Présentation

La Commission Inter-IREM Collège a pour objectif essentiel de mener une réflexion sur tout sujet de fond ou d'actualité concernant l'enseignement des mathématiques au Collège.

C'est dans ce cadre que ses membres se sont engagés dans la réalisation d'une brochure sur la notion d'agrandissement et réduction au collège dans le respect des nouveaux programmes.

Sans viser à l'exhaustivité, les articles de cette brochure proposent des situations variées, qui ont pour vocation de travailler diverses approches de la notion d'agrandissement et réduction au collège.
Le texte d'introduction précise le contenu de la brochure.

Cette brochure n'aurait pu être écrite sans l'investissement de tous les membres de la Commission Inter IREM Collège. Aussi nous tenons à remercier tous ceux qui ont participé à sa réalisation.

Nous terminerons en soulignant l'intérêt de la collaboration avec l'APMEP qui nous a fait profiter de son expérience en matière de publication.

Pierre CAMPET et Maëlle JOURAN
Responsables de la Commission Inter-IREM Collège

Membres de la Commission Inter-IREM Collège

IREM d'Aix-Marseille
FRICHE Charly, NENY Florence

IREM d'Aquitaine
FOULQUIER Laurianne, DELORD Robert, DEMOULIN Patricia

IREM de Brest
HERISSET Jérôme

IREM de Clermont-Ferrand
MAZE Monique, ROUX Aurélie

IREM de Dijon
MARÉCHAL Jacky, MUGNIER Jean-François

IREM de Grenoble
DEWYSPELAERE Stéphanie, LEGOUPIL Béatrice, PES Caroline

IREM de Lille
BOURREAU Sophie, CAILLÉ Romain

IREM de Lyon
MULET-MARQUIS René, MARTELET Caroline

IREM de Montpellier
SAUTER Mireille, YVAIN Sonia

IREM de Nice
CHABRIER Catherine

IREM d'Orléans
PAILLET Vincent, POIRET-LOILIER Dominique

IREM de Paris 7
CAMPET Pierre

IREM de Rennes
MONFRONT Agnès

IREM des Pays de la Loire
FRANÇOIS Guillaume, DESRUELLE Sophie, JUDAS Christian

IREM de Poitiers
CHEVALARIAS Thierry

IREM de Reims
POLLANTRU Katia

IREM de Rouen
JOURAN Maëlle, LANATA Fabienne

Préface

« La géométrie spéculative est renfermée dans les livres d'Euclide, d'Archimède, etc. Elle a pour objet les propriétés des figures, qu'elle démontre par le seul raisonnement, sans agir de la main.

La géométrie pratique agit mécaniquement. Elle apprend à travailler de la main dans toutes les professions, où l'on se sert de mesure, et elle met en exécution (par le secours des instruments) les connaissances ou préceptes de la géométrie spéculative.

Bien qu'on puisse exécuter sur le papier et sur le terrain les opérations de ma géométrie sans avoir étudié Euclide, c'est néanmoins un grand avantage lorsqu'on sait les propositions de cet auteur, parce qu'il apprend à démontrer et à rendre raison de ce que l'on fait. »

Allain Manesson-Mallet *Géométrie pratique*, 1702

Les figures semblables, sous-tendues par l'idée des agrandissements-réductions abordée ici, occupent une place centrale dans l'histoire de la géométrie théorique ou pratique, mais aussi dans la théorie des proportions, via ce que nous appelons aujourd'hui le « théorème de Thalès ». Elles permettent entre autres le passage des rapports de grandeurs aux rapports de nombres.

Ces quelques lignes d'Allain Manesson-Mallet illustrent à merveille certaines des problématiques qui peuvent surgir à propos du thème agrandissements-réductions/figures semblables. La géométrie pratique, celle où l'on se sert de mesures, qui permet l'exécution sur le papier ou le terrain, doit-elle suivre ou précéder les connaissances théoriques de la géométrie spéculative ? L'auteur semble penser que l'étude préalable de la géométrie spéculative sera un grand avantage. A contrario, Alexis Clairaut, dans ses *Eléments de géométrie* de 1741, élèvera comme principe, pour la connaissance des figures semblables en particulier, qu'il est utile de partir de la levée de plans, de la mesure sur le terrain, pour accéder ensuite à la théorie.

De façon assez naturelle l'observation d'images, agrandies ou réduites, les mesures, sont l'objet des premières activités de cette brochure. Il s'agira ensuite de mettre en place le savoir théorique qui permettra le moment voulu d'accéder à la notion mathématique de similitude, puis au théorème de Thalès, mettant en œuvre au passage les calculs de proportionnalité.

Nous sommes donc ici résolument du côté de Clairaut.

Les élèves semblent avoir une idée relativement précise de ce qu'on peut dénommer agrandissement-réduction au sens mathématique du terme. Ce n'est pas un agrandissement d'une maison par ajout d'une pièce par exemple. Certains évoquent rapidement l'étirement par un coin d'une image sur l'écran d'ordinateur. La première question est, de fait, comment reconnaître que deux figures sont agrandissement ou réduction l'une de l'autre. L'expression « de même forme » parfois proposée est évidemment très vague. Deux triangles ont la même forme « triangle » ; deux rectangles la même forme « rectangle ». L'égalité des angles (homologues ?), la proportionnalité des rapports de longueurs des côtés (homologues ?), donnent une clé, du moins pour les figures rectilignes. Je souligne à dessein ce mot savant d'homologue. Le vocabulaire mathématique semble souvent d'un accès difficile. Mais n'a-t-il pas cette remarquable qualité de la concision, de la précision ?

Avant d'en être là, se pose naturellement la question des instruments. Que sont les instruments de la géométrie ? Le compas, sans discussion, la règle, … graduée ? Le rapporteur ? … Le logiciel de géométrie dynamique est-il un instrument de géométrie ? L'enseignant-e insiste sur l'approximation des mesures liée à l'usage de certains outils. Les élèves acceptent volontiers de dire « il semble que… ». Nous sommes en cours de mathématiques, et il faudra bien faire le passage du pratique au théorique. Cela signifiera « *apprendre à démontrer et rendre raison de ce que l'on fait* ».

La mesure permet d'imaginer des critères qu'il faudra ensuite instituer dans le théorique. Alors compas et règle non graduée seront-ils les seuls instruments pour reconnaître des figures semblables, pour les « construire » plutôt que les « dessiner »? Les mathématiciens ont inventé d'autres instruments qu'il sera parfois difficile de classer dans les cases théorique ou pratique. Songeons aux compas de réduction, aux pantographes, aux échelles, etc.

Ces derniers instruments pouvaient répondre à la question de la similarité de figures non rectilignes. Autant les figures rectilignes semblables sont parfaitement définies dès les *Eléments* d'Euclide et, plus tard, tous les avantages, toute l'efficacité que l'on en peut tirer dans les démonstrations de géométrie sont exploités, autant les figures non rectilignes présentent des difficultés, mis à part peut-être les segments de cercle semblables où la seule égalité d'angles suffit. Il faut attendre la définition par Michel Chasles de ce qu'il nommera figures homothétiques pour obtenir une connaissance mathématique précise des figures semblables non rectilignes. Rappelons que Chasles définit deux figures homothétiques comme « semblables et semblablement placées ». Une invention, non gratuite, d'un mot « savant », répondant une fois de plus à une nécessité intellectuelle. La construction étymologique permet souvent d'en éclairer le sens et de l'accepter.

Tout est en place ou presque pour la notion d'homothétie, puis de similitude, en terme de transformation. Ceci permettra d'instituer qu'une figure est semblable à une autre lorsqu'elle est égale à l'une des figures homothétiques à cette autre.

Ceci posé, le « théorème de Thalès » reste probablement efficace pour la démonstration, mais il n'est plus essentiel. Le tout est de savoir ce sur quoi on va faire porter l'observation, le regard, puisque l'on ne voit en général que ce que l'on cherche. En revanche, ce théorème reste essentiel du point de vue de la projection des divisions d'une ligne sur une autre. C'est ce qui était en effet souligné dans la brochure « *Autour de Thalès* » citée en annexe, qui permet au passage de mesurer à la fois ce qui reste d'actualité, mais aussi les différences de points de vue dans l'enseignement de la géométrie, après quelques changements de programmes.

Un dernier aspect qui ressort des activités ici proposées, et qui n'est pas le moindre, est la notion de coefficient d'agrandissement ou de réduction, et son influence sur les aires et les volumes. Quel coefficient doit-on appliquer pour obtenir une aire double ? Pour obtenir un volume double ? Cela nous renvoie à de grands problèmes historiques, tels la découverte de la non commensurabilité de la diagonale et du côté dans un carré, ou celui de la duplication du cube.

Des problèmes d'agrandissement-réduction, à la notion de transformation, puis à celle des irrationnels, en passant par la linéarité, voici le voyage promis ici, pour peu que l'on donne libre cours à son imagination. Les lectrices et lecteurs n'auront pas fini d'exploiter la richesse des pages qui suivent.

Anne BOYÉ

Introduction

Dans les nouveaux programmes du cycle 4, on relève que :
- « les problèmes de construction constituent un champ privilégié de l'activité géométrique. […] La pratique des figures usuelles et de leurs propriétés, entamée au cycle 3 est poursuivie et enrichie.»
- « le théorème de Thalès est introduit en 3^{e} en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie, mais aussi les agrandissements et réductions. »

Le travail proposé dans cette brochure s'inscrit donc dans le cadre de ces textes officiels applicables à la rentrée 2016, aussi bien dans sa forme que sur le fond.
Les activités géométriques proposées visent à familiariser les élèves avec des situations relevant d'agrandissement – réduction dès la fin du cycle 3 de manière à préparer progressivement cette introduction du théorème de Thalès.

Elles ont été conçues sans élaboration d'une progression précise de sorte que chaque professeur peut choisir l'une d'elles indépendamment des autres et peut en adapter le déroulé.
Pour certaines d'entre elles, il peut avoir recours ou non à la notion de triangles semblables, d'homothétie et peut modifier aisément ces activités dans ce but.
En particulier, celles dont l'objectif est de découvrir le théorème de Thalès sont l'occasion de rencontrer l'homothétie de rapport positif dans le cas de « triangles emboîtés » ou de rapport négatif dans le cas d'une configuration croisée.

Bien qu'ayant été conçues et testées avant la parution du BO du 26 novembre 2016 fixant les attendus de chacun des cycles 3 et 4, elles sont tout à fait exploitables pour la mise en œuvre de ces programmes. Leur esprit est conforme à la philosophie de ces nouveaux textes.
Dans la mesure où chacune des équipes enseignantes de collège est libre du choix des progressions par cycle, les auteurs émettent des remarques permettant des adaptations ou choix possibles sans les fixer définitivement.
Les repères de progressivité ont toutefois été pris en compte pour les situer dans un cycle donné.

Quelques-unes comportent des fichiers numériques (fichiers GeoGebra, diaporama de présentation, etc.). Ces derniers sont téléchargeables sur le portail des IREM et sur le site de l'APMEP aux adresses ci-dessous.

http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique231
http://www.apmep.fr/IMG/zip/Agrandir_dans_tous_les_sens.zip

Reconnaître une situation d'agrandissement avec un LGD*

Auteurs : Monique MAZE – Aurélie ROUX (IREM de Clermont-Ferrand)
Christian JUDAS (IREM des Pays de la Loire)

Niveau : Cycle 3 [6^{e}]

Présentation
L'activité proposée vise à dégager les caractéristiques d'un agrandissement, en tant que situation de proportionnalité. Elle alterne les modalités de travail papier/crayon et TICE. L'utilisation d'un LGD, ici GeoGebra, permet aux élèves de mettre en évidence les invariants quand ils déplacent les points des figures.

Prérequis
Sur GeoGebra :
- savoir déplacer des points d'une figure pour en déterminer les propriétés,
- construire des figures.

L'étude préalable des angles n'est pas obligatoire pour cette activité telle qu'elle est décrite ci-dessous. Néanmoins, des adaptations sont présentées dans le cas contraire.

Objectifs principaux
- Préparer dès la classe de 6^{e} le travail autour d'agrandissement-réduction.
- Investir ou réinvestir la notion de proportionnalité (selon la progression annuelle choisie par l'enseignant).

Matériel
- Vidéoprojecteur
- Salle informatique disposant de GeoGebra
- À télécharger : dossier « Activite_TICE_6e »
  les exemples OUINON.pptx, etape2_exemple1.ggb, etape2_exemple2, etape2_exemple3, etape2_exemple4, etape2_exemple5, etape3_construction1, etape3_construction2, etape3_construction3, fiche-eleve1oui-non (doc et pdf)*, fiche-eleve2oui* (doc et pdf).
- Photocopies des fiches élèves 1 et 2
- Instruments de géométrie

Déroulement et analyse de l'expérimentation

Scénario

- Séance 1 : travail en salle informatique

- Introduction : vidéo projection de tout ou partie du diaporama « exemples OUI/NON » (annexe 1) permettant de faire émerger le concept d'agrandissement et de réduction (10 à 15 min),
- Travail en binômes sur les postes informatiques (40 min).

- Séance 2

- Travail individuel avec les instruments de géométrie sur papier (10 min),
- Institutionnalisation (10 min).

Le professeur prévoit des exercices pour compléter sa séance.

* Logiciel de Géométrie Dynamique

Description et analyse

La situation de départ s'inspire des travaux de Britt Mary Barth et d'un travail présenté par Denise Grenier concernant l'enseignement de la symétrie orthogonale.
Il s'agit de faire découvrir les propriétés relatives à un agrandissement-réduction au travers d'exemples : les exemples OUI montrent deux figures dont l'une est un agrandissement de l'autre, des exemples NON montrent deux figures qui ne se correspondent pas par agrandissement-réduction.

Séance 1 : le professeur montre des exemples OUI et des exemples NON aux élèves dans le but de leur faire formuler les caractéristiques communes aux exemples OUI.
Puis, les élèves manipulent un logiciel de géométrie dynamique afin de déterminer si les situations qui leur sont proposées sont des situations d'agrandissement-réduction : exemples OUI ou NON.

Séance 2 : les élèves doivent compléter des exemples (avec un LGD puis avec les instruments classiques de géométrie pour un travail sur papier) pour que ces exemples deviennent des exemples OUI, ils doivent donc construire un agrandissement ou une réduction d'une figure donnée.

- **Séance 1**

Idéalement, la séance se déroule dans une salle permettant un échange collectif et l'accès à des ordinateurs. La première phase de travail ne nécessite pas l'utilisation de l'ordinateur par les élèves, ils sont donc installés de façon à pouvoir regarder une image projetée et débattre tous ensemble.
Dans le cas où la disposition de la salle informatique ne permet pas de conduire un débat, le professeur peut projeter et débattre dans sa salle de cours puis poursuivre le travail en salle informatique.

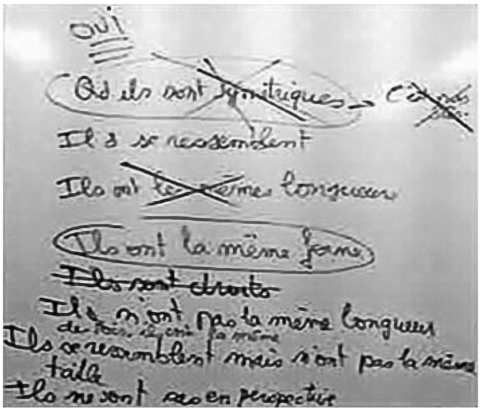
La consigne suivante est donnée à l'oral.

Consigne
Je vais vous montrer des images. *Certaines d'entre elles seront appelées exemples OUI, et d'autres exemples NON.* *Vous devez trouver quelles sont les propriétés communes à tous les exemples OUI. Je noterai vos propositions au tableau.*

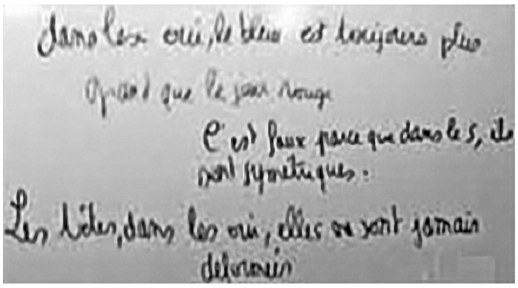
Le professeur utilise le diaporama *Les figures OUINON.ppt* dont il va projeter les diapositives.
La première d'entre elles consiste en un sommaire permettant de choisir la diapositive à projeter en cliquant sur l'icône qui lui correspond. L'annexe 1 comporte les images de chacune des diapositives et leurs caractéristiques.
Le professeur appelle exemples OUI les images qui montrent des exemples d'agrandissement-réduction. On rappelle que parmi celles-ci sont autorisées les figures se correspondant avec un retournement.

Le choix de l'ordre d'apparition des diapositives dépend des réponses des élèves.
La première doit être un exemple OUI, le professeur annonce que l'exemple projeté est un exemple OUI et note alors au tableau les propositions des élèves sans en rejeter.
En fonction des formulations obtenues, il choisit un exemple OUI ou un exemple NON du diaporama permettant de rejeter ou d'affiner peu à peu certaines propositions. Au tableau, il raie, complète ou modifie les propriétés énoncées par les élèves.
Il procède ainsi jusqu'à obtenir une formulation qui lui convienne.
Il ne s'agit pas ici d'attendre l'énoncé de propriétés formelles. On acceptera toute formulation donnant l'idée de la conservation de la forme et de la proportionnalité des longueurs. Exemples :
- « les figures ont la même forme »
- « les figures sont pareilles mais pas de la même taille »
- …

Voici deux exemples de propositions d'élèves en bilan de la projection.



« Quand ils sont symétriques. c'est pas sûr
Ils se ressemblent
Ils ont les mêmes longueurs
Ils ont la même forme
Ils sont droits
Ils n'ont pas la même longueur, des fois ils ont la même
Ils se ressemblent mais n'ont pas la même taille
Ils ne sont pas en perspective. »



« dans les oui, le bleu est toujours plus grand que le rouge
c'est faux parce que dans le 5 ils sont symétriques
Les têtes, dans les oui, elles ne sont jamais déformées. »

La consigne suivante est alors donnée à l'oral.

> **Consigne :** *Vous allez maintenant travailler avec les ordinateurs.*
> *Avec le logiciel GeoGebra, vous ouvrirez un à un les fichiers dont le nom est inscrit sur la fiche que je vais vous distribuer.*
> *Vous indiquerez sur cette fiche si les fichiers présentent des figures OUI ou des figures NON.*
> *Quand vous aurez terminé ce travail, vous m'appellerez.*

Le professeur distribue la fiche réponse (fiche élève n°1). Les élèves s'installent en binômes devant les ordinateurs et travaillent en autonomie.
Lorsqu'un binôme termine le travail, le professeur vérifie les réponses, demande aux élèves de reprendre les fichiers correspondant à des réponses fausses. Si toutes les réponses sont justes, le professeur questionne le binôme pour vérifier ses procédures.
Les exemples proposés dans ces fichiers sont de difficulté croissante, l'ordre d'ouverture des fichiers doit donc être suivi par les élèves.

Nom du fichier	Réponse	Description
etape2_exemple1	Non	Il suffit de déplacer n'importe quel point de l'une ou l'autre des figures pour observer que la forme n'est pas conservée.
etape2_exemple2	Non	Le déplacement de quelques points seulement permet de répondre.
etape2_exemple3	Non	Le déplacement du point I seulement permet de répondre.
etape2_exemple4	Oui	Une des figures est déformable, sa déformation entraîne une déformation similaire de l'autre figure. Pour répondre, on peut amener une figure sur l'autre pour faire coïncider les angles ou mettre en évidence le parallélisme des côtés et mesurer les côtés.
etape2_exemple5	Oui	Une des figures est déformable, sa déformation entraîne une déformation similaire de l'autre figure. Pour répondre, on ne peut pas amener une figure sur l'autre pour faire coïncider les angles. Il est nécessaire de mesurer les côtés. Si les angles n'ont pas été abordés auparavant, on peut évoquer le fait que les figures semblent avoir la même forme. Si la séquence sur les angles a été abordée, alors mesurer les angles s'avère être un argument supplémentaire.

Une fois le travail corrigé, le professeur donne au binôme la consigne suivante (fiche élève n°1, consigne 2) : il s'agit de constructions de l'agrandissement ou de la réduction d'une figure mettant en œuvre les caractéristiques dégagées précédemment.
Pour chacun des fichiers, la nature des figures et les coefficients ont été choisis pour permettre, soit à l'enseignant, soit aux élèves, d'invalider ou de valider la construction.
Une fois le travail terminé sur un fichier, le binôme l'enregistre. Il travaille en autonomie sans attendre la validation du professeur pour passer au fichier suivant et peut revenir à un fichier précédent. Pendant ce temps, l'enseignant circule dans la classe et repère les procédures intéressantes (erronées ou non).

Nom du fichier	Description
etape3_construction1	Le coefficient d'agrandissement est 2,5. Il s'agit de construire un rectangle en évitant alors d'utiliser d'autres angles que les angles droits. Pour déterminer le coefficient de proportionnalité, l'élève doit mesurer. Il peut mesurer le diamètre des demi-cercles (1 et 2,5) ou la longueur des deux rectangles (4 et 10). Stratégies possibles : - passer de 1 à 2,5 ou de 4 à 10 avec calcul du coefficient de proportionnalité, - procédure additive (qui peut être invalidée immédiatement en raisonnant sur le diamètre et la longueur du rectangle ou lors de la construction 2) - placer un point libre sur la perpendiculaire à la droite (A'B') passant par A' ou B', puis le déplacer pour obtenir la mesure désirée (à invalider rapidement par le professeur).
etape3_construction2	Le coefficient d'agrandissement est 1,5. Il s'agit de construire un carré (ce qui permet d'avoir des angles droits), un cercle et deux demi-cercles. Pour déterminer le coefficient de proportionnalité, l'élève doit mesurer les côtés des deux carrés. Si les élèves ajoutent 1,5 à toutes les longueurs, la longueur FC reste la même sur la seconde figure donc elle n'est pas agrandie. Cela peut les conduire à remettre en cause leurs réponses à la construction 1. Une construction est implicitement attendue : celle dont les points A' et B' sont les images respectives de A et B.
etape3_construction3	Le coefficient de réduction est 0,75 ou $\frac{3}{4}$. Pour déterminer le coefficient de proportionnalité, l'élève doit mesurer les deux diamètres des demi-cercles. La figure comprend un angle droit. On rappelle que deux solutions sont donc possibles.

Variante possible : utiliser les fichiers etape3_construction1bis, etape3_construction2bis comportant les mêmes situations sans que les points soient nommés. Dans ce cas, on autorise plus de solutions (retournement ou pas).
Si un binôme a terminé le travail avant les autres, le professeur peut lui proposer un prolongement : reprendre la construction 2, proposer une autre solution possible et déterminer le nombre de solutions (c'est-à-dire 16).
À la fin de la séance, le professeur prévoit un temps de synthèse collective. À l'aide du vidéoprojecteur, il dégage les difficultés rencontrées et les procédures utilisées. En particulier, la procédure d'ajout est rejetée parce que la figure obtenue n'a pas la même forme. On met en évidence que les longueurs des figures sont proportionnelles. On peut utiliser des formulations du type :
« Pour construire l'agrandissement d'une figure, il est nécessaire de multiplier toutes ses longueurs par un même nombre ».
Pour préparer la séance 2, l'enseignant récupère et analyse les fichiers enregistrés par les élèves.

