EVOLUTION DE LA NOTION DE NOMBRE AU COLLEGE

Jean-Luc GASSER
Irem de Strasbourg

L'objet de cet article est de donner un aperçu de la façon dont se construit la notion de nombre chez les enfants au collège dans le cadre des programmes entrés en vigueur à la rentrée 1995 en classe de sixième au collège. Il ne sera pas donné de résultats quantifiés de la compréhension qu'ont les élèves des différentes catégories de nombres, car cela nécessiterait une étude beaucoup plus approfondie. L'approche adoptée consiste à décrire et à commenter les difficultés rencontrées par les élèves. Nous proposons également des pistes pour qu'ils s'approprient mieux ces notions. Le lecteur aura un aperçu de l'enseignement (contenu et pratique) de ces concepts au collège au travers du vécu quotidien d'un enseignant du terrain.

Nous décrivons année par année, de l'entrée en sixième à la sortie de la troisième les champs d'intervention de différentes catégories de nombres que côtoient les élèves : les nombres décimaux, les nombres fractionnaires et les nombres irrationnels.

Une réflexion approfondie a été menée par le groupe « livre » [1] de l'Irem de Strasbourg sur le programme de sixième. Nous avons imaginés des activités et des exercices en ayant constamment présent à l'esprit les notions de registre de représentation et de changement de registre au sens de R Duval. Cette approche nous a permis de développer des pistes intéressantes pour travailler la notion de nombre toute l'année à ce niveau du collège. Le paragraphe qui y est consacré est donc plus approfondi et fait constamment référence à ces travaux. Le lecteur intéressé pourra consulter la brochure cor-

1 Le groupe « livre » est constitué des professeurs suivants : Gilles BOURDENET, Jean-Luc GASSER, Paul GIRAULT, Elizabeth KRETZ, Patrick ZOLLER.

respondante [IREM 2001]. Une étude intéressante peut également être consultée dans [MAURIN 1993], ainsi que [DOUADY 1986]. Cette approche a induit une démarche semblable aux autres niveaux du collège, et nous présentons quelques pistes de réflexion. Beaucoup des exercices proposés dans cette section, mais pas tous, sont directement issus de cette brochure. L'état d'esprit que nous avons adopté nous a amené tout naturellement à des prolongements dans les autres niveaux du collège. Les exercices proposés sont donc le fruit de cette réflexion. qui n'a pas eu lieu dans le cadre de l'Irem. Il est intéressant de remarquer que les membres du groupe ont mené chacun une réflexion personnelle qui a abouti à élaborer des activités semblables avec des résultats très, intéressants aux autres niveaux du collège.

La notion de nombre ne peut être évoquée sans qu'il soit fait référence à la calculatrice et l'usage qu'on en fait dans nos classes. Pour éviter de surcharger cet article, notre approche de son utilisation fera l'objet d'un autre article.

A l'entrée en sixième

La première catégorie de nombres que connaissent les élèves est bien sûr le nombre entier, avec en filigrane le système de numération décimal. La signification de ces nombres est assez bien maîtrisée, ainsi que les opérations s'y rapportant. On peut cependant noter qu'un nombre non négligeable d'enfants oublient la signification de la position des chiffres, c'est à dire le groupement en paquets de dix, de cent, de mille, et que les tables de multiplications ne sont pas connues de façon satisfaisante par un nombre non négligeable d'élèves.

Le nombre décimal et les opérations correspondantes sont déjà bien moins maîtrisés par les élèves, et les changements de programme survenus avec la réforme mise en place en 1995 ont accentué ce phénomène. Les élèves abordent le plus fréquemment la notion de nombre décimal en classe de CM2, parfois en CM1 suivant la progression de leur maître. A la rentrée 2000, la multiplication des nombres décimaux entre eux n'est plus au programme, seule figure la multiplication d'un nombre entier par un décimal. La division est une notion en cours d'acquisition à l'entrée en sixième. Les élèves font encore beaucoup d'erreurs dans les multiplications ou divisions par 10, 100, ou 1000. On peut noter que le programme du dernier cycle de l'école primaire prévoit la notion de puissance de dix, que les manuels scolaires proposent des exercices les utilisant (numération décimale par exemple), alors que les élèves ne reverront cette notion qu'en classe de quatrième [2] !

La notion de fraction a été vue au travers de la notion de partage, mais le nombre fractionnaire n'a pas encore acquis un statut, et les opérations correspondantes n'ont pas été vues. Les fractions supérieures à l'unité ont été exceptionnellement rencontrées. Mais les pratiques sont très variables d'un professeur à l'autre comme nous avons pu nous en rendre compte à l'occasion de liaisons CM2-6ème. La rédaction des programmes ne favorise pas une pratique homogène de la part des enseignants. Notons que les nouveaux programmes de l'école élémentaire ont été écrits avec un esprit totalement différent : ils rejoignent de par leur style la forme des programmes du secon-

2 Il s'agit peut-être d'une mauvaise interprétation des programmes. Ceux ci indiquent l'utilisation des puissances de dix sans plus de précisions. Il s'agit peut-être uniquement de multiplier et diviser par 10, 100 ou 1000. En tous cas, les auteurs des manuels scolaires ont rédigé des exercices utilisant la notation 102, 103 et utilisent même des puissance de 10 supérieures !

daire et devrait ainsi favoriser une meilleure lecture.

Un nombre particulier a été rencontré : le nombre π, dont le statut est très mal défini. Il est égal à 3,14 pour la très grande majorité des élèves, et cette image n'évoluera que très peu, voire pas du tout à la sortie du collège…

En sixième

Une partie importante du travail de sixième consiste à faire acquérir aux élèves une connaissance plus approfondie des nombres décimaux et du sens des quatre opérations. Un nombre significatif d'élèves sépare le traitement de la partie entière et de la partie décimale, par exemple lors de la multiplication d'un décimal ou la division par un multiple de 10 ou par un entier. Les erreurs ci-dessous, qu'il n'est pas rare de rencontrer dans le test national d'évaluation à l'entrée en sixième, illustrent ces propos :

$$45{,}3 \times 10 = 450{,}30 \quad \text{et} \quad 7{,}3 \times 4 = 28{,}12$$

Nous regrettons que la plupart des manuels scolaires ne proposent qu'un travail peu approfondi sur les nombres décimaux, car leur manipulation et leur signification profonde reste bien mal maîtrisées par beaucoup d'élèves. Si le professeur ne propose pas un travail conséquent sur ces notions, ils garderont une idée bien pauvre et manipuleront difficilement ces nombres, même avec une calculatrice, puisque leur sens n'est pas compris. Notons que l'utilisation de l'Euro renforcera peut-être la notion de nombre décimal avec la manipulation des centièmes d'Euros !

Lors de nos travaux de rédaction de la brochure [IREM 2002], et de l'expérimentation dans nos classes pendant plusieurs années, nous avons élaboré une stratégie d'apprentissage et de familiarisation avec ces nombres s'étalant durant toute l'année de sixième avec comme toile de fond les différents registres de représentation que l'on peut utiliser. Le lecteur sera clément avec les petites erreurs ou inexactitudes qui seront inévitablement faites à la théorie didactique des registres de représentation, mais il s'agit ici d'être proche d'une pratique quotidienne de l'enseignant avec ses élèves…

Précisons les différents registres qui entrent en jeu lors de la manipulation de nombres :

- la langue naturelle : seize, trois dixièmes, etc.
- le registre numérique en général, dans lequel nous distinguerons
  - ♦ le registre des nombres décimaux :
    $$5 \qquad 4{,}3$$
  - ♦ le registre des nombres fractionnaires :
    $$\frac{20}{4} \qquad \frac{43}{10}$$
- le registre géométrique : représentation des nombres par la perception d'aires de figures.
- le registre graphique : la droite graduée.

Nous n'approfondirons pas plus cet aspect que le lecteur saura retrouver en filigrane dans les approches que nous proposons dans cet article.

Structure du nombre décimal

Il est significatif que plusieurs manuels de sixième parus à la rentrée 2000 proposent un chapitre concernant la numération des nombres décimaux, voire la numération des nombres entiers. Celui-ci avait quasiment disparu des anciennes moutures des manuels…

alors que ce préliminaire est indispensable pour la suite ! Les manuels proposent un travail sur la signification des préfixes (déci, centi, déca…) qui est complété par des exercices de passage de la numération en langue naturelle à l'écriture algébrique. Quelques exercices utilisant les fractions décimales sont proposés comme le préconisent les programmes pour renforcer la signification de la numération de position. L'élève est invité à lire des abscisses de points et à placer des points sur une droite dont la graduation est donnée en totalité ou de façon incomplète. Les exercices proposés sont peu nombreux, alors qu'ils méritent un approfondissement important pour la structuration du nombre décimal.

L'utilisation du registre de la droite graduée est fondamental pour l'acquisition de la compréhension du nombre décimal (et rationnel de façon générale) comme l'ont par ailleurs montré des travaux récents en didactique [ADJIAGE2001]. C'est pourquoi nous avons élaboré une activité pour renforcer la compréhension de la structure du nombre décimal à l'aide de mesures de longueurs.

Elle est reproduite ci-contre, et aborde la notion de subdivision de l'unité de mesure pour évaluer des longueurs de plus en plus précisément. Elle a été inspirée par un des exercices d'évaluation à l'entrée en sixième qui proposait de mesurer une longueur à l'aide d'une règle qui n'était pas graduée en centimètres, mais en pouces. Les élèves ont très mal réussi cet item [3], et cet exercice n'a plus été proposé depuis.

L'activité que nous proposons permet de travailler le nombre décimal et sa structure à l'aide de mesures de longueurs. On propose une règle graduée aux élèves, et ils doivent mesurer des longueurs de segments avec ces règles. La première règle est graduée uniquement avec l'unité (environ 12 cm), la deuxième règle est graduée plus finement en faisant intervenir le dixième d'unité (donc 1,2 cm) et la troisième règle utilise le centièmes d'unité. Les segments à mesurer sont choisis pour que les élèves n'obtiennent pas une valeur correspondant à une graduation des règles proposées. Les élèves ne peuvent pas se raccrocher au centimètre, et sont obligés de raisonner avec des dixièmes et des centièmes de l'unité proposée. Cette activité est très formatrice dans plusieurs domaines : notion d'unité, la structure et la signification des subdivisions de l'unité, mais également la notion d'encadrement d'une grandeur, et donc d'un nombre.

Nous proposons également de nombreux exercices de lecture de graduation et de placement de nombres sur une droite graduée. Leur utilisation avec les élèves en classe et en séquence de remédiation nous ont permis de dégager quelques points didactiques importants pour leur élaboration :

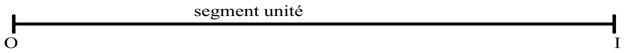
- le choix de l'échelle : unité des graduations principales (de 1 en 1, de 0,1 en 0,1, etc).
- la présence ou non du 0 de la graduation.
- les nombres fournis sur la graduation qui permettent sa lecture.

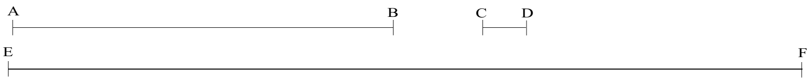
Commentons quelques exemples de lecture de nombre sur une droite graduée :

3 Beaucoup d'élèves de sixième ont évidemment été perturbés par le pouce, unité de mesure, avec le pouce de leur main ! L'exercice aurait pu proposer une unité de longueur avec un nom imaginaire, et il aurait été intéressant de le proposer sous cette forme.

ACTIVITE 1 : *mesure de longueurs et décimaux (extraits)*

A) Des mesures !

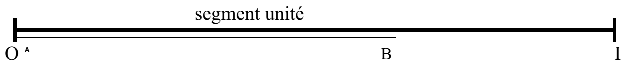




On choisit comme unité de longueur le segment [OI] dessiné ci-dessus. Le but de l'activité est de mesurer la longueur des segments [AB], [CD] et [EF] ci-dessus à l'aide de cette unité.

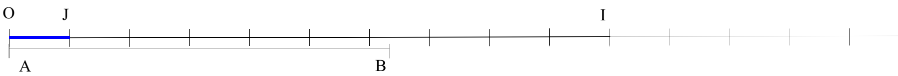
1) Décalquer le segment [OI] ci-dessus.

2) On pose le segment [OI] sur le segment [AB] comme le montre la figure ci-dessous :



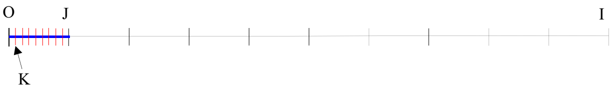
On constate alors, sans rajouter de graduations, que le segment [AB] mesure entre zéro et une unité. On écrit alors l'encadrement suivant : $0 < AB < 1$.
Donner de même un encadrement des longueurs des segments [CD] et [EF].

3) Comme le résultat de cette mesure n'est pas précis, on va affiner l'instrument de mesure ; pour cela, on partage le segment unité en 10 segments de même longueur :



Combien d'unités mesure le segment [OJ] ?
Décalquer le segment gradué sur la figure ci-dessus et donner un encadrement à un dixième d'unité près de la longueur de chacun des segments [AB], [CD] et [EF].

4) Pour obtenir encore un résultat plus précis, on divise le segment [IJ] en 10 segments de même longueur :



Combien d'unités mesure le segment [OK] ? Décalquer les graduations du segment [OJ] de la figure ci-dessus et donner alors un encadrement à .... d'unité près de la longueur de chacun des segments [AB], [CD] et [EF].

B) Des constructions de segments.

Dessiner des segments dont les longueurs sont :

a) 8 dixièmes d'unité
b) 5 centièmes d'unité
c) 12 dixièmes d'unité
d) 67 centièmes d'unité
e) 164 centièmes d'unité
……

Les graduations principales des Graduation 1 à 3 diffèrent d'une unité et sont rattachées à la mesure des longueurs avec une règle graduée et sont familières aux élèves.

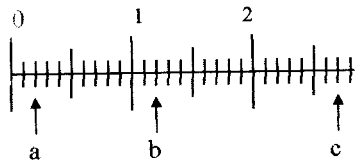
Une graduation semblable à la graduation 1 a été proposée à l'évaluation à l'entrée en sixième 2001, et montre que les élèves réussissent en général bien cet exercice. Notons que la lecture du nombre a est moins bien réussie que les autres, peut-être parce qu'il est compris entre 0 et 1. La graduation 2 ne laisse pas apparaître l'origine de la graduation, mais ne pose pas de problème particulier.

Par contre, une petite variation des nombres choisi peut faire apparaître un phénomène intéressant qu'il nous semble important de travailler avec les élèves. Le nombre g de la graduation 3 correspond à trois chez certains élèves. En fait, ils pensent que la première graduation visible est zéro et ne savent pas que la graduation doit être régulière. On peut observer chez ces mêmes élèves des erreurs récurrentes de ce type, comme si les nombres écrits sur les graduations n'avaient pas d'importance. Des erreurs aussi manifestes que le nombre 0,6 est compris entre 2 et 3 ne sont pas relevées.

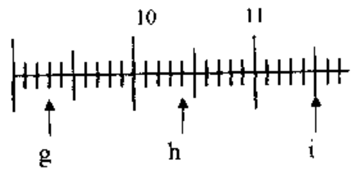
En fait, après discussion avec les élèves, il semble qu'ils n'ont pas du tout intégré la notion de graduation régulière. Cette idée de régularité est implicite, et la conscience ou la non conscience de cet implicite peut créer des difficultés inattendues à d'autre niveaux [4].

4 la nécessité d'un partage régulier lors de la représentation de nombres fractionnaires avec des aires apparaît dans des exercices du genre « trouver l'erreur », sans plus. Nous ne l'avons jamais rencontré dans des exercices sur les graduations. Certains élèves qui ont décalqué les règles graduées de l'exercice 1 n'ont absolument pas pris garde au soin à apporter à la régularité de la graduation. C'est en partie pour cette raison que la graduation la plus fine n'est pas proposée sur toute la longueur de la règle de la question 4.

