanc avec des mesures en cm peu commodes.

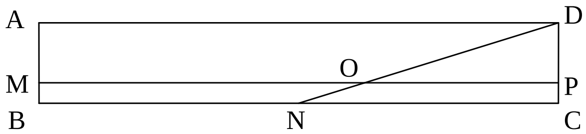


AB = 4MB ; N est le milieu de [BC] : les surfaces MONB et ODP ont-elles la même aire ?

Troisième version

Restent ceux qui ont répondu de façon satisfaisante au test en utilisant une des procédures suivantes : « *même hauteur, même base* », « *utilisation de surfaces intermédiaires* », « *découpage d'un triangle et comparaison à l'autre* ».

L'objectif principal est de faire émerger la diversité des procédures et de voir que ce problème peut se résoudre à différents niveaux. Il n'est pas certain, cependant que le raisonnement par différence apparaisse. On a opté pour un rectangle très allongé, une forme peu commode dont on espère que cela favorise une discussion sur la validité du pavage.



AB = 4MB ; N est le milieu de [BC] : les surfaces MONB et ODP ont-elles la même aire ?

Consigne

Tous les groupes ont la même consigne :

1. Répondre à la question.
2. Chercher tous les moyens possibles pour répondre à la question.
3. Comment un élève de cycle 3 pourrait-il procéder pour répondre à la question ? (en modifiant au besoin certaines dimensions ou le support papier…)

La question 2 et surtout la question 3 amènent à discuter les contraintes liées à certains choix des variables. Elles permettent aussi de gérer l'hétérogénéité du groupe (pour le niveau comme pour la vitesse de travail) tout en préparant le travail commun.

d) Déroulement de la séance

Constitution des groupes et distribution des fiches de travail

La consigne est commune et écrite au tableau. Les étudiants sont avertis qu'au bout d'une heure, chaque groupe devra avoir rédigé une affiche résumant les procédures de résolution identifiées (réponse à la question 2 de la consigne).

Mise en commun

- Inventaire et analyse des procédures de résolution. Traitement des erreurs éventuelles.
- Quelles sont parmi les procédures proposées, celles qui utilisent, implicitement ou non, une mesure ? Celles qui utilisent la mesure de longueurs ?
- Ebauche de classification et de hiérarchisation de procédures.
- Identification des valeurs des variables pour chaque figure et de leurs effets.

Exercices de renforcement

Travail individuel ou par groupes, voir annexe 2.

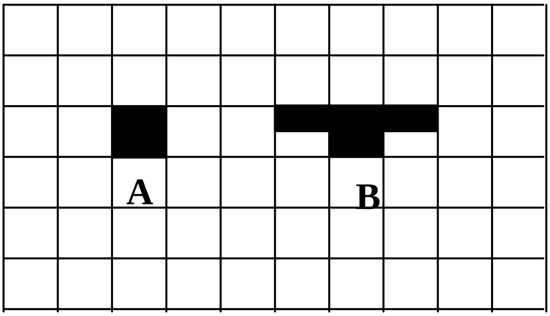
3. Deuxième séance: Différenciation aire /périmètre. Synthèse sur la notion de grandeur géométrique. Approche des problèmes d'enseignement.

La deuxième séance doit permettre d'aborder la notion plus générale de grandeur et d'en montrer la pertinence pour l'enseignement. Il s'agit tout d'abord de préciser les relations entre aire et périmètre, deux grandeurs différentes pour une même surface, et de rectifier une erreur courante, qui a pu apparaître lors du test initial. Ce dernier objectif ne peut évidemment être annoncé.

a) Différenciation aire/périmètre.

Le problème

On voudrait trouver une surface dont l'aire est plus petite que celle de A et dont le périmètre est plus grand que celui de B. Est-ce possible ?



Phase 1 : Pari initial, puis travail en groupes homogènes.

Le problème est écrit au tableau. Les étudiants ont cinq minutes pour comprendre la consigne et se prononcer, sans rien écrire.

Ils sont invités à donner leur réponse spontanément. Le formateur fait l'appel des réponses et les comptabilise : *c'est possible, c'est impossible, autre réponse*, en faisant expliciter la position de ceux qui se placent dans la troisième catégorie (*je ne peux pas savoir sans essayer, ça dépend de la figure, je n'ai aucune idée, etc..).*

Les étudiants se regroupent alors suivant leur réponse, et la consigne suivante est donnée :

1. Réponse : *C'est possible*
   Consigne : *Justifiez. Pouvez vous modifier la figure, ou les deux de façon que la réponse soit : « c'est impossible » ?*

2. Réponse : *C'est impossible*
   Consigne : *Justifiez. Pouvez vous modifier la figure, ou les deux de façon que la réponse soit : « c'est possible » ?*

3. Réponse : *Je ne sais pas*
   Consigne : *Pouvez vous modifier une figure, ou les deux, de façon que :*
   (1) la réponse soit : « C'est possible » ;
   (2) la réponse soit : « C'est impossible» ?

Si certains groupes n'arrivent pas à la conclusion *« c'est toujours possible théoriquement »,* on intercale la face 1bis.

Phase 1bis : Travail en groupes hétérogènes

On mixe rapidement les groupes précédents.

Consigne : *Il s'agit de savoir si le problème posé a ou non une solution, d'abord pour les figures données, puis plus généralement dans tous les cas de figure. Vous devez vous mettre d'accord sur une réponse commune.*

Remarques :

- En posant la question du « toujours possible », on se situe implicitement dans une théorie générale qui va nécessiter d'envisager des figures idéales, des cas limites, et l'emploi du raisonnement déductif. Cette question peut rester ouverte, mais son statut de question théorique doit être pointé.
- Un certain nombre de procédures (pavage, découpage de surfaces) développées, et même encouragées, dans la première séquence, montrent ici leurs limites. Les moyens de validation changent en même temps que le statut de la question. C'est également à noter.
- Cette question très ouverte permet de relancer ou maintenir la recherche de chacun, en évitant que les uns ne convainquent trop vite les autres.

Phase 2 : Conclusion

Un seul exemple suffit à invalider la réponse « c'est impossible », la phase 1bis a, s'il en était encore besoin, fait disparaître cette réponse. Il peut être utile, dans un premier temps, de revenir sur les réponses spontanées et sur les raisons qui ont fait changer d'avis.

L'objectif de l'activité est ensuite énoncé. Il s'agissait de pointer l'existence d'un « théorème- élève » résistant, et de le démonter :

Contrairement à une « intuition » très répandue, aire et périmètre d'une surface ne varient pas toujours dans le même sens.

On peut alors entamer une discussion puis apporter des éléments d'analyse didactique sur l'origine de cette erreur en s'appuyant sur les travaux de M.J.Perrin.

b) Synthèse sur les notions mathématiques abordées.

Elle porte sur les points suivants :

- Notion de grandeur, grandeur mesurable ;
- La mesure d'une grandeur suppose le choix d'une unité ou plutôt d'un système d'unités ;
- La mesure d'aires comme produit de mesures de longueurs.

c) Approche des problèmes d'enseignements.

Certaines hypothèses avancées par M.J. Perrin dans sa thèse sont alors présentées et défendues :

« Les problèmes d'aires mettent de façon essentielle en relation les cadres numériques et géométriques. Un certain nombre de difficultés bien connues des élèves sont liées au traitement des problèmes d'aire soit du point de vue des

surfaces (considérées comme parties du plan), soit du point de vue des nombres, sans établir de relation entre ces points de vue. D'autre part, une identification trop précoce des grandeurs aux nombres semble favoriser l'amalgame entre les différentes grandeurs, en particulier aires et longueurs… Le développement dans l'enseignement du concept d'aire en tant que grandeur permettrait aux élèves d'établir les relations nécessaires entre les cadres numériques et géométriques. »

Ces hypothèses conduisent à développer des activités permettant de dissocier les grandeurs d'une part des objets (segments, lignes brisées, surfaces), d'autre part des nombres, avant d'aborder la mesure et les relations entre ces mesures.

L'exposé s'appuie sur des exemples d'activités et d'exercices (construire une figure de même périmètre qu'une figure donnée sans règle graduée…)

d) Variantes et prolongements possibles.

- Faire analyser des erreurs d'élèves (on peut utiliser par exemple des évaluations début 6ème), avant d'introduire les éléments de l'analyse de M. J. Perrin.
- A partir de manuels scolaires et d'autres documents, chercher ou analyser des activités pour les élèves permettant de différencier aire et périmètre, ou de travailler sur aire ou longueur, sans utiliser la mesure.

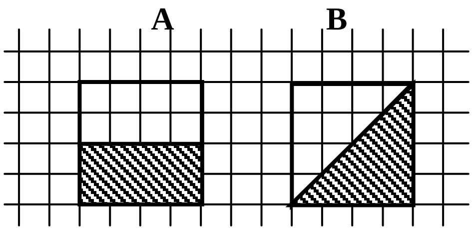
Bibliographie

- Brousseau G., *Problèmes de mesurage en CM*, Grand N n°50, 1991-1992.
- Combier G., Philippon M., *Aire et périmètre*, IREM Lyon, 1994 (Activités pour la sixième, accessible aux étudiants).
- Douady R., Perrin M.J., *Aires de surfaces planes*, petit x n°6 et n° 8, 1984-1985, IREM de Grenoble ; et Grand N n°39-40, 1986.
- Douady R., Perrin M.J., *Mesures des longueurs et des aires*, Brochure n°48, IREM de Paris VII.
- Dubois C., Fénichel M., Pauvert M., *Se former pour enseigner les mathématiques*, A. Colin.
- Rouche N., *Le sens de la mesure*, Didier-Hatier.
- APMEP, *Grandeur mesure* (MOTS VI), brochure n°46, 1982

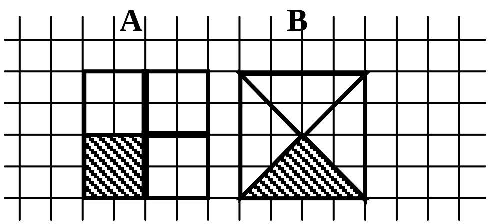
Annexe 1 – Fiche 1

Pour chaque situation, entourez le numéro de la bonne réponse :

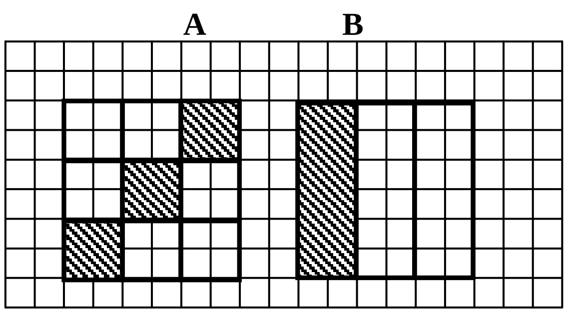
1-l’aire de la surface hachurée A est plus grande que celle de B.
2-l’aire de la surface hachurée A est égale celle de B.
3- l’aire de la surface hachurée A est plus petite que celle de B.



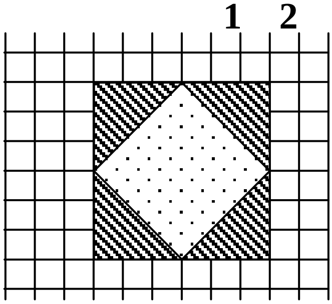
1 2 3



1 2 3



1 2 3

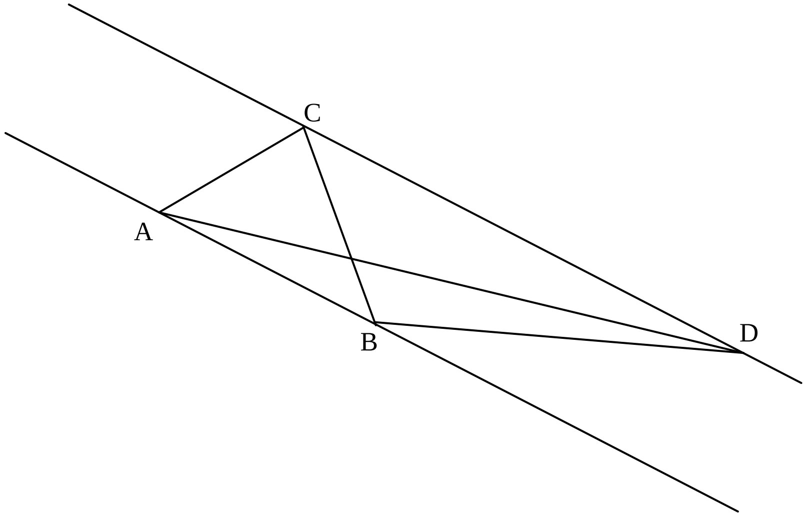


Surface A = surface hachurée

Surface B = surface pointillée.

1 2 3

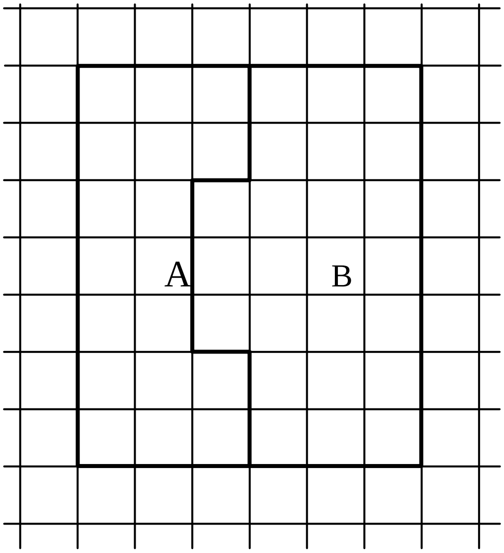
Annexe 1 – Fiche 2



Les droites (CD) et (AB) sont parallèles. Entourez le numéro de la bonne réponse :

1. L'aire du triangle ABC est plus grande que celle du triangle ABD.
2. L'aire du triangle ABC est égale à celle du triangle ABD.
3. L'aire du triangle ABC est plus petite que celle du triangle ABD.

Annexe 1 – Fiche 3



Un terrain a été partagé comme l'indique la figure ci-dessus.

Entoure dans chaque cas la réponse qui convient :

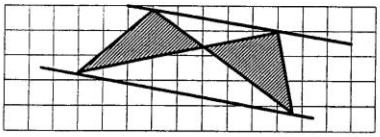
a *L'aire de la parcelle A est la plus grande* | *Les deux parcelles ont la même aire* | *L'aire de la parcelle B est la plus grande*

Explique ton choix :

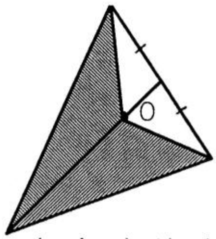
b *Le périmètre de la parcelle A est le plus grand* | *Les deux parcelles ont le même périmètre.* | *Le périmètre de la parcelle B est le plus grand*

Explique ton choix :

Annexe 2 : d’après « Cinq sur cinq » $6^{\text{ème}}$ et $5^{\text{ème}}$ Hachette, 1994- 1995

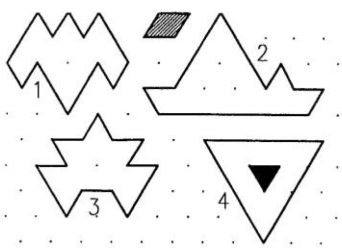


Comparer les aires des triangles hachurés



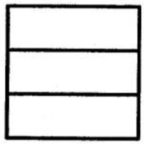
a) Comparer les aires des triangles hachurés. *(S'intéresser aux triangles non hachurés).*

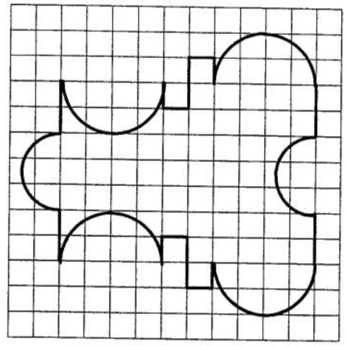
b) Où placer le point O de façon que le grand triangle soit partagé en quatre triangles de même aire?



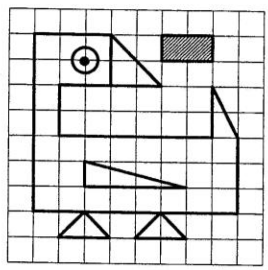
Déterminer l'aire de chacune des figures ci-dessus en prenant le losange hachuré comme unité d'aire.

On partage un carré en trois rectangles superposables. Quel est le périmètre du carré et de chaque rectangle si l'aire de chacun d'eux est égale à 12 cm^2?

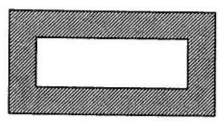




Construire un rectangle ayant la même aire que la figure ci-dessus. (Les arcs de cercle sont des demi-cercles.)



Jeu de l'oie : déterminer l'aire de l'"oie" en prenant le rectangle hachuré comme unité d'aire.



Calculer l'aire de la bande hachurée sachant qu'elle a 1 m de largeur et que le périmètre du grand rectangle est 26 m.

Catégorisation des problèmes additifs, difficultés liées à la place de la question

Catherine Houdement

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Cahors 1991.

Cet article est essentiellement destiné à faciliter l'assimilation de la typologie de Vergnaud. Dans une optique de formation il peut subir diverses adaptations :
- proposer des énoncés ayant été effectivement soumis à des élèves ([1] et [2]).
- faire le lien entre certains taux de réussite [1] et le type de problème traité.
- transformer des énoncés de problèmes en vue d'améliorer le taux de réussite [3].
- recenser les procédures effectivement utilisées par les élèves en fonction du type de problème [2].

1- Les 6 grandes catégories de relations additives selon G. Vergnaud

Première catégorie :
deux mesures se composent pour donner une mesure.

Deuxième catégorie :
une transformation opère sur une mesure pour donner une mesure.

Troisième catégorie :
une relation relie deux mesures.

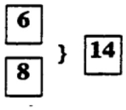
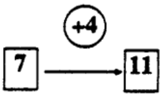
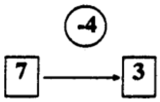
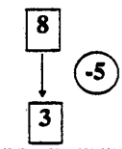
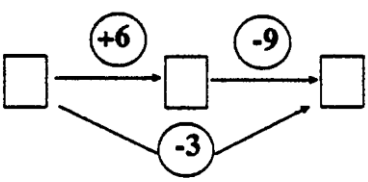
Quatrième catégorie :
deux transformations se composent pour donner une transformation.

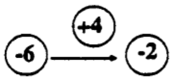
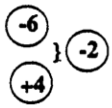
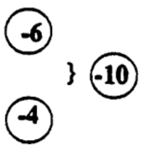
Cinquième catégorie :
une transformation opère sur un état relatif (une relation) pour donner un état relatif.

Sixième catégorie :
deux états relatifs (relations) se composent pour donner un état relatif.

2- Pour faire fonctionner ces catégories,

G. Vergnaud a donné les exemples suivants :

1. Paul a 6 billes en verre et 8 billes en acier. Il a en tout 14 billes	
 $6 + 8 = 14$	I
2. Paul avait 7 billes avant de jouer. Il a gagné 4 billes. Il en a maintenant 11.	
 $7 + [+4] = 11$	II
3. Paul avait 7 billes avant de jouer. Il perd 4 billes. Il en a maintenant 3.	
 $7 + [-4] = 3$	II
4. Paul a 8 billes Jacques en a 5 de moins. Il en a donc 3.	
 $8 + [-5] = 3$	III
5. Paul a gagné 6 billes hier et il en a perdu 9 aujourd'hui. En tout il en a perdu 3.	
 $[+6] + [-9] = [-3]$	IV

6. Paul devait 6 billes à Henri. Il lui en rend 4. Il ne lui en doit plus que 2.	
 [-6] + [+4] = [-2]	V
7. Paul doit 6 billes à Henri mais Henri lui en doit 4. Paul doit donc 2 billes à Henri.	
 [-6] + [+4] = [-2]	VI
8. Paul doit 6 billes à Henri et 4 billes à Antoine. Il doit 10 billes en tout.	
 [-6] + [-4] = [-10]	VI

Codage Vergnaud :
- un entier dans un **rectangle** est un **naturel**
- un entier dans un **cercle** est un **relatif**
- une **accolade** représente une composition d'éléments de même nature
- n est un naturel, (-n) ou (+n) un relatif
- **+** est addition de deux naturels, d'un naturel et d'un relatif, de deux relatifs
- la flèche indique une **transformation** ou une **relation**, i.e. composition d'éléments de natures différentes

3- Exemples de problèmes donnés par G. Vergnaud pour faire fonctionner le classement

a) *Jean a joué deux parties de billes. A la première, il a gagné* 16 *billes. A la seconde partie, il en a gagné* 9. *Que s'est-il passé en tout* ?

b) *En* 1974, *la population de Paris est de 2 844 000 habitants. Elle a diminué de 187 000 personnes en* 5 *ans. Combien d' habitants y avait-il en* 1969 ?

c) *Jean-Pierre a* 9 *bonbons. Il en donne* 4 *à sa petite sœur. Combien lui en reste-t-il* ?

d) *Dans une ville, l'excédent des naissances sur les décès a été de* 1293 *personnes entre 1950 et 1960 et de 4084 entre 1950 et 1970. Que s'est-il passé entre 1960 et 1970* ?

e) *Henri vient de trouver 2,60 F sur le trottoir. Il les met dans son porte-monnaie. Il a alors en tout 3,90 F. Combien avait-il dans son porte-monnaie avant de faire sa découverte* ?

f) *Pierre a joué deux parties de billes. Au cours de la première partie, il en a gagné* 7. *Il a joué une seconde partie. En faisant ses comptes pour les deux parties, il s'aperçoit qu'il a perdu* 2 *billes en tout. Que s'est-il passé à la seconde partie* ?

g) *Il y avait* 17 *personnes dans l'autobus, il en monte* 4. *Combien y en a-t-il maintenant?*

h) *La réserve d'or d'une banque a baissé de* 642 *lingots au cours de 1'année* 1973. *Au cours du premier semestre de la même année, elle avait baissé de 1031 lingots. Que s'est-il passé au cours du second semestre ?*

i) *Un parisien part en vacances en voiture. Au départ de Paris, son compteur kilométrique marque 64809 km* ; *à son retour, il marque* 67351 *km. Combien de kilomètres a-t-il parcourus en voiture pendant les vacances ?*

j) *Jean a joué deux parties de billes. A la première partie il a gagné* 9 *billes. A la seconde partie il en a perdu* 16. *Que s'est-il passé en tout ?*

k) *Paul vient de jouer aux billes. Il avait* 41 *billes avant de jouer. Il en a maintenant* 29. *Combien de billes a-t-il perdues ?*

l) *Jean a joué deux parties de billes. A la première partie, il a gagné* 16 *billes. A la seconde partie il en a perdu* 9. *Que s'est-il passé en tout ?*

m) *Pascal distribue un bonbon à chacun de ses* 7 *camarades. Il distribue ainsi* 7 *bonbons. Il lui en reste alors* 4. *Combien de bonbons avait-il avant la distribution ?*

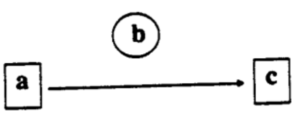
Certains enfants raisonnent alors de la façon qu'illustre l'exemple suivant :

"Si Pascal a 10 bonbons et qu'il en donne 7*, il lui en reste* 3 ; *ce n'est pas ça, il faut plus. Si Pascal a* 1l *bonbons et qu'il en donne* 7*, il lui en reste* 4. *C'est ça...*
il avait 1l *bonbons."*

4- Étude des difficultés liées à la place de la question

La catégorisation précédente ne fonctionne pas dans un premier temps sur un texte avec question. Il faut aussi analyser le type de difficultés liées à la "place" de la question dans la relation additive (c'est-à-dire le schéma ternaire) :

1- *analyse de la catégorie II*



Selon que la question porte sur a, b, c, on obtient 6 classes sous-jacentes de problèmes :

	question sur :		
	c	b	a
b>0	1	2	3
b<0	4	5	6

(cf. 3. pour trouver des exemples)

G. Vergnaud étudie les difficultés en ces termes :

-l et 4

Calcul relationnel le plus simple car on applique une transformation directe à un état initial.

1 est toujours possible, 4 pas toujours (-b < a < b)

Remarque fondamentale : dans ce schéma, la soustraction apparaît "sui generis", a une signification propre, ne dépend pas de l'introduction préalable de l'addition.

En effet perdre, donner, descendre,... ont des significations par elles-mêmes en tant que transformations.

-2 et 5

Calcul relationnel plus complexe, échecs plus tardifs, même avec des petits nombres; pas avant fin de CP ou début de CEl.

Procédures de réussite à ces problèmes :

- celle du "complément" : rechercher ce qu'il faut ajouter ou enlever à l'état initial pour obtenir l'état final, sans faire la soustraction.

- celle de la "différence" : plus élaborée, raisonner par soustraction des deux états, donc réaliser que si b fait passer de a à c, alors b = c - a.

Les procédures employées d'abord sont celles de complément.

-3 et 6

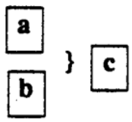
Calcul relationnel encore plus complexe car la solution canonique fait inverser la transformation directe et appliquer à l'état final cette transformation inverse.

Plusieurs procédures:

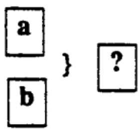
- celle canonique : si b fait passer de a à c, -b fait passer de c à a donc on fait c - b = a.
- celle de complément : ne fonctionne que si b > 0 et lorsque les nombres se prêtent à un calcul mental.
- celle de l'état initial hypothétique (cf. 3, m).

Conclusion : ainsi, une relation n'implique pas des calculs relationnels d'égale difficulté. De plus, dans ces conditions, il n'est pas étonnant que les enfants recourent à des procédures non canoniques.

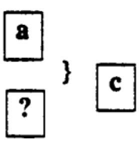
2- ***analyse de la catégorie 1***



Seulement deux grandes classes de problèmes.
1 se résout par une addition



2 se résout soit par une soustraction soit par une procédure de complément.



Remarque fondamentale : ici la soustraction est nécessairement comprise comme opération inverse de l'addition :
a + x = c   x = c - a
cela constitue déjà une forme de calcul relationnel et est. au sens soustraction, un peu plus complexe que la soustraction sui generis précédente.
Ce serait donc une erreur de ne considérer que des problèmes où la soustraction est une opération déjà subordonnée à l'addition.

5- Autres difficultés liées aux problèmes

Bien entendu, dans cette étude, il a été occulté les autres types de difficultés liées aux textes et nombres utilisés par les problèmes, notamment :

* la facilité plus ou moins grande du calcul numérique nécessaire.

ex: dans *"j'ai* 5 *billes et encore* 8 *billes",* le calcul relationnel est le même que dans *"j'ai* 177 *allumettes et encore* 285", mais le calcul est plus complexe.

La taille des nombres (absolue et relative) interdit parfois l'utilisation de procédures NON canoniques.

* l'ordre, la présentation des informations:
  - sont-elles noyées dans le texte ?
  - où est placée la question?
  - les temps employés éclairent-ils le texte ?..

Tout ce qui est lié à la lecture fonctionnelle du problème.

Il y a donc beaucoup de difficultés, mais, d'après Gérard Vergnaud, *"la source principale, celle qui éclaire les autres"* est cette catégorisation en 6 classes de problèmes et sous-classes de calculs relationnels.

6 - Poursuite

* Quelles classes sont pertinentes pour l'école élémentaire ?
* Faire fonctionner la grille sur des problèmes de l'école élémentaire :
  - ceux du départ
  - ceux d'un manuel CE2 ou CEl.
  - ceux de l'évaluation CE 2-6ème[1]
* Comparer les problèmes qui servent à évaluer, et ceux qui servent à entraîner dans les manuels, dans une classe.
* Faire fabriquer des problèmes I, II, V. Les faire passer en classe.

[1] A l'issue des utilisations de la grille de G. Vergnaud, on peut constater que les catégories I, II, III, IV semblent toujours pertinentes. Par contre, les catégories V et VI semblent moins bien fonctionner; certains problèmes relèvent de plusieurs catégories, ce qui permet d'ailleurs de pointer ces catégorisations non pas comme définitives, mais comme outil d'aide à l'analyse.

Bibliographie commentée sur la soustraction

(mars 1991)

Titre : *"La soustraction au CE1"*
Auteur*: Corem*
Editeur : Irem de Bordeaux (parution fin 91)
Contenu : on trouvera dans cette brochure pour les enseignants :

- le compte-rendu de la suite complète des séquences sur la soustraction au CE 1 menées depuis plusieurs années à l'école expérimentale Jules Michelet (COREM) ;
- une étude détaillée de la situation fondamentale (jeu de la boîte) accompagnée des problèmes de dévolution, du rôle et de l'importance des variables didactiques.
- les contrôles et résultats des élèves sur les cinq dernières années (86 à 90) sur toute la progression suivie au CE1.

Titre : *"Sur la résolution de problèmes de soustraction au CE. Étude du rôle de la grandeur des nombres et des différentes représentations de la soustraction en vue de l'élaboration des situations didactiques.*
Auteur : Imana Katembara
Editeur : Irem de Bordeaux
Contenu : cette étude apporte des éléments de réponse aux questions suivantes :

- les procédures utilisées par les enfants de CE pour résoudre les situations soustractives ont-elles un domaine de meilleure efficacité bien déterminé ?
- comment utiliser les réponses à la question précédente pour en tirer bénéfice lors de l'enseignement de la soustraction?
- en admettant qu'il existe différentes conceptions de la soustraction, celles-ci ont-elles des relations avec certaines procédures de résolution ou certaines techniques de calcul connues?

Titre *:"Comment les enfants apprennent à calculer?"*
Auteur : Rémi Brissiaud, PEN Cergy Pontoise.
Éditeur : Retz, 1989
Contenu : L'auteur postule que l'enseignant doit, dès les premiers apprentissages, favoriser le développement des compétences numériques, même sur un domaine restreint.
Il distingue le nombre comme moyen de communication des quantités et comme moyen de mise en relation des quantités. Il préconise l'usage des collections témoins (idée chère à R. Brissiaud : les collections témoins de doigts) et il propose un matériel didactique de sa conception : les réglettes avec cache. Son objectif est d'amener l'enfant du comptage au calcul pensé, via le surcomptage.

R Brissiaud se situant "au-delà de Piaget", fait référence, tout en prenant ses distances, à Gelman, Fuson, Von Glaserfeld et Brousseau. Il se rapproche en fait de la méthode instrumentale de Vigotsky.

Conclusion : le plan structuré et la rédaction claire rendent la lecture aisée et agréable, même si on n'est pas obligé d'adhérer aux conceptions de l'auteur.

Niveaux concernés : Maternelle (moyenne et grande section) et CP

Titre : *"Calculs numériques et calculs relationnels dans la résolution de problèmes d'arithmétique."*
Auteur : François Conne, psychologue, Université de Genève
Editeur : La Pensée Sauvage, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 5-3 p269 à 332.
Contenu : l'auteur souligne l'importance des moyens symboliques servant de support aux résolutions de problèmes de type additif. Tout en s'appuyant sur les travaux de Vergnaud, il s'en distancie en montrant l'intérêt de la représentation équationnelle sur l'ensemble des entiers relatifs, que Vergnaud rejette au profit de représentations symboliques spécifiques.
Conclusion : analyse psychologique très fine de l'activité de résolution de problèmes de type additif chez des enfants de 8-10 ans.

Titre : *"L'enfant, la mathématique et la réalité."*
Auteur : G Vergnaud, psychologue
Editeur : Peter Lang, 1983, collection Exploration Recherches en Sciences de l'Education.
Contenu : l'ouvrage "analyse les problèmes posés par l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire et décrit de manière détaillée différentes étapes et différents aspects du processus de mathématisation du réel, par lequel on peut conduire l'enfant à donner du sens aux concepts mathématiques et à en comprendre les propriétés".
Le chapitre IX est consacré aux problèmes de type additif, dont la solution n'exige que des additions et des soustractions. Il y est proposé une catégorisation très fine de ces problèmes.
Conclusion : Vergnaud démontre dans le chapitre IX de cet ouvrage qu'il existe plusieurs sortes de relations additives, donc plusieurs types d'additions et de soustractions, et que la soustraction ne saurait être considérée comme seconde et toujours subordonnée à l'addition.

Titre : *"La théorie des champs conceptuels."*
Auteur : G Vergnaud, psychologue
Editeur : La Pensée Sauvage, Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 10/2-3 p133 à 169.
Contenu : l'auteur propose une théorie psychologique du concept ou mieux de la conceptualisation du réel.
En œ qui concerne les problèmes de type additif, il montre la nécessité, pour les élèves, d'utiliser des représentations symboliques spécifiques, notamment pour représenter les transformations et les relations négatives.
Conclusion : cet article unifie par une théorie les différentes études proposées dans son ouvrage. *L'enfant, la mathématique et la réalité".*

Titre : *"Faire comprendre la soustraction"*
Auteur : Marcelle Pauvert
Editeur : Nathan CNDP Les pratiques de l'Education 1990
Contenu : ouvrage court et d'accès facile en trois parties
1) difficulté de l'apprentissage de la technique de la soustraction et de son utilisation dans les problèmes.
2) quelques compléments théoriques sur la résolution de problèmes, les problèmes additifs, l'évolution des programmes pour cerner le "contexte" de la soustraction.
3) quelques pistes d'activités élèves.
Conclusion : en résumé, une lecture rapide pour cerner la soustraction et cerner certaines de ses difficultés.

[3] **Titre**: *"L'enfant et le nombre"*
Auteur: Michel Fayol
Editeur : Delachaux et Niestlé, 1990
Contenu : une synthèse pointue et étayée sur l'état actuel des recherches, françaises et étrangères, en psychologie cognitive, sur l'enfant et le nombre.

Bibliographie complémentaire:

[1] revue grand N n° 38 1986
[2] ERMEL CE1 pp.98-122 Hatier 1995

Exemple d'une situation liée à la soustraction

Jeu des règles et des bracelets

Jean-Louis Oyallon

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Cahors 1991.

L'utilisation de cette situation en formation initiale des professeurs d'écoles nécessite un volume horaire de 3 à 4 heures.
L'expérimentation dans les classes correspond à 5 ou 6 séances.
Le paragraphe IV.2 : « variables didactiques » liste des variables de situation. Il faudrait affiner l'analyse pour préciser en quoi certaines variations provoquent des changements de procédures d'élève et sont donc des variables didactiques.
Le texte a été écrit en 1991, à une époque où le texte de « fonction numérique » était inscrit dans les programmes de l'école élémentaire.
Cette remarque n'enlève rien à l'actualité de ce travail sur cette situation fondamentale de la soustraction d'un point de vue ordinal.
La situation dite de la« piste graduée» décrite dans ERMEL CE1 pp.153-135 est proche de celle-ci. Mais ici les élèves ont la possibilité de s'auto évaluer.

I- Matériel de base
- 2 baguettes en bois graduées (section 2 x 0,5 cm, type couvre-joint en menuiserie)
- une de 1 m 20 environ graduée de 0 à 220 (RÈGLE)
- une de 60 cm, graduée de 0 à 110 (RÉGLETTE)

Les graduations sont équidistantes, et obtenues en collant des bandes de papier sur le bois à la colle à tapisserie (cf. annexe). Sur la règle (longue), deux bracelets élastiques coulissent pour matérialiser un intervalle. C'est la même chose sur la réglette (courte), sauf que l'un des bracelets est collé sur la graduation 0, le second restant mobile.

Règle du jeu
Un intervalle étant déterminé à l'aide des bracelets sur l'une des règles, on gagne lorsqu'on reproduit sur l'autre un intervalle de même longueur (le même écart). La consigne donnée au joueur est de *« faire se toucher les élastiques* 2 *à* 2 ».

II- Variantes de la situation et savoirs visés

situation 1 :
Les bracelets sont fixés sur la règle, le joueur doit positionner le bracelet mobile sur la réglette. (Ex: élastiques sur les graduations 27 (ou **a**) et 52 (ou **b**) de la règle.)
Le joueur gagne s'il positionne le bracelet mobile de la réglette sur 25 (ou **e**).
objectif : déterminer l'écart entre deux nombres.

situation 2 :
Le bracelet mobile de la réglette est positionné sur la graduation **e**, le bracelet de **gauche** est positionné sur la règle en **a**.
Le joueur doit positionner le bracelet de droite sur la règle.
objectif : trouver la somme des deux nombres **a** et **e**.

situation 2' :
Le bracelet mobile de la réglette est positionné sur la graduation **e**, le bracelet de **droite** est positionné sur la règle en **b**.
Le joueur doit positionner le bracelet de gauche sur la règle.
objectif : trouver la différence des deux nombres **b** et **e**.

situation 3 :
Le bracelet mobile de la réglette est positionné sur la graduation **e**, pas de bracelet positionné à l'avance sur la règle.
Le joueur doit trouver une position possible des deux bracelets (parmi beaucoup).
Objectif : produire deux nombres dont l'écart est **e**
savoirs visés*:* distance - soustraction (sens)

III - Utilisation avec les normaliens (stagiaires en formation)

Exemple d'activité possible :
1- faire jouer les normaliens dans la situation 1 et mettre en commun les procédures utilisées.
2- mettre en évidence les savoirs concernés (soustraction : distance, écart).
3- faire imaginer quelles procédures peuvent être mises en oeuvre par les enfants et identifier les variables didactiques de la **situation l** (taille de l'écart, position des nombres...).
4- faire trouver les autres variantes du jeu.
5- mettre en évidence les caractéristiques didactiques de la situation (cf. IV).

IV- Analyse didactique de la situation de base (le jeu)

1- C*aractéristiques en termes de situation didactique*

Dans le jeu, l'enfant est autonome et peut faire évoluer ses procédures puisque la validation de son résultat est immédiate (situation adidactique, situation d'action, situation « fondamentale » pour la notion d'écart).

2- *Variables didactiques*

- type de situation (1, 2-2', 3),
- nombre d'essais et autovalidation (graduations du témoin visibles par l'enfant ou non),
- taille des nombres sur la règle, positions relatives de ces nombres sur la règle par rapport aux dizaines, centaines, et extrémité reportée de la réglette (possibilité ou non de reconstituer l'intervalle de la règle sur la réglette),
- taille de l'écart.

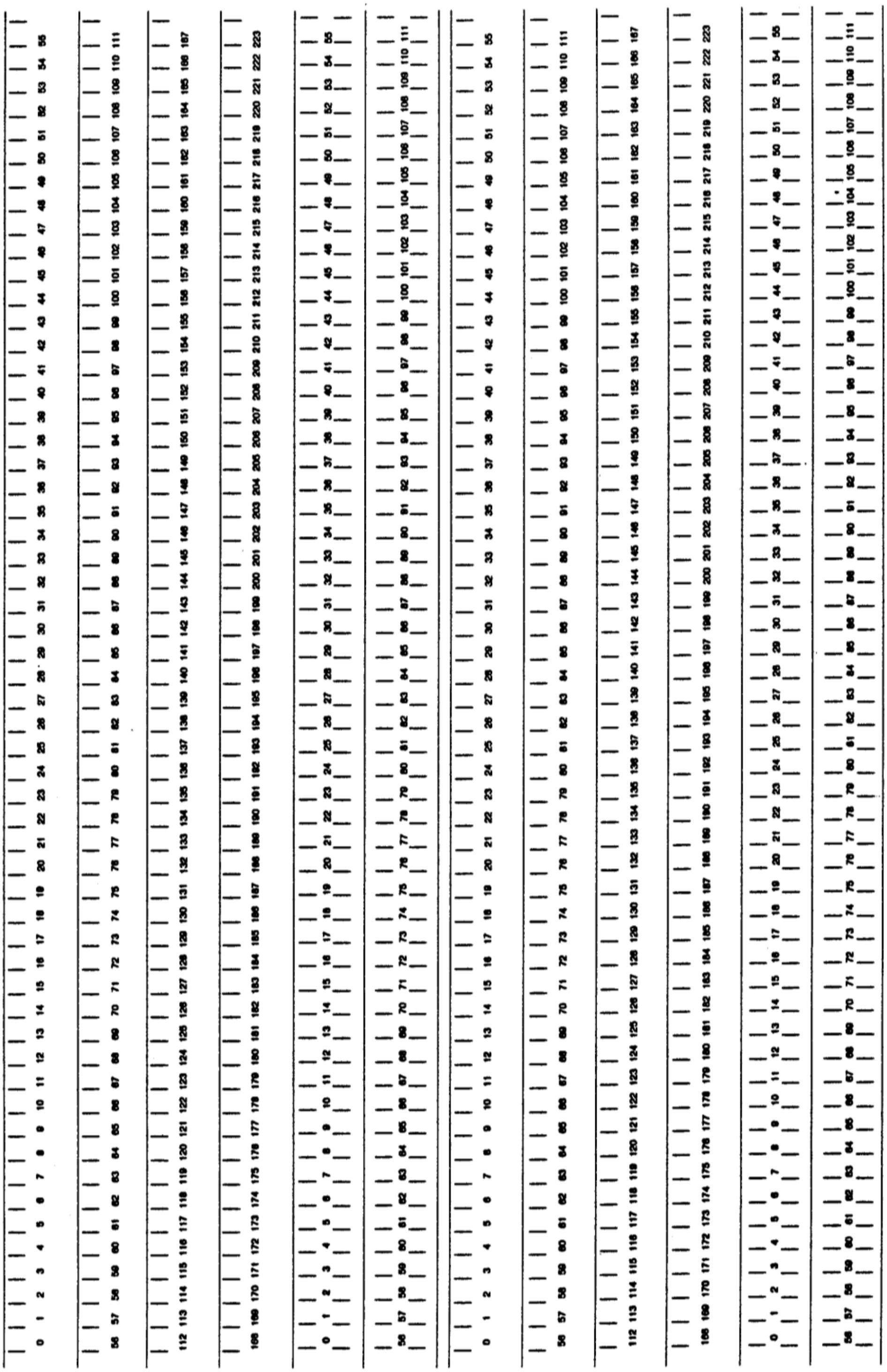
3- *Remarque*

Le jeu décrit ne nécessite pas la production d'une écriture (additive ou soustractive) de la part des joueurs. Il faudra transformer la situation de base (communication, abandon de la manipulation) pour nécessiter des écritures additives ou soustractives des nombres en jeu: **e** = **b - a, b** = **a + e, a** = **b - e**.
Par exemple : donner la consigne" *où mettre le deuxième élastique sur la règle"* lorsque écart et un élastique sur la règle sont donnés, « *trouver toutes les possibilités* », peut amener à noter les possibilités obtenues sous la forme (connue**) a + e** et (extension du sens de **-**) **a - e**.

4- *Exploitations possibles de la situation* 3

Pour les fonctions numériques (ajouter **e** et retrancher **e**) et les techniques opératoires mentales (invariance de l'écart par translation, décomposition additive des écarts).

Annexe - bandes graduées pour l'activité "règles"



Catégorisation des problèmes multiplicatifs et tentatives d'unification.

Alain Descaves

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Pau 1992.

Après avoir donné une définition générale d'un problème multiplicatif, l'article présente rapidement trois catégorisations possibles de ces problèmes relevant d'approches différentes. Il conclut en proposant une perspective d'unification.

1- Qu'est-ce qu'un problème multiplicatif ?

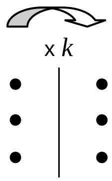
On désigne ordinairement par problème multiplicatif un problème qui exige la mise en oeuvre d'une multiplication ou d'une division. Cette définition est insuffisante, voire dangereuse, car elle peut limiter la pragmatique de la résolution de ces problèmes à la reconnaissance et à l'exécution d'une technique opératoire.

On peut, comme le fait le psychologue Vergnaud, étendre le champ des problèmes multiplicatifs à l'intérieur du champ conceptuel des structures multiplicatives (cf. 2.2). On est alors confronté à un champ immense qui met en jeu aussi bien les concepts de multiplication et de division que ceux de proportion, de fonction linéaire, de rapport, de multiple, de diviseur, de nombre rationnel, de fraction, etc.

On peut également recenser, comme le fait le didacticien Brousseau (cf. 2.1) différentes connaissances enseignées dans la scolarité obligatoire liées à la multiplication et à la division et utilisées dans des problèmes, ainsi qu'identifier les conditions de leur emploi par les élèves (difficultés, réussites, échecs), et les rattacher aux connaissances culturelles visées et utilisées dans diverses institutions. On décrit alors la diversité des savoirs dans le cadre de leur contextualisation.

Il nous a paru souhaitable de donner une définition plus formelle des problèmes multiplicatifs.

Ainsi nous appellerons problème multiplicatif tout problème susceptible, dans un certain domaine de validité, d'une modélisation par des équations à une inconnue du type $a \times b = c$ ou $a \div b = c$, a ou b ou c étant l'inconnue, ou d'une mise en signes par un tableau de proportionnalité du type :



l'inconnue x occupant une des quatre places, c'est à dire d'une modélisation de la forme $f(a) = b$ où f est une fonction linéaire. Un problème multiplicatif n'a pas forcément une solution dans le champ de validité considéré (notamment si le champ n'est pas étendu aux rationnels).

Cette définition ne répond pas à la question de la résolution. Les élèves peuvent bien sûr résoudre un problème multiplicatif sans le modéliser.

2- Catégorisation des situations modélisables par un problème multiplicatif.

2.1. Approche didactique

Catégorisation liée aux pratiques scolaires de référence (conceptions).
Brousseau identifie un certain nombre de variables pertinentes des situations : les nombres, les types de grandeur, la situation didactique, les connaissances antérieures des élèves (liées par exemple à des techniques), etc.
Pour Brousseau « *la connaissance dont les enseignants s'occupent en tant que but ou en tant qu'obstacle à leur activité n'est pas une simple collection de composantes : celles-ci sont organisées en conceptions. Une conception permet de traiter (reconnaître et résoudre) une sous-classe de situations considérées comme comparables (identifiées) à l'aide des mêmes schèmes, des mêmes termes et avec des procédures voisines, justifiées par des "raisonnements semblables" ou traitées à l'aide de propriétés et de connaissances logiquement et fortement liées.*
Des conceptions sont différentes si l'une ne permet pas d'appréhender sans difficulté les problèmes que l'autre permet de maîtriser. Un même élève peut utiliser plusieurs conceptions en ignorant leurs relations ou au contraire en les reliant en une conception plus générale. L'ensemble de ces conceptions ainsi articulé et les problèmes qu'elles peuvent traiter forment le champ conceptuel de la notion mathématique. » [1]

Les catégorisations proposées sont donc liées à l'idée de conception.
Brousseau identifie cinq grandes catégories de conceptions liées à la division, elles-mêmes subdivisables.

1) Les partages,
2) La recherche du terme inconnu d'un produit,
3) La division "fraction",
4) L'application linéaire,
5) La composition d'applications linéaires.

[1] G.Brousseau, « *Représentations et didactique du sens de la division* » in Didactique et acquisition des connaissances scientifiques, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1989.

De même pour la multiplication il est possible de repérer des conceptions liées :
- à l'addition répétée ;
- au produit cartésien (arbre et tableau) ;
- au produit-mesure, les conceptions attachées aux grandeurs continues se distinguant de celles attachées au "discret".

2.2 Approche cognitive et mathématique

Catégorisation liée à des représentations symboliques.
Vergnaud replace les problèmes multiplicatifs dans le champ conceptuel des structures multiplicatives. Ce champ est *« à la fois l'ensemble des situations dont le traitement implique une ou plusieurs multiplications ou divisions, et l'ensemble des concepts et théorèmes qui permettent d'analyser ces situations : proportion simple et proportion multiple, fonction linéaire et n-linéaire, rapport scalaire direct et inverse, quotient et produit de dimension, combinaison linéaire et application linéaire, fraction, rapport, nombre rationne, multiple et diviseur. etc. »*[2]

Un certain nombre de théorèmes donnent dans ce champ leur fonction aux concepts, par exemple les propriétés de linéarité :

$$f(nx) = nf(x) \text{ et } f(ax+by) = af(x) + bf(y).$$

Les relations de base les plus simples sont pour Vergnaud quaternaires et non ternaires contrairement aux structures additives.

Il est possible de générer quatre classes de problèmes élémentaires :

1 - La multiplication.
ex : "J'ai 3 paquets de yaourts. Il y a 4 yaourts dans chaque paquet. Combien ai-je de yaourts ?"

1	a
b	•

2 - La division-partition.

[2] G. Vergnaud. *Théorie des champs conceptuels* in Revue de didactique des mathématiques, Vo1.10/2.3, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1991.

ex : "J'ai payé 40 francs pour trois bouteilles de vin. Quel est le prix d'une bouteille ?"

1	•
b	c

3 - La division-quotition.
ex : "Pierre a 24 francs et veut acheter des paquets de bonbons à 6 francs le paquet. Combien de paquets peut-il acheter ?"

1	a
•	c

4 - La 4ème proportionnelle.
ex : "3 pelotes de laine pèsent 200 g. Il en faut 8 pour faire un pull. Combien pèse le pull ?"

a	b
c	•

Les problèmes ternaires existent également, par exemple les produits de mesure, reliés aux dimensions simples (longueur, temps, etc.), aux dimensions produits (aire, volume, etc.), aux dimensions quotients (vitesse, densité, etc.).

La difficulté des problèmes multiplicatifs dépend aussi, selon Vergnaud, de la taille des nombres, de la nature et de la valeur des quotients et du coefficient de proportionnalité, de la dimension, des grandeurs continues ou discrètes, etc.

2.3. Point de vue cognitiviste

Catégorisation liée aux représentations cognitives (iconiques en particulier) déclenchées par la lecture des énoncés.
Les significations déclenchées par la lecture des énoncés reposent sur la reconnaissance de "formes", sur leur mise en relation et leur traitement symbolique. Une "forme" peut par exemple être attachée à un mot déclencheur (partager, en tout, etc.).
Pour catégoriser les problèmes multiplicatifs, le point de vue cognitiviste oblige à penser le problème de l'interprétation des énoncés en fonction des possibilités de représentation et de traitement dont dispose le sujet. Ces représentations cognitives sont de différents types (iconiques, symboliques de type linguistique ou liées à l'écrit mathématique et à sa correspondance orale). Ce problème de l'interprétation dépend aussi des possibilités de correspondance entre les différents systèmes de représentation.

Pour caractériser les problèmes multiplicatifs il convient donc d'intégrer différents niveaux d'analyse : cognitif, pragmatique et culturel.
Pour sensibiliser les professeurs d'école à ces différentes catégorisations, il est possible de leur fournir un corpus d'énoncés de problèmes multiplicatifs et de leur demander de les classer. Il est également possible de leur demander d'inventer un ou des énoncés correspondant aux différentes classes liées à ces catégorisations.

3- Approches pédagogiques des problèmes multiplicatifs.

3.1. L'éclatement des conceptions.

L'absence de modèles unificateurs (en particulier dans les manuels) débouche sur l'éclatement des conceptions. L'apprentissage consiste, dans un cadre béhavioriste, à multiplier les connexions stimulus-réponses : une opération est associée à chacun des modèles.
Les manuels scolaires présentent parfois un corpus de problèmes afin que les élèves identifient le « bon outil ». Mais aucune aide n'étant fournie à ces derniers, ils restent confrontés à la diversité des situations.

3.2. Tentatives d'unification.

Parmi les tentatives d'unification des problèmes multiplicatifs on peut retenir trois conceptions :

- L'unification se fondant sur une structuration spontanée chez les élèves (maturation, équilibre) suite à la confrontation avec les différentes conceptions.
- L'unification provenant de la représentation par des tableaux de proportionnalité, les opérateurs jouant un très grand rôle dans cette approche (exemple des années "mathématiques modernes").
- L'unification par l'algébrisation (liée essentiellement à la possibilité de pouvoir nommer l'inconnue) qui permet la découverte de règles de transformation de l'écrit (ex : $X \times a = b$ implique $b \div a = X$). Ce sont les modélisations mathématiques et leurs relations qui permettent l'unification des problèmes multiplicatifs. Les structures de sens sont internes aux mathématiques. Ce sont, dans cette conception, les mathématiques qui déterminent les formes de la réalité et non les mathématiques qui sont en rapport d'application avec le monde[3]. L'algébrisation n'exclut ni le recours à d'autres systèmes symboliques du type Vergnaud, ni la réflexion sur les différentes conceptions type Brousseau. Par contre, elle va bien à l'encontre des pratiques ordinaires.

[3] A. Descaves. *Comprendre des énoncés et résoudre des problèmes,* Pédagogies pour demain, Didactiques, Hachette, 1992.

Proportionnalité

Hervé Péault

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Pau 1992.

L'article détaille six activités cherchant à réorganiser les connaissances personnelles des étudiants professeurs des écoles sur la proportionnalité, en vue d'un enseignement de cette notion à des élèves de 10 à 12 ans.

J'ai consacré sur ce thème 3 séances en première année de formation des professeurs d'école. L'objectif de ce travail était très général : permettre à chacun d'améliorer sa maîtrise de la notion de proportionnalité et de pouvoir envisager des séquences sur ce thème à l'école élémentaire.

Avec le point de départ (activité 1) j'ai essayé de les amener à réfléchir sur les procédures qu'ils utilisent spontanément pour résoudre un problème de proportionnalité puis à comparer ces procédures à celles utilisées par les enfants.

Les activités suivantes visaient à préciser les caractérisations mathématiques de la proportionnalité, à les resituer dans différents cadres et à amorcer une réflexion didactique à partir de manuels ou de projets de séquences.

La plupart de ces activités sont très directement inspirées de "*La proportionnalité existe. Je l'ai rencontrée...*" IREM de Rouen, 1988.

J'ai ensuite remis aux étudiants 3 documents (non présentés ici) : une série d'exercices sur la proportionnalité, des fiches de travail permettant de reprendre individuellement le travail sur les aspects mathématiques de la proportionnalité et un document de synthèse sur la proportionnalité à l'école.

ACTIVITÉ 1

Objectif

Première analyse de procédures utilisées en situation de proportionnalité.

Problème

Le problème choisi est le suivant (annexe 1) : extrait d'un document de l'APMEP pour l'évaluation en sixième (11-12 ans, début du collège)

"Trois plateaux de fruits sont à l'étalage d'un marchand de primeurs. L'étiquette du premier plateau indique que l'on peut avoir 8 oranges pour 4 F, l'étiquette du second plateau indique 2 F pour les 3 citrons et celle du troisième plateau indique 4 F pour les 7 poires.
Quel est le fruit le plus cher ? Quel est le fruit le moins cher ?"

1) Résolution par les étudiants

Après un premier temps de recherche individuelle, on recense et on classe les procédures utilisées. On essaie d'analyser toutes les procédures envisageables. Celles-ci visent à se ramener à des éléments de comparaison communs pour chaque type de fruit et peuvent se résumer à 4 catégories :

- recherche du prix unitaire
- recherche de la quantité de fruits pour 1 F
- recherche de la quantité de fruits pour un même prix (2 F et 4 F sont les plus utilisés)
- recherche du prix pour une même quantité de fruits (à partir du plus petit multiple commun, ici 168)

Prix	1		a	
Quantité		1		b

Les deux premières conduisent à un calcul de division, les deux autres à l'utilisation de la linéarité.

2) Étude de procédures d'élèves

Les étudiants sont d'abord invités à essayer de prévoir les réactions d'élèves de sixième devant ce problème et les difficultés qu'ils risquent de rencontrer.

Je leur donne ensuite le document en annexe 1 recensant des procédures d'élèves de sixième telles qu'elles ont été expliquées par les enfants. Ils doivent comparer ces procédures à la classification déjà faite et analyser les erreurs.
Outre des procédures d'interprétation directe des données (*Chrystèle*) ou de calculs sans lien avec la situation (*Tony, Sébastien*), on retrouve les procédures déjà évoquées plus haut avec une difficulté majeure dans la recherche du prix unitaire : répugnant à diviser par un nombre plus grand, certains élèves inversent les termes.

3) Modifications de l'énoncé

Le problème posé est le suivant *: quels éléments peut-on changer dans le problème susceptibles de modifier les procédures utilisées (variables didactiques) ?*

Les étudiants sont invités à imaginer des énoncés changeant éventuellement de contexte et jouant sur ces variations.
Trois variables paraissent importantes : la valeur de chaque rapport prix/quantité (entier ou non, plus grand ou plus petit que 1), les rapports entre les prix, les rapports entre les quantités.

ACTIVITÉ 2

Objectif

Permettre d'en arriver à une caractérisation mathématique de la proportionnalité.

1) Lecture de graphiques

Les 6 situations suivantes sont proposées :

S1 : Trouver, en fonction de leur nombre, le prix de brochures valant 25 F pièce, avec 10 F de port.

S2 : Trouver, en fonction de leur nombre, le prix de places de cinéma valant 39 F l'une.

S3 : Trouver, dans un carré quadrillé régulièrement, le nombre de cases intérieures en fonction du nombre de cases dans chaque ligne.

S4 : Trouver, en fonction d'un prix initial, le prix réel à payer après une réduction de 25 %.

S5 : Trouver, en fonction du prix, un montant à payer compte-tenu de frais fixes s'élevant à 6,5 F.

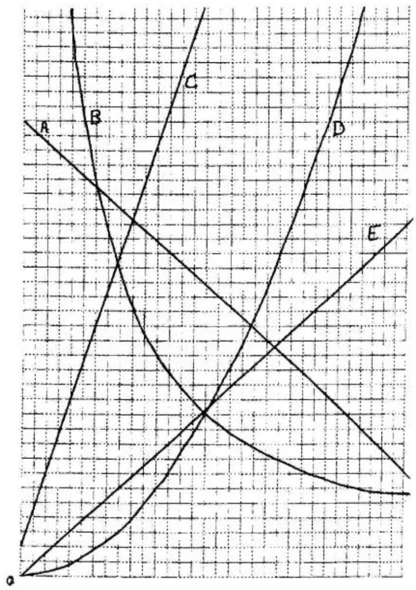
S6 : Trouver, en fonction de sa longueur, la largeur d'un rectangle de 840 cm^2.

Les graphiques ci-après sont projetés à l'aide du rétro-projecteur.

Consigne
Pour chacun des graphiques, et sans faire de calculs écrits, dites s'il vous paraît possible d'établir une graduation sur les axes telle que le graphique corresponde à l'une des situations.

Recherche

La recherche s'effectue par petits groupes avant une mise en commun (où on fait s'exprimer en dernier, les groupes qui recourent à la formalisation fonctionnelle de chaque situation).



Chacun reçoit ensuite un exemplaire qu'il peut utiliser pour le travail qui suit.

2) Caractérisation de la proportionnalité

Le tableau suivant est proposé

3	5	7	8	15

Consigne
« Pour chaque situation, essayez de trouver le maximum de procédures différentes possibles pour remplir le tableau ».
La mise en commun permet de mettre en évidence des procédures liées :

- à l'utilisation d'une *formule* (calcul d'un produit dans le cas des fonctions linéaires),
- à l'utilisation de *propriétés* indépendantes de cette formule (linéarité, conservation des écarts, considérations sur les écarts et la linéarité pour les fonctions affines...),
- à l'utilisation de *graphiques.*

Synthèse

Définition de la proportionnalité, caractérisation par une fonction multiplicative, la linéarité, la représentation graphique. Démonstration de l'équivalence fonction multiplicative/fonction linéaire.

Définition de la proportionnalité inverse et présentation sommaire de divers autres types de fonctions (fonction affine, fonction puissance, fonction exponentielle).

3) « La règle de trois »

Chaque étudiant doit résoudre l'un des problèmes suivants (chaque problème est donné au tiers des présents) :

Pb1 : "Un *mobile se déplaçant à vitesse constante parcourt 25 m en 6 minutes. Quelle distance parcourt-il en 15 minutes ?"*

Pb2 *: "6 cm^3 de minerai ont une masse de 25 g. Quelle est la masse de 15 cm^3 de ce même minerai ?"*

Pb3 : "6 *objets identiques sont vendus 25 F. Pour appliquer un tarif identique. à quel prix doit-on vendre 15 de ces objets ?"*

La mise en commun s'effectue sur les procédures utilisées et leur comparaison. C'est seulement à cette occasion que j'ai vu apparaître une procédure utilisant les "produits en croix". Cela a été l'occasion de démontrer l'équivalence entre cette propriété et les autres propriétés liées à la proportionnalité.

À cette occasion, je présente l'évolution des programmes concernant la proportionnalité, les termes *"règle de trois"* et *"recherche d'une quatrième proportionnelle".*

4) Proportionnalité et croissance

Objectif

Réinvestissement

Première partie

La fiche ci-dessous est donnée à chacun :

Quelles sont les situations pour lesquelles il y a proportionnalité entre les variables indiquées ?

1) colis postaux : *masse / tarif*
2) cercle *: diamètre / périmètre*
3) cylindre de base donnée : l*ongueur / volume*
4) individu *: taille / poids*
5) ressort avec poids suspendu : *poids* / *allongement*
6) plaque de métal homogène : *poids* / *aire*
7) entier quelconque : *nombre /.somme de chiffres*
8) carré *: côté / périmètre*
9) carré : *côté / aire*
10) rectangles de longueur constante : *largeur / aire*
11) rectangles de périmètre constant: *longueur / largeur*
12) rectangles d'aire constante : *longueur* / *largeur*
13) gaz de ville *: consommation / tarif*
14) déclaration de revenus : *revenu montant de l' impôt*
15) soldes à pourcentage fixe : *prix initial / prix à paver*
16) cercle *: aire / carré du diamètre*
17) sphère *: volume / carré du rayon*
18) parcours (distance fixe) : *vitesse moyenne / durée*
19) parcours (vitesse donnée) : *distance / durée*
20) parcours (durée donnée) *: vitesse moyenne / distance*

Mise en commun

Étude des désaccords. C'est l'occasion de mieux mettre en évidence la non-équivalence entre croissance et proportionnalité.

Deuxième partie

Divers graphiques sont donnés (cf. document 1988 cité de l'IREM de Rouen). Il faut les associer, quand c'est possible à l'une des situations ci-dessus.

ACTIVITÉ 3

Objectif

Réflexion sur des aspects didactiques de l'enseignement de la proportionnalité.

1) Exposé

Dans un premier temps, je donne quelques indications sur l'approche des fonctions numériques et de la proportionnalité à l'école élémentaire (indications qui seront développées dans des fiches complémentaires) et sur le comportement des élèves.
(cf. article de M. Pézard *"Proportionnalité"* dans le bulletin inter-IREM *"Suivi scientifique sixième 85-86", p 205).*

2) Comparaison de séquences extraites de manuels

Travail par groupes puis mise en commun. J'ai choisi les extraits suivants :

- *"Maths : Calcul et géométrie CM2" (Nathan 89), p.140*
- *“Math-hebdo CM1" (Hachette1984), p.130*

Les deux extraits proposent chacun une situation de départ de comparaison de prix dans les magasins.

La consigne est d'analyser la tâche de l'élève dans chacun des extraits proposés puis de proposer une nouvelle situation sur le même thème en s'attachant à bien définir la tâche des élèves.

Il pourrait aussi être intéressant d'utiliser le texte de l'épreuve du concours P.E. 92 de l’Académie de Nantes. Celui-ci propose la comparaison de deux situations sur la proportionnalité, extraites l'une de « Objectif calcul CM2 » (Hatier), p. 104, l'autre de « Maths et Calcul CM2 » (Hachette), p 194.
Dans chacun des cas il s'agit de l'étude de la consommation d'essence d'une voiture.

ACTIVITÉ 4

Objectif

Réinvestir, dans un cadre géométrique, les propriétés liées à la proportionnalité.

1) Première partie

Les étudiants reçoivent une série de cartes par groupe (en papier fin, suffisamment transparent) de même format. Sur chacune d'elles se trouve l'un des 12 rectangles de la page suivante (positionnés différemment sur les différentes cartes). Les diagonales sont tracées sur quelques rectangles.

Le rapport longueur/largeur est 1,27 pour 4 rectangles type (A), 1,63 pour 4 autres type (B), 1,41 pour les 4 derniers type (C).

Les rectangles sont dans les rapports suivants (les dimensions sont en cm) :

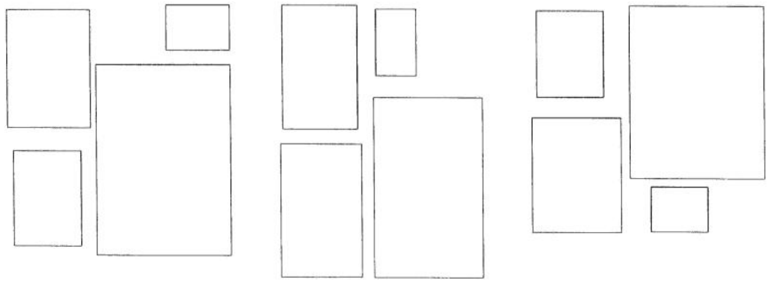
- rectangles de type A : 1 - 1,5 - 2 – 3

  Ce sont les rectangles 16 x 12,6 ; 24 x 18,9 ; 32 x 25,2 ; 48 x 37,8
- rectangles de type B : 1 - 1,85 - 2 - 2,7

  Ce sont les rectangles 18 x 11,04 ; 33,3 x 20,42 ; 36 x 22,08 ; 48,6 x 29,81

- rectangles de type C : 1 - 1,5 - 1,85 – 3

Ce sont les rectangles 18 x 12,76 ; 27 x 19,14 ; 33,3 x 25,6 ; 54 x 38,28



Consigne

Quels sont les rectangles qui peuvent être considérés comme des agrandissements ou des réductions les uns des autres ? Classez-les selon ce critère. Vous avez le droit de mesurer mais vous n'êtes pas obligés.

Mise en commun

Elle vise à mettre en évidence et valider les procédures utilisées. Celles-ci ont été les suivantes :

- des procédures géométriques visant à superposer les rectangles, soit par un coin soit par leurs centres.
- des procédures numériques après mesurage des côtés, voire des diagonales :
    * calcul du rapport longueur/largeur.
    * recherche de linéarité sur des valeurs entières (les rectangles aux dimensions doublées ou triplées sont repérés, mais pas les autres).
    * calcul du périmètre et recherche de rapports entiers entre les périmètres.
    * calcul de l'aire et recherche de rapports entiers entre les aires.

Ces deux dernières procédures conduisant bien sûr à des conclusions erronées.

La mise en commun est l'occasion, pour valider les procédures géométriques, d'une référence au théorème de Thalès.

2) Deuxième partie

Un rectangle de type B est choisi.

Consigne

Construisez un nouveau rectangle à l'intérieur de telle façon que la longueur de ce rectangle soit la largeur du grand rectangle et que les 2 rectangles puissent être considérés comme identiques à un agrandissement près.
Cherchez des procédures utilisant des calculs sur les dimensions et des procédures ne faisant intervenir aucun calcul.

Nouvelle consigne

Construisez un rectangle puis effectuez le même travail que précédemment. Le deuxième rectangle doit partager le premier exactement en deux parties de même aire.

Mise en commun

Elle vise à faire apparaître que le rapport doit être égal à $\sqrt{2}$ et se prolonge par l'étude des formats commerciaux de papier. Le format A0 étant conventionnellement établi à 1 m^2, on montre que les dimensions du format A4 sont 21 x 29,7.

ACTIVITÉ 5

Objectif

Étude de la proportionnalité multiple.

Problème

Dans une entreprise, des machines travaillent à rythme régulier pour produire une certaine substance. 8 machines produisent 6 kg de cette substance en 5 jours. Comment prévoir la quantité produite pour un nombre donné de machines et un nombre donné de jours ?

Recherche et étude des procédures. Synthèse à l'aide d'un tableau.

Présentation de la notion de bilinéarité et des fonctions de type $(x, y) \rightarrow axy$.

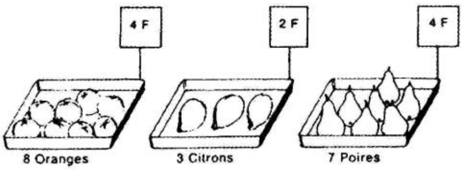
ACTIVITÉ 6

Analyse didactique sur le thème "Agrandissement et proportionnalité à l'école".
Le document en annexe 2 est remis aux étudiants et fait ensuite l'objet d'un échange à partir des questions posées.
Il est présenté comme un sujet possible de concours et le "corrigé" joint est remis aux étudiants à l'issue de la discussion (annexe 3).

ANNEXE 1

Ce problème est extrait d'un document de l'A.P.M.E.P. (questionnaire d'approfondissement pour l'évaluation en fin de sixième).

Voici trois plateaux de fruits à l'étalage d'un marchand de primeurs.
L'étiquette du premier plateau indique que l'on peut avoir 8 oranges pour 4 F, l'étiquette du second plateau indique 2 F pour les 3 citrons et celle du troisième plateau indique 4 F pour les 7 poires.
Quel est le fruit le plus cher ?
Quel est le fruit le moins cher ?



Voici quelques réponses d'élèves d'une classe de sixième (à qui il avait été demandé d'expliquer leur solution) :

Fabien. Le plus cher des fruits, c'est l'orange. Car si on divise 4 par 8, 2 par 3 et 4 par 7, ça nous donne 2, 1 et 1. Et donc le citron et la poire sont les moins chers.

Tony. J'ai fait 4 x 8 = 32 puis 2 x 3 = 6 puis 4 x 7 = 28 et je constate que les fruits les plus chers sont les oranges et les moins chers les citrons.

Cindy. Si on divise les 8 oranges par son prix, on obtient la valeur totale des 8 oranges (8 oranges à 4 F ça fait 2 F pour une orange).
Si on divise les 3 citrons par son prix, on obtient la valeur totale des 3 citrons (3 citrons à 2 F, ça fait 1,50 F pour un citron).
Si on divise les 7 poires par son prix, on obtient la valeur totale des 7 poires (7 poires à 4 F ça fait 1,75 F pour une poire).
Donc les plus chers sont les oranges, les moins chers sont les citrons.

Mathieu. Le fruit le plus cher est le citron car si on multiplie 3 par 2, ça fait 6: ça sera aussi cher que les oranges et les poires, mais il y aura un fruit de moins.
Le fruit le moins cher est l'orange, parce que 6 citrons ça ferait 4 F et 7 poires ça fait 4 F et 8 oranges ça fait 4 F : c'est le même prix, mais il y a une orange de plus que les autres fruits.

Chrystèle. Le fruit le plus cher c'est les oranges et les poires car il vaut 4 F ; le fruit le moins cher c'est les citrons car il vaut 2 F.

Ludovic. 8 : 4 = 2 F pour une orange ; 3 : 2 = 1,50 F pour un citron ;
7 : 4 = 1,75 F pour une poire. Le plus cher c'est l'orange. le moins cher c'est le citron.

Alexandre. En divisant le prix par le nombre de fruits, nous trouvons le prix d'un fruit. Orange : 0,50 F ; citron : 0,66 F ; poire : 0,57 F. Donc les citrons sont les plus chers et les oranges les moins chères.

Jérémie. J'ai cherché pour le même nombre d'oranges et de citrons, ça fait 24. 24 oranges coûtent 12 F et 24 citrons coûtent 16 F. Donc les citrons sont plus chers et les poires il n'y en a que 7 pour 4 F donc les oranges sont moins chères.

Alice. On calcule en faisant une division. 4 : 8 = 0,50 ; 2 : 3 = 0,66 ;
4 : 7 = 0,57. Le fruit le plus cher est le citron à 0,66 F et le moins cher est l'orange à 0,50 F.

Karine. Si on divise les oranges par 2, ça fait 4 oranges, alors le prix serait à 2 F. 4 oranges à 2 F et 3 citrons à 2 F il y a une orange de plus donc les oranges sont les moins chers et les citrons les plus chers.

Sébastien. Pour les oranges, j'ai trouvé 12. Pour les citrons, j'ai trouvé 6. Pour les poires, j'ai trouvé 11. Les plus chers c'est les oranges et les poires. les moins chers c'est les citrons.

Élodie. Pour 4 F on peut avoir 8 oranges, 6 citrons et 7 poires. Donc c'est les oranges les plus chers et les citrons les moins chers.

Cécile. L'orange coûte 50 centimes car 8 x 50 c = 400 c et 400 c c'est 4 F...

Cyrille. Avec 1 F on a 2 oranges mais moins de 2 avec les citrons et les poires. Donc les oranges sont moins chères.

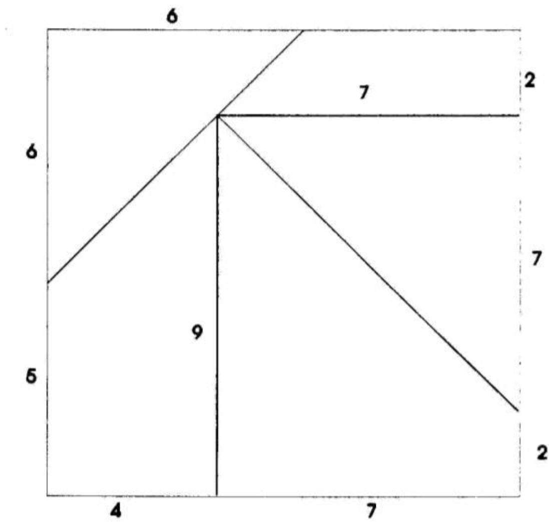
Peggy. Les 8 oranges coûtent 4 F et les 7 poires aussi. Alors le plus avantageux ce sont les 8 oranges à 4 F parce qu'il y en a plus et les plus chers c'est les poires mais les citrons encore plus car pour 4 F on n'en a que 6.

Julien. L'orange coûte 2 F, le citron 1,50 F et la poire 1,50 F. Donc le plus cher c'est l'orange, et le citron et la poire sont pareils.

ANNEXE 2
LE PUZZLE

Voici une situation pour une classe de CM2.

Les enfants sont regroupés par équipes de 4 ou 5. Chaque équipe reçoit le puzzle ci-dessous.



La consigne donnée est la suivante :

« Chaque équipe a reçu un puzzle et doit en reconstruire un autre, mais plus grand ! Pour cela il faudra respecter la règle suivante : "un segment qui mesure 4 cm sur le puzzle que je vous ai donné devra mesurer 6 cm sur le puzzle que vous construirez. "
De plus chaque élève de l'équipe doit fabriquer une seule pièce du puzzle.
Lorsque chaque élève de l'équipe aura terminé, vous assemblerez les pièces. Vous devrez alors obtenir un puzzle identique au modèle, mais plus grand. »

Après la recherche par équipes, les différentes solutions sont communiquées lors d'une mise en commun.

1) Quelles sont les connaissances mathématiques concernées par ce travail ?
2) Quel est l'intérêt d'organiser un travail de groupe dans lequel chaque élève a une seule pièce à reconstituer ?
3) Voici quelques-unes des procédures couramment utilisées par les élèves dans cette situation :

   - « On ajoute à chaque fois 2, puisque 4 doit faire 6 »
   - « Il faut ajouter la moitié de la longueur de départ »
   -« Il faut multiplier chaque longueur par 1,5 »
   - « Puisque 4 donne 6, 2 donne 3, 6 donne 9… »

Comparez ces différentes procédures et les représentations de la situation auxquelles elles correspondent.

4) Que peut attendre l'enseignant de la mise en commun ?
5) Voici deux modifications de la consigne :
   - *"ce qui mesure.4 cm devra mesurer 8 cm..."*
   - *"ce qui mesure 4 cm devra mesurer 7 cm..."*

Quelles modifications ces changements de consigne sont-ils susceptibles d'introduire dans les procédures utilisées par les élèves ?

ANNEXE 3
Éléments de réponse

1) Ce problème de la reproduction d'un puzzle permet d'aborder le thème de la **proportionnalité** dans un cadre géométrique.
II s'agit ici de reconnaître une situation de proportionnalité et de la traiter convenablement :

- remise en cause du modèle *"pour agrandir, il faut ajouter",*
- usage des fonctions numériques adaptées et des propriétés de linéarité.

Cela s'accompagne d'un travail sur les nombres (décimaux, éventuellement fractions) et sur les figures géométriques (reproduction de figures simples).

2) L'organisation du travail retenue ici a d'abord l'avantage de permettre une implication directe de chaque enfant.
Par ailleurs, il est important que le travail soit organisé par équipes et que chaque membre de l'équipe ait à réaliser une pièce, de façon à provoquer les échanges, la concertation et le débat sur le choix d'une procédure.

Mais surtout, c'est la reconstitution du puzzle par assemblage des pièces construites qui permettra **de valider** la stratégie utilisée par le groupe. Il s'agit ici d'une validation interne à la situation : les enfants peuvent déterminer seuls s'ils ont réussi, sans recours à une autorité externe.

Si un enfant ou une équipe avait la charge globale de l'ensemble du puzzle, une procédure vraisemblable consisterait à tracer d'abord un grand carré agrandi sur lequel s'effectueraient des tracés avant découpage. La justesse de la construction de chaque pièce ne pourrait plus être validée directement, puisque le puzzle serait de toutes façons reconstituable.

3) Seules les trois dernières procédures permettent de reconstituer le puzzle.

- La première procédure recouvre une erreur fréquente sur la conception de l'agrandissement. Pour beaucoup d'élèves « ***agrandir, c'est ajouter*** **».** Il est à noter que les tentatives infructueuses de reconstituer le puzzle dans ce cas, ne suffisent pas en général pour remettre en cause chez les élèves le modèle additif utilisé (ils se reprochent par exemple de mauvais dessins ou de mauvais découpages..). Il est donc important que le puzzle choisi soit tel que la reconstitution à l'aide de la règle "ajouter 2" conduise à des pièces nettement incorrectes.

- La seconde procédure traduit la persistance du modèle additif, mais cette fois-ci la **quantité à ajouter dépend de la quantité initiale**. C'est la traduction d'une fonction numérique du type $x \rightarrow x + x/2$ assez facilement identifiable compte tenu des données numériques choisies. Elle correspond à une représentation correcte de l'agrandissement, mais qui risque d'être fragile pour un éventuel réinvestissement.

- La troisième procédure s'appuie sur une représentation juste de l'agrandissement « ***agrandir, c'est multiplier*** ». C'est la reconnaissance d'une fonction multiplicative et du coefficient de proportionnalité.

- La quatrième procédure s'appuie aussi sur une représentation juste de l'agrandissement, liée cette fois non plus à un coefficient de proportionnalité, mais à la **linéarité**. Cette procédure permet de retrouver un résultat de plusieurs façons, notamment si elle est organisée autour de la constitution d'un tableau de valeurs.

4) La mise en commun permet de revenir sur la **validation**. La validation dans les groupes a permis de répondre à la question *"est-ce que ça marche ?". La* mise en commun est l'occasion d'essayer d'envisager la question « *pourquoi ça marche ?* »

Par ailleurs elle doit permettre **la confrontation des différentes procédures**. C'est une étape importante car elle permet à certains de s'approprier une solution qu'ils n'ont pas élaborée.

Elle permet également de **faire des rapprochements entre des procédures différentes** (par exemple, ceux qui ont été amenés à rechercher l'image de 1 en utilisant des propriétés de linéarité ont finalement mis en évidence le coefficient de proportionnalité).

C'est enfin l'occasion de confronter les élèves à différents aspects de la proportionnalité qu'on retrouvera dans d'autres situations.

5) **Le rapport de proportionnalité est une variable didactique essentielle** de la situation et une analyse a priori est nécessaire de la part de l'enseignant avant de faire un choix sur cette variable.

La consigne "4 *cm devient 8 cm"* a toutes les chances de conduire directement les élèves à doubler toutes les mesures et d'autres procédures ont peu de chances d'apparaître. "L'évidence" de cette procédure risque de faire perdre l'intérêt du travail sur la proportionnalité et ses liens avec l'agrandissement.

La consigne *"4 cm devient 7 cm"* conduira à rendre plus délicat le recours à la deuxième ou la troisième procédure. En effet, le coefficient d'agrandissement n'étant plus aussi simple, son utilisation devient plus délicate pour des enfants de CM2 : d'autre part l'équivalent de la seconde procédure consisterait à *"ajouter la moitié de la longueur initiale et encore la moitié de cette moitié"...ce* qui rend faible sa probabilité d'apparition.

Cette nouvelle consigne conduit donc à marquer plus nettement l'opposition entre le modèle additif *("ajouter 3")* et celui utilisant la linéarité. On a pu constater que certains enfants ayant réussi avec la consigne "*4 cm devient 6 cm"* régressent avec cette nouvelle consigne, revenant quelque temps à un modèle additif avant de pouvoir à nouveau le rejeter.

Bibliographie

- COPIRELEM, *"Agrandissement de puzzle"* in "Aides pédagogiques pour le CM", publication APMEP n°64 , p. 80, Situations problèmes 1987.

- R. Charnay, *"Des problèmes pour apprendre en CM2 et 6ème*", IREM Lyon,. p. 26, 1987.

Etude du format A4

Catherine Houdement - Marie-Lise Peltier

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.

Cet article présente une situation d'homologie pour les étudiants (PE1) se préparant au professorat des écoles, fondée sur les relations liant les différents formats de papier classique[1] et permettant d'illustrer des aspects de la proportionnalité dans différents cadres géométrique, numérique, graphique, en particulier de mettre en réseau coefficient de proportionnalité, pente de la droite (représentation graphique) et théorème de Thalès.

OBJECTIFS

Objectifs mathématiques

- Rencontrer la proportionnalité dans divers cadres
- Approcher $\sqrt{2}$ par les aires
- Voir des exemples de figures semblables (notion de coefficient de forme d'un rectangle)
- Eventuellement sensibiliser à la notion de suite géométrique et de limite de suite

Objectifs didactiques

- Notion de cadres et de changement de cadres
- Notion de preuve
- Différentes phases d'une situation d'apprentissage

ACTIVITÉ

Matériel

Par personne : trois feuilles de format A4 , calculatrices, règles, compas

Organisation

Travail par groupes de quatre

[1] Origine : *Faire des Mathématiques* , Deledicq ; Lassave. Editions Cedic Nathan 1977

Consigne 1
*"Vous disposez d'une feuille rectangulaire que l'on appellera le rectangle F0. Il s'agit d'obtenir d'autres rectangles par pliage et découpage. La consigne **C** de découpage est la suivante : vous pliez le rectangle, dans sa plus grande dimension, en deux parties exactement superposables, vous découpez et vous gardez un rectangle. Ainsi, à partir de F0 vous obtenez F1.*
*Par un procédé récursif, à partir de F1 avec la consigne **C**, vous obtenez F2, puis de proche en proche F3, F4, F5.*
*Vous obtenez donc une famille de rectangles **F** : F0, F1, F2, F3, F4, F5. "*

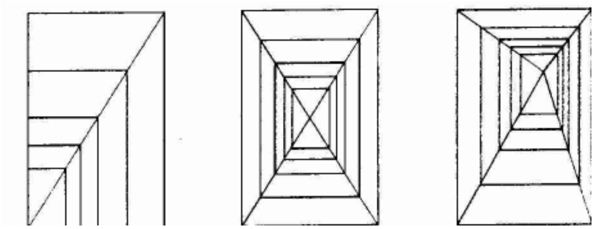
Consigne 2
"Trouvez un empilement régulier, un empilement que vous pouvez décrire, de ces six rectangles. "

Synthèse
- Description des empilements.

Dans la suite la réflexion s'appuie sur les empilements « réguliers » qui gardent parallèles les côtés des différents rectangles.

- Constat de l'alignement des sommets homologues sur une droite : ces droites passent le centre des rectangles ou par un point particulier intérieur à chaque rectangle.

Si le premier empilement réussit, il en est de même des autres.



L'existence de ces dispositions particulières pour une famille de rectangles sera notée sous le nom propriété **P**.

Consigne 3
"Vous laissez cette famille F de côté et vous prenez une nouvelle feuille. Construisez un rectangle R0 de dimensions (y_0, x_0)*, qui ne fait pas partie de la famille **F** et tel que :*

$$y_0>x_0>y_0/2.$$

*Construisez la famille (**R, C**) obtenue à partir de R0 et de la consigne **C***

Question : *"Peut-on empiler les rectangles **R** pour obtenir la propriété **P ?**"*

Synthèse

Pour une famille (**R, C)** construite à partir de R0 quelconque, deux sous familles ont la propriété **P** :

- (R0, R2, R4,...) a la propriété P,
- (R1, R3, R5....) a la propriété P.

En général, la famille **R** entière n'a pas la propriété **P**.

Consigne 4

"Cherchez quelle est la condition sur le rectangle de départ pour que la famille entière construite à partir de ce rectangle et de la consigne ***C*** *vérifie la propriété* ***P*** *? »*

Synthèse

On fait ensemble les premiers constats pour la famille **F**.

- Il existe une certaine disposition pour laquelle les quatre sommets sont alignés sur des droites passant par le centre des rectangles et leurs sommets.

- **Les diagonales de chaque rectangle font un angle constant** avec les côtés homologues des rectangles.

- **Le rapport longueur sur largeur est le même** pour tous les rectangles.

- Les rapports x_i/x_j et y_i/y_j sont égaux pour tous i et j

- Si on représente le rectangle Fi par le point Fi de coordonnées (x_i, y_i) dans un repère orthonormé, les points F0, Fl,..., F6,... , sont **alignés sur une droite qui passe par l'origine.**

- Toutes ces propriétés sont vraies pour les familles (R0, R2, R4…) et (R1, R3, R5…), mais ces deux familles ne respectent pas la condition P.

Voici le tableau des coordonnées approchées des points Fi et la relation des dimensions des rectangles R(2i) :

F0	21	29,7
F1	14,85	21
F2	10,5	14,85
F3	7,42	10,5
F4	5,25	7,42
F5	3,71	5,25
F6	2,62	3,71

R0	x_0	y_0
R2	$x_0/2$	$y_0/2$
R4	$x_0/4$	$y_0/4$
R6	$x_0/8$	$y_0/8$

Institutionnalisation

Pour une famille de rectangles qui vérifie la propriété **P**, on dit que :

- le tableau des dimensions exactes :

x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3.
x_4	y_4
x_5	y_5
x_6	y_6

est un **tableau de proportionnalité** de coefficient **k** : $y_i = \mathbf{k} \times x_i$ pour tout i.

- la suite des longueurs est **proportionnelle à** la suite des largeurs

- les rectangles ont tous **le même coefficient de forme** (rapport longueur sur largeur)

- les rectangles sont **homothétiques** les uns des autres et le rapport d'homothétie est toujours le même.

Pour rechercher le coefficient de proportionnalité k de la famille F, plusieurs méthodes sont possibles :

- **dans le cadre numérique**

  - calcul des rapports x/y dans les tableaux de nombres
  - utilisation des aires : aire de F0 = 2 aires de F1   etc.

- **dans le cadre graphique**

  Les points de coordonnées (x_i, y_i) étant sensiblement alignés, détermination graphique sur papier millimétré de la pente de la droite.

- **dans le cadre géométrique**

  Utilisation du théorème de Thalès (en raison de la présence de triangles homothétiques) permettant de faire le pont entre le cadre graphique et le cadre numérique.

Conclusion

Une condition nécessaire pour que (**R, C)** vérifie la propriété **P** est que **R** soit une famille de rectangles ayant tous même coefficient de forme et que ce coefficient soit $\sqrt{2}$.

Cette condition est aussi suffisante après vérification.

ANALYSE DE CETTE ACTIVITÉ

Analyse mathématique

Cette situation permet dans un premier temps d'étudier de façon particulièrement bien détaillée, les propriétés numériques, graphiques et géométriques liées aux fonctions linéaires. Il est donc possible de faire une synthèse sur les notions de **listes de nombres proportionnels**, **de fonction linéaire**, **d'homothétie,** de **figures semblables** et de relier le **théorème de Thalès** aux **listes de nombres proportionnels**.
Elle permet également d'introduire la notion de **coefficient de forme des rectangles** et de travailler sur la transformation du coefficient d'agrandissement des mesures quand on passe des longueurs aux aires.
Elle permet d'approcher, dans ses prolongements, la notion de **limite d'une série géométrique**.

Analyse didactique

- La situation nécessite d'analyser les empilements géométriques, de faire des hypothèses sur les relations numériques reliant les dimensions théoriques des rectangles et de vérifier ces hypothèses sur les découpages : elle incite donc à des raisonnements prenant appui sur des objets sensibles.

- Elle permet de discuter du **concept de preuve** : preuves pragmatiques par observation des rectangles découpés et mesurage de leurs dimensions (avec une estimation des erreurs de tracé et de mesurage), preuves théoriques par étude des relations entre les longueurs et les aires des rectangles **:**

Ainsi la **pluralité des preuves** permet à chacun d'accéder à une certaine conviction et on constate que les preuves les plus rigoureuses ne sont pas nécessairement **les plus convaincantes**. Mais ce sont celles-ci qui ont leur place dans les mathématiques actuelles.

- La situation permet de définir la **notion de cadres** et celle de **changement de cadres**. En effet le problème est posé dans un cadre géométrique, *construire des rectangles et observer des propriétés d'alignement.* La disposition des rectangles avec un sommet commun et des côtés alignés amène à utiliser une représentation graphique (passage au cadre graphique), qui peut induire une étude numérique des listes de dimensions (passage au cadre numérique).

Ce thème de travail, outre ses objectifs mathématiques et didactiques, permet d'enrichir la culture mathématique de l'étudiant et de côtoyer d'autres domaines (technologie, arts plastiques, arts graphiques), notamment par ses prolongements.

PROLONGEMENTS

Il est utile d'envisager avec les étudiants un **point culturel** sur les familles de rectangles semblables et de montrer l'utilité des notions mathématiques pour des organisations techniques, notamment la question des agrandissements (id est sans déformation, id est l'obtention de figures semblables)

- les **formats A3 et A4** : la feuille de départ, A0, a une aire de 1 m^2 : les formats suivants sont obtenus selon le partage C ; on retrouve que le coefficient de forme est $\sqrt{2}$ (pour faciliter la coupe en deux et les réductions en photocopie). On peut donc calculer les dimensions des feuilles AO à A7.

- les **formats papier B0 à B6**, aussi de coefficient de forme $\sqrt{2}$: il s'agit également de rectangles semblables à leur moitié, avec B0 d'aire 1,5 m^2.

- les **formats photos**, rectangles de coefficient de forme 1,5 , semblables entre eux, mais non semblables à leur moitié :
  13 x 19,5   18 x 27   24 x 36   30 x 45   50 x 75

- les **rectangles d'or**, historiquement célèbres dans l'art et l'architecture, de coefficient de forme $(\sqrt{5}+1)/2$ (le nombre d'or), semblables entre eux, mais non semblables à leur moitié.

Cette activité peut donner lieu à **d'autres prolongements mathématiques** :

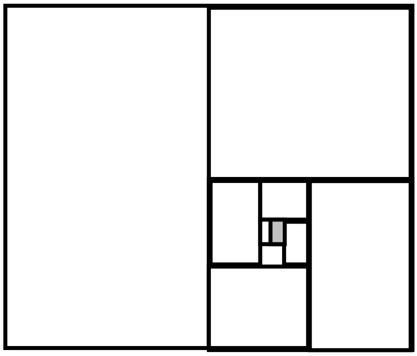
1 - Tracer une **représentation graphique** sur papier millimétré des points F0, F1 jusqu'à Fn à la règle et au compas.

2 - Construire, à la règle et au compas, une famille de rectangles type **R homothétiques et dont le coefficient de forme** est donné.

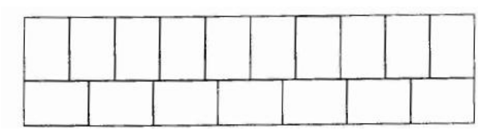
3 - Comprendre la notion de limite de la **suite géométrique** (Sn) de raison 1/2 en considérant Sn comme l'aire du rectangle de dimensions Xn et Yn avec
(Xn) suite géométrique de raison 1/ $\sqrt{2}$
(Yn) suite géométrique de raison 1/ $\sqrt{2}$
Ce qui correspond aux rectangles Fn obtenus précédemment.

En effet on peut approcher la notion de **limite de la série géométrique** (Sn) en juxtaposant habilement les différents rectangles et en étudiant l'aire de l'assemblage.

L'aire du grand cadre rectangle est 2 et la différence $2 - (1 + 1/2 + ...+1/2^n)$ vaut $1/2^n$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini, comme le montre la diminution progressive de l'aire du rectangle grisé Fn quand n devient grand.



4- **Approcher** $\sqrt{2}$ **par des fractions** par la méthode du point de rencontre : si **L** et **l** sont respectivement la longueur et la largeur d'un rectangle de coefficient de forme **k** on cherche, à l'aide d'une disposition particulière de rectangles de dimensions **L** et **1** (comme ci-dessous), deux entiers **p** et **q** tels que **qL** = **pl**
On obtient ainsi des approximations rationnelles de **k** (par exemple ici, 10/7 pour $\sqrt{2}$).
Bien entendu cette méthode ne peut prouver que k est éventuellement irrationnel, mais elle permet de parler avec les étudiants sur les notions de commensurabilité.



PAVAGE ET PGCD.

Catherine Houdement - Marie-Lise Peltier

Extrait des Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Pau 1992.

Cet article présente une situation d'homologie pour les étudiants (PE1) se préparant au professorat des écoles. La résolution et l'analyse d'un problème[1] *permet de dégager les notions de PGCD, de partie aliquote commune, d'irrationalité, puis de pointer quelques concepts de didactique : aspects outil-objet d'une notion, variable didactique, seuil épistémologique, changements de cadres.*

OBJECTIFS

Objectifs mathématiques

Il s'agit de proposer aux étudiants une situation durant laquelle ils vont "faire des mathématiques" **:** résoudre un problème, d'apparence géométrique, en utilisant un outil mathématique numérique, le PGCD, et prétexte à une réflexion plus poussée sur la "nature" des nombres-mesures (rationalité et irrationalité, incommensurabilité de deux réels).

Objectifs didactiques

Certaines notions de didactique peuvent être pointées dans cette activité (caractère outil et objet d'une notion, variable didactique, preuve, contextualisation...), mais elle reste à visée essentiellement mathématique.

ACTIVITE

Problème général présenté aux étudiants

"Il s'agit de paver un rectangle de dimensions données avec des carrés tous exactement superposables, les plus grands possible. Nous appelons "paver" le fait de placer les carrés bord à bord, sans chevauchement, sans trous, sans débordement. On pourrait encore dire qu'il s'agit de réaliser un "carrelage" du rectangle."

---

[1] Origine : problème tiré de *Problème ouvert et Situation Problème* (IREM de Lyon N° 64, 1988).

Phase 1 : rectangles de **dimensions entières**.

Objectif
Faire émerger la notion de PGCD en tant qu'outil de résolution du problème.

Consigne 1
"Vous devez carreler un rectangle de dimensions 42 cm sur 96 cm."

Les diverses propositions sont recensées. Si l'échec est total, la nouvelle consigne est de carreler un rectangle de 8 cm sur 12 cm, afin de permettre un dessin effectif du rectangle et de ses carrelages.

Remarques

Les étudiants proposent généralement, dans un premier temps des carrés de 2 cm sur 2 cm, et progressivement essaient d'autres valeurs.

Certains étudiants ne sont pas convaincus que des carrés de 6 cm sur 6 cm sont les plus grands possible répondant à la question, ils essaient des valeurs décimales non entières supérieures à 6.

Consigne 2 : reprise de la consigne 1 avec divers rectangles :

462 cm sur 165 cm	pour qu'il soit impossible de faire le dessin.
4620 cm sur 1650 cm	pour mettre en évidence la propriété : PGCD (ka, kb) =k PGCD (a, b)
105 cm sur 176 cm	pour dégager la notion de nombres premiers entre eux.
67320 cm sur 245700 cm	pour faire évoluer les procédures de recherche et se libérer des unités.

Synthèse

1 - Quelles procédures ont été utilisées pour résoudre le problème ?
- L'utilisation des dessins, mais qui s'est vite révélée coûteuse.
- Le tâtonnement et la recherche de diviseurs successifs.
- La décomposition des nombres en facteurs premiers, soit par décompositions multiplicatives successives, soit avec l'algorithme traditionnel.

2 - Quelle propriété vérifie le côté du carré répondant à la question ?
- C'est un diviseur des deux nombres, pour que l'on puisse "paver"
- C'est le plus grand diviseur des deux nombres, pour que ce soit le carré le plus grand possible.

La notion mathématique ainsi dégagée est celle de **plus grand diviseur commun** à deux nombres.

3 - Quelles propriétés ou définitions ont été rencontrées ?

- $PGCD(ka, kb) = k\, PGCD(a, b)$
- Si $PGCD(a, b) = 1$, a et b sont dits **premiers entre eux.**

Institutionnalisation sur les points suivants

- Définition du **PGCD** de deux nombres entiers.
- Définition de la notion de nombres entiers **premiers entre eux.**
- Recensement des **méthodes de recherche du PGCD** de 2 nombres entiers :

  - **1ère méthode,** utilisant la structure factorielle de **Z** : décomposition en facteurs premiers des deux nombres.

  - **2ème méthode**, utilisant la structure euclidienne de **Z** : algorithme d'Euclide (cf. annexe 1).
    - ➢ Présentation géométrique de la méthode des soustractions successives (utilisant la propriété **si d/a et d/b alors d/a - b**) : antéphérèse.
    - ➢ Algorithme d'Euclide sous sa forme usuelle. Traitement informatique de cet algorithme.
    - ➢ Lien avec les fractions continues.

Phase 2 : rectangles de dimensions **non entières.**

On étend maintenant le problème de l'existence d'un carré le plus grand possible permettant de paver un rectangle de **dimensions quelconques**.

Objectifs
- Faire émerger la notion de "partie aliquote commune" à deux rationnels.
- Poser le problème de l'irrationalité de certains nombres.

Consignes successives

- *Paver un rectangle de 72,45 sur 61,2.*
- *Paver un rectangle de* $\frac{21}{15}$ *sur* $\frac{49}{14}$.
- *Paver un rectangle de* $\frac{25}{3}$ *sur* $\frac{40}{11}$.

Recensement des résultats et des procédures utilisées.

72,45 et 61,2 sont remplacés par $\frac{7245}{100}$ et $\frac{1620}{100}$: des méthodes utilisées pour les entiers sont réinvesties.

$\frac{21}{15}$ et $\frac{49}{14}$ remplacés par $\frac{7}{5}$ et $\frac{7}{2}$; or $\frac{1}{5}=\frac{1}{10}\times 2$ et $\frac{1}{2}=\frac{1}{10}\times 5$
donc $\frac{7}{10}$ convient.

$\frac{25}{3}$ et $\frac{40}{11}$ sont remplacés par $\frac{275}{33}$ et $\frac{120}{33}$; des méthodes utilisées pour les entiers sont réinvesties (soit décomposition en facteurs premiers, soit algorithme d'Euclide).

Synthèse

1 - Les **décimaux** sont "naturellement" transformés en **fractions décimales** pour travailler à nouveau sur les entiers ; $\mathbf{D}^+$ se trouve naturellement plongé dans $\mathbf{Q}^+$.

2 - L'extension à $\mathbf{Q}^+ - \mathbf{D}^+$ se fait "en douceur", le dénominateur commun retrouve son sens et la "commune mesure" sa définition.

3 - Le côté du carré solution est un nombre ayant des propriétés comparables à celles du PGCD lorsque les dimensions étaient entières, c'est la **commune mesure** aux deux dimensions du rectangle ou encore la **partie aliquote commune** aux deux nombres qui les mesurent.

Nouvelle consigne

"Est-il toujours possible de paver un rectangle avec des carrés ?"

Généralement la réponse des étudiants est « oui ».
On entre là dans la nécessaire distinction entre l’approche pragmatique appuyée sur des dessins et sur le réel (géométrie de l’ingénieur) et la réflexion mathématique théorique.
Ceci va permettre de pointer l’existence de ces deux « points de vue » sur la situation ; de parler de la notion théorique d'**incommensurabilité** de certaines grandeurs ; de montrer qu'il n'est par exemple pas possible, en géométrie théorique, de paver un rectangle de dimension 1 et $\sqrt{2}$ avec des carrés.

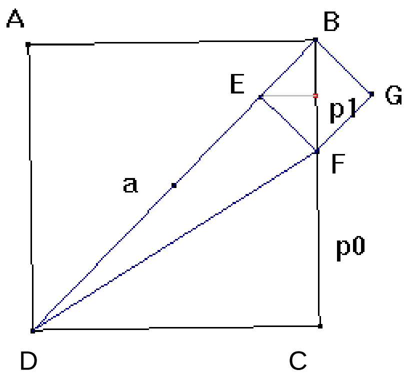
Ici il est possible de donner un aperçu historique et philosophique de ce problème.