- **Séance 2**

Le professeur procède à une phase de rappel en projetant certains fichiers des élèves, il revient ainsi sur les procédures erronées ou justes.

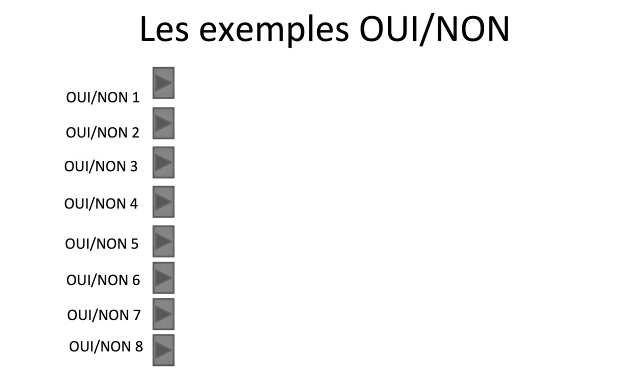
Il distribue la fiche *papier crayon 1 et 2 (fiche élève n°2),* puis les élèves construisent, à l'aide des instruments de géométrie, l'agrandissement et la réduction demandés. Il s'agit de réinvestir les propriétés énoncées précédemment. Les figures choisies pour ces constructions sont telles qu'il n'est pas nécessaire de savoir mesurer un angle ou construire un angle de mesure donnée.
Cette fiche sert ensuite d'illustration pour le cours qui consiste à reprendre ces propriétés.
On pourra écrire des phrases du type :
- la figure 2 est un agrandissement de la figure 1,
- la figure 1 est une réduction de la figure 2,
- les angles des deux figures sont les mêmes,
- les longueurs de la figure 1 ont toutes été multipliées par … pour obtenir celles de la figure 2.

Lorsque la séquence sur les mesures d'angles aura été abordée, l'enseignant pourra proposer un travail mettant en avant la conservation des angles dans une situation d'agrandissement-réduction.

Proposition d'un scénario intégrant un travail sur les angles dans le cas où ils auraient été abordés avant la question d'agrandissement-réduction.

La première phase montrant des exemples OUI/NON au travers du diaporama se déroule comme décrit précédemment. Elle ne permet vraisemblablement pas aux élèves de dégager qu'il y a conservation des angles.
Lors de la deuxième étape (manipulation des fichiers GeoGebra), les élèves sont cette fois susceptibles de remarquer que les deux figures présentes dans un exemple OUI ont des angles égaux.
La fiche papier crayon, servant de support pour le cours, peut présenter un exemple supplémentaire. Celui-ci aurait pour objectif de conduire les élèves à construire un agrandissement ou une réduction en travaillant alors à partir des angles (mesure et construction au rapporteur ou utilisation d'un gabarit).

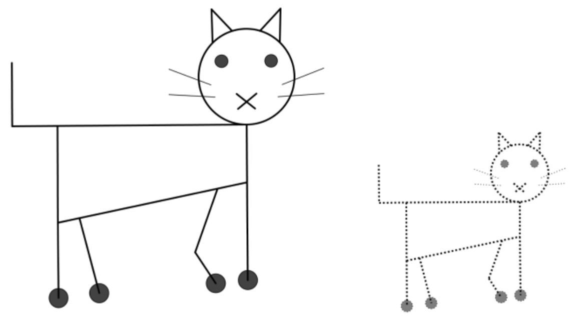
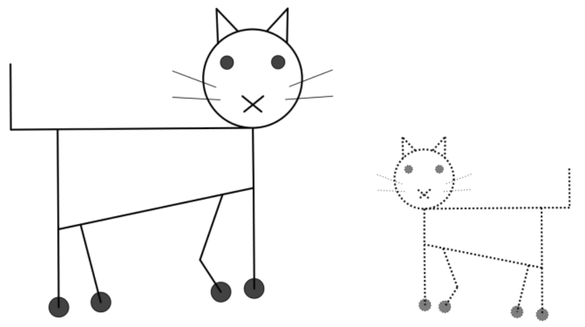
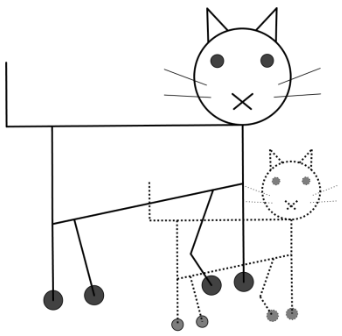
Annexe 1
Diaporama Exemples OUI/NON

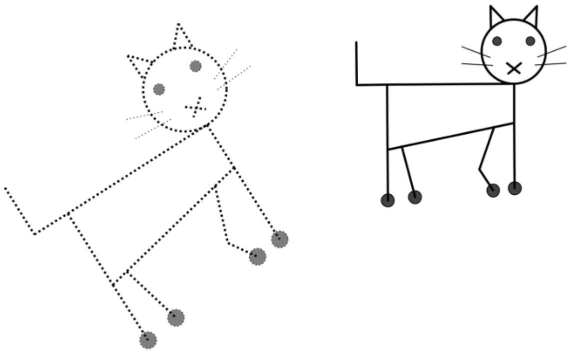
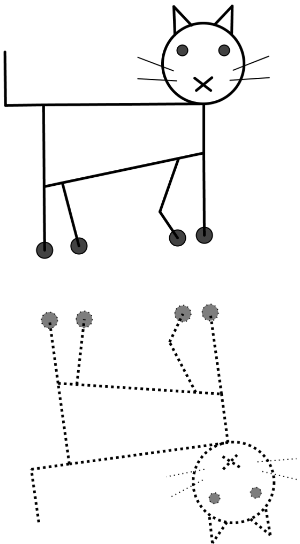
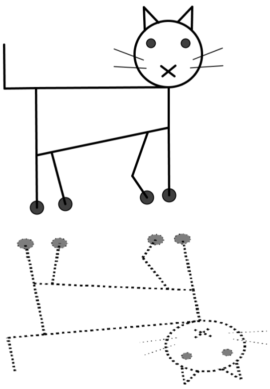
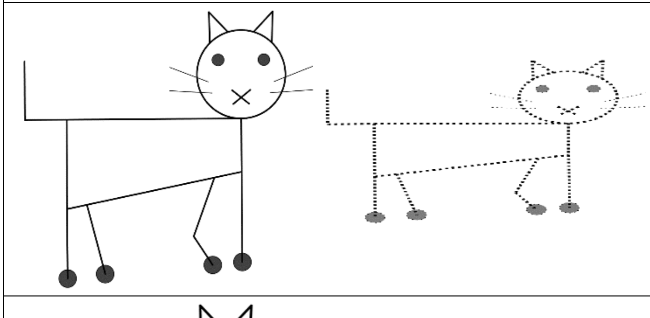
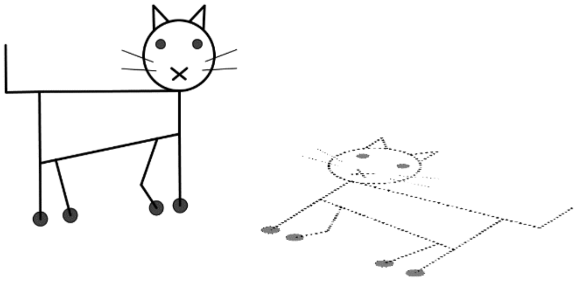
Diapositive	Caractéristiques
	**Diapositive sommaire** Il suffit de cliquer sur l'icône ▶ correspondant au numéro de l'exemple que l'on souhaite projeter.

Remarques

Dans les diapositives qui suivent :
- les chats sont représentés en couleur pour permettre aux élèves des formulations du type « le chat bleu est plus grand que le chat rouge, ... »,
- l'icône ▶ permet de revenir à la diapositive sommaire pour sélectionner l'exemple suivant.

Sur cette brochure publiée en noir et blanc, le chat dessiné en bleu apparaît en traits noirs, et celui dessiné en rouge apparaît en gris clair pointillés. Mais le diaporama présenté aux élèves est en couleur.

	**Exemple 1 : Exemple OUI** Similitude directe : - le chat bleu est un agrandissement du chat rouge, - il n'y a pas retournement, - les deux figures ne « se chevauchent » pas, - les deux figures ont « la même direction » (deux segments correspondants sont parallèles).
	**Exemple 2 : Exemple OUI** Similitude indirecte : - le chat bleu est un agrandissement du chat rouge, - il y a retournement, - les deux figures ne « se chevauchent » pas, - les deux figures ont « la même direction ».
	**Exemple 3 : Exemple OUI** Les chats se correspondent par une similitude directe : - le chat bleu est un agrandissement du chat rouge, - il n'y a pas retournement, - les deux figures « se chevauchent », - les deux figures ont « la même direction ».

	**Exemple 4 : Exemple OUI** Les chats se correspondent par une similitude directe : - le chat bleu est une réduction du chat rouge, - il n'y a pas retournement, - les deux figures ne « se chevauchent » pas, - les deux figures n'ont pas « la même direction ».
	**Exemple 5 : Exemple OUI** Les chats se correspondent par une similitude indirecte : - le chat bleu est l'image du chat rouge par symétrie axiale, - il y a retournement, - les deux figures ne « se chevauchent » pas, - les deux figures ont « la même direction ».
	**Exemple 6 : Exemple NON** - les chats ne sont pas semblables, - il y a retournement, - les deux figures ne « se chevauchent » pas, - les deux figures ont « la même direction ».
	**Exemple 7 : Exemple NON** - les chats ne sont pas semblables, - il n'y a pas retournement, - les deux figure ne « se chevauchent » pas, - les deux figures ont « la même direction ».
	**Exemple 8 : Exemple NON** - les chats ne sont pas semblables, - il y a retournement, - les deux figures ne « se chevauchent » pas, - les deux figures n'ont pas « la même direction ».

Fiche élève n°1

Exemples OUI/NON avec un logiciel de géométrie dynamique

Consigne 1

Ouvrir GeoGebra.

Ouvrir le fichier nommé : etape2_exemple1.

Ce fichier comprend deux figures. Indiquer dans le tableau ci-dessous s'il s'agit d'un exemple OUI ou d'un exemple NON.

Faire le même travail avec les fichiers nommés : etape2_exemple2 ; etape2_exemple3, …,

	Exemple OUI	Exemple NON
Etape2_exemple1		
Etape2_exemple2		
Etape2_exemple3		
Etape2_exemple4		
Etape2_exemple5		

Consigne 2

1. Ouvrir le fichier etape3_construction1.

Compléter la figure pour qu'il s'agisse d'un exemple OUI.

Enregistrer le fichier en ajoutant votre nom (par exemple : etape3_construction1DURAND).

2. Ouvrir le fichier etape3_construction2.

Compléter la figure pour qu'il s'agisse d'un exemple OUI.

Enregistrer le fichier en ajoutant votre nom (par exemple : etape3_construction2DURAND).

3. Ouvrir le fichier etape3_construction3.

Compléter la figure pour qu'il s'agisse d'un exemple OUI.

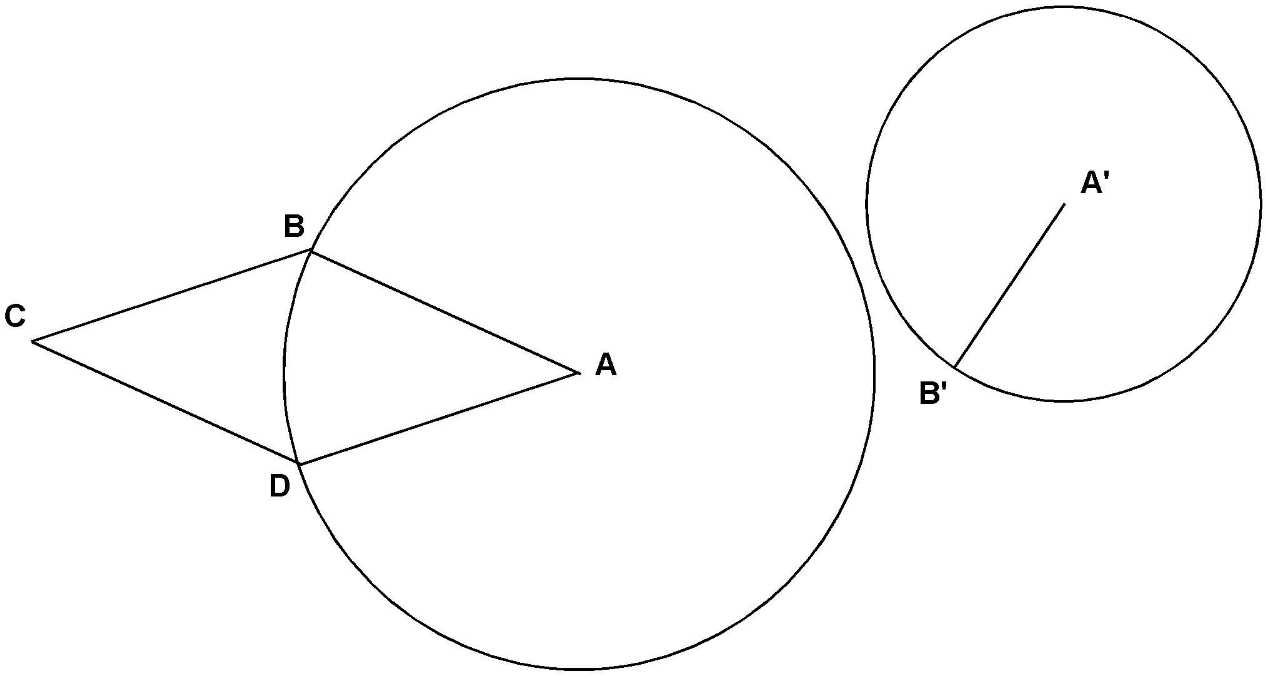
Enregistrer le fichier en ajoutant votre nom (par exemple :

etape3_construction3DURAND).

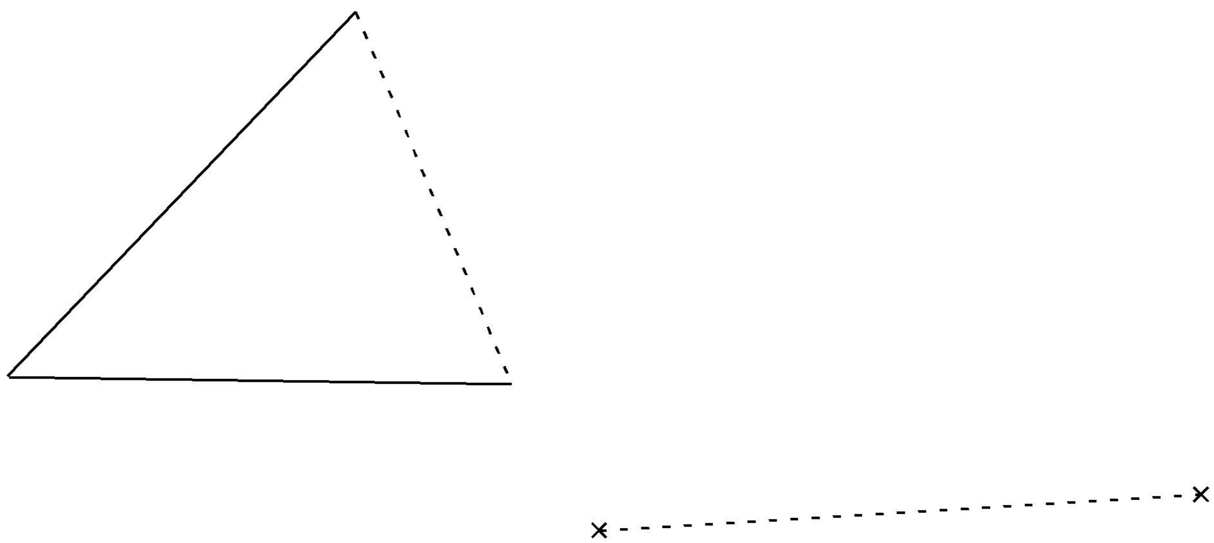
Fiche élève n°2

Exemples OUI avec papier, crayon et instruments

Avec les instruments de géométrie, complète la figure pour qu'il s'agisse d'un exemple OUI.



Avec les instruments de géométrie, complète la figure pour qu'il s'agisse d'un exemple OUI.



Les familles de rectangles

Auteur : Guillaume FRANÇOIS (IREM des Pays de la Loire)

Niveau : Cycle 4 [4^{e}]

Présentation
Cette activité se déroule en trois parties :

- la partie 1 « *Cherchez l'intrus* » est prévue pour une durée de 30 min environ,
- la partie 2 « *Bon de commande* » dure une vingtaine de minutes,
- la partie 3 est le bilan.

Il n'y a pas de bilan entre les deux premières parties. La synthèse est effectuée dans la troisième, au cours de la séance suivante.

Prérequis
Reprise de la proportionnalité niveau 5^{e}

Objectifs principaux
- Faire le lien entre agrandissement/ réduction et proportionnalité.
- Mettre en évidence, dans un repère, que les points représentant deux grandeurs proportionnelles sont alignés avec l'origine.

Matériel
- Une feuille de papier millimétré, une feuille de papier calque et une feuille blanche A4 par groupe
- Une enveloppe avec les 6 rectangles d'une série par groupe (voir annexe 1)
- À télécharger : dossier « famille de rectangles »
    famille_de_rectangles (ppt et pdf)
    annexe-rectangles.pdf

Déroulement et analyse de l'expérimentation

Scénario

Partie 1 : « Cherchez l'intrus »

La classe est partagée en 6 groupes :

- les groupes 1 et 6 ont reçu les rectangles de la série A,
- les groupes 2 et 4 ont reçu les rectangles de la série B,
- les groupes 3 et 5 ont reçu les rectangles de la série C.

Dans toutes les séries, la longueur et la largeur de chaque rectangle sont proportionnelles sauf dans un cas, qui est nommé « l'intrus ».

Voici les séries de rectangles que les groupes ont en leur possession (les rectangles annotés avec * sont les intrus).

Série A
(longueur =2,5 × largeur)

Rectangle	1	2 *	3	4	5	6
Longueur	20 cm	14 cm	17,5 cm	10 cm	7,5 cm	5 cm
Largeur	8 cm	5 cm	7 cm	4 cm	3 cm	2 cm

Série B
(longueur = 3 × largeur)

Rectangle	1	2	3 *	4	5	6
Longueur	18 cm	13,5 cm	16 cm	9 cm	7,5 cm	6 cm
Largeur	6 cm	4,5 cm	5 cm	3 cm	2,5 cm	2 cm

Série C
(longueur = 2 × largeur)

Rectangle	1	2	3 *	4	5	6
Longueur	17 cm	14 cm	11 cm	9 cm	8 cm	6 cm
Largeur	8,5 cm	7 cm	5 cm	4,5 cm	4 cm	3 cm

La consigne suivante est à projeter et à lire à haute voix.

CHERCHEZ L'INTRUS

<u>Matériel dont vous disposez</u>

6 rectangles numérotés
Une règle graduée
Une calculatrice
Une feuille de papier blanc
Une feuille de papier millimétré
Une feuille de papier calque

<u>Ce que vous devez faire</u>

Parmi les 6 rectangles, il y a un intrus.
Vous devez le découvrir et expliquer avec précision sur la feuille blanche comment vous avez fait.

Partie 2 : « Bon de commande »

Les élèves sont toujours en groupes. Une deuxième question leur est projetée et lue.

BON DE COMMANDE

Maintenant que vous avez trouvé l'intrus, vous allez le remplacer par un rectangle de la même famille. Vous devez faire tracer ce rectangle par un autre groupe.

Pour cela, rédigez votre commande sur la feuille « bon de commande » .

P.S. VOUS N'AVEZ PAS LE DROIT DE DONNER LES DIMENSIONS DU RECTANGLE.

Chaque groupe rédige son bon de commande (15 min).
Les bons de commande sont échangés entre les groupes qui en réalisent la construction (5 min).
Les groupes récupèrent ensuite le rectangle de sa commande qui remplace l'intrus, et vérifient que celui-ci convient. Le cas échéant, ils modifient juste le bon de commande.

Partie 3 : bilan

Le bilan est fait à la séance suivante. Le professeur pourra :

- projeter les travaux scannés des élèves,
- utiliser un visualiseur pour faciliter la présentation des élèves,
- projeter les séries des rectangles sur un TBI*, pour permettre aux élèves de les manipuler.

Déroulement

- Les élèves ne sont plus en groupes.
- Un représentant de chaque groupe expose la méthode employée pour découvrir l’intrus et justifie la rédaction de son bon de commande (avec la correction éventuelle que le groupe aura apportée).
- Après le bilan des élèves, l'enseignant mène les élèves vers l'institutionnalisation possible suivante.

> L’agrandissement-réduction est une situation de proportionnalité dont le coefficient est celui de l’agrandissement-réduction.
> Dans une situation de proportionnalité, les points ayant pour coordonnées les deux grandeurs mises en jeu sont alignés avec l’origine.

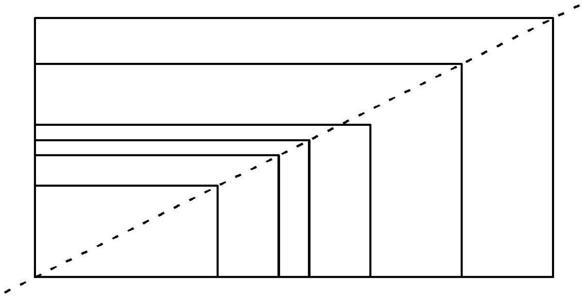
* Tableau Blanc Interactif

Analyse *a priori*

Pour la première partie de l'activité, plusieurs méthodes sont attendues pour pouvoir trouver l'intrus.

- Méthode 1 -

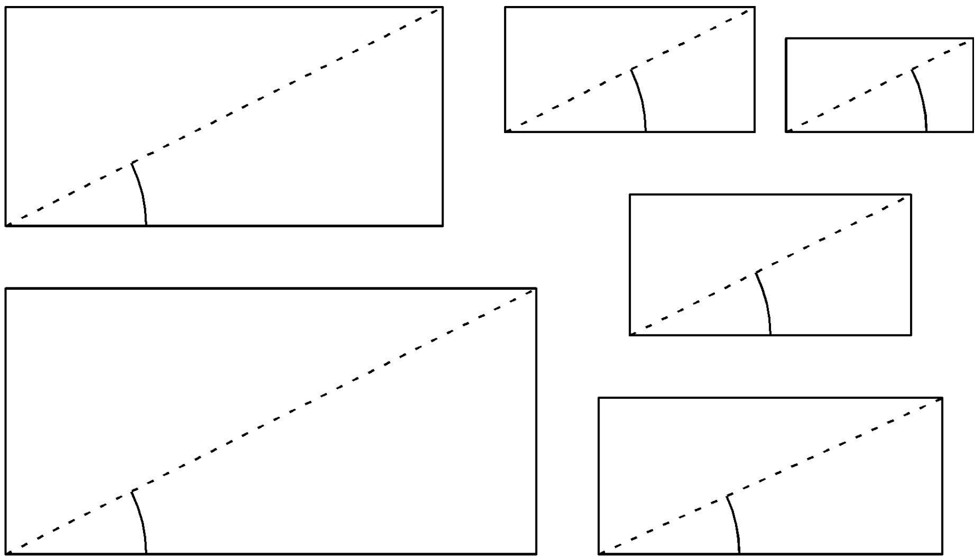
Il est possible de superposer les rectangles en faisant coïncider un sommet.