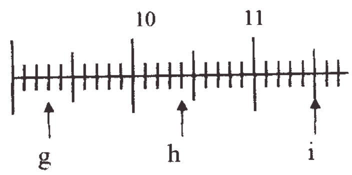
EXERCICE 1. *Ecrire la valeur du nombre décimal qui est repéré sous chaque flèche :*



Graduation 1



Graduation 2

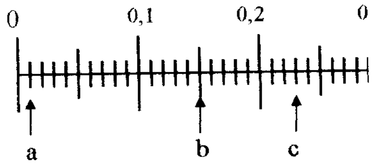


Graduation 3

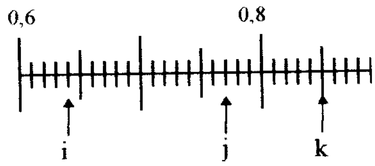
Observons maintenant les graduations de l'exercice 2 reproduit ci-contre…

Les graduations 4 et 5 ne posent pas vraiment de problème, mais la graduation 6 fait apparaître de façon très marquée le phénomène observé précédemment : le nombre e correspondrait à la valeur 8,8. Pour arriver à faire prendre conscience à ces élèves de leur erreur, il a fallu les amener à énumérer les décimaux successifs en partant d'une valeur choisi avec le pas de la graduation. Les collègues de l'école primaire connaissent cette activité

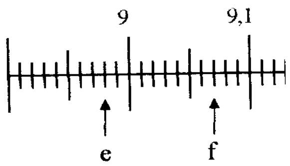
EXERCICE 2
Ecrire la valeur du nombre décimal qui est repéré sous chaque flèche :



Graduation 4



Graduation 5



Graduation 6

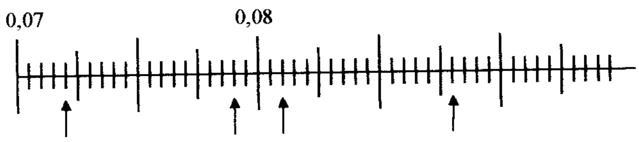
sous le nom de « séries ». Ainsi, pour la graduation 6, en partant de 9,3 les élèves vont compter en décroissant de 0,1 en 0,1 pour aboutir à la valeur correcte de la première graduation, soit 8,9.

Commentons encore les deux graduations7 et 8 suivantes…

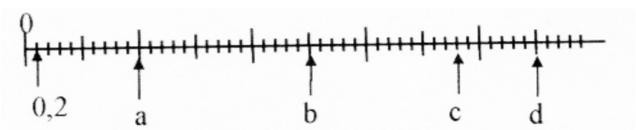
Cette fois, c'est l'échelle choisi entre deux graduations principales qui n'est pas habituelle : 0,005 unités pour la graduation 7 et 2 unités pour la graduation 8. Ces deux exercices ne sont certes pas faciles, mais montrent qu'il est souhaitable de proposer une activité qui est certainement peu pratiquée aux élèves : voir l'exercice 4 au verso.

En fait, avant de donner les valeurs des nombres repérés dans les exercices précédents, il est indispensable de demander aux élèves de compléter la graduation. Nous pensons que les exercices qui proposent des graduations complètes sont indispensables et formateurs, mais que le travail qui consiste à recréer une graduation à partir de deux nombres est une activité incontournable pour apprendre la structure des nombres décimaux.

EXERCICE 3. ***Ecrire la valeur du nombre décimal qui est repéré sous chaque flèche :***



Graduation 7



Graduation 8

EXERCICE 4

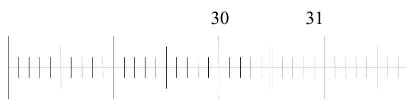
Une graduation est proposée avec l'indication de deux nombres et il s'agit de compléter la graduation. Une fois la graduation complétée, on peut demander de donner les valeurs des nombres repérées comme dans les exercices 1 à 3 ci-dessus.

L'exercice contraire qui consiste à placer des nombres sur droite graduée complète le travail précédent. Bien entendu, le professeur veillera à faire intervenir les variables didactiques décrites précédemment, mais il nous semble souhaitable de rajouter une dimension supplémentaire pour rendre l'exercice plus formateur :

EXERCICE 5

a*) Placer les flèches correspondant aux nombres ci-dessous sur les graduations correspondantes, et écrire le nombre sous la flèche* ***:***

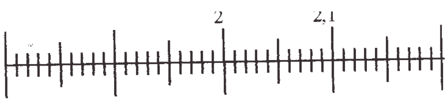
29,2 30,4 28,1 31,7



Graduation 9

b) Placer les flèches correspondant aux nombres ci-dessous sur les graduations correspondantes, et écrire le nombre sous la flèche, ***si c'est possible :***

2,03 2,2 2,12 1,7 0,8 1,83



Graduation 10

La graduation 9 ne propose que des nombres qu'il est possible de placer sur la droite et ne posera donc pas beaucoup de difficultés. Le pas de la graduation est suggéré par les nombres proposés s'il doivent tous être placés. Par contre, les nombres proposés dans la graduation 10 pourraient être placés si les élèves complètent la graduation en considérant que la première graduation principale a pour abscisse 0 et que le pas est d'une unité. Ils seront obligés de reconstruire la graduation pour résoudre l'exercice.

Addition et soustraction des décimaux

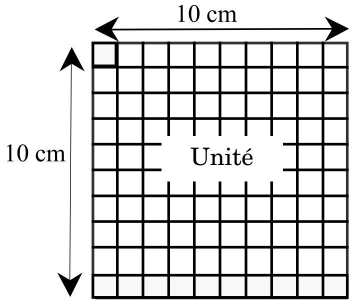
Les programmes officiels insistent sur le fait que la résolution de problèmes constitue le moteur du travail à effectuer en classe. Les manuels proposent donc de nombreux exercices à résoudre faisant intervenir des nombres décimaux qui ne sont pas forcément « agréables à manipuler à la main ». Pourtant un travail technique sur l'addition et la soustraction des nombres décimaux nous semble indispensable au vu des connaissances des élèves à ce sujet. Nous ne parlons pas ici de l'opération posée qui est indispensable car la retenue est mal maîtrisée par de nombreux élèves. C'est le sens même de la retenue surtout lorsqu'elle concerne le chiffre des unités qui est à approfondir Les élèves appliquent une technique qu'ils comprennent mal [5].

La pratique du calcul mental nous montre que de nombreux élèves qui sont capables de poser correctement l'opération 0,4 + 0,7 se trompent et proposent 0,11 comme réponse de calcul non posé, car ils traitent la partie décimale

5 Il est sûr que la technique, opératoire ou autre, doit être travaillée pour elle même, et qu'une technique peut acquérir du sens quand on la pratique. Sa signification peut-être donnée en préliminaire, ou après l'avoir utilisée.

ACTIVITE 2 Aires et nombres décimaux (extraits)

On choisit comme unité d'aire l'aire du carré de 10cm de côté dessiné ci-contre. Reproduire ce carré sur une feuille de papier millimétré, ainsi que le carré de côté 1cm et le rectangle de côtés 1cm et 10cm.



A) Des mesures !

a. Quelle fraction de l'unité représente l'aire du carré de côté 1cm ?

b. Quelle fraction de l'unité représente le rectangle de côtés 1cm et 10cm. ?

B) Des constructions d'aires.

a. Tracer un rectangle de 5 cm sur 3 cm. Trouver le nombre d'unité d'aire contenues dans ce rectangle. Ecrire ce nombre sous forme décimale et sous forme fractionnaire.

b. Même question que précédemment pour un rectangle de :

15 cm sur 6 cm 13 cm sur 9 cm 1 cm sur 6 mm

C) Des conversions d'unités.

Tracer une figure dont l'aire mesure :

a. 0,8 unité b. 0,05 unité c. 0,47 unité d. 1,03 unité

e. 1,4 unité f. 1,54 unité g. 0,0001 unité h. 0,001 unité

i. 0,125 unité

D) Des calculs.

Pour chacun des calculs suivants, trouver le résultat puis le vérifier en utilisant les figures de la question précédente.

0,8 + 0,47 0,8 + 1,54 1,4 + 0,47

0,8 + 0,8 1,54 + 0,47 0,8 + 0,125 0,05 + 0,0001 d'une façon erronée. Pour remédier à ce type d'erreurs, nous avons principalement proposé deux types d'approches qui sont décrites ci-dessous, puis pratiqué le calcul mental régulièrement sur l'année pour asseoir un traitement correct de ces opérations.

L'activité 2 reproduite à la page précédente fait travailler l'addition et la soustraction des décimaux aux élèves en utilisant la perception des aires. On choisit un carré comme unité d'aire, on le divise en dix parties de façon à pouvoir manipuler les dixièmes ainsi obtenus (bande, …). On le divise encore par dix pour obtenir la notion de centième à l'aide du carreau. Les additions et les soustractions se font alors aisément à l'aide du support géométrique, et les retenues apparaissent naturellement. Un des intérêts de cette démarche est l'autocorrection qu'elle permet aux élèves. Cette activité demande impérativement l'utilisation de papier millimétré. Une expérience a été menée avec l'utilisation de carreaux du cahier, mais il en a résulté une confusion mémorable dans la classe !

Conjointement à la vision géométrique, le professeur est invité à formuler les calculs à effecteur en utilisant la langue naturelle. La somme de sept *dixièmes* et de six *dixièmes* est égale à des *dixièmes*, soit ici treize dixièmes, alors que beaucoup d'élèves donnent spontanément *0,13* comme réponse à la somme *0,7 + 0,6*. La langue naturelle est un support privilégié pour effectuer ce genre d'opérations correctement, avec du sens, et de faire prendre conscience du traitement de l'addition avec les nombres décimaux.

Il apparaît donc indispensable de travailler les conversions de nombres décimaux en fractions décimales et réciproquement, et ce dans le registre de la langue naturelle et

EXERCICE 6

Compléter :
1 unité = ...dixièmes
1 unité = ...centièmes…

EXERCICE 7

On peut écrire 8,35 sous quatre autres formes :

$8{,}35 = 8 + 0{,}35 \quad 8{,}35 = 8 + \frac{3}{10} + \frac{5}{100}$

$8{,}35 = 8 + \frac{35}{100} \quad 8{,}35 = \frac{835}{100}$

Ecrire de même sous ces quatre formes :

a) 13,4 13,04 13,004
0,73 7,3 73 …

EXERCICE 8

Ecrire sous forme de nombre décimal les nombres suivants :

$\frac{205}{10} \quad \frac{3604}{100} \quad \ldots$

EXERCICE 9

Ecrire les nombres décimaux suivants sous forme de fraction décimale. Donner deux réponses différentes en utilisant des dénominateurs différents.

0,07 0,15

2,5 3,06 …

les registres numérique des décimaux et des fractions. Cette approche permet également de mieux réussir la multiplication et la division des nombres décimaux par les 10, 100 et 1000. Les extraits d'exercices 6 à 9 ci-contre donnent quelques exemples.

L'exercice 9 nous semble important. Un élève devrait savoir proposer sans problème les écritures suivantes :

$$2{,}5 = \frac{25}{10} = \frac{250}{100} = \frac{2\ 500}{1\ 000}$$

Ces diverses écritures fournissent par exemple un outil pour la comparaison des décimaux en écrivant tous les nombres avec la même unité (dixième, centième, etc.). Ils préparent à la conversion des unités de mesure utilisant les préfixes tu genre déci, centi, etc.

Certains auteurs proposent des exercices d'écriture de nombres portant sur les « zéros inutiles » ? Ces zéros sont-ils si inutiles ? Le type d'exercices qu'on peut trouver est celui de l'énoncé 10ci-dessous. Pour les b) et c), il s'agit bien sûr de repérer les zéros indispensables à l'écriture correcte du nombre considéré.

Mais ces « zéros inutiles » deviennent rapidement indispensables si on effectue des multiplications et divisions par les puissances de dix ! Par exemple, si on veut écrire le résultat de la division de 2,5 par 100, les zéros qui indiquent le nombre de dizaines et de centaines sont indispensables pour écrire correctement le résultat :

$$002{,}5 \div 100 = 0{,}025$$

De même les zéros qui indiquent le nombre de centièmes est indispensable pour écrire le résultat de la multiplication de 2,5 par 100 :

$$2{,}50 \times 100 = 250$$

Les élèves rencontrent là une pratique implicite (apparition et disparition de zéros) sans forcément en saisir les tenants et les aboutissants. Peut-être serait-il judicieux de proposer des exercices dans lesquels on demande à l'élève de rajouter des « zéros inutiles » pour faire apparaître le nombre de dizaines ou de centaines ? Une réflexion est peut-être à mener sur le type d'exercice suivant :

EXERCICE 10

Ecrire les nombres suivants en supprimant les zéros inutiles :

a) 0025,3 b) 0,054 00 c) 0140,054
…

EXERCICE 11

Ecrire le nombre 2,5 en rajoutant les zéros indispensables pour faire apparaître :
a) Le chiffre des centaines
b) Le chiffre des centièmes…

ou bien :

Ecrire le nombre 2,5 en rajoutant les zéros indispensables pour faire apparaître :
a) Le chiffre des centaines mais pas celui des milliers
b) Le chiffre des millièmes, mais pas celui des dix millièmes …

Pour l'étude de l'addition des nombres décimaux, nous n'avons pas utilisé le registre de la droite graduée. Mais on pourrait construire une règle à calculer en faisant coulisser deux

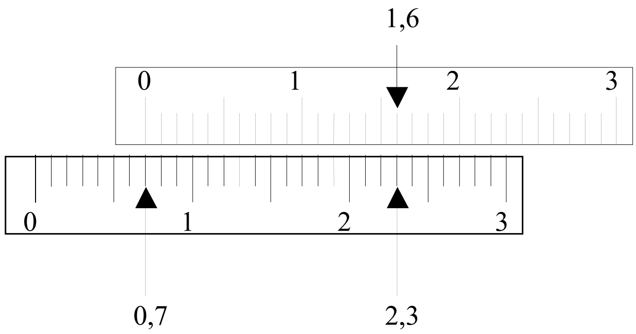


Figure 1

droites graduées de la même façon l'une sur l'autre[6] comme on le fait parfois en cinquième avec les nombres relatifs. Cette démarche est expliquée dans la Figure 1 ci-dessus, qui illustre comment calculer 0,7 + 1,6 …

Mais nous ne savons pas si cette approche renforce la compréhension de la structure des nombres décimaux ni des opérations qui s'y rapportent. Cette piste mérite peut-être d'être explorée.

Une démarche fréquemment adoptée est illustré par la Figure 2 :

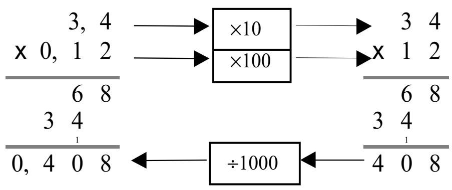


Figure 2

Multiplication des décimaux

A l'école primaire, les élèves n'ont étudié que la multiplication d'un nombre entier par un nombre décimal, la multiplication de deux décimaux est abordée en sixième. Il s'agit alors de donner du sens ces opérations.