Dans le livre X, Euclide utilise pour démontrer l'incommensurabilité de deux grandeurs une méthode analogue à celle de la recherche du pgcd par soustractions successives.
« *Etant donné deux grandeurs inégales et la plus petite retranchée de la plus grande, si le reste ne mesure jamais le reste précédent, les deux grandeurs sont incommensurables*. »

On s'arrête dès que l'on trouve deux restes successifs p_n et p_{n+1} qui se trouvent dans le même rapport que les grandeurs initiales a et b.

$\frac{a}{b} = \frac{p_n}{p_{n+1}}$: les deux grandeurs a et b sont alors incommensurables.

On peut également proposer une démonstration géométrique de l'**incommensurabilité de 1 et de** $\sqrt{2}$ s'appuyant sur cette propriété.
On utilise alors la figure suivante.



$a = \sqrt{2}\ b$

a = BD b = BC = DE
La perpendiculaire en E à (DB) coupe (BC) en F.
$p_0 = a - b = BD - BC = BD - DE = BE$
$p_1 = b - p_0 = BC - BE = BC - FC = BF$

On montre aisément que $\frac{p_1}{p_0} = \frac{a}{b}$ ce qui montre l'incommensurabilité de 1 et de $\sqrt{2}$.

On peut prolonger cette méthode par le **développement en fraction continue de** $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

Remarque

Le problème de l'incommensurabilité de 1 et de $\sqrt{2}$ revient à celui de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, mais il est à rappeler que deux nombres irrationnels peuvent mesurer des grandeurs commensurables par exemple $3\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ puisque leur rapport est 3.

Exemples d'autres rectangles "classiques" que l'on ne peut théoriquement pas paver avec des carrés :
- les "rectangles d'or" : rectangles de coefficient de forme $(1+\sqrt{5})/2$
- les rectangles correspondant aux formats standard des feuilles de papier (A_4, A_3, A_2...) : rectangles de coefficent de forme $\sqrt{2}$.

Il est intéressant de **noter la différence entre le problème théorique et la manipulation pratique**, car il est évidemment possible matériellement de paver la feuille A_4 avec des carrés puisqu'il s'agit alors de travailler sur des valeurs approchées décimales qui sont donc toujours "commensurables".

Institutionnalisation

Pour traiter le problème du pavage par des carrés d'un rectangle de **dimensions décimales ou rationnelles**, la méthode est **identique à celle utilisée pour les entiers**.

La notion dégagée est alors celle de **"partie aliquote"** à deux rationnels (ou deux décimaux).

Le problème n'a pas de solution théorique si les deux dimensions sont **incommensurables**, c'est à dire si les deux nombres qui les mesurent ont un rapport irrationnel.

ANALYSE DE L'ACTIVITE

1 - Analyse mathématique

- Notion de **PGCD**, avec approche de diverses méthodes pour le trouver.
  Vision "géométrique" du PGCD.

- Réinvestissement de connaissances numériques : critères de **divisibilité**...

- Différenciation de **N**, **D**, **Q**, **R** "en acte".

- Mise en avant de la distance entre problème spatial (où le rapport des longueurs mesurées, diagonale sur côté du carré, peut être rationnel) et modèle théorique (où ce rapport ne l'est pas). Place de l'approximation.

2 - Analyse didactique

Diverses notions didactiques peuvent être pointées dans cette séquence.

- L'aspect **outil** d'une notion (dans la construction des connaissances par dialectique outil-objet).

  Le **PGCD** de deux nombres est introduit ici en tant qu'outil de résolution du problème et non présenté en tant qu'objet de savoir par une définition. Ceci permet de donner du sens à la notion de PGCD.
  Ainsi cette situation peut se poser comme situation a-didactique du PGDC.

  A l'issue de la phase d'institutionnalisation, le PGCD a acquis un statut d'**objet** mathématique ayant sa place dans "l'édifice" des connaissances mathématiques.

- **Cadres**
Le problème est posé dans un cadre géométrique, mais une résolution efficace amène à basculer dans un cadre numérique : on a là un exemple de jeu de cadres, ce basculement est en effet anticipé par le professeur, puisqu'il vise, lui, l'acquisition d'une notion numérique.

- **Variable didactique**
  - dans la phase 1, le choix des dimensions des différents rectangles pour faire évoluer les procédures de calcul du côté du carré est un exemple de variable didactique. On note un saut informationnel quand les dimensions choisies notamment empêchent le recours effectif au dessin.

- dans la phase 2, les dimensions du rectangle imposent des méthodes de démonstration de niveaux fort différents ; à ce titre ce sont des variables didactiques.

- La notion de **preuve** : cette situation permet de montrer les limites de la preuve pragmatique et la nécessité de preuves intellectuelles.

- La **contextualisation** d'une notion : cette contextualisation, ici la décision d’aborder la notion de PGCD en utilisant un point de départ géométrique, est à la charge du maître, c'est sa pertinence qui assurera la prise de sens de la notion par les élèves.

La division en formation initiale

Hervé Péault - Denis Butlen

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques - Angers 1995.

Il s'agit d'un plan de cours, principalement sur la division euclidienne dans N, destiné à des étudiants de première année de formation professionnelle à l'enseignement des mathématiques pour des élèves de 8 à 11 ans.
Il a toujours une pleine actualité.

Ce plan de cours reprend et développe la progression proposée par Hervé Péault dans les actes du colloque COPIRELEM de Rouen [8]. Il essaie également de traiter ce thème dans la perspective de la préparation au concours de première année. Il reste que nombre des activités proposées peuvent s'adapter à d'autres contextes, tant de formation initiale que de formation continue.

Nous proposons une suite d'activités qui forment un tout mais il est rare que les durées de formation imparties puissent permettre de tout traiter intégralement. Des adaptations seront donc toujours nécessaires.

Certaines activités, notamment les deux premières, peuvent d'ailleurs être proposées dans d'autres contextes que celui de l'étude de la division.

Objectifs généraux

- Rappel de certains concepts mathématiques autour de la division, euclidienne ou non,

- Analyse des problèmes de division et des procédures de résolution,

- Étude de notions élémentaires de didactique,

- Apport d'éléments d'information permettant la construction et l'analyse de séquences à l'école élémentaire.

Première situation
"Concertum"[1]

Objectifs

- Faire apparaître l'utilisation de la division comme procédure experte pour la résolution d'un problème.

- Donner du sens, à partir de l'analyse d'une activité, à des notions de didactique telles que dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation, de l'institutionnalisation.

Remarque

Cette situation peut aussi être utilisée facilement en dehors de l'étude de la division. L'intérêt qu'elle suscite généralement, l'engagement des participants, le travail d'équipe qu'elle nécessite, les débats qu'elle fait surgir, les rétroactions qu'elle provoque, ... en font une situation riche et intéressante comme point de départ à une réflexion plus générale sur les problèmes d'apprentissage.

Matériel

Pour chacun des participants : 10 cartons numérotés de 0 à 9 (et au-delà si on veut utiliser certains prolongements du jeu), de la taille de cartes à jouer (type bristol). Chacun tiendra ses cartons en main comme pour un jeu de cartes.

Au cours du jeu, chaque joueur sera amené à choisir un nombre de 0 à 9 et manifestera son choix en sélectionnant puis en montrant l'une de ses cartes. On peut adopter aussi un autre dispositif sans ce matériel : lorsqu'un joueur choisit un nombre, il l'écrit sur une feuille de papier et c'est la feuille qui sera montrée.

---

[1] Nous reprenons ici le titre ***Concertum*** donné à cette activité dans ***Jeux 2 : Jeux et activités numériques*** (Publication APMEP n°59, coordonnée par H.Péault, 1985).

Il semble qu'elle soit connue depuis longtemps et attribuée à un professeur d'informatique, Michel LUCAS, qui l'utilisait dans le cadre de formations informatiques pour étudier les algorithmes correspondant aux stratégies retenues.

Suzy GAIRIN-CALVO et Joël BRIAND y ont aussi fait référence en formation d'instituteurs sous le nom *Le compte est bon collectif* dans les Actes du Colloque COPIRELEM d'Angers de mai 1987.
Certains éléments d'analyse proposés par Joël Briand ont d'ailleurs été repris ici.

Organisation

Les étudiants sont par équipes de 3. Si le nombre de participants n'est pas un multiple de 3, on peut faire jouer un rôle par deux personnes à la fois, celles-ci effectuant les choix chacune leur tour. Il peut aussi être intéressant de confier à une ou deux personnes le rôle d'observateur des stratégies des différentes équipes.

Le choix préalable d'équipes de 3 nous a paru le plus intéressant pour la diversité des stratégies, mais on pourrait aussi commencer avec des équipes de 4, voire plus.

Présentation du jeu

Lorsque chaque joueur a bien ses cartes en main, le professeur donne la consigne suivante (éventuellement en la mimant pour faciliter la compréhension).

> *Je vais vous proposer un nombre entier, que j'appellerai "nombre-cible". Chacun choisira un carton et un seul, et l'objectif de chaque équipe sera que les 3 cartons choisis par les différents membres de l'équipe aient pour somme le nombre-cible.*
> *Faisons un premier essai. Dans quelques instants je vais vous indiquer un nombre. Êtes-vous prêts ?*

Cette dernière question peut laisser penser qu'il faut être prêt tout de suite. On peut la remplacer par *"Indiquez-moi quand vous êtes prêts"* qui laisse entendre qu'il y a "quelque chose à préparer".

L'enjeu est ici de comprendre qu'il va falloir, dans chaque équipe, se concerter préalablement au jeu et que, sinon, le jeu est un jeu de hasard qui n'a pas d'intérêt. En ce sens, la façon de poser la question, le ton, l'attitude du professeur... vont déterminer fortement le comportement des étudiants.

Il arrive que, malgré un certain scepticisme, les joueurs se déclarent tout de suite prêts. Après un, voire plusieurs essais, évidemment infructueux, ils finissent par demander l'autorisation de se concerter au préalable.

Le plus souvent, deux questions sont posées d'emblée par les participants : "Est-ce *qu'on peut se concerter ?"*, question à laquelle il est évidemment répondu par l'affirmative, et *"Est-ce que le nombre-cible peut être n'importe quel nombre ?"*, question à laquelle il n'est pas nécessaire de répondre et qu'on peut retourner. Un court débat entre les participants convainc en général assez vite que les nombres-cibles ne peuvent être choisis que parmi les naturels de 0 à 27.

Phase 1

Le professeur propose quelques essais (diversifier le choix des nombres-cibles à la fois entre petits et grands nombres, ainsi qu'entre multiples et non multiples de 3). Lorsque chaque équipe montre ses cartons, il fait vérifier par les autres le résultat obtenu.

Il y a de temps en temps des erreurs, soit que la stratégie de l'équipe soit incorrecte, soit plus souvent que l'un des joueurs l'ait mal comprise. Il est fréquent que des équipes utilisent une stratégie valable pour tous les nombres sauf 26 (cf. analyse des procédures ci-après). Il est donc conseillé de ne proposer 26 comme nombre-cible qu'après plusieurs essais.

En cas de difficulté, le professeur informe que chaque équipe peut demander un temps mort pour une nouvelle concertation.

Cette phase s'arrête lorsque toutes les équipes commencent à fournir des choix corrects.

Phase 2

Le professeur donne la consigne suivante

> *Dans chaque équipe, vous allez prendre un temps de réflexion pour rédiger un message écrit expliquant la stratégie choisie, de la façon la plus claire possible, afin que d'autres soient capables de l'utiliser. Les messages rédigés seront ensuite échangés entre les équipes, et nous jouerons à nouveau, chaque équipe devant obligatoirement utiliser la stratégie indiquée sur le message reçu.*
>
> *Sur vos messages, il n'est pas nécessaire de réécrire la règle du jeu, tout le monde la connaît maintenant. Vous devez par contre indiquer clairement le rôle de chacun des membres de l'équipe. Attention : il ne s'agit pas de mettre les autres en difficulté. Au contraire, les messages doivent simplifier au maximum la tâche des récepteurs.*

Lorsque toutes les équipes ont terminé leur rédaction, chacune donne son message à une autre équipe. Chaque équipe est alors invitée à se concerter de façon à pouvoir jouer en utilisant la stratégie décrite sur le message reçu. Si certains messages sont jugés insuffisamment compréhensibles, il est possible de demander des éclaircissements aux rédacteurs, mais uniquement par écrit.

Quand tout le monde est prêt, on joue à nouveau, chaque équipe devant obligatoirement utiliser la stratégie décrite sur le message reçu. Lorsque les cartons sont levés, chaque équipe vérifie que les utilisateurs de sa stratégie l'ont correctement utilisée. Les éventuelles contestations entament la phase suivante.

Phase 3

Chaque équipe doit essayer de deviner et formuler la stratégie utilisée par les autres. Pour cela, ce n'est plus le professeur qui propose les nombres-cibles, mais les étudiants.

Chaque stratégie fait l'objet d'un débat où sont examinés sa pertinence, sa commodité d'utilisation, ainsi que la clarté des messages associés.

Comme amorce aux phases suivantes, le professeur propose de débattre les questions

- *y a-t-il une stratégie meilleure que les autres ?*
- *quelles sont les qualités d'une bonne stratégie ?*

Phase 4

Cette phase, comme la suivante, a pour objectif de faire évoluer les stratégies en faisant associer la notion de "bonne" stratégie à celle de stratégie "généralisable". Cette association est parfois formulée naturellement par les étudiants, mais il peut aussi être nécessaire que le professeur la provoque.

Le même jeu est repris, mais avec cette fois des équipes de 4 (ou de 5, ou de 6, ou de 7, ... suivant le nombre de personnes du groupe), l'intervalle des nombres-cibles possibles variant en conséquence.

Phase 5

Cette phase se déroule toujours avec le même jeu et les mêmes groupes, mais cette fois on n'utilise que les cartons de 0 à 7 (on peut aussi utiliser des cartons de 0 à p avec $p > 9$).

A la fin, c'est tout le groupe d'étudiants qui forme une seule équipe et doit se concerter pour jouer, une première fois avec les cartons de 0 à 9, une seconde fois avec les cartons de 0 à 7.

A ce stade, c'est habituellement la procédure décrite en n° 1 ci-après qui est retenue. La dernière phase aura pour objectif de faire formuler cette procédure dans le cas le plus général.

Phase 6

Le professeur donne à chercher le problème suivant :

> *On dispose des cartons de 0 à p ; les joueurs sont par équipes de k joueurs ; le nombre choisi est n ; explicitez dans ce cas la stratégie que vous avez retenue dans la phase précédente.*

Ce travail s'avère parfois difficile et il peut d'ailleurs être différé à une prochaine séance pour laisser le temps d'une recherche individuelle. Il se terminera par une écriture précise sur le plan mathématique.

Prolongement
Analyse de l'activité

Invités à réagir sur cette activité, les étudiants posent parfois la question : "peut-on *la faire en classe avec les élèves, et à quel niveau ?".*

D'ailleurs, lorsqu'elle est proposée en formation continue, elle conduit souvent les maîtres de CM ou les professeurs de collège à souhaiter faire l'essai avec leur classe.

Ce souci de transposition ne fait pas partie des objectifs que nous avons retenus, mais il dénote un intérêt sur lequel il est possible de s'appuyer pour analyser l'activité :

> *Qu'est-ce qui vous paraît intéressant dans cette activité ? Du point de vue du fonctionnement intellectuel, comment caractériseriez-vous les différentes étapes ? Si on reprend depuis le départ avec pour objectif la connaissance et la compréhension de la formule élaborée à la fin, quels autres scénarios d'enseignement pourrait-on imaginer ?*

Ce questionnement (ou un autre...) peut être un point de départ pour permettre au professeur de pointer un certain nombre de notions didactiques, de façon plus ou moins développée selon le public.

1) On trouve dans cette activité **différents types de situations**, notamment :

- des **situations d'action** : c'est en particulier le cas dans la première partie où il s'agit de se créer un modèle permettant de résoudre le problème posé. Ce modèle peut être remis en cause en fonction des rétroactions provoquées par les résultats obtenus en appliquant la stratégie retenue.

- des **situations de formulation**: à la fois au début où chaque membre de l'équipe doit faire comprendre son idée aux autres membres (il y a alors souvent mélange de formulations écrites et orales, les formulations orales dominant le plus souvent) puis dans la seconde phase où la pertinence de la formulation est l'objectif explicite.

- des **situations de validation et de recherche de preuve** : dès le début, il y a nécessité d'un débat dans l'équipe, pour faire admettre le bien-fondé d'une stratégie choisie, puis dans les phases suivantes lorsqu'il s'agira d'argumenter sur la pertinence des stratégies proposées, de prouver leur validité et leur performance.

- des **situations d'institutionnalisation :** d'une part lorsque s'opère un choix quant à une stratégie meilleure que les autres, savoir faire reconnu et réutilisable (avec cette réserve, ici, qu'il a peu de chance d'être réutilisé directement en dehors de ce jeu), d'autre part lorsque le modèle de la division est identifié et reconnu pour construire une procédure experte ; cela suppose une nouvelle réorganisation des connaissances, enrichie du sens nouveau donné à la division. La division peut ici être resituée dans le cadre d'une dialectique outil-objet : ayant été étudiée antérieurement comme "objet" de savoir, elle est ici "outil" pour résoudre un problème, ce qui lui permet d'acquérir un sens nouveau et par là même d'être confortée comme "objet" de savoir.

2) Une réflexion sur les **variables didactiques** est par ailleurs intéressante. Ces variables sont ici essentiellement les nombres en jeu : quels choix ont été faits ? Peut-on imaginer que les procédures seraient différentes avec d'autres choix ? Par ailleurs le brusque changement de variable (par exemple lorsqu'on demande de jouer avec tout le groupe des étudiants) amène à abandonner les stratégies les moins performantes **(saut informationnel)**

3) On peut aussi analyser des phénomènes de **contrat didactique.** Au départ, si le professeur ne laisse pas entendre qu'il faut se concerter, les étudiants peuvent penser qu'ils doivent savoir répondre directement puis que ce n'est pas possible ou que c'est l'effet du hasard. Il leur faut rompre ce contrat implicite et comprendre que c'est à eux de trouver les clés qui leur permettront de résoudre ce problème. Ainsi s'opère la **dévolution :** les étudiants ne se sentent plus dans la situation de deviner ce qu'attend le professeur et d'essayer de répondre à ses attentes, mais veulent trouver eux-mêmes une solution. On le voit bien lors des écritures fournies : les étudiants ne se sentent pas obligés de fournir des écritures mathématiques standardisées, reconnues... ils cherchent seulement à se faire comprendre et vont en général à l'économie d'écriture, même les plus matheux (il s'agit là d'un point qui peut sensibiliser très fortement les étudiants au problème du statut de l'écrit mathématique dans la classe). La recherche de la stratégie et la recherche de l'écriture sont des **situations a-didactiques,** c'est-à-dire que l'étudiant se saisit du problème sans essayer de comprendre les intentions didactiques de celui qui l'a posé.

Dans les situations d'enseignement, la dévolution d'une situation a-didactique peut ne pas s'opérer, compromettant ainsi l'apprentissage soit que les élèves ne cherchent qu'à repérer des indices permettant de deviner la bonne réponse qu'attend le maître, soit qu'ils mettent en place des stratégies de contournement pour s'assurer de répondre "juste". Un exemple nous en a été fourni par un maître d'une classe de SES qui avait proposé le jeu du *Concertum* à ses élèves. La première phase semblait bien fonctionner et les réussites étaient fréquentes. Lorsqu'il prit connaissance des messages, il eut la surprise de voir que, dans une large majorité, ils étaient rédigés dans des termes à peu près semblables du type "il y en *a un qui calcule et qui fait des signes aux autres pour qu'ils mettent leurs nombres"* ou, plus laconiquement : "on *triche, sans se faire voir..."* L'absence même de gêne, de la part des élèves qui fournissaient ces messages, montre bien à quel point le seul enjeu perçu par eux était celui de donner une réponse "juste".

Inventaire de quelques procédures

Appelons n le nombre-cible. Certaines procédures reviennent assez fréquemment lors de la première phase de jeu (nous nous situons ici dans le cas d'équipes de 3 joueurs avec des cartons de 0 à 9). Elles nécessitent l'identification de chaque joueur et de son rôle. Les désignations le plus souvent choisies sont A, B, C,... L'intérêt d'une numérotation avec les entiers, du type A1, A2, A3,... n'apparaît pas avec des équipes de 3 ou de faible effectif. Cette numérotation devient quasi indispensable avec tout le groupe.

1) Utilisation de la division par 9

C'est la procédure qui sera le plus souvent retenue à la fin comme la plus performante. Elle consiste à diviser n par 9. On obtient n = 9q + r. Les q premiers joueurs jouent 9, le suivant r, les autres éventuels jouent 0.

Elle est rarement exprimée ainsi, en tous cas au début. On trouve plutôt des formulations du type suivant (avec parfois des discussions sur le choix des bornes)

- *entre 0 et 9, le joueur A indique n, les joueurs B et C indiquent 0.*
- *entre 9 et 18, le joueur A joue 9, le joueur B joue n - 9 et C joue 0 .*
- *entre 18 et 27, A et B jouent 9 et C joue n-18.*

Comme nous l'avons signalé, c'est la procédure qui, dans la plupart des cas, sera reconnue comme la plus facilement généralisable. Avec k joueurs et des cartons de 0 à p, il suffit de faire la division euclidienne de n par p, ce qui donne n = pq + r. Les q premiers joueurs jouent p, le joueur de rang q + 1 joue r et les autres jouent 0. Le nombre k n'intervient pas dans les calculs, mais seulement pour la détermination de l'intervalle des nombres-cibles possibles.

La principale difficulté de cette généralisation vient ici de la nécessité de numéroter les joueurs et, pour chacun d'eux, de situer son numéro par rapport à q.

A la fin de la phase 5, il arrive que cette généralisation soit retenue sans référence à la division, par découpage d'intervalles : au joueur A on attribue l'intervalle de 0 à 9, au joueur B de 10 à 18, au joueur C de 19 à 27, etc. Le rôle de chacun est alors défini selon que le nombre-cible est avant, dans, ou après l'intervalle.

Dans ce cas, pour faire expliciter la démarche de division, le professeur peut aborder la phase 6 avec un exemple numérique sur de grands nombres et en proposant une numérotation des joueurs. On supposera par exemple qu'il y a 127 joueurs numérotés de 1 à 127 avec 845 comme nombre-cible. La question posée est : *chaque joueur connaît son numéro, quel calcul doit-il faire pour choisir son carton ?*

2) Utilisation de la division par 3

On divise n par 3, ce qui donne $n = 3q + r$.

Si $r = 0$, chaque joueur joue q ; si $r = 1$, deux joueurs jouent q et un autre $q + 1$; si $r = 2$, un joueur joue q et les deux autres $q + 1$.

Il arrive assez fréquemment, lorsque cette procédure est retenue, qu'un seul joueur soit chargé des "correctifs" et doive donc jouer $q + 1$ si $r = 1$, mais $q + 2$ si $r = 2$, les autres jouant tous deux q. Il est utile pour le professeur d'identifier cette forme car elle marche toujours, sauf pour $n = 26$.

Cette procédure est elle aussi généralisable. Avec k joueurs et des cartons de 0 à p, on fait la division euclidienne de n par k, ce qui donne $n = kq + r$. Les r premiers joueurs jouent $q + 1$ et les autres q. Le nombre p n'intervient pas dans les calculs, mais seulement pour la détermination de l'intervalle des nombres possibles.

Là encore, la plus grande difficulté d'utiliser cette procédure généralisée vient de la nécessité de numéroter les joueurs.

3) Autres procédures

Diverses autres procédures peuvent apparaître, plus ou moins difficiles à généraliser. Par exemple :

a) utilisation de la parité

- si $n \leq 18$
  - si n est pair, A et B jouent $n/2$, C joue 0.
  - si n est impair, A et B jouent $(n - 1)/2$, C joue 1.
- si $n > 18$
  - A et B jouent 9 et C complète.

b) délimitation de tranches autonomes

La procédure ci-dessus peut être considérée comme un cas particulier de cette catégorie. Elle consiste à découper l'intervalle [0 ; 27] en sous-intervalles et à définir une règle sur chacun de ces sous-intervalles, ces règles pouvant être sans rapport entre elles.

Très souvent, les intervalles choisis sont liés à la numération et on trouve fréquemment une règle pour les nombres inférieurs à 10, une autre pour les nombres de 10 à 20 et une troisième au-delà de 20.

c) Constitution d'une table

C'est encore un cas particulier du cas précédent. On envisage non seulement des intervalles, mais tous les nombres possibles et on définit le rôle de chaque joueur pour chacun d'eux. On pourrait imaginer des répartitions totalement arbitraires pour chaque nombre. En réalité les tables choisies sont souvent constituées entièrement ou partiellement à partir de l'une des deux premières procédures décrites. Mais celles-ci restent au départ implicites, l'explicitation pouvant se faire progressivement.

Remarque

Il n'est pas sans intérêt de mettre en relation, d'une part les deux premières procédures décrites, division par 9 (p dans le cas général) et division par 3 (k dans le cas général), et d'autre part l'analyse des situations de division proposée plus loin. L'exemple pourra être repris lors de cette étude.

On peut dire ainsi que

- la procédure de division par 9 correspond à une représentation en termes de **division - quotition** : chaque joueur choisit 9 (ou p) et le problème est de savoir pour un nombre-cible n donné, combien de joueurs devront intervenir :

$$\begin{array}{r|l} 1 & 9 \\ ? & n \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1 & p \\ ? & n \end{array}$$

- la procédure de division par 3 correspond à une représentation en termes de **division-partition** : 3 (ou k) joueurs cherchent à obtenir n à parts égales et il s'agit de savoir combien chacun doit jouer :

$$\begin{array}{r|l} 1 & ? \\ 3 & n \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 1 & ? \\ k & n \end{array}$$

Dans les deux cas, la difficulté vient du fait qu'on n'utilise pas des réels ni même des décimaux, mais des entiers : il faut se situer dans le cadre de la division euclidienne et interpréter le reste éventuel en termes de jeu "décalé" pour l'un des joueurs.

Deuxième situation
"La course à 20"

Cette activité a été décrite et étudiée en détail par Guy Brousseau. Initialement, elle visait à introduire avec les élèves l'algorithme de la division : « *La course à n et les leçons qui la suivent tendent à remplacer toutes les soi-disant explications et justifications, qui alourdissent, sans le rendre plus efficace, l'apprentissage de la division »*[2] .

Mais cette activité a aussi l'intérêt d'être une situation riche qu'on peut analyser dans le cadre de la théorie des situations.[3]

Elle nous paraît intéressante à utiliser en formation. Outre ses liens avec la division, elle est l'occasion de revenir sur divers concepts de didactique.

Objectifs

- Faire apparaître l'utilisation de la division comme procédure experte pour définir une stratégie gagnante d'un jeu.

- Donner du sens, à partir de l'analyse de l'activité, à des notions de didactique, en particulier dialectiques de l'action, de la formulation, de la validation, de l'institutionnalisation, notions de situations didactiques et a-didactiques.

Le jeu

Deux adversaires Al et A2 sont en présence. A 1 commence et dit 1 ou dit 2 ; A2 dit le nombre obtenu en ajoutant soit 1 soit 2 au nombre dit par A1 ; A1 à son

---

[2] Guy Brousseau, *"Division euclidienne aux cours élémentaire et cours moyen"* dans *"La mathématique à l'école élémentaire"* (APMEP- 1972)

[3] voir *"Didactique des mathématiques et formation des maîtres à l'école élémentaire"*, cours de G. Brousseau, in "Actes de la première Université d'été des professeurs d'École normale", Olivet, 1988 (publication de l'IREM de Bordeaux). Mais aussi « *Théorie des situations Didactiques* », G.Brousseau 1970-1990 p 25- 44, La pensée Sauvage, 1998 (traduit en anglais et espagnol).

tour dit le nombre obtenu en ajoutant soit 1 soit 2 au nombre dit par A2 ; et ainsi de suite. Le premier qui dit 20 a gagné.

Exemple de partie
(avec gain pour le joueur A2) :

2-**3**-5-**6**-7-**9**- 10-**1l** - 13-**15**- 16-**17**-18-**20**

Ce jeu peut aussi être appelé *"course à 20 de pas* 3" en tant que cas particulier du cas plus général de la *"course à n de pas p" :*

> Soient n et p deux naturels (n < p). Deux adversaires A1 et A2 sont en présence. A1 dit un naturel strictement inférieur à p ; A2 dit le nombre obtenu en ajoutant un nombre strictement inférieur à p au nombre dit par Al ; A1 à son tour dit le nombre obtenu en ajoutant un nombre strictement inférieur à p au nombre dit par A2 ; et ainsi de suite. Le premier qui dit n a gagné.

Ce dernier jeu peut lui-même être considéré comme cas particulier du jeu suivant :

> Soient a_1, a_2 ... a_k, k entiers distincts et n un naturel. Deux adversaires sont en présence. Al dit l'un des a_i ; A2 ajoute l'un des a_i au nombre dit par A1 ; A1 ajoute à son tour l'un des a_i au nombre dit par A2 ; et ainsi de suite. Le premier qui dépasse n a perdu (c'est-à-dire que celui qui dit n a gagné, mais n peut n'être pas atteint).

Tous ces jeux font partie de la catégorie des jeux de NIM. Ils se caractérisent par le fait que toute position possible du jeu est soit gagnante soit perdante avec le sens suivant :

• une **position est gagnante** si toute position suivante est une position perdante,
• une position est **perdante** s'il existe au moins une position gagnante parmi les positions suivantes.

A partir de la position gagnante définie par le but du jeu, une **analyse rétrograde** permet de déterminer de proche en proche les positions gagnantes et les positions perdantes.

Exemple, avec le cas de jeu le plus général et les valeurs suivantes :

n = **30** et k = 3 avec a_1 = **2**, a_2 = **3**, a_3 = **6**

- 30 est gagnant ainsi que 29 (ces positions obligent toutes deux l'adversaire à dépasser 30)
- 28 est perdant car la position gagnante 30 peut être atteinte (+2)

- 27 est perdant car une position gagnante peut être atteinte (+2 ou +3)
- 26 est perdant (accès à une position gagnante par +3)
- 25 est gagnant car +2, +3 ou +6 conduisent à une position perdante
- 24 est perdant (+6)
- 23 est perdant (+2 ou + 6)
- 22 est perdant (+3)
- 21 est gagnant car +2, +3 ou +6 conduisent à une position perdante
- 20 est gagnant pour la même raison
- 19 est perdant ainsi que 18, 17
- 16 est gagnant
- 15 est perdant ainsi que 14, 13,
- 12 est gagnant ainsi que 11
- 10 est perdant ainsi que 9, 8
- 7 est gagnant
- 6 est perdant ainsi que 5, 4
- 3 est gagnant ainsi que 2.

Finalement, les positions gagnantes sont :

2, 3, 7, 11, 12, 16, 20, 21, 25, 29, 30.

La stratégie gagnante consiste alors à jouer en premier et à commencer soit par 2 soit par 3, ce qui permettra de toujours conserver une position gagnante.

Si on prend maintenant n = 32, les positions gagnantes sont translatées et deviennent :

4, 5, 9, 13, 14, 18, 22, 23, 27, 31, 32.

La stratégie gagnante consiste alors à laisser l'adversaire jouer en premier, ce qui permettra d'obtenir ensuite à coup sûr une position gagnante.

Lorsque n est grand, cette analyse rétrograde est longue, d'où l'intérêt de rechercher une règle permettant d'établir en fonction de n et des a_i la liste des positions gagnantes.

A notre connaissance, une telle règle n'a jamais été formulée dans le cas du jeu le plus général. Par contre, et c'est ce qui fait l'intérêt de ce jeu ici, il est possible de formuler une règle dans le cas de *"la course à n de pas p"*.

Cette règle est la suivante :

> *soit r le reste de la division euclidienne de n par p + 1, les positions gagnantes sont de la forme r + k(p + 1).*

En formation, on peut par exemple :

- soit étudier d'abord le problème dans le cas le plus général avec un exemple numérique du type ci-dessus, de façon à faire découvrir aux étudiants le principe de l'analyse rétrograde puis étudier ensuite la course à n et établir une règle en lien avec la division ;

- soit étudier directement la course à 20 avant de généraliser à la course à n. C'est ce choix que nous décrivons ci-après.

Phase 1

Découverte de l'analyse rétrograde

Les étudiants sont répartis par groupes de 2 et sont invités à jouer jusqu'à la découverte d'une stratégie gagnante présentée comme hypothétique. Lorsque des groupes trouvent une telle stratégie, le professeur leur propose de rejouer avec changement de la case d'arrivée puis du pas, afin qu'ils généralisent leur stratégie. Pour les groupes les plus avancés, un changement des variables numériques (n et p plus grands) pourra conduire à la formuler en termes de division.

Commentaires

Après quelques parties dans lesquelles les étudiants jouent au hasard, le théorème "17 *est une position gagnante"* apparaît en général assez vite, d'abord implicitement puis explicitement. Lorsqu'on le leur demande, les étudiants n'ont pas trop de difficultés à argumenter cette proposition. Le passage à l'analyse rétrograde est beaucoup plus délicat. II faut parfois inviter les étudiants à faire une partie en jouant à la course à 17 puis les faire jouer à nouveau à la course à 20 ; on peut recommencer en les faisant jouer à la course à 14... Certains ont beaucoup de mal à "remonter" entièrement la suite des nombres jusqu'à la position gagnante initiale: Une mise au point collective sur ce que sont des "positions gagnantes" et des "positions perdantes" est en général nécessaire.

Phase 2

Lien avec la division

Cette phase peut se dérouler collectivement sous forme d'échange sur les stratégies découvertes par les groupes. Il s'agira dans un premier temps d'institutionnaliser le principe de détermination des positions gagnantes et des positions perdantes. La consigne sera ensuite de chercher à trouver le plus vite possible la position gagnante initiale. L'augmentation des valeurs de n et p (par exemple course à 227 avec un pas de 23) oblige alors à optimiser les calculs des positions gagnantes, ce qui permettra d'institutionnaliser la règle de gain en lien avec la division.

Commentaires

Ce jeu a l'avantage de ne pas évoquer spontanément une situation de division. La première procédure efficace qui apparaît est celle des soustractions successives n - p - p - p... Il faut parfois quelque temps avant que les étudiants y voient le lien avec la division. C'est donc un moyen intéressant pour une réflexion sur le sens *"soustractions successives"* de la division.

Phase 3

Institutionnalisation didactique

Une réflexion sur les variables didactiques et là encore sur les différents types de situation pourra être menée par le professeur. Voir les commentaires précédents à propos de la situation *"Concertum ".*

On peut discuter le choix d'introduire la division à l'école à partir de la course à 20. Il reste que l'activité est en soi une situation-problème intéressante à proposer à des élèves. A défaut de la réaliser effectivement, on pourra proposer aux étudiants de visionner, lorsqu'il est disponible, le film **CNDP "Qui dira vingt** ?" [9]. Ce sera l'occasion de repréciser les notions précédentes dans une situation de classe.

La division
Aspects mathématiques

I - La division et les autres opérations

Objectif

Amener les étudiants à comprendre les particularités de la division par rapport aux autres opérations.

Phase 1

Le professeur distribue les exercices suivants :

a) additionner 4 et 7
b) additionner 47,5 et 6,003
c) soustraire 7 de 46
d) soustraire 28,45 de 102,068
e) multiplier 3 par 17
f) multiplier 5 par 0,56
g) multiplier 0 par 3,1
h) multiplier 3,1 par 0

i) *diviser 65 par 5*
j) *diviser 35 par 16*
k) *diviser 42 par 0*
l) *diviser 370 par 28*
m) *diviser 650 par 101*
n) *diviser 426,23 par 1,12*
o) *diviser 4, 7 par 6*
p) *diviser 65 par 1,01*
q) *diviser 1 par 7*
r) *diviser 0 par 0.*

Il demande à chacun d'écrire sa réponse sur papier.

Phase 2

Mise en commun et confrontation des réponses données. Mise en évidence rapide du caractère non ambigu des réponses sur addition, soustraction et multiplication. Par contre, sur la division, dans de nombreux cas, il y a plusieurs réponses différentes. Il s'agit alors de déterminer celles qui sont mathématiquement justes. De plus, les notations utilisées par les étudiants sont variées ; une explicitation de chacune d'elles est alors faite.

Phase 3

Le professeur conclut provisoirement cette activité en rappelant ou en précisant brièvement certaines définitions, certains termes liés à la division euclidienne dans **N** et à la division dans **R**.

II - Approfondissement mathématique

Il s'agit ici de revenir sur divers contenus mathématiques liés à la division euclidienne, à partir de la résolution d'exercices tirés en particulier des annales du concours externe de recrutement des professeurs d'école [1] et de la brochure de la COPIRELEM : "La *division à l'école élémentaire" [6].*

Au moins cinq types d'exercices sont traités :

1. des exercices nécessitant de mobiliser la définition de la division euclidienne et en particulier de réfléchir sur la double inégalité vérifiée par le reste, par exemple :

- *Dans une division, le diviseur est 83, le quotient est 403. Exprimez les dividendes possibles et les restes associés.*

- *Le dividende est 8592, le quotient est 38. Trouvez un diviseur et un reste associé. Y a-t-il plusieurs solutions ? Si oui, exprimez toutes les solutions, si non, justifiez votre réponse.*

- *Soient a, b, c trois naturels vérifiant $a > b$ et $c \neq 0$. Le quotient de a par c est a' et le quotient de b par c est b'. Peut-on prévoir quels seront les quotients par c de a + b, a - b et a.b ?*

2. des exercices posant des questions relatives à des techniques opératoires, par exemple :

- *Soit le nombre 12345678910111213 à diviser par 117. Indiquez une méthode permettant de trouver le nombre de chiffres du quotient sans effectuer la division.*

- *Le dividende est 5468902. Dans le cas particulier où le diviseur est 125, donnez une méthode de calcul rapide permettant d'obtenir le résultat sans effectuer la division.*

3. des exercices portant sur les notions de multiples et diviseurs et sur les critères de divisibilité, par exemple :

- *Par quel chiffre faut-il remplacer x et y pour que le nombre (écrit en base dix) 632xy soit divisible à la fois par 2, par 5 et par 9 ?*

- *Vérifiez que le nombre 5757 est divisible par 101. Montrez que le nombre (écrit en base dix) xyxy est divisible par 101.*

- *A, B, C D, E, F sont des nombres entiers naturels écrits ci-dessous en base dix (a désigne donc un chiffre) :*

A = 10a4	*B = 34a*	*C = a4324*
D = a18	*E = 314aa*	*F = a353a*

  Pour chacun des nombres A, B, C D, E et F, remplacez le chiffre a par différentes valeurs, si cela est possible, de telle sorte que le nombre correspondant soit un multiple de 4. Justifiez vos réponses.

- *Énoncez une condition pour que le nombre qui s'écrit "mcdu"soit multiple de 4 (m, c, d, u désignant des chiffres). Démontrez le résultat énoncé.*

4. divers exercices prétextes à la résolution d'équations ou de systèmes d'équation, par exemple :

- *le quotient de deux naturels est 6 et le reste 47. La somme des deux naturels et du reste est 591. Quels sont ces deux naturels ?*

5. des problèmes plus ouverts pouvant faire appel à la division :

   - *sachant que le 7 /12/ 92 est un lundi, par quel jour de la semaine a commencé l'année 1992 ? Quel jour le peuple français a-t-il pris la Bastille ?*

Ce travail se termine par un exposé du professeur sur la division euclidienne dans **N** et **D** et sur la division dans **R** et **Q** (avec dans presque tous les cas nécessité de revenir auparavant sur les différents ensembles de nombres et sur les notions de valeur approchée d'un réel par un décimal à un ordre donné)

Cet exposé comporte notamment l'explicitation de divers termes : dividende, diviseur, quotient, reste, division euclidienne dans **N**, division exacte, multiples et diviseurs...

Procédures de calcul de divisions

Cette situation est inspirée d'un document de l'IFM de Grenoble [10].

Objectif

Analyse détaillée des procédures de calcul dans la résolution des problèmes de divisions. On se situe ici dans le cadre des naturels et de la division euclidienne.

Simulation de la situation
"Le Petit Poucet"

> *Le Petit Poucet avec ses bottes de sept lieues fait des bonds de 28 km. Il doit parcourir 1155 km. Combien de pas va-t-il faire ?*

Première simulation
Les étudiants sont invités à résoudre ce problème avec la contrainte suivante : pas *le droit d'utiliser la division.*

Deuxième simulation
Le même problème est proposé en changeant les données numériques et avec la contrainte : *pas le droit d'utiliser ni division, ni multiplication.*

Mise en commun
Elle consiste à inventorier et discuter les procédures utilisées.

Analyse de travaux d'élèves

analyse de protocoles
Le professeur distribue aux étudiants les protocoles présentés dans le document de l'IFM (et reproduits ici en annexe 1). Étude de ce document avec mise en commun et discussion sur les procédures utilisées.

analyse de procédures
On trouvera en annexe 2 un montage réalisé à partir de l'article de Robert NEYRET *"Procédures utilisées par des enfants de CM dans certains problèmes de division. Repérage de quelques difficultés"* paru dans Rencontres Pédagogiques n° 4 : "*Comment font-ils"* (publication INRP) [7]

Ce montage, précédé de la liste des problèmes de référence, est proposé aux étudiants avec la consigne de classer les différents types de procédures repérables.

Le professeur reprend alors, sous forme d'exposé, l'article de Robert Neyret, et synthétise une typologie des différentes procédures susceptibles d'être mobilisées par les élèves.

Travaux d'inter-cours

Les étudiants sont invités à :

- lire des documents concernant la division, à partir d'une bibliographie que chaque professeur pourra constituer. Les ouvrages de la collection ERMEL pour le CE et le CM[4] et les numéros spéciaux de la revue Grand N[5] peuvent être considérés comme d'intéressants documents de référence.

- commencer à consulter des manuels et à essayer d'analyser la façon dont est abordée la division.

Situations et problèmes de division

1. Contexte des situations de division

Le professeur distribue aux étudiants les problèmes suivants :

---

[4] ERMEL, Equipe de Recherche pour l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole Elémentaire, Editions Hatier

[5] Grand N, Revue de mathématiques, Sciences et Technologie pour l'école primaire, IREM de Grenoble

1. On dispose de 47 carreaux de faïence pour carreler un dessus de lavabo. On place 6 carreaux par rangée. Combien de rangées placera-t-on ?

2. On compte de 6 en 6 à reculons à partir de 47. Quel sera le dernier nombre énoncé ?

3. On dispose de casiers pouvant contenir chacun 6 cassettes. Combien en faudra-t-il au minimum pour placer 47 cassettes ?

4. Avec une baguette de bois de 47 cm de long, combien de morceaux de 6 cm peut-on couper ?

5. Avec une baguette de bois de 47 cm de long, on veut faire 6 morceaux de même longueur et avoir le minimum de chutes. Quelle sera la longueur de chaque morceau ?

6. On donne un sachet de 47 bonbons à un groupe de 6 enfants. Combien chacun en aura-t-il ?

7. On partage le plus équitablement possible 47 billes entre 6 enfants. Combien chacun en aura-t-il ?

8. On partage équitablement 47 billes entre 6 enfants en en donnant le maximum. Combien de billes ne seront pas distribuées?

9. On partage équitablement 47 francs entre 6 personnes. Combien donne-t-on à chacun ?

10. 47 grains de blé sont lancés à 6 poules. Combien chacune picore-t-elle de grains ?

11. Un employé touche une prime de 47 francs par jour de travail. Il travaille 6 heures par jour. De combien cette prime augmente-t-elle son salaire horaire ?

12. On doit répartir 47 litres de vin dans des bonbonnes de 6 litres. Combien de bonbonnes seront nécessaires ?

13. 6 personnes héritent ensemble d'un terrain de 47 hectares qu'elles décident de partager en 6 lots de même aire (au centiare près). Quelle sera l'aire de chaque lot ?

14. On multiplie un nombre par 6 ; on trouve 47. Quel est ce nombre ?

15. Sur une calculette affichant 8 chiffres, on frappe successivement :

4 7 ÷ 6 =

Qu'affiche la calculette ?

Questions posées :

> *Quels sont les énoncés relevant de la division de 47 par 6 ?*
> *Quelle est la réponse dans chaque cas ?*
> *Le "sens" de la division est-il le même chaque fois ?*

Recherche puis mise en commun pour faire apparaître des difficultés spécifiques aux problèmes de division qui nécessitent, plus que pour les autres opérations, une interprétation des résultats.

(On pourra se référer à l'article de Marc BLANCHARD "***Ça ne tombe pas juste***" paru dans le n° 52 de la revue Grand N)

2. Division et proportionnalité simple

Objectifs

Resituer les problèmes de division à l'intérieur des structures multiplicatives.

Percevoir la différence entre division - quotition et division-partition et son incidence sur les procédures employées.

Déroulement

Les problèmes suivants sont proposés aux étudiants

1. Céline a 240 timbres qui remplissent un album de 16 pages. Toutes les pages ont le même nombre de timbres. Combien y a-t-il de timbres sur chaque page ?

2. Un nageur parcourt 2400 m dans une piscine. La longueur du bassin est de 50 m. Combien de longueurs de bassin le nageur doit-il parcourir ?

3. Au cours d'un voyage, une voiture a parcouru une distance de 1540 km à la vitesse moyenne de 80 km/h. Combien de temps a duré le voyage ?

4. Un satellite fait 75 fois le tour de la terre en 5475 minutes. En combien de temps fait-il le tour de la terre ?

5. Un tube de colle coûte 11 F. Un instituteur achète pour 495 F de tubes de colle. Combien de tubes de colle a-t-il achetés ?

6. La récolte d'un champ de pommes de terre est de 145,5 tonnes. Il a produit en moyenne 20 tonnes par hectare. Quelle est l'aire de ce champ ?

7. Une école commande des livres de mathématiques. Il faut payer, en tout 2703 F pour les 53 livres commandés. Quel est le prix d'un livre de mathématiques ?

8. M. Dupont achète du tissu à 55 F le mètre. Il paie 192,50 F. Quelle longueur de tissu a-t-il acheté ?

9. En France, on consomme chaque année 9 222 000 000 kg de papier. La France a 58 000 000 d'habitants. Quelle est la consommation moyenne de papier par habitant chaque année ?

10. Un robinet met 350 secondes pour laisser échapper 3010 ml d'eau. Combien de millilitres d'eau perd-il en une seconde ?

11. Julie a une boîte de 520 perles. Elle fait des colliers de 20 perles. Combien peut-elle faire de colliers ?

12. Le marchand de fruits a acheté 75 cageots de pommes pour un poids total de 937,5 kg. Quel est le poids d'un cageot ?

13. Un diamant de 15 centimètres cube a une masse de 52,5 g. Quelle est la masse d'un centimètre cube de diamant ?

14. Dans la principauté de Monaco, il y a 18500 habitants au km2. La population de Monaco est de 27 750 habitants. Quelle est la superficie de la principauté ?

La consigne est la suivante :

> *Voici 14 problèmes de division. Indépendamment du contexte, des grandeurs, des nombres ou de la syntaxe, classez ces problèmes en fonction du "sens" de la division auquel ils se réfèrent.*

Si les étudiants ont de la difficulté à effectuer ce classement, on pourra préciser ainsi la consigne :

> *Vous pouvez en particulier essayer de rechercher une représentation schématique ou symbolique pour chaque problème et identifier ceux qui relèvent d'un même type de représentation.*

La mise en commun aura pour objectif de faire apparaître les deux sens de la division pour lesquels nous reprenons ici les représentations symboliques proposées par Gérard VERGNAUD[6]:

- **division partition** *(ou "recherche de la valeur d'une part")*

$$\begin{array}{c|c} \boxed{\mathbf{1}} & \boxed{\mathbf{?}} \\ \boxed{\mathbf{b}} & \boxed{\mathbf{c}} \end{array}$$

- **Division -quotition** (ou *"recherche du nombre de parts")*

$$\begin{array}{c|c} \boxed{\mathbf{1}} & \boxed{\mathbf{a}} \\ \boxed{\mathbf{?}} & \boxed{\mathbf{c}} \end{array}$$

Cette présentation doit permettre de resituer la division dans l'ensemble des structures multiplicatives (pour lesquelles une étude plus générale est susceptible d'avoir précédé cette séquence).

Rappelons que G. Vergnaud distingue, dans les structures multiplicatives

- la proportionnalité simple
- le produit de mesures et la proportionnalité double.

La proportionnalité simple met en relation deux grandeurs et les problèmes qui en relèvent sont des problèmes à 4 termes, même si l'un d'eux (l'unité) est fréquemment présent mais n'apparaît souvent qu'à travers la désignation générale de l'une des variables ou par des termes tels que *"chaque", "chacun", « l'un »…*

Selon la présence ou non de l'unité et selon la place du terme cherché, on est en présence de 4 grandes catégories de problèmes. Outre les deux divisions évoquées ci-dessus, ces problèmes peuvent concerner :

- ***la multiplication***

$$\begin{array}{c|c} \boxed{\mathbf{1}} & \boxed{\mathbf{a}} \\ \boxed{\mathbf{b}} & \boxed{\mathbf{?}} \end{array}$$

- ***la recherche de quatrième proportionnelle***

---

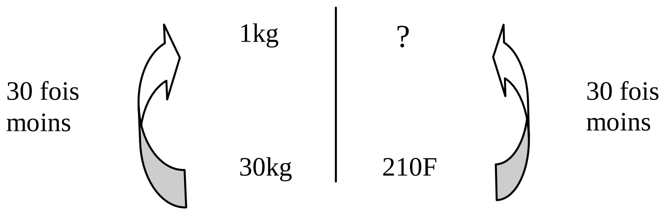
6 « Le moniteur de Mathématiques - Résolution de problèmes », sous la direction de G .Vergnaud, Fichier pédagogique, cycle 3, 1997.

a	**b**
c	**?**

Comme l'a bien montré G. Vergnaud, ces différentes catégories, et en particulier les deux divisions, pour ce qui nous intéresse ici, n'appellent pas toujours le même type de traitement.

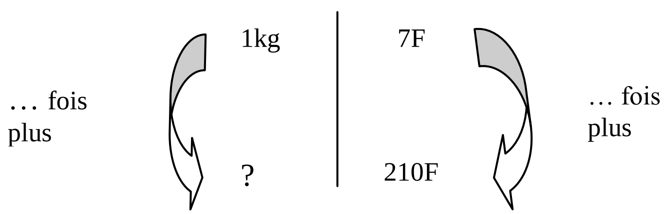
- la division-partition repose essentiellement sur la reconnaissance d'un rapport scalaire.

Si 30 kg de pommes de terre coûtent 210 F, le prix d'un kilo s'obtient en appliquant la relation scalaire « 30 *fois moins* ».



- la division -quotition peut reposer :

  *sur la reconnaissance d'un rapport scalaire qui n'est pas directement donné et qu'il faut calculer



si 1 kg coûte 7 F, combien de kg peut-on obtenir avec 210 F ? se résout alors en recherchant *"combien de fois plus"* représente 210 F par rapport à 7 F

*sur la recherche du coefficient de proportionnalité

si 1 kg coûte 7 F, on passe de la masse au prix en multipliant par 7 et du prix à la masse en divisant par 7. La différence, ici, est que ce 7 n'est plus un scalaire, un nombre sans dimension comme précédemment, c'est une nouvelle grandeur et une grandeur complexe puisqu'il s'agit d'une grandeur-quotient (7 F/kg). Une telle représentation du problème n'est pas simple pour les élèves et cela ne va pas de soi de systématiser le recours au coefficient de proportionnalité.

Les considérations qui précèdent peuvent aider à comprendre les raisons de l'utilisation de telle ou telle procédure dans les problèmes de division.

C'est ainsi (et on pourra le vérifier avec les procédures décrites dans (annexe 2) que les problèmes de division -quotition ouvrent naturellement la voie aux soustractions (ou additions) successives : si 1 kg coûte 7 F, on peut trouver combien de kg correspondent à 210 F en soustrayant autant de fois que nécessaire 7 F. On soustrait des francs à des francs et ceci prend facilement du sens.

Les problèmes de division-partition, eux, ne peuvent se résoudre à l'aide de soustractions (ou d'additions) successives. Si 30 kg coûtent 210 F, on ne peut chercher le prix d' l kg en soustrayant 30 de 210 autant de fois que nécessaire. Cela permettrait d'obtenir la réponse correcte mais au prix d'une perte de signification (soustraire 30 kg de 210 F !)... Par contre, les essais multiplicatifs prennent ici tout leur sens : dans 30 kg il y a 30 fois plus que dans un kilo, donc 210 F est égal à 30 fois le prix recherché, ce qui conduit à émettre des hypothèses sur ce prix.

La division dans les classes

Il s'agit d'une enquête qu'on peut réaliser en CE2 et/ou en CM1. Elle est reprise des travaux qui figurent dans le document de l'IFM déjà cité.

Chaque étudiant observe un groupe de 2 enfants selon les modalités décrites ci-après et qui sont travaillées préalablement lors d'une séance de préparation.

Les problèmes

- *Avec ses bottes de sept lieues, le Petit Poucet se déplace entre deux villes. Il fait des pas de 28 kilomètres.*
  Il part d'Angers pour aller à Limoges. La distance entre ces deux villes est de 252 kilomètres. Combien de pas va-t-il faire ?

- *Une autre fois, il va à Quimper. La distance est de 319 kilomètres. Combien de pas va-t-il faire ?*

- *Voici un paquet de 89 allumettes.*

Comment faire pour les partager entre 7 personnes de façon que chacune en ait autant ?

Vous pouvez vous servir des allumettes pour répondre, mais ce n'est pas obligatoire.

Conditions d'observation

1. Les enfants sont par groupes de 2 ; un observateur est attaché à chaque groupe.

2. Les interventions éventuelles de l'observateur doivent être limitées aux cas suivants
   - demander de recompter un calcul erroné
   - relire l'énoncé en cas de blocage
   - lorsque l'enfant a trouvé une solution, lui demander d'expliquer ce qu'il a fait et s'il est sûr du résultat trouvé.

3. Travail d'observation à réaliser :
   - rédiger une chronique de la séquence
   - pour chacun des deux enfants observés, rédiger une note de synthèse mettant en évidence :
     - les procédures utilisées
     - les erreurs liées aux procédures choisies
     - l'interprétation donnée au reste
     - la façon dont est présenté le résultat
     - le rôle du travail à deux

     et, pour le second problème :
     - la stabilité éventuelle des procédures
     - le rôle du matériel et la gestion du reste.

   - mise en commun sur la façon dont les enfants ont travaillé et les procédures qu'ils ont utilisées.

Travail d'inter-cours

Rédaction des chroniques d'observation. Celles-ci peuvent être synthétisées et remises aux maîtres des classes concernées.

Analyse de manuels

Lecture et commentaires des instructions officielles

Travail par groupes pour construire une progression sur la division au CM1 en s'aidant des manuels à disposition. La consigne est de repérer les différences de point de vue entre les manuels sur :
- ⇨ l'organisation de la progression
- ⇨ le choix des situations de référence

- ⇨ le degré de liberté laissé aux élèves dans le choix de procédures de résolution
- ⇨ la différenciation division-partition et division-quotition
- ⇨ les techniques de calcul proposées
- ⇨ …….

Mise en commun

Compléments sur les techniques de calcul

Les algorithmes de calcul des divisions

Il s'agit ici de présenter les différentes techniques de calcul en usage dans les classes.

Cette présentation pourra être complétée par diverses techniques historiquement utilisées. On pourra s'appuyer sur l'article de R. Neyret dans le n° 17 de Grand N.

Analyse d'erreurs d'élèves

Le travail d'analyse d'erreurs d'élèves est particulièrement intéressant et on pourra s'appuyer sur des extraits des épreuves de concours de recrutement des PE [1].

Nous proposons ici un travail sur des erreurs survenant dans les calculs de divisions (voir annexe 3).

Les étudiants doivent analyser ces erreurs, faire des hypothèses sur les causes éventuelles de ces erreurs, expliciter les moyens de contrôle qui auraient pu être mis en oeuvre par ces élèves.

Le professeur conclut en essayant de présenter une typologie des erreurs de division, s'appuyant sur une liste organisée de leurs sources éventuelles :

- existence d'un zéro au quotient (en position finale ou intermédiaire),
- mauvaise évaluation du nombre de chiffres au quotient,
- existence d'un reste (partiel ou final) supérieur au diviseur,
- mauvaise évaluation de l'ordre du quotient ou d'un quotient partiel,
- mauvaise perception due à une mauvaise disposition des calculs ou à une mauvaise lecture des chiffres du quotient,
- surcharge de travail ou surcharge en mémoire,
- mauvaise maîtrise des tables de multiplication,
- mauvaise maîtrise de la règle des zéros,
- retenue dans une soustraction ou dans une multiplication,
- …

Analyse du film
"Algorithme de la division" [2]

Il existe encore des copies de ce film[7] qu'on peut essayer de se procurer auprès du CNDP. Son contenu reste très intéressant pour un travail avec les étudiants.

Ceux-ci, lors du visionnement du film, doivent répondre aux questions suivantes[8]

1. Résumez le déroulement de la première séquence filmée.
2. Le problème posé est *"combien de rangées de 21 carreaux peut-on faire avec 2664 carreaux".*
   Exposez deux solutions trouvées par les enfants. Pouvez-vous en imaginer d'autres ?
3. Dans la leçon suivante, on part de 588 654 801 carreaux. Expliquez pourquoi.
4. En quoi la troisième séance diffère-t-elle des deux premières ?

Bibliographie

[1]*Annales du concours externe de recrutement des professeurs d'école* -IREM de Paris 7 -COPIRELEM – 1992 à 2002.

[2] *Algorithme de la division - atelier* de pédagogie - film RTS du CNDP - 1974

[3] cours de G. BROUSSEAU - Actes de la première université d'été des professeurs d'École Normale - Olivet – 1988 (épuisé)

[4] D. BUTLEN , M. PEZARD - Une *formation en didactique des mathématiques pour les instituteurs -maîtres-formateurs* - Document n° 4 pour la formation - IREM de Paris VII -Université de Paris VII

[5] S. GAIRIN-CALVO *Compte rendu d'un travail réalisé en FP1 à propos de l'apprentissage de la division dans N - Actes* du XIVème colloque COPIRELEM d'Angers (1987) (épuisé)

---

[7] Note de la COPIRELEM en 2003, Ce n'est pas sûr qu'il existe encore des copies de ce film.

[8] Questionnaire élaboré par Suzy GAIRINCALVO et publié dans les actes du colloque COPIRELEM d'Angers (1987)

[6] La *division à l'école élémentaire* - "Elem Math III" - COPIRELEM- APMEP - 1983

[7] R. NEYRET. - Procédures *utilisées par des enfants de CM dans certains problèmes de division, repérage de quelques difficultés* in *"Comment font-ils"* - Rencontres pédagogiques n° 4'- INRP -1984

[8] H. PÉAULT *La division en formation initiale -Actes* du colloque COPIRELEM de Rouen – 1988 (épuisé)

[9] Qui *dira vingt ? - atelier* de pédagogie film RTS du CNDP - 1973

[10] *Situations problèmes de division et procédures* in *"Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques (DEUG premier degré)" -première* partie - publication de l'IFM. de Grenoble - n° 19 - avril 1987(épuisé)

Annexe l

Extrait de ***"Formation des élèves-instituteurs et didactique des mathématiques",*** publication de 1'IFM de Grenoble, n° 19, avril 1987.

Cet extrait est tiré d'une annexe au chapitre *"Situations-problèmes de division et procédures".* Il présente des protocoles de passation du problème du "Petit Poucet" *(Le Petit Poucet fait des bonds de 28 km avec ses bottes de sept lieues. Combien de pas fera-t-il pour se rendre d'une ville à une autre ?),* le 12 octobre 1982.

Situation

Choisissez deux villes. Le Petit Poucet se déplace entre ces deux villes avec ses bottes de sept lieues. Trouvez le nombre de pas qu'il va faire pour se rendre d'une ville à l'autre.

Jérôme - Jean-François

Villes choisies
Rennes - Paris; 351 km

Déroulement
Jean-François écrit

28 x 2 = 56
56 x 2 = 112
112 x 2 = 224
224 + 112 = 336
336 + 28 = 364
puis 351 - 336 = 15

Il se trompe dans le décompte des pas, trouve 23, calcule 28 x 23 = 644 et conclut :

23 fois 28, reste 15 km.

Jérôme additionne 28 :

28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 = 364
364 - 28 = 336
336 + 28 = 364
364 - 28 = 336
351 - 336 = 15
Il calcule 12 x 28 = 336 puis conclut :

il lui reste à faire 15 km.

Sylvie - Victor

Villes choisies

Lille - Grenoble; 769 km.

Déroulement
Victor pose la division

$$\begin{array}{r|l} 769 & 28 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Il évalue la grandeur du quotient 10 < q < 100 puis effectue

28 x 9= 252
28 x 15 = 420
28 x 20 = 560
28 x 30 = 840
28 x 28 = 784
28 x 27 = 756
28 x 29 = 812

puis conclut :

$$\begin{array}{r|l} 769 & 28 \\ \cline{2-2} -\ 756 & 27 \\ \cline{1-1} 013 & \end{array}$$

Marie-Pierre et Marie-Françoise

Villes choisies
Grenoble - Marseille; 277 km

Déroulement
Marie-Pierre dit qu'il faut faire une division et pose

$$\begin{array}{r|l} 277 & 28 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Elle écrit :

28 x 8 = 224
224 + 28 = 252
252 + 28 = 280

puis

$$\begin{array}{r|l} 227 & 28 \\ \cline{2-2} -\ 252 & 9 \\ \cline{1-1} 025 & \end{array}$$

Marie-Françoise déclare ne pas savoir faire les divisions et cherche autre chose. Elle écrit

277
-56
221
-56
265
-56
219
-56
163
-84
179
-84
95
-84
11

Elle compare avec le résultat de Marie-Pierre et constate une erreur :

163
-84
79

Elle réécrit

277
-84
193
-84
109
-84
25

Marie-Françoise conclut :
Il a fait 0 pas et il lui reste 25 km.

<u>Sébastien - Lucile</u>

Villes choisies
Grenoble - Lyon; 105 km

Déroulement
Lucile pose

105 | 28

puis fait les calculs suivants

105 + 28 = 133
105 x 28 = 2940

Ensuite elle écrit

28	28	28
x 5	x 3	x 4
140	84	102

ce qui lui permet d'écrire

$$\begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \cline{2-2} 3 & 4 \end{array}$$

Après, elle écrit encore

28 x 2 = 56
28 x 6 = 168

Sébastien pendant ce temps, après avoir fait le calcul 105 x 28 = 2940, écrit :

28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 + 28 = 196
que Lucile vérifie en faisant 28 x 7 = 196
Lucile réalise le calcul 105 x 7 = 735 Sébastien amorce une soustraction
105 – 28 = 77

puis écrit

28 + 28 + 28 + 28 + 28

Lucile lui dit *"tu n'as qu'à faire 28 x 5"* que Sébastien calcule : 28 x 5 = 140

Sébastien écrit 140 - 28 = 112
puis 112 - 28 = 184 (erreur de calcul)

puis

28 x 4 = 112
28 x 7 = de nouveau 28 x 4 = 112
28 x 6 = 168
168 – 28 = 140
140 - 28 = 118 (erreur de calcul)
118 – 28 = 90

Discussion sur le nombre de pas. Sébastien et Lucile récupèrent un calcul fait antérieurement: *28 x 3 = 84*

Sébastien calcule

112 x 3= 336
136 - 28 = 108
28 x 3 = 84

Lucile, après avoir reposé

$$\begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \hline 3 & 21 \end{array}$$

effectue les calculs

112 – 84 = 28
112 + 84 = 196

pendant que Sébastien calcule

84 x 28 = 1272 (erreur de calcul)
Perte de signification du problème pour l'un comme pour l'autre.

Annexe 2

Extrait de *Procédures utilisées par des enfants de CM dans certains problèmes de division. Repérage de quelques difficultés* (Robert NEYRET) in Rencontres pédagogiques n° 4 (1984) Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques » (publication I.N.R.P.)

Nous nous sommes proposés d'étudier la manière dont les enfants élaborent des procédures de résolution dans des problèmes de type scolaire, particulièrement de division.

Les problèmes posés ont été les suivants :

Problème 1 a
Avec ses bottes de sept lieues, le petit Poucet se déplace entre deux villes. Il fait des pas de 28 km. Il part de Grenoble pour aller à Nice; Grenoble-Nice : 224 km. Combien de pas va-t-il faire ?

Problème 1 b
Il part ensuite de Grenoble pour aller à Marseille (ou autres variantes au CM2) Grenoble - Marseille: 277 km.

Problème 2
On distribue aux enfants une pochette contenant un certain nombre d'allumettes entre 200 et 300 (ce nombre étant inscrit sur un papier à l'intérieur de la pochette). On demande aux enfants de partager ces allumettes entre 7 personnes de façon que chacune d'elles en ait autant.

Problème 3
On range 273 oeufs dans des boîtes de 12. Combien de boîtes peut on remplir ?

Problème 4
On partage équitablement 273 billes entre 14 enfants. Combien de billes donnera-t-on à chaque enfant ?

Problème 5
On achète 13 albums de Lucky Luke. On paye 273 F. Combien coûte un album ?

Ces problèmes sont posés à des élèves de CM1 et CM2 en début d'année scolaire avant tout travail spécifique sur la division.

Pour les deux premiers problèmes, les enfants travaillent par deux et peuvent travailler ensemble. Un observateur note tout ce qui se dit et se passe au niveau de deux enfants. Les seules interventions « autorisées » de l'observateur sont les suivantes :

- en cas d'erreur de calcul: « Regarde: *ici tu as fait une erreur de calcul* ».
- en cas de blocage de plus de 3 ou 4 minutes : « Relisez *l'énoncé* » .

Vous trouverez ci-après des travaux d'élèves extraits du document.

①

273 œufs / boîtes de 12 :
l'enfant fait les essais suivants :

$12 \times 100 = 1200$
$12 \times 30 = 360$
$12 \times 10 = 120$
$12 \times 20 = 240$
$12 \times 15 = 180$
$12 \times 18 = 216$
$12 \times 25 = 300$
$12 \times 22 = 264$
$12 \times 23 = 276$

et conclut « il y aura 23 boîtes et il restera 3 œufs »

②

Le petit Poucet / distance 105 :

$$\begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times\ 5 \\ \hline 240 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times\ 3 \\ \hline 84 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 28 \\ \times\ 4 \\ \hline 102 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ \hline & 4 \end{array}$$

Le petit Poucet va faire 4 pas

③

Le petit Poucet / distance 665 :

$$\begin{array}{r} 280 \\ +\ 280 \\ \hline 560 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 665 \\ -\ 280 \\ \hline 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 105 & 28 \\ -\ 84 & 3 \\ \hline 21 & \end{array}$$

Le petit Poucet fait 23 pas et il lui reste 21 *km*.

④

Le petit Poucet / distance 224 :
Essais de :

$$\begin{array}{r} 131 \\ \times\ 28 \\ \hline 1048 \\ 263\ \ \\ \hline 3668 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 31 \\ \times\ 28 \\ \hline 248 \\ 62\ \ \\ \hline 868 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ \times\ 28 \\ \hline 64 \\ 16\ \ \\ \hline 164 \end{array}$$

puis additionne :

$$\begin{array}{r} 164 \\ +\ 28 \\ +\ 28 \\ +\ 28 \\ \hline 248 \end{array}$$

enfin calcule :

$$\begin{array}{r} 248 \\ -\ 28 \\ \hline 220 \end{array}$$

interprété par 10 pas.
L'observateur fait rectifier l'erreur de calcul $8 \times 28 = 224$.
L'enfant conclut par :
« Le petit Poucet va faire 8 pas ».

⑤

$$\begin{array}{r|l} 670 & 28 \\ \cline{2-2} 110 & 23 \\ 26 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 28 \times 2 = 56 \\ 28 \times 3 = 84 \\ 28 \times 4 = 112 \\ 28 \times 5 = 140 \\ 28 \times 6 = \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1255 & 28 \\ \cline{2-2} -\ 112 & \\ \cline{1-1} 135 & \\ -\ 112 & \\ \cline{1-1} 23 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 958 & 28 \\ \cline{2-2} 118 & 34 \\ -\ 80 & \\ \cline{1-1} 34 & \\ -\ 32 & \\ \cline{1-1} 06 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 958 & 28 \\ \cline{2-2} 118 & 34 \\ 6 & \end{array}$$

⑥

273 billes / 14 enfants :
Les essais successifs sont les suivants :

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 30 \\ \hline 420 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 25 \\ \hline 350 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 15 \\ \hline 210 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 17 \\ \hline 238 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\ 20 \\ \hline 280 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 18 \\ \hline 252 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 19 \\ \hline 266 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 14 \\ \times\ 20 \\ \hline 280 \end{array}$$

avec la conclusion suivante :
« Ils auront 19 billes et certains en auront une en plus. »

⑦

273 œufs / boîtes de 12 :

$$\begin{array}{rrl} & 12 & 1 \\ + & 12 & 2 \\ + & 12 & 3 \\ + & 12 & 4 \\ + & 12 & 5 \\ + & 12 & 6 \\ + & 12 & 7 \\ + & 12 & 8 \\ + & 12 & 9 \\ + & 12 & 10 \\ + & 12 & 11 \\ + & 12 & 12 \\ + & 12 & 13 \\ + & 12 & 14 \\ + & 12 & 15 \\ + & 12 & 16 \\ + & 12 & 17 \\ + & 12 & 18 \\ \hline & 216 & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} 216 & \\ +\ 12 & 19 \\ +\ 12 & 20 \\ \hline 240 & \\ +\ 12 & 21 \\ \hline 252 & \\ +\ 12 & 22 \\ \hline 264 & \\ +\ 12 & 23 \\ \hline 276 & \end{array}$$

on peut remplir 23 boîtes

⑧

Le petit Poucet / distance 224 :

L'enfant pose

28				
+ 28	84	168	336	336
+ 28	+ 84	+ 168	- . . .	- 112
84	168	336	224	224

L'enfant conclut après une étape de réflexion : « Le petit Poucet devra faire 11 pas. »

⑨

Billes entre 14 enfants :

L'enfant compte de 1 en 1 jusqu'à 273.

①⓪

Lucky Luke : 273 F / 13 albums

L'enfant écrit d'abord :

$13 \times 1 = 13$		$13 \times 10 = 130$
$13 \times 2 = 26$		$13 \times 11 = 143$
$13 \times 3 = 39$	barre l'ensemble	$13 \times 12 = 156$
$13 \times 4 = 52$	des calculs	$13 \times 13 = 169$
$13 \times 5 = 65$	précédents	$13 \times 14 = 182$
$13 \times 6 = 78$	et écrit :	$13 \times 15 = 195$
		$13 \times 16 = 208$
		$13 \times 17 = 221$
		$13 \times 18 = 234$
		$13 \times 19 = 247$
L'album coûte 21 F.		$13 \times 20 = 260$
		$13 \times 21 = 273$

①①

Petit Poucet / distance 351 :

L'enfant calcule en écrivant à côté le nombre de pas.

$28 \times 2 = 56$ 2 pas $\quad 56 \times 2 = 112$ 4 pas $\quad 112 \times 2 = 224$ 8 pas

$224 \times 2 = 464$ puis $56 + 28 = 84 \quad 224 + 112 = 336$

Il fait $2 \times 2 \times 2 = 8$ pas

Il fait $2 \times 2 = 4$ pas

Il fait 12 pas

351 - 336 = 15 *km*, qu'il lui reste à parcourir.

①②

Petit Poucet / distance 340 :

L'enfant pose 340 | 28

puis essaie $28 \times 7 = 196$

$28 \times 10 = 280$

et s'approche ensuite par des additions de 28 :

280 + 28 = 308 $\quad$ 308 + 28 = 336

336 + 28 = 364, qui est barré ; et conclut : « il fera 12 pas et il restera 4 *km*. »

①③

273 œufs / boîtes de 12 :

12	60	108	156	204	252
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12
24	72	120	168	216	264
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12
36	84	132	180	228	276
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	
48	96	144	192	240	
+12	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12	
60	108	156	204	252	

23 boîtes

①④

Petit Poucet / distance 351 :

28	1	364
+ 28	2	- 351
+ 28	3	
+ 28	4	364
+ 28	5	- 28
+ 28	6	336
+ 28	7	
+ 28	8	351
+ 28	9	- 336
+ 28	10	15
+ 28	11	
+ 28	12	
+ 28	13	
364		

Il fait 12 pas et il reste 15 *km*.

①⑤

Petit Poucet / distance 559 :

L'enfant effectue $28 \times 10 = 280$

puis $280 \times 9 = 560$

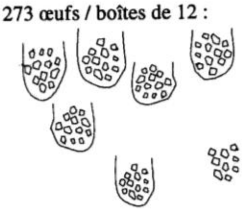
Ensuite il essaie : $28 \times 9 = 252$

Calcule $280 + 252 = 532$ puis $559 - 532 = 027$

et conclut : « Petit Poucet fera 19 pas et 27 km à pied. »

①⑥

273 œufs / boîtes de 12 :

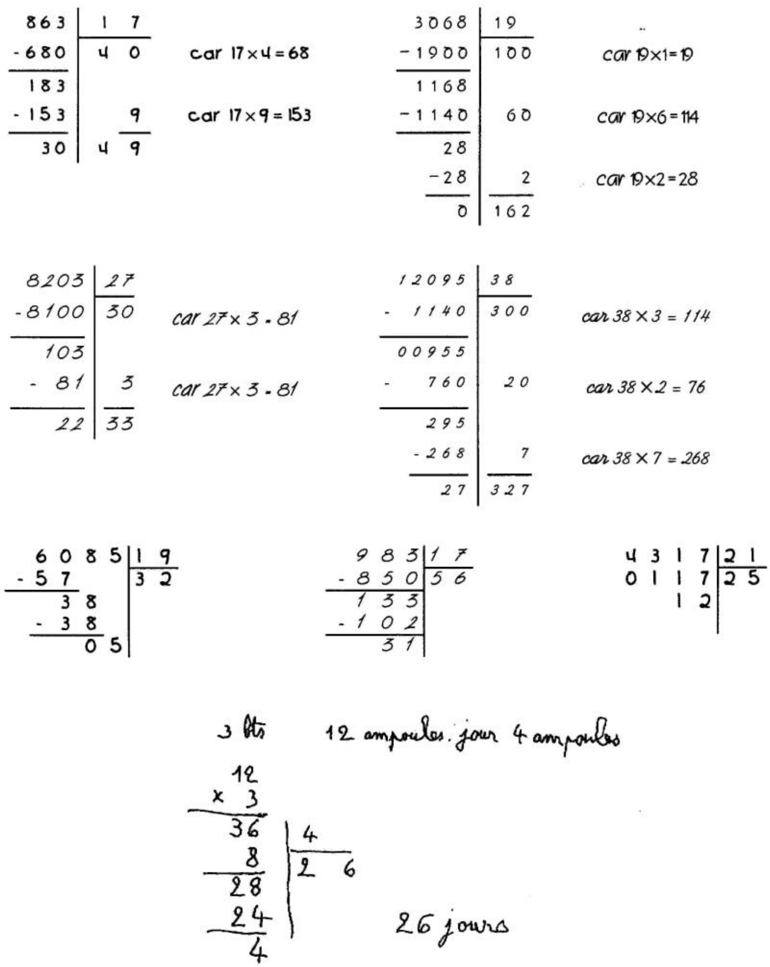


L'enfant compte jusqu'à 273 en remplissant les boîtes

Annexe 3

Voici des travaux d'élèves de CM.

1) Vérifiez les opérations ci-dessous. Pour chaque opération inexacte, expliquez les erreurs.
2) Quels sont les moyens de contrôle à la disposition des élèves pour ce type de calcul ?



Décimaux et autres nombres

Marianne Frémin

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Pau 1992.

Cet article est un compte-rendu d'activités menées avec des Élèves Professeurs des Écoles de première année (PE 1).

I-Introduction

A. Contexte

A l'IUFM de Versailles, le thème "décimaux, fractions et réels" apparaît en première année à la rubrique maîtrise des contenus uniquement, pas à celle de l'ouverture professionnelle. Les préoccupations d'ordre pédagogique sont donc repoussées en deuxième année.

B. Mes choix

Je n'ai pas cherché à présenter une construction propre de ces ensembles de nombres. J'ai voulu d'abord regarder, prendre en compte les connaissances des PE1 et leur préférence pour les "nombres à virgule", pour ensuite organiser les acquis. J'ai essayé d'intégrer les nouveaux outils de calcul (place à la calculette et à un petit peu d'analyse numérique).

II - Le test

A. Le test lui-même *(voir en annexe 1)*

Il est livré aux étudiants qui spontanément discutent entre voisins et confrontent leurs interrogations et points de vue. Nous faisons ensuite une synthèse des acquis, des questions, je complète selon les besoins.

B. Les points soulevés

1. *Définition (questions 1 et 3*)

Un décimal est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $n/10^p$, ou sous forme d'une écriture à virgule finie.

2. *Écriture à virgule et nombre décimal (questions 1 et 2*)

Un décimal a d'autres écritures que celle à virgule : une écriture à virgule illimitée désigne rarement un décimal.

3. ***0,999999* = 1 (!..) *(question 1*)**
Mal accepté. Deux arguments sans réplique, mais peu convaincants : "s'il est différent de 1, quel est donc l'écart à l ?" et "0,33333... = 1/3, donc 3 x 0,333333... = 0,999999... = 3 x 1/3 = 1".

4. *Reconnaître qu'une fraction est un décimal (question 3)*
a/b irréductible, et b = 2^p x 5^q

5. Densité (questions 1, 7, 8)
Un langage topologique intuitif de "fonctions continues et valeurs intermédiaires", de "suites majorante et minorante coinçant un nombre" semble évocateur.

6. *Approximation (question 4*)
Toujours de la topologie intuitive.

7. *Précision (question 4*)
A propos de la contradiction, pour certains, qui considèrent que "3,14 est π", que "3,140 n'est pas π ", mais que, cependant, "3,14 = 3,140", on précise que, pour les matheux, 3,14 = 3,140 = 3,1400 = 3,14000 ... (des écritures formelles du même nombre), alors que pour les physiciens, ce sont des nombres issus de mesures, avec une précision au centième, au millième, au dix millième (les écritures portent une indication sur la fiabilité des décimales).

III - Cours après le test

A. *N Z D Q R (C)*
Quels nombres contiennent-t-ils ? (appel aux souvenirs)
Les souvenirs leur permettent de donner quelques spécimens de nombres qui sont ou qui ne sont pas dans chaque ensemble.
Inclusions : $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{D} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$

B. Leurs propriétés algébriques (point de vue du matheux algébriste)
On cherche à plonger un ensemble de nombres dans un ensemble plus vaste, en gardant toutes les bonnes propriétés, et en les améliorant :
En passant de **N** à **Z**, on gagne les symétriques, et le fait que toutes les équations a + x = b ont une solution.
En passant de **Z** à **D**, on ne gagne rien (**D** n'est pas une invention d'algébriste).
En passant de **Z** à **Q**, on gagne les inverses, et le fait que toutes les équations a x = b (a $\neq$ 0) ont une solution.
En passant de **Q** à **R**, on gagne des solutions à des équations qui n'en avaient pas (par exemple $x^2 = 3$).
En passant de **R** à **C**, on gagne des solutions à des équations qui n'en avaient pas (par exemple $x^2 = -1$).

C. Leurs propriétés topologiques
Net **Z** sont discrets.
D et **Q** sont denses. mais pas complets.
R est complet: c'est le seul dans lequel deux suites (une minorante, l'autre majorante) dont l'écart tend vers zéro "attrapent" à tout coup un nombre.

D. Facilités d'emploi (point de vue mesure et utilisation)

1. ***Pour mesurer, on a besoin :***

- d'un ensemble de nombres (prolongeant **N**),
- de l'ordre, de l'addition, de la multiplication sur cet ensemble,
- de quelques qualités algébriques et topologiques : avoir des inverses, la densité, les "valeurs intermédiaires" (exemple : l'aire d'un carré croît de 4 à 9 quand le côté croît de 2 à 3, on aimerait, quand l'aire du carré vaut 6, avoir une valeur pour le côté).
- d'un ensemble de nombres facile à utiliser.

2. ***Parmi les extensions de N citées ci-dessus :***

- **R** a les meilleures propriétés, mais est difficile d'emploi.
- **D** est loin d'être parfait (l'inverse d'un décimal est rarement un décimal, $\sqrt{6}$ n'est pas un décimal...), mais il permet d'approcher d'aussi près qu'on veut l/7, $\sqrt{6}$, π ... et surtout,
- **D** est très facile à manipuler, parce que lié à la numération en base dix (ce qui facilite les calculs et l'accès à l'ordre).

IV - Développement décimal d'une fraction

J'ai choisi de me placer sur le terrain des élèves en utilisant les "nombres à virgule" et la calculette qu'ils affectionnent, pour y perfectionner leurs compétences, tout en raccrochant les ensembles de nombres cités ci- dessus.

A. Calculer $\frac{43}{13}$ avec au moins 40 décimales

La plupart des étudiants « foncent » sur leur calculette, obtiennent immédiatement 7 ou 8 décimales, ne savent pas continuer, et se mettent à calculer à la main, ce qui leur permet d'aboutir. Ce n'est que plus tard, à ma demande, qu'ils réessayent un calcul à la machine.

1. À la main

Techniques de calcul : des questions émergent sur le sens de "abaisser un zéro", établir une table des multiples de 13 est économique vu la longueur des calculs.

2. ***À la Galaxy*** [1]

La touche "béquille" de la division euclidienne permet de calquer la technique manuelle, en faisant la transposition "abaisser un zéro", c'est "multiplier le reste par 10".
J'ose parfois, suggérer d' "abaisser trois zéros à la fois", ou "multiplier le reste par 1000". On obtient alors trois décimales d'un coup, et on peut repérer sur la division à la main le bloc traité d'un coup. Emerveillement garanti, et réflexion intéressante sur la technique de la division.

3. ***Autre calculette***

La difficulté est bien perçue : la machine donne un maximum de décimales, et on ne peut pas continuer pour en avoir plus tant qu'on n'a pas accès "au reste" (au sens de "ce qu'elle a laissé tomber dans son approximation").
Pour retrouver ce reste, certains multiplient naturellement par 13, et retrouvent 43. C'est l'occasion de travailler avec eux sur les chiffres cachés de la machine et la manière de les faire apparaître (en soustrayant la partie entière et en multipliant par dix).
D'autres suspectent la (ou les) dernière(s) décimale(s), ne prennent en compte que la partie conforme à leurs calculs manuels, multiplient par 13, calculent l'écart à 43, et trouvent le reste (sous forme 0,0000007).
On a de toutes façons un travail sur la numération décimale.
Il est intéressant, pour reprendre l'idée d'approximations successives et pour différencier troncature et arrondi, de comparer les premières décimales obtenues avec ce que dit la machine en faisant **FIX l**, puis **FIX 2**, **FIX 3**, **FIX 4**,...

4. ***Conclusion***

L'écriture est périodique, parce qu'on retrouve les mêmes restes, et qu'alors le calcul se déroule de la même façon.

B. Calculer $\frac{43}{13}$

C'est l'occasion de réinvestir les méthodes de calcul à la machine.
L'écriture est périodique, la période est la même (6), les restes sont ceux qui n'apparaissaient pas dans 43/13.
Les plus rapides et courageux calculent d'autres fractions (21/17 ...) et déclarent que c'est toujours périodique parce qu’on retombe toujours sur un reste déjà vu.

C. Contemplations

(feuille jointe annexe 2 : *les fractions 1/n)*

1. ***Où l'on reconnaît les fractions décimales et les autres***

Les fractions décimales sont celles "qui tombent juste", "qui finissent par n'avoir que des zéros" (on les repère, on vérifie que ce sont bien celles dont le dénominateur est $2^p \times 5^q$).

---

[1] NDLR : Calculatrice de Texas instrument conçue à l’époque pour l’école élémentaire.

Les autres ont une écriture périodique : on le vérifie, on l'explique : "c'est toujours périodique parce qu'on retombe toujours sur un reste déjà vu". (Quasiment tous les étudiants font le travail consciencieusement pour toute la feuille : incrédulité ? besoin de renforcement ?)
On peut affirmer que la période de 1/n est toujours inférieure à n (les restes possibles sont 0, l,..., n-l). Une question est régulièrement soulevée et reste en suspens : peut-on prévoir la longueur de la période en fonction de n ? On peut faire des conjectures, confirmées ou infirmées par l'examen de la feuille. Ce problème est certainement résolu, je n'en connais pas la solution, mais suis avide de m'instruire... (ceci est un appel aux collègues).

2. *Qui dit périodicité dit fraction ?*

Le problème est régulièrement soulevé par les étudiants.
Je le traitais très classiquement sur un ou deux exemples :

x = 2,456456456456456456……..

$$\begin{array}{rl} 2456,456456456456456... & (= 1000\,x) \\ -\quad \underline{2,456456456456456456} & (= x) \\ = 2454 & \end{array}$$

$$999\,x = 2454$$

d'où $$x = \frac{2454}{999}$$

Ceci est perçu comme un tour de passe-passe peu crédible.

3. *"Rareté" relative des décimaux, des fractions et des réels*
Ayant bien colorié leur feuille en cherchant les périodes, les étudiants remarquent que les décimaux sont de plus en plus "rares" parmi les fractions.
Je me garde bien de parler du cardinal de **R** et de **Q** (personne ne me croirait). Par contre, j'en profite pour glisser qu'une suite illimitée de décimales tout à fait banale, sans rien de remarquable du point de vue de la période, est un réel non fractionnaire, et que donc les fractions sont rarissimes parmi les réels (ce qu'ils imaginent volontiers, vu sous cet angle, alors qu'ils ne sont capables de citer que très peu de réels non rationnels).

V - Approximations décimales et rationnelles de π

A. Chasse aux décimales (un peu d'histoire)
Voir l'article paru dans "Tangente" n° 12 (1989)

B. Activités avec calculette
Extraites de "Aventures avec votre calculateur" L. Rade et B. A. Kaufman Cedic 1979. *(Voir annexe 3*)

1. ***Les buts visés sont de deux ordres :***
- fréquenter des suites ou des séries qui convergent plus ou moins rapidement, des approximations décimales ou rationnelles.
- pratiquer le calcul numérique (organiser les calculs, connaître les touches et les priorités de sa machine, utiliser les mémoires...).

2. ***Formes du travail***
C'est l'occasion d'un travail "à la carte": chacun selon ses capacités et celles de sa machine se lance dans les activités de son choix. J'interviens localement, à la demande.

3. ***Commentaires sur les activités***
La **question a** permet de pointer, parmi les 7 ou 8 décimales obtenues à la calculette pour chaque fraction, celles qu'on peut retenir pour π :
3 + 10/71 = 3,1408445
3+ 1/7 = 3,1428571
π = 3,14...
Ce sont celles qui sont communes aux deux.
Travail sur encadrement et approximation.

Question b :
Travail sur le "sens" de la formule des (b_i) et la prise en compte des priorités de la machine.
Organisation des calculs, utilisation de la touche mémoire pour éviter des recopies (on débouche sur une suite algorithmique de touches à taper).
Avec les calculettes actuelles, même sommaire, je n'ai pas rencontré de suites qui cessaient de converger (possibilité évoquée par L. Rade).

La **question c** est du même genre que la b. Les calculs sont plus simples à comprendre. Une calculatrice à deux registres de mémoire serait la bienvenue pour "croiser" les suites. Les étudiants qui ont « tâté » de la question b laissent tomber celle-ci (elle peut cependant intéresser un virtuose bien équipé).

Question d : pas de difficulté de compréhension ou de calcul. La première série converge avec une lenteur remarquable et désespérante.

Question e : il est plus intéressant de rechercher des approximations rationnelles de π (ou π^2, ou $\sqrt{\pi}$) que de faire des constats. Méthode : rechercher parmi les multiples de π (ou π^2, ou $\sqrt{\pi}$) ceux qui sont "presque entiers" (NB : on prend le π de la calculette). Il faut déterminer ce qu'on choisit d'appeler "presque entier". On peut regarder toutes les décimales fournies, ou utiliser **FIX.** On trouve
$7\,\pi = 22$ (d'où l'approximation 22/7) et quelques autres (dont $14\,\pi = 44$, bien sûr).

Annexe 1 : Le test proposé aux étudiants
Dominique Valentin, Marianne Frémin, février 1992

1. Parmi ces nombres, quels sont les nombres décimaux ? Pourquoi ?

0,33	2,4758	$\frac{1}{4}$	33,14	$\frac{22}{7}$
$\frac{427}{10}$	- 4	$\frac{40}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\sqrt{2}$
$\frac{1}{3}$	π	7,0	$\frac{117}{125}$	$\frac{117}{3}$

17,999... (infinité de 9)

2. Mettre sous forme d'écriture « à virgule », quand c'est possible.

$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{35}{100}$
$\frac{3}{100}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{111}{37}$	

3. Comment reconnaître qu'une fraction désigne un décimal ?

4. Parmi les écritures suivantes, regrouper celles qui désignent un même nombre. Justifier.

$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{810}{1000}$	$\frac{44}{14}$	$\frac{81}{100}$	$\frac{355}{113}$	$3 + \frac{1}{7}$	0,810
π	3,14	8,10	$6 \div 10$	0,33	3,140	0,81		

regroupement	justification

5. Compléter le tableau.

$\times$ 100	0,03	47,2725			
	1485		13	3,271	

6. Les nombres sont rangés dans l'ordre croissant.
a) Placer 3,245 parmi

2,9	3	3,1	3,2	3,3	3,4

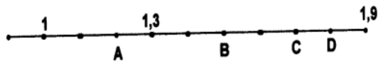
b) Placer 0,027 et 7,32 parmi

0,001	0,01	0,1	1	1,1	10	100

7. Quel nombre décimal inférieur à 6 est le plus proche de 6 ?

8. Combien de décimaux y a-t-il entre 1 et 2 ?
Et entre 1000 et 1001 ?

9.Quels nombres correspondent aux points A, B, C et D ?
Placer le point E correspondant au nombre 1,55



10. Trouver un nombre entre 12,09 et 12,1 qui soit « juste au milieu » (c'est-à-dire dont l'écart à 12,09 et à 12,1 soit le même).

11. Trouver un nombre entre 1,1 et 1,01 qui soit « juste au milieu » (c'est-à-dire dont l'écart à 1,1 et à 1,01 soit le même).

12. Compléter le tableau suivant :

écriture à virgule	avec puissance de 10	écriture « calculette »
42,53	4253×10^{-2}	4,253 E1
	37×10^{3}	
0,8152		
27,1		
	1×10^{-4}	
		3,14E-5

colonne 2 : un entier multiplié par une puissance de 10

colonne 3 : un nombre entre 1 et 10 multiplié par une puissance de 10

13. Effectuer les opérations suivantes :
29 + 17,09 + 132,8 $\quad$ 109 $\times$ 5,66 $\quad$ 4,13 - 2,844
4,8 $\times$ 3,08 $\quad$ 38 - 2,43 $\quad$ 27 + 0,005 $\quad$ 1,03 $\times$ 1,03

Annexe 2 : Les fractions $\dfrac{1}{n}$

1/2 = 0,50000000000000000000000000000000000000000000000…………..
1/3 = 0,3333333333333333333333333333333333333333333333…………….
1/4 = 0,2500000000000000000000000000000000000000000000…………..
1/5 = 0,20000000000000000000000000000000000000000000……………..
1/6 = 0,166666666666666666666666666666666666666666666……..
1/7 = 0,142857142857142857142857142857142857142857142857142857……..
1/8 = 0,1250000000000000000000000000000000000000000……………
1/9 = 0,1111111111111111111111111111111111111111111…………..
1/10 = 0,10000000000000000000000000000000000000000000…….
1/11 = 0,090909090909090909090909090909090909090909090909090…..
1/12 = 0,9090909090909090909090909090909090909090909090909……
1/13 = 0,76923076923076923076923076923076923076923076923076923…
1/14 = 0,71428571428571428571428571428571428571428571428571428…
1/15 = 0,066666666666666666666666666666666666666666………………
1/16 = 0,06250000000000000000000000000000000000000000000………
1/17 = 0,0588235294117647058823529411764705882352941176470…..
1/18 = 0,055555555555555555555555555555555555555555555……….
1/19 = 0,05263157894736842105263157894736842105263157894736…….
1/20 = 0,0500000000000000000000000000000000000000000000………..
1/21 = 0,047619047619047619047619047619047619047619047619……..
1/22 = 0,04545454545454545454545454545454545454545454545………
1/23 = 0,04347826086956521173913043478260869565211739130……….
1/24 = 0,04166666666666666666666666666666666666666666666………
1/25 = 0,04000000000000000000000000000000000000000000000………
1/26 = 0,03846153846153846153846153846153846153846153846………
1/27 = 0,0370370370370370370370370370370370370370370370………
1/28 = 0,0357142857142857142857142857142857142857142857………
1/29 = 0,034482758620689655172413793103448275862068965………..
1/30 = 0,033333333333333333333333333333333333333333333………….
1/31 = 0,032258064516129032258064516129032258064516129032……….
1/32 = 0,031250000000000000000000000000000000000000000000………
1/33 = 0,030303030303030303030303030303030303030303030303030……
1/34 = 0,029411764705882352941176470588235294117647058823……..
1/35 = 0,02857142857142857142857142857142857142857142857……….
1/36 = 0,0277777777777777777777777777777777777777777777……….
1/37 = 0,0270270270270270270270270270270270270270270270………
1/38 = 0,026315789473684210526315789473684210526315789473…….
1/39 = 0,025641025641025641025641025641025641025641025641…….
1/40 = 0,025000000000000000000000000000000000000000000000…….
1/41 = 0,024380243902439024390243902439024390243902439024…….
1/42 = 0,0238095238095238095238095238095238095238095238………
1/43 = 0,0232558139534883720930232558139534883720930232……..
1/44 = 0,02272727272727272727272727272727272727272727………..

1/45 = 0,0222222222222222222222222222222222222222222………
1/46 = 0,021739130434782608695652173913043478260869565…….
1/47 = 0,02127659574468085106382978723404255319148936……..
1/48 = 0,020833333333333333333333333333333333333333……….
1/49 = 0,02040816326530612244897959183673469387755……………
1/50 = 0,0200000000000000000000000000000000000……………..
1/51 = 0,019607843137254901960784313725490196078………………
1/52 = 0,019230769230769230769230769230769230769230769230……..
1/53 = 0,018867924528301886792452830188679245283018867924………..
1/54 = 0,0185185185185185185185185185185185185185185185………..
1/56 = 0,01785714285714285714285714285714285714285714285714…………
1/57 = 0,017543859649122807017543859649122807017543859……………
1/58 = 0,017241379310344827586206896551724137931034482758……………
1/59 = 0,016949152542372881355932203389830508474576271………………
1/60 = 0,0166666666666666666666666666666666666666666……………
1/61 = 0,016393442622950819672131147540983606557377049180……………
1/62 = 0,01612903225806451612903225806451612903225806451 61………….
1/63 = 0,015873015873015873015873015873015873015873015873015………
1/64 = 0,0156250000000000000000000000000000000000……………………
1/65 = 0,0153846153846153846153846153846153846153846……………..

1/9 = 0,111111111111111111111111111111111111111111111111…………
2/9 = 0,22222222222222222222222222222222222222222222222222……..
3/9 = 0,3333333333333333333333333333333333333333333333333…………
4/9 = 0,44444444444444444444444444444444444444444444444444………

1/99 = 0,0101010101010101010101010101010101010101010101010……..
2/99 = 0,0202020202020202020202020202020202020202020202020………
3/99 = 0,030303030303030303030303030303030303030303030303…………
4/99 = 0,04040404040404040404040404040404040404040404040404……..
5/99 = 0,050505050505050505050505050505050505050505050505……..
6/99 = 0,060606060606060606060606060606060606060606060606……
7/99 = 0,07070707070707070707070707070707070707070707070……..
8/99 = 0,0808080808080808080808080808080808080808080808080…….
9/99 = 0,0909090909090909090909090909090909090909090909090……
10/99 = 0,1010101010101010101010101010101010101010101010…………
11/99 = 0,111111111111111111111111111111111111111111111111……..
12/99 = 0,1212121212121212121212121212121212121212121212…….
13/99 = 0,131313131313131313131313131313131313131………………
14/99 = 0,1414141414141414141414141414141414141414141………….
15/99 = 0,1515151515151515151515151515151515151……………….
16/99 = 0,1616161616161616161616161616161616161616…………….

1/999 = 0,00100100100100100100100100100100100100…………………
2/999 = 0,00200200200200200200200200200200200020…………….
3/999 = 0,003003003003003003003003003003003003003003003………..

4/999 = 0,00400400400400400400400400400400400400400……………..
5/999 = 0,0050050050050050050050050050050050050050050050………..
6/999 = 0,00600600600600600600600600600600600600600600600600………
7/999 = 0,0070070070070070070070070070070070070070070070070……..
8/999 = 0,0080080080080080080080080080080080080080080080080…………
9/999 = 0,0090090090090090090090090090090090090090090090090…………
10/999 = 0,0100100100100100100100100100100100100100100100……………
11/999 = 0,0110110110110110110110110110110110110110110110110………
12/999 = 0,012012012012012012012012012012012012012012012012012……
13/999 = 0,01301301301301301301301301301301301301301301301301………
14/999 = 0,0140140140140140140140140140140140140140140140140………
15/999 = 0,0150150150150150150150150150150150150150150150150……..
16/999 = 0,0160160160160160160160160160160160160160160160160………
314/999 = 0,31431431431431431431431431431431431431431431……………..

Un nombre se présente sous forme d’écriture périodique : peut-on trouver une fraction qui lui est égale ?
Si la période commence juste après la virgule, la liste ci-dessus laisse deviner une solution :
0,4546456456456456456... = 456/999
2,4546456456456456456... = 2 + 456/999 et on peut mettre sous forme de fraction 2454/999
Sinon, on peut se ramener au cas précédent :
12,3456565656565656565656... = 12,34 + 0,01 × 0,565656565656...
= 1234/100 + 1/100 × 56/99

Annexe 3 : Le nombre π

Extrait de « Aventure avec votre calculateur » I. Rade et B.A. Kaufman Cedic 1979

Si la longueur du diamètre d'un cercle est 1, alors la longueur de sa circonférence est π.

Si la longueur du rayon d'un cercle est 1, alors la mesure de son aire est π.

Le réel π est l'un des nombres les plus fameux en mathématique. Vous pourrez lire 1'histoire fascinante de ce nombre dans le livre de D.E.SMITH, *History of Mathematic.5.* Volume II (New-York Dover Publications. 1958).

Voici une approximation de π avec 35 décimales :

$\pi \approx$ 3,14159265358979323846264338327950288

Cette approximation a été calculée par Ludolf Van CEULEN (1540-1610) qui était à partir de 1600, professeur de génie militaire à l'université de Leyden en Hollande. Cette approximation a été gravée sur sa tombe.

a) Approximation d'Archimède

Le mathématicien grec Archimède (287-212 av. J.C.) a montré que :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$$

II a trouvé ces approximations en utilisant deux polygones réguliers de 96 côtés. respectivement circonscrit et inscrit dans un cercle.

Calculez des approximations décimales de $3 + \frac{10}{71}$ et $3 + \frac{1}{7}$.

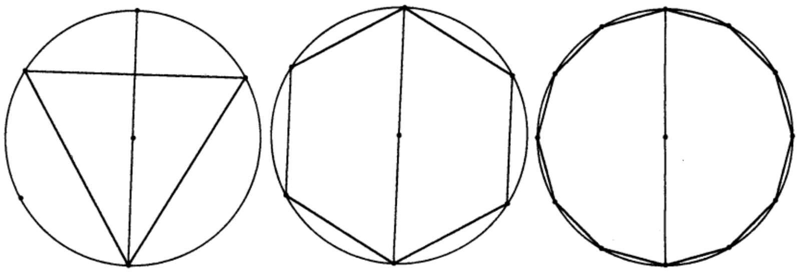
Déterminez jusqu'à quel ordre le résultat d'Archimède donne un renseignement exact sur π.