On remarque que les sommets sont alignés sauf un, celui de l'intrus.

- Méthode 2 -

On peut aussi s'intéresser à l'angle entre la longueur et la diagonale de chaque rectangle.



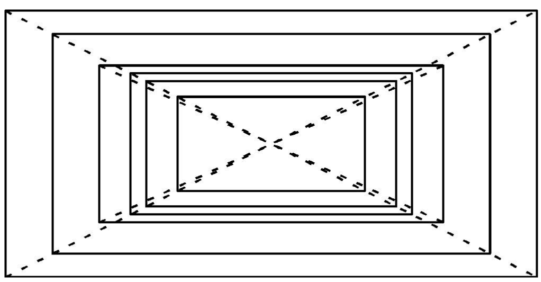
On remarque que tous les angles sont égaux sauf un, celui de l'intrus.

- Méthode 3 -

On mesure les dimensions de chaque rectangle.
On remarque que, pour chaque rectangle, la longueur est proportionnelle à la largeur, sauf dans le cas de l'intrus.

- Méthode 4 -

On trace les diagonales de chaque rectangle et on superpose leurs centres.



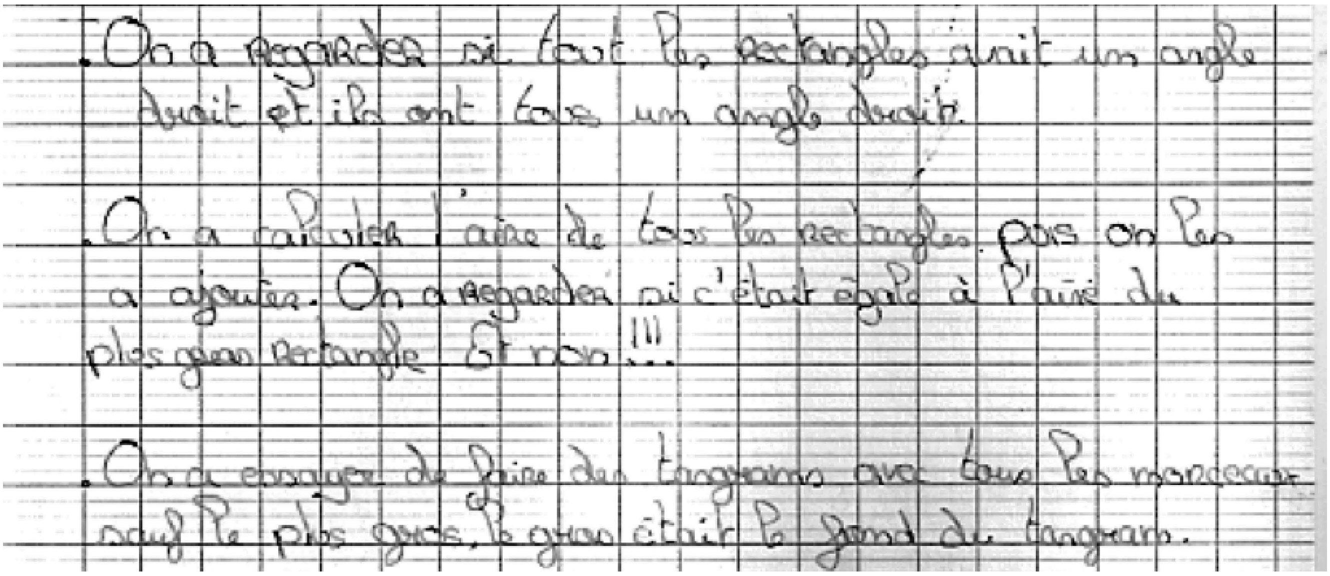
On constate que les deux diagonales d'un rectangle se superposent avec celles des autres, sauf dans le cas de l'intrus.

Analyse *a posteriori* de la partie 1

Dans un premier temps, de nombreux groupes procèdent par découpage et juxtaposition de surfaces ou par calculs d'aires, en vain.

Certains supposent que l'intrus n'est pas un rectangle et donc vérifient les angles droits à l'aide de l'équerre.

Il faut alors rappeler à la classe que les six quadrilatères sont tous des rectangles, et que l'un des rectangles est un intrus.

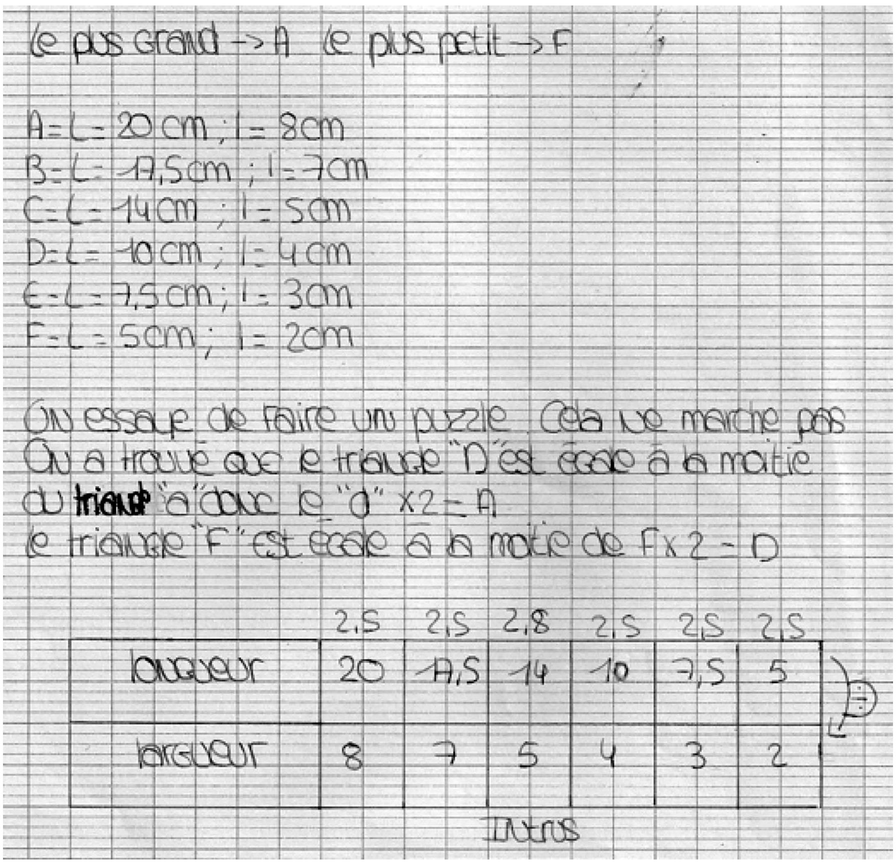


• On a regarder si tout les rectangles avait un angle droit et ils ont tous un angle droit.

• On a calculer l'aire de tous les rectangles puis on les a ajouter. On a regarder si c'était égale à l'aire du plus gran rectangle. Et non !!!

• On a essayer de faire des tangrams avec tous les morceaux sauf le plus gros. Le gros était le fond du tangram.

Dans un deuxième temps, des groupes utilisent la méthode de vérification de la proportionnalité. L'idée de la proportionnalité est arrivée en observant les mesures de certains rectangles.

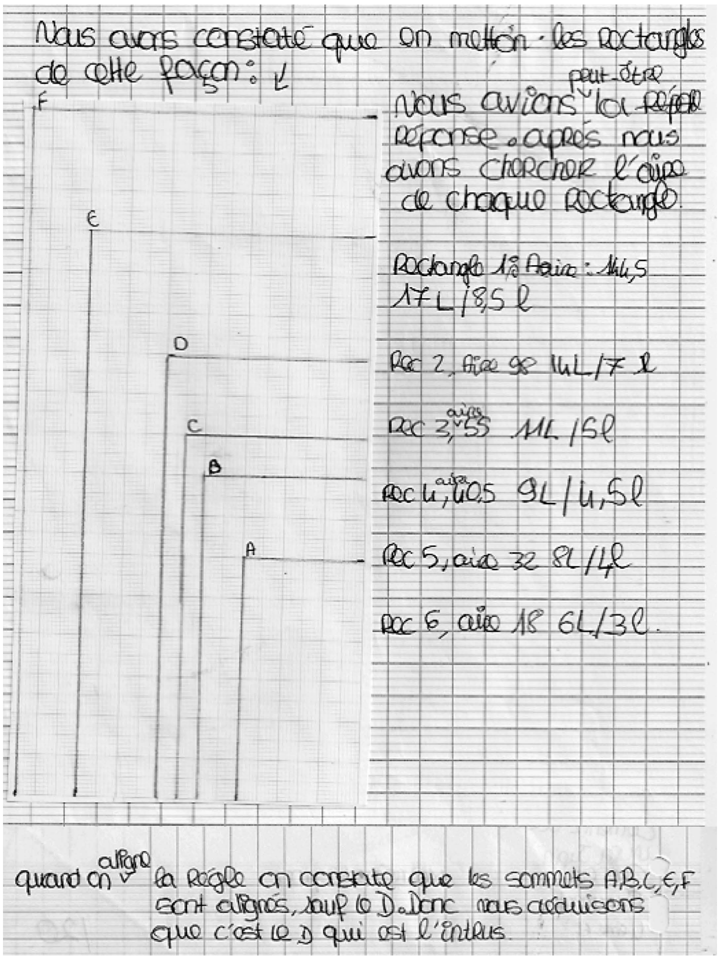


le plus Grand -> A le plus petit -> F

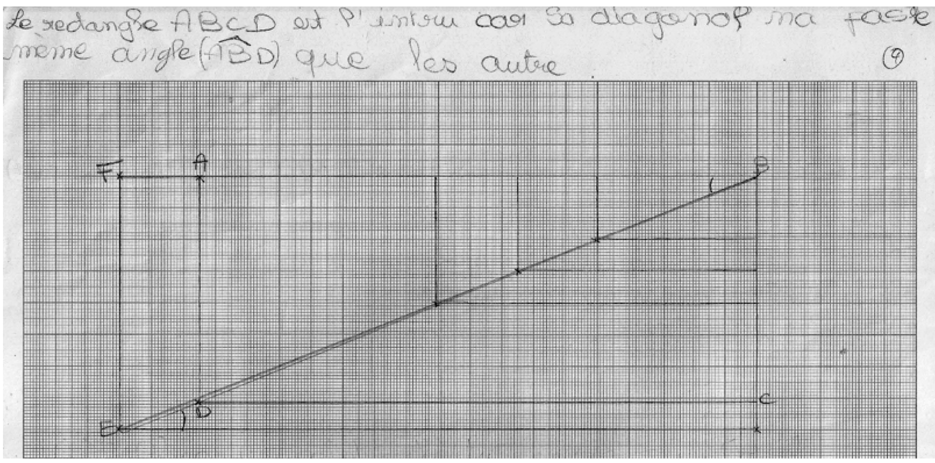
A = L = 20 cm ; l = 8cm
B = L = 17,5cm ; l = 7cm
C = L = 14cm ; l = 5cm
D = L = 10 cm ; l = 4 cm
E = L = 7,5 cm ; l = 3cm
F = L = 5cm ; l = 2cm

On essaye de faire un puzzle. Cela ne marche pas
On a trouvé que le triangle "D" est égale à la moitie du triangle "a" donc le "d" x2 = A
le triangle "F" est égale à la moitie de F x 2 = D

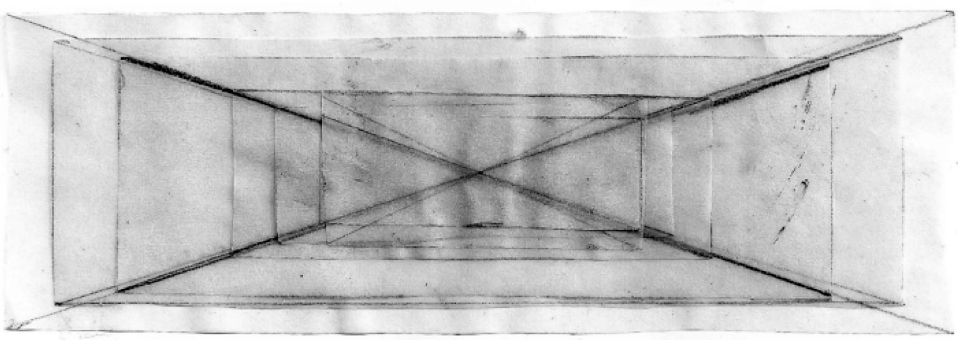
	2,5	2,5	2,8	2,5	2,5	2,5
longueur	20	17,5	14	10	7,5	5
largeur	8	7	5	4	3	2
			Intrus			



Un groupe propose la méthode 1 (vérification de l'alignement des sommets après superposition des rectangles).



Dans un groupe, une élève observe l'angle entre la longueur du rectangle et la diagonale mais son idée est rejetée par le groupe qui la juge trop compliquée.

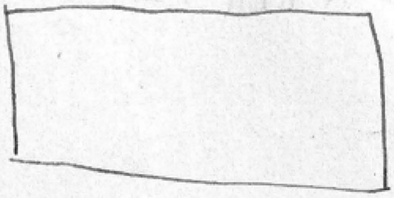


La méthode 4 est trouvée par un élève et réalisée à l'aide d'un calque. Mais la réalisation est tellement peu soigneuse que l'élève n'a pas pu conclure. L'enseignant l'expose au moment du bilan.

Analyse *a posteriori* de la partie 2

Les élèves réalisent les bons de commande en respectant la méthode choisie en première partie.

Pour construire le rectangle il faut multiplier la largeur du rectangle par 3.



largeur × 3 = longueur

• Faites un tableau de proportionalité de la longeur et la largeur:
- la longueur en haut.
- la largeur en bas.

• Calculer la 2ème case de la longueur multiplié par le 1er nombre de la gauche divisé par le nombre du dessous.

P.S: Faites le 3ème nombre du plus grand au plus petit.

---

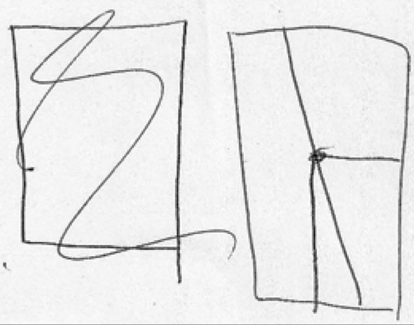
faire un rectangle de longueur grand L et de largeur petite l avec grand L ÷ l = 2,5

4 ÷ 1,6

Bon.

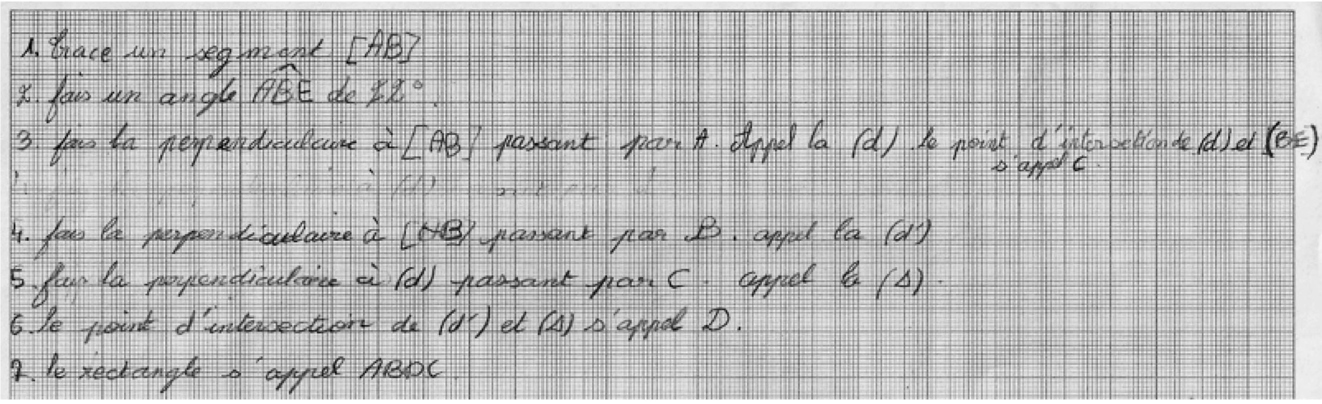
Tracer le grand rectangle* puis la diagonale de sommet en sommet et ~~ce~~ tracer un point sur la diagonale

* de dimensions L 17, l 8,5



On peut remarquer que, dans un groupe, les élèves parlent de proportionnalité mais n'ont précisé ni le coefficient, ni les dimensions permettant de le calculer.

L'élève qui a utilisé la méthode 3 s'est isolée du groupe pour rédiger son programme de construction.



1. trace un segment [AB]
2. fais un angle $\widehat{ABE}$ de 22°.
3. fais la perpendiculaire à [AB] passant par A. Appel la (d) le point d'intersection de (d) et (BE) s'appel C
4. fais la perpendiculaire à [AB] passant par B. appel la (d')
5. fais la perpendiculaire à (d) passant par C. appel la (Δ).
6. le point d'intersection de (d') et (Δ) s'appel D.
7. le rectangle s'appel ABDC

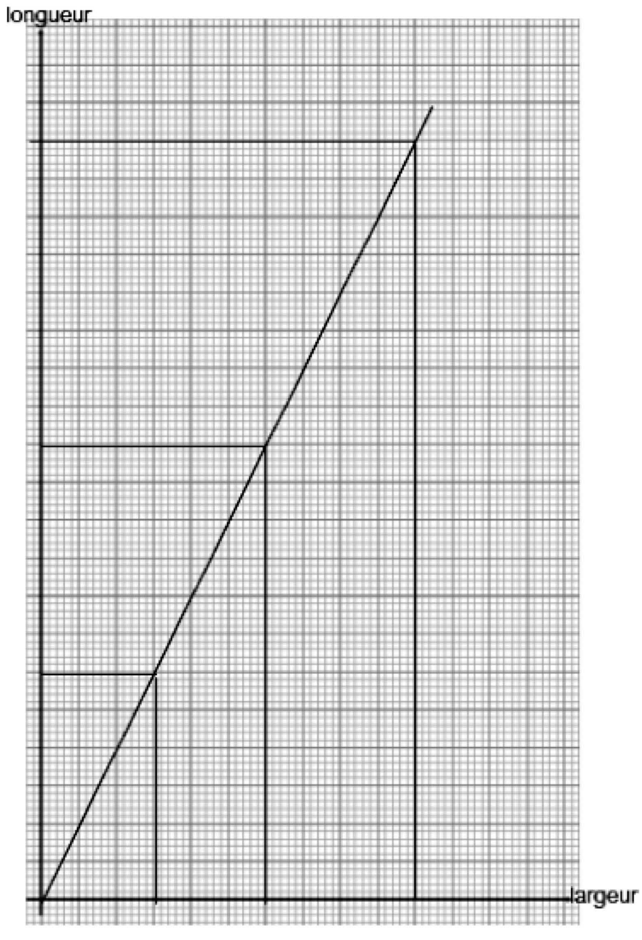
Bilan

Chaque groupe vient présenter son travail au tableau, y compris les élèves dont le travail a été rejeté. Lors de la présentation de la méthode 3, l'enseignant introduit un repère.

Institutionnalisation

Bilan 1

- Dans une même famille de rectangles, tous les rectangles sont des agrandissements réductions les uns des autres.
- On dit que les rectangles ont le même format.
Dans ce cas, il y a proportionnalité entre les longueurs et les largeurs.
- Si on représente graphiquement les longueurs en fonction des largeurs, on obtient des points alignés avec l'origine.

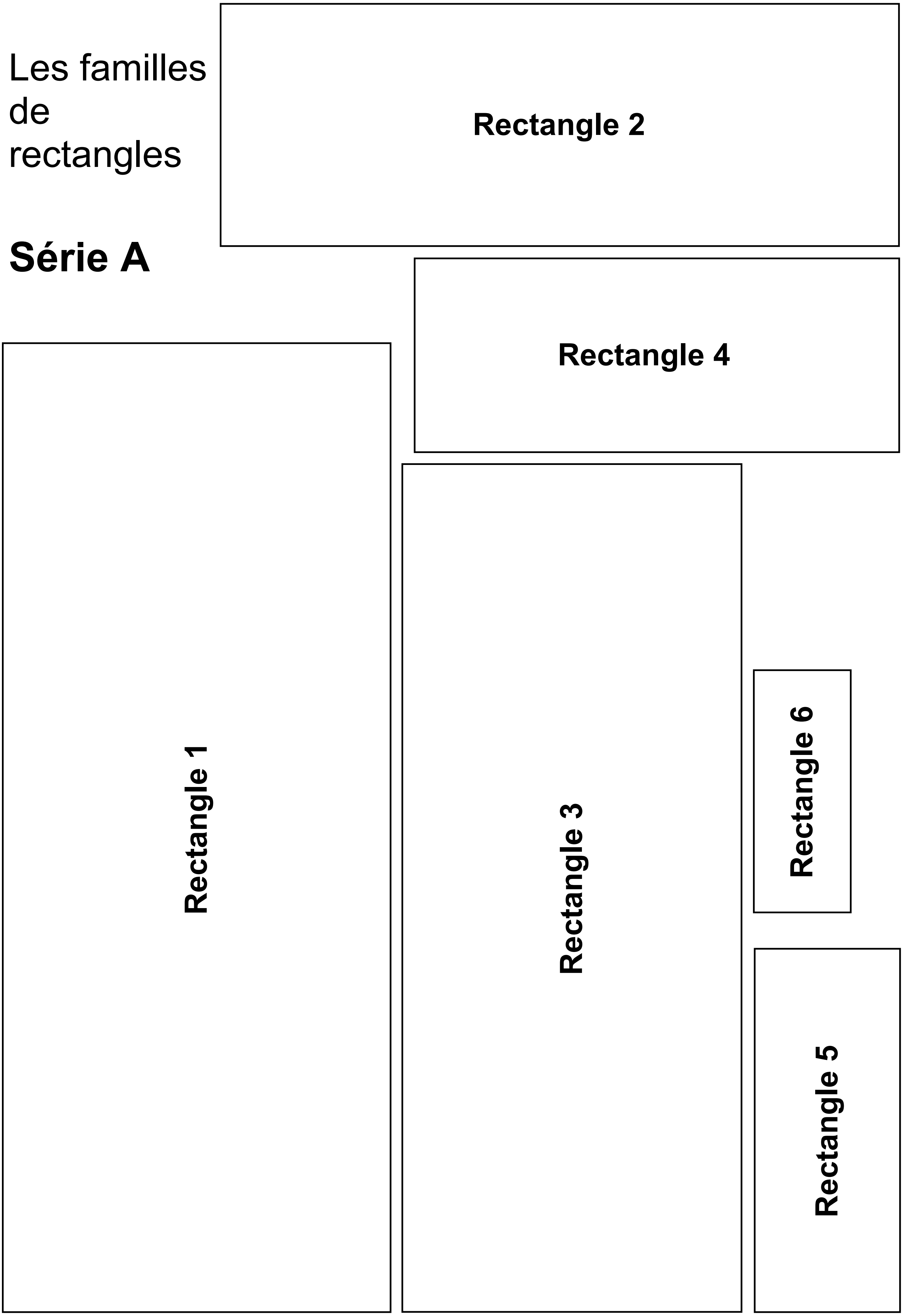


Bilan 2

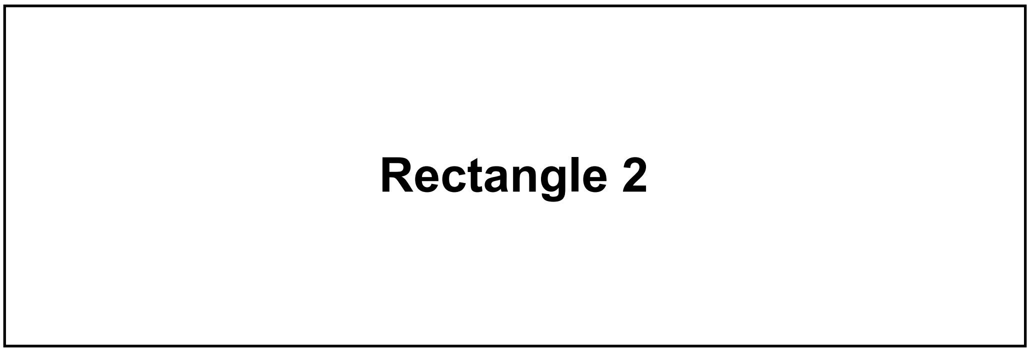
Quand on représente graphiquement une situation de proportionnalité, on obtient des points alignés avec l'origine du repère.

