MATHÉMATIQUES A L' ÉCOLE NORMALE
TOME 2

Géométrie de l'Egalité
Géométrie de la Proportion
Le Plan et l'Espace

I.R.E.M. de Lorraine

réf. I.14$_2$

Jean Marie DIDRY
François GOLFIER
Jean LAMBERT
Gérard MATHIEU
Michel SIBILLE

Edité et imprimé par l'**Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques** - (Université de Nancy I) -
B.P. 239 - 54506 Vandœuvre-les-Nancy Cedex - tél. (8) 327.55.51
Dépôt légal : 4e trimestre 1982
N° de la publication : 2-85406-074-1
Le Directeur : Jean-Louis CLERC

Contrairement à ce qu'annonçait la préface du tome I, ce tome II ne comprend qu'une partie "géométrie", séparée en trois chapitres : l'ampleur du sujet interdisait d'y ajouter d'autres matières.

Il y aura donc un tome III (le dernier !) comportant : mesure ; probabilités ; initiation à l'informatique ; graphes, graphiques et fonctions.

Quant au mode d'emploi de ce document, il est le même que celui du tome I : lire le texte, et surtout faire les exercices.

Il nous faut à nouveau remercier Madame L'Hommée et Monsieur Deberdt à qui l'on doit la qualité de la frappe et de l'impression de ce document.

Géométrie de l'Egalité

I - INTRODUCTION

1.1 - *Points et droites*

On ne tentera pas ici de donner des définitions des objets les plus élémentaires (points, droites, plans). L'idée intuitive que l'on peut en avoir est suffisante pour faire de la géométrie. Ce qui importe d'ailleurs, ce sont les relations très simples qui existent entre ces objets : ainsi deux points déterminent une droite et une seule ; deux droites distinctes d'un même plan se coupent en un point ou sont parallèles.

Remarquons que dans l'espace, deux droites sans point commun peuvent ne pas être parallèles. Car deux droites parallèles sont, par définition, dans un même plan. Ainsi deux arêtes d'un cube définissent soit deux droites concourantes, soit deux droites parallèles, soit deux droites sans point commun et non parallèles.

▶ Ex. 1.1 : Pouvez-vous décrire un système de trois droites D, D', D'' telles que D et D' soient sans point commun ainsi que D' et D'' tandis que D et D'' se coupent en un seul point ? De telles droites peuvent-elles être dans un même plan ?

Un des résultats de base de la géométrie est le célèbre postulat d'Euclide : par un point extérieur à une droite on peut mener une parallèle et une seule à cette droite. Il est bien connu aujourd'hui que ce résultat à l'air fort naturel ne peut être démontré à partir des définitions élémentaires (il est même possible de construire des géométries cohérentes qui le nient).

Un point O sur une droite XY détermine deux demi-droites OX et OY.

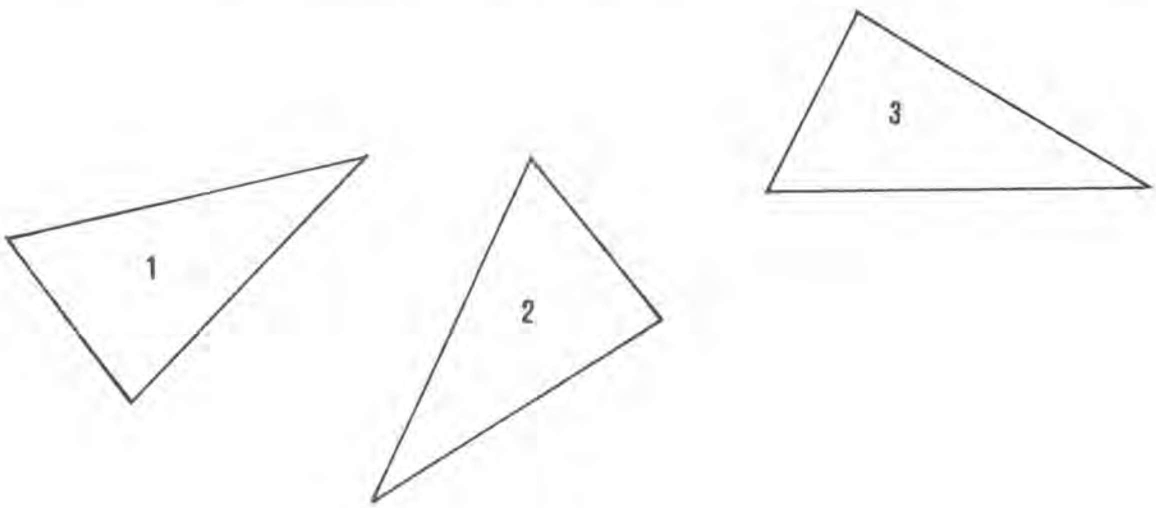
Deux points A et B sur une droite déterminent un segment de droite : c'est la partie de la droite comprise entre A et B.

Une droite D tracée dans un plan détermine deux demi-plans, séparés par la droite. Si un point A se trouve dans l'un des demi-plan et un point B dans l'autre, le segment AB coupe la droite D.

▶ Ex. 1.2 : Soient 3 points non alignés. Ces points déterminent trois droites qui partagent le plan en 7 régions. Montrez qu'une droite ne peut traverser plus de 4 parmi ces 7 régions. Peut-elle n'en traverser que 3 ?

L'égalité : Dans le chapitre III (Tome I) on a évoqué le problème que pose la notion d'égalité. En géométrie plane, deux figures sont dites égales si elles sont superposables. C'est à dire qu'en décalquant l'une d'elles sur un papier on peut replacer celui-ci (après l'avoir éventuellement retourné) sur l'autre figure pour que les éléments correspondants coïncident. Ou, si l'on veut, deux figures égales sont une seule figure, placée à deux endroits différents.

Ainsi les 3 triangles ci-dessous sont égaux. On remarquera qu'on ne peut passer du triangle 1 au triangle 3 sans le retourner.



On n'insistera pas non plus sur les fondements de la notion de distance. La distance entre deux points A et B est la longueur du segment AB. La propriété essentielle de la longueur est l'inégalité triangulaire :

Si A, B, C sont trois points, on a

$$AB + BC \leq AC .$$

Autrement dit un côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres.

▶ *Ex. 1.3* : Soit M un point situé à l'intérieur d'un triangle A B C. En désignant par $2p$ le périmètre du triangle (la somme des longueurs des trois côtés) montrez que :

$$p \leq MA + MB + MC \leq 2p .$$

Dans l'espace la notion d'égalité de deux figures demeure évidente. Il devient toutefois plus difficile (voire impossible) de la matérialiser par superposition. Les "décalques" étant alors des moulages, on voit mal comment les réaliser si la figure a trop de creux. La difficulté sérieuse ne vient cependant pas de là. Certaines figures égales sont comme les triangles 1 et 3 de la page 2. Pour appliquer un calque du triangle 1 sur le triangle 3 il faut le retourner et donc utiliser la 3ème dimension. De même on peut enfiler sa main droite dans un moulage de la main gauche à condition d'avoir "retourné" ce moulage ... en utilisant la 4ème dimension. Que ceux qui y sont parvenus nous écrivent, ils ont gagné.

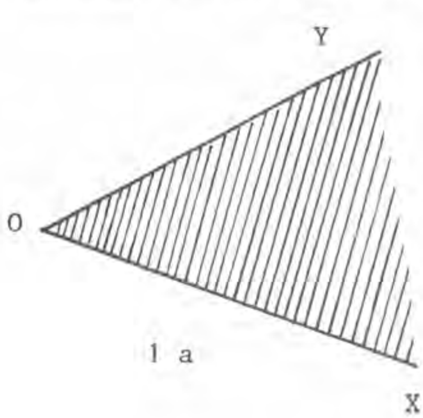
▼▼
▼

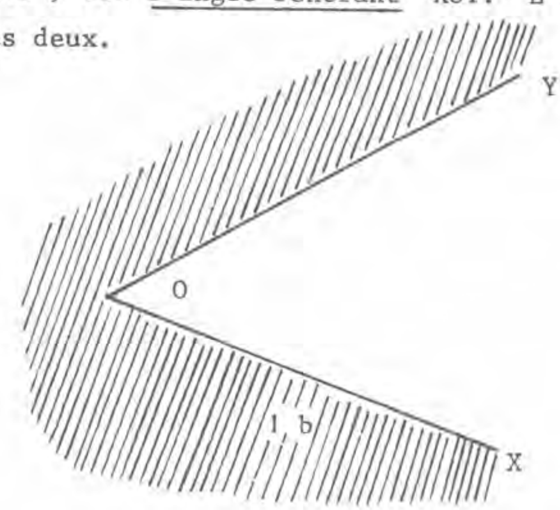
Dans les chapitres : "Géométrie de l'égalité" et "Géométrie de la proportion", il n'est question que de géométrie plane. Tout se passe dans un plan donné une fois pour toutes. On négligera donc de le rappeler par des phrases telles que : "Soient D et D' deux droites d'un même plan .... "

On essaiera autant que possible d'utiliser des notations claires, simples et reconnues par le plus grand nombre. Cela n'évite pas quelques ambiguités : ainsi A et B étant deux points, on désignera par AB la droite qu'ils définissent, le segment qui les joint, la longueur de ce segment. Le contexte précisera toujours quel est l'objet du discours.

1.2 - Les angles

Soient OX et OY deux demi-droites de même origine O . Elles découpent le plan en 2 secteurs angulaires. L'un (figure 1a) est l'angle saillant $\widehat{XOY}$, l'autre (1b) est l'angle rentrant $\widehat{XOY}$. L'angle saillant est le plus petit des deux.

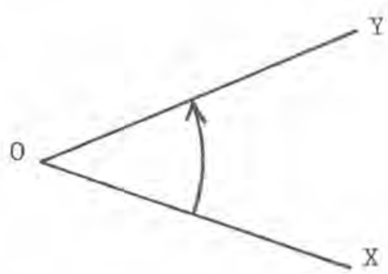


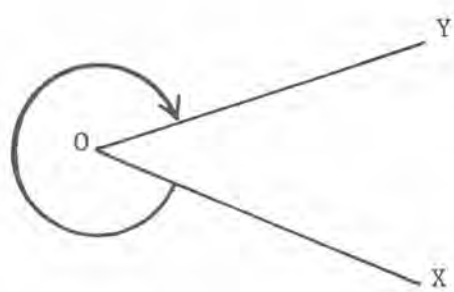


On considère aussi que l'angle $\widehat{XOY}$ est la donnée des deux demi-droites OX et OY. Il n'y a pas alors à distinguer angle saillant et angle rentrant.

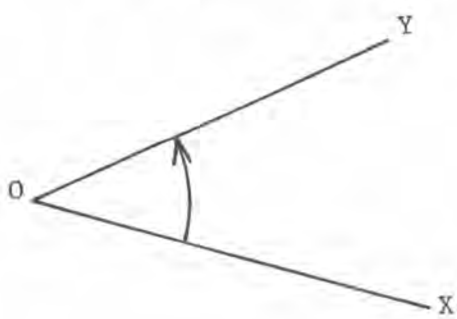
Un troisième point de vue peut permettre de définir cette notion d'angle. La donnée est toujours constituée par les deux demi-droites OX et OY. L'angle $\widehat{XOY}$ est la rotation qui transporte OX sur OY : on fait tourner la demi-droite OX autour de O (comme un essuie-glace) jusqu'à la faire coïncider avec OY.

Il y a alors deux angles possibles selon que l'essuie-glace fait un grand ou un petit tour.

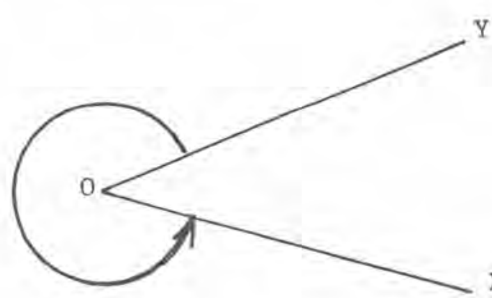




On retrouve ainsi l'angle saillant et l'angle rentrant. On peut éviter cette confusion en privilégiant un sens de rotation (usuellement c'est le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre à cadran analogique), c'est à dire qu'on autorise seulement les rotations dans ce sens. Mais alors $\widehat{XOY}$ n'est plus le même que $\widehat{YOX}$ (c'est un point de vue que nous n'adopterons pas dans la suite).



$\widehat{XOY}$

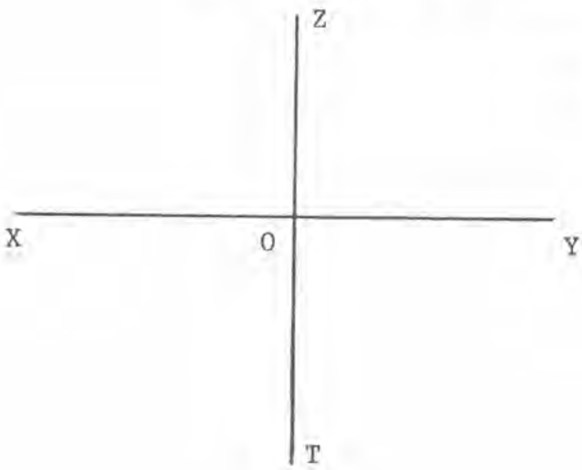


$\widehat{YOX}$

Selon les cas on adoptera l'un ou l'autre de ces 3 points de vue (en général le 1er ou le 2e). Usuellement (c'est à dire sans précision du contraire), les angles envisagés seront saillants.

- OX et OY sont les côtés de l'angle, O est le sommet de l'angle.

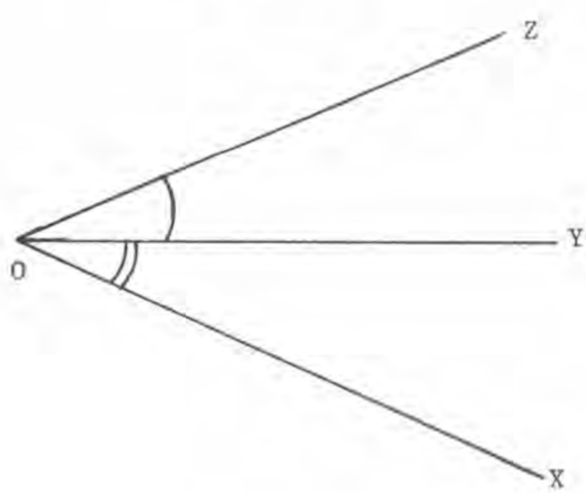
- Un point O sur une droite XY définit deux demi-droites OX et OY donc un angle. Il s'agit d'un angle plat. Si on plie la figure (ce que permettent rarement les tableaux) de façon à transporter OX sur OY, la ligne de pliage est une droite ZT. L'angle $\widehat{YOZ}$ (ou $\widehat{XOZ}$, $\widehat{TOX}$, $\widehat{TOY}$) est un angle droit. C'est, si l'on veut, la moitié de l'angle plat $\widehat{XOY}$.



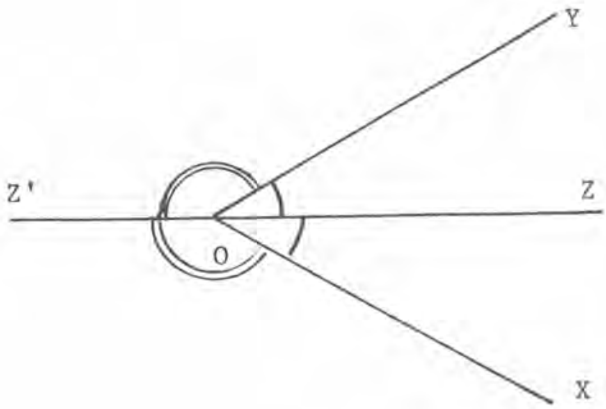
Deux droites telles que XY et ZT sont dites perpendiculaires.

- Un angle plus petit qu'un angle droit est un angle aigu. Un angle plus grand qu'un angle droit est un angle obtus. Les angles saillants et rentrants sont respectivement plus petits et plus grands qu'un angle plat.

- Deux angles $\widehat{XOY}$ et $\widehat{YOZ}$ situés de part et d'autre de la demi-droite OY sont dits adjacents.



• Etant donné un angle $\widehat{XOY}$, il existe une demi-droite OZ qui le partage en deux parties égales. C'est la <u>bissectrice</u> de l'angle $\widehat{XOY}$. On notera qu'il y a une bissectrice OZ pour l'angle saillant, une bissectrice OZ' pour l'angle rentrant et que OZ et OZ' forment une droite.



<u>La mesure des angles</u> : tout le monde a vu et utilisé un rapporteur. C'es: un instrument à mesurer les angles. L'unité choisie est en général le <u>degré</u> : on a partagé un angle plat en 180 parties égales chacune de 1 degré (1°). L'angle droit qui est la moitié de l'angle plat mesure donc 90°. On sait que le degré est divisé en 60 minutes, et une minute en soixante secondes (pour ne pas parler des tierces, tout à fait oubliées aujourd'hui, la minute et la seconde étant en sursis). On sait aussi que les opérations sur ces nombres – en particulier les divisions – réservent quelques gaietés. On utilise parfois un autre système d'unités écrit dans le bon système décimal : l'angle droit vaut <u>100 grades</u>, les sous-unités étant les $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, ... de grades. On remarquera que les angles d'usage courant comme 60° ou 30° ont de mauvaises expressions quand on les écrit en grades (lesquelles ?)

• Si deux angles $\widehat{XOY}$ et $\widehat{YOZ}$ sont adjacents, la mesure de $\widehat{XOZ}$ est évidemment la somme de celle de $\widehat{XOY}$ et de $\widehat{YOZ}$.

• Si la somme des mesures de 2 angles est 180°, ces deux angles sont dits <u>supplémentaires</u>. Et ils sont <u>complémentaires</u> si la somme de leurs mesures est 90°. Mis en position d'angles adjacents, ils définissent un angle plat dans le 1er cas, un angle droit dans le 2ème.

<u>*Remarque*</u> :

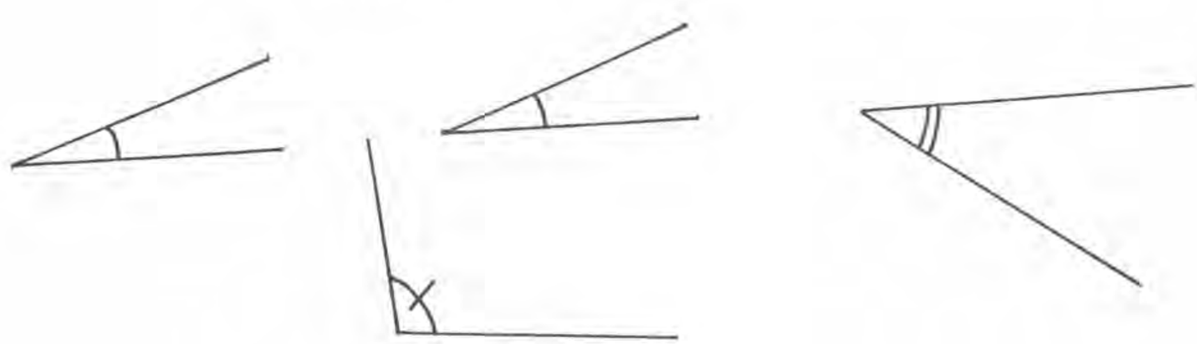
1) Si on met en situation d'angles adjacents quatre angles de 90°, on obtient un angle de 0° qui est aussi un angle de 360°. C'est là une des difficultés de la

mesure des angles. Les amateurs savent que l'on mesure modulo 360°.

2) L'observation d'une calculette (ou les souvenirs scolaires) montre qu'il existe une autre unité d'angle : le radian. L'angle plat vaut Π radians (Π est l'habituelle lettre grecque valant 3,14159...). Cette unité de mesure peut paraître artificielle. Son existence sera partiellement justifiée dans la remarque suivant le paragraphe 6.3.1.

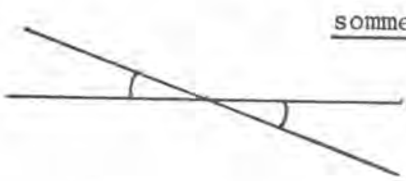
3) Si un angle est donné avec sa mesure, la difficulté de savoir si c'est le saillant ou le rentrant que l'on considère tombe. Un angle saillant a une mesure inférieure (ou égale) à 180°, un angle rentrant a une mesure supérieure (ou égale) à 180° - et inférieure à 360°.

4) Comme on l'a déjà fait plus haut il est d'usage de mettre un - ou plusieurs - arc(s) de cercle(s) à l'intérieur des angles afin de désigner d'éventuelles égalités.



Les deux premiers angles sont égaux, et il n'y a pas d'autres égalités entre ces 4 angles.

5) Un fait bien connu est que deux angles opposés par le sommet (voir figure) sont égaux.

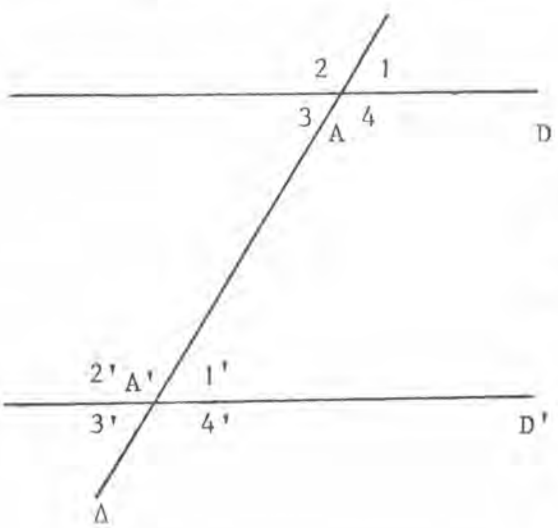


▶ *Ex. 1.4* : Démontrer ce résultat.

▶ *Ex. 1.5* : Soient quatre demi-droites OX, OY, OZ, OT (se succédant dans cet ordre). On suppose que $\widehat{XOY} = \widehat{ZOT}$ et $\widehat{YOZ} = \widehat{XOT}$ Montrez que OX et OZ sont en prolongement ainsi que OY et OT.

▶ *Ex. 1.6* : Soient quatre demi-droites OX, OY, OZ, OT (se succédant dans cet ordre). On suppose que les bissectrices des angles $\widehat{XOY}$ et $\widehat{ZOT}$ sont en ligne droite ainsi que celles de $\widehat{YOZ}$ et $\widehat{TOX}$. Montrez que les quatre demi-droites OX, OY, OZ, OT sont deux à deux en prolongement.

1.3 - *Angles et parallèles*



Soient D et D' deux droites et Δ une sécante commune à ces deux droites. Soit A (respectivement A') le point d'intersection de Δ avec D (respectivement D'). Les droites D et Δ définissent quatre angles de sommets A que l'on a désignés par 1,2,3 et 4 sur la figure. De même autour de A' apparaissent 4 angles notés A',2',3',4'.

Les angles 1 et 1' sont dits <u>correspondants</u>.
Les angles 1 et 3' sont dits <u>alternes-externes</u>.
Les angles 4 et 2' sont dits <u>alternes-internes</u>.
Les angles 4 et 1' sont dits <u>intérieurs du même côté</u>.
Les angles 4' et 1 sont dits <u>extérieurs du même côté</u>.

A titre d'exercice, désignez tous les couples d'angles correspondants, alternes-externes ...... de la figure.

Théorème 1.1 -

Lorsque deux droites parallèles sont coupées par une sécante,

1) Deux angles correspondants sont égaux,

2) Deux angles alternes-internes sont égaux,

3) Deux angles alternes-externes sont égaux,

4) Deux angles intérieurs (ou extérieurs) du même côté sont égaux.

Ce résultat sera considéré comme un postulat.

Remarquons que chacune des assertions de ce théorème a pour conséquences toutes les autres.

▶ *Ex. 1.7* : Démontrez cette affirmation.

Le théorème précédent admet une réciproque :

Théorème 1.2 -

Deux droites coupées par une même sécante sont parallèles si l'une quelconque des propriétés suivantes est vraie :

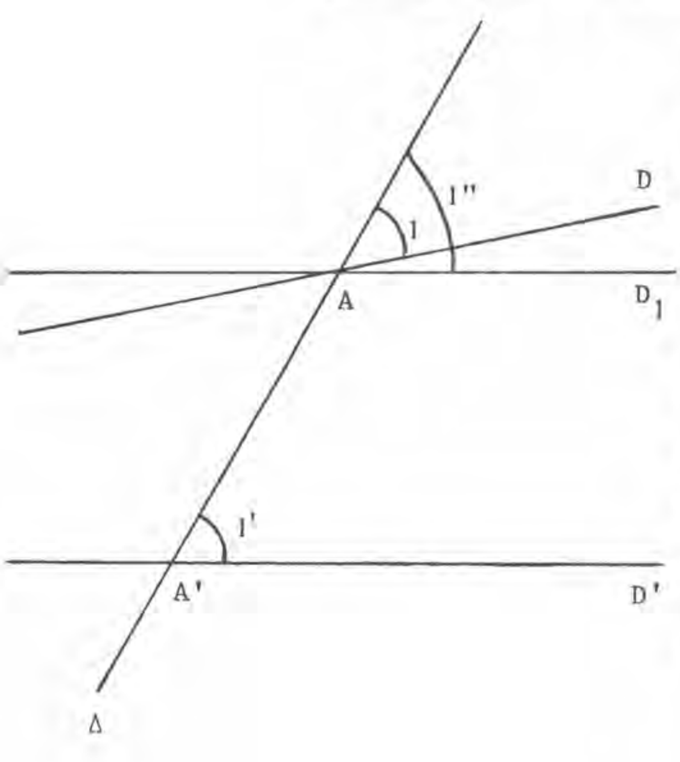
1) Deux angles correspondants sont égaux.

2) Deux angles alternes-internes sont égaux.

3) Deux angles alternes-externes sont égaux.

4) Deux angles intérieurs du même côté sont supplémentaires.

Démonstration : Soient D et D' les deux droites de l'énoncé et Δ la sécante. On suppose que Δ coupe D en A et D' en A'. Supposons que l'hypothèse 1 soit satisfaite. Les angles 1 et 1' sont donc égaux.



Menons par A la parallèle D_1 à D'. L'angle 1" correspondant à 1' lui est égal. Donc les angles 1 et 1" sont égaux, c'est à dire superposables. Comme ils ont un côté commun et qu'ils sont dans le même demi-plan par rapport à ce côté, l'autre côté doit être commun : donc D et D_1 sont confondues et ainsi D est parallèle à D'.

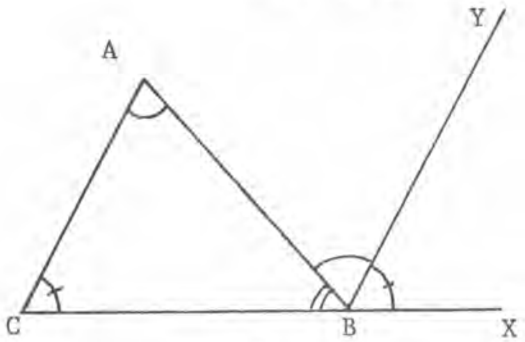
▶ *Ex. 1.8* : Par une méthode analogue (ou en utilisant l'exercice 1.4), achevez de démontrer le théorème.

Applications :

Théorème 1.3 -

La somme des angles d'un triangle est égale à 180°.

Soit un triangle ABC. Menons par B la parallèle à AC



Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABY}$ sont alternes-internes, les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{XBY}$ sont correspondants.
Donc $\widehat{CBA} + \widehat{ABY} + \widehat{XBY}$ représentent la somme des angles du triangle ABC, et c'est l'angle plat $\widehat{CBX}$

Remarque : Cette démonstration prouve aussi que l'angle $\widehat{ABX}$ (angle extérieur à B) est égal à la somme des angles $\widehat{A}$ et $\widehat{C}$.

▶ *Ex. 1.9* : On définit deux points D et E du côté BC dans un triangle ABC par : $\widehat{BAD} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{EAC} = \widehat{ABC}$.