Déterminez aussi la moyenne de ces approximations décimales et dites si on a amélioré ainsi la précision sur π.

b) La méthode d'Archimède pour approximer π

Considérez un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de diamètre 1. Comme nous l'avons signalé plus haut, la longueur de ce cercle est π, et ainsi le périmètre du triangle équilatéral est une approximation de π.

Si vous considérez alors la suite constituée par les polygones réguliers de 6 côtés, de 12 côtés, etc. les périmètres de ces polygones sont des approximations de plus en plus précises de π.



Cette méthode qui consiste à trouver des approximations de plus en plus fines de π peut être décrite de la manière suivante (nous ne donnons pas ici de démonstration) : on construit trois suites (a_i), (b_i) et (x_i) avec :

1) $a_1 = 3$ et $b_1 = 1$ avec $x_1 = a_1 b_1$

2) $a_2 = 2a_1$ et $b_2 = \dfrac{b_1}{\sqrt{2+\sqrt{4+b_1^2}}}$ avec $x_2 = a_2 b_2$

3) $a_3 = 2a_2$ et $b_3 = \dfrac{b_2}{\sqrt{2+\sqrt{4+b_2^2}}}$ avec $x_3 = a_3 b_3$

plus généralement:

4) $a_{n+1} = 2a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n}{\sqrt{2+\sqrt{4+b_n^2}}}$ avec $x_{n+1} = a_{n+1}b_{n+1}$

La suite (x_i) donne des approximations de plus en plus fines de π.
En calculant x_1 , x_2 , x_3 ,…, x_{10} , déterminez les dix premières approximations de π.
Si votre calculateur ne vous permet pas de calculer avec plus de 8 décimales, vous allez trouver quelque chose de particulier au cours des calculs. Nous en dirons plus à ce sujet dans les commentaires.

c) Méthode de CUSANUS pour approximer π

Le philosophe, théologien et mathématicien allemand Nicolaus CUSANUS (1401-1464) a mis en évidence une méthode simple pour approximer π. Sa méthode est basée sur l'étude d'une suite de polygones réguliers de périmètre 2. Voici une description de cette méthode :

1) $a_1 = \frac{1}{4}$ et $b_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ On a : $\frac{1}{b_1} < \pi < \frac{1}{a_1}$

2) $a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$ et $b_2 = \sqrt{b_1 a_2}$ On a : $\frac{1}{b_2} < \pi < \frac{1}{a_2}$

3) $a_3 = \frac{1}{2}(a_2 + b_2)$ et $b_3 = \sqrt{b_2 a_3}$ On a : $\frac{1}{b_3} < \pi < \frac{1}{a_3}$

plus généralement :

4) $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ et $b_{n+1} = \sqrt{b_n a_{n+1}}$ On a : $\frac{1}{b_{n+1}} < \pi < \frac{1}{a_{n+1}}$

Déterminez $\frac{1}{b_{10}}$ et $\frac{1}{a_{10}}$ et trouvez ainsi un encadrement de π.

d) *Séries infinies et π*

Nous pouvons aussi obtenir des approximations de π en calculant la somme d'un nombre fini de termes de certaines séries dont la somme est π.

Ainsi, par exemple, on peut établir que $\pi = 4(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ...)$

Et $\pi = \sqrt{12}\,(1 - \frac{1}{3\times 3} + \frac{1}{3^2\times 5} - \frac{1}{3^3\times 7} + ...)$

Essayez de calculer des approximations de π en utilisant ces séries.

La formule suivante, cependant, est bien meilleure pour obtenir des approximations de π :

$$\pi = 16\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\times 5^3} + \frac{1}{5\times 5^5} - \dots\right) - 4\left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\times 239^2} + \frac{1}{5\times 239^5} - \dots\right)$$

Elle porte le nom de formule de MACHIN.

Utilisez cette formule pour calculer des approximations de π.

e) *Approximations rationnelle. de π*

Archimède a trouvé les approximations suivantes de π :

$\frac{22}{7}$ et $\frac{223}{71}$ (Les nombres $\frac{22}{7}$ et $\frac{223}{71}$ sont *rationnels* alors que le nombre π est *irrationnel).*

L'ingénieur chinois TSU CH'UNG-GHIH (430-501) a trouvé une remarquable approximation rationnelle $\frac{355}{113}$.

En utilisant votre calculateur essayez de trouver d'autres approximations rationnelles de π. Pour chacune d'entre elles, trouvez jusqu'à quelle décimale votre approximation est en accord avec le développement décimal de π.

f) ***L'approximation de RAMANUJAN***

En 1914, le mathématicien indien RAMANUJAN a donné l'approximation curieuse de π :

$$\sqrt{\sqrt{\frac{2143}{22}}} = \left(\frac{2143}{22}\right)^{\frac{1}{4}}$$

En d'autres termes, $\frac{2143}{22}$ est une approximation rationnelle de π^4.

Vous pouvez trouver des approximations analogues de π à l'aide de votre calculateur. Pour chacune d'entre elles, trouvez jusqu'à quelle décimale votre approximation est en accord avec le développement décimal de π.

332

Analyse a priori de séquence de formation à propos des décimaux

Alain BRONNER

Extrait du Cahier du Formateur, Tome 1- Perpignan 1997.

Cet article présente une étude pour construire des séances de formation pour les stagiaires autour de la construction des décimaux.

1. Objet

Cette étude présente une exploration des différents champs d'investigation pour construire des séquences de formation à propos des nombres décimaux. L'article n'expose pas un exemple de “ séquence type ” en formation des professeurs-stagiaires (PE2) d'école, mais il s'agit plutôt de dégager les principales variables sur lesquelles il est possible de s'appuyer pour construire des séquences en formation. On pourrait imaginer que, pour construire une séquence idéale, il faille prendre en compte toutes ces variables ; ce n'est, ni nécessairement souhaitable pour certains publics, ni, la plupart du temps, réaliste compte tenu de diverses contraintes, notamment celles de temps et de programmes.

Les supports de l'étude

Pour ce travail, j'ai étudié plusieurs types de documents :

- Les cours ou progressions, proposés par quatre formateurs en IUFM (C. Houdement 1997, M.L. Peltier 1997, G. Lepoche 1997, A. Bronner 1997)[1] ;
- Les articles publiés dans certaines brochures de la COPIRELEM (Collectif Colloque d'Angers 1995, J. Briand, G. Vinrich colloque de Pau 1992, Muriel Fénichel colloque de Colmar 1993) ;
- Les manuels de formation : “ Se former pour enseigner les mathématiques ” (tome 3 et 4, Armand Colin) et “ Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeurs des écoles ” (tome 2, Hatier).

[1] Je tiens à remercier les formateurs qui ont bien voulu me faire parvenir leur cours pour ce travail.

Les différents champs d'exploration

J'ai essayé de dégager les différents champs travaillés en formation sur ce thème. Le premier tableau indique les champs étudiés préalablement aux constructions ou aux analyses d'activités de classe. La colonne de droite indique le nombre d'occurrences dans les huit documents consultés[2].

Champs	**Présence**
Analyse mathématique	**8**
Analyse historique et/ou épistémologique	**6**
Analyse cognitive, psychologique	**8**
Analyse des attentes de l'institution : programmes, instructions, évaluations	**4**
Analyse de manuels	**7**

Le deuxième tableau précise les dimensions didactiques travaillées.

Champs	**Présence**
Explicitation d'hypothèses d'apprentissage ou de macro choix didactiques	**8**
Analyse ou construction d'une progression	**6**
Analyse ou construction d'activités de classe	**8**

2. Analyse mathématique

2.1. Objectifs

La plupart des auteurs souhaitent faire émerger les représentations des professeurs stagiaires à propos des décimaux et des rationnels. Ils envisagent ainsi une mise à jour des connaissances. Ils profitent donc de ce champ pour des mises au points d'ordre mathématique et, parfois, pour une exploration de nombreux aspects ou cadres d'interventions de ces nombres.

2.2. Présentation de quelques dispositifs

La plupart des formateurs conçoivent plusieurs dispositifs s'appuyant sur les connaissances et les représentations des étudiants à propos des nombres décimaux, rationnels, voire réels ou, tout au moins, sur les racines carrées.

[2] Il semble peu significatif de comparer cette présence des champs d'étude dans des documents qui n'ont pas le même statut ou qui ne s'adressent pas à un même public. Je les présente néanmoins à titre indicatif.

2.2.1 Des questions essentielles

Il est possible de s'appuyer sur quelques questions comme : ***Qu'est-ce qu'un nombre décimal ?***

Les réponses (correctes ou erronées) peuvent être classées en cinq catégories (Briand J. et Vinrich G. 1993) :

- Définition basée sur une écriture décimale (*nombre à virgule - avec un nombre fini ou infini de décimales -, deux nombres séparés par une virgule, …*) ;
- Définition basée sur la place des décimaux par rapport aux entiers (*nombre non entier, nombre entier plus une partie fractionnaire, …*) ;
- Définition basée sur les fractions (*nombres fractionnaires, nombres fractionnaires se finissant, fractions décimales, …*) ;
- Définition liée à la division (*résultat d'une division de deux entiers, d'un entier par une puissance de dix, …*) ;
- Définition liée aux puissances de dix ou la numération (*produit d'un entier par une puissance de dix, sommes de fractions décimales*).

Une autre question porte sur l'intérêt : ***Pourquoi les décimaux sont-ils intéressants ?***

L'intention est ici de faire ressortir, avec les professeurs-stagiaires, que les décimaux permettent de résoudre des problèmes dans lesquels les entiers ne suffisent pas. Ils permettent d'approcher des nombres ou des mesures de grandeurs avec une précision donnée. De plus ils fournissent, d'une part une continuité avec les entiers par leur codage et, d'autre part une extension des algorithmes de calcul sur les entiers à un coût assez réduit.

2.2.2 Des questionnaires ou tests complémentaires

Certains formateurs proposent à leurs professeurs-stagiaires des questionnaires explorant d'autres aspects. On pourra consulter deux exemples en annexe :

Annexe 1 : “ Prendre conscience de ses connaissances sur les nombres ” (Bronner A.)

Annexe 2 : “ A propos des nombres décimaux ” (Fénichel M., 1994).

Ces exercices peuvent être analysés globalement en utilisant une typologie de rapports personnels à l'objet “ nombre ” (Bronner A. 1997). On pourra aussi comparer avec les résultats donnés par Robert Neyret (1995) dans sa thèse.

Certaines difficultés sont souvent repérées : les inclusions et relations entre les différents ensembles ne sont pas maîtrisées ; peu de distinctions sont faites entre nombres et écritures ; les étudiants ont une difficulté à situer les décimaux parmi les autres nombres ; les rationnels et les décimaux sont souvent confondus ; les liens exacts entre rationnels et décimaux ne sont pas établis. Ces études montrent ainsi que, pour un grand nombre d'étudiants, d'une part, les nombres sont rabattus sur les décimaux et, d'autre part, les décimaux sont identifiés à une écriture à virgule.

2.2.3 Synthèse du formateur

Les formateurs insistent souvent sur les aspects suivants :

- les différents types de nombres, les divers ensembles de nombres ;
- les écritures fractionnaires des rationnels et des décimaux ;
- le lien entre les rationnels et, d'une part, la division et, d'autre part, les équations du premier degré à coefficients entiers ;
- la reconnaissance d'un rationnel décimal à l'aide de sa fraction irréductible ;
- les écritures décimales et le lien avec la numération décimale de position ;
- la reconnaissance d'un réel rationnel à partir de l'écriture décimale ;
- la structure d'ordre dense de $\mathbb{D}$;
- la densité de $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{Q}$ et dans $\mathbb{R}$.

3. Analyse historique

3.1. Objectifs

Il s'agit de présenter des repères importants de l'histoire des nombres décimaux, voire des rationnels ou des réels, de repérer les difficultés et d'identifier des obstacles épistémologiques à l'émergence des décimaux. Cette étape permet de mettre en évidence les remarques suivantes :

- le sens du décimal vient de la notion de fraction comme chez les mathématiciens arabes du moyen âge ou comme chez Stevin ;
- la notation décimale est une convention qui étend celle sur les entiers et permet une extension peu coûteuse des algorithmes.

3.2. Des dispositifs

En général les formateurs apportent les informations, mais il proposent parfois des lectures d'articles de travaux d'histoire des mathématiques ou de textes historiques.

3.2.1 Des repères importants

On fera d'abord remarquer que, de la notion, très ancienne, de partage de l'unité vont naître des systèmes de numération utilisant les fractions unaires en Egypte et les fractions sexagésimales avec développement chez les Babyloniens.

Une extension du concept de nombre aux rationnels et à certains irrationnels apparaît chez les arabes au IXe siècle. Pour ce qui est des premières fractions décimales, après les avoir découvertes en Inde, les historiens les repèrent à nouveau chez Al-Uqlidisi (fin du X^{ème}) et Al Kashi (1427).

On insistera ensuite sur l'apparition tardive de la numération et la notation décimale en Europe (F. Viète 1579, S. Stévin 1585), sur les liens officiels avec le système métrique (lois organiques du 7 avril 1795 et du 10 décembre 1799) et sur la difficulté d'imposition de ce système pour les calculs en France (loi du 4 juillet 1837). Le système métrique devient alors légal en 1840 (IREM de Rouen, 1979). Il faut attendre la fin du XIXe siècle pour que les décimaux soient enseignés à la population dès l'école primaire.

3.2.2 Un exemple de Travail Dirigé : " Etude de LA DISME de STEVIN de Bruges "

Lors du stage d'Angers (COPIRELEM de mars 1995), une étude guidée de la Disme[3] a été proposée par plusieurs formateurs (Briand J, Euriat J, Huet M.L., R. Lecoq, M.L. Peltier, 1996). Les auteurs ont choisi ce texte pour " *son côté très contemporain en ce qu'il répond à une préoccupation sociale, la problématique posée, les procédés d'exposition, les rapports que ce texte révèle entre les savoirs savants et les pratiques sociales* ".

4. Analyse cognitive

4.1. Objectifs

Dans ce champ, le but des formateurs est d'amener les professeurs-stagiaires :

• sur le plan de l'apprentissage des décimaux :

- à repérer les connaissances des enfants à certains niveaux de classes à propos des décimaux et des fractions ;
- à mettre en évidence les erreurs souvent observables dans certaines tâches (notamment sur les calculs, la comparaison ou l'encadrement, la résolution de certains problèmes, et la signification de l'écriture décimale) ;
- à prendre conscience de certaines représentations des élèves à propos des fractions et des décimaux ;

• sur le plan des notions de didactique des mathématiques :

[3] On pourra trouver une traduction complète de ce texte dans la brochure : Documents pour la formation des professeurs d'école, Tome 4, IREM de Paris VII, Paris.
NDLR : l'article est présent dans ce tome.

- à prolonger un travail sur les obstacles épistémologiques ou didactiques, et les processus d'apprentissage ;
- à se familiariser avec les notions d'objectifs et de variables de test.

4.2. Des supports

4.2.1 Analyse des résultats de tests et d'évaluations nationales Sixième

Je propose une synthèse de résultats d'élèves à certains tests (APMEP, INRP, Evaluation Sixième, …)[4]. Cette synthèse permet d'avoir une vue globale des compétences travaillées à l'école élémentaire et d'en tirer certaines régularités dans les réponses d'élèves aux exercices types.

Les exercices sont classés en trois catégories (écriture et reconnaissance, opérations, ordre). On peut demander aux professeurs stagiaires de réaliser les tâches suivantes :

- imaginer les intentions des auteurs (si les objectifs ne sont pas annoncés par le formateur) ;
- dégager les variables pertinentes de tests ou des exercices en lien avec les objectifs et les choix faits par les auteurs ;
- analyser les résultats ;
- construire un test à faire passer dans des classes de CM.

Cette étude statistique peut être utilement complétée par une analyse de cahiers d'élèves de “ l'évaluation Sixième ”.

4.2.2 Étude de travaux d'élèves : Rangement des décimaux et addition de fractions

L'étude de certains sujets du CRPE permet d'analyser les erreurs d'élèves. Le but de ce travail est d'étudier les conceptions des élèves à propos du rangement de liste de décimaux. On pourra s'aider des règles implicites sur l'ordre, suggérées par C. Grisvard et F. Léonard (1981 et 1983).

M. Fénichel (Colloque COPIRELEM de Colmar, 1993) propose, à partir du Tangram, des travaux d'élèves sur l'addition des fractions (annexe 3). Les professeurs stagiaires pourront en particulier classer, décrire les réponses et les procédures des élèves, et émettre des hypothèses sur les origines des réponses erronées.

4.2.3 Sensibilisation à des notions de didactique des mathématiques

Le formateur fait une synthèse des conceptions à propos des décimaux (Grisvard et Léonard, 1981 et 1983) et des fractions (Perrin M.J. 1986), et des

[4] L'ensemble de ces résultats sont disponibles dans le Cahier du Formateur N°1, Perpignan, 1997.

problématiques de calcul (Bronner 1997). Il profite de ce type de travail pour introduire les notions de *théorèmes-en-acte et d'obstacle*. On mettra en évidence que, dans les productions des élèves, la plupart des erreurs, ne peuvent être considérées comme anodines, dues à l'étourderie. Elles sont souvent liées à des obstacles :

> " *Un obstacle se manifeste donc par des erreurs, mais ces erreurs ne sont pas dues au hasard. Fugaces, erratiques, elles sont reproductibles, persistantes. De plus ces erreurs, chez un même sujet, sont liées entre elles par une source commune : une manière de connaître, une conception caractéristique, cohérente sinon correcte, une " connaissance " ancienne et qui a réussi dans tout un domaine d'actions. "* (Brousseau G. 1983)

5. Analyse des attentes de l'institution

5.1. Objectifs de l'étude

Nous proposons ici d'étudier l'évolution des programmes et instructions officielles d'enseignement, d'identifier ce qu'attend actuellement l'institution à propos des décimaux, notamment de repérer les compétences exigibles en relation avec exercices types, et de dégager quelques lignes directrices d'enseignement. On pourra utiliser les documents suivants :
- les programmes et les commentaires d'accompagnement de différentes périodes (1923, 1945, 1970, 1980, 1995) ;
- des " évaluations nationales " à l'entrée en sixième de différentes années ;
- des référentiels de compétences, comme celui de l'IREM de Montpellier (Bellard et al, 1995).

5.2. Évolution des programmes à propos des décimaux

Je rappelle ici quelques repères importants et, pour une analyse plus approfondie on pourra consulter Ermel CM1 (1997) ou encore Neyret (1996) :
- 1887 : Fractions décimales et système métrique ;
- 1923 : Ecritures à virgules et système métrique ;
- 1945 : Recodage d'une écriture complexe d'une grandeur ;
- 1970 : La virgule traduit un changement d'unités dans le cas de grandeurs discrètes ;
- À partir de 1980 : les décimaux sont des nouveaux nombres dont l'introduction est motivée par l'insuffisance des entiers pour certains problèmes et en tenant compte de différents cadres ;

- À partir de 91 : Les cycles et les compétences exigibles par cycle. L'organisation de l'enseignement élémentaire en cycles conduit à un programme en deux éléments :
  - l'une, très succincte, centrée sur les notions mathématiques ;
  - l'autre organisée en compétences à acquérir pendant le cycle.

On peut relever que les objectifs concernant les fractions évoluent souvent (notion de fraction, fractions simples, …), et laissent la plupart du temps beaucoup d'implicites sur le statut de cet objet à l'école primaire.

5.3. Dispositifs

Il est assez difficile de faire entrer les stagiaires dans une lecture de textes officiels. Cependant des dispositifs spécifiques peuvent être envisagés :

- Analyse et mise en relation des programmes et des instructions avec des exercices de manuels ;
- Détermination des compétences en jeu dans certains exercices à propos des décimaux et des fractions, éventuellement avec l'aide d'un référentiel ;
- Construction d'une typologie des exercices à l'évaluation nationale Sixième (travail sur la signification des écritures, calculs formels - hors contextualisation -, rangement, intercalation, approximation, problèmes faisant intervenir le système métrique, les mesures de grandeurs…).

On notera la diminution des exercices formels dans ces épreuves au bénéfice d'exercices faisant intervenir les grandeurs, ainsi que l'apparition d'exercices sur l'approximation.

5.4. Quelques repères institutionnels

Les études précédentes justifient certains objectifs d'apprentissage à propos des décimaux :

1) Les nombres décimaux sont des nouveaux nombres qui permettent de mieux traiter certaines situations ou problèmes. Ils sont notamment des nombres rationnels. Il faudrait, en particulier, éviter que le nombre décimal apparaisse comme le recollement de deux nombres entiers ou comme un codage différent d'un nombre entier.
2) Ils peuvent s'écrire de plusieurs manières : fractions, fractions décimales, écriture décimale, écritures utilisant les signes opératoires. Pour cela un travail minimum sur les fractions doit être envisagé à un moment ou à un

autre. De plus, il est indispensable de (re)donner une signification aux chiffres de l'écriture décimale.
3) On peut comparer les nombres décimaux avec des règles spécifiques. L'ordre n'est pas le même que sur les entiers, tout en le prolongeant. La propriété d'ordre dense de l'ensemble des décimaux la différencie de l'ordre de l'ensemble des entiers : entre deux décimaux on peut toujours en intercaler un autre.
Comprendre, que la longueur de la partie décimale n'est pas un bon critère dans le rangement des décimaux, n'est possible que lorsqu'on a donné une signification aux chiffres situés après la virgule. Il faut souligner la performance du support visuel offert par la droite numérique, même si, par ailleurs, il peut créer des obstacles pour l'apprentissage du Numérique.
4) Les décimaux servent en particulier à mieux repérer les points d'une droite et sont un outil pour les activités de mesure.
5) On peut calculer (ajouter, retrancher, multiplier et diviser) avec les nombres décimaux en utilisant des règles spécifiques qui prolongent celles sur les entiers. De plus, l'extension du sens des opérations sur les décimaux doit encore faire l'objet d'apprentissage.
6) Les nombres décimaux servent à approcher d'autres nombres. Les divisions qui " se finissent " et celles qui " ne finissent pas " doivent être l'occasion d'une réflexion sur ces problèmes d'approximation.

6. Analyse de manuels

6.1. Objectifs

Il s'agit maintenant de poursuivre l'étude de la transposition didactique par une analyse des manuels. Plus spécifiquement, le but est d'étudier et comparer les choix des auteurs dans les activités d'introduction des nombres décimaux en CM1 ou de reprise en CM2. On essaie notamment de repérer les aspects et les significations du décimal, privilégiés par les activités de découverte ou de réinvestissement de chaque manuel en s'appuyant sur les outils mis en place dans les quatre premiers champs d'exploration.

On choisira des manuels présentant des démarches différentes et on dégagera les avantages et inconvénients de chaque démarche. La tâche peut-être plus ou moins ouverte dans la mesure où les critères de comparaison et d'analyse sont donnés, imposés ou à trouver.

6.2. Quelques critères d'analyse

L'analyse des pratiques ou des manuels conduit à prendre en compte certaines questions essentielles pour la construction de la progression et des situations de classe :

- L'étude des rationnels ou de quelques rationnels précède-t-elle celle des décimaux ?
- Si les fractions sont introduites en premier, quels sens et donc quelles situations ont été choisies pour l'écriture a/b ?
Quel est le cadre choisi : mesure de longueurs ; d'aires ; partages ; fonctions numériques ; graduations ?
- Quel est aspect privilégié :
    * l'aspect fractionnement a/b = a x (1/b) ;
    * l'aspect commensuration,
    * ou encore l'aspect quotient y tel que y x b = a ?
- Quel problème motive l'introduction des décimaux ?
- La séquence comporte-t-elle une ou plusieurs situations de référence ?
- Est-ce que les rationnels et/ou les décimaux sont perçus comme des nouveaux nombres ?
- Comment est introduite l'écriture décimale ? Si les écritures fractionnaires précèdent les écritures décimales, comment est assuré le passage des premières aux secondes ?

Il est essentiel d'introduire un débat sur l'ordre d'introduction des fractions et des décimaux, les manuels privilégiant actuellement l'antériorité des fractions sur les décimaux alors qu'il n'en a pas toujours été ainsi. Il s'agit de montrer les intérêts et inconvénients des différentes approches de façon à ne pas réduire le choix actuel de démarrage par les fractions à une injonction due à une “ mode pédagogique ”. Si on se réfère au savoir savant constitué, deux “ constructions ” de **D** peuvent être envisagées :

- **D** vue comme extension de **N**, et dans ce cas, la nouvelle structure est en rupture importante avec celle de **N** ;
- **D** comme partie de **Q**, lui-même construit comme extension de N, et dans ce cas, on récupère les propriétés de **Q** par restriction : **D** dénote par les écritures décimales finies, et les nombres de **Q** - **D** sont des idécimaux[5] et ont une écriture décimale illimitée (n'admettant ni la période 0, ni la période 9).

En analysant les options du programme actuel, on s'aperçoit que l'on n'a finalement pas les avantages de l'une des constructions du savoir savant, qu'il faut trouver une voie moyenne difficile à dégager. Si on se réfère à l'apprentissage, des situations basées sur une extension de N présentent

[5] J'ai proposé cette expression pour désigner les nombres réels non décimaux, compte tenu du rôle que joue les nombres décimaux dans le système d'enseignement actuel (Bronner 1997).

l'avantage de mieux s'ancrer sur les connaissances antérieures. Mais, si les décimaux sont des nombres, outils de codage de situations de mesure ou de repérage comme les entiers, ils doivent aussi apparaître comme des nouveaux nombres permettant de mieux appréhender certaines de ces situations. Il est aussi nécessaire de faire identifier les décimaux comme des rationnels pouvant être représentés par des fractions décimales. Rappelons le concept mathématique de " décimal " s'est construit à partir de cette signification.

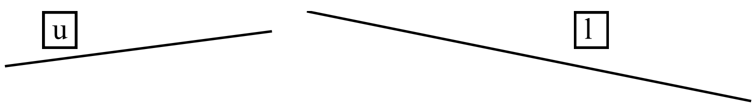
7. Les situations de découverte des fractions

Les situations analysées sont de deux types mais les formateurs proposent généralement une seule entrée, plus rarement les deux.

7.1. Une situation de fractionnement

Un consensus assez large apparaît chez les formateurs pour introduire les fractions à partir d'une situation proposée par M.J. Perrin et R. Douady (1986). Il s'agit d'une situation de communication dans un contexte de mesures de longueur pour mettre en œuvre l'aspect fractionnement.

> Une longueur l et une unité u étant données, il s'agit de construire un code permettant de relever ou de tracer un segment de telle longueur :

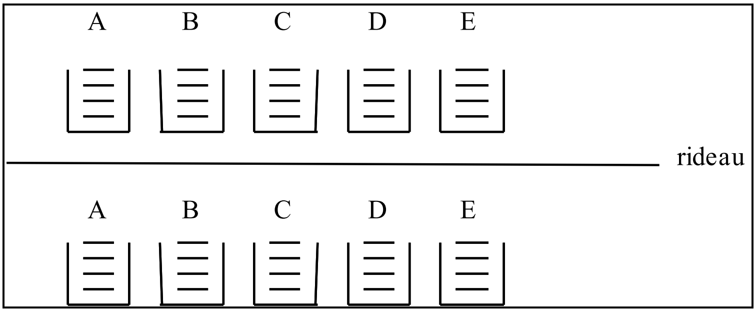


Les principales variables didactiques de la situation sont :

- le support de l'unité (fractionnable ou pliable facilement ou non) ;
- la taille relative de u et de l (u très petit devant l ou non) ;
- la relation entre l et u : si $l = nu + r$, avec n entier et $0 \leq r < u$, r sensiblement nul ou r très petit devant u, ou r sensiblement égal à u, ou r sensiblement égal à une fraction simple 1/2, 3/4, … .

7.2. Une situation de commensuration

Une situation type de commensuration est celle de *l'épaisseur des feuilles de papier* (Brousseau G. et N. 1987). Le contexte est aussi celui des mesures de longueurs : deux collections de 5 tas d'environ 200 feuilles de même format mais d'épaisseurs différentes, séparées par un rideau.



La classe est partagée en 2 équipes. Les élèves disposent de moyens de mesurage (règle graduée ou pied à coulisse). Il s'agit encore d'une situation de communication où les élèves doivent trouver un code pour repérer et différencier chaque tas dans un jeu de messages entre les deux équipes. Cette situation est plus délicate à mettre en œuvre que la précédente. Ce type de situation, qui privilégie l'aspect “ commensuration ” des rationnels, semble moins utilisé dans les pratiques de classe et dans les séquences de formations. Une des raisons est peut-être que certains formateurs, conformément aux programmes, préfèrent les réserver pour la Sixième. Pour une comparaison des deux types de situation, on pourra consulter le travail de Bolon J. (1997).

8. Questions diverses

Il reste des questions importantes à prendre en compte comme la construction de progressions en CM1 et CM2, la répartition CM1/CM2, ainsi que la liaison avec les deux premières années du collège. L'un des aspects non négligeable dans ces choix est sans doute celle de l'importance accordée aux techniques opératoires et à la calculatrice à l'école primaire comme en formation.

Je rappelle qu'après le glissement de la division de deux décimaux vers la sixième en 1980, la multiplication des décimaux ne devient exigible qu'en sixième. Ils ne devraient pas toutefois faire disparaître les problèmes du type “ Prix de 0,650 kg de saucisse à 16,80F le kg ”, que l'on peut traiter avec les outils de la proportionnalité. On pourra se reporter à l'article suivant “ *la multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de 6ème tant du point de du sens que de la technique* ” (Briand J.).

Dans ce texte, j'ai esquissé l'étude du thème des décimaux en formation des professeurs d'école. J'ai tenté de mettre en évidence les variables pertinentes de séquences de formation à propos de l'enseignement et l'apprentissage des décimaux en formation des professeurs stagiaires. Ainsi, de nombreux champs et perspectives d'étude et de nombreux aspects des décimaux peuvent être travaillés avec les professeurs-stagiaires. Bien que l'on puisse penser que l'étude de certains champs représente des passages quasi obligés en formation, l'essentiel reste, pour le formateur comme pour l'enseignant, un problème de choix adaptés aux publics en formation.

Bibliographie

APMEP (1979), *Approximations*, brochure Mots IV, APMEP, Paris.

BELLARD N., BRONNER A., CASENOVE B., GIRMENS Y., LARGUIER M., LEWILLION M., PELLEQUER S., REBILLARD E., SECO M. (1995), "*Liaison cycle 3 - 6ème, un outil d'aide à l'analyse des compétences en mathématiques*", Groupe didactique, IREM de Montpellier.

BOLON J.(1993), "*L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire*", Grand N n°52, IREM de Grenoble.

BOLON J. (1995), "*Les nombres décimaux à la charnière école-collège : une situation paradoxale*", Qu'est-ce qu'un programme d'enseignement, Hachette Education CNDP.

BOLON J. (1997), "*Comment les enseignants tirent parti des recherches en didactique : le cas des décimaux*" Thèse Paris 5.

BRIAND J., VINRICH G. (1993), COPIRELEM, Actes du colloque du colloque de Pau.

BRIAND J, EURIAT J, HUET M.L., LECOQ R., PELTIER M.L., (1996), "*Etude de La Disme de STEVIN de Bruges"*, Documents pour la formation des professeurs d'école, Tome 4. Stage d'Angers, IREM de Paris VII, Paris.

BRONNER A. (1997a), "*Etude didactique des nombres réels : idécimalité et racines carrées"*, Thèse, Université J. Fourier, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1980), "*Problèmes de didactique des décimaux"*, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 1/1, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1981), "*Problèmes de didactique des décimaux"*, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 2/1, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1983), "*Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques"*, Recherches en didactique des mathématiques, vol. 4/2, La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU N. et G. (1987), "*L'enseignement des rationnels et des décimaux dans l'enseignement obligatoire",* Brochure de l'IREM de Bordeaux I.

CANU M. et al. (1989), "*Découverte de π au CM2"*, Math et info au C.M. tome 1, IREM de Rouen.

CHARNAY R., MANTE M. (1996), "*Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles"*, Hatier.

COMITI C., NEYRET R. (1979), " *A propos des problèmes rencontrés lors de l'enseignement des décimaux en classe de CM* ", Grand N n°18, I.R.E.M. de Grenoble.

C.O.P.I.R.E.L.E.M (1986), *Aides pédagogiques de l'A.P.M.E.P pour le CM : Décimaux,* publication APMEP n°61.

C.O.P.I.R.E.L.E.M (1992), *ANNALES 1992, Concours externe de Recrutement des Professeurs d'Ecole*, LADIST, Irem de Bordeaux.

C.O.P.I.R.E.L.E.M (1993), *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, tome 2, Stage de Pau, IREM de Bordeaux.

C.O.P.I.R.E.L.E.M (1995), *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, tome 4, Stage d'Angers, IREM de Paris 7.

C.O.P.I.R.E.L.E.M (1996), *La multiplication des décimaux*, Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, tome 5, IREM de Paris 7.

COQUAND M. (1981), "*Les décimaux, Mathématiques pour le cycle moyen"*, numéro spécial, Revue Grand N, IREM de Grenoble.

DAHAN A., PEIFFER J. (1986), "*Une histoire des mathématiques. Routes et dédales"*, Points-Seuil, Paris.

DHOMBRES J. (1978), "*Nombre, mesure et continu"*, CEDIC Nathan.

DOUADY R. (1980), "*Approche des nombres réels en situation d'apprentissage scolaire"*, Recherches en didactique des mathématiques vol. 1/1, La Pensée Sauvage, Grenoble.

DOUADY R. PERRIN GLORIAN M.J. (1986), "*Nombres décimaux",* IREM de Paris 7.

DUBOIS C., FENICHEL M., PAUVERT M.(1993) "*Se former pour enseigner les mathématique. Tome 3.Numération , décimaux"*, Ed.A.Colin, Paris.

ERMEL CM1 (1997), "*Apprentissages Mathématiques et résolution numériques"*, Cycle moyen, Hatier, Paris.

FÉNICHEL M., (1994), *"Formation initiale " 24 heures avec les PE2 "",* Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques, Tome III, COPIRELEM, IREM de Paris 7.

GRISVARD C., LEONARD F (1981), "*Sur deux règles implicites utilisées dans la comparaison de nombres décimaux positifs"*, Bulletin de l'APMEP n° 327,Paris.

GRISVARD C., LEONARD F (1983), "*Résurgences de règles implicites dans la comparaison de nombres décimaux"*, Bulletin de l'APMEP n° 340*,* Paris.

Groupe HISTOIRE ET EPISTÉMOLOGIE des mathématiques (1979), "*Introduction du calcul décimal et du système métrique dans la région de Rouen pendant la révolution",* l'IREM de Rouen.

HOUDEMENT C., PELTIER M.L. (1994), "*La machine à partager, Fractions et décimaux au cours moyen"*, I.R.E.M. de Rouen.

I.R.E.M. de Paris 7 (1980), *"Histoire des mathématiques pour les collèges"*, Ed Cedic, Paris.

NEYRET R. (1979), "*Décimaux"*, Grand N n°17, I.R.E.M. de Grenoble.

NEYRET R. (1995), "*Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants ; nombres décimaux, rationnels et réels dans les instituts universitaires de formation des maîtres"*, Thèse, Université J. Fourier, Grenoble.

PERRIN M.J. (1986), "*Représentation des fractions et décimaux chez des élèves de CM2 et de collège",* Petit x N°10, IREM de Grenoble.

RATSMBA-RAJOHN (1982), "*Deux méthodes de mesures rationnelles"*, Recherches en didactique des mathématiques, Volume 3/1, La pensée sauvage, Grenoble.

ROUCHIER A. et al. (1980), *"Situations et processus didactiques dans l'étude des nombres rationnels positifs"*, Recherches en didactique des mathématiques, Vol 1/2, La pensée sauvage, Grenoble.

STEVIN (1585), "*La Disme enseignant facilement expédier par nombres entiers, sans rompuz, tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes",* Reproduction de textes anciens, IREM de Paris VII.

TANNER M. (1993) "*Le nombre décimal n'existe pas : théorie et applications"*, Grand N n°52, I.R.E.M. de Grenoble.

WARUSFEL A. (1961), "*Les nombres et leurs mystères"*, Points-Seuil, Paris.

Annexe 1 :“ Prendre conscience de ses connaissances sur les nombres ” (Bronner A.)

1- Indiquez si les expressions suivantes représentent des nombres et précisez à quels ensembles ces nombres appartiennent parmi $\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.

$\mathbb{D}$ est l'ensemble des nombres décimaux et $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels, c’est-à-dire des quotients de deux entiers.

	3,0001	36/3	8/7	$\sqrt{81}$	$\sqrt{7}$	23,1/1,2	4/0	$\sqrt{-16}$
Existe ?								
$\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{Q}$.								

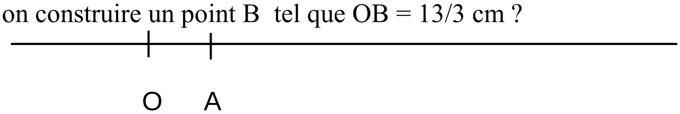
	4,1/1,1	$\sqrt{4,16}$	23,8 + 3/7	0,999....
Existe ?				
$\mathbb{N}$, $\mathbb{D}$ ou $\mathbb{Q}$.				

2- Calculez sans poser l'opération :
2,4 + 5,2 = 2,4 x 5,2 =

3- Entourez le plus grand des deux nombres : 15,2 et 15,13

4- Pouvez vous trouver 3 nombres décimaux compris entre 4,32 et 4,35 ?
Si oui : ....

5- Sur la droite munie du repère (O,A) avec la longueur OA comme unité, peut-on construire un point B tel que OB = 13/3 cm ?



6- Existe-t-il un carré d'aire 64 cm^2 ? si oui donner la longueur du côté :
mêmes questions avec 17 cm^2 ?

7- Pouvez-vous donner un exemple de nombre décimal, non rationnel ?
Pouvez-vous donner un exemple de nombre rationnel non décimal ?

8- Le quotient de 2 nombres décimaux est-il toujours décimal ?
Le quotient de 2 nombres rationnels est-il toujours rationnel ?

9- La racine carrée d'un nombre entier ou décimal est-elle toujours décimale ?

10- Une unité de longueur étant choisie, la longueur d'un segment s'exprime-t-elle toujours par un nom décimal ? un nombre rationnel ? autre ?

Annexe 2 : " À propos des nombres décimaux " (Fénichel M., 1994).

Essayez d'aller le plus loin possible dans le choix des exercices suivants. Rédigez-les. Faites le point sur vos connaissances et/ou vos manques à l'occasion de ce travail.

1) Ordonnez : 121,54 - 0,2 - 13,5248 - 98 - 20,32 - 3,32 - 0,002 - 13,401 - 2,18 - 121,0242 - 2,28 121,3419.
Ecrivez les règles de comparaison des nombres décimaux.

2) Citez des nombres décimaux, des nombres non décimaux ? Comment caractérisez-vous ces types de nombres ?

3) Citez, si possible 3 nombres compris entre
- 1,8 et 2,1 • 1,6 et 1,8 • 1,3 et 1,4 • 1 et 1,1

Quelle(s) conclusions pouvez-vous tirer ?

4) Donnez une approximation de $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{256}$ à 10^{-2} , 10^{-4} , 10^{-6} prés. Ces nombres sont-ils des décimaux?

5) La longueur du second côté d'un rectangle d'aire 11 m^2 et de premier côté 5 m mesure-t-elle un nombre entier de mètres ?

6) Nicolas Oresme a étudié en 1377 la suite des fractions suivantes :
1/2 ; 2/4 ; 3/8 ; 4/16 ; 5/32 ; 6/64 ; ...
a) Quelles fractions a-t-il écrit ensuite ?
b) Quelle est l'écriture décimale des sommes suivantes :
- $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}$ • $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}$ • $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}$ •..........

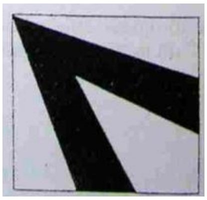
c) Oresme a démontré que ces sommes se rapprochent d'un certain nombre. À votre avis, quel est ce nombre ?

7) Observez ces fractions :

$f1 = 1+\frac{1}{2}$ $\quad$ $f2= 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$ $\quad$ $f3= 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$ $\quad$ $f4 = 1+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}}$

a) Écrivez les quatre fractions suivantes à celles-ci.
b) Donnez une écriture décimale de ces huit fractions avec une machine à calculer. Comparez les à 2.

8) Quelle fraction du carré représente la partie colorée ?



Annexe 3 :“ Tangram et fraction ” Fénichel M (C.O.P.I.R.E.L.E.M 1993)

Compte - rendu d'un travail en PE2

Les enfants avaient à leur disposition un tangram qu'ils pouvaient découper et utiliser pour leurs calculs.

Les questions 1 et 2 ont fait l'objet d'un travail individuel.
Les questions 3 et 4 ont fait l'objet d'une recherche de groupe et d'une "rédaction" individuelle.
La question 4 n'a pas été traitée par tous.

****

1-Quelle fraction du tangram (cf. dessin 1) représente chaque pièce ?

2-Compare. $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$

3-En observant attentivement le tangram, fais les calculs suivants :

$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$; $\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}$

Tu peux découper le tangram et utiliser les pièces.

4- Quelle fraction du tangram représente le bateau suivant (cf. dessin 2) ?

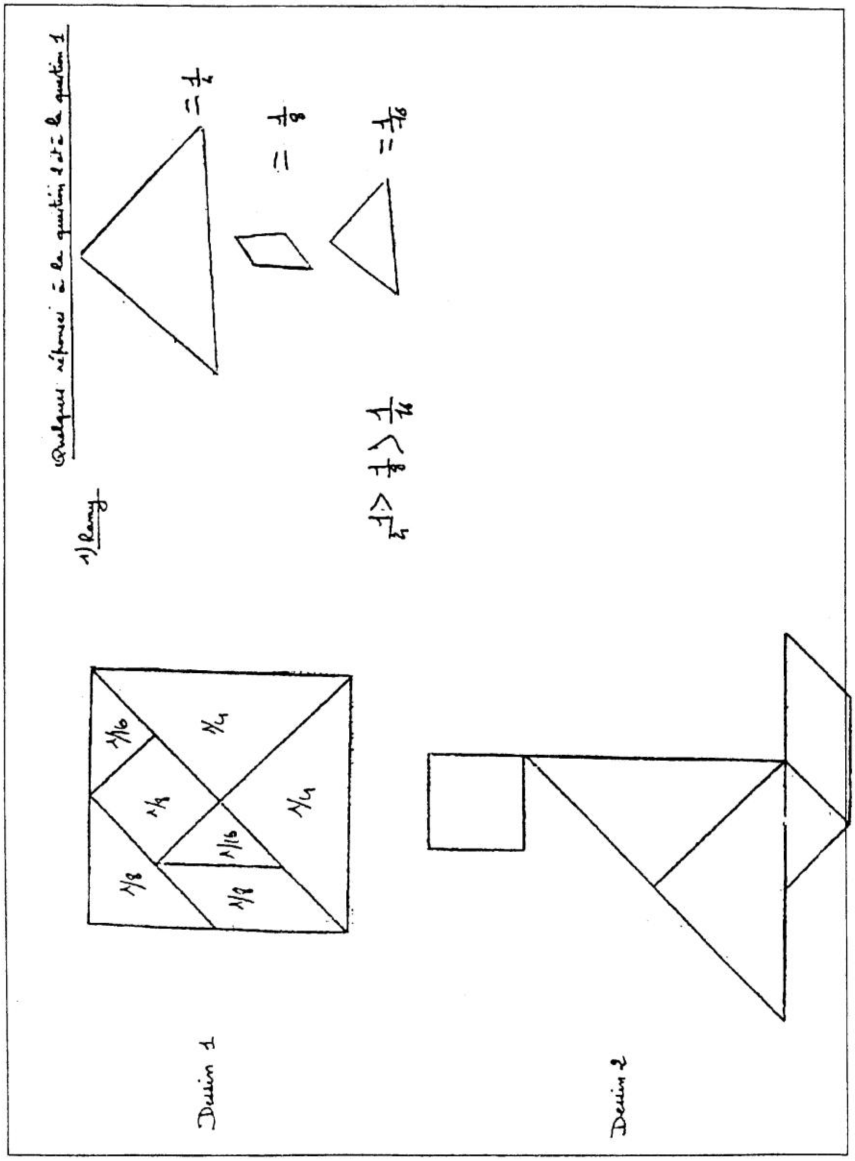
Consigne pour les étudiants

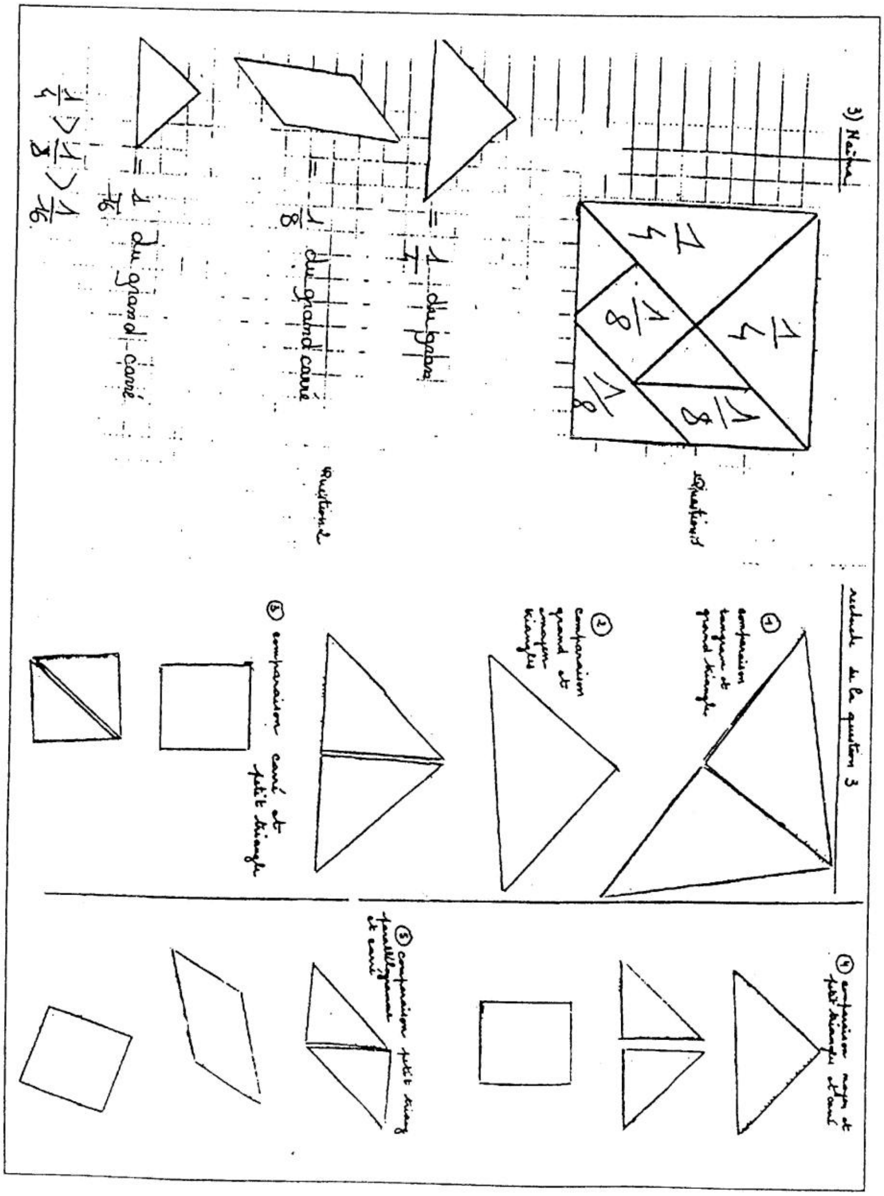
a) Faire une analyse a priori de ce travail en s'aidant des questions qui suivent. (On précise que c'est un travail proposé au mois de mars en CM2, que les enfants utilisent couramment les décimaux introduits dès le début du CMI et qu'ils connaissent quelques fractions usuelles. On a photocopié quelques "constructions" faites par les groupes d'enfants en cours de recherche et dont ils n'ont pas gardé les traces. Elles sont fournies).
a1 - Quels sont les contenus mathématiques précis des activités ?
a2 - Quel est le contexte pour le concept "fraction" dans ce travail ?
a3 - Quels sont les objectifs des activités ?

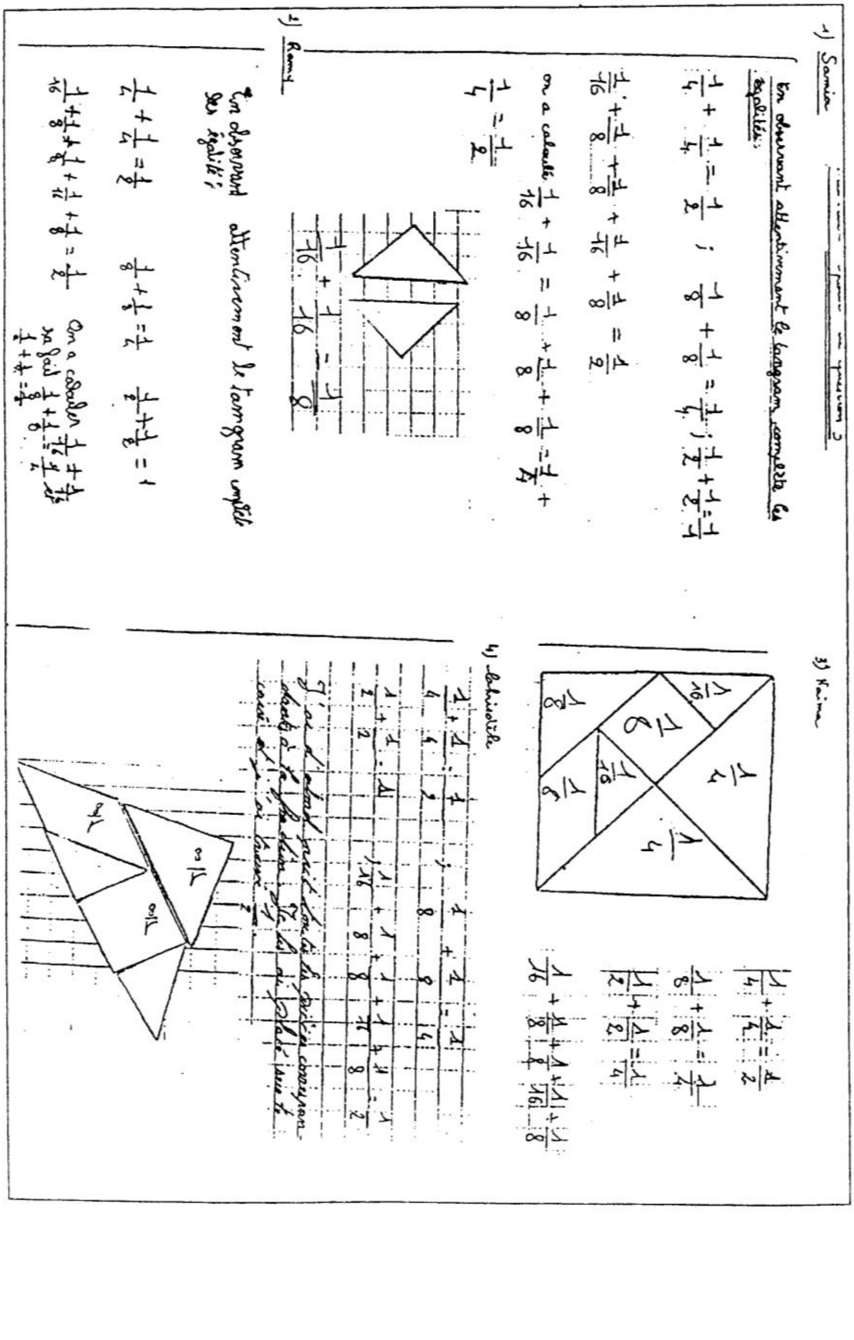
b) Analyser les travaux d'enfants photocopiés
b1 - Repérer les procédures utilisées
b2 - Relever les erreurs éventuelles
b3 - D'après vous, d'où proviennent ces erreurs '?

c) Faire une proposition pour continuer ce travail
(On précise que la recherche a été longue et laborieuse, et qu'un groupe d'enfants n'est pas allé au-delà de :
1/4 + 1/4 = 1/2
Il n'a pas terminé son travail, mais n'a pas écrit d'erreurs).

Annexes liées à cette évaluation : constructions faites par les enfants




3) Naïma
Question 1
Question 2
du grand carré
1/4 > 1/8 > 1/16
recherche de la question 3
comparaison carré et petit triangle



La multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de 6ème tant du point de vue du sens que de la technique. [1]

Joël Briand

Cet article a d'abord été travaillé pendant le stage COPIRELEM de Rennes (1996) puis il a été publié dans la brochure « des mathématiques en sixième » en collaboration avec la commission inter-IREM premier cycle.

En 1995, les nouveaux programmes de l'école élémentaire excluent la multiplication de deux décimaux. Les professeurs de collège vont donc alors prévoir progressivement l'enseignement du produit de deux décimaux.

Les nouveaux programmes (1995) de l'école élémentaire, s'ils conservent la multiplication d'un décimal par un entier, excluent la multiplication de deux décimaux. La mise en application des nouveaux programmes a commencé à la rentrée 1995 en CE2 pour atteindre le CM2 à la rentrée 1997. Ainsi, la multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de 6ème tant du point de vue du sens que de la technique.

I- Etat des connaissances des élèves sortant de l'école élémentaire (en référence aux évaluations nationales de 1995) :

Nous avons choisi les items qui se rapportent à la multiplication des décimaux.

N°	exercice	% réussite	Principales erreurs	%
Ex 18b et c	1,54x1000 7,14x100	59,3%	Application à tort de la règle des entiers :1,54000 Déplacement inexact de la virgule : 15,4 Multiplication de la partie entière : 1000,54 et/ou de la partie décimale 1000,54000	10,4% 9,8% 4,2%
Ex 25	4,28 x 3,5 ———	39%	1498 ou 14980 Autres réponses : on y retrouve des résultats où seule la virgule est fautive. On peut se demander si l'alignement des virgules des deux nombres donnés [...] n'induit pas un alignement de la virgule pour le résultat.	14,9% 42,1%

[1] Instructions Officielles, 6ème, 1995.

Dans l'évaluation 1995 les décimaux apparaissent dans des exercices de calcul, mais jamais dans des problèmes. Suite aux changements de programmes on ne devrait plus trouver d'exercices semblables à l'exercice 25 à partir de la rentrée 1998.

II- Les nouveaux programmes de sixième :

Dans la partie 2 “ travaux numériques ”, des nouveaux programmes de la $6^{ème}$, voici les contenus, compétences et commentaires des parties 2-1 2-2 et 2-3 concernant les travaux numériques des nouveaux programmes de $6^{ème}$:

Partie 2-1 : Nombres entiers et décimaux : écritures et opérations (extraits).

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
techniques opératoires	addition, soustraction et multiplication	...La multiplication des nombres décimaux est une nouveauté de la classe de $6^{ème}$ tant du point de vue du sens que de la technique.

Partie 2-2 : Quotient de deux entiers : (extraits).

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Ecritures fractionnaires	Placer le quotient de deux entiers sur une droite graduée dans des cas simples. Savoir utiliser un quotient de deux entiers dans un calcul sans effectuer la division.	A l’école élémentaire, l’écriture fractionnaire a été introduite à partir de situations de partage. Les activités poursuivies en $6^{ème}$ s’appuient sur deux idées : Le quotient a/b est un nombre. Le produit de a/b par b est égal à a.

Partie 2-3 : Nombres décimaux en écritures décimales et fractionnaires : (extraits).

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
Nombres décimaux en écritures décimales et fractionnaires	Pour des nombres courants, passer d’une écriture décimale à une écriture fractionnaire et vice-versa.	Il s’agit de pouvoir utiliser les différentes écritures fractionnaires d’un même nombre décimal.

Ces nouveaux programmes inspirent quelques commentaires :

1- L'ordre des parties pourrait faire croire qu'à l'école élémentaire, la construction des décimaux s'est effectuée avant celle des rationnels[2]. Or, si nous regardons les manuels diffusés pour les deux dernières années du cycle 3 (ex CM1 et CM2) on s'aperçoit que bon nombre d'entre eux introduisent les fractions simples, puis les fractions décimales (donc les décimaux), puis les écritures à virgules des fractions décimales. Il y a là une tendance à proposer une introduction plus proche de leur construction historique[3]. Même si la plupart du temps, cette construction est montrée aux élèves et non pas mise en place par eux, l'école élémentaire prend peu à peu ses distances avec les constructions telles que le marquage de l'unité par une virgule dans un nombre associé à une mesure (que ce soit des unités du système métrique ou la monnaie). Il semble que les premières évaluations nationales aient en partie permis d'ouvrir un débat sur les obstacles didactiques que créait ce type d'introduction. Les élèves concevaient alors le nombre décimal, dans son écriture à virgule, comme un couple d'entiers. De ce fait ils pouvaient envisager comme licite, la notion de décimaux consécutifs, et l'impossibilité d'intercalation dans certains cas.

2- Le mot "quotient" induit souvent l'idée de division. Beaucoup d'étudiants de première année d'IUFM (titulaires de licence) ont ce modèle des rationnels : un quotient est une division à effectuer. En revanche le mot "fraction" telle que 2/3 est plus souvent envisagée comme un nombre-repère (2 fois 1/3) sur une droite graduée, ou nombre-mesure.
L'idée d'associer quotient et division est très certainement un effet de l'enseignement ; le quotient a une signification polysémique à l'école élémentaire : quotient euclidien (ou quotient entier), quotient décimal, quotient exact (entier décimal ou rationnel), quotient approché (avec un reste décimal). En revanche, dans les instructions de 6ème, la notion de quotient est nettement associée à celle de rationnel. Lorsque les élèves arrivent au collège, le professeur devrait prendre en compte ces différents points de vue.

3- La multiplication des décimaux entre eux relève explicitement maintenant de la classe de 6ème. Notons au passage que le texte de 6ème déclare : “aucune compétence n'est exigible quant à la technique de la division à la main de deux décimaux ”. Cela signifie-t-il "savoir interpréter le résultat de la division de deux décimaux à l'aide de la calculatrice"?

---

[2] Remarque : à l'école élémentaire, le terme de fraction désigne indifféremment le nombre rationnel et une de ses écritures fractionnaires.

[3] Pour plus d'informations, voir l'article sur "La Disme" dans la brochure Angers 1996 de la COPIRELEM (présent dans cet ouvrage).

III- Quelques pratiques scolaires relatives à l'enseignement du produit de deux décimaux

Voici quelques exemples de pratiques effectives repérées à l'école élémentaire ces dernières années avant les nouveaux programmes. [4]

Produit de deux décimaux à partir du produit d'un décimal par un entier :

Dans un premier temps, la multiplication d'un décimal par un entier est définie par réitération de l'addition : par exemple : 1,6 + 1,6 + 1,6 + 1,6 s'écrit aussi 1,6 x 4.
Cette définition ne peut être reprise pour le produit de deux décimaux. Quel sens donner alors au produit 0,148 x 1,6 par exemple ?
On sait que 148 x 16 = 2368 (dans N) et que 14,8 x 16 = 236,8 (nouvelle opération définie de D x N vers D). La multiplication dans N possède une propriété connue : « si l'on divise l'un des termes de la multiplication par 10 (100, 1000...), le résultat est divisé par 10 (100, 1000...). On fait donc remarquer à l'élève que 148 : 10 = 14,8 et 2368 : 10 = 236,8 permettent de retrouver le résultat de 14,8x16 nouvellement construit de D x N vers N.
Cette propriété montrée va être alors étendue. L'hypothèse est que « si l'élève a compris », il pourra alors trouver le résultat de chacun des produits suivants : 0,148 x 1,6 ; 14,8 x 1,6 ; 1,48 x 1,6, construisant ainsi une nouvelle opération (de D x D vers D) qui garde les propriétés connues de la multiplication de N x N vers N.
Ce passage peut être plus ou moins explicité en utilisant les outils des fonctions. Par exemple :

148 x 16 = 1,48x100 x 1,6x10 = 1,48 x 1,6 x 1000

1,48	*multiplié par 100* →	*148*
x 1,6	*multiplié par 10* →	*x 16*
?	← *divisé par 1000*	*2368*

---

4 Pour ne pas se borner à des constats de pratiques, nous renvoyons le lecteur à deux recherches en didactique des mathématiques, sur les rationnels et les décimaux :
La première (voir bibliographie) est celle de R. Douady et M.J. Perrin qui met en évidence différentes représentations des rationnels et des nombres décimaux chez les élèves du CM2 et du collège. Les auteurs proposent également une suite de situations permettant notamment l'introduction du produit de deux décimaux en s'appuyant sur un jeu entre deux cadres : le numérique et le géométrique.
La seconde (voir bibliographie) est celle de.Brousseau N. et G sur " la construction des rationnels et des décimaux dans la scolarité obligatoire » qui présente une suite de situations dans lesquelles les élèves élaborent les rationnels, les décimaux et les opérations dans ces ensembles.

Produit de deux décimaux à partir de calculs d'aires :
Le problème posé aux élèves est le suivant : déterminer un moyen de calculer l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 3,6 et 4,3 (l'unité d'aire étant le carré de côté 1).

Plusieurs directions sont possibles :

- Le produit de deux décimaux qui s'appuie sur un calcul d'aire et sur des jeux d'écriture (à virgule et fractionnaires).
13,427 x 9,64 = (13427 / 1000) x (964 / 100) qui se pratiquent par analogie avec ceux pratiqués dans N (voir l'étude précédente) . Cette approche suppose une connaissance approfondie des rationnels et de la multiplication dans cet ensemble.

- Le produit de deux décimaux à partir de la mesure effective de l'aire du rectangle.
Les élèves travaillent sur feuille de papier millimétré sur laquelle est dessinée un rectangle de 2,45 dm sur 2,7 dm. Le professeur demande aux enfants de retrouver l'aire du rectangle en dm².

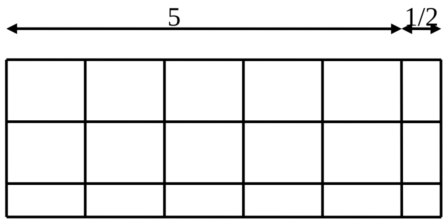
Les savoirs concernant les unités de mesure des surfaces sont connus[5]. Attardons-nous un instant sur les stratégies généralement observées :
1- Les enfants effectuent des tracés sur le papier millimétré. Ils recherchent des carrés de 1 dm de côté. Ils retrouvent rapidement les 2x2 dm². Il reste à " rassembler les bordures " en paquets valant 1 dm². Pour cela les démarches sont variées.
2- Certains élèves effectuent directement la multiplication de 245 par 27 et cherchent à donner une signification du résultat.
3- D'autres convertissent tout en mm², calculent l'aire en mm² et reviennent à la mesure en dm².
Le professeur a prévu un dessin sur lequel figure le rectangle des élèves ainsi que les rectangles 2x2 (en dm)et 3x3 (en dm) (Ce schéma prouve que l'aire du rectangle recherchée est comprise entre 4 et 9 dm²). Ceci permet d'écarter certaines erreurs issues de diverses stratégies.

- Le produit de deux décimaux à partir du produit de deux rationnels en s'appuyant sur le calcul d'aires.
On se donne un nombre entier de centimètres (8cm). On cherche le plus possible de rectangles ayant ce nombre comme demi-périmètre et on calcule son aire.
Dans un premier temps, les élèves résolvent ce problème dans les entiers. Ils déterminent les couples solution (1 ; 7), (2 ; 6),(3 ; 5),(4 ; 4) et déterminent les aires associées. Ensuite, arrivés à ce stade, ils sont capables de construire des rectangles ayant les dimensions faisant intervenir des fractions simples.

---

[5] Toutefois, on sait que les élèves assimilent dm² et carré de un dm de côté, cm² et carré de un cm de côté.

Il s'agit maintenant de calculer l'aire d'un tel rectangle. L'existence de cette aire est évidente pour l'élève.

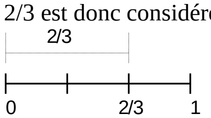


Les élèves calculent les différentes parties de ce rectangle en utilisant la multiplication dans N et la multiplication d'une fraction par un entier (connue) et en calculant ½ x ½ en se ramenant au carré d'aire 1.
Il s'agit ensuite d'expliciter le calcul effectué :
Ils ont donc : ½ x ½ = ¼
Il faut calculer (5 + ½)x(2 + ½).
(5 + ½)x(2 + ½) = 5x 2 + 5 x ½ + 2 x ½ + ½ x ½ = 10 + 5/2 + 2/2 + ¼
= 13 + ½ + ¼

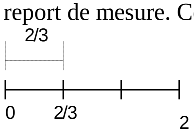
- Le produit de deux décimaux à partir du produit de deux rationnels en s'appuyant sur la juxtaposition d'aires.
Le produit de deux décimaux peut être considéré, dès le départ, comme un cas particulier du produit de deux rationnels en suivant l'une des approches possibles : fractionnement[6] ou commensuration en fonction de l'introduction choisie pour les rationnels :
Première approche (qui se fonde sur l'introduction des fractions à partir de " partages de l'unité") : soit à définir le produit de 2/5 par 3/4 en se référant aux mesures des surfaces :

---

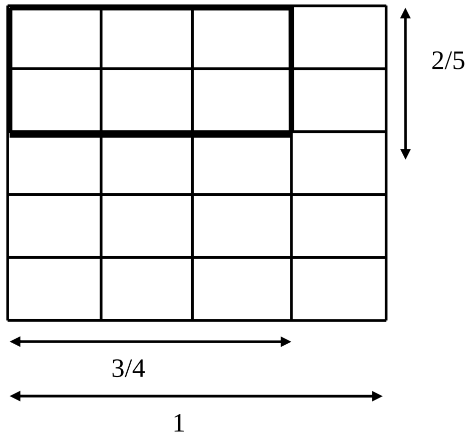
[6]*fractionnement* : une unité (de longueur, d'aire, de masse...) étant choisie, le rationnel 2/3 est donc considéré comme deux fois 1/3.



commensuration : 2/3 est considéré comme le nombre qui multiplié par 3 donne 2 par report de mesure. Cela correspond au quotient de 2 par 3.

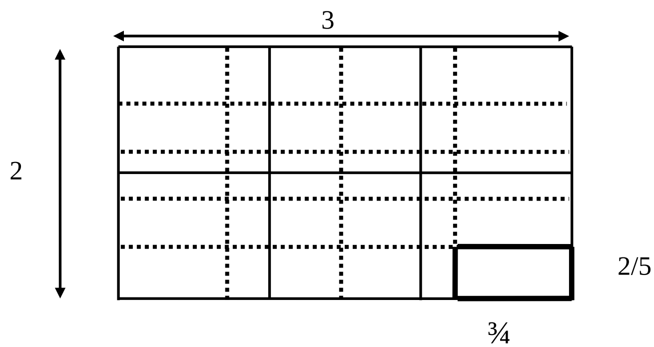


Pour une étude approfondie de ces deux modèles voir : *"Deux méthodes de mesures rationnelles* », RATSIMBA-RAJOHN in Revue de Didactique des Mathématiques, Ed. La pensée sauvage, Volume. 3-1, pp.65-112



Dans le carré unité (voir figure) , il y a 20 rectangles élémentaires. Le rectangle d'aire 2/5 multiplé par 3/4 est formé de 6 rectangles élémentaires. Son aire est donc les 6/20 de l'unité.

Deuxième approche (qui se fonde sur l'introduction des fractions à partir de la " commensuration ").
Soit à définir le produit de 2/5 par 3/4 en se référant aux mesures des aires : il faut 5 longueurs de 2/5 pour faire 2 et 4 longueurs de 3/4 pour faire 3.



Ce qui donne un grand rectangle de dimensions 2 et 3 d'aire 2x3 soit 6. Il faut 5x4 petits rectangles de dimensions 2/5 et 3/4 pour obtenir le grand rectangle. L'aire des petits rectangles est donc 20 fois plus petite. Elle est de 6/20. On décide d'identifier 2/5 x 3/4 et 6/20.

Ce travail (première ou deuxième approche) fait sur quelques fractions simples est appliqué au cas des fractions décimales et institutionnalisé sur ce seul cas (exemple : 2/10 x 3/100 = 6/1000).
Cela permet alors de donner du sens à 3,7 par 4,56 ; 3,7 étant identifié à 37/10 ou à 3 + 7/10, 4,56 à 456/100 ou à 4 + 5/10 + 6/100, le produit 3,7 x 4,56 est donc égal à : (37/10) x (456/100) ou (3 + 7/10)x(4 + 5/10 + 6/100).

IV-Bibliographie

BROUSSEAU G.(1980), "*Problèmes de didactique des décimaux*", dans *Recherche en Didactique des Mathématiques* 2/1, pages 37-128.
RATSIMBA-RAJOHN (1982) : « *Deux méthodes de mesures rationnelles* », Recherche en didactique des mathématiques. Vol. 3-1 pages 65-112.
COPIRELEM (1986), *Aides pédagogiques pour le cycle moyen*. Elem math VIII Publication APMEP n°61.
DOUADY R., PERRIN M.J. (1986) : *« les nombres décimaux à l'école et au collège* ». IREM Paris VII.
BROUSSEAU N.et G. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.
BERTE A. *« Mathématique dynamique* » Nathan pédagogie 1993.
BRIAND J., HUET M.L.,.PEAULT H.,.PELTIER M.L : COPIRELEM (1995) "*La Disme*" *et "Étude de la Disme*", dans *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, IREM de Paris 7, p. 43-78.

Edition adaptée de la DISME de STEVIN de BRUGES

Joël Briand - Hervé Péault

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Angers 1995.

Cet article est composé de deux parties intitulées : « Edition adaptée de la Disme de Stevin de Bruges » et « « Etude de la disme de Stevin de Bruges ». Il présente un réexamen du texte de STEVIN DE BRUGES (LA DISME) dans une perspective de formation.
La première partie du document est une réécriture de la Disme respectant scrupuleusement le texte original de l'édition française, mais dans une typographie moderne de façon à faciliter la lecture.
La deuxième partie du document reprend le texte de LA DISME en l'étudiant comme un document didactique. Son côté très contemporain en ce qu'il répond à une préoccupation sociale, la problématique posée, les procédés d'exposition, les rapports que ce texte révèle entre les savoirs savants et les pratiques sociales, nous intéressent.
Nous faisons l'hypothèse que ce texte historique permettra de faire travailler aussi bien des professeurs d'école que des professeurs de mathématiques de lycée et collèges.
Dans la suite de ce document, nous mettons en regard des questions et leurs réponses. Libre à tout formateur de réorganiser le questionnaire comme il lui conviendra.

L A
D I S M E,

Enseignant facilement expédier par nombres entiers sans rompuz,
tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes.

Premièrement décrite en flamand, et maintenant convertie en Français, par
SIMON STEVIN *de Bruges.*

AVX ASTROLOGUES,
arpenteurs, mesurevrs de tapisserie,
gavievrs, stéréométriens en général,
Maîtres de monnoye, & à tous
marchans :

SIMON STEVIN *Salut.*

Quelqu'un voyant la petitesse de ce livret et la comparant à la *grandeur de vous mes* TRES HONORES SEIGNEURS ; *auxquels il est dédié, estimera peut-être notre concept absurde. Mais s'il considère la proportion, qui est, comme la petite quantité de celui-ci, à l'humaine imbécillité de ceux-là, ainsi ses grandes utilités, à leur hauts et ingénieux entendements, se trouvera avoir fait comparaison des termes extrêmes, lesquels ne la permettent en conversion de proportion quelconque. Soit donc le troisième au quatrième. Mais que sera ce proposé ? D'aventure quelque invention admirable ? Non certes, mais chose si simple qu'elle ne mérite quasi le nom d'invention, car, comme l'homme rustique, et lourd, trouve bien d'aventure quelque grand trésor sans y avoir usé de science, tout ainsi le semblable est il advenu en cette affaire : Pourtant si quelqu'un me voulu estimer pour vanteur de mon entendement à cause de l'explication de ces utilités ; sans doute il démontre, ou qu'il n'y a en lui ni jugement, ni intelligence, de savoir discerner les choses simples des ingénieuses, ou qu'il soit envieux de la propriété commune ; mais quoi qu'il en soit, il ne faut pas omettre l'utilité de celui-ci, pour l'inutile calomnie de celui-là.. Or comme le marinier ayant d'aventure trouvé quelque île inconnue, déclare franchement au Roi toutes ses richesses, comme d'avoir beaux fruits, précieux minéraux, plaisantes contrées, etc. sans que cela lui soit réputé pour filouterie ; ainsi nous parlerons ici librement de la Grande utilité de cette invention, je dis Grande, voire plus Grande que je n'estime qu'aucun de vous autres attendez, sans toutefois me glorifier du mien.*

Voici donc que la matière de cette DISME *(la cause duquel nom sera déclarée par la suivante première définition) est nombre, l'utilité des effets de laquelle, vous Mrs est assez notoire par vos continuelles expériences, il ne fera point métier d'en faire beaucoup de paroles ; car s'il est astrologue, il sait que le monde est devenu par les computations astronomiques (car elles enseignent au Pilote l'élévation de l'Equateur et* du *Pôle, par le moyen de la table des déclinaisons du Soleil, l'on décrit par icelles la vraie longitude et latitude des lieux, etc.) un paradis abondant en plusieurs lieux, de ce que toutefois la terre n'y peut point produire. Mais comme le doux n'est jamais sans l'amer, le travail de telles computations ne lui sera* *point caché, à cause de laborieuses multiplications et divisions, qui procèdent de la soixantième progression des Degrés, Minutes, Secondes, Tierces, etc. Mais s'il est arpenteur, il saura le grand bénéfice que le monde reçoit de la science, par laquelle s'évitent plusieurs difficultés et noises, qui s'élèveraient journellement, à cause de l'inconnue capacité des terres ; outre cela, il n'ignore pas (principalement celui auxquelles les affaires sont grandes) les ennuyeuses multiplications qui procèdent des Verges, Pieds, et souvent Doigts, l'un par l'autre, qui n'est pas seulement moleste, mais (combien toutefois que le mesurer et autres choses précédentes fussent bien expédiées) souvent cause d'erreur, tendant au grand dommage de l'un ou de l'autre. Aussi, à la ruine de la bonne renommée de l'Arpenteur. Et ainsi des maîtres des Monnaies, Marchands, et chacun au sien. Mais d'autant que ceux la sont plus dignes, et les voies pour y parvenir plus laborieuses, d'autant plus grande est cette découverte DISME, ôtant toute ces difficultés. Mais comment ? Elle enseigne (afin de dire beaucoup en un mot) d'expédier facilement sans nombres rompus, tous comptes qui se rencontrent aux affaires des Humains. De sorte que les quatre principes d'Arithmétique que l'on appelle Ajouter, Soustraire, Multiplier et Diviser par nombres entiers pourront satisfaire à tel effet. Causant semblable facilité à ceux qui usent des jetons. Or ainsi par tel moyen sera gagné le précieux temps, ainsi, par tel moyen sera sauvé ce qui se perdrait autrement, ainsi par tel moyen sera ôté labeur, noise, erreur, dommage et autres accidents communément adjoints à ceux-ci, je le mets volontiers à votre jugement.*

Quand à ce que quelqu'un ne pourrait dire que plusieurs inventions semblent bonnes au premier regard, mais quand on s'en veut servir, l'on ne peut rien effectuer, et comme il advient souvent aux chercheurs de forts mouvements qui semblent bons en petites preuves mais aux grandes, ou à l'effet, ils ne valent pas un fétu. Nous lui répondons qu'il n'y a ici tel doute, parce que l'expérience s'en fait journellement en la chose même. A savoir par divers experts Arpenteurs Hollandais auxquels nous l'avons déclaré, lesquels (laissant ce qu'ils avaient inventé chacun à sa manière, pour amoindrir le travail de leur computation) l'usent à *grand contentement et par tel fruit comme la Nature témoigne s'en devoir nécessairement suivre : le même adviendra à un chacun de vous autres mes TRES HONORES SEIGNEURS qui feront comme eux. Vivez cependant en toute félicité.*

ARGVMENT

La Disme a deux parties, Définitions et Opérations. En la première partie se déclarera par la première Définition, quelque chose soit Disme. Par la seconde, troisième et quatrième que signifie Commencement, Prime, Seconde, etc., et nombre de Disme.
En l'opération se déclarera par quatre propositions, l'Addition, Soustraction, Multiplication, et Division des nombres de Disme, de quoi l'ordre se peut représenter succinctement par telle table:

La disme a deux parties	*Définition comme quelque chose soit*	*Disme Commencement. Prime, seconde, etc. Nombre de Disme.*
	Opération de	*L'addition Soustraction Multiplication. Division.*

A la fin du précédent sera encore appliqué une Appendice, déclarant l'usage de la Disme par quelques exemples et choses.

L A P R E M I E R E P A R T I E
DE LA DISME DES
définitions

Définition I.

Disme est une espèce d' arithmétique, inventée par la Dixième progression, consistance et caractère des chiffres, par lesquels se décrit quelque nombre et par laquelle on dépêche par nombres entiers sans rompus, tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes.

EXPLICATION

Soit quelque nombre de mille cent et onze, décrit par caractères des chiffres de cet ordre 1111, auxquels apparaît que chaque 1 est la dixième part de son prochain caractère précédent. Semblablement en 2378, chaque unité du 8 est la dixième de chaque unité du 7. Et ainsi de tous les autres. Mais parce qu'il est convenable que les choses desquelles on veut traiter aient des noms et que cette manière de computation est trouvée par considération de telle dixième ou disme progression, voire qu'elle consiste entièrement en icelle, comme apparaîtra ci après, nous nommons ce traité proprement et convenablement la DISME, par la même on peut opérer avec nombres entiers sans rompuz en tous les comptes se rencontrant en nos affaires, comme sera démontré en suivant.

DEFINITION II

Tout nombre entier proposé se dit COMMENCEMENT, son signe est tel ⓪.

EXPLICATION

Par exemple quelque nombre proposé de trois cents soixante quatre, nous le nommons trois cent soixante quatre COMMENCEMENT, les décrivant en cette sorte 364 ⓪et ainsi de tous autres semblables.

DEFINITION III.

Et chaque dixième partie de l'unité de commencement nous la nommons PRIME, son signe est tel ① ; chaque dixième partie de l'unité de prime nous la nommons SECONDE, son signe est tel ② et ainsi des autres chaque dixième partie de l'unité de son signe précédent, toujours en l'ordre un davantage.

EXPLICATION

Comme 3①7②5③9④,c'est à dire 3 *Primes* 7 *Secondes* 5 *Tierces* 9 *Quartes* et ainsi se pourrait procéder en infini. Mais pour dire de leur valeur, il est notoire que selon cette définition les dits nombres font $\frac{3}{10}\frac{7}{100}\frac{5}{1000}\frac{9}{10000}$, ensemble $\frac{3759}{10000}$. Semblablement 8⓪9①3②7③ valent $\frac{9}{10}\frac{3}{100}\frac{7}{1000}$, ensemble $8\frac{937}{1000}$ et ainsi d'autres semblables. Il faut aussi savoir que nous n'usons en la DISME d'aucun nombres rompus, aussi que le nombre de multitudes des signes, excepté ⓪, n'excède jamais le 9. Par exemple, nous n'écrivons pas 7①12② mais en leur lieu 8①2②, car ils valent autant.

DEFINITION IV.

Les nombres de la précédente seconde et troisième définition se disent en général NOMBRES DE DISME.

Fin des définitions.

SECONDE PARTIE DE LA DISME DE L'OPE-RATION.

PROPOSITION I, DE L'ADDITION

Etant donné nombres de disme à ajouter Trouver leur somme :
Explication du donné : Il y a trois ordres du nombre de Disme, desquels le premier 27⓪8①4②7③, le deuxième 37⓪6①7②5③, le troisième 875⓪7①8②2③.
Explication du requis. Il nous faut trouver leur somme.
Construction. On mettra les nombres donnés en ordre comme ci-joignant, les ajoutant selon la vulgaire manière d'ajouter nombres entiers, en cette sorte :

		⓪	①	②	③
	2	7	8	4	7
	3	7	6	7	5
8	7	5	7	8	2
9	4	1	3	0	4

Donne somme (par le 1° problème de l'arithmétique) 941304, qui sont (ce que démontrent les signes dessus les nombres) 941⓪3①0②4③. Je dis que les mêmes sont la somme requise. *Démonstration.* Les 27⓪8①4②7③ font (par la 3° définition) $27\frac{8}{10}\frac{4}{100}\frac{7}{1000}$, ensemble $27\frac{847}{1000}$, & par même raison les 37⓪6①7②5③ valent, $37\frac{675}{1000}$, & les 875⓪7①8②2③ seront $875\frac{782}{1000}$, lesquels trois nombres, comme $27\frac{847}{1000}$, $37\frac{675}{1000}$, $875\frac{782}{1000}$, font ensemble (par le 10° problème de l'arithmétique) $941\frac{304}{1000}$, mais autant vaut aussi la somme 941⓪3①0②4③. C'est donc la vraie Somme, ce qu'il fallait démontrer.
Conclusion. Etant donc donnés nombres de Disme à ajouter, nous avons trouvé leur Somme, ce qu'il fallait faire.

NOTA

Si aux nombres donnés défaillait quelque signe de leur naturel ordre, on remplira son lieu par le défaillant. Soient, par exemple les nombres donnés 8⓪5①6② & 5⓪7②, auquel dernier défaut le signe de l'ordre ①. L'on mettra en son lieu 0 ①, prenant alors comme pour nombre donné 5 ⓪ 0 ①7②, les ajoutant comme ci-devant en cette sorte.

	⓪	①	②
	8	5	6
	5	0	7
1	3	6	3

Cet avertissement servira aussi aux trois propositions suivantes, là où il faut toujours emplir l'ordre des figures défaillantes, comme nous avons fait en cet exemple.

PROPOSITION II, DE LA Sovstraction

Etant donné nombre de Disme duquel on soustrait et à soustraire, trouver leur reste.

Explication du donné. Soit le nombre duquel on soustrait 237⓪5①7②8③, & à soustraire 59⓪7①4②9③. *Explication du requis*. Il faut trouver leur reste.

Construction. On mettra les nombres donnés en ordre comme ci-joignant, soustrayant selon la vulgaire manière de soustraction par nombres entiers, en cette sorte :

		⓪	①	②	③
2	3	7	5	7	8
	5	9	7	4	9
1	7	7	8	2	9

Reste (par le 2° problème de l'Arithmétique) 177829 qui font (ce que dénotent les signes par dessus les nombres) 177⓪8①2②9③, Je dis que les mêmes sont le reste requis.

Démonstration. Les 237⓪5①7②8③, font (par la troisième définition de cette Disme) $237\frac{5}{10}, \frac{7}{100}, \frac{8}{1000}$, ensemble $237\frac{578}{1000}$: Et par même raison les 59⓪7①4②9③ valent $59\frac{749}{1000}$, lesquels soustraits de $237\frac{578}{1000}$, reste (par le 10° problème de l'Arithmétique) $177\frac{829}{1000}$. Mais autant valent les dites 177⓪8①2②9③, c'est donc le vrai Reste, ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion : Etant donc donné nombre de Disme duquel on soustrait, & à soustraire, nous avons trouvé leur reste, ce qu'il fallait faire.

PROPOSITION III, DE LA Multiplication

Etant donné nombre de Disme à multiplier, & multiplicateur, trouver leur produit.

Explication du donné. Soit le nombre à multiplier 32⓪5①7②, & multi- plicateur 89⓪4①6②.

Explication du requis : il faut trouver leur produit.

Construction : On mettra les nombres donnés en ordre comme ci-joignant, multipliant selon la vulgaire manière de multiplication par nombres entiers en cette sorte :

					⓪	①	②
				3	2	5	7
				8	9	4	6
			1	9	5	4	2
		1	3	0	2	8	
	2	9	3	1	3		
2	6	0	5	6			
2	9	1	3	7	1	2	2
			⓪	①	②	③	④

Donne produit (par le 3° problème de l'Arithmétique) 29137122. Or, pour savoir ce que font, on ajoutera les deux derniers signes donnés, l'un ②, & l'autre aussi ②, font ensemble ④, nous dirons donc que le signe du dernier caractère du produit sera ④, lequel étant connu, tous les autres seront notoires, à cause de leur ordre continu. De sorte que 2913⓪7①1②2③2④ font le produit requis.

Démonstration : Le nombre donné à multiplier 32⓪5①7②, fait (comme il apparaît par la 3° définition de cette Disme) $32\frac{5}{10}, \frac{7}{100}$, ensemble $32\frac{57}{100}$ & par même raison le multiplicateur 89⓪4①6②, vaut $89\frac{46}{100}$, par le même multiplié le dit $32\frac{57}{100}$, donne produit (par le 12° problème de l'Arithmétique) $2913\frac{7122}{10000}$, mais autant vaut aussi le dit produit 2913⓪7①1②2③2④, c'est donc le vrai produit, ce qu'il nous fallait démontrer. Mais pour dire maintenant la raison pourquoi ② multiplié par ②, donne le produit ④ (qui est la somme de leurs nombres), idem, pourquoi ④ par ⑤ donne produit ⑨, & pourquoi ⓪ par ③ donne ③, etc. Prenons $\frac{2}{10}$ & $\frac{3}{100}$ (qui font par la 3° définition de cette Disme 2①3②) leur produit est $\frac{6}{1000}$, qui valent par la dite troisième définition, 6③, à savoir un signe composé de la somme des nombres des signes donnés.

CONCLVSION

Etant donc donné nombre de Disme à multiplier, & multiplicateur, nous avons trouvé leur Produit, ce qu'il fallait faire.

NOTA

Si le dernier signe du nombre à multiplier est inégal au dernier signe du multiplicateur, par exemple, l'un 3④7⑤8⑥, l'autre 5①4②, l'on fera comme dessus, & la disposition des caractères de l'opération sera telle :

	④	⑤	⑥	
	3	7	8	
		5	4	②
	1	5	1	2
1	8	9	0	
2	0	4	1	2
④	⑤	⑥	⑦	⑧

PROPOSITION IV DE LA DIVISION.

Etant donné nombre de Disme à diviser & diviseur. Trouver leur Quotient.

Explication du donné. Soit le nombre à diviser 3⓪4①4② 3③5④2⑥, et le diviseur 9①6 ②.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur quotient.

Construction : On divisera les nombres donnés (omettant leurs signes) selon la vulgaire manière de diviser par nombres entiers ainsi :

		~~1~~								
	~~1~~	~~8~~								
	~~5~~	~~1~~	~~6~~	~~4~~						
	~~7~~	~~6~~	~~2~~	~~7~~			⓪	①	②	③
~~3~~	~~4~~	~~4~~	~~3~~	~~5~~	~~2~~	(	3	5	8	7
	~~9~~	~~6~~	~~6~~	~~6~~	~~6~~					
		9	9	9						

Donne Quotient (par le 4° problème de l'Arithmétique) 3578. Or, pour savoir ce que font le dernier signe du diviseur qui est ②, se soustraira du dernier signe du nombre à diviser, qui est ⑤, reste ③, pour le signe du dernier caractère du Quotient, qui étant ainsi connu, tous les autres seront aussi manifestes, à cause de leur continu ordre, de sorte que 3⓪5①8②7③ font le quotient requis.

Démonstration : Le nombre donné à diviser 3⓪4①4②3③ 5④2⑤, fait (comme apparaît par la troisième définition de cette Disme) $3\frac{4}{10}\ \frac{4}{100}\ \frac{3}{1000}\ \frac{5}{10000}\ \frac{2}{100000}$ ensemble $3\frac{44352}{100000}$, par lequel divisé le dit $3\frac{44352}{100000}$, donne quotient (par le 13° problème de l'Arithmétique) $3\frac{537}{1000}$, mais autant vaut le dit Quotient 3⓪5①8②7③, c'est donc le vrai quotient, ce qu'il fallait démontrer.

Conclusion : Etant donc donné un nombre de Disme à diviser, & diviseur, nous avons trouvé leur Quotient, ce qu'il fallait faire.

NOTA I : Si les signes du diviseur fussent plus hauts que les signes du nombre à diviser, l'on mettra, joignant le nombre à diviser autant des 0 qu'on veut, ou autant qu'il sera métier. Par exemple, 7② sont à diviser par 4⑤, je mets près du 7 quelques 0 ainsi 7000, les divisant comme dessus en cette sorte :

~~3~~ ~~2~~

~~7~~ ~~0~~ ~~0~~ ~~0~~ ~~(~~ 1 7 5 0 ⓪

~~4~~ ~~4~~ ~~4~~ ~~4~~

Donne quotient 1750⓪. Il advient quelquefois que le quotient ne se pourra expliquer par nombres entiers, comme 4①, divisées par 3②, en cette sorte :

~~1~~ ~~1~~ ~~1~~ (1 ⓪ ① ②

~~4~~ ~~0~~ ~~0~~ ~~0~~ 0 0 0 (1 3 3 3

~~3~~ ~~3~~ ~~3~~ ~~3~~

Là où il apparaît qu'il y en sortiront infiniment des trois, restant toujours $\frac{1}{3}$. En tel accident l'on peut approcher si près, comme la chose le requiert, omettant le résidu. Il est bien vrai que 13⓪3①3 $\frac{1}{3}$ ② ou 13⓪3①3② 3 $\frac{1}{3}$ ③,etc. serait le parfait requis, mais notre intention est d'opérer en cette Disme, par nombres tous entiers, car nous voyons à ce qui s'observe aux négoces des hommes, là où l'on ne fait point compte de la millième partie d'une maille, d'un grain, etc. comme le semblable est souvent usé par les principaux Géométriens & Arithméticiens, en comptes de grandes conséquences. Comme Ptolémée & Jehan de Montroyal, n'ont pas décrit leurs tables des Arcs et Cordes, ou des Sinus, par l'extrème perfection (combien il était possible de le faire par nombres multinomiés) à cause que cette imperfection (considérant la fin d'icelles tables) est plus utiles que telle perfection.

NOTA 2. Les extractions de toutes espèces de racines se peuvent aussi faire par ces nombres de Disme. Par exemple, pour extraire une racine carrée de 5②2③9④, l'on besognera selon la vulgaire manière d'extraction en cette sorte :

~~1~~		
~~5~~	~~2~~	~~9~~
2		3
	~~4~~	

Et la racine sera 2①3②, car la moitié du dernier signe des nombres donnés est toujours le dernier signe de la racine. Pourtant, si le dernier signe donné est un nombre impair, l'on y ajoutera son signe prochain suivant, & sera alors de nombre pair, puis on extraira la racine comme dessus.

Semblablement en l'extraction de racine cubique, le tiers du dernier signe donné sera toujours le signe de la racine, & ainsi de toutes autres espèces de racines.

Fin de la Disme

APPENDICE.

PREFACE

Puisque nous avons décrit ci-devant la Disme, nous viendrons maintenant à l'usage d'icelle, démontrant par 6 Articles comment tous comptes se rencontrant aux affaires des hommes se peuvent facilement expédier par icelle, commençant premièrement (comme elles ont aussi été premièrement mises en oeuvre) aux computations d'Arpenterie comme s'en suit.

ARTICLE I, DES COMPVTATIONS DE L'ARPENTERIE.

L'on nommera la verge aussi *Commencement*, qui est 1⓪ la partissant en dix parties égales, desquelles chacun sera 1①, puis se partira chacune *Prime* une autre fois en dix parties égales, desquelles chacune sera 1②, & si on requiert les divisions plus petites, on divisera chaque 1② une autre fois en dix parties égales, & chacune vaudra 1 ③, procédant ainsi plus avant s'il est besoin, mais quant à l'Arpenterie, les parties en *Secondes* sont assez petites, mais pour les choses qui requièrent la mesure plus juste, comme toise de plomb, Corps, etc., l'on y peut user des *Tierces*. Quant à ce que la plupart des Arpenteurs n'usent pas de verge mais une chaîne de trois, quatre ou cinq verges, signant sur le bâton de leur croix rectangulaire, quelques cinq ou six pieds avec leurs doigts, le semblable peut se faire ici, car au lieu d'iceux cinq ou six pieds avec leurs doigts, l'on peut mettre six ou cinq *Primes* avec leurs *secondes*.

Ceci étant ainsi préparé, l'on usera en mesurant de ces parties, sans prendre égard aux pieds ou doigts que contient la verge selon la coutume du pays, & ce se déduira Ajouter, Soustraire, Multiplier ou Diviser selon cette mesure se fera selon la doctrine des précédents exemples.

Par exemple, il faut ajouter quatre triangles, ou superficie de terre, desquelles la première 345⓪ 7①2②, la deuxième 872⓪5① 3②,, la troisième 615⓪4①8 ②, la quatrième 956⓪8①6②, les mêmes ajoutez selon la manière déclarée à la première proposition de cette Disme en cette sorte :

			⓪	①	②
	3	4	5	7	2
	8	7	2	5	3
	6	1	5	4	8
	9	5	6	8	6
2	7	9	0	5	9

Leur somme sera 2790⓪ pour les verges 5①9②, les dites verges parties selon la coutume, par autant qu'il y a de Verges en un Arpent requis. Mais si l'on veut savoir combien de Pieds &

Doigts font les 5①9② (ce que l'Arpenteur ne fera qu'une fois, à la fin du compte qu'il livre aux propriétaires, combien que la plupart d'eux estiment inutile d'y faire mention de Pieds ou de Doigts) on verra sur la verge combien de pieds & doigts (qui sont marqués joignant les dixièmes parties sur un autre côté de la verge) s'accordent aux mêmes.
Au second, étant à soustraire 57⓪3①2② de 32⓪5①7②, l'on besognera selon la seconde proposition de cette Disme en sorte :

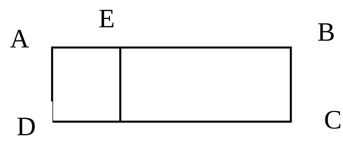
	⓪	①	②
5	7	3	2
3	2	5	7
2	4	7	5

Et restent 24⓪ ou Verges 7①5②.
Au troisième, étant à multiplier (à cause des côtés de quelque triangle ou quadrangle) 8⓪7①3②, par 7⓪5①4②, l'on fera selon la 3° proposition de cette Disme en cette sorte :

			⓪	①	②
			8	7	3
			7	5	4
		3	4	9	2
	4	3	6	5	
6	1	1	1		
6	5	8	2	4	2
	⓪	①	②	③	④

Et donnent produit ou superficie 65⓪8① etc.

Au quatrième, soit ABCD quelque quadrangle rectangle, duquel il faut couper 367⓪6①, & le côté AD fait 26⓪3①, la demande est combien l'on mesurera depuis A vers B pour couper (j'entends par une ligne parallèle avec AD) les dites 367⓪6①.



L'on partira 367⓪6① par 26⓪3① selon la quatrième proposition de cette Disme ainsi:

Donne quotient pour la

			2							
		2	**2**							
		7	**6**							
	2	**5**	**0**	**8**						
	4	**6**	**3**	**1**						
1	**0**	**4**	**7**	**3**	**9**			**⓪**	**①**	**②**
3	**6**	**7**	**6**	**0**	**0**	**(**	**1**	**3**	**9**	**7**
2	**6**	**3**	**3**	**3**	**3**					
	2	**6**	**6**	**6**						
		2	**2**							

requise longueur de A vers B, laquelle soit AE, 13⓪9①7②.
Et si l'on veut, on pourra approcher plus près (combien qu'il ne semble pas besoin) par la première note de la dite quatrième proportion. Les démonstrations de tous ces

exemples sont faites ci devant en leurs propositions.

ARTICLE II, DES COMPTES DES MESURES DE TAPISSERIE.

L'aulne du mesureur de tapisserie, lui sera 1⓪ laquelle il partira (sur quelque côté, là où ne font par les partitions selon l'ordonnance de la ville) comme est fait ci dessus de la verge de l'Arpenteur, à savoir en 10 parties égales, desquelles chacun fera 1①, puis chaque 1①, une autre fois en dix parties égales, & chacun vaudra 1②,etc. Quant à leur usage, vu que les exemples accordent en tous avec ce qui en est dit au premier article de l'Arpenterie, elle sera par icelles assez notoire, de sorte qu'il n'est pas métier d'y faire mention.

ARTICLE III, DES COMPTES SERVANT A LA GAVIERIE & AUX MESURES DE TOUS TONNEAUX.

Une Ame (qui fait à Anvers 100 pots) sera 1⓪. La même sera divisera en profondeur & longueur en 10 parties égales (à savoir égales au respect du vin, non pas de la verge, de laquelle les parties de profondité sont inégales) & chaque partie sera 1① contenant 10 pots, puis chaque 1① en 10 parties égales, etc. Chacune sera 1② , valant 1 pot. Puis chaque 1 ② en dix parties égales, faisant chacune 1③.

Or, étant ainsi partie la verge & voulant trouver le contenu du tonneau, on multipliera & besognera comme au précédent premier article, qui étant assez manifeste, nous n'en dirons ici point davantage.

Mais vu que cette dixième partition de la profondeur n'est pas vulgaire, nous en déclarerons ceci : Soit la verge AB une Ame, qui est 1⓪ divisée (selon la coutume) en points de profondeur comme ces dix C,D,E,F,G,H,I,K,L,A faisant chacune partie 1①, lesquelles il faut diviser une autre fois en 10 de cette sorte. L'on divisera premièrement chaque 1① en deux, ainsi : l'on tirera la ligne BM, à droit angle sur AB, & égale à 1①BC, puisse trouvera (par la 13° proposition du 6° livre d'Euclide) la ligne moyenne proportionnelle entre BM & la moitié qui fait BN & coupant BO égale à BN, & si NO est alors égale à NC, de B vers A, comme BP, laquelle étant égale à NC, de B vers A, comme BP, laquelle étant égale à NC, l'opération est bonne. Semblablement la longueur DN, depuis B jusqu'à Q, & et ainsi des autres. Il reste encore de partir chaque longueur comme BO & OC, etc. en cinq ainsi : L'on trouvera entre BM & la dixième part, la ligne moyenne proportionnelle qui fait BR, coupant BS, égale à BR. Puis se notera la longueur SR de B vers A, comme BT & semblablement la longueur TR de B jusqu'à V, & ainsi des autres. Et semblablement se procédera pour diviser BS & ST, etc. en ③. Je dis que BS & ST & TV etc. sont les désirées ②, ce qui se démontre ainsi :

Parce que BN est ligne moyenne proportionnelle (par hypothèse) entre BM & sa moitié, le carré de BN (par la 17° proposition du 6° livre d'Euclide) sera égal au rectangle de BM & sa moitié, mais icelui rectangle est la moitié du carré de BM, le carré donc de BN, est égal à la moitié du carré de BM, mais BO est (par hypothèse) égale à BN, & BC à BM, le carré donc de BO, est égal à la moitié du carré de BC. Et semblablement se démontrera que le carré de BS est égal à la dixième part du carré BM, par quoi, etc. Nous avons fait la démonstration brièvement parce que nous n'écrivons pas à Apprentis, mais à Maîtres.

ARTICLE IV, DES COMPTES DE LA STEREOMETRIE EN GENERAL

Il est bien vrai que la gaujerie que nous avons déclaré ci devant est stéréométrie (c'est à dire science de mesurer les corps) mais considérant les diverses partitions de la verge de l'un & l'autre, aussi que celui-ci a telle différence de celui-là, comme genre à espèce. Ils se peuvent distinguer par bonne raison, car toute Stéréométrie n'est pas Gaujerie. Pour donc venir à la chose, le Stéréométrien usera de la mesure de sa ville, comme verge ou aulne avec ses dixièmes partitions décrites au premier & au second article, l'usage de laquelle(semblable à ce qui est dit au précédent) est telle : Posons qu'il y ait à mesurer quelque colonne quadrangulaire, rectangulaire, de laquelle la longueur 3①2②, largeur 2①4③, hauteur 2◎3 ①5③.