Les familles
de
rectangles

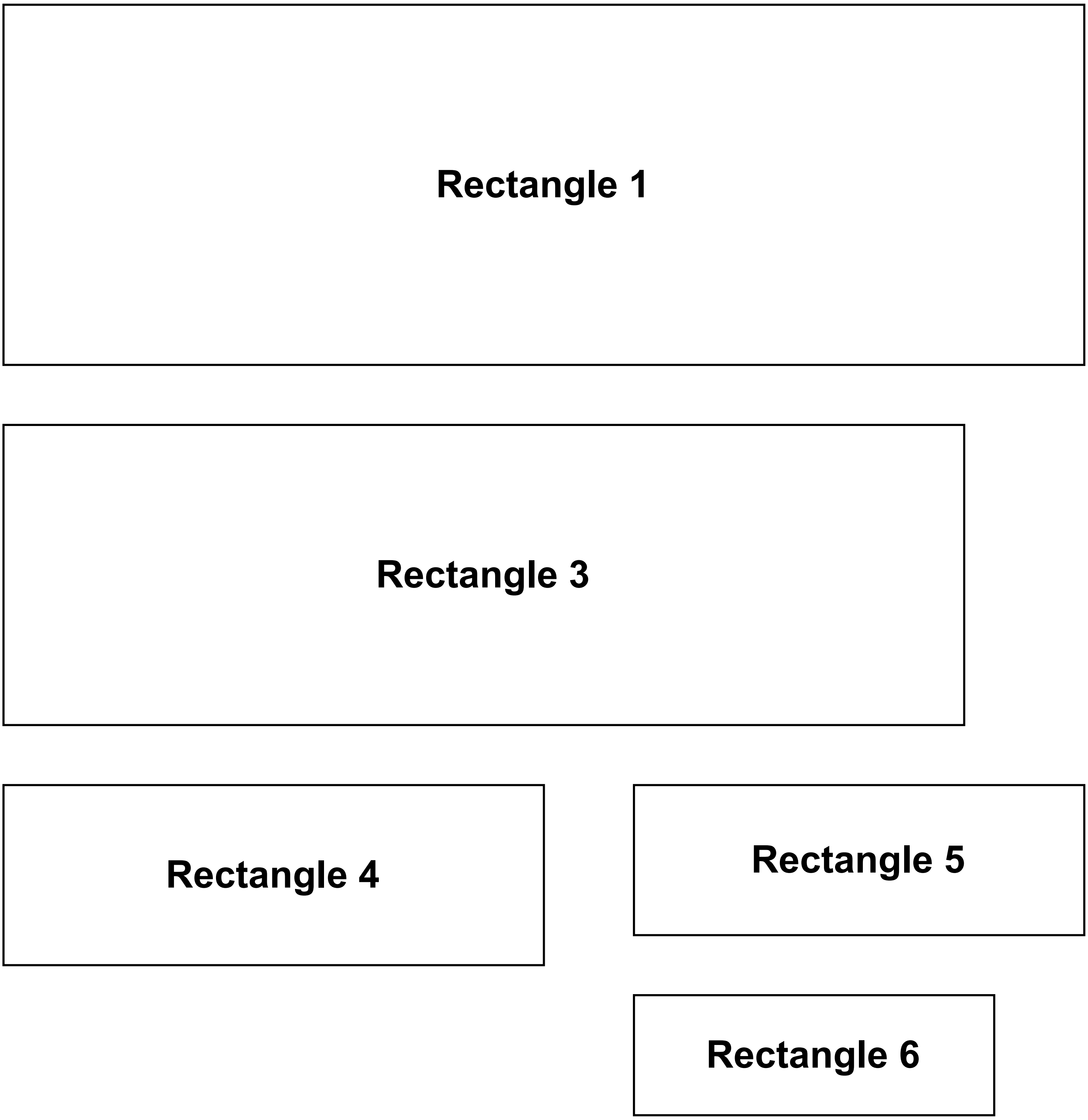
Série A



Les familles
de
rectangles

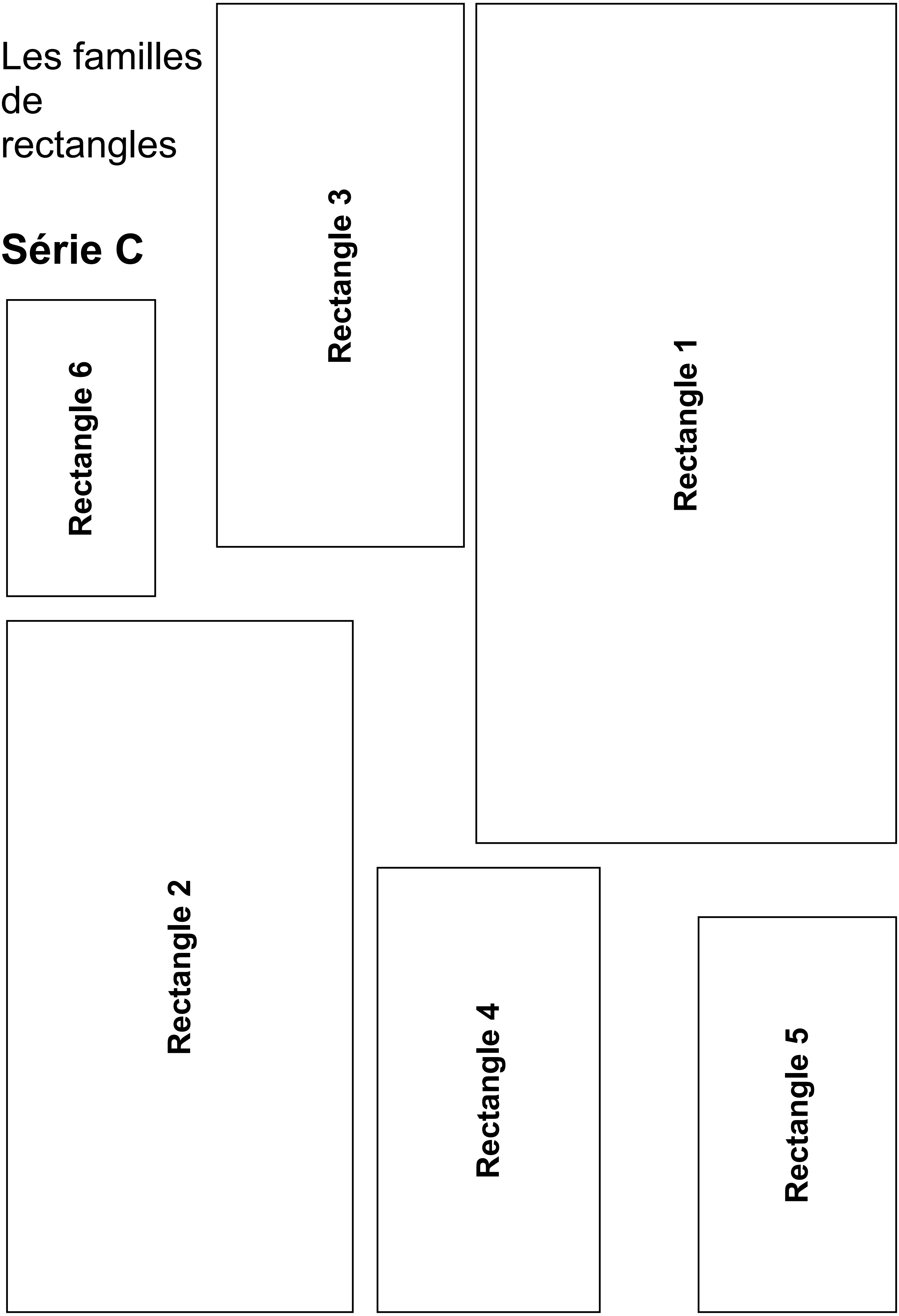


Série B



Les familles
de
rectangles

Série C



Agrandir ou réduire des quadrilatères
Proposition 1 : Famille de quadrilatères

Auteurs : Maëlle JOURAN (IREM de Rouen) – Béatrice LEGOUPIL (IREM de Grenoble)

Niveau : Cycle 4 [4^e^ – 3^e^].

Présentation

Cette activité propose d'introduire la notion d'agrandissement-réduction par la reconnaissance d'agrandissements de quadrilatères. Elle permet de faire émerger les conceptions des élèves et de mettre en défaut celles qui sont erronées. La mise en commun aboutit à une institutionnalisation introduisant le cours sur « agrandissement-réduction ». Un prolongement est proposé en fin d'article.

Il est aussi possible d'introduire la notion d'agrandissement-réduction par une activité de construction d'un agrandissement ou d'une réduction d'une figure comme dans la proposition 2 « rectangle, losange, trapèze » de cet article.

Cette activité peut aussi se faire en réinvestissement. Elle permet alors une mise au point des connaissances des élèves sur la notion d'agrandissement.

Prérequis

Aucune connaissance nouvelle du cycle 4. Les notions utilisées sont la proportionnalité, les angles, la nature des quadrilatères.

Objectifs principaux

- Faire émerger les conceptions erronées des élèves sur la notion d'agrandissement et les invalider.
- Faire émerger que :
  - l'agrandissement « ne déforme pas », il conserve la forme,
  - l'agrandissement conserve les angles,
  - les longueurs du quadrilatère agrandi sont proportionnelles à celles du quadrilatère de départ.
- Reconnaître un agrandissement d'un quadrilatère.

Matériel

- Matériel de géométrie
- Calculatrice
- À télécharger : dossier : « famille_de_quadrilateres »
  monument_valley_a_projeter (pdf, docx, odt)
  fiche-eleve1-quadrilatères1 et *fiche-eleve2-quadrilatères1* (doc et pdf)
- Matériel facultatif : papier calque, ciseaux

Déroulement et analyse de l'expérimentation

Scénario

L'activité nécessite deux séances.
Le déroulement de l'activité est expliqué aux élèves.

Première séance

- Phase individuelle (environ 25 minutes)

Distribution de la « fiche élève n°1 ».
Appropriation du problème avec interdiction de poser des questions pendant cinq minutes.
Au bout des cinq minutes : point sur les questions des élèves et projection de photos pour illustrer ce qu'est ou non un agrandissement d'une photo donnée.
Poursuite de la recherche individuelle : les élèves ont à déterminer les agrandissements des figures données, par les méthodes de leur choix.

- Phase en binômes ou en groupes :

Distribution de la « fiche élève n°2 ».
Les élèves, par groupe, comparent leurs réponses et échangent sur les procédures utilisées. Ils se mettent d'accord sur une réponse commune, écrivent les arguments qui explicitent cette réponse sur la « fiche élève n°2 », ramassée à la fin de la première séance avec la « fiche élève n°1 » de chaque élève du groupe.

Deuxième séance

- Mise en commun en classe entière des réponses et des procédures utilisées avec débat de classe (environ 20 minutes).

L'enseignant peut préciser qu'à la lecture des productions des élèves de la séance précédente, il a constaté qu'il y avait des réponses différentes. L'objectif de cette deuxième séance est donc de se mettre d'accord sur les quadrilatères qui semblent être des agrandissements des quadrilatères donnés et sur les arguments qui permettent de le penser.
Il peut être intéressant de faire passer à l'oral différents groupes, dans un ordre prédéfini par l'enseignant, en prenant garde d'aller de la production la moins riche à celle la plus riche. Chaque groupe donne sa réponse en exposant sa procédure.
Ces échanges doivent permettre au final de mettre en défaut les conceptions erronées concernant la notion d'agrandissement, d'invalider les procédures incorrectes et de mettre en avant une ou des procédures correctes.

- Rédaction d'une réponse commune (environ 10 minutes).

Un bilan de l'activité est élaboré en classe entière et est noté dans le cahier de leçons par exemple.

- Institutionnalisation (environ 10 minutes).

Elle généralise le bilan de l'activité et est écrite dans le cahier de leçons.

Description et analyse

Voici des exemples de questions posées par les élèves au bout des cinq premières minutes de la phase individuelle.

- « Peut-on mesurer ? Est-ce qu'on peut écrire sur l'énoncé ? Est-ce qu'on peut tracer ? Est-ce qu'on peut découper ? Est-ce qu'on peut décalquer ? ».
- « Est-ce qu'on a le droit de retourner la figure ? »
- « Est-ce grave s'il y a un degré d'écart ? »
- « Combien doit-on donner d'arguments ? »
- « Comment calcule-t-on l'aire des figures ? »
- « Qu'est-ce qu'un agrandissement ? »

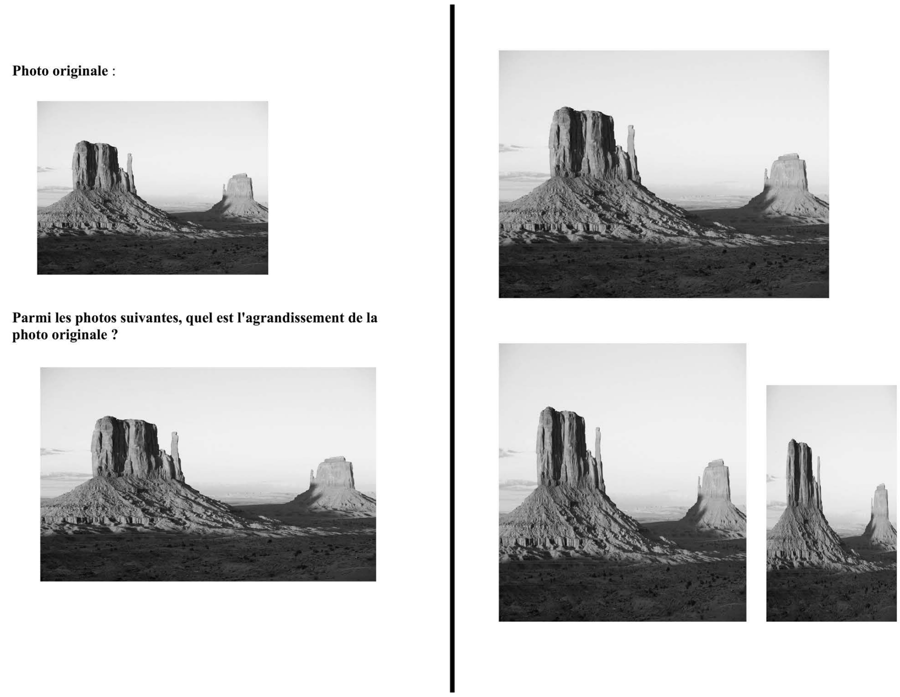
L'enseignant peut préciser aux élèves qu'ils ont le droit de faire ce qu'ils veulent sans utiliser le manuel de mathématiques. Il les encourage à prendre des initiatives et à faire des choix concernant leurs interrogations. Il peut noter au tableau certaines questions auxquelles la classe répond pour lever des obstacles techniques. À ce moment-là, les questions concernant l'agrandissement/réduction d'une figure ne doivent pas être encore débattues. Leur prise en charge est présentée ci-dessous.

Émergence des représentations des élèves sur ce qu'ils pensent être un agrandissement.

La question « Qu'est-ce qu'un agrandissement ? » nécessite de prendre un temps avec la classe pour y répondre. Dans le langage courant, le terme agrandir est souvent utilisé pour augmenter soit une dimension, une surface ou un espace lorsqu'on parle par exemple « d'agrandir sa maison ». Pour certains élèves : « une figure agrandie, c'est quand on ajoute le même nombre à chaque côté ».

Pour répondre à la question « Qu'est-ce qu'un agrandissement ? », l'enseignant peut vidéoprojeter des photos agrandies ou non d'une photo donnée avec la consigne suivante : *Parmi les photos suivantes, laquelle est un agrandissement de la photo originale ?* L'objectif n'est pas de définir ce qu'est un agrandissement mais que l'élève ait la possibilité de se rendre compte qu'un agrandissement conserve les formes.

C'est la photo en haut de la page de droite qui est un agrandissement de la photo originale.



Quelques réactions d'élèves à ce qui est projeté.
« Un agrandissement, c'est quand on modifie la taille mais pas la forme. »
« Quand on agrandit, on a les mêmes proportions ».
« C'est pareil en plus petit ou en plus grand ».
« Quand c'est déformé, ce n'est pas un agrandissement ».
« Pour avoir l'agrandissement d'une photo, on tire sur les coins mais pas sur les côtés ».

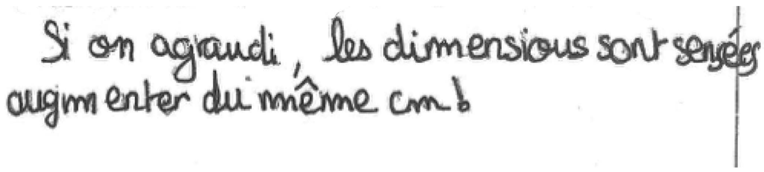
Il est intéressant de poursuivre l'échange avec la classe avec une photo qu'on déforme, qu'on agrandit ou qu'on réduit à l'aide d'un vidéoprojecteur.

Productions d'élèves concernant la deuxième partie du travail (réponses aux questions posées dans les fiches élèves 1 et 2)
La réponse attendue est : « l'agrandissement du quadrilatère A est le quadrilatère D et l'agrandissement du quadrilatère B est le quadrilatère F ».

Que ce soit en quatrième ou en troisième, des procédures identiques émergent.

- **« Pour avoir un agrandissement, il faut ajouter une même longueur à chacun des côtés du quadrilatère »**.

Quelques élèves répondent : *il n'y a aucun agrandissement de A et de B.*

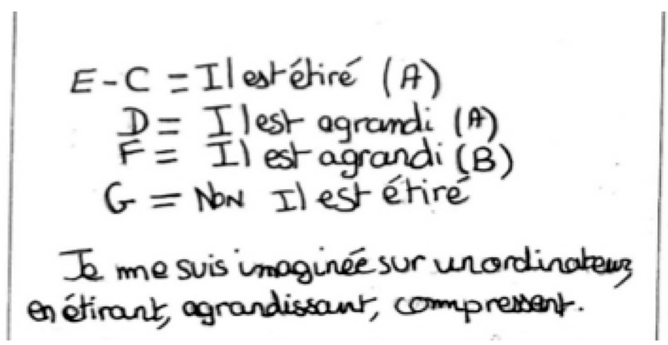

Si on agrandi, les dimensions sont sensées augmenter du même cm !

- **« Tous les parallélogrammes sont des agrandissements les uns des autres, de même pour les cerfs-volants. »**

Certains élèves regroupent les quadrilatères selon leur nature. Ils donnent alors la réponse suivante : « les agrandissements du quadrilatère A semblent être les quadrilatères C, D et G et les agrandissements du quadrilatère B semblent être les quadrilatères E et F ».

- **« À vue d'œil »**

Des élèves déterminent à vue d'œil les agrandissements avec plus ou moins de réussite.

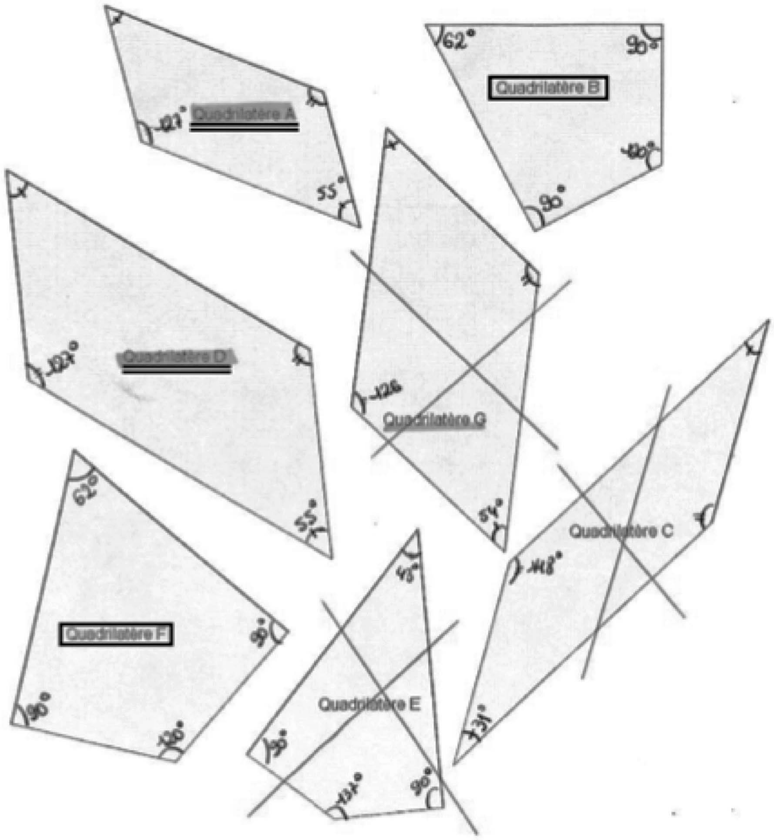

E-C = Il est étiré (A)
D = Il est agrandi (A)
F = Il est agrandi (B)
G = Non Il est étiré

Je me suis imaginée sur un ordinateur en étirant, agrandissant, compressant.