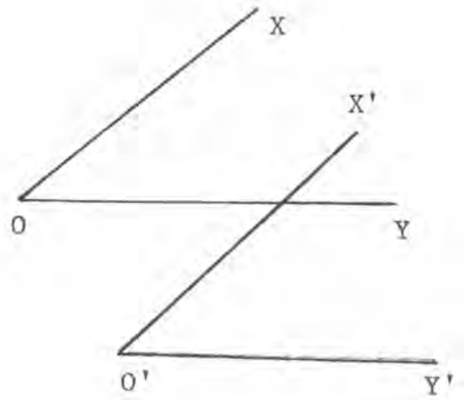
Montrez que $\widehat{ADE} = \widehat{AED}$ (le triangle AED est donc isocèle).

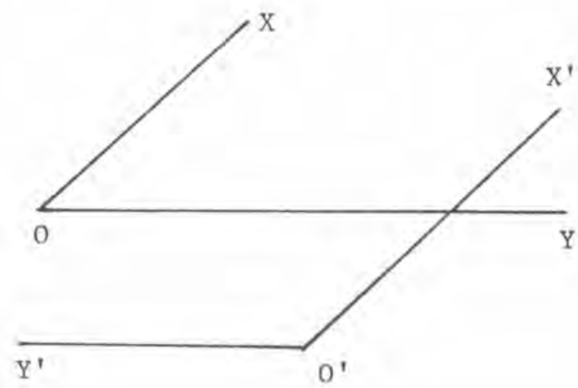
▶ *Ex. 1.10* : Dans un triangle rectangle l'un des angles aigus est le double de l'autre. Montrez qu'alors l'hypoténuse est le double du plus petit côté.

▶ *Ex. 1.11* : Soient $\widehat{XOY}$ un angle aigu, A un point extérieur à l'angle. On mène par A les perpendiculaires AU et AV à OX et OY (éventuellement prolongées). Montrez que $\widehat{UAV} = \widehat{XOY}$.

Théorème 1.4 -

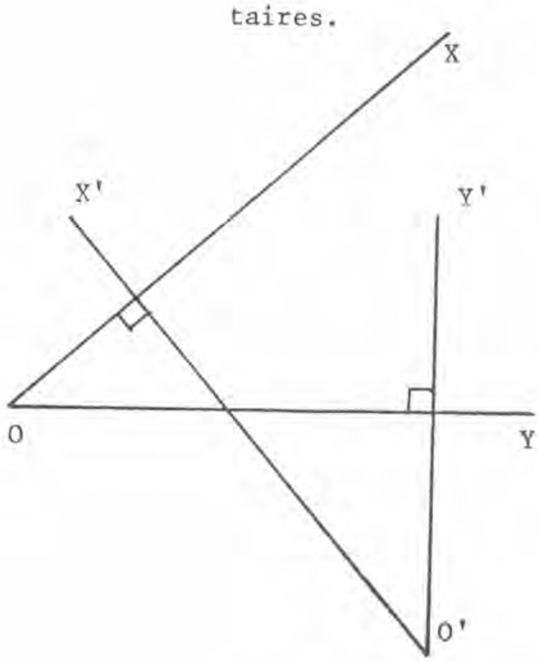
Deux angles à côtés parallèles sont égaux ou supplémentaires.
Ceci résulte aisément du théorème 1.1 lorsqu'on observe les deux cas de figure :

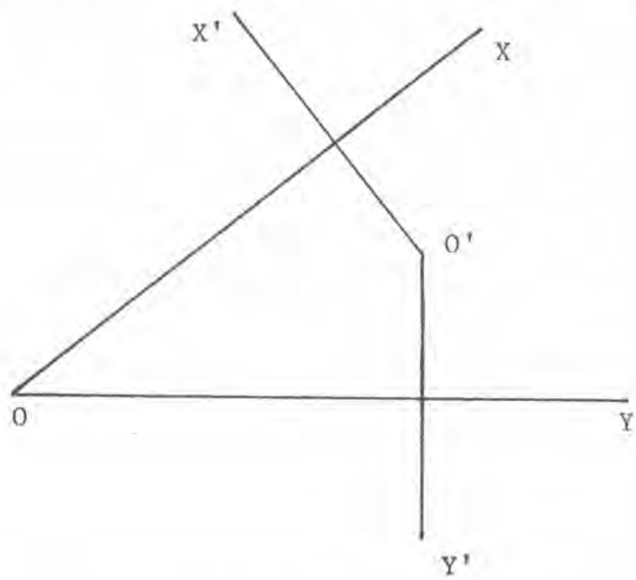




Théorème 1.5 -

Deux angles à côtés perpendiculaires sont égaux ou supplémentaires.

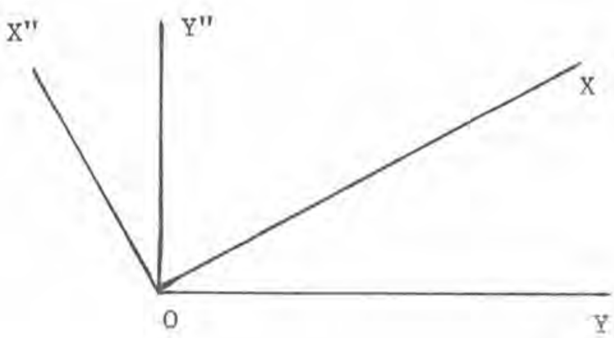




Pour la démonstration on mène OX" parallèle à O'X' et OY" parallèle à O'Y'. Les angles $\widehat{X''OY''}$ et $\widehat{X'O'Y'}$ sont égaux (ou supplémentaires) (voir le théorème 1.4). De plus X" OY" et Y"OX sont complémentaires, de même que XOY et Y"OX. D'où le résultat.

On remarquera que pour le deuxième cas de figure on a choisi OY" de sens inverse à celui de O'Y'.

Regardez aussi l'exercice 1.11



1.4 - *Parallèles et perpendiculaires*

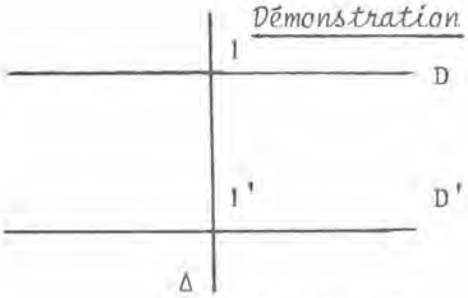
Théorème 1.6 -

Soient D et D' deux droites et Δ une sécante commune.

1) Si D est parallèle à D' et si Δ est perpendiculaire à D, Δ est perpendiculaire à D'.

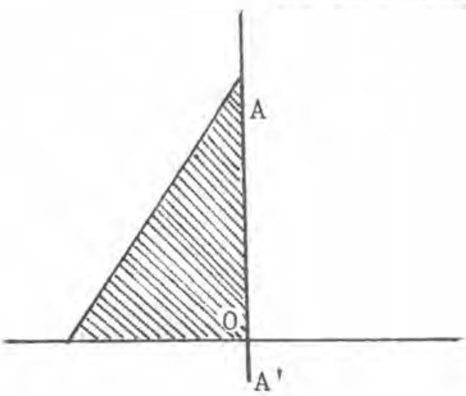
2) Si Δ est perpendiculaire à D et à D', D et D' sont parallèles.

Démonstration :

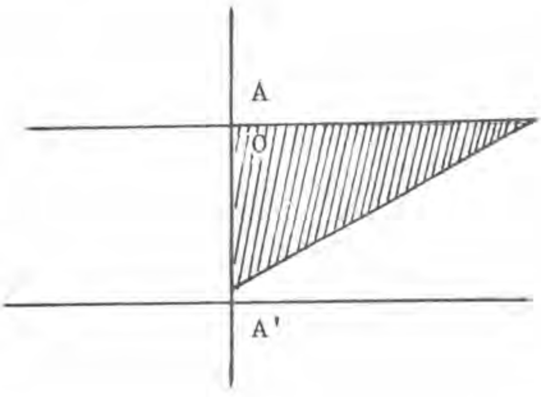


Pour le point 1) on remarque que si D est parallèle à D', comme l'angle 1 est droit, l'angle correspondant 1' l'est aussi. On laisse au lecteur le soin de conclure dans le cas 2.

Construction : Ce théorème fournit une construction usuelle de la droite D' parallèle à la droite D passant par un point donné A : on mène la droite AA' perpendiculaire à D' et passant par A, ceci avec une équerre (ou un compas comme on le verra plus loin) ; puis on mène la perpendiculaire D' à la droite AA' passant par A.



▶ *Ex. 1.12* : Comment faire la construction si le point A est trop éloigné de la droite D (c'est à dire à une distance plus grande que le côté de l'équerre) ?



▼ ▼
▼

II - LA SYMETRIE AXIALE

2.1 - *Définitions*

Etude des figures, la géométrie est aussi celle des transformations de ces figures. La plus simple sans doute, en tout cas la plus fondamentale dans le cadre que nous nous sommes fixé, est la symétrie axiale. Ce chapitre I tout autant que "Géométrie de l'égalité" pourrait s'appeler "Géométrie de la symétrie".

Définition de la médiatrice

Soit AB un segment. La droite Δ perpendiculaire à AB et passant par le milieu de AB est la médiatrice du segment AB.

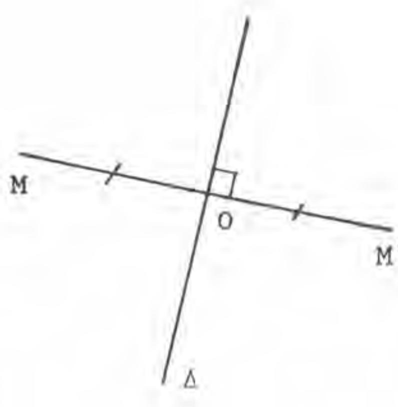
Définition de la symétrie axiale

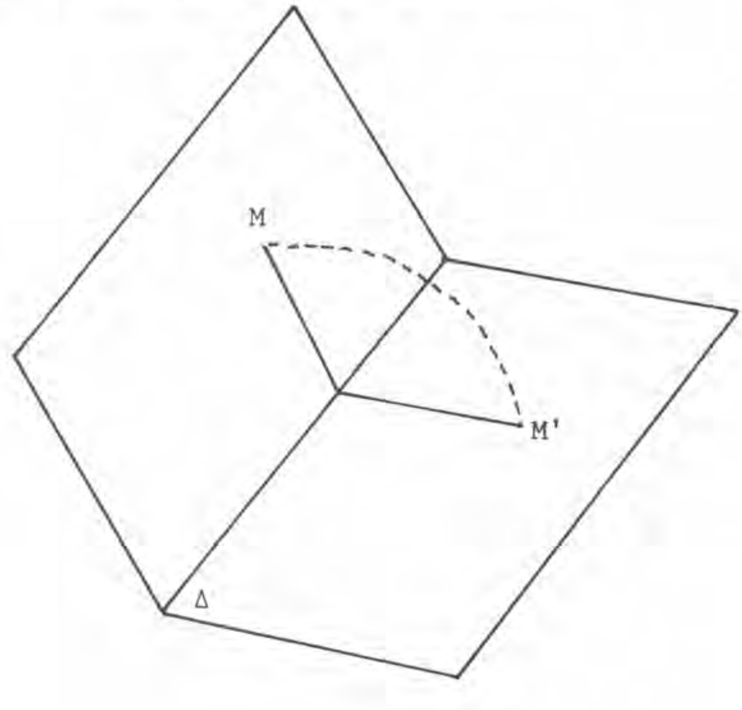
Soit Δ une droite donnée. A tout point M, on fait correspondre le point M' défini de la manière suivante : MM' admet Δ comme médiatrice. On dit que M' est le symétrique de M par rapport à Δ .

Ainsi :

- La droite MM' est perpendiculaire à Δ.
- M et M' sont de part et d'autre de Δ.
- Le segment MM' est coupé en son milieu par la droite Δ.

Le symétrique de tout point peut être obtenu par pliage de la feuille de papier, la trace du pliage étant la droite Δ, le point M venant s'appliquer sur M' une fois le pliage effectué.





Notations et vocabulaire :

- La symétrie axiale est aussi appelée symétrie par rapport à une droite (voir même symétrie-droite) et parfois symétrie orthogonale. (orthogonal veut dire "angle droit").

  On écrira souvent S_Δ pour désigner la symétrie par rapport à Δ. Ainsi $S_\Delta(M)$ signifie que M' est le symétrique de M par rapport à Δ

2.2 - *Propriétés de la symétrie axiale*

La définition de la symétrie - et surtout son interprétation comme un pliage - rendent à peu près évidentes les propriétés suivantes :

Théorème 2.1 -

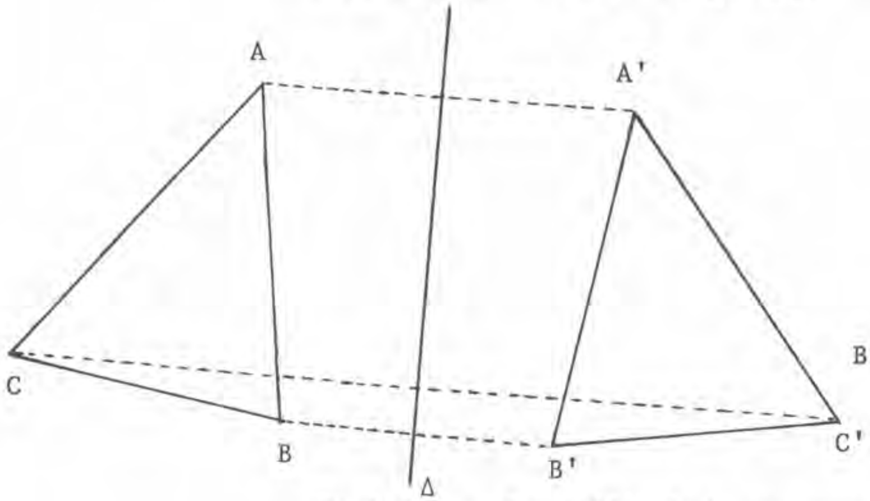
- Un point est transformé en lui-même par une symétrie axiale si et seulement si il est sur l'axe.
- Si M' est le symétrique de M, M est le symétrique de M'.
- La figure symétrique d'une droite est une droite.
- Le symétrique du segment AB est le segment $A'B'$ (A' étant le symétrique de A et B' celui de B)
- Deux droites parallèles sont transformées en deux droites parallèles.
- Deux droites perpendiculaires sont transformées en deux droites perpendiculaires.
- Deux segments symétriques ont la même longueur.
- Deux angles symétriques ont la même mesure.

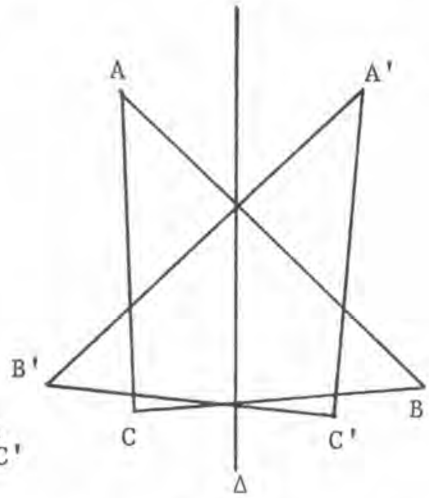
Exemples :

Dans les deux exemples,(figures ci-après), on a tracé le symétrique A' B' C' d'un triangle ABC par rapport à Δ.

On remarque que dans le 1er exemple la figure est très claire, et que le pliage de la feuille autour de Δ applique ABC sur $A'B'C'$.

Dans le 2ème exemple, la figure initiale chevauche l'axe de symétrie. L'idée de pliage est moins claire : il faut appliquer le demi-plan de gauche sur celui de droite et, simultanément, celui de droite sur celui de gauche.

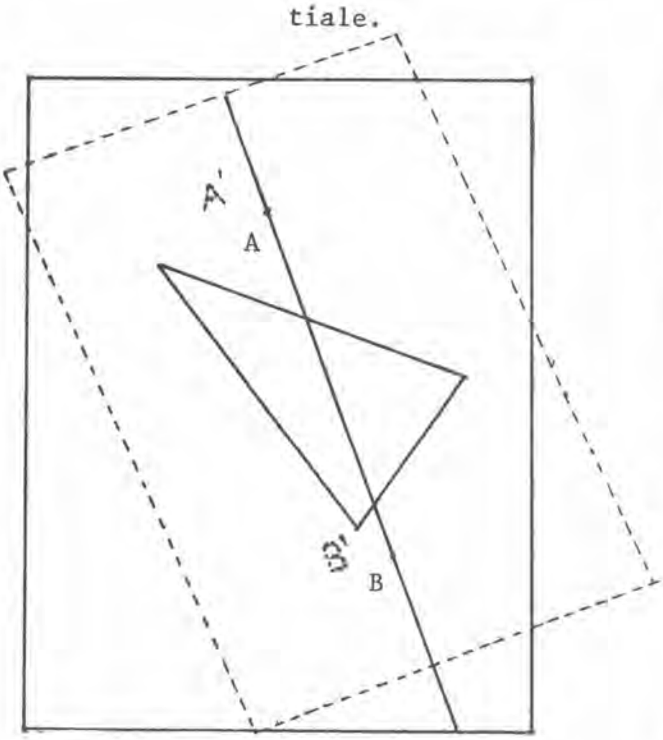


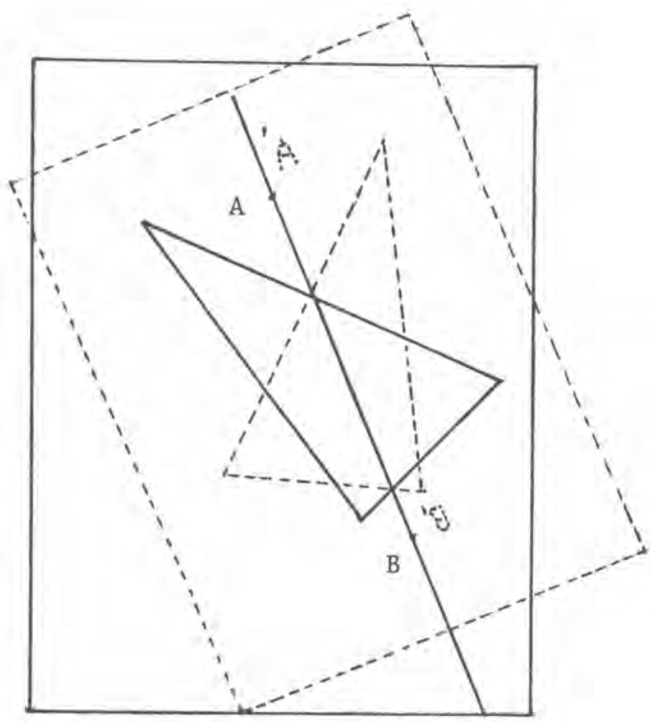


On évitera la difficulté que nous venons de mentionner en utilisant la manipulation suivante :

L'axe Δ de la symétrie est repéré par deux points A et B. On pose sur le dessin une feuille de papier calque, on y porte les points A et B (en A' et B') et la figure à symétriser. Puis on retourne recto-verso la feuille de papier calque, en portant A' sur A et B' sur B.

Ainsi disposée, la feuille de papier calque porte le symétrique (en pointillé sur le dessin ci-contre) de la figure initiale.

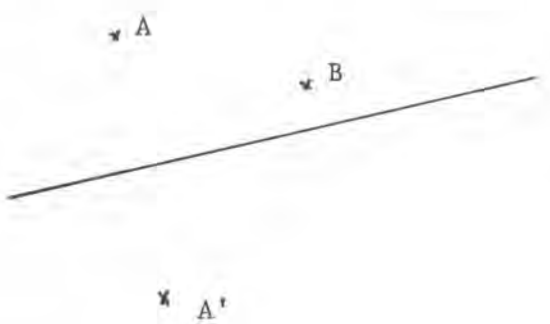




▶ *Ex. 2.1* : Soient D une droite et D' sa symétrique dans une symétrie d'axe Δ.

- Si D est parallèle à Δ, montrez que D' est parallèle à Δ.
- Si D coupe Δ en O, montrez que D' coupe Δ en O.

▶ *Ex. 2.2* : On se donne une droite Δ, deux points A et A' tels que A' soit le symétrique de A dans la symétrie d'axe Δ.

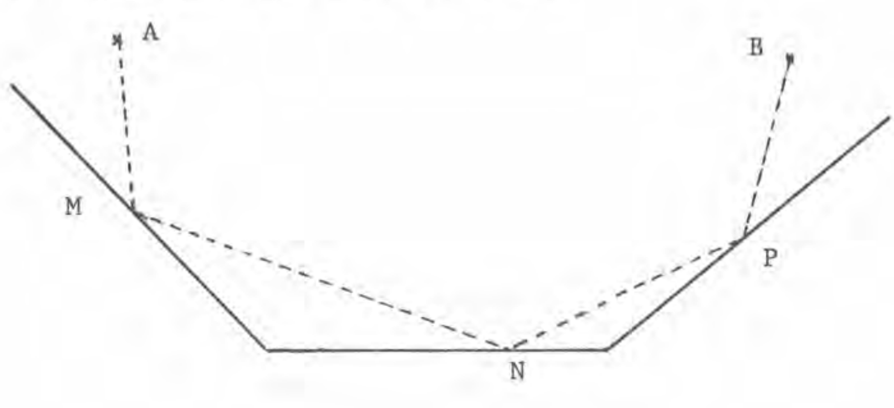


Construire (en utilisant l'exercice précédent), le symétrique de B en se servant seulement d'une règle (non graduée). Examinez aussi les cas particuliers ou AB est parallèle (ou perpendiculaire) à Δ.

▶ *Ex. 2.3* : Soit $\widehat{XOY}$ un angle aigu. On considère deux points A et B sur OX, deux points C et D sur OY tels que OA = OC et OB = OD. Les segments AD et BC se coupent en I. Montrez que OI est la bissectrice de $\widehat{XOY}$.

▶ *Ex. 2.4* : Soient Δ une droite, A et B deux points. Déterminez le point M de Δ dont la somme des distances à A et B soit minimum. (Considérez tout d'abord le cas où A et B sont séparés par Δ et ramenez l'autre cas à celui-ci en remplaçant A par S_Δ (A).) Remarquez aussi que AM et BM font le même angle avec Δ et que cela caractérise le point M.

▶ *Ex. 2.5* : (Plus difficile, mais pas trop).

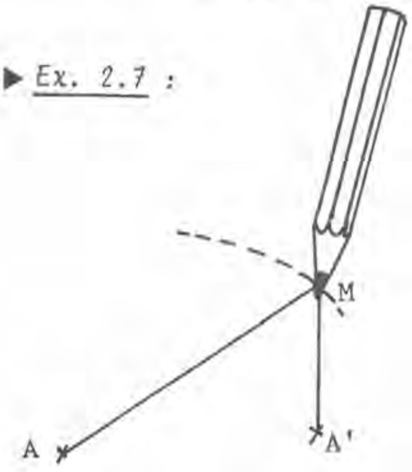


On cherche à aller de A en B par le chemin le plus court en touchant les 3 droites dessinées. Quelle est la méthode à utiliser ?

Indication : résoudre l'analogue lorsqu'il y a seulement deux droites (c'est un prolongement de l'exercice 2.4), puis trois. Généralisez.

▶ *Ex. 2.6* : Soient Δ une droite A et B deux points. Déterminez le point M de Δ dont la différence des distances à A et B soit la plus grande possible. (Méthode analogue à celle de l'ex. 2.4, mais on considère d'abors le cas où A et B sont du même côté de Δ).

▶ *Ex. 2.7* :



Une ficelle est attachée entre deux points A et A'. On trace une courbe en maintenant la ficelle constamment tendue avec la pointe du crayon (ne pas oublier la portion de courbe en dessous de la droite AA'). Vérifiez (et montrez) que la courbe admet deux axes de symétrie perpendiculaires.

2.3 - *Retour à la médiatrice*

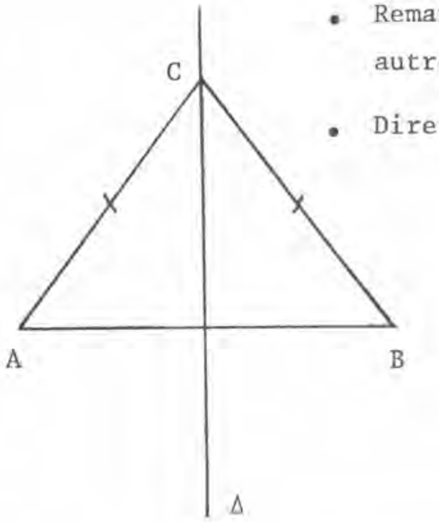
Pour nous la médiatrice du segment AB est la droite perpendiculaire à AB, passant par le milieu de ce segment.

Les propriétés de la symétrie entraînent le théorème bien connu suivant.

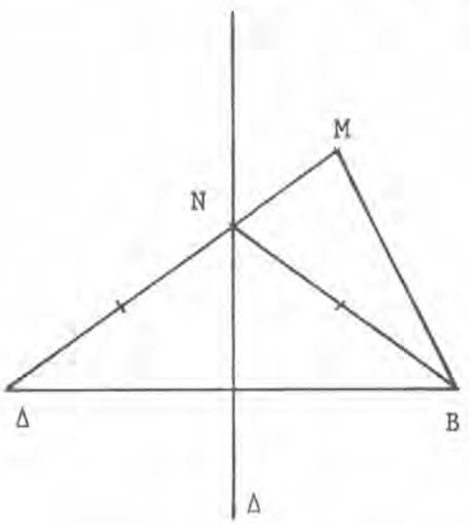
Théorème 2.2 -

1) Tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment.
2) Tout point équidistant des extrémités d'un segment est sur la médiatrice de ce segment.
3) Un point qui n'est pas sur la médiatrice d'un segment n'est pas équidistant des extrémités de ce segment.

Démonstration :



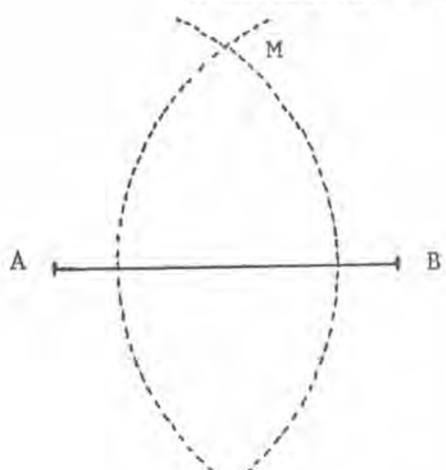
- Remarquons d'abord que l'assertion 3 n'est qu'une autre façon d'exprimer 2 .
- Dire que Δ est médiatrice de AB c'est dire que B est l'image de A dans la symétrie d'axe Δ. Si C est un point de Δ, il est invariant dans cette symétrie, et le symétrique du segment CA est le segment CB, donc CA = CB, ce qui prouve 1.



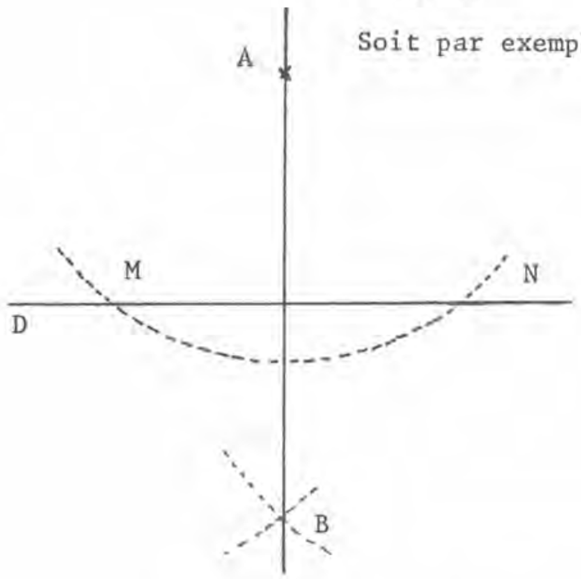
- Compte-tenu de la remarque ci-dessus il suffit de démontrer 3 pour avoir aussi 2. Soit M un point qui n'est pas sur Δ. Supposons que M soit du même côté de Δ que B. Le segment AM coupe Δ en un point N. On a (à cause de 1) NA = NB.
D'autre part (inégalité du triangle) MB < MN + NA c'est à dire que MB < MA. C'est ce qu'on voulait démontrer.