La demande est combien il y a de matière. L'on multipliera selon la doctrine de la 4° proposition de ce traité, longueur par largeur, & leur produit une autre fois par hauteur, en cette sorte :

				①	②	
				3	2	
				2	4	
			1	2	8	
			6	4		
			7	6	8	④
			2	3	5	②
		3	8	4	0	
	2	3	0	4		
1	5	3	6			
1	8	0	4	8	0	
①	②	③	④	⑤	⑥	

Et donne le produit comme apparaît : 1①8②4④8⑤.

NOTA. Quelqu'un ignorant (car c'est à celui-là que nous parlons ici) les fondements de la stéréométrie, pourrait parler pourquoi l'on dit que la grandeur de la colonne ci-dessus n'est que de 1 ①, etc. veut qu'elle contient plus que 180 cubes, desquels la longueur de chaque côté est de 1 ①, il saura que le corps d'une verge n'est pas un corps de 10 ①comme une verge en longueur, mais de 1000 ①, en respect de quoi 1 ① fait 100 cubes chacun de 1 ① ; comme le semblable est assez notoire aux arpenteurs en superficie, car quand on dit 2 verges 3 pieds de terre, cela ne s'entend point 2 verges et 3 pieds quarrés mais de 2 verges et (comptant 12 pieds pour la verge) 36 pieds carrés. Pourtant si la demande ci-dessus eut été, de combien de cubes chacun de 1 ① fut la grandeur de la dite colonne, l'on accommoderait la solution conforme au requis ; considérant que chaque 1 ① de ceux-ci fait 100 ① de ceux-là, et chaque 1 ② de ceux-ci, 10 ① de ceux-là etc. Ou autrement si la dixième part de la verge est la plus grande mesure que le stéréomètre se propose, il la peut nommer 1 ⓪, et puis comme dessus.

ARTICLE V, DES COMPVTATIONS ASTRONOMIQVES

Avant, les anciens astronomes partageaient le cercle en 360 degrés ; ils voyaient que les computations astronomiques d'icelles, avec leurs partitions, étaient trop laborieuses, pourtant ils ont parti chaque degré en certaines parties, et les mêmes autrefois en autant, etc. afin de pouvoir par ainsi toujours opérer par nombres entiers, en choisissant la soixantième progression, parce que 60 est nombre mesurable par plusieurs mesures entières, à savoir 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, mais si l'on peut croire l'expérience (ce que nous disons par toute révérence de la vénérable antiquité et se veut avec l'utilité commune) certes la soixantième progression n'était pas la plus commode, au moins entre celles qui consistaient potentiellement en la nature, ainsi la dixième qui est telle : Nous sommes les 360 degrés aussi *commencement*, les dénotant ainsi 360 ⓪ et chacun degré ou 1 ⓪ se divisera en 10 parties égales, desquelles chacun sera 1 ①, puis chaque 1 ① en 10 ②, et ainsi des autres, comme le semblable est fait par plusieurs fois ci devant.

Or étant entendue cette partition, nous pourrions décrire selon ce qui a été promis, leur facile manière d'Ajouter, Soustraire, Multiplier, et Diviser, mais vu qu'elles n'ont aucune différence des quatre proportions précédentes, tel récit ne ferait que perdre le temps, pourtant nous les laisserons servir pour exemple de cet article ; Y ajoutant encore cecy ; que nous userons de cette manière de partition, en toutes les tables et comptes, se rencontrant en astronomie, que nous espérons de divulguer, en notre vulgaire langue Germanique qui est la plus riche, la plus ornée, et la plus parfaite langue de toutes les langues, de la très exquise singularité, de laquelle nous attendons de brief autre démonstration plus abondante, que Pierre et Ichan en ont fait en la BEWYSKONT ou DIALECTIQVE naguère divulguée.

ARTICLE VI, DES COMPTES DES MAÎTRES DE MONNOIES, Marchans & de tous états en général.

Afin de dire en bref et en général, la somme et le contenu de cet article, faut savoir qu'on partira toutes mesures, comme Longue, Humide, Seiche, Argent, etc. par la précédente dixième progression et chaque fameuse espèce d'icelles se nommera
Commencement : comme Marc, *commencement* des pois, par lesquels se pèsent l'Or et l'Argent, Livre, *Commencement* des autres pois communs ; Livre de gros en Flandres, Livre Esterlain en Angleterre, Ducat en Espagne, etc. *Commencement* de monnaie, le plus haut signe du Marc sera ④ car 1④ pèsera environ la moitié d'un Es d'Anvers, la ③ lui suffira pour le plus haut signe de la Livre de gros, vu que telle 1③ fait moins que le quart d'un Es.

Les subdivisions des pois pour peser toutes choses, seront (au lieu du demi litre, quart, demiquart, once, demionce, esterlin, grain, es, etc.) de chaque signe 5, 3, 2, 1, c'est à dire qu'après la livre ou 1⓪ suivra un pois de 5① (faisant ½ lb) puis de 3①, puis de 2①, puis de 1 ①, & semblables subdivisions aura aussi la 1① & autres suivants.

Nous estimons aussi utile que chaque subdivision voire de quelle matière est son sujet, soit *nommée Prime, Seconde, Tierce*, etc. & cela à cause qu'il nous est notoire que *Seconde* multipliée par *Tierce* donne produit *Quinte* (parce que 2 & 3 font 5 comme il est dit ci-dessus), idem que *Tierce*, divisée par *Seconde* donne quotient *Prime*, etc., ce qui ne pourrait se faire si proprement par autres noms ; mais quand on les veut nommer par distinction des matières (comme l'on dit denier, aulne, demie-livre, demie pinte, etc.) nous les pouvons nommer Prime de Marc, Seconde de Marc, Seconde de Livre, Seconde d'Aulne, etc.?

Mais afin d'en donner l'exemple, posons que un Marc d'Or vaut 36 lb 5①3②, la demande est combien montreront 8 marcs 3①5②4③ : l'on multipliera 3653 par 8354, donne produit par la 3° proposition qui est aussi la solution requise, 305 lb 1①7②1③. Quant aux 6④2⑤, elles ne sont ici de nulle estime.

Posons une autre fois que 2 aulnes 3① coûtent 3 lb 2①5②, la demande est combien coûteront 7 aulnes 5① 3② : on multipliera selon la coutume le dernier terme donné par le second & le produit se divisera par le premier, c'est à dire 753 par 325 font 244725, qui divisé par 23 donne quotient & solution 10 lb 6① 4②.

Nous pourrons donner autres exemples en toutes les vulgaires règles d'arithmétique, se rencontrant souvent au trafic des hommes. Comme la règle de Compagnie, d'intérêt, de Change, etc. démontrant comment elles se peuvent toutes expédier par nombres entiers, aussi cette facile opération par les jetons, mais vu qu'il est assez notoire par les précédents, nous n'en ferons point de mention.

Nous saurions aussi démontrer plus amplement par comparaison de fâcheux exemples en rompuz, la grande différence de facilité qu'il y a de ceux-ci à ceux là, mais nous le passerons outre à cause de brièveté.

Au dernier, il nous faut encore dire de quelque différence qu'il y a de ce 6° article, aux 5 articles précédents, c'est que chacune personne peut exercer pour soi-même la dixième partition desdits précédents 5 articles, sans qu'il sera métier d'en être donné par le magistrat quelque ordre général, mais cela pas ainsi en ce dernier, car ces exemples font vulgaires computations, qui se rencontrent à chaque moment, auquel il serait convenable, que la solution ainsi trouvée fut d'un chacun acceptée pour bonne et légitime. Pourtant considérant la très grande utilité, ce serait chose louable, si quelqu'un, comme ceux qui en attendent la plus grande commodité, facilitoyoient de la faire mettre en effet, à savoir que joignant les vulgaires partitions qu'il y a maintenant des mesures, Pois, et Argent (demeurant chaque capitale mesure, Pois et Argent en tous lieux immuable) l'on ordonnait encore légitimement par les Supérieurs, la susdite dixième partition, afin que chacun qui voudroit la pourroit user.

Il avanceroit aussi la chose, si les valeurs d'argent, principalement de ce qui forge de nouveau, fussent valuées sur quelques *primes, secondes, tierces,* etc.
Mais tout si tout ceci ne fut pas mis en oeuvre, si tout comme nous le pourrions souhaiter, il nous contentera premièrement, qu'il fera du bien à nos successeurs, car il est certain que si les hommes futurs sont de telle nature comme ont été les précédents, qu'ils ne seront pas toujours négligents en leur si grand avantage.
Au second, ce n'est pas le plus abject savoir à un chacun en particulier, qu'il lui est notoire, comment les hommes se peuvent délivrer eux-mêmes à toute heures qu'ils voudroient, de tant et si grands labeurs.
Au dernier combien que l'effet de ce 6° article n'apparaîtra point, peut être en quelques temps toutefois un chacun pourra exercer les 5 précédents comme il est notoire, qu'aucun des mêmes sont de sa mise en oeuvre.

Fin de l'appendice.

Étude de la disme de Stevin de Bruges

Joël Briand - Jacqueline Euriat - Marie Louise Huet - Raymond Lecoq Marie-Lise Peltier.

1- INTRODUCTION

Une question qui se pose en formation est celle de la construction de situations propices à l'acquisition où/et à la ré-exploration personnelle de savoirs.
La construction de situations d'apprentissage est bien sûr une entrée que nous pratiquons quand cela est possible, mais il est d'autres approches qui méritent notre attention. En particulier, l'approche historique.
L'utilisation d'un texte historique comme autre entrée en formation en mathématiques est pratiquée depuis pas mal d'années. Il s'agit le plus souvent de relire les auteurs anciens à l'aide du savoir actuel et de son organisation.
Parce que l'étude de la genèse historique des savoirs peut éclairer la construction des savoirs chez un individu, cette approche est à la fois attrayante et utile. Toutefois, malgrè la tentation qu'il y aurait à calquer ces deux genèses, les différences demeurent.
Le fait que la construction des nombres décimaux soit historiquement, tantôt une réponse à des questions plutôt mathématiques, tantôt à des questions plutôt d'ordre socio-économiques a retenu notre attention.
Ainsi, dans cet article, après avoir repris brièvement quelques repères historiques concernant les décimaux, nous étudions le document "LA DISME" de Stevin de Bruges, paru en 1585 en édition française.
Cette étude se présente sous forme d'un questionnaire avec des indications de réponses à la suite de chaque question.
L'annexe 1 revient sur le problème de l'extraction de racine carrée, l'annexe 2 propose un glossaire de quelques termes utilisés dans la DISME.

2- REPERES HISTORIQUES CONCERNANT LES DECIMAUX

QUELQUES EXTRAITS DE TEXTES RELATIFS À LA "DÉCOUVERTE" DE STEVIN.

2.1. Histoire universelle des chiffres. *Georges Ifrah* (bouquins Lafont 1994)

"1582- le mathématicien néerlandais Simon Stévin publie son *De Thiende* : c'est le premier ouvrage européen connu consacré à *la théorie générale des fractions décimales*. [ces fractions étaient certes connues bien avant lui : par les arabes, depuis le temps d'Al Uqlidisi (952) ; et en occident par Emmanuel Bonfils de Tarascon (1350), Regiomontanus (1463), Christophe Rudolff (1525), Elie Mizrachi (1535) et François Viète (1579). Mais à l'exception peut-être du mathématicien musulman Ghiyat ad din Ghamshid al Kashi (première moitié du XVéme), dont les travaux auront été ignorés en occident, personne en dehors de Stevin, n'aura eu l'idée jusque là de substituer ces fractions aux fractions ordinaires et n'aura élaboré de système de notation permettant d'unifier le domaine d'application des règles arithmétiques par un rapprochement avec celles qui s'appliquent aux nombres entiers]".(page 463 tome II)

2.2. Mathématiques et mathématiciens. ***P. Dedron, J. Itard*** **"Les fractions"** (Magnard. 1972)

"Les Hindous notaient les fractions comme nous, mais sans la barre horizontale. Les arabes eurent d'abord la même notation qu'eux, puis introduisirent la barre. Le calcul des fractions ordinaires de ces deux peuples étaient dans l'ensemble analogue au nôtre.[...] Cependant ni les Hindous, ni les Arabes, ni les Occidentaux jusqu'à la fin du XVI ème siècle ne se sont aperçus de l'intérêt qu'il y aurait à développer le système décimal de position dans les deux sens, comme les Babyloniens avaient développé leur système sexagésimal. Ce retard provient essentiellement de la perfection même de la numération en base soixante. Adoptée à partir du siècle avant notre ère par les astronomes grecs, conservée par les astronomes arabes (toutes les tables avaient été calculées dans cette base) elle fut utilisée dans les calculs astronomiques jusqu'au XVIIème siècle et est encore utilisée pour les angles et les temps.[...]
Viète, dans son *Universalium inspectionum ad Canonem Mathématicum* de 1579, supplément du *Canon Mathématique*, déclare : "En Mathématiques les soixantièmes et les soixantaines doivent être d'un usage rare ou nul. Au contraire les Millièmes et les Mille, les centièmes et les centaines, les dizièmes et les dizaines, et les progressions de même genre, ascendantes ou descendantes, doivent être d'un usage fréquent ou constant".
La virgule dans la notation de Viète sépare les tranches de trois chiffres du nombre. La partie décimale est écrite en caractères un peu plus petits, et soulignés, le dénominateur 1000 restant sous-entendu. Un peu plus loin dans l'ouvrage, il sépare simplement la partie décimale de la partie entière par un trait vertical.
Le dernier pas est franchi par Stevin, en 1582, dans *De Thiende*, ouvrage traduit en français par l'auteur en 1785 sous le titre *La Disme*."(pages 289, 290)

2.3. La rigueur et le calcul. Documents historiques et épistémologiques. Groupe inter IREM (Cédic, 1982)

"En général, les historiens des sciences attribuent à AL-Kasi l'invention des décimaux. Dans son traité de mathématiques "*Miftah al-hisab*" (la clé de l'arithmétique 1427) qui rassemble l'ensemble des mathématiques élémentaires de son époque, il introduit en particulier les décimaux. On en trouve cependant des traces, en particulier de fractions décimales, chez Al-Uqlidisi.[...]

En Occident, quelques mathématiciens introduisent également les décimaux dans leurs calculs, souvent dans un but de simplification. Citons par exemple Emmanuel Bonfils (1340-1377), et deux siècles plus tard, François Viète dans son *Universalium inspectionum ad Canonem Mathématicum* de 1579. (page 176)

Le traité d'arithmétique de Stevin dans lequel figure *la Disme* témoigne de connaissances des opérations sur les fractions ordinaires analogues aux nôtres (addition de fractions de mêmes dénominateur, multiplication de fractions, réduction au même dénominateur, addition de fractions de dénominateurs quelconques).

2.4. Différentes conceptions historiques des décimaux (G. Brousseau). IREM Bordeaux 1990.

a) Le décimal de l'antiquité sert exclusivement au mesurage et à la représentation des quantités. Par exemple, ceux qui expriment les mesures décimales en Chine treize siècles avant Jésus Christ. Ils fonctionnent à peu près comme les binaires Hiéroglyphiques des Egyptiens de -2500 et comme les sexagésimaux des Babyloniens de -1900, en ce sens qu'ils résolvent de façon similaire des problèmes similaires ; il s'agit de l'emploi direct du système de numération en usage pour les dénombrements comme moyen de décrire des fractionnements : certaines fractions peuvent être désignées, d'autres simplement approchées. Ils se distinguent bien, par toutes sortes de caractères formels, techniques et même sociologiques, des autres fractions avec lesquelles les initiés tentent de faire des calculs exacts, puis de définir la notion de rapport et avec lesquelles on franchit divers obstacles...(passage à la forme 1/m, m naturel quelconque ; puis à n/m, n et m quelconques, etc.) Bien entendu, peu de ces propriétés sont reconnues même si elles sont utilisées. Je dirai - en empruntant ce terme à Y.CHEVALLARD (1981) - que le décimal est alors une notion protomathématique : cette structure est mobilisée implicitement dans des usages et des pratiques, ses propriétés sont utilisées pour résoudre certains problèmes, mais elle n'est pas reconnue, ni comme objet d'étude, ni même comme outil.

b) Al Huwarizmi (780-850), unifie le calcul des naturels avec celui des rapports géométriques, et introduit l'emploi de la numération de position décimale, et rend possible l'émergence du décimal - outil d'appropriation, non plus des grandeurs, mais des entités mathématiques : rationnels d'abord, puis radicaux, etc. Ces entités sont susceptibles d'être des nombres dénombrants, des nombres mesurants, des rapports et enfin, avec STEVIN (1585) d'authentiques applications.
Le décimal devient alors une notion paramathématique : il n'est tout d'abord qu'un outil consciemment utilisé, reconnu, désigné, mais que son inventeur Al Uqlidisi, vers 952, ne traite pas comme objet d'étude. (Abd el Jaoud 1978). Le décimal est montré dans son fonctionnement (préconstruit) et apparaît comme une méthode d'exposition des fractions ou une curiosité. (L'écriture des fractions décimales dans l'oeuvre d'AL Aqlidisi est identique à la nôtre). Pourtant le concept n'est pas repris par ses contemporains.

Au contraire, son deuxième inventeur, Al Kashi (1427) le reconnaît comme une découverte mathématique. Le décimal n'est pas encore sous le contrôle d'une théorie qui en fixe la définition. Les propriétés et la position épistémologique. Il est la traduction du système sexagésimal des astronomes, en un système plus commode pour les calculs. On peut supposer que pendant 5 siècles, les décimaux sont potentiellement présents dans la culture et que c'est leur statut qui est en évolution (par exemple, Bonfils de Tarascon vers 1530 en produit une ébauche.)

c) C'est avec Simon STEVIN (1585) que le décimal accède au statut de notion mathématique. Stevin introduit systématiquement les nombres géométriques et multinomiés -les fonctions polynômes- pour unifier la notion de nombre et les solutions des problèmes d'algèbre de son époque. Les décimaux apparaissent comme une production achevée de cette théorie ; ils deviennent alors un objet de connaissance susceptible d'être enseigné et utilisé dans les applications pratiques, les calculs, les constitutions de tables. Leur rôle conceptuel reste plus caché. Pour STEVIN, « les quantités irrationnelles, irrégulières, inexplicables, sourdes et absurdes » sont des nombres réels parce que toutes sont approchables par des nombres décimaux ; il n'a pas écrit cette phrase, mais se passe comme s'il l'avait pensée.
Les décimaux servent de modèle heuristique dans l'analyse naissant et Newton les utilise pour expliquer l'approche des fonctions et de leurs fluxions à l'aide des fonctions polynômes et des séries, de leurs dérivées et de leurs primitives (Ovaert 1976). Cette place n'est finalement fixée et attestée que lorsque les réels sont enfin devenus à leur tour des objets mathématiques et que les procédés d'approche des fonctions qu'utilisait STEVIN ont reçu à leur tour leur identité mathématique.

2.5. DEUX REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES HISTORIQUES

DIJKSTERHUIS E.J. *« SIMON STEVIN science in the Netherlands around 1600* ».. Ed. Martinus NIJHOFF / The HAGUE. 1970.
VAN BEMMEL : *« PATRIA BELGICA-encyclopédie nationale.* ». Ed. Bruylant-Christophe. 1875.

3. QUESTIONNAIRE SUR LA DISME

3.1. Questions relatives à l'introduction

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
Dans le texte introductif intitulé « AVX ASTROLOGUES, arpenteurs, mesurevrs de tapisserie, gavievrs, stéréométriens en général, Maîtres de monnoye, & à tous marchans » , pointez les étapes de l'argumentation de STEVIN et la nature de chacun des arguments.	Après une déclaration de modestie (vraie ou fausse) l'auteur argumente en se fondant sur les pratiques sociales : "*Mais s'il est arpenteur, il saura le grand bénéfice que le monde reçoit de la science, par laquelle s'évitent plusieurs difficultés et noises, qui s'élèveraient journellement, à cause de l'inconnue capacité des terres*" Argument de simplicité : "*Elle enseigne (afin de dire beaucoup en un mot) d'expédier facilement sans nombres rompus, tous comptes qui se rencontrent aux affaires des Humains. De sorte que les quatre principes d'Arithmétique que l'on appelle Ajouter, Soustraire, Multiplier et Diviser par nombres entiers pourront satisfaire à tel effet. Causant semblable facilité à ceux qui usent des jetons. Or ainsi par tel moyen sera gagné le précieux temps...*" Il justifie l'utilité en se servant de l'usage qu'en font déjà les arpenteurs : "*Quand à ce que quelqu'un ne pourrait dire que plusieurs inventions semblent bonnes au premier regard, mais quand on s'en veut servir, l'on ne peut rien effectuer, et comme il advient souvent aux chercheurs de forts mouvements qui semblent bons en petites preuves mais aux grandes, ou à l'effet, ils ne valent pas un fétu. Nous lui répondons qu'il n'y a ici tel doute, parce que l'expérience s'en fait journellement en la chose même. A savoir par divers experts Arpenteurs Hollandais auxquels nous l'avons déclaré, lesquels (laissant ce qu'ils avaient inventé chacun à sa manière, pour amoindrir le travail de leur computation) l'usent à grand contentement..*

On peut introduire les décimaux pour plusieurs raisons. Quelle est la raison invoquée ici ?	Ce sont les décimaux comme système de notation rendant les opérations aisées entre rationnels décimaux. Ce ne sont pas les décimaux pour les approximations, du moins ici, mais on y reviendra plus en avant dans le document.
Recensez les savoirs de l'époque qui sont évoqués dans cette introduction. (Séparez pratiques sociales et savoirs des mathématiciens).	Il s'agit des opérations dans les fractions (les problèmes du livre d'Arithmétique). STEVIN y fait sans cesse allusion. Mais pour son argumentation, STEVIN se réfère aux pratiques de calcul plus familières dans les fractions décimales.
STEVIN dévoile-t-il son "invention" dans l'introduction ? Quelles sont ses préoccupations ?	Non, il montre son intérêt pour les affaires des hommes. Il expose les difficultés actuelles. Il a pour souci de montrer que son invention s'adresse à tous et est crédible : elle s'adresse autant aux manieurs de jetons qu'aux comptables effectuant les calculs les plus élaborés, et des corporations telles les arpenteurs l'utilisent déjà "à leur grand contentement".
A quoi correspond le paragraphe nommé *"argument"* en termes actuels ?	Il s'agit du plan qui s'adresse aux mathématiciens. L'usage à destination des corporations est relégué en Appendice.

3.2.Questions relatives à la premiere partie

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
Quel est l'objet de la définition 1 et de l'explication qui la suit ? Donnez en termes actuels le principe sur lequel s'appuie cette définition. Comment s'y prend-t-il pour préparer le chiffre des dixième ?	C'est de présenter globalement la Disme comme un traité d'arithmétique qui va s'appuyer sur la numération décimale. La définition s'appuie sur la numération en base dix. Il fait relire un nombre selon l'ordre gauche droite et non droite gauche afin de préparer aux définitions 2, 3 et 4. (division et non groupement échange).
Comment s'y prend-t-il pour donner du sens au mot "dixième" ?	Il montre : il fait faire une relecture et remplace la lecture droite gauche (dizaine) par une lecture gauche droite (dixième).

La définition 3 montre que STEVIN se fonde sur un ensemble de savoirs communs aux "professionnels des calculs" de son époque. Quels sont ces savoirs ?	Il s'appuie sur les fractions. Dans celles-ci, il fonde véritablement les fractions décimales, organise leur décomposition pour décrire son partage en dix, même si celles-ci existaient déjà.
Faites une hypothèse sur la manière dont on écrivait, à cette époque, les nombres non entiers ?	On écrivait les nombres non entiers comme 8 937/1000
Comment s'articule son invention à partir de ces savoirs ?	Il propose l'écriture en 8 9/10 3/100 7/1000, justifie sa présentation par une recomposition et non une décomposition. Le numérateur ne peut exéder 9.
Il propose une écriture. Quelles sont les règles précises qu'il impose à ce moment de l'exposé ?	Remarque : pour justifier une convention d'écriture, il faut partir des habitudes sociales. (Et non pas l'amener). Il a besoin de l'addition des fractions pour justifier sa notation. Remarque : l'écriture des nombres ne se sert pas de l'addition.
Réécrivez : 73 2745/10000 8 907/1000 Comparez à notre notation actuelle.	Les deux exercices visent à montrer que la question du Zéro intercalaire n'est pas réglée.
A partir des définitions 1 et 4, précisez en quoi consiste finalement l'"Invention" ?	Cette invention est une convention d'écriture. Elle conduit à la création d'un nouvel ensemble des nombres nommé *"les nombres de Disme"*, strictement inclus dans l'ensemble des rationnels.

3.3. Questions relatives à la seconde partie

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
Sur quelles pratiques de l'époque s'appuie STEVIN pour justifier sa façon de faire ?	STEVIN fait référence à une pratique de l'addition des rompus

Quel est le rôle du nota de l'addition ?	Le résultat posé dans l'addition 1 conduit STEVIN à présenter le cas des nombres pour lesquels certains groupements sont absents et à préciser la notation.
L'exposé de la multi-plication se fait en deux temps : le pre-mier et le nota. Etudiez leur rôle respectif et explicitez le choix pédagogique. A quel savoir actuel le nota vous fait-il pen-ser ? Comment la règle de découverte du nombre de chiffres après la virgule est elle abor-dée ?	On fait le produit de deux nombres de même format, ce qui permet d'utiliser la démonstration classique avec retour aux rompus et au produit de rompus. Dans le nota, il s'agit du produit de deux nombres qui n'ont pas le même format. Il explicite un nouveau procé-dé et adapte une nouvelle présentation. Dans le premier exemple, les unités de même rang sont en colonne. Dans le nota ce n'est plus le cas. Le produit des puissances négatives de dix permet d'éclairer le nota. ll effectue une démonstration à partir d'un nombre à 2 chiffres multiplié par un autre nombre à 2 chiffres après la virgule...
La division : Retrouvez, à partir de la présentation de 3,44352 divisé par 0,96 la façon dont une division est effectuée à l'époque.	
Expliquez pourquoi STEVIN propose de "mettre quelques 0 après le 7" dans le NOTA I	Il s'arrange toujour pour avoir un nombre plus grand afin que la soustraction des rangs donne toujours un nombre positif. Le contrôle ultérieur se fait.

A quel moment STEVIN aborde l'écriture décimale illimitée d'un rationnel non décimal ?	Dans l'extrait suivant : "le quotient ne se pourra expliquer par nombres entiers, comme 4①, divisées par 3②, en cette sorte :Là où il apparaît qu'il y en sortiront infiniment des trois, restant toujours $\frac{1}{3}$, STEVIN met en évidence les limites de la DISME.
Quelle propriété de D aborde-t-il ?	Il sait que l'approche de tels nombres est réalisable quelque soit l'exigence de proximité : "...approcher si près, comme la chose le requiert, omettant le résidu". Il signifie par là même la densité de **D** dans **Q**
Quelle convention d'écriture d'un rationnel écrit-il ?	Il propose une écriture "multinomiée" : " Il est bien vrai que 13⓪3①3 $\frac{1}{3}$ ② ou 13⓪3①3②3 $\frac{1}{3}$ ③,etc. serait le parfait requis"...
Comment justifie-t-il l'insuffisance des écritures décimales ?	Il se fonde sur les exigences professionnelles de l'époque : "..., mais notre intention est d'opérer en cette Disme, par nombres tous entiers, car nous voyons à ce qui s'observe aux négoces des hommes, là où l'on ne fait point compte de la millième partie d'une maille, d'un grain, etc. comme le semblable est souvent usé par les principaux Géométriens & Arithméticiens, en comptes de grandes conséquences. Comme Ptolémée & Jehan de Montroyal, n'ont pas décrit leurs tables des Arcs et Cordes, ou des Sinus, par l'extrème perfection (combien il était possible de le faire par nombres multinomiés) à cause que cette imperfection (considérant la fin d'icelles tables) est plus utiles que telle perfection."

NOTA 2 :A PROPOS DE L'EXTRACTION DES RACINES CARRÉES L'exemple choisi est l'extraction de la racine carrée de 0,0529. De quelle manière Stevin détermine le rang du dernier chiffre de la racine carrée ?	Stevin utilise la propriété : la racine carrée de 10^{-2n} est 10^{-n} Si le rang du dernier chiffre décimal du nombre est pair, le rang du dernier chiffre de la racine est la moitié de ce rang Si le rang du dernier chiffre décimal du nombre est impair, on se ramène au cas précédent en considérant le rang suivant. (Voir etude de l'algorithme de l'extraction de la racine carrée d'un entier dans la suite de ce document.)
Quel algorithme est ensuite proposé ?	L'algorithme d'extraction de la racine carrée pour les nombres entiers .

3.4. Questions relatives a l'appendice

ARTICLE I : DES COMPUTATIONS DE L'ARPENTERIE :

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
1. Citez une phrase du premier paragraphe qui semble montrer que le mot *verge* désigne ici une unité de longueur.	*"... la plupart des arpenteurs n'usent pas de verge ains d'une chaîne de trois, quatre ou cinq verges"*
2. Quels sont les instruments de mesure de longueur dont parle ici Stevin ?	*La chaîne de trois, quatre ou cinq verges, le bâton de la croix rectangulaire qui porte des pieds et des doigts, et la verge (sans doute règle d'une longueur d'une verge) qui porte des graduations en pieds et doigts (sous-multiples de la verge).*
3. Quelles modifications Stevin conseille-t-il aux arpenteurs concernant leurs instruments ? Dans quels buts ?	*Graduer le bâton en Primes et Secondes au lieu de pieds et de doigts pour mesurer directement en verges, primes et secondes, et graduer la verge (règle) en pieds et doigts sur un autre côté, mais bien en face, pour montrer au client ce que représentent des primes et des secondes en pieds et doigts.*
4. Pourquoi diviser la verge en Primes et Secondes, plutôt qu'en pieds et doigts comme le voulait la coutume ?	*Pour utiliser au maximum la numération décimale prolongée sur la gauche que Stevin vient d'exposer : en effet on ne sera pas obligé de faire des opérations sur des nombres complexes, ce qui était la règle jusque là, ou de calculer sur des fractions*

5. Dans le premier exemple numérique, Stevin dit ajouter des superficies ; il trouve 2790, 59 verges ; le mot *verge* désigne donc ici une unité de superficie. Comment alors comprenez-vous la phrase : "Mais si l'on veut savoir combien de pieds et de doigts font les 5 (1) 9 (2) (ce que l'arpenteur ne fera qu'une fois, à la fin du compte qu'il livre aux propriétaires, combien que la plupart d'eux estiment inutile d'y faire mention de pieds ou doigts) on verra sur la verge combien de pieds et doigts (qui sont marqués joignant les dixièmes parties sur un autre côté de la verge) s'accordent aux mêmes." ? Comment l'arpenteur s'y prendra-t-il pour faire voir les 5 dixièmes 9 centièmes de verge superficielle ?	*On peut penser qu'une verge superficielle est l'aire d'un carré de une verge linéaire sur une verge linéaire. Dans ce cas le dixième de verge superficielle est l'aire d'un rectangle de une verge sur un dixième de verge et cinq dixièmes de verge superficielle est l'aire d'un rectangle de une verge sur cinq dixièmes de verge. On peut montrer la largeur de ce rectangle aux propriétaires sur la verge (règle), et on peut lire en face cette largeur en pieds.* *De même 9 centièmes de verge superficielle est l'aire d'un rectangle de une verge sur 9 centièmes de verge. Cette dimension pourra donc être montrée sur la verge, et en face l'équivalent en doigts.*
6. Traduisez en langage moderne le problème donné au quatrième exemple. Pourquoi dit-il : "bien qu'il ne me semble pas besoin" ?	*On a une parcelle rectangulaire ABCD, dont le côté AD mesure 26,1 verges. On veut enlever de cette parcelle un petit rectangle de côté AD et d'aire 367,6 verges. On demande la longueur de la deuxième dimension du petit rectangle.* *La verge linéaire servant à mesurer des terrains, elle doit être de l'ordre du mètre. Aller au-delà des centièmes de verge linéaire n'a donc pas de sens sur le terrain.*

ARTICLE III, DES COMPTES SERVANT A LA GAVERIE & AUX MESURES DE TOUS TONNEAUX.

La figure présentée dans le document original est complexe à analyser. Ce qui suit n'est donc pas rédigé sous forme d'un questionnaire. Voici quelques pistes :

Rappel; : L'unité est une âme, c'est à dire 100 pots.

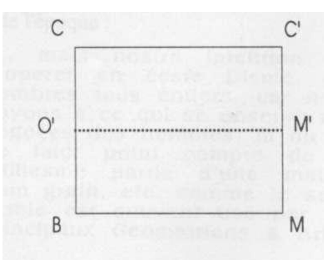
La première subdivision en 10 donne une graduation irrégulière « égale au respect du vin ». Elle se fait « selon la coutume » et a sans doute un caractère expérimental. Cette irrégularité est livrée à la forme du tonneau.

Stevin propose d'obtenir les subdivisions suivantes par un procédé purement géométrique en deux étapes à chaque fois.

- D'abord partage en 2 de chaque subdivision.
- Ensuite, partage en 5 de chacune des deux parties obtenues.

Le tonneau n'étant pas un cylindre, Stevin fonde sa méthode sur la moyenne proportionnelle. (Voir plus bas).

Partage en 2 de [OC].
Si le tonneau était un cylindre, la graduation correspondant au partage en deux se trouverait au milieu de [BC].



Le tonneau n'est pas un cylindre.
On admet que [BO] correspond au côté d'un carré ayant même aire que le rectangle BO'M'M, ce que Stevin énonce en disant :

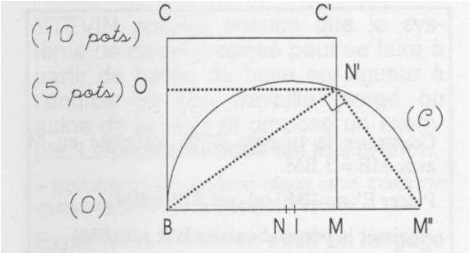
« BO égale à BN, est la ligne moyenne proportionnelle entre BM et sa moitié ».

$\frac{BM}{BN} = \frac{BN}{\frac{BM}{2}}$ d'où $BN^2 = \frac{BM^2}{2}$ et $BN = BM\frac{\sqrt{2}}{2}$

$MM'' = \frac{MB}{2}$; I milieu de BM''. C demi-cercle de diamètre BM''» coupent [MC'] en N'. D'après les propriétés du triangle rectangle : $MN'^2 = MB \times MM''$

$= MB \times \frac{MB}{2} = \frac{MB'}{2}$

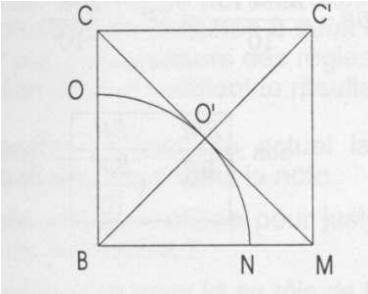
soit $MN' = \frac{BM\sqrt{2}}{2}$



Autre méthode (par la diagonale du carré BMC'C).

$BC = BM\sqrt{2}$

$BO' = \frac{BM\sqrt{2}}{2} = BN = BO$



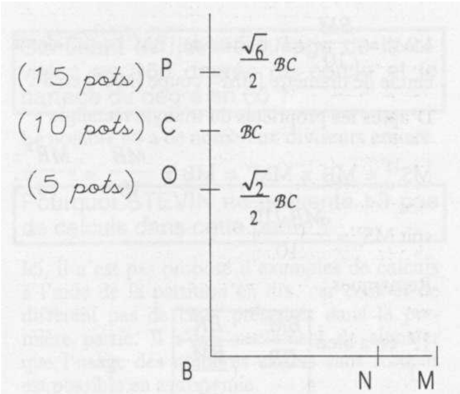
Remarque : calcul de NO

BNO triangle rectangle isocèle de sommet B donc $NO = BN\sqrt{2}$

$= (\frac{BM\sqrt{2}}{2})\sqrt{2} = BM$

Stevin conclut : « ... et **si NO suit alors égale à BC, l'opération est bonne**. »

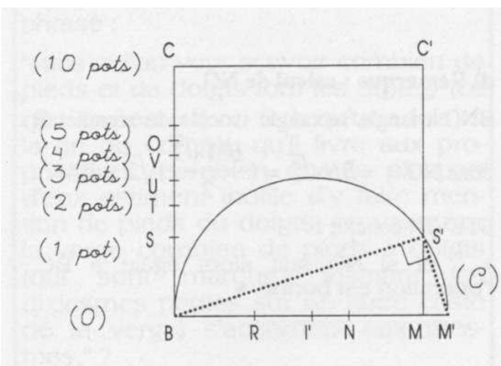
Début de la graduation :



BN donne BO correspondant à 5 pots.
NO donne BC correspondant à 10 pots.
NC donne BP correpondant à 15 pots.
BD est fourni par l'expérience (20 pots).
ND donne BQ correspondant à 25 pots,
etc.

Partage en 5 de [BO] et [OC].

a) Méthode classique de la recherche de la moyenne proportionnelle :



MM'' = $\frac{BM}{10}$: I' milieu de [BM'']. C demi cercle de diamètre [BM''] coupent [MC'] en S'. D'après les propriétés du triangle rectangle :

MS'2 = MB x MM'' = MB x $\frac{MB}{10}$ = $\frac{MB^2}{10}$, soit MS' = $\frac{MB\sqrt{10}}{10}$.

Remarque : 1°) on a bien $\boxed{\dfrac{BM}{BR} = \dfrac{BR}{(\frac{BM}{10})}}$

2°) BT = RS = $\sqrt{BR^2 + BS^2}$ = $\dfrac{\sqrt{20}}{10}$BM

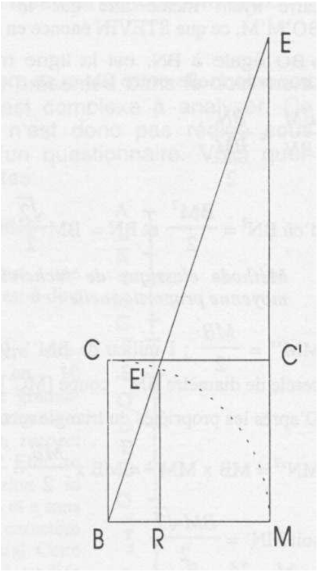
BU = RT = $\sqrt{BR^2 + BT^2}$ = $\dfrac{\sqrt{30}}{10}$BM

BV = RU = $\sqrt{BR^2 + BU^2}$ = $\dfrac{\sqrt{40}}{10}$BM

BO = RV = $\sqrt{BR^2 + BV^2}$ = $\dfrac{\sqrt{50}}{10}$BM = 5$\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ BM = $\dfrac{BM\sqrt{2}}{2}$

etc.

b) Autre méthode utilisant le théorème de Thalès et le théorème de Phytagore :



Construire le triangle BME rectangle en M avec ME = 3 BM. Placer E' sur [BE] tel que BE' = BM. Abaisser laperpendiculaire E'R sur (BM)

BE = $\sqrt{BM^2 + 9BM^2}$ = BM$\sqrt{10}$

$\dfrac{BE'}{BE} = \dfrac{BR}{BM}$ soit $\dfrac{BM}{BM\sqrt{10}} = \dfrac{BR}{BM}$

soit :

$$\boxed{\frac{BM}{BR} = \frac{BR}{\left(\frac{BM}{10}\right)}}$$

<u>ARTICLE IV,</u> DES COMPTES DE LA STÉRÉOMÉTRIE EN GÉNÉRAL :

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
L'article IV, en relation avec l'article III peut permettre d'aborder les liens entre le général et les cas particuliers :	
1. Pouvait-on se passer de l'article III et trouver les renseignements de résolutions des problèmes posés dans cet article à l'aide des conclusions du cas général de l'article IV ? *(on peut penser à l'analogie avec l'étude de la proportionnalité et étude des échelles et pourcentages à l'école élémentaire).*	Stevin situe les différences et liens entre cet article et le précédent, en précisant que la stéréométrie est plus générale que la gaujerie et qu'elle doit être étudiée séparément. *« gaujerie est stéréométrie »,... « toute stereometrie n'est pas gaujerie »*
2. Stevin précise ensuite que le système de calcul proposé peut se faire à partir de l'unité de base en vigueur à l'endroit où l'on travaille (verge ou aulne de la ville) et propose un exemple : problème posé : *« combien de matière dans une colonne quadriangulière rectangulière ? »* Exprimer le problème posé en langage actuel.	Calculer le volume d'un pavé de dimensions 0,32 x 0,24 x 2,35

3. L'article se termine par une explication supplémentaire destinée à ceux qui ne sont pas connaisseurs des règles de la stéréométrie et justifiant le résultat. Présenter en langage actuel la convention exprimée dans la note.	La verge en volume diffère de la verge en longueur : 1 verge correspond à 1000 cubes de côté 0,1 ; en conséquence de quoi 0,1 verge en volume correspond à 100 cubes de côté 0,1.
Quelle aide est utilisée pour justifier la lecture du résultat ? *(on peut s'intéresser ici au rôle de la référence à des situations connues pour éclairer une nouvelle connaissance)*	Pour développer ce fait, l'analogie est faite avec ce qui est connu pour les arpenteurs et le calcul de la superficie.

<u>ARTICLE V :</u> DES COMPUTATIONS ASTRONOMIQUES

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
Qu'est-ce qu'un "nombre mesurable par mesures entières" selon STEVIN ?	C'est l'ensemble des diviseurs de ce nombre.
Comment est justifié l'usage de la division en 360 degrés du cercle et le partage du degré en 60 ?	Le nombre 60 a de nombreux diviseurs entiers.
Pourquoi Stevin ne présente t-il pas de calculs dans cette partie ?	Ici, il n'est pas proposé d'exemples de calculs à l'aide de la partition en dix, car ceux-ci ne diffèrent pas de ceux présentés dans la première partie. Il s'agit seulement de signaler que l'usage des nombres entiers sans rompus est possible en astronomie.
Quelles analogies et quelles différences faites vous entre la proposition de STEVIN et celle de la convention à la fin du XVIII° siècle ?	STEVIN conserve les 360° alors que la convention va instaurer le grade et les 400 grades du cercle. (Sans succès à long terme). Sur l'appendice on ne parle que des nombres "degrés décimaux" (à relier avec l'heure décimale).

ARTICLE VI, DES COMPTES DES MAISTRES DES MONNOIES, MARCHANS ET DE TOUS EN GÉNÉRAL :

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
1. Préciser les situations où la règle présentée est applicable et comment il est prévu de prendre en compte les différentes unités de mesure en vigueur.	Tout d'abord, il est précisé que le contenu de cet article concerne n'importe quelle unité monétaire (l'unité de base utilisée sera celle en vigueur dans la ville où l'on se trouve) et que tout calcul se fera en utilisant la partition en 10 des unités de mesure utilisées par les marchands (unités de longueur, de capacités pour les liquides ou de capacités pour les matières sèches, unités de poids). On choisit l'unité de commencement, en fonction de la valeur monétaire utilisée ; puis, on relie les différentes unités de la mesure que fait le marchand (ici le poids) et la place des chiffres et du signe associé dans l'écriture sans rompus ; c'est ainsi que pour les poids on crée des subdivisions de poids de 0,5 ; 0,3 ; 0,2 et 0,1. permettant de peser en prime de livre, puis on divise à nouveau en dix pour peser en seconde de livre, etc..
2. Deux problèmes sont ensuite résolus comme démonstrations de l'usage de cette nouvelle façon de calculer : Sachant que 1 marc d'or vaut 36,53 livres, combien valent 8,354 marcs ? Si 2,3 aulnes coûtent 3,25 livres, que coûtent 7,53 aulnes ? Que penser du nombre et du choix des exemples choisis par Stevin ? *(on peut s'interroger ici du rôle des exemples (choix et nombre) pour dégager une règle générale.)*	Selon Stevin les deux exemples précédents suffisent à prouver que l'usage des nouveaux nombres et calculs est fort commode pour les marchands.

Étudier la démarche de résolution des problèmes posés (en particulier la façon de résoudre le problème de proportionnalité et la technique de construction de la règle de trois).	

CONCLUSION :

Dans la conclusion, Stevin exprime la différence qui peut être établie entre l'article 6 et les autres : il s'agit de l'usage social : Pour ce qui concerne la monnaie, il est nécessaire que la solution trouvée soit légitimée. C'est pourquoi il s'adresse aux autorités qui devraient permettre que l'usage de cette nouvelle partition des mesures s'ajoute à l'usage des partitions en vigueur. La proposition sera utile aux successeurs qui ne négligeront pas toujours les avantages de cette nouvelle méthode. Les hommes peuvent se transmettre entre eux ce nouveau savoir. Si l'utilité du sixième article n'est pas reconnue, il est toutefois possible d'utiliser les cinq autres.
La conclusion peut apporter l'occasion d'une réflexion plus générale sur le métier d'enseignant : - Comment transmettre un savoir nouveau ? ou Comment modifier les habitudes ? - Comment concilier anciennes habitudes et nouvelles techniques ? - Comment légitimer un nouveau savoir ?

3.5.Questions relatives a la démonstration chez Stevin

la Disme : questions sur ce que Stevin nomme démonstration	
1. Quel objectif se propose Stevin dans toute la seconde partie de la Disme ?	*de montrer que l'on peut opérer sur les nombres de Disme comme sur des entiers à quelques contraintes simples près, et que ce qu'on trouve en manoeuvrant ainsi correspond bien à ce qu'on aurait trouvé en utilisant des rompus.*

2. Dans la seconde partie de la Disme, Stevin pose quatre problèmes : lesquels ?	*Etant donnés nombres de Disme à ajouter : Trouver leur somme.* *Etant donnés nombres de Disme duquel on soustrait, et à soustraire : Trouver leur reste.* *Etant donnés nombres de Disme à multiplier et multiplicateur : Trouver leur produit.* *Etant donnés nombres de Disme à diviser et diviseur : Trouver leur quotient.*
3. Pour résoudre ces problèmes, Stevin annonce cinq étapes à chaque fois : explication du donné, explication du requis, construction, démonstration et conclusion. a) Caractérisez d'une phrase chacune des trois premières étapes.	*L'explication du donné consiste à présenter l'exemple numérique choisi. L'explication du requis consiste à présenter ce qu'on cherche. La construction consiste à présenter les actions simples à exécuter sur les nombres de Disme (actions que le lecteur n'a pas à faire : l'opération est présentée à côté).*
b) Quel choix didactique Stevin fait-il pour convaincre son lecteur de la validité de ce qu'il avance ?	*Il choisit de montrer que cela fonctionne sur un exemple numérique compliqué. Il se contente de montrer l'équivalence des écritures dans des cas particuliers.*
c) Pourquoi n'accepterait-on pas aujourd'hui de nommer "démonstration" sa démarche ? Quels noms pourrait-on utiliser pour la caractériser ?	*Aujourd'hui, dans le monde des mathématiciens, on se méfie des particularités ; on se dit (et on a des contre-exemples nombreux pour justifier cela) qu'un procédé qui réussit sur un exemple ne réussit pas nécessairement dans tous les cas ; on exige donc des calculs plus généraux, par exemple au moyen de lettres. On parlerait plutôt dans ce cas-ci de l'illustration d'un mécanisme sur un exemple. Pour un public non spécialiste, cela peut représenter une preuve convaincante.*
d) Quels arguments Stevin donne-t-il pour étayer ses "démonstrations" ?	*-ses propres définitions (références à la première partie de la Disme)* *-des références aux "problèmes de l'Arithmétique" (sans doute un ouvrage connu)*

e) Comment choisit-il ses exemples numériques ? Dans quel but ?	*Il les choisit assez compliqués de manière à envisager sur un seul exemple tous les cas difficiles.*

3.6. Questions de synthese

la Disme : questions de synthèse	
1. Donner les grandes idées de l'introduction de la Disme. En quoi les arguments de Stevin sont-ils habiles ?	*La disme est une proposition toute simple, mais très utile.* *La vie professionnelle est souvent compliquée par de laborieux calculs, dont la moindre erreur risque de porter préjudice à son auteur.* *La disme enseigne "d'expédier facilement sans nombres rompus tous comptes", comme si on opérait sur des entiers. Donc temps gagné, et soucis ôtés.* *La disme a déjà été expérimentée par des arpenteurs hollandais et ils en sont très contents.* *Il s'adresse, non pas à des mathématiciens, mais à des gens pour lesquels sa proposition serait vraiment utile. Il insiste sur la simplicité de la Disme, son utilité, et pas du tout sur le fait qu'il faut bousculer toutes ses habitudes si on veut vraiment l'exploiter dans son métier.*
	Il prévient justement toute réflexion à ce sujet en annonçant que des arpenteurs s'y sont déjà mis et en sont très contents.

2. Stevin s'adresse à des publics divers. Différencie-t-il ses explications selon les publics ? Argumentez votre réponse.	*Dans l'article III de l'appendice, il fait une démonstration qui manifestement s'appuie sur des connaissances de spécialistes en gaugerie ; et il dit "Nous avons fait la démonstration brève, parce que nous n'écrivons pas à Apprentis mais à Maîtres."* *Dans le Nota de l'article IV, : il dit "Quelqu'un ignorant (car c'est à celui-là que nous parlons ici) les fondements de la stéréométrie, ..."* *Dans le Nota de la proposition IV, on peut penser qu'il s'adresse à des mathématiciens quand il montre que certains nombres ne peuvent pas s'écrire en nombre de Disme, et aussitôt, il balaie ces nombres-là car dans les affaires des hommes, on n'a pas besoin d'une très grande précision.*
3. Essayez en quelques phrases de préciser les objectifs de Stevin et comment il s'y prend pour les atteindre..	*Il veut être compris de tous. Il veut donner à tous l'envie d'essayer sa méthode. Il veut que les gens abandonnent les sous multiples en douzième ou en quart, pour adopter les dixièmes, centièmes. Il aimerait aussi convaincre les "décideurs" au sujet des mesures officielles.* *Il multiplie les exemples pour faire comprendre ses définitions. Il se donne le mal de montrer comment on fera les quatre opérations, et même les racines carrées, toujours sur des exemples. Les petites difficultés sont vues dans les nota, sur des exemples.* *Il prend soin de s'adresser séparément aux différents corps de métier, pour ne pas ennuyer les uns avec les problèmes des autres.* *Et comme il sait que la force des habitudes est grande, il cherche à suggérer le moins de changements possibles : ainsi dans tous les corps de métier on gardera l'unité principale ; on ne changera que les sous multiples.*
4. Comment s'arrange-t-il pour que chacun puisse ne lire que ce dont il a besoin ?	*Il fait des paragraphes différents pour les différents métiers.*

5. Stevin se rend compte que ses suggestions (dans l'appendice) vont bouleverser des habitudes. Comment s'y prend-il pour atténuer cet effet ?	*Il indique des modifications minimes des instruments. Il insiste souvent sur le fait qu'on n'a pas besoin d'une très grande précision. Il donne des indications pour modifier les graduations non régulières de la gauge. Il aide à s'y retrouver pour les mesures d'aire ou de volume.*

3.7. A propos des unités dont il est question dans la disme

Mesures de tapisseries : l'aulne (origine latine ulna "avant-bras") : 3 pieds 7 pouces 8 lignes soit 1,118m
Mesures de tous tonneaux : l'âme : 100 pots. un pot : 2 pintes. une pinte : 2 chopines soit environ 0,93L

4. ANNEXES

4.1. Annexe 1 Etude de l'algorithme d'extraction de la racine carrée d'un entier.

4.1.1. Disposition du XVI^{ème} siècle

La *Racine quarrée* eſt fort peu différente de la Diviſion ; il faut ſeulement ſavoir la Table de multiplication quarrée qui eſt ici à côté.

Suppoſez qu'il fallût extraire la racine du nombre 119029, poſez ledit nombre comme ſi vous le vouliez diviſer ; mais il faut faire une ſéparation de deux en deux figures en reculant, & venant de droite à gauche, ainſi que vous voyez que j'ai fait à ces trois Exemples, quoiqu'il ne faille qu'une ſeule Regle.

Il faut commencer votre Regle à gauche, diſant la racine de 11 eſt 3. Poſez ce 3 en *deux endroits, au produit pour ſervir de racine, & ſous le* 11 *pour ſervir de diviſeur.* Diſant 3 fois 3 font 9, de 11 reſte 2 qu'il faut poſer ſur 11 en coupant ledit 11.

Voyez le premier Exemple.

Cela fait, doublez le 3 du produit & ce double 6 ſera la premiere figure de votre ſecond diviſeur que vous mettez ſous le 9, diſant en 29 combien de fois 6, il y eſt 4, qu'il faut mettre en *deux endroits, au produit pour ſervir de racine, & ſous le* 0 *pour ſervir de diviſeur*, ainſi ayant diviſé 290 par 64, reſtera 34 en haut.

Voyez le ſecond Exemple.

Enfin, Il faut toujours doubler le produit tel qu'il ſoit pour ſervir de diviſeur. Vous direz donc à 34 deux fois 4 font 8 qu'il faut poſer ſous le 2, & 2 fois 3 font 6 qu'il faut poſer ſous le 4 diviſeur précédent.

Après, dites en 34 combien de fois 6, il y eſt 5 fois qu'il faut mettre en *deux endroits, au produit pour ſervir de racine totale, & après le* 8 *pour ſervir au dernier diviſeur*, ainſi votre derniere diviſion étant faite, vous trouverez que 119029 auront pour racine 345.

La preuve ſe fait en multipliant les 345 de racine par 345, viennent en y ajoutant le 4 de reſte les 119029 dont on a extrait la racine quarrée.

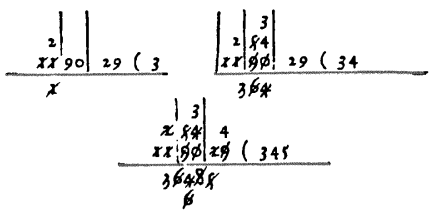
DE

Racine quarrée eſt un nombre, lequel étant multiplié par lui-même, produit ſon quarré juſte.

Preſque tous les Auteurs qui en ont traité forment la Table ſuivante d'une autre maniere ; mais celle-ci eſt la plus familiere & la plus facile, parce qu'elle eſt plus conforme au Livret de la Multiplication qui en eſt le fondement ; auſſi voyez au petit Livret, feuillet 40, *& au grand, feuillet* 43, *& vous trouverez la racine & ſon quarré à toutes les premieres lignes.*

Racine.		Quarrée.
1	*eſt la racine de*	1
2	*eſt la racine de*	4
3	*eſt la racine de*	9
4	*eſt la racine de*	16
5	*eſt la racine de*	25
6	*eſt la racine de*	36
7	*eſt la racine de*	49
8	*eſt la racine de*	64
9	*eſt la racine de*	81

EXEMPLES.



Maxime générale pour les reſtes, il faut mettre le haut pour le deſſus de la Fraction, & doubler le produit 345, mais y ajouter 1, & ſera le deſſous de la Fraction qui ſera $\frac{4}{691}$, qui n'eſt preſque rien.

T

4.1.2. Disposition actuelle

Nous prenons le même exemple que celui proposé dans le document joint.

Considérons le nombre 119029.
Il est compris entre 10^5 et 10^6, sa racine est donc entre 100 et 1000, elle a trois chiffres et peut donc s'écrire 100c+10d+u

On cherche donc à déterminer c, d, u tels que
$= (100c+10d+u)^2 + \alpha$ avec α petit.

$$= 10000c^2+2\times 100c\times 10d+100d^2+2\times 100c\times u+2\times 10d\times u+u^2+\alpha$$
$$= 10000c^2+(2\times 10\times c+d)\times d\times 100+[2\times(100c+10d)+u]\times u+\alpha$$

L'algorithme consiste à retrancher progressivement les différents termes à 119029.

	119029	345	on cherche c tel que c^2 soit juste inférieur à 11, c'est 3, on place 3
on retire 90000	- 90000		
	29029	6•×• = • est donc 4 64×4 = 256	on cherche d tel que (2×10×c+d)×d soit proche de 290 pour cela on double 3 et on cherche d d est 4, on place 4 à côté du 3 sur la première ligne
on retire 25600	- 25600		
	3429	68•×• = • est donc 5 685×5 = 3425	on cherche u tel que [2×(100c+10d)+u]× u soit proche de 3429 pour cela on double 34 et on cherche u u est le chiffre 5, on place 5 en position unité sur la première ligne
on retire 3425	- 3425		
	4		α est égal à 4

On peut donc conclure 119029 = 3425^2 + 4

4.2. Annexe 2 : Glossaire pour lire le texte original

AINS : mais
AME : unité de capacité pour les tonneaux
APPERT : apparaît, devient visible
ARPENT : Ancienne mesure agraire divisée en 100 perches, variable selon les localités de 35 à 50 ares unité agraire (pour mesurer la "capacité" des terres), puis unité de longueur et de superficie.
AUNE : unité de longueur utilisée pour les tissus. Mesure de longueur, variable selon les localités (valant 1,188 m à Paris)
AUTREFOIS : très souvent utilisé dans ce texte, avec le sens de "une fois de plus" ou "de même"
BRIEF : "en brief" pour "en résumé" et "de brief" pour "bientôt"
CIFFRE : chiffre
COMBIEN QUE : quoique
COMPUTATATIONS : calculs (le mot computer est bien français !)
CORPS : volume
DEBURA (ce qui se) : ce qui se devra
DEFAUT : "il défaut" pour "il manque"
DEPECHER : contraire de empêcher, prendre au piège ; dépêcher, c'est libérer, avec une idée de rapidité ; ici, dépêcher les calculs, c'est les mener à bien, rapidement
ESMEU : ?? (ému ?)
EXPEDIER : même idée que dépêcher, c'est dégager des entraves d'un piège, avec une idée de rapidité, le faire vite pour s'en débarrasser
FESTU : chose de peu de valeur (cf fêtu de paille)
GAUJEUR : celui qui jauge les tonneaux (en mesure la capacité au moyen d'une jauge)
GETTONS : jetons, qui servaient à faire des opérations sur table (le jeton ne prend sa valeur que par la place qu'il occupe sur la table ; cette table s'appelait "abaque" ; les gens qui calculaient avec des jetons, des "abacistes")
IMBECILLITE : faiblesse (pas de nuance péjorative)
METIER : "avoir métier de" pour "avoir besoin de" ; "être de métier" pour "être nécessaire"
MOLESTE : pénible, désagréable
MULTINOMIE : ?
MULTITUDE nombre de multitude des signes ?
NOISE : querelle, dispute
PARTIR : partager
PIEDS : ancienne mesure de longueur (32,5 cm)
PHILAUTIE : complaisance pour soi-même, présomption
PROGRESSION : "dixième progression" correspond à la numération décimale de position ; voir aussi "soixantième progression
QUELQUE : quelconque dans la phrase "je décris quelque nombre"
ROMPU : fraction de l'unité

SI : se construit avec un subjonctif quand la supposition est irréelle ou éventuelle : "si le signe fût inégal" pour "si le signe était inégal"
SIGNER : marquer
STEREOMETRIE : art de mesurer les volumes. Partie de la géométrie qui traite des solides
VERGE : unité de longueur et de superficie. Ancienne mesure agraire valant le quart d’un arpent.

Index des sigles

APMEP	Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
CAFIPEMF	Certificat d'aptitude aux actions pédagogiques spécialisées d'adaptation et d'intégration scolaires
CDDP	Centre Départemental de Documentation Pédagogique
CNDP	Centre National de Documentation Pédagogique
CE1	Cours élémentaire $1^{ère}$ année (élèves de 7 à 8 ans)
CE2	Cours élémentaire $2^{ème}$ année (élèves de 8 à 9 ans)
CM1	Cours moyen $1^{ère}$ année (élèves de 9 à 10 ans)
CM2	Cours moyen $2^{ème}$ année (élèves de 10 à 11 ans)
COREM	Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Talence près de Bordeaux (sigle local)
CP	Cours préparatoire (élèves de 6 à 7 ans)
CRPE	Concours de recrutement des Professeurs des Écoles
Cycle 2, **Cycle 3**	Le cycle 2 regroupe les classes de CP et CE1 Le cycle 3 regroupe les classes de CE2,CM1 et CM2.
ERMEL	Équipe de didactique des mathématiques de l'INRP
F.P.	Formation Professionelle
FP2	Formation professionnelle 2ème année
GS	Classe de grande section de maternelle (élèves de 5 à 6 ans)
I.N.R.P	Institut National de Recherches Pédagogiques
IEN	Inspecteur de l'Éducation Nationale (pour l'école primaire)
IFM	Institut de formation des maîtres (sigle local)
IMFAIEN	Instituteur Maître Formateur Auprès de l'Inspecteur de l'Éducation Nationale. Ce sont des conseillers pédagogiques
IMF	Instituteur Maître Formateur
IREM	Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
IUFM	Institut Universitaire de Formation des Maîtres Crée en 1991, pour assurer la formation des professeurs d'école (primaire : élèves de 2 à 11 ans) et des professeurs de collège et lycée (secondaire : élèves de 11 à 18 ans).
MAFPEN	Mission Académique de la Formation des Personnels de l'Éducation Nationale
MS	Classe de moyenne section de maternelle (élèves de 4 à 5 ans)
Normaliens	Stagiaires en formation dans les Écoles Normales
P.E.	Professeur des écoles
PEMF	Professeur des écoles Maître Formateur
P.E.N	Professeur d'École Normale
PE1, PE2	Professeur des écoles $1^{ère}$ ou $2^{ème}$ année
PIUFM	Professeur en Institut Universitaire de Formation des Maîtres

PS	Classe de petite section de maternelle (élèves de 3 à 4 ans)
Q.C.M.	Questionnaire à Choix Multiple
ZEP	Zone d'Éducation Prioritaire

Index des sigles en AIS en 2002

AIS	Adaptation et intégration scolaires
CAPSAIS	Certificat d'aptitude aux actions pédagogiques spécialisées d'adaptation et d'intégration scolaires, en 1987, se substitue au CAEI (Certificat d'Aptitude à l'éducation des enfants et adolescents déficients ou inadaptés)
CAT	Centre d'aide par le travail (pour adultes handicapés)
CCPE	Commission de circonscription préélémentaire et élémentaire
CCSD	Commission de circonscription du second degré
CDES	Commission départementale d'éducation spéciale
CLAD	Classe d'adaptation
CLIS 1	Classe d'intégration scolaire pour handicapés mentaux
CLIS 2	Classe d'intégration scolaire pour handicapés auditifs
CLIS 3	Classe d'intégration scolaire pour handicapés visuels
CLIS 4	Classe d'intégration scolaire pour handicapés moteurs
CMPP	Centre médico-psycho-pédagogique
COTOREP	Commission technique d'orientation et de reclassement professionnel
EREA	Établissement régional d'enseignement adapté
GAPP	Groupe d'aide psycho-pédagogique
IME	Institut Médico-Educatif antérieurement, il s'agissait d'un établissement comportant un IMP + un IMPro. Dorénavant, tout établissement avec **SSEGS** (Section de soins et d'éducation générale spécialisés) ou **SSEPS** (Section de soins et d'éducation professionnelle spécialisés) est appelé IME
IMP	Institut médico-pédagogique (de 6 à 14 ans) ; ils sont devenus des IME (Instituts médico-éducatifs) avec **SSEGS** (Section de soins et d'éducation générale spécialisés)
IMPRO	Institut médico-professionnel (de 14 à 20 ans) : ils sont devenus des IME (Instituts médico-éducatifs) avec **SSEPS**
IR ou IRP	Institut de rééducation (pour troubles du comportement)
LEA	Lycée d'enseignement adapté
LP	Lycée professionnel
RASED	Réseaux d'aides spécialisées aux élèves en difficulté (écoles maternelle et élémentaire)
SEGPA	Section d'enseignement général et professionnel adapté (collèges) . La SEGPA se substitue à la SES (Section d'Éducation Spécialisée)
SESSAD	Service d'éducation et de soins spécialisés à domicile (pour handicapés mentaux ou troubles du comportement)
UPI	Unité pédagogique d'intégration (collèges et lycées)

Voici la liste des auteurs avec leur laboratoire de recherche et leur lieu d'exercice en Janvier 2003.

ANDRÉ Françoise	École Blaise Pascal Perpignan	IUFM de Montpellier *Perpignan*
AURAND Catherine		IUFM de Versailles *St Germain en Laye*
BARATAUD Dominique		CNEFEI de Suresnes
BEAUFORT Dominique		IUFM d'Orléans-Tours *Chartres*
BETTINELLI Bernard	IREM de Besançon	IUFM Franche-Comté *Besançon*
BOLON Jeanne	Équipe DIDIREM, Université Paris 7	IUFM de Versailles *Antony*
BONNET Nicole	IREM de Dijon, COPIRELEM	IUFM de Dijon
BOULE François	IREM de Dijon	CNEFEI de Suresnes
BRIAND Joël	DAEST Université V. Segalen Bordeaux 2, COPIRELEM	IUFM d'Aquitaine *Bordeaux*
BRONNER Alain	LIRDEF	IUFM Montpellier *Montpellier*
BROUSSEAU Guy	DAEST Université V. Segalen Bordeaux 2	Professeur émérite des Universités IUFM d'Aquitaine
BUTLEN Denis	Équipe DIDIREM, Université Paris 7, IREM paris 7	IUFM de Créteil *Melun*
CHEVALIER M.Claude	Professeur au lycée de Cahors	IUFM de Toulouse jusqu'en 1994
COLMEZ François	IREM paris 7	Université Paris 7
COULET Jean Claude	Laboratoire de Psychologie du Développement et de l'Education	Maître de conférences, Université de Rennes 2
DESCAVES Alain	IREM de Bordeaux COPIRELEM	IUFM d'Aquitaine *Périgueux*
DOUADY Régine	Université Paris 7 Professeur honoraire	
DUCORAIL J.Claude		IEN de Gironde
EYSSERIC Pierre	IREM d'Aix –Marseille COPIRELEM	IUFM d'Aix Marseille *Aix*
FENICHEL Muriel		IUFM de Créteil *Livry Gargan*
FREMIN Marianne		IUFM Versailles *Antony*
GIRMENS Yves	IREM de Montpellier COPIRELEM	IUFM de Montpellier Perpignan
HERVIEU Claudine		IUFM de Caen

HOUDEMENT Catherine	Équipe DIDIREM, Université Paris7 COPIRELEM, IREM de Hte Normandie	IUFM Haute Normandie *Rouen*
HUGUET François	Professeur Honoraire, IREM de Quimper	IUFM de Quimper *Quimper*
KUZNIAK Alain	Équipe DIDIREM, Université Paris7 IREM de Strasbourg	IUFM de Strasbourg *Strasbourg*
LE POCHE Gaby	IREM de Bretagne COPIRELEM	IUFM de Bretagne *Rennes*
LEBERRE Maryvonne	IREM de Lyon	Professeur en collège Charcot à Lyon
OYALLON Jean Louis	Professeur en lycée à Nouméa	IUFM d'Aquitaine jusqu'en 1996
OZAN Gérard		IUFM Versailles *Antony*
PARZYSZ Bernard	GReDiM (IUFM Orléans-Tours) Équipe DIDIREM, Université Paris7	IUFM Orléans Tours
PAUVERT Marcelle		IUFM de Créteil Professeur honoraire
PEAULT Hervé	Décédé en 1997	IUFM des Pays de la Loire
PELTIER Marie Lise	Équipe DIDIREM, Université Paris7 COPIRELEM, IREM de Hte Normandie	IUFM Haute Normandie *Rouen*
PERRIN -GLORIAN Marie-Jeanne	Équipe DIDIREM, Université Paris 7	IUFM Nord-Pas-de-Calais
PEZE Christiane	Formatrice AIS	IUFM d'Aquitaine
RIMBAUD Claude	IREM de Rennes Professeur honoraire	IUFM de Bretagne *St Brieux*
ROYE Louis	IREM de Lille	IUFM de Lille Professeur honoraire
SALIN Marie Hélène	DAEST université V.Segalen, Bordeaux2	IUFM de Bordeaux *Bordeaux*
TAVEAU Catherine	IREM Paris 7, COPIRELEM	IUFM de Créteil *Bonneuil*
VERGNES Danielle		IUFM de Versailles *Antony*

Présentation succincte du système éducatif français

AIS

R. A .S .E. D.

C
L
I
S

École maternelle
(non obligatoire)
âge : de 2 ans à 6 ans

PS – MS - GS
Cycle 1

École élémentaire
(durée 5 ans)
de 6 ans à 11 ans

GS CP CE2
Cycle 2

CE2 CM1
CM2
Cycle 3

P R I M A I R E

Collège
SEGPA

UIP

Collège
(durée 4 ans)
de 11 ans à 15 ans

Lycée
Professionnel
(durée 2 ans)
- - - - -
(durée 2 ans ou 4 ans)

Lycée
(durée 3 ans)
de 15 ans à 18ans

S E C O N D A I R E

Cursus pour devenir professeur des écoles

Lycée
Baccalauréat

Enseignement supérieur
(durée 3 ans)
Licence (ou diplôme équivalent)

universitaire

(durée 2 ans)
1ère année → concours
2de année → certification

IUFM

CONCERTUM

Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques

En hommage à Hervé Péault

Hervé Péault était professeur de mathématiques et formateur d'enseignants au site d'Angers de l'IUFM des Pays de Loire. Il nous a quittés en 1997 des suites de ce qu'il est convenu d'appeler une longue maladie. Ses travaux sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et la formation des professeurs des écoles furent nombreux et exemplaires. Son implication au sein de la COPIRELEM débuta dans les années 1980 et devint chaque année plus conséquente. Il fut un des moteurs de la dynamique de publication dans laquelle s'engagea la COPIRELEM dans les années 1990 pour prouver au monde nouveau des IUFM que la formation mathématique des professeurs des écoles avait déjà une histoire et une culture.

Préface

Guy Brousseau

La Commission Permanente des Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, pour l'École Élémentaire a trente ans. Elle aurait pu s'appeler platement COPIREMEE, mais COPIRéleM évoquait mieux sa spécificité, à la condition de mettre le M final en majuscule pour signifier « Mathématiques ». Vive donc la COPIREleM, sa longévité est un indice de sa pertinence et de son utilité. Comme son nom l'indique la COPIRELEM est une commission Inter-IREM. Elle a emprunté aux IREM leur indépendance par rapport aux institutions d'enseignement, leur autorité mathématique et leurs ressources. En retour elle a montré de façon exemplaire ce que pouvaient être des rapports sains entre les protagonistes de l'éducation, en exigeant davantage d'études, en résistant au prosélytisme inconsidéré, en stimulant la réflexion et les échanges. Elle a contribué au rayonnement des IREM parmi une population importante, difficile à atteindre pour eux, à leur réputation et à leur influence aussi bien lorsqu'elle s'exprime auprès des institutions, que lorsqu'elle publie ses activités (annales, comptes-rendus du séminaire et du colloque annuels).

J'ai eu la chance d'être de ceux qui l'ont conçue, qui l'ont fait naître, et qui l'ont accompagnée dans sa jeunesse. D'autres ont pris la relève mais j'ai suivi sa progression du coin de l'œil. C'est sans doute à ce titre que ses responsables actuels me font l'honneur de me demander de préfacer cet ouvrage, témoignage de leurs travaux.

C'est donc avec fierté que je présente aux lecteurs ce recueil de textes choisis parmi les plus représentatifs de l'activité de la commission depuis dix ans. Il faut remercier Catherine TAVEAU et Yves GIRMENS qui les ont réunis et les membres de la commission qui les ont produits.

Ce témoin de la vitalité de l'institution me donne ainsi le bonheur de retrouver aujourd'hui la COPIREleM dans sa maturité, et de constater qu'elle continue sa tâche avec courage et compétence, malgré les difficultés que je soupçonne. Je les soupçonne ces difficultés, mais je ne les connais plus, ce qui me donne quelques scrupules. Mon avis peut-il être très pertinent pour un jeune chercheur formateur dans un IUFM ?
Mon avis peut être pas, mais mon témoignage ?
Je veux ici rappeler la grandeur et la difficulté de la mission de cette commission, et sa gloire, aussi car elle a accompli à petit bruit, de grandes choses.

L'histoire d'une institution ne lui est utile que dans la mesure où la vérité historique y est accompagnée de façon heureuse par une certaine composante

mythique. Le mythe est constitué d'abord par les espérances des acteurs successifs - par les intentions réelles ou supposées qu'ils ont affichées, ou que leurs successeurs leur ont prêtées - ensuite par les justifications que se sont données les uns et les autres suivant les fortunes de la vie. Je laisse à d'autres le soin de faire une histoire de la COPIREleM qui sera plus vraie et plus utile.

Je veux seulement évoquer ici quelques uns des espoirs que j'avais placés en elle. Mais rien ne se serait fait si ces espoirs n'avaient pas été partagés et enrichis par de nombreux collègues. Je vais donc parler au nom de tous ceux qui, par la COPIREleM, ont voulu faire, dans les années 70, d'un mythe une réalité. J'espère qu'ils me pardonneront ce que je leur emprunterai ou que je leur prêterai indûment.

Officiellement la commission avait une mission de concertation entre les principaux partenaires de l'enseignement des mathématiques à l'école élémentaire : le ministère (la direction des écoles), ses inspecteurs et ses moyens d'action (Institut Pédagogique National par exemple), les instituteurs, les formateurs en mathématiques et les mathématiciens, mais aussi les novateurs et les éditeurs qui par le biais des médias tenaient l'opinion en haleine.
Elle est pendant longtemps (et peut être encore) un exemple de coopération entre ces divers acteurs. Je veux rendre hommage ici en particulier à l'Inspecteur Général Duma qui prit part aux travaux et fut pour la commission un soutien sans faille. Mais il ne fut pas le seul.
Les vertus principales qui ont fondé la crédibilité de la commission sont sans aucun doute le sens de ses responsabilités, son réalisme et son ambition scientifique.

Trop faible pour intervenir sur les orientations et sur les programmes, elle a investi le champ des recherches, des expérimentations et du développement des réformes décidées. A l'époque, sous diverses impulsions, les « recherches » et les « expérimentations » pullulent et donnent lieu à des surenchères étonnantes. Les novateurs attendent que les IREM leur servent de caisse de résonance, les autres espèrent des conventions et des exemples pour fixer ce qui est raisonnable et rejeter le reste. La COPIREleM débat et se débat pour faire émerger ou pour produire des aides, des commentaires, des exemples… Elle essaie en même temps de développer des recherches et de limiter la prolifération en augmentant les exigences éthiques et scientifiques à l'égard des promoteurs de recyclage.

Il apparaît bientôt à certains d'entre nous que le « bon sens » sera insuffisant pour prendre sérieusement en compte ou pour rejeter les objurgations péremptoires des « scientifiques » de divers domaines qui se pressent sur le marché de l'éducation.

La formation des instituteurs aux mathématiques et à leur enseignement devait être le creuset où les connaissances spécifiques nouvelles – appelons les « didactiques » - devaient naître et trouver leur territoire : il était impossible d'ignorer que les mathématiques enseignées dans la scolarité obligatoire doivent être aménagées en fonction de nombreux critères autres que mathématiques (tenir compte de l'âge des élèves ou de la fonction civique de l'enseignement par exemple). L'application brutale de la psychologie, même génétique, pas plus que les mathématiques elles-mêmes ne peuvent fournir une ingénierie utilisable et justifiable etc.

La formation mathématique des instituteurs devait donc inclure des savoirs spécifiques à la fois théoriques, techniques et pratiques. Lesquels ? Ce fut un travail constant de la commission que de promouvoir des recherches et de les discuter, mais aussi de lutter contre la tendance à l'émiettement, de les synthétiser et de leur donner un cadre théorique pour en tirer des éléments de formation utilisables.

Il apparaissait inéluctable à terme que la formation des instituteurs deviendrait une activité universitaire. La question du rattachement des connaissances spécifiques à une discipline se posait de façon aiguë, nous avons considéré que le rattachement aux mathématiques elles-mêmes s'imposait. On en discute encore.

En fait, la principale fonction de la commission est une fonction didactique en direction de tous ses partenaires.

- En direction des instances du ministère : leur légitimité est essentiellement politique, professionnelle et disciplinaire, mais le vocabulaire et les concepts qu'ils ont la possibilité effective d'utiliser ne sont pas ceux que les recherches pourraient leur fournir, quand bien même ils les connaîtraient. Disons que les conditions macrodidactiques qui leurs sont imposées ne s'articulent pas encore très bien avec les propositions microdidactiques que la recherche a été en mesure de leur fournir depuis trente ans. De ce fait, leur volonté et leur capacité à faire évoluer le discours des professeurs dans un sens contrôlé par des instances scientifiques sont très limitées.
- En direction des formateurs d'instituteurs puis des professeurs des écoles. C'est le travail le plus évident, celui qui a laissé le plus de traces. D'abord la formation des anciens professeurs d'écoles normales, puis celle des nouveaux formateurs, PRAG ou maîtres de conférences, ceux du moins qui pensent plus à leur travail qu'à leurs regrets de n'être pas dans une « vraie » université ! Ainsi le « séminaire des nouveaux formateurs » mis en place en 1997 réunit annuellement les membres de la COPIRELEM et une trentaine de nouveaux formateurs en IUFM.
- En direction des chercheurs en didactique des mathématiques par la même occasion.
- En direction des professeurs de mathématiques des autres niveaux. L'influence est claire, forte et durable.

En ce qui concerne les mathématiciens le bilan est plus contrasté. Après le départ d'une génération de grands mathématiciens tout dévoués à l'enseignement primaire et respectueux de ses pratiques, nous en avons connu d'autres. La COPIREleM a refusé de cautionner leurs déclarations fracassantes, hasardeuses et finalement irresponsables. Ce n'est pas son moindre titre de gloire. Son honnêteté et son sérieux lui ont valu quelques difficultés, le recrutement des mathématiciens didacticiens s'est un instant tari, mais grâce aux IREM l'institution a survécu et poursuit sa tâche.

Aujourd'hui, la COPIREleM poursuit sa tâche de rencontres entre les différents partenaires de l'enseignement élémentaire (enseignants, inspecteurs, formateurs, mathématiciens, et chercheurs en didactique), de modération des débats entre l'école et la noosphère, d'initiation d'expérimentations et de propagation de recherches.

Introduction

Depuis 30 ans, la COPIRELEM (Commission Permanente des IREM pour l'enseignement des mathématiques à l'École Élémentaire) a mené, conformément à sa mission, une réflexion constante sur l'enseignement des mathématiques à l'école et sur la formation des maîtres devant assurer cet enseignement. L'engagement, dans cette commission, de formateurs émanant des IREM de diverses académies a permis le partage et la diffusion de travaux issus de recherches et d'expériences concernant l'enseignement des mathématiques à l'école.

L'action de la COPIRELEM s'est poursuivie, avec un souci de continuité, pendant la transformation des Écoles Normales en Instituts Universitaires de Formation des Maîtres. Ainsi les acquis, en matières d'expériences et de connaissances sur l'enseignement des mathématiques à l'école, élaborés conjointement dans les groupes élémentaires des IREM et au sein des Écoles Normales, ne se sont pas perdus et ont pu être actualisés afin d'alimenter les actions de formations dans le cadre des IUFM.

C'est ainsi qu'au cours de ces trente années, la COPIRELEM a organisé, sur le plan national, 30 colloques, 6 stages et 5 séminaires, réunissant des milliers de formateurs provenant, jusqu'en 1991 des Écoles Normales puis des IUFM, et aussi d'instituts de formation d'autres pays de l'espace francophone.

Les colloques et stages nationaux ont permis la mutualisation des expériences ainsi que la diffusion des travaux de recherche sur l'enseignement des mathématiques à l'école. Ils ont contribué, au fil des années, à stabiliser un corps de connaissances et à promouvoir une culture commune des formateurs pour l'enseignement des mathématiques à l'école.

Par ailleurs, depuis six ans maintenant, la COPIRELEM s'est également attachée à assurer la formation des formateurs nouvellement affectés en IUFM. Cette formation organisée, au sein de séminaires nationaux, permet à la commission de transmettre les connaissances constituées par la communauté des formateurs. Elle vise ainsi l'amélioration de la formation des professeurs des écoles.

Chacune de ces manifestations a donné lieu à la publication d'actes réunissant les réflexions, propositions de travaux, compte-rendus d'expériences et de recherches. La lecture de ces documents met en évidence la diversité des domaines de savoirs auxquels fait appel la formation des maîtres en mathématiques. Elle montre une évolution des questions didactiques et pédagogiques étudiées et des réponses qui leur ont été apportées.

Après ces trente années de travaux et de recherches, les membres de la COPIRELEM ont estimé le moment venu de faire une synthèse du capital de connaissances accumulées pendant toutes ces années.

Cette synthèse vise aussi à conserver la mémoire de l'évolution des questions de formation. Capitaliser et diffuser toutes ces connaissances sont les deux objectifs que cet ouvrage de synthèse a l'ambition de réussir.

Les membres de la COPIRELEM, à la fois animateurs IREM et professeurs en IUFM, ont sélectionné les articles issus de ses publications qui présentent un intérêt pour la formation à l'enseignement des mathématiques à l'école. Certains articles constituent des repères intéressants sur l'histoire de la pensée didactique, d'autres restent des ressources pertinentes pour la formation. Le présent ouvrage est l'aboutissement de ce travail de sélection et de synthèse mené par les 19 formateurs, membres de la COPIRELEM.

Cet ouvrage rassemble des contributions d'auteurs venus de différents horizons. C'est ce qui en fait son originalité.

Il est composé de compte-rendus de situations d'enseignement des mathématiques à l'école primaire, et d'actions de formation développées par les différents formateurs dans le cadre de leur enseignement. Il comporte également des articles de chercheurs, issus de la didactique des mathématiques, de la psychologie cognitive ou de diverses branches des sciences de l'éducation.

Par leur participation à un colloque ou à un séminaire en tant que conférenciers, animateurs d'ateliers ou auteurs de communications de leurs travaux de recherche, tous ces auteurs ont apporté leur pierre à l'édifice des connaissances professionnelles dans le domaine de la formation des maîtres à l'enseignement des mathématiques.

La variété des travaux présentés témoigne de la fécondité de la réflexion menée depuis trente ans par les formateurs. La COPIRELEM s'est donnée pour tâche de la capitaliser.

Dans cet ouvrage, la COPIRELEM espère que tout formateur ou chercheur, s'intéressant à la formation en mathématiques des enseignants trouvera matière à nourrir sa réflexion, ses recherches et à enrichir son enseignement.

La parution de cet ouvrage marque une étape importante dans la vie de la COPIRELEM en lui permettant de renforcer le réseau des formateurs en didactique des mathématiques.

Il appartient à ce réseau, constituant une force institutionnelle non négligeable, de poursuivre sa mission première : promouvoir et améliorer l'enseignement des mathématiques à l'école primaire.

Yves Girmens et Catherine Taveau
Responsables de la COPIRELEM

SOMMAIRE

TOME 2 - Démarches et savoirs à enseigner

TOME 3 - Outils de formation

Les stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques.

Alain Kuzniak

Extrait des Actes du XXIème Colloque de la COPIRELEM- Chantilly 1994.

Cet article présente une classification des stratégies de formation utilisées par les formateurs d'enseignants. Après avoir défini le système étudié, trois stratégies sont plus particulièrement présentées : les stratégies de monstration, d'homologie et de transposition.
En conclusion, l'auteur envisage des critères de choix stratégiques et une articulation possible entre ces diverses stratégies.

Introduction

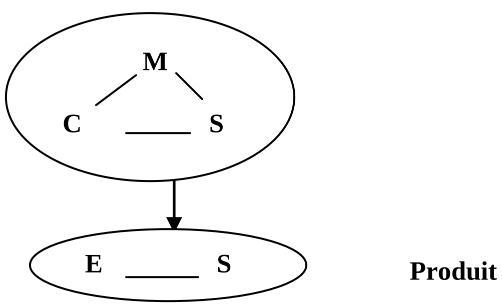
L'objet de cette contribution est l'étude, dans une perspective didactique, de la formation en mathématiques reçue dans les centres de formation par les maîtres du premier degré.
La réflexion sur la formation des maîtres doit prendre en compte deux niveaux de savoir et de compétences. Le premier concerne le savoir mathématique des élèves de l'école primaire et il fait classiquement l'objet d'études en didactique des mathématiques. Le second niveau concerne les maîtres qui doivent à la fois dominer le savoir mathématique propre à leurs élèves et un autre savoir qui concerne la transmission des connaissances à leurs élèves. La didactique des mathématiques ne prend généralement pas en compte l'acquisition des connaissances des maîtres et ignore de ce fait une partie de la genèse du processus de transposition opéré par ces derniers dans leur enseignement.
D'autre part, la formation des maîtres a un caractère spécifique. Dans les centres de formation, les apprenants ne correspondent à aucun des publics usuels de la didactique. Il s'agit en effet d'adultes qui ont fini leurs études universitaires (D.E.U.G., licence, suivant les différents plans ministériels). Comment enseigner les mathématiques à des adultes qui, même s'ils souffrent de lacunes en mathématiques, possèdent un niveau de raisonnement bien supérieur à celui des enfants ? La réponse à cette question est liée étroitement au fait que les étudiants dont il s'agit vont eux-mêmes devoir enseigner les mathématiques à des élèves. Ainsi le futur enseignant doit connaître ce qu'apprend un enfant et comment il l'apprend. Il doit aussi savoir comment faire apprendre à l'enfant. Le formateur d'enseignants est chargé d'apporter ces connaissances à ces étudiants. Comment procède-t-il et quelle stratégie met-il en place pour gérer la transmission de ces différents savoirs ?

Ces questions complexes peuvent être envisagées de différents points de vue. Nous allons ici présenter une approche qui vise une classification des stratégies des formateurs. Ceci afin de parvenir à décrire et à comprendre les différentes formes d'enseignement effectivement utilisées dans les centres de formation. II ne s'agit pas ici de définir a priori les modalités d'une formation "idéale" ou "souhaitable" mais de constater et d'analyser ce qui existe.
Cette approche nous a permis de faire apparaître les différents savoirs réellement scolarisés au sein de l'institution de formation. Nous avons aussi, à travers notre typologie, pu observer le rôle joué par les mathématiques, la didactique ou la pédagogie dans les différentes stratégies. Cela nous permet d'aborder le problème de la transposition de la didactique dans une perspective qui ne réduit pas la formation des maîtres à ce phénomène.

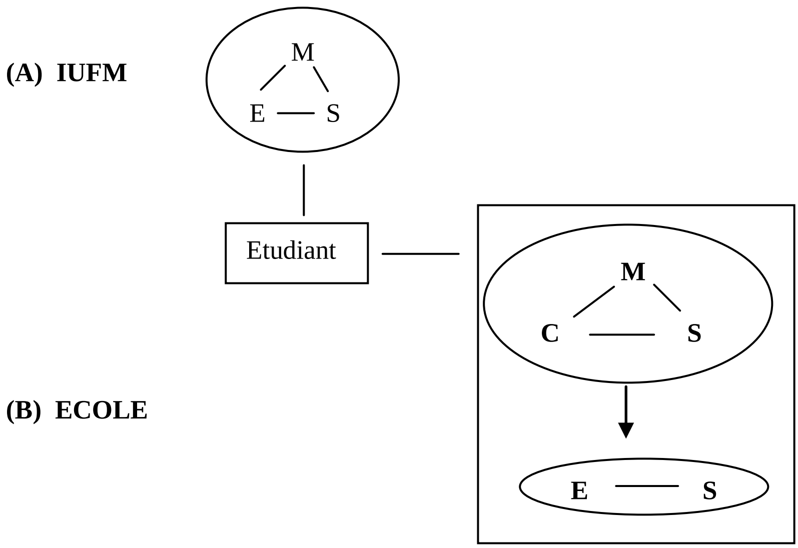
I. Le système observé et les savoirs mis en jeu.

1. Nature du système observé.

La recherche des stratégies et leur description impliquent une connaissance précise du système dans lequel les formations s'inscrivent. Or, le système de formation des maîtres est particulièrement complexe et fluctuant. D'abord, il est soumis au système éducatif général dont on connaît la sensibilité à l'environnement social et politique qui se manifeste par des changements de ministres et par de fréquentes réformes des programmes qui vont directement influer sur le contenu de la formation des enseignants. Ensuite, l'Institution de formation a considérablement évolué en peu de temps. J'ai pris comme point de départ de mon étude la réforme de 1979 qui institutionnalisait une formation à l'enseignement primaire en trois ans. Mais, il faut signaler la réforme de 1985, et pour finir celle de 1991 qui substitue les I.U.F.M. aux Ecoles Normales. Ces transformations portent à la fois sur la durée des études, sur le niveau de recrutement et sur le statut des formateurs dont elles modifient les tâches. Ainsi, la réflexion sur la formation s'inscrit-elle dans un environnement instable qui complique nettement le travail de l'observateur.
Nous considérons le système de formation comme un système didactique. De manière classique, nous retenons comme élément de base de ce type de système le triplet (M-C-S) constitué par l'enseignant, la classe et un savoir mis en jeu. Ce triplet est plongé dans un milieu qui lui impose de nombreuses contraintes. La finalité que nous assignons au système de formation, sa "production", sera la communication d'un savoir aux étudiants qui se traduit par l'augmentation de leurs connaissances individuelles. Cette conception peut se représenter ainsi :



Dans notre étude, le processus paraît se dédoubler car la fonction de l'I.U.F.M. en tant que système de formation est de faire comprendre aux étudiants un autre système de formation, celui de l'enseignement élémentaire.
Ainsi apparaissent deux systèmes emboîtés (A), le centre de formation, et (B), l'école élémentaire, dont l'organisation est homologue. Ceci n'entraîne pas leur identité car les composants du système et le milieu dans lequel ils agissent sont très différents.
On peut alors schématiser cette articulation par la figure plus complexe suivante :



2. Nature des savoirs mis en jeu.

Les connaissances que doivent acquérir les étudiants qui souhaitent devenir enseignants englobent des compétences qui renvoient à différents savoirs. Les uns, comme les savoirs mathématique et didactique sont des savoirs théoriques, les autres sont plus marqués par les savoir-faire et le sens commun. A cela s'ajoute un ensemble de connaissances que seule l'expérience semble susceptible de donner.
Dans notre étude, nous avons retenu essentiellement trois formes de savoir : le savoir mathématique, le savoir didactique et le savoir pédagogique. Les deux premiers sont généralement reconnus de manière institutionnelle même si leur définition fluctue parfois. Ainsi le savoir mathématique qui est le mieux défini culturellement n'est qu'imparfaitement précisé dans le cadre de la formation des enseignants. Quelles sont en effet les limites de ce savoir pour un futur enseignant ? L'épistémologie et l'histoire des mathématiques ne sont-elles pas des composantes essentielles du savoir mathématique ? De même la réflexion heuris-

tique et in fine la didactique des notions à transmettre aux élèves ne peuvent-elles pas être considérées comme faisant partie du savoir mathématique de base ? Actuellement, il ne semble pas que ce soit le cas. Aussi ai-je distingué le savoir didactique caractérisé par l'effort de théorisation de type scientifique sur les phénomènes de transmission de connaissances à des élèves. Cet effort de théorisation constitue sa marque distinctive par rapport au savoir pédagogique qui va être précisé maintenant.

Pour définir le savoir pédagogique, il m'a semblé intéressant d'utiliser différents travaux effectués sur la transmission des savoir-faire techniques dans le cadre des métiers manuels[1]. Simplement, et cela marquera les limites de l'analogie, le métier d'enseignant semble nécessiter un apprentissage bien plus complexe que les métiers manuels.

Pour tenter de préciser ce que recouvre le savoir pédagogique et asseoir son autonomie, je me référerai à l'ouvrage *La transmission des savoirs* de Delbos et Jorion[2]. Les auteurs s'intéressent dans ce livre aux activités de saliculture, de petite pêche et de conchyliculture entre Lorient et Le Croisic. Le thème est certes très pointu mais il est traité dans une optique de transmission des savoirs avec l'opposition entre des connaissances spontanées glanées sur le tas et un savoir transmis dans les écoles professionnelles qui ont été créées dans les années 70.

Delbos et Jorion distinguent alors :

> *a) un savoir procédural, abstrait de l'observation de la pratique et mis en écriture dans des manuels, ouvrages qui ne sont pas des théorisations et qui sont présentés comme a-théoriques par les auteurs.*
>
> *b) un savoir propositionnel, présenté comme le savoir dispensé à l'école, qui n'est pas théorique mais est constitué de propositions non logiquement connectées et qui se contente d'énoncer des contenus.*

Ce que je nommerai savoir pédagogique sera la réunion complexe et parfois contradictoire de ces deux formes de savoir. Ce savoir se caractérise par son oscillation entre deux pôles, l'un théorique mais parfois très éloigné de la pratique future des formés, l'autre proche du sens commun et de la pratique de la classe mais privé de l'adaptabilité d'un modèle plus théorique. Le corpus de référence est constitué par un ensemble de savoirs situés entre pratique et théorie qui réunit des savoirs procéduraux et propositionnels. Dans ce cadre, ces derniers sont des exemples d'activités de classe c'est-à-dire d'ingénieries prêtes à être effectuées, quant aux savoirs procéduraux ils visent à rendre les formés plus conscients grâce à une réflexion plus méthodologique.

La nature exacte et les contenus de ce savoir pédagogique sont clarifiés par l'étude des stratégies mises en oeuvre dans la formation des maîtres. En effet d'une certaine façon, l'objet principal des centres de formation est la transmission aux étudiants d'un savoir-pragmatique "utile"[3]. Ce savoir peut partiellement être

---

[1] CHEVALLIER D, 1991, Savoir-faire et pouvoir transmettre, Editions de la Maison des sciences de l'homme, Paris.

[2] DELBOS G et JORION P, 1984 , La transmission des savoirs, Editions de la Maison des Sciences de l'Homme, Paris.

[3] CONNES F, 1992, "Savoir et connaissances dans la perspective de la transposition didactique", in recherches en Didactique des mathématiques, Vol 12/2-3

conçu comme une recomposition d'éléments des savoirs didactique et mathématique. Cette recomposition a pour finalité de rendre opérationnels les savoirs de références afin de donner aux étudiants leurs compétences professionnelles.

II. Deux particularités de la formation des maîtres du premier degré

1. Les contraintes institutionnelles

Il est important de clarifier le contexte institutionnel dans lequel opère la formation des maîtres pour comprendre les différentes stratégies de formation. La formation en mathématiques est définie par un ensemble de circulaires ministérielles qui limitent singulièrement la liberté des formateurs.

De 1979 à 1991, le système de formation a connu trois transformations importantes définies par des textes de lois.

En 1979, la formation s'adresse à des étudiants ayant le baccalauréat et elle dure trois ans. La formation est fondée sur une vision des mathématiques construites par l'enfant. Dans cette perspective, le normalien doit avoir une réflexion critique sur sa propre anamnèse mathématique. Il doit avoir réfléchi sur *sa façon d'appréhender les notions antérieurement rencontrées, sur ses modes d'acquisition*. La formation doit également développer la connaissance du développement logique de l'enfant. Les travaux de Piaget sont explicitement cités comme référence.

La circulaire insiste ensuite sur les savoirs pédagogiques du maître. *Il (le formé) devra être capable d'organiser son enseignement de telle manière que les notions mathématiques ne soient pas exposées par le maître, mais progressivement construites par les élèves*. Pour cela, le normalien devra exploiter des situations-problèmes afin de faire découvrir ou réinvestir des notions par les enfants. *Il devra aussi être capable d'organiser des enchaînements de séquences conduisant l'enfant à l'élaboration de son savoir.*

Puis, la circulaire définit des contenus mathématiques proches de l'école élémentaire et propose aux formateurs de mettre en oeuvre un type d'activités en fait parallèle (les auteurs utilisent le terme <u>isomorphe</u>) au projet pédagogique précisé pour les enfants : *rechercher à partir de situations-problèmes effectivement rencontrées, aboutir à des résultats qui seront éprouvés par la pratique scolaire*. De plus la formation doit nantir les élèves-instituteurs d'outils leur permettant d'assurer leurs cours, et *ces outils ne devront pas être fournis a priori par les formateurs, mais élaborés, avec l'aide de ces derniers, par les élèves-instituteurs eux-mêmes*. Cette conception est à la base des stratégies basées sur l'homologie que je présenterai plus tard.

A partir de 1986, les étudiants doivent posséder le DEUG et suivent une formation qui dure deux ans. La circulaire ministérielle est plus brève que les précédentes et s'oppose à ces dernières. La réflexion philosophique sur l'éducation devient le fondement de la formation présentée comme *professionnelle de niveau supérieur*. Le discours sur les formations disciplinaires prend un tour plus technique. Les moyens "*audiovisuels, informatiques et technologiques*" se trouvent

promus en force. Une grande partie de la formation doit être consacrée à leur intégration dans le domaine pédagogique. La circulaire manifeste une réserve nette sur la pédagogie générale et sur le degré d'application de ses principes. Elle fait explicitement allusion à la didactique de chaque discipline. Mais cette allusion reste vague et semble due plus à la volonté de contrecarrer les pédagogies dites d'éveil qu'à une réelle définition du domaine didactique.
Cette circulaire de 1986 s'oppose aux précédentes dans la mesure où elle rejette la pédagogie officielle antérieure basée sur l'éveil et la construction du savoir par l'enfant. Elle semble ouvrir la voie à deux types de formations d'enseignants toutes deux technologistes. Le premier sera bâti sur les technologies nouvelles (surtout l'informatique qui supplante l'audiovisuel) et le second sur une idée de la didactique conçue comme une technologie de l'enseignement (avec l'idée d'ingénierie). Enfin, elle n'exclut pas une formation basée sur la pratique des mathématiques.
En 1991, les Ecoles Normales disparaissent au profit d'une structure universitaire, les I.U.F.M.. II est encore tôt pour faire le point sur une structure en pleine installation. Cependant, on peut noter que la rupture la plus marquante de cette nouvelle formation avec les précédentes réside certainement dans l'instauration du concours à la fin de la première année. Cette modification transforme radicalement les conditions et les règles du jeu en vigueur dans la formation : une grande partie des étudiants n'atteindra pas la deuxième année et inversement une autre partie n'aura pas fait de première année.
La validation de la première année résulte de la réussite générale au concours. Celui-ci comprend une épreuve écrite de mathématiques qui comporte deux aspects :

un volet disciplinaire qui doit permettre de juger les compétences des étudiants en mathématiques, mais dont les exigences doivent tenir compte de la polyvalence disciplinaire demandée aux étudiants.

un volet pédagogique qui a "*pour objet l'analyse «des approches didactiques et des démarches pédagogiques correspondantes»"*. Dans cette épreuve le candidat "est *mis en situation de réagir à des documents*".

Ce dernier aspect conduit à privilégier pour la première année une formation axée sur l'écrit et sur la transmission d'un savoir de référence théorique. La seconde année est plus axée sur la pratique effective du métier avec la découverte des classes.

2. La gestion de la pluridisciplinarité.

C'est une particularité essentielle de la formation des maîtres du premier degré que de devoir intégrer un nombre important de disciplines, les mathématiques n'étant qu'une parmi d'autres.
L'étendue des connaissances idéalement exigées de la part des étudiants confrontés à la réalité fait sans cesse osciller les formateurs entre deux pôles:

(A) transmettre aux formés une démarche pédagogique transversale en faisant plus ou moins l'impasse sur les spécificités de chaque matière.

(B) accentuer l'approche disciplinaire en laissant l'étudiant, éventuellement aidé par la philosophie ou la psychopédagogie, faire une sa-

> *vante synthèse de tous les éléments disparates qui lui auront été enseignés.*

En forçant un peu le trait, nous pouvons dire que la circulaire de 1979 opte pour le premier point de vue, et celle de 1986 pour le second.
Pour caractériser grossièrement les deux types de formations envisagées, il s'agit dans le premier cas, d'une pédagogie basée sur les activités, et dans le deuxième, d'une pédagogie où l'institutionnalisation des connaissances est essentielle. D'un côté, on a une vision de la formation très liée aux démarches d'apprentissage centrées sur l'enfant, à l'opposé la seconde conception des problèmes d'enseignement est très technicienne.