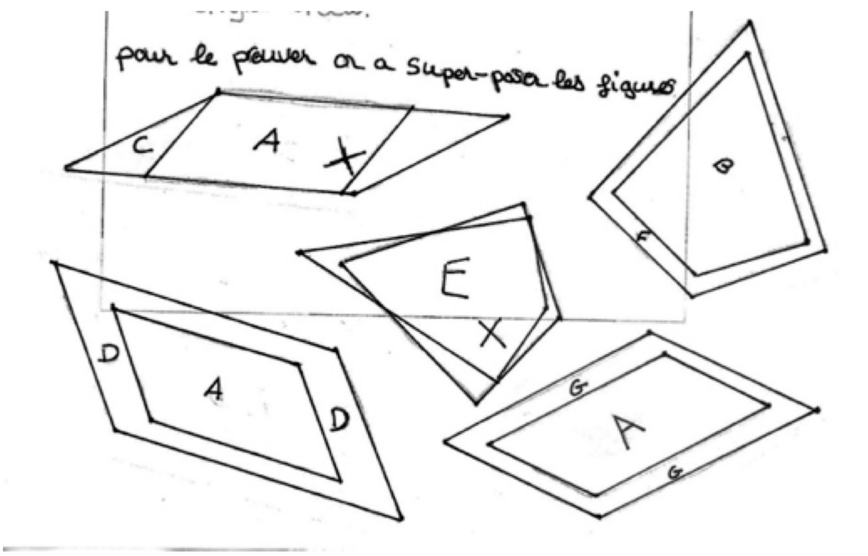
- **« Repérer des angles égaux pour déterminer les agrandissements »**

De nombreux élèves mesurent les angles des quadrilatères et considèrent uniquement la conservation des angles dans un agrandissement.
Ils donnent alors la réponse suivante : « les agrandissements du quadrilatère A semblent être les quadrilatères D et G et l'agrandissement du quadrilatère B semble être le quadrilatère F ».

Dans la production ci-contre, le problème de l'imprécision de la mesure est posé. Des élèves pensent qu'un degré d'écart est suffisant pour dire que ce n'est pas un agrandissement. D'où l'importance de mettre dans la consigne « semblent être des agrandissements ».



Par découpage ou en utilisant du papier calque, quelques élèves superposent les quadrilatères pour repérer les angles égaux :



Des élèves comparent non seulement les angles des quadrilatères mais aussi les angles formés par les diagonales et les côtés.

G6

Coupon réponse du groupe

Oui/Non	C	D	E	F	G
Agrandissement du quadrilatère A	Non	Oui	Non	Non	Non
Agrandissement du quadrilatère B	Non	Non	Non	Oui	Non

Justifications :

En sachant que lorsque l'on agrandit une figure elle garde ses angles et ses propriétés donc :

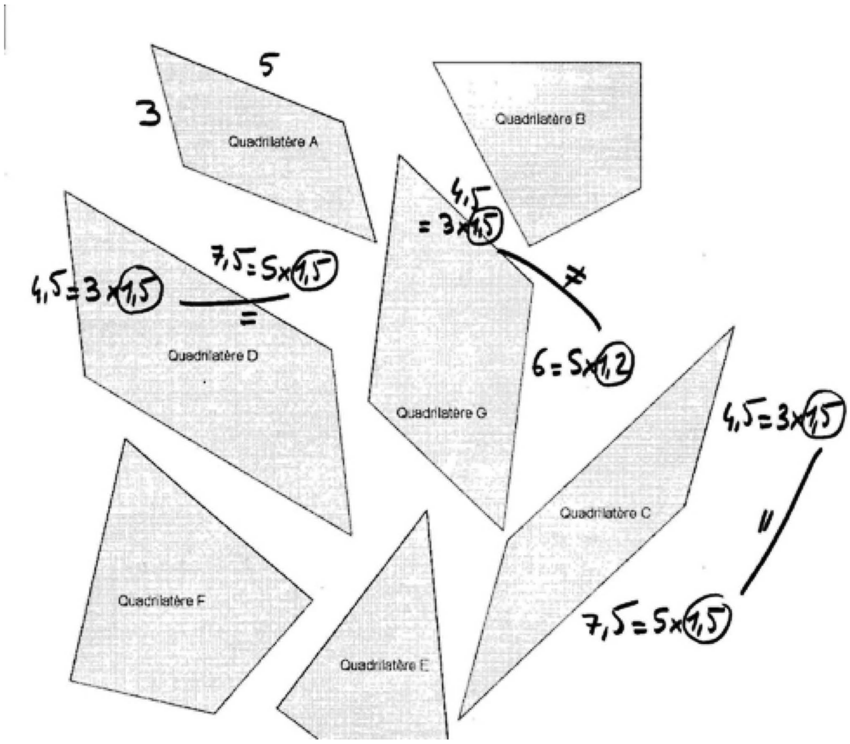
Quadrilatère A :
*technique 1 : on mesure les angles et on regarde lequel possède les mêmes (voir feuille Manon)
* Technique 2. en traçant une diagonale on obtient 2 triangles rectangles. (voir feuille Lucas)
A vue d'oeil D, G et C sont des agrandissement de A : on vérifie
technique 1 : D : oui
G :
C : non
technique 2. D : oui
G : non
C : non

Quadrilatère B
on utilise la technique n°1
A vue d'oeil : on a F et E qui ressemblent à B
F : Oui
E : Non

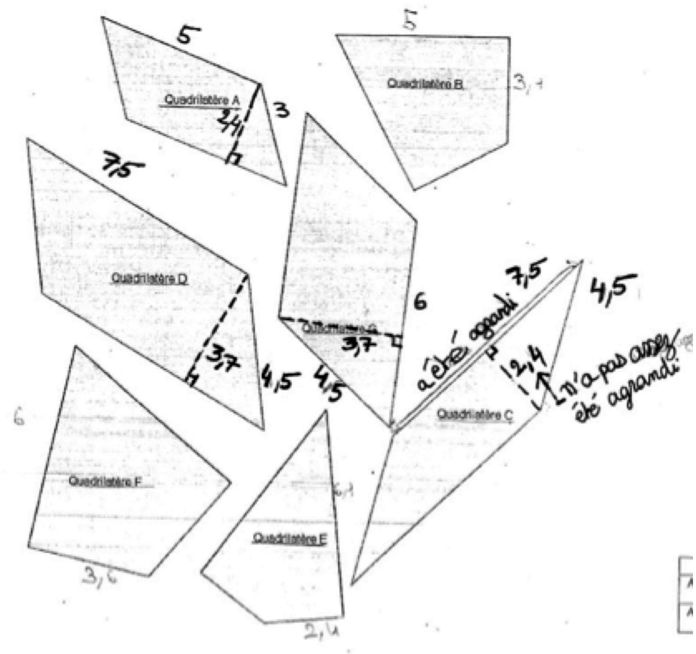
Ils donnent alors la réponse suivante : « l'agrandissement du quadrilatère A semble être le quadrilatère D et l'agrandissement du quadrilatère B semble être le quadrilatère F ».

- **« Utiliser la proportionnalité des longueurs des côtés pour déterminer des agrandissements »**

Des élèves mesurent les côtés et déterminent les quadrilatères dont les longueurs des côtés sont proportionnelles à celles du quadrilatère initial.
Ils donnent alors la réponse suivante : « les agrandissements du quadrilatère A semblent être les quadrilatères C et D et l'agrandissement du quadrilatère B semble être le quadrilatère F ».



- Des élèves mesurent des longueurs des côtés et la hauteur des parallélogrammes. Ils prennent en compte des longueurs caractéristiques du quadrilatère.

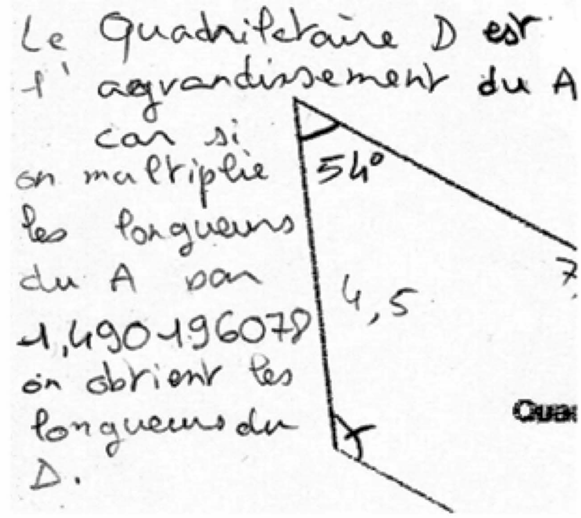


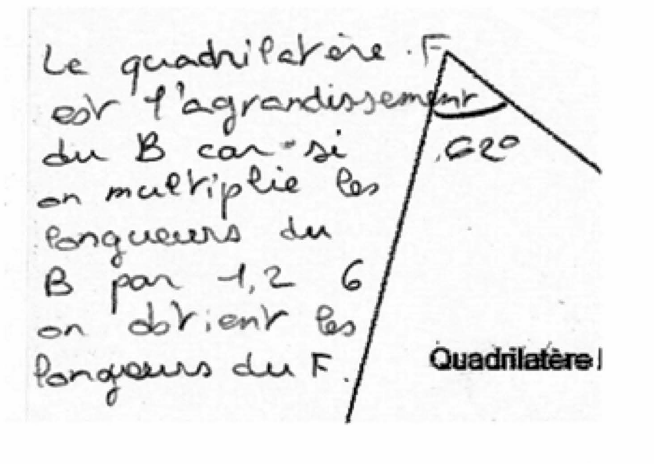
- **Conservation des angles et proportionnalité des longueurs des côtés »**

Peu d'élèves utilisent cette procédure. Ils donnent la réponse suivante :

L'agrandissement du quadrilatère A semble être le quadrilatère D.

L'agrandissement du quadrilatère B semble être le quadrilatère F





Mise en commun

L'enseignant peut mettre en avant les différentes réponses des groupes et la nécessité de se mettre d'accord.

Ce qui émerge en premier est le classement des quadrilatères en deux familles de même nature.

L'enseignant peut proposer de regrouper les mesures utilisées par les élèves dans un tableau.

Les tableaux ci-dessous contiennent les mesures des longueurs de leurs côtés et les mesures des angles des quadrilatères. C'est l'occasion de rappeler que la somme des angles dans un quadrilatère est de 360°.

Le problème de l'imprécision des mesures est abordé en classe entière. Un retour à la consigne permet de préciser à nouveau qu'il faut trouver les quadrilatères qui semblent être des agrandissements de A et B. Il est possible de rajouter, en fonction des procédures utilisées, plusieurs colonnes pour la longueur d'une diagonale, la longueur d'une hauteur, la mesure d'un angle formé par les diagonales ou la mesure d'un angle formé par un côté et une diagonale, etc.

Quadrilatère A

A	5 cm	3 cm	126°	54°
D	7,5 cm	4,5 cm	126°	54°
C	7,5 cm	4,5 cm	150°	30°
G	6 cm	4,5 cm	126°	54°

Quadrilatère B

B	5 cm	3 cm	90°	118°	62°
F	6 cm	3,6 cm	90°	118°	62°
E	6 cm	2,3 cm	90°	138°	42°

« Pour conserver les formes, il faut conserver les angles ». Les élèves se mettent d'accord pour éliminer les quadrilatères C et E.
Des élèves proposent d'éliminer le quadrilatère G car les longueurs des côtés de ce quadrilatère ne sont pas proportionnelles aux longueurs des côtés du quadrilatère A.
(6 cm : 5 cm = 1,2 et 4,5 cm : 3 cm = 1,5).
Les élèves vérifient la proportionnalité des longueurs des côtés des quadrilatères A et D d'une part et des quadrilatères F et B d'autre part.
(7,5 cm : 5 cm = 1,5 et 4,5 cm : 3 cm = 1,5 ; 6 cm : 5 cm = 1,2 et 3,6 cm : 3 cm = 1,2).
Le lien est fait alors entre le coefficient de proportionnalité et l'échelle de l'agrandissement.

Bilan possible de l'activité

L'agrandissement de A semble être le quadrilatère D à l'échelle 1,5.

L'agrandissement de B semble être le quadrilatère F à l'échelle 1,2.

Dans ces quadrilatères, les angles sont conservés et les longueurs des côtés correspondants sont proportionnelles.

Il ne suffit pas de vérifier la conservation des angles des quadrilatères pour avoir un agrandissement.

Il ne suffit pas de vérifier la proportionnalité des longueurs des côtés des quadrilatères pour avoir un agrandissement.

Dans certaines classes, les élèves mesurent des diagonales, des hauteurs ou des angles formés par les diagonales et les côtés ou entre les diagonales.
C'est l'occasion de remarquer que :

- si les longueurs des côtés et d'une diagonale d'un quadrilatère sont proportionnelles à celles d'un autre quadrilatère alors le premier est un agrandissement (ou une réduction) du deuxième,
- si, dans deux quadrilatères, il y a conservation de leurs angles et d'un angle formé par un côté et une diagonale alors l'un est un agrandissement de l'autre.

Institutionnalisation possible

Dans un agrandissement ou une réduction d'un polygone :

- les mesures des angles sont conservées.
- **toutes** les longueurs de la figure agrandie ou réduite sont proportionnelles aux longueurs de la figure initiale (les côtés et les diagonales).

Le nombre k par lequel on multiplie les longueurs de la figure initiale pour obtenir la figure agrandie ou réduite est appelé **coefficient d'agrandissement ou de réduction** ou **échelle**.

Si $k > 1$, il s'agit d'un agrandissement.
Si $0 < k < 1$, il s'agit d'une réduction.
Si $k = 1$, c'est une reproduction à l'identique.

Prolongements possibles

- Construction d'agrandissement ou de réduction

L'enseignant peut ensuite proposer un exercice de construction d'un agrandissement ou d'une réduction. Par exemple :

ABC est un triangle défini par AB = 6 cm, $\hat{A} = 50°$ *et* $\hat{B} = 50°$ Construis le triangle ABC. Construire un agrandissement du triangle ABC à l'échelle 1,5.

Il peut également proposer l'activité présentée dans l'article qui suit « Rectangle, losange, trapèze », en classe ou à la maison.

- Calcul réfléchi

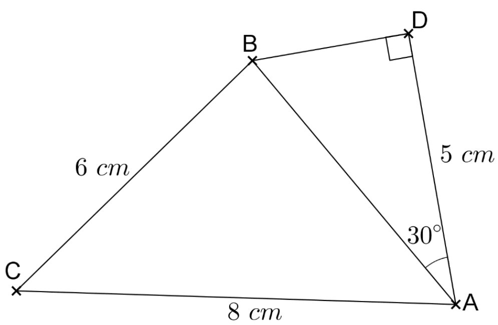
Un retour régulier sur cette notion peut être intéressant par le biais du calcul réfléchi. L'enseignant peut demander aux élèves :

- de reconnaître un agrandissement ou une réduction,
- de déterminer l'échelle d'un agrandissement ou d'une réduction à partir de deux figures données,
- de donner les mesures des angles et des longueurs dans un agrandissement ou une réduction d'une figure donnée.

Il est possible d'utiliser par exemple la brochure de l'IREM de Clermont-Ferrand publiée en coédition avec l'APMEP : « Activités mentales et automatismes au collège ». Elle propose de reconnaître si une figure est une réduction d'une autre figure et, si c'est le cas, de déterminer le coefficient de réduction.

Pour le dernier point, l'enseignant peut proposer le type d'exercice suivant.

On considère la figure suivante :



Dans un agrandissement de rapport 3 de cette figure, quelles sont les mesures des cinq segments de la figure agrandie ?

Dans une réduction de rapport 0,7 de cette figure, quelles sont les mesures des cinq segments de la figure réduite ?

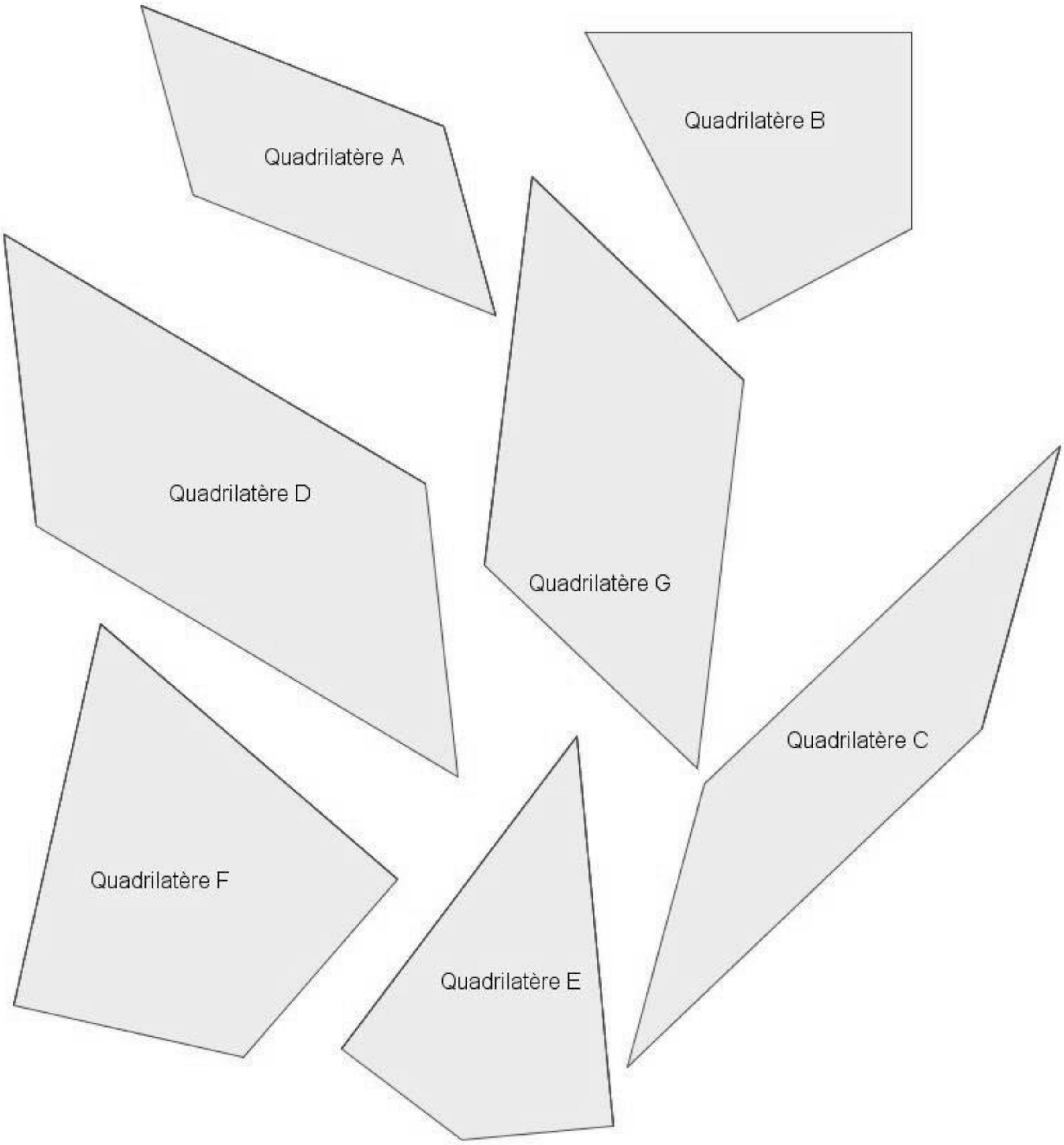
Fiche élève n°1

Agrandir ou réduire des quadrilatères
Famille de quadrilatères

Consigne

Quels sont les quadrilatères qui semblent être des agrandissements du quadrilatère A et du quadrilatère B ?

Quels sont les arguments qui vous le font penser ? Rédigez-les.



Oui/Non	C	D	E	F	G
Agrandissement du quadrilatère A					
Agrandissement du quadrilatère B					

Fiche élève n° 2

Agrandir ou réduire des quadrilatères
Famille de quadrilatères

Coupon réponse du groupe

Oui/Non	C	D	E	F	G
Agrandissement du quadrilatère A					
Agrandissement du quadrilatère B					

Arguments

Agrandir ou réduire des quadrilatères
Proposition 2 : rectangle, losange, quadrilatère

Auteurs : Laurianne FOULQUIER (IREM d'Aquitaine)
Vincent PAILLET - Dominique POIRET-LOILIER (IREM d'Orléans)

Niveau : Cycle 4

Présentation
À partir d'essais pour agrandir ou réduire des quadrilatères (rectangle, losange, quadrilatère quelconque), les élèves sont amenés à élaborer des procédures de construction.

Prérequis
Les notions utilisées sont : la proportionnalité, les échelles, les quadrilatères et les angles.

Objectifs principaux
Avancer dans la construction du concept d'agrandissement et réduction en classe de 4^{e} avec :
- mise en défaut du théorème élève : « *Il suffit de multiplier les mesures des longueurs des côtés d'une figure par un même nombre pour obtenir un agrandissement ou une réduction de cette figure* » et qu'il faut aussi modifier les angles,
- mise en place de différentes procédures de construction de figures agrandies ou réduites,
- caractérisation de l'agrandissement ou la réduction d'une figure,
- influence de la valeur du coefficient.

Matériel
- Les élèves doivent avoir leur matériel de géométrie, dont un rapporteur.
- À técharger : dossier « famille de quadrilateres2 », *fiche-eleve_quadrilatères2* (doc et pdf)

Déroulement et analyse de l'expérimentation

Scénario
Le professeur distribue aux élèves uniquement les étapes 1 et 2.

Phase individuelle (environ 10 minutes)
Chaque élève construit les figures de l'étape 1.

Phase en binômes ou en groupes (environ 30 minutes)
Les élèves comparent leurs différentes productions. Ils se mettent d'accord et corrigent éventuellement.

Tout en restant en groupes, chaque élève construit la réduction du quadrilatère quelconque.
Le professeur leur demande ensuite de débuter leur compte rendu en collant un exemplaire de chacun des quadrilatères produits et en décrivant leurs procédures de construction.

L'étape 3 est affichée ou écrite au tableau. Les élèves répondent ensemble aux consignes et finissent de rédiger leur compte rendu.

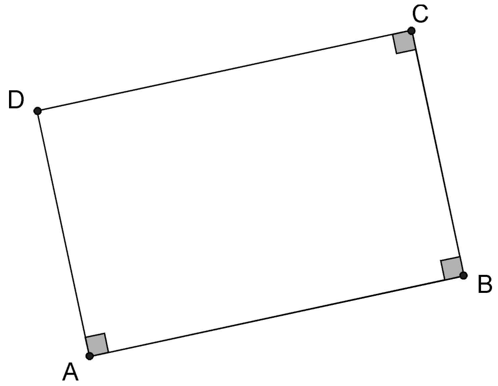
Bilan et institutionnalisation (environ 30 à 45 minutes)
Le professeur demande à certains groupes de présenter leur travail.
Le bilan sert à construire le cours sur agrandissement et réduction de figures.