Le paragraphe précédent a proposé des pistes de travail sur la multiplication et la division des décimaux par les multiples de dix. A partir de là, la multiplication des entiers étant à peu près maîtrisée[7], on fait le lien entre la multiplication des entiers et la multiplication des décimaux en divisant par la bonne puissance de dix. Il est clair que par la suite, la vieille recette qui consiste à « compter les chiffres après la virgule » pourra être retenue. Chez certains élèves, le sens qui est donné par la Figure 1 restera la référence pour effectuer des opérations avec les

6 le principe est le même que celui de la règle à calculer qui permettait d'effectuer des multiplications, divisions, qui était encore utilisée au baccalauréat pour la dernière fois en 1979 (j'y étais !). On peut se poser la question à un autre niveau de l'utilité de cet instrument pour l'étude des logarithmes… La remarque n'est pas si anodine qu'elle n'en a l'air ; il est clair que les professeurs qui n'ont pas connu cet instrument de calcul n'auront pas l'idée d'exploiter ses richesses.

7 à la connaissance des tables de multiplication près !

nombres décimaux, sans que cela les handicape, au contraire.

Notons au passage qu'il est fort utile pour les élèves de savoir que diviser par 10 puis par 100, revient à diviser par 1000. Cette notion de divisions successives n'est abordée ni dans les programmes ni les manuels, alors qu'elle permettrait de débloquer de nombreuses situations dans les classes ultérieures et enrichirait le point de vue des élèves. Nous y reviendrons dans la suite de cet article.

La pratique du calcul mental nous montre encore une fois que cette approche ne suffit pas. Beaucoup d'élèves proposent la réponse suivante :

$$7 \times 0{,}8 = 0{,}56 \text{ au lieu de } 7 \times 0{,}8 = 5{,}6$$

Il s'agit encore une fois d'un traitement erroné de la partie décimale qui est considéré comme une entité à part. le programme indique que l'on doit étudier le produit d'un entier par une fraction. Nous avons alors expérimenté avec succès une démarche complémentaire que nous proposons pour étudier la multiplication d'un entier par un décimal. Nous avons mis en évidence diverses approches de ce genre d'opérations. L'opération $8 \times 0{,}6$ peut-être perçue à l'aide des opérateurs comme le suggère la Figure 3 :

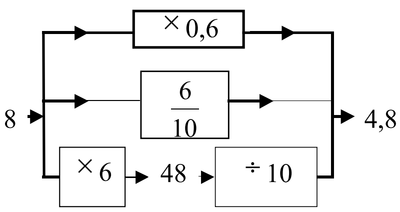


Figure 3

Le professeur sera également attentif à la lecture à haute voix de ce calcul qui peut induire des traitements différents. L'opération $8 \times \frac{6}{10}$ peut se lire sous deux formes :

— huit multiplié par six divisé par dix. la succession des opérations est privilégiée comme le met en évidence la Figure 3.
— huit multiplié par six dixièmes. Le résultat sera exprimé en dixièmes. Il est égal à huit multiplié par six, soit quarante huit dixièmes.

Ces diverses approches permettent aux élèves de se forger une démarche correcte pour effectuer ces opérations. Ce type de calcul posé régulièrement en calcul mental permet également de remettre en question le fait admis par un grand nombre d'élèves, à savoir que la multiplication agrandit toujours.

En ce qui concerne la multiplication des nombres décimaux entre eux, le type d'erreurs rencontrés serait plutôt du genre :

$$0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}9 \quad \text{au lieu de} \quad 0{,}3 \times 0{,}3 = 0{,}09$$

Remarquons que le choix des nombres est important, car la réponse correcte :

$$0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$$

peut être obtenue par les élèves même avec le traitement incorrect déjà mis en évidence !

Le travail précédent étant assimilé, l'apprentissage correct de la multiplication des décimaux peut se faire rapidement avec succès. Un approche envisageable consiste à voir le produit de deux décimaux comme étant le produit d'un décimal par une fraction décimale et de réinvestir la méthode déjà acquise :

$$0{,}7 \times 0{,}3 = 0{,}7 \times \frac{3}{10} = \frac{2{,}1}{10} = 0{,}21$$

ACTIVITE 3 Fraction d'aire et multiplication des décimaux.
Dessiner un carré dont le côté mesure 10cm. L'unité de longueur mesure 10cm, et ce carré représente une unité d'aire.

1) Dessiner les rectangles suivants dont on donne les dimensions exprimées avec l'unité d'aire choisie ci-dessus.

Rectangle	Longueur	Largeur
1	0,3	0,2
2	0,4	0,3
3	0,25	0,15
4	1,2	0,2

2) A l'aide du dessin, indiquer combien mesure l'aire de chacun de ces rectangles.

3) Recopier les calculs ci-dessous et donner leur résultat :
$0,3 \times 0,2$ $0,4 \times 0,3$ $0,25 \times 0,15$ $1,2 \times 0,2$
Vérifier votre réponse à l'aide des questions 1) et 2).

4) Dessiner plusieurs rectangles non superposables qui ont pour aire 0,12 unités d'aire. En lisant les longueurs des côtés, donner plusieurs produits de nombres décimaux qui sont égaux à 0,12.

5) Dessiner les rectangles suivants :
— un côté mesure 0,2 unité de longueur, son aire mesure 0,32 unités d'aire.
— un côté mesure 0,5 unité de longueur, son aire mesure 0,6 unités d'aire.
— un côté mesure 0,8 unité de longueur, son aire mesure 0,08 unités d'aire.

L'activité 3 fait naturellement suite à l'activité 2 : l'interprétation d'aires donne un sens au produit de deux nombres décimaux. Les élèves disposent alors d'un nombre important de points de vue pour effectuer mentalement ou en posant les opérations ces multiplications : langue naturelle, aires, opérateurs.

Une autre approche peut constituer à faire le lien entre l'aire d'un rectangle et les changements d'unité. Pour calculer l'aire d'un rectangle de dimensions 8,3 cm et 4,7 cm, on peut prendre comme unité le millimètre carré, compter le nombre de millimètre carrés dans ce rectangle en effectuant le produit de 83 par 47, puis de convertir en centimètres carrés (voir le paragraphe suivant).

Aires et périmètres

Les élèves arrivent au collège avec des idées floues sur ces notions, mais connaissent bien des formules dont ils ne maîtrisent pas la signification et qu'ils essayent à tout prix d'appliquer. On peut se demander quel est l'intérêt de faire apprendre les formules aux élèves de l'école primaire [8]. Leur sens est totalement occulté, et leur application n'apporte strictement rien à la compréhension de ces concepts, bien au contraire. Leur intérêt peut résider dans le remplacement des lettres par des valeurs numériques dans le cadre de l'initiation au calcul littéral, mais il est bien limité à ce niveau. Les formules suivantes sont connues à la sortie de l'école primaire : le périmètre du rectangle, l'aire du carré et du rectangle, parfois l'aire d'un triangle quelconque et la longueur du cercle.

La perception des aires et leurs propriétés additives peut servir de support à l'addition des décimaux, (activité 2) et à leur multiplication (activité 3). Les travaux qui consistent à compter le nombre de centimètres carrés contenus dans un rectangle aux dimensions entières, puis le nombre de millimètres carrés contenus dans ce même rectangle nous semblent essentiels. On peut donner un sens à la formule de l'aire du rectangle pour des entiers, et étendre cette formule aux nombres décimaux. On peut alors réaliser un lien géométrique entre la multiplication des décimaux et la multiplication des entiers qui lui est associée. Notons que l'extension de ces formules aux autres catégories de nombres dans les classes ultérieures [9] est le plus souvent passée sous silence, en particulier pour les irrationnels [Friedelmeyer 2000]. On peut également expliquer pourquoi les changements d'unité d'aire se font par puissances de cent.

8 cette focalisation sur les formules d'aire et de périmètre constitue certainement un obstacle à la compréhension même de ces notions. La présentation du périmètre du rectangle sous la forme P = 2 × (l + L) génère des confusions avec la notion d'aire à cause de la présence de la multiplication. Remarquons que dans les nouveaux programmes de l'école primaire, les formules d'aire devraient disparaître, ce qui nous semble être un bon point.

9 sauf peut-être pour la multiplication des fractions en cinquième.

Le travail sur les aires permet déjà de proposer en sixième une sensibilisation à l'existence d'autres nombres sans les nommer, les irrationnels, comme le suggèrent les deux exercices ci-dessous.

Bien entendu, on peut modifier les valeurs numériques et faire intervenir des nombres décimaux dans les questions préparant à la question finale. Les élèves cherchent une réponse, et on peut leur faire trouver qu'il n'existe pas de nombre décimal qui répond au problème posé en examinant le produit du dernier chiffre par lui même dans la multiplication.

La première question ne pose aucune difficulté, alors que la deuxième soulève un problème que l'on sait résoudre géométriquement (bien que cette solution ne soit pas évidente pour des élèves de collège) et qu'on ne sait pas à ce niveau résoudre algébriquement.

EXERCICE 12

1) *Quel est le côté d'un carré dont l'aire est 100 cm² ?*
2) *Quel est le côté d'un carré dont l'aire est 49 m² ?*
3) *Quel est le côté d'un carré dont l'aire est 121 dm² ?*
4) *A la question « trouver le côté d'un carré dont l'aire est 60cm² », Jean a répondu 7,7 cm et Pierre a répondu 7,8 cm.*
   a) *Qui a raison, et pourquoi ?*
   b) *Proposer une autre réponse.*

EXERCICE 13

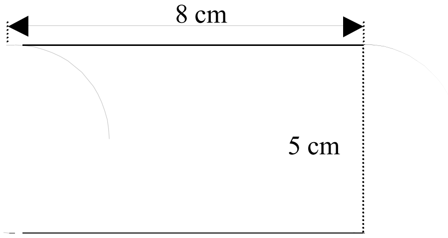
1) *Tracer un carré d'aire 1 cm².*
2) *Tracer un carré d'aire 2 cm² et donner la mesure de son côté.*

Les deux exercices précédents qui aboutissent à l'évocation de nombres non décimaux, font travailler des registres différents. Dans le premier, on reste exclusivement dans le registre algébrique, et la recherche privilégie ce cadre en supposant qu'il existe effectivement un carré d'aire 60 cm^2 (existence qui n'est évidemment pas mise en doute par les élèves). Le second exercice privilégie le registre graphique et demande également une réponse dans le registre algébrique.

La notion d'aire est beaucoup travaillée au travers d'exercices de reconfiguration, en additionnant ou soustrayant des aires, et en faisant des découpages pour se ramener à une figure connue. Le périmètre n'a pas cette propriété et les élèves font souvent l'erreur d'additionner des périmètres de figures qui sont assemblées, ou de calculer l'aire d'une figure après avoir changé sa forme. En particulier le calcul de périmètre de la figure donnée dans l'exercice 14 pose un problème presque insurmontable à une frange non négligeable d'élèves de sixième :

EXERCICE 14

Calculer le périmètre et l'aire de la figure ci-dessous :



Ces élèves sont persuadés que le périmètre de la figure après recollement du demi disque « extérieur » dans le demi disque « intérieur » est le même que celui de la figure de départ. Cette difficulté réside partiellement dans le calcul de la longueur du cercle qui est au programme. Même avec des manipulations de ficelle et de cylindre pour appréhender cette notion, la formule $P = 2 \times \pi \times R$ reste bien mystérieuse. Le nombre π n'a pas de un statut consistant. à ce niveau. On jongle entre la valeur fétiche 3,14 et la valeur affichée par la calculatrice pour faire des calculs numériques. A ce niveau, il n'est pas question d'approximer π par la méthode des polygones réguliers.

La réponse numérique du calcul effectif de l'aire et du périmètre d'une figure n'a finalement que peu d'intérêt. Ce qui importe, c'est la méthode de calcul de ces grandeurs. Le calcul numérique peut alors être un prétexte à faire des exercices techniques d'addition et de multiplication de décimaux. Les calculs effectués pendant l'étude des notions d'aire et dans une moindre mesure (sans jeu de mots) de périmètre peuvent être l'occasion d'un retour sur les opérations utilisant les nombres décimaux , mais ils devraient être menés en gardant une idée de la signification de la réponse numérique obtenue. On voit trop d'exercices de calculs sans grand intérêt et sans signification concrète pour les élèves.

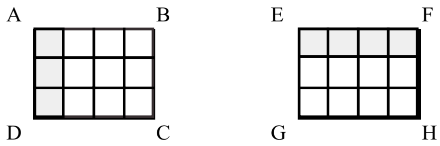
Nombres fractionnaires

Une des difficultés de l'étude des nombres fractionnaires consiste à passer de la fraction en tant que partage à la fraction en tant que nombre. La lecture graphique de partage d'aires en partie égales est le support privilégié du travail sur les fractions. Cette approche est bien perçue par les élèves et représente une entrée en la matière facile. Faire lire des fractions, colorier des fractions données est aisé. Construire des fractions d'aire données en laissant le libre choix de l'unité est un travail constructif. La première difficulté qu'auront les élèves se rencontre avec les fractions plus grandes que l'unité, et le travail sur les aires permet de l'aborder. Une activité classique consiste à poser les questions de l'exercice 15 ci-contre pour travailler les trois étapes évoquées plus haut.

L'étape suivante peut consister à faire des partages de longueur, et à cette occasion, la fraction commence à être perçue comment pouvant être un opérateur multiplicatif sur les longueurs et donc sur les nombres. Elle peut aussi être interprétée comme le quotient de deux nombres. Situer une fraction sur une droite graduée dont on a judicieusement choisi l'échelle permet de renforcer la signification du nombre fractionnaire. La perception de la notion de fraction en utilisant la perception des longueurs sur une ligne droite est bien plus difficile, mais c'est ce travail qui permet de faire acquérir le statut de nombre aux fractions, et également la notion d'opérateur fractionnaire. On peut développer une vision statique (on a pris trois segments sur cinq pour obtenir la fraction trois cinquième), mais il est également intéressant de développer une approche dynamique de cette notion comme nous le proposons dans l'activité 4 présentée à la page suivante.

Ces exercices peuvent être complétés par des partages de segments en parties égales sur feuille blanche et à main levée. Les activités de tracés à main levée sont très formateurs, et souvent oubliés ou négligés [10]. On peut bien sûr aussi faire tracer des segments de longueurs

EXERCICE 15



1) *Quelles fractions des rectangles ABCD et EFGH sont-elles coloriées ?*

2) *Dessiner trois rectangles dont les côtés mesurent 3cm et 8cm. Colorier sur ces dessins les* $\frac{2}{3}$*, les* $\frac{3}{4}$ *et les* $\frac{5}{6}$ *de leur aire.*

3) *Dessiner un rectangle IJKL et colorier une aire qui représente les huit quinzièmes de sa surface.*

4) *Dessiner un rectangle RSTU et colorier une aire qui représente les dix huit quinzièmes de sa surface.*

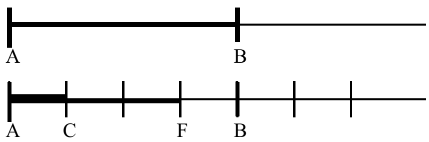
quelconques, et faire placer à l'aide d'un calcul des points réalisant un partage donné. L'activité 5 suivante est très intéressante Elle consiste à faire partager un segment de 20 cm de long en treize parties égales. Aucune approximation au dixième du quotient de 20 par 13 ne donne une réponse satisfaisante et crée un doute chez les élèves quant à la qualité de l'approximation décimale utilisée. La suite de l'activité propose des solutions à ce problème. On peut par exemple augmenter la précision de l'approximation du quotient de 20 par 13, ou utiliser des parallèles en précisant que la propriété utilisée sera utilisé plus tard (Thalès).

10 on peut penser aux tracés à main levée de parallèles, de perpendiculaires, de médiatrices, de symétriques…

ACTIVITE 4 Activité partage de segments (extrait)

Dans toute la suite, les points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K et L sont situés sur une graduation régulière.

Un exemple de partage de segments.



On choisit le segment [AB] comme unité de longueur. Pour obtenir le segment [AF] à partir du segment unité [AB], on peut adopter trois points de vue :

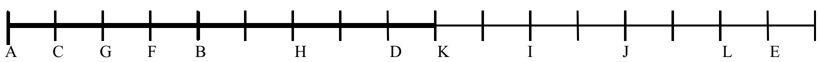
(a) On divise le segment [AB] en 4 parties égales, et on en prend 3 pour obtenir le segment [AF].
La longueur du segment [AB] est divisée par 4, puis multiplié par trois pour obtenir la longueur du segment [AF].