III. Les diverses stratégies de formation.

Présentation générale.

Nous avons distingué deux grands types de stratégies de formation. Il y a d'abord celles qui conçoivent la formation des étudiants comme une préparation professionnelle au métier de professeur d'école (ou d'instituteur) au sein de la structure existante. Puis toutes celles qui ne semblent pas avoir cette préoccupation comme une priorité. Parmi ces dernières, nous avons pu repérer :

<u>Les stratégies culturelles</u>. J'ai nommé ainsi les stratégies qui privilégient l'accroissement des connaissances dans le domaine mathématique sans préjuger de la mise en oeuvre opérée dans les classes par les étudiants. Bien sûr, ces stratégies pourront revêtir des formes très différentes suivant les conceptions pédagogiques des formateurs.
D'une certaine façon, elles ne respectent pas le contrat qui fonde les instituts de formation des maîtres et qui suppose une spécificité du savoir lié à l'enseignement. En tant que telles, elles apparaissent comme le négatif et aussi comme un point d'opposition aux stratégies qui prennent en compte la professionnalisation.
Ces stratégies intègrent avant tout le savoir qui fait l'objet de tous les efforts des formateurs les mathématiques. Les stratégies culturelles réduisent cet objet à son noyau central qui est le savoir savant de référence indépendamment de toute réflexion sur ses conditions de production, d'assimilation, de diffusion ou d'évolution. Elles présentent cependant une alternative à tous les autres types de stratégies, alternative toujours présente du moins tant qu'existera un enseignement des mathématiques à l'école primaire.

<u>Les stratégies de recherche applicative.</u>

J'ai appelé ainsi les stratégies très ambitieuses qui visent à former les étudiants par la recherche. Cette voie relève plus des intentions sur les formes souhaitables que pourrait avoir une formation que de la réalité institutionnelle qui crée des groupes de formation proches de trente personnes. De plus, elle suppose une maîtrise importante des contenus mathématiques qui vont faire l'objet de l'enseignement. Cette stratégie échappe en grande partie au cadre de la formation normale et n'en subit pas les contraintes. Elle semble cependant particulièrement adaptée à la formation des formateurs.

<u>Les stratégies basées sur l'autonomie.</u>

Dans ce cas, une très grande autonomie est laissée aux étudiants : ils doivent faire des exposés, traiter des thèmes du programme avec uniquement des pistes bibliographiques et ces exposés tiennent lieu d'épreuve d'évaluation (avec le paradoxe qu'on évalue des compétences non enseignées dans le cadre de la formation). Parfois employée de manière systématique par certains formateurs, l'autonomie l'est de façon marginale par d'autres pour aborder certaines notions comme le calcul mental.
Cette forme de formation laisse perplexe. En effet, si d'une certaine façon il faut reconnaître qu'ainsi certains étudiants travaillent parfois de façon intensive et peuvent dans certains cas montrer leurs compétences spécifiques, a contrario ce type de formation nie la nécessité des formateurs et conçoit les centres de formation comme des centres de ressources.

Les stratégies axées sur la professionnalisation s'assignent toutes le même but : rendre les étudiants capables d'enseigner en utilisant des activités de formation spécifiques. Elles sont également fonction des moyens matériels que donne la formation des maîtres. Dans ce cadre, nous avons défini trois grandes stratégies :

Les stratégies basées sur la monstration. Ces stratégies privilégient la transmission d'un modèle par l'observation de sa mise en oeuvre dans les classes élémentaires. I1 s'agit de transmettre une pratique en la montrant aux étudiants et en la faisant imiter. C'est le mode le plus naturel et le plus ancien ("leçon modèle") d'initiation aux pratiques professionnelles.

Les stratégies basées sur l'homologie.
C'est aussi un modèle fondé sur l'imitation, mais une imitation complexe et transposée par le formé. Ce dernier doit mettre en place un modèle de formation inspiré de celui qu'il a pu vivre en tant qu'étudiant dans le centre de formation. Les formateurs enseignent conformément à leur conception de ce que doit être l'enseignement à l'école élémentaire.

Les stratégies basées sur la transposition. Elles s'opposent aux précédentes par l'insistance mise sur la distanciation théorique. Elles se proposent de transmettre des savoirs de référence mais portant sur la pratique de la classe ce qui les distingue des stratégies culturelles. Pour étudier ces stratégies, il sera important de préciser les savoirs retenus et les modes de transposition mis au point.

1 . Les stratégies basées sur la monstration.

I1 s'agit du mode de formation le plus naturel lorsque l'on considère l'enseignement comme la maîtrise d'un ensemble de savoir-faire. Ces derniers sont alors montrés aux débutants par un expert. Dans la forme la plus simple de monstration, les étudiants sont intégrés dans une classe où ils peuvent regarder un maître en train d'enseigner une notion à des élèves de l'école élémentaire. Les étudiants sont ainsi plongés dans le système dans lequel ils devront plus tard exercer leur travail. Ils découvrent petit à petit et par eux-mêmes la fonction qui sera la leur. Le processus de formation repose alors sur l'absorption supposée d'un modèle par imitation.

La caractéristique de ces formations réside dans la faible part laissée à l'explicitation. Les formés vivent une situation qu'ils reproduiront ensuite uniquement par imitation sans réflexion explicite sur leur vécu. A l'opposé de cette forme de transmission imitative et toujours dans le cadre de la monstration existent toutes les approches qui visent l'acquisition de savoir-faire à partir d'une observation de la classe, consciente et active de la part du formé. Ces approches supposent chez l'étudiant un savoir-voir ou un savoir-observer qui devront faire l'objet d'un apprentissage spécifique. A défaut, on risque de tomber dans "l'illusion touristique" qui consiste à croire que l'on connaît ce que l'on a simplement visité.

Le dispositif d'observation mis en place conduit à distinguer un modèle de formation "artisanal" d'un modèle plus "industriel".

Dans le premier cas, l'accent est mis sur la présentation effective d'une séance qui est le plus souvent conduite par un conseiller pédagogique. Celui-ci, éventuellement accompagné par le professeur, joue le rôle "d'expert". Le dispositif d'observation, généralement léger, est second par rapport aux interactions entre les différents participants à la séance (étudiant, conseiller pédagogique ou professeur). Il s'agit d'un stade de la formation que je qualifie d'artisanal, axé sur la monstration-action.

Ce mode de formation est transformé par l'apport de la vidéo lorsque la séance est enregistrée et suivie d'une analyse a posteriori comme dans le cas du micro-enseignement. On peut alors parler d'une approche technologique qui place la formation par opposition au mode artisanal dans un mode de raisonnement "industriel" qui donne la priorité aux aspects techniques.

Ces deux approches visent une transformation des pratiques de l'étudiant par l'appropriation de modèles. Dans le cadre artisanal, ce modèle est transmis de façon empirique par imitation. Dans le modèle industriel, il est acquis par une suite de micro-actions sur des thèmes très ciblés. Dans sa forme la plus élaborée, ce modèle échappe aux stratégies de monstration et intègre de fait les stratégies basées sur la transposition, l'observation n'étant qu'un moyen pour transmettre un savoir technique très précis.

Les stratégies de monstration sont des stratégies très complexes à gérer à cause de la diversité des points de vue et de la très grande hétérogénéité des observateurs, ce qui rend difficile pour le formateur l'évaluation de l'impact réel de sa formation. Cette complexité peut aussi entraîner certaines illusions :

> *Dans le cadre artisanal, l'idée qu'il suffit de "faire" sans réflexion peut se mettre en place. Le formateur peut aussi croire, faute de grilles d'observation précises, que tout le monde voit et retient la même chose de la monstration.*
>
> *Dans le cadre technologique, on vit sur l'illusion qu'on a affaire à des phénomènes bien définis et parfaitement paramétrés avec l'idée de la reproductibilité des situations.*

Cette stratégie de formation tire sa force de son ancrage dans la réalité des classes. Mais cette insertion de la classe dans la formation rend difficile une réflexion décontextualisée.

La difficile gestion des stratégies de monstration et l'opacité des objectifs réellement poursuivis et atteints par ce mode de formation ne doivent pas faire oublier un certain nombre d'avantages :

- *la transmission rapide d'informations sur le contexte dans lequel se déroule une action de formation,*
- *le lien étroit avec le milieu professionnel qui donne une certaine légitimation à la formation et contribue, à la manière du compagnonnage, à une sorte d'intronisation des étudiants dans leur futur métier,*
- *la preuve par la monstration de la possibilité de mettre en oeuvre le type d'enseignement défendu par les formateurs.*

2. Les stratégies basées sur l'homologie.

Les stratégies basées sur l'homologie ont connu un grand développement au sein des Ecoles Normales et ont certainement constitué un modèle dominant stable particulièrement adapté à ces institutions.

A partir de la représentation simplifiée du système de formation des maîtres que nous avons donnée plus haut, précisons tout d'abord le sens qu'il faut donner au terme d'homologie.

Nous avons vu que les théories de l'apprentissage privilégiaient certaines articulations du triplet didactique (M-C-S). Le formateur d'enseignants peut certes rester neutre devant les différentes formes de transmission, mais de fait, il opte lui aussi pour un des modèles. Dans ce cas, il peut choisir de transmettre sa forme préférée d'enseignement en la mettant lui-même en oeuvre dans son enseignement à ses étudiants. Nous avons introduit le terme d'homologie pour désigner les stratégies où le professeur utilise (ou tente d'utiliser) un mode de transmission identique à celui qu'il souhaite voir utiliser par ses étudiants lorsque ceux-ci enseignent dans des classes élémentaires.

Dans le cadre de la formation des maîtres en mathématiques, le seul modèle que nous avons retenu (et rencontré) est le modèle constructiviste, qui privilégie les articulations (C-S) dans le système de formation et dans le cadre des écoles élémentaires.

Les formateurs ont alors la conviction que le savoir s'acquiert à partir d'une construction et que sa transmission passe par la confrontation de l'apprenant à des situations dites de découverte. Le problème se pose alors avec acuité de faire passer cette conception de l'enseignement auprès des étudiants habitués, le plus souvent, à d'autres pratiques.

Dans les publications issues des Colloques de P.E.N., on rencontre une formulation vigoureuse de la nécessité d'une sorte de stratégie de combat. Ainsi lors du Colloque d'Auberive, en 1978, peut-on lire à propos de la relation du normalien à l'enseignement des mathématiques *"C'est là que le plus gros travail de déconditionnement doit être fait. Amener le normalien à enseigner les mathématiques d'une manière différente de celle qu'il a lui-même subie n'est pas chose évidente. Le P.E.N. doit donc commencer par donner l'exemple ; c'est-à-dire mettre en pratique dans sa propre conception de la formation initiale, le modèle qu'il aimerait voir adopter par le normalien* ".

Dans les actes du colloque de Bombannes (1979), la définition de la stratégie à utiliser se fait plus précise et on peut lire à propos de l'enseignement de la géométrie

*On pourra simuler un apprentissage avec les F.P. (*les étudiants*) et le reprendre avec les élèves de l'école primaire. Il importe que la situation se transfère facilement.*

Ainsi les stratégies d'homologie se trouvent être bien définies par deux types de ressemblance :

- *la ressemblance des démarches pédagogiques qui doit permettre d'assurer la cohérence entre le discours et les actes du formateur,*
- *la ressemblance des situations proposées aux enfants et aux étudiants.*

Pour le choix des situations à mettre en place, plusieurs possibilités apparaissent.

a) La situation de départ est la même pour les enfants et les futurs enseignants.

b) La situation présentée aux adultes est légèrement plus complexe mais aisément transférable.

c) La situation présentée aux étudiants n'est pas susceptible d'un transfert simple à l'école primaire.

En fait, le choix de ces situations dépendra de l'appréciation par le formateur des difficultés liées à la notion abordée. On peut formuler ici deux hypothèses que j'étudie dans ma thèse[4]

H1 : Une situation simple permet une prise de conscience nette de la démarche pédagogique suivie, mais en contrepartie elle risque d'infantiliser l'étudiant et/ou de provoquer son rejet.

H2 : Une situation plus complexe transmet un savoir mathématique non trivial aux étudiants, mais la nouveauté de ce savoir peut occulter la démarche suivie.

Les stratégies basées sur l'homologie supposent implicitement que le transfert opéré par l'étudiant n'est pas problématique.

En règle générale, on peut dire que la réflexion sur le phénomène de transposition du savoir qui s'opérera ensuite de la part des étudiants est absente. Les explicitations ne visent de la part du formateur qu'à mieux se faire comprendre. Cette absence d'attention à la transposition opérée par les étudiants cache aux formateurs ce que j'ai appelé la "dénaturation simplificatrice".

En effet, nous avons pu observer un phénomène de simplification et parfois de dénaturation.

Les étudiants opèrent une simplification qui leur permet de préparer des séances que leur savoir mathématique suffira à dominer.

Il y a dénaturation à partir du moment où la simplification transforme la nature du savoir mis en jeu ou modifie radicalement les démarches pédagogiques initiales.

Les stratégies d'homologie s'appuient également sur le fait que le niveau mathématique moyen des futurs enseignants du primaire est faible. Contrairement aux

[4] KUZNIAK A, 1994, "Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré". Thèse de doctorat. Université Paris VII.

stratégies culturelles et même aux stratégies basées sur la transposition, elles ne cherchent pas à lutter contre ce phénomène mais plutôt à s'y adapter. Elles tentent de montrer que chaque étudiant peut avec des moyens limités mener une activité mathématique, le primat étant donné à l'approche pédagogique.
Un de leurs grands avantages est de confronter l'étudiant avec les difficultés que rencontre tout apprenant. Ainsi, l'élève-maître peut mieux saisir les phénomènes d'apprentissage et commencer à en apprécier la complexité. Il constate aussi que les notions qu'il va devoir mettre en oeuvre bien que qualifiées d'élémentaires, ne sont pas simples.
Il va aussi éprouver par lui-même la nécessité, pour celui qui cherche, de pressentir les attentes de celui qui fait chercher. Cela peut susciter une réflexion sur la nature des consignes, l'importance du contrat didactique. On constate la richesse potentielle de ces stratégies si l'on dépasse la simple homologie pour atteindre à une distanciation théorique.
Plus fondamentalement, les stratégies basées sur l'homologie semblent être les premières à avoir intégré l'importance des représentations dans la pratique des enseignants. Elles tentent d'agir sur ces dernières mais de manière empirique.
Les stratégies d'homologie semblent avoir connu leur apogée et être devenues moins prédominantes. Cela peut provenir de plusieurs facteurs. Tout d'abord, elles ne sont plus préconisées par les textes officiels comme en 1979. Ensuite, elles sont sensibles à toute réduction de la durée de la formation car la mise en action des étudiants suppose un temps de formation non négligeable. Et enfin, le développement de la recherche pédagogique et didactique fournit le cadre théorique nécessaire à d'autres conceptions de la formation des enseignants plus axées sur la transposition.

3. Les stratégies basées sur la transposition.

Les stratégies basées sur la transposition se différencient radicalement des précédentes par l'insistance qu'elles accordent à la transmission d'un savoir de référence. Elles se rapprochent ainsi des stratégies culturelles mais prennent en compte la professionnalisation des étudiants à la différence de ces dernières uniquement fixées sur les connaissances mathématiques.
Il y a en fait deux niveaux de transposition.

Le premier concerne le passage du savoir savant de référence au savoir enseigné par les formateurs. Il s'agit ici du processus standard de transposition didactique.

Le second niveau concerne le passage de ce savoir enseigné au savoir appliqué par les étudiants. Il prend en compte le phénomène de transfert et d'adaptation opéré par les étudiants.

Les stratégies les plus complexes envisagent les deux niveaux de transposition.
La nature du corpus savant retenu contribue à définir la stratégie. On rencontre ici deux corpus de savoirs, non spécifiquement mathématiques et différents : un corpus "pédagogique" et un corpus "didactique". Ces corpus représentent deux approches de la théorisation des faits d'enseignement en mathématiques à l'Ecole Elémentaire.

La première approche est de type pédagogique et se structure autour de productions de l'I.N.R.P.. L'ouvrage de référence est ici le ERMEL qui constitue le seul exemple d'ingénierie globale pour tout un cycle de formation. Dans ce cas le savoir mis en oeuvre est très lié à l'Ecole Elémentaire et n'est pas décontextualisé.

Le corpus didactique théorise davantage les phénomènes d'enseignement et n'a pas pour préoccupation première une application dans les classes. L'effort de transposition effectué par les formateurs est donc plus important.

La première transposition opérée par le formateur est problématique dans l'approche didactique surtout lorsque celui-ci souhaite garder comme objectif la professionnalisation des étudiants. Cela résulte de différentes causes :

1) La didactique des mathématiques est un champ de recherche dont la vocation première n'est pas de fournir un savoir technique directement utilisable dans les classes.

2) La transposition de ce savoir en formation passe par l'institutionnalisation de certaines notions dont la définition fluctue encore.

3) Ces notions sont extraites du cadre théorique qui leur a donné naissance pour être transformées en outils autonomes. Par exemple que devient la notion de jeu de cadre coupée de la théorie de la dialectique outil-objet ? Quel sens accorder aux variables didactiques lorsqu'elles sont utilisées hors du contexte didactique ? Ces questions ne semblent pas avoir reçu de réponses totalement satisfaisantes.

La théorisation didactique reste difficile pour un public non spécialiste des mathématiques et suppose un effort de transposition et d'adaptation important de la part des formateurs. Cette réflexion doit permettre de dégager quels sont les objets didactiques utiles aux futurs professeurs des écoles, elle doit aussi créer des situations de formation adaptées à la transmission de ces objets.

Pour guider la deuxième transposition opérée par les étudiants dans leur pratique de classe les formateurs ont construit des activités assez élaborées. Celles-ci portent essentiellement sur l'analyse des démarches et l'analyse didactique des séances, l'étude et l'exploitation des erreurs des enfants.

Nous constatons, à cette occasion, que le modèle transpositionnel de formation se présente souvent comme un modèle critique, mais est-il suffisamment constructif ? En effet, certaines analyses démontent avec succès des séances de classe et en font bien ressortir les limites. Mais cet effet critique peut sembler mal compensé par les outils de construction de séance proposés par les formateurs.

A l'opposé de l'approche critique qui demande généralement peu de temps et témoigne de plus une bonne adaptation aux nouvelles conditions un peu formelles de la formation axée sur la préparation d'une épreuve écrite, l'approche constructive suppose un temps de formation plus important. En effet, les analyses a priori avec examen des différentes variables didactiques doivent, pour être efficaces, être complétées par des analyses a posteriori qui supposent un travail dans des classes primaires.

Ces formes de travail demandent de la part de l'étudiant un certain nombre de connaissances préalables. Il doit avoir une idée précise du fonctionnement des classes primaires et une représentation adéquate de l'enseignement des mathématiques. De plus, les connaissances mathématiques sont parfois trop importantes pour un public qui n'est pas spécialement scientifique et qui est appelé à enseigner diverses matières. Ainsi, l'approche transpositionnelle ne se construit pas sur un vide pédagogique et mathématique. A l'opposé des stratégies d'homologie, les stratégies transpositionnelles paraissent un art riche qui suppose et réclame beaucoup de conditions pour sa bonne réalisation. Cela explique que les exemples d'activités les plus complexes que nous avons rencontrés concernent souvent la formation continue de personnels déjà formés.

Conclusion

1. Critères de choix stratégiques a priori.

Pour terminer cette présentation, nous allons comparer les diverses stratégies sur quelques paramètres qui vont faire apparaître leurs différences. Cela aidera à comprendre les raisons qui poussent les formateurs à choisir telle ou telle stratégie de formation.

a) Place du formateur en mathématiques.

Dans les stratégies de monstration, le professeur de mathématiques, surtout dans le fonctionnement artisanal, ne décide pas seul du mode de formation. L'importance du milieu constitué par la classe et les conseillers pédagogiques place même le professeur au second plan d'un processus qu'il maîtrise finalement assez peu et qu'il ne fait qu'accompagner. Cet effacement relatif du professeur contraste avec l'implication importante de l'étudiant dans cette formation puisque ce dernier doit réaliser une séance dans une classe en présence d'observateurs critiques.

Dans le modèle technologique, l'importance du professeur s'accroît mais le savoir développé relève plus de la pédagogie générale que de la pédagogie des mathématiques ce qui justifie souvent mal sa spécificité disciplinaire. Celle-ci réapparaît lorsque la monstration est réduite et mieux ciblée sur des moments précis où c'est réellement un savoir mathématique qui est transmis.

Dans les stratégies d'homologie, cette fois le professeur joue le rôle d'un modèle indirect. En effet, ces stratégies sont basées sur un processus d'imitation différée et transférée. L'étudiant observe un professeur qui enseigne à des adultes suivant le modèle constructiviste, il doit ensuite adopter cette manière de faire dans son enseignement pour des enfants. Le formateur s'engage en assumant dans sa pratique d'enseignant ses choix pédagogiques. On peut aussi noter que c'est certainement dans ces stratégies que le professeur a un rôle qui se rapproche le plus de celui des instituteurs mais d'un "instituteur pour adultes". Ce dernier point peut avoir pour conséquence de provoquer chez les étudiants un sentiment d'infantilisation ou d'ennui.

Dans les stratégies de transposition, le formateur retrouve une plus grande liberté pédagogique puisque l'enjeu essentiel de ces stratégies est la transmission d'un savoir professionnel de référence. Dans le cadre de l'approche pédagogique où intervient une grande part d'idéologie due à la prégnance du modèle constructiviste, il nous est apparu que le formateur devait avoir une expérience professionnelle de la formation des maîtres qui lui donne le savoir empirique nécessaire pour gérer les situations de discussion avec les étudiants, fréquentes dans ce modèle. L'approche didactique, si elle peut éventuellement dispenser le formateur de ce savoir empirique, nécessite en revanche un investissement en tant que chercheur dans le domaine de la didactique des mathématiques. La difficulté consiste alors pour le formateur à ne pas confondre l'objet de ses recherches et l'objet de son enseignement.

b) Leviers utilisés par le formateur pour son action.

Les différentes stratégies ne prennent pas appui sur les mêmes points pour fonder leur action.

Les stratégies de monstration privilégient le rapport au contexte et au milieu professionnel futur. Elles utilisent ce dernier pour mettre au point des ajustements pédagogiques. Elles jouent aussi sur les comportements et les prises de décision perceptibles par l'observation. En ce sens, elles privilégient les apparences externes parfois au détriment de la cohérence interne.

Les stratégies d'homologie semblent privilégier l'action sur les représentations qui sont toujours supposées contraires au modèle souhaité par le formateur. Elles agissent donc de manière interne sur les étudiants en tentant tout d'abord une déstabilisation de ces derniers. Elles fournissent ensuite un modèle de l'enseignement constructiviste en acte.

Les stratégies de transposition se différencient des précédentes par leur volonté réflexive et l'effort de distanciation à partir des analyses a priori et de la critique des modèles. Elles défendent l'idée qu'un véritable savoir sur l'acte d'enseigner les mathématiques existe et que cet acte est trop complexe pour être réduit à un apprentissage de type technique.

c) Les savoirs de base.

Les stratégies de monstration privilégient les savoirs qui permettent la prise en main et la gestion d'une classe. Elles donnent la priorité au "faire" pour acquérir des savoir-faire. Les formateurs sont amenés à jouer sur des savoirs pédagogiques généraux. Lorsque ces savoirs sont liés aux mathématiques, ils relèvent plus de l'organisation, du déroulement de la séance et ils portent sur l'agencement formel de l'ingénierie de manière souvent indépendante du contenu traité. Il y a aussi la nécessité de s'appuyer sur le savoir-observer qui entraîne trop souvent l'usage de lourdes grilles d'observation. Une autre spécificité des savoirs mis en jeu est qu'ils portent sur la pluridisciplinarité et l'articulation des mathématiques avec les autres disciplines.

J'ai montré que les stratégies d'homologie fonctionnaient plutôt sur une conception a minima des différents savoirs possédés par les acteurs du système. Elles ne supposent pas un savoir mathématique important de la part des étudiants et ne se réfèrent pas à un savoir sur l'acte d'enseigner très développé. Il faut noter que ces stratégies ont souvent été mises au point à une époque où ce savoir de référence était pratiquement inexistant. En ce sens, elles peuvent être qualifiées "d'arte povera" car elles essaient de tirer le maximum d'une situation jugée pauvre.

A contrario, les stratégies de transposition nécessitent de nombreuses conditions pour fonctionner correctement. L'étudiant doit posséder un certain nombre de connaissances sur le fonctionnement pratique d'une classe primaire. Il doit aussi maîtriser suffisamment les contenus mathématiques pour prendre la distance réflexive nécessaire. Quant au professeur, il doit s'être approprié un savoir qui ne fait pas partie du cursus usuel d'un professeur de mathématiques.

2. Articulation des diverses stratégies.

Les stratégies que nous avons pu mettre en évidence présentent toutes certaines limites mais, et c'est sans doute une des raisons de leur existence, présentent aussi des avantages spécifiques liés aux points d'appui qu'elles privilégient.

Ce sont également des stratégies contingentes qui s'intègrent dans le cadre dans lequel elles opèrent. Chacune résout un type particulier de difficulté comme le niveau souvent médiocre des connaissances mathématiques des étudiants, ou l'élaboration inachevée d'un savoir théorique de référence pour les formateurs.

Ces stratégies fournissent des réponses partielles, mais non nécessairement contradictoires entre elles, aux problèmes posés par la formation. A partir de ce constat, il semble donc naturel de rechercher une stratégie d'ensemble. Sur un temps suffisamment long, celle-ci pourrait mettre en réseau les différents leviers de connaissances qui se rapportent à la formation des maîtres et que nous avons pu dégager.

La connaissance du contexte et du milieu dans lesquels va opérer l'étudiant. Cette connaissance lui permet de mieux comprendre les références à la pratique données dans le cadre de la formation.

L'action sur les représentations des enseignants est indispensable pour entraîner une plus grande ouverture pédagogique.

Les références à un cadre théorique de type didactique.

Cette synthèse n'est pas utopique et nous avons déjà signalé certaines transitions entre les stratégies. Ainsi, certains formateurs mettent en place des stratégies de transposition à partir d'un mode de fonctionnement très imprégné des stratégies d'homologie. Ils tentent ainsi de concilier l'évolution du savoir didactique avec leur conception constructiviste de l'enseignement. De même, nous avons aussi rencontré des exemples de monstration mise au service de la transposition.

Autour des stratégies de formation des maîtres du premier degré en mathématiques

Catherine Houdement

Extrait des Actes du XXII ème colloque de la COPIRELEM - Douai 1995.

Cet article présente les travaux et les résultats d'une thèse[1]*, dans la continuité des recherches menées en 1994 par A.Kuzniak*[2]*. Il contribue au questionnement sur la formation des enseignants en mathématiques, plus spécifiquement sur celle des professeurs d'école. Il 's'intéresse aux relations entre stratégies de formation et contenus mathématiques.*

La spécificité de la formation des professeurs d'école

Au niveau institutionnel

Les professeurs d'école sont, depuis la création des I.U.F.M. recrutés avec la licence par un concours portant sur un certain nombre de disciplines enseignées à l'école élémentaire. Ce concours comporte pour chaque discipline, une partie disciplinaire (au sens classique du terme) et une partie fondée sur des questions liées à l'enseignement de ces disciplines. Les étudiants qui se destinent au professorat des écoles ne sont pas, en général, des spécialistes de mathématiques. Quelquefois même, ils présentent de sévères lacunes en ce domaine. La formation initiale en première année d'I.U.F.M. a comme objectif de les préparer au concours et à leur future activité professionnelle.

Les formateurs de ces étudiants sont des professeurs du second degré[3] : ces formateurs sont donc avant tout spécialistes de mathématiques ; pour certains, en particulier ceux venant des ex-écoles normales, ils ont accumulé une expérience de formation professionnelle souvent relayée par des lectures ou participations à des recherches en didactique des mathématiques.

La formation en I.U.F.M. poursuit la formation des ex-écoles normales : utilisation d'un potentiel de formateurs existant, utilisation des mêmes locaux, reprise d'un système global de formation (formation pluridisciplinaire, alternance de cours et de stages sur le terrain, soit sous la tutelle du maître titulaire, soit en responsabilité) ; simultanément elle se place en rupture par rapport à elle : le

---

[1] C.Houdement, *Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies,* Directeurs A.Robert et R.Douady, Université de Paris VII, avril 1995.

[2] Cf. article précédent et *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré,* Thèse de Doctorat, Université Paris 7.

[3] Depuis peu les rejoignent des universitaires intéressés par la formation professionnelle dans le premier degré

concours est situé au milieu des deux ans de formation, ce qui rend la première année facultative ; il comporte une partie professionnelle, ce qui engage dans un type de préparation spécifique, qui n'est pas toujours jugée compatible (par les formateurs) avec l'idée d'une véritable formation professionnelle.

Au niveau des contenus

La formation des futurs professeurs d'école en mathématiques comporte des compléments mathématiques et des éléments de préparation aux aspects professionnels du métier. Plusieurs questions se posent immédiatement :
- comment définir les savoirs (au sens naïf) nécessaires pour exercer le métier de professeur d'école ?
- quelle partie de ces savoirs sont enseignables et sont du ressort de l'I.U.F.M. ?
- quelle partie de ces savoirs sont du ressort du formateur en mathématiques ? ne sont que de son ressort ?

Des tentatives de définition de ces savoirs ont eu lieu en 1979 lors du colloque de Bombannes, mais ce travail de définition ne s'est pas poursuivi explicitement. L'étude de plans de formation construits par différents I.U.F.M. (par exemple les plans 1991 d'Aix, de Rennes, de Nantes et de Caen) montre même de grandes disparités dans la rédaction des contenus abordés en première année. La C.O.P.I.R.E.L.E.M, en particulier pour unifier quelque peu les pratiques de rédaction des plans de formation, a proposé un texte en mars 1994[4] sur les contenus de formation en mathématiques pour le futur professeur d'école. Ce texte tente de prendre en compte l'état actuel des recherches en didactique des mathématiques et dans les domaines liés à l'enseignement des mathématiques.

Conclusion

L'absence de définition de contenus explicites de formation d'une part, l'incontournable effet de la composante pratique (la régulation par l'exercice effectif du métier) d'autre part, ne nous a pas permis d'inscrire nos recherches dans un cadre théorique unique.

On pourrait en effet tenter d'utiliser une théorie type ingénierie en assimilant la formation professionnelle à l'apprentissage d'éléments sur l'apprentissage mathématique des élèves, les problèmes de formation aux problèmes d'enseignement des mathématiques aux élèves et les savoirs de formation aux savoirs issus de la didactique des mathématiques. Cette transposition paraît d'abord un peu mécaniste : les savoirs visés par la formation professionnelle sont-ils de même nature (épistémologiste) que les savoirs visés par l'enseignement des mathématiques ? Mais le problème est ailleurs : comment intégrer dans ce cadre les savoirs nés de la pratique ? Comment se recomposent acquisitions théoriques et acquisitions pratiques ? Le cadre de l'acquisition des connaissances mathématiques, transposé à d'autres connaissances théoriques ne suffit pas à répondre à ces questions.

---

[4] Texte disponible dans les actes du colloque de Douai (1995).

Nous avons donc décidé de nous tourner vers les pratiques, dans la mesure où il existe une culture commune de formation en mathématiques pour le premier degré.

Questions pour une recherche. Méthodologie associée.

Quels témoins de la pratique existent ? Que regarder dans les pratiques des formateurs ?

La formation des maîtres du premier degré dispose de divers écrits issus des colloques annuels des formateurs d'instituteurs en mathématiques (depuis 1979), des *Documents pour la formation en didactique des mathématiques des maîtres du premier degré*, édités annuellement depuis 1991 par la C.O.P.I.R.E.L.E.M., enfin de quelques publications récentes du commerce destinées à la formation en mathématiques des professeurs d'école. De plus une certaine culture commune se diffuse au sein de la C.O.P.I.R.E.L.E.M. et au fil des rencontres régulières que constituent les colloques. Cette culture explicitée représente une partie (et une vitrine ?) des pratiques de formation.

D'autre part, les recherches déjà menées sur la formation mathématique des professeurs d'école[5] ont dégagé plusieurs types de stratégies de formation. Nous reprenons cette typologie, dont nous rappelons des définitions succinctes.

- *Stratégies culturelles* : le formateur diffuse une information, veut communiquer une culture commune, qu'elle soit mathématique ou pédagogie de la pratique, sans se préoccuper de sa réception par les étudiants.
- *Stratégies de monstration* : le formateur fait voir des actes d'enseignements, soit dans des classes, soit via une bande vidéo.
- *Stratégies d'homologie* : le formateur met en scène un savoir (mathématique ou didactique) pour ses étudiants comme il voudrait que ceux-ci le fassent pour leurs élèves avec le savoir mathématique, sans toutefois expliciter le savoir didactique de référence qui lui permet ces mises en scène.
- *Stratégies de transposition* : le formateur explicite du savoir théorique d'enseignement (éléments de didactique, de théorie des apprentissages, etc.) soit directement, soit après une homologie.

Or un examen d'écrits sur la formation sur un même thème mathématique laisse parfois voir plusieurs types de stratégies possibles. Prenons le cas de la division euclidienne dans N. Un formateur débutant a tendance à mettre en place une stratégie culturelle : faire faire des mathématiques de façon classique, d'abord indépendamment d'une réflexion professionnelle. A.Kuzniak, dans sa thèse page 104, développe, sur sept séances de trois heures, une stratégie de monstration. H.Péault met en place sur une dizaine de séances d'une heure trente, une stratégie dominante d'homologie[6]. D.Butlen[7] se livre à une stratégie de transposition à

[5] Cf. article précédent d'A.Kuzniak.

[6] H.Péault, pages 86 à 93 dans *Actes du Colloque inter-I.R.E.M. des P.E.N. de Rouen* (1988).

travers l'analyse, par les étudiants, d'un protocole de séance de CM sur la division.

D'où des questions possibles, interrogeant les pratiques :
Il existe une certaine richesse de pratiques de formation sur le thème de la division. Existe-t-il cette même richesse stratégique pour tous les thèmes de la formation ? Peut-on déceler des liens privilégiés entre thèmes et stratégies ? Mais que prendre comme thèmes de la formation puisque les contenus eux-mêmes ne sont pas explicites ?
L'examen des pratiques passe aussi par un regard analytique sur sa propre pratique. La nôtre, sur une dizaine d'années, révèle des constantes et des variations tant sur le plan de l'ordre de présentation des contenus que sur les stratégies employées sur ces contenus, évoluant vers un certain équilibre les dernières années. Existerait-il un ordre de présentation privilégié des contenus, vers lequel pourrait évoluer tout formateur expérimenté ?

Nous avons cherché des éléments de réponse à ces questions d'une part en analysant notre propre pratique ; c'est elle qui nous a permis de faire les hypothèses sur l'ordre de présentation des contenus, hypothèse que nous avons testée par un questionnaire distribué à des pairs, lors du colloque des formateurs de maîtres en mathématiques d'Aussois (43 recueillis sur une centaine distribuée) ; d'autre part en étudiant les écrits de formation recensés précédemment au niveau des thèmes et des stratégies dominantes utilisées pour les traiter.

Pour ces études, nous avons dû décider d'une entrée pour les contenus de formation. Pour une communication maximale avec tous les partenaires du système (collègues formateurs, instituteurs titulaires, étudiants) , nous avons choisi comme entrées les thèmes mathématiques classiques de l'école élémentaire répertoriés ci-dessous.

A Nombre entier **B** Addition **C** Soustraction **D** Multiplication **E** Division	**F** Rationnels et décimaux **G** Opérations sur décimaux **H** Fonctions numériques **I** Mathématiques et maternelle	**J** Géométrie plane des figures **K** Géométrie plane des transformations **L** Géométrie des solides **M** Mesure

La formation dispensée comporte au gré des formateurs compléments mathématiques et aspects professionnels liés aux thèmes ci-dessus[8]. Les entrées n'augurent pas des contenus explicitement traités dans la formation, elles ne permettent que de les décrire.

[7] D.Butlen, pages 123 et suivantes, dans *Documents pour la formation des Professeurs d'Ecole en Didactique des mathématiques*, COPIRELEM, Cahors 1991.

[8] Pour plus de détails sur ce que peuvent recouvrir les savoirs autour de certains thèmes, cf. thèse C.Houdement pour les thèmes *Division*, *Proportionnalité* et *Grandeur et mesure*.

Des éléments sur les pratiques des formateurs

Les études précédemment introduites nous ont permis de pointer certains éléments sur les pratiques des formateurs.

1 L'étude de l'organisation des contenus dans les pratiques des formateurs a révélé qu'il n'existait pas d'ordre fixe de présentation. Par contre viennent en tête des thèmes mentionnés la première année : *géométrie plane, fonctions numériques, division* et *entiers, rationnels et décimaux.*

2 A travers les écrits sur la formation se révèlent des relations entre thèmes et stratégies, résumées dans le tableau suivant.

Thèmes	nombre entier, addition, soustraction, multiplication	géométrie, mesure, fonctions numériques	non entiers	division
Stratégies	transposition et monstration	homologie (avec éléments de transposition)	culturel mathématique, transposition, homologie	toutes les stratégies

Tableau 1

Les différents thèmes qui nous servent d'entrées pour la formation se trouvent donc regroupés selon des stratégies dominantes, en quatre blocs. Nous retrouvons bien sûr une particulière richesse stratégique pour la division euclidienne dans N.

Nous avons donc cherché à trouver ce qui pouvait créer ces préférences, d'une part sur l'ordre, d'autre part sur le choix des stratégies.
Autrement dit, quels peuvent être des déterminants de choix pour le formateur parmi ces variables possibles pour la formation ?
Cette partie de notre travail s'est limité à l'émission d'hypothèses, que nous livrons ci-dessous.

Nous faisons l'hypothèse que ces déterminants sont bien sûr dans la connaissance que les formateurs ont du **public des futurs formés,** mais nous pensons qu'ils peuvent être aussi du côté du terrain d'exercice futur de ces formés, autrement le terrain des classes dans lesquelles ils sont susceptibles d'exercer. En quelque sorte, des indices pour les choix des formateurs sont à chercher **en amont** de la formation (les étudiants AVANT) mais aussi **en aval** de la formation (le milieu des enseignants qui les accueillera et régulera leurs jeunes habitudes).
Nous essayons donc de proposer de nouvelles variables, qui aideront le formateur à faire ses choix. Cette étude prend appui sur un essai de détermination des caractéristiques du public des futurs formés par un questionnaire (135 dépouil-

lés), l'expérience que nous avons de leurs compétences mathématiques a priori, la connaissance que nous nous sommes forgée des habitudes d'enseignement du terrain (en général lors de stages de nos étudiants).

Des liaisons possibles entre public des formés, terrain d'exercice et variables à la charge des formateurs

Des cartes par thème

Pour cette étude, nous avons cherché à définir des indices qui caractérisent le public des formés et terrain, indices auxquels soient sensibles les formateurs. Ce qui nous a amenés à retenir les éléments de caractéristiques suivants.

Pour les étudiants
a - La connaissance a priori qu'ont les étudiants sur le thème.
b - L'idée que les étudiants ont de leur compétence sur le thème.
c - Leur désir de travailler l'aspect mathématique de ce thème.

Le **a-** peut être évalué soit par des tests sur les étudiants avant de traiter d'une quelconque manière le thème en question, soit par l'expérience du formateur (qui extrapole de son expérience passée, quand le public garde sensiblement le même profil).
Le **b-** et le **c-** se sont révélés pertinents dans la mesure où ils ont permis de différentier des thèmes, ce que nous avons constaté par un questionnaire[9] (135 réponses dépouillées sur plusieurs groupes de PE1 d'une même année sur deux lieux : Rouen, Evreux).

Pour le terrain
A - L'impact du thème dans les mathématiques de l'école élémentaire
B - L'existence d'écrits de référence auxquels il est possible de renvoyer les étudiants
C - Notre évaluation du traitement du thème par les maîtres de l'académie.

A- a été examiné à travers les programmes, les manuels et les habitudes.

---

[9] Les étudiants ont été amenés à ranger les thèmes placés en abscisse du graphique selon plusieurs questions. Ont été exploitées les questions suivantes (cf. annexe) :
(1)- Quels thèmes souhaitez-vous voir traités en priorité? Les ranger en les numérotant des plus nécessaires vers les moins nécessaires.
(2)- Sur quels thèmes vous sentez-vous à peu près "au point"? Les ranger du plus connu au moins connu.
(3)- Y a-t-il des thèmes qui vous effraient plus que d'autres? Lesquels? Pourquoi?
(4)- Donnez les thèmes, par ordre d'importance, sur lesquels vous sentez le plus nécessaire une formation professionnelle.

B- dépend bien sûr des options du formateur, qui considère tel ou tel écrit en conformité avec ce qu'il souhaite voir mis en place à l'école élémentaire.
C- a été tiré de notre expérience des pratiques du terrain, observées lors de visites ou tirées de discussions avec des maîtres venant en formation continue.
Rappelons que l'appréciation de ces aspects, dans la formulation choisie, reste profondément liée au formateur.

Ces différentes rubriques, au nombre de six, permettent au formateur de pointer certaines différences et certaines analogies entre les thèmes. L'ensemble de ces six rubriques, que nous pouvons remplir pour chaque thème de la formation, constitue ce que nous appelons une "carte" du thème. Nous obtenons les cartes suivantes

entiers	addition	soustraction	multiplication.
a+b+c0 A+B+C-	a+b+c0 A+B+C+	a+b+c0 A+B+C-	a+b+c0 A+B+C+

division
a-b+c+ A+B+C-

fonction	non entiers.	géométrie	grandeurs
a-b-c+ A-B+C-	a-b-c+ A+B-C-	a-b-c+ A-B-C-	a-b-c+ A-B-C-

Tableau 2

Il nous faut expliciter la signification des exposants +, -, 0.
Pour les petites lettres **a, b** et **c,**
- **a+** signifie que les étudiants ont une bonne connaissance outil du thème a priori (du point de vue du formateur) ; **a-** qu'ils ont de sévères lacunes mathématiques sur ce thème ;
- **b+** veut dire que les étudiants pensent qu'ils connaissent suffisamment le thème ; **b-** qu'ils sont conscients de leurs lacunes sur le thème en question ;
- **c+** suppose que les étudiants ont un désir particulier d'entendre des mathématiques sur ce thème ; **c0** qu'ils n'en ont pas spécifiquement envie (nous avons préféré le codage **c0** à **c-** car ils n'expriment pas un manque d'envie)

Pour les grandes lettres,
- **A+** signifie le thème est considéré comme important à l'école, **A-** qu'il peut, à la limite, être peu traité ou écarté des pratiques des maîtres ;
- **B+** signifie qu'il existe, selon le point de vue des formateurs, des écrits de référence (manuels scolaires, livres du maître, écrits pédagogiques) lisibles par les étudiants (c'est-à-dire dont le formateur aura préparé la lecture) en conformité avec l'idée que le formateur se fait de l'enseignement à l'école élémentaire ; **B-** qu'il n'existe pas (encore) de tels ouvrages ;
- **C+** : le formateur estime que le thème est correctement traité dans son académie (d'après des visites, formation continue,...) ; **C-** : qu'un gros effort de formation est à faire pour changer les pratiques du terrain.

Liaisons entre cartes et variables du formateur

Le croisement des relations thème-stratégie et de ces cartes montre

- que ces cartes peuvent permettre d'expliquer des différences stratégiques, puisque des regroupements se retrouvent dans les tableaux 1 et 2 ;
- en l'occurrence les thèmes plutôt méconnus des étudiants (ceux qui disposent d'une carte a-b-) sont traités avec des stratégies d'homologie ; les thèmes mieux connus (ceux qui disposent d'une carte a+b+) sont plutôt traités avec des stratégies de transposition et monstration.

Remarque : le thème de la *division* garde un statut particulier, ce thème est prétexte à tous les traitements stratégiques. Le thème des *non-entiers* comporte deux parties : d'une part, la partie *nombres décimaux*, relativement connue des étudiants, d'autre part la partie *nombres rationnels* (puis réels) plus méconnue. A ce titre sans doute, le thème *non entiers* relève à la fois des stratégies liées aux thèmes plus connus et de celles liées aux thèmes moins bien connus.

De plus si on lie cela aux remarques sur l'ordre, il semblerait que **les thèmes plus connus sont réservés à la première année de formation.**

Ainsi notre recherche permet de pointer certaines liaisons entre des thèmes et des stratégies, mais elle ne donne pas d'explication totale des choix des formateurs. C'est pourquoi nous cherchons d'autres hypothèses.

D'autres hypothèses pour les choix d'ordre et de stratégies

L'étude du public et du terrain semble fournir des éléments explicatifs sur les choix des formateurs. Mais elle ne permet pas de déduire des ordres totaux pour la présentation des thèmes mathématiques de la formation. L'idée est donc d'intégrer dans l'étude la composante personnelle du formateur. Cette composante personnelle sera explicitée sous forme d'hypothèses sur les "croyances"[10] des formateurs, croyances qui ne sont pas strictement personnelles, mais résultent aussi d'habitudes de formations, transmises de formateurs en formateurs. Nous nous proposons de présenter des hypothèses sur les principes de ces croyances, dont la combinaison forgerait les "croyances" du formateur.

Ces principes pourraient s'appuyer sur certaines positions.

Position 1 : s'appuyer sur l'ordre chronologique des programmes de mathématiques de l'école.

Position 2 : s'appuyer sur la connaissance, par les formés, des thèmes mathématiques.

Position 3 : décider d'une hiérarchie de stratégies et organiser son plan selon cette hiérarchie de stratégies.

Position 4 : s'appuyer sur les outils pédagogiques disponibles.

Position 5 : s'appuyer sur l'appréciation des pratiques du terrain sur le thème.

---

[10] Cf. Bourdieu *Questions de sociologie*, 1984, Editions de Minuit, page 114

Position 6 : choisir des connaissances didactiques ou pédagogiques comme objectifs de formation et illustrer ces connaissances à travers l'étude de thèmes mathématiques (c'est une croyance encore peu partagée).
Chaque position peut donner naissance à un ordre ou à l'ordre inverse : par exemple la position 1 peut amener le formateur à traiter d'abord des notions mathématiques plutôt sous-jacentes aux classes de maternelle et de CP, et à garder pour plus tard celles du cycle III. Inversement il peut choisir de traiter d'abord des notions du cycle III et de garder les mathématiques liées à la maternelle pour la fin de sa programmation.

Conclusion

Cette recherche nous a donc permis d'une part, de pointer des éléments de pratique de formateurs en mathématiques d'enseignants du premier degré (sur l'ordre de présentation des thèmes et sur les relations entre thèmes et stratégies)", d'autre part de proposer des éléments de différenciation des thèmes entre eux selon certains critères (selon notamment les habitudes que manifestent formés et "terrain" face à ces thèmes).
Il nous semble que ces travaux contribuent à la professionnalisation du métier de formateur dans la mesure où ils permettent d'une part une analyse de certaines habitudes de formation, d'autre part, par la transmission d'une culture commune analysée, ils peuvent aider le nouveau formateur dans ses choix de programmation et de stratégies du moins pour la première année de formation des maîtres du premier degré en mathématiques.

Enseignement et apprentissage en PE1

Gaby Le Poche

Extrait du Cahier du Formateur, Tome 1 – Perpignan 1997.

Cet article est la présentation d'une séance de formation en PE1 dont l'objectif est de permettre aux étudiants de s'approprier certains éléments de didactique *en étant eux-mêmes placés en situation d'apprentissage puis en analysant le déroulement de la séance*.

INTRODUCTION

Contexte
La séance de formation s'est déroulée au cours du premier trimestre de première année, après une dizaine d'heures d'interventions avec le même formateur sur les aspects notionnels de la numération.

Les étudiants ont donc déjà eu l'occasion de se familiariser avec la conception de l'apprentissage qui sera développée et analysée au cours de cette séance.

Objectifs

Objectifs mathématiques
- Déterminer une mesure par commensuration
- Réinvestir les rationnels dans un contexte de mesure d'aires

Objectifs didactiques
Les situations illustrent les notions d'appropriation et de dévolution des tâches, de contrat didactique, de validation et de preuve.

Objectifs méthodologiques
La séance met en évidence une certaine conception de l'apprentissage et développe une méthodologie, transférable, du travail par groupe.
L'accent est mis sur des techniques de gestion des différences de rapidité entre les groupes.

Structures pédagogiques
Les vingt-quatre étudiants sont répartis en sept groupes de trois ou quatre personnes constitués par affinité.

Matériel
Deux rétroprojecteurs et deux tableaux de papier (paper-board) destinés à séparer très nettement les activités d'ordre méthodologique de celle d'ordre mathématique.

PHASE 1

Présentation des objectifs et des tâches associées

L'objectif d'ordre méthodologique

Familiarisation, en situation vécue, à une méthodologie conforme à une certaine conception de l'apprentissage.
(conception à laquelle adhère le formateur).

Il est écrit par un étudiant, sous la dictée de l'enseignant, sur l'un des tableaux de papier (il restera présent pendant toute la durée de la séance). Les tâches correspondantes ne sont pas précisées.

La tâche d'ordre mathématique
Mesurer des aires

Elle est décrite de la même façon sur l'autre tableau de papier mais, cette fois, ce sont les objectifs associés qui ne sont pas portés à la connaissance des étudiants.

PHASE 2

Appropriation de la tâche d'ordre mathématique

SITUATION S1 : " la clé à molette " (voir annexe 1)

Matériel

- Une fiche par étudiant.
- La même fiche est également placée sur le rétroprojecteur (côté réservé aux mathématiques).
- Un grand tableau mural sur lequel un représentant par groupe viendra écrire sa proposition de résultat (un numéro de référence a préalablement été attribué à chaque groupe).
- Crayons, calques, ciseaux et compas à disposition.

Déroulement

Le professeur donne la consigne suivante :

Il s'agit de calculer la mesure de l'aire de la surface S1 en prenant U1 comme unité. Lorsque les trois personnes du groupe se seront mises d'accord, un représentant viendra écrire le résultat commun sur le tableau préparé à cet effet.

Comme prévu, le tableau se remplit rapidement du résultat 8, commun à tous les groupes.
Le professeur fait remarquer que tous les groupes ont produit un résultat, qu'il n'y a pas de divergences, mais que ce résultat reste sous la responsabilité des étudiants et qu'il ne saurait en aucun cas être cautionné par lui.

PHASE 3

Conception de l'apprentissage

Présentation rapide de trois conceptions de l'apprentissage avec le statut de l'erreur qui leur correspond :

- la " tête vide ",
- les " petites marches "
- le " constructivisme ".

Matériel
Un transparent (annexe 7)

Le lecteur, désigné, lit les phrases pointées par l'enseignant. Eventuellement, celui-ci les explicite. L'enseignant précise aux étudiants qu'il va tenter de mettre en oeuvre une conception de séance s'appuyant sur le " constructivisme " et qu'ils devraient donc rencontrer un ou des obstacles qui pourraient, éventuellement, les déstabiliser provisoirement pour une accommodation future à un niveau supérieur.

Grille d'analyse

Le professeur présente une " mini-grille " d'analyse d'une situation d'apprentissage.

Matériel
Un transparent (annexe 8)

Le seul point développé est le type de validation recherché. Un lecteur désigné lit les phrases pointées par l'enseignant, celui-ci les explicite.

Le rôle de l'enseignant

Présentation d'un transparent qui définit le rôle de l'enseignant au cours d'une situation d'apprentissage.

Matériel
Un transparent (annexe 9)

L'essentiel consiste à développer la notion de contrat. Il est ici explicitement passé entre l'étudiant et l'enseignant : chacun connaît le rôle de l'autre.

Le transparent restera projeté durant la durée des recherches et l'enseignant pourra y faire référence.

PHASE 4
Appropriation de la tâche d'ordre mathématique (suite)

SITUATION S2 : " *la cocotte* " *(voir annexe 2)*

Matériel

Identique à celui de la phase 2.

Déroulement

Le professeur donne la consigne suivante :

Calculez la mesure de l'aire de la surface S2 en prenant U2 comme unité.
Après accord dans le groupe, un délégué écrira le résultat dans le tableau préparé à cet effet.

Cette fois, et cela avait été prévu, les propositions s'étalent dans le temps et l'enseignant gère cette différence de rythme en proposant aux plus rapides une situation S3 : " le sphinx " (annexe 3). Le transparent " cocotte " reste cependant projeté durant toute la durée de cette phase.

Après cinq minutes, le dernier groupe écrit son résultat : 16. Celui-ci est encore commun à toute la classe. L'enseignant réitère alors les remarques déjà formulées au cours de la deuxième phase sur l'absence de caution de sa part quant aux résultats trouvés par les groupes.
Remarque : pour cette activité, on peut déjà constater que les procédures se différencient.

PHASE 5

Création d'un obstacle

L'objectif de cette phase est de créer un obstacle qui oblige les échanges au sein de chaque groupe et entre les groupes, obstacle qui exige la justification des procédures.

Matériel

Identique à celui de la phase 2.

Première étape : les rationnels

Cette première étape vise une " réactivation " des connaissances mathématiques sur les rationnels.

La comparaison des unités U1 et U2 sert de prétexte à l'introduction du rationnel 1/4 : U2 = 1/4 x U1.

Puis, le maître soumet au groupe classe, sous la forme d'un transparent, des exercices issus de la brochure " La machine à partager " de l'IREM de Rouen et présentés sous forme de Q.C.M. (annexe 6).

Quelques difficultés surgiront, mais seront rapidement résolues.

Deuxième étape : l'obstacle

SITUATION S4 " *le puzzle* " (voir annexe 4)

Déroulement prévu

- Analyse a priori des procédures.

La situation est construite de telle sorte qu'à vue d'œil ou même par découpage, les étudiants proposent les résultats suivants :

C = 1/2 x U4
B = 3/2 x U4
D = (1+1/4) x U4
E = 1 x U4
A = 1/4 x U4

et ceci malgré la précision, donnée plus tardivement par l'enseignant, que le côté du carré de base est égal à 3 fois chaque côté de l'angle droit du triangle rectangle A.

- On espère alors que l'un des groupes d'étudiants proposera de sommer les mesures des aires pour trouver 4,5.

Cela devrait permettre de rejeter les propositions précédentes sans trop de difficultés, car mes U4 (A+B+C+D+E-)= 4.

- Dans tous les cas, l'enseignant soumettra à la réflexion des élèves " l'unité manquante " (puzzle de FIBONACCI, nombres 64 et 65, cf. annexe 5).

Les explications provisoires suivantes, en référence avec S4, seront alors fournies par le professeur :

- *En déplaçant les pièces d'un puzzle, celles-ci diminuent.*

Ou

- *La formule donnant l'aire d'un rectangle, apprise à l'école, est fausse.*

Ou

- *Les calculs sur la somme de rationnels sont erronés.*

Cette mise en scène a plusieurs objectifs :

- Inciter les étudiants à calculer, si cela n'a pas été fait, la somme des mesures trouvées.

- Rendre les affirmations de l'enseignant susceptibles de critiques et développer alors la notion de preuve.

- Mettre les étudiants devant leur responsabilité d'invalider eux-mêmes leur proposition de solution.

- Gérer la différence de rapidité, en proposant aux groupes ayant terminé leur travail (y compris la préparation de l'exposé de leur méthode sur tableau de papier grand format) la résolution de l' " énigme de l'unité manquante ". Le choix des nombres est différent de celui qui a été proposé au rétroprojecteur, ce qui rend la tâche d'autant plus difficile.

Si la solution à la situation S4 tarde à venir dans certains groupes, l'enseignant imposera un brassage des groupes n'ayant rien découvert, puis, après un échange, un retour à la composition initiale.

PHASE 6

Retour sur la méthodologie

Objectif

Institutionnalisation locale de quelques notions méthodologiques et didactiques.

Matériel

Divers transparents

Méthode

Questionnement collectif du groupe-classe.

Déroulement

1. Le rôle de l'adulte

On étudie ici le rôle de l'adulte au cours des situations d'apprentissage (transparent : annexe 9).
Est abordée la notion " d'histoire de la classe ".

2. La mini-grille

La " mini-grille " d'analyse d'une situation d'apprentissage (transparent : annexe 8).

La séance est analysée en fonction des quatre points du document :

- La gestion du temps scolaire.
- Le degré de liberté de l'élève.
- Le rôle de l'erreur.
- La validation.

Les étudiants constatent que les critères d'efficacité pointés dans cette fiche ont été respectés.

3. La situation problème

Il s'agit de la situation-problème d'apprentissage (transparent : annexe 10).

Les étapes sont les suivantes :

- L'enseignant développe, à travers le rôle des situations S1 et S2, la notion d'appropriation des tâches.
- Est abordée la fonction spécifique de la situation S3.
- La situation S4 permet de revenir sur la notion d'obstacle qui a été fortement ressentie (transparent : annexe 7).
- Le besoin éventuel d'une évaluation individuelle est évoqué.

4. Débat

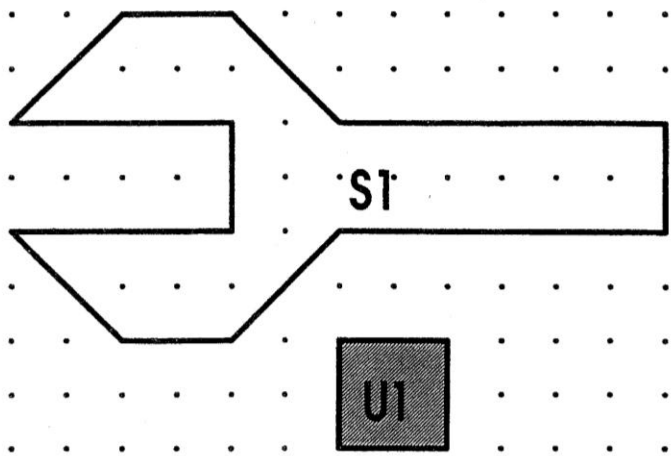
La séance se termine par une phase au cours de laquelle les étudiants se posent de nombreuses questions et amorcent spontanément des discussions.
Les interrogations sont parfois relayées par le formateur au niveau de toute la classe :

- Sur la constitution des groupes : homogènes ou hétérogènes ?
- Sur l'évaluation de type diagnostic.
- Sur la gestion des différents rythmes de travail.
- Sur le rôle affectif de l'enseignant.

ANNEXES 1 et 2

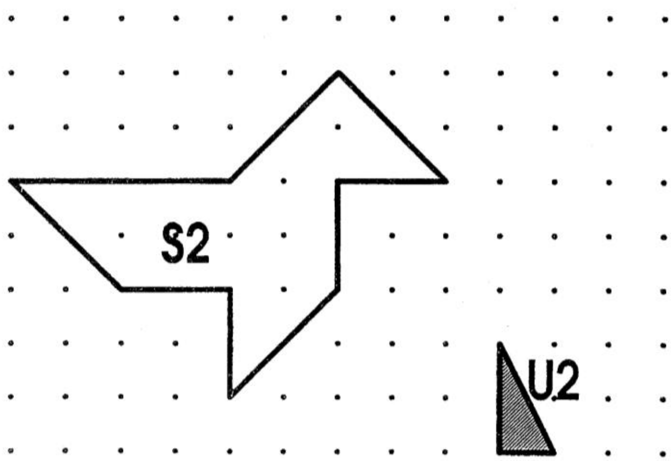
Annexe 1

La clé à molette



Annexe 2

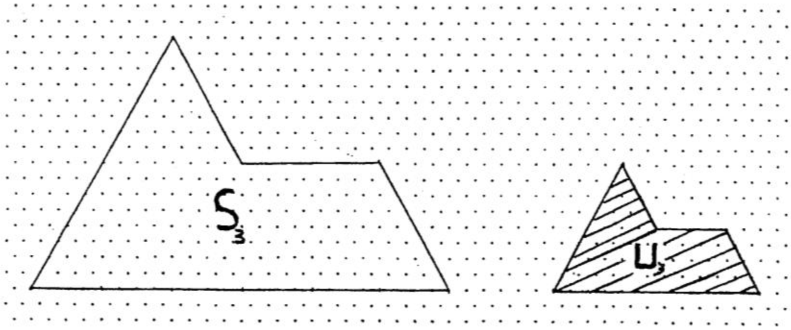
La cocotte



ANNEXES 3 et 4

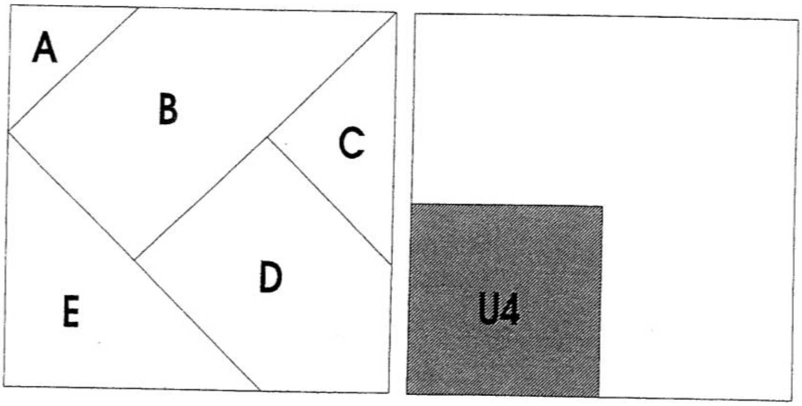
Annexe 3

Le Sphinx



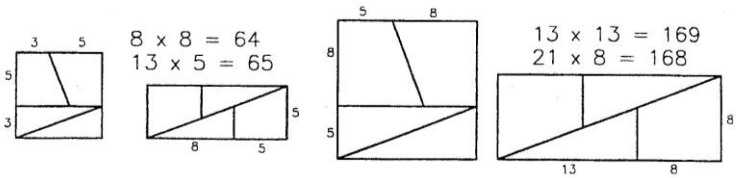
Annexe 4

Le puzzle

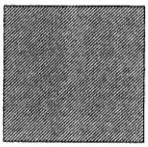


ANNEXES 5 et 6

Annexe 5

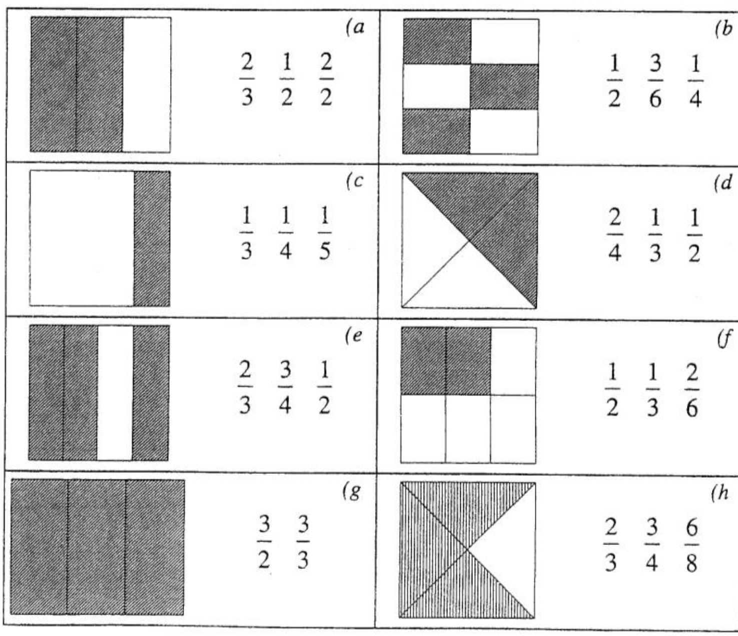


Annexe 6



(extrait de *"La machine à partager"*, publication de l'IREM de Rouen)

Voici la surface étalon. L'aire hachurée est 1.
A toi d'entourer les "bonnes fractions" qui indiquent l'aire hachurée.
Attention aux pièges !

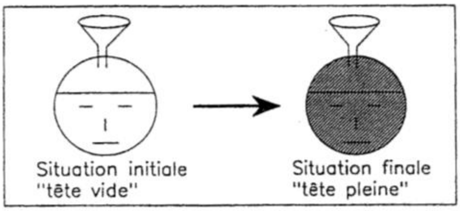


ANNEXE 7

Annexe 7

CONCEPTIONS DE L'APPRENTISSAGE — **STATUTS DE L'ERREUR**

CONCEPTION DE LA TÊTE VIDE



limite : entre le sens du message communiqué et le sens que l'élève lui donne il y a une <u>énorme</u> différence.

L'ERREUR EST RÉVÉLATRICE D'UN DYSFONCTIONNEMENT.

ELLE EST SYNONYME <u>D'ÉCHEC</u> (POUR L'ÉLÈVE ET POUR LE PROFESSEUR)

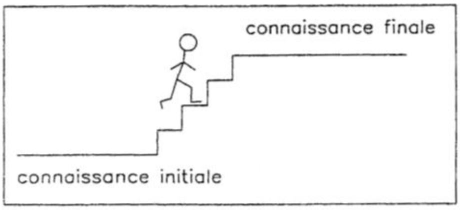
IL FAUT SUPPRIMER L'ERREUR A TOUT PRIX.

ON RÉEXPLIQUE.

SI L'ÉLÈVE FAIT TROP D'ERREURS, IL REDOUBLE.

AINSI IL AURA DE NOUVELLES RÉEXPLICATIONS

CONCEPTION DES PETITES MARCHES

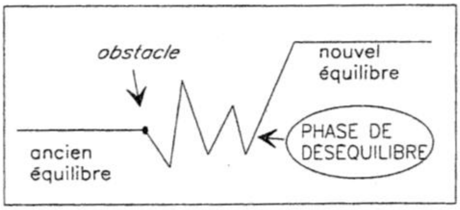


exemple : enseignement programmé (EAO, dérivé de la PAO)
limite : savoir faire les tâches intermédiaires ne signifie pas savoir faire <u>l'intégralité</u> de la tâche

DANS CETTE CONCEPTION, L'ERREUR DOIT ÊTRE ÉVITÉE ET SI ELLE SE PRODUIT, LES CONNAISSANCES DE L'ÉLÈVE NE SONT PAS REMISES EN CAUSE, MAIS C'EST LA PROGRESSION PROPOSÉE QUI NE CONVIENT PAS :

<u>LA MARCHE EST TROP HAUTE</u>.

LE CONSTRUCTIVISME



1) C'est en agissant qu'on apprend
2) L'élève est au centre de l'action pédagogique
3) Il faut qu'il y ait remise en cause des connaissances antérieures pour qu'il y ait progrès
4) Il est souvent indispensable de provoquer des conflits socio-cognitifs.

L'ERREUR N'EST PLUS <u>UNE FAUTE</u>.

QUAND UN ÉLÈVE APPREND, IL EST <u>NORMAL</u> QU'IL FASSE DES ERREURS.

S'IL NE FAIT PAS D'ERREUR, <u>IL N'APPREND PAS. IL SAIT DÉJÀ</u>.

L'ERREUR EST UN <u>MOYEN</u> POUR L'ENSEIGNANT DE MIEUX CONNAÎTRE <u>LES CONCEPTIONS INITIALES</u> DES ÉLÈVES.

L'ENSEIGNANT DOIT CONVAINCRE L'ÉLÈVE QUE <u>SES ERREURS L'INTÉRESSENT</u>.

ANNEXE 8

PRINCIPAUX INDICATEURS D'EFFICACITÉ D'UNE SITUATION D'APPRENTISSAGE
(pour une première analyse rapide en cours de réalisation)

1. La gestion du temps scolaire

- **Temps d'intervention** du maître (temps d'enseignement) : il devrait **diminuer.**
- **Temps de recherche** de l'élève (temps d'apprentissage) : il devrait **augmenter.**

2. Le degré de liberté de l'élève

- **L'enfant met-il en oeuvre ses propres procédures** ou se contente-t-il de suivre mécaniquement les procédures suggérées par le maître.
  Il devrait y avoir davantage de procédures différenciées de la part des élèves.

3. Le rôle de l'erreur

- Le maître permet-il son expression ou la sanctionne-t-elle ?

Les **erreurs** devraient être **considérées positivement** par le maître (comme le reflet des représentations des élèves).

4. La validation

- Le fait de l'enseignant ou une **rétroaction** de l'élève ?
  On devrait constater que la situation proposée est autovalidante ou que les procédures des enfants sont validées au cours d'une interaction entre pairs ou d'un débat scientifique entre différents groupes.

La validation ne devrait jamais être le fait de l'enseignant.

Annexe 9

RÔLE DE L'ADULTE AU COURS DES SITUATIONS D'APPRENTISSAGE

Au cours d'une séance

- Il peut *rappeler* aux enfants la *tâche* à accomplir.
- Il peut leur *montrer* ce qu'ils *savent déjà faire* en réactivant, au besoin, leurs *connaissances de niveau inférieur* (connaissances mobilisables).
- Il peut dispenser des *encouragements* (rôle affectif).
- Il peut les *aider* à s'organiser, à *organiser* leurs recherches, à bien les présenter...
- Lorsque les opinions sont divergentes, il peut *provoquer un débat* et il doit alors l'animer.

En début de séance

- Il doit rappeler ou faire *rappeler le contenu de la séance précédente.*

En fin de séance

- Toute séance devrait se terminer par un retour rapide sur ce qui a été vécu et sur ***l'état des travaux en cours***, travaux qui vont éventuellement se poursuivre au cours d'une séance suivante *("histoire de la classe").*

Annexe 10

La situation-problème d'apprentissage
(séquence d'apprentissage)

Construction de la situation d'apprentissage

Un objectif obstacle.

Face à cet obstacle :

- quelles sont les procédures initiales (P.I.) observées ?
  Évaluation diagnostique
- quelles sont les procédures finales (P.F.) caractéristiques du franchissement de l'obstacle (champ conceptuel) ? Le but à atteindre est d'obtenir la production des P.F. par l'apprenant.
- si P.I. = P.F. l'apprentissage a déjà eu lieu.

Une situation avec des variables de la situation : il faut repérer les variables didactiques (celles qui auront une influence sur les procédures des élèves) au cours d'une analyse a priori.

Leurs modifications obligeront l'élève à passer de P.I. à P.F.

Différentes étapes

Remarque : une étape n'est pas une séance scolaire, une séquence d'apprentissage peut être constituée de plusieurs séances.

1. Appropriation

- La tâche doit être réussie avec les P.I. (connaissances anciennes de niveau inférieur).
- Cela permettra à l'élève de bien intégrer la tâche à réaliser. Il est souhaitable que celle-ci soit auto-validante. On est ici au stade de la compréhension des consignes de travail.

2. Apprentissage

- Fixation des contraintes (les changements de valeur de certaines variables didactiques). Elles devraient obliger l'apprenant à ne plus utiliser ses P.I. (inopérantes maintenant) pour inventer les P.F.

3. Évaluation

- Avec un dispositif semblable, mais un travail individuel : il faut pouvoir constater que dès la fixation des contraintes l'enfant utilise les P.F.

La boîte du pâtissier

Marie-Lise Peltier- Catherine Houdement- Denis Butlen

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Colmar 1993.

Cet article est la présentation d'une situation en formation initiale ou continue.
A partir d'une activité de fabrication de pliage d'une boîte parallélépipédique, il est possible de pointer les concepts didactiques de situation, de dialectique outil-objet, de variable didactique.
L'idée de cette activité est tirée de la brochure « Aides pédagogiques CM Situations Problèmes, P.103 (APMEP 1988) ».

Objectifs

Objectifs didactiques

1 - Mettre en évidence quelques concepts de didactique (situation didactique, dialectique outil-objet, variable didactique, dévolution...)

2 - Analyser des processus de recherche, montrer l'importance

- du cheminement personnel
- de la confrontation
- de la validation interne comme moteur de la recherche (le fait de pouvoir évaluer soi-même son travail permet de continuer si nécessaire la recherche sans nouvelle intervention du maître).

Objectifs mathématiques

1 - Revenir sur le vocabulaire géométrique et sur l'étude d'objets géométriques du plan et de l'espace.

2 - Modéliser une situation.

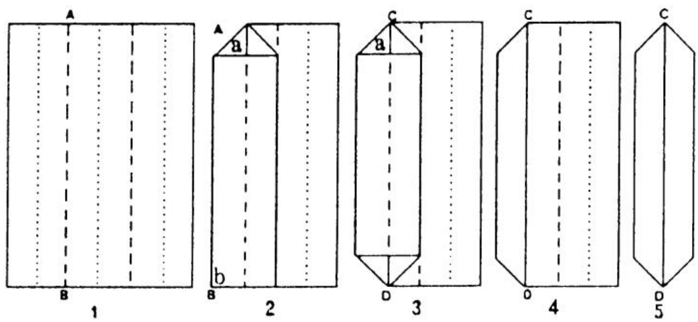
ACTIVITÉ

Les étudiants résolvent le problème mathématique, puis visionnent le document vidéo[1] relatant la résolution dans une classe de CM.

[1] Cette vidéo est disponible à l'I.U.F.M. de Haute-Normandie, Département audio-visuel, B.P. 18, 76131 Mont-Saint-Aignan Cedex

La séquence est menée avec des objectifs mathématiques pour que les étudiants vivent la situation côté élève et comparent leurs réactions et leurs procédures de résolution à celles d'élèves de CM.

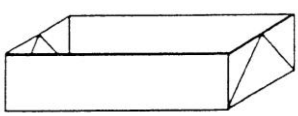
<u>Phase 0</u>
Apprentissage du mode de construction de la boîte



Consigne
"Construisez une boîte à partir d'une feuille rectangulaire de format A4 en suivant les instructions de pliage (P) suivantes :

1) faites apparaître les cinq plis (équidistants) indiqués;
2) pliez suivant AB et réalisez les pliages du coin (a);
3) réalisez dans le coin (b) les mêmes pliages qu'en (a);
4) pliez selon le pli en creux CD;
5) effectuez les mêmes actions dans la partie droite de la feuille : vous obtenez la figure 5;
6) il reste à ouvrir la boîte et à marquer les plis des arêtes. "

Remarque
On obtient deux boîtes de formes différentes suivant que l'on plie sur la longueur ou sur la largeur de la feuille A4.



<u>Phase 1</u>
Les boîtes à fond carré

Organisation

Par groupes de 3 ou 4 après une indispensable recherche individuelle de 5 minutes.

Consigne 1

"Construisez en suivant les instructions (P) une boîte à fond carré, puis rédigez une affiche relatant la recherche, la méthode retenue, les conclusions que vous en tirez en précisant les dimensions de la feuille qui vous sert au pliage. II est important que vous notiez tous les essais, même ceux qui n'ont pas abouti. "

Procédures observées chez les étudiants

Faire le pliage à partir d'une feuille carrée ;

Mesurer les dimensions de la boîte presque carrée obtenue en phase 0 et enlever la différence sur la longueur, puis sur la largeur.

Déplier la boîte construite dans la phase 0 et étudier les plis.

Construire un carré au centre d'une feuille et le compléter par les bandes nécessaires à la construction par pliage.

Dessiner sur le fond d'une boîte déjà construite un carré, déplier la boîte et construire par translation les bandes nécessaires pour la construction.

Remarques

Les procédures sont analogues à celles observées chez des enfants de CM2 confrontés à la même consigne.

Une consigne supplémentaire ("construisez la boîte à fond carré la plus grande possible à partir de la feuille A4") peut être proposée aux groupes ayant terminé la première tâche plus tôt (**gestion du temps).**

Mise en commun

Les affiches sont exposées devant la classe entière et commentées par leurs auteurs. Le professeur laisse exposer les groupes, sans prendre position ; il n'y a donc pas nécessairement de conclusion générale du type : "pour obtenir une boîte à fond carré de côté x, il faut partir d'une feuille de dimensions 2x, 3x."

Consigne 2

"Construisez une boîte dont le fond est un carré de 6 cm de côté, donnez les dimensions de la feuille servant au pliage en précisant celle suivant laquelle

vous pliez. Proposez une généralisation : quelles sont les dimensions de la feuille permettant de construire une boîte dont le fond est un carré de côté x ? "

Remarque

Une consigne supplémentaire pour **la gestion du temps** peut être : "construisez des boîtes à fond carré gigognes"

Synthèse

Cette synthèse permet de généraliser les procédures permettant une bonne construction et d'institutionnaliser" pour construire une boîte à fond carré de côté x, on peut partir d'une feuille rectangulaire de dimensions 2x et 3x et plier selon la longueur".

<u>Phase 2</u>

Conditions d'existence des boîtes.

I1 s'agit ici de relancer la recherche sur la liaison entre les dimensions de la feuille de départ et celles de la boîte obtenue.

Consigne 1
"De quelle feuille peut-on partir pour construire une boîte de fond 6 cm sur 13 cm ?"

Consigne 2
"Quelles sont les dimensions de la boîte obtenue en pliant une feuille 15x32 suivant la largeur ?"

Consigne 3

"Élaborez un tableau de valeurs numériques correspondant aux différentes boîtes construites pendant la recherche de la phase 1. Soulignez la dimension selon laquelle vous pliez."

Rectangle de départ	Dimensions du fond de la boîte	

Consigne 4
"Construisez une boîte de fond 8 cm sur 14 cm et de hauteur 5 cm."

Synthèse

Le tableau ci-dessous se trouve complété avec une nouvelle colonne, la hauteur de la boîte.

On formule une condition sur la hauteur pour qu'on puisse construire une boîte de fond de dimensions x et y et de hauteur h : "la hauteur de la boîte est toujours la moitié de l'une des dimensions du fond".

Phase 3

Extension du champ numérique, vers une modélisation algébrique

Consigne 1

(travail par groupe)

"Proposez une stratégie pour pouvoir répondre rapidement aux deux types de questions suivantes :

(1) à partir de la donnée des dimensions d'une feuille rectangulaire et de la dimension selon laquelle on plie, dites si l'on peut construire une boîte et donner les dimensions de la boîte obtenue,

(2) à partir des dimensions d'une boîte réalisée, donnez les dimensions de la feuille rectangulaire utilisée et la dimension selon laquelle on plie.

Rédigez un message expliquant (ou présentant) votre méthode."

Nous proposons le déroulement suivant :

• Donner une première série de questions, par exemple :

(1) "On dispose d'une feuille de dimension 12 et 17 cm, on plie suivant la largeur, obtient-on une boîte ? Si oui, quelles sont ses dimensions ? On plie suivant la longueur, obtient-on une boîte ? Si oui, quelles sont ses dimensions ?

(2) Trouvez les dimensions de la feuille permettant de construire une boîte de dimensions 12x15 et de hauteur 6 cm."

• Faire échanger les messages groupe à groupe.

• Redonner une nouvelle série de questions des types (1) et (2). Terminer par une question du type : *"à partir d'une feuille f, on obtient une boîte b, on prend une feuille F obtenue en doublant une des dimensions de f, on construit une boîte B ; donnez les dimensions possibles de la boîte B en fonction de celles de la boîte b ".*

• Laisser les groupes discuter deux à deux pour mettre au point leur message.

Synthèse

• Afficher les différents messages et les réponses aux questions qui sont posées.

• Comparer les procédures du point de vue de leur pertinence, de leur efficacité, de leur lisibilité, du cadre dans lequel elles sont rédigées (tableaux de nombres, écritures littérales, écritures fonctionnelles, textes en français...).
• Conclure
1 - Si on connaît les dimensions de la boîte (fond x et y, hauteur x/2), on obtient les dimensions de la feuille par la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \rightarrow (3x, x+y)$$

2 - Si on connaît les dimensions de la feuille x et y que l'on plie suivant x :

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(x, y) \rightarrow \left(\frac{x}{3}, y - \frac{x}{3}, \frac{x}{6}\right)$$

Cette phase peut éventuellement être prolongée par la recherche suivante.

Consigne 2

"Recherchez les conditions sur les dimensions x et y de la feuille pour que l'on puisse obtenir une boîte en la pliant suivant x. "

Synthèse

- Si $x < y$, le pliage est toujours possible.
- Si $x > y$, le pliage n'est possible que si $x < 3y$ (lien avec l'ensemble de définition de la fonction g).

Phase 4

(facultative) : relance vers des consignes avec contrainte sur le volume.

Exemples de consignes

Quelles feuilles choisir pour construire
• une boîte à fond carré contenant exactement 1/2 litre ?
• une boîte cubique contenant exactement 1 litre ?
• une boîte ayant un volume de 160 cm^3 ?"

Phase 5

Visionnement du film "la boîte du pâtissier"

I1 s'agit dans cette phase d'étudier les procédures des élèves de CM et de mettre en évidence le rôle de l'erreur.

ANALYSE DE L'ACTIVITÉ

<u>Analyse mathématique</u>

Cette situation permet :

- de faire des rappels de géométrie, notamment sur le vocabulaire ;
- d'élaborer un codage fonctionnel, utile comme outil de prévision : les fonctions f et g ont permis la généralisation.
- de travailler sur le raisonnement : les étudiants et les élèves de CM émettent des hypothèses, valident ou invalident ces hypothèses, mettent en évidence des erreurs de raisonnement du type : *"si je pars d'un rectangle, j'obtiens une boîte à fond rectangulaire, donc si je pars d'un carré, j'obtiens une boîte à fond carré."*

<u>Analyse didactique</u>

1 - Description de la situation

Il est possible de décrire les différents moments importants de la situation :

- la phase de dévolution,
- le type de consignes : courtes mais prétexte à des recherches poussées,
- la tâche de l'élève : production d'un objet soumis à des contraintes, possibilité de validation interne,
- le rôle de l'erreur : elle apparaît ici très positive car elle permet d'avancer soit en éliminant les hypothèses invalides, soit en les modifiant pour les rendre valides ;
- l'institutionnalisation possible à plusieurs moments :
    - sur des points méthodologiques,
    - sur le raisonnement,
    - sur les notions mathématiques.

2 - Quelques concepts de didactique

Conditions pour qu'un problème puisse être source d'apprentissage (mises en avant dans cette situation) :

- l'énoncé a du sens pour les élèves ;
- le problème est consistant (la réponse n'est pas évidente) ;
- l'élève comprend ce qu'est une réponse au problème ;
- il peut s'engager, dès la fin de la consigne, dans des procédures de résolution ;
- il peut en contrôler lui-même les effets.

Phases d'une situation didactique

Il est possible de pointer dans cette situation les phases :

• d'action,
• de validation,
• de formulation et de communication,
• d'institutionnalisation,
• de réinvestissement.

Dévolution

La phase 0 permet à l'élève d'apprendre le procédé de construction des boîtes et donc d'être libéré des difficultés matérielles pour la suite.

Dans la phase 1, réaliser effectivement l'objet et vérifier si la contrainte est obtenue motivent sa recherche.

Dialectique outil-objet

Elle fonctionne ici sur le savoir savant "fonction de $R^n \rightarrow R^p$ ".

En effet, ces fonctions interviennent comme outils implicites dans les phases 1 et 2. La phase 3 permet d'expliciter cet outil, de l'utiliser pour prévoir d'autres constructions, pour anticiper l'action. Une phase supplémentaire permettrait d'étudier les fonctions de R^n dans R^p en tant qu'objets, mais ceci est en dehors des objectifs de la formation mathématique des instituteurs.

Le fonctionnement **outil-objet** de la notion de fonction dans cette situation permet d'illustrer l'esprit des mathématiques :

- d'abord une **résolution locale**, suffisante dans un premier temps,
- puis une nécessité de **généralisation**, comme outil de prévision,
- enfin la puissance de la **modélisation** pour anticiper, pour résoudre en une seule fois une famille de problèmes isomorphes.

Les changements de cadres : nous avons constaté que certains étudiants ne mobilisaient jamais d'outils algébriques, ils pouvaient rester dans des cadres numérique ou géométrique. La situation n'impose pas forcément ces changements de cadres, ils doivent être sollicités par le professeur.

Les changements de cadres (passage d'un cadre géométrique à un cadre algébrique) peuvent être à la charge du professeur, ce sont les consignes suivantes qui peuvent les provoquer : phase 1 consigne 2 (généralisation), phase 3 consigne 1 (nécessité de rapidité et de communication).

Variables didactiques

Le professeur explicite les variables qu'il a utilisées et ses choix.

Le fait d'imposer ou non la hauteur de la boîte à construire (phases 2, consignes 1 et 2) influe sur la manière dont les étudiants prennent en compte les résultats antérieurs.

Le fait de demander une boîte constructible ou non dans une feuille A4 (phase 3, consigne 1) n'est pas neutre. En effet si la boîte demandée ne peut être effectivement construite, les procédures de constat et de tâtonnement se trouvent bloquées et les étudiants passent à des procédures de prévision, donc cherchent à modéliser la situation.

I1 aurait aussi été possible de ne pas imposer le nombre de lignes de pliage dans le mode de fabrication de la boîte (par exemple, plier en 10 au lieu de plier en 6) ; ce nombre est donc une variable didactique, non prise en compte dans cette séquence, parce qu'elle peut induire une recherche du type de pliage à faire, au lieu d'une étude des dimensions de la feuille à plier.

Contrat

Il est possible de faire prendre conscience aux étudiants qu'ils ont fait fonctionner les règles d'un contrat implicite, par exemple :

- un problème posé à l'école a toujours une solution (cf. phase 2, consigne 2),
- on ne rédige que "la bonne solution" (cf. phase 1, consigne 1).

D'où la nécessité

- d'être attentif et vigilant aux effets de contrat,
- d'expliciter le plus souvent possible le contrat, notamment par le choix de consignes appropriées.

La vache et le paysan

Hervé Péault

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques- Cahors 1991.
Cet article présente un compte rendu d'activité menée en formation initiale et continue.
A partir de la résolution d'un problème, les participants sont invités à se convaincre mutuellement de la justesse de leurs solutions. L'activité et le débat qui suit permettent d'aborder les thèmes de la résolution de problèmes, de la démonstration, de l'analyse des erreurs, ainsi éventuellement que celui des situations additives.

Contexte

J'ai utilisé 5 ou 6 fois cette activité, en formation initiale et en formation continue, sur une durée de 2 h ou 3h.
Elle me semble être une bonne activité introductive dans le cadre d'une formation. Elle permet de soulever divers points de didactique, notamment les problèmes de formulation d'une argumentation, de validation par la démonstration, d'analyse et de compréhension des erreurs ... Ce peut en outre être un support intéressant pour l'étude d'une typologie des situations additives.

Particularité

Le problème de départ a ceci de particulier qu'il paraît très simple mais qu'il est fréquent que les gens trouvent des solutions erronées sans qu'il soit pour autant toujours facile d'en montrer la fausseté.

Le Problème

"Un paysan se rend au marché. Il achète une vache 5000 F. Il la revend 6000 F. Se ravisant, il la rachète 7000 F. Il la revend de nouveau 8000 F.
A-t-il gagné de l'argent, et dans ce cas combien ? A-t-il perdu de l'argent, et dans ce cas combien ? Ou n'a-t-il rien gagné ni perdu ?"

Déroulement

Les lignes générales de ce déroulement sont annoncées avant l'énoncé du problème.

1) Chacun cherche seul pendant 5 à 10 minutes.

2) Chacun, tour à tour, indique sa conclusion. Les différentes solutions sont notées au tableau, sans, commentaires avec le nombre de personnes les ayant retenues.

3) Un représentant de chacune des solutions expose son argumentation (plusieurs si d'autres estiment avoir procédé différemment), de préférence en notant sur le tableau. Les autres peuvent poser des questions, mais uniquement pour chercher à comprendre l'argumentation, en évitant d'opposer des objections.

4) Sondage : pour chacune des solutions, on demande combien sont convaincus de sa justesse.

5) Pour chacune des solutions qui ont été proposées, la parole est à ceux qui veulent contre-argumenter.

6) Nouveau sondage sur les convictions quant aux solutions proposées.

7) Les échanges continuent, jusqu'à ce que tous s'estiment convaincus de la justesse de l'une des solutions mais aussi de la fausseté des autres (ou jusqu'à une heure fixée si cette condition n'est pas remplie...)

8) Débat didactique sur l'activité elle-même.

Remarques

a) J'annonce dès le départ que je n'interviendrai à aucun moment sur la validité des argumentations, que ce n'est pas moi mais les autres qu'il faut convaincre et que je ne fais que diriger le débat pour permettre à chacun de s'exprimer.

L'engouement des participants est en général assez fort et il est quelquefois difficile de canaliser le flot des argumentations et contre-argumentations.

b) L'activité "tombe" si tout le monde trouve d'emblée la solution correcte. Cela ne m'est jamais arrivé (j'avais prévu, dans cette éventualité, de semer le doute en présentant moi-même une solution erronée), mais ce n'est sans doute pas à exclure.

(Pour n participants dans un groupe, le nombre de solutions correctes trouvées du premier coup a varié entre *n/4* et... *n-1*; dans ce dernier cas, la personne isolée s'est défendue avec acharnement...)

Exemple de propositions

Le tableau ci-dessous donne, à titre d'exemple, l'évolution des convictions (le plus large éventail que j'ai obtenu) à l'intérieur d'un groupe de 17 instituteurs, particulièrement animé.

colonne A : propositions après recherche individuelle.
colonne B : convictions après exposé des premières argumentations.
colonne C : convictions après exposé des premières contre-argumentations.

	A	B	C
Ni gain ni perte	5	3	1
Gain de 1000 F	6	1	1
Gain de 2000 F	5	5	11
Gain de 3000 F	1	0	0
Ne sait pas	0	8	4

Dans un autre groupe est apparue aussi au départ l'affirmation "*ça dépend de la somme initiale dans son portefeuille*". Cette affirmation revient d'ailleurs souvent dans les autres groupes, au cours des argumentations.

Exemples d'argumentations

Voici un résumé simplifié des argumentations les plus fréquemment apparues :

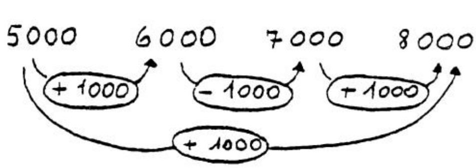
"Ni gain ni perte"

- "gain de 1000 F entre premier achat et première vente, gain de 1000 F entre deuxième achat et deuxième vente, perte de 2000 F entre le premier et le second achat, donc solde nul. Les bénéfices de 1000 F sont annulés par l'augmentation de 2000 F d'un achat à l'autre. "

- "8000 F - 6000 F = 7000 F - 5000 F. Même différence entre les prix d'achat et de vente, donc ni gain ni perte."

"Gain de 1000 F"

- "entre premier achat et première vente, gain de 1000 F; entre première vente et second achat, perte de 1000 F ; entre second achat et seconde vente, gain de 1000 F ; bilan : gain de 1000 F".
- même raisonnement s'appuyant sur un schéma du type :



"Gain de 3000 F"

- Il y a un état initial et un état final comparables (il arrive sans vache, il repart sans vache). Peu importent donc les étapes intermédiaires. II achète 5000F au départ et vend 8000 F à la fin. D'où un bénéfice de 8000 F - 5000 F = 3000 F.

"Perte de 3000 F"

- "Argent engagé : 5000 F. Première transaction : gain de 1000 F. Deuxième transaction : gain de 1000 F. Solde : 1000 + 1000 - 5000 = -3000"

"Gain de 2000 F "

- gain de 1000 F à la première vente, gain de 1000 F à la deuxième vente, donc gain total de 2000 F
- il a dépensé 5000 F + 7000 F = 12000 F ; il a encaissé 6000 F + 8000F = 14000 F; gain de 2000 F
- supposons qu'il ait 7000 F en poche. II achète 5000 F, il lui reste 2000 F ; il vend 6000 F, il a donc 8000 F ; etc..
- comme la précédente avec présentation sous forme d'un cahier de comptabilité avec les rubriques "report caisse", "recettes", "dépenses", "caisse".

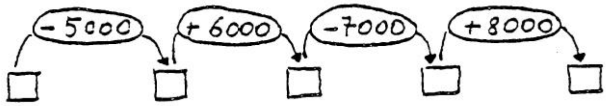
Remarques sur les argumentations

Les suppositions sur l'argent initial en poche ont entraîné une discussion sur la légitimité d'une telle supposition. C'est souvent à l'occasion de ce débat que des participants proposent de simuler la situation (il y en a toujours un prêt à jouer le rôle de la vache...) avec de la monnaie de papier ou aussi avec un carnet de chèques pour montrer l'indépendance par rapport à l'avoir initial. Jusqu'à ce que quelqu'un propose d'appeler "*x*" cet avoir initial et effectue un calcul littéral.

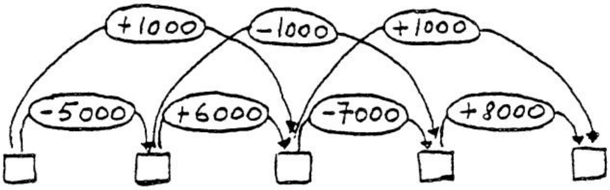
Le plus souvent, les participants sont assez vite persuadés que la solution "gain de 2000 F est la bonne, mais en avouant qu'ils ne voient pas ce qui cloche dans l'exposé de la solution "gain de 1000 F" ; et l'essentiel du débat d'argumentation vise à montrer que les argumentations voulant prouver un gain de 1000 F sont fausses. Ceux qui pensent l'avoir compris essaient de convaincre les autres mais en revenant le plus souvent à une autre argumentation montrant la justesse de la solution "gain de 2000 F" et la question est sans cesse reposée : "*Ça, on voit bien, mais on ne voit toujours pas ce qui ne va pas dans l'argumentation pour le gain de 1000 F"*.

Une contre-argumentation a eu un effet sur une partie du public, mais sans convaincre tout le monde *: " il suffit de considérer que la première fois il a acheté une première vache, et que la seconde fois c'est une autre vache ; ça ne change rien au problème, mais ça montre qu'il n'est pas légitime de prendre en compte une perte de 1000 F entre la première vente et le second achat".*

Les difficultés à rejeter la solution "gain de 1000 F viennent essentiellement d'une confusion entre "états" et "transformations". Une seule fois quelqu'un a emporté la conviction de tous en proposant un schéma du type



et en interprétant la solution « gain de 1000 F » comme une composition erronée de transformations :



Prolongement didactique

- Lorsqu'on décide d'arrêter pour ne pas dépasser l'heure fixée (je prévois en général 1 heure avec une tolérance d'une petite demi-heure supplémentaire, "jusqu'à la pause" pour les séances de 3 h) et que des participants doutent encore, ils me demandent toujours de prendre position. J'ai choisi dans ce cas de présenter la classification des situations additives de G. VERGNAUD[1], à charge pour eux, s'ils le jugent utile, de reprendre le problème en le resituant dans cette typologie.
Il me semble que ce problème pourrait être un bon support pour une étude plus détaillée des situations additives.

> J'essaie de mener un débat à partir des questions :
> *"que pensez-vous de cette activité ?"*
> *"comment analysez-vous l'évolution de vos convictions ?"*
> *"était-il nécessaire que je ne prenne pas position sur le fond ?"*
> *"plus généralement comment concevez-vous l'activité de résolution de problème dans la classe ?"*

[1] Vergnaud et al., « Le moniteur de mathématiques – Résolution de problèmes », Livre du maître, Nathan, 1997.

... et de celles qui sont posées par les participants, comme celle-ci qui arrive chaque fois :

"que doit-on exiger comme rédaction de la part des enfants ?"...

C'est l'occasion d'exprimer voire de développer des idées telles que :

- faire des mathématiques c'est d'abord résoudre des problèmes
- le rôle du conflit socio-cognitif
- la non linéarité de l'apprentissage et l'existence de phases de régression
- la démonstration est au cœur de l'activité mathématique
- dire à quelqu'un qu'il se trompe et lui indiquer une bonne solution est inopérant si on ne l'aide pas à prendre conscience de ses erreurs.

Ce denier point, avec les instituteurs en FC, fait en général surgir des exemples et des questions : "*J'ai tel élève, j'ai beau lui expliquer, il ne comprend pas telle chose et fait toujours les mêmes erreurs*...". Nous n'apportons pas en général de réponses simples à ces questions, mais le lien avec l'expérience vécue sur le problème précédent aide à accréditer l'idée que les erreurs ne sont pas forcément des marques de paresse ou d'inintelligence et que leur traitement passe par leur analyse et leur compréhension.

Le conflit socio-cognitif en formation des maîtres

Alain Kuzniak

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Pau 1992.

L'auteur s'interroge sur la possibilité d'utiliser le conflit socio-cognitif en mathématiques et en formation des enseignants. Il présente une gestion de ce type d'activité à partir de la même situation que dans l'article précédent et envisage certains problèmes utilisables dans ce cadre.
Il conclut sur l'importance déterminante du professeur dans la gestion cognitive de la situation.

Cet article tente d'amorcer une réflexion sur la possibilité d'utiliser le conflit socio-cognitif dans la formation des maîtres en mathématiques. L'introduction de cette notion a été faite avec deux objectifs partiellement contradictoires :

1) Présenter aux étudiants cette forme particulière de gestion de groupe et d'apport de connaissances qu'est le conflit socio-cognitif. Dans cette optique la mise en situation suivie d'une analyse réflexive semble une façon naturelle de sensibiliser les formés à la notion enseignée.

2) Etudier du point de vue du formateur la pertinence de séances d'apprentissage des mathématiques pour des adultes basées sur le conflit socio-cognitif.

Présentation de l'activité

Le conflit socio-cognitif n'est pas, en tant que tel, un mode de transmission des connaissances, mais diverses études, notamment celle de Perret-Clermont[1], semblent avoir montré l'efficacité des apprentissages liés à la confrontation d'idées contradictoires sur un même phénomène. Le conflit va naître de la rencontre d'un modèle intériorisé par le sujet avec un modèle différent proposé par autrui. L'étude précitée indique que cette confrontation favorise l'évolution du modèle le plus rudimentaire sans faire régresser le plus évolué.

.

Manda Zaleska[2] développe la complexité de la question en plaçant sa réflexion dans le cadre des phénomènes d'influence dans un groupe et elle étudie notamment le rôle des différents *leaderships*. Ainsi elle indique que la décision prise par un groupe, même sur des problèmes uniquement cognitifs, dépend

[1] Perret-Clermont: La construction de l'intelligence in l'interaction sociale- Lang. 1979
[2] Introduction à la psychologie sociale, Larousse, 1972, Tome 2. pages 80 et sq.

souvent de facteurs autres que la simple preuve rationnelle. Par exemple le statut des intervenants, leur assurance ainsi que le temps de prise de parole sont des éléments déterminants.

En formation des maîtres, une façon de faire prendre conscience de la nature et de l'importance du conflit socio-cognitif consistera pour le formateur à bâtir une séance basée sur ce type de confrontation.

L'idée pédagogique est donc la suivante :

1) Créer un conflit socio-cognitif avec les étudiants.
2) Expliciter l'objectif de la séance et faire prendre conscience du conflit.
3) Réfléchir ensuite à une application éventuelle dans les classes élémentaires.

Ce canevas indique bien la place de cette activité dans les stratégies homologues.

Avant de mettre en place la séance, il faut réfléchir à deus questions importantes pour la mise en oeuvre : sur quelle notion faire porter le conflit, et comment organiser la séance ?

1) Le savoir qui va servir de prétexte au conflit

II n'est pas évident de trouver en mathématiques des situations propres à créer un conflit socio-cognitif entre étudiants. Les exemples que l'on rencontre fréquemment dans la littérature pédagogique sont issus de la biologie ou de la physique qui favorisent les représentations erronées, comme on le sait bien depuis Bachelard[3]. De plus, certains points semblent faire obstacle à la naissance d'un conflit enrichissant :

• L'expérience que l'on peut avoir d'un concept est très dépendante de l'enseignement reçu et rares sont les conceptualisations spontanées. Le conflit restera donc très localisé à l'intérieur d'un même cadre de réflexion.

• Les discussions possibles risquent d'être limitées faute d'une modélisation suffisante ou peuvent être rapidement tranchées par un expert qui sera ici le membre du groupe qui aura dominé la notion.

• Enfin reste latente la crainte chez le formateur que tous les formés aient le même avis, éventuellement faux, sur le problème posé. Ce qui supprime de fait toute idée de conflit et abrège brutalement la séance.

Ces différents points et surtout le dernier m'ont conduit à choisir comme source du conflit un problème qui avait déjà montré son efficacité.

Il s'agit de l'exercice classique suivant :
Un maquignon achète un cheval 6000 F, il le revend 7000 F. Un peu plus tard il rachète ce cheval 8000 F et le revend 9000 F. Combien a-t-il gagné?