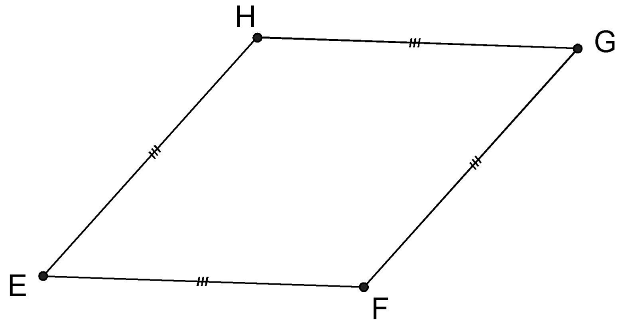
Description et analyse

Étape 1

Voici deux quadrilatères ABCD et EFGH.

1) *Précisez leur nature.*
2) *Construisez individuellement un agrandissement de ces quadrilatères à l'échelle 1,5.*
3) *Vérifiez que vous obtenez bien les mêmes quadrilatères.*

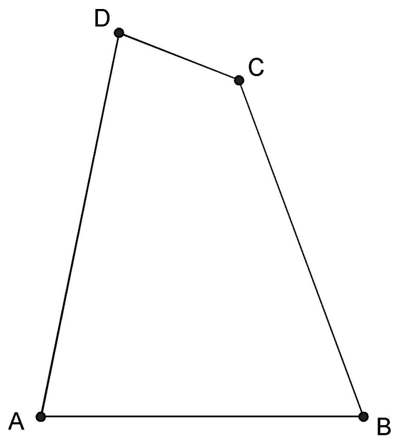




Le rectangle est proposé en premier car c'est une figure assez simple à appréhender. Le codage d'uniquement trois angles droits est l'occasion de travailler sur la définition du rectangle. La réflexion des élèves est plus sur le sens de « agrandissement à l'échelle 1,5 ».
Le losange, quant à lui, introduit la nécessité de considérer un angle ou une diagonale ; agrandir simplement la mesure des côtés ne suffit pas. En fait c'était aussi le cas pour le rectangle, mais la conservation des angles est naturelle car elle est constitutive de la nature du rectangle. Elle n'est donc pas explicite pour les élèves.
Les élèves commencent par faire leurs constructions individuellement, sur des feuilles blanches, afin de pouvoir comparer leurs productions.
Ils confrontent donc ensuite leurs rectangles et leurs losanges. Il est parfois nécessaire de leur préciser qu'ils peuvent superposer leurs figures pour cela. Un court bilan oral peut être ébauché pour faire apparaître la nécessité de ne pas se contenter d'agrandir les côtés ; il faut soit faire intervenir une diagonale, soit mesurer un angle.

Étape 2

Construisez une réduction de ABCD à l'échelle 0,8.



Cette étape est l'occasion d'aborder le cas de la réduction. Certains groupes commencent par diviser par 0,8. Ils observent que les longueurs augmentent et cela leur pose problème. Cette situation est donc aussi une bonne occasion de revenir sur le fait que multiplier n'augmente pas toujours ; multiplier par un nombre compris entre 0 et 1 permet de réduire. Ce point permettra aux groupes de conclure sur l'effet de la valeur du coefficient sur l'agrandissement/réduction.
Par ailleurs il est intéressant de proposer une figure moins régulière que le rectangle ou le losange pour finir de mettre en avant la nécessité de tracer une diagonale ou de mesurer et reporter des angles.

Étape 3

Proposez une méthode de construction de l'agrandissement ou de la réduction d'un quadrilatère.
Précisez ce qui caractérise un agrandissement ou une réduction d'une figure.

Cette consigne est affichée au tableau. On pourra préciser aux élèves que ce qui est attendu ici est de savoir ce que doivent vérifier deux figures pour être en agrandissement ou réduction l'une de l'autre. Les élèves rédigent un bilan de leur travail. Presque tous les groupes écrivent que, pour agrandir ou réduire une figure, il faut multiplier les côtés par un même nombre. Beaucoup parlent du rôle de la valeur de ce coefficient. Moins nombreux sont ceux qui explicitent que les mesures des angles doivent être conservées ou qu'on peut aussi s'intéresser aux diagonales.

Des élèves présentent ensuite à l'oral leurs propositions en se concentrant sur l'étape 3.
Il est intéressant de projeter certains écrits de cette étape, de les modifier ou les compléter, pour aboutir à une synthèse faite collectivement en cours dialogué.
Le professeur doit veiller à l'ordre de présentation des productions de la moins riche à la plus aboutie.
Ce bilan doit faire apparaître que les longueurs sont proportionnelles et les angles conservés. Il semble inutile de faire écrire les élèves pendant cette phase, cela sera réservé à l'institutionnalisation.
Celle-ci servira à la fois de bilan de l'activité et de cours sur agrandissement et réduction de figures.

Productions d'élèves

Lucie/Perrine

Pour l'agrandissement on multiplié chaque côté par l'échelle si elle est supérieure à 1. Et si ce n'est pas le cas on divise.

Pour la réduction on divise chaque côté par l'échelle si elle est supérieure à 1 et si ce n'est pas le cas, on multiplie.

Quand on réduit c'est plus petit et quand on agrandis c'est plus grand.

Ces deux élèves appréhendent l'influence des coefficients mais leur expression est confuse en ce qui concerne la notion d'échelle. Elles omettent par ailleurs de parler des angles.

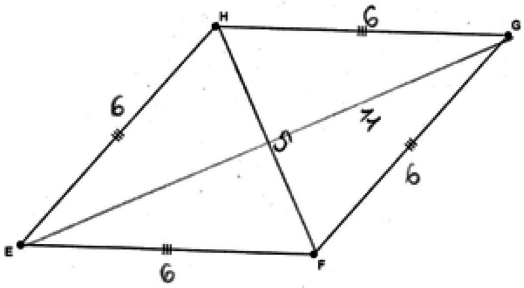
Lisa/Zoé

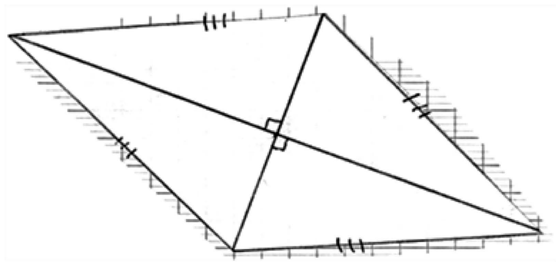
En fonction de l'échelle (ex : 1,5) pour agrandir une figure il suffit de multiplier la longueur d'un côté, par exemple :
8 = longueur d'un côté.
8 × 1,5 = 12
Pour réduire une figure, si l'échelle est supérieure à 1, il faut diviser mais si au contraire elle est inférieure (ex : 0,6) il faut multiplier.

Pour ne pas déformer une figure il faut faire attention à ce que les angles soient les mêmes

Idem mais les élèves précisent dans quels cas multiplier ou diviser et insistent sur l'importance de la conservation des mesures d'angles.

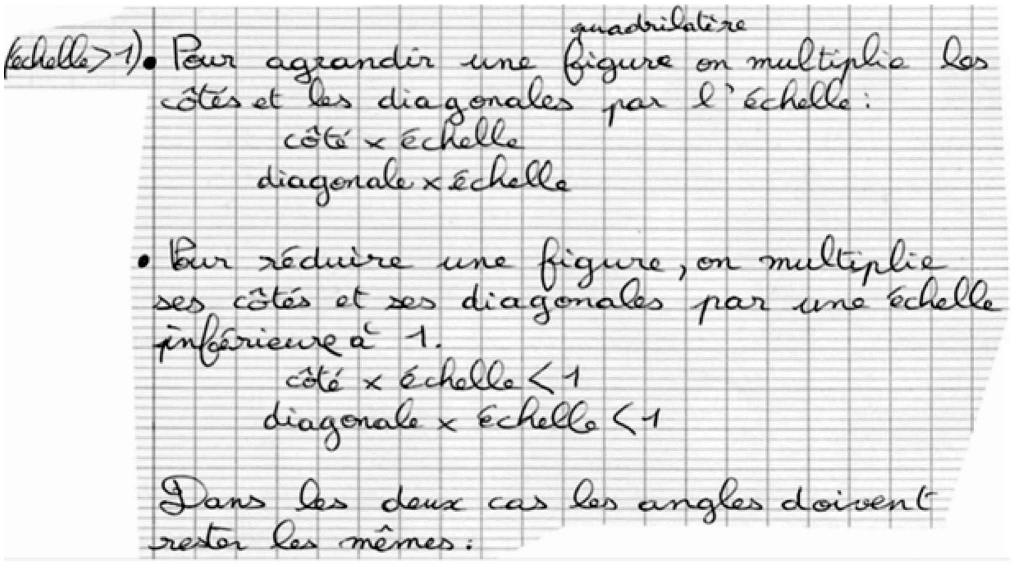
Philippine/Maxime





Pour la construction du losange il semble que ces deux élèves utilisent aussi les diagonales mais aucune rédaction n'accompagne ces figures.

Anna/Fany



(échelle>1) • Pour agrandir une figure quadrilatère on multiplie les côtés et les diagonales par l'échelle :

côté × échelle

diagonale × échelle

• Pour réduire une figure, on multiplie ses côtés et ses diagonales par une échelle inférieure à 1.

côté × échelle < 1

diagonale × échelle < 1

Dans les deux cas les angles doivent rester les mêmes.

Raisonnement complet, écrit de manière explicite, sur les longueurs des côtés et des diagonales.

Institutionnalisation

Agrandissement/réduction de polygones

Bilan de l'activité faite en classe

1. Des polygones qui sont des agrandissements ou des réductions l'un de l'autre ont leurs longueurs proportionnelles (côtés, diagonales) et leurs angles de même mesure.

Remarques

Il n'est cependant pas nécessaire de vérifier la conservation de tous les angles ou la proportionnalité de toutes les longueurs.

En général, il n'est pas suffisant de n'agrandir que les côtés ou de ne conserver que les angles des sommets.[1]

2. Le coefficient d'agrandissement ou de réduction est le coefficient de proportionnalité des mesures des longueurs.

C'est un nombre positif.

- S'il est inférieur à 1, on a une réduction.
- S'il est supérieur à 1, on a un agrandissement.
- S'il est égal à 1, on a une reproduction à l'identique.

[1] Seul le cas du triangle permet de ne considérer que les côtés ou que les angles, mais cette activité ne le met pas en évidence. Il sera intéressant de le faire constater aux élèves au travers d'un exercice et en tout cas avant d'aborder l'activité d'introduction au théorème de Thalès.

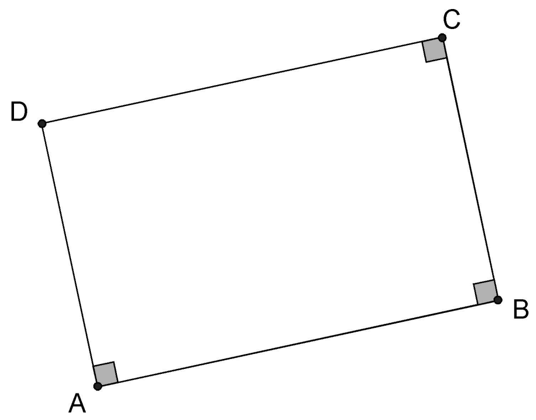
Agrandir ou réduire des quadrilatères

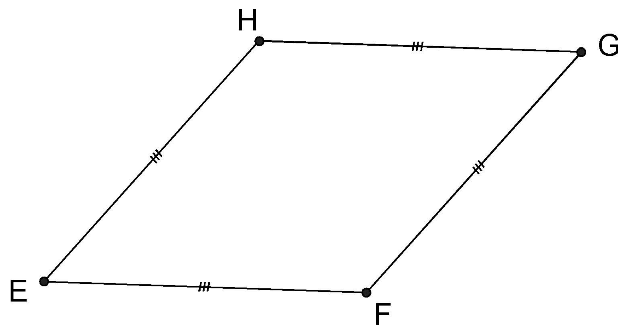
Activité 1 : Rectangle, losange, quadrilatères

Étape 1

Voici deux quadrilatères ABCD et EFGH.

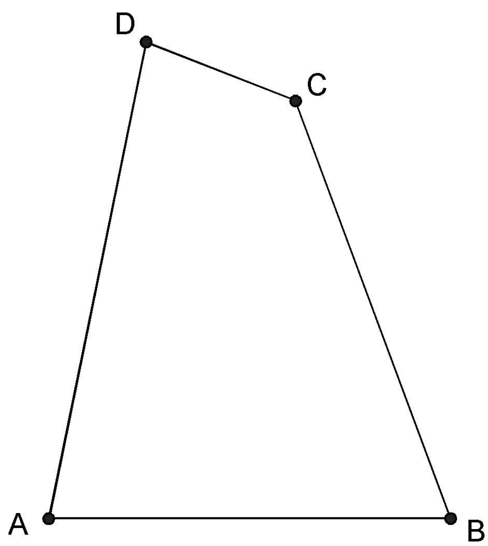
1) *Précisez leur nature.*
2) *Construisez individuellement un agrandissement de ces quadrilatères à l'échelle 1,5.*
3) *Vérifiez que vous obtenez bien les mêmes quadrilatères.*





Étape 2

Construisez une réduction de ABCD à l'échelle 0,8.



Étape 3 **(à écrire ou afficher au tableau)**

Proposez une méthode de construction de l'agrandissement ou de la réduction d'un quadrilatère.

Précisez ce qui caractérise un agrandissement ou une réduction d'une figure.

La boîte de volume huit fois plus grand

Auteurs : Monique MAZE – Aurélie ROUX (IREM de Clermont-Ferrand)

Niveau : Cycle 4 [4e – 3e]

Présentation
Cette activité consiste à réaliser le patron d'une boîte parallélépipédique de volume huit fois plus grand qu'une autre de dimensions données. L'assemblage des patrons et la manipulation des solides obtenus permettent de valider ou non les propositions des élèves.

Prérequis
Aucune connaissance nouvelle n'est nécessaire. L'enseignant peut proposer ce travail dès le début de l'année, il suffit de connaître les patrons de parallélépipède rectangle.

Objectifs principaux
- Mettre en défaut les conceptions erronées des élèves (multiplier les longueurs par huit multiplie aussi le volume par huit).
- Mettre en évidence l'effet d'un agrandissement sur les volumes.
- Réinvestir le travail sur la notion de conservation de la forme lors d'un agrandissement.
- Réinvestir le travail sur les patrons.

Matériel
- Feuilles de papier quadrillé (5 mm × 5 mm) de préférence (pour faciliter les tracés lors de la construction des patrons), en quantité suffisante (pour permettre aux élèves de se tromper autant de fois que nécessaire).
- Instruments de géométrie.
- Ciseaux, éventuellement du ruban adhésif.

Déroulement et analyse de l'expérimentation

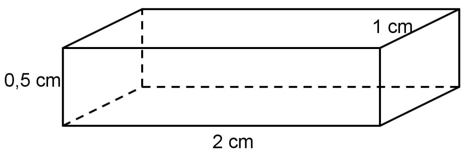
Scénario

Une séance

- Construction du premier patron : travail individuel (5 à 10 min).
- Construction d'un patron d'une boîte de volume huit fois plus grand : travail en binômes ou en groupes de trois ou quatre (20 min).
- Débat, synthèse collective et institutionnalisation (15 à 20 min).

Description et analyse

Une séance devrait suffire. Mais lors de l'expérimentation, une des classes test a montré de telles difficultés pour la construction des patrons qu'il a fallu poursuivre le travail lors d'une deuxième séance.
Dans un premier temps, le professeur projette la représentation en perspective d'une boîte.



La consigne suivante est alors donnée à l'oral.

Consigne 1 *Le dessin projeté est celui d'un parallélépipède rectangle.* *Il représente une boîte sans couvercle remplie à ras bord de farine.* *Construire et découper un patron de cette boîte.*

Les élèves cherchent individuellement. Il est important que l'enseignant puisse s'assurer que chacun d'eux sait construire un patron de parallélépipède rectangle de dimensions données. Plusieurs boîtes identiques sont construites dans la classe, elles sont utiles pour répondre à la deuxième consigne.

Consigne 2 *Construire un patron d'une boîte dont la forme est un parallélépipède rectangle, sans couvercle, qui contient huit fois plus de farine. Vous travaillerez en groupes.*

L'erreur attendue, multiplier toutes les dimensions par huit, doit pouvoir être observée, avec une construction sur une feuille A4.
Les dimensions et le fait de ne pas mettre de couvercle sont choisis dans ce but.

Le professeur met à disposition des élèves suffisamment de feuilles de papier : ils doivent pouvoir recommencer leur travail s'ils considèrent qu'ils ont commis une erreur.
Il faut souligner que ni le mot « volume », ni le mot « agrandissement » ne sont utilisés dans cette consigne.

En général, tous les élèves commencent par multiplier les trois dimensions par huit. Cette solution est invalidée par la manipulation des premières boîtes construites.
Cette manipulation leur permet de se corriger et de trouver d'autres propositions :
- celles qui répondent au problème mais ne relèvent pas d'un agrandissement (lorsqu'ils multiplient une seule dimension par 8 (voir production 2),
- celles qui relèvent d'un agrandissement (lorsque toutes les dimensions sont multipliées par 2).

Lorsque tous les groupes ont terminé, le professeur organise un débat dans la classe.
Il donne un statut particulier à la procédure qui consiste à multiplier toutes les dimensions par deux ; cette procédure est soulignée comme relevant d'une situation illustrant un agrandissement mathématique.
Il saisit l'occasion pour mettre en évidence l'effet d'un agrandissement mathématique sur les aires, en utilisant les travaux des élèves pour montrer que l'aire de la base de la boîte a été multipliée par quatre.

L'enseignant propose une trace écrite faisant la synthèse de ce travail. Elle peut prendre la forme suivante :

Dans le cas d'un agrandissement mathématique, si les longueurs sont multipliées par 2, alors les aires sont multipliées par 2^2 et les volumes sont multipliés par $2 \times 2 \times 2$ soit 2^3, c'est-à-dire 8.

Par la suite, l'enseignant peut généraliser cette propriété et proposer la trace écrite suivante :

Dans le cas d'un agrandissement ou d'une réduction mathématique, si les longueurs sont multipliées par k, nombre strictement positif, alors les aires sont multipliées par k^2 et les volumes sont multipliés par $k \times k \times k$ soit k^3.

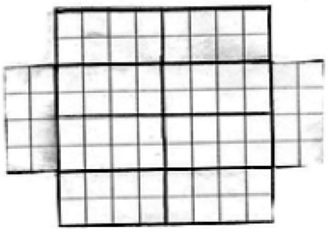
Quelques exemples de productions d'élèves

Production 1

Les élèves ont manipulé les solides de la consigne 1 pour construire un solide huit fois plus grand et en ont déduit ses dimensions.

En premier temps, nous avons multiplié toutes les longueurs par 8, mais nous nous sommes rendu compte que cela ne fonctionnait pas.

En seconde temps, on a mis 4 parallépipèdes cote à cote et superposé 4 autres parallépipèdes pour former le parallépipède 8 fois plus grand.



Production 2

La consigne est respectée (la boîte finale a un volume huit fois plus grand) mais ce n'est pas un exemple d'agrandissement mathématique.

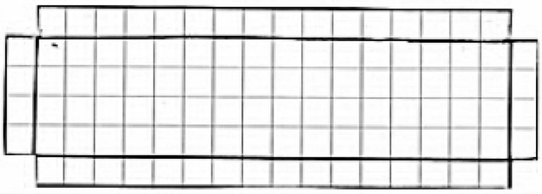
L'enseignant pourra utiliser ce type de production lors du débat pour faire émerger les spécificités d'un agrandissement mathématique (au sens de la similitude).

I° Erreur

Dans un premier temps, on a multiplié le patron initial par 8 que ce soit la longueur, la largeur ou la hauteur, or la consigne exigeait qu'il est 8 fois plus de riz et non 8 fois une plus grande boite. Certes on a multiplié notre patron par 8 mais on n'a pas tenu compte de la consigne. La conséquence fut que notre patron était complètement faux.

II° Résolution

Ensuite on a juste multiplié la base de notre patron dans le but de respecter la consigne. Après calcul, on a trouvé qu'il fallait obtenir 16 cm².
Une fois le patron construit, on a vérifié et on avait juste.



Production 3

Les élèves ont procédé par essais-erreurs numériques, en présentant leur démarche.

1ère étape : 2cm×8 = 16cm

1cm×8 = 8cm

0,5cm×8 = 4cm

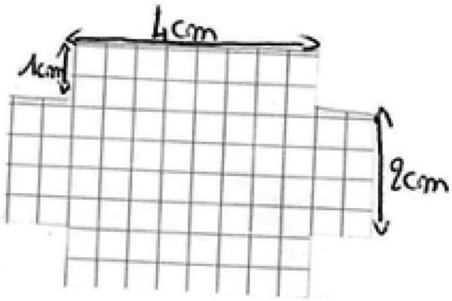
Ça ne fonctionner pas.

2ème étape : - 2 cm ×4 = 8 | 3ème étape : 8÷2 = 4 cm

- 1cm ×4 = 4 | 4÷2 = 2 cm

- 0,5cm ×4 = 2 | 2÷2 = 1cm

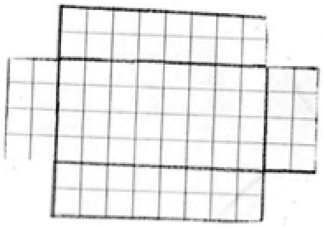
La 1ère étape ne fonctionner pas du coup nous avons pris la moitié de 8 ~~ensuite la moitier de 4~~ qui est la 2ème étape qui ne fonctionner pas donc nous avons diviser 4 ce qui nous donne la 3ème étape et qui fonctionne.



Production 4

Malgré la confusion de vocabulaire (aire / volume), les élèves ont raisonné en utilisant correctement la formule du volume d'un parallélépipède rectangle.
Leur démarche se situe dans le domaine du numérique, y compris la phase de validation.
L'enseignant pourra utiliser ce type de production lors du débat pour repréciser le vocabulaire des grandeurs mises en jeu (longueur / aire / volume).

on à tracer le 1ER patron, on à calculer son aire : $0{,}5 \times 1 \times 2 = 1cm^3$
on à multiplier ce RÉSULTAT par 8 ce qui nous à donner $8cm^3$.
on à ensuite chercher des solutions pour faire 8 cm3, et nous
somme tombé sur $1 \times 2 \times 4$, et donc nous avons tracer le patron



Production 4 bis

Comme dans la production précédente, les élèves raisonnent en utilisant la formule du volume du parallélépipède rectangle.
Leur démarche se situe cette fois dans le domaine géométrique en travaillant sur les longueurs ; la validation relève d'une démarche expérimentale.

2- 1ère Hypothèse:

On multiplie les longueurs par 8.