On peut schématiser cette opération par : (b) $AB \xrightarrow{\div 4} AC \xrightarrow{\times 3} AF$

On dit que le segment [AF] mesure les trois quarts du segment [AB], ce qui se traduit par

la relation entre les longueurs : (c) $AF = AB \times \frac{3}{4}$ ou bien $AF = \frac{3}{4} \times AB$

1) En adaptant le nom des points pour chacun des segments [AC], [AD], [AE], [AG] et [AH] :
— écrire une phrase comme (a).
— faire un schéma comme (b).
— écrire la relation entre les longueurs comme (c).



Reprendre la question 1) avec les segments [AB], [AC], [AD], [AI], [AJ] et [AL].

2) Recopier et compléter les points de suspension en utilisant seulement les noms des points de la figure de la question 1) :

a) Le segment [AF] mesure les trois huitièmes du segment …

b) Le segment [AK] mesure les neuf sixièmes du segment …

c) $\frac{3}{9} \times BJ = ...$

d) $\frac{8}{3} \times AF = ...$

3) Tracer un segment [AB], et marquer sur ce segment le point C tel que la longueur [AC] soit égale aux trois quarts de celle du segment [AB].

ACTIVITE 4[11] **partage de longueur et approximation décimale (extrait)**

1) Le segment [AB] ci-dessous mesure 20 cm et a été partagé en 13 segments de même longueur.

A  B

Reproduire la figure en grandeur réelle.

2) a) Expliquer la méthode utilisée.
b) Est-elle satisfaisante ?
c) Quelle est la longueur choisie pour chaque segment ?

3) a) Julie a pris 1,5 cm pour la longueur de chaque segment. Est ce correct ? Quelle erreur commet-on en mettant bout à bout 13 segments de cette longueur ?
b) Hervé pense que la longueur de chaque segment est 1,6 cm. Est-ce correct ? Quelle erreur commet-on en mettant bout à bout 13 segments de cette longueur ?
c) Elodie pense que la longueur de chaque segment est égale à 1,538 cm. Est-ce correct ?
…

Lorsqu'on commence à évoquer le nombre fractionnaire comme quotient de la division de deux nombres, apparaît une difficulté qu'un nombre non négligeable d'élèves n'aura pas surmonté à la sortie du collège : certains de ces nombres sont décimaux (même entiers parfois !), et d'autres n'admettent pas d'écriture décimale finie. Ce phénomène perturbant sera générateur de nombreuses erreurs faisant intervenir des nombres fractionnaires. Les problèmes de proportionnalité, les solutions d'équations et l'utilisation de la réciproque du théorème de Thalès entre autres sont souvent mal-traités[12] à cause de cette difficulté. L'acquisition de la notion de nombre fractionnaire non décimal est un travail difficile que doit mener le professeur de mathématiques dans ses classes tout au long de l'année.

La compréhension qu'ont les élèves de la notion de fraction comme quotient dans la division de deux nombres peut-être améliorée par un travail sur la multiplication qui lui est associée. Le genre d'exercices ci-dessous est intéressant à pratiquer dans cette optique :

EXERCICE 16

Répondre aux questions suivantes sans effectuer de division et en donnant une justification :

1) *le quotient de 9 par 6 est-il égal à 1,5 ?*
2) *le quotient de 16 par 5 est-il égal à 3,2 ?*
3) *le quotient de 25 par 3 est-il égal à 8,33 ?*

11 cette activité est extraite du livre de sixième de l'IREM de Strasbourg, collection collège, éditions ISTRA 1986.
12 il n'y a pas d'erreur de frappe !

EXERCICE 17

Encadrer les quotients suivants par 2 entiers consécutifs (exemple : 5 < 49 ÷9 <6) :

$$\frac{4}{3} \qquad 10 \div 4 \qquad \frac{20}{3} \qquad \frac{12}{5}$$

La calculatrice est interdite, et les élèves sont invités à poser une multiplication, dont le résultat fournit rapidement la réponse. Cette méthode prépare le terrain aux futures vérifications de solutions d'équation et à la recherche de solution d'un problème par essai erreur. Le thème des quotients est également l'occasion de travailler la notion d'encadrement de nombres fractionnaires par des entiers ou des décimaux…

Opérations sur les nombres fractionnaires

Les seules opérations sur les nombres fractionnaires vues en sixième sont :

— l'addition et la multiplication des fractions décimales, en lien étroit avec la somme et le produit des nombres décimaux (voir l'utilisation qu'on peut faire de cette pratique dans les paragraphes se rapportant aux nombres décimaux). Le travail sur ces opérations dans le cadre algébrique ne nous semble pas judicieux à ce niveau.

— la multiplication d'un nombre décimal, ou le plus souvent entier, par un nombre fractionnaire. Ce thème intervient également dans le calcul des pourcentages.

Ces thèmes ayant été exploités dans les rubriques précédentes, nous ne nous étendrons pas davantage.

Nombres fractionnaires, proportionnalité et pourcentages

Les nombres fractionnaires sont encore rencontrés à l'occasion du travail sur les pourcentages. Les élèves doivent savoir prendre un pourcentage d'une quantité. Le lien entre le « pour-cent-age » et les fractions de dénominateur 100 est l'image que l'on cherche à créer chez les élèves. Par exemple, pour prendre 15% de la quantité 250, on effectue le calcul suivant :

$$\frac{15}{100}\times 250$$

Nombres relatifs

Les notions de nombres entiers relatifs, de repérage de ce nombres sur une droite et de repérage de points dans le plan sont les seules notions abordées en sixième.

En cinquième

Nombres décimaux, calcul littéral et priorités opératoires

Les nombres décimaux n'interviennent plus que dans les problèmes, leur structure et les opérations s'y rapportant sont censées être acquises. Bien entendu, il n'en est rien pour une partie non négligeable des élèves, et l'expérience montre que si le professeur n'est pas attentif à entretenir les connaissances sur ces nombres, les élèves les désapprennent peu à peu. Il nous semble indispensable de continuer à effectuer régulièrement des opérations qui font intervenir ces nombres, que ce soit en calcul mental ou en posant des opé-

rations à travers les différents chapitres du programme, tout au long de l'année.
Ce niveau du collège est primordial, car les élèves apprennent à structurer les calculs. Le rôle et l'utilisation des parenthèses est rapidement travaillé. Les conventions de calcul sont apprises, à savoir la priorité de la multiplication et de la division sur l'addition et la division en l'absence de parenthèses. Ainsi, les élèves doivent savoir effectuer correctement le genre de calculs suivants :

$$6 + 4 \times 3 = 6 + 12 = 18$$

au lieu de : $6 + 4 \times 3 = 10 \times 3 = 30$

Remarquons que l'erreur de priorité qu'on peut rencontrer ci-dessus se retrouve de façon non négligeable dans les travaux des élèves à propos d'un exercice fréquemment proposé au brevet des collèges (et qu'on travaille donc occasionnellement en classe). Les élèves effectuent d'abord la soustraction dans le calcul suivant :

$$A = \frac{5}{3} - \frac{2}{3} \times \frac{8}{5}$$

Très (trop ?) rapidement, le travail porte sur la distributivité de la multiplication sur l'addition.. Les élèves apprennent donc à « supprimer » des parenthèses pour transformer un produit en une somme. L'illustration classique de cette propriété se fait en utilisant la notion d'aire (voir Figure 4) :

$$k \times (a+b) = k \times a + k \times b \text{ , } k \times (a-b) = k \times a - k \times b$$

Le calcul de l'aire grisée peut se faire directement (membres de gauche des égalités ci-dessus), ou par addition ou soustraction d'aires (membres de droite des égalités ci-dessus).

Ce travail sur la distributivité sera repris en classe de quatrième et de troisième. L'acquisition de cette notion pose de nombreux problèmes aux élèves, et ceux-ci commettent beaucoup d'erreurs lors de développements un peu complexes ou de factorisations simples à la sortie du collège. L'observation de ces erreurs nous apprend qu'ils n'ont pas bien saisi les mécanismes de fonctionnement de cette propriété [13]. Le programme stipule de plus que « la factorisation n'est pas un objectif du collège » et le travail devra se poursuivre dans les classes ultérieures.

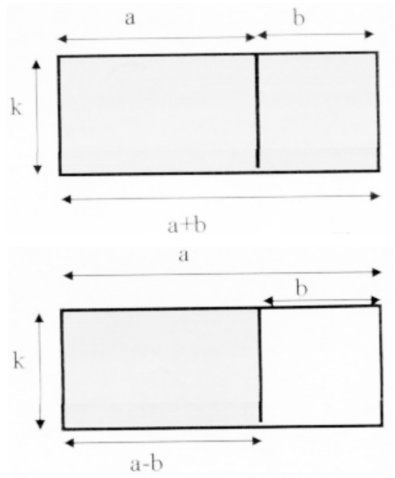


Figure 4

Nombres fractionnaires et addition

Les fractions sont sensées avoir acquis le statut de nombre, et les élèves doivent apprendre les opérations élémentaires s'y rapportant : l'addition, soustraction, la multiplication, la simplification et la comparaison. La division

13 un nouveau groupe de l'IREM de Strasbourg se penche sur ce problème actuellement, car les conséquences de ces dysfonctionnements sont très sensibles et gênants au lycée.

des fractions ne sera vue qu'en classe de quatrième. A ce niveau du collège, les nombres en écriture fractionnaire n'interviennent encore que peu dans les autres chapitres du programme, et sont souvent utilisés pour être utilisés. Analysons de façon un peu plus approfondie ce que nous constatons dans nos classes !

L'addition des nombres fractionnaires telle qu'elle est abordée en classe, suppose un implicite très fort. On n'effectue pas les opérations en respectant les priorités opératoires comme on l'a travaillé en début d'année car on manipule des nombres qui n'admettent pas toujours une écriture décimale finie. Il faut donc procéder autrement ! Dans le cadre du programme, on peut développer l'idée suivante [14]. Pour additionner deux fractions, on effectue des calculs sans respecter la priorité des opérations, et on peut factoriser l'expression numérique pour aboutir à la règle d'addition des fractions.

— en respectant les priorités des opérations :

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=0{,}4+0{,}3=0{,}7$$

— en factorisant l'expression :

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}=2\times\frac{2}{10}+3\times\frac{1}{10}=(4+3)\times\frac{1}{10}=7\times\frac{1}{10}=\frac{7}{10}$$

Le support géométrique est parfois utilisé au travers des aires. La nécessité d'utiliser un dénominateur commun pour additionner les fractions n'est pas facile à faire comprendre, car les exercices proposent souvent ce dénominateur de manière explicite. Si on veut par exemple additionner les fractions un tiers et un quart, on peut se servir des rectangles de la Figure 5 pour trouver la réponse sept douzièmes, mais le découpage adéquat est fortement suggéré.

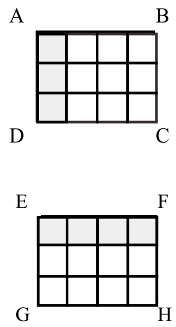


Figure 5

Cette addition peut bien sûr être illustrée à l'aide d'un rectangle quelconque en divisant le rectangle en bandes horizontales et verticales (voir Figure 6). On obtient alors de façon naturelle [15] un pavage du rectangle unité de départ qui suggère le dénominateur à adopter.

Le lien entre l'aspect géométrique et numérique est peut être un aspect à développer pour améliorer la compréhension du mécanisme de l'addition des nombres fractionnaires. Il demanderait en tout cas du temps.

L'utilisation de la langue naturelle vient encore à notre secours. Il n'est pas possible d'additionner des tiers et des quarts, car le partage effectué n'est pas le même. On doit donc choisir un partage compatible avec ces deux partages, à savoir des douzièmes. On pourra alors naturellement additionner des douzièmes

14 cette approche n'a pas été développée à notre connaissance. Il serait intéressant de l'approfondir.

15 ce découpage n'est pas si naturel qu'il n'en a l'air ! Il est impératif de réaliser un découpage horizontal et un découpage vertical pour aboutir au résultat. Cette démarche ne devrait pas rester dans le domaine de l'implicite.

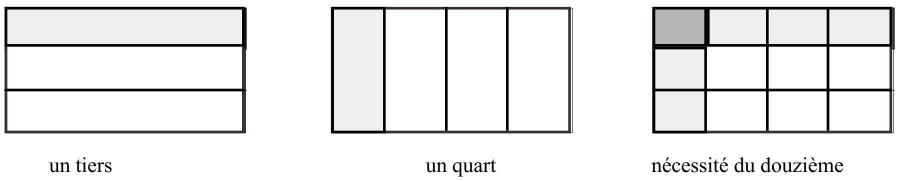


Figure 6

comme on a additionné des dixièmes en sixième.

Il semble qu'un autre obstacle est présent pour la bonne compréhension des opérations relatives aux nombres fractionnaires. Le statut et la signification du nombre fractionnaire reste en fait mystérieux pour la plupart des élèves et un travail important s'impose. La vision des fractions à l'aide d'aires, bien que donnant des résultats immédiats, reste bien insuffisante. Si on demande aux élèves combien vaut le nombre vingt huit tiers, beaucoup seront incapables de donner une réponse significativement intéressante. En prenant la calculatrice, il répondrons 9,333… avec autant de 3 que leur fournit leur calculatrice et seront très satisfaits de la réponse. Très peu seraient capables, sans calculatrice de situer ce nombre sur une droite graduée. Que dire alors de la représentation que se font les élèves d'une fraction du genre de cinquante trois dix septièmes ?

Le programme ne propose aucune piste de travail à ce sujet, et il y a ici matière à un travail, et une recherche pour que les élèves s'approprient de façon beaucoup plus intime les nombres fractionnaires. Les expériences que nous menons depuis plusieurs années et qui sont induites par le travail sur le programme de sixième nous ont naturellement amené à suivre des pistes que nous allons préciser.

La **première idée** consiste à ne travailler qu'avec des fractions « fréquentables », c'est à dire des fractions dont le dénominateur vaut deux, trois, quatre, cinq, six, et éventuellement douze. Une bonne maîtrise des opérations avec ces fractions devrait induire un traitement correct avec d'autres fractions.

Une **seconde idée** consiste à donner une idée de l'ordre de grandeur d'une fraction en décomposant des fractions sous la forme de somme d'un entier avec un fraction inférieure à l'unité à la façon anglo-saxonne [16]. Ce travail consiste par exemple au changement d'écriture suivant :

$$\frac{14}{3} = 4 + \frac{2}{3}$$

La valeur du nombre quatorze tiers apparaît ainsi beaucoup plus clairement, car le sens des fractions inférieures à l'unité est bien maîtrisé. Ce nombre comporte donc une partie entière, et une partie fractionnaire que l'on comprend bien. Les élèves donnent ainsi beaucoup plus de sens à ce nombre que ne pourrait le donner une approximation décimale.

Cette transformation est loin d'être évidente à obtenir par les élèves et demande

16 On pourra d'ailleurs faire le lien avec les disquettes de 3''1/2 (trois pouces et demi) et les disques de format 5''1/4 (cinq pouces un quart) du marché de l'informatique.

des approches variées faisant appel à divers registres d'expression comme le suggèrent les exercices ci-dessous. Cette transformation d'écriture qui consiste à décomposer une fraction sous forme de somme de deux fractions n'est pas si anodine qu'elle n'en n'a l'air : on transforme un quotient en une somme. La division euclidienne (quotient et reste entiers) est un outil privilégié pour écrire certaines décompositions.