[3] Bachelard : La formation de l'esprit scientifique, Vrin, 1969.

Mania Zaleska attribue ce problème arithmétique d'apparence fort simple à deux chercheurs américains Maier et Solem[4]. L'intérêt de ce problème est de susciter des réponses très variées, très fréquemment fausses, et ceci de façon indépendante de l'auditoire.

2) L'organisation de la séance.

M. Zaleska a proposé cet énoncé à deux auditoires très différents : d'une part des étudiants en sciences humaines et d'autre part des élèves d'écoles professionnelles possesseurs uniquement du certificat d'études. Pour évaluer l'efficacité de la discussion entre individus, elle suit un protocole expérimental classique en psycho-sociologie. Les élèves résolvent d'abord individuellement le problème par écrit. Elle forme ensuite des petits groupes de trois ou quatre personnes n'ayant pas fourni la même réponse. Ces groupes sont isolés et observés par la chercheuse. A la fin de discussion, limitée à quinze minutes, le groupe doit fournir une réponse commune.

Dans son étude, à la fin de la phase individuelle, 27 % des élèves des écoles professionnelles et 34 % des étudiants ont fourni la bonne réponse. La différence est donc peu importante. Par contre, la suite des résultats diffère radicalement : le travail de groupe augmente le nombre d'erreurs chez les élèves d'écoles professionnelles, alors que chez les étudiants, le taux de réponses correctes croît significativement. Cette remarque conduit ensuite la chercheuse à affiner l'observation des groupes en discussion et à remarquer que c'est l'assurance et la longueur de l'argumentation des individus qui entraînent l'adhésion du groupe. Ainsi l'assurance verbale semble décisive même dans un problème parfaitement vérifiable de type déductif.

Cette expérience laisse perplexe sur la nature exacte du conflit socio-cognitif et notamment sur le rôle du savoir dans ce type de situations de groupe. II est donc important de conduire une séance sur ce thème pour juger de l'intérêt de ce phénomène dans une perspective de formation.

J'ai donc effectué un cours sur ce thème en suivant une organisation très semblable à celle proposée par M. Zaleska mais insérée dans une séance de classe et non plus dans un protocole expérimental. Ce qui oblige notamment à déterminer les groupes assez rapidement.

3) Déroulement de la séance

1)Je distribue une feuille à chaque étudiant avec l'énoncé suivi de cette question : que peut-on dire des affaires du maquignon ? II faut choisir parmi les cinq propositions de réponse suivantes :

il a perdu 1000 F
il est quitte
il a gagné 1000 F

[4]The contribution of a discussion leader to the quality of group thinking: the effective use of minority opinion in Hum. Relation. 1952.5.277-288

il a gagné 2000 F
il a gagné 3000 F

Ces propositions sont choisies parmi les réponses fournies en général à ce problème, excepté la première qui vise simplement à déterminer le rôle éventuel d'affirmations données a priori par le professeur.

2) Après avoir ramassé les feuilles, je répartis les étudiants par groupes réunissant des options différentes. En fait, je me laisse le temps de regarder les feuilles et de procéder à cette répartition pendant que les étudiants travaillent sur une deuxième feuille à trois exercices que je présenterai plus loin. Après une quinzaine de minutes, les groupes présentent leur solution à l'ensemble de la classe.

J'ai réalisé, sous cette forme, la même séance avec deux classes de stagiaires de deuxième année. Tout d'abord, il faut remarquer le nombre important d'erreurs. A la suite de la phase de conflit, huit groupes sur onze ont fourni la bonne réponse. Deux groupes (dans la même classe) ont proposé 1000F. Enfin un groupe de la deuxième classe a penché pour 2000F mais ne voyait pas pourquoi 1000F était faux.

L'argument très fort mais hélas faux des tenants de 1000F a été présenté sous forme d'un schéma représentant de façon erronée la composition des diverses transformations:

$$\textbf{6000 F} \xrightarrow{\textbf{+1000}} \textbf{7000 F} \xrightarrow{\textbf{-1000}} \textbf{8000 F} \xrightarrow{\textbf{+1000}} \textbf{9000F}$$

Ce mode de résolution respecte la forme usuelle de présentation de la composée d'applications. Cette solution acquiert ainsi un fort degré de plausibilité auprès des étudiants.

L'argument en faveur de la proposition 2000F qui a emporté l'adhésion du plus grand nombre d'étudiants a pris la forme d'un bilan financier :

	Dépenses	Recettes
	6 000 F	7 000F
	8 000 F	9 000F
Total	14 000 F	16 000F

d'où le bénéfice de 2000 F.

Cet argument convainc tous les étudiants que 2000 F est une bonne solution. Cependant il n'élimine pas la première solution et certains défenseurs de la proposition 1000 F de gain ont été amenés à poser l'existence, qu'ils jugeaient eux-mêmes absurde, de deux solutions. Il est donc très difficile d'exclure cette réponse fausse confortée, comme je l'ai signalé, par la représentation institutionnelle sous forme d'opérateurs[5].

[5] Pour d'autres types de réponses voir H. Péault : *La vache et le paysan* dans ce même tome.

Deux tentatives d'explicitation peuvent être essayées :

1) On peut faire rapprocher ce problème et le suivant qui ne pose aucune difficulté.

Un maquignon achète un cheval blanc 6000 F et le revend 7000 F. Puis il achète un cheval noir 8000 F et le revend 9000 F. Quel est son gain ?

C'est la voie indiquée par J.F. Richard[6] qui cite le problème du maquignon comme un exemple de difficulté liée à la formulation. En fait, cette remarque n'explique pas l'erreur commise car d'une certaine façon toute formulation renvoie à une représentation et le problème consiste plutôt à comprendre pourquoi celle-ci plutôt qu'une autre.

2) Dans cette optique. une deuxième voie consiste à observer l'importance du cadre temporel dans cet énoncé. En effet l'action se déroule sur un temps relativement long et les étudiants en difficulté semblent avoir du mal à procéder à une décontextualisation temporelle. En suivant la chronologie, on peut remarquer qu'au moment du deuxième achat le maquignon a effectivement dépensé beaucoup d'argent pour ce cheval, qu'il est en attente de gain mais que pour le moment il est débiteur. On peut alors aider les étudiants en leur demandant d'évaluer ce débit, ils trouvent alors facilement 7000 F. A partir de là, ils en déduisent le bénéfice final de 2000 F. Dans les deux classes, cet argument seul paraît avoir été efficace auprès des derniers étudiants sceptiques.

Cependant, il faut remarquer que lors de ces deux explicitations, nous sortons du conflit socio-cognitif entre pairs pour retomber dans la situation classique d'un conflit de savoir entre l'étudiant et le professeur. La phase précédente n'aura de fait servi qu'à expliciter les difficultés rencontrées par certains étudiants.

Comme je l'ai indiqué plus haut, j'avais posé également avec la même présentation trois petits problèmes. Le temps donné aux étudiants pour effectuer leur recherche me permettait de procéder à l'observation des réponses au problème du maquignon et à la programmation des différents groupes de discussion. Ces exercices étaient bâtis à partir d'erreurs fréquentes des enfants, ce qui pouvait laisser présager un certain nombre de désaccords au niveau des adultes.

a) Ces nombres sont-ils des nombres décimaux?

0,5	oui	non	?
2	oui	non	?

[6] Psychologie française, novembre. 1981, page 229.

$\frac{3}{2}$	oui	non	?
3,14	oui	non	?
$\sqrt{2}$	oui	non	?
$\frac{1}{3}$	oui	non	?

b) Quel classement dans l'ordre croissant de ces nombres vous semble correct ?

4	4,05	4,6	4,35	4,402
4	4,6	4,05	4,35	4,402
4	4,05	4,35	4,402	4,6

c) On double tous les côtés d'un triangle, son aire est-elle alors multipliée par :

2 3 4

On double le rayon d'un cercle, l'aire du disque est-elle alors multipliée par :

2 3 4

Je n'ai pas utilisé les deux premiers exercices pour mettre en place un conflit. En effet pour le premier, il s'agit simplement de connaître la définition d'une notion. L'activité aura permis aux étudiants de constater la grande variété de leurs avis sur le sujet. Ceci les a ensuite fortement motivés pour écouter, mais pas nécessairement pour retenir, la bonne définition. Quant au deuxième exercice, il a été parfaitement résolu (et c'est heureux!) par tous les stagiaires.
Le troisième exercice a présenté beaucoup plus d'intérêt, d'abord à cause des résultats obtenus, et ensuite grâce aux débats auxquels il a donné lieu.

4) Autres exemples de mise en conflit

De nombreuses occasions de faire fonctionner le conflit apparaissent à l'occasion de petits problèmes portant sur des notions mal connues des étudiants, je cite simplement deux exemples que j'ai eu l'occasion d'utiliser avec la même organisation que précédemment.

> *Une jeune mère de famille nombreuse, cadre dans une entreprise de confiserie, bénéficie de 30 % de réduction sur ses trajets en train. Elle a payé 150 F un aller-retour Evreux-Paris. Elle cherche le prix d'un billet à tarif entier, ceci afin d'obtenir un remboursement plus important de la part de son employeur. Pouvez-vous l'aider ?*

Dans les propositions de solution figure la solution, erronée mais très fréquente, obtenue en ajoutant 30% de 150 F à 150F.

> *On suppose qu'une ficelle entoure la terre le long de l'équateur. On allonge cette ficelle de 10 mètres et on la tend au dessus de la terre de façon à la garder circulaire. A quelle hauteur (environ) faut-il la soulever ?*
> *[1,6mm 1,6cm 1,6dm 1,6m]*

Cet exercice basé sur la contradiction entre l'intuition et la réalité démontrée mathématiquement m'a semblé plus proche du gadget pédagogique faisant plaisir au professeur que d'un réel apport de connaissances sur le sujet. Cette affirmation vaut à mon avis pour de nombreux paradoxes où le conflit cognitif n'existe pas vraiment parmi les stagiaires.

Conclusion

Nous avons signalé les nombreux problèmes que pose la notion de conflit socio-cognitif pour l'émergence d'un savoir mathématique.

La plupart du temps le conflit entre pairs n'apporte que quelques éléments de la solution. La discussion reste située au sein du même cadre de modélisation mathématique qui se révèle parfois insuffisant et ce blocage entraîne parfois une résolution du conflit plus sociale que cognitive.

Ce phénomène éclaire le rôle fondamental du maître, expert et non simple animateur, dont la tâche consistera à dénouer cognitivement le conflit.

On pourra préciser aux étudiants que la résolution de certains problèmes n'est pas d'ordre démocratique (on ne vote pas pour choisir le résultat) ou d'ordre autocratique (loi du plus fort) mais réfère à une logique de la preuve de type démonstratif.

En ce sens le conflit pratiqué dans un groupe peut servir de mise au point sur la pratique mathématique et sur la problématique de la preuve en ce domaine.

Enfin la mise en conflit d'adultes sur des problèmes mathématiques permet une prise de conscience des différences de raisonnement entre individus, elle augmente la motivation et assure une bonne dévolution du problème si l'on évite, comme je l'ai indiqué précédemment, les problèmes pièges.

Les gestes professionnels des professeurs d'école débutants, leur acquisition en formation initiale

Denis BUTLEN

Extrait du Cahier du Formateur, Tome 1- Perpignan 1997.

Cet article présente une analyse des gestes professionnels des professeurs d'école débutants, une typologie de certaines régularités observées est établie autour de six critères. Quelques réflexions sur les modes de construction et d'acquisition de ces gestes professionnels sont données en conclusion.

1. INTRODUCTION

1-1. Notre problématique

Cet exposé porte sur l'analyse de pratiques de professeurs d'école débutants, plus précisément de pratiques de professeurs d'école stagiaires de seconde année de formation initiale, observées lors de différents stages : stage de pratique accompagnée ou stage en responsabilité.

Ces travaux ont pour origine, une série de questions de formateurs.

Un travail de rationalisation de pratiques de formateur a précédé cette recherche. Il s'agissait, pour moi comme pour beaucoup de collègues, de réfléchir à des dispositifs visant à améliorer la formation initiale des futurs professeurs d'école.
Les travaux de A. Kuzniak, C. Houdement comme ceux de M.L. Peltier analysent les contenus de formation comme les stratégies des formateurs. Il nous est paru indispensable de dépasser ce stade et de nous intéresser aux pratiques effectives des professeurs en formation pour en cerner certaines caractéristiques et si possible pour mieux comprendre comment elles se constituent et comment elles évoluent au cours de cette formation.
Nous sommes partis d'une première hypothèse, issue de notre expérience professionnelle de formateur : on ne peut pas adopter le même point de vue, la même approche pour analyser les pratiques des enseignants de mathématique que celle mises en œuvre pour analyser les pratiques des élèves apprenant des mathématiques. L'approche utilisée pour comprendre comment les étudiants en formation font des mathématiques (en tant qu'élève) et modifient à cette occasion leurs conceptions sur les mathématiques ne peut être reproduite telle quelle pour étudier la manière dont ils font faire des mathématiques à leurs élèves.
Cela nous amène à penser que l'on ne forme pas au métier d'enseignant de mathématiques comme on forme les élèves à l'apprentissage des mathématiques.

Nous avons donc essayé d'enrichir nos analyses, pour diagnostiquer puis concevoir des situations de formations mieux adaptées.

Notre but est donc :

1- D'extraire, spécifier, hiérarchiser, découper pendant la classe des actions (ce qui peut être vu, entendu par une observation) précises qui sont isolables, partagées par plusieurs individus (régularités dans les pratiques) et qui caractérisent plutôt les débutants.
2- D'étudier, en nous appuyant sur l'hypothèse que ces pratiques peuvent s'acquérir en formation ou du moins, si elles préexistent, peuvent être fragilisées et même modifiées, comment accélérer cet apprentissage.

L'idée générale qui est à la base de cette étude est donc la suivante : les professeurs d'école débutants font en général pendant la classe des actions maladroites qui fragilisent leur enseignement, les fatiguent, les rendent moins efficaces.

De ce fait, il apparaît important d'essayer de les repérer avec précision afin d'essayer d'accélérer leurs transformations en actions "confirmées".
Nous avons été amenés à dépasser ces questions de formation et à nous inscrire dans une problématique de recherche.

Ces travaux sont en cours. Ils se proposent :

1- De contribuer à une modélisation des pratiques de professeurs d'école en formation, plus particulièrement en cernant les modalités de mises en actes de leurs projets d'enseignement.
Nous avons été amenés à distinguer, comme Aline Robert[1], plusieurs composantes dans les pratiques : une composante "en amont de la classe" (correspondant pour aller vite au projet global ou limité de l'enseignant), une composante en termes de "mises en actes", correspondant soit à des actes élémentaires (écriture au tableau, ton de la voix, supports utilisés, etc.) ou à des mises en actes plus globales.
Nous avons retenu le terme de gestes professionnels pour décrire les modalités selon lesquelles un enseignant singularise et conduit effectivement, en temps réel, son projet, interagit avec ses "vrais" élèves, adapte plus ou moins consciemment ses préparations en fonction de la conjoncture, prend des décisions instantanées... Ces gestes correspondent donc à la seconde composante décrite ci-dessus.
2- De cerner certaines régularités dans les pratiques et dans leurs mises en actes
3- D'analyser plus précisément les situations de formation qui contribuent directement à la constitution, à l'amélioration des pratiques des futurs enseignants.

---

[1] A.Robert (1996), Cahier DIDIREM n°26

4- De préciser plus largement les conditions dans lesquelles se transmettent, s'acquièrent, se construisent les pratiques, et les gestes.
5- De s'appuyer sur ces résultats et sur les acquis de la didactique des mathématiques (théorie des situations et dialectique outil-objet notamment) pour optimiser un apprentissage professionnel.
Avant de décrire le dispositif que nous avons mis en place pour observer ces pratiques, nous nous devons de préciser ce que nous entendons par gestes professionnels.

1-2. Des gestes professionnels liés à un enseignement mathématique

Existe-il des gestes professionnels du professeur d'école qui sont spécifiques d'un enseignement de mathématiques ? Ou sont-ils tous transdisciplinaires ?

Nous pouvons déterminer au moins deux types de gestes professionnels : des gestes transdisciplinaires et des gestes plus spécifiquement attachés à un enseignement de mathématiques.
On peut s'appuyer sur certaines conceptions « naïves », notamment sur l'expérience des formateurs, pour commencer à définir ces gestes.

Ce sont des aspects plutôt techniques des pratiques professionnelles
- souvent implicites, voire automatisés
- rarement décrits ou du moins, ils le sont sans référence à un contenu d'enseignement,
- maîtrisés avec l'expérience professionnelle,
- dont une mauvaise maîtrise risque d'entraîner des difficultés dans la gestion de la classe ou un accroissement de fatigue (dû à un investissement personnel plus important durant le cours).

Compte tenu du caractère polyvalent du métier de professeur d'école, compte tenu de la nature pluridisciplinaire de certains apprentissages effectués à l'école élémentaire, on peut penser qu'une part importante de la fonction de professeur d'école échappe à (ou dépasse) une définition prenant directement en compte les contenus à enseigner. On peut donc penser qu'il existe des gestes transdisciplinaires.
Ces gestes professionnels non disciplinaires ou transdisciplinaires devraient concerner :

- la gestion globale du temps : organisation de la journée, de la semaine, répartition effective entre les temps de travail, d'écoute, d'inaction, de détente, répartition des différentes disciplines...
- la gestion des interventions métacognitives de l'enseignant non attachées à un contenu, voire stimulant d'éventuels transferts ou généralisations (en particulier la gestion de la cohérence de ces interventions),

- la gestion des moments de transition entre différents enseignements disciplinaires,
- la communication dans la classe (règles générales de travail, apprentissage du travail en groupe...).

Ces gestes ne sont pas directement ceux auxquels nous comptons nous intéresser. En effet, il semble intéressant de cerner d'autres gestes plus liés à un enseignement de mathématiques, voire à l'enseignement d'un contenu mathématique et d'analyser comment les premiers se manifestent et éventuellement se précisent à travers un enseignement de contenus.
Nous faisons l'hypothèse qu'il existe des gestes marqués par un enseignement disciplinaire. Pour cela, nous nous appuyons sur des observations que nous avons pu faire à propos des pratiques de maîtres confirmés, mais aussi sur les "erreurs" de gestion que nous avons pu constater chez de nombreux professeurs débutants.

2. DESCRIPTION DE NOTRE DISPOSITIF EXPERIMENTAL

Nous avons mis au point plusieurs dispositifs visant à analyser les pratiques des PE stagiaires.
Nous essayons de mieux cerner les gestes professionnels des stagiaires à travers trois types d'analyse.

1- L'observation et l'analyse de séquences menées par des professeurs débutants dans des conditions de stages variés (pratique accompagnée, en responsabilité).

2- L'analyse du discours de différentes catégories de formateurs lors des visites de stage.

Nous analysons en particulier les entretiens qui suivent une visite entre le PIUFM de mathématiques et le stagiaire.

Notre but ici est multiple :
- repérer, dans le discours du formateur basé sur une analyse à chaud de la prestation observée, les régularités éventuellement détectées avec le premier type d'analyse afin de confirmer nos résultats,
- analyser ce type de situations de formation, sa place, sa fonction et son impact sur la formation initiale actuelle des P.E. Nous avons été amenés en particulier à préciser, en utilisant notamment les travaux sur la structuration du milieu de G. Brousseau et C. Margolinas[2], les positions respectives occupées par les différents acteurs de la situation : formateur, professeur stagiaire, élèves...

---

[2] G.Brousseau (1989), « *Le contrat didactique, le milieu* », RDM 9.3, La Pensée sauvage, Grenoble. C. Margolinas (1995), « *La structuration du milieu* », Les débats de didactique des mathématiques, Annales 93.94.

- préciser certaines normes régissant les actions des formateurs mais aussi celles des professeurs stagiaires. Les informations que nous pouvons tirer de ces analyses dépendent non seulement des points de vue épistémologiques, didactiques, éthiques des formateurs observés mais aussi de nos propres conceptions sur ces questions. Afin de prendre, en tant que chercheur le maximum de précautions, il nous paraît indispensable de cerner les normes éventuelles qui sous-tendent les prises de positions et les jugements susceptibles d'être exprimés.
Un deuxième type de dispositif (inspiré de l'éthnométhodologie) nous permet de compléter ces éventuelles normes : analyse à chaud, à partir d'une vidéo, de formateurs (4 ou 5 formateurs différents, rassemblés ou non).

3- La construction de situations visant à améliorer une formation professionnelle, centrées sur l'observation et l'analyse des pratiques des professeurs débutants mais s'appuyant en amont, comme justifiant en aval, une formation intégrant un enseignement d'éléments de didactique des mathématiques (avec le sens que nous donnons à ce terme dans la communauté organisée autour de l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques).
Nous ne détaillerons ici que les résultats issus du premier dispositif, confirmés, pour une grande part, par notre analyse des discours des formateurs.

3. QUELQUES RESULTATS PORTANT SUR LES PRATIQUES DES PROFESSEURS D'ÉCOLE DEBUTANTS

Nous avons été amenés à dégager, pour cerner les gestes professionnels des débutants, six axes de singularisation de ce qu'Aline Robert[3] appelle donc des lignes d'actions, la première composante des pratiques professionnelles, ce que nous avons désigné ci-dessus sous le terme de projet de l'enseignant :

- les modes de gestion ou d'utilisation de matériels ou de supports pédagogiques,
- les modes de gestion simultanée de plusieurs variables didactiques,
- la dévolution du problème,
- la prise d'information sur les élèves,
- la gestion des phases de synthèse, de bilan, de correction et plus généralement des phases d'institutionnalisation,
- la gestion de certains équilibres.

3-1. Les modes de gestion (ou d'utilisation) de matériels ou de supports pédagogiques

Semble relever de cette catégorie tout ce qui concerne la gestion

[3] A.Robert (1996), « Une approche de la formation professionnelle initiale d'enseignants de mathématiques », Cahier DIDIREM n°26

- d'un matériel relativement spécifique de l'enseignement d'un contenu donné : objets "pédagogiques" à manipuler, supports divers,
- de l'espace dans la classe en fonction de la situation, du temps,
- du tableau, de différents supports pédagogiques (ordinateurs, rétroprojecteurs, manuels...).

Nous considérons ici les aspects les plus techniques du métier. Cet axe ne se situe pas au même niveau que les cinq autres. Nous le désignons quand même sous le même terme il nous semble très difficile de séparer aspects techniques et mises en actes plus globales.

Cette première catégorie de gestes professionnels, très techniques, est très souvent absente de la formation professionnelle "théorique" des professeurs d'école. Leur description est souvent laissée à la charge des conseillers pédagogiques qui déploient à cette occasion, un discours très technique. L'apprentissage semble se faire par observation, imitation et reproduction plus ou moins personnalisée.

Leur étude acquiert un statut "noble" à deux occasions seulement, lors :
- de l'étude de la notion de variable didactique (les supports cités ci-dessus sont alors vus comme un moyen efficace d'agir a priori sur les apprentissages),
- des essais de formation de type «micro-enseignement » où une analyse très pointue des effets de certaines gestions est souvent développée.

Bien que cet aspect de l'enseignement soit considéré comme important par les "formateurs professionnels" (PIUFM), il ne semble pas qu'il soit réellement intégré à leur enseignement, peut-être parce qu'ils ne savent pas comment le prendre en compte.

3-2. Les modes de gestion simultanée de plusieurs variables didactiques

La préparation d'une séquence de mathématiques nécessite de fixer a priori un certain nombre de variables de différents types.

Il semble exister des modes de gestion, implicites, de ces variables.
En particulier, les enseignants confirmés semblent les fixer a priori mais aussi gérer (adapter) automatiquement leurs valeurs, lors du déroulement de la séquence. Ils prennent évidemment en compte, pour cela, les divers documents ou supports pédagogiques disponibles (manuels) et s'appuient sur leur expérience professionnelle. Cette tâche est souvent implicite, rarement explicitée par le maître tuteur du stagiaire. C'est le cas notamment quand il s'agit de fixer, en même temps la taille des nombres et le temps laissé aux élèves lors d’un calcul.
La maîtrise de ce geste peut se révéler en particulier dans les adaptations improvisées lors du déroulement effectif de la séquence.

Pour illustrer les maladresses de beaucoup de professeurs stagiaires dans ce domaine, nous allons évoquer l'analyse que nous avons faite d'une activité de calcul de produits au CM2, elle porte en particulier sur la gestion simultanée et implicite, par un professeur stagiaire, de plusieurs variables : données numériques, forme de travail et temps accordé aux élèves pour la résolution (rythme de travail).
Il s'agit d'un professeur d'école stagiaire de seconde année qui conduit une séquence de mathématiques en présence de son professeur de mathématiques de I'IUFM effectuant une visite lors d'un stage de pratique accompagnée (tutelle).
La stagiaire a préparé la séquence avec l'Instituteur-Maître-Formateur, titulaire de la classe qui lui a donné le thème de la leçon, il lui a donné certaines indications mais n'a pas précisé les «détails». C'est justement ce contexte qui nous a permis ici de mettre en lumière un phénomène souvent repéré par ailleurs chez les débutants en stage.
La stagiaire propose dans un premier temps des exercices de calcul mental de deux types ; voici un exemple pour chacun :
- « 7 est diviseur de 42, donnez l'autre »...
- « Encadrez 78 par les deux multiples de 9 les plus proches »
Le domaine numérique ainsi exploré ne dépasse pas celui des traditionnelles tables de multiplication. Le temps consacré à ces exercices est raisonnable pour une activité de calcul mental.

Dans une seconde phase, la stagiaire propose un problème, à résoudre par écrit, dont le texte est le suivant :
« Avec 50 francs, combien de stylos bille à 9 francs peux-tu acheter ? »
Les procédures de résolution prévues font intervenir soit des décompositions multiplicatives et additives obtenues à partir du traitement de multiplications à trou, soit des encadrements à l'aide d'une exploration d'une liste de multiples et des productions d'écritures du type précédent.
Ainsi, les données numériques sont assez proches de celles des exercices précédents ; par contre la résolution est écrite et le temps laissé aux élèves est nettement supérieur (23 minutes contre 2 à 4 minutes précédemment).
Cette durée excessive et le recours à l'écrit conduisent les élèves à mobiliser des procédures peu économiques. Cette résolution laborieuse se termine par une démobilisation collective des élèves. Certains d'entre eux font des erreurs sans rapport avec l'habileté calculatoire manifestée précédemment. La durée consacrée à ce travail va aggraver encore la démobilisation et l'hétérogénéité des performances des élèves : certains élèves vont devoir faire un deuxième exercice, en attendant les autres, exercice qui va être corrigé collectivement alors qu'une partie des élèves n'a pas pris connaissance de son énoncé.
Le professeur stagiaire semble s'apercevoir du malaise lors du déroulement de la séance, mais elle se révèle incapable de remédier à la situation pour deux raisons sans doute indissociables : elle n'identifie pas les causes et elle s'accroche à sa préparation.
Un enseignant confirmé, comme le prouve le témoignage de l'IMF, aurait changé les valeurs des variables.

La réaction de la stagiaire est plutôt de l'ordre de "l'acharnement pédagogique", multipliant les explications, les questions sans réponses, créant des malentendus. Et ceci résulte d'un manque d'informations sur les performances effectives des élèves, d'un manque de références passées, d'une timidité devant tout changement par rapport à la préparation.
Elle ne s'autorise pas à réduire le temps (au détriment temporaire des élèves faibles), ou à changer la forme de l'activité (calcul rapide au lieu de résolution écrite standard).

3-3. La dévolution du problème

De manière assez unanime, les formateurs de professeurs d'école, qu'ils soient PIUFM ou IMF, soulignent les difficultés de gestion des phases de passation de la consigne.
Ils soulignent les maladresses des stagiaires. La dévolution ne se limite évidemment pas à la passation de la consigne mais cette dernière est souvent révélatrice des difficultés rencontrées.
Là encore, l'apprentissage semble se faire par monstration, reproduction accompagnée d'essais et d'erreurs répétés.
Il faut toutefois noter que les PIUFM essaient de prendre en charge le traitement de cette question à l'occasion de l'étude de vidéos (en temps réel ou montées), de l'étude de protocoles (plus rarement) et le plus fréquemment lors d'évocations de séances (épisodes racontés)...

En fait, nous nous sommes plus particulièrement intéressés à deux éléments : les différents types de passation ou de présentation de la consigne et la négociation de celle-ci, en particulier la négociation des contraintes prévues accompagnant la consigne.
Cela nécessite évidemment d'observer plus particulièrement ces phases, et d'analyser les distorsions enregistrées entre le prévu et le réel.
L'analyse des pratiques des débutants permet de relever trois types de difficultés fréquentes :
- négociation individuelle et à la baisse de la consigne (en particulier quand il s'agit d'élèves en difficulté),
- utilisation maladroite des supports pédagogiques classiques (polycopiés, livres) se caractérisant souvent par de longues paraphrases des questions posées dans le livre,
- perte de temps occasionnée par la volonté de faire inventer les consignes par les élèves.

Ces maladresses sont souvent le résultat de compromis mal compris entre une impossibilité à réellement dévoluer la tâche et la volonté de prendre en compte "l'idéologie dominante" de I'IUFM, souvent réduite à des slogans du type "tout doit venir de l'enfant", "il faut individualiser les apprentissages".

A cela s'ajoutent la prise en compte de la pression des élèves eux-mêmes, des problèmes de légitimité ou l'inexpérience technique...
Pour illustrer les trois derniers axes, nous ferons référence, très brièvement, à la conduite par un autre professeur stagiaire des phases de correction d'exercices de calcul mental. Pour la commodité de l'exposé, nous allons dans un premier temps résumer les résultats de nos différentes observations.

3-4. La prise d'informations sur les élèves

C'est une trivialité de dire que l'enseignant ne peut pas tout prévoir, qu'il doit prendre des décisions "à chaud" devant un imprévu, qu'il a des choix importants à faire à certains moments. Nous faisons l'hypothèse que ces choix ne sont pas aléatoires chez les professeurs confirmés et qu'ils sont effectués grâce à une prise en compte, souvent implicite et automatisée, d'éléments divers.
Les maîtres confirmés interrogés à ce sujet disent que ces choix ne sont pas toujours conscients et qu'ils prennent leurs décisions en s'appuyant sur leur expérience professionnelle, en particulier en se référant à :

- une typologie plus ou moins grossière de procédures ou erreurs ou performances déjà observées,
- des prévisions qu'ils peuvent faire sur le niveau de performances de leurs élèves. Ils semblent se référer là encore à des catégories d'élèves représentées par des prototypes, ils comparent grossièrement quelques élèves de leur classe à des élèves prototypiques. Nous reprenons ici l'idée développée par Tochon[4] : l'enseignant ne voit pas ses «vrais » élèves mais des prototypes d'élèves,
- différents déroulements observés précédemment,
- des sollicitations de certains élèves prenant facilement la parole.

En fait, les enseignants expérimentés ne prennent pas beaucoup d'informations sur les productions ou performances de leurs élèves, tout au plus, confirment-ils leurs prévisions en observant quelques élèves.

Le professeur débutant n'a pas cette expérience. Nous allons donc nous intéresser à la manière dont il gère ces imprévus. En particulier, comment il essaie de combler son manque d'expérience par une prise d'informations sur la classe.
En fait, nos analyses montrent qu'il est très souvent "prisonnier" des demandes individuelles des élèves. Lors des phases de recherche, il se laisse accaparer par les élèves en difficulté ou par la correction individuelle de chaque élève. Il ne pense pas à noter ce qu'il voit ou ne voit que superficiellement.
Il n'arrive pas à prendre le recul nécessaire pour mener une auto observation même partielle. Ce défaut s'explique par le fait qu'il agit et n'est donc pas disponible pour observer et aussi par la volonté de bien faire, d'aider les élèves, de prévenir les difficultés.

---

[4] Tochon (1993), « L'enseignant expert », Nathan, Paris

3-5. La gestion des phases de synthèses, de bilan, de correction, plus généralement d'institutionnalisation

Cette gestion dépend des informations dont dispose le maître et de son projet. Nous avons là encore observé la fréquence des témoignages des formateurs sur la difficulté de gestion de ces moments.
Nous pouvons faire des hypothèses semblables à celles listées plus haut concernant les modes de gestion des professeurs confirmés.

Les modes de gestion des professeurs débutants vont par contre prendre en compte d'autres facteurs :
- le déroulement prévu,
- les pressions exercées par les élèves (demandant par exemple de passer au tableau),
- les objectifs d'apprentissage de la séquence.

Nous avons essayé de cerner différents types de fonctionnement des professeurs stagiaires, nous allons en décrire quelques aspects dans la suite de cet exposé mais pour compléter notre analyse nous devons auparavant expliciter notre sixième axe d'analyse.

3-6. La gestion de certains équilibres

Nous essayons d'analyser comment les enseignants débutants gèrent certains équilibres.
Nous nous intéressons à la gestion de certains équilibres entre certitude et incertitude, entre plaisir et contrainte, entre recherche et sécurité, entre fidélité à une préparation et improvisation contrôlée, entre individuel et collectif.
Nous regardons ici le fonctionnement du maître à divers moments de la classe. En effet, cela concerne à la fois les prévisions effectuées (préparation), les prises d'informations, le temps de parole laissé aux élèves lors de différentes phases, les initiatives accordées, prévues, et plus généralement le degré et la nature de la participation des élèves aux formulations, validations et institutionnalisations des notions enseignées.
Pour illustrer ces quatrième, cinquième et sixième entrées, nous présentons la conduite par un professeur stagiaire des phases de correction d'exercices de calcul mental.
Pour analyser les interventions du professeur et des élèves, nous avons découpé leur discours en unités significatives de sens qui sont constituées par un groupement de mots ou de phrases, insécables, exprimant une seule idée.

Le maître se propose de corriger deux calculs effectués mentalement : « 3 x 8 et 3 x 7 ». Il semble poursuivre trois objectifs : tester la mémorisation de «la table de 3 », faire apparaître des moyens mnémotechniques pour la retenir et enfin

montrer aux élèves qu'il plus facile de retenir le résultat du produit que de le retrouver à l'aide d'une addition.
En fait dans les deux cas, nous constatons une gestion du dialogue entre l'élève interrogé et le maître qui conduit à un malentendu.

Ainsi, nous constatons dans la correction du premier calcul, une gestion des dialogues sous la forme de questions-réponses. L'élève n'a pas vraiment le droit à la parole, tout au plus peut-il s'inscrire dans le questionnement du professeur, il n'a pas vraiment l'initiative et ses interventions sont très courtes. Toutes les interventions d'élèves sont des réponses à des questions posées par le professeur.
L'enseignant interrompt fréquemment l'élève interrogé soit pour confirmer ou valider ses dires, soit pour guider, induire ses interventions.
Deux élèves se sont trompés, ces erreurs ne sont pas reprises, ces élèves ne sont pas interrogés par la suite.
Dans le second calcul, le maître interrompt immédiatement une amorce de débat entre quelques élèves, débat qu'il a sollicité mais qu'il a peur de ne pas maîtriser au risque de ne pas donner les explications nécessaires au seul élève qui semblait en avoir besoin.
Pour préciser les parts respectives prises par les élèves et le maître dans le dialogue, il suffit de compter la longueur et la nature des interventions de chaque partenaire.
Ainsi lors des corrections de chaque exercice, on compte 33 interventions du professeur et 28 interventions d'élèves mais la longueur des interventions sont très différentes : deux interventions d'élèves sur 28 comportent plus de six mots.

On peut penser que fréquentes interruptions (validations partielles, questionnement fermé, engagements à poursuivre, simples ponctuations) visent à réduire l'incertitude que le maître pressent dans les réponses des élèves. On peut aussi penser qu'elles veulent accélérer le rythme du dialogue, réduire le temps consacré au bilan.
Tout se passe comme si le fait d'interroger les élèves correspondait à un rite vide de sens. Pour ce maître, seul le professeur peut vraiment donner la bonne réponse. C'est sans doute un compromis entre les représentations de cet enseignant, les contraintes de la conduite de la classe, son statut de remplaçant, son manque d'expérience dans la conduite de bilan et enfin la représentation officielle de l'enseignement de l'IUFM (participation de l'enfant à la construction des savoirs).
Ce compromis amène le professeur stagiaire à gérer une caricature de participation des élèves aux phases de bilan.
Cela est d'autant plus étonnant que cette angoisse devrait être diminuée par le fait que l'exercice est correctement réussi et que les élèves interrogés sont des élèves, souvent volontaires pour répondre, ayant réussi le calcul ou ayant mémorisé les produits.
Tout se passe comme si le maître avait oublié cette donnée.

Cela amène des malentendus. L'élève, étant interrompu, essaie de deviner ce que veut le maître, il reconstruit et improvise une solution possible, cela peut le conduire à produire une erreur...
En voulant réduire le temps et l'incertitude, le professeur obtient souvent un résultat inverse : apparition d'erreurs, d'incompréhension... C'est le cas dans la correction du deuxième calcul où l'élève interrogé invente une autre méthode pour essayer de répondre au désir du maître et régresse à un calcul additif alors qu'il a fait appel à un fait numérique.
On peut aussi expliquer ces maladresses par le peu d'habitude à conduire un débat ou tout simplement un questionnement.

Si on peut déceler ici des maladresses de débutant, on peut là encore se demander si ce questionnement formel des élèves lors des phases de bilan n'est pas une pratique courante de professeurs d'école. Toutefois, ceux-ci évitent les malentendus, en écourtant le questionnement.
Nous constatons l'absence de prises d'informations, du moins consciente, chez les étudiants observés visant à préparer les phases de bilan ou de synthèse. L'institutionnalisation quand elle existe ne semble pas s'appuyer sur les actions et les productions des élèves bien que ce souci soit présent dans les préparations.
Nous avons vu que le stagiaire se laisse guider par les manifestations des élèves pour décider qui envoyer au tableau, qui interroger. Il semble subir la pression des élèves plutôt qu'agir de façon consciente et préparée.
Cela le conduit à chaque fois à vouloir canaliser les dires des élèves, à ne pas leur laisser la parole.
Cette prise d'informations n'est pas aisée, en effet elle nécessite de prendre du recul par rapport à la classe, elle doit sans doute être plus ou moins pensée à l'avance, elle doit s'appuyer sur une certaine connaissance des élèves et surtout, pour être assez complète, elle impose des moments de travail autonome des élèves.

Nous relevons une pratique courante : le stagiaire ne s'adresse qu'à un seul élève oubliant presque le reste de la classe. Certes, ce défaut existe chez les maîtres confirmés, mais ils arrivent plus facilement à instaurer des règles de vie dans la classe qui imposent, sinon une écoute attentive des autres élèves, du moins un calme relatif. C'est loin d'être le cas pour certains stagiaires.

L'analyse de trois entretiens menés par un même formateur avec trois stagiaires différents confirme la pertinence de ces axes notamment en ce qui concerne la gestion des variables didactiques, la gestion des phases de formulation et d'institutionnalisation, les prises d'informations et la gestion de certains équilibres.

4. QUELQUES REMARQUES ET PISTES DE TRAVAIL SUR LES CONDITIONS D'APPROPRIATION DE CES GESTES PROFESSIONNELS

Je termine cet exposé par quelques remarques sur les modes d'appropriation des gestes professionnels décrit ci-dessus.

Le professeur stagiaire précédent commet d'autres maladresses dans la deuxième partie de la séquence suite à un entretien avec le PIUFM lors de la récréation.
L'élément essentiel retenu par le stagiaire porte sur le temps de parole accordé aux élèves. Il ressort de l'analyse de cet entretien et de celui, très court, ayant suivi la seconde partie de la séquence que le stagiaire a voulu appliquer immédiatement ce qui lui a été signalé (laisser la parole aux élèves afin de faire expliciter les procédures mises en œuvre, de traiter les erreurs éventuelles).
C'est, d'après lui, cette volonté qui le conduit à mener la correction du problème posé par la suite. L'argument essentiel donné est le suivant : "*j'ai laissé parler les élèves, comme vous me l'avez dit. C'est pour cela que cela a duré si longtemps ! "*.
Nous assistons ici à une tentative maladroite de tenir compte de remarques contextualisées (l'explicitation des procédures a été signalée à propos d'activités de calcul mental) par la mise en œuvre d'un compromis dangereux entre la nécessité institutionnelle de laisser parler les élèves et la volonté de réduire au maximum l'incertitude ainsi créée. Ce mauvais compromis se traduit par un malentendu accru entre les élèves et le professeur. Notons que ce malentendu risque, à terme, de l'amener à opter définitivement pour un mode de gestion fermé car plus confortable. C'est d'ailleurs ce qui semble ressortir du dialogue qui a suivi cette seconde prestation.
Cette interprétation mécanique de conseils, souvent constatée lors d'entretiens, montre bien le défaut d'une formation trop rapide, basée essentiellement sur des observations à chaud et partielles. L'impossibilité matérielle de décrire, de façon suffisamment riche, les pratiques observées amène sans doute le formateur à caricaturer ses remarques, à ne pas séparer les différents niveaux de son exposé et le formé à ne retenir que les aspects superficiels du discours du premier.

Ici, laisser parler les élèves, va revenir à les forcer à expliquer la multiplication 18 x 1 pour déterminer le prix d'un objet coûtant 18 F. Les élèves ne peuvent pas le faire, d'où un "acharnement pédagogique" du maître, des décalages importants et, à court terme, le risque d'un refus de prise en compte des arguments avancés.
Là encore, nous voyons que pour être pertinent ce type d'action de formation doit pouvoir au moins s'appuyer sur un faisceau cohérent d'observations, sur un niveau minimal de connaissances "théoriques" sur les procédures des élèves et sur des aller-retour fréquents entre ces différents aspects de la formation.
Ces remarques nous ont conduit, dans d'autres travaux, d'une part à essayer de modéliser certaines situations de formation, les visites en particulier, d'autre part à tester un dispositif de formation visant à optimiser un apprentissage de pratiques se faisant pour une grande part par compagnonnage (observation,

imitation, reproduction plus ou moins maladroite et appropriation de gestes professionnels) s'appuyant sur un enseignement d'éléments de didactique des mathématiques et sur l'observation et l'analyse des pratiques effectives des débutants.

Conduite d'un entretien avec un professeur stagiaire PE2 lors d'une visite dans le cadre d'un stage en responsabilité

Denis Butlen - Gabriel Le Poche

Extrait des Cahiers du Formateur, Tome 2 -Tarbes 1998.

Il s'agit de l'analyse d'un entretien conduit par un PIUFM (confirmé) lors d'une visite à un professeur stagiaire. Ce dernier a conduit une séquence de mathématiques durant un stage en responsabilité dans une classe de CE2 d'une école située dans un quartier plutôt défavorisé. L'analyse des participants à l'atelier porte à la fois sur la séquence menée par la stagiaire, sur des scénarios possibles d'entretien et sur l'entretien effectivement conduit.

Introduction

C'est atelier a pour but d'échanger à propos des visites effectuées lors des stages de responsabilité des PE2 stagiaires. Il s'inscrit dans la prolongation de l'atelier effectué au stage précédent[1] sur l'analyse de pratiques professionnelles. Il s'agit d'analyser une séquence de mathématiques conduite par un stagiaire PE2, d'échanger sur cette analyse à chaud et sur les principaux points à développer lors de l'entretien. La seconde partie de l'entretien est consacrée à l'analyse du contenu et de la structure de l'entretien d'un formateur avec le stagiaire observé.

I. Présentation de la séance par la stagiaire PE2

Les collègues prennent connaissance d'extraits d'une bande vidéo : une stagiaire PE2 conduit une séance de mathématiques en présence d'un PIUFM de mathématiques lors de la première partie d'un stage en responsabilité. La séance se déroule dans une classe de CE2 d'une école située dans un quartier populaire. La séance comporte une partie consacrée à des activités de calcul mental et une partie consacrée à la résolution de problèmes additifs et soustractifs.

a) La séance de calcul mental

Le calcul mental : les calculs à effectuer sont les suivants : $3 + 1 = ?$ $2 + 3 = ?$ $3 + 5 = ?$ $4 + 2 = ?$ $6 + 2 = ?$ $7 + 3 = ?$ $4 + 5 = ?$ $6 + 4 = ?$ $8 + 3 = ?$ $9 + 5 = ?$

La mise en œuvre est basée sur le procédé Lamartinière. Un seul élève semble

[1] Nous renvoyons le lecteur à la contribution de D. Butlen et G. Le Poche publiée dans les actes du stage des nouveaux formateurs en IUFM de Perpignan, 1998.

rencontrer systématiquement des difficultés (Anthony) ; les autres élèves réussissent pratiquement tous les exercices proposés. Le professeur stagiaire interroge souvent Anthony et essaie de lui faire prendre conscience de ses erreurs. Cette partie dure 12 minutes.

b) La résolution de problèmes additifs et soustractifs

Les participants à l'atelier disposent de la préparation de la stagiaire (voir annexe 1), seuls quelques extraits sont visionnés mais le planning et le contenu des périodes manquantes sont résumés par les formateurs. Pour décrire cette activité, nous l'avons découpée en épisodes.

Premier épisode (10 min) : Le professeur stagiaire introduit le problème n°1 à l'aide d'une simulation s'appuyant sur une boîte où elle met des cubes : *dans cette boîte, il y a 8 cubes. J'ajoute des cubes mais je ne vous dis pas combien. Voilà, c'est fait. Maintenant, il y a 12 cubes dans la boîte. Combien en ai-je rajouté ?*
Pendant que les élèves cherchent la solution sur leur cahier d'essai. La maîtresse retourne (au bout de 2mn 15s) le tableau où figurent des énoncés de problèmes correspondant aux calculs :

$\bullet + 3 = 8$ $\quad 10 + \bullet = 20$ $\quad 15 - 5 =$ $\quad \bullet - 3 = 8$
$24 - \bullet = 10$

Quels sont les énoncés ?
Un élève lit l'énoncé à haute voix du premier problème. Les élèves continuent à chercher certains manifestent leur plaisir et déclarent que c'est très facile. Certains élèves commencent à résoudre les autres exercices proposés.

Deuxième épisode, correction de l'exercice n°1 (6 min 30 s) : après avoir refermé le tableau, la maîtresse demande à un élève sa solution (comptage avec les doigts). Jéremy se trompe et explique de façon très confuse sa procédure. Un élève déclare avoir fait une addition à trou.

Troisième épisode, résolution et correction du troisième énoncé (3 min environ) : une simulation est faite avec la boîte lors de la correction. Un élève propose une solution.

Quatrième épisode, résolution du quatrième problème (2 min environ) : celle-ci est accompagnée d'une simulation avec la boîte.

Cinquième épisode, résolution et correction du cinquième problème (3 min environ) : le signe moins est utilisé par un élève et repris par la maîtresse.

Sixième épisode, résolution et correction du sixième problème (5 min environ)
Une vérification est faite à l'aide de la boîte. Les élèves sont plutôt agités à cette étape.

NB : la résolution et la correction se font très rapidement sans que la maîtresse s'assure de savoir si les élèves résolvent le problème à ce moment ou l'ont résolu auparavant.

II. Analyse de la séance par les participants à l'atelier

Les participants à l'atelier doivent par groupe (comportant à la fois des nouveaux et des anciens formateurs) rédiger leur réponse à la question suivante : quels sont les principaux points sur lesquels vous feriez porter l'entretien qui suit la visite ? Comment construire (a priori) l'entretien ?

Cet exercice est évidemment un peu formel dans la mesure où il est difficile de prévoir les réponses et interventions éventuelles du professeur stagiaire et leur prise en compte par le formateur. Cela permet toutefois d'échanger sur les pratiques des formateurs, sur l'analyse qu'ils font de la situation et sur leurs conceptions de l'entretien.

Les textes rédigés dans chaque groupe figurent en annexe n°2.
Chaque groupe expose son point de vue. Un échange suit cette présentation.

Essai de synthèse des productions

Voici certains points soulevés par les groupes[2] :
- Pertinence, utilité, objectif d'un exercice.
- A quoi sert la boîte ? Plus généralement a quoi sert le matériel utilisé ?
- Quel est le degré de formalisation attendu ?
- Démarches mise en œuvre (et prévue) pour la mise en commun des procédures.
- Prise en compte des productions (démarches) des élèves.
- Prise en compte du passé et des compétences des élèves.
- Gestion de la validation « matérielle ».
- Gestion de l'élève en difficulté.
- Gestion de la continuité des activités proposées dans la même séquence.
- Erreur de contenu « tout relève-t-il du + » ?
- Gestion de l'espace classe, disposition des tables.
- Gestion du tableau (réservé au maître).
- Gestion du temps de résolution des élèves.
- Pas d'explication des démarches effectives des élèves.
- Pas de prise en compte de ses réponses dans la correction.

[2] Les procédures des différents groupes se trouvent dans le tome 2 des Cahier du Formateur, Tarbes, 1998.

III. Analyse de l'entretien d'un PIUFM de mathématiques confirmé et du PE2 stagiaire.

1. Méthodologie d'analyse

Afin d'analyser cet entretien, les animateurs présentent un découpage possible en épisodes correspondant à des contenus différents.
Cette étude se base sur une méthodologie d'analyse a priori de situations de formation centrées sur l'analyse de pratiques de professeurs d'école débutants.
Elle permet notamment de distinguer dans le discours du formateur les parties qui relèvent plutôt de :

- l'analyse à chaud effectuée par le formateur,
- l'analyse effectuée par le formé,
- l'évaluation de la prestation,
- des conseils donnés par le PIUFM. Ces derniers peuvent concerner plusieurs domaines : le projet du stagiaire ou la mise en œuvre de la séance.

Après avoir proposé aux participants de visionner certaines parties de l'entretien, les animateurs de l'atelier proposent un découpage de l'entretien selon ces différents critères. Ce découpage est commenté en s'appuyant sur le protocole[3] écrit de l'entretien qui a été distribué aux participants (voir annexe n°3).

Plusieurs niveaux d'entretien qui peuvent être imbriqués semblent caractériser l'intervention du PIUFM.
On peut distinguer en particulier :

- Des épisodes où le stagiaire analyse sa prestation, expose ce qu'il a vécu. Cela peut l'amener à envisager des changements dans le déroulement prévu ou effectif de la séquence, des prolongements ultérieurs ou des activités spécifiques visant à réduire certaines difficultés manifestées par les élèves.
Cette auto-analyse est souvent sollicitée par le formateur qui pose des questions.

- Des épisodes consacrés à une évaluation de la séquence par le PIUFM, cette évaluation peut porter sur le projet de l'enseignant stagiaire ou sur sa mise en œuvre. Elle peut s'appuyer sur l'étude de la préparation ou sur l'auto analyse du stagiaire. Dans tous les cas, elle est significative des conceptions du PIUFM. En effet, cette évaluation s'appuie à la fois sur " ce qui a été fait", - l'observation effectuée par le formateur - et sur "ce qui aurait pu être fait" - une séquence potentielle traitant du même contenu, reconstruite, repensée par le formateur à partir de son expérience personnelle.

L'analyse de plusieurs entretiens montrent que l'on distingue souvent deux types

[3] La transposition de l'entretien peut être consultée dans le tome 2 des Cahiers du Formateur, Tarbes, 1998.

d'évaluation : une évaluation "institutionnelle"(voir annexe n°2) et une évaluation formative portant sur davantage de points que la précédente.

- Des épisodes consacrés à la reconstruction partielle de la séquence analysée : le PIUFM propose des adaptations, des changements. Ces changements sont soit très contextualisés (spécifiques de la séance étudiée) soit plus généraux ; ils s'appuient alors sur des principes de construction de séance.

- Des épisodes faisant référence à des situations de formations vécues ou à vivre lors de la formation (cours du formateur) à l'IUFM.

2. Découpage de l'entretien

Voici un découpage possible essayant de distinguer ces différents points de vue et portant sur la première partie de la séance consacrée au calcul mental. Une analyse du même type peut être conduite pour la seconde partie.

Lignes 1 à 54 : auto analyse de la stagiaire sollicitée par le PIUFM, celle-ci porte sur des aspects globaux : la "discipline", les élèves rencontrant des difficultés importantes, le rythme de travail.

Lignes 55 à 76 : la stagiaire, sollicitée par le PIUFM, essaie d'analyser les causes de l'agitation perçue à la fin de la séance ; elle pense que celle-ci est due à un défaut de construction et de mise en oeuvre : pour maintenir l'attention des élèves, il faut changer plus souvent d'activités.
Le formateur soulève le problème de la forme prise par l'ensemble des activités : « trop collective » à son avis.

Lignes 77 à 84 : le PIUFM semblant s'apercevoir du décalage entre son analyse et celle de la stagiaire se livre à une première évaluation : la mise en oeuvre de la séance est trop faite sur le mode collectif, il n'y a que des phases de travail individuel ou des phases collectives (lors des corrections notamment).

Lignes 85 à 101 : le PIUFM demande à la stagiaire d'approfondir sa réflexion en prenant en compte le jugement qu'il vient d'énoncer. Il lui demande de réfléchir à la proportion relative de production écrite et orale des élèves durant la séance.

Lignes 102 à 121 : le PIUFM évalue un second aspect de la mise en œuvre de la séquence : selon lui, celle-ci est et se déroule trop sur le mode oral.

Lignes 122 à 123 : Cette évaluation l'amène à demander à la stagiaire d'envisager une autre mise en œuvre possible.

Lignes 124 à 137 : devant le peu de réponse du stagiaire, le PIUFM souligne à nouveau les deux aspects qui lui semblent les plus négatifs dans ce qu'il a vu : la mise en oeuvre trop collective[4] et utilisant trop le mode oral. Ce dernier jugement porte notamment sur le fait que la stagiaire parle (aux élèves) trop pendant la séance.

Lignes 138 à 164 : s'appuyant sur ces jugements, le PIUFM aborde le problème du traitement des élèves rencontrant de grandes difficultés et donc manifestant un grand décalage de performances par rapport à leurs pairs. Il soulève le problème de la mise en œuvre d'une pédagogie différenciée et demande au stagiaire d'envisager une forme de travail adaptée à celle-ci.

Lignes 165 à 192 : la stagiaire expose les difficultés rencontrées dans cette mise en œuvre, perçoit bien la nécessité de prévoir un travail de groupe mais ne semble pas convaincu de sa pertinence.

Lignes 193 à 213 : le PIUFM rappelle l'aspect formateur de l'entretien en soulignant l'intérêt de noter ses remarques puis en imposant cette prise de notes à la stagiaire.

Lignes 214 à 219 : déroutée, la stagiaire demande au PIUFM de reconstruire un scénario possible.

Lignes 220 à 253 : le PIUFM revient sur le quart d'heure de "mise en route" qui a précédé la séance de mathématiques.

Lignes 254 à 324 : sollicitée, assistée par le PIUFM, la stagiaire analyse le contenu de la séance effectuée. Le PIUFM semble exprimer à mots couverts son étonnement sur le choix effectué. Après avoir souligné le milieu d'origine défavorisé des élèves de la classe, il demande à la stagiaire de comparer ses exercices avec ceux proposés par le ERMEL, utilisé pour préparer la séance. Cette comparaison amène à une prise de conscience du décalage entre le niveau de difficulté proposé dans les activités de calcul mental du ERMEL et celui des exercices proposés par la stagiaire. Le PIUFM déclare que ces derniers sont trop faciles pour un CE2 et souligne le manque d'exigence de la stagiaire à propos des procédures mobilisées par les élèves (comptage, surcomptage au lieu de calcul).

Lignes 325 à 354 : le PIUFM évalue négativement à nouveau les choix opérés par la stagiaire lors du calcul mental : nombres petits, procédures exigées et exposées trop primitives.

Lignes 355 à 412 : le PIUFM reconstruit la situation et propose des modifications portant sur les activités observées. Il conduit une analyse a priori des procé-

[4]Le PIUFM utilise le terme collectif pour décrire un mode de gestion basé sur une alternance entre travail individuel des élèves et phases collectives consacrées à l'explicitation des procédures des élèves, au discours du maître ou à l'énoncé des consignes.

dures mobilisables par les élèves pour calculer 9 + 6. Cela l'amène à repenser les exercices proposés et leur mise en œuvre.

Lignes 413 à 471 : s'appuyant sur l'utilisation par les maîtres de la classe et par la stagiaire du ERMEL, le PIUFM montre comment utiliser ce manuel pour préparer les activités de calcul mental, choisir les exercices, utiliser le matériel nécessaire à un travail de groupe (numéricartes).

Lignes 472 à 549 : le PIUFM étudie la gestion particulière d'un élève manifestant de grandes difficultés : Anthony. Il souligne à ce propos la nécessité de prévoir des activités adaptées, de ne pas pratiquer d'acharnement pédagogique mais de traiter ces difficultés en petits groupes. Cela rend cohérent sa proposition de mise en œuvre d'une pédagogie différenciée s'appuyant sur un travail de groupe.

Lignes 550 à 554 : le PIUFM résume les points développés précédemment.

Lignes 555 à 561 : le PIUFM ancre son entretien dans le cadre de la formation dispensée à l'IUFM.

Lignes 562 à 568 : le PIUFM évalue le rythme de la séance de calcul mental, qualifiée de trop peu scandée.

Lignes 569 à 612 : le PIUFM resitue ses conseils par rapport à d'autres références : ERMEL, maître-formateur, pratiques professionnelles usuelles…

ANNEXE 1 : PREPARATION DE SEANCE

<table>
<tr><td colspan="3">Discipline : mathématiques</td><td colspan="2">Thème : résolution de problèmes additifs et soustractifs
-Apprentissage - entraînement</td><td>Date : 12.10.98</td></tr>
<tr><td colspan="5">Objectifs notionnels : élaborer une démarche originale dans un problème de recherche (problème soustractif)</td><td>Durée : 35min</td></tr>
<tr><td>Objectifs méthodologiques :</td><td>Durée (min)</td><td>Mode de travail</td><td>Déroulement</td><td>Tâche des enfants</td><td></td></tr>
<tr><td>-Formuler et communiquer sa démarche
-écoute attentive</td><td>5 min</td><td>C</td><td>Présentation de la situation
-matériel (boîte, jetons, cahier)
-énoncé du problème, * + action du Maître</td><td>Observer le matériel
Écouter</td><td></td></tr>
<tr><td>Compétences attendues :
Connaître la table d'addition</td><td>10 min</td><td>I</td><td>Recherche sur le cahier au stylo (pas de gomme, pas de blanco). Le maître repère les procédures pour la mise en commun.
→ pour ceux qui trouvent rapidement, d'autres problèmes au tableau (déjà prêts) **</td><td>Elaborer une procédure de recherche</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>20 min</td><td>C</td><td>Mise en commun
Présentation de toutes les procédures, même celles qui donnent un résultat incorrect :
1er résultat correct
2ème résultat incorrect pour pouvoir tout de suite expliquer l'erreur
3ème …
Faire manipuler si nécessaire</td><td>Expliquer sa procédure
Justifier sa procédure
Comparer avec les autres</td><td></td></tr>
</table>

Matériels : -une boîte -des jetons identiques (20) -cahier d'essai des élèves	Prolongements : -Autres problèmes oraux du même style Problèmes écrits	

***** Dans cette boîte, il y a 8 cubes. J'en ajoute des cubes mais je ne vous dis pas combien.
Voilà, c'est fait. Maintenant, il y a 12 cubes dans la boîte. Combien est-ce que j'en ai ajouté ?

Autres problèmes :
• + 3 = 8
10 + • = 20
15 – 5 =
• – 3 = 8
24 - • = 10

**** Procédures possibles :**
1) ajouter = addition
2) je sais que 8 + 4 = 12
3) je sais que 12 – 8 = 4
4) 8 + • = 12 : j'essaie des nombres,
je pose l'opération,
5) je dessine les 12 cubes, je barre les 8 du début et je compte les autres,
6) je dessine les 8 cubes du début, je complète jusqu'à 12 et je compte.

Pour aider

Pour savoir combien tu as ajouté de cubes, il suffit d'enlever ceux du début.
Partir de l'état initial, travailler par ajout successif.

ANNEXE N°2

Grille institutionnelle

Grille des compétences attendues pendant les stages

1- Concevoir des situations d'apprentissage

1.1- Définir un objectif d'apprentissage en fonction
- des objectifs nationaux,
- de l'objet d'étude,
- des acquis et des capacités des élèves (la situation est inscrite dans une progression et une durée),
- d'un projet en rapport avec la réalité de la classe, de l'école.

Le professeur des écoles stagiaire doit être capable de :
- gérer des modalités pédagogiques différentes en fonction de la diversité des tâches et des formes de travail,
- varier les situations d'apprentissage pour atteindre un même objectif,
- identifier des obstacles possibles.

1.2- Produire un document traduisant
- les objectifs de la séance,
- l'organisation et le déroulement prévu (consignes, support...),
- la progression,
- l'évaluation.

2- Conduire la classe et prendre en compte la diversité des élèves

En fonction des activités prévues le professeur des écoles stagiaires doit être capable de :

	Indicateurs possibles
- organiser l'espace de la classe, - gérer les différents moments d'une séquence, - gérer l'alternance des temps de recherche et des temps de synthèse, - utiliser de façon appropriée les supports, outils, aides diverses - amener les élèves à prendre conscience des contraintes et des ressources propres à l'activité, - assurer le suivi et l'appréciation des tâches écrites (correction des cahiers, conception des polycopiés,...), - être attentif aux réactions des élèves, - tirer parti de leurs erreurs et de leurs réussites.	- degré de cohérence - clarté et pertinence des consignes - choix des organisations (magistrales, individualisées, interactives) - variété des formes d'intervention et de communication - utilisation des outils et maîtrise des aspects matériels - travail effectif des élèves et gestion du temps - qualité des productions - pertinence des évaluations - exercice de l'autorité

3- Analyser sa pratique

Lors de l'entretien le professeur des écoles stagiaires doit être capable de :

	Indicateurs possibles
- mettre en relation, pour la situation d'apprentissage, les résultats obtenus et le comportement des élèves avec le projet et les données de départ, - analyser les résultats constatés et déterminer les causes des erreurs, prévoir des activités de remédiation et d'approfondissement en fonction de cette analyse, - mesurer l'efficacité de son action et en tenir compte pour la conception et la planification des séquences futures.	- premiers repérages des démarches d'apprentissage et des obstacles rencontrés par les élèves, - écart entre le prévu et le réalisé - stratégies de remédiation - réinvestissements envisagés - modalités d'évaluation

Fiche de visite (recto)

iufm Bretagne

1997 - 1998

Site de
- Quimper ☐
- Rennes ☒
- St-Brieuc ☐
- Vannes ☐

STAGE EN RESPONSABILITÉ

Premier degré

FICHE DE VISITE N° 5 (1re visite Responsabilité n°2)

Nom patronymique : FERRAND

Nom marital : LALOZ

Prénom : Béatrice

Ecole : Primaire Kennedy Classe : CE2 Nombre d'élèves : 22

Date : 12/10/98 Heure : MATINÉE

Séquences observées (thème et discipline) : MATHS

Nom du formateur et qualité : G. LE POCHE

Appréciation générale du formateur

un début de stage convenable. il faut maintenant varier les structures pédagogiques et mettre en place la différenciation nécessaire.

Date : 12/10/98
Signature du formateur :

Observations éventuelles du stagiaire :

Signature du stagiaire : Date :

TSVP

INSTITUT UNIVERSITAIRE DE FORMATION DES MAÎTRES DE BRETAGNE
153, rue Saint-Malo - 35043 Rennes cedex - Tél. 02 99 54 64 44 - Fax 02 99 54 64 00 - http:// www.bretagne.iufm.fr

Fiche de visite (verso)

CONSTATS	CONSEILS : OBJECTIFS FIXES, DEMARCHES SUGGEREES, etc...
Conception des situations d'apprentissage * MATHS : un début d'utilisation du ERMEL, garder l'idée de travailler le calcul et les structures additives * classe correctement préparée, mais le cahier journal fait défaut.	→ faire davantage confiance à cet outil à ta disposition. Ne pas hésiter à mettre en place les jeux de la valisette Numéricartes. → mettre en place un cahier journal avec une partie observations.
Conduite de la classe et prise en compte des élèves non collectif trop important * Maths : calcul pensé et problèmes additifs → calcul pensé : les exercices proposés ne nécessitent pas des procédures de calcul pensé → il faudrait mettre en évidence des procédures du type appui sur les doubles, passage à la dizaine... → problèmes additifs : mise en œuvre à améliorer * Français : expression écrite	→ Alterner les différentes structures pédagogiques. En particulier éviter un travail collectif trop long (1/4 h est une bonne durée) → essayer un travail de groupe : une confrontation des points de vue après l'obtention de productions individuelles → le visionnement collectif d'un film Le Cyclope de la mer est une bonne entrée.
Analyse de la pratique et évaluation (entretien) L'essentiel est perçu, la formation en didactique des mathématiques est un peu fragile.	

voir « compétences attendues » page 2 du dossier

Préparation et analyse de séances de classe filmées dans la formation des PE2

Catherine Houdement - Catherine Taveau

Extrait du Cahier du Formateur, Tome 3 – Aix en Provence, 1999.

L'atelier visait à donner des exemples de dispositifs relativement légers permettant de filmer des professeurs des écoles stagiaires sur le terrain et des exemples d'exploitation de ces films en formation à l'IUFM. Deux dispositifs sont ainsi présentés. Seules les grandes lignes de l'exploitation des films sont retranscrites ici, l'intérêt résidant essentiellement dans le visionnement effectif suivi de la discussion portant sur l'analyse.

I - Un exemple de dispositif à l'IUFM de Bonneuil

A Description du dispositif

Cette séance se situe dans le cadre des ateliers professionnels, mis en place dans le nouveau plan de formation. Les PE2, par groupe de cinq, travaillent une demi-journée par semaine dans une classe pendant un cycle de six semaines. Les séances sont préparées collectivement et le prestataire est tiré au sort à la fin de la préparation. Une analyse à chaud, encadrée par un formateur (PIUFM ou IMF), est effectuée immédiatement après la séance et des pistes de travail sont proposées pour élaborer la séance de la semaine suivante. Ces séances ne font pas partie d'un dispositif d'évaluation, mais bien d'un dispositif de formation. Ainsi l'analyse porte sur la préparation collective de la séance (les objectifs, l'analyse a priori, la synthèse...), puis sur l'écart perçu entre celle-ci et la réalisation effective. A la suite de cette analyse, le formateur PIUFM peut ainsi réajuster ses interventions auprès des PE2 dans le cadre de ses cours.

B Les caractéristiques de la cassette choisie, vues par le formateur

La séance filmée est la troisième d'une séquence en CP sur le quadrillage et le repérage. Dans cette séance, le stagiaire souhaite mettre en œuvre un travail commencé à l'IUFM, en particulier sur les situations de communication. La réalisation effective de la séance montre que les caractéristiques d'une situation d'émission-réception n'ont pas été perçues par le stagiaire : celui-ci ne construit pas d'enjeu pour les élèves, qui ne donnent pas de sens au mot *message* ; la phase de confrontation, validant les réussites et pointant les erreurs, n'est pas menée à terme ; aucune mise en commun n'est faite par le maître sur les réussites ou les erreurs, sans même parler de synthèse. Finalement il semble, à la vision de la cassette et après discussion avec le stagiaire, que celui-ci a adapté la situation de communication à sa conception de l'enseignement des mathématiques : toujours contrôler l'avancée des élèves, donc ne pas leur laisser d'autonomie, ce qui est a priori contradictoire ave le principe d'une situation de communication.

L'autre contradiction, qui montre que le stagiaire ne s'est pas approprié l'enjeu des situations de communication, est la place de cette situation dans la séquence d'apprentissage. Elle n'est pas proposée en amont d'un nouvel apprentissage (ici le codage de nœuds sur quadrillage) mais comme une activité de réinvestissement. Ce qui enlève tout d'abord l'aspect ludique de la situation mais aussi gomme le rôle didactique lié à cette activité.

C'est pourquoi cette cassette nous semble bien illustrer l'idée de « dénaturation » d'une situation didactique : ici on peut analyser la dénaturation d'une situation de communication.

C Les modalités d'exploitation

En PE2

Après un cours aux PE2 les faisant travailler sur ce qu'est une situation de communication, l'étude et l'analyse de cette cassette permettent une évaluation formative de ce qu'ils ont retenu et comment ils envisagent, in vitro, de conjuguer gestion de classe et mise en œuvre d'un tel type de situation. L'étude renvoie aussi aux savoirs en jeu et à la pertinence de la mise en œuvre d'une telle situation, avec les modifications liées aux variables didactiques disponibles.
Cette séance offre une autre dimension d'exploitation en formation PE2 : le formateur, avec cet outil, sensibilise les stagiaires à l'analyse fine d'une séance de classe et peut ainsi les aider à rendre plus pertinentes les préparations qu'ils réaliseront par la suite, notamment celles liées à une situation de communication.
A la vision de cette séance sont aussi apparues, de façon forte, les appréhensions du stagiaire quant à la difficulté de mener à bien cette activité : « *attention, les enfants nous allons faire un travail difficile, cela va être dur, etc.…* ». Grâce à cette cassette les stagiaires peuvent ainsi prendre conscience de l'effet de leur propre ressenti sur le déroulement des séances. De fait il est essentiel de faire un travail sur soi afin de ne pas enfermer les élèves dans des représentations propres au maître. La vidéo permet alors d'illustrer les conséquences de ces attitudes qui seraient peu comprises si elles étaient exprimées par un formateur lors d'une visite pendant un stage en responsabilité.

En séminaire à Aix

Les formateurs travaillent par groupe, six groupes maximum. Les groupes sont constitués de nouveaux formateurs et d'anciens. Les anciens suscitent l'expression des nouveaux, en aucun cas ils ne sont rapporteurs du groupe. La consigne d'étude est du type :

Vous devez exploiter cette cassette en PE2 : sur quels points attirer l'attention des PE2 et pourquoi ? Dégager par groupe les deux points qui vous paraissent les plus importants.
Après un débat au sein des groupes, une mise en commun est faite. Dans un premier temps, chaque groupe fait part d'une seule remarque. Puis dans un second temps, chaque groupe peut compléter par un autre point qui n'a pas encore été cité.
La mise en commun fait apparaître :

- des questions analysant l'activité des élèves : quelle est leur activité effective ? Le travail par groupes est-il justifié ? Quel est l'espace de liberté de l'élève ?…
- des questions analysant le rôle du maître : comment mieux gérer le temps ? Comment finir une séance ?
- des questions analysant le fonctionnement d'une situation de communication : fonction d'une telle situation, place du maître, place de la validation ?

Bien entendu on retrouve dans l'analyse conjointe des formateurs les nécessaires entrelacs du fonctionnement a priori d'une situation didactique (ici une situation de communication), de son appropriation par le maître et des habilités professionnelles de sa mise en œuvre.
Il apparaît au sein de cet atelier que l'usage d'un tel outil de formation n'est pas habituel et que son exploitation avec des PE2 nécessite une réflexion du formateur pour bien cibler un élément d'une formation théorique en didactique. La variété des réponses des formateurs présents illustre bien aussi des conceptions différentes d'une formation PE.
Ce premier visionnement a donné lieu, de la part des animatrices de l'atelier, à une mise au point, en terme de déontologie, sur l'utilisation en formation de ce type d'outil.

II Un exemple de dispositif à l'IUFM de ROUEN

A Description du dispositif

Le plan de formation de l'IUFM de Rouen prévoit 45 heures de module mathématique pour tous les professeurs des écoles stagiaires. Les contenus de ce module recouvrent le complément par rapport à l'année de PE1, du programme de mathématiques, jugé « nécessaire » pour l'enseignement des mathématiques à l'école. Ce module est essentiellement consacré à une réflexion didactique et méthodologique sur le nombre entier (avec une visée plutôt vers les cycles 1 et 2), sur les nombres non entiers (vers le cycle 3), sur la géométrie (tous cycles). A l'intérieur de ce module sont envisagés des préparations de séances, des bilans et des poursuites de séances, essentiellement par écrit, à l'occasion de stages en responsabilité.

Par ailleurs, dans le contingent des heures dévolues à la formation générale, vingt-quatre heures sont proposées en option. Voici quelques exemples de titres d'options : « Quelle évaluation ? » « La gestion des conflits dans la classe ». « Communication et relation éducative ». Ces modules optionnels sont en général animés par des professeurs de formation générale. Nous avons décidé, avec quelques formateurs disciplinaires, d'entrer dans cet espace en proposant un module intitulé « Analyse de pratiques ».

B Le module *Analyse de Pratiques*

Il est constitué de six séances de deux heures, articulées autour d'un stage en responsabilité. Il fonctionne en séminaire avec en moyenne douze à quinze professeurs des écoles stagiaires et deux à trois formateurs de disciplines différentes. Les deux premières séances sont consacrées à la présentation de ce séminaire « analyse de pratiques » : le but de ce séminaire est, pour les professeurs des écoles, de profiter d'analyses collectives de quelques pratiques individuelles pour progresser dans la leur et, pour les PIUFM, de confronter des regards pluridisciplinaires sur une même séance. Un contrat est établi entre formateur et stagiaire acceptant d'être filmé dans la discipline du formateur. Le stagiaire s'engage à remettre sa préparation écrite à l'issue de la séance, à faire un bilan à chaud de sa séance après le départ du formateur et visionner la cassette avec le formateur à l'IUFM. Le formateur s'engage à recevoir individuellement le stagiaire, à analyser avec lui sa prestation et à préparer avec lui l'intervention en grand groupe.
L'intervention en grand groupe repose donc sur une co-animation du formateur de la discipline et du PE2. Cette intervention comprend :

- une présentation de sa prestation par le PE2 à ses collègues et aux formateurs présents ;
- le visionnement d'une partie de la cassette ;
- un travail par groupes d'analyse de la cassette sur un questionnement prévu par le formateur.

Les formateurs des autres disciplines participent à tous les travaux de grand groupe ; leur approche transversale, mais non spécialiste, amène à spécifier les caractéristiques disciplinaires de la séance et de sa préparation.

C Les caractéristiques de la cassette choisie, vues par le formateur

La cassette choisie montre une séance de double niveau, effectuée dans une école de campagne, un matin de novembre, pendant le premier stage en responsabilité d'un PE2 qui n'a pas fait de première année à l'IUFM. Le double niveau (10 CE2 et 14 CE1) est assez coopératif, plutôt habitué à se voir confier un travail en autonomie. Le maître oscille en permanence entre les deux niveaux, démarche à laquelle les élèves semblent habitués.
L'observation est axée sur le niveau CE1 (tout en analysant la gestion d'ensemble). Le stagiaire est globalement mal organisé dans sa gestion de

classe : la préparation du tableau, les décisions d'alternance CE1-CE2, travail collectif, travail individuel en sont des preuves facilement lisibles. Le stagiaire possède visiblement peu de connaissances didactiques sur la numération : il mêle, sans gestion différente, des exercices relevant de compétences sur la numération orale et d'autres relevant de compétences sur la numération écrite, ce qui le conduit d'ailleurs à ne pas pouvoir se détacher des CE1.

D Les modalités d'exploitation

En PE2

Lors de l'entretien individuel préalable, le stagiaire a pu mettre en relation la gestion délicate de sa séance et l'organisation a priori de ses activités. Des conseils bibliographiques lui ont été donnés sur la numération en cycle 2.

Lors du séminaire en grand groupe, le formateur décide de ne montrer que les passages concernant le CE1, et en particulier les lancements de consignes (le reste du film étant passé à vitesse accélérée). Il centre l'attention des PE2 sur la gestion du double niveau et le travail effectif des CE1 par un jeu de questions classiques du type :

- quelles sont les différentes phases de la séance CE1 ?
- quel travail de l'élève ? Quelles validations ?
- quels apprentissages effectifs à l'issue de la séance ?

La réalisation effective du séminaire PE2 a montré que les stagiaires semblaient prendre conscience de l'imbrication de la gestion d'un double niveau et de la réflexion didactique a priori sur les consignes à donner :

- d'une part pour viser à faire construire des compétences effectives de numération (et non pas se limiter à un questionnement d'évaluation sur des compétences déjà installées) ;
- d'autre part pour essayer de réguler a priori le temps du maître consacré à chaque niveau de classe, en prévoyant une organisation matérielle plus adaptée.

(Par exemple une consigne invitait UN élève à compléter un tableau de nombres sur le tableau ; ceci peut être remplacé par le remplissage de tableaux individuels, éventuellement différents selon les états connus de connaissances des élèves).

En séminaire à Aix

Les questions posées et discutées ont été : *quelle exploitation possible de cette cassette en formation ? Quels points fondamentaux peuvent être travaillés avec des PE2 suite à l'étude de cette séance ?*

Un débat s'est engagé entre les formateurs sur l'aide à apporter aux PE2 lors des visites pendant les stages en responsabilité. Suite à cette séance filmée, où le stagiaire vraiment débutant rencontre des difficultés de tous ordres (gestion de la classe, gestion de l'apprentissage, méconnaissance personnelle de certains contenus disciplinaires...), quelles attitudes peut avoir le formateur, sur quel(s) point(s) essentiel(s) portera son analyse avec le stagiaire afin de le faire réellement progresser dans sa pratique ? La difficulté réside dans le choix des angles de la formation qui nous semblent les plus pertinents selon l'état de connaissances et de compétences du stagiaire. Il est important de rester modeste face aux exigences de ces moments de visite du premier stage en responsabilité mais d'en tirer profit pour le retour de la formation à l'IUFM. N'oublions pas que nous, formateurs, sommes sensés nous perfectionner régulièrement, mais que chaque année, les PE2 sont toujours des débutants, avec les mêmes besoins de formation.

E Les conclusions en termes de formation de professeurs des écoles

Le travail en commun mené par les formateurs de différentes disciplines à l'écoute des PE2 les amène à définir ou différencier des composantes transversales du métier de professeur des écoles. Ce module participe donc à une approche de la polyvalence, approche certes non encore théorisée, mais constituée de gestes professionnels, certains exclusivement dépendant des savoirs d'enseignement disciplinaire en jeu, d'autres plus transversaux, relevant de ce qu'on pourrait appeler didactique et pédagogie générales.

Les stagiaires PE2 voient ancrée dans la pratique effective de la classe la nécessité d'une réflexion didactique a priori sur l'acquisition des savoirs, croisée avec la nécessité d'une organisation matérielle sans faille. Ils peuvent évaluer après coup les effets de décisions prises sur le vif suite à une préparation insuffisamment fine ou aux incidents de gestion. Ils apprennent à intégrer la réflexion didactique DANS la pratique de classe[1].

Lors du séminaire d'Aix, certains collègues formateurs ont été surpris de nous voir montrer aux PE2 des séances « qui ne seraient pas des modèles ». Là réside justement l'intérêt de ce type de dispositif. Il est important de permettre aux PE2 de se reconnaître dans des pratiques voisines, et de travailler sur CES pratiques, pour en extraire les côtés positifs et les facettes à améliorer, en s'appuyant sur les outils didactiques d'analyse. C'est là la différence entre les stratégies de « monstration » et celles de « transposition »[2].

III Conclusion sur ces dispositifs

Ces dispositifs de formation sont de plus en plus fréquents dans les nouveaux plans de formation PE2. Ils ont pour objectifs d'articuler au mieux la formation théorique et la formation pratique au sein des IUFM. Ils permettent de mettre en place une démarche d'évaluation formative et formatrice avec les stagiaires qui

[1] Ce module est, dans les bilans, qualifié de très professionnel par les PE2.

[2] HOUDEMENT et KUZNIAK (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques, dans *Recherches en Didactique de Mathématiques* vol.16/3. Grenoble : La Pensée Sauvage.
HOUDEMENT (1999) Stratégies de formation des maîtres du premier degré en mathématiques. *Les Cahiers du Formateur* Tome 2. COPIRELEM. Séminaire de Tarbes (déc.98). Paris : IREM de PARIS 7.

apprécient ce type de travail et qui trouvent de l'intérêt à revenir en formation après les stages en responsabilité.
Par ailleurs ces pratiques d'analyse vont donner du sens aux apports en didactique que nous proposons classiquement en formation. Ce temps collectif autour de séances préparées et filmées permet d'apporter, en plus d'une aide individuelle au prestataire de la séance, un regard collectif sur des éléments didactiques et pédagogiques indispensables à la gestion professionnelle des apprentissages.

Sur le site de Rouen, le module « analyse de pratiques » se solde toujours par un bilan favorable ; certains stagiaires ont même affirmé avoir compris là l'intérêt de la formation. Cependant cette option n'est pas retenue toutes les années, faute de volontaires.

Sur le site de Bonneuil, ces ateliers fonctionnent bien, l'investissement des stagiaires est très important même s'il entraîne un surcroît de travail personnel. Ce dispositif permet de construire une dimension de travail collectif et d'entraide entre les PE2 avec une écoute réelle des conseils et critiques. Mais ce dispositif est très coûteux en terme d'heures, heures amputées sur le contingent des disciplines. Par contre, il semblerait que le transfert de ces analyses de pratiques ne se fasse pas si facilement en stage en responsabilité quand les stagiaires travaillent dans l'urgence. Une affaire à suivre…

Textes méthodologiques

Catherine Houdement - Marie-Lise Peltier

Extrait des Cahiers du Formateur, tome 1 - Perpignan 1997.

Dans cet article sont proposés des textes « méthodologiques » relatifs à la préparation, à l'analyse du déroulement et au bilan d'une séance de mathématiques pour la formation des professeurs d'école. La construction et l'utilisation des ces textes sont argumentées.

1- Le paradoxe de l'explicitation

La multiplicité des visites aux stagiaires ou aux titulaires débutants nous a amenées à pointer différents éléments conduisant à des séances plus ou moins bien "réussies". Notre volonté a été de lister une série de points dont certains sont rarement explicités par les maîtres chevronnés sauf à l'occasion de "crises".
Il y a là un paradoxe : l'explicitation fournie, par la multiplicité des éléments pris en compte, semble plutôt convenir à un enseignant chevronné ; or généralement celui-ci n'en a plus besoin, ces éléments constituant une partie de l'expertise de sa pratique professionnelle. Pour un débutant, la fiche peut apparaître trop détaillée dans la mesure où elle signale des points qui n'ont pas encore été l'occasion de “ crises ” ; or on sait que ce sont souvent ces “ points de détail ” qui font basculer la séance d'une réussite moyenne à un échec cuisant. Il est connu que les débutants souhaitent qu'on ne leur montre que l'essentiel : mais justement l'essentiel n'est pas souvent séparable de ces multiples éléments de la préparation mentionnés dans la fiche, en apparence secondaires, et le bilan aide à comprendre ce qui a pu provoquer les difficultés.
Ce paradoxe est d'ailleurs une spécificité des différents outils qui sont proposés à l'enseignant, les manuels scolaires par exemple : créés pour tous, ils ne sont, tels quels, utilisables par personne ; quel que soit le document, il est nécessaire de l'adapter aux personnes (maître et élèves) qui vont l'utiliser et aux contraintes institutionnelles et matérielles qui constituent le cadre de toute situation d'enseignement.

2- La genèse des différentes fiches

Depuis plusieurs années, nous proposons aux stagiaires PE2 un travail spécifique autour de la préparation des séances de mathématiques. Bien que non spécifiquement mathématiques, nous considérons que l'étude de ces questions fait partie d'un travail que nous devons prendre en charge. Les questions, les réflexions, les propositions des stagiaires sont mises en commun et discutées avec le groupe entier. Elles font l'objet d'une synthèse de notre part, synthèse qui est ensuite rédigée et distribuée à tous. Ces synthèses sont donc différentes dans chaque groupe et chaque année, puisqu'elles sont construites autour du travail des étudiants.

De plus, l'évaluation du module de mathématiques dans notre IUFM est en liaison étroite avec les stages en responsabilité : les stagiaires doivent fournir les fiches de préparation de deux séances consécutives qu'ils ont effectivement menées et les bilans de ces séances, préciser l'articulation des deux séances et la manière dont le bilan de la première est pris en compte dans la préparation de la deuxième.
Il nous a fallu envisager un moyen d'aider les stagiaires à prendre du recul par rapport à leur pratique, à se poser des questions, à lier préparation et bilan, à distinguer ce que peut être une analyse "à chaud" et une analyse "à froid", différée dans le temps.
Nous avons décidé de mettre en commun nos expériences de formateurs, les outils relatifs aux préparations et aux bilans que nous avions l'une et l'autre construits avec nos différents groupes de stagiaires, de les discuter. Cette mise en commun a débouché sur des documents qui, dans notre esprit, ne peuvent en aucun cas être des fiches à "renseigner" point par point, mais des outils d'aide à la réflexion, qui explicitent un certain nombre de questions, parfois oubliées ou plutôt passées sous silence.
Ces trois documents figurent en annexes 1, 2 et 3.
La fiche bilan de l’annexe 3 reprend, détaille et enrichit certains éléments déjà intégrés dans les annexes 1 et 2.

3- Utilisation que nous faisons actuellement de ces documents

Il nous semble nécessaire de conduire les stagiaires à prendre conscience de la complexité de la préparation, des enjeux de celle-ci, de la nécessité d'anticiper le plus possible le déroulement effectif. Mais pour qu'ils puissent s'impliquer dans ce travail, il nous semble nécessaire de les faire travailler sur une préparation précise.

Nous allons succinctement présenter un exemple de travail avec les stagiaires.
• Par groupe de trois ou quatre, les stagiaires sont invités à construire une séance en GS ou en CP sur l'étude du nombre. Pour cela ils disposent de différents manuels scolaires et des livres du maître associés. Ils doivent également essayer de dégager de la préparation de cette séance spécifique les éléments qui leurs paraissent valables pour la préparation de n'importe quelle séance de mathématique dans le niveau concerné.
Chaque groupe présente son travail sur une grande affiche, en deux colonnes. Dans l'une d'elles, les stagiaires notent tout ce à quoi il faut penser et tout ce qu'il faut faire avant la séance d'un point de vue général, dans l'autre ils exemplifient la première en l'appliquant au cas de la séance construite par le groupe.
• Les travaux des différents groupes sont affichés, commentés par leurs auteurs, débattus[1]. Puis nous menons une synthèse des éléments généraux d'une prépara-

[1] Une constante intéressante à signaler est l'absence quasiment systématique d'une rubrique consacrée à l'étude de la situation choisie : analyse des savoirs en jeu, adéquation aux objectifs poursuivis (qui eux ne sont jamais oubliés même si parfois ils sont si géné-

tion pointés par chaque groupe que nous réorganisons et complétons si nécessaire à l'aide de notre document.
• Nous distribuons ensuite les "petits guides pour fiche de prép" pour lecture et commentons ces documents en les articulant à la synthèse faite dans le groupe.

Le thème "comment faire le bilan de sa séance", est articulé avec le stage en pratique accompagnée, il ne porte donc pas sur le même thème mathématique pour tous les stagiaires.
Les stagiaires partent en stage de pratique accompagnée par groupe de deux au courant du mois d'octobre.
• Nous demandons qu'au moins l'un des deux mène une séance de mathématique. Chacun de ceux qui ont mené une séance est convié à faire un bilan personnel de sa séance effective, en se posant des questions relatives aux élèves, mais aussi des questions relatives à sa propre pratique. Nous demandons à chacun d'en discuter avec son co-stagiaire pour affiner l'analyse, et de noter les points qu'il a considérés comme pertinents pour mener ce bilan.
• Au retour du stage, une partie de séance est consacrée à un échange sur les bilans en centrant la discussion, non sur les contenus des analyses, mais sur les questions que se sont posées les stagiaires pour les mener[2].
• Après une synthèse de ces échanges nous distribuons la fiche bilan qui reprend et élargit souvent les propositions des stagiaires, fiche à laquelle nous adjoignons si nécessaire de nouvelles questions intéressantes des stagiaires.

Ce double travail est ensuite, comme nous l'avons dit, le point de départ de l'évaluation du module de mathématiques. Au cours du stage en responsabilité, les stagiaires vont présenter les préparations[3] de deux séances consécutives et les bilans associés. Pour cela ils peuvent se servir des outils qu'ils ont construits en groupe, des synthèses qui ont été faites, des documents qui ont été fournis. Nous corrigeons et commentons ces travaux. S'ils ne nous paraissent pas témoigner d'une réflexion suffisante, ou suffisamment pertinente, les stagiaires font à nouveau ce travail sur le second stage en responsabilité. Le jour où ces travaux sont rendus aux stagiaires, certains points de la préparation et du bilan sont repris, pour être précisés et pour souligner l'articulation entre bilan et préparation.

---

raux qu'ils n'ont guère de raisons d'être cités !), analyse a priori de la situation, réflexion sur les variables à disposition, prévision des procédures des élèves etc. Les stagiaires majoritairement pensent que si une situation se trouve dans un livre, elle est nécessairement intéressante.

[2] Dans ces bilans on peut constater que l'observation des réactions des élèves est toujours mentionnée. En revanche des questions relatives à une analyse en retour sur les actions du maître, sur ses propos, sur ses décisions, pour essayer de comprendre ce qui s'est passé, sont presque toujours absentes.

[3] La présentation matérielle de la fiche de préparation est naturellement laissée au choix du stagiaire. Nous sommes profondément hostiles à des fiches types, chacun devant noter sur sa fiche ce qu'il juge utile au bon déroulement de la séance en le justifiant brièvement.

4- Le point de vue des PE2 sur les guides pour « fiches de prep »

Le guide cycle 1 met trop l'accent sur **un** type de travail et d'organisation de classe maternelle (un atelier principal et des ateliers secondaires) ; or ce n'est pas dans les habitudes de tout maître de travailler ainsi. D'où sa difficulté d'utilisation, surtout pour un débutant, qui maîtrise mal la construction de l'autonomie des enfants dans les divers ateliers.

Le guide cycles 2 et 3 paraît plus utile dans la mesure où il rappelle au débutant des points qu'il pourrait oublier ; tel quel, il ne peut constituer une " check list ", dans la mesure où il est trop détaillé.

Il se présente tout de même comme une bonne aide à la prévision du déroulement et rappelle l'utilité du bilan pour construire ou adapter les séances suivantes.

Les fiches telles quelles sont un premier outil de travail, qui nécessiterait d'être enrichi et peut-être aussi adapté à l'expérience du stagiaire.

Il faudrait maintenant évaluer dans quelle mesure l'utilisation de la fiche bilan permet aux stagiaires de progresser dans la compréhension de la nécessaire dynamique entre prévision et improvisation.

5- Le point de vue des formateurs du séminaire de Perpignan

Plusieurs collègues soulignent l'absence de précisions explicites sur les cadres théoriques de référence relatifs à l'articulation entre enseignement et apprentissage : cette remarque est tout à fait pertinente. Nous précisons donc que notre réflexion se construit autour des concepts de la didactique des mathématiques et de la didactique professionnelle développés en France. Ces propositions s'appuient sur des modèles d'enseignement d'origine constructiviste ; ceux-ci sont en général moins familiers aux stagiaires que des modèles plus transmissifs, ce qui peut conduire certains PE2 à se décourager devant l'insuccès immédiat de leurs essais et à rejeter en bloc ce modèle d'enseignement.

C'est pourquoi nous considérons ces fiches comme aboutissement d'un travail de formation et non comme des prescriptions.

Les collègues apprécient le fait que ces fiches aillent à l'encontre d'une dérive fréquente, cette dérive consiste à :

- dans la préparation, ne prendre en compte que l'activité des élèves sans la mettre en relation avec les actions du maître ;
- dans les bilans, chercher les causes des événements du déroulement seulement du côté des élèves sans analyser ce qui, dans la conduite du maître, a pu déclencher ces événements.

La dynamique, préparation puis bilan, proposée dans ces fiches, permet au contraire de mesurer l'écart entre le projet de déroulement et la mise en œuvre effective en croisant les effets des actions du maître et de l'activité des élèves.

Certains collègues pensent que la spécificité mathématique de ces fiches n'est pas assez marquée : or, justement, un de nos soucis est de proposer une aide méthodologique plus transversale pour approcher la polyvalence du professeur

d'école. Il nous semble que des entrées trop disciplinaires ne collent pas à la réalité du métier de professeur d'école, et de ce fait, sont souvent rejetées sans autre forme de procès.
Il a été mentionné que l'explicitation de différents items liés à la préparation de séance et au bilan permet aux utilisateurs de prendre de la distance par rapport à leur pratique et d'affiner leur regard : en effet, ce ne sont pas des documents clés en main, mais des outils de travail qui aident à la réflexion. D'autre part, ces fiches offrent une alternative aux diverses propositions, commerciales ou non, qui circulent sur le terrain, et devraient permettre à chacun de construire des outils personnels.
A ce titre, ces fiches peuvent être utilisées comme aides à la préparation au CAFIPEMF[4] : elles explicitent en effet des items très souvent implicites pour un maître confirmé.

Les modes de fonctionnement proposés pour les séances ne sont bien évidemment pas les seuls modes de fonctionnement possibles, surtout pour le cycle 1 : le cas d'un lancement collectif et la répartition en ateliers sur le même thème n'est pas évoqué, aucune évocation n'est faite de l'utilisation des coins…
De même, pour les cycles 2 et 3, la fiche ne prend pas en compte tous les modes de gestion, notamment la gestion des mises en commun, très liée à la situation mathématique choisie.

A propos des bilans

La fiche relative au bilan souligne l'importance de l'analyse a posteriori pour l'évolution de la pratique du maître titulaire et du stagiaire en formation. Elle sort du domaine privé la méthodologie de l'auto-analyse.
La pratique du bilan est reconnue comme formatrice par l'institution : des bilans sont faits par les maîtres experts, les conseillers pédagogiques ou les formateurs qui “ visitent ” les stagiaires. Mais, d'une part, les items des bilans sont rarement explicités, d'autre part les bilans sont plutôt à la charge des “ visiteurs ”. La fiche propose une explicitation d'items propres à inciter le stagiaire à mener personnellement une analyse sur lui-même et les événements qu'il a déclenchés par ses prises de décisions. De plus, la fiche permet de différencier l'analyse "à chaud" qui reste une analyse de surface et une analyse différée qui peut aller jusqu'à remettre en cause l'attitude de l'enseignant ou les choix didactiques effectués au cours de la préparation.
Elle conduit les stagiaires à comprendre la complexité de la pratique professionnelle et le manque de pertinence des recettes toutes faites. Par exemple, l'analyse du mode de passation des consignes et de ses conséquences sur la poursuite de la séance et sur l'engagement des élèves est mise en relief.
Certains collègues n'ont vu dans cette fiche que des prétextes à appréciations négatives qui risqueraient de conduire les stagiaires à une forme d'inhibition : il nous semble pourtant que la formulation du bilan sous forme de questions évite

[4] Certificat d'Aptitude aux Fonctions d'Instituteurs, Professeurs des École, Maître Formateur.

cet écueil et permet à chacun de se situer le plus honnêtement possible par rapport à sa prestation.

6- Perspectives pour d'autres utilisations

Nous avons présenté deux utilisations possibles :
- la première consiste à laisser les stagiaires construire dans un premier temps leurs propres outils (de préparation et de bilan), à confronter leurs propositions et réorganiser ces propositions pour aboutir à des fiches personnalisées
- la seconde consiste à faire utiliser ces documents lors des stages de pratique accompagnée par le responsable de la séance et l'observateur qui l'accompagne, à comparer les réponses émises par les deux personnes pour des items sélectionnés, à repérer les écarts entre les réponses et à analyser les différences en cherchant à les comprendre.

Nous sommes certaines que d'autres modes d'utilisation seraient envisageables.
Il ne s'agit pas là d'outils clés en main, mais essentiellement de supports conduisant le stagiaire à se poser des questions et à chercher des éléments de réponse dans l'explicitation et l'analyse de ses choix.

Suivent donc ces différentes fiches. Les deux premières ont fait l'objet d'une publication dans la revue *Grand N* n°59 et 60. Grenoble : IREM de Grenoble.

ANNEXE 1

Eléments pour construire une séance de mathématiques

et rédiger la fiche de préparation (cycles 2 et 3 école élémentaire)

Remarques préalables

- *Cette fiche se veut un guide pour le maître pour penser aux différentes facettes de la préparation d'une séance (ou d'une séquence : suite de séances sur le même thème). Elle n'a pas d'autre prétention.*
- *Elle se présente sous forme d'items (éléments à préciser ou questions à se poser).*
Tous les items ne sont pas nécessairement pertinents pour toutes les séances. Ils sont particulièrement étudiés ici pour les ***situations dites de recherche*** *(pour l'apprentissage ou le réinvestissement). Bien entendu un grand nombre de séances doit être aussi consacré à une familiarisation systématique avec les notions abordées et à un entraînement sur les techniques vues pendant les séances de recherche. D'autres encore doivent permettre d'évaluer les élèves sur des connaissances (savoirs ou savoir-faire) déjà construites.*
- *Pour la gestion de classe de C.P. en particulier, ces éléments sont à croiser avec ceux présentés dans la fiche spécifique cycle 1 (qui suit).*
- *La fiche de préparation,* ***dont la rédaction est au choix de chacun****, explicite les réponses à certains de ces items. Elle doit donner le cadre de référence de la séance et être une aide à la conduite de classe.*

PRÉSENTATION DE L'ACTIVITÉ

Objectifs

- Notion mathématique ou méthode dont l'apprentissage est visé à long terme.
- Eléments spécifiques de cette notion ou de cette méthode visés dans la séance (éventuellement sous forme de compétences).
- Place dans la progression (par rapport aux programmes et/ou par rapport aux compétences acquises des élèves de la classe).

Type de séance

1 - Apprentissage d'une notion (nouvelle ou déjà rencontrée)[5], d'une technique (nouvelle ou déjà rencontrée), d'un langage, d'une compétence méthodologique,...
2 - Ou réinvestissement d'une notion, d'une technique, d'une méthode,...
3 - Ou familiarisation, entraînement.
4 - Ou évaluation.

---

[5] Les séances d'apprentissage ne se limitent pas à la première séance sur une notion.

L'étude qui suit vise plus particulièrement les séances de type 1 et 2.

LES SÉANCES D'APPRENTISSAGE ET DE RÉINVESTISSEMENT

Description succincte de la situation
- Enoncé de problème, jeu, étude de documents, description d'un phénomène,...
- Références bibliographiques.

ANALYSE PRÉALABLE DE LA SITUATION

Intérêt pour l'élève (il peut être indépendant de l'apprentissage)
Pourquoi va-t-il s'investir dans la tâche proposée ?
Plaisir, défi personnel, désir de se mesurer aux autres, curiosité intellectuelle, responsabilité dans l'engagement collectif,...

Analyse pour prévoir les étapes du déroulement
* Variables didactiques. Quelles sont les variables didactiques de la situation ? Comment les choisir pour provoquer l'apprentissage visé ? Pour éventuellement gérer l'hétérogénéité ? Pour permettre une certaine différenciation des tâches, mais une synthèse commune ?
* Analyse de la tâche de l'élève. Quelle est la tâche effective des élèves ? Quelles procédures peuvent-ils utiliser (en fonction des variables didactiques) ? Quels modes de validation ont-ils à leur disposition (vérification interne à la situation -*autovalidation*-, ou validation externe : par le maître, par la calculatrice pour contrôler les calculs, par un calque pour vérifier un dessin, etc...) ?
* Eléments d'aide pour différencier la tâche en fonction des compétences individuelles (documents écrits, matériel, conseils méthodologiques,...).
* Eléments prévisibles de synthèse sur lesquels portera l'institutionnalisation[6] .
* Possibilités de prolongements liés à l'activité (pour les plus rapides)[7].

PRÉVISION DU DÉROULEMENT

1 - Organisation matérielle de la classe (à préciser pour chaque phase du déroulement)

Choix du lieu : dans la classe ou hors de la classe, tables telles quelles ou déplacées,....

[6] Ce qui est important à extraire de l'activité pour l'apprentissage.
[7] Ces prolongements doivent permettre un approfondissement de la notion en cours ou un réinvestissement de notions déjà vues. En aucun cas, il ne s'agit de déflorer la séance suivante.