0,5cm × 8 = 4cm
2cm × 8 = 16cm
1cm × 8 = 8cm

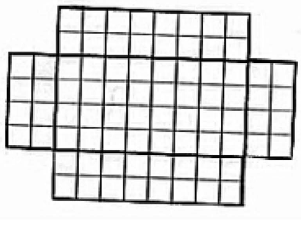
Ce parallélépipède est trop grand, il peut contenir plus de 8 fois plus de riz. Celle-ci est donc fausse.

2ème Hypothèse:

On doit contenir huit fois le volume de la première boîte.
On multiplie donc le volume du premier parallélépipède.
Il est de $1cm^3$ donc on le multiplie et on obtient $8cm^3$.
On a remarqué qu'il fallait multiplier les longueurs par 2 pour avoir ce volume:

2cm × 2 = 4cm
0,5cm × 2 = 1cm
1cm × 2 = 2cm

Ce parallélépipède peut contenir 8 petits parallélépipèdes donc 8 fois plus de riz.



Introduction du théorème de Thalès

Auteurs : Laurianne FOULQUIER (IREM d'Aquitaine)
Vincent PAILLET ; Dominique POIRET-LOILIER (IREM d'Orléans)

Niveau : Cycle 4 [4^e-3^e]

Présentation

À partir d'agrandissements et de réductions de triangles, les élèves sont amenés à découvrir la configuration du théorème de Thalès dans le cas où les deux triangles sont l'un dans l'autre (configuration de 4^e).

Prérequis

- Notion d'agrandissement/réduction : travail sur la conservation des angles et la proportionnalité des longueurs (voir articles correspondants dans cette brochure). En particulier, il est utile d'avoir observé que, pour les triangles, la conservation des angles seule, ou la proportionnalité des longueurs des côtés, suffit.
- Somme des angles d'un triangle.
- Angles correspondants égaux et droites parallèles.

Objectifs principaux

Mise en place du théorème de Thalès en classe de 4^e avec le cheminement suivant :
- deux triangles dont les angles sont égaux sont en agrandissement/réduction l'un de l'autre.
- si on fait coïncider un angle de deux triangles en agrandissement/réduction, les autres étant correspondants et de même mesure, alors les triangles ont deux côtés parallèles et des sommets alignés.

Réciproquement,

si deux triangles ont un angle en commun (sommets alignés sur les deux côtés de l'angle) et deux côtés parallèles, leurs deux autres angles sont correspondants et de même mesure.
Les triangles sont donc en agrandissement/réduction l'un de l'autre et donc les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

Matériel

- Les élèves doivent avoir leur matériel de géométrie, dont le rapporteur (ce dernier n'est cependant pas indispensable).
- À télécharger : dossier « theoreme_de_Thales »
  fiche-eleve_trianglesA et *fiche-eleve_trianglesB* (doc et pdf)

Déroulement et analyse de l'expérimentation

Scénario

Le professeur ne doit pas donner les trois étapes en même temps.

Toute l'activité se fait en binômes ou en groupes. Un bilan est fait à la suite de l'étape 2 et peut aboutir à la rédaction du cours sur le théorème de Thalès.

Phase de travail en binômes ou en groupes (30 à 40 minutes)
Étape 1 : découpage, association des triangles par paires, justification et description du positionnement.

Étape 2 : construction d'un triangle associé au triangle 5 resté seul, description de la construction et questionnement sur les mesures des longueurs des côtés.

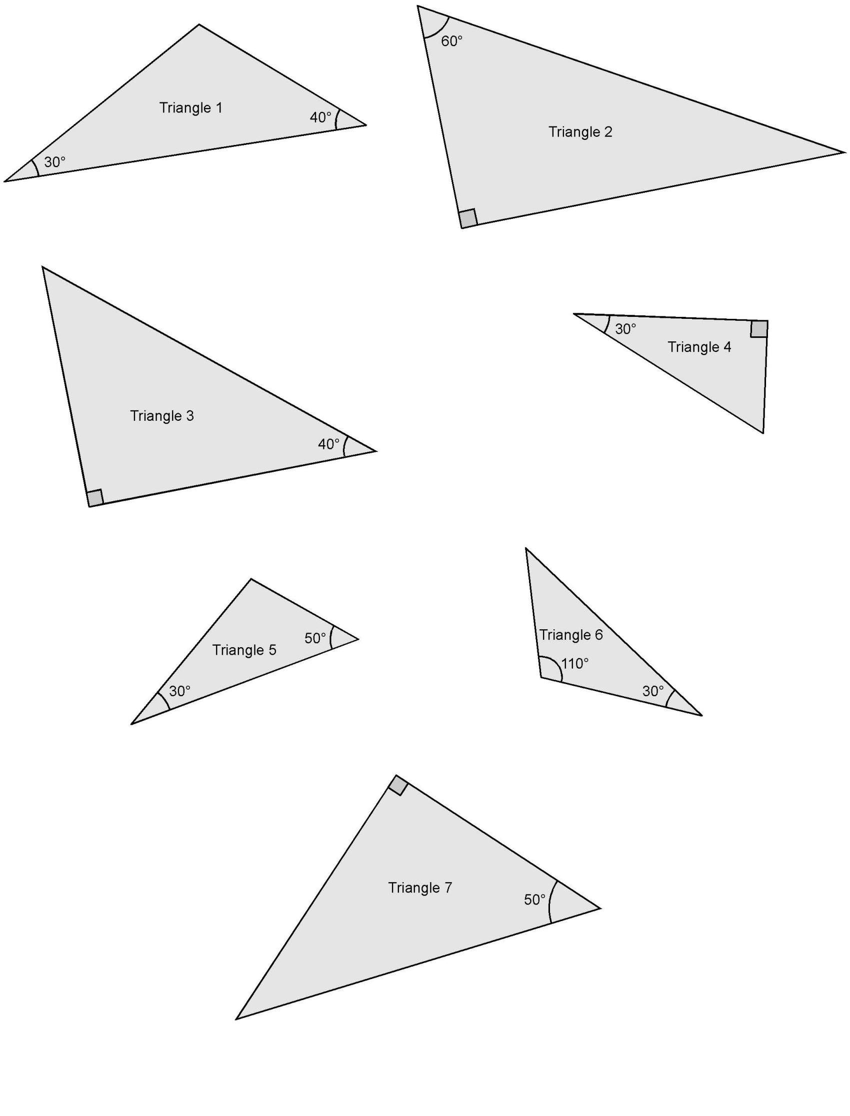
Bilan et institutionnalisation (environ 30 à 45 minutes)

Phase de travail en binômes ou en groupes (10 à 15 minutes)

Description et analyse

Étape 1

1) *Parmi les 7 triangles ci-contre, il existe trois paires de triangles agrandis ou réduits l'un par rapport à l'autre. Découpez ces 7 triangles et retrouver les trois paires sans* ***effectuer de mesure****.*
Justifiez votre choix le plus précisément possible ; des calculs pourront être effectués mais aucune mesure n'est permise.
Superposez vos triangles de manière à rendre vos associations visibles.
Appelez le professeur quand vous avez terminé.



Les élèves découpent les triangles et les associent deux par deux. Deux triangles associés doivent avoir leurs angles correspondants égaux. Nous avons décidé d'être explicites dans le questionnement, en ajoutant « superposez vos triangles… », sans quoi un nombre non négligeable d'élèves risque d'associer les triangles de manière à aboutir à des quadrilatères, ce qui n'est pas notre but.

2) Description des paires de triangles
Comment les sommets sont-ils positionnés les uns par rapport aux autres ?
Comment les côtés sont-ils positionnés ? Justifiez vos remarques dans la mesure du possible.

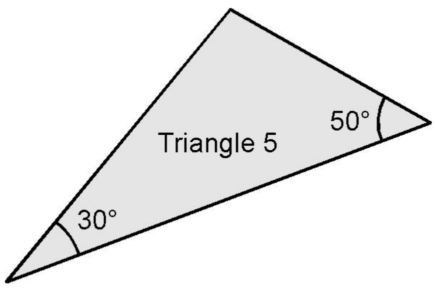
La description du positionnement demandé doit commencer à faire apparaître que des sommets sont alignés et que deux côtés sont parallèles (ce qui peut se justifier par le fait que des angles sont correspondants et égaux ; cette justification n'apparaît cependant que très rarement à l'écrit, un peu plus à l'oral). De ce point de vue, il pourrait être intéressant de proposer aussi trois triangles à associer. L'alignement des sommets et les côtés parallèles n'en seraient que plus évidents.

Un nombre non négligeable d'élèves se contente cependant de dire que les triangles associés ont des angles de même mesure et qu'ils ont mis un angle « l'un dans l'autre » ; le parallélisme n'apparaissant qu'à l'étape 2.

Dans cette étape, nous interdisons les mesures de longueurs de manière à ce que le raisonnement parte bien des angles égaux et non des côtés proportionnels. Ce point est important, sans quoi l'on risquerait de perdre toute rigueur. En effet, on partirait des côtés proportionnels pour aboutir à des droites parallèles, ce qui correspond à la réciproque et non au théorème de Thalès.

<u>Étape 2</u>

1. *Le triangle resté seul a été reproduit ci-dessous.*
   Sans mesurer de longueurs, construisez un triangle pouvant s'y s'associer. Pour cela, inspirez-vous du positionnement des paires de l'étape 1 que vous avez collés.
   Expliquez votre construction.
2. *Quelles remarques pouvez-vous faire quant aux longueurs du triangle de départ et celles de celui que vous avez construit ?*
   Vous pouvez simplement émettre des conjectures ou essayer de les démontrer.



À la première question de cette étape, les élèves sont amenés à construire l'agrandissement ou la réduction du triangle de départ en prolongeant les côtés et en traçant une parallèle à un côté. Certains élèves, déjà à l'aise avec la notion d'agrandissement et réduction, construisent ce triangle à côté du premier. C'est pourquoi nous leur demandons de s'inspirer de l'étape 1. Ce point est à rappeler à certains élèves. L'agrandissement est souvent construit à l'aide de report d'un angle et deux côtés décrits comme étant parallèles.

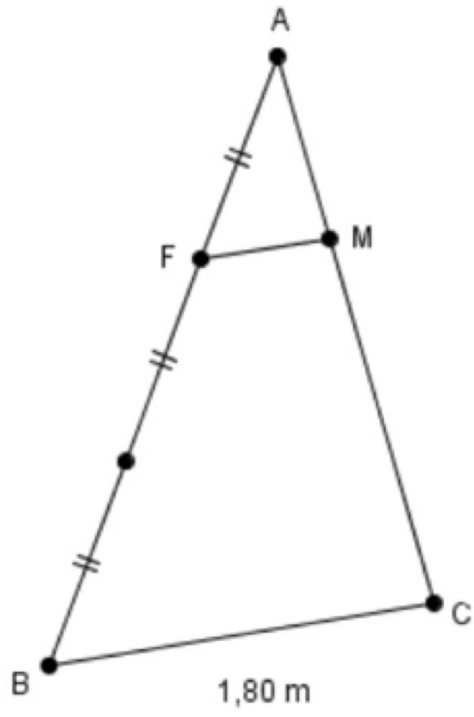
Une autre idée serait de demander de construire, le plus rapidement possible, plusieurs triangles en agrandissement/réduction du triangle resté seul. Le fait de prolonger deux côtés et de tracer des parallèles au troisième serait alors une méthode très efficace mais la configuration de Thalès, avec simplement deux triangles, apparaîtrait peut-être moins clairement.

Quelle que soit la consigne, les angles correspondants sont alors égaux et l'on obtient bien deux triangles en agrandissement/réduction.

La seconde question doit faire apparaître que les longueurs des côtés sont proportionnelles.
Ce raisonnement permet donc d'aboutir au théorème de Thalès et non à sa réciproque.

Le bilan est l'occasion de présenter les travaux de certains groupes. Celui-ci se fait à l'oral et la trace écrite sera faite dans le cours lors de l'institutionnalisation.

La propriété dégagée lors du bilan ne parle pas encore de coefficient d'agrandissement ou de réduction, de tableau de proportionnalité, ni de rapports égaux. Ces points seront vus lors de l'institutionnalisation. Ce sont des conséquences de la proportionnalité et non la conclusion du théorème de Thalès en tant que tel. L'activité s'arrête donc sur l'idée que : si deux triangles dans la configuration précédente ont deux côtés parallèles, alors leurs côtés sont de longueurs proportionnelles. On voit que pour aboutir à une rédaction précise, il est plus simple d'introduire des noms de points.



Étape 3

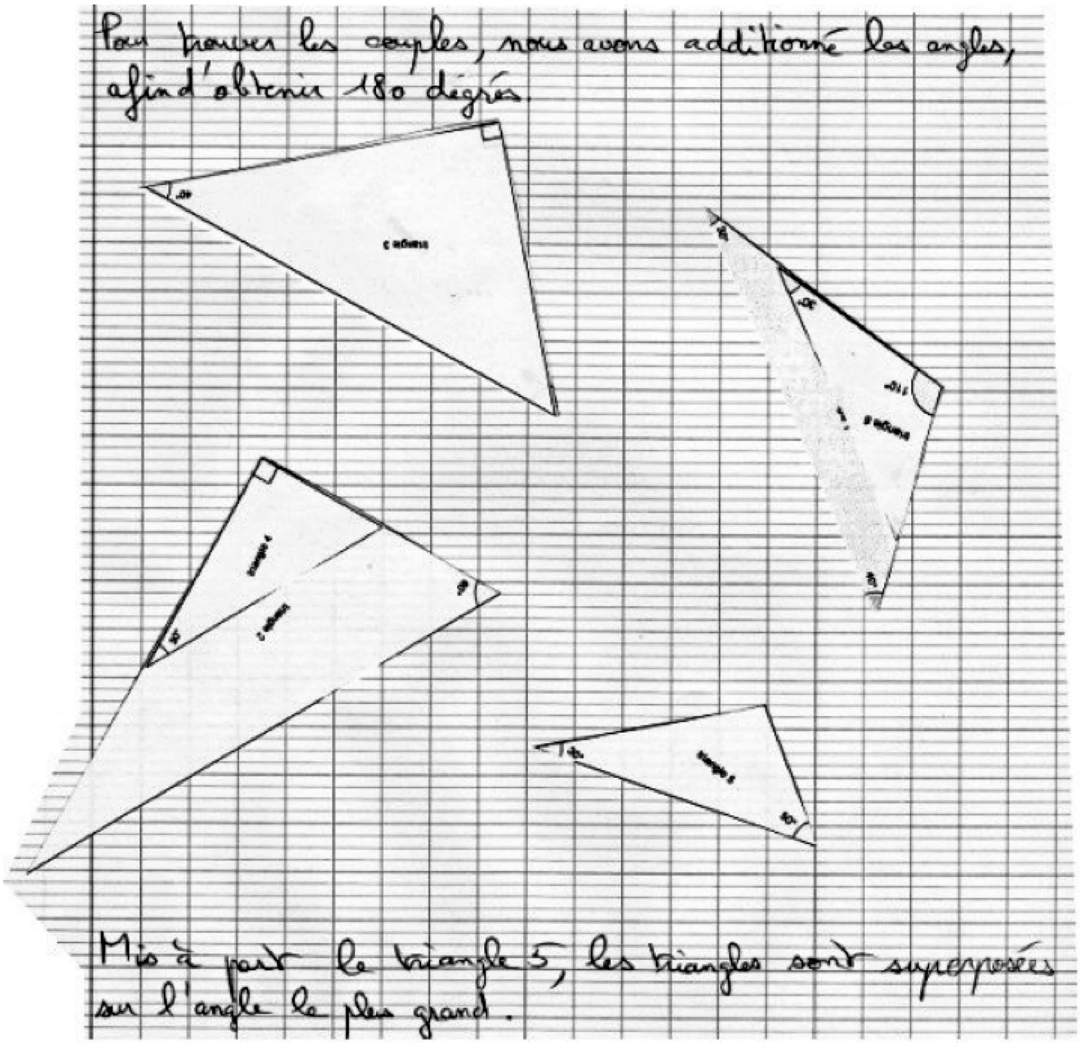
Sur la figure ci-contre :
- les points F et M appartiennent aux segments [AB] et [AC],
- les droites (FM) et (BC) sont parallèles.
Calculer la longueur FM si BC = 1,80 m.

Cette dernière étape sert de bilan et permet aussi de gérer les rythmes entre les différents groupes. L'intérêt de mettre des codages est d'utiliser un coefficient de proportionnalité.

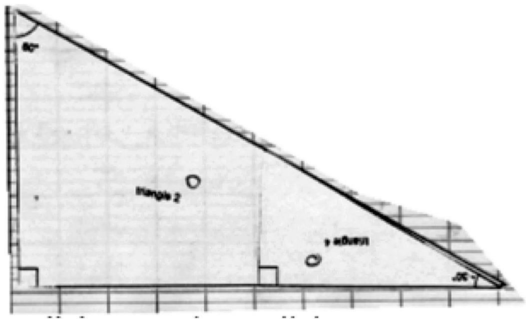
Productions d'élèves

Étape 1

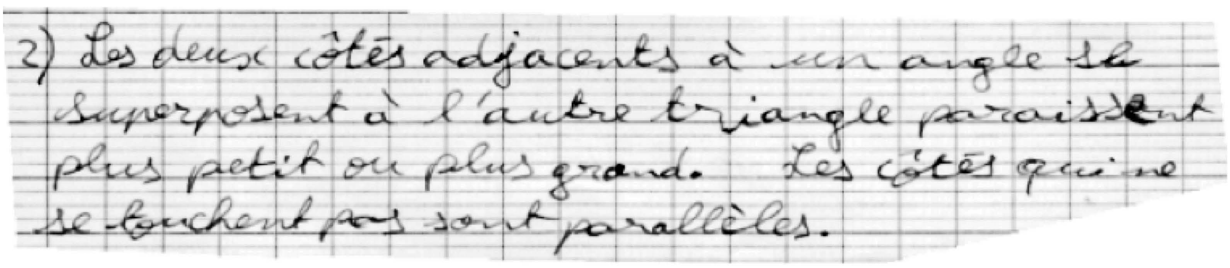
Thomas et Baptiste : la majeure partie des élèves superposent sur l'angle le plus grand.



Cependant, ce n'est pas le cas de tous les groupes :



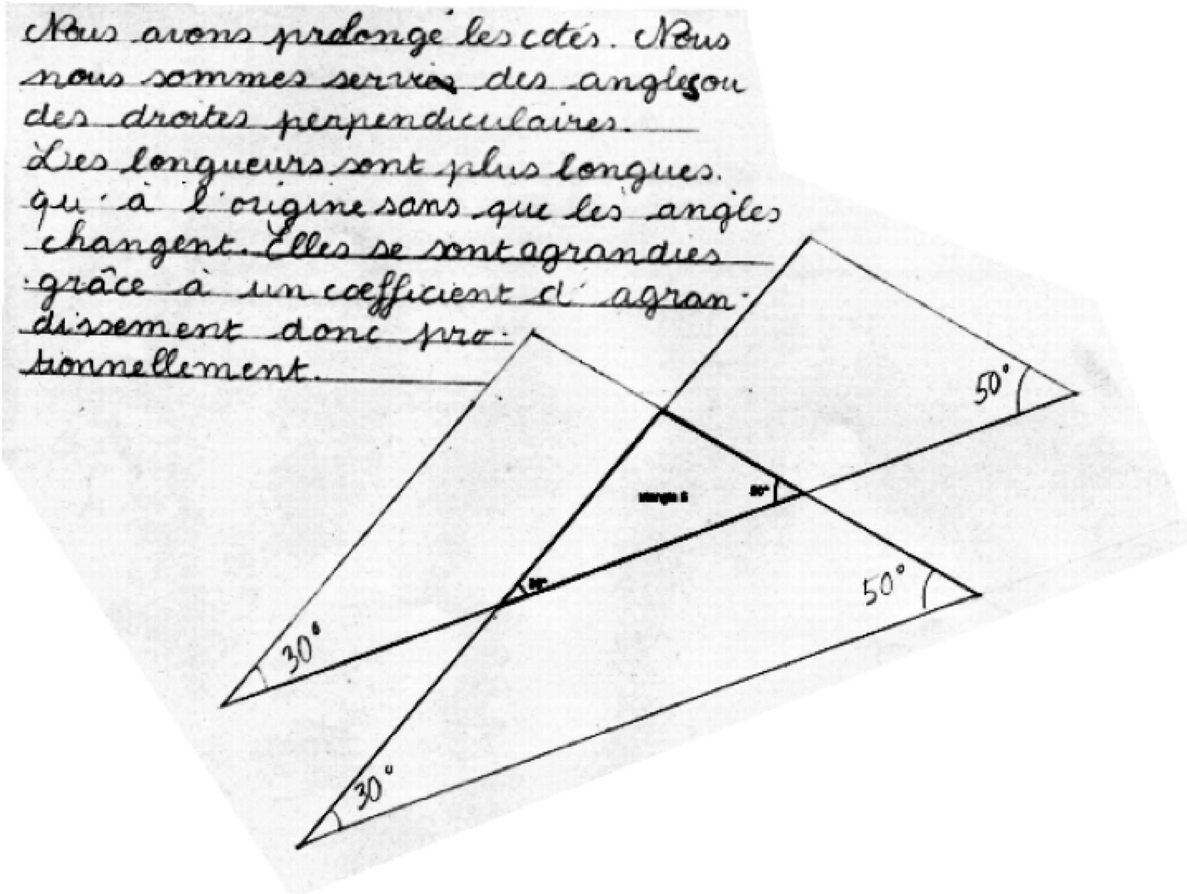
Aurélien et Lucas : mais il est plus rare qu'ils parlent explicitement de parallèles.



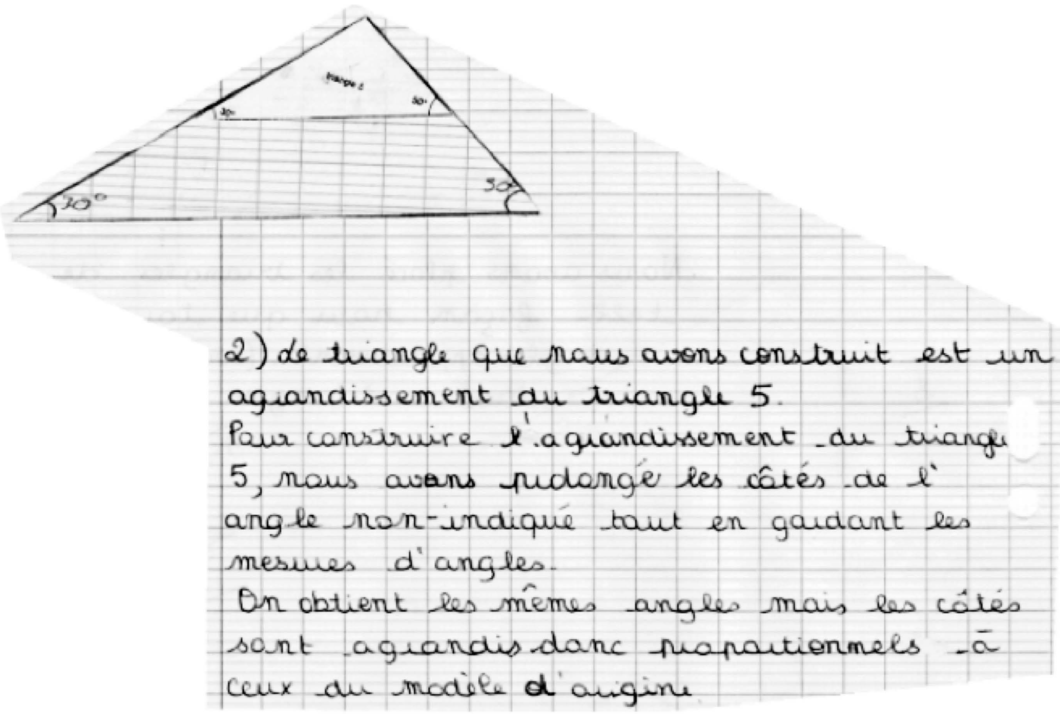
Étape 2

Les rédactions sont assez inégales mais tous arrivent à construire un agrandissement ou une réduction.