Un aspect qui peut être sembler intéressant pour comprendre cette manipulation de fractions consiste à utiliser la règle d'addition « à l'envers ». Par exemple :

$$\frac{45}{7} = \frac{42+3}{7} = \frac{42}{7} + \frac{3}{7} = 6 + \frac{3}{7}$$

EXERCICE 18 écrire des entiers sous forme de fraction (extraits d'exercices variés)

1) *Ecrire le nombre trois sous la forme de cinquièmes.*
2) *Ecrire le nombre sept sous la forme de quarts.*
3) *Compléter :* $8 = \frac{\dots}{4}$
4) *Compléter :* $3 = \frac{\dots}{6}$
5) *Compléter :* $2 + \frac{2}{3} = 3 - \frac{\dots}{\dots}$ *et* $3 + \frac{5}{6} = 4 - \frac{\dots}{\dots}$
6) *Compléter par deux entiers :*

$$\frac{19}{3} = \dots + \frac{\dots}{3} \qquad \frac{17}{4} = \dots + \frac{\dots}{4}$$

7) *Ecrire les nombres fractionnaires sous la forme d'un nombre entier augmenté d'une fraction inférieure à 1 :*

$$\frac{17}{5} \qquad \frac{29}{6}$$

Mais l'expérience montre que cette approche ne convient pas aux élèves. Il n'est pas évident pour les élèves, même ceux qui ne sont pas spécialement en difficulté, qu'on peut séparer naturellement la fraction en somme de deux fractions pour arriver simplement au résultat. L'approche au travers de la division euclidienne est bien mieux comprise. C'est bien dommage, car cette écriture permet d'expliquer sous une autre forme des simplifications de fractions. Une erreur fréquente est la suivante (simplification abusive par 2) :

$$\frac{6x+7}{2} = 3x+7$$

alors que la simplification exacte peut être envisagée de la façon suivante :

$$\frac{6x+7}{2} = \frac{6x}{2} + \frac{7}{2} = 3x + \frac{7}{2}.$$

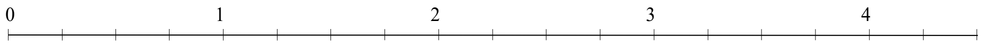
En dernier point, nous remarquerons que l'addition des nombres fractionnaires écrits sous cette forme est agréable : les partie entières s'additionnent, les parties fractionnaires s'additionnent, et on pourrait presque se limiter à savoir additionner des fractions inférieures à l'unité. Un contrôle mental rapide du résultat est bien plus facile qu'avec une écriture fractionnaire qui ne permet pas de percevoir l'ordre de grandeur des nombres en jeu. On est par exemple sûr que le résultat de la partie fractionnaire est inférieur à deux unités, et l'ordre de grandeur de la somme est bien perceptible. Hélas, cette approche montre ses limites dès que l'on aborde la multiplication des fractions puisqu'il faudrait utiliser la double distributivité pour mener à bien les calculs !

Une **troisième idée** consiste à travailler les écritures décimales de ces fractions si

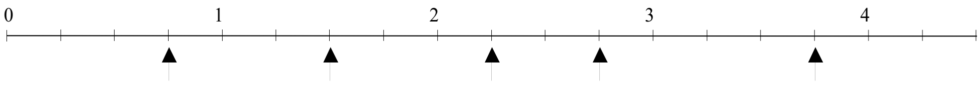
EXERCICE 19

1) Placer les nombres ci-dessous sur la droite graduée :

$\frac{1}{2}$ 0,75 $\frac{7}{4}$ 2,25 4,50 $2 + \frac{2}{4}$ $4 - \frac{1}{4}$



2) Donner une écriture fractionnaire et une écriture décimale des nombres repérés par une flèche :



elles existent, et de savoir passer rapidement de l'une à l'autre grâce à la décomposition précédente. Ainsi reconnaître des quarts dans le nombre 3,25 et des cinquièmes dans le nombre 4,6 donne du sens aux nombres fractionnaires.

Le lecteur imaginera les exercices variés qui permettent ce travail!

Une q**uatrième idée** consiste à travailler le repérage de ces fractions sur une droite graduée, en travaillant conjointement leur écriture décimale comme le suggèrent les exercices ci-dessus.

L'expérience nous a montré qu'une fois ce travail effectué, l'addition des fractions était abordé dans de bien meilleures conditions et avec une compréhension bien plus profonde.

Nombres fractionnaires et multiplication

Il semble difficile de déterminer s'il est préférable d'aborder la multiplication des fractions avant leur addition, ou réciproquement. Quel que soit le cas de figure, on constate toujours une interférence d'une des règles opératoires à l'autre !

La règle opératoire de multiplication des fractions peut-être abordée de plusieurs manières.

La notion d'aire permet une approche classique de la question. La modélisation géométrique d'une situation fournit un support visuel comme le montre l'exercice 20 de la page suivante. Cette situation peut être facilement représentée grâce à un support géométrique (voir la Figure 7).

EXERCICE 20

Un menuisier coupe les deux tiers d'une planche. Puis il coupe les quatre cinquièmes de ce morceau. Quelle fraction de la planche de départ a-t-il ainsi obtenu ?

Cette modélisation suppose que l'on effectue les partages dans des sens différents : une fois horizontalement et une fois verticalement pour que le découpage du gâteau de départ apparaisse. Si on effectue deux découpages dans le même sens, on n'obtiendra moins facilement le résultat. On aboutit alors expérimentalement à la règle algébrique de multiplication des fractions :

$$\frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2 \times 2}{3 \times 5}$$

Le problème que l'on rencontre alors est que les élèves ont tendance à faire un amalgame des règles concernant l'addition et la multiplication des fractions : pour multiplier deux fractions, ils les réduisent au même dénominateur. Dans le meilleur des cas ils multiplient les dénominateurs entre eux ce qui donne un résultat correct mais avec une fraction encore bien simplifiable. Dans le pire des cas, ils ne multiplient pas les dénominateurs entre eux ce qui donne un résultat faux. Ces cas sont illustrés ci-dessous :

— *cas 1* : réduction au même dénominateur et calcul correct avec une fraction lourde à simplifier $\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{14}{21} \times \frac{15}{21} = \frac{14 \times 15}{21 \times 21}$

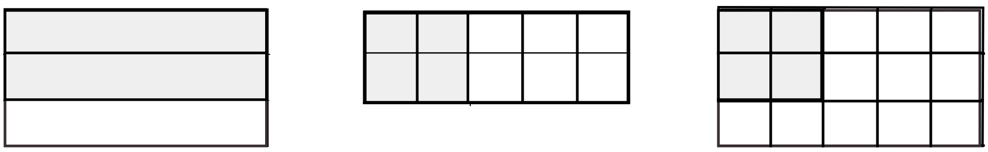
— *cas 2* : réduction au même dénominateur et erreur de principe de calcul

$$\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{14}{21} \times \frac{15}{21} = \frac{14 \times 15}{21}$$

Une autre approche consiste à utiliser la langue naturelle pour expliquer la règle opératoire de la multiplication. La lecture de la multiplication $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$ peut se faire de deux manières :

— trois quarts multipliés par cinq septièmes, mais cette lecture n'apporte rien quant au traitement à effectuer contrairement à l'addition.

— trois divisé par quatre multiplié par cinq divisé par sept. La compréhension de l'opération s'en trouve grandement améliorée, et on peut finir le calcul en



le menuisier coupe les deux tiers de la planche

il coupe les deux cinquièmes du morceau obtenu

fraction de la planche de départ qui a été obtenue

Figure 7

langue naturelle ou avoir recours aux opérateurs :

$$3 \longrightarrow \boxed{\div 4} \longrightarrow \boxed{\times 5} \longrightarrow \boxed{\div 7}$$

L'ordre des opérateurs peut-être interverti sans changer le résultat [17] :

$$3 \longrightarrow \boxed{\times 5} \longrightarrow \boxed{\div 4} \longrightarrow \boxed{\div 7}$$

Le fait d'avoir travaillé avec les élèves les divisions successives (diviser par 4 puis par 7 revient à diviser par 28) permet d'aboutir à la règle de multiplication des fractions. Le recours à ce moyen pour donner une signification à la règle de calcul sur les fractions semble donner des résultats significatifs chez certains élèves.

Remarquons encore que de nombreux ouvrages proposent des exercices analogues à l'exercice 20 comme application des opérations sur les fractions, en faisant varier quelques paramètres (prendre ce qui reste ou ce qu'on a enlevé…). La grande difficulté est que les élèves ne savent pas, même dans les années ultérieures, que pour calculer les cinq septièmes de trois quarts, il faut multiplier ces fractions entre elles. Il y a à ce niveau un obstacle qui doit certainement être traité d'une manière spécifique.

17 certains collègues m'ont fait remarquer qu'ils n'aimaient pas ce procédé, car les multiplications et la divisions « mélangées » ne sont pas associatives. Un parenthèsage dans ce genre de calcul peut aboutir à des résultats différents. Nous pensons que si le professeur a les idées claires, ceci n'a pas d'importance. En effet, la division n'est que la multiplication par l'inverse, et donc le changement de l'ordre des opérations est licite. Cette approche est la même que celle que l'on adopte pour une addition de nombreux entiers relatifs : on regroupe les nombres positifs d'un côté et les nombres négatifs de l'autre côté pour simplifier les calculs :

$$-3 + 8 - 7 + 12 - 15 + 18 = -3 - 7 - 15 + 8 + 12 + 18$$

Nombres fractionnaires et équations

En cinquième, les seules compétences exigibles sont la résolution d'équations d'inconnue x du type :

$$x + a = b \qquad cx = d \qquad \frac{e}{x} = f$$

Les deux derniers types d'équation font intervenir des nombres fractionnaires et pourraient renforcer leur statut de nombre en tant que solution d'un problème. Mais leur caractère un peu artificiel à ce niveau n'y fait rien.

Nombres fractionnaires, proportionnalité et pourcentages

Les nombres fractionnaires sont encore rencontrés à l'occasion du travail sur les pourcentages en lien avec les tableaux de proportionnalité.

Les élèves doivent à ce niveau calculer le pourcentage que représente une fraction donnée d'une quantité, ce qui revient au calcul d'une quatrième proportionnelle. Ils doivent également savoir déterminer un coefficient de proportionnalité entre deux lignes d'un tableau de proportionnalité. Suivant la façon dont sont abordés ces deux thèmes, le nombre fractionnaire est ou n'est pas investi de façon profitable. Prenons un exemple artificiel pour illustrer ce propos (cf. exercice 21 page suivante).

Il est difficile pour les élèves de trouver le coefficient fractionnaire correct, même si on varie les approches :

— compléter : $20 \times \frac{\dots}{\dots} = 250$ (registre numérique)

EXERCICE 21

Compléter la valeur manquante et le coefficient qui permet de passer de la première à la deuxième ligne dans le tableau de proportionnalité suivant :

Elèves qui portent des lunettes	20	
Nombre total d'élèves	250	100

× …
…

— compléter :

20	élèves sur	250	élèves portent des lunettes.	÷
1	élève sur	…	porte des lunettes.	×
…	élèves sur	100	portent des lunettes.	

entre eux » (le lecteur curieux peut lire [FERREOL 1999] pour découvrir des propriétés de cette façon de procéder !). Le statut des nombres fractionnaires est bien perçu comme étant particulier, mais peut-être pas comme le professeur le voit : pour l'élève, c'est la difficulté d'effectuer des opérations qui compte avant tout !

Remarque générale sur le calcul fractionnaire

Il semble en tout cas clair que le calcul fractionnaire est perçu comme une partie bien à part du programme par les élèves, et qu'ils ne l'aiment pas car il est la source de nombreuses difficultés. Les règles de calcul sont souvent mal apprises, réinvesties dans des contextes erronés par les élèves qui ne perçoivent pas son utilité. Le professeur peut passer beaucoup de temps sur ces chapitres sans augmenter de façon significative les performances des élèves. Un nombre non négligeables d'entre eux ne maîtrisera pas ces calculs à la fin de troisième et feront encore des erreurs du type « pour additionner deux fractions, on additionne les numérateurs et les dénominateurs

Nombres relatifs, addition et soustraction

En cinquième, les élèves apprennent la comparaison, l'addition et la soustraction des nombres relatifs. Le repérage des nombres décimaux sur une droite graduée , bien que proposé dans tous les manuels, devrait être envisagée de la même façon qu'en classe de sixième en tenant compte de tous les paramètres didactiques déjà évoqués dans le paragraphe correspondant. Il permettrait un renforcement fort utile de la structure du nombre décimal positif et négatif. Le professeur peut penser à varier les approches graphiques pour expliciter le fonctionnement des règles opératoires :

— l'aspect « règle à calcul » de la figure 1, les droites graduées sont horizontales et mettent en jeu la gauche et la droite, ce qui peut poser des problèmes à certains élèves « mal latéralisés ».

— l'aspect « ascenseur » dans lequel la droite graduée est verticale et permet de se rattacher à une situation concrète.

Cette appropriation des règles opératoires est difficile et longue pour les élèves. Même si les élèves comprennent bien les opérations dans un premier temps, l'étude d'une nouvelle opération ou son extension provoque immanquablement une chute des performances et une remise en cause profonde de ce qu'on pensait être acquis. Ainsi, si l'addition semble comprise, dès que l'on aborde la soustraction, beaucoup d'élèves peinent à s'y retrouver et ne savent plus rien faire ! Une autre difficulté est liée aux nombres décimaux. Si les élèves savent additionner et soustraire correctement les nombres entiers relatifs, ils vont remettre en cause leur savoir faire opératoire dès que les nombres décimaux sont utilisés.

$$17 - 43 = -26$$

Le calcul analogue avec les nombres décimaux aboutit à une réponse erronée :

$$1,7 - 4,3 = -3,4$$

La réponse correspondant à un traitement séparé des parties entières et décimales :

$$1 - 4 = -3 \text{ et } 0,7 - 0,3 = 0,4 \text{ , d'où : } -3,4 \text{ .}$$

Il n'est alors pas inutile de rappeler le travail effectué en sixième avec le nombre de dixièmes pour rappeler que c'est l'opération 17 – 43 qui fournira la bonne réponse après division par dix.

Après avoir expérimenté diverses approches, celle qui nous semble la plus efficace consiste à proposer directement aux élèves les opérations courantes dont ils s'approprient facilement les règles de calcul :

$$18 - 25 \qquad -15 - 17$$

Une fois les élèves familiarisés avec ces calculs, nous leur proposons de savoir transformer les écritures non simplifiées, et donc d'approcher des règles de transformation d'écritures comportant des parenthèses qui ne sont pas des parenthèses de priorité de calcul. Nous leur apprenons à effectuer les transformations suivantes :

$$(+18) + (-25) = 18 - 25$$

$$(-7) - (+18) = -7 - 18$$

$$(+15) - (-23) = 15 + 23$$

Il semble que cette façon de procéder qui est à l'opposé de la démarche habituellement proposée génère une moins grande confusion dans l'esprit des élèves dans l'appropriation des règles de calcul. La notion d'opposé de nombre est abordée en lien avec l'addition des relatifs. La règle de calcul « soustraire un nombre revient à additionner son opposé » est apprise à cette occasion.

En quatrième

Nombres relatifs, multiplication et division

Le premier chapitre numérique de quatrième consiste généralement à découvrir les règles de multiplication et de division des nombres relatifs. La multiplication d'un nombre positif par un nombre négatif peut être abordée grâce à l'addition répétée de nombres négatifs :

$$(-3)+(-3)+(-3)+(-3) = -12$$

(par la règle d'addition)

$$(-3)+(-3)+(-3)+$$

(par définition de la multiplication)

On en déduit que : $(-3)\times 4 = -12$

La multiplication de deux nombres négatifs peut-être justifiée en faisant appel à la distributivité :

$$(-5)\times(7+(-7)) = (-5)\times 0 = 0$$

$$(-5)\times 7+(-5)\times(-7) = -35+(-5)\times(-7) = 0$$

On en déduit que $(-5)\times(-7) = +35$

Les règles de calcul du quotient se déduisent alors de celles de la multiplication en faisant le lien entre ces opérations. Remarquons que certains élèves n'intègrent que difficilement que les nombres suivants sont égaux, et ce jusqu'en fin de troisième :

$$\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$$

Ils voient un signe négatif qui « se promène » à différents endroits du symbole fractionnaire. La vision la plus intéressante est l'écriture qui correspond à l'opposé de deux tiers quant au sens du nombre.