Construction de la médiatrice (*avec le compas et la règle*)

L'assertion 2 du théorème précédent est utilisée pour justifier la construction usuelle de la médiatrice : on trace un arc de cercle de centre A, un arc de cercle de même rayon et de centre B. Ces 2 arcs de cercle se coupent en deux points M et N. La médiatrice de AB n'est autre que la droite MN. Il faut bien sûr prendre des arcs de cercle de rayons convenables, sinon M et N n'existent pas.



Construction de la perpendiculaire à une droite (avec le compas et la règle).



Soit par exemple à tracer la droite passant par un point A, perpendiculaire à une droite D. On dessine un arc de cercle de centre A qui coupe D en deux points M et N. Puis on trace un point B équidistant de M et N. La droite AB est perpendiculaire à D.

▶ Ex. 2.9 : • Justifiez cette construction.
• Que se passe-t-il si A est sur la droite D ?

▶ Ex. 2.10 : Construire avec une règle et un compas la droite D' parallèle à une droite D et passant par un point donné A.

▶ Ex. 2.11 : Soient deux points A et B et une droite Δ. Déterminez un point M de Δ tel que MA = MB.

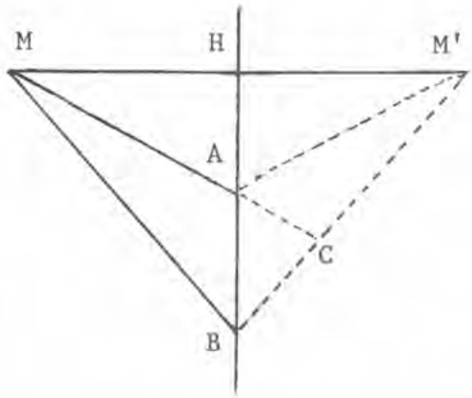
Théorème 2.3 -

Si d'un point pris hors d'une droite on mène la perpendiculaire à cette droite et différentes obliques,

1) la perpendiculaire est plus courte que toute oblique,

2) de deux obliques, la plus longue est celle qui s'écarte le plus du pied de la perpendiculaire.

On laisse au lecteur le soin de démontrer ce résultat en s'inspirant de la figure suivante :



M' est le symétrique de M par rapport à Δ. On remarquera que $MM' < MA + AM'$, que $MB + BC > MC$ et que $MC + CM' > MA + AM'$.

Ceci justifie les définitions suivantes :

La distance d'un point d'une droite est la longueur du segment issu du point perpendiculairement à la droite.

La largeur d'une bande (espace compris entre deux parallèles) est la longueur d'une perpendiculaire commune à deux parallèles, (que toutes ces perpendiculaires aient la même longueur est évident ... et sera vu au moment de l'étude du rectangle).

2.4 - *Axe de symétrie d'une figure.*

Par pliage autour d'une droite Δ, une figure peut se superposer à elle-même. Ce qui signifie que le symétrique M' de tout point M de la figure dans la symétrie d'axe Δ est encore un point de la figure.

Une telle figure est dite avoir Δ comme axe de symétrie. On dit aussi que la figure est symétrique.

Une figure peut posséder plusieurs axes de symétrie : par exemple la lettre H, et même une infinité (un cercle)

▶ Ex. 2.12 : Soient ABCDE...un polygone admettant une droite Δ comme axe de symétrie. Montrez que l'image d'un sommet est un sommet. (Remarquez que l'image de AB est un segment donc est contenue dans un côté, qu'il en est de même pour celle de BC et que B est l'intersection de AB et BC).

▶ Ex. 2.13 : Quels sont les triangles qui ont un axe de symétrie ?

▶ Ex. 2.14 : Quels sont les triangles qui ont 2 axes de symétrie ?

▶ *Ex. 2.15* : Dessinez deux quadrilatères de nature différente ayant deux axes de symétrie.

▶ *Ex. 2.16* : Le résultat suivant est-il vrai : pour tout entier n, il existe un polygone qui a n axes de symétrie sans en avoir n + 1 ?

▶ *Ex. 2.17* : Un triangle qui possède l'une des propriétés suivantes possède toutes les autres :

a) a un axe de symétrie,

b) a deux côtés égaux,

c) a deux angles égaux,

d) a une médiane qui est une hauteur,

e) a une médiane qui est une bissectrice,

f) a une hauteur qui est une bissectrice,

g) a une médiatrice qui passe par un sommet.

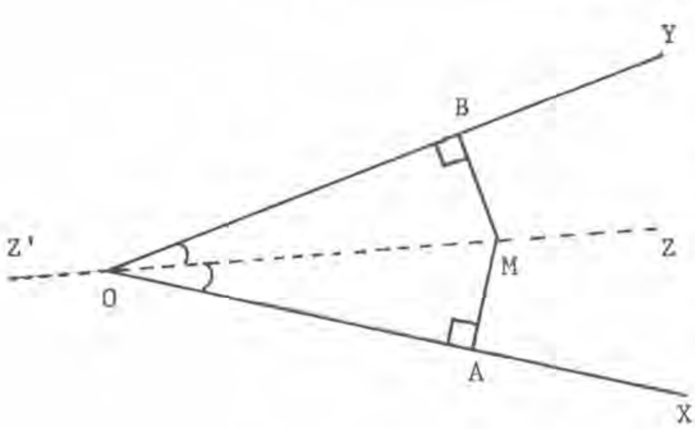
Le lecteur peut éventuellement se reporter au paragraphe IV.

On remarquera qu'un segment AB admet deux axes de symétrie. L'un d'eux est sa médiatrice.

Un autre exemple important est :

Bissectrice d'un angle :

Un angle $\widehat{XOY}$ admet un axe de symétrie. Cela se constate aisément en pliant la feuille de telle sorte que OX vienne sur OY.



L'axe de symétrie de l'angle est constitué de deux demi-droites OZ et OZ', l'une est la bissectrice de l'angle saillant, l'autre celle de l'angle rentrant.
On considèrera parfois que c'est la droite ZZ' qui est la bissectrice de l'angle $\widehat{XOY}$.

Il est clair que l'on a : Mesure $\widehat{XOZ}$ = Mesure $\widehat{ZOY}$ = $\frac{1}{2}$ (mesure $\widehat{XOY}$). C'est la définition de la bissectrice donnée en 1.2. Si M est un point de OZ, si A est le pied de la perpendiculaire de M sur OX et B celui de la perpendiculaire de M sur OY, on a : MA = MB. Car les segments MA et MB sont symétriques par rapport à ZZ' (Voyez pourquoi).

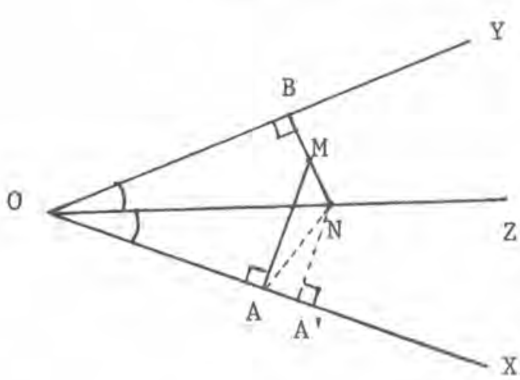
Remarque : Ce qu'on vient d'écrire est relatif à l'angle saillant $\widehat{XOY}$. Que se passe-t-il dans le cas de l'angle rentrant ? Et quand l'angle $\widehat{XOY}$ est plat ?

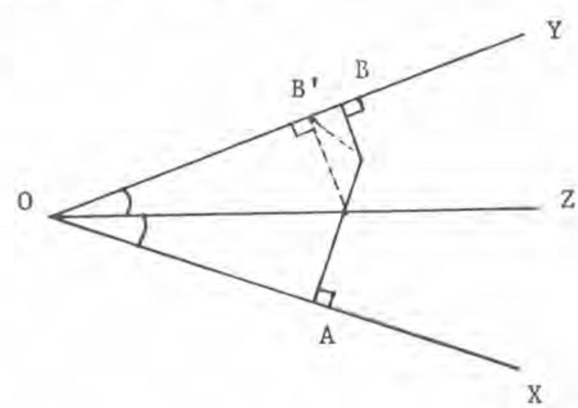
Théorème 2.4 -

La bissectrice de l'angle $\widehat{XOY}$ est l'ensemble des points équidistants des deux demi-droites OX et OY.

Compte-tenu de ce qui précède, il reste à démontrer que si M n'est pas sur la bissectrice, il n'est pas équidistant des côtés de l'angle.

Le lecteur est invité à faire la démonstration en examinant l'une ou l'autre des figures suivantes :





La démonstration est voisine de celle du théorème 2.2. Le lecteur, ayant fini sa démonstration, est invité à l'examiner d'un regard critique (éventuellement sévère).

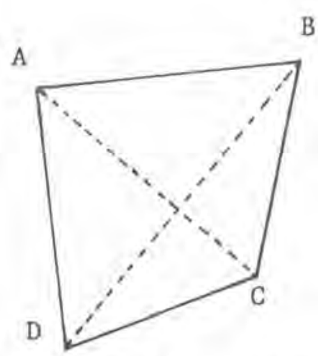
III - *Losange et rectangle*

Dans ce paragraphe et les suivants, on va utiliser les matériaux décrits ci-dessus pour étudier un certain nombre de figures usuelles.

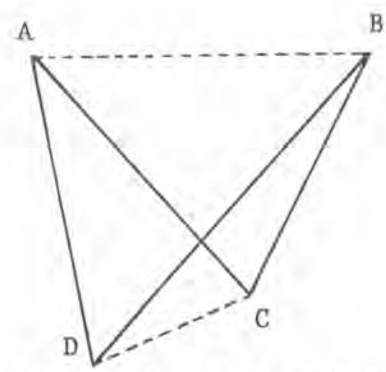
3.1 - *Les quadrilatères.*

Soient 4 points A, B, C et D. Le quadrilatère A B C D est la ligne brisée formée par les 4 segments AB, BC, CD et DA.

Ces segments sont les côtés du quadrilatère, les points A, B, C et D en sont les sommets.



Le quadrilatère A B C D



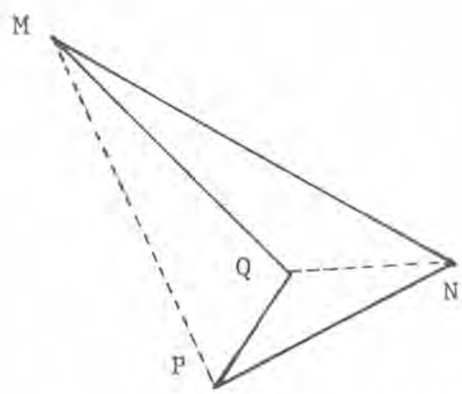
Le quadrilatère A C B D

Ce quadrilatère A B C D n'est pas le même que le quadrilatère A C B D. Par contre A B C D, B C D A, A D C B définissent le même quadrilatère.

▶ Ex. 3.1 : Etant donnés quatre points A,B,C et D dessiner et désigner tous les quadrilatères dont ces points sont les sommets.

Il existe six segments joignant deux à deux les points A, B, C et D. Quatre de ces segments sont les côtés du quadrilatère : ce sont les segments qui relient entre eux les sommets consécutifs.

Les deux autres segments sont les diagonales qui relient entre eux les couples de sommets opposés.



On a dessiné ci-dessus deux quadrilatères d'allures différentes. Il en existe une troisième catégorie, dessinée ci-contre. Ses diagonales sont MP et QN.

- A B C D est un quadrilatère <u>convexe</u>.
- A C B D est un quadrilatère <u>croisé</u>.
- M N P Q est un quadrilatère <u>concave</u>.

On peut distinguer ces trois catégories de manière imagée :

Un voyageur fait le tour d'un quadrilatère (sans jamais revenir sur ses pas). A chaque sommet le voyageur doit changer de direction.

- Si les changements de direction sont tous de même sens (toujours à droite ou toujours à gauche) le quadrilatère est convexe.
- Si le voyageur repasse deux fois au même endroit, le quadrilatère est croisé.

On peut aussi découper les quadrilatères dans du carton : les quadrilatères croisés vont se séparer en 2 morceaux. Pour les autres un élastique tendu autour sera en contact avec les 4 côtés (quadrilatères convexes) ou non (quadrilatères concaves).

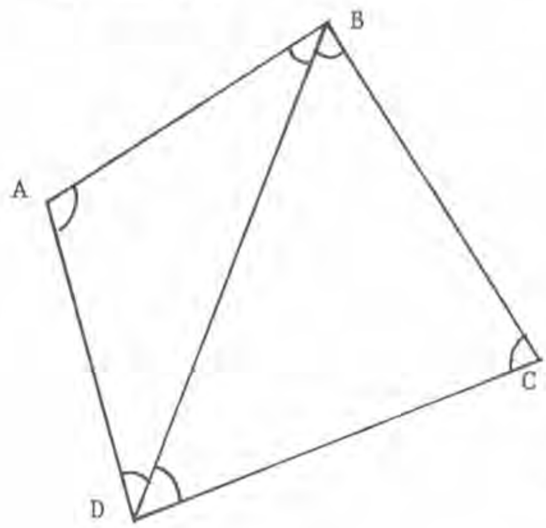
Un quadrilatère convexe est tout entier dans l'un des demi-plan défini par n'importe quel côté.

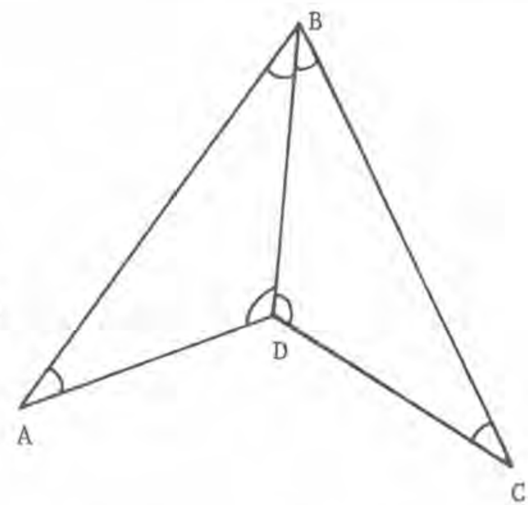
▶ <u>Ex. 3.2</u> : Donner un procédé pour distinguer ces quadrilatères en utilisant les diagonales.

▶ <u>Ex. 3.3</u> : Quatre points du plan sont donnés. Peut-on les considérer comme sommets d'un quadrilatère concave ? croisé ? convexe ?

<u>*Angles d'un quadrilatère*</u> :

Nous avons vu que la somme des angles d'un triangle est égale à 180°. De cela on tire que la somme des angles d'un quadrilatère concave ou convexe est égale à 360° ; on le voit sur les 2 figures ci-dessous :





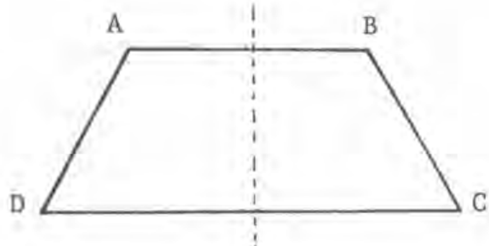
Dans chaque cas on a découpé le quadrilatère en 2 triangles.

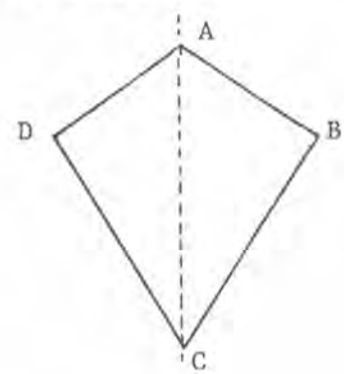
Ce résultat ne s'étend pas aux angles d'un quadrilatère croisé. Est-il d'ailleurs facile de définir les angles d'un tel quadrilatère ? Il ne faut pas oublier que deux demi-droites de même origine définissent deux angles. Pour les quadrilatères convexes ou concaves on s'est intéressé aux angles intérieurs au quadrilatère. Mais qu'est-ce que l'intérieur d'un quadrilatère croisé ?

Pour simplifier l'écriture le mot quadrilatère employé sans adjectif signifie dans la suite quadrilatère convexe.

3.2 - *Quadrilatère et symétrie.*

▶ Ex. 3.4 : Soit A B C D un quadrilatère admettant un axe de symétrie Δ. En supposant que l'un des sommets est sur Δ puis qu'aucun sommet n'est sur Δ, montrez que A B C D est de l'un des types suivants :





▶ Ex. 3.5 : Déterminez l'allure des quadrilatères concaves (respectivement convexes) (respectivement croisés) ayant un axe de symétrie.

L'exercice 3.4 nous montre que si un quadrilatère convexe admet un axe de symétrie celui-ci est nécessairement une médiatrice commune à 2 côtés opposés ou une diagonale.

Dans le premier cas la symétrie correspondante échange A et B d'une part, C et D d'autre part.

Dans le second cas la symétrie laisse fixes deux sommets et échange les deux autres.

Ces remarques vont nous servir dans le paragraphe suivant où l'on considère des quadrilatères ayant deux axes de symétrie.

3.3 - *Losange et rectangle*

Soit un quadrilatère A B C D ayant deux axes de symétrie Δ_1 et Δ_2. Δ_1 ou Δ_2 peuvent être une médiatrice d'un côté ou une diagonale. Ce qui donne 3 cas :

a) Δ_1 et Δ_2 sont les diagonales du quadrilatère.

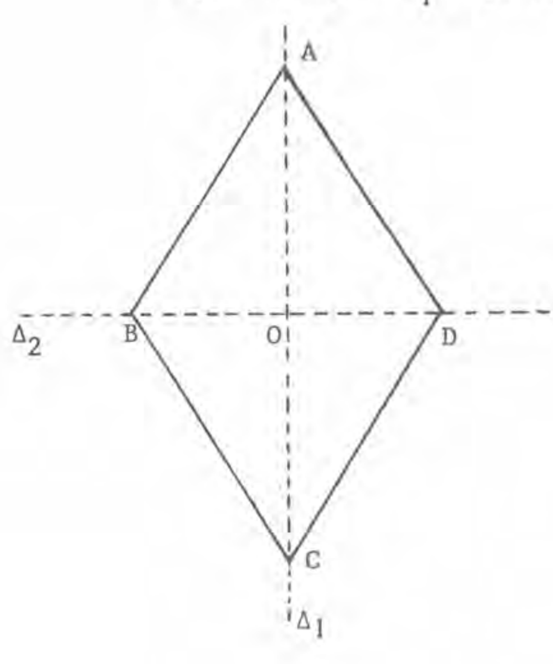
b) Δ_1 est médiatrice de AB et CD et Δ_2 est médiatrice de AD et BC.

c) Δ_1 est médiatrice de AB et CD et Δ_2 est une diagonale, disons AC.

3.3.1 - *Le losange*

On étudie ici le cas a).

Supposons que Δ_1 est la diagonale AC. La symétrie par rapport à Δ_1 échange B et D. Donc BD est perpendiculaire à Δ_1. Or BD est la seconde diagonale de A B C D, c'est à dire est Δ_2. Dans ce cas Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires. Si on désigne par O le point de rencontre de Δ_1 et Δ_2, on voit que O est le milieu de AC et celui de BD (par symétrie). Donc les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. On peut dire



aussi bien qu'elles sont médiatrices l'une de l'autre.

Le quadrilatère obtenu est, bien sûr, un losange.

On a aussi AB = AD, AD = DC, CD = CB, BC = BA, c'est à dire que les 4 côtés sont égaux. Toutes ces propriétés du losange le caractérisent :

Théorème 3.1 -

Un losange est un quadrilatère qui vérifie l'une ou l'autre des propriétés suivantes (et alors il les vérifie toutes) :

1) Ses diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

2) Chacune de ses diagonales est médiatrice de l'autre.

3) Ses quatre côtés sont égaux.

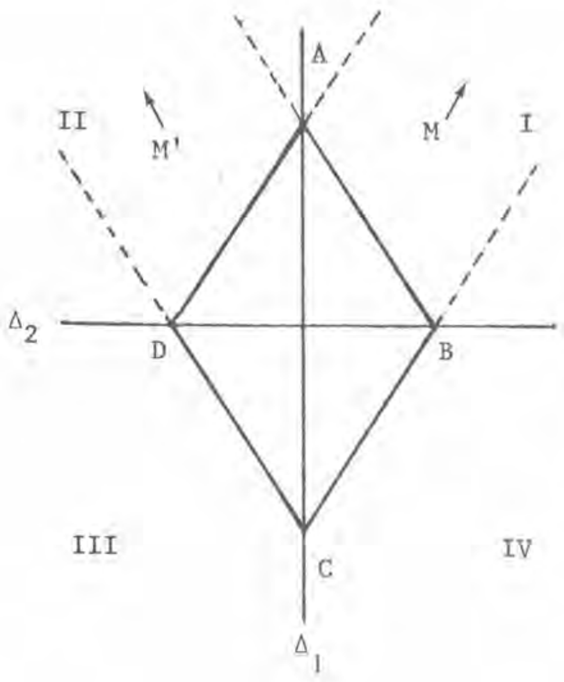
Tout a déjà été démontré sauf que l'assertion 3 caractérise le losange. Pour cela on remarque que si BA = BC et DA = DC, BD est la médiatrice de AC.

Un peu moins évidente est la propriété suivante (qui exprime que le losange est un parallélogramme) :

Théorème 3.2 -

Les côtés opposés d'un losange sont parallèles.

Démonstration : Soient A B C D un losange et Δ_1, Δ_2 ses axes de symétrie.



On suppose que AD et BC ne sont pas parallèles. Donc AD et BC se coupent en un point M que l'on suppose être dans le quadrant I (voir figure. Un quadrant est un quart de plan).

Dans la symétrie d'axe Δ_1, AD devient AB et BC devient CD. Si M' est le symétrique de M, les droites AB et CD se coupent en M' qui est dans le quadrant II (pourquoi ?). Dans la symétrie par rapport à Δ_2, AB devient BC et CD devient AD. Donc BC et AD se coupent en M'' symétrique de M' par rapport à Δ_2, qui est dans le quadrant III. Mais BC et AD se coupent par hypothèse dans le quadrant I ce qui entraîne une contradiction. Donc AD et BC sont parallèles.

▶ Ex. 3.6 : Construire un losange dont une diagonale est donnée. Comment le construire si, de plus, on donne son aire ?

▶ Ex. 3.7 : Un quadrilatère A B C D est tel que AB = BC = 4 cm, AC = 6 cm, AC et BD se coupent en leur milieu. On demande de le construire et de dire si c'est un losange, en justifiant la réponse.

▶ Ex. 3.8 : Même question que le précédent avec AB = BC = CD = 4 cm, les droites BC et AD sont parallèles.

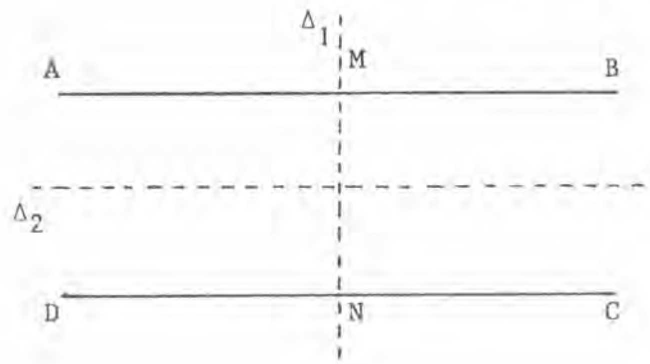
▶ Ex. 3.9 : Idem avec : AB = AD = 4 cm, AC = 5cm, AC et BD sont perpendiculaires, AD et BC sont parallèles.

▶ Ex. 3. 10 : Construire avec seulement une règle la bissectrice d'un angle donné. (La règle n'est pas graduée, mais on peut utiliser ses deux bords).

3.3.2 - *Le rectangle*

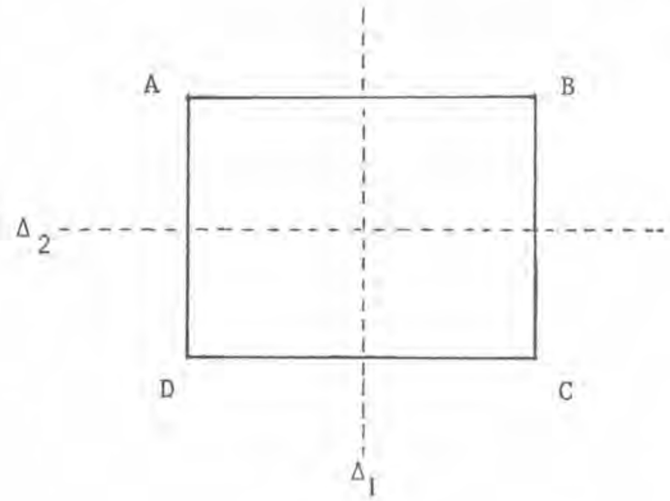
Nous venons maintenant au cas b).

Δ_1 est médiatrice de AB et de CD, Δ_2 est médiatrice de AD et de BC. Donc AB et CD sont parallèles ainsi que AD et BC.



Soit M le milieu de AB et N celui de CD. La symétrie par rapport à Δ_2 échange A et D, B et C donc échange les segments AD et BC. Elle échange donc leurs milieux. Donc M est l'image de N dans la symétrie par rapport à Δ_2, donc Δ_2 est perpendiculaire à MN.

Ainsi, à nouveau, Δ_1 et Δ_2 sont perpendiculaires et on obtient, évidemment, <u>un rectangle</u>.



On notera que dans la symétrie Δ_1, le segment AC devient BD, donc AC et BD se coupent sur Δ_1 et de même, ils se coupent sur Δ_2. Donc AC et BD, diagonales du rectangle, se coupent en O, point de rencontre des "<u>médianes</u>" Δ_1 et Δ_2. Comme O est inchangé pour les fonctions Δ_1 et Δ_2 on a : $OA = OC = OB = OD$.
On obtient ainsi des caractérisations du rectangle.

<u>*Théorème 3.3*</u> -

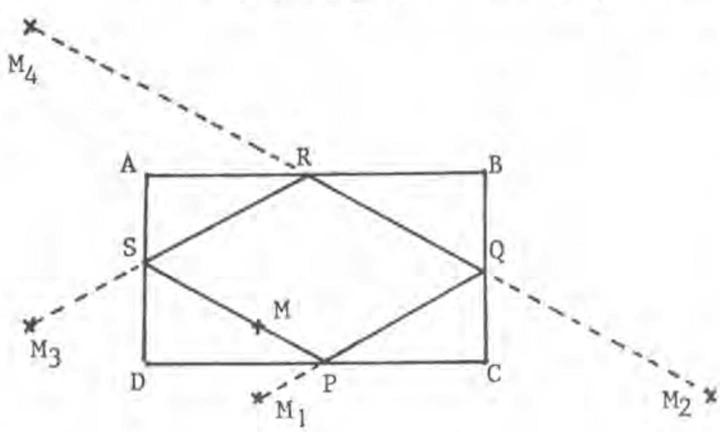
Un rectangle est un quadrilatère qui vérifie l'une ou l'autre des propriétés équivalentes suivantes :

1) Les diagonales sont égales et se coupent en leur milieu.
2) Les quatre angles sont droits.
3) Les côtés opposés ont même médiatrice.

Seul le point 2 n'est pas écrit plus haut. On laisse au lecteur le soin de le démontrer.

<u>*Remarque*</u> : Il suffit qu'un quadrilatère ait 3 angles droits pour qu'il en ait 4 (car la somme des angles est 360°).

► <u>*Ex. 3.11*</u> : M est un point intérieur à un rectangle A B C D.