Juliette et Juliane : voici un exemple de constructions multiples accompagné d'un texte intéressant. Ces élèves ne parlent pas explicitement de parallèles mais expliquent leur construction.



Philippine et Maxime



Institutionnalisation

<u>Agrandissement et réduction dans les triangles</u>

1) Propriétés (cette première partie a été écrite et travaillée avant l'activité)

Deux triangles en agrandissement ou réduction l'un de l'autre ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles et leurs angles égaux deux à deux.

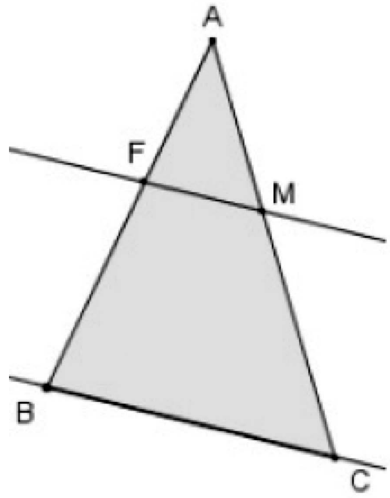
Deux triangles qui ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles deux à deux sont en agrandissement ou réduction l'un de l'autre.

Deux triangles qui ont leurs angles égaux deux à deux sont en agrandissement ou réduction l'un de l'autre.

2) Le théorème de Thalès

Soit deux triangles ABC et AFM.
Si A, F, B et A, M, C sont alignés
et si (FM) et (BC) sont parallèles,

alors les longueurs des côtés de ABC et AFM sont proportionnelles deux à deux (ABC et AFM sont en agrandissement / réduction l'un de l'autre).



Cela signifie que :

a. il existe un coefficient d'agrandissement ou de réduction k (coefficient de proportionnalité) et on peut écrire :

   $BC = FM \times k$; $AC = AM \times k$; $AB = AF \times k$

b. on a donc trois façons de calculer ce coefficient k

   $k = \frac{BC}{FM}$ $k = \frac{AC}{AM}$ $k = \frac{AB}{AF}$

   On a donc les égalités : $\frac{BC}{FM} = \frac{AC}{AM} = \frac{AB}{AF}$

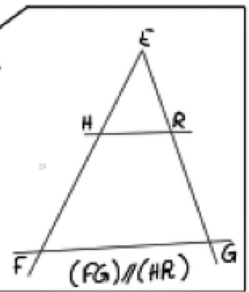
c. on peut aussi tracer et utiliser un tableau de proportionnalité :

Longueurs de ABC	BC	AC	AB
Longueurs de AFM	FM	AM	AF

Un exemple peut être ensuite donné, détaillant l'utilisation de chacune des trois techniques de calcul ci-dessus.

Exemple d'utilisation :

EH = 6 cm
HF = 3 cm
ER = 7 cm
FG = 12 cm
Calculer HR et EG



Les points E, H, F et E, R, G sont alignés
Les droites (HR) et (FG) sont parallèles
donc, d'après le théorème de Thalès, les triangles ERH et EGF ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles.

Pour calculer HR et EG on a donc 3 techniques :

Technique 1 : tableau de proportionnalité :

côtés de ERH	EH = 6 cm	ER = 7 cm	HR
côtés de EGF (correspondants)	EF = 9 cm (6 cm + 3 cm)	EG	FG = 12 cm

: 1,5 ; × 1,5

On cherche le coefficient de proportionnalité :

$6\,\text{cm} \times ? = 9\,\text{cm}$ donc $? = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} = 1{,}5$.

donc $EG = ER \times 1{,}5 = 7\,\text{cm} \times 1{,}5 = 10{,}5\,\text{cm}$.

$HR = FG : 1{,}5 = 12\,\text{cm} : 1{,}5 = 8\,\text{cm}$.

Technique 2 : coefficient d'agrandissement ou de réduction :

On remarque que : $6\,\text{cm} \times 1{,}5 = 9\,\text{cm}$ $\left(\frac{9}{6} = 1{,}5\right)$

On retrouve le coefficient de proportionnalité de la technique 1 et on refait les mêmes calculs.

Technique 3 : Égalités de quotients (de fractions ; de rapports)

On a : $\frac{EH}{EF} = \frac{ER}{EG} = \frac{HR}{FG}$ ← côtés de EHR ← côtés de EFG correspondants.

On remplace : $\frac{6}{9} = \frac{7}{EG} = \frac{HR}{12}$

EG ?

$\frac{6}{9} = \frac{7}{EG}$; $\times \frac{7}{6}$

$6 \times \frac{7}{6} = 7$.

donc $EG = 9 \times \frac{7}{6} = \frac{9 \times 7}{6} = 10{,}5$

HR ?

$\frac{6}{9} = \frac{HR}{12}$; $\times \frac{12}{9}$

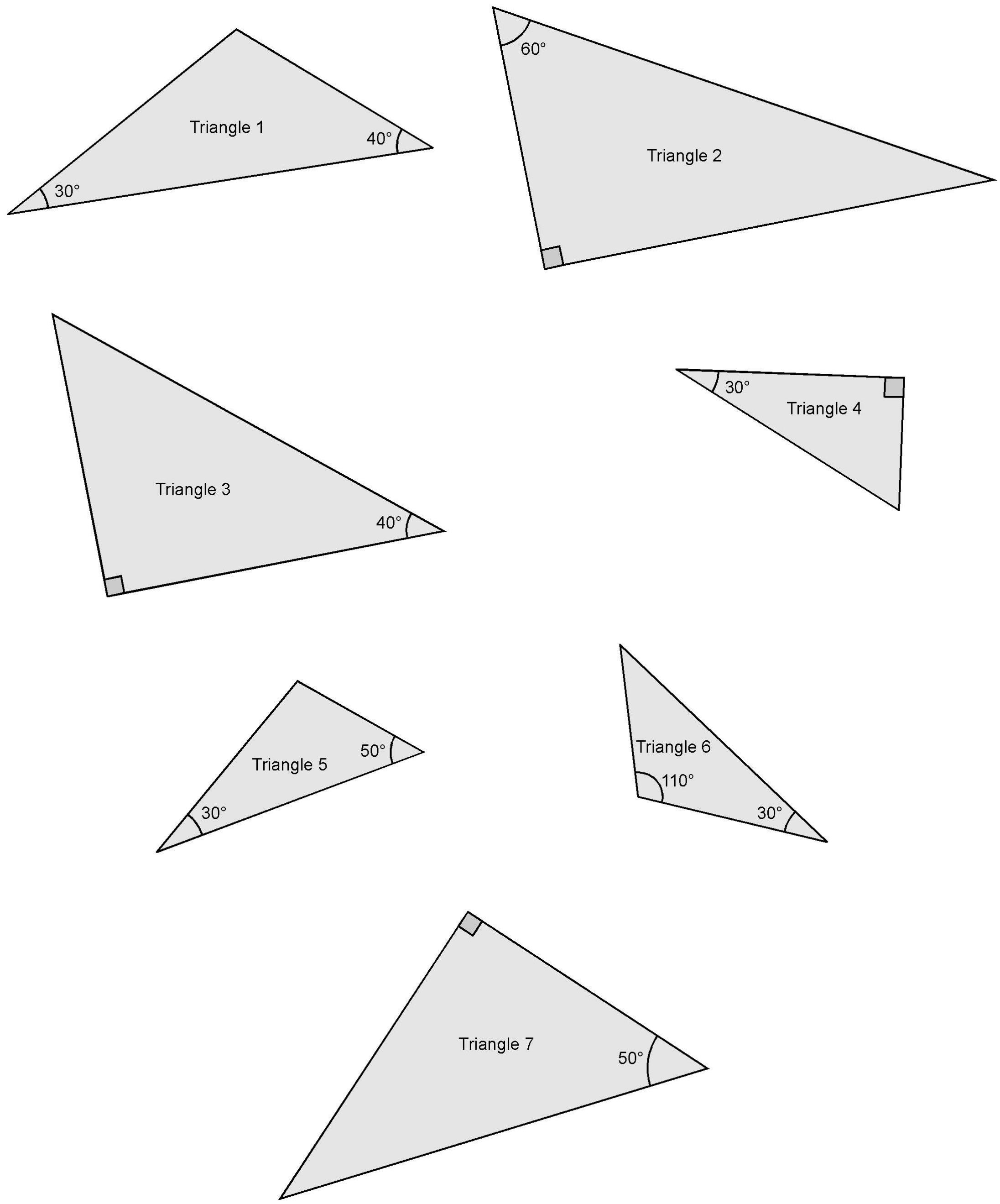
$9 \times \frac{12}{9} = 12$

donc $HR = 6 \times \frac{12}{9} = \frac{6 \times 12}{9} = 8$.

Étape 1

1) Parmi les 7 triangles ci-dessous, il existe trois paires de triangles agrandis ou réduits l'un par rapport à l'autre.
Découpez ces 7 triangles et retrouvez les trois paires sans **effectuer de mesure**.
Justifiez votre choix le plus précisément possible ; des calculs pourront être effectués mais aucune mesure n'est permise.
Superposez vos triangles de manière à rendre vos associations visibles.
Appelez le professeur quand vous avez terminé.

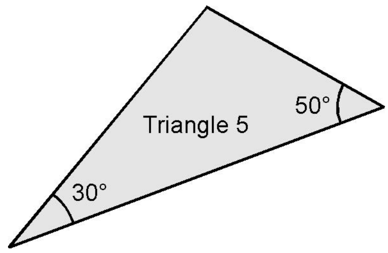
2) ***Ne collez vos triangles que lorsque le professeur a validé votre choix*** *!*
Description des couples de triangles
Comment les sommets sont-ils positionnés les uns par rapport aux autres ?
Comment les côtés sont-ils positionnés ? (dans la mesure du possible, justifiez vos remarques)



Étape 2

1) Le triangle resté seul a été reproduit ci-dessous.
Sans mesurer de longueurs, construisez un triangle pouvant s'y s'associer. Pour cela inspirez-vous du positionnement des paires de triangles de l'étape 1 que vous avez collés. Expliquez votre construction.

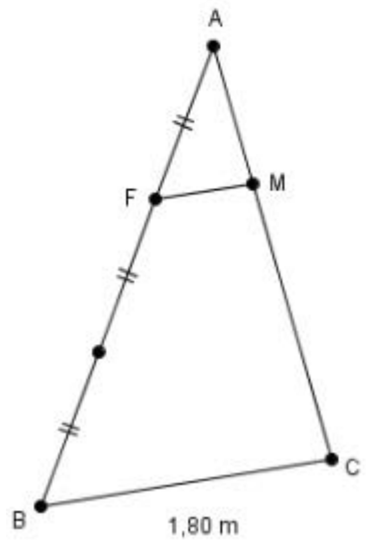
2) Quelles remarques pouvez-vous faire quant aux longueurs du triangle de départ et celles de celui que vous avez construit ?
Vous pouvez simplement émettre des conjectures ou essayer de les démontrer.



Étape 3

Sur la figure ci-contre :
- les points F et M appartiennent aux segments [AB] et [AC],
- les droites (FM) et (BC) sont parallèles.

Calculer la longueur FM si BC = 1,80 m.



L'arrosoir
Effet de l'agrandissement sur le volume

Auteurs : Guillaume FRANÇOIS – Christian JUDAS (IREM des Pays de la Loire)

Niveau : Cycle 4.

Présentation

À un moment ou un autre de leur scolarité, les élèves ont, pour la plupart, rencontré le fait que : lorsque les longueurs sont multipliées par k, les aires ne sont pas multipliées par k. Sur des exemples, les élèves ont même reconnu que les aires sont multipliées par k^2, sans formalisation. Sur les volumes, le même travail a pu être effectué, mais plus rarement.

Cependant lorsqu'il est demandé : « Si on multiplie les dimensions d'un objet par k, que se passe-t-il pour les aires ? », la plupart des élèves répondent spontanément que l'aire est aussi multipliée par k.

Prérequis

Cette activité peut être menée à n'importe quelle période de l'année ; pas nécessairement dans le chapitre « Géométrie dans l'espace ». Elle vient enrichir un chapitre « Agrandissement-réduction » qui sera complété au fur et à mesure des activités rencontrées tout au long de l'année. Cette activité permet d'en écrire la partie : « Effet d'un agrandissement-réduction sur le volume ».

Objectifs principaux

L'activité a pour objectif principal de formaliser et institutionnaliser les conséquences de l'agrandissement ou de la réduction sur le volume d'un solide.

Matériel

- À télécharger : dossier « arrosoir »
  photo2-arrosoir_a_projeter (odt et pdf), *fiche-eleve_arrosoir* (doc et pdf)
- Une caisse de petits cubes

Déroulement et analyse de l'expérimentation

Scénario

La fiche élève est distribuée.

Après un temps de réflexion individuelle, une réponse spontanée est demandée.
Le professeur note les différentes propositions des élèves.
Un débat collectif est organisé sur ces réponses spontanées. L'exigence de justification permet d'en invalider la plupart et de recentrer les recherches autour de la proportionnalité.
La photo 2 est alors présentée à la classe afin d'alimenter le débat et d'invalider une réponse reposant sur la simple proportionnalité des hauteurs.
Enfin, pour aboutir, un travail de recherche en groupes est proposé.

Description et analyse

On imagine qu'un très grand nombre d'élèves répondront 55 L, en utilisant le rapport de proportionnalité des longueurs qui est 5.

Description et analyse

Les expérimentations montrent que les élèves arrivent très vite à un consensus sur un volume de 55 L. Il est même souvent évoqué, soit en actes, soit en le justifiant clairement par la proportionnalité.

Le professeur projette alors la photo 2 (voir *photo2 document à projeter.pdf*) où l'on peut voir l'arrosoir géant et l'arrosoir de 11 L.

À partir de ce document, un débat s'installe dans la classe. Certains élèves convainquent les autres que l'on ne remplit pas le grand arrosoir avec cinq petits en utilisant l'argument suivant : « on raisonne sur la hauteur mais pas sur la largeur, donc il faut plus de 5 arrosoirs. »

Il est donc mis en évidence que le volume n'est pas cinq fois plus grand, car l'agrandissement se fait suivant les trois dimensions. En prenant en compte cette remarque, le professeur demande aux élèves comment continuer pour trouver la réponse au problème posé. Les élèves se mettent en groupes et commencent leurs recherches.

Soit des propositions intéressantes émergent des élèves, soit le professeur oriente les travaux en leur proposant une aide en fonction du niveau du groupe. Par exemple :
- aide 1 : « Que se passe-t-il pour un cube dont on agrandit les arêtes ? ». Il est intéressant d'avoir une caisse de cubes dans la classe pour que les élèves puissent manipuler.
- aide 2 : « Que se passe-t-il pour un cube dont on double, dont on triple les arêtes ? »
- aide 3 : « Que se passe-t-il si on agrandit un cube d'arête 29 cm en un cube d'arête 145 cm ? ».
- etc…

Dans le bilan de l'activité, le théorème ci-dessous est institutionnalisé puis permet d'établir une solution au problème de l'arrosoir.

Théorème

Dans un agrandissement/réduction de rapport k, les longueurs sont multipliées par k, les aires par k^2 et les volumes par k^3.

Remarque

Il est important de faire remarquer que la démonstration a été faite sur le cube et non sur l'arrosoir. La généralisation ne peut pas se faire au collège, mais ne doit pas être passée sous silence.

Fiche élève

L'arrosoir

Voici une œuvre de l'alchimiste du zinc Francis ARSÈNE, manceau, installé à Paris. Cet arrosoir géant (dont le réservoir mesure 1,45 m de haut) a été offert à la ville du Mans et se situe tout près de la mairie.

En mesurant la hauteur d'un arrosoir de 11 L, on trouve 29 cm.

Combien l'arrosoir géant peut-il contenir de litres d'eau ?

Fichier Photo2

Repères bibliographiques

*La problématique des agrandissements et réductions et du théorème de Thalès a déjà été l'objet d'une réflexion que l'on peut retrouver dans la brochure **Autour de Thalès** écrite il y a une vingtaine d'années et que l'on peut se procurer sur le portail des IREM avec le lien :*

http://www.univ-irem.fr/spip.php?article1236

Autour de Thalès
Commission Inter-IREM Premier Cycle - 1995

Cette brochure a été conçue lorsque le théorème de Thalès était enseigné sous l'aspect projection et sous l'aspect homothétie. Certains articles ne correspondent donc plus aux programmes actuels (ceux sous l'aspect projection). D'autres (sous l'aspect homothétie) redeviennent d'actualité dans les nouveaux programmes. Enfin certains articles, traitant de sujets de fond, gardent tout leur intérêt pour éclairer l'enseignant sur les fondements de ces notions. On y relève en particulier les articles des auteurs suivants.

Rudolf BKOUCHE

Variations sur les liens entre le géométrique et le numérique : « Autour du théorème de Thalès », (pages 7 à 67)

C'est un éclairage épistémologique du théorème de Thalès avec les différentes démonstrations d'Euclide, d'Arnauld, les apports de Legendre, Lacroix. En voici le plan.

La démonstration euclidienne

1. La méthode des aires
2. La théorie des proportions
3. La démonstration d'Euclide.

La démonstration d'Arnauld

1. La critique de Port-Royal
2. La théorie des proportions
3. La théorie des parallèles
4. Le théorème des lignes proportionnelles
5. Remarques comparatives sur les méthodes d'Euclide et Arnauld.

Legendre, le retour à l'ordre euclidien

1. Sur quelques traités classiques
2. Les « Éléments de Géométrie » de Legendre
3. La méthode des aires.

Lacroix entre empirisme et Port-Royal

1. Les « Éléments de Géométrie » de Lacroix
2. Les proportions
3. Les lignes proportionnelles.

La théorie des proportions à la lumière des nombres réels

1. Sur quelques ouvrages de géométrie élémentaire
2. Constructions des nombres réels et mesures des grandeurs
3. Les grandeurs proportionnelles
4. La mesure des grandeurs et la proportionnalité dans quelques traités de géométrie.

Henry PLANE

Le théorème de Thalès : Une invention française du XX^{e} siècle, (pages 68 à 85)

Cet article apporte des informations historiques et précises sur l'apparition de la terminologie utilisée de nos jours en France. L'expression « Théorème de Thalès » est d'apparition relativement récente au début du XX^{e} siècle.

Henry Plane se livre à une « recherche en paternité » sur plus de vingt-cinq siècles où l'étude de l'ADN de la notion est remplacée par celle de documents illustrant la recherche. On croise, parmi beaucoup d'autres, les noms d'Euclide, Pappus, Héron d'Alexandrie, Legendre, etc.

Guy BROUSSEAU

Promenade avec Thalès, de la maternelle à l'université (pages 87 à 124)

Guy Brousseau s'appuie tout d'abord sur une étude de l'APMEP montrant que trois points de vue dans la présentation du théorème de Thalès coexistent dans l'enseignement, dans les années 1990. Il analyse les variables didactiques des situations d'introduction. Il distingue deux types de connaissances mises en œuvre par les élèves dans l'utilisation du théorème de Thalès : une connaissance conceptuelle basée sur une analyse des caractères de la figure et une connaissance perceptive basée sur la reconnaissance de figures prototypiques. Il s'interroge sur les situations fondamentales (au sens de la théorie des situations) auxquelles il conviendrait de confronter les élèves pour aboutir à la connaissance du théorème de Thalès.

Jean Claude DUPERRET

Pour un Thalès Dynamique, (pages 125 à 143).

C'est une réflexion didactique qui analyse les aspects projectifs et homothétiques du théorème de Thalès. En effet, la configuration statique de la figure prototypique du théorème de Thalès cache deux dynamiques qui ont pu le faire naître : l'aspect « projection » et l'aspect « homothétie ». Bien que les projections ne soient plus dans les programmes d'enseignement, des élèves réagissent encore parfois de manière intuitive en termes de projection. À chacune des dynamiques est associé un rapport de projection ou d'homothétie. Des considérations sur le théorème de Thalès et l'espace prolongent l'article qui se termine par une réflexion sur les programmes.

La bibliographie qui suit a nourri notre réflexion. Elle comporte des textes de référence qui ne font pas systématiquement l'objet d'un renvoi depuis un article.

Barth, B.-M. (1987). *L'apprentissage de l'abstraction*. Paris. Retz.

Barth, B.-M. (1993). *Le savoir en construction*. Paris. Retz.

Barth, B.-M. (2013). *Élève chercheur, enseignant médiateur : donner du sens aux savoirs*. Paris. Retz.

Bouvier, A., George, M., & Le Lionnais, F. (1979). *Dictionnaire des mathématiques*. Presses universitaires de France.

Brousseau, G. (1998), *Théorie des Situations Didactiques*. La pensée sauvage.

Commission Inter-IREM Premier Cycle (1995). *Autour de Thalès*. IREM de Lyon. Villeurbanne.

Coxeter, H.S.M. (1969). *Introduction to geometry*. John Wiley & Sons Inc., second edition, New York.

Duperret, J.-C., Perrin, D., Richeton, J.P. (2001). Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : l'exemple de la géométrie affine du collège. In *Bulletin de l'APMEP* 435, 472–797.

Kahane, J.-P. (2000). Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement. In *Bulletin de l'APMEP 430*, 571-599.

Klein, F. (1974). *Le Programme d'Erlangen : considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*. Traduction de HE Padé. Collection Discours de la méthode. Gauthier-Villars.

Massot, A., Massot, C., IREM des Pays de la Loire. *Agrandissement-Réduction : un chemin pour Thalès.* In *Autour de Thalès,* 169–190

Massot, A., Massot, C., Commission Inter-IREM Premier Cycle, IREM des Pays de la Loire, Nantes (2001). *Agrandissement-réduction, un fil conducteur au collège.* In *Des mathématiques au Cycle Central. T. 2. Programme du Cycle central* (1997), 21–35

Levain, J.-P. (1993). Proportionnalité, agrandissement et échelle. In *Petit x* 31, 15-34.

Levain, J.-P. (1996). Situation d'agrandissement et construction du concept d'échelle, In *Repères-IREM* 25, 5-18.

Perrin, D. (2000). Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission Kahane : l'exemple de la géométrie affine du collège. In *Bulletin de l'APMEP* 431, 758–784.