Une fois la règle de multiplication apprise, beaucoup d'élèves commentent de nouvelles erreurs en ce qui concerne l'addition et la soustraction des nombres relatifs, car ils retiennent une règle du genre « moins par moins donne plus » au lieu de la règle « le produit de nombres négatifs est un nombre positif » et proposent donc le calcul suivant :

$$-2 + (-3) = +5$$

Cette déstabilisation de connaissance de la règle de calcul ressemble à celle provoquée par l'apprentissage du produit et de l'addition des nombres fractionnaires en cinquième (voir ci-dessus).

Nombres fractionnaires et opérations

L'addition des fractions est maintenant pratiquée avec des fractions de dénominateur quelconque et non plus des dénominateurs multiples les uns des autres. La division des fractions est abordée, et la notion d'inverse d'un nombre apparaît. la règle de calcul « diviser par un nombre revient à multiplier par son inverse » est étudiée à ce moment là.

La résolution des équations du type : $ax + b = cx + d$ amène à des solutions fractionnaires. Les procédures de validation des solutions permettent de les valider comme nombres répondant à un problème donné. A ce niveau les élèves admettent plus facilement de pratiquer le calcul fractionnaire en tant que tel (ils ne calculent plus systématiquement d'approximations décimales). Le statut du nombre fractionnaire est donc totalement proposé à ce niveau de classe, mais sûrement pas acquis !

Nombres fractionnaires et théorème de Thalès

Une version abrégée du théorème de Thalès direct est abordée en classe de quatrième. Seule la « configuration imbriquée » est étudiée. Les fractions interviennent en tant que nombres traduisant une proportionnalité de longueurs dans une configuration géométrique particulière, et le nouveau programme tente de renforcer cette vision. En pratique, les élèves sont amenés à effectuer des calculs de longueur à partir d'une égalité de quotients. Les nombres ainsi calculés peuvent être entiers ou fractionnaires. On retrouve évidemment une erreur qu'il est difficile de corriger chez certains élèves : ils calculent la bonne valeur de la longueur cherchée, et prennent la calculatrice pour donner une valeur décimale de la réponse, même si le nombre n'en admet pas. Cette démarche est malheureusement renforcée par la vérification que nous proposons souvent aux élèves : réaliser une figure grandeur réelle, et comparer la validité de la réponse numérique à la mesure obtenue sur la figure.

Puissances de dix et notation scientifique, puissances d'un nombre

Cette rubrique du programme de 4ème est très mal perçue et comprise par les élèves. Ils ne la raccrochent à aucune notion antérieure, et elle occupe finalement peu de temps dans l'année. De surcroît, ces notions ne réapparaissent pas de façon naturelle dans le programme de 4ème. Si le professeur ne fait pas un effort particulier, ce chapitre sera clos et aussitôt oublié par les élèves. Le programme de 3ème présente une lacune à ce niveau, car aucune référence n'est faite pour revoir ces notions. Au collège, les élèves utiliserons parfois la notation scientifique en cours de physique, avec tous les problèmes qu'on peut imaginer. Il devient alors évident que les élèves rencontreront d'énormes difficultés au lycée.

Les erreurs rencontrées sont très nombreuses et variées ! Elles montrent une incompréhension profonde des notations utilisées et de leur signification. Par exemple, pour ne citer que celles là :
— la confusion entre 5×10^3 et 5^3
— la confusion entre $(-5)^3$ et 5^{-3}
— la confusion entre $(-5)^3$ et -5^3
— la confusion entre 5^2 et 5×2, qui resurgit après un certain temps …

Plusieurs raisons sont à la source de ce constat plutôt négatif. La première est bien sûr intrinsèque à la difficulté de la notion et des notations employées. La deuxième réside dans la façon dont est souvent abordée leur étude : un seul chapitre généralement tôt dans l'année et plus jamais réinvesti par la suite. La troisième réside dans l'utilisation de la calculatrice, qui constitue plus une source de blocage qu'une aide.

Deux notions bien distinctes mais néanmoins imbriquées sont étudiées : les puissances d'un nombre d'une part, la notation scientifique utilisant les puissances de dix d'autre part. Leur ordre d'étude en classe semble indifférent et interchangeable. Néanmoins, depuis plusieurs années, nous avons adopté une approche qui a permis d'obtenir des résultats significatifs dans la compréhension de la notation scientifique, et ce dans la durée. Leur réactivation en classe de 3ème montre que les élèves se souviennent et donnent un sens à la notation scientifique. Les puissances d'un nombre supérieures à 3 n'étant qu'exceptionnellement rencontrées au collège, il est difficile de les travailler à ce niveau. Nous décrivons ci-dessous la démarche adoptée.

L'étude des puissances est réalisée sur trois périodes distinctes, séparées par des chapitres de géométrie. Elle peuvent également être abordées avant ou après un autre chapitre d'algèbre. La progression est la suivante :

— Etude des puissances de dix d'exposant positif, et de la notation scientifique des nombres supérieurs à 1.

— Etude des puissances de dix d'exposant négatif, et de la notation scientifique des nombres (positifs) inférieurs à 1. Réactivation des puissances de dix d'exposant positif.

— Etude des puissances d'un nombre, d'exposant positif et ensuite d'exposant négatif. réactivation de la notation scientifique.

Pendant toute cette période, et pendant un certain temps après, chaque contrôle comporte plusieurs questions sur ces rubriques. Des remises au point sont souvent nécessaires !

L'utilité des puissances de 10 peut être introduite à partir de la calculatrice, mais il est plus important de faire sentir la nécessité d'un codage pour écrire des « grands » ou des « petits » nombres décimaux. L'affichage des calculatrices n'aide pas à l'écriture ni à la compréhension de la notation scientifique. Lorsque le résultat d'une opération est affiché en mode scientifique, l'affichage de la puissance de 10 est simplement décalé, et éventuellement plus petit. Les nouveaux modèles affichent la multiplication de la mantisse par une puissance dix, et ce de façon peu agréable à lire comme le montre la Figure 8 ci-sessous.

La nécessité d'un codage pour afficher des nombres qui ne peuvent pas être affichés sous forme décimale motive l'introduction de la notation scientifique des nombres. L'utilisation des puissances de dix est facilement justifiée. Il reste à motiver le choix d'un nombre compris entre 1 et 10 pour la mantisse, ce qui demande un travail important. Un travail sur le système de numération décimal utilisant les puissances de 10, semblable au travail effectué à l'école primaire ou en sixième, est alors proposé. Des exercices de multiplication et de division par les puissances de dix est également effectué.

L'introduction des puissances de dix d'exposant négatif se fera soit par le même biais, soit en utilisant la notion d'inverse d'un nombre. L'expérience montre que ce l'étalement dans le temps de cette étude est profitable à une meilleure assimilation des notions.

Si les élèves sont habitués au calcul à la main, ils manipulent relativement correctement l'écriture scientifique des nombres dans une plage allant de l'ordre de 10^{-3} à 10^{+3}.

Ancien modèle *Nouveau modèle :*

Affichage du nombre 4,3 ¥ 10 9 sur différents modèles de calculatrice

Figure 8

Mais au delà de cette plage, les calculs deviennent abstraits et ils sont perdus. Un outil simple, mais efficace est proposé aux élèves pour écrire des nombres sous forme scientifique : l'utilisation d'un tableau, qui fonctionne de façon analogue au tableau de conversion des unités [18]. Les élèves écrivent alors sans trop de problèmes des nombres sous forme scientifique à partir de l'écriture décimale et réciproquement.

Par exemple, le tableau ci-dessous illustre comment écrire le nombre 3 500 sous forme scientifique : le 0 du chiffre des unités est écrit dans la colonne de 10^0, et on lit que la puissance de 10 dans la colonne du 3, chiffre des unités de 3,5.

On obtient donc $3\,500 = 3{,}5 \times 10^3$. De même, si on écrit le chiffre des unités 2 du nombre 2,7, on obtient alors l'écriture décimale du nombre $2{,}7 \times 10^{-2}$ en ajoutant le nombre de zéros adéquat jusqu'à la colonne des unités de 10^0. D'où le résultat : $2{,}7 \times 10^{-2} = 0{,}027$:

10^3	10^3	10^3	10^3	10^3	10^3	10^3
3	5	0	0			
			0	0	2	7

Remarquons qu'un difficulté inattendue peut surgir à ce niveau : l'ordre des exposant de la gauche vers la droite (… ; +1 ; 0 ; – 1 ; – 2 ; …) est l'opposé de celui de la droite graduée usuelle !

18 l'utilisation d'un tableau est un outil provisoire efficace, qui permet de donner du sens au codage d'un nombre appelé écriture scientifique. On peut aussi raisonner en multipliant les nombres par les puissances de dix, avec toutes les erreurs qui peuvent se produire à ce niveau.

Il reste encore la notion de puissance d'un nombre. Son utilisation au collège est quasi inexistante, si ce n'est pour le calcul littéral. Les carrés sont souvent rencontrés, les cubes déjà moins, et les puissances quatrièmes sont l'exception. Pourquoi conserver ce paragraphe dans les programmes du collège ? Seuls des exercices très spécifiques les font intervenir. Nous relevons trois champs d'intervention des puissances d'un nombre qui peuvent être intéressantes, mais est-il la peine de s'y investir à ce niveau ?

— *le problème des grains de riz sur un échiquier.* On considère un échiquier. Sur la première case , on pose un grain de riz ; sur la deuxième case deux grains, sur la troisième case, quatre grains, et on double le nombre de grains de riz à chaque fois. Sur la dernière case, on aura donc la puissance soixante quatrième de deux. Le nombre total de grains de riz est énorme, et on pourrait faire une manipulation avec les élèves pour essayer d'évaluer son poids en effectuant des manipulations avec une balance. On pourra comparer à la production annuelle de riz des certains pays. Cette activité peut être riche d'ouverture vers d'autres champs disciplinaires.

— *l'explication d'un tour de magie.* On trouvera la description complète de l'activité dans [OSICKI 1996]. L'idée est la suivante. Un élève choisi un nombre entier compris entre 1 et 63, puis indique sur quelle(s) carte(s) il se trouve parmi les six cartes qu'on lui présente. Et le présentateur « devine » très rapidement la valeur du nombre choisi. L'explication de ce phénomène repose sur la décomposition d'un nombre entier dans une base de puissances de deux. L'écriture binaire du nombre est déterminée par le choix des cartes, et une simple addition donne la réponse.

— *l'explication des nombres qui interviennent dans les unités de mesure des mémoires en informatique* . Les ordinateurs fonctionnent avec un langage utilisant le système binaire. La mémoire vive (RAM) ou la capacité des disques durs se compte en kilo-octets, méga-octets et giga-octets [19]. En réalité, ces préfixes sont utilisés de façon abusive. Le kilo-octet est la première puissance de 2 qui dépasse 1000, le méga-octet est la première puissance de 2 qui dépasse 1 000 000, et le giga-octet la première puissance de 2 qui dépasse 1 000 000 000 ([20]) :

$$1ko = 2^{10}\,octets = 1\ 024\ octets$$

$$1Mo = 2^{20}\ octets = 1\ 048\ 576\ octets$$

$$1Go = 2^{30}\,octets = 1\,073\ 741\ 824\ octets$$

On obtient ainsi l'explication des nombres qui s'affichent au démarrage d'un ordinateur. La vérification d'une mémoire vive de 64Mo fait apparaître 65 536ko de RAM :

$$64\,Mo = 64 \times 1\ 024\ ko = 65\ 536\ ko =$$

$$= 65\ 536 \times 1024\ octets = 67\ 108\ 864\ octets$$

Une observation de la lecture des puissances d'un nombre révèle que les élèves ne cernent pas la signification des signes et des nombres qui entrent en jeu dans l'écriture. Il y a un problème lié à la typographie non négligeable à ce niveau. La position des symboles en tant qu'indice ou d'exposant n'est pas bien perçue et demanderait un travail qui sera utile plus tard dans les études [21]. L'exercice suivant a été proposé pour apprendre aux élèves à décoder le langage algébrique correspondant. Il s'agit de remplir le tableau suivant :

Nombre	2^3	2^{-3}	$(-2)^4$	-2^4	$(-2)^{-4}$	-2^{-4}
valeur de l'exposant						
signe de l'exposant						
faut-il prendre l'inverse ?						
nombre élevé à la puissance						
signe de ce nombre						
faut-il prendre l'opposé du calcul ?						
Calcul et résultat						

Il nous semble qu'ils en aient retenu quelque chose au niveau de l'identification des paramètres à décoder, comme nous avons pu le constater lors de la correction du contrôle qui a suivi. Les élèves qui avaient appris le cours, dans lequel figurait un tableau analogue n'ont fait que peu d'erreurs de compréhension.

Nombres irrationnels et théorème de Pythagore [22]

19 rappelons qu'un octet, comme son nom l'indique, représente un mot formé par huit bits. Un bit est l'unité élémentaire, qui ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. Les premiers microprocesseurs grand public (années 1980) maniaient des octets. La génération suivante, des mots de deux octets, soit 8 bits. Le processeurs actuels manient des mots de 32 bits, et la génération suivante arrive !

20 certains constructeurs peu scrupuleux ont commencé à utiliser ces préfixes dans le sens usuel, en utilisant les puissances de 10, et on a vu des publicités mensongères, qui ne sont détectables que par un public averti…

21 Nous pensons à l'indice pour écrire les termes d'une suite.

22 Ce paragraphe a été écrit une première fois, puis remanié après lecture de COJEREM95. En effet, le hasard a voulu que notre démarche personnelle et celle proposée dans cet ouvrage présentent un grand nombre de similitudes qui sont apparentes dans la suite de cet article. L'approche du théorème de Pythagore décrite dans cet article est directement issue de cet ouvrage.

La grande nouveauté de la classe de 4ème est l'irruption des nombres irrationnels due à l'utilisation du théorème de Pythagore. La compréhension que vont avoir les élèves de cette catégorie de nombre est liée à l'approche qu'en fera le professeur. Deux approches peuvent être proposée : une approche algébrique (la solution d'une équation dans laquelle intervient l'inconnue au carré), ou une approche géométrique. Nous détaillons ces deux aspects ci-après.

La racine carrée peut être présentée comme étant indispensable pour mesurer la longueur des côtés de certains triangles rectangles obtenus comme solutions des équations obtenues avec le théorème de Pythagore. C'est l'aspect algébrique qui est privilégié et il en résulte certainement un affaiblissement de la signification de ces nombres. Une fois admise la nécessité de ces nombres, les élèves vont calculer des longueurs dans des configurations variées. Il peut être utile, surtout au début, de leur faire calculer une valeur approchée des irrationnels ainsi obtenus, pour confronter le résultat de leur calcul avec une mesure sur la figure exacte qu'ils ont tracée.