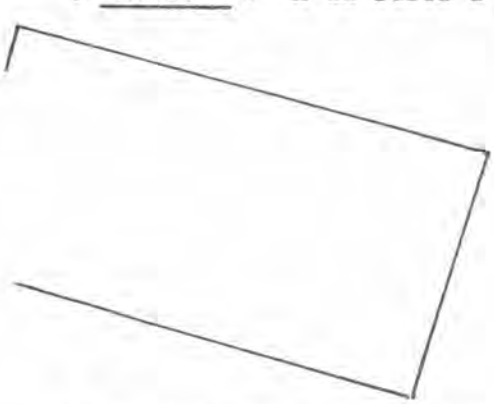


M_1 et M_3 sont les symétriques de M par rapport à CD et AD respectivement. M_2 est le symétrique de M_1 par rapport à BC et M_4 celui de M_3 par rapport à AB. Montrez que la trajectoire P Q R S est celle d'une boule de billard qui part de M pour y revenir. Quelle est la longueur de cette trajectoire ?

▶ Ex. 3.12 : Construire, avec une équerre, un rectangle dont une diagonale est donnée.

▶ Ex. 3.13 : Les diagonales d'un rectangle d'une part, les médianes d'autre part le découpent en quatre morceaux. Dans quel cas ces quatre morceaux ont-ils la même aire ?

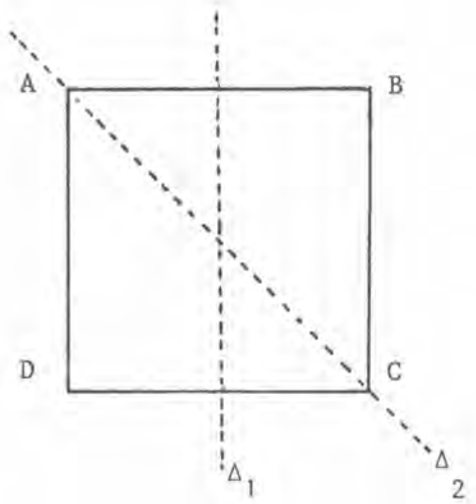
▶ Ex. 3.14 : A la suite d'un incident fâcheux le rectangle A B C D ci-contre a perdu un coin. Dessinez la portion de la diagonale BD qui se trouve sur la feuille. (Il est interdit de prolonger la figure)



▶ Ex. 3.15 : Relisez la démonstration du théorème 3.3. Remarquez que l'on n'y démontre pas l'existence du rectangle. Comblez cette lacune : il faut essentiellement s'assurer que si B est le symétrique de A par rapport à Δ_1, C celui de B par rapport à Δ_2, D celui de C par rapport à Δ_1, alors D est aussi le symétrique de A par rapport à Δ_2 (voir aussi le paragraphe 5.2).

3.3.3. *Le carré*

Dernier cas à étudier : Δ_1 est la médiatrice de AB et CD et Δ_2 est la diagonale AC. Dans la symétrie Δ_1, la diagonale AC devient la diagonale BD.

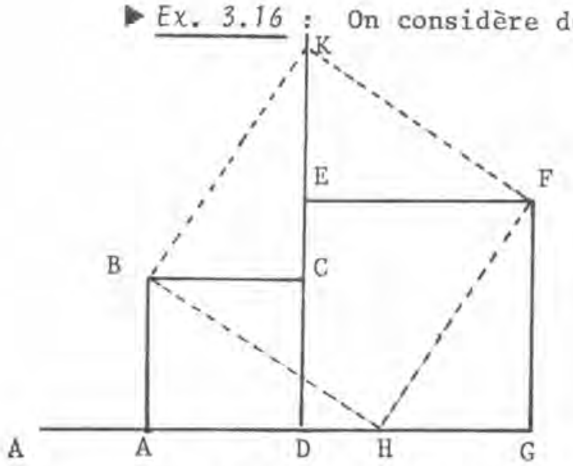


Donc, puisque AC est un axe de symétrie, BD en est un aussi. Les diagonales de A B C D sont axes de symétrie, A B C D est un losange.

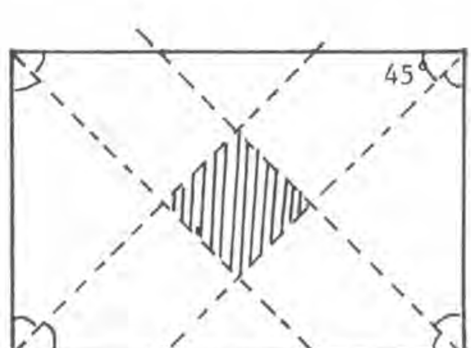
La symétrie Δ_2 applique AB sur AD et BC sur CD. Comme AB et CD ont même médiatrice, il en est de même (par symétrie) pour AD et BC. Ainsi A B C D est un rectangle.

Un rectangle-losange est bien sûr un <u>carré</u>. Le carré possède donc 4 axes de symétrie.

▶ <u>*Ex. 3.16*</u> : On considère deux carrés A B C D et D E F G et deux points H et K tels que GH = EK = AB (voir figure). Démontrez que le quadrilatère K B H F est un carré. (On peut utiliser les résultats de 5.5.2).



▶ <u>*Ex. 3.17*</u> : Le quadrilatère déterminé par les quatre bissectrices d'un rectangle est un carré.



◆◆
◆

IV - <u>LES TRIANGLES</u>

4.1 - *Définitions*

Nous donnons d'abord quelques définitions plus ou moins connues relatives aux triangles.

Un triangle est constitué de 3 <u>sommets</u> A, B et C et de 3 <u>côtés</u> AB, BC, CA. Nous supposerons dans la suite que A, B et C ne sont pas alignés (s'ils le sont, on parle de triangle aplati).

Les <u>angles</u> du triangle ABC sont les 3 angles saillants $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$, $\widehat{CAB}$ que l'on désignera souvent par $\widehat{B}$, $\widehat{C}$, $\widehat{A}$. Rappelons que la somme de leurs mesures est égale à 180°.

- Les <u>médiatrices</u> de ABC sont les 3 médiatrices des côtés (Fig. 1).
- De même les <u>bissectrices</u> de ABC sont celles des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ (Fig. 2a). Il s'agit ici des bissectrices intérieures. On utilise parfois les bissectrices extérieures (voir Fig. 2b).
- Les <u>hauteurs</u> de ABC sont les 3 segments de droite issus d'un sommet et perpendiculaires au côté opposé (Fig. 3).

<u>*Remarque*</u> : que sont les hauteurs d'un triangle rectangle ? Pourquoi parle-t-on parfois de <u>la</u> hauteur d'un triangle rectangle ?

- Les <u>médianes</u> sont les 3 segments de droite joignant un sommet au milieu du côté opposé (Fig. 4).

Fig. 1

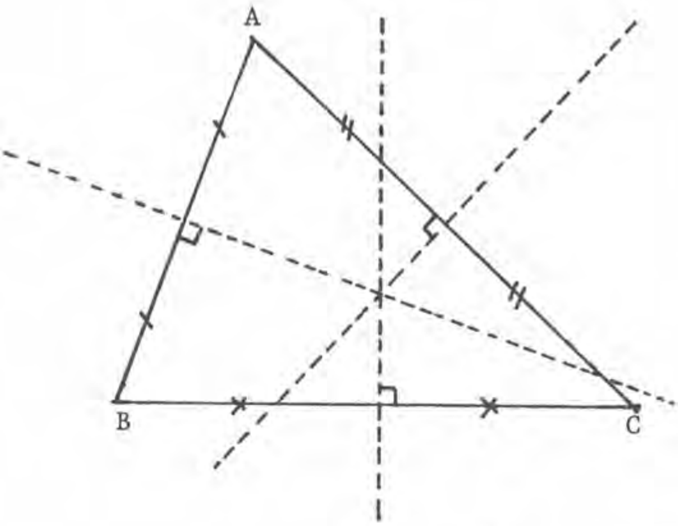


Fig. 2 a

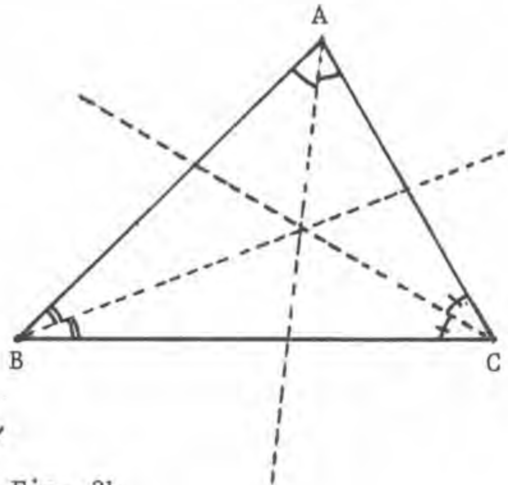


Fig. 2b

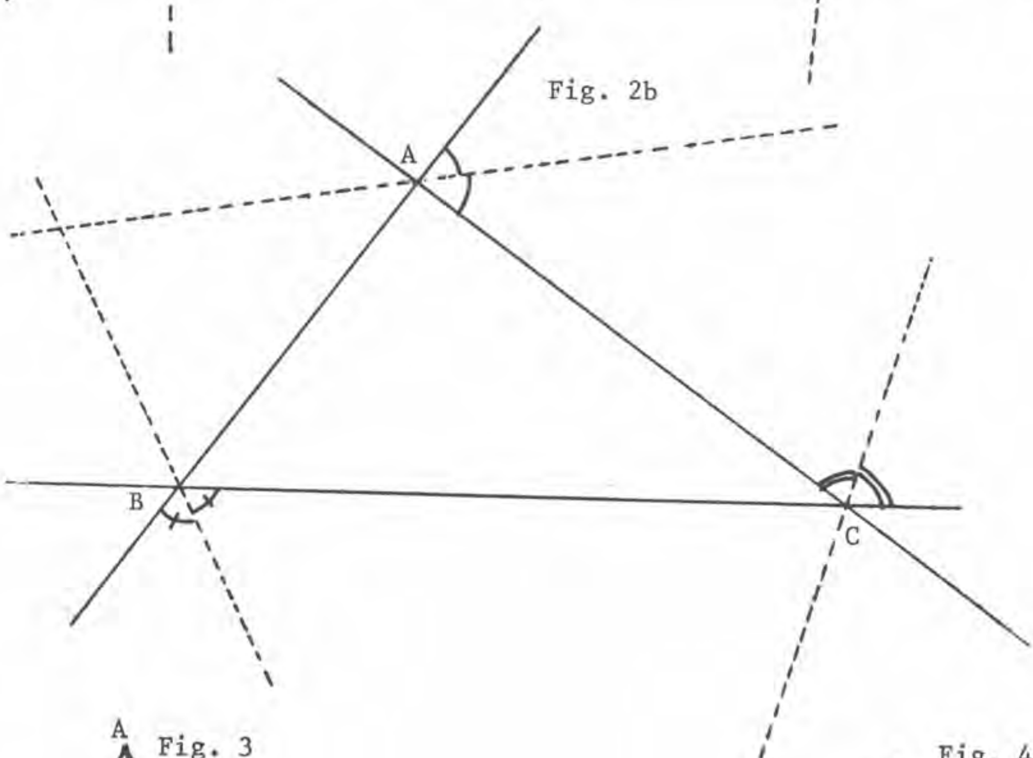


Fig. 3

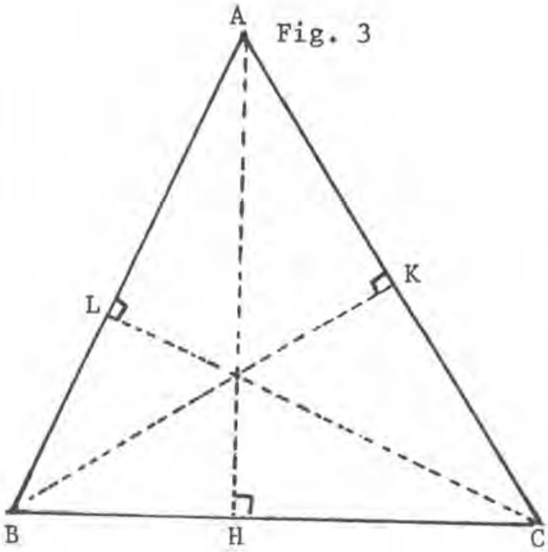
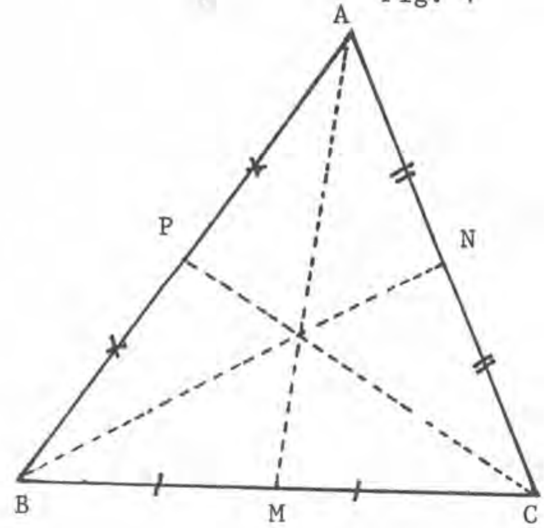
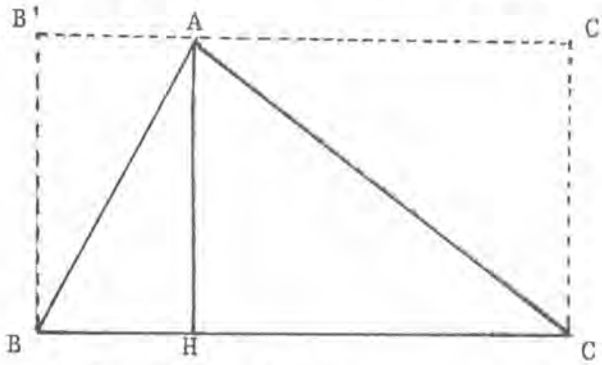


Fig. 4



Rappelons que l'aire d'un triangle ABC de hauteur AM est égale à $\frac{1}{2}$ BC × AH. Ce résultat peut se démontrer par découpage



comme on le voit sur la figure ci-contre. L'aire de ABC est la moitié de celle du rectangle B C C'B' qui est égale à BB' × BC. Par ailleurs BB' = AH.

▶Ex. 4.1 : Refaire tous ces dessins quand ABC a un angle obtus.

On connaît quelques catégories remarquables de triangles.

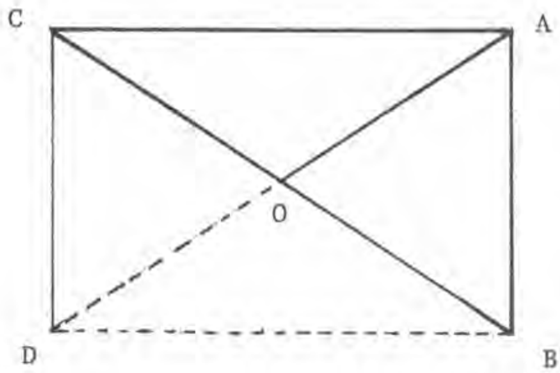
- Un triangle isocèle a deux côtés égaux (ou ce qui est équivalent, deux angles égaux). Si AB et AC sont les côtés égaux, la médiatrice de BC passe par A, elle est bissectrice de $\hat{A}$, elle est un axe de symétrie pour le triangle (cf. le chapitre symétrie).
- Un triangle équilatéral a trois côtés égaux, donc trois angles égaux chacun à 60°. Médiatrice, hauteur, médianes, bissectrices sont confondues.
- Un triangle rectangle a un angle droit.

On rencontrait jadis l'adjectif acutangle pour désigner un triangle dont les trois angles étaient aigus. L'adjectif obtusangle désignait-il un triangle dont les trois angles étaient obtus ?

On rencontrait aussi l'expression triangle scalène pour désigner un triangle ni isocèle, (ni équilatéral), ni rectangle. Un triangle scalène est-il un triangle quelconque ?

4.2 - *Le triangle rectangle*

Soit ABC un triangle rectangle en A (c'est à dire que l'angle BAC est droit) On sait (peut être) que BC est l'hypoténuse du triangle ABC. On peut considérer ABC comme la moitié d'un rectangle A B D C.



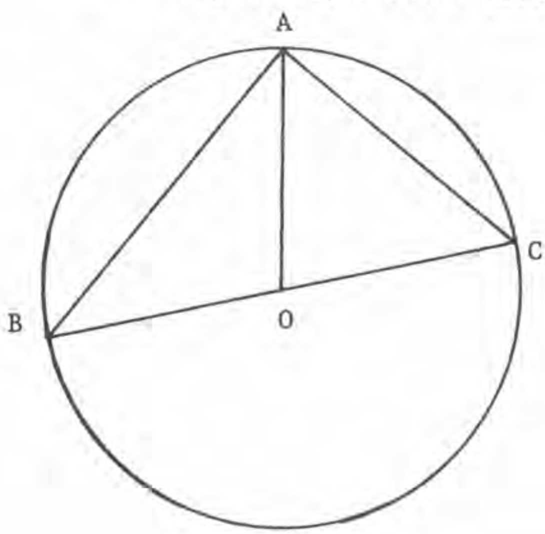
(BD est perpendiculaire à AB et CD à CA). BC et AD sont les diagonales de A B C D donc elles sont égales et se coupent en leur milieu. Ainsi la médiane AO de ABC est égale à la moitié de l'hypoténuse BC.

Soient ABC un triangle, O le milieu de BC. On suppose que $OA = \frac{BC}{2}$. On prolonge OA d'une longueur OD = OA. Le quadrilatère A B D C a deux diagonales BC et AD égales et se coupant en leur milieu. C'est donc un rectangle. Ainsi le triangle ABC est rectangle en A.

Théorème 4.1 :

Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si la médiane issue de A est égale à la moitié du côté BC.

Si ABC est un triangle rectangle en A, si O est le milieu de BC, on a OA = OB = OC. Ainsi A est sur le cercle de centre O et de rayon OB, c'est à dire sur le cercle de diamètre BC.



Réciproquement si un triangle ABC est tel que A se trouve sur le cercle de diamètre BC, l'angle BAC est droit : car OA = OB = OC.

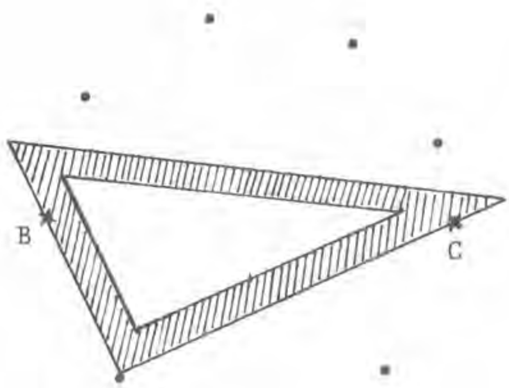
Théorème 4.2 -

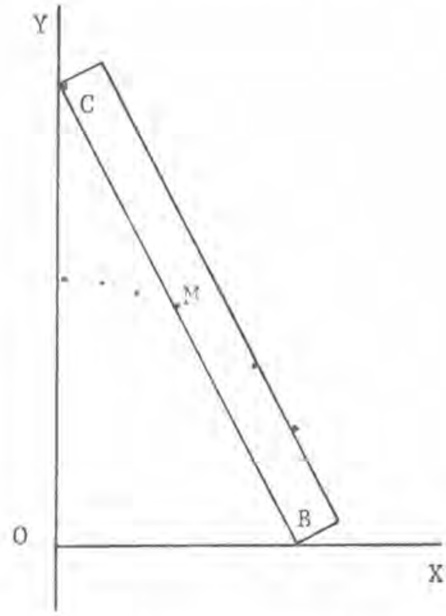
Un triangle ABC est rectangle en A si et seulement si A est sur le cercle de diamètre BC.

Application : deux méthodes pour construire un cercle sans compas.

1) Soient deux points B et C. On place une équerre sur la feuille de telle sorte que l'un des côtés de

l'angle droit soit sur B et l'autre sur C. On indique par un point la position du sommet droit de l'équerre. Puis on recommence avec une autre position de l'équerre (avec toujours B et C sur les côtés de l'angle droit). L'ensemble des points désignant les positions du sommet est sur le cercle de diamètre BC.





2) Deux droites OX et OY perpendiculaires sont dessinées. On prend une bande de papier BC dont le milieu M est marqué. On pose B sur OX et C sur OY et on repère la position de M. On effectue plusieurs fois ce dessin. L'ensemble des positions du point M est sur le cercle de centre O, de rayon $\frac{BC}{2}$. Ces deux constructions sont justifiées : la 1ère par le théorème 4.2 et la 2ème par le théorème 4.1 (OM est la médiane du triangle rectangle OBC).

▶ Ex. 4.2 : Faire une construction analogue à la seconde donnée ci-dessus en choisissant cette fois M n'importe où sur BC (et même sur le prolongement du segment BC). Savez-vous le nom de la courbe obtenue ?

▶ Ex. 4.3 : Donner un procédé de construction de l'angle de 45°. Comment construire un angle de 60° dont un premier côté est donné ?

▶ Ex. 4.4 : Dans un triangle ABC, l'angle formé par la bissectrice et la hauteur issues de A est égal à la demi-différence des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$.

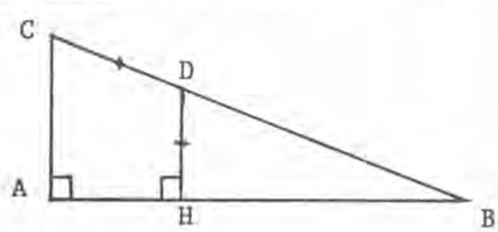
▶ Ex. 4.5 : L'angle $\widehat{A}$ d'un triangle ABC est aigu, droit ou obtus suivant que la médiane AM est supérieure, égale ou inférieure à $\frac{BC}{2}$.

▶ Ex. 4.6 : Est-il possible de construire un rectangle dont les côtés contiennent quatre points donnés.

▶ Ex. 4.7 : On donne un segment AB. Sans prolonger ce segment ni construire de parallèles, déterminer la perpendiculaire à ce segment passant par B (sans équerre, évidemment).

▶ Ex. 4.8 : Construire un triangle ABC dont les hauteurs BK et CL soient égales à une longueur donnée.

▶ Ex. 4.9 : Le triangle ABC est rectangle en A.



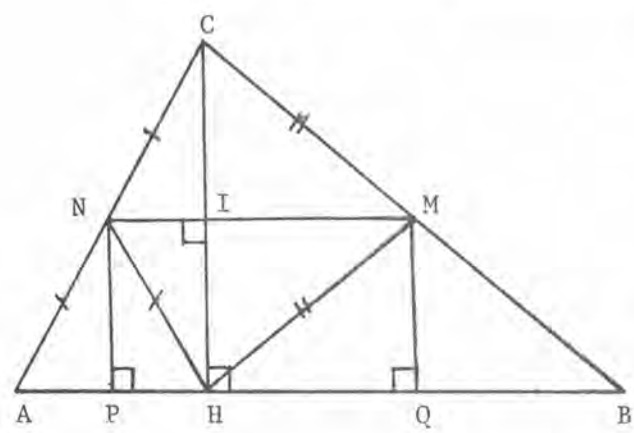
Construire le point D de l'hypoténuse tel que DC = DH, DH étant perpendiculaire à AB.

▶ Ex. 4.10 : On se donne un point A sur un un cercle Γ . A tout point M du cercle, on associe le milieu N du segment AM. Décrire la courbe que parcourt le point N lorsque M varie sur le cercle.

▶ Ex. 4.11 : On se donne un point A extérieur à un cercle Γ. Sur toute droite passant par A et coupant le cercle en deux points M_1 et M_2, on prend le milieu N de $M_1 M_2$. Quelle est la courbe décrite par le point N quand la droite $AM_1 M_2$ tourne autour de A. (Pour ces deux derniers exercices on pourra consulter les résultats du paragraphe 6.1).

4.3 - *La droite des milieux.*

On considère un triangle ABC. On désigne par M le milieu de BC et par N le milieu de AC.



Soit CH la hauteur issue de C. Les triangles CHA et CHB sont rectangles en M. Donc, comme N est milieu de AC , on a HN = NA = NC et de même HM = MB = MC.

Ainsi N et M sont sur la médiatrice de H, MN est perpendiculaire à HC et donc parallèle à AB.

Considérons alors NP et MQ, perpendiculaires à AB. On voit aisément que N M Q P est un rectangle. Donc NI = PH et IM = HQ (I est le point de rencontre de MN et CH)

D'autre part NA = NH donc NP est la médiatrice de AH d'où AP = PH et de même HQ = QB.

Finalement $NM = NI + IM = PH + HQ = \frac{1}{2}(AH+HB) = \frac{1}{2} AB$. Donc le segment MN est égal à la moitié de AB.

Remarque : On laisse au lecteur le soin de constater que cette démonstration ne marche pas si A est obtus et de la refaire dans ce cas.

Théorème 4.3 - (Théorème de la droite des milieux).

Le segment de droite joignant les milieux de 2 côtés d'un triangle est parallèle au 3ème côté et de longueur égale à la moitié de celle du 3ème côté.

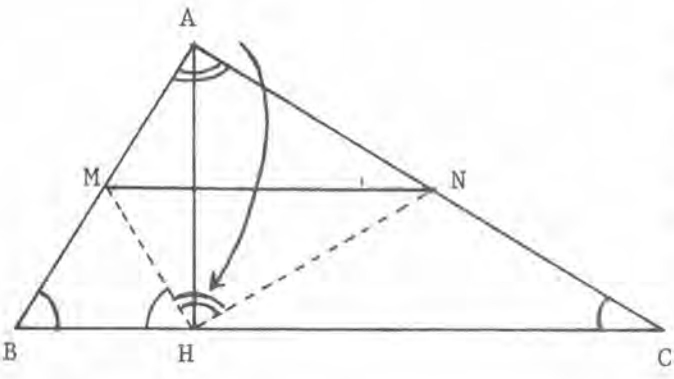
Concluons par un énoncé partiellement réciproque au précédent :

Théorème 4.4 -

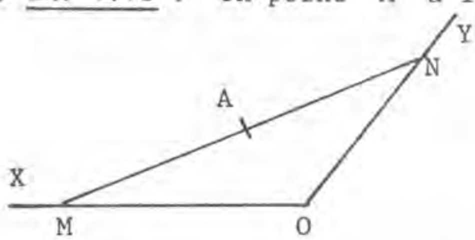
Une droite passant par le milieu d'un côté d'un triangle et parallèle à un autre côté passe par le milieu du 3ème côté.

La démonstration utilise le résultat que l'on vient de démontrer et le postulat d'Euclide, on la laisse au lecteur.

Remarque : Il résulte de ce théorème que I est le milieu de CH (voir figure). Ce théorème justifie une vérification simple du fait que la somme des angles d'un triangle est égale à 180°. Soient en effet un triangle ABC et M le milieu de AB, N celui de AC. On plie le triangle selon la droite MN. Alors A vient s'appliquer sur H pied de la hauteur issue de A. Les angles $\widehat{MBH}$ et $\widehat{MHB}$ sont égaux ainsi que $\widehat{NHC}$ et $\widehat{NCH}$ (MBH et NCH sont isocèles). Par pliage on a aussi $\widehat{MAN} = \widehat{MHN}$. Donc $\widehat{BHC} = \widehat{BHM} + \widehat{MHN} + \widehat{NHC}$ est la somme des angles du triangle.



▶ Ex. 4.12 : Un point A à l'intérieur de l'angle saillant $\widehat{XOY}$ étant donné, construire M sur OX et N sur OY de telle sorte que A soit le milieu de MN.

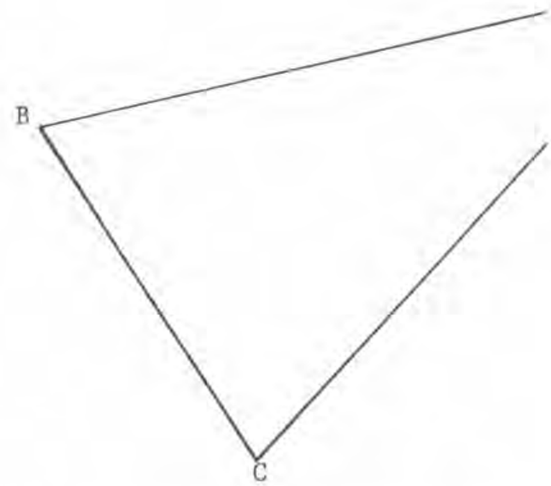


▶ Ex. 4.13 : On donne trois points A,B,C. Construire un triangle DEF dont A,B et C soient les pieds des médianes.