Choix des modes de travail : travail individuel (sur cahier de brouillon, fiche, feuille, ardoise,..) ; travail à deux, par groupe (préciser le support du travail), collectif ; justification des choix.
Si travail de groupe,
- constitution des groupes (par affinité ou caractère ou proximité, homogènes ou hétérogènes) préparée par écrit ; *attention à ne pas mettre ensemble deux élèves "aux humeurs incompatibles"* ;
- répartition des tâches dans le groupe faite par le maître ou laissée libre ;
- rapporteur désigné au départ ou choisi au moment de la synthèse (par le maître, par le groupe, au hasard)....

Matériel
- Pour le maître : rôle et préparation du tableau, autres matériels à préparer (solides géométriques, documents agrandis, matériel d'aide en cas de blocage,...)
- Pour les élèves : quel matériel à disposition (une fiche ou un manuel par élève, pour deux, crayon, matériel de géométrie, un jeu par table,...) ? Quand le distribuer et/ou par qui le faire distribuer ? Où le poser, éventuellement le cacher (pour permettre la formulation d'une demande) ? Combien prévoir d'exemplaires par table ?...
Limiter les risques de distraction en faisant ranger le petit matériel inutile (super taille-crayon,..) dans les casiers. Prévoir un espace suffisant sur les tables pour l'utilisation effective du matériel.
Prévoir un morceau de feutrine ou une piste pour les jeux de dés. Etc..

Estimation du temps
- Pour la compréhension de la consigne : dite dans le calme, redite avec d'autres mots, reformulée par un élève, éventuellement simulée,...
- Pour les éventuels changements de lieu, déplacements de mobilier, distributions de matériel, découpages ou activités préalables, coloriages, collages,...
- Pour les différentes phases (recherche, mise en commun, synthèse),
- Pour l'éventuelle trace écrite (sur quel support ?),
- Pour le rangement,....
Se donner a priori des limites supérieures de temps pour les activités-élèves...

2 - Plan de la séance (prévoir les grandes phases du déroulement et leurs articulations)

Lancement de l'activité
Comment faire pour que les élèves s'intéressent d'eux-mêmes au problème posé par le maître ?
Mise en scène, jeu simulé avec quelques élèves, conte,....

Consignes
Les consignes peuvent être orales, écrites au tableau, écrites sur une feuille, schématisées,...

Si orales,
- courtes et précises si possible,
- pesées et soupesées, formulées de diverses manières par le maître,
- écrites en toutes lettres sur la fiche de préparation, oralisées pour les essayer .

Prévoir de les faire reformuler par deux élèves au moins.

Phase de recherche

- Rester un court temps sans circuler pour permettre aux élèves de démarrer.
- Prévoir éventuellement, en cas d'activité de groupe, un court temps de recherche individuel.
- Prévoir d'observer les élèves (au besoin avec une grille recensant les procédures par élève ou groupe d'élèves)
    - pour donner des aides au moment opportun à ceux qui en ont besoin,
    - pour choisir ceux dont les propositions feront l'objet de la mise en commun.
- Prévoir les interventions éventuelles pendant cette phase de recherche (relance de l'activité, précisions sur la consigne), ***mais se garder de donner soi-même, ou même d'induire les réponses aux questions posées !***
- Prévoir de donner, à ceux qui auront fini plus tôt, les prolongements prévus dans l'analyse préalable, permettant ainsi aux autres de poursuivre sans perturbation.

Mise en commun des procédures et/ou des résultats : *écoute collective, la parole est aux élèves.*

- A l'aide de l'analyse préalable et de l'observation des élèves, choisir les procédures exactes ou erronées[8] qui feront l'objet de la mise en commun.
- Décider de l'ordre de présentation le plus adapté à l'objectif à atteindre[9].
- Engager un échange, voire un débat collectif, sur la validité, l'économie,... des différentes productions.

Se méfier des longues corrections collectives qui ne profitent qu'aux élèves qui savent déjà.

Synthèse : *écoute collective.*

Le maître pointe, avec les élèves, les éléments importants rencontrés à l'occasion de l'activité : par exemple des procédures efficaces, une écriture mathématique utilisée par tous, une construction géométrique rappelée,...

Envisager l'éventuelle trace écrite individuelle qui relate la situation (par exemple, dans le cahier, chaque élève note le texte du problème et la procédure qui lui plaît le mieux).

---

[8] Lors de la phase de recherche, le maître n'a pas à se prononcer sur la validité des propositions des élèves. Sinon, il devient impossible de demander à un élève de présenter devant tous une solution qu'il sait erronée.

[9] L'écriture des productions de groupe sur affiche (éventuellement transparent) ou la restitution simultanée au tableau du travail des groupes par plusieurs rapporteurs, facilite la gestion de la mise en commun et minimise la durée de cette phase.

Institutionnalisation (éventuelle)
Le maître dégage l'important pour "l'apprentissage du jour", en amorçant une décontextualisation.
Si l'activité le permet, rédiger le résumé que les enfants auront à copier et à retenir (tout en restant prêt à accepter d'autres formulations -correctes- des élèves).

Remarques
- Prévoir quelques exercices d'application.
- Découper la séance en plusieurs phases pour mieux gérer le temps et en particulier pouvoir arrêter la séance avant la fin (notamment si le temps a été mal évalué).

Une évaluation individuelle "à chaud" apporte peu de renseignements : il est préférable de la différer.

BILAN SUCCINCT DE LA SEANCE

Du côté des élèves
- Participation : les élèves ont-ils été intéressés ou passifs, ennuyés, agités ? Pourquoi ?
- Travail mathématique : qu'ont fait effectivement les élèves au cours de la séance ? Ont-ils eu l'occasion de réfléchir, formuler des hypothèses, valider des raisonnements ? Semblent-ils avoir appris des choses ? Se sont-ils exercés dans un domaine ? *Ne pas confondre joyeuse participation et apprentissage effectif.*
- Erreurs des élèves : quelles erreurs ont commis les élèves ? Pouvez-vous expliquer ces erreurs, mettre des hypothèses sur les causes ?
  - Sont-elles nombreuses sur des connaissances considérées comme acquises ? Il faudra alors prévoir un travail spécifique avec toute la classe.
  - Sont-elles liées à l'apprentissage en cours ? Il n'y a pas lieu de s'en inquiéter car elles font partie de l'apprentissage normal.
  - Sont-elles très locales ? Voir alors les enfants concernés.
  - Sont-elles peu significatives ? Attendre un nouveau travail pour confirmer ou infirmer.

Du côté du maître
- Votre objectif vous semble-t-il atteint ? Pourquoi ? Comment allez-vous le vérifier ? Est il trop tôt pour le dire ?
- Analysez vos éventuelles modifications "sur le vif", vos éventuels dérapages et leurs causes.
- Avez-vous fait des erreurs ? De quel type (contenu, méthode, gestion du temps, des réactions des élèves,...) ?
- Revoir ce que vous pouvez modifier pour atteindre une meilleure efficacité : les consignes, l'ordre des différentes phases, les choix pour les variables didactiques, l'organisation matérielle, la gestion de la mise en commun,....

- Comment prenez-vous en compte cette séance dans la prévision de la suivante : poursuite de la préparation prévue, modifications (dans quel sens ?), détermination de ce qui est à reprendre, à compléter, éléments à développer.

REMARQUES GENERALES

♦ Toute séance de mathématiques (ou presque) doit comporter du "calcul mental", dit plutôt **calcul réfléchi.** Le calcul réfléchi donne lieu à une activité quotidienne, généralement assez brève (sauf si elle fait partie intégrante de la situation prévue), dont le but est de permettre aux élèves d'une part de se familiariser avec les nombres et leurs propriétés, de mémoriser des résultats, d'autre part de se construire des méthodes de calcul et/ou de raisonnement, notamment par confrontation -gérée par le maître- avec celles de leurs camarades.

♦ Introduire du **matériel** dans une séance de mathématiques peut avoir deux finalités :

1 - conduire les élèves à faire des prévisions, à anticiper le résultat de leur action[10] ;

2 - permettre aux élèves de valider leurs résultats en exhibant l'objet (par exemple en géométrie) ou en effectuant la manipulation.

Il ne s'agit pas de demander aux élèves de faire de simples constats.

♦ Si la séance s'appuie sur un document pédagogique ou un livre du maître présentant les objectifs et le déroulement prévu, le travail de préparation consiste à justifier les choix, à adapter la situation à la classe (intégration à la progression, prise en compte des compétences élèves, de l'environnement de l'école,...)

EXEMPLE DE GRILLE

Rappelons que, pour préparer une mise en commun efficace lors d'une situation de recherche, il est nécessaire
- d'avoir conduit une analyse a priori de cette situation en essayant d'envisager les procédures que les élèves sont susceptibles de mettre en oeuvre et en identifiant clairement les savoirs en jeux que l'on veut pointer lors de la synthèse,
- de faire une observation assez fine des élèves au cours de la séance.

Pour cela, le maître peut s'aider d'une grille lui permettant de prendre le maximum d'informations organisées afin de pouvoir les exploiter, et ce le plus rapidement possible.

Cette grille peut se présenter sous forme d'un tableau à double entrée : les noms

[10] Par exemple, lors d'un jeu de l'oie, un enfant sur la case 13 lance le dé et obtient 5 : avant qu'il ne déplace le pion, le maître lui demande de dire sur quelle case il pense arriver, il attend comme réponses 18, ou 13+5...

des élèves ou des groupes d'élèves figurent sur les différentes lignes. Le maître prévoit une colonne par procédures prévues et quelques colonnes pour des procédures auxquelles il n'aurait pas pensé, il prévoit également une colonne pour les erreurs qu'il repérera, ainsi qu'une colonne pour cocher les élèves à solliciter lors de la mise en commun.

Pendant la phase de recherche, le maître circule entre les enfants et note par une croix la ou les procédures dans lesquelles s'engage l'élève (ou le groupe d'élèves), qu'elles aboutissent ou non ; il ajoute un signe particulier lorsque la procédure utilisée aboutit. Il relève les erreurs les plus marquantes.

♦ Les observations ainsi faites et notées permettent au maître de solliciter pour la mise en commun des élèves ayant utilisé des procédures variées différentes (qu'elles aient abouti ou non) et des élèves ayant fait des erreurs typiques (si toutefois le maître ne leur a pas déjà dit que leur procédure était erronée). Pour la mise en commun, les élèves peuvent soit afficher leurs travaux s'ils ont travaillé sur de grandes feuilles, soit les réécrire simultanément au tableau, soit les exposer oralement.

♦ Cette fiche permet également au maître de différencier si nécessaire les exercices d'entraînement en fonction des difficultés rencontrées par chacun.

♦ Ces fiches d'observation regroupées donnent enfin au maître une "image en mouvement" de sa classe : elles sont un moyen d'apprécier le niveau d'appropriation des différents savoirs et savoir-faire, de repérer les évolutions, les progrès, les difficultés persistantes des différents élèves.

Exemple de grille d'observation pour le problème donné au CE1 Une salle de spectacle comporte 12 rangées de 8 fauteuils, combien y a-t-il de places dans le salle ?

Procédures envisageables (analyse a priori) :
- P1 : dessin de la salle et dénombrement un à un
- P2 : dessin de la salle et dénombrement par rangées
- P3 : addition réitérée par rangées
- P4 : additions réitérées par colonne
- P5 : désignation des places sous la forme12×28 et utilisation de la calculatrice

.	P1	P2	P3	P4	….		Erreurs	Mise en commun
Marie								
Kévin								

Pour les autres types de séances

● LES SÉANCES D'ENTRAÎNEMENT

Les séances d'entraînement sont nombreuses et nécessaires aux élèves pour installer et renforcer les acquis antérieurs. Elles ne peuvent cependant se substituer aux séances où les situations proposées permettent aux enfants de **construire** effectivement des connaissances ou de **réorganiser** des connaissances déjà construites.
Les points importants de la préparation des séances d'entraînement sont le choix des exercices à proposer et des modes de correction à envisager.

Le choix des exercices
- Les exercices proposés portent sur des notions ou des techniques déjà travaillées dans des séances de type **1** et **2**, pour renforcer des compétences individuelles dont le maître a déjà pu contrôler de façon formative l'acquisition partielle.
- Ils sont organisés en fonction des compétences nécessaires pour réussir la tâche demandée : les exercices de "simple application" sont toujours les premiers.
- Ils sont mêlés à quelques exercices ne dépendant pas de la "leçon du jour", pour maintenir en éveil les aptitudes d'analyse des élèves.
- Une différenciation des énoncés en fonction des compétences des élèves peut être envisagée avec profit, par exemple sous les formes suivantes :
  * mêmes énoncés, mais avec des valeurs numériques différentes (pour réduire les difficultés de calcul), des supports différents (papier uni ou quadrillé), des aides différents (par exemple l'utilisation d'une calculatrice)...
  * énoncés différents, dessins à reproduire différents, adaptés au niveau de chacun, pour travailler des compétences différentes...

Le choix des modes de correction
Les corrections collectives sont à éviter car elles ne mobilisent généralement pas l'attention de ceux auxquels elles sont destinées et n'apportent pas souvent d'éléments neufs à ceux qui ont réussi. Il est donc préférable d'envisager d'autres moyens de correction.
- Des mises en commun par petits groupes, avec une régulation interne au groupe et un appel au maître en cas de désaccord, peuvent être efficaces.
- Des "autocorrections" avec une fiche corrective, un calque,... qui permettent aux élèves de constater l'erreur, éventuellement de la trouver, profitent notamment aux élèves rapides.
- Des corrections individuelles (ou par petits groupes), avec le maître, sont nécessaires pour les élèves qui ont plus de difficultés.

● LES SÉANCES D'ÉVALUATION

Dans tous les cas, il est nécessaire de bien contrôler les compétences évaluées a priori pour dégager des éléments pertinents d'une réussite ou d'un échec à cette évaluation.

* S'il s'agit d'une évaluation **de début** de parcours, elle permet au maître de prendre des indices sur les connaissances antérieures des élèves, celles sur lesquelles il peut s'appuyer pour lancer sa progression. Notons qu'une telle évaluation peut se faire comme une séance d'apprentissage, pour "caler" la progression sur les compétences réelles des élèves. Elle joue alors le rôle d'un point zéro pour la notion ou la technique visée.

* S'il s'agit d'une évaluation **de fin** de parcours d'apprentissage, elle doit porter sur des compétences qui ont été effectivement travaillées chez les élèves.

Les séances d'évaluation **de fin** d'apprentissage sont à envisager de manière différée par rapport au temps d'apprentissage, pour évaluer des acquis effectifs et non des connaissances mémorisées à court terme. La préparation de ces séances est proche de celle des séances d'entraînement, l'important étant ici le choix des exercices, en respectant les points suivants :
- les énoncés de ces exercices ne comportent aucune ambiguïté ; la notion dont on doit évaluer la maîtrise est réellement en jeu dans la résolution ;
- les exercices portent sur des notions travaillées lors des séances de type 1 et 2 et sur lesquelles les enfants se sont entraînés lors de séances du type 3 ;
- les exercices sont de difficultés graduées, pour permettre de localiser la difficulté en cas d'échec[11] ;
- pour éviter l'effet de communication entre élèves trop proches, il est possible d'alterner les exercices (par exemple en changeant les valeurs numériques) entre deux voisins en veillant à donner des exercices de difficultés similaires.

[11] Il est éventuellement possible d'envisager un mode d'évaluation différencié par le choix d'exercices différents pour des élèves qui ont réellement progressé, mais qui n'en sont pas au même niveau de compréhension.

ANNEXE 2

Eléments pour construire une suite de séances à dominante mathématique et rédiger la fiche de préparation (cycle 1)

Remarque préalable

- *Conçue dans le même esprit que la précédente, cette fiche essaie de pointer des spécificités des activités à dominante mathématique du cycle 1.*
- *Pour la classe de grande section en particulier, ces éléments sont à croiser avec ceux présentés dans la fiche spécifique des cycles 2 et 3.*
- *Comme la précédente, cette fiche se veut un guide pour le maître pour penser aux différentes facettes de la préparation d'une séance (ou d'une séquence : suite de séances sur le même thème), sans autre prétention.*

REMARQUES GÉNÉRALES SUR L'ORGANISATION DE LA CLASSE

♦ **Modes d'organisation**

Le maître dispose a priori de plusieurs modes pour organiser le groupe classe.

- Mode collectif :

Les enfants sont assis dans le coin regroupement, installés autour du maître, sur des chaises ou des bancs pour éviter des gesticulations sur le tapis. Pas d'enfant sur les genoux du maître. Le maître peut avoir un œil sur tous à la fois. L'éventuel enfant perturbateur peut être momentanément exclu du groupe (pas de la classe !) : dans ce cas, le maître lui accorde le droit de revenir de lui-même quand il se sent calmé. Le maître théâtralise au maximum pour soutenir l'attention, sollicite la participation des élèves, reprend, éventuellement reforme, les propositions des élèves.

- Mode atelier

Les enfants sont répartis par groupes de tables, les ateliers. Le maître s'occupe plus particulièrement d'un atelier (voire de deux), les autres ateliers sont autonomes, fonctionnant sur des tâches plus habituelles, plus connues des enfants. Le maître peut alors spécifiquement observer les enfants de l'atelier sélectionné.
Les ateliers peuvent présenter des dominantes disciplinaires[12]. Un roulement sur la semaine ou plus permet que tous les enfants fréquentent tous les ateliers.
Dans l'atelier, la tâche des élèves peut être **individuelle** (ils sont regroupés parce qu'ils ont le même type de tâche ou utilisent le même type de matériel, mais ils doivent s'organiser pour gérer le matériel), soit une tâche **de groupe**, qui les incite à s'observer, discuter, s'écouter, se contrôler les uns les autres.
Le maître peut alors :
- soit s'adresser à un enfant en particulier : il l'incite à formuler ce qu'il fait ou, notamment pour les plus petits, lui offre une verbalisation "miroir", qui corres-

[12] Cette répartition n'est cependant pas figée ; elle peut varier au cours du cycle. En Grande Section notamment, tous les ateliers de la séance peuvent être à dominante mathématique.

pond à une "mise en mots" de l'action de l'élève qui ne peut encore s'exprimer lui-même. Il pousse les plus grands à enrichir leurs procédures par des questions appropriées ou des contraintes évolutives ;
- soit s'adresser au groupe de l'atelier en incitant les enfants à s'entraîner les uns les autres : par exemple, il pointe la procédure de l'un, la fait expliciter par celui-ci pour essayer de la communiquer aux autres.

Les coins organisés dans la classe (coin cuisine, coin poupée, coin livres, coin lego, coin sable, ...) fournissent eux aussi des ateliers possibles, d'autant plus utilisés que les enfants sont petits. Les accès à ces coins doivent cependant être régis par des règles : pas plus d'enfants dans le coin cuisine que de tabliers (ou d'étiquettes sur collier de ficelle) disponibles, idem pour les autres, remise en place des objets déplacés,... Ces règles peuvent être rappelées régulièrement lors d'un moment collectif, surtout si elles sont mal appliquées. Elles sont toujours justifiées devant les élèves.

♦ **Les différents espaces**

Le maître dispose de plusieurs espaces qui appellent une attention différente de la part des élèves.
- Le coin regroupement appelle une attention soutenue ; les moments de regroupement correspondent à des temps d'écoute et de communication, surtout du maître vers tous les élèves.
- Les divers coins institués dans la classe représentant plutôt des coins de liberté, où l'enfant, soit seul, soit avec d'autres, se joue sa propre histoire.
- Les ateliers demandent certes une certaine concentration, mais plus au rythme de l'élève.
- Les espaces hors classe (salle de jeu, cour, couloir, salle d'accueil,...) offrent un lieu pour des activités collectives ou des activités en atelier. La "sortie" de la classe nécessite une certaine organisation : lors du regroupement précédent la "sortie", le maître précise les règles de déplacement (se déplacer par deux en se donnant la main, le doigt sur la bouche ou en chantant tout bas ou en comptant tout bas...), les tâches prévues, ainsi que la disposition du groupe-classe attendue dans l'autre lieu.

♦ **Les changements de "rythme"**

Au maître de veiller à alterner attention collective, attention individuelle, détente, à faire bouger les élèves en proposant des changements de coins, éventuellement des changements de lieux. Penser à ces alternances fait partie de la préparation de la journée.

Les changements d'activité, souvent ponctuées par des rangements, les retours à plus de silence, peuvent se faire avec des modulations de voix du maître : par exemple
- sur une voix chantée : "il va falloir maintenant tout ranger", pour signifier la fin de la phase "accueil" de début de matinée,
- pour calmer la classe, toujours sur une voix chantée : "il y a trop de bruit dans la classe aujourd'hui",

- pour ramener l'attention, chanter ou réciter ensemble une comptine connue, éventuellement mimée...

LES ACTIVITÉS À DOMINANTE MATHÉMATIQUE

> "*Dans la mesure où toute séquence pédagogique reste, du point de vue de l'enfant, une situation riche de multiples possibilités d'interprétation et d'action, elle relève toujours de plusieurs domaines d'activités sinon de tous. Pour l'enseignant, ces divers domaines sont éclairés par ses connaissances disciplinaires. En organisant les activités, il aura soin de définir des dominantes en fonction de l'objectif retenu*."

Extrait de L'Ecole Maternelle, *Programmes de l'école primaire*, Direction des Ecoles, 1995

Les activités à dominante mathématique s'inscrivent dans cette problématique. Les champs mathématiques de l'école maternelle se partagent entre les activités logiques (classifications, sériations,...), l'approche du nombre, le repérage dans l'espace, le repérage dans le temps, l'approche des grandeurs et de leur mesure, la reconnaissance des formes.

♦ Les moments pour les mathématiques

A priori il existe, dans la vie de la classe, trois occasions de faire faire des mathématiques aux élèves :
- lors d'activités rituelles (souvent après l'accueil du matin, par exemple l'appel, la date sur calendrier, etc.)
- lors d'activités fonctionnelles (par exemple pour déterminer des groupes à peu près équitables d'enfants pour les ateliers d'EPS, pour préparer une brique de lait par enfant pour la table de ses camarades, pour distribuer les foulards des équipes, etc.)
- lors d'activités construites spécifiquement par le maître avec des intentions pédagogiques bien précises, donc a priori plus artificielles dans l'histoire de la classe : par exemple un nouveau jeu,... Dans ce cas le maître choisit une introduction destinée à obtenir l'adhésion des élèves à la tâche (par exemple un conte mimé, pour faire comme le héros d'une histoire, etc.). Mais ces activités construites peuvent aussi consister en une exploitation approfondie d'activités fonctionnelles ou rituelles (par exemple à partir de l'appel du matin[13]).

♦ Mathématiques et jeux

Il est intéressant de ne pas laisser les élèves utiliser seuls un jeu nouveau que le maître pense exploiter pour des apprentissages. Ce jeu reste caché jusqu'au moment où le maître décide de le présenter, d'en définir les règles, et d'y faire jouer sous son contrôle, par séries d'ateliers successifs, les élèves de la classe. Quand

---

[13] Du rite de l'appel...à des activités mathématiques en grande section, C.Houdement, M.L.Peltier, dans *Grand N* n°51, pp. 13 à 23, 1992-93

le jeu a été suffisamment exploité comme jeu d'apprentissage dirigé, il devient jeu libre, à la disposition des élèves.
Il est recommandé de faire évoluer sur l'année l'ensemble des jeux à disposition des élèves : certains jeux disparaissent et d'autres apparaissent, développant d'autres compétences.

PRÉPARATION DES SÉANCES CONSTRUITES

La préparation concerne souvent simultanément plusieurs séances, dans la mesure où l'activité, pour toucher tous les élèves de la classe, devra tourner sur plusieurs jours. L'activité "phare" et les divers ateliers peuvent être les mêmes sur plusieurs séances.

Mise en route de la réflexion
- Délimiter un thème dans un des champs mathématiques (approche du nombre, activités logiques, repérage dans l'espace ou le temps,...). le mettre en relation (ou non) avec des activités rituelles, ou fonctionnelles, ou le projet de classe, ou d'école...
- Envisager les différentes facettes de ce thème, les compétences à construire sur ce thème, compte tenu de celles déjà acquises par les élèves.
- Cibler les compétences à construire avec précision.
    - Choisir une (ou plusieurs) activité(s), situation(s) "phare", qui permettra (permettront) de développer les compétences visées :
        * jeu collectif,
        * activité collective autour d'une situation problème,
        * jeu à n enfants,
        * activité de groupe autour d'une situation problème.
- Prévoir les activités d'entraînement sur le même thème, mettant en jeu une ou plusieurs des compétences travaillées préalablement.

Description sommaire
- Finalité pour l'élève du jeu, de la situation...
- Références bibliographiques et adaptation au projet pédagogique et cognitif de la classe.

Matériel
- Pour le moment collectif :
    * préparer le matériel pour la présentation collective de l'activité "phare", le vérifier, le trier éventuellement pour ne garder que des éléments permettant d'entrer plus vite dans le sujet ;
    * choisir l'introduction collective de l'activité (un conte, un récit, un jeu, l'activité éventuellement simulée avec quelques enfants devant tous) ;
    * choisir la disposition des élèves pour l'écoute collective, choisir éventuellement les élèves pour la simulation de l'activité devant tous, etc.) ;

* préparer les listes de répartition des enfants par atelier (il peut y avoir diverses formes pour ces listes).

- Pour le travail en atelier
    * Choisir une répartition spatiale des ateliers pour pouvoir voir la classe en restant dans un atelier, pour rester plus près des éléments plus agités...
    * Prévoir le matériel à disposition (un exemplaire pour tant d'enfants, un nombre suffisant, mais pas trop grand, de pions, de cartes,... pour le groupe...) ? Déjà sur les tables ou à distribuer par qui et quand ?
    * Prévoir la reconnaissance des éventuels travaux (nom, date) et leur rangement (affichage, chemises ou casiers individuels).
    * Préparer une fiche avec le nom des enfants pour noter les observations en cours de séance.

Analyse préalable succincte

- Quel enjeu pour l'élève ? Comment faire pour qu'il entre dans la tâche, pour l'intéresser ?
- Analyse de la tâche du point de vue de l'élève.
- Variables didactiques envisageables.
- Comportements et/ou stratégies envisageables, influencés bien sûr par la connaissance qu'on a de l'élève (cette analyse permet de préparer une fiche d'observation des élèves).
- Eléments d'aide possibles.
- Comment se termine l'activité ? Qui "dit la réussite" ?
- Phases et temps de l'activité.
- Possibilité de prolongements.

UN EXEMPLE DE PRÉPARATION SUR PLUSIEURS SÉANCES (ET PLUSIEURS JOURS)

Séance 1 : *lancement de l'activité "phare" (phase collective)*

<table>
<tr><td>Pour une activité collective ou un jeu collectif.</td><td>Pour une activité de groupe autour d'un problème</td><td>Pour un jeu à n enfants</td></tr>
<tr><td>Présenter l'activité collective, la consigne bien soupesée, reformulée, les règles, le but. Présenter le matériel éventuel, le faire observer, décrire. Simuler éventuellement le début avec quelques enfants.</td><td>Présenter le problème, le matériel éventuel, la consigne lors du regroupement.</td><td>Le présenter collectivement pendant le regroupement : le faire observer, décrire, présenter les règles, préciser le but et l'enjeu.
Simuler le début d'une partie avec quelques enfants</td></tr>
<tr><td colspan="3">Dans chacun des cas, prévoir les consignes (les noter, les oraliser, varier le vocabulaire). Les faire reformuler par les élèves.</td></tr>
<tr><td>Le maître reste présent avec tout le groupe.</td><td colspan="2">Préciser que seul un groupe d'enfants fera cette activité maintenant, mais que tous passeront au fil de la semaine dans cet atelier.
Présenter rapidement les autres ateliers déjà connus des enfants, qui devraient tourner de manière autonome.
Lancer la répartition des enfants par atelier : en PS, le maître peut nommer les élèves. En GS, il peut préparer des listes écrites ou des groupes d'étiquettes et, soit charger des élèves de les lire, soit laisser les élèves se répartir selon ces listes dans les divers ateliers.</td></tr>
</table>

La répartition des enfants par atelier doit être prévue, notée sur l'ensemble des séances, de manière à les faire tourner. Certains enfants peuvent passer plusieurs fois dans le même atelier, soit pour reprendre une tâche non terminée ou mal comprise, soit pour jouer un rôle de meneur de jeu pour un groupe d'enfants plus timides.

Poursuite (phase collective ou en atelier)

Travail collectif	Travail en ateliers
Relancer l'activité, apporter des compléments d'information si nécessaire, faire des mises au point. Solliciter le maximum d'enfants. Noter sur une fiche préparée à l'avance les observations : stratégies utilisées, compétences mises en œuvre, difficultés rencontrées,.... Faire évoquer en fin de séance ce qui a été fait. Faire ranger le matériel par les enfants (sauf le gros matériel)	Rester disponible pour un atelier (au maximum deux). Les autres ateliers déjà connus, ou plus libres, tournent de manière autonome. Circuler de temps en temps pour vérifier. Pour l'atelier nouveau : faire reformuler les consignes, veiller au respect des règles, faire verbaliser les actions ou les décisions (ou apporter une verbalisation "miroir" du maître ou d'un autre enfant), relancer l'activité si nécessaire,... Noter sur une fiche préparée à l'avance les observations : stratégies utilisées, compétences mises en œuvre, difficultés rencontrées,.... Prévoir des prolongements ou des jeux libres pour ceux qui ont terminé. Faire ranger par les élèves le matériel utilisé.

Prévoir un bilan

- Emettre des hypothèses sur les origines des difficultés rencontrées (la fiche d'observation est un puissant outil d'analyse) :
  * par les enfants, pour entrer dans la tâche (s'y intéresser, comprendre la consigne), pour résoudre le problème posé, ...
  * par le maître, pour gérer le groupe entier, pour récupérer l'écoute collective...
- Essayer de pointer les décisions prises en cours de séance et de les analyser :
  * décisions d'ordre collectif (les changements par rapport à la préparation),
  * décisions d'ordre individuel (les rappels à l'ordre, les aides et soutiens,...)
- Faire des propositions de modification.

ANNEXE 3

Faire le bilan de sa séance

A l'issue d'une séance effectivement menée, le maître fait un rapide bilan de son travail et de celui de ses élèves. Nous souhaitons ici proposer une liste d'items pour réaliser un bilan détaillé.
Cet ensemble de tableaux se veut donc une aide pour établir le bilan d'une séance de mathématiques en cycle 2 ou 3. Des éléments pourront être repris pour une séance de cycle 1, mais tels quels, ces tableaux sont plus adaptés au cycle 2 et 3.
Quel est le but de cette analyse a posteriori ?
- d'une part, *à court terme*, permettre de prendre des indices dans le déroulement de la séance pour faire un bilan et ajuster la préparation de la séance suivante ;
- d'autre part, *à long terme*, repérer les éléments qui peuvent compromettre une séance et pouvoir les modifier a priori pour une séance du même type en s'appuyant sur des aides didactiques.
En quelque sorte, cette grille essaie de pointer des indices de "bon déroulement de séance" tant pour la gestion du groupe classe que pour l'apprentissage visé.

Mode d'emploi des tableaux
La séance est découpée en cinq phases, classiques dans un découpage a priori de séance :
- lancement de l'activité
- cours de l'activité
- conclusion de l'activité
- synthèse de la séance
- institutionnalisation éventuelle de la séance.

Pour chaque phase, un tableau de quatre colonnes regroupe des indices d'observation et d'analyse. Les deux premières sont basées sur l'observation[14] des élèves par le maître pendant la séance effective et sur le relevé de ses propres réactions et impulsions sur le déroulement. Les deux dernières correspondent à deux étapes d'analyse :
- la première correspond à une analyse immédiate, après la séance, des éventuelles modifications par rapport au projet initial ;
- la seconde essaie de mettre en relation ces modifications avec des questions didactiques essentielles.

[14] Bien entendu il s'agit d'une observation par à-coups, et non en continu, comme elle pourrait se pratiquer avec une personne extérieure au système constitué par le professeur et le-groupe classe. Elle sera donc sensible aux **pics** d'observation, aux indices les "plus frappants".

Lancement de l'activité			
Éléments d'observation		**Éléments d'analyse après-coup (retour sur préparation)**	
Indices pris sur élèves	Réaction du maître dans la classe	Analyse de surface	approfondie
Ai-je vérifié la compréhension de la consigne ? Comment : - en la faisant reformuler par les élèves, - en constatant que les élèves entrent directement dans la tâche ?... La consigne est-elle - comprise directement, - objet de discussion, - objet de négociation ?	Si la consigne est mal comprise, ai-je : - tenté diverses reformulations, -donné des exemples à l'oral, écrits au tableau, lesquels ? - démarré une méthode, à l'oral, décrite au tableau, laquelle ? - rattaché l'activité à la leçon précédente ("rappelez vous, c'est comme la dernière fois"), - changé le mode de travail (à deux au lieu d'individuel...), - etc.	La consigne était-elle - satisfaisante, - trop longue, - mal formulée... ? Le changement à chaud a-t-il - dénaturé la tâche, - négocié à la baisse (facilité ou induit la réponse), - fait démarrer comme souhaité.... ?	L'élève est-il responsable de son projet ou reste-t-il exécutant ? La tâche a-t-elle un sens ? L'élève peut-il avoir une idée de la tâche finie ?
Quelle proportion d'élèves s'est mise réellement au travail ? Après combien de temps ?	Suis-je intervenu au début - en précisant à nouveau la consigne, - en donnant un début de solution, de méthode, - en envoyant un élève montrer un début de solution au tableau, - etc.	Quel temps ai-je laissé aux élèves sans intervenir ? Un temps suffisant, trop court ? Ai-je une l'angoisse du silence ? Les élèves ont-ils cherché assez longtemps ?	Y-a-t-il réellement problème pour l'élève ? Les élèves ont-ils le temps d'entrer dans le problème ?

Cours de l'activité			
Éléments d'observation		**Éléments d'analyse après-coup (retour sur préparation)**	
Indices pris sur élèves	Réaction du maître dans la classe	Analyse de surface	approfondie
Les élèves prennent-ils des initiatives, par exemple : - prendre du matériel, - demander du matériel, - schématiser le problème, - établir un tableau, - etc.	Ai-je - noté les difficultés, - relevé des procédures, - compris toutes les propositions, les erreurs, - regardé tous les élèves avec le même regard, - porté des jugements de valeur, - encouragé des élèves, - freiné des élèves, - gêné des essais...	Ai-je un regard négatif, méfiant a priori sur certains élèves ? Ai-je des préférences visibles pour d'autres ? Y-a-t-il des élèves que je n'ai pas vus, pas regardés ?	La tâche est-elle adaptée aux compétences - des élèves en général, - de certains élèves ? Une différenciation - de la tâche a priori, - des aides fournies est-elle possible ? L'enjeu pour les élèves, pour certains élèves, est-il réel, absent, mal évalué ?
Certains élèves restent bloqués.	- Leur ai-je fourni une aide individuelle, orale, écrite.. ? - Les ai-je mis en relation avec d'autres plus avancés ? - Ai-je repris des explications pour eux seuls, collectivement ? - Ai-je donné la parole à d'autres pour qu'ils fassent un point de l'avancée de leurs travaux ?...	Pourquoi ? Y avait-il une - difficulté à entrer dans le problème (retour sur la consigne, la nature de la tâche, l'idée de la tâche finie...) ? - difficulté à se concentrer ? - mauvaise répartition des élèves ?	Quelles aides auraient pu être prévues a priori ? Serait ce possible, intéressant d'envisager une différenciation de la tâche a priori ?

Certains enfants sont agités.	- Les ai-je menacés de sanction ? - Les ai-je sanctionnés ? - Les ai-je associés avec un plus calme ? - Leur ai-je fourni une aide individuelle écrite ? - Les ai-je assistés oralement ?	Le moment de classe était-il propice à un tel travail ? (retour de piscine, accident de récréation...)	
Certains enfants ont fini avant les autres. Ont-ils perturbé la classe, aidé les plus lents...? Se sont-ils occupés (lecture, jeu,...) ?	Ai-je corrigé le travail des plus rapides ? Me suis-je prononcé sur leurs résultats ? Est-ce habile ? Efficace pour eux, pour le calme des autres ?	Des prolongements étaient-ils prévus dans la préparation ?	Quels moyens sont disponibles pour gérer ce temps d'activité "en plus" pour certains élèves ?

Conclusion de l'activité			
Éléments d'observation		**Éléments d'analyse après-coup (retour sur préparation)**	
Indices pris sur élèves	Réaction du maître dans la classe	Analyse de surface	approfondie
Les élèves étaient-ils prêts pour une conclusion ? (mesure de l'intérêt pour l'activité, du degré de fatigue, du degré de réussite,....). Quelle a été la qualité de l'écoute ? (attentive, difficile, nulle)	Quels choix ai-je faits ? - **J'ai proposé une correction** ***** moi-même. - Etait-elle collective, écrite ou orale ? Présentait-elle une solution ou plusieurs ? - Etait-elle individuelle ***** sous forme d'une autocorrection par les élèves (fiche corrective, calque,...) ***** sous forme d'une correction croisée des élèves.	La correction est-elle utile ? Pourquoi cette inattention ? - Fatigue (voir durée de l'activité, moment de la journée,...), - désintérêt après la recherche, - éléments chahuteurs ?	
Quel a été l'engagement de la classe ? - questions - demandes d'explications - incompréhensions - discussions,....	- **J'ai proposé une mise en commun** s'appuyant sur : ***** un affichage des travaux, ***** une présentation orale, ***** une présentation écrite au tableau, de tous, de quelques-uns (comment ai-je choisi les élèves qui passaient : au hasard, selon les procédures, des élèves moteurs, en difficulté... ?)	La gestion était-elle adaptée aux élèves, à la situation, à l'heure de la journée,... La séance devait-elle donner lieu à une correction ou à une mise en commun (par exemple s'il n'y pas plusieurs procédures, ou si tous ont trouvé, ou si seuls très peu n'ont pas abouti).	Réflexion autour de la gestion de la mise en commun : - choix des supports, - choix des élèves intervenant, de leur nombre, de l'ordre d'intervention (qui est fonction de l'observation faite pendant le déroulement), du rôle accordé par le maître à chacun

Les erreurs ont-elles été pointées par les élèves ? Expliquées ? Qui a validé (ou invalidé) les propositions ? Les élèves ont-ils réellement eu la parole ? Les élèves se sont-ils impliqués dans la mise en commun, même quand ils n'étaient pas au tableau ?	Lors de la mise en commun. - Quelle a été ma position dans la classe (devant, au fond,...) ? - Quel a été mon rôle ? Ai-je pris position au fur et à mesure ou sollicité le groupe classe pour qu'il se prononce ? Me suis-je limité à un échange duel avec celui qui passait au tableau ?...		(regard protecteur, admiratif, sceptique a priori...)....

Synthèse de l'activité			
Éléments d'observation		**Éléments d'analyse après-coup (retour sur préparation)**	
Indices pris sur élèves	Réaction du maître dans la classe	Analyse de surface	approfondie
Les élèves écoutent-ils, posent-ils des questions ? Les élèves gardent-ils une trace écrite du problème ? Sous quelle forme : - une procédure apportée parle maître, - une procédure imposée parmi celles proposées par les élèves, - une procédure au choix de l'élève (ou plusieurs) parmi celles rencontrées ?	Ai-je -pointé les procédures convenables, - les erreurs à éviter, - dégagé une ou plusieurs procédures plus efficaces ?	Les élèves ont-ils eu l'impression que je donnais la solution ? Ai-je respecté la pluralité des réponses correctes ? Finalement avons-nous avancé ensemble ? Ou ai-je tiré les élèves vers ma conclusion ?	Comment adapter une synthèse au travail effectif des élèves, après la mise en commun ?

Institutionnalisation			
Éléments d'observation		**Éléments d'analyse après-coup (retour sur préparation)**	
Indices pris sur élèves	Réaction du maître dans la classe	Analyse de surface	approfondie
Les enfants ont-ils - lu l'aide mémoire d'un manuel ? - construit un résumé ? - reçu un document ? L'institutionnalisation a-t-elle débouché sur une trace écrite ? Sur quel support : - un support collectif (affiche, tableau, cahier mémoire de la classe) ? - un support individuel (cahier, ...) ?	L'institutionnalisation est-elle - conforme aux prévisions ou non (pourquoi ?) - à la charge des élèves (éventuellement contrôlée par le maître) - énoncée entièrement par le maître ?	Les élèves ont-ils compris où menait la séance ? La séance laisse -t-elle une empreinte sur leur état de savoir ? Et si c'était à refaire.....? Comment enchaîner sur la suite de ma progression ?	La situation proposée mettait-elle effectivement en œuvre les savoirs ou savoir-faire que j'avais prévu d'institutionnaliser ?

Aide au mémoire professionnel

Pierre Eysseric - Yves Girmens[1]

Extrait du Cahier du Formateur, Tome 3 – Aix 1999. Le titre original de l'article est « Comment aider un stagiaire PE2 à identifier un sujet de mémoire à partir d'un centre d'intérêt qu'il a exprimé ? ».

Ce texte est rédigé à partir du travail d'un atelier dont le but était de permettre à des formateurs n'ayant encore jamais assuré l'encadrement d'un mémoire professionnel de professeur des écoles de deuxième année, de réfléchir à la manière dont un formateur peut aider un professeur stagiaire à démarrer son mémoire à partir d'un centre d'intérêt qu'il a repéré mais encore mal cerné.
Trois documents joints
- le compte-rendu d'un entretien simulé lors de l'atelier,
- un texte sur la place du mémoire dans la formation professionnelle des PE,
- un témoignage de pratique,
apportent des éclairages variés relatifs à la problématique de cet atelier.

Problématique :

Lorsque les professeurs des écoles stagiaires de deuxième année (PE2) ont à choisir leur sujet de mémoire, ils formulent souvent un projet qui exprime un centre d'intérêt, mais qui ne constitue pas encore une question professionnelle pouvant être à l'origine de leur mémoire.

Quelques projets fréquemment observés à ce stade sont, par exemple :
- « Je veux faire mon mémoire sur le travail de groupes »
- « Je veux faire mon mémoire sur le jeu en maternelle »
- « J'ai fait mon dossier de première année sur les moments de mise en commun ; je veux garder ce sujet pour mon mémoire ».

De telles intentions définissent un domaine d'étude mais ne constituent pas une question ou un problème relatifs à l'enseignement, que l'on se propose d'étudier.

Comment, à partir de tels projets formulés par les stagiaires, peut-on les amener à identifier une question professionnelle ?

Lors des premières rencontres, que dire à un stagiaire, vers quelles lectures théoriques le diriger, quelles actions lui conseiller pour initialiser sa

[1] Rédigé à partir du compte-rendu fourni par Muriel Fénichel.

réflexion et l'aider à repérer, à travers la préoccupation qu'il exprime, un sujet pouvant faire l'objet d'un mémoire ?

Bilan de l'atelier :

A partir de simulations d'un premier entretien dans un atelier réunissant des anciens et des nouveaux formateurs, on peut dégager quelques lignes directrices pour la conduite de celui-ci :

1) Le premier entretien ne doit pas donner lieu à la formulation d'une problématique : il est bien souvent encore trop tôt pour que le professeur stagiaire puisse la mettre en évidence et ce n'est pas au directeur de mémoire de lui en proposer une.

L'explicitation d'une problématique est à part entière une tâche de l'élaboration du mémoire : elle est donc à la charge du professeur–stagiaire. Néanmoins, le formateur doit guider le PE2 en lui permettant d'affiner et d'approfondir sa réflexion afin de l'aider à définir cette problématique.

> Le mémoire professionnel doit être un outil de professionnalisation :
> - Il doit être l'occasion d'initier à la démarche propre à tout enseignant : "l'enseignant se forme et s'informe", ce qui doit devenir pour lui un acte volontaire faisant partie de sa culture.
> - Il doit permettre d'initier le stagiaire à une démarche d'analyse de sa pratique : en cela, il est un moyen pour permettre au stagiaire d'acquérir la posture nécessaire en vue de mettre en oeuvre des pratiques choisies et construites.
> - Il doit développer chez l'enseignant stagiaire la capacité à échanger et à communiquer avec d'autres, ce qui constitue une dimension importante de son métier.

2) Le premier entretien doit permettre au professeur-stagiaire d'une part, *d'élucider les raisons de son choix*, ce qui peut l'amener à évoquer son rapport aux mathématiques et d'autre part, de clarifier les termes qu'il utilise dans la formulation de son thème.

C'est l'occasion, pour le formateur, de recueillir des pistes pour mieux guider le stagiaire à identifier, concernant le thème choisi, des questions susceptibles de constituer le contenu du mémoire, c'est à dire des questions auxquelles le mémoire pourrait tenter d'apporter des réponses.

Les simulations d'entretien fournissent des exemples qui illustrent cela :

- Faire expliciter par le PE2 ce qui l'avait amené à choisir le thème de la géométrie a permis de mettre en évidence le fait que « faire de la géométrie à l'école, c'est manipuler et que manipuler, c'est bien vu de la part de l'institution ».

Cela a permis au formateur d'une part, de reprendre avec le stagiaire les objectifs du mémoire afin de l'impliquer dans le choix du thème et d'autre part, de commencer à le faire réfléchir sur le rôle de la manipulation dans l'élaboration des connaissances géométriques.

- Faire expliciter par le professeur-stagiaire ce qui l'avait amené à se poser la question : « Comment donner du sens aux mathématiques ? », a permis au formateur de se rendre compte que le professeur-stagiaire se référait à deux expériences :

La sienne : « quand j'étais élève, je n'aimais pas les maths et je me pose des questions parce que je vais devoir les enseigner ».
L'observation qu'il a faite, dans une classe Freinet, de la manière dont les élèves apprenaient les mathématiques et de l'aspect « concret » de cet apprentissage.

Il est alors possible de l'encourager à approfondir sa réflexion en lui proposant d'aller voir fonctionner d'autres classes dans lesquelles les activités proposées permettent aux élèves de donner du sens aux mathématiques. Ainsi, il pourra dégager d'autres éléments qui pourront l'aider à affiner sa réflexion. Le formateur peut aussi lui conseiller une bibliographie : les ouvrages de la collection ERMEL, l'ouvrage de R. Charnay «Pourquoi les mathématiques à l'école ? ».

- Faire expliciter par le professeur-stagiaire ce qui l'avait amené à choisir le thème de son dossier professionnel a permis au formateur de se rendre compte que le stagiaire ne connaissait pas les objectifs de la constitution du mémoire.

Le formateur peut alors expliquer la différence entre le dossier et le mémoire et l'amener à évoquer le contenu de son mémoire pour dégager des pistes de questionnement qui lui permettront de démarrer une réflexion et de construire un sujet d'étude.

3) Une des difficultés du formateur est de ne pas trop s'impliquer dans le mémoire : il s'agit, pour lui, de rester objectif par rapport aux propositions du stagiaire, de ne pas « dénaturer son projet » tout en restant vigilant, de respecter son choix tout en lui permettant éventuellement de modifier certaines de ses conceptions en lui proposant d'aller observer des classes bien choisies et de lire certains ouvrages.

4) L'objectif de ce premier entretien est aussi :

- De rappeler ou d'introduire ce qu'est un mémoire professionnel (selon les IUFM, cet entretien est la première occasion d'évoquer ce que représente le mémoire professionnel dans la formation du stagiaire et ce qu'il doit contenir).

- De rappeler certains incontournables : choix de la classe ou des classes d'expérimentation, récupération des travaux d'élèves, place des réflexions théoriques dans l'élaboration du mémoire, date de remise du mémoire.

- De proposer à l'étudiant un cadre de travail précis lui permettant d'affiner sa formulation et d'apporter des éléments au formateur avant une deuxième entrevue dont ce dernier devra fixer la date.

Voici un exemple de cadre de travail donné au professeur stagiaire voulant construire son mémoire autour de "faire de la géométrie à l'école":

- Un travail de réflexion sur la géométrie : en quoi la géométrie vous intéresse ? Comment amener des élèves de l'école élémentaire à faire de la géométrie ?

- Un travail de réflexion sur ce que signifie "manipuler une figure géométrique".

Les formateurs ont conseillé à l'étudiant de consulter la thèse de M-H Salin et de René Berthelot : " L'enseignement de la géométrie à l'école primaire".

En résumé, lors du premier entretien, le questionnement du formateur doit amener le professeur-stagiaire à élucider son choix, à faire émerger un sujet d'étude plus consistant.

Le directeur de mémoire doit aussi lui proposer des axes et supports lui permettant d'avancer.

Ce moment peut être considéré comme un moment de dévolution : le formateur doit amener le stagiaire à prendre conscience que la responsabilité de l'élaboration et de l'écriture du mémoire lui incombe.

<u>DOCUMENT N°1</u>

Compte-rendu du déroulement de l'entretien simulé entre les formateurs et le professeur stagiaire dont le choix du thème de mémoire est : "Comment donner du sens aux connaissances mathématiques ?"

Pour permettre aux nouveaux formateurs de réfléchir au rôle du premier entretien, les animateurs de l'atelier ont proposé la situation suivante : trois nouveaux formateurs devaient jouer le rôle du formateur conduisant l'entretien, le rôle du stagiaire PE2 étant, quand à lui, tenu par un formateur expérimenté.
Le déroulement effectif de l'entretien simulé[2] concernant le thème de mémoire « Comment donner du sens aux connaissances mathématiques ? » montre la grande difficulté des « formateurs directeurs de mémoire » à aider le « stagiaire » à faire évoluer son questionnement sans lui donner leurs propres pistes de réflexion.
Cette difficulté a été accrue du fait que trois personnes se partageaient le rôle du directeur de mémoire, de ce fait le « stagiaire » avait du mal à gérer des questions s'inscrivant dans des cheminements différents.

Malgré cela, des remarques utiles peuvent être formulées :
Ainsi, pour « le stagiaire », donner du sens aux connaissances mathématiques, c'était passer par la motivation et faire ressortir l'utilité des mathématiques. Pour les formateurs, c'était autre chose. Cependant, ils n'arrivaient pas vraiment à amener l' « étudiant » à « sortir » de ses deux expériences personnelles : la sienne en tant qu'ancien élève et celle observée dans une classe Freinet.

Il y a donc une difficulté réelle que tous les formateurs rencontrent : aider l'étudiant à garder le thème qu'il a choisi sans le transformer, sans lui souffler la manière dont on aimerait qu'il le traite.

Il s'agit de respecter l'optique de l'étudiant tout en conservant notre optique de formateur.

Que peut faire un formateur face à un tel étudiant :

- lui donner des exemples d'activités dans différents domaines des mathématiques permettant de donner du sens aux mathématiques ;
- lui proposer d'aller observer d'autres classes dans lesquelles les élèves vivent l'apprentissage des mathématiques d'une autre manière que dans une classe Freinet ;
- lui apporter un éclairage sur ce que l'on entend par la dialectique outil/objet ;
- lui conseiller quelques éléments de bibliographie qui l'aideront à élargir sa réflexion à propos de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire : « Pourquoi des mathématiques à l'école », de R.CHARNAY, Editions E.S.F.;

---

[2] La transposition de ce déroulement est présentée dans le tome 3 des Cahiers du Formateur, Aix, 1999.

- l'éclairer sur toutes les composantes qui entrent en jeu dans l'apprentissage d'un concept mathématique : le lien avec les autres concepts, le rôle du langage, des représentations ;
- le faire réfléchir sur le rôle des interactions dans l'élaboration des connaissances : y a-t-il des manières de faire vivre des interactions autres que celle du tutorat évoqué par l'étudiant à propos de la mise en place des connaissances mathématiques dans la classe Freinet ?

<u>DOCUMENT N° 2</u>

PISTES POUR UNE FORMATION PROFESSIONNELLE DES PE2
La place des mémoires professionnels (P. Eysseric)

I Quelques réflexions préliminaires :

<u>a) Information ou formation ?</u>

- Formation : celle-ci essaye d'agir sur les représentations des formés, en général pour les modifier.
  Il s'agit de "donner la forme".
- Information : on met à disposition des savoirs et des résultats divers, on renvoie à des éléments bibliographiques,...
  Il s'agit de "remplir la forme".

<u>b) A propos de deux modèles pour la formation des enseignants:</u>

(Citation de mémoire d'un Inspecteur Général de Mathématiques au cours d'un colloque en mai 1982)

- <u>*Modèle 1*</u>

Doyen de l'IG

↓

Inspecteurs

↓

Formateurs de formateurs

↓

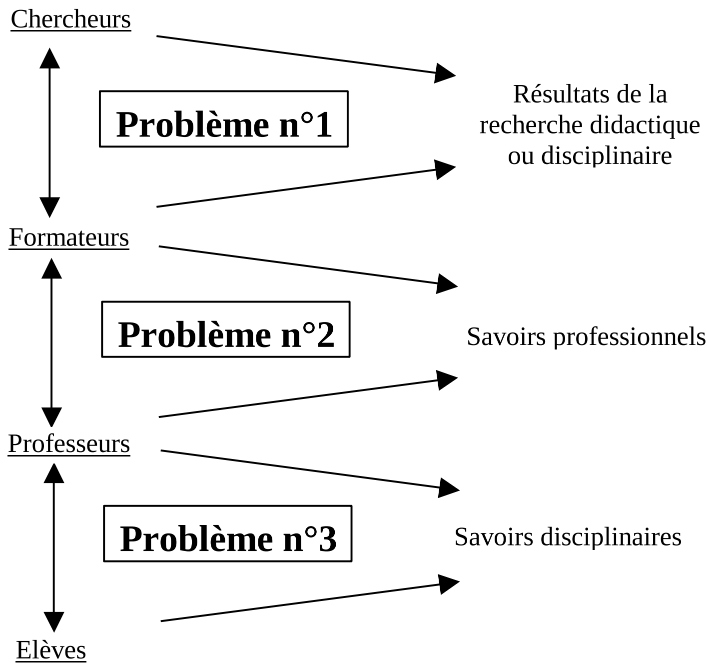
Professeurs

↓

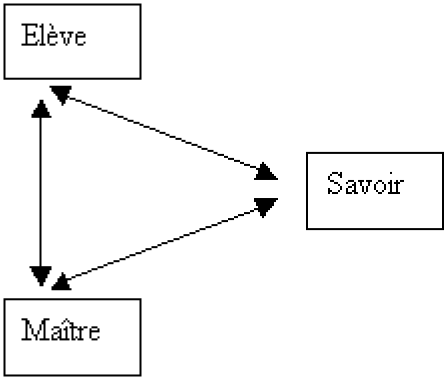
Elèves

Il s'agit d'un modèle vertical qui relève *plus de l'information que de la formation,* avec, à l'extrémité supérieure de la chaîne : celui que personne ne forme ou celui que personne ne peut former ou celui d'où part toute information ou celui qui contient toute l'information ou celui qui a atteint le stade ultime d'évolution en matière de formation ou... *comment distinguer le plein absolu du néant ?...*

- *Modèle 2*



Un modèle en réseau dans lequel on retrouve à tous les échelons un triangle didactique :



Un modèle qui donne sa place à la formation, comme à l'information.

Un modèle dans lequel la confrontation du "formé" avec les "problèmes" joue un rôle-clé dans la construction des savoirs :

- Problèmes n°1 : problèmes disciplinaires dont la résolution débouche sur un savoir nouveau, un apprentissage disciplinaire, l'augmentation des savoirs disponibles chez les élèves d'une classe.

- Problèmes n°2 : problèmes relatifs au « comment enseigner le moins mal possible les savoirs des programmes. »

- Problèmes n°3 : problèmes de modélisation des pratiques d'enseignement et d'apprentissage, pour mieux les comprendre, les améliorer,...

- Problèmes n°3' : problèmes disciplinaires débouchant sur l'augmentation des savoirs disponibles pour l'humanité.

c) Formation professionnelle:

Dans le modèle 1, on est davantage dans la formation à un métier : à chaque échelon, on trouve des exécutants qui ont reçu depuis le niveau supérieur une information qu'ils transmettent au niveau inférieur après une transformation communément appelée aujourd'hui transposition didactique ; on a une chaîne de transmission de l'information.

Le modèle 2 me semble relever davantage de la professionnalisation.

Pour l'illustrer, je citerai quelques éléments qui me semblent caractéristiques du **professionnel de l'éducation :**

- Le professionnel s'informe :

Il se tient au courant des avancées de la recherche (et ce pas seulement par l'intermédiaire des spécimens de manuels scolaires).

Il lit des publications professionnelles.

Les sources d'information sont diverses : manuels scolaires, livres du maître, articles de la presse écrite, émissions de télévision, revues professionnelles généralistes destinées aux enseignants (JDI, La Classe,...) ou plus spécialisées (Grand N), revues publiées par des mouvements pédagogiques ou des associations de spécialistes, livres et articles de chercheurs dont l'importance des contributions n'est pas toujours proportionnelle à leur degré de médiatisation…

Mais, depuis les articles publiés par des chercheurs en didactique des disciplines ou en sciences de l'éducation jusqu'aux manuels scolaires accompagnés de leurs livres du maître, une "transposition didactique" s'effectue qui modifie sensiblement l'information recueillie.

Le professionnel de l'éducation doit être quelqu'un qui s'informe à tous les niveaux et non un individu dont l'information se limite aux manuels scolaires à la mode, à la grande presse et aux émissions radio ou télévision.

- Le professionnel se forme :

Il n'est pas un praticien isolé qui reproduit d'année en année ce qu'il a vu faire.

Il réfléchit ses pratiques, les discute avec ses pairs, les remet en question afin d'évoluer positivement.

Il confronte ses pratiques aux avancées de la recherche pour un questionnement mutuel.

Le praticien de l'éducation s'insère donc dans un réseau où il retrouve ses proches collègues, mais aussi toutes les catégories de professionnels de l'éducation. Cela se fait, d'une part par l'intermédiaire de la formation continue officielle (les stages) mais aussi par la vie associative ou la participation à diverses rencontres ou colloques.

II Le mémoire dans le processus de professionnalisation des PE.

Il est important de remarquer que "se former" est un acte volontaire; le professionnel de l'éducation ne peut pas attendre qu'on le forme : il doit se donner les moyens de formation permanente.

Ces attitudes de professionnels ne sont pas innées ; elles doivent être initialisées lors de la formation initiale.

Le mémoire professionnel des Professeurs d'École Stagiaires me paraît être un moment privilégié de la formation pour faire découvrir aux futurs enseignants tout ce qu'ils peuvent espérer pour leur pratique à venir, s'ils acceptent de s'inscrire dans une telle dynamique de formation permanente.

Comment ? Les trois exemples qui suivent tentent de l'illustrer.

a) <u>L'inscription dans une recherche-action en cours :</u>

Le travail commence par une prise de contact avec différentes classes participant à un dispositif d'innovation pédagogique : les Ateliers de Recherche en Mathématiques (A.R.M.): observation, intérêt personnel du stagiaire pour le dispositif.

Durant plusieurs semaines, il va observer, puis participer à des A.R.M., discuter avec les enseignants qui les mettent en place, lire divers textes parlant de ce dispositif (en particulier, plusieurs mémoires écrits par des stagiaires au cours des années précédentes), puis arrive le moment du questionnement : il a envie de comprendre, d'analyser et il en vient à des lectures moins directement liées à la pratique (textes sur la démarche scientifique par exemple,…).

Enfin il revient sur le terrain avec une problématique : la pratique des A.R.M. contribue-t-elle à améliorer la réussite des enfants dans la compréhension et la résolution des problèmes de mathématiques ordinairement proposés à l'école?

Un dispositif est alors élaboré pour obtenir quelques éléments de réponse à cette question à travers l'observation de quatre classes.

b) <u>De la lecture d'un pédagogue fortement médiatisé à une réflexion approfondie sur les mécanismes de mémorisation des tables :</u>

Au départ la stagiaire me parle de son intérêt pour les travaux de La Garanderie dont elle a retenu qu'il existe des élèves "visuels" et des élèves "auditifs’’, et elle souhaite voir à travers son mémoire professionnel si ces travaux peuvent être utilisés pour les apprentissages mathématiques à l'école. Je lui signale alors le travail d'une de ses collègues de l'année précédente et lui conseille d’en prendre connaissance.

Après lecture de ce mémoire, elle revient me voir : elle va travailler dans une classe de CP et veut mettre en place des activités pour favoriser la mémorisation par les enfants du répertoire additif.

Pour l'instant, il n'est pas question pour elle de lectures théoriques ; tout son intérêt est concentré sur la pratique et la conception de séances ; je la laisse avancer.

Au bout de quelques semaines, elle en arrive à se poser des questions sur la mémorisation et cherche des références bibliographiques.

Elle revient me voir un peu désespérée car il lui semble que tout ce qu'elle a lu sur la mémorisation ne lui apporte rien pour son travail ; tout cela est trop général ; ce qu'elle voudrait, c'est trouver des textes plus pointus sur la mémorisation en mathématiques.

Je choisis alors de lui communiquer plusieurs publications de J.P.Fischer. Ce ne sont pas des textes faciles, mais, au stade de travail où elle est arrivée, ils répondent à un véritable besoin et cela explique sans doute qu'elle se les soit appropriés remarquablement. Cela lui permet de restructurer son travail et lui donne un nouvel élan.

c) <u>Questionner une pratique, la confronter aux recherches récentes :</u>

Deux stagiaires reviennent enthousiasmées de leur stage de pratique accompagnée dans un CP : elles ont découvert qu'on peut manipuler en mathématiques et elles veulent montrer dans leur mémoire que la manipulation est un bon outil pour les apprentissages mathématiques.

Les échanges que nous avons eus régulièrement (environ toutes les deux semaines) les conduisent progressivement à affiner leur questionnement sur la manipulation et à passer de *« Comment faire manipuler les enfants pour améliorer les apprentissages mathématiques ? »* à *« La manipulation peut être un bon outil, mais parfois aussi un obstacle aux apprentissages mathématiques. Quelle place donner aux manipulations pour qu'elles favorisent les apprentissages ? »*. Elles ont confronté les séquences mises en place en Grande Section de Maternelle aux travaux d'ERMEL et de R.Brissiaud en s'interrogeant sur la place et le rôle des manipulations. Cela a fait évoluer le regard porté sur les pratiques observées en début d'année : parties de la reproduction d'une pratique, elles sont parvenues à la réflexion et à la construction de leur pratique !

Dans ces trois exemples, le mémoire professionnel a été l'occasion de découvrir, d'une part des textes et des auteurs dont la réflexion éclaire une pratique, d'autre part l'importance des échanges avec d'autres professionnels de l'éducation.

Il faut espérer que cela sera l'amorce d'une démarche professionnelle qui se prolongera au cours de la carrière de ces deux professeurs d'école.

Peut-être faudrait-il aussi envisager des dispositifs de formation continue au cours des cinq premières années d'exercices dont l'objectif serait, comme pour le mémoire, l'acquisition de ces ***deux gestes professionnels fondamentaux pour un enseignant : s'informer et se former...***

<u>DOCUMENT N°3</u>

UN TEMOIGNAGE DE PRATIQUE : COMMENT AIDER UN STAGIAIRE A PASSER D'UNE PREOCCUPATION A UN OBJET D'ÉTUDE PROFESSIONNEL ?

COMPTE – RENDU DU PREMIER ENTRETIEN : **(**Y. Girmens)

<u>Point de départ :</u> Le stagiaire a exprimé un intérêt pour l'erreur en mathématiques. Il indique qu'il a fait ce choix après le premier stage de Pratique Accompagnée et il ne dispose d'aucun matériau après les deux stages de Pratique Accompagnée.

Le premier entretien s'est déroulé en quatre temps :

1) *Aide à l'identification et à l'explicitation des raisons qui poussent le stagiaire à s'intéresser à ce sujet* :

- ❑ Un désappointement devant la production d'une erreur par un élève ; un sentiment de quelque chose de « raté » ; un malaise quand il n'obtient pas de l'élève la réponse qu'il attend.
- ❑ Une difficulté pour donner une signification à une erreur (selon le moment de l'apprentissage où elle survient).
- ❑ Un sentiment d'impuissance devant une erreur : ne pas savoir quoi faire, comment réagir.
- ❑ Un écho d'un vécu douloureux quand il était élève.
- ❑ La difficulté à communiquer une erreur à un élève : comment signaler une erreur à l'écrit ? Faut-il barrer ? Souligner ? Écrire que c'est faux ?
- ❑ Une interrogation culturelle, qui contraste avec son vécu : « on m'a dit que l'erreur est un moyen d'apprendre mais comment faire ? ».

2*) Discussion autour de la signification d'une production d'erreurs pendant l'apprentissage* :

Cela a permis au stagiaire de convoquer ses expériences et ses représentations et au directeur de mémoire d'aborder quelques repères théoriques (temps d'apprentissage, obstacle, conception…), en tenant compte du niveau de connaissances du stagiaire.

Cela débouche sur le conseil de premières lectures :

- ❑ Le texte de R.Charnay sur l'erreur.
- ❑ Le livre de J.P. Astolfi : « L'erreur, un outil pour enseigner ». (Editions E.S.F).

3*) Inventaire de « questions professionnelles » concernant l'erreur* :

Le formateur incite le stagiaire à passer en revue le maximum de questions relatives à l'erreur, en rapport avec des pratiques d'enseignement :

- Comment exploiter des productions d'élèves après un travail de recherche au niveau de la classe ?
- Quels moyens pédagogiques peut-on mettre en œuvre pour aider les élèves à rectifier des connaissances mal faites ?
- Comment réagir en présence d'erreurs à l'écrit ? Quel travail de correction peut-on proposer aux élèves ?
- Peut-on écrire des solutions fausses au tableau ? Si oui, à quelle condition ?
- Quels dispositifs peut-on utiliser pour travailler à partir d'erreurs ?
- Peut-on demander à un élève de corriger lui-même ses erreurs ?
- Comment travailler de manière différenciée sur des erreurs ?

4) Définition d'un projet d'action :

En CE1, sur la multiplication d'un entier par un entier à un chiffre, le stagiaire recueillera des productions et repérera les erreurs produites.

Il expérimentera ensuite divers moyens de traiter ces erreurs : analyse collective de productions, groupes de besoin, tutorat.

Le stagiaire reçoit comme commande de produire un écrit présentant le compte-rendu de ses expériences.

Bibliographie de mathématiques pour les professeurs des écoles

COPIRELEM[1]

Ceci est une bibliographie concernant l'enseignement des mathématiques à l'école. Bien entendu elle est datée et non exhaustive. Certains ouvrages sont cités plusieurs fois, sous la rubrique correspondante.
Plusieurs types d'ouvrages sont recensés :
* les uns proposent, dans tout domaine lié à l'enseignement, des résultats de recherche, susceptible d'éclairer la réflexion didactique ; (code R)
* les autres proposent des idées d'activités de classe, plus ou moins bien étayées ; (code C)
* d'autres encore offrent une réflexion de fond sur des questions essentielles comme la gestion des erreurs, les différenciations possibles, etc. ; (code F)
* d'autres encore passent en revue des thèmes mathématiques de l'école, sans donner en détail des idées d'activités de classe ; ou donnent des idées à construire en activités de classe. (code G)

Certains ouvrages fournissent des idées d'activités de classe, d'autres permettent une première réflexion vers le mémoire professionnel. Certains ouvrages sont aussi cités parce qu'ils sont DÉCONSEILLÉS.

Une liste d'adresses d'édition qui ne font pas partie du circuit des libraires figure à la fin de cet article.

POUR LA FORMATION DES PROFESSEURS D'ÉCOLE EN MATHEMATIQUES

- *Se former pour enseigner les mathématiques* (Ed A.Colin, 1993, aussi Bordas 2000) quatre tomes

1 - Problèmes, Géométrie
2 - Maternelle, Grandeur et mesure
3 - Numération, Décimaux
4 - Opérations, Fonctions numériques

Par thème, quelques considérations théoriques, des exemples d'activités pour les étudiants et les élèves de l'école, des problèmes à chercher. Ouvrage de référence pour approfondir. (G)

[1] Ce document a été construit à partir de la bibliographie personnelle de Catherine Houdement.

Plutôt sur les mathématiques
- *Les structures numériques à l'école primaire* et *Les outils numériques à l'école primaire et au collège*, C. MAURIN, A. JOSHUA (Ed Ellipses, 1993) : pour une mise à niveau sur les notions numériques de l'école (nombres, arithmétique, opérations, fonctions numériques) replacées dans les mathématiques en général. (G)

- *Préparation à l'épreuve de mathématiques du concours de professeur des écoles*, R. CHARNAY, M. MANTE : 2 tomes, (Ed Hatier, 1995-96) pour mettre à jour ses connaissances sur les thèmes mathématiques de l'école. (G)

Plutôt sur la didactique
- *Les enjeux didactiques dans l'enseignement des mathématiques,* J. BRIAND, M.C. CHEVALIER, Ed Hatier (1995) : une bonne synthèse sur la didactique des mathématiques ; des "exercices" de didactique corrigés. (G)

MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE PRIMAIRE
Document indispensable à tout enseignant du premier degré : les programmes 2002

- Soit sous forme de deux livres : *Qu'apprend-on à l'école maternelle ?* et *Qu'apprend-on à l'école élémentaire ?* en vente en librairie (XO Editions)
- Soit sous forme du *BO Hors Série N°1* du 14 février 2002, en vente au CRDP.

A - Sur l'ensemble des mathématiques de l'école

- **Indispensable** *: Les documents d'application des programmes en Mathématiques :* deux cahiers du CNDP (cycle 2 et cycle 3) qui commentent et explicitent les contenus de mathématiques de l'école élémentaire.
Consulter aussi régulièrement le site *www.eduscol.education.fr/* où des fiches d'accompagnement sont présentées.
- *Pourquoi des mathématiques à l'école ?*, R. CHARNAY (1996, Éditions ESF Collection Pratiques et Enjeux Pédagogiques) : un aperçu sur les relations entre culture et mathématique, une vision actuelle de l'enseignement des math. (G)
- *Travailler par cycles de la PS au CM2 en mathématiques*, C. METTOUDI, A. YAICHE (1995, Éditions Hachette) : aide à la préparation de classe : détail des différentes compétences élèves pour chaque champ mathématique.
- *Dessine-moi une séance*, C. HOUDEMENT, M.L. PELTIER (1997, IREM de Rouen) : aides méthodologiques pour construire et mener des séances de mathématiques à l'école. (F)
- *Apprentissages Mathématiques à l'École Élémentaire* (ERMEL) (C)
CP : 1 tome (1977), dépassé sur le nombre, ne consulter que les activités

spatiales
CE : 2 tomes (1979)
CM : 3 tomes (1981-82) : pour le numérique voir les nouvelles éditions
ERMEL (Équipe de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques à l'École Élémentaire), Ed Hatier.
- *Aides pédagogiques :*
  * *pour le CP* (1978) : dépassé sur le nombre, ne consulter que les activités spatiales *de l'A.P.M.E.P*
  * *pour le CE* (1980)
  * *pour le CM* : Géométrie (1983), Décimaux (1986), Situations-Problèmes (1987).

Ces deux dernières séries d'ouvrages sont des études, du point de vue de l'enseignant, des savoirs mathématiques à dispenser à l'école élémentaire. Elles contiennent des propositions d'activités de classe. (C)
- *Enseigner les mathématiques à l'école*, F. CERQUETTI-ABERKANE (1992, Éditions Hachette) : par thème, bref rappel théorique avec références historiques et suggestions d'activités pour la classe. Certaines parties très discutables, par exemple soustraction, géométrie.

B - Sur la géométrie

- Dans la revue ***Grand N*** (IREM de Grenoble), un état des lieux sur la géométrie, des nouvelles propositions : (R)
  *"L'enseignement de la géométrie à l'école primaire" BERTHELOT - SALIN (1994). *Grand N* n°53, p.39-56.
  *"Réflexion sur l'enseignement de la géométrie " HOUDEMENT - KUZNIAK (1999). *Grand N* n°64, p.65-78.
  *"L'enseignement de l'espace à l'école" BERTHELOT - SALIN (1999). *Grand N* n°65, p.37-61.
  *"Reproduction de figures au cycle 3" VERNET MASSELIN (2000) *Grand N* n°65, p.15-34
  *"Reproduction et géométrie en cycles 1 et 2" N. BOULEAU (2001). *Grand N* n°67, p.15-32 : exemples d'activités ; compétences techniques et structuration de l'espace développées par de telles activités.
  * "Le napperon" PELTIER (2002) *Grand N* n°68.
- *Espace et Géométrie*, F. BOULE (1979, Ed CEDIC Nathan) : définit la connaissance de l'espace souhaitable chez l'enfant (F)
- *Questions sur la géométrie et son enseignement*, F.BOULE (2001, Ed Nathan Pédagogie) : une réflexion sur l'enseignement de la géométrie de la maternelle au collège.
- *Géométrie : une approche par le dessin,* Y. DUCEL, M.L. PELTIER (1986, IREM de Rouen) : compte-rendu d'une expérimentation en CM2. (C)
- *La géométrie au cycle 2* RINALDI A.M. (1995, Hachette Éducation) : une série d'activités autour de la géométrie de la GS au CE1, axées sur un point de départ stimulant les réactions spontanées des élèves. (C)

- *Enseigner la géométrie cycle 2* (1996, Ed Bordas) et *cycle 3* (1998, Ed Bordas) HELAYEL et al : (F et C) : une approche globale de la géométrie et des propositions détaillées de travaux géométriques à partir de matériel.
- *Géométrie à l'école élémentaire* 2 tomes *cycle 2, cycle 3* LACHAUSSEE D. (1991, CRDP de l'Aisne) : (C) au cycle 2 accumulation d'expériences géométriques liées à la feuille de papier ; au cycle 3 plus directif, fournit un exemple de « cahier de géométrie » sans définition.
- *La géométrie par le dessin au cycle III*, C. HAMEAU (1996, Ed Nathan pédagogie) : trois progressions thématiques simples sur la géométrie plane. (C)
- *Aides pédagogiques de l'A.P.M.E.P pour le CM* : *Géométrie* (1983) : une série d'activités à mettre en place en CM. (G)
- *Le Moniteur de Mathématiques* cycle 3 *Géométrie*.(Nathan 1997) : un guide pédagogique et 2 cahiers (CE2-CM1 et CM1-CM2) proposant une progression raisonnée sur la géométrie plane.
- *Travaux géométriques : apprendre à résoudre des problèmes*, IREM de Lille, 1998.
- *Travaux géométriques en 6ème*, A. Kuzniak et C. Taveau, Nathan Pédagogie, 1998 : une présentation de séquences détaillées étayées par des commentaires didactiques et mathématiques, ainsi que par des remarques sur les difficultés rencontrées par les élèves. Est utile pour travailler sur la charnière CM2-6ème.

C - Sur les apprentissages numériques et opératoires

0* Aides pédagogiques par niveau traitant des problèmes numériques (dénombrer, calculer)

- *Apprentissages numériques*, ERMEL **Grande Section** (Ed Hatier, 1990) : aide pédagogique faisant une synthèse actuelle sur le nombre entier et donnant des idées d'activités numériques. (C)
- *Apprentissages numériques*, ERMEL **CP** (Ed Hatier, 1991) **CE1** (Ed Hatier, 1993) cf. ci-dessus. (C)
- *Apprentissages numériques et résolution de problèmes*, ERMEL **CE2, CM1 et CM2** (Hatier de 95 à 2001). (C)

1* Apprentissages du nombre entier

- *Les chiffres ou l'histoire d'une grande invention*, IFRAH G. (1985), Éditions Robert Laffont : une passionnante histoire de la numération (c'est-à-dire des codages des nombres) (R)
- *Comment les enfants apprennent à calculer*, R. BRISSIAUD (1989, Éditions Retz) (F)
- *L'enfant et le nombre*, FAYOL M. (1990, Éditions Delachaux et Niestlé, Neuchâtel, Suisse) : un point sur les dernières recherches cognitives sur le nombre et son acquisition, ainsi que sur les opérations. (R)
- *Un, deux,... beaucoup, passionnément !* , INRP, Rencontres Pédagogiques n° 21 (1988) : (F) Comment construire des connaissances numériques à partir des compétences initiales des élèves, ouvrage qui a précédé et est développé dans les livres qui suivent :

- *Quatre étapes pour une évaluation continue en première partie de cycle 2* [M.H. SALIN, J. BRIAND] (1996, IREM de Bordeaux) : pour évaluer les compétences numériques des enfants et bâtir une progression adaptée en cycle 2.

2* Structures additives et multiplicatives

Les chapitres sur l'addition et la soustraction, sur la multiplication et la division des derniers ERMEL cités (C)

Le Moniteur de Mathématiques cycle 3 *Résolution de problèmes*.(Nathan 1997) : un guide pédagogique et 2 cahiers (CE2-CM1 et CM1-CM2) pour évaluer sur problèmes additifs et multiplicatifs.

Deux publications de l'A.P.M.E.P.

- *La Multiplication*, Elem-Math 2, 1976 (C)
- *La Division*, Elem-Math 3, 1977 (C)

Deux publications de L'I.R.E.M. de Bordeaux, qui présentent des activités détaillées et justifiées sur les thèmes cités

- *La Multiplication au CE*, [R. BERTHELOT] (1985) (C)
- *La Division à l'école élémentaire* [J. BRIAND] (1985)

3* Nombres non entiers

- *Nombres décimaux*, DOUADY R. PERRIN-GLORIAN M.J. (1986), Brochure de l'IREM de Paris 7 : une réflexion de fond sur cet enseignement. (R)
- *Aides pédagogiques de l'A.P.M.E.P pour le CM* : *Décimaux* (1986) : éléments de réflexion et de progression sur les non entiers (C)
- *La machine à partager, Fractions et décimaux au cours moyen*, C. HOUDEMENT, M.L. PELTIER (1994, I.R.E.M. de Rouen) : un exemple de progression introduisant les fractions, puis les décimaux au CM. (C)

4* Calcul mental, jeux numériques

- *Calcul mental au quotidien cycle 2* M.L. PELTIER (2000, Ed Hatier Mosaïque) : activités de calcul réfléchi.
- "Étapes du calcul mental". F. BOULE (1998). *Grand N* n°62 p.15-34 : esquisse d'une progression qualitative sur l'école.
- *Le Calcul Mental à l'école,* F. BOULE (1997, IREM de Bourgogne) : expérimentations, propositions. (R)
- *Le calcul mental au cycle des apprentissages fondamentaux (CP/CE1) et au cycle des approfondissements (CE2, CM1, CM2),* C. LETHIELLEUX, (1992-93, A.Colin, Pratiques Pédagogiques : deux tomes donnant une progression sur le calcul mental dans ces cycles. (C)
- *Jeux de calcul*, F. BOULE (1994, Ed A.Colin) : une manière ludique d'entraîner au calcul (G)
- *Jeux 2,* [H. PÉAULT] (1985, APMEP) : jeux individuels ou collectifs et activités numériques (G)
- "Les jeux mathématiques sont-ils la panacée à la démotivation des élèves ?". M.L. PELTIER (2001). *Grand N* n°66 p.33-40.

D- Un certain regard sur l'activité mathématique

1* Sur la résolution de problèmes

- *Comment font-ils ?* (*l'écolier et le problème de mathématiques*), Rencontres Pédagogiques n° 4 (INRP, 1984)
- *Apprentissage à la résolution de problèmes au cycle élémentaire,* (INRP, 1987), en vente au CRDP de Rouen.
- *Aides pédagogiques de l'A.P.M.E.P pour le CM : Situations problèmes* (1987, brochure APMEP), des exemples de situations problèmes, développées ou juste citées.
- *Comprendre des énoncés, résoudre des problèmes,* A. DESCAVES (1992, Éditions Hachette) : une réflexion intéressante (mais pas toujours bien structurée) sur la résolution de problème ;
- *Des activités pour lire et écrire en mathématiques*, A. DUBUT, B. POULAIN (1996, IREM de Rouen) : une réflexion niveau collège facilement adaptable au cycle 3.
- *Lecture et mathématiques à l'école* (1991, CDDP des Pyrénées Orientales) : progression trop rigide, à ne pas utiliser !
- *Le problème et l'enseignement des mathématiques*, O. RENAUT (1990, CRDP Dijon) : ouvrage court pour aborder une réflexion sur la résolution de problème.
- *Vrai ? Faux ? On en débat ! De l'argumentation vers la preuve en mathématiques au cycle 3*. ERMEL (1999) INRP Didactiques des disciplines : mise en place de séances pour l'apprentissage du raisonnement.

Articles de la revue *Grand N*, IREM de Grenoble :
- n°42 * "Lecture des énoncés mathématiques", F. BOULE, C. WASSERER (1988),
  * "Apprendre par la résolution de problèmes" R. CHARNAY (1988)
  * "Est-il possible d'apprendre à résoudre des problèmes", D. VALENTIN (1988).
- n°50 "Lecture des énoncés et progression thématique", R. NEYRET (1992),
- n°51 « Problème ouvert, problème pour chercher », R. CHARNAY (1992)
- n°60 "Tout problème ouvert n'engage pas nécessairement une bonne recherche" LEPINE L. (1996)
- n°61 "La résolution de problèmes par classe" GRUGNETTI, JACQUET. (1997).
- n°63 "Les activités dans la résolution de problèmes au cycle 3" R.M. BALMES, S. COPPE (1999)
- n°63 "Le choix des problèmes pour « la résolution de problèmes »" C. HOUDEMENT (1999)
- n°66 "Des problèmes dans les énoncés" PEROZ (2000)
- n°68 "Mise en commun et argumentation en mathématiques" DOUAIRE (2002)
- n°69 "Des apprentissages spécifiques pour la résolution de problèmes" JULO (2002)

- n°69 "Sur les activités concernant la résolution de problèmes à l'école primaire" COPPE, HOUDEMENT

Sous presse (2003) un numéro spécial *Points de départ* (de problèmes).

2* Sur les erreurs

- "De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de remédiation", R. CHARNAY, M. MANTE (1991), article de la revue *Grand N* n°48, IREM de Grenoble
- *En math peut mieux faire (l'élève face à l'erreur en mathématiques),* Rencontres Pédagogiques n° 12 (INRP, 1986).

3* Sur des gestions de classe

- "Différenciation au CM2 dans des activités de mesure en géométrie" (1997) M. BRENNER, R. GUINET, article de la revue *Grand N* n°59, IREM de Grenoble
- *Chacun, tous... différemment. Différenciation en mathématiques au cycle des apprentissages* Rencontres Pédagogiques n°34 (INRP, 1995).
- "Situations d'aide aux élèves en difficulté", D. BUTLEN, M. PEZARD (1992), article de la revue *Grand N* n°50.

E- Manuels scolaires et SURTOUT livres du maître (C)

Pour une meilleure compréhension du travail lié à l'écriture d'un manuel scolaire :

"Histoire d'un manuel scolaire", M.L. PELTIER (1998), article de la revue *Grand N* n°62, IREM de Grenoble

Les livres du maître proposent des idées d'activités commentées et guidées utilisant ou non le livre de l'élève associé. Certains éditeurs proposent un matériel collectif et/ou individuel.

Mais n'oubliez pas que chaque proposition d'activité doit toujours être adaptée à **sa** classe effective.

Parmi les collections intéressantes parues en Euros :

- Collection *Euro Maths* (Ed Hatier, 2001) : CP, CE1,CE2.
- Collection *Cap maths* (Ed Hatier, 2001) : CP, CE1, CE2.

Voir aussi les collections *Objectif Calcul(en euros)* (Ed Hatier, 2000 à 2001), *J'apprends les math* (Ed Retz, 1991 à 2000) ; *Diagonale* (Ed Nathan, 1994 à 96) ; *Optimath* (Ed Hachette, 1996 à 1998).

F - Certaines revues sont spécifiques ou contiennent des articles pour l'école élémentaire

- Revue émanant d'un IREM (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) en particulier la revue *GRAND N*, de l'IREM de Grenoble (vente au C.R.D.P.), avec en plus, des numéros spéciaux sur le CE (1979), le CM (2 tomes 1981-82), la Maternelle (paru en 2000), l'informatique à l'école élémentaire (voir aussi sur la physique et la technologie 1999).

Revues des éditeurs : par exemple JDI (*Journal des Instituteur*s, Editions Nathan) qui propose différents dossiers. Les articles proposés dans ces revues en général sont d'intérêt variable.

QUELQUES ADRESSES UTILES, HORS CIRCUIT COMMERCIAL USUEL

Les publications de ces organismes ne sont pas éditées en librairie ; il faut donc les commander directement à l'adresse mentionnée.

* INRP (**I**nstitut **N**ational de **R**echerche **P**édagogique), 29, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, Tél. 01 46 34 90 00
* Revue *Grand N*, IREM de **Grenoble**, BP 41, 38402 St Martin D'Hères, Tél. 04 76 51 44 06
* APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), 26 rue Duméril, 75013 Paris, Tél 01 43 31 34 05 Fax 04 42 17 08 77

Instituts de **R**echerche sur l'**E**nseignement des **M**athématiques

* IREM de **Paris 7**, Université Paris VII, 2, place Jussieu, case 7018, 75251 Paris Cedex 05, Tél. 01 44 27 53 83
* IREM de **Rouen**, BP 138, 76821 Mont Saint Aignan Cedex, Tél. 02 35 14 61 41
* IREM de **Bordeaux**, Université de Bordeaux I, 40, rue Lamartine, 33400 Talence, Tél. 05 56 84 89 74
* IREM de **Bourgogne**, Université de Bourgogne, BP 400, 21011 Dijon Cedex., Tél. 03 80 39 52 30.

Ouvrages spécifiques sur l'ÉCOLE MATERNELLE

- *Pourquoi pas des mathématiques à l'école maternelle*. Un groupe d'enseignants de Trappes coordonné par J. BOLON (1997). IREM de Paris 7. Exemples d'activités mathématiques en ZEP de la PS à la GS
- M*anipuler, organiser, représenter*, F. BOULE (1985, Pratiques Pédagogiques, Ed A.Colin) : de lecture facile, donne une bonne idée d'ensemble d'activités de maternelle. (C)
- *Enseigner les mathématiques à la maternelle,* F. CERQUETTI, C. BERDONNEAU (1994, Ed Hachette Éducation) : éléments théoriques et idées d'activités de la petite à la grande section de maternelle. (C)
- *Les Mathématiques par les Jeux*, L.CHAMPDAVOINE (1986, Ed Nathan) : 2 tomes (C)Petite et Moyenne Section et Grande Section. Propositions de jeux à étudier et remodeler (travail mathématique effectif, taille du matériel) en fonction de sa classe.
- *Des jeux avec des règles,* D. CHAUVEL, V. MICHEL (1984, Ed Retz) (C)
- *Des jeux de nombres et de logique à la maternelle,* M.L. WINNINGER (1990, Ed Retz). (C) Dans ces deux ouvrages, des jeux intéressants, assez facilement exploitables, mais toujours à adapter.
- *Apprentissages Numériques, cycle des apprentissages, **GS**,* un tome essentiel qui fait le point des dernières recherches sur le nombre et présente des activités numériques construites (1990, ERMEL, Ed Hatier). (C)
- *Du Petit Ballon au Jeu de Cible. Faire des mathématiques en **Grande Section**,* M. BIDON, C. HOUDEMENT, M.L. PELTIER (1992, I.R.E.M. de Rouen) : un compte-rendu d'activités annuelles sur une classe de ZEP (C)
- *Activités Mathématiques*, G. ZIMMERMANN (1986, Ed Nathan) : 2 tomes (C) *Le Développement Cognitif de l'Enfant* et *Les Apprentissages Préscolaires.* Donne une bonne idée du travail mathématique à l'école maternelle, activités répertoriées par niveau et par thème.

Les articles de la revue *Grand N* (IREM de Grenoble) sur le cycle 1 jusqu'au n°66**,** sont regroupés dans deux numéros spéciaux *Grand N Spécial Maternelle Approche du Nombre* (tome 1) S*tructuration de l'Espace* (tome 2). IREM de Grenoble 1999.

Voir aussi
''Dix dans un dortoir'' D. VALENTIN (2001) p.7-14, *Grand N* n°67.
"De l'exploration du quartier à la structuration de l'espace en Grande Section'' *Grand N* n°69

Guides pédagogiques

Atout Math GS (Ed Hachette, 1993) : un guide pédagogique pour utiliser en ateliers du matériel associé.
- *Diagonale GS* (Ed Nathan, 1992) : un guide pédagogique proposant des activités et la possibilité de reproduire des fiches associées. . Idem pour *PS* et *MS (Math en Pousse 1995).*
- *Nouvel Objectif Calcul GS Maternelle,* D. Vergnes, (Ed Hatier 1995) : une

valise de matériel accompagnée d'un guide pédagogique détaillé. - *J'apprends les math GS* (Ed Retz, 1995) R. Brissiaud : un guide pédagogique et du matériel associé.

Livres à éviter…

Notions mathématiques avec les 2/3 ans. Une année de maths avec les 3/4 ans, les 4/5 ans, les 5/6 ans (Ed Nathan, post 1990)

Quatre cahiers, assez pauvres sur les activités elles-mêmes. Peuvent donner des idées de gestion de classe.

*PS Du vécu au jeu mathématique (1997), MS Du jeu à la construction mathématique (1997), GS De la construction mathématique à la représentation, L. BARON (*1995, Guides Magnard) : des idées d'activités à utiliser avec discernement ; attention aux activités qui manquent de sens, aux consignes trop fermées, aux objectifs fantaisistes, à la dérive importante vers des travaux papier, aux entraînements…plus en accord avec les programmes de 1970.

Intégration des savoirs de formation La régulation didactique

Guy Brousseau

Conférence extraite des actes du XXIV ème colloque des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres - St Etienne 1997.

Dans ce texte, l'auteur cherche prioritairement à montrer en quoi la théorie des situations fournit des savoirs propres à réguler l'action didactique de l'enseignant. Il analyse différents types de contrats (non didactiques, faiblement didactiques, fortement didactiques,...) et interroge les moyens permettant au professeur de maintenir la relation didactique.

1-L'intégration des savoirs et la diffusion des connaissances nécessaires aux professeurs impliquent des savoirs spécifiques et l'existence de mathématiciens didacticiens

La conception : Savoir mathématique "brut" plus expérience personnelle plus expérience transmise est insuffisante. Les sources classiques des savoirs ne prennent pas en charge l'intégration des savoirs de formation ou les prennent de façon insuffisante, de sorte que leurs résultats se traduisent pour les enseignants sous la forme d'injonctions, de conditions à satisfaire... difficiles à synthétiser au moment de la formation.

La position même du formateur n'est pas claire entre celle du présentateur éclectique et exhaustif, celle du novateur, prosélyte, celle du professeur d'une "science didactique" (en formation) et celle du technicien de la formation professionnelle des adultes.

Ma position est claire : l'enseignement des mathématiques est un objet d'études qui réclame des savoirs - en particulier mathématiques - spécifiques. Ces savoirs sont soumis à la dialectique symbolique, ils produisent des objets techniques : les moyens didactiques.
Ils sont l'instrument de rencontre et d'intégration des savoirs d'origine psychologiques, sociologiques, linguistiques, pédagogiques...
Ils sont les connaissances de base des mathématiciens enseignants, qu'ils soient mathématiciens d'écoles, de collèges, de lycées, d'universités, d'IUFM.
Ces savoirs s'articulent principalement sur la discipline, comme les mathématiques appliquées, même s'ils se prolongent dans les sciences cognitives.

Les connaissances professionnelles propres aux IUFM peuvent s'y rattacher en partie mais elles ne forment pas un savoir à enseigner (aux professeurs). De même qu'il faut armer nos étudiants contre la perméabilité didactique qui consisterait à faire passer sans leur "discours" mathématique les connaissances mathématiques et didactiques des professeurs.

2-L'intéret des modélisations de situations

La réponse que nous avons tenté d'apporter au problème s'est faite en deux temps.

2.1 La modélisation des situations à usage didactique.

C'est la partie la plus connue du travail de ces 25 dernières années. II s'agit de repérer, pour les reproduire, les conditions spécifiques qui président à la mise en oeuvre (sous forme de décisions, de discours, de preuve ou de référence) d'une connaissance mathématique et à son « acquisition » (apprentissage, repérage, identification, appropriation, etc.) indépendamment d'une quelconque intervention didactique.

Les situations fondamentales, a-didactiques
Cette modélisation a permis de redéfinir le rôle des erreurs, de montrer la genèse des obstacles et leur caractère inéluctable et de faire des calculs d'optimisation sur les variables didactiques de ces situations et des tâches qu'elles déterminent ou provoquent.

2.2 La modélisation des situations d'enseignement : nécessité d'une théorie.

En voulant étendre les principes de cette modélisation à la situation d'enseignement elle-même, nous avons rencontré toute une série de paradoxes : ceux du contrat didactique. Ce qui a justifié une nouvelle forme de modélisation - toujours en utilisant simultanément les méthodes de Turing et celles de P Lorenzer - qui donne des résultats plus étendus, mais surtout qui a justifié, pour les études de consistances qu'elles rendaient nécessaires, la dénomination de Théorie de situations.

3-Les stratégies de diffusions des connaissances.

I1 n'est pas dans mon intention de « rabâcher » les bases de cette théorie, bien que je vois ça et là des signes qui montrent qu'elle n'est pas bien comprise. Je voudrais plutôt attirer votre attention sur ce qu'elle permet (ou ce qu'elle vise à permettre) et qui me paraît important : la régulation de l'enseignement des mathématiques- c'est à dire l'établissement de rapports entre les indices (observables) déterminés par les instruments théoriques ou par les modèles- et des décisions didactiques propres à maintenir les conditions didactiques au voisinage des conditions initiales à coté des savoirs d'intégration. La théorie des situations fournit des savoirs de régulation interne.

Pour le montrer prenons les modèles de situation au sens de « rapports didactiques ».

3.1. Les stratégies didactiques.

3.1.1. Contrats non didactiques

Une première répartition des responsabilités consiste donc à ce que l'émetteur d'un texte n'ait aucune responsabilité didactique à l'égard du récepteur : il n'est pas chargé de lui enseigner quoi que ce soit, et s'il modifie les croyances ou les actes du récepteur, c'est en quelque sorte indépendamment de sa volonté, et non pas conformément à un projet quelconque de sa part.

Nous allons ordonner ces contrats en partant du minimum de contraintes pour l'enseignant - qui ne sera alors qu'un émetteur de signaux - et en allant vers des responsabilités toujours plus grandes.

Le contrat d'émission

Le contrat d'émission ne lie pas directement l'émetteur et un éventuel récepteur. L'émetteur délivre un message sans se préoccuper des conditions effectives de réception. Nous supposerons toutefois dans la suite de ce texte, que ce message est intelligible (au moins pour une certaine institution) et même qu'il n'est composé que d'énoncés, justes ou faux, mais bien formés.

Dans une situation minimale, l'émetteur pourrait n'être tenu à rien du tout (rien d'autre que ce qui régit la liberté d'expression) et émettre un message inintelligible, même pour lui (l'émission d'un simple brouillage par exemple). Ce contrat limite peut être parfois réellement observé dans des classes : le professeur monologue sans tenir aucun compte de la présence des élèves qui émettent en même temps que lui du bruit. Ce contrat peut aussi modéliser certaines émissions de télévision ou de radiodiffusion.

Le contrat de communication

Le contrat de communication est plus exigeant. L'émetteur (par exemple le professeur), prend à sa charge de faire "parvenir" à un récepteur un certain message. Il doit s'assurer de la bonne réception du message (mais non du sens que lui donne le récepteur), et pour cela du bon fonctionnement du canal. Il doit utiliser les répertoires du récepteur (répertoires calligraphiques, phonologiques, orthographiques, grammaticaux, logiques etc.) et au besoin collationner (confronter avec la répétition par le destinataire) ou répéter le message (en particulier à la demande du récepteur). L'interprétation du message est entièrement à la charge du récepteur. Les dysfonctionnements conduisent exclusivement à des mises au point de répertoires.

Les contrats d'émission et de communication sont essentiellement soumis à des contraintes relatives à la forme du message.

Le contrat d'expertise

Le contrat d'expertise est plus exigeant, l'émetteur garantit la *validité* de ce qu'il émet. II peut être tenu par le destinataire d'établir, à la demande, une certaine validité (la vérité, l'authenticité, l'origine etc.) de ce qu'il énonce (par d'autres voies que l'émission elle-même : en justice par exemple pour certains types d'informations). Le travail d'un "professeur" qui utiliserait ce " contrat " pour diffuser une théorie mathématique, consisterait à énoncer l'un après l'autre les " théorèmes " qui la composent, dans un ordre quelconque. Les énoncés, parce qu'ils seraient déclarés implicitement comme " vrais ", deviendraient alors des assertions.

Le contrat de production

L'émetteur garantit la nouveauté de son message, la nouveauté ou l'originalité formelle (propriété littéraire ou industrielle) ou la nouveauté du contenu intellectuel et scientifique. Il peut garantir une nouveauté "absolue" (un nouveau théorème) ou seulement une nouveauté pour une institution particulière (pour les élèves d'une classe par exemple).
Il peut n'être pas tenu d'apporter lui-même la preuve formelle de la validité de son énoncé, mais seulement des preuves indirectes. Par exemple, l'émetteur trouve toujours les racines de certaines équations, mais il ne publie pas la méthode qu'il utilise. Cette situation s'observe dans la tradition des mathématiques ésotériques.

3. 1. 2. Contrats faiblement didactiques portant sur un savoir "nouveau"

L'émetteur accepte d'organiser son message en fonction de certaines caractéristiques "théoriques" de son interlocuteur. Il assume certaines responsabilités quant au contenu de ce message, mais aucune quant à ses effets sur le récepteur, même s'il est conscient de modifier son système de décision.

Le contrat d'information

L'émetteur garantit à la fois la nouveauté et la validité de son message. Il accepte d'en rendre compte auprès du récepteur qui devient l'informé, celui qui " achète" l'énoncé parce qu'il est vrai et nouveau.

Dans ce cas l'émetteur doit rechercher l'assentiment de l'informé et, en réponse à sa demande éventuelle, lui fournir certaines " preuves ", ses sources, ses références etc., il peut même être conduit à justifier systématiquement chaque énoncé.

L'information dialectique

Le " contrat d'information " n'exige pas que les interlocuteurs aient les mêmes références (la même culture, le même système informatique...), mais seulement qu'ils puissent en trouver de suffisantes pour étayer leur propos du moment. Ainsi ce contrat conduit à une construction dialectique de la conviction du récepteur sous le contrôle de ce dernier. Il est l'instrument essentiel de gestion collective de la vérité conformément à la tradition inaugurée en Grèce cinq siècles av. J.C.

Si l'émetteur (par exemple un professeur), veut pouvoir établir à tout moment devant son interlocuteur (ses élèves), la validité de ses énoncés et en garantir la nouveauté, il a intérêt à se référer à une organisation appropriée des savoirs à transmettre : une construction axiomatique par exemple. Il n'a aucune raison de l'exhiber devant son interlocuteur. Les preuves dépendent des connaissances (réelles ou supposées) du destinataire, elles ne peuvent donc pas être fixées a priori en démonstrations standard.

L'information dogmatique

Suivre les méandres des questionnements de l'informé peut apparaître aux deux protagonistes comme une perte de temps. Ils ont alors parfois intérêt à se soustraire au contrat dialectique et à proposer pour l'un et/ou demander pour l'autre de " normaliser" les preuves et de les fournir systématiquement. Le contrat devient un contrat "dogmatique". Dans ce système le professeur se réfère à un système conventionnel réputé notoire, composé d'énoncés acceptés par tous, et utilise des moyens de dérivation réputés sans mystère pour proposer des « démonstrations » pour tous ses énoncés (contestés ou non).

Ce contrat conduit l'informateur à établir dans la théorie à diffuser, un des ordres axiomatiques auxquels elle se prête et à s'en servir comme guide d'ordonnancement de ses propos pour économiser des demandes d'explications. L'axiomatique répond ainsi aussi à une contrainte ergonomique. L'informateur doit ici aussi utiliser les répertoires de l'informé (logiques mathématiques et techniques), mais les preuves prennent la forme de démonstrations qui dépendent moins du destinataire et davantage de l'idée que s'en fait l'émetteur. Si ce dernier, à la limite, ne donnait aucune preuve et n'acceptait pas qu'on lui en demande, il reviendrait au contrat d'expertise.