Hélas, cette pratique mal comprise par les élèves, conjuguée au confort apporté par la calculatrice, aboutira chez certains élèves à donner systématiquement une réponse sous la forme d'un nombre décimal. Pour d'autres, il est très difficile de percevoir un nombre dont on ne connaît pas l'écriture décimale, et ils se sentent poussés à utiliser leur calculatrice pour appréhender un ordre de grandeur de ce nombre. Alors que ce phénomène, observé également pour les nombres fractionnaires, est atténué en utilisant l'écriture anglo-saxonne des fractions (voir ci-dessus), il n'existe pas à notre connaissance d'approche analogue en ce qui concerne les irrationnels. Les documents dont disposent les élèves, à savoir les manuels scolaires, ne vont hélas pas œuvrer dans le sens d'une meilleure compréhension de ces notions. La plupart des manuels [23] ne donnent aucune définition de la racine carrée d'une nombre, et se contentent d'utiliser la notation de la racine carrée sans explications. Ils utilisent systématiquement la touche racine carrée de la calculatrice pour calculer une racine carrée, ce qui donne une valeur exacte (parfois) ou une valeur approchée (souvent). Certains auteurs vont même jusqu'à demander systématiquement une valeur approchée des nombres dans leurs exercices.

Le **programme** propose à notre avis une **erreur d'approche fondamentale de la notion de racine carrée**, car il préconise l'étude de la racine carrée à l'aide de la touche correspondante de la calculatrice. Quel statut les élèves vont-ils dès lors conférer à ce genre de nombre ?

Plus rares sont les approches géométriques, comme celles proposées dans les *exercices 22* et *23* de la page suivante.

Dans un premier temps, des exercices basés sur des aires pourraient être proposés. L'*exercice 13* (dessiner un carré d'aire double de celui qui est donné) déjà proposé peut être donné dans un premier temps. La démarche proposée dans [COJEREM1995] nous semble très intéressante (voir exercice 22).

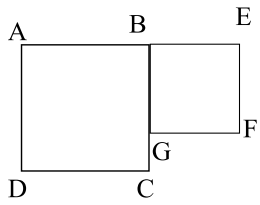
23 N'ayant conservé que les « meilleurs » manuels parmi ceux publiés pour la rentrée 1998, cette remarque ne saurait être générale. De plus, ayant été confronté aux exigences des éditeurs de manuel en ce qui concerne le temps accordé pour les rédiger, cette critique se veut constructive pour leurs auteurs qui n'ont pas le temps indispensable pour réfléchir sereinement. Mais le résultat est que les élèves ne trouvent pas dans les manuels une référence correcte pour se forger la notion de racine carrée en tant que nombre, bien au contraire.

Cet exercice se donne après *l'exercice 13* qui aura été corrigé de façon à faire apparaître une certaine démarche de découpage. Un premier découpage peut être facilement modifié pour aboutir au résultat désiré comme le suggèrent les deux Figures 9 et 10.

La position du point I, qui permet de construire un carré répondant au problème (les coups de ciseaux sont donnés en [ID] et [IF]) fait apparaître le triangle AIB rectangle en A. Les côtés de l'angle droit AI et AD ont pour mesure les côtés des carrés de départ. L'hypoténuse ID est le côté dont l'aire est égale à la somme des aires des deux carrés ABCD et BEFG. On réalise ainsi de façon concrète une vision du théorème de Pythagore. La démons-

EXERCICE 22

On donne deux carrés ABCD et BEFG disposés côte à côte comme ci-dessous, et on demande de construire en deux coups de ciseaux un carré dont l'aire vaut la somme des aires des carrés donnés.



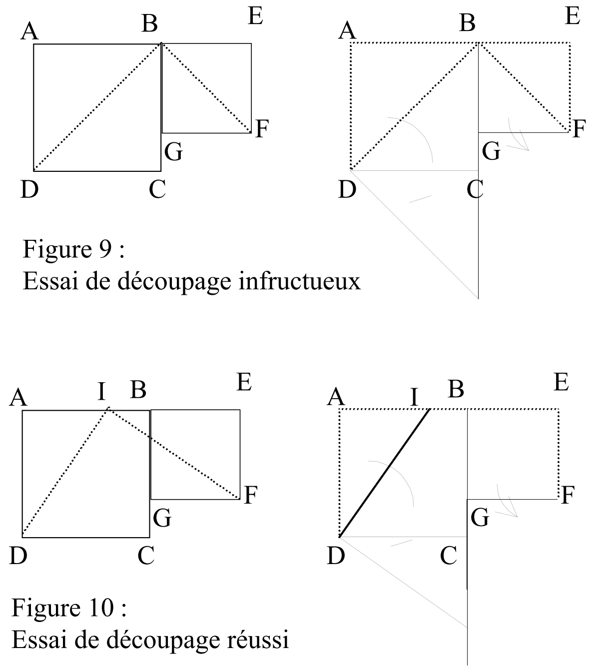


Figure 9 :
Essai de découpage infructueux

Figure 10 :
Essai de découpage réussi

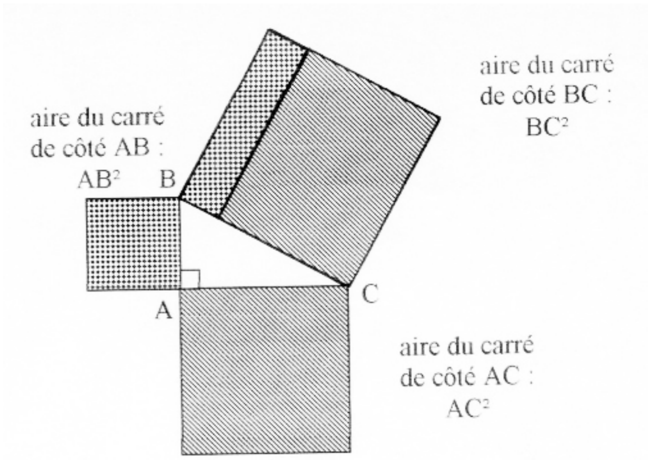


Figure 11 : Vision géométrique du théorème de Pythagore

tration rigoureuse de l'exactitude de ce découpage n'est peut être pas à faire de façon trop approfondie à ce niveau. C'est au professeur de s'adapter au niveau de la classe. Mais la synthèse doit bien dégager la vision géométrique de la figure 1, et peut mettre en évidence des déplacements [24].

D'autre part, rares [25] sont les ouvrages dans lesquels apparaît, ne serait ce que dans un exercice, la vision géométrique du théorème de Pythagore qui traduit une égalité entre les aires des carrés construits sur les côtés d'un triangle rectangle (voir Figure 11).

L'expérience montre que ce support géométrique peut servir de repère à des élèves en difficulté [26]. Une erreur fréquente consiste à écrire l'égalité de Pythagore de façon à trouver le carré du côté manquant comme égal à la somme des deux carrés des côtés connus. Ceci est évidemment faux si l'hypoténuse est connue, et le retour à la signification de l'égalité de Pythagore à l'aide de la Figure 11 permet de corriger efficacement cette erreur. Nous pensons qu'il est utile de travailler cette vision géométrique de plusieurs façons.

Une seconde approche géométrique peut-être la démonstration d'Euclide, sans rentrer dans les détails des égalités d'angles et de longueur indispensables. Le professeur devra cependant s'être assuré que la vision géométrique des parallélogrammes de base donnée et de hauteur donnée qui ont tous la même aire est bien présente chez ses élèves (on pourra lire une approche très intéressante dans [COJEREM1995].

24 Les déplacements en questions sont des rotations. Mais la notion de rotation est maintenant étudiée en classe de 3ème.
25 Les nouvelles versions des manuels parus après la rédaction initiale de cet articles semblent contredire cette affirmation…

26 il est intéressant de noter qu'un certain nombre d'élèves écrivent naturellement la réponse de BC^2 en donnant le cm^2 comme unité, puis proposent BC en cm.

EXERCICE 23

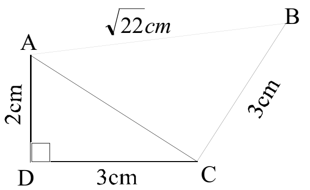
1) On choisi une unité de longueur. Construire à la règle et au compas un carré d'aire 41 (remarquer que 41 = 16 + 25 *)*

2) On choisit une unité de longueur. Construire à la règle non graduée et au compas un carré d'aire 33 (remarquer que 49 = 33 + 16 *)*

D'autres exercices de construction peuvent être envisagés comme l'*exercice 23* ci-dessus. La formulation peut varier suivant l'habitude qu'ont les élèves des règles du jeu de la géométrie à la règle et au compas.

A ce stade, le nombre irrationnel a fait son apparition, mais sa signification et son statut restent flous chez un grand nombre d'élèves. La seule opération qui est faite avec ces nombres est l'élévation au carré. Leur addition, soustraction, multiplication et division est hors programme à ce niveau. Il est d'ailleurs significatif que le calcul de $(\sqrt{3}\ )^2$ pose un réel problème à de nombreux élèves de 4ème, voire de 3ème. La nécessité de ces nombres devient plus évidente lors de l'étude de la reconnaissance des triangles rectangles connaissant les longueurs des trois côtés (réciproque du théorème de Pythagore) comme dans *l'exercice 24* :

EXERCICE 24



Le triangle ABC est-il rectangle ?

Cet exercice demande le calcul préalable de la longueur AC [2] grâce au théorème de Pythagore. Il n'est pas rare de voir des élèves calculer la valeur exacte de la longueur AC, puis d'en donner une valeur décimale approchée. Cette valeur décimale approchée sera réinvestie dans le calcul de $AC^2 + CB^2$. Il aboutira alors à la conclusion erronée que le triangle ABC n'est pas rectangle comme sur l'exemple ci-dessous :

$$\begin{aligned} &AC^2 + CB^2 \\ &= 3{,}60^2 + 3^2 \\ &= 12{,}96 + 9 \\ &= 21{,}96 \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} &AB^2 \\ &= 4{,}69^2 \\ &= 21{,}9961 \end{aligned}$$

Une autre erreur peut encore apparaître à ce niveau : quelques élèves donnent comme conclusion à ce calcul : « Les nombres $AC^2 + CB^2$ et AB^2 sont égaux à 0,1près. Donc le triangle ABC est rectangle… »

Une tentative de remédiation à ce phénomène nous semble intéressante, mais elle est bien sûr insuffisante et son impact est difficilement quantifiable [27]. Elle consiste à distinguer, de façon très imagée, les triangles rectangles des triangles qui sont « presque rectangles », c'est-à-dire dont la mesure de l'angle est proche de 90°.

L'abus de langage (un triangle est ou n'est pas rectangle) permet d'identifier une idée de façon claire et rapide. Le « vrai triangle rectangle » n'est reconnu que grâce à la rigoureuse égalité des nombres $AC^2 + CB^2$ et AB^2 .

27 bien entendu la compréhension des phénomènes d'approximation joue un rôle important dans le registre numérique.

La connaissance ultérieure des formules d'Al Kashi donnera un sens plus précis à cette approche. Une meilleure acceptation du nombre irrationnel découvert grâce au théorème de Pythagore passe par l'utilisation du théorème réciproque.

En troisième

Nombres fractionnaires et théorème de Thalès

On étudie la configuration « papillon » en plus de la configuration déjà vue en 4ème. La nouveauté réside dans la reconnaissance de droites parallèles dans une version appelée « réciproque du théorème de Thalès ». Comme pour la réciproque du théorème de Pythagore, il est impératif de travailler avec les valeurs exactes des nombres qui sont soit donnés par l'énoncé, soit obtenus par calcul. La démarche et les erreurs rencontrées sont similaires à celles relatives à la réciproque du théorème de Pythagore.

La difficulté réside bien dans l'égalité des rapports de Thalès qui doit être rigoureusement vérifiée. Il est vrai que si les nombres comparés sont « proches », les droites sont « presque » parallèles. Nous insistons sur ce point, car nous avons reçu la visite d'un parent de formation scientifique solide (ingénieur), qui contestait ce raisonnement. Il disait que la réponse qu'on pouvait donner à l'exercice proposé (les droites sont-elles parallèles ?) dépendait de la précision de calcul choisie, et comme l'énoncé ne donnait aucune indication, la réponse donnée par l'élève était valable : « les nombres sont égaux à 0,01 près, donc les droites sont parallèles ». Cette confusion est regrettable, et inquiétante venant de la part d'un scientifique. L'utilisation qui est faite de ce théorème, à savoir le calcul d'une longueur inconnue, masque toute la partie liée aux proportions et donc ne renforce pas la signification du nombre rationnel.

Considérons la configuration de la Figure 12 :

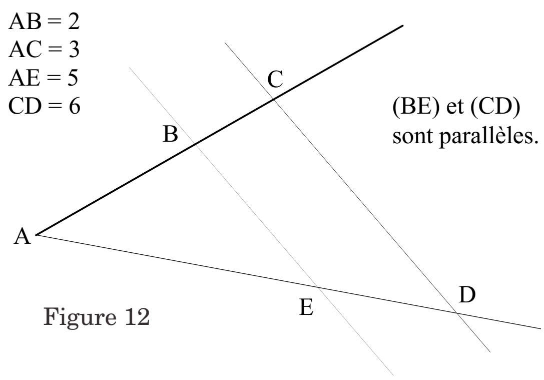


Figure 12

Dans cette figure, la grande majorité des élèves saura calculer correctement les longueurs BE et AD sous leur forme fractionnaire à l'aide des égalités :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{CD} \quad \text{et} \quad \frac{2}{3} = \frac{5}{AE} = \frac{BE}{6}$$

Mais beaucoup découvriront avec surprise que dans cette configuration, on a les égalités de longueur suivantes (aspect homothétique) :

$$AB = \frac{2}{3} \times AC$$

$$AE = \frac{2}{3} \times AD$$

$$BE = \frac{2}{3} \times CD$$

Fractions irréductibles

La seule notion d'arithmétique abordée à ce niveau est la notion de PGCD. Son calcul est purement algorithmique [28] et son étude est presque purement utilitaire [29], puisqu'il s'agit de rendre des fractions irréductibles. La notion de nombres premiers entre eux est abordée, sans que la notion de nombre premier ne soit théoriquement abordée. On peut légitimement se poser la question de l'intérêt de cette partie du programme à ce niveau, d'autant plus que les élèves simplifient des fractions au maximum depuis de la classe de cinquième !

Nombres irrationnels [30]

Les propriétés des racines carrées sont étudiées, et les irrationnels acquièrent ainsi un statut plus conséquent en tant que nombre à part entière. Les élèves sont surpris par les notions étudiées dans ce chapitre :

— L'opposé de la racine carrée d'un nombre apparaît [31]. Ce nombre négatif est souvent mal perçu, et la confusion d'écriture et de sens entre $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{-2}$ est fréquente et persistante dans le temps.

— Les nombres irrationnels peuvent être écrits sous des formes qui sont différentes. Par exemple $\sqrt{2}/2$ et $1/\sqrt{2}$ sont deux écritures d'un même nombre. Rendre le dénominateur rationnel d'un nombre tel que $\dfrac{1}{3+\sqrt{5}}$ ne figure plus au programme de troisième.

Les propriétés relatives aux produits et aux quotient sont utilisées pour simplifier des expressions. Un exercice classique systématiquement posé au brevet des collèges consiste à écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ (a et b entiers) un nombre du genre :

$$A = \sqrt{27} + \sqrt{12} + 4\sqrt{3}\ .$$

Le statut du nombre irrationnel n'en est pas pour autant renforcé, car ces propriétés relèvent des propriétés des fonctions puissances. Cette partie du programme est difficile et fort mal assimilée par les élèves.

Les erreurs que font les élèves sont identiques à celles que l'on rencontre lors de l'étude des identités remarquables :

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

et

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2$$

Un élève nous a mis sur une piste pour travailler ces erreurs. Il a remarqué sur des exemples numériques que par exemple $5^2 + 10^2 \neq 15^2$, et « qu'il n'y avait pas de proportionnalité ». Les élèves ont tendance à appliquer plusieurs règles commodes aux racines carrée et aux carrés, qui sont liées à la linéarité des fonctions, étudiée dans le cadre de la proportionnalité, et d'étendre la propriété de distributivité de la multiplication sur l'addition à ce contexte. Il semble qu'il y

28 algorithme des différence ou algorithme d'Euclide, plus rarement décomposition en produit de facteurs premiers puisque cette notion est absente des programmes. quel sens les élèves peuvent-il donner à ces démarches ?