▶ Ex. 4.14 : Soient D une droite et A un point ne se trouvant pas sur D. A tout point M de D on associe le milieu N du segment AM. Quelle est la figure parcourue par le point N quand M se déplace sur D ?

▶ Ex. 4.15 : Deux droites D_1 et D_2 se coupent en A. On se donne un point B n'appartenant ni à D_1 ni à D_2 et on demande de construire C sur D_1 tel que le milieu de BC soit sur D_2.

▶ *Ex. 4.16* : Comment calculer les longueurs des côtés AB et AC du triangle ci-contre sans sortir de la feuille ?



▶ *Ex. 4.17* : On appelle I,J,K et L les milieux des côtés d'un rectangle A B C D. Que peut-on dire du quadrilatère I J K L ?

▶ *Ex. 4.18* : Un compas à pointes sèches permet uniquement de reporter une longueur donnée. A l'aide d'une règle et d'un tel compas, mener par un point donné la parallèle à un segment donné.

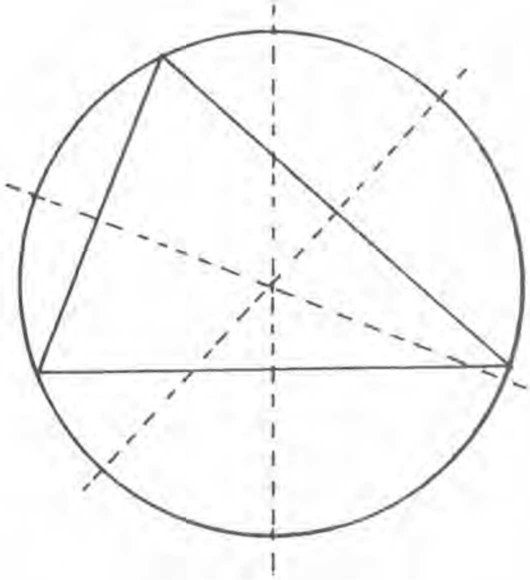
4.4 - *Droites concourantes dans un triangle (début)*.

On a dessiné plus haut 4 familles de droites remarquables d'un triangle (médiatrices, bissectrices, hauteurs, médianes). Il semble que les 3 droites de chaque famille se rencontrent en un même point. Nous allons prouver ici et plus loin que ce n'est pas une illusion.

Théorème 4.5 -

Les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

Démonstration : Soit O le point de rencontre de la médiatrice de AB et de la médiatrice de BC. On a donc : OA = OB et OB = OC, donc O est sur la médiatrice de AC.



Le point O est donc tel que OA = OB = OC. Ainsi le cercle de centre O, de rayon OA passe par A, B et C. C'est le cercle <u>circonscrit</u> sur le triangle ABC, il est défini de manière unique (pourquoi ?)

▶ <u>*Ex. 4.19*</u> : Construire à la règle (en utilisant les deux côtés) le centre d'un cercle donné.

▶ <u>*Ex. 4.20*</u> : Le point de rencontre des médiatrices d'un triangle peut-il être extérieur au triangle ? Si oui, dans quels cas ?

<u>*Théorème 4.6*</u> -

Les bissectrices d'un triangle sont concourantes.

<u>*Démonstration*</u> : Laissée au lecteur qui utilisera la caractérisation des points d'une bissectrice donnée dans le théorème 2.4 .

Soit I le point de rencontre des bissectrices. Soient K,L,M les pieds des perpendiculaires de I sur les côtés AB, BC et CA. Le cercle de centre I et de rayon IK = IL=IM est tangent en K, L et M aux trois côtés du triangle : c'est le <u>cercle inscrit</u> au triangle (Cf. paragraphe 6.2).

▶ <u>*Ex. 4.21*</u> : Le point de rencontre des bissectrices peut-il être extérieur au triangle ? Si oui, dans quels cas ?

▶ <u>*Ex. 4.22*</u> : Les bissectrices d'un triangle ABC se coupent en I. Exprimer l'angle $\widehat{BIC}$ en fonction de l'angle $\widehat{BAC}$.

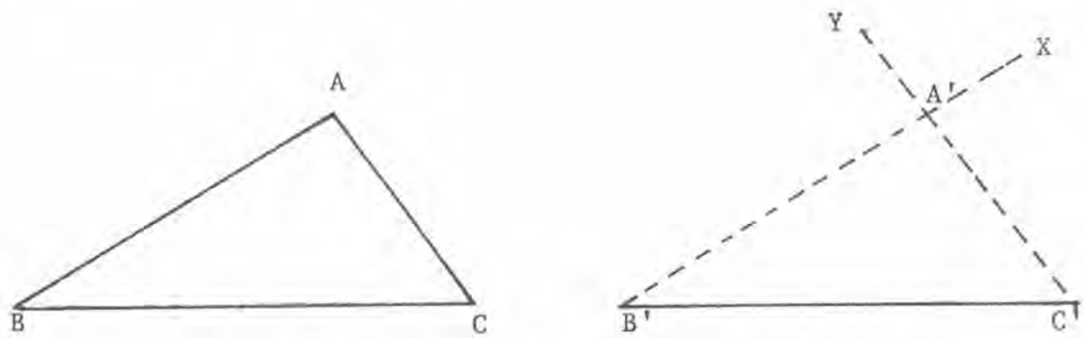
<u>*Application*</u> : Trois droites D_1, D_2, et D_3 se coupent en I. Soit A un point de D_1. Construire B sur D_2 et C sur D_3 de telle sorte que D_1, D_2 et D_3 soient les bissectrices de ABC.

4.5 - Cas d'égalité des triangles

Comment reconnaître que deux triangles sont égaux sans avoir à superposer l'un sur l'autre ? C'est ce que vont indiquer les théorèmes suivants.

4.5.1 - Cas d'égalité des triangles quelconques

Considérons un triangle ABC. On souhaite construire un triangle A'B'C' égal à ABC. On peut commencer par construire B'C' = BC. Puis l'angle $\widehat{C'B'X} = \widehat{CBA}$ et enfin $\widehat{B'C'Y} = \widehat{BCA}$. Le point A' doit se trouver sur B'X et sur C'Y il est donc parfaitement déterminé.



Il est clair que le transport de ABC sur A'B'C' peut être réalisé par application de B sur B', C sur C' et A sur A'.

On a en fait montré le

<u>*Théorème 4.7*</u> -

Deux triangles sont égaux s'ils ont un côté égal compris entre deux angles égaux (1er cas d'égalité).

Pour des raisons analogues on arrive à :

<u>*Théorème 4.8*</u> -

Deux triangles sont égaux s'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux (2ème cas d'égalité).

▶ Ex. 4.23 : Soient un triangle ABC et un segment MN de longueur égale à celle de BC.

Construire un triangle MNP égal à ABC.

Combien y-a-t-il de tels triangles ?

▶ Ex. 4.24 : Soient un triangle ABC et un angle $\widehat{XOY}$ de mesure égale à celle de $\widehat{A}$.

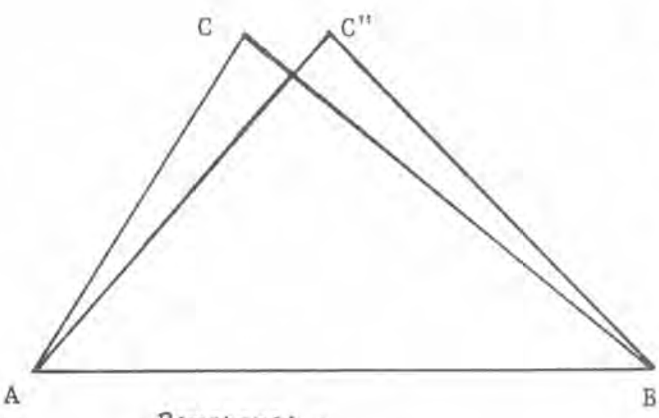
Construire un triangle OPQ égal à ABC dont P et Q soient sur les côtés de l'angle. Combien y-a-t-il de tels triangles ? Est-il sûr que l'on n'en trouve pas le même nombre que dans l'exercice précédent ?

Jamais deux sans trois :

Théorème 4.9 -

Deux triangles sont égaux s'ils ont leurs trois côtés égaux (3ème cas d'égalité).

Ce résultat est un peu moins évident que les deux qui précèdent. Supposons que ABC et A'B'C' aient leurs côtés égaux et transportons A'B' sur AB . Il apparaît deux triangles ABC et ABC" qui ont leurs côtés égaux.



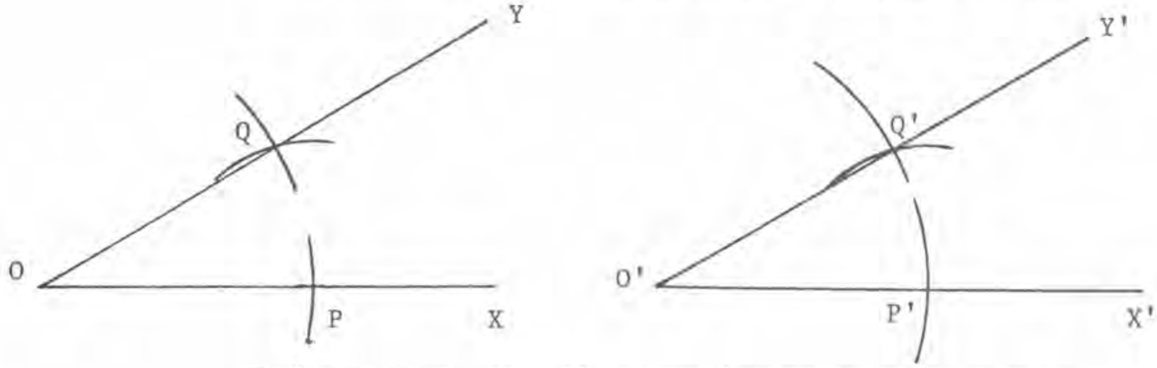
Comme BC = BC", B est sur la médiatrice de CC". Il en est de même pour A. Ainsi AB est la médiatrice de CC", donc passe par le milieu de ce segment ce qui est absurde si on a pris soin de placer les deux triangles du même côté de AB.

Remarques :

1) Chacun de ces résultats fournit un procédé de construction d'un triangle égal à un triangle donné.

2) Le troisième cas d'égalité fournit la construction usuelle au compas d'un angle égal à un angle donné : on se donne $\widehat{XOY}$ et O'X' et on souhaite construire O'Y' telle que $\widehat{X'O'Y'} = \widehat{XOY}$. On prend P et Q sur OX et OY

respectivement, on reporte (avec un compas) OP sur O'X'.



Puis on construit Q' comme intersection du cercle de centre O' de rayon OQ avec le cercle de centre P' de rayon PQ. On a donc construit le triangle O'P'Q' égal au triangle OPQ à cause du 3ème cas d'égalité.

3) Si deux triangles ont trois angles égaux ils ne sont pas nécessairement égaux (Cf. les triangles équilatéraux).

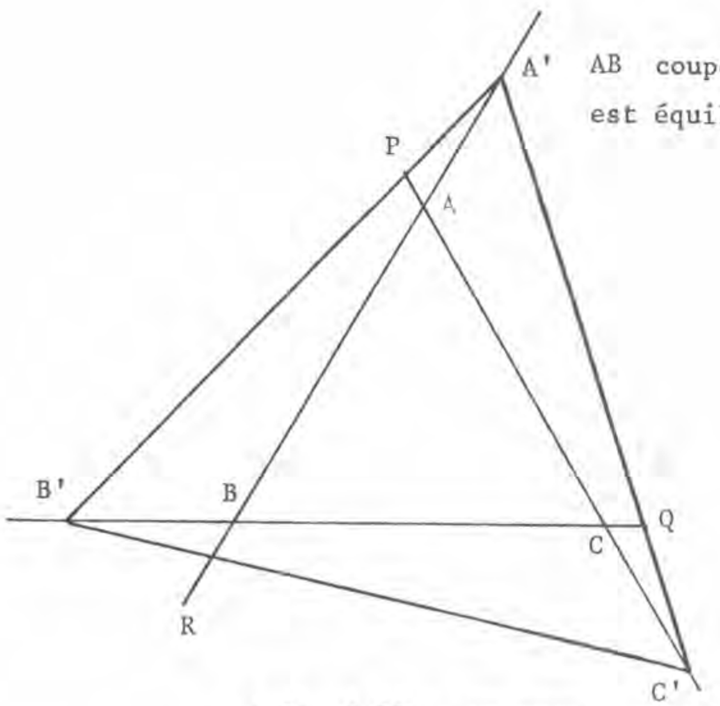
▶ Ex. 4.25 : Construire deux triangles inégaux ayant deux côtés égaux et un angle égal, non compris entre les côtés. De même, construire deux triangles inégaux ayant deux angles égaux et un côté égal, non compris entre les angles.

▶ Ex. 4.26 : Soient ABC un triangle, AM la médiane issue de A, BH et CK les perpendiculaires de B et C sur AM. Montrez que BH = CK.

▶ Ex. 4.27 : L'intersection de deux bandes de même largeur est un losange.

▶ Ex. 4.28 : On donne un triangle équilatéral ABC dont on prolonge les côtés, en tournant dans le même sens, par des segments égaux AA' = BB' = CC'.

- Montrer que A'B'C' est équilatéral.
- AC coupe A'B' en P, BC coupe A'C' en Q,



AB coupe B'C' en R. Montrer que P Q R est équilatéral.

▶ Ex. 4.29 : On prolonge la hauteur AH d'un triangle ABC d'une longueur HD = HA et la médiane AM d'une longueur ME = AM.

- Comparer les angles CBD et BCE ainsi que les segments BD et CE.

- BD et CE se coupent en S. Que représente SM pour le triangle SDE ?

4.5.2 - *Cas d'égalité des triangles rectangles.*

Les triangles rectangles satisfont bien sûr aux cas d'égalité des triangles quelconques. De plus deux cas d'égalité leur sont spécifiques :

Théorème 4.10 -

(Premier cas d'égalité des triangles rectangles). Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un angle aigu égal.

Théorème 4.11 -

(Deuxième cas d'égalité des triangles rectangles). Deux triangles rectangles sont égaux quand ils ont l'hypoténuse égale et un côté de l'angle droit égal.

Trouver une démonstration analogue à celles qui précèdent. On peut aussi remarquer que si deux côtés des triangles rectangles ABC et A'B'C' sont égaux, le troisième l'est aussi (par le théorème de Pythagore). Et, de manière analogue, si les angles aigus B et B' sont égaux, les deux autres angles aigus sont eux-mêmes égaux. C'est dire que la situation de l'exercice 4.25 ne peut pas se produire.

▶ *Ex. 4.30* : Convenons d'appeler sextangle un triangle qui a un angle de 60°. Existe-t-il des cas d'égalité des triangles sextangles ?

▶ *Ex. 4.31* : Utiliser les cas d'égalité des triangles rectangles pour démontrer la propriété caractéristique de la bissectrice d'un angle (théorème 2.4.).

▶ *Ex. 4.32* : Soit un triangle ABC. La bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ coupe la médiatrice de BC en D. On appelle E et F les pieds des perpendiculaires abaissées de D sur AB et AC.

- Montrer que $AE = AF \leq \frac{AB + AC}{2}$ et que $BE = CF \geq \frac{(AB - AC)}{2}$.
- Soient D' le point de rencontre de la médiatrice de BC avec la bissectrice de $\widehat{A}$, E' et F' les pieds des perpendiculaires de D' sur AB et AC. Calculer AE', AF', BE', CF' et montrer que FE' = AC et FF' = AB.

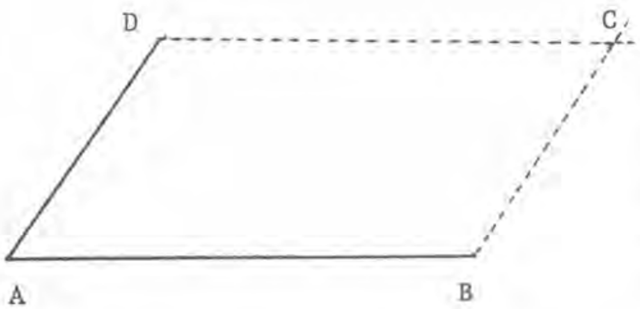
V - LE PARALLELOGRAMME

5.1. *Définition et propriétés*

Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

(Ainsi, comme nous l'avons signalé, losanges et rectangles sont des parallélogrammes).

Avant de donner d'autres définitions du parallélogramme remarquons que celle-ci permet de le construire.



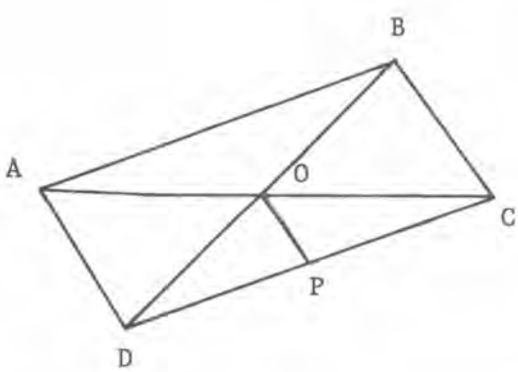
Soient trois points ABD. On veut construire le parallélogramme A B C D. Or C doit se trouver sur la parallèle à AD menée par B et sur la parallèle à AB menée par D. Comme AB et AD sont sécantes, les deux parallèles le sont aussi. Donc le point C existe et il est défini de manière unique : il existe un seul parallélogramme dont deux côtés consécutifs sont donnés.

Théorème 5.1 -

Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, ce quadrilatère est un parallélogramme. Réciproquement les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Démonstration

1) Soit O le milieu commun des deux diagonales AC et BD d'un quadrilatère A B C D.



Soit P le milieu de DC.

En appliquant le théorème 4.3 aux triangles ACD et DBC on voit successivement que OP est parallèle à AD et à BC. Donc AD et BC sont parallèles. Il en est de même pour AB et CD, donc A B C D est un parallélogramme.

2) On considère un parallélogramme A B C D. Soit O le milieu de AC. Soit D' le point de la droite BO tel que BD' ait O pour milieu. Il résulte de ce que l'on vient de voir que A B C D' est un parallélogramme. Mais A B C D et A B C D' sont deux parallélogrammes construits sur les côtés BA et BC, donc c'est le même parallélogramme (c'est à dire que D = D'). Les diagonales de A B C D se coupent en leur milieu.

Ce théorème donne une autre construction d'un parallélogramme : on construit deux droites Δ et Δ' qui se coupent en O, on prend A et C sur Δ et B et D sur Δ' tels que AO = OC et BO = OD. A B C D est un parallélogramme.

Théorème 5.2 -

Les côtés opposés d'un parallélogramme sont égaux. Réciproquement si un quadrilatère a ses côtés opposés égaux, c'est un parallélogramme.

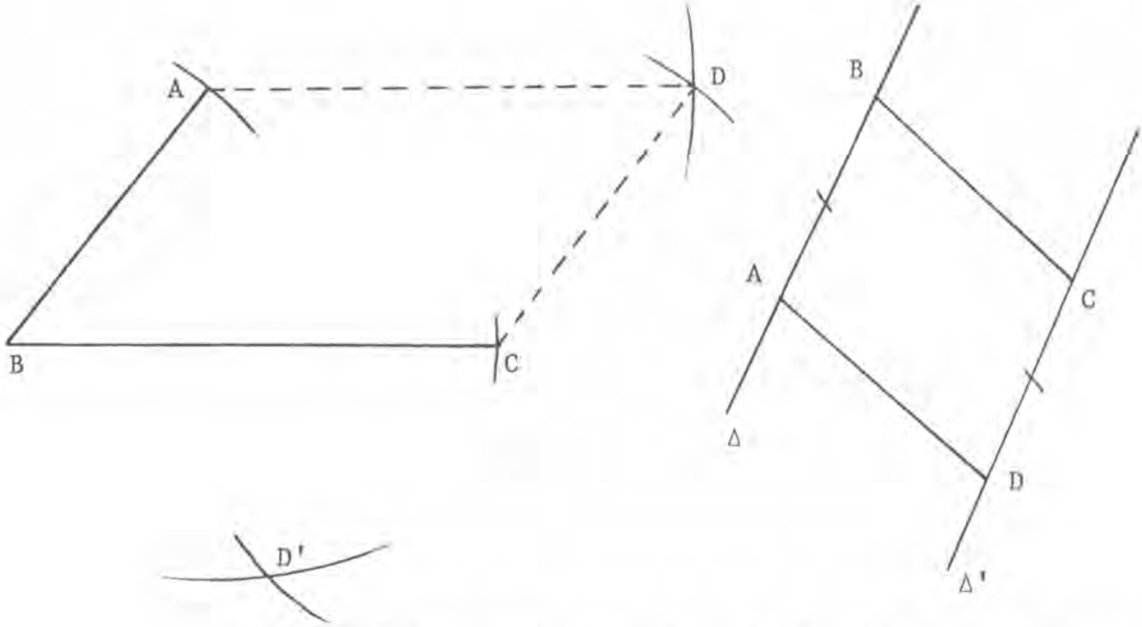
Théorème 5.3 -

Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et égaux, c'est un parallélogramme.

Ces énoncés fournissent deux nouvelles constructions des parallélogrammes.

- On part de 3 points ABC et on construit le cercle de centre A de rayon BC, le cercle de centre C de rayon AB. Ces cercles se rencontrent en deux points D et D'. L'un des deux quadrilatères A B C D et A B C D' est un parallélogramme (l'autre est un quadrilatère croisé).

- Sur deux droites parallèles Δ et Δ' on porte 4 points : A et B sur D, C et D sur Δ' tels que AB = CD. A B C D ou A B D C est un parallélogramme.



On laisse au lecteur le soin de démontrer les deux théorèmes qui précèdent. Il pourra utiliser les cas d'égalité des triangles. Ou bien faire intervenir une symétrie par rapport à un point, transformation en l'honneur de laquelle nous ouvrirons un petit paragraphe, après avoir traité quelques exercices.

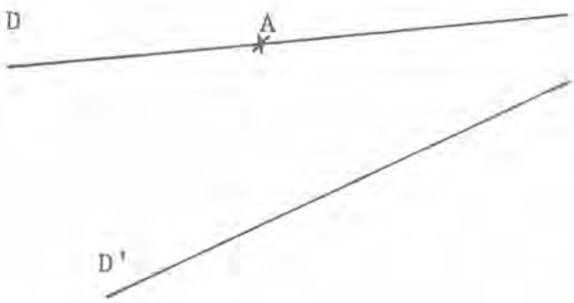
▶ Ex. 5.1 : Donner une caractérisation du parallélogramme à l'aide de conditions portant sur les angles.

▶ Ex. 5.2 : Deux triangles sont égaux s'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun et deux médianes égales (deux cas de figure).

▶ Ex. 5.3 : Les segments qui joignent les milieux des côtés consécutifs d'un quadrilatère forment un parallélogramme.

▶ Ex. 5.4 : Soit $A\ B\ C\ D$ un quadrilatère (convexe). On mène par A et C les parallèles à BD et par B et D les parallèles à AC. Ces quatre droites forment un parallélogramme $M\ N\ P\ Q$. Montrez que l'aire de $M\ N\ P\ Q$ est le quadruple de celle de $A\ B\ C\ D$. En déduire que si deux quadrilatères ont des diagonales égales et faisant le même angle, ils ont même aire.

▶ <u>Ex. 5.5</u> : Comment calculer la distance de A au point d'intersection de D et D' (sans sortir de la feuille ?)



▶ <u>Ex. 5.6</u> : Construire un trapèze dont on connaît les quatre côtés.

▶ <u>Ex. 5.7</u> : Soit un triangle ABC. Construire M et N sur AB et AC respectivement tels que MN soit parallèle à BC et MN ait une longueur donnée.

▶ <u>Ex. 5.8</u> : Par le point de rencontre I des bissectrices d'un triangle ABC on mène la parallèle à BC qui coupe AB en M et AC en N. Montrez que BM + CN = MN. Que devient ce résultat si on remplace I par le point de rencontre des bissectrices extérieures des angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$?

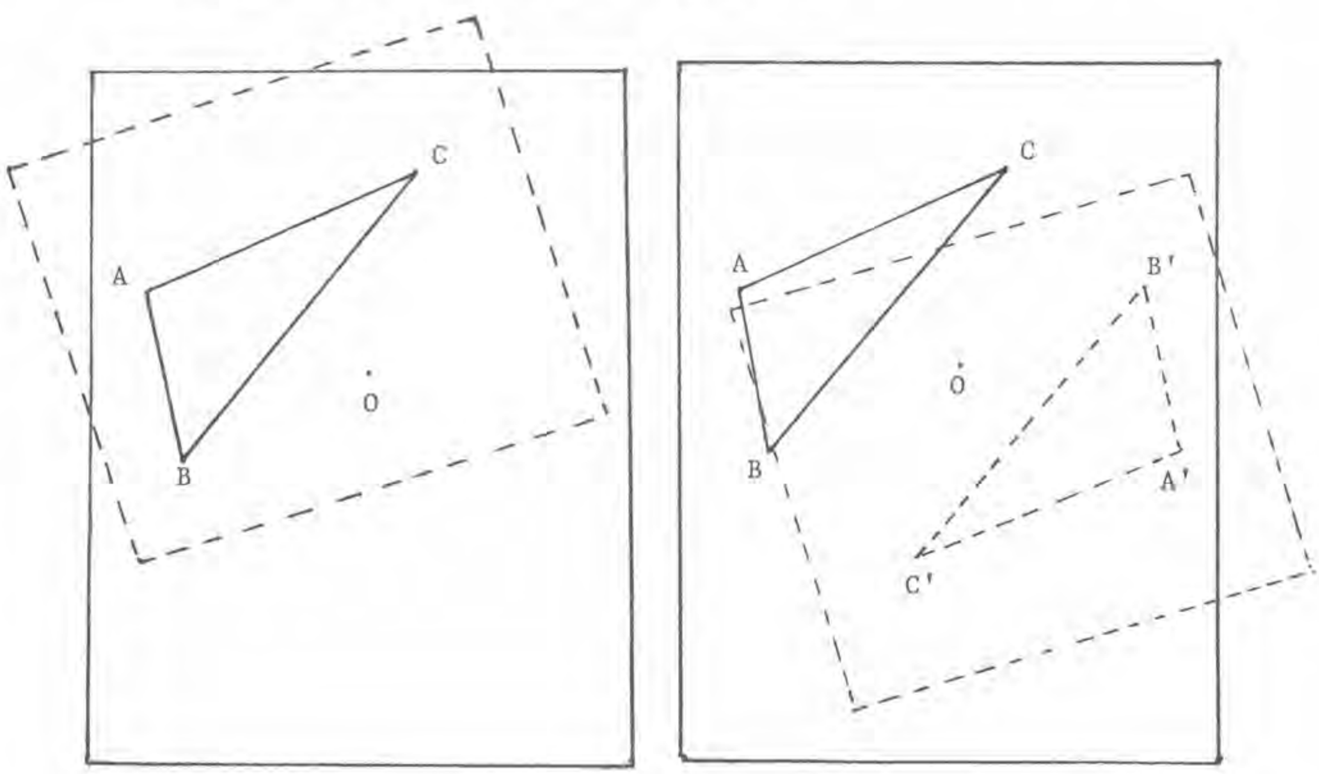
▶ <u>Ex. 5.9</u> : Deux parallélogrammes A B C D et M N P Q sont tels que M est sur AB, N sur BC, P sur CD et Q sur DA. Montrez que les diagonales de ces deux parallélogrammes se coupent en un même point.

▶ <u>Ex. 5.10</u> : Dessiner la ligne formée par un parallélogramme, ses bissectrices, ses bissectrices extérieures. Il apparaît deux rectangles (Cf. Exercice 3.17.).
Que dire des diagonales de ces rectangles ? Calculer les longueurs de ces diagonales en fonction des côtés du parallélogramme. (Remarquer que dans la figure il y a beaucoup d'angles égaux et d'angles complémentaires).

5.2 - *Symétrie centrale ou symétrie par rapport à un point.*

Soit O un point fixe. A tout point A du plan, on associe le point A' tel que O soit le milieu du segment AA'. On dit que A' est le symétrique de A par rapport au point O. Il est immédiat de constater que A est le symétrique de A' par rapport à O.

Une manipulation permet de matérialiser cette transformation. Une figure est dessinée sur papier calque. On fait tourner le calque d'un demi-tour autour du point O : la figure se transforme en la symétrique de la figure initiale (la symétrie par rapport à un point ou symétrie-point est parfois appelée demi-tour. C'est aussi une rotation de 180° autour du point O)



Remarque : Trouver un artifice géométrique permettant de s'assurer que le calque a fait exactement un demi-tour.

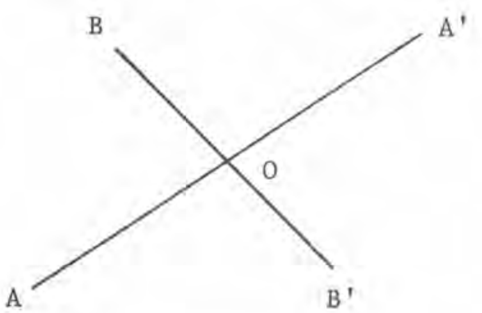
De cette observation résultent les propriétés suivantes :

- L'image d'une droite est une droite.
- L'image d'un segment est un segment de même longueur.
- La symétrie-point conserve les angles.
- La symétrie-point conserve le parallélisme (c'est-à-dire que

si deux droites Δ_1 et Δ_2 sont parallèles, leurs images Δ'_1 et Δ'_2 dans une symétrie centrale sont parallèles.

Le lien entre symétrie centrale et parallélogramme est donc dans le théorème 5.1, que l'on peut réécrire sous la forme : le point de rencontre des diagonales d'un parallélogramme est un centre de symétrie pour cette figure. Comme la réciproque est vraie, on a ce qui suit :

Soient A et B deux points, A' et B' leurs symétriques par rapport à un point O. Par définition, O,A,A' sont alignés et OB = OB'.



Ainsi A B A' B' est un parallélogramme.

En particulier les droites AB et A'B' sont parallèles. D'où une nouvelle propriété (qui n'était pas vraie pour la symétrie axiale):

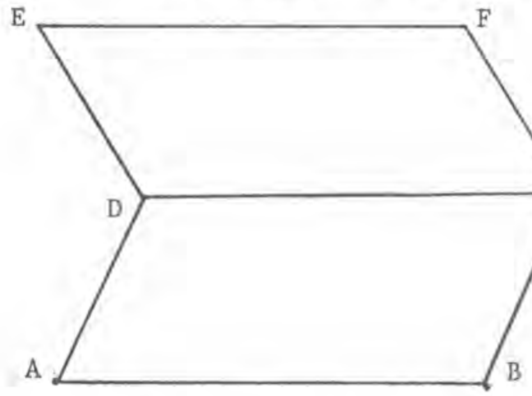
Théorème 5.4 -

L'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle.

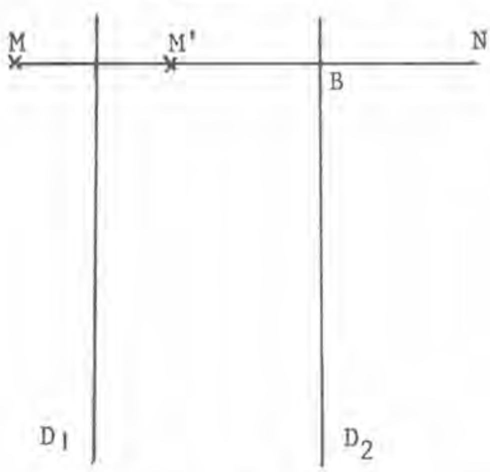
▶ Ex. 5.11 : Soient Δ et Δ' deux droites perpendiculaires se coupant en un point O. Soient A un point du plan, A' le symétrique de A par rapport à la droite Δ, A" le symétrique de A' par rapport à Δ'. En utilisant les propriétés du rectangle montrez que A" est le symétrique de A par rapport au point O. En déduire qu'une symétrie centrale s'obtient en faisant l'une derrière l'autre deux symétries par rapport à des droites perpendiculaires.

Attention : Un parallélogramme admet un centre de symétrie O. Mais il n'admet pas d'axes de symétrie (sauf bien sûr s'il est un losange ou un rectangle) bien que la symétrie de centre O soit la composée de deux symétries axiales.

▶ Ex. 5.12 : L'appareil dessiné ci-contre est constitué de deux parallélogrammes A B C D et C D E F. Les points A et B sont fixes, en D, C, E et F il y a des articulations. Quand le point E décrit une figure $\mathcal{F}$, que dire de la figure $\mathcal{F}'$ décrite par F ?



▶ Ex. 5.13 (A faire avec le précédent)



D_1 et D_2 sont deux droites parallèles. $M' = S_{D_1}(M)$ et

$N = S_{D_2}(M')$.

Quand M décrit une figure $\mathcal{F}$, que dire de la figure $\mathcal{F}'$ décrite par N ?

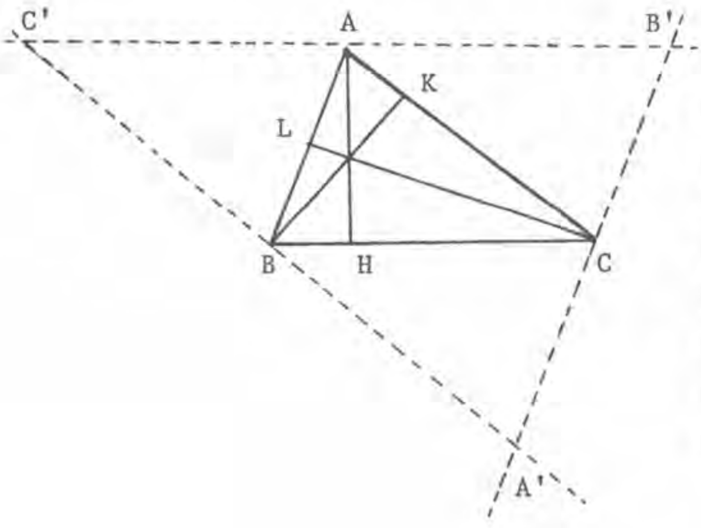
La transformation de M en N est une translation.

5.3 - Droites concourantes dans le triangle (fin)

Théorème 5.5 -

Les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Démonstration : Soient ABC un triangle, AH, BK et CL ses hauteurs. Menons par A la parallèle à BC, par B la parallèle à AC, par C la parallèle à AB.



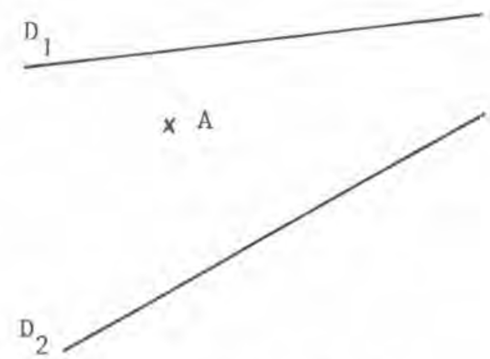
Ces droites définissent un triangle A'B'C'. Comme il a ses côtés opposés parallèles, le quadrilatère A C B C' est un parallélogramme. Donc AC' = BC. De même AB' = BC. Par suite AC' = AB', donc A est le milieu de B'C'. Comme AH est perpendiculaire à BC, que B'C' est parallèle à BC, AH est perpendiculaire à B'C'. Donc la droite AH est la médiatrice de B'C'. Ainsi AH, BK, CL sont les médiatrices de A'B'C' donc elles sont concourantes.

Le point de rencontre des hauteurs est <u>l'orthocentre</u> du triangle ABC.

▶ <u>*Ex. 5.14*</u> : Refaire la même démonstration en définissant C' par les conditions AC' = BC et BC' = AC et B' et A' de façon analogue.

▶ <u>*Ex. 5.15*</u> : Les hauteurs d'un triangle peuvent-elles se couper à l'extérieur du triangle ? Si oui, dans quels cas ?

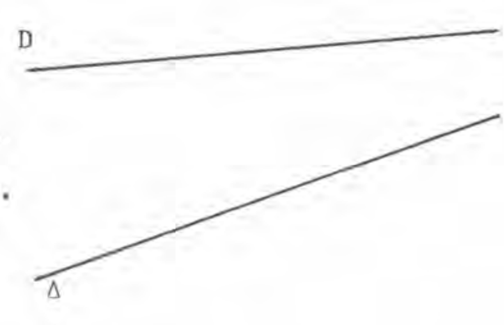
▶ <u>*Ex. 5.16*</u> : Joindre le point A au point de rencontre de D_1 et D_2. (Comme d'habitude on ne peut sortir de la feuille).



▶ <u>*Ex. 5.17*</u> : Trois droites D_1, D_2, D_3 se coupent en H. On donne un point A de D_1. Construire B sur D_2 et C sur D_3 pour que ces trois droites soient les hauteurs du triangle ABC.

▶ <u>*Ex. 5.18*</u> : Trois droites Δ_1, Δ_2, Δ_3 se coupent en O. On se donne un point A' de Δ_1. Construire un triangle ABC dont Δ_1, Δ_2, Δ_3 sont les médiatrices et tel que A' soit le milieu de BC. (Se ramener à l'exercice précédent en utilisant la figure du théorème 5.5)

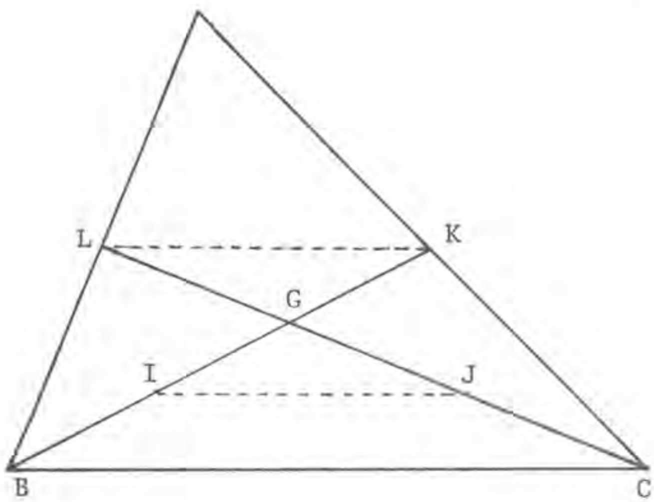
▶ <u>*Ex. 5.19*</u> : Avec le mode d'emploi habituel, construire la bissectrice de l'angle formé par D et Δ.



Théorème 5.6 -

Les médianes d'un triangle sont concourantes. Leur point de rencontre est situé au tiers de chacune d'elles en partant de la base.

Démonstration : Soient ABC un triangle, BK et CL deux médianes se coupant en G. Soient I le milieu de GB et J celui de GC.



IJ est parallèle à BC et de longueur $\frac{BC}{2}$.

LK est parallèle à BC et de longueur $\frac{BC}{2}$.

(On applique aux triangles ABC et GBC le théorème de la droite des milieux).

Donc I J K L, qui a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, est un parallélogramme. Ses diagonales se coupent donc en leur milieu.

Par suite $GK = GI$ et $GJ = GL$. On a aussi $GI = IB$ et $GJ = JC$. Donc $GK = \frac{1}{3}$ BK.

Si on appelle G' le point de rencontre de BK avec la médiane AM, on a de même $G'K = \frac{1}{3}$ BK. Donc G' et G sont confondus. C'est le résultat annoncé.

Le point de rencontre des médianes est le centre de gravité du triangle ABC (savez-vous pourquoi ?)

▶ *Ex. 5.20* : Les médianes d'un triangle peuvent-elles se couper à l'extérieur du triangle ? Si oui, dans quels cas ?

▶ *Ex. 5.21* : Trois droites D_1, D_2, D_3 concourent en un point G. On se donne A sur D_1. Construire B sur D_2 et C sur D_3 pour que D_1, D_2, D_3 soient les médianes de ABC.

▶ <u>Ex. 5.22</u> : Dessiner avec soin un triangle, son centre de gravité, son orthocentre et le point de rencontre de ses médiatrices. Vérifier que ces trois points sont alignés. Quelle relation semble exister entre les longueurs des segments ainsi définis ?

▶ <u>Ex. 5.23</u> : Construire un triangle ayant deux médianes égales.

▶ <u>Ex. 5.24</u> : Dans un parallélogramme A B C D, soient M le milieu de CB et N celui de DC. Les segments AM et AN partagent en trois parties égales la diagonale BD.

▶ <u>Ex. 5.25</u> : "La patronne d'une pension de famille est un parallélogramme, c'est à dire un volume oblong et angulaire, indescriptible, mais à la hauteur de n'importe quoi" (Stephen Leacock , "Histoires Humoristiques", trad. M. Chrestien - Le livre de Poche). La réciproque est-elle vraie ?

VI - LE CERCLE ET LES POLYGONES REGULIERS

On sait que le cercle de centre O et de rayon R est l'ensemble des points situés à la distance R du point O. On le désignera par $\mathcal{C}$ (O,R). Le disque de centre O et de rayon R est l'ensemble des points du plan situé à une distance inférieure ou égale à R du point O (le disque est une surface, limitée par le cercle).

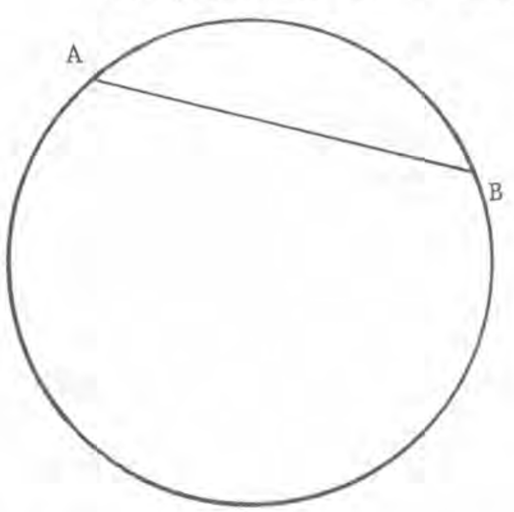
Toute droite passant par le centre du cercle est un axe de symétrie pour celui-ci. Le segment découpé par le cercle sur une telle droite est un diamètre du cercle.

On sait que la longueur d'un cercle de rayon R est égale à $2\pi R$, sa surface à πR^2. (Cf. le paragraphe 6.4.2, le chapitre "Nombres" et le chapitre "Mesure"). Est-il besoin de dire qu'un cercle se dessine avec un compas ?

Le mot circonférence est parfois employé comme synonyme de cercle. On l'emploie en général pour désigner le périmètre du cercle.

6.1 - *Sécantes et tangentes*

Deux points A et B situés sur le cercle $\mathcal{C}$ (O,R) partagent ce cercle en deux parties appelées arcs de cercle. Chaque arc est désigné par $\overset{\frown}{AB}$. On remarquera l'ambiguité analogue à celle formée par le couple angle saillant-angle rentrant.



Le segment AB est une corde. La médiatrice d'une corde passe par le centre du cercle.

▶ Ex. 6.1 : Prouver ce résultat. Plus généralement, montrer le résultat suivant :

Soient A et B deux points de $\mathcal{C}$ (O,R) et D une droite. Les propositions suivantes sont équivalentes.

- La droite D est médiatrice de AB.
- La droite D passe par O et par le milieu de AB.

- La droite D passe par O et est perpendiculaire à AB.

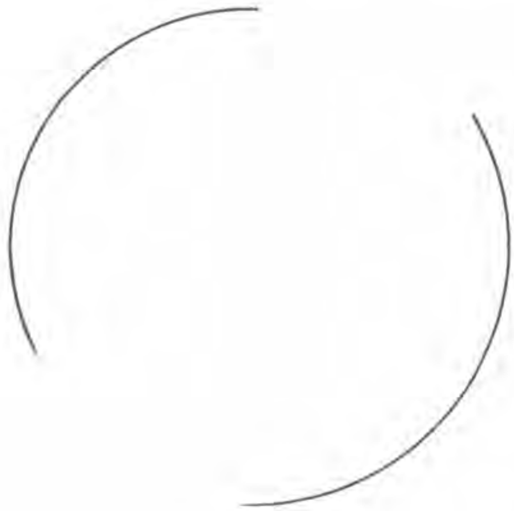
Ceci permet de déterminer le centre d'un cercle donné, même si on en connaît seulement un arc : il suffit de prendre le point d'intersection des médiatrices de deux cordes AB et CD.

▶ Ex. 6.2 :

- Comment choisir A,B,C,D pour être sûr que ces médiatrices se coupent ?
- Par trois points non alignés il passe un cercle et un seul.
- Par deux points il passe une infinité de cercles. Où sont leurs centres ?

▶ Ex. 6.3 : Quel est le rayon du cercle dont un arc est dessiné ci-contre ?

▶ Ex. 6.4 : Les deux arcs de cercle ci-dessus sont-ils sur un même cercle ?



▶ *Ex. 6.5* : En utilisant uniquement un compas, construire le symétrique d'un point A par rapport à un point O.

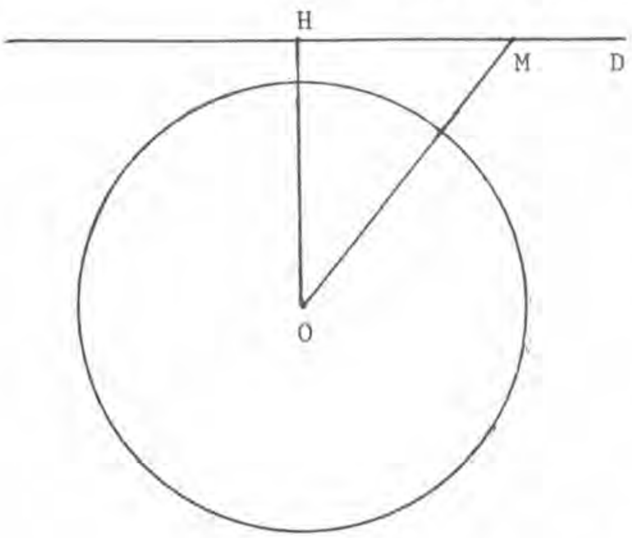
Théorème 6.1 -

Soient un cercle $\mathscr{C}(O,R)$ et D une droite. Désignons par d la distance de O à D.

1) Si $d > R$, la droite et le cercle n'ont pas de point commun.

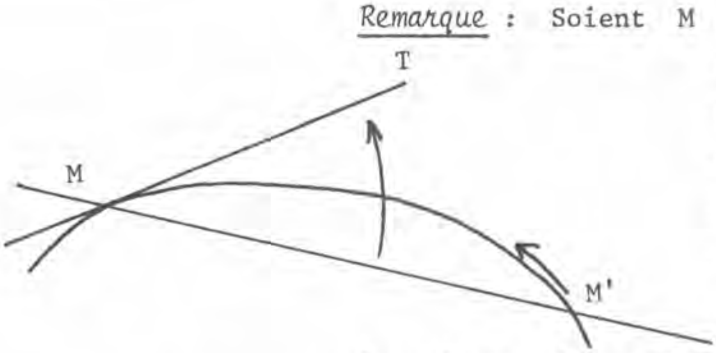
2) Si $d < R$, la droite et le cercle ont deux points en commun. On dit que la droite est sécante au cercle

3) Si $d = R$, la droite et le cercle ont un point en commun. On dit alors que la droite est tangente au cercle.

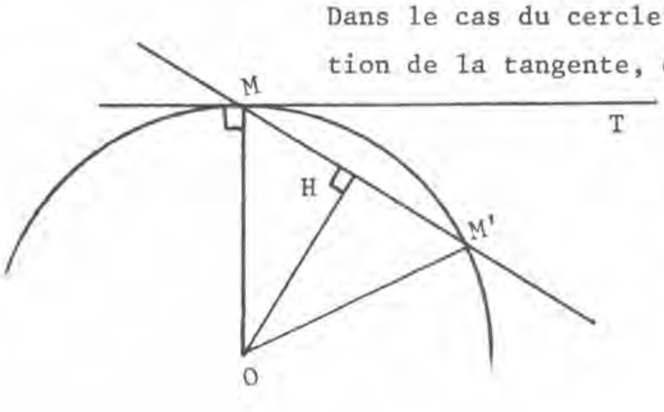


Démonstration : On la laisse au lecteur. Il aura à considérer H , pied de la perpendiculaire abaissée de O sur D (ainsi $OH = d$) , à utiliser le théorème 2.3 et cet axiome évident : si l'on joint M tel que $OM < R$ à N tel que $ON > R$, le segment MN coupe $\mathscr{C}(O,R)$ en un seul point.

Remarque : Soient M et M' deux points d'une courbe. On suppose que M est fixe et que M' se rapproche de M. Dans les bons cas la sécante MM' se rapproche d'une position limite MT. On dit alors que MT est la tangente à la courbe au point M.



Dans le cas du cercle on vient de donner une autre définition de la tangente, qui bien sûr est équivalente à celle-ci :



Soit MT la tangente en M au cercle $\mathscr{C}(O,R)$. On a donc $OM = R$ et $OM \perp MT$.

Soient M' un point du cercle et H le pied de la perpendiculaire de

O sur MM'. On a $\widehat{HOM} = \widehat{HMT}$ (angles à côtés perpendiculaires). Quand M' tend vers M, $\widehat{MOM'}$ tend vers 0 donc $\widehat{MOH} = \frac{\widehat{MOM'}}{2}$ aussi. Ainsi $\widehat{M'MT}$ tend vers 0, donc la droite MM' tend à coïncider avec MT.

Théorème 6.2 -

Soient une droite D et un cercle $\mathscr{C}(O,R)$. On suppose que D et $\mathscr{C}(O,R)$ ont un point M en commun. Alors D est la tangente en M au cercle si et seulement si OM est perpendiculaire à D.

Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème 6.1. Il permet de construire des tangentes à un cercle donné. Par exemple :

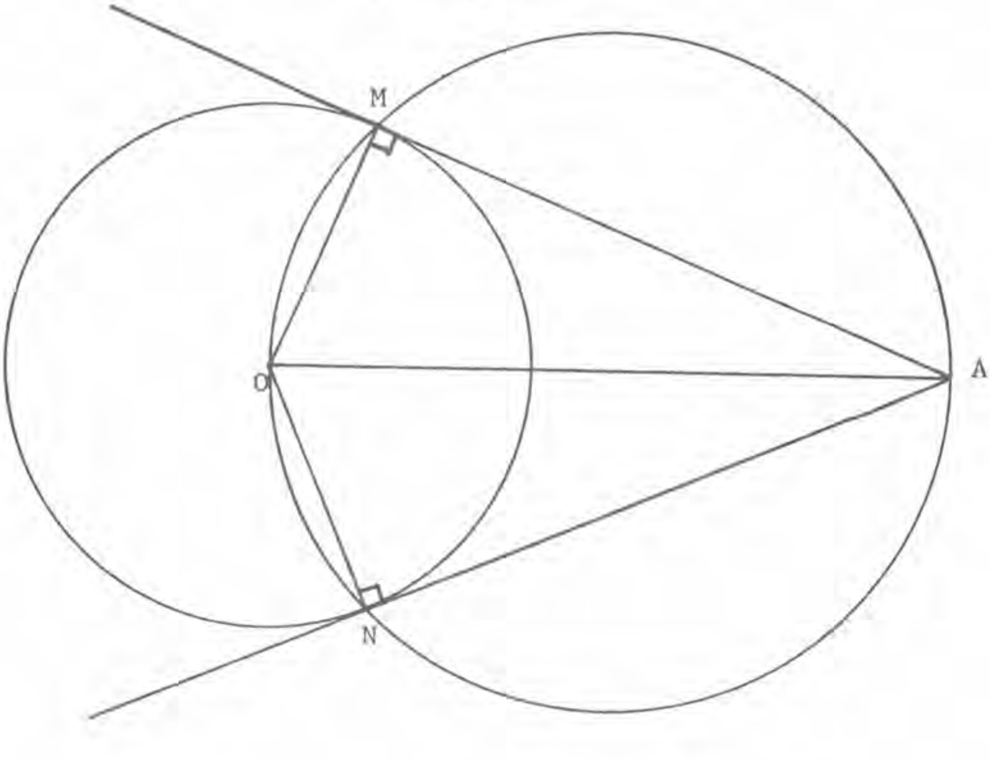
- Construire une droite tangente à un cercle donné et passant par un point donné.

  Soient O le centre du cercle, R son rayon, A le point donné.

  1) Si $OA < R$, pas de solution au problème (pourquoi ?)

  2) Si $OA = R$, une seule solution : la droite D passant par A et perpendiculaire à OA.

  3) Si $OA > R$: le cercle de diamètre OA coupe (O,R) en deux points M et N. Les droites AM et AN sont les solutions du problème (Cf. figure).

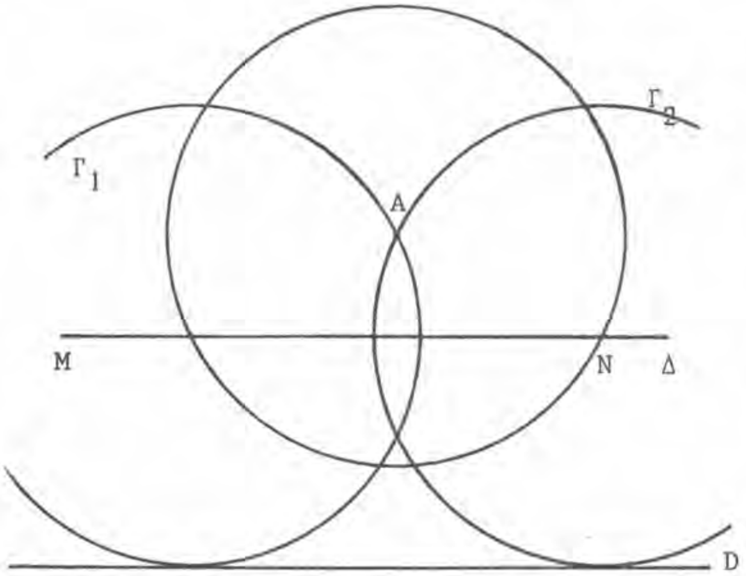


▶ Ex. 6.6 : Soit ABC un triangle rectangle en A. Construire un cercle tangent à BC, passant par A et dont le centre se trouve sur AC.

▶ Ex. 6.7 : Un segment AB de longueur constante se déplace de telle sorte qu'il reste toujours tangent en son extrémité A à un cercle donné. Quelle est la figure décrite par B ?

▶ Ex. 6.8 : Soit un cercle Γ. Quel est l'ensemble des points A tels que les tangentes menées de A au cercle fassent entre elles un angle donné ?

▶ Ex. 6.9 : Construire un cercle de rayon donné, tangent à une droite donnée, passant par un point donné.



Donnons à titre d'exemple la solution de cet exercice. Soient donc D la droite, A le point, R le rayon. Désignons par Γ le cercle cherché. Comme Γ passe par A, le centre de Γ est sur le cercle de centre A, de rayon R. Comme Γ est tangent à D, le centre de Γ est sur la parallèle Δ menée à la distance R de D, du même côté que A.

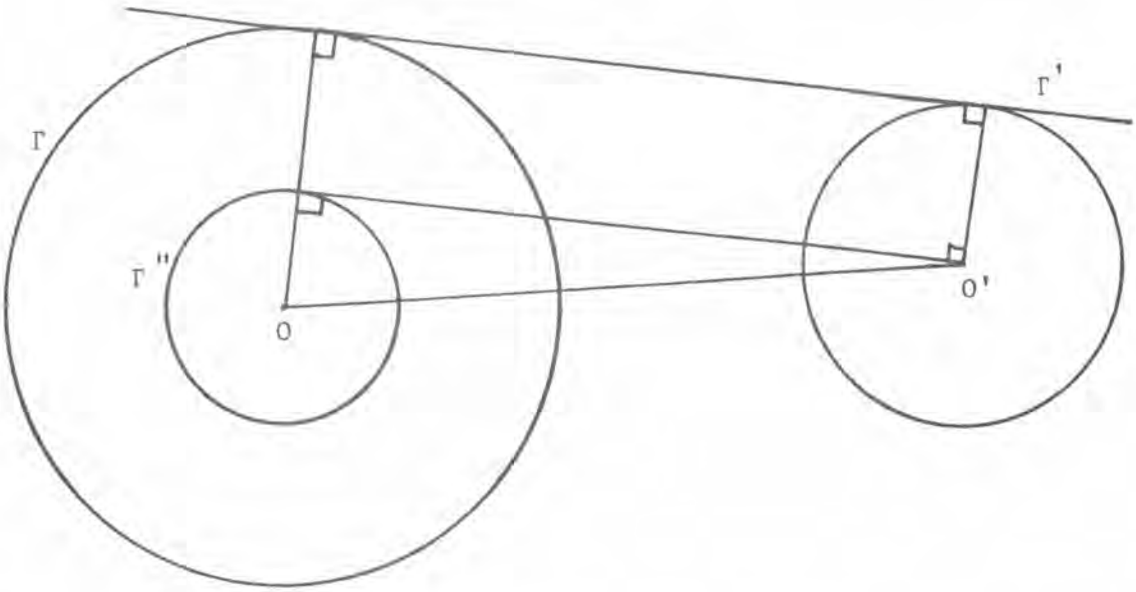
Il y a donc dans le cas de la figure, deux centres possibles M et N et donc deux cercles solutions. On laisse au lecteur le soin de la discussion dans le cas général.

▶ Ex. 6.10 : Construire un cercle de rayon donné, tangent à deux droites données.

▶ Ex. 6.11 : Construire un cercle qui passe par un point donné et qui soit tangent à une droite donnée en un point donné.

▶ Ex. 6.12 : Construire un cercle tangent à deux droites parallèles et passant par un point donné.

▶ Ex. 6.13 : (Tangentes communes à deux cercles). On considère deux cercles Γ de centre O, de rayon R et Γ' de centre O', de rayon R'. On suppose que $R > R'$ et que $R + R' < OO'$. Soit Γ'' le cercle de centre O, de rayon $R - R'$. En observant la figure, trouver un procédé de construction de deux tangentes communes aux deux cercles.



En considérant Γ''', cercle de centre O de rayon $R + R'$, trouver un procédé de construction de deux autres tangentes communes.

Dans cette situation, il y a quatre tangentes communes à Γ et Γ' et quatre seulement. Pourquoi ?

6.2 - *Position relative de deux cercles*

Remarquons d'abord que deux cercles ne peuvent avoir plus de deux points en commun (sinon ils en auraient au moins trois . Or par trois points il ne passe qu'un cercle).

On considère deux cercles $\mathscr{C}(O,R)$ et $\mathscr{C}(O',R')$, on suppose que $R > R'$. Cinq cas peuvent se produire :

1°) $OO' > R + R'$,

2°) $OO' = R + R'$,

3°) $R - R' < OO' < R + R'$,

4°) $OO' = R - R'$,

5°) $OO' < R - R'$.

Dans le premier cas, soit M un point de $\mathscr{C}(O',R')$. On a $OM + O'M \geq OO'$ donc $OM \geq OO' - O'M$ et par suite $OM > R$. Aucun point de $\mathscr{C}(O',R')$ n'est sur $\mathscr{C}(O,R)$, les cercles sont extérieurs l'un à l'autre.

On voit de même ce qui se passe dans les autres cas :

1°) Les deux cercles sont extérieurs l'un à l'autre.

2°) Les deux cercles ont un point en commun, ils sont tangents extérieurement.

3°) Les deux cercles ont deux points en commun.

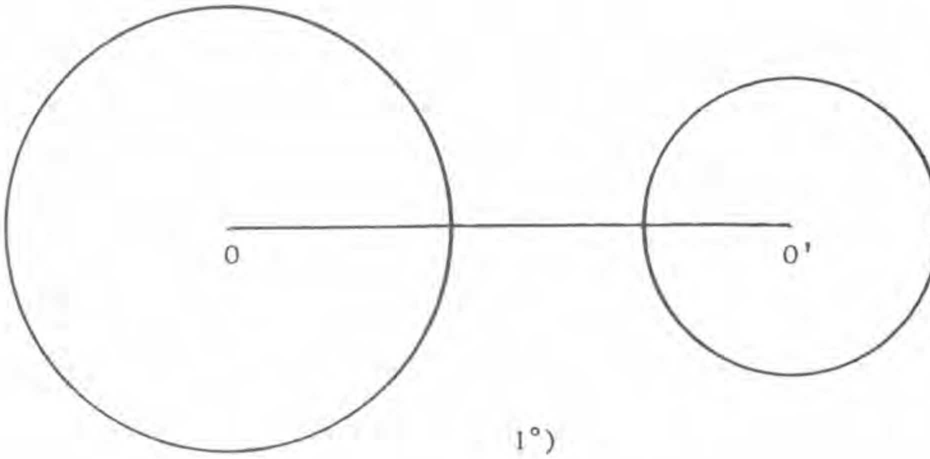
4°) Les deux cercles ont un point en commun, ils sont tangents intérieurement.

5°) Les deux cercles n'ont aucun point en commun. $\mathscr{C}(O',R')$ est intérieur à $\mathscr{C}(O,R)$.

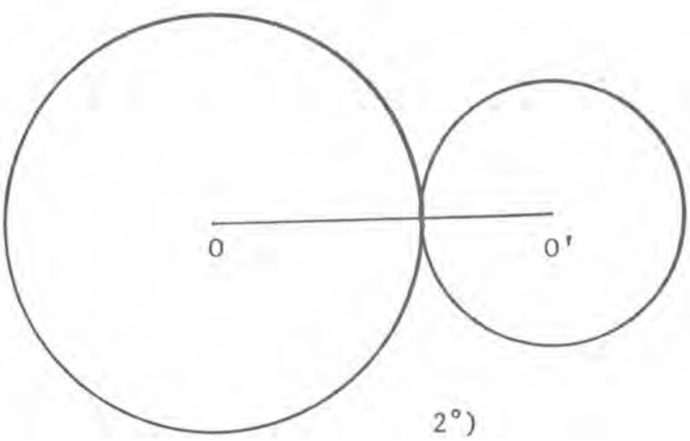
▶ *Ex. 6.14* : Que se passe-t-il lorsque $R = R'$?
Le segment (ou la droite) OO' s'appelle la ligne des centres. Dans le cas 3°), OO' est médiatrice du segment joignant les points d'intersection. Plus généralement, la ligne des centres est un axe de symétrie pour la figure. Dans le cas 2°) et 4°), les deux cercles ont une tangente commune en leur unique point de contact.

▶ *Ex. 6.15* : Combien les cercles ont-ils de tangentes communes dans chacun des cas précédents ?

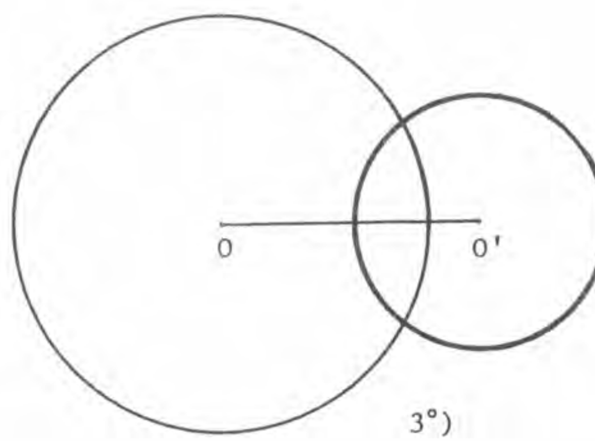
▶ *Ex. 6.16* : On se donne trois cercles de centre O_1, O_2 et O_3 et de même rayon R. Construire un cercle Γ qui soit tangent à ces trois cercles. (Il y a de nombreux cas de figures).



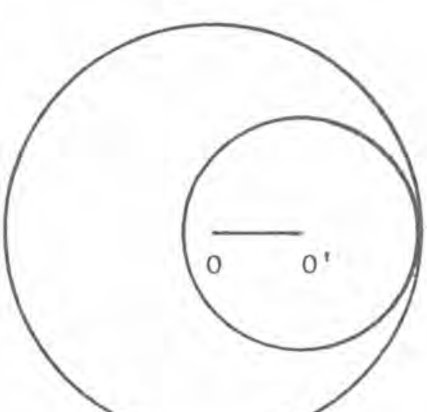
1°)



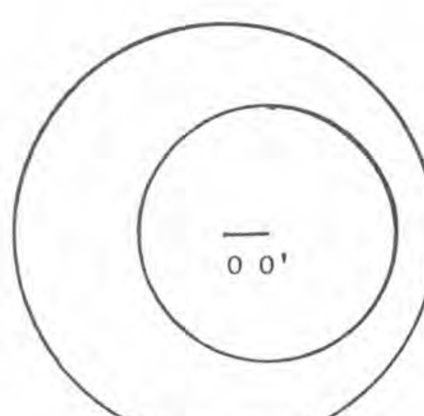
2°)



3°)



4°)



5°)

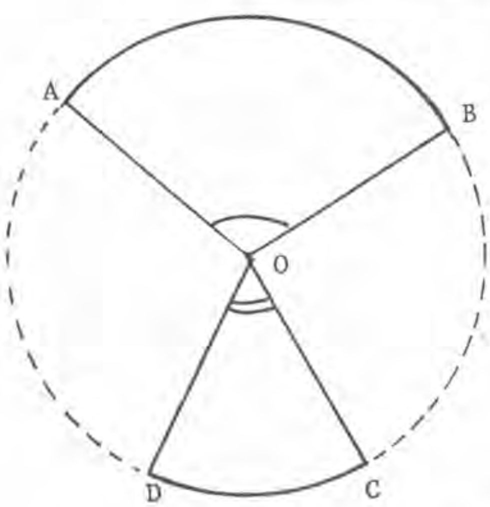
▶ Ex. 6.17 : Construire un cercle de rayon donné, passant par un point donné, tangent à un cercle donné. (Voir l'exercice 6.3. Ici la droite D est remplacée par un cercle concentrique - de même centre - au cercle donné et de rayon convenable).

▶ Ex. 6.18 : Construire un cercle de rayon donné, tangent à une droite donnée et à un cercle donné.

▶ Ex. 6.19 : Construire un cercle de rayon donné, tangent à deux cercles donnés.

6.3 - *Angles au centre. Angles inscrits*

6.3.1 - *Mesure d'un arc de cercle*



Soient A,B,C,D quatre points d'un cercle de centre O, de rayon R. Un angle tel que $\widehat{AOB}$ est un angle au centre dans le cercle $\mathscr{C}(O,R)$. Le rapport des mesures des angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ est égal au rapport des longueurs des arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{CD}$ interceptés par ces angles : on considèrera que ce résultat est évident. Donc, si on convient que l'unité d'arc, sur une circonférence donnée est l'arc intercepté par un angle unité (1 degré par exemple, un arc de cercle a pour mesure celle de l'angle au centre qui l'intercepte. Ceci justifie d'ailleurs l'usage du rapporteur (qui est un arc de cercle gradué) pour mesurer les angles.

▶ Ex. 6.20 : Un cercle de rayon R cm étant donné, quel est le rapport entre la mesure d'un arc de ce cercle exprimée en degrés et la mesure de cet arc exprimée en cm ?

▶ Ex. 6.21 : Sur deux cercles de rayons R et R' on prend deux arcs de x degrés. Quel est le rapport des longueurs de ces arcs ?

<u>*Remarque*</u> : Soit un cercle <u>de rayon 1</u> (sa longueur est donc 2π. Considérons sur ce cercle un arc $\overset{\frown}{AB}$ de longueur 1. Cet arc est sous-tendu par un angle $\widehat{AOB}$ dont la mesure est, par définition, un <u>radian</u>. Ainsi, avec cette unité, la longueur d'un arc de cercle de rayon 1 est égale à sa mesure angulaire. Un angle droit mesure $\frac{\pi}{2}$ radians, un angle plat π radians.

▶ <u>*Ex. 6.22*</u> : Sur un cercle de rayon R, quelle est la longueur d'un arc de x radians ?

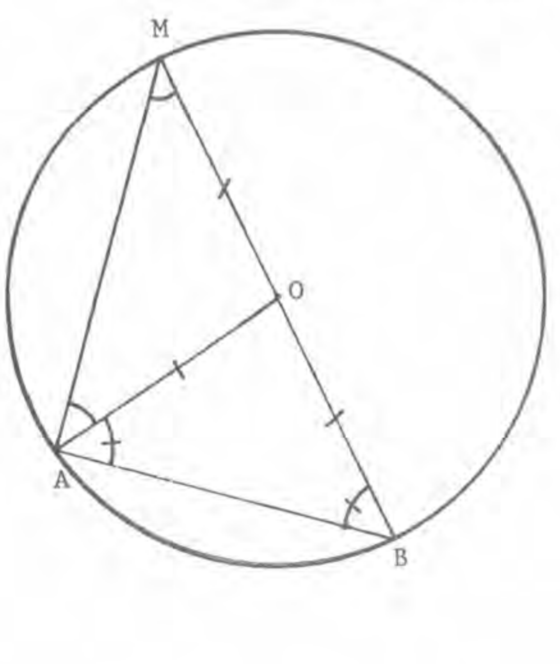
6.3.2 - <u>*Angles inscrits*</u>

Soient A et B deux points d'un cercle $\mathcal{C}(O,R)$. On a vu que $\widehat{AOB}$ est l'angle au centre qui intercepte l'arc $\overset{\frown}{AB}$. Si M est un point du cercle, $\widehat{AMB}$ est un <u>angle inscrit</u> dans $\mathcal{C}(O,R)$.

<u>*Théorème 6.3*</u> -

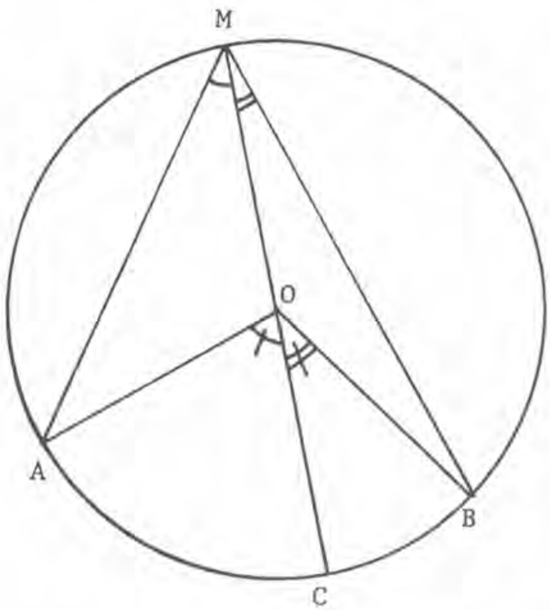
La mesure de l'angle inscrit $\widehat{AMB}$ est égale à la moitié de celle de l'angle au centre $\widehat{AOB}$ (donc à la moitié de celle de l'arc $\overset{\frown}{AB}$, à condition de choisir le bon).

Nous supposons que M est sur le plus grand des deux arcs AB, c'est à dire que l'angle au centre correspondant est saillant. Ce résultat se démontre de même dans l'autre cas en considérant l'angle au centre rentrant.



<u>1er cas</u> : la corde MB est un diamètre. Le triangle MAB est rectangle en A.
On a : $\widehat{OMA} = \widehat{MAO}$
et : $\widehat{OBA} = \widehat{OAB}$.
Par ailleurs $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OAM}$ sont complémentaires.

En écrivant que la somme des angles de OAB est 180°, on trouve le résultat cherché.



<u>2ème cas</u> : O est à l'intérieur du triangle AMB. On construit alors MO qui recoupe le cercle en C et on applique le cas précédent aux angles $\widehat{AMC} = \frac{\overset{\frown}{AOC}}{2}$ et $\widehat{CMB} = \frac{\overset{\frown}{COB}}{2}$.

<u>3ème cas</u> : Laissé au lecteur.

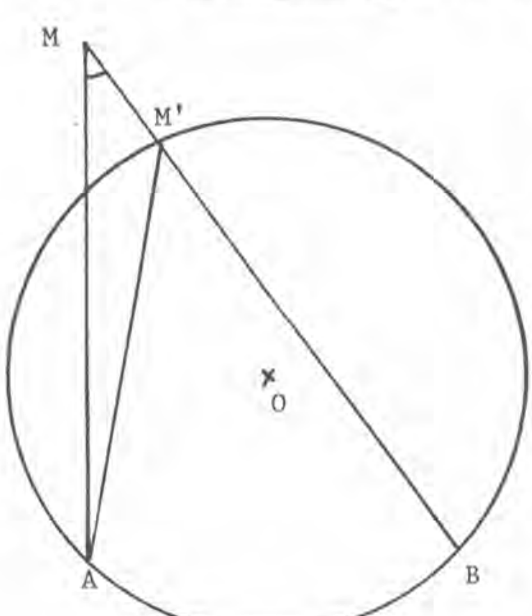
Si M est sur l'un des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et N sur l'autre on voit facilement que $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ <u>sont supplémentaires</u>.

<u>Théorème 6.4</u> -

Soient A et B deux points du cercle $\mathscr{C}$(O,R). Soit M un point se trouvant du même côté que O de la droite AB.

- Si M est extérieur au cercle, $\widehat{AMB} < \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$,
- Si M est sur le cercle, $\widehat{AMB} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$,
- Si M est à l'intérieur du cercle, $\widehat{AMB} > \frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$.

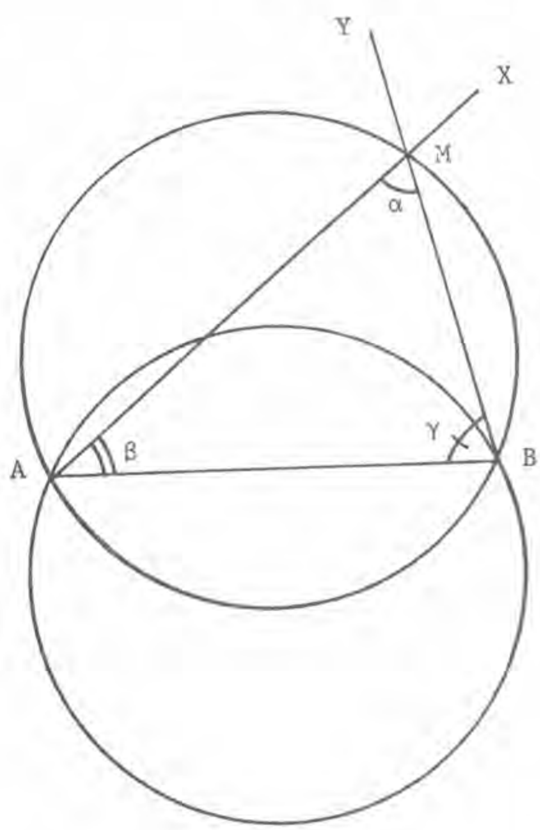
<u>Démonstration</u> : On considère le second point d'intersection M' de la droite MB avec le cercle $\mathscr{C}$(O,R) et on compare l'angle $\widehat{AMB}$ avec l'angle $\widehat{AM'B}$ qui est de même mesure que $\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$



▶ *Ex. 6.23* : Formulez un résultat complet en ne vous restreignant pas au demi-plan contenant O.

Théorème 6.5 - (De l'arc capable)

Soient deux points A et B. L'ensemble des points M tels que $\widehat{AMB}$ soit égal à un angle donné α (inférieur ou égal à 180°) est la réunion de 2 arcs de cercle, symétriques l'un de l'autre par rapport à AB.



Démonstration : On construit un point M tel que $\widehat{AMB} = \alpha$

(*Méthode* : Prendre deux angles β et γ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Puis construire $\widehat{BAX} = \beta$, $\widehat{ABY} = \gamma$. Les droites AX et BY se coupent en M cherché). On construit le cercle circonscrit à AMB.

Il résulte du théorème précédent que l'arc $\widehat{AMB}$ et son symétrique par rapport à AB constituent l'ensemble cherché.

L'arc $\widehat{AMB}$ (ou son symétrique) est l'arc capable de l'angle α sur le segment AB.

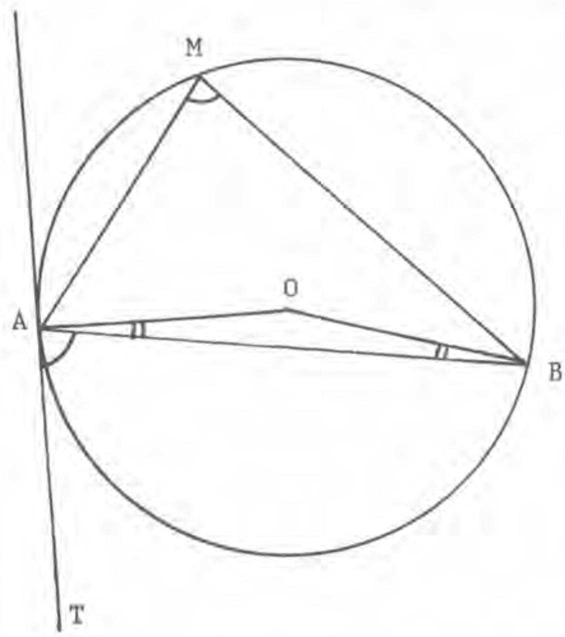
▶ *Ex. 6.24* : Soient A et B deux points d'un cercle $\mathscr{C}$ (O,R), M un point quelconque. Les droites AM et BM coupent $\mathscr{C}$ (O,R) en A' et B'. Evaluez l'angle $\widehat{AMB}$ en fonction des arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{A'B'}$ (deux cas selon que M est intérieur ou extérieur au cercle).

Soient A et B deux points d'un cercle. On considère la tangente AT au cercle passant par le point A. L'angle $\widehat{TAB}$ est égal à la moitié de l'arc $\widehat{AB}$. On peut montrer ce résultat de deux manières :

1) $\widehat{TAB}$ est le complémentaire de $\widehat{OAB}$, OAB est isocèle.

2) AT est la position limite de MA quand M se rapproche de A. Pour toute position de M on a $\widehat{AMB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$.

Le lecteur pourra fignoler ces deux démonstrations.



▶ Ex. 6.25 : Soit une corde AB d'un cercle de centre O. On divise AB en trois parties égales, AC, CD et DB. Quel est le plus grand des angles au centre $\widehat{AOC}$, $\widehat{COD}$ et $\widehat{DOB}$?

▶ Ex. 6.26 : On se donne un cercle et un point A. Par A on mène une sécante au cercle qui le coupe en M et N. Quelle est la plus petite de ces sécantes MN (discuter selon la position de A).

▶ Ex. 6.27 : Construire un triangle dont on connaît deux côtés et le rayon du cercle inscrit.

▶ Ex. 6.28 : On se donne un cercle de centre O, un diamètre fixe AB de ce cercle. Sur chaque rayon OM du cercle on prend un point N tel que ON soit égal à la distance de M à AB. Quel est l'ensemble des points N quand M décrit le cercle ?

▶ Ex. 6.29 : On considère un cercle passant par deux points A et B. A tout point M du cercle on associe l'orthocentre H et le centre I du cercle inscrit au triangle MAB. Quels sont les ensembles décrits par H et I quand M se déplace ? (Calculer les angles $\widehat{AHB}$ et $\widehat{AIB}$ en fonction de l'angle $\widehat{AMB}$). Que peut-on dire du segment MH quand M se déplace ?

6.3.3 - *Quadrilatères inscriptibles.*

Par quatre points A,B,C et D on ne peut en général faire passer un cercle (pourquoi ?). C'est toujours impossible si le quadrilatère A B C D est concave (pourquoi ?).

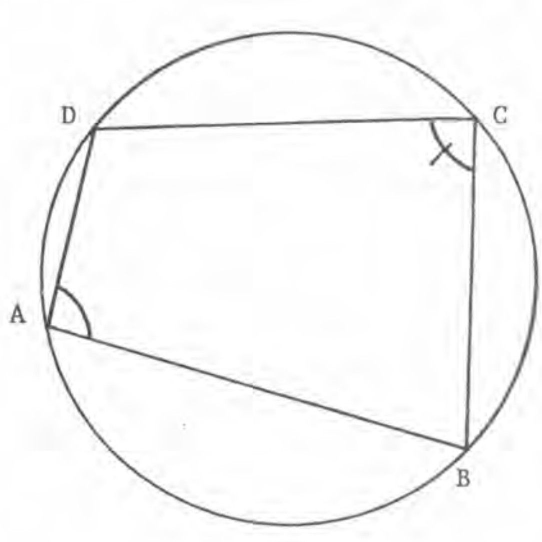
Nous cherchons des conditions pour que les quatre points A,B,C,D soient sur un même cercle (ils sont alors cocycliques, on dit aussi que le quadrilatère A B C D est inscriptible).

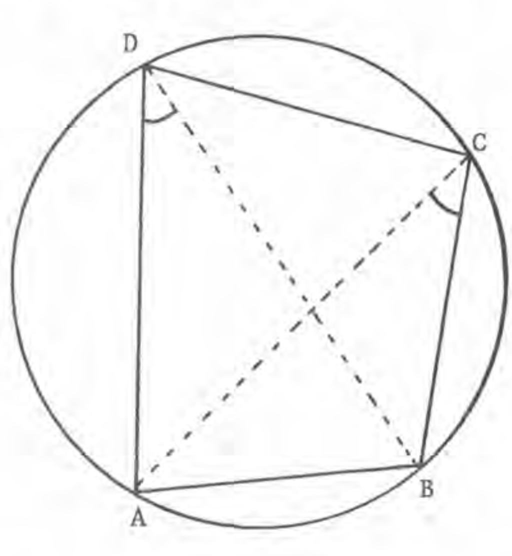
Théorème 6.6 -

Un quadrilatère est inscriptible si et seulement si il a deux angles opposés supplémentaires.

Un quadrilatère est inscriptible si et seulement si les angles formés par deux côtés opposés et les deux diagonales sont égaux.

[Ce résultat est formulé pour des quadrilatères convexes. On laisse au lecteur le soin d'examiner ce qui se passe pour des quadrilatères croisés]



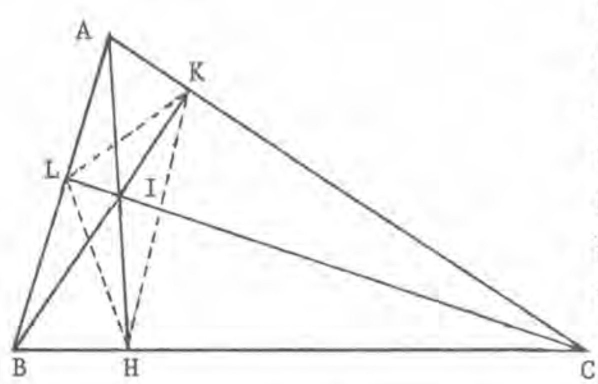


Une fois de plus la démonstration est laissée au lecteur. Elle est une conséquence immédiate du théorème 6.3 et de la remarque qui le suit ainsi que du théorème 6.5.

Les angles formés par deux côtés opposés et les diagonales (les angles $\widehat{ADB}$ et $\widehat{ACB}$ de la figure sont appelés angles en bonnet d'âne (pour une raison évidente). Si les angles d'un même bonnet sont égaux, les angles de chacun des quatre bonnets le sont aussi, car le théorème 6.6 donne une condition nécessaire et suffisante.

Cas particulier : Si un quadrilatère A B C D a deux angles opposés qui sont droits, il est inscriptible. Cela résulte aussi bien du théorème précédent que du théorème 4.2.

▶ Ex. 6.30 : 1) Soient AH, BK, CL les hauteurs du triangle ABC. On désigne par I l'orthocentre. Montrez que B L I H et L I K A sont des quadrilatères inscriptibles.
En déduire que LC est la bissectrice de HLK (c'est à dire que $\widehat{BLH} = \widehat{ALK}$).

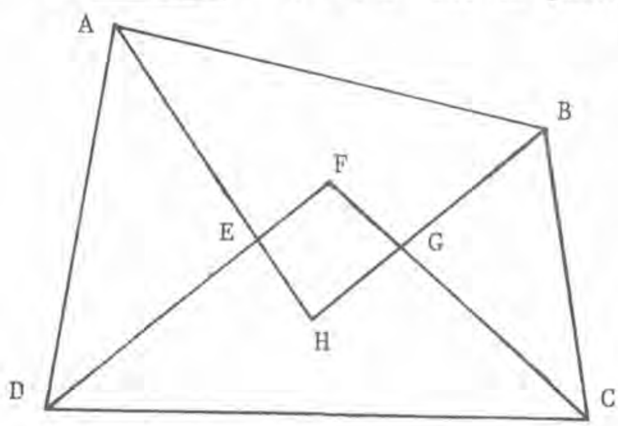


2) Ce dessin représente le plan d'une salle triangulaire ABC aux murs constitués de miroirs verticaux. Vous marchez sur l'un des côtés (disons LK) du triangle LKH en regardant droit devant vous. Montrez que vous vous voyez de dos, marchant devant vous.

3) Votre reflet a-t-il l'obligeance de marcher au pas avec vous ? Quand vous allez de L vers K, votre reflet semble-t-il s'éloigner ou se rapprocher de vous ?

<u>*Remarque*</u> : Le triangle LHK de l'exercice ci-dessus possède une propriété remarquable : si L' est un point de AB, K' un point de AC, H' un point de BC, le triangle L'K'H' a un périmètre supérieur à celui du triangle LKH, les périmètres n'étant égaux que si L' = L, K' = K, H' = H.

▶ <u>*Ex. 6.31*</u> : A B C D est un quadrilatère (convexe). Les bissectrices de ses angles se coupent en E,F,G,H (voir figure).

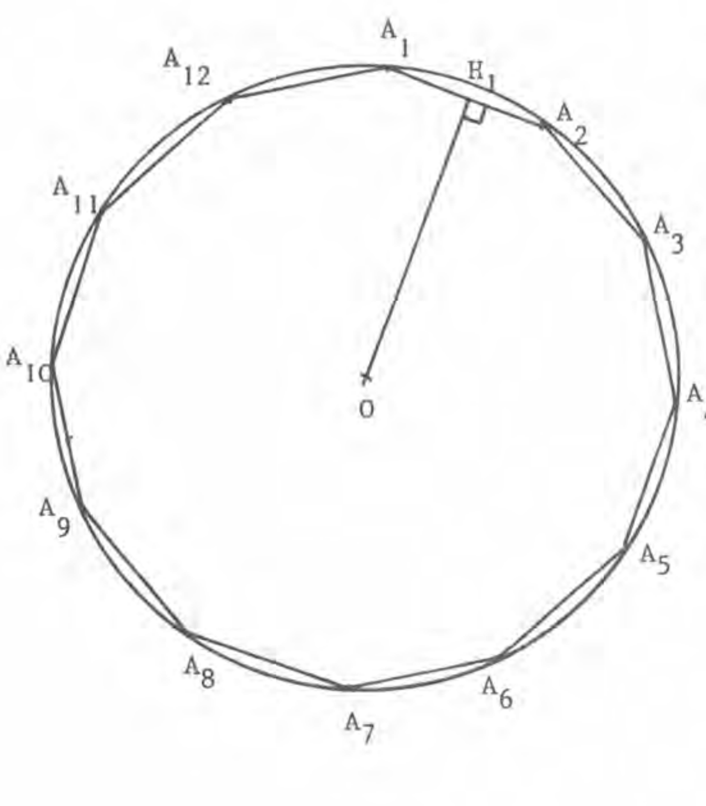


- Calculer $\widehat{DFC}$ en fonction de $\widehat{D}$ et $\widehat{C}$ et $\widehat{AHB}$ en fonction de $\widehat{A}$ et $\widehat{B}$.
- Montrer que le quadrilatère E F G H est inscriptible.

6.4 - *Polygones réguliers*

6.4.1 - *Définitions*

Divisons en n parties égales un cercle par des points $A_1, A_2, \dots, A_n$ pris dans cet ordre. La ligne brisée $A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n A_1$ est un <u>polygone régulier à</u> n <u>côtés</u> de sommets $A_1, A_2 \dots A_n$.



A_1A_2, A_2A_3, ... sont les côtés du polygone.

$\widehat{A_1 A_2 A_3}$, $\widehat{A_2 A_3 A_4}$ .... sont les angles du polygone.

D'après cette définition les côtés d'un polygone sont égaux. Il en est de même pour les angles.

Chaque angle intercepte un arc qui est réunion de (n-2) arcs égaux sous tendus par (n-2) cordes égales. Ces angles sont d'ailleurs faciles à calculer, leur valeur commune est $\frac{n-2}{n} \times 180$ degrés.

Les angles tels $\widehat{A_1 O A_2}$ ont pour mesure $\frac{360}{n}$ degrés : ceci donne une méthode pour construire un polygone régulier de n côtés avec un rapporteur ; méthode approximative en général, puisque $\frac{360}{n}$ ne correspond que rarement à un trait de la graduation de l'instrument.

La hauteur OH_1 du triangle A_1OA_2 est une <u>apothème</u> du polygone. C'est aussi la médiatrice de $A_1 A_2$.

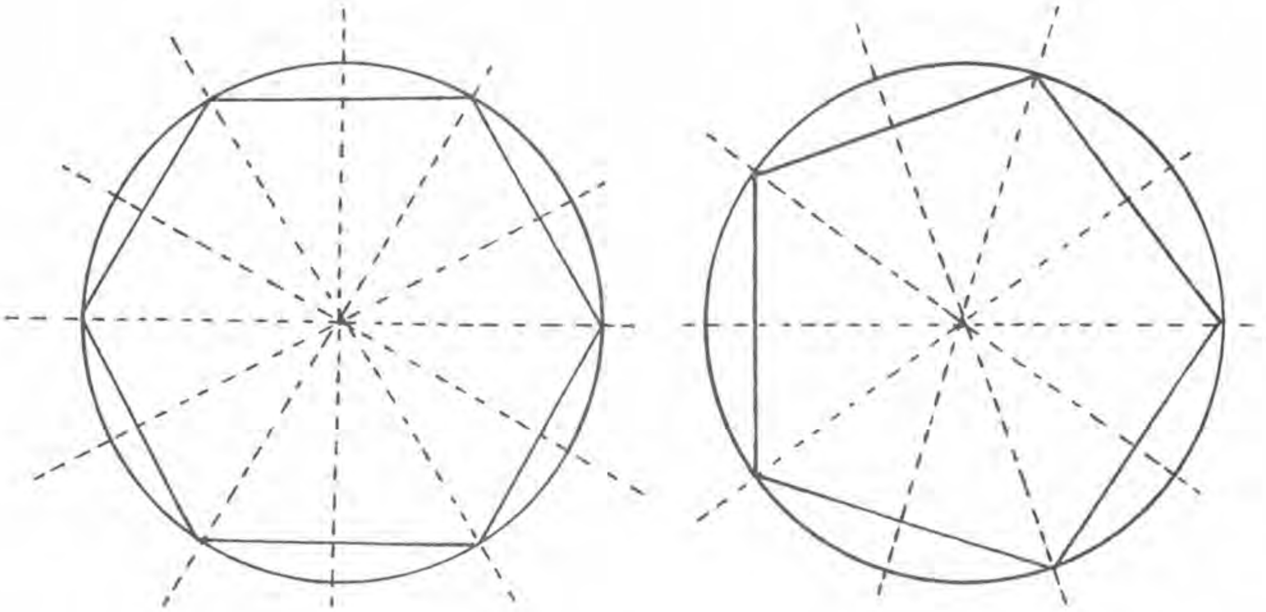
▶ <u>*Ex. 6.32*</u> : On se donne une ligne brisée fermée $A_1 A_2 \ldots A_n A_1$ et on suppose que tous les segments $A_i A_{i+1}$ sont égaux (y compris $A_n A_1$) ainsi que tous les angles $\widehat{A_{i-1} A_i A_{i+1}}$ Montrer que cette figure est un polygone régulier, c'est à dire que les points A_i sont sur un même cercle.

Rappelons que les polygones ayant peu de côtés ont reçu un nom : triangle et quadrilatère bien sûr ; mais aussi pentagone (cinq côtés), hexagone (six), heptagone (sept), octogone (huit), décagone (dix), dodécagone (douze). On précise éventuellement s'ils sont réguliers. Dans la suite nous avons en général omis cet adjectif bien que les polygones considérés soient réguliers.

▶ <u>*Ex. 6.33*</u> : Un polygone régulier à n côtés admet n axes de symétrie :

- dans le cas où n est pair, ces axes sont les $\frac{n}{2}$ bissectrices communes des angles opposés et les $\frac{n}{2}$ médiatrices communes des côtés opposés.
- dans le cas où n est impair, ces axes sont les n médiatrices des côtés qui se confondent avec les bissectrices des angles.

(voir figures page suivante)

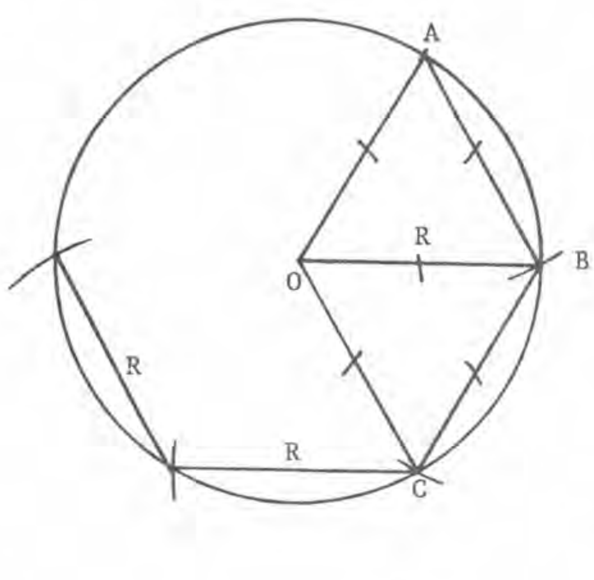


- Un polygone à n côtés admet un centre de symétrie si et seulement si n est pair.
- Soit O le centre du cercle dans lequel est inscrit un polygone régulier à n côtés. Par rotation d'un angle multiple de $\frac{360}{n}$ degrés, le polygone se superpose à lui-même.

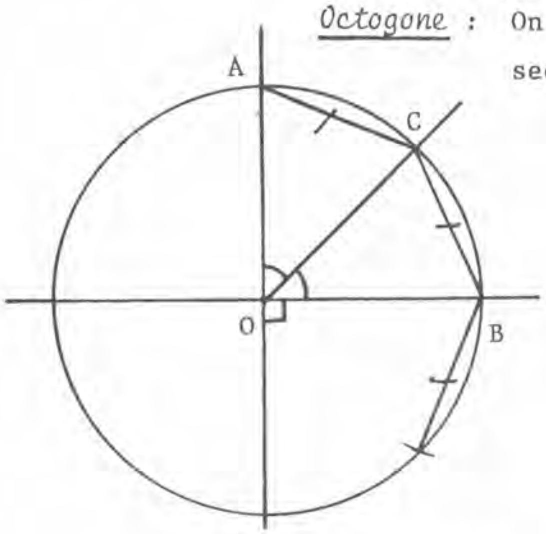
6.4.2 - *Quelques constructions*

On sait déjà construire un triangle équilatéral ou un carré.

Hexagone : Soient A, B et C trois sommets consécutifs d'un hexagone inscrit dans un cercle de centre O. L'angle $\widehat{ABC}$ est égal à 120° (Cf. 6.4.1), donc l'angle $\widehat{ABO}$ mesure 60°. Le triangle isocèle AOB est donc équilatéral et AB est égal au rayon du cercle.



Pour construire un hexagone dans un cercle de rayon R il suffit de construire bout à bout six cordes de longueur R, c'est à dire de reporter au compas cinq fois le rayon du cercle.

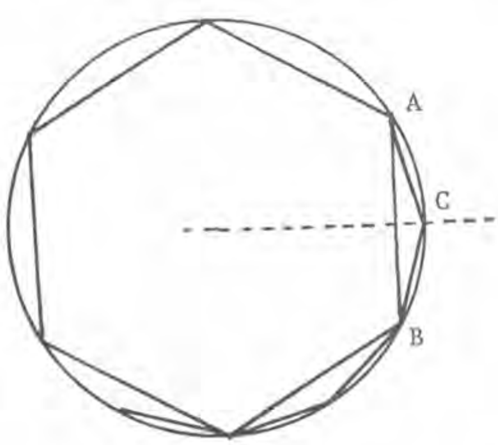


Octogone : On construit un angle droit AOB, puis sa bissectrice OC.

AC est le côté de l'octogone.

Ex. 6.34 : Justifier cette construction.

Dodécagone : On construit un hexagone inscrit dans un cercle de centre O, puis la médiatrice d'un de ses côtés. Elle définit une corde qui est le côté du dodécagone (AC sur la figure). On fait ensuite les reports nécessaires.

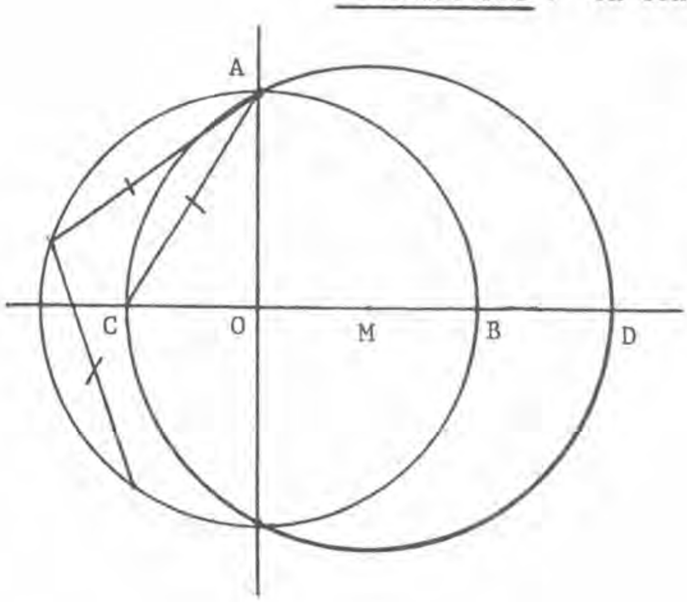


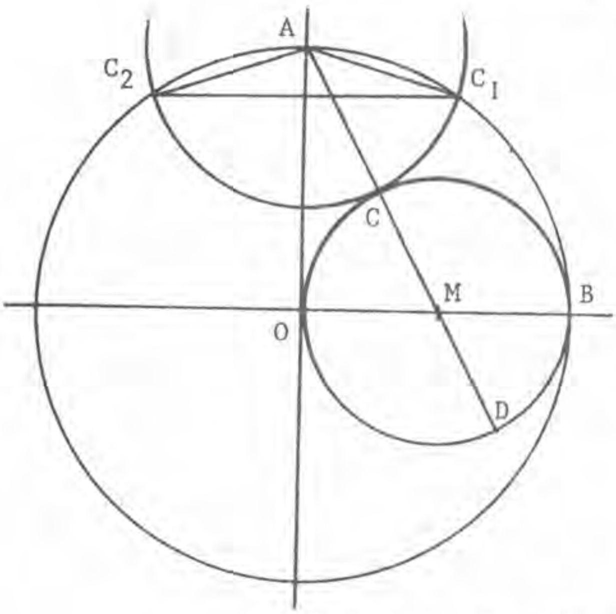
Remarque : Si on sait construire un polygone régulier à n côtés, on sait construire un polygone régulier à 2n côtés : il suffit de prendre les médiatrices des côtés. C'est ce qu'on a fait pour le dodécagone et - de manière un peu cachée - pour l'octogone (pourquoi ?)

Pentagone et décagone

1ère méthode : On construit OA et OB perpendiculaires. Soit M le milieu de OB. On construit le cercle de centre M, de rayon MA qui coupe la droite OB en C et D.

AC est la côté du pentagone régulier et OC celui du décagone régulier inscrits dans le cercle donné.





2ème méthode : O, A, B, M sont comme ci-dessus. On construit alors le cercle de centre M, de rayon MO (il est donc tangent à AO en O et au cercle initial en B). La droite AM coupe ce petit cercle en C et D: AC est égal au côté du décagone. On a donc AC_1 et AC_2, côtés du décagone, C_1C_2 est le côté du pentagone.

On verra plus bas les rôles joués par les points D qui apparaissent dans ces deux dessins.

Heptagone : On sait montrer qu'il n'est pas possible de construire un heptagone avec seulement une règle et un compas. On sait d'ailleurs montrer que pour qu'un polygone à n côtés où n est premier soit constructible à la règle et au compas il faut et il suffit que n soit un nombre premier de Fermat, c'est à dire de la forme $2^{2^r} + 1$ (cf. Tome I, paragraphe 1.3)

▶ *Ex. 6.35* : On veut recouvrir le plan avec des polygones réguliers, tous égaux. Montrer que cela n'est possible que si ces polygones sont des triangles équilatéraux, des carrés ou des hexagones.

▶ *Ex. 6.36* : On considère un triangle ABC, rectangle en A tel que AB soit le côté du décagone inscrit dans un cercle Γ, AC soit le côté de l'hexagone inscrit dans Γ. Montrer que BC est le côté du pentagone inscrit dans Γ.

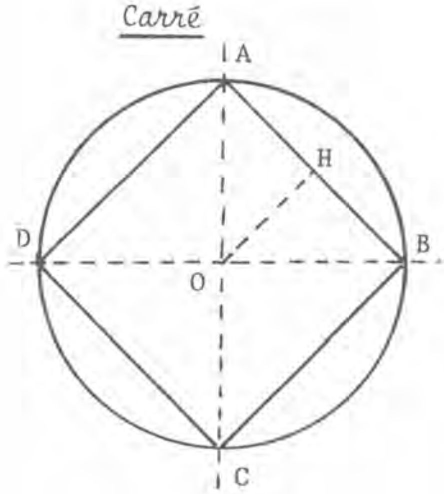
▶ *Ex. 6.37* : Sur les côtés d'un hexagone régulier, extérieurement à cet hexagone, on construit six carrés. Les douze sommets extérieurs de ces carrés sont les sommets d'un dodécagone régulier.

6.4.3 - *Quelques calculs*

Un polygone régulier à n côtés étant inscrit dans un cercle de rayon R, quelle est en fonction de R, la mesure du côté (ou de l'apothème) de ce polygone. C'est une question à laquelle on peut répondre en utilisant les relations métriques dans le triangle (Cf. paragraphe II.3.2). Donnons quelques exemples.

On s'est donné une fois pour toutes un cercle de rayon R, de centre O dans lequel sont inscrits les polygones que l'on étudie. Appelons c_n et a_n le côté et l'apothème du polygone régulier à n côtés.

Carré



$c_4 = AB = R\sqrt{2}$

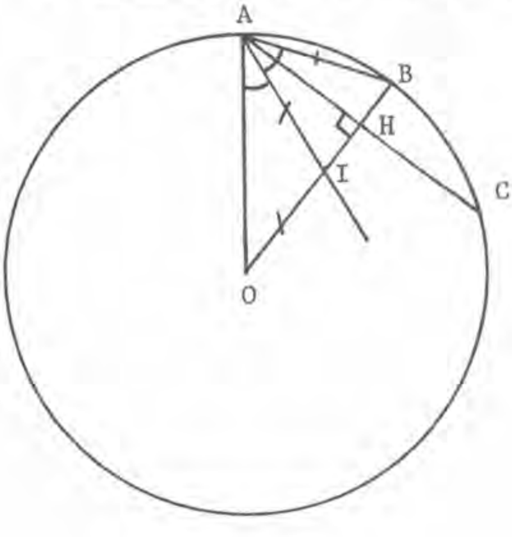
$a_4 = OH = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

Hexagone : On a déjà vu que $c_6 = R$. Le lecteur vérifiera que $a_6 = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.

Pentagone et décagone :

▶ *Ex. 6.38* : AB est un côté d'un décagone régulier. AI est la bissectrice de $\widehat{OAB}$. Déterminer les angles $\widehat{OAI}$, $\widehat{AOI}$, $\widehat{AIB}$ et $\widehat{ABI}$. Montrer que $AB = AI = IO$. En utilisant l'exercice II. 1.3 montrer que $OI^2 = OB.IB$. En déduire que $c_{10} = R\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ et

$$a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$



▶ *Ex. 6.39* : AH est la hauteur issue de A dans le triangle ABO. AC est le côté du pentagone régulier. On a AC = 2 AH. Calculer BH grâce à la formule de Pythagore dans le triangle quelconque. (Cf. paragraphe II.3.2) puis montrer que :

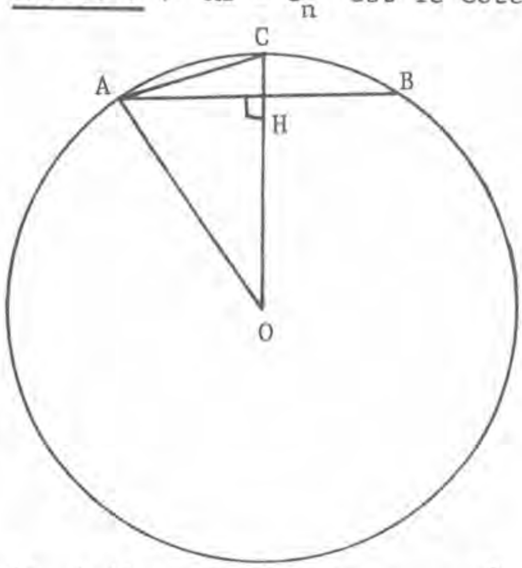
$$c_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad a_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$$

Calcul de π. On a vu (Tome I, Ex. 4.16) un calcul de π par la méthode des isopérimètres. De manière analogue on a une méthode des périmètres : l'idée de départ est que le périmètre d'un polygone à n côtés devient très voisin de la longueur du cercle dans lequel il est inscrit pour peu que n soit grand. Or ce périmètre est $n \times c_n$, la longueur du cercle est $2\pi R$, donc π est voisin de $\frac{nc_n}{2}$ (plus précisément, la suite $\frac{nc_n}{2}$ tend vers π).

Or il est facile de calculer c_{2n} connaissant c_n comme le montre l'exercice suivant :

▶ *Ex. 6.40* : $AB = c_n$ est le côté du polygone inscrit à n côtés dans un cercle de rayon 1. Soit H le milieu de AB, C le point d'intersection de OH avec le cercle (ainsi $AC = c_{2n}$).
Montrer que :

$$c_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - c_n^2}} \; .$$



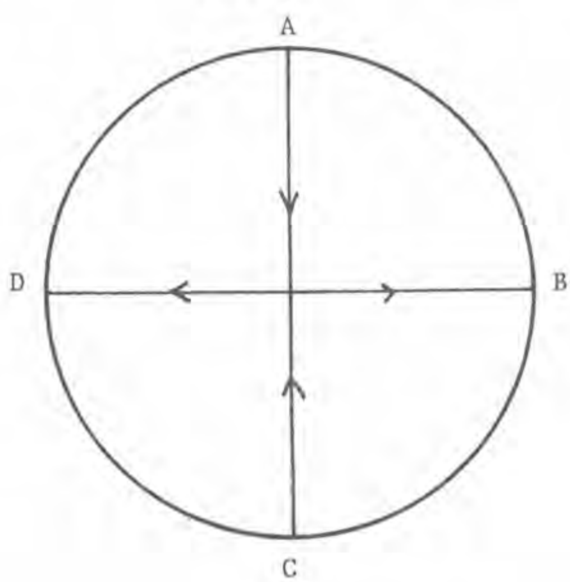
▶ *Ex. 6.41* : Partant de $c_4 = \sqrt{2}$, montrer que $c_8 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}$,

$$c_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad c_{32} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}, \text{ et en}$$

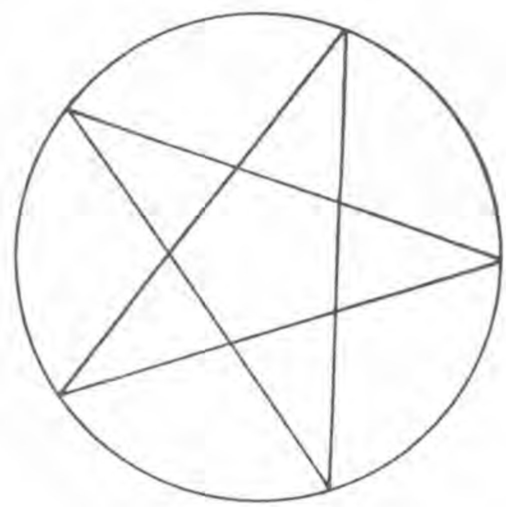
déduire que $\pi = \lim \left(2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots\ldots + \sqrt{2}}}} \right)$, formule où le signe $\sqrt{\ }$ intervient n fois. Essayer avec une calculette d'approcher π par cette formule. Que se passe-t-il ? Pourquoi ?

6.4.4 - *Quelques étoiles*

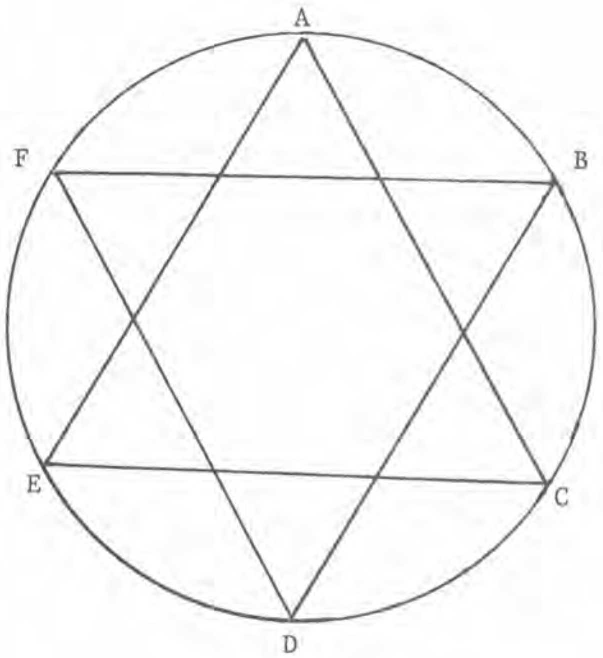
Nous n'avons jusqu'ici envisagé que des polygones réguliers convexes : on les a construits en divisant en n parties égales un cercle, puis en joignant les points obtenus, chacun au suivant. On peut aussi joindre les points de 2 en 2, de 3 en 3, ... de p en p : avec un peu de chance on arrivera ainsi à dessiner une étoile.

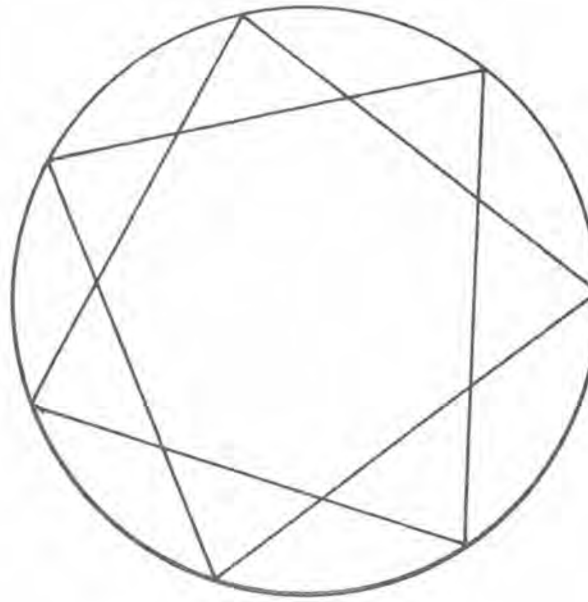