Ici, l'informateur devra reformuler les énoncés pour permettre leur démonstration dans le système qu'il prête à l'informé et à les répartir en deux classes :

- ceux qui appartiennent au répertoire de l'informé (répertoire effectif ou supposé), qu'ils soient évidents comme des postulats, acceptés formellement comme des axiomes ou des hypothèses, ou déjà construits et convoqués au cours de la démonstration comme des lemmes ou des définitions.
- et ceux qui n'y figurent pas et qui sont donc " nouveaux ".

Corollaire : toute communication, et a fortiori tout enseignement, repose sur un répertoire explicite en partie irréductible au savoir communiqué. Aucun langage ne saurait être totalement auto génétique. Nous rencontrerons plus loin un autre répertoire, celui des connaissances implicites et métamathématiques nécessaires à la compréhension.

Le contrat d'information est celui qui a théoriquement cours dans la communauté mathématique pour la diffusion des résultats.

Les motifs de l'émission n'interviennent pas explicitement dans la régulation du contrat d'information en quelque sorte minimal. L'émetteur répond à une demande du récepteur pour une utilisation qu'il ignore, il y a contrôle constant de la compétence de l'émetteur mais pas de celle du récepteur. L'émetteur ne sait pas s'il est vraiment compris, ni même reçu, si le récepteur ne manifeste aucune réaction. L'émetteur écrit ou dit le savoir de son domaine, dans les termes qui lui permettent de l'exprimer. Ces termes lui sont fournis par son institution d'origine. L'informé garde la responsabilité de l'interprétation et de l'usage de ces informations.

Si nous poussons un peu plus loin l'analyse de ce contrat il apparaît une conséquence importante. Le destinataire devrait avoir intérêt à ne demander à l'émetteur que le minimum d'informations qui lui sont nécessaires pour dériver par lui-même les résultats qu'il désire. C'est à lui de limiter « l'achat » de nouveaux énoncés. Cette clause instaure une nouvelle partition dans le corpus des théorèmes à communiquer, partition entre ceux qui sont dérivables par le destinataire et selon son opinion et ceux qui ne le sont pas. Bien sûr la dérivabilité dépend des capacités de l'informé et, effectivement, de l'idée qu'il s'en fait, puisque c'est lui qui doit l'apprécier. De même que plus haut, on va donc voir s'installer soit une dérivabilité dialectique, soit une dérivabilité culturelle imposée.

Les contrats didactiques que nous étudierons plus loin intègrent les contrats non didactiques avec des clauses supplémentaires, ils ne sont que des palliatifs provisoires de celui-ci. Il est clair qu'un enseignement doit tendre à mettre l'élève dans la situation de pouvoir s'informer lui-même.

Le contrat d'utilisation des connaissances

Ce contrat reprend le précédent et lui ajoute une clause supplémentaire : le transfert vers l'informateur de la responsabilité de montrer à l'informé l'emploi et l'utilité des connaissances qu'il propose. L'informateur doit par *conséquent* accompagner le texte du savoir d'un champ d'applications dans lequel ce savoir est supposé jouer un rôle. Ce rôle est variable. Parfois chaque application se déduit du savoir initial qui constitue alors un ensemble de connaissances « suffisantes ». Parfois il y est seulement nécessaire, autrement dit l'application ne peut être dérivée, démontrée ou calculée sans qu'il soit fait appel explicitement à ce savoir initial, mais d'autres connaissances sont nécessaires. Parfois encore, il n'est ni nécessaire ni suffisant mais il donne une alternative plus économique à des raisonnements, à des langages ou à des calculs déjà connus.

Il est très important de remarquer que ces relations entre un certain savoir et ses applications sont une fiction, une métaphore. Elles résultent, dans les cas les plus légitimes, à la fois de l'histoire, de la tradition, et de spéculations diverses. Rattacher entre elles des connaissances, les appliquer et les adapter à de nouveaux problèmes est le fait de l'activité "historique" aussi bien des hommes que des institutions. Personne ne sait à l'avance quelles seront les applications, les modifications ou le statut d'un savoir dans l'avenir car ces caractères évoluent fortement avec l'histoire. Seules les parties les plus anciennes et les plus stables du savoir peuvent subir ce traitement "didactique" sans recevoir trop d'objections et de contradictions. Pour enseigner un savoir nouveau, il est nécessaire de lui inventer des applications à la portée de l'apprenant. Ces constructions relèvent de l'ingénierie didactique et bien souvent de la fantaisie.

Dans le contrat d'information introduit plus haut, l'émetteur de mathématiques doit organiser une théorie qu'il connaît, de façon à pouvoir l'engendrer avec une certaine partie d'elle-même, mais il garde "secret" ce rapport et l'élève ignore où vont le mener les énoncés qu'il reçoit. Dans ce contrat-ci le rapport entre la partie générative et le tout engendré devient explicite. Les énoncés donnés comme savoir, restent des théorèmes, mais ceux qui doivent s'en dériver (logiquement ou autrement) changent de forme et de nom. Ils deviennent des questions, des situations ou des problèmes.

Le contrat d'initiation ou de contrôle

L'initiateur détermine un champ de connaissances auquel le récepteur veut s'initier et il lui propose les savoirs nécessaires et suffisants, ou au contraire, il lui propose une collection de savoirs et lui donne un ensemble d'applications "équivalentes" qui le justifient.

Dans les contrats précédents le récepteur devait décider s'il s'estimait suffisamment informé ou si au contraire il voulait davantage d'informations, ou des précisions supplémentaires sur celles qu'il avait déjà reçues. Dans ce nouveau contrat l'informateur prend en charge une partie de cette responsabilité : il donne à l'informé un critère pour déterminer s'il a bien "compris" (et pas seulement reçu) le savoir communiqué. Ce moyen consiste à établir une relation d'équivalence entre deux ensembles d'énoncés, le premier est un ensemble de savoirs communiqués comme tels (par exemples des énoncés d'une théorie), le second est proposé sous forme de questions, d'applications ou de problèmes à résoudre.

En postulant l'équivalence informative des savoirs et des applications l'informateur dit à son informé :

• d'une part, que la connaissance des théorèmes sera "prouvée" si le destinataire sait faire la totalité des problèmes proposés,

• d'autre part, que pour savoir résoudre tous ces problèmes, il suffit de savoir et de bien utiliser tel ensemble de théorèmes.

Ainsi l'initiateur montre quels savoirs "se convertissent" en connaissances pour agir dans des situations déterminées, et quelles connaissances peuvent se convertir en savoirs. Les deux ensembles d'énoncés se justifient mutuellement : les applications légitiment la communication des savoirs, les savoirs prouvent la validité des énoncés obtenus en application.

Mais cette nouvelle clause repose sur une hypothèse dont la validité effective reste à établir. Cette équivalence annoncée est-elle effective ? Prenons le cas limite : la donnée du système d'axiomes d'une théorie mathématique suffit à en déterminer tous les énoncés. II est plus difficile d'affirmer que la démonstration de tous les énoncés d'une théorie implique la connaissance explicite de tel ou tel de ses systèmes d'axiomes. Personne n'osera affirmer que tout mathématicien est capable d'obtenir effectivement l'un à partir de l'autre. L'association de savoirs et d'un champ restreint d'applications "équivalent" est le plus souvent totalement empirique. Elle résulte de pratiques, de conventions et d'habitudes que les travaux actuels de didactique sont loin de pouvoir objectiver.

Théorèmes et problèmes sont des énoncés d'une même théorie, il n'y a pas de différence mathématique entre eux, seulement une différence de forme dictée par une différence de position dans le contrat non didactique d'initiation. Nous verrons plus loin d'autres différences.

Le contrat d'instruction ou de direction d'études

Il s'agit maintenant pour le directeur d'études, en plus de toutes les responsabilités précédentes, d'indiquer c*omment* un savoir peut être appris. Il y a là un nouveau pari, une nouvelle fiction, et un nouveau transfert de responsabilité de celui qui devient un étudiant vers son directeur. Ce dernier propose des séries "d'exercices" qui sont supposés permettre d'acquérir les connaissances visées sans passer par la conversion des savoirs. Ces exercices sont des problèmes gradués, si semblables entre eux et si proches du savoir communiqué que la solution de l'un peut être transportée formellement dans un autre. La démonstration prend alors les caractères d'un calcul ou d'un algorithme (toutes les théories mathématiques ne se prêtent pas à ce traitement). L'apprenant peut vérifier qu'il a bien exécuté ou reproduit l'algorithme. Les différences entre les exercices ont pour objet d'illustrer les différents cas possibles et les différentes variantes correspondantes.

Comme plus haut la question de savoir si ces exercices sont effectivement nécessaires et suffisants pour provoquer la "connaissance" visée, cette connaissance se manifestant par la capacité d'établir la preuve de tout théorème du champ présenté comme problème. De plus l'incertitude précédente demeure et même s'accroît, il n'est pas sûr que les connaissances acquises dans ces conditions soient équivalentes aux savoirs culturellement correspondants.
Ces exercices permettent toutefois aux élèves d'évaluer leur apprentissage, corriger leurs erreurs de compréhension.

Conclusion sur les contrats faiblement didactiques

Remarquons que, jusqu'à présent, l'élève a gardé la responsabilité principale, celle de la réalisation effective de la communication qui s'effectue selon un processus dans lequel le diffuseur des connaissances a pris une responsabilité croissante. C'est l'apprenant en effet qui décide de l'usage des moyens mis à sa disposition. Son "instructeur" lui procure les énoncés principaux de la théorie, entourés de lemmes et de corollaires, des problèmes d'application de divers types, des exercices d'exposition ou d'entraînement et des moyens d'évaluation.
L'ensemble constitue un moyen fictif mais formel d'instruction mis à la disposition de l'apprenant par l'enseignant. Cette fiction épistémologique fait d'ailleurs partie du savoir communiqué.

Le contrôle exercé par l'apprenant sur son "instructeur" tend à établir une certaine règle d'économie sur la stratégie d'ensemble. Si les messages paraissent à l'apprenant insuffisamment "nouveaux", trop déductibles ou trop évidents, il pousse l'émetteur à augmenter le débit de son message, à le rendre plus informatif de façon à mieux occuper le temps de la communication. Il exerce une contrainte opposée dans le cas contraire. Ce contrôle limite l'émetteur qui peut avoir intérêt à alourdir son message, à le rendre redondant ou plus complexe ou, au contraire, à le laisser très allusif voire ésotérique. C'est seulement si un contrat échoue que le moniteur peut être conduit à lui en substituer un autre, plus fortement didactique, dans lequel il accepte plus de responsabilité.

Les contrats faiblement didactiques prennent en compte le projet de faire approprier un savoir par un interlocuteur, celui-ci étant pris en tant que sujet épistémique, mais non en tant que sujet effectif.

Dans les relations didactiques effectives se glissent fréquemment des phrases où les responsabilités du professeur et de l'élève se répartissent selon les variantes du contrat faiblement didactique : contrat d'émission ou de communication, pour la forme, contrat d'expertise, de production ou d'information pour le contenu, contrat d'application, d'initiation ou d'instruction pour l'usage de messages émis.

3.1.3. Contrats fortement didactiques portant sur un savoir "nouveau".

Généralités sur les contrats d 'enseignement

Il est classique de considérer qu'un contrat d'enseignement met en présence, effectivement ou potentiellement, au moins deux institutions :

- celle qui est enseignée (E-é),
- celle qui enseigne (E-a),

mais une analyse convenable doit en considérer au moins deux autres :

- l'institution (M) à laquelle l'enseigné devra s'assujettir à la fin de l'enseignement, alors qu'il ne le pourrait pas avant ; elle détermine en fait ainsi la matière de l'enseignement (connaissances et savoirs) et son but réduire le gradient culturel entre les deux institutions E-é et E-a.
- l'institution (D), qui décide que l'enseignant doit préparer l'enseigné à entrer dans les pratiques de l'institution M, elle délègue à l'enseignant sa mission et lui donne sa légitimité à décider de l'avenir de l'enseigné.

En fait ces quatre fonctions, modélisées par quatre institutions potentielles peuvent être assumées par des institutions effectives distinctes ou confondues. Par exemple l'autodidacte en assume au moins trois (D, E-é, E-a), pour s'adapter à la quatrième M.
Le contrat d'enseignement stipule essentiellement que l'institution enseignante prend la responsabilité du résultat effectif de son action sur son élève.

Le contrat didactique strict

Le professeur veut provoquer un apprentissage. Il s'agit donc, pour lui, de modifier les systèmes de décisions de l'enseigné face à un certain ensemble de situations typiques de M, dans un sens que l'on pense favorable à l'adaptation visée et/ou conformément à un savoir constitué.

Cette modification s'effectue le plus souvent d'une façon indépendante de la volonté de l'enseigné, et qui même peut échapper à son contrôle immédiat. Le cas typique et extrême de la relation didactique est celui où le professeur veut enseigner à son élève un savoir auquel cet élève est complètement réfractaire.

De même le travail culturel peut avoir permis de réduire les conditions d'adaptation à l'institution cible M (connaissances et savoirs) à l'acquisition d'un certain ensemble de savoirs dûment répertoriés. L'enseignant est déchargé de la responsabilité de l'invention de tous les moyens d'adaptation, son contrat d'enseignement se réduit à l'enseignement des savoirs convenus. Ce contrat qui se "déduit" du répertoire des savoirs serait le contrat didactique au sens le plus étroit. On peut montrer que la réalisation effective d'un projet didactique implique la mise en oeuvre de situations qui tendent à modéliser le fonctionnement du savoir et des connaissances afférentes (et non transformables ou non transformées en savoirs). Un projet didactique implique un projet d'enseignement mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

La modification intentionnelle du "récepteur" n'est pas une communication ni même une argumentation, mais une action. L'enseignant tente de fixer directement les états du système enseigné, au besoin sans passer par son jugement et son agrément. La légitimité de cette action tient à diverses conditions :

• Le savoir communiqué n'est pas une production ou une invention personnelle du professeur. Celui-ci au contraire garantit sa conformité avec le savoir qui a cours dans une institution de référence. II n'est pas arbitraire. Il a été repéré et déterminé, soit avec l'enseigné, soit avec un tiers responsable.

• Ce savoir n'est pas un simple enregistrement d'informations. Il lui correspond un champ dans lequel les capacités de réponses de l'élève ont été modifiées. L'existence de ces situations dans lesquelles le savoir appris révèle son efficacité permet à l'élève d'objectiver après coup l'assujettissement qu'il a accepté ou subi et de s'en libérer. C'est à dire d'oublier en fait les circonstances de l'apprentissage pour ne plus retenir que le savoir et les conditions de son usage (le milieu).

• L'action s'achève lorsque l'enseigné est supposé capable de prendre ses décisions par lui-même (en connaissance de cause). L'assujettissement n'est que momentané.

L'étude théorique générale de ce contrat, de ses variantes et de ses avatars peut être trouvée dans les : « fondements » et dans les autres textes sur le contrat didactique. Elle ne sera pas reprise ici où il ne s'agit que d'inventorier des stratégies. Mais ces stratégies ont pour objet de contourner les paradoxes fondamentaux et nous allons montrer qu'aucune ne peut y parvenir. Le contrat didactique reste un faux contrat frontalement « intenable ».

De plus ce contrat devient tributaire de l'épistémologie du professeur et du contrat social. Nous avons vu plus haut sur quelle fiction épistémologique s'installent les trois derniers contrats. La légitimité « historique » de la position et de la fonction d'un savoir peut-elle servir encore lorsqu'il s'agit de le faire acquérir réellement par un sujet ? Comment peut-on affirmer que ce savoir est effectivement équivalent à un certain ensemble d'exercices auquel son acquisition entraînera certainement la réussite ? Les critères empiriques de dépendance entre les acquisitions sont encore extrêmement flous et ceux dont nous disposons vérifient très peu les assertions théoriques.

La transformation de ces applications en exercices d'évaluation par le professeur (l'évaluation de son enseignement, évaluation du savoir appris, l'évaluation de l'élève, etc.) et à fortiori en exercices d'apprentissage pose de nombreux problèmes de didactique, d'épistémologie et de psychologie cognitive.

Nous allons examiner différentes stratégies définies par le renvoi de la responsabilité principale à tel ou tel des éléments de la situation didactique, et par les hypothèses épistémologiques qui sont associées à ces contrats.

Le contrat de reproduction formelle

Le professeur s'engage à faire effectuer, par l'élève, et par un moyen quelconque, une tâche qui est reconnue par la culture comme la marque de l'acquisition d'un savoir : par exemple, l'élève dira le texte d'un théorème, écrira la solution d'un problème, reproduira à la demande une activité déterminée. Le moyen par lequel la production de l'œuvre de l'élève est obtenu n'entre pas en compte car c'est l'activité elle-même qui est supposée être la source et la preuve de l'apprentissage. Qu'un virtuose ou un peintre génial ait ou non beaucoup travaillé et soit ou non en mesure de commenter son oeuvre n'a pas d'importance.

Ainsi, en mathématiques, l'enseignant peut exiger de l'élève qu'il recopie la correction d'un problème, qu'il récite un énoncé, qu'il imite une procédure, etc. La traduction des ordres du professeur en actes n'exige pas le passage par la connaissance visée. Il serait périlleux sous ce prétexte d'ignorer que ce type de stratégie peut apporter une contribution importante à certains apprentissages. Le fait que ces moyens de reproduction, par imitation, n'exigent pas de formulation de raisons ou d'explications leur confère des propriétés intéressantes, par exemple pour acquérir "du métier".

L'élève s'engage à effectuer la tâche définie à la condition qu'elle soit complètement réductible au répertoire qu'il possède. Dans ce système, l'exécution de la tâche par l'élève n'est pas donc pas l'objet d'un vrai contrat didactique. L'effet didactique de l'exécution de la tâche n'est assuré que par les croyances du professeur ou de la culture. La croyance en ce que l'activité engendre la connaissance (la main façonne l'esprit) a été appuyée par de nombreuses thèses pédagogiques. L'opinion répandue "j'entends, j'oublie ; je vois, je comprends ; je fais, je retiens" tendrait à faire du contrat de reproduction une panacée. C'est une position bien excessive.

Le contrat d'ostension

Le professeur "montre" un objet ou une propriété, l'élève accepte de le "voir" comme le représentant d'une classe dont il devra reconnaître les éléments dans d'autres circonstances. La communication de connaissance, ou plutôt de reconnaissance, ne passe pas par son explicitation sous forme d'un savoir. Il est sous-entendu que cet objet est l'élément générique d'une classe que l'élève doit imaginer par le jeu de certaines variables souvent implicites. Ce procédé fonctionne assez bien dans la vie courante, pour faire identifier une personne, une espèce animale ou un type d'objet à l'aide d'un répertoire de reconnaissance « universel ». Il est en tous cas exigé banalement dans les rapports institutionnels élémentaires.

Le contrat didactique d'ostension repose sur ce succès, mais il est insuffisant pour "définir" un objet mathématique. Par exemple "définir" un polynôme comme une somme de monômes, ou présenter le dessin d'un carré, ou "décrire" un décimal comme un nombre comportant une virgule, ne permet pas de déduire les propriétés caractéristiques de ces objets mathématiques (c’est à dire de reconnaître quelles sont les factorisations compatibles avec la structure d'anneau, que l'égalité ou la perpendicularité des diagonales peuvent se déduire d'autres propriétés, etc.)

Le professeur l'exigera néanmoins et l'élève s'y pensera tenu, soutenus qu'ils sont par les idées suivantes : le professeur doit utiliser un répertoire de reconnaissance à la portée des élèves, les moyens de reconnaissance "généraux" sont "universels" et donc identiques pour le professeur et pour l'élève qui doivent "voir" la même chose dans les mêmes objets. La base du contrat est donc une hypothèse épistémologique empiriste et réaliste qui arrange apparemment les deux parties. Elle permet au professeur de prétendre communiquer une connaissance en faisant l'économie à la fois des situations d'action où elle transparaît, de sa formulation et de l'organisation du savoir correspondant. Cette présentation ostensive permet d'ailleurs une "familiarisation " avec un objet d'études qui sera supposé être repris et redéfini plus tard. Le pouvoir de "généralisation" prêté à l'élève (et exigé de lui) ne peut fonctionner que dans le cas où il est culturellement et didactiquement soutenu par une fréquentation ou un "frayage" qui crée un domaine et une pratique d'usage commun. Il ne peut pas être mathématiquement justifié.

L'induction radicale exigée par le contrat d'ostension échoue souvent. Le professeur soutient la fiction de sa légitimité et de sa fécondité par des contrats d'analogie. La classe n'est plus suggérée par un mais par plusieurs éléments, dont les propriétés "visibles" communes et leurs variations sont supposées plus "génériques".

Le contrat d'ostension, bien que fondé sur une épistémologie "fausse", est pourtant très utilisé par les enseignants car il fonctionne très bien dans de nombreux cas où une définition mathématique serait trop lourde ou inutile.

Le contrat de conditionnement

La production (obtenue par imitation ou par exécution d'un ordre) d'une tâche n'étant pas le plus souvent une garantie que l'élève peut la reproduire en toute circonstance, l'enseignant est conduit à chercher des conditions qui fonctionneront comme des causes d'apprentissage, indépendamment des savoirs du sujet et de ceux qu'on veut lui enseigner, c'est â dire de ses *raisons de savoir* ce qu'il a appris. Les thèses associationnistes et béhavioristes apportent des justifications à la répétition de situations de reproduction, ou de toute situation didactique, pour en assurer le succès. Plus que d'autres, ce contrat se prête à des usages excessifs car il laisse peu de place à des indices conduisant à sa propre régulation. Si le psittacisme n'a aucune vertu dans le domaine des savoirs, il serait vain de nier la place que peuvent tenir les connaissances ou les apprentissages formels dans le fonctionnement cognitif même le plus évolué. Exiger la "récitation" d'un savoir peut conduire l'élève à des réflexions personnelles intéressantes sur ce savoir. Les connaissances acquises implicitement dans des pratiques répétées ont leur intérêt.

Concrètement le professeur prend à sa charge l'organisation d'une répartition "raisonnée" d'exercices "raisonnablement" répétitifs, et légèrement informatifs et gère le débit en fonction du rendement de son procédé qui est globalement assez faible. Recourir exclusivement aux causes d'apprentissage sans se soucier des raisons de savoir est un procédé désespéré.

Le rôle de l'élève est de se prêter à la répétition. Il peut - et son professeur aussi - croire que le temps se chargera de lui enseigner (de le familiariser avec) ce que ni l'un ni l'autre n'affrontent sur le moment. Le danger vient de ce que ce n'est pas entièrement faux.

La maïeutique socratique

Le professeur choisit des questions telles que l'élève puisse en trouver les réponses avec ses propres ressources, et il les organise de façon à modifier ses connaissances ou ses convictions. Le professeur modifie ses questions en fonction des réponses de l'élève. Mais le choix des questions n'est soumis à aucun contrat didactique, elles peuvent être très ouvertes ou très fermées comme dans le dialogue du Menon, elles pourraient a priori emprunter n'importe quelle voie rhétorique et obtenir la "bonne" réponse par des analogies, des métaphores etc.

Aussi ce contrat pourrait-il être considéré comme un cas particulier du contrat de reproduction en ce sens que le professeur fait dire à l'élève le savoir qu'il vise à lui transmettre en s'abstenant de le lui dire lui-même. Toutefois le passage des ordres aux questions introduit une grande différence. Tout dépend de l'idée que le professeur se fait du savoir et de la connaissance qu'il en a (l’épistémologie du professeur et ses qualités de mathématicien). Pour Platon, la théorie de la réminiscence assurait que la production d'un indice de savoir était associée à un savoir correspondant parce que ce dernier était "déjà là". En conséquence il est inutile de l'apprendre au sens moderne : « dire » équivaut à "savoir".

Combinée à d'autres conditions, elle est une des sources de certaines formes d’enseignement programmé.

La maïeutique, assez appropriée à un préceptorat, se prête beaucoup moins bien à l'interaction entre un professeur et une classe. La maïeutique collective est pourtant très employée et provoque de nombreux effets didactiques plus ou moins négatifs.

Un de ses principaux inconvénients vient de ce qu'elle tend à exclure les interactions du sujet avec un milieu effectif. Toutes les situations "a-didactiques", en particulier les problèmes, sont difficiles à inclure dans une maïeutique à cause de la dispersion des réponses et des problèmes qu'ils peuvent soulever.

Les contrats d'apprentissages empiristes

Dans ce cas la connaissance est supposée s'établir essentiellement par le contact avec le milieu auquel l'élève doit s’adapter. La responsabilité de l'apprentissage est renvoyée au milieu et à la nature.
Dans les formes les plus simples la lecture est presque directe. L'élève perçoit en "voyant" la structure (sans processus intermédiaire, ni culturel, ni cognitif). Cette position a été identifiée par Aebli[1] comme un empirisme sensualiste, appuyée sur des théories épistémologiques comme celle de la Gestalt ou des traces mémorielles. Jointe à l'idée que la lecture directe peut être aussi immédiate, elle conduit à des stratégies didactiques d'**ostension** : le professeur montre un objet et l’élève est supposé y voir les notions, les concepts, les propriétés.
Ce que l'élève ne perçoit pas du premier coup, il le découvre et l'apprend par une fréquentation répétée des mêmes circonstances. L'idée que c'est la répétition des contacts directs avec le milieu qui enseigne conduit à l'apprentissage « par », ou au moins « sur », le terrain ou par « frayage ». Les méthodes Freinet, certaines méthodes actives, ainsi que le constructivisme radical, se justifient en partie par des points de vue similaires. Le savoir, quand il n'est pas ignoré, n'est qu’un commentaire, qu'une description de ce que la nature nous enseigne, un raccourci d’action, ou d'apprentissage, ou même un simple moyen didactique.

Les contrats constructivistes

Dans ce nouveau contrat les situations qui conduisent l'élèves à l'apprentissage de connaissances ne sont plus des situations "naturelles". Le professeur organise le milieu et lui délègue la responsabilité des acquisitions. Mais cette organisation est dérivée essentiellement du savoir visé et de la connaissance des processus d'acquisition des élèves et non pas seulement modélisée des situations "de référence" rencontrées dans l'institution cible, ou dans l'institution savante qui produit le savoir. Ce milieu peut d'ailleurs être effectif ou fictif, il est souvent l'un et l'autre suivant diverses conditions ergonomiques. Les savoirs (anciens) ne se manifestent que comme pré-requis, c'est à dire comme moyens de formuler les conditions initiales de la situation, l'énoncé du problème, comme moyens d'évoquer la stratégie de base, etc. Le recours à des phases a-didactiques (d'action, de formulation ou de validation) pour faire créer diverses formes de connaissances est un exemple de ce contrat.

[1] Aebli, « Didactique et Psychologie », Delachaux et Niestlé, 1960

L'élève est supposé rationnel ou au moins cohérent (en particulier relativement fidèle) et économique. Il s'adapte pour minimiser ses efforts ou ses risques et pour accroître son plaisir, d'où l'idée de représenter ses comportements par des modèles ergonomiques : schèmes ou conceptions calculés. En fait. la cohérence n'est souvent que locale et l'élève s'accommode de contradictions par des assujettissements distincts à des situations différentes. La dévolution de la responsabilité de la cohérence est économisée par la fidélité à un discours cohérent...

La théorie des situations montre le caractère insuffisant de chacun de ces contrats pour construire à la fois un savoir canonique, les connaissances qui l'accompagnent et les pratiques qui caractérisent sa mise en oeuvre, au cours de genèses souvent longues. L'enseignant, dans la relation didactique, se manifeste, localement par le choix, la rupture et le remplacement des contrats suivant des indices et des stratégies de régulation qui échappent pour l'instant à nos moyens d'investigation.

3.1.4. Contrats basés sur la transformation des savoirs "anciens"

Les savoirs "anciens" dans la relation didactique

Dans les stratégies présentées plus haut, le savoir émis est supposé "nouveau". Le savoir "ancien" ne sert qu'à présenter les conditions de son apprentissage, ou à le construire par superposition et à l'intégrer par une genèse standard donnée par l'organisation culturelle des savoirs. II correspondrait aux apprentissages que Piaget comparait aux assimilations. Même dans les conditionnements, le savoir n'est pas supposé se modifier au cours des répétitions. Sauf peut-être dans certaines interprétations de la maïeutique, la récupération, la correction, le remplacement, la transformation, le rejet des savoirs anciens est à la charge de l'élève.

Dans les types de contrats basés sur la transformation des savoirs anciens, le système didactique accepte de remettre en question l'ordre empirique, l'ordre axiomatique ou l'organisation culturelle standard pour s'adapter à un ordre génétique. II accepte la réalité des apprentissages par accommodation, l'existence d'obstacles et la nécessité de connaissances provisoires, "transposées" et révisables dans le processus d'enseignement. L'articulation et la genèse des savoirs, collective ou personnelle, entrent dans la négociation du contrat.

Le système didactique, dans ce type de contrats accepte au moins une épistémologie selon laquelle la genèse collective didactique des savoirs procède par modifications et par ruptures à l'instar d'une genèse historique et non pas de façon linéaire par simple accumulation de savoirs. Dans un contrat plus complexe, c'est l'adaptation à l'ontogenèse et à la psychologie de l'enfant qui justifie une genèse collective appropriée. Mais les travaux de J. Centeno[2] ont montré que le contrat didactique approprié implique une mémoire didactique du professeur qui lui permet d'utiliser le passé particulier de la classe et de gérer l'articulation des apprentissages particuliers en relation avec l'histoire de la classe et des élèves.

L'enseignant prend en compte l'histoire du sujet et la sienne propre, il accepte d'avoir une "mémoire didactique". Dans ce cas un contrat didactique est d'autant plus nécessaire que l'élève a développé son propre rapport au savoir ancien, qu'il lui a déjà attribué un sens, une place dans l'établissement d'autres savoirs. La reprise d'un savoir ancien appelle donc une nouvelle répartition des responsabilités entre le professeur et l'élève. Le plus souvent les raisons de la reprise ne sont pas les mêmes pour le professeur et pour les élèves.

La reprise peut être justifiée par des raisons didactiques :

- un échec de l'apprentissage précédent,
- une mobilisation et une adaptation en vue d'apprentissages nouveaux,
- la réorganisation après coup de l'histoire effective de l'apprentissage et des savoirs acquis en une genèse fictive où les causes d'apprentissage sont interprétées en raison de savoirs ou par des raisons épistémologiques, sans rapport avec les apprentissages antérieurs,
- une réorganisation de savoirs anciens, un changement de position par rapport à des acquisitions anciennes, une adaptation pour la construction d'un savoir nouveau,
- une extension du savoir à des domaines nouveaux de savoir, à des applications qui demandent une adaptation de l'outil appliqué.

Plus concrètement. il convient d'examiner les changements de statuts :

- les transformations des savoirs enseignés en moyens de décision, en connaissances,
- inversement les transformations de connaissances développées dans des situations d'action, de communication ou de preuve, en savoirs institutionnalisés, organisés de façon canonique.

Les contrats de reprise des savoirs "anciens"

La révélation :

Le savoir ancien n'est évoqué, le plus souvent implicitement, que pour servir de décor, de faire valoir, d'antinomie, au savoir nouveau et finalement être "péjoré" ou rejeté.

[2] J. Centeno et G. Brousseau (ICME Budapest)

Le rappel :

Le concept de situation de rappel a été introduit par M.J. Perrin[3]. Le savoir rappelé est supposé être "identique" au savoir convoqué. Les faits principaux et les actions passées sont évoquées, formulées, reconstruites, rationalisées et justifiées après coup dans une situation didactique particulière qui est un des instruments principaux de l'institutionnalisation. L'explicitation des faits connus de tous est théoriquement placée sous le contrôle de la mémoire personnelle de l'élève, mais il est clair qu'il ne peut formuler et rendre public que ce que le répertoire didactique lui autorise. D'un autre côté ces situations de rappel permettent à l'élève de formuler ses observations et ses souvenirs de façon incomplète et allusive puisque leur passé commun met le professeur en mesure de les comprendre. Il se crée ainsi une zone proximale d'apprentissage où les connaissances apparaissent sous des formes provisoires (inévaluables de façon formelle mais perceptibles au professeur) avant leur acquisition sous forme de savoirs.

La reprise :

La forme ancienne est dans ce cas ouvertement mise en cause dans sa forme : elle fait alors l'objet d'une formulation, ou d'une traduction, ou dans sa constitution même : elle est alors l'objet au moins d'un commentaire, souvent d'une explication, d'une remise en cause, d'une critique, ou même d'un rejet. La reprise place le savoir ancien dans une nouvelle dialectique.

Les inconvénients de l'utilisation bonne ou mauvaise des connaissances anciennes se révèlent aux enseignants et aux administrateurs de l'enseignement lors des changements de classe ou de niveaux[4].

3.2 La régulation didactique

3.2. 1. Critique de la méthode, des "méthodes"

Qu'il s'agisse de décrire les pratiques effectives des enseignants, ou de leur proposer des moyens d'action, la littérature usuelle le fait presque sûrement sous la forme de « méthodes ». Peut-être est-ce l'effet du désir de rationaliser l'action des professeurs et de la nécessité de réduire la complexité des phénomènes qu'ils ont à prendre en compte.

Ce qui précède tend à montrer cas par cas ce qu'un raisonnement avait déjà établi de façon plus générale en théorie des situations : aucune méthode didactique ne peut résoudre seule les paradoxes fondamentaux et donc aboutir à un apprentissage des mathématiques. Même s'il obéit à des conditions et à des lois

[3] MJ. Perrin, Thèse
[4] J. Centeno et G. Brousseau

générales et collectives, ce dernier s'effectue par un processus historique dans des conditions dialectiques où les ruptures jouent un rôle important. Ainsi le travail didactique du professeur consiste essentiellement à réguler et changer de contrat didactique de façon à maintenir des équilibres et des conditions optimales et non pas à appliquer contre vents et marées une méthode, aussi sophistiquée soit -elle.

En fait les méthodes qui décrivent l'action didactique ne prennent que très peu en compte la régulation du système alors que l'essentiel du travail didactique va consister à maintenir la relation didactique dans des limites acceptables par rapport à différentes variables. Ces bornes au-delà desquelles entrent en oeuvre des corrections spécifiques forment un "polyèdre". La régulation va conduire à l'usage de toutes les méthodes.

II ne s'agit pas d'affirmer que la régulation des méthodes doit échapper à l'analyse scientifique mais d'orienter la recherche sur un terrain nouveau celui des indices de dérèglements et des moyens de régulation qu'ils appellent. Le fait que ces écarts ne puissent pas être corrigés seulement par une décision à l'intérieur d'une même « méthode » mais par des changements de contrats c'est à dire par des méthodes différentes change la complexité mais pas la nature du problème. Cette orientation pourrait tout de même avoir une conséquence sur la conception que la société se fait de l'enseignant : certains voudraient l'enfermer dans l'application d'une méthode. il semble qu'il faille renoncer à cette image.

3.2. 2. Les objets de la régulation

Ce sont ceux qui ressortent de l'étude précédente. Ils sont très nombreux et peuvent être classés en première approche selon les types proposés par la théorie des situations. II faut y ajouter toutefois tout ce qui touche aux caractères temporels. Par exemple, certaines variables caractérisent des phénomènes instantanés et relèvent d'une correction continue. Elles contrôlent des vitesses de variation, comme par exemple le débit didactique qui mesure l'apport d'information par les variations de l'incertitude des élèves. D'autres variables concernent un intervalle de temps assez court comme par exemple le temps ou les délais accordés à telle ou telle partie du travail. D'autres enfin concernent des phénomènes cumulatifs ou se déroulant sur un long terme.

Il faut remarquer que les équilibres dont il s'agit ne sont pas pour la plupart identifiables avec le choix d'une valeur moyenne pour une variable déterminée, mais plutôt comme le maintien de relations dialectiques entre des systèmes antagonistes.

Il convient donc d'équilibrer aussi le recours à la mémoire et le recours à la reconstruction instantanée des savoirs, les caractères ancien ou nouveau des connaissances en jeu au cours d'une leçon, et dans cette voie, la répétition ou le rite et la rupture.

Dans le même ordre d'idée, le traitement immédiat des situations et des apprentissages n'est pas toujours possible, mais la référence et le renvoi à d'autres apprentissages, sous la responsabilité du professeur ou sous celle de l'élève doivent être limités.

Dans la mise en oeuvre d'une situation d'action, l'équilibre entre ce qui est effectif et ce qui est fictif ne doit pas être rompu, ainsi que l'équilibre entre le dit et le non dit, ou celui entre les formes procédurales et les formes déclaratives du savoir.

A propos d'un même concept, des connaissances trop nombreuses et trop familières rendent inutiles ou biaisent les savoirs qui sont une autre manière de l'approcher, inversement des savoirs associés à trop peu de connaissances pertinentes ne peuvent fonctionner. II faut donc maintenir un certain rapport entre ce qui reste historique dans la genèse du savoir, et ce dont la structure est reconnue et institutionnalisée.

Il est aisément concevable que le professeur doit maintenir un gradient didactique suffisant pour permettre un fonctionnement aisé des connaissances de l'élève et une convergence vers les pratiques visées. Cela entraîne le maintien de différences raisonnables entre les divers vocabulaires en présence celui de l'élève (l'ancien et le nouveau), celui du professeur, celui du scientifique (exemple : écart/angle). Ces différences ne doivent être ni trop grandes ni trop petites.
La variété des modes d'expression et le choix des différents langages enseignés pour manipuler une même notion doivent être régulés. Trop de formes d'expression différentes pour une même notion, surtout si elles apparaissent avec des fréquences trop voisines, ne favorisent pas l'usage ni l'apprentissage, contrairement à une croyance didactique très répandue.

Ce contrôle en rejoint un autre, très actuel aussi. Augmenter le "sens" pour l'élève apparaît comme un projet didactique favorable dans tous les cas. Certes la présentation de situations susceptibles de faire apparaître la création et l'usage d'une connaissance comme évidente et naturelle, le rattachement de cette connaissance à d'autres pour mieux la définir ou la comprendre, l’exemple de ses applications multiples, ses traductions dans toutes sortes d'autres langages et toutes sortes d'enrichissements peuvent chaque fois apparaître localement comme un progrès. Mais l'acquisition de connaissances par des processus basés sur leur sens est très souvent très coûteuse en temps, l'accumulation des circonstances particulières encombre l'apprentissage et cache les structures. La nature des mathématiques est d'oublier les circonstances inutiles grâce à la formalisation et à la généralisation à bon escient. La recherche du sens doit être corrigée par une autre, celle de la structure, de la théorie, etc. et elle doit en retour contrôler le formalisme de l'enseignement.

Nous ne citerons ici que pour mémoire l'équilibre entre le langage et le métalangage, le recours au contrôle du sens par des moyens exogènes (mnémotechniques, métaphoriques, etc.) doit être lui aussi mis sous tutelle. Nous avons signalé les mécanismes du glissement métadidactique.

La gestion des motivations, extrinsèque mais surtout intrinsèque des élèves requiert une compréhension profonde du plaisir ou de la peine de l'élève, peut être pas celle, trop intime et personnelle, de chaque élève, mais celles, bien réelles, construites dans une petite collectivité par les actions et les réactions communes.

Citons enfin, parmi d'autres, les équilibres entre les types de justifications évoqués par le professeur lors de la correction des erreurs ou des exercices. Selon qu'il veut ou non prendre en charge la correction d'une erreur dans sa stratégie didactique, il attribuera l'erreur à des caractéristiques de l'élève (inattention, n'a pas compris, ne comprendra jamais), à des caractéristiques de l'erreur (correction techniciste : écart avec la norme, la règle est violée), à des particularités de l'apprentissage (échec de la leçon correspondante), ou à des particularités du savoir qui relèvent d'une intervention spécifique. Il n'est pas recommandé de toujours expliquer aux élèves les "vraies" raisons de leurs difficultés ni les arcanes des analyses psycho-didactiques de leur état. La perméabilité didactique dans ce domaine peut avoir les conséquences les plus négatives.

Chaque débordement pour chaque variable possède finalement un prix didactique.

Enseignement de la dialectique OUTIL-OBJET et des JEUX de CADRES en formation mathématique des professeurs d'école

Régine DOUADY

Extrait de Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques – Colmar 1993.

L'auteure définit et illustre les notions de Dialectique outil- objet *et* Jeux de cadres *qu'elle a introduites dans la didactique des mathématiques, en s'appuyant sur l'enseignement des mathématiques dans le premier degré et la formation des enseignants.*

1. Introduction

Je ne chercherai pas à décrire la Dialectique outil-objet ni les Jeux de Cadres. On pourra se reporter à (Douady R.1984, 1987, 1991). Je me situe dans le contexte de la formation des enseignants, qu'ils soient professeurs d'école ou professeurs de mathématiques. Cependant, j'illustrerai mon propos par des exemples pris à l'école primaire.

Les questions qui m'intéressent sont les suivantes :

- Quels rôles la Dialectique outil-objet et les Jeux de Cadres peuvent-ils jouer dans l'apprentissage des mathématiques et, par contre coup, dans la formation d'un enseignant en charge de cette discipline ?
- S'ils sont retenus comme contenus de formation, quels problèmes d'enseignement posent-ils ?
- Peut-on envisager des stratégies de formation favorisant chez les formés la disponibilité opérationnelle de ces connaissances ?
- Quelles sont les difficultés de mise en œuvre des stratégies retenues ?

Pour chacune des questions précédentes, la réponse dépend-elle des concepts, des niveaux scolaires ?

Bien sûr, il ne s'agit pas de répondre à toutes ces questions, mais seulement de situer la Dialectique outil-objet par rapport à elles.

2. Explication du vocabulaire

L'expression **dialectique outil-objet** comporte trois mots.

- Le mot **objet** fait référence au savoir institué, à un moment donné, à sa représentation formelle, à l'aspect culturel et ce, de différents points de vue. Au niveau de l'ensemble des objets, il y a une idée de cohérence, d'organisation globale du savoir.

*Comme **objet**, un concept est défini sans référence à un contexte particulier, sans référence à un chercheur particulier, conformément aux règles du jeu permises en mathématiques et qui, elles, ont un caractère a-temporel.*

- Le mot **outil** fait référence au fonctionnement des notions mathématiques, explicitement ou implicitement, notions constituées en objets ou seulement en voie de l'être. Que permettent-elles de faire à un chercheur ou à une équipe, dans la *dynamique mathématique ?* J'entends par-là la prise en compte d'un ensemble de questions, de problèmes, de recherche de stratégies de résolution, des stratégies elles-mêmes, d'identification des objets impliqués dans le travail de résolution, de reformulation dans des registres ou dans des cadres différents, de recherche de liens entre des questions apparemment étrangères...

*Comme **outil,** un concept est impliqué dans un contexte problématique par quelqu'un (individu ou groupe), à un moment donné.*
Ceci n'empêche pas qu'un même outil soit adapté à différents contextes, sous l'action de différents chercheurs, à différents moments.
Ainsi les mots outil et objet renvoient à deux significations des notions mathématiques qu'il est important de distinguer de plusieurs points de vue :

- *scientifique,* lorsqu'il s'agit de décrire ou d'organiser un exposé oral ou écrit de mathématique. S'agit-il d'exposer des définitions, des théorèmes avec ou sans démonstration ? S'agit-il d'étudier une question mathématique ? S'agit-il de modéliser une question d'un autre champ ? ...

- *épistémologique,* lorsqu'il s'agit de décrire l'évolution
  - à l'échelle historique : qu'est ce qui a provoqué sa naissance et son développement, dans quelle(s) problématique(s) *et* avec quel statut ?
  - à l'échelle de la psychogenèse.

- *didactique,* lorsqu'il s'agit de décrire et d'expliquer les raisons des choix de l'enseignant. A la suite de ces choix, l'enseignant prend des décisions et met ses élèves dans une certaine situation. II s'agit alors de décrire cette situation, de préciser les attentes de l'enseignant, les moyens d'action et les moyens de contrôle à disposition des élèves pour répondre à la demande. Il s'agit aussi de décrire l'évolution des décisions de l'enseignant eu égard à l'interprétation qu'en font les élèves auxquels il s'adresse et à l'effet qu'elles produisent en termes de connaissances et de sens de ces connaissances pour eux.

- *formation professionnelle,* lorsqu'il s'agit de mettre en regard la réalité telle qu'elle peut être observée et telle qu’elle serait souhaitable.

- Le mot **dialectique** fait référence aux changements de statut des connaissances, à la façon dont ces changements interviennent dans l'organisation du savoir culturellement reconnu et à la façon dont ce savoir joue dans le progrès scientifique.

On sait bien toutefois que ces changements diffèrent selon les concepts, et que l'évolution historique peut être très différente de ce qu'on peut observer ou organiser dans un contexte scolaire.

Si l'on s'intéresse à l'histoire des mathématiques, on se rendra compte que les événements se déroulent de façon ambiguë et plus complexe qu'il n'y paraît, que plusieurs sens coexistent pour des mathématiciens contemporains, voire chez un même mathématicien selon l'environnement des questions qu'il traite. Dans l'enseignement, on peut focaliser son attention sur l'aspect fonctionnel, sur l'aspect descriptif, sur l'aspect explicatif, faire interagir ces différentes préoccupations. J'admets que *tout objet institué est un outil potentiel.* Ainsi peut s'installer, de façon générale mais non exclusive, une *dialectique* entre les statuts outil et objet d'un concept.

Soulignons un problème d’enseignement : qui prend en charge les transformations de statut des connaissances et comment ? Qui en a le contrôle ? Les *changements de cadres* (sur l’initiative de l'acteur de la situation et sous son contrôle : élève, groupe d'élèves ou enseignant) et jeux de cadres (changements organisés par l'enseignant) interviennent de façon essentielle dans ces transformations.

3. Sens et capitalisation du savoir

Deux facteurs contribuent au sens d'un concept :

- l'ensemble des questions où il est engagé,
- l'ensemble des relations avec les autres concepts engagés dans ces mêmes questions.

Autrement dit, le *sens* a plutôt à voir avec le *statut outil*, la *capitalisation du savoir* plutôt avec le *statut objet*. Toutefois, les relations entre concepts sont au cœur de la structuration du savoir et de ce fait, le *sens a aussi à voir* avec le statut *objet.* Plus, il a à voir *avec les transformations de statut.*

Par ailleurs, il arrive aussi qu'au cours de sa scolarité, un élève ait à *capitaliser des méthodes ou des pratiques qui sont des outils et non encore objets.* C’est le cas des représentations graphiques de certaines fonctions qui restent attachées à des contextes qui leur donnent une certaine signification, même si, par ailleurs, elles sont dépersonnalisées.

Comment, dans la relation didactique, se construit le sens des connaissances mathématiques ? Comment se capitalise le savoir ? Comment s'articulent la construction du sens et la capitalisation du savoir ? Comment s'organise la cohérence ou la compatibilité entre différents points de vue sur un même objet mathématique ?

Telle quelle, cette question est trop large. Pour pouvoir l'aborder, on a besoin de préciser les caractères de la relation didactique et les contenus mathématiques en jeu. La Dialectique outil- objet offre alors des éléments de réponse.

La Dialectique outil-objet a une double signification épistémologique et didactique.

- Dans sa signification **épistémologique ;** elle constitue *un modèle,* partiellement seulement certes, d*escriptif et explicatif* de la relation enseignement/apprentissage d'une certaine notion ou d'un réseau de notions. Elle consiste à décrire et expliquer la production et l'évolution de certaines connaissances en termes de relations entre les questions posées et le savoir existant à un moment donné, en termes de changement de statut des notions en jeu. Les changements de statut résultent de l'étude d'une filiation de problèmes, de relais de questions dans des cadres différents.

La Dialectique outil-objet permet, dans certains cas, de questionner les contenus et modalités d'un enseignement existant et de les mettre en rapport avec leurs effets du côté des élèves. Elle permet de tester l'étendue et les limites de la diffusion des connaissances produites par les uns et les caractéristiques de la reprise par d'autres. Notons que les impasses où les uns se sont fourvoyés sont autant de repères pour les autres qui continuent à travailler.
Les *changements de cadre* constituent un élément descriptif du modèle, leur existence ou leur absence dans la réalisation analysée a une dimension explicative.

- Dans sa signification **didactique**, la Dialectique outil- objet prend appui sur deux points : sa signification épistémologique et l'hypothèse suivante :

Pour les élèves en situation scolaire, prise de sens et capitalisation du savoir se développent en dialectique.

Ainsi, pour *certains* concepts ou méthodes, objets d'enseignement, mais *non pour tous*, la Dialectique outil-objet schématise une organisation possible de la relation enseignement-apprentissage centrée sur la recherche d'un problème répondant à certaines conditions.

Il s'agit pour l'enseignant :

* de bâtir un scénario et une mise en scène de ce qu'il veut enseigner incluant une situation a-didactique au sens de G. Brousseau,

* de gérer les rapports entre ce qu'il propose et ce que les élèves font, d'étudier les initiatives qu'ils prennent, les contrôles qu'ils exercent, les justifications qu'ils donnent,

* d'organiser la diffusion de résultats encore contextualisés et d'aider à leur dépersonnalisation,

* d'aider, le cas échéant, à une certaine décontextualisation,

* d'évaluer les connaissances des élèves,

(cette évaluation peut prendre des formes très différentes selon que les notions en jeu sont considérées comme des outils ou comme des objets ; en particulier, l'étude d'un problème maillon d'un nouveau processus impliquant comme outil adapté ce qui vient de faire l'objet d'un cycle de la Dialectique outil-objet peut être une forme d'évaluation des connaissances dans leur statut d'outil : en effet, c'est une occasion pour l'enseignant de prendre de l'information sur la *disponibilité chez tel élève* de telle ou telle connaissance -en situation, à son initiative et sous son contrôle-),

* d'entretenir la disponibilité des connaissances.

Il s'agit pour chaque élève :

* d'entrer dans la situation a-didactique : chercher le problème proposé,

* d'intégrer son propre travail dans l'expression du travail de l'ensemble de la classe et de le situer par rapport au travail des autres élèves, par rapport aux initiatives ultérieures du maître sur le sujet, en somme, d'adopter une double attitude : travailler et réfléchir sur son travail.

Le *Jeu de cible* (R. Douady 1984) est un exemple d'ingénierie où l'enjeu est l'extension du champ numérique au CP pour des nombres allant de la dizaine à la centaine. Le processus qui s'appuie sur cette ingénierie porte sur quelques semaines.
Un autre exemple d'ingénierie a pour enjeu le *passage des nombres entiers aux nombres décimaux* en transitant par certaines fractions, ingénierie qui met en oeuvre plusieurs problèmes impliquant plusieurs cadres. et dont la durée du déroulement se compte plutôt en années (R. Douady et M.J. Perrin 1986).

Les Jeux de Cadre sont des outils pour mettre en oeuvre la Dialectique outil-objet dans sa phase a-didactique *:* spécialement pour suggérer des conjectures ou des questions jalons, des pas intermédiaires dans la recherche d'un problème, et ainsi permettre de créer *du nouveau à* partir *d'ancien.* L'intérêt et la force des Jeux de Cadre résident dans la possibilité, pour le maître de mettre à disposition des élèves au moins un cadre où ce qu'ils cherchent prend une forme chargée de sens pour eux. L'intérêt des Jeux de Cadre c'est aussi, du côté des élèves, de rendre pertinents et disponibles des outils, des méthodes, des techniques… non envisageables dans une première approche du problème qu'ils ont à résoudre. C'est particulièrement le cas du cadre algébrique qui sert à modéliser de nombreux problèmes externes aux mathématiques ou internes, mais relevant d'une autre branche.

Mais il est aussi possible et fructueux de mettre en œuvre **des Jeux de Cadre hors Dialectique outil-objet.** Cela veut dire que pour faire fonctionner des jeux de cadres, il n'est pas nécessaire d'avoir à chercher un problème dont l'outil adapté pour le résoudre est justement l'enjeu de l'enseignement. C'est ce qui se passe à certains moments de l'ingénierie sur les aires de surfaces planes (R. Douady et M.J. Perrin 1984).

Le maître, en faisant pression pour que les élèves changent de contexte, changent de registre, modifient le réseau des concepts et des écritures symboliques en relation pertinente pour les questions étudiées, crée une situation favorable à l'évolution de leurs conceptions et à l'élaboration de nouvelles connaissances disponibles sous leur contrôle.

4. La Dialectique outil-objet : un contenu de formation

La Dialectique outil-objet peut jouer plusieurs rôles.

1) Outil pour le formateur

Elle peut être un instrument didactique à disposition du formateur pour organiser son enseignement de mathématiques.
En particulier, elle offre la possibilité soit d'apprendre des sujets nouveaux, soit de revenir, sans lassitude. voire avec un certain suspens sur des questions mathématiques déjà traitées. Ceci est intéressant pour les futurs professeurs d'école en général fâchés avec les mathématiques, pour créer une certaine curiosité et les inciter à renouer avec des connaissances supposées disponibles, mais de fait non disponibles et pourtant nécessaires à l'exercice de leur futur métier. Bref, pour créer chez eux un rapport aux mathématiques convivial et non plus conflictuel, même s'il exige de l'effort, de la rigueur et de la vigilance.
La Dialectique outil-objet est alors un *outil pour le formateur.* Elle reste implicite pour les futurs enseignants. Il en est de même des changements de cadres.

2) Outil pour le futur enseignant

Elle peut être un instrument didactique à disposition du formateur pour confronter les futurs enseignants à des concepts de didactique *dans leur fonctionnement.* Ceci peut se produire :

- si les élèves-enseignants doivent élaborer des scénarios pour enseigner une certaine notion ou pour coordonner des notions déjà présentées indépendamment les unes des autres ;

- s'ils ont à analyser des processus d'enseignement décrits par leur chronique. Celle-ci peut leur être fournie par le formateur sous forme d'un texte ou d'une cassette vidéo. Elle peut être le résultat d'un vécu personnel de l'élève-enseignant dans l'une des positions suivantes : étudiant en train de faire des mathématiques sous la conduite d'un formateur, observateur direct en classe d'une leçon (ou une série de leçons) assurée par quelqu'un d'autre, enseignant acteur d'un scénario d'une ou plusieurs leçons.

La Dialectique outil-objet est alors un *outil pour le futur enseignant.* Elle donne lieu, dans le premier cas à une institutionnalisation des mathématiques en jeu, et dans tous les cas à une explicitation, non nécessairement décontextualisée, des outils didactiques mobilisés par le formateur ou les formés.

3) Objet mobilisable par le futur enseignant

Elle peut être un objet d'enseignement aussi décontextualisé et dépersonnalisé que possible, u*n objet mobilisable par le futur enseignant.*
Ces différents rôles qui mettent en jeu, à la fois, les pratiques et les représentations métacognitives des enseignants, vont appeler des stratégies d'enseignement différentes dont on peut attendre qu'elles se fécondent mutuellement.

Les jeux de cadres, au sein d'un processus de type Dialectique outil-objet ou indépendamment d'un tel processus, sont aussi des outils à disposition du futur enseignant. On peut les lui présenter, soit implicitement pour résoudre une question didactique, soit explicitement en décrivant en quoi ils consistent, en donnant des exemples, en expliquant comment l'enseignant entend les provoquer chez les élèves et en exploiter les effets.

5. Stabilité ou dérapage dans une ingénierie

Pour remplir leur fonction, les enseignants ont besoin de disposer d'ingénieries qui leur permettent de prévoir sans trop de risque ce qui peut se passer au cours de la réalisation dans la classe. A défaut, ils doivent pouvoir disposer de repères et de moyens d'analyse qui leur permettent de prendre des décisions rapides dans l'action.
J'entends ici par ingénierie un ensemble de leçons organisées pour réaliser un projet d'enseignement et obtenir des élèves un certain apprentissage.
Ceci amène à distinguer les ingénieries selon qu'elles sont construites à des fins de recherche ou à des fins d'enseignement. Les premières ont pour objectif de répondre à des questions que se pose le chercheur. Elles peuvent être très difficiles à conduire, demander une grande expérience professionnelle d'enseignant pour ne pas s'écarter des conditions imposées à la situation. Ce n'est pas un inconvénient. Si tel est le cas, la classe pourra être celle d'un enseignant expert. C'est le cas par exemple pour certaines leçons de l'ingénierie sur les nombres décimaux mise au point par G. et N. Brousseau, que celle-ci et d'autres collègues expérimentés ont conduit dans leur classe : certains problèmes répondent bien aux conditions de la Dialectique outil-objet et nécessitent des jeux de cadres pour être traités. En revanche, la reproductibilité par des enseignants non avertis peut poser problème. D'autres ingénieries sont au contraire très stables. Cela veut dire que la mise en scène à partir de documents écrits donne lieu à une bonne régula-

rité dans les réalisations. Mieux, l'analyse didactique proposée offre la possibilité de faire d'autres choix pour les variables de situation et d'obtenir des réalisations cohérentes avec les prévisions. C'est le cas de la situation proposée par G. Brousseau et bien connue maintenant "l'agrandissement d'un puzzle".
Dans les risques de dérapage, un élément intervient de façon essentielle c'est la *référence à l'expérience matérielle ou physique.*
Va-t-on prendre en compte, dans l'étude proposée aux élèves, les erreurs expérimentales et le domaine de validité du modèle qu'on cherche à construire ?
Si l'erreur de mesure due à la manipulation ou aux limites de l'instrument est du même ordre que l'objet à étudier, si le domaine de validité est plus petit que le champ des expériences réalisable, il y a tout lieu de penser que l'enseignant travaillera dans le modèle pendant que les élèves travailleront eux dans la réalisation - à moins que sous l'effet du contrat, les élèves travaillent aussi dans le modèle. Enseignant et élèves ont toutes les chances de se situer dans des cadres différents malgré un langage commun. On peut alors prévoir un décalage croissant entre les attentes respectives de l'enseignant et des élèves et ce qui se passe effectivement. On peut prévoir une adaptation de l'enseignant sous forme de maïeutique, effet Jourdain, voire Topaze pour éviter un blocage de la relation didactique : il s'agit alors de sauver la reproduction externe à défaut du sens didactique de la situation.

Ce peut être le cas de la représentation des fractions comme épaisseur d'une feuille de papier : si une pile de *n feuilles* mesure 3 cm, *p piles* de *n feuilles* superposées ne mesurent pas forcément 3 *p* cm mais sans doute moins selon la valeur de *p*. De même, si on représente l'addition de deux fractions comme l'épaisseur d'une feuille obtenue en réunissant deux feuilles distinctes, il faudra s'inquiéter de la façon dont est réalisée cette réunion : s'il s'agit de colle, l'épaisseur de la colle risque d'être plus grande que l'épaisseur de chacune des feuilles. En revanche, dans l'agrandissement de puzzle, les erreurs de modèle peuvent être bien distinctes des erreurs de manipulation. Cela dépend de la forme des pièces et de leur combinatoire.

L'analyse en termes de *cadres et changement de cadres* peut être bien utile pour pointer les difficultés et les expliquer au moins partiellement.

6. Des difficultés de réalisation de la Dialectique outil-objet

Le processus s'appuie sur la donnée d'un problème mettant en jeu de façon essentielle ce que l'enseignant souhaite que les élèves apprennent.

1) En amont de la classe

- adapter des énoncés existants à une situation particulière,
- trouver de *bons* problèmes.

Cela demande que l'enseignant ait des repères pour savoir s'il peut travailler par Dialectique outil- objet ou non. Par exemple, les concepts généralisateurs, unificateurs se prêtent mal à un travail par Dialectique outil-objet comme le montrent A. Robert et J. Robinet.

2) En classe, pour enclencher la Dialectique outil- objet

Les mathématiques sont-elles un enjeu pour les élèves ?
Si oui, comment assurer la *dévolution* du problème aux élèves ?
Sinon. comment déplacer l'enjeu vers le problème ? (cf. l'exemple du calcul mental, cahier DIDIREM 19.1 ou Repères-IREM n° 15).

3) En classe, pour avancer

Que peut faire l'enseignant si un élève sèche et ne sait pas exploiter les changements de cadres prévus pour lui permettre d'avancer ?

4) En classe, pour choisir ce qui est à institutionnaliser et le moment pour le faire, par delà les diversités cognitives et les différences de familiarité des élèves.

Ces difficultés provoquent des problèmes à l'enseignement de la Dialectique outil-objet et des Jeux de Cadre dans la mesure où en principe, il n'y a pas de réponse générale mais des réponses adaptées aux différents élèves et aussi aux contenus mathématiques.

7. Propositions d'enseignement de stratégies

Le formateur a besoin de prendre en compte la réalité de l'enseignement. *telle qu'elle est*, aussi bien que telle qu'il voudrait qu'elle soit. Il a besoin de s'appuyer sur des pratiques vécues et sur les représentations métacognitives des stagiaires et de leur milieu d'accueil. Les stratégies de formation doivent permettre d'intégrer dans l'habitus des pratiques différentes (P. Perrenoud 1994).
La situation de formation fait intervenir les mathématiques de plusieurs points de vue :

- *comme champ scientifique à mieux connaître.*

Cela amène à faire des mathématiques comme un étudiant peut le faire : résoudre des problèmes, vérifier les hypothèses de validité d'un théorème, retrouver la démonstration, chercher des contre exemples à un énoncé...

- *comme domaine à enseigner et en particulier à mettre en scène.*

Cela demande un travail de découpage du corpus à enseigner respectant bon nombre d'exigences : cohérence mathématique compatible avec un découpage dans le temps, avec une certaine recevabilité du côté des élèves, une possibilité d'évaluation...
Cela demande d'opérer une décentration par rapport aux objectifs mathématiques auxquels l'étudiant était habitué.
Ce n'est plus lui qui est au centre de la scène mais les élèves, ce n'est plus sa réussite qui sert à l'évaluation de ce qu'il fait, mais celle des élèves (A. Robert, 1994 journée de formation).

Cela conduit à proposer de combiner plusieurs stratégies de formation. Citons à titre d'exemples celles qu' A. Kuzniak a dégagées dans sa thèse (1994) : monstration, homologie, transposition.

1) Homologie en position d'étudiant

Le formateur essaie de faire vivre aux stagiaires le type de situation qu'il voudrait que le futur enseignant mette ensuite en place dans sa classe.
Par exemple, il propose aux stagiaires un problème de mathématique. Il l'a choisi et a organisé l'énoncé en fonction de critères didactiques. Il a prévu ce qu'il voudrait institutionnaliser et qu'il voudrait voir réinvesti.

Se pose alors immédiatement la question du choix du contenu mathématique : en relation directe avec les programmes à enseigner ou bien mettant en jeu des notions nouvelles, mais susceptibles d'être abordées à partir de leurs connaissances, dans un temps compatible avec le temps imparti à la formation.

Citons un thème de chaque catégorie

- *Découper dans une feuille de papier un disque et un rectangle de façon à fabriquer un cylindre, fermé à un bout, de volume maximum.*
- *Comment rendre compte de l'irrégularité d'une côte très découpée ?*

Les notions de variable didactique, de saut informationnel, d'outil et d'objet, de registre (système sémiotique de représentation), de cadres sont des références essentielles pour la mise en forme des énoncés à proposer et la gestion de la situation dans sa dynamique

Puis il fait une *double institutionnalisation* mathématique <u>et</u> didactique. Autrement dit, un cycle Dialectique outil-objet du point de vue mathématique, puis une explicitation des raisons qui ont amené au choix d'un énoncé particulier, et aussi dans la mesure du possible des décisions prises au cours du travail.

2) Monstration

Observation en classe d'une réalisation satisfaisant aux hypothèses de la Dialectique outil-objet et d'une classe mettant en oeuvre des hypothèses différentes.
Prises de notes et analyse avec le formateur à partir des notes prises. Confrontation des points de vue de différents observateurs d'une même leçon, le cas échéant.
Explicitation éventuelle des notions didactiques ayant servi à l'analyse.

3) Homologie en position d'enseignant

Comment enseigner telle notion mathématique, à tel niveau ?
Il s'agit de bâtir des scénarios et envisager la mise en scène, d'adapter des ingénieries existantes pour satisfaire certaines contraintes.
Il revient au formateur de choisir un contenu qui se prête bien à une ingénierie de type Dialectique outil-objet et un contenu qui s'y prête mal.

4) Transposition

Il s'agit d'aider l'enseignant à adopter une altitude réflexive par rapport à sa propre pratique.
Compte tenu d'une réalisation précise, les choix didactiques étaient-ils bien compatibles avec les intentions ? La situation a-t-elle évolué comme il était attendu ? Sinon qu'est ce qui a provoqué les distorsions ? Quelles décisions ont été prises dans l'action ? De quoi relevaient-elles (représentations métacognitives, contrat, savoir...) ? L'analyse faite remet-elle en cause les prévisions pour la suite ? Si oui, sur quoi faire porter les changements ?

En combinant des stratégies différentes, on pense agir sur les connaissances mathématiques, sur le sens de ces connaissances pour le futur enseignant, sur ses représentations du savoir, sur la manière d'apprendre en relation avec le public élève qui lui est confié.
La Dialectique outil-objet et les jeux de cadres sont des éléments qui contribuent à ce programme de formation.

Bibliographie

ARTIGUE M. (1989) Ingénierie didactique, *Recherches en Didactique des mathématiques* n° 9.3. 281-308. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BAUTIER E. et ROBERT A. (1988) Réflexions sur le rôle des représentations métacognitives dans l'apprentissage des mathématiques. *Revue Française de Pédagogie*. N° 84. 13-19. INRP, Paris.

BROUSSEAU G. (1987) Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches en Didactique des mathématiques* n° 7.2. 33- 15. La Pensée Sauvage, Grenoble.

BROUSSEAU G. (1990), Le contrat didactique : le milieu, *Recherches en Didactique des mathématiques,* n° 9.3. 309-336. La Pensée Sauvage, Grenoble.

CHARLOT B. et BAUTIER E.(1993) *Rapport à l'école, rapport au savoir et enseignement des mathématiques.* Repères IREM n°10. Topiques Editions, Pont à Mousson.

COPIRELEM (1991) *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques*, Tome 1. Actes du stage national de Cahors, mars 1991. IREM de Paris 7, Université Denis Diderot.

COPIRELEM (1993) *Documents pour la formation des professeurs d'école en didactique des mathématiques,* Tome 2. Actes du stage national de Pau, mars 1992. IREM de Bordeaux. Université de Bordeaux I.

DOUADY R. (1984) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, Cahier de Didactique n°3. IREM PARIS 7

DOUADY R. (1984) Jeux de cadres et dialectique outil-objet, *Recherches en Didactique des mathématiques* n° 7.2. 5-32. La Pensée Sauvage, Grenoble.

DOUADY R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM,* n°6. Topiques Editions, Pont à Mousson.

DOUADY R. (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM* n°15. Topiques Editions, Pont à Mousson.

DOUADY R. et PERRIN-GLORIAN M.J (1989)
Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics,* n°20. 387-424

KUZNIAK A. (1994) *Étude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*. Thèse de doctorat, Université Paris 7

PERRENOUD P. (1994) *La formation des enseignants entre théorie et pratique.* L'Harmattan.

PERRIN-GLORIAN M.J.(1993) Questions didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des classes « faibles ». *Recherches en Didactique des mathématiques,*, n°13.1. La Pensée Sauvage, Grenoble

ROBERT A. et ROBINET J. (1989), Représentations des enseignants de mathématiques sur les mathématiques et leur enseignement. *Cahier de DIDIREM, n°* 1, IREM, PARIS 7.

Glossaire de didactique

COPIRELEM à partir d'un document de M.H. Salin et J. Briand

Cet article se propose de préciser des notions de didactique des mathématiques.

Bien entendu, un recueil de définitions ne saurait se substituer à la pratique de la discipline (en l'occurrence, ici, la didactique des mathématiques). Il ne s'agit nullement de réduire la didactique à une mise au point terminologique.

Mais un autre phénomène se produit parfois dans les lieux de formation : c'est celui ***de l'utilisation*** *de mots de didactique des mathématiques* ***sans maîtrise*** *des concepts auxquels ces mots font référence. Par exemple, il n'est pas rare de voir utilisée la notion de "contrat didactique" pour évoquer le rapport maître-élève au sens affectif du terme ; de même, la "transposition didactique" serait, pour certains, la nouvelle façon de parler de la préparation des cours.*

Le glossaire qui suit n'a rien de figé. Malgré ses imperfections et ses lacunes, il essaie de faire le point sur des termes souvent utilisés ; leur sens s'affinera sans doute au fur et à mesure du développement des recherches. Nous espérons qu'il permettra à tous ceux qui ***travaillent en didactique des mathématiques*** *d'avoir des références communes pour un certain nombre de concepts.*

Didactique des mathématiques

"La didactique des mathématiques étudie les processus de transmission et d'acquisition de cette science, particulièrement en situation scolaire. Elle se propose de décrire et d'expliquer les phénomènes relatifs aux rapports entre son enseignement et son apprentissage. A terme, elle se propose d'améliorer les méthodes et les contenus de l'enseignement, assurant chez l'élève la construction d'un savoir vivant (susceptible d'évolution) et fonctionnel (qui permette de résoudre des problèmes et de poser de vraies questions)." (Douady *Encyclopedia Universalis* 1984)

Pour résumer, on peut dire que :

- la didactique des mathématiques fournit des outils professionnels à l'enseignant, tout en préservant sa liberté pédagogique ;
- elle permet d'identifier des faits, d'analyser des phénomènes d'enseignement ;
- elle permet d'analyser des productions d'élèves, d'interpréter des erreurs ;
- elle vise la construction de situations d'apprentissage et donne à l'enseignant des outils pour les réaliser.

Situation

Le terme " situation " désigne l'ensemble des circonstances dans lesquelles se trouve le sujet (élève, professeur..), les relations qui l'unissent à un milieu, l'ensemble des données qui caractérisent une action ou une évolution (d'après

Brousseau, *Théorie des Situations Didactiques* Editions La Pensée Sauvage 1999 p 279).

Le milieu est constitué des objets (physiques, culturels, sociaux, humains) avec lesquels le sujet interagit dans une situation.

Situation didactique (relativement à un savoir)

“ Une situation didactique est une situation où se manifeste directement ou indirectement une volonté d’enseigner, un enseignant ” Brousseau, *Théorie des Situations Didactiques* p 281
Une situation didactique est l’ensemble des relations pertinentes (explicites et/ou implicites) d’un sujet (ou de plusieurs sujets) apprenant avec un sujet enseignant et avec un milieu mobilisé par ce dernier pour faire approprier un **savoir** déterminé.

Situation non didactique (relativement à un savoir)

Une **situation non didactique** (relativement à un savoir) est une situation construite de façon à ce que le résultat souhaité ne puisse être obtenu que par la mise en œuvre des connaissances visées, mais dont le milieu ne comporte aucun agent intervenant au cours du déroulement pour faire acquérir au sujet une connaissance déterminée : il n’y a pas d’intention d’apprentissage dans la situation.

Situation a-didactique (relativement à un savoir)

Une **situation a-didactique** est une situation construite de façon à ce que le résultat souhaité ne puisse être obtenu que par la mise en œuvre des connaissances visées mais que l’élève ne puisse pas lire (ou ait renoncé à lire), pendant un temps suffisant, les intentions du professeur concernant ces connaissances, pour prendre ses décisions.
Les bonnes décisions des élèves, celles qui correspondent au savoir associé, constituent des stratégies rationnelles d’action sur un milieu, que le professeur n’a pas besoin de valider, puisque le milieu s’en charge.
Les propriétés didactiques d’une situation a-didactique varient beaucoup selon que :
- la dévolution est réussie ou non,
- les connaissances dont disposent les élèves sont adaptées ou non (capacité à entrevoir une stratégie de base, capacité à la mettre en question, fonctionnalité de connaissances permettant de valider intellectuellement certaines décisions, méconnaissance préalable des stratégies gagnantes),
- la situation est une situation d’action, de formulation ou de validation.

Situation fondamentale (correspondant à un savoir)

Une situation fondamentale d’un savoir visé est une situation à variables didactiques qui engendre, par manipulation de ces variables, un ensemble minimal de situations a-didactiques suffisamment étendu pour couvrir toutes les formes du savoir visé.

Une situation fondamentale est une situation d'apprentissage lorsqu'elle permet l'acquisition de **savoirs** ou de **connaissances** nouvelles par un sujet.

Pour l'étude, on peut se poser les questions suivantes :

- Quel est le ou les savoirs visés ?
- Y-a-t-il bien un problème posé aux élèves qui n'affiche pas directement les savoirs à mobiliser ? *(contrôle de l'a-didacticité).*
- L'élève peut-il comprendre la consigne et s'engager vers une solution sans disposer de cette connaissance entièrement élaborée ? *(Il s'agit ici de mieux contrôler le premier critère au moment de la consigne).*
- L'utilisation de la connaissance visée est-elle nécessaire pour parvenir à la solution du problème posé aux élèves ? *(si oui, on a affaire à une situation de consolidation, de contrôle (qui serait qualifiée d'ouverte si le premier critère est rempli) et non d'apprentissage par adaptation*).
- Quelles sont les procédures possibles pour résoudre le problème ? *(il peut y avoir plusieurs stratégies de base qui engagent elles-mêmes des procédures variées).*
- Comment l'élève voit-il qu'il a réussi ou échoué ? Est-il entièrement dépendant de l'adulte ou la situation comporte-t-elle des rétroactions ? *(Critère qui permet de s'assurer comment le milieu permet à l'élève de progresser).*
- La vérification du résultat peut-elle lui donner des informations sur la façon de réussir ? *(critère qui permet l'adaptation effective)*
- La vérification du résultat est-elle confondue avec l'activité ? *(à lier au premier critère ; permet en particulier, dans les situations faisant intervenir un milieu matériel, d'analyser le rôle de ce matériel : manipulation ou moyen de vérifier une hypothèse faite).*
- Peut-il recommencer en modifiant sa procédure ?

Dévolution d'une situation :

Comment faire pour que le problème qu'a inventé l'enseignant devienne le problème que va chercher à résoudre l'élève ? Pour reprendre un vieux terme de droit adapté à la question de la transmission des savoirs : comme faire la dévolution d'une situation à un élève.(*Dévolu* : terme de jurisprudence. Qui est transporté, transféré, échu, acquis par droit. *Dévolution* : Attribution des biens à une ligne successorale par suite de l'extinction ou de la renonciation de l'autre. (LITTRE).)

On appelle dévolution d'une situation a-didactique l'ensemble des conditions qui permettent à l'élève de s'approprier la situation : enjeu intellectuel et contexte favorable.

"La dévolution consiste, non seulement à présenter à l'élève le jeu auquel le maître veut qu'il s'adonne, mais aussi à faire en sorte que l'élève se sente responsable, (au sens de la connaissance et non pas de la culpabilité), du résultat qu'il doit chercher." Brousseau, *Actes de l'université d'été* d'Olivet 1988)

Dialectique de l'action

Elle consiste à placer l'élève devant un problème présentant plusieurs caractéristiques :
- la solution est la connaissance visée ;
- l'élève doit posséder un ou des modèles, plus ou moins perfectionnés, lui permettant de prendre des décisions ;
- la situation doit renvoyer à l'élève des informations sur son action lui permettant de juger du résultat, d'ajuster cette dernière, sans l'intervention du maître.

Dialectique de la formulation

La validation empirique obtenue lors de la dialectique de l'action est insuffisante pour une réelle activité mathématique. Dans cette nouvelle phase, l'enseignant doit construire une situation dont l'objectif est de démontrer pourquoi le modèle créé est valable ou non.

Dialectique de la validation

Pour que le sujet puisse expliciter lui-même son modèle implicite, et pour que cette formulation ait du sens pour lui, il faut qu'il rencontre un nouveau problème dans lequel la connaissance va obligatoirement intervenir sous forme d'un langage (écrit ou oral).
Il est rare que ces trois dialectiques se retrouvent au cours d'une même séance de classe.

Connaissances

Nous appelons connaissance engagée dans une situation ce qui permet à un sujet qui doit, dans cette situation, envisager une série de **choix possibles,** de prendre une décision, de manière reproductible (i.e. la même décision pour une situation analysée comme de même type).
Une connaissance est donc attestée par des actions réalisées par le sujet, accompagnées ou non de formulations langagières (orale, graphique ou écrite), explicitant les choix envisagés et la décision (qui sera) prise, ou de débat sur le système de détermination des choix et de décision. Des décisions issues de connaissances manifestent une certaine régularité.
Certaines décisions régulières ne correspondent pas à des choix, mais à l'absence de considération par le sujet de choix à réaliser : il n'envisage qu'une décision possible.
Dans les cas intéressants, les décisions seront le fruit de la prise en compte de plusieurs possibilités, et de l'élimination de toutes sauf une parmi elles.
Dans les cas de non-régularité, nous dirons que les décisions sont (encore) le fruit d'une opportunité ou d'un hasard.
Certaines connaissances sont des savoirs ou des savoir-faire appliqués, c'est à dire convertis en moyens de décision ou d'action, mais d'autres sont des régularités, des schèmes ou des modèles qui peuvent échapper à l'analyse ou même à la conscience de ceux qui les utilisent : ce ne sont donc ni des savoirs, ni des savoir-faire (certains les nomment savoirs d'expérience).

Dans certaines situations, l'élève a besoin de connaissances que l'école n'enseigne pas, mais qu'il doit pourtant mettre en œuvre pour apprendre le savoir ou pour utiliser ce qu'il a appris.

“ Lorsque le sujet reconnaît le rôle actif d'une connaissance sur la situation, pour lui, le lien inducteur de la situation sur cette connaissance devient inversible : il sait. Une connaissance ainsi identifiée est un savoir, c'est une connaissance utile, utilisable, dans ce sens qu'elle permet au sujet d'agir sur la représentation ”. F.Conne “ Savoir et connaissance ” (*Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 12/3 p 222-267).

Savoir

Un savoir est un ensemble de connaissances reconnues **culturellement dans une institution.** C'est le savoir qui permet le repérage des connaissances des sujets utiles à la vie de l'institution. Un savoir se formule, dans une langue et dans une culture. Les savoirs mathématiques de référence sont ceux produits et consignés par les mathématiciens dans les ouvrages et articles de mathématiques.

Connaissances et savoirs

Le savoir n'est pas la connaissance et la connaissance n'est pas le savoir.
Les connaissances, instruments personnalisés d'action sur le monde, ne sont pas naturellement transformées en savoirs. Un enfant qui a réussi quelque chose ne reconnaît pas encore la valeur culturelle de ce qu'il a fait. Les mathématiciens n'ont pas toujours (ou pas encore à une date t) institutionnalisé en savoirs toutes les connaissances communes nécessaires à leur pratique (cf. énumération, fractales…).
Le savoir est un objet culturel ; sa création et la manière de l'acquérir sont sociales, à l'intérieur d'une institution, en utilisant une langue et une culture dans lesquelles elles sont explicitées, établies, reconnues.
Les savoirs ne sont pas naturellement transformés en connaissances par un sujet dans une situation ; il faut que celui-ci soit capable d'établir un rapport de sujet connaissant à la situation ; il faut aussi que la culture du savoir que le sujet maîtrise puisse lui donner des outils pour identifier des objets de la situation par des objets du savoir et réaliser sur ces objets les traitements selon les algorithmes, énoncés, jugements dont il a la maîtrise dans le domaine du savoir.
A un savoir bien identifié, dans une institution donnée, il correspond un ensemble de situations qui sont spécifiques de ce savoir. Ce savoir permet de reconnaître et de décrire les connaissances utiles à un sujet pour prendre les décisions adéquates à la réalisation de son projet.

Statut (ou fonctionnement) des connaissances : outil et objet. Dialectique outil-objet

Etude de Douady (*Recherches en Didactique des Mathématiques* 1986 vol 7. p5-31) sur le fonctionnement des connaissances scientifiques :

- comme **outils** (implicites ou explicites), elles peuvent fonctionner dans les problèmes qu'elles permettent de résoudre ;

- elles sont **objets** en tant qu' " objets culturels ayant leur place dans l'édifice des mathématiques à un moment donné, reconnu socialement ".

Dans la genèse des mathématiques, un concept est souvent outil implicite, avant de devenir objet du savoir constitué, puis outil explicite au service d'autres problèmes : d'où la notion de **dialectique outil-objet.**

Cadres, jeux de cadres, changements de cadres

" Un **cadre** est constitué des objets d'une branche des mathématiques, des relations entre ces objets, de leurs formulations éventuellement diverses et des images mentales que le sujet associe à un moment donné à ces objets et à ses relations " (Douady, thèse 1984)

Un concept mathématique peut être mobilisé dans plusieurs cadres (physique, numérique, géométrique graphique, informatique) entre lesquels s'établissent des relations contribuant à la connaissance de ce concept.

" Un *changement de cadres* est une mise en relation intéressée et intéressante de deux traductions d'un même problème (à résoudre) dans deux (ou plus) domaines de travail (*les cadres*)" (Robert 2001)

Un **jeu de cadres** est la prévision construite par le professeur de l'utilisation par les élèves d'un changement de cadres alors qu'un seul cadre est explicite.

Contrat pédagogique

Les règles de vie relèvent de ce type de contrat (respect des autres, rangement du matériel, répartition de tâches, etc.). C'est aussi le cas de l'organisation du travail : (fréquence des devoirs personnels, présentation des cahiers, etc.). La nature de ce contrat n'est pas liée à une discipline.

Il est la plupart du temps connu et maîtrisé par les enseignants, pas toujours par les élèves. Ceux-ci doivent s'adapter à des fonctionnements différents d'un enseignant à l'autre.

Contrat didactique

Le contrat didactique dépend étroitement des connaissances en jeu : il est le résultat de la négociation des rapports établis explicitement et/ou implicitement entre un élève ou un groupe d'élèves, un certain milieu et un système éducatif, aux fins de faire approprier aux élèves un savoir constitué ou en voie de constitution.

Non seulement, il apparaît nécessaire de maintenir implicites certains aspects du contrat, mais aussi de provoquer des ruptures. Dans une perspective constructiviste, le traitement du savoir en situation de classe, va plutôt reposer sur les ruptures prévues du contrat. Ces ruptures apparaissent nécessaires à l'apprentissage alors que dans une perspective behavioriste, le principal rôle dans la gestion des savoirs est toujours tenu par le maître.

(Voir l'article de Brousseau dans la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 9/3 pages 309-336, 1988)

" Le contrat didactique est en fait souvent intenable. Il met le professeur devant une vraie injonction paradoxale : tout ce qu'il fait pour faire produire, par les élèves les comportements qu'il attend, tend à priver ce dernier des conditions

nécessaires à la compréhension et à l'apprentissage de la notion visée : si le maître dit ce qu'il veut, il ne peut plus l'obtenir.
Mais l'élève est aussi devant une injonction paradoxale s'il accepte que selon le contrat, le maître lui enseigne les résultats, il ne les établit pas lui-même et donc, il n'apprend pas les mathématiques, il ne se les approprie pas. Apprendre pour lui signifie refuser le contrat mais aussi accepter la prise en charge. Donc l'apprentissage va reposer non sur le bon fonctionnement du contrat mais sur ses ruptures " Brousseau 1984

Variable cognitive

Une variable cognitive d'une situation a-didactique est un paramètre de cette situation qui, suivant les valeurs qui lui sont attribuées, modifie la connaissance nécessaire à la solution.
Certains paramètres sont des variables numériques, d'autres sont binaires (la condition est réalisée ou non).

Variables didactiques

Une variable didactique est une variable cognitive dont la valeur peut être fixée à volonté par l'enseignant. La modification de la valeur de ces variables permet d'engendrer, à partir d'une situation,

- soit un champ de problèmes correspondant à une même connaissance ; ainsi l'enseignant peut proposer à l'élève de se confronter à plusieurs reprises à la même connaissance, à travers une situation dont le milieu lui est pour l'essentiel connu, sans que les réponses lui soient connues : c'est la base des situations d'élaboration de nouvelles connaissances ;
- soit un éventail de problèmes correspondant à des connaissances différentes ; ainsi l'enseignant peut utiliser d'abord des valeurs correspondant à des connaissances acquises, ce qui permet à l'élève de comprendre le problème, puis modifier la variable pour lui faire affronter la construction d'une connaissance nouvelle.

Saut informationnel

On appelle saut informationnel un changement de valeur d'une variable didactique à l'intérieur d'une situation susceptible de provoquer un changement de stratégie.
Souvent, suite à un changement de variable didactique, l'élève préfère adapter une procédure familière et antérieurement efficace en une procédure lourde et peu fiable : il trouve cela moins pénible, moins coûteux que la remise en cause de la procédure habituelle.
Le saut informationnel détermine a priori le seuil de remise en cause de la procédure familière.

Institutionnalisation

L'institutionnalisation consiste à donner un statut culturel ou social aux productions des élèves : activités, langage, connaissances. (Brousseau, *Actes du col-*

loque COPIRELEM d'Angers 1987). L'institutionnalisation porte aussi bien sur une situation d'action, que sur une situation de formulation ou de preuve. Les maîtres doivent prendre acte de ce que les élèves ont fait, décrire ce qui s'est passé et qui a un rapport avec la connaissance visée, donner un statut aux événements de la classe comme résultat des élèves et comme résultat de l'enseignant, assumer un objet d'enseignement, l'identifier, rapprocher ces productions des connaissances des autres (culturelles ou du programme), indiquer qu'elles peuvent resservir. (Brousseau, Angers 87). Quand un élève a résolu un problème en élaborant une nouvelle connaissance, celle-ci ne lui sera utile que s'il est capable d'y faire appel dans une autre situation. Pour cela, il faut que l'enseignant aide les élèves à identifier le savoir en jeu, à distinguer entre les résultats à retenir et ceux à oublier etc.
Dans l'information traitée, l'enseignant choisit et expose, avec les conventions en usage, ce qui est nouveau à retenir. Il fait le "cours". Ainsi, l'enseignant a la charge de donner un statut aux concepts qui, jusque là, sont intervenus comme outils. Il constitue alors un savoir de classe auquel chacun pourra se référer. (R. Douady, M.J. Perrin, *Educational Studies in Mathematics* 20 1989).

Transposition didactique

La transposition didactique décrit les choix, les découpages, les transformations des savoirs pris à un moment donné comme références dans les différentes institutions.
La transposition didactique se manifeste par ses étapes : la production du savoir par la communauté des mathématiciens, les choix à effectuer sur les savoirs à enseigner, les choix sur les découpages de ces savoirs, les choix sur la recontextualisation de ces savoirs, les savoirs effectivement enseignés, les savoirs effectivement acquis par les élèves…

Échec

L'échec qualifie un résultat, le fait que le résultat attendu ne soit pas atteint, que l'état terminal du jeu (fin de la partie) ne soit pas un état gagnant.

Erreur

L'erreur ne qualifie pas le résultat, mais la démarche de prise de décision. Une décision peut être dite causée par une erreur lorsque celui qui a pris cette décision peut la remettre en question, en regard des conséquences qu'il sait pouvoir lui associer. L'erreur qualifie la connaissance qui a permis la décision lorsqu'elle est identifiable et identifiée.
Pour l'élève, l'interprétation de l'échec en termes d'erreurs nécessite :
- un constat de l'échec du résultat,
- l'attribution de l'échec à des choix qu'il a faits et dont il peut assumer la responsabilité (ce qui implique le rejet de causes comme le hasard, la fatalité, le rejet de la culpabilisation et du dénigrement de soi-même, etc.),
- la recherche d'identification des relations entre choix et résultats,
- une modification de ses choix de manière plus adéquate.

La transformation de l'échec en erreur est la condition d'un progrès, d'un apprentissage.

Obstacle

Un obstacle se manifeste par des erreurs non pas fugaces et erratiques, mais reproductibles et persistantes. Ces erreurs témoignent d'une connaissance (erronée) qui a réussi dans tout un domaine d'action (mais qui échoue dans d'autres) ; elles persistent souvent après l'apprentissage d'un savoir correct ; leur origine peut être ontogénétique, didactique ou épistémologique.
Parmi les obstacles que l'analyse permet d'identifier, la recherche distingue :

- **les obstacles ontogénétiques :** ce sont des connaissances “ spontanées ” apparaissant “ naturellement ” au cours du développement ; ils sont relatifs au développement neurophysiologique du sujet (cf. Piaget et al.).
  Par exemple, à un âge donné, un enfant ne peut admettre que la collection B, dont on a un peu modifié l'apparence en écartant les jetons, a bien le même nombre de jetons que la collection A, alors qu'il l'admettait, lorsque les deux collections étaient présentées à l'identique. Pour cette erreur, le spatial l'emporte sur le numérique.

- **les obstacles épistémologiques :** ils sont attestés dans la genèse historique d'un concept et constitutifs du savoir actuel. "On connaît contre une connaissance antérieure". Bachelard ayant mis en évidence ce concept, un certain nombre de travaux qui s'appuient sur l'histoire des sciences poursuivent la recherche entreprise par Bachelard et l'étendent à d'autres sciences que les sciences physiques. Les obstacles épistémologiques ont joué un rôle dans le développement historique des connaissances et dont le rejet a du être intégré explicitement dans le savoir transmis.

- **Les obstacles didactiques :** ils résultent d'une transposition didactique antérieure non susceptible de renégociation par le maître dans le cadre restreint de sa classe du moins. Le franchissement d'obstacles implique très souvent à la fois une restructuration des modèles d'action, du langage et des systèmes de preuves. Le didacticien peut en précipiter les ruptures en favorisant la multiplication et l'alternance des dialectiques des trois types.

Procédure et stratégie

D'après F. Boule (1998) "Performances et démarches de calcul mental au cycle III", Dijon, une procédure est un ensemble univoque et ordonné d'actions en vue d'un but déterminé. Dans le temps de son déroulement, la procédure met de côté la signification. C'est typiquement le cas d'une résolution algébrique d'une équation du second degré par exemple ; c'est aussi ce qui se produit lorsqu'on calcule par écrit : les règles prescrites n'autorisent aucun choix et conduisent à un résultat. Une procédure est machinale.

Un certain accord semble acquis en ce qui concerne les principales caractéristiques de la notion de stratégie :
- disponibilité d'un éventail de procédures,
- exercice d'une sélection en fonction de la tâche et du but poursuivi,
- guidage et évaluation du déroulement.

Une stratégie suppose un choix parmi plusieurs possibilités. L'existence du choix n'est pas toujours assurée. S'il n'existe pas, on ne saurait parler de stratégie faute d'alternative. Les raisons de ce choix, s'il existe, peuvent être diverses : direction plus familière, évocation plus facile, préjugé de commodité ou de rapidité, etc.
Il arrive que l'on désigne par "stratégie" le *résultat* du choix (il s'agit alors d'une procédure effective), ou bien le *choix*, ou encore la *possibilité* de choix.

Index des sigles

APMEP	Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
CAFIPEMF	Certificat d'aptitude aux actions pédagogiques spécialisées d'adaptation et d'intégration scolaires
CDDP	Centre Départemental de Documentation Pédagogique
CNDP	Centre National de Documentation Pédagogique
CE1	Cours élémentaire 1ère année (élèves de 7 à 8 ans)
CE2	Cours élémentaire 2ème année (élèves de 8 à 9 ans)
CM1	Cours moyen 1ère année (élèves de 9 à 10 ans)
CM2	Cours moyen 2ème année (élèves de 10 à 11 ans)
COREM	Centre d'Observation et de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques de Talence près de Bordeaux (sigle local)
CP	Cours préparatoire (élèves de 6 à 7 ans)
CRPE	Concours de recrutement des Professeurs des Écoles
Cycle 2, **Cycle 3**	Le cycle 2 regroupe les classes de CP et CE1 Le cycle 3 regroupe les classes de CE2,CM1 et CM2.
ERMEL	Équipe de didactique des mathématiques de l'INRP
F.P.	Formation Professionelle
FP2	Formation professionnelle 2ème année
GS	Classe de grande section de maternelle (élèves de 5 à 6 ans)
I.N.R.P	Institut National de Recherches Pédagogiques
IEN	Inspecteur de l'Éducation Nationale (pour l'école primaire)
IFM	Institut de formation des maîtres (sigle local)
IMFAIEN	Instituteur Maître Formateur Auprès de l'Inspecteur de l'Éducation Nationale. Ce sont des conseillers pédagogiques
IMF	Instituteur Maître Formateur
IREM	Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
IUFM	Institut Universitaire de Formation des Maîtres Crée en 1991, pour assurer la formation des professeurs d'école (primaire : élèves de 2 à 11 ans) et des professeurs de collège et lycée (secondaire : élèves de 11 à 18 ans).
MAFPEN	Mission Académique de la Formation des Personnels de l'Éducation Nationale
MS	Classe de moyenne section de maternelle (élèves de 4 à 5 ans)
Normaliens	Stagiaires en formation dans les Écoles Normales
P.E.	Professeur des écoles
PEMF	Professeur des écoles Maître Formateur
P.E.N	Professeur d'École Normale
PE1, PE2	Professeur des écoles 1ère ou 2ème année
PIUFM	Professeur en Institut Universitaire de Formation des Maîtres

PS	Classe de petite section de maternelle (élèves de 3 à 4 ans)
Q.C.M.	Questionnaire à Choix Multiple
ZEP	Zone d'Éducation Prioritaire

Index des sigles en AIS en 2002

AIS	Adaptation et intégration scolaires
CAPSAIS	Certificat d'aptitude aux actions pédagogiques spécialisées d'adaptation et d'intégration scolaires, en 1987, se substitue au CAEI (Certificat d'Aptitude à l'éducation des enfants et adolescents déficients ou inadaptés)
CAT	Centre d'aide par le travail (pour adultes handicapés)
CCPE	Commission de circonscription préélémentaire et élémentaire
CCSD	Commission de circonscription du second degré
CDES	Commission départementale d'éducation spéciale
CLAD	Classe d'adaptation
CLIS 1	Classe d'intégration scolaire pour handicapés mentaux
CLIS 2	Classe d'intégration scolaire pour handicapés auditifs
CLIS 3	Classe d'intégration scolaire pour handicapés visuels
CLIS 4	Classe d'intégration scolaire pour handicapés moteurs
CMPP	Centre médico-psycho-pédagogique
COTOREP	Commission technique d'orientation et de reclassement professionnel
EREA	Établissement régional d'enseignement adapté
GAPP	Groupe d'aide psycho-pédagogique
IME	Institut Médico-Educatif antérieurement, il s'agissait d'un établissement comportant un IMP + un IMPro. Dorénavant, tout établissement avec **SSEGS** (Section de soins et d'éducation générale spécialisés) ou **SSEPS** (Section de soins et d'éducation professionnelle spécialisés) est appelé IME
IMP	Institut médico-pédagogique (de 6 à 14 ans) ; ils sont devenus des IME (Instituts médico-éducatifs) avec **SSEGS** (Section de soins et d'éducation générale spécialisés)
IMPRO	Institut médico-professionnel (de 14 à 20 ans) : ils sont devenus des IME (Instituts médico-éducatifs) avec **SSEPS**
IR ou IRP	Institut de rééducation (pour troubles du comportement)
LEA	Lycée d'enseignement adapté
LP	Lycée professionnel
RASED	Réseaux d'aides spécialisées aux élèves en difficulté (écoles maternelle et élémentaire)
SEGPA	Section d'enseignement général et professionnel adapté (collèges) . La SEGPA se substitue à la SES (Section d'Éducation Spécialisée)
SESSAD	Service d'éducation et de soins spécialisés à domicile (pour handicapés mentaux ou troubles du comportement)
UPI	Unité pédagogique d'intégration (collèges et lycées)

Voici la liste des auteurs avec leur laboratoire de recherche et leur lieu d'exercice en Janvier 2003.

ANDRÉ Françoise	École Blaise Pascal Perpignan	IUFM de Montpellier *Perpignan*
AURAND Catherine		IUFM de Versailles *St Germain en Laye*
BARATAUD Dominique		CNEFEI de Suresnes
BEAUFORT Dominique		IUFM d'Orléans-Tours *Chartres*
BETTINELLI Bernard	IREM de Besançon	IUFM Franche-Comté *Besançon*
BOLON Jeanne	Équipe DIDIREM, Université Paris 7	IUFM de Versailles *Antony*
BONNET Nicole	IREM de Dijon, COPIRELEM	IUFM de Dijon
BOULE François	IREM de Dijon	CNEFEI de Suresnes
BRIAND Joël	DAEST Université V. Segalen Bordeaux 2, COPIRELEM	IUFM d'Aquitaine *Bordeaux*
BRONNER Alain	LIRDEF	IUFM Montpellier *Montpellier*
BROUSSEAU Guy	DAEST Université V. Segalen Bordeaux 2	Professeur émérite des Universités IUFM d'Aquitaine
BUTLEN Denis	Équipe DIDIREM, Université Paris 7, IREM paris 7	IUFM de Créteil *Melun*
CHEVALIER M.Claude	Professeur au lycée de Cahors	IUFM de Toulouse jusqu'en 1994
COLMEZ François	IREM paris 7	Université Paris 7
COULET Jean Claude	Laboratoire de Psychologie du Développement et de l'Education	Maître de conférences, Université de Rennes 2
DESCAVES Alain	IREM de Bordeaux COPIRELEM	IUFM d'Aquitaine *Périgueux*
DOUADY Régine	Université Paris 7 Professeur honoraire	
DUCORAIL J.Claude		IEN de Gironde
EYSSERIC Pierre	IREM d'Aix –Marseille COPIRELEM	IUFM d'Aix Marseille *Aix*
FENICHEL Muriel		IUFM de Créteil *Livry Gargan*
FREMIN Marianne		IUFM Versailles *Antony*
GIRMENS Yves	IREM de Montpellier COPIRELEM	IUFM de Montpellier Perpignan
HERVIEU Claudine		IUFM de Caen

HOUDEMENT Catherine	Équipe DIDIREM, Université Paris7 COPIRELEM, IREM de Hte Normandie	IUFM Haute Normandie *Rouen*
HUGUET François	Professeur Honoraire, IREM de Quimper	IUFM de Quimper *Quimper*
KUZNIAK Alain	Équipe DIDIREM, Université Paris7 IREM de Strasbourg	IUFM de Strasbourg *Strasbourg*
LE POCHE Gaby	IREM de Bretagne COPIRELEM	IUFM de Bretagne *Rennes*
LEBERRE Maryvonne	IREM de Lyon	Professeur en collège Charcot à Lyon
OYALLON Jean Louis	Professeur en lycée à Nouméa	IUFM d'Aquitaine jusqu'en 1996
OZAN Gérard		IUFM Versailles *Antony*
PARZYSZ Bernard	GReDiM (IUFM Orléans-Tours) Équipe DIDIREM, Université Paris7	IUFM Orléans Tours
PAUVERT Marcelle		IUFM de Créteil Professeur honoraire
PEAULT Hervé	Décédé en 1997	IUFM des Pays de la Loire
PELTIER Marie Lise	Équipe DIDIREM, Université Paris7 COPIRELEM, IREM de Hte Normandie	IUFM Haute Normandie *Rouen*
PERRIN -GLORIAN Marie-Jeanne	Équipe DIDIREM, Université Paris 7	IUFM Nord-Pas-de-Calais
PEZE Christiane	Formatrice AIS	IUFM d'Aquitaine
RIMBAUD Claude	IREM de Rennes Professeur honoraire	IUFM de Bretagne *St Brieux*
ROYE Louis	IREM de Lille	IUFM de Lille Professeur honoraire
SALIN Marie Hélène	DAEST université V.Segalen, Bordeaux2	IUFM de Bordeaux *Bordeaux*
TAVEAU Catherine	IREM Paris 7, COPIRELEM	IUFM de Créteil *Bonneuil*
VERGNES Danielle		IUFM de Versailles *Antony*

Présentation succincte du système éducatif français

AIS

R. A .S .E. D.

C L I S

École maternelle
(non obligatoire)
âge : de 2 ans à 6 ans

PS – MS - GS **Cycle 1**

École élémentaire
(durée 5 ans)
de 6 ans à 11 ans

GS CP CE2 **Cycle 2**

CE2 CM1 CM2 **Cycle 3**

P R I M A I R E

Collège SEGPA

UIP

Collège
(durée 4 ans)
de 11 ans à 15 ans

Lycée Professionnel
(durée 2 ans)
- - - - -
(durée 2 ans ou 4 ans)

Lycée
(durée 3 ans)
de 15 ans à 18ans

S E C O N D A I R E

Cursus pour devenir professeur des écoles

Lycée
Baccalauréat

Enseignement supérieur
(durée 3 ans)
Licence (ou diplôme équivalent)

universitaire

(durée 2 ans)
1ère année → concours
2de année → certification

IUFM