29 Les exercices de brevet proposent parfois son utilisation pour calculer le nombre de carrés et la valeur du côté du carré de dimension maximale que l'on peut construire dans un rectangle de dimensions données.

30 On (re)lira avec intérêt l'article [ASSUDE 1996] qui apporte quelques éclairages sur les difficultés liées à la notion de racine carrée.

31 Le programme ne dit rien en quatrième à ce sujet. Il semble qu'il soit pertinent de faire remarquer aux élèves dès la classe de 4ème que lors d'un calcul de longueur utilisant le théorème de Pythagore, on aboutit à une équation qui admet deux solutions, et qu'on élimine la solution négative car elle ne peut pas correspondre à une longueur.

EXERCICE 25

1) Montrer l'égalité :

$$\sqrt{3} + \sqrt{27} = \sqrt{48}\,.$$

2) Ecrire la somme $\sqrt{8} + \sqrt{18}$ *sous forme d'une racine carrée.*

ait une piste à explorer dans ce sens, en utilisant la notion de fonction, mais est totalement hors programme à ce niveau pour l'instant.

Un autre exercice intéressant pour travailler cette erreur est proposé ci-dessus. Les élèves sont évidemment surpris par la réponse de la première question qui n'est pas $\sqrt{30}$ comme ils en ont envie. Un travail analogue à l'aide des triplets Pythagoriciens peut aussi être envisagé pour l'erreur sur le développement du carré.

Les échanges avec les professeurs de lycée nous montrent que ces erreurs, qui deviennent moins fréquentes en fin de troisième dans des exercices simples et ciblés, réapparaissent dès que le contexte devient plus complexe à l'occasion de l'étude d'autres notions. Les règles de calcul ne sont pas assimilées de façon stable et c'est une des sources des difficultés que les élèves rencontrent dans leurs études ultérieures..

Le nouveau programme invite à montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Nous avons testé plusieurs fois des exercices de la démonstration classique par l'absurde de cette propriété (supposons que $\sqrt{2}$ s'écrive sous la forme a/b, approximation de $\sqrt{2}$ à l'aide de fractions continuées, …). Même les élèves brillants ont des difficultés à comprendre l'intérêt (il existe des nombres qui ne sont pas rationnels) et le sens de cette démonstration.

L'idée du programme, qui consiste à redonner la notion de nombre aux élèves est louable [32], mais la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ à ce niveau nous semble prématurée. Il est clair que l'absence presque totale d'arithmétique au collège ne permet aux élèves de saisir la substance d'une démonstration basée sur la décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers. Une autre approche utilisant la notion de PGCD peut-être envisagée (voir LE BERRE 2002). Dans tous les cas, le temps à consacrer à ces notions semble disproportionné par rapport à leur importance.

Trigonométrie

La notion de cosinus d'un angle aigu est abordée en quatrième, et est complétée en troisième par le sinus et la tangente. On effectue alors des calculs de longueurs et d'angle, et on obtient donc des réponses approchées à l'aide de la calculatrice. Les valeurs exactes des angles remarquables ne sont pas à connaître avant la seconde. Si le professeur n'y prend garde, l'utilisation systématique des valeurs approchées à l'aide de la calculatrice renforce l'attitude des élèves vis-à-vis « du tout décimal ». On peut très bien expliquer aux élèves, et leur demander de manipuler des valeurs exactes telles le sinus de 40° ou la tangente de 75° (qu'on ne sait pas exprimer à l'aide des

32 En classe de seconde, les ensembles **Z**, **Q**, **R**, ont refait leur apparition…

fonctions élémentaires)., voire de les réinvestir dans des calculs qui nécessitent plusieurs étapes. On définit ainsi une nouvelle catégorie de nombres, au statut certes mal défini, mais qui permettent des calculs en discernant le calcul exact du calcul approché.

Quelle notion du nombre les élèves ont-ils construite à la sortie du collège ?

Le panorama des diverses situations rencontrées par les élèves dans le cadre des activités mathématiques proposées au collège suggère que ceux ci auront acquis une certaine richesse dans la conception des nombres. Hélas, la pratique quotidienne et les échanges avec les professeurs des lycées et du supérieur dénotent au contraire une pauvreté dans la conception et les connaissances qu'ont les élèves des nombres. Le seul nombre que les élèves connaissent et utilisent naturellement, de surcroît sans le maîtriser, est le nombre décimal. Le nombre fractionnaire se réduit trop souvent à un nombre décimal avec une infinité de chiffres dans le meilleur des cas, sinon avec un nombre de chiffres limité à l'affichage de la calculatrice sans qu'un sens puisse être donné à cette écriture. Que dire des nombres irrationnels ? Nous voyons plusieurs raisons à ce phénomène.

Le programme de mathématiques

Bien que le contenu du programme soit riche dans la rencontre des nombres, un manque flagrant existe dans leur conception. A part la classe de sixième, les notions d'approximation et d'encadrement ne sont pas évoquées, alors qu'elles sont fondamentales dès que l'on manipule des nombres, et ultérieurement en analyse. Il est urgent que ces notions fassent leur apparition de façon explicite et soient constamment travaillées tout au long du collège. Les professeurs de mathématiques le savent bien, puisqu'ils sont nombreux à travailler sur les valeurs approchées[33], mais plus rares à travailler les encadrements[34]. Un autre problème réside bien sûr dans l'utilisation des calculatrices qui privilégie le nombre décimal comme réponse à un calcul numérique. Nous ne pensons pas que l'utilisation d'un logiciel de calcul formel (ou d'une calculatrice très perfectionnée) puisse améliorer la compréhension du statut des nombres à ce niveau.

En sciences physiques au collège et après

Les problèmes d'approximation numérique évoqués ci-dessus sont particulièrement sensibles dans cette discipline . Nous pouvons évoquer deux aspects de l'appropriation de la notion de nombre dans cette discipline : un aspect algébrique et un aspect expérimental.

Un problème difficile se pose avec la signification du symbole « = » dans en mathématiques et en sciences physiques. En sciences physiques, du moins à ce niveau, il semblerait que les collègues utilisent ce signe alors que sa signification serait plutôt « …est à peu près égal à… aux incertitudes de mesu-

33 cette absence flagrante pose même des problèmes au brevet des collèges : De nombreux auteurs de sujet demandent une valeur approchée d'un nombre arrondie à une précision donnée, mais le programme ne précise pas quel sens donner à cette notion. Bien que les professeurs soient généralement d'accord, l'absence de cadre précis pèse lourdement sur les réponses acceptables à des questions de ce genre.
34 le lecteur attentif aura remarqué que les activités proposées intègrent la notion d'encadrement…

re près. ». On est justement très loin de l'égalité mathématique ! Et l'expérience prouve que les élèves font un amalgame qui fait que certains peuvent écrire, lors de l'utilisation du théorème de Pythagore réciproque : « comme les deux nombres sont égaux à 0,01 près, le triangle est rectangle… ». Il existe un implicite fort lors des calculs en Sciences Physiques qui pousse à donner systématiquement les résultats sous forme décimale, même si on obtient un résultat sous forme fractionnaire ou autre, car l'écriture décimale est bien plus parlante que les autres. L'incertitude du résultat lié aux incertitudes de mesures est souvent oublié (par les élèves). Les élèves peuvent donc avoir vu écrit au tableau :

$$R = \frac{4}{3}\Omega = 1{,}33\Omega$$

Cette pratique pose un sérieux problème au le professeur de mathématiques !

Les Sciences Physiques et leur côté expérimental sont un domaine privilégié pour mesurer diverses grandeurs en pratique. La manipulation de volumes avec des éprouvettes graduées est une expérience formatrice pour les élèves. Non seulement ils peuvent prendre conscience d'un ordre de grandeur des unités de volumes utilisées, mais ils sont amenés à lire des graduations en gardant un esprit critique par rapport à leurs résultats. La mesure des grandeurs électriques (intensité, tension) avait également le côté formateur de la lecture de l'indication d'une aiguille sur une graduation, avec une échelle à choisir de façon judicieuse. L'incertitude de la lecture, et donc l'approximation numérique liée au côté expérimental était présente. L'avènement des multimètres à lecture numérique avec choix automatique de l'échelle a fait perdre tout cet aspect hautement formateur des expériences que faisaient les élèves [35]. La valeur décimale automatiquement affichée par ces appareils contribue à renforcer la domination du nombre décimal. Elle est lue comme un nombre exact, et on peut faire une analogie avec la lecture de l'affichage de calculatrice et l'interprétation qu'en font les élèves.

35 certains collègues de Sciences Physiques perçoivent ce phénomène. Ainsi, dans notre établissement, ils ont fait le choix de conserver et de faire utiliser les anciens multimètres à aiguille par les élèves !

Dans le monde actuel

La dictature du nombre décimal est encore renforcée dans le monde dans lequel nous vivons. Les appareils à lecture analogique, par exemple ceux qui donnent le résultat d'une mesure à l'aide d'une aiguille ont presque disparu au profit des appareils à affichage numérique qui donnent ce résultat sous forme d'un nombre décimal. Et on a une tendance naturelle à considérer la valeur décimale lue sur un afficheur comme étant une valeur exacte et indiscutable !

L'exemple le plus marquant, et qui a pour conséquence une appropriation plus difficile de la notion des heures et minutes, est le remplacement des montres à aiguilles par des montres à lecture numérique. La division d'une demi journée en douze parties, ainsi que la division d'une heure en 60 minutes qui sont « palpables » sur les montres a aiguilles, ne sont pas du tout perçues sur les montres numériques. La notion de fraction d'heure visualisée sur le cercle est omniprésente. La lecture approximative des minutes sur une graduation circulaire est également très formatrice [36].

36 voir également la lecture des grandeurs électriques par un contrôleur analogique dans le paragraphe consacré aux Sciences Physiques.

Les autres appareils usuels (balance du rayon fruit et légumes, pèse personne, compteur de vitesse, …) ont vu progressivement remplacer la lecture d'une graduation par l'affichage d'un nombre. Certes, on peut rétorquer que la précision s'en trouve augmentée et que le confort de lecture est considérablement accru. Mais a-t-on vraiment gagné quelque chose ?

— En ce qui concerne la balance des fruits et légumes, le progrès semble effectif, surtout en ce qui concerne la rapidité de l'obtention du prix des denrées que l'on achète.

— la notion de l'ordre de grandeur est par contre complètement occulté. Le consommateur dira qu'il a acheté 718 grammes de viande car c'est la valeur affichée par la balance, mais perd de vue l'ordre de grandeur qui est de 700 grammes. Cette perception des grandeurs est évidente pour les « anciennes » générations, mais l'est-elle encore pour les « nouvelles » générations ?

— la notion de poids est perdue : équilibrer une balance avec des masses en étain permet une bien meilleure perception de cette notion et de l'ordre de grandeur des quantités en jeu que la lecture sur une graduation, fut-elle analogique.

— en ce qui concerne le pèse personnes, rend–t-on service à l'usager en lui indiquant son poids à 100 ou 200g près ? !

On peut également citer la mesure des longueurs avec un laser. La précision apportée par cet appareil ne peut évidemment pas être comparée à celle que l'on obtient avec un décamètre, un mètre et des décimètres. Mais l'appropriation des ordres de grandeur des longueurs par la mesure sur le terrain avec des outils traditionnels est bien plus efficace que par la lecture donnée par un appareil.

Conclusion

La mesure des grandeurs géométriques (essentiellement longueurs et aires) est une activité incontournable pour travailler la notion de nombre au collège. Elle peut servir de support pour comprendre l'existence de différentes catégories de nombres (décimaux, fractions, irrationnels) comme nous l'avons montré dans les exercices proposés dans cet article. La mesure des longueurs, ou de façon plus générale la mesure d'une grandeur physique à l'aide d'une graduation est un exercice incontournable pour s'approprier la signification des nombres décimaux. Cependant, ce support concret ne suffit pas à une maîtrise de l'utilisation de ces nombres : il faut également travailler dans les registres algébriques et de la langue naturelle.

Les difficultés que nous rencontrons avec les élèves sont aussi liées au contexte historique dans lequel nous évoluons. C'est bien une attitude de l'esprit que les hommes perdent peu à peu dans la société actuelle : la lecture et l'interpolation d'une graduation. Cette gymnastique de l'esprit qui aide à la structuration des nombres décimaux est remplacée par une lecture passive d'un nombre décimal. De plus, ce nombre lu sur un afficheur est interprété comme étant la valeur exacte du résultat, alors qu'il n'en est rien. La notion d'incertitude de la mesure, et donc l'idée de valeur approchée du nombre, est obligatoirement perçue dans la lecture d'une valeur par une aiguille sur une graduation. Au niveau de la formation de l'esprit, les appareils numériques nous semblent plus une régression qu'un progrès.

Nous conclurons par une remarque de bon sens qui mériterait d'être plus au goût du jour : ce n'est qu'avec une formation solide de l'esprit que l'on exploite judicieusement et que l'on profite véritablement des progrès de la technologie !

BIBLIOGRAPHIE

[IREM 2002] « Ressources pour le programme de sixième », brochure S183 de l'IREM de Strasbourg avec un CDROM d'accompagnement, Mars 2002.

[MAURIN 1993] Claude Maurin et Alberte Joshua deux tomes chez Ellipses :

« 1. Les structures numériques à l'école primaire »

« 2. Les outils numériques à l'école primaire et au collège »

[DOUADY 1986] .« Activités pour la classe de sixième : aires et périmètres » Régine Douady et Marie Jeanne Perrin, IREM de Paris 7, 1986.

[ADJIAGE 2001] « maturation du fonctionnement rationnel » Annales de didactique et de sciences cognitives ULP, IREM de Strasbourg, Vol.7, 2001 p.5 à p.48.

[FRIEDELMEYER 2000] « Des grandeurs au collège à l'analyse au lycée » Jean-Pierre Friedelmeyer, Bulletin vert de l'APMEP n°427 Mars-Avril 2000 p.215 à 240.

[FRIEDELMEYER 1998] « Les aires : outil heuristique, outil démonstratif ; » Jean-Pierre Friedelmeyer, Repères IREM n°31 Avril 1998 p.39 à 62.

[IREM de Montpellier 1996] « activités pour la classe de sixième : nombres décimaux, aires et périmètres »

[FERREOL 1999] « Addition des cancres, suites de Brocot et friandises associées » Robert Ferréol, Quadrature n°36 Avril-Mai-Juin 1999 p.13 à 24.

[COJEREM 1995] « Des situations pour enseigner la géométrie – guide méthodologique » groupe COJEREM, DeBoeck Wesmael éditeur :

chapitre IX plusieurs regards sur le théorème de Pythagore p.247 à 290.

chapitre IV aires et volumes p.113 à128.

[BENARD 2002]« Nombres et calculs au Collège : instituer une cohérence » Dominique Benard, Repères IREM n°47 Avril 2002 p.5 à 16.

[COMBIER 1996] « Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre ! » Gérard Combier, Jean-Claude Guillaume, André Pressiat, INRP 1996, en particulier p.40 à 49.

[OSICKI 1996] « La magie des puissances de 2 » Mauricette OSICKI, Bulletin vert de l'APMEP n°405 Juin-Juillet 1996 p.441 à 444.

[LE BERRE 2002] « Du PGCD aux nombre irrationnels : une approche géométrique » Maryvonne Le Berre, Repères IREM n°46 Janvier 2002 p.27 à p.37.

[ASSUDE 1996] « Un phénomène d'arrêt de la transposition didactique : un exemple avec l'objet racine carrée » Thérésa Assude, Bulletin vert de l'APMEP n°403 Avril Mai 1996 p.135 à 143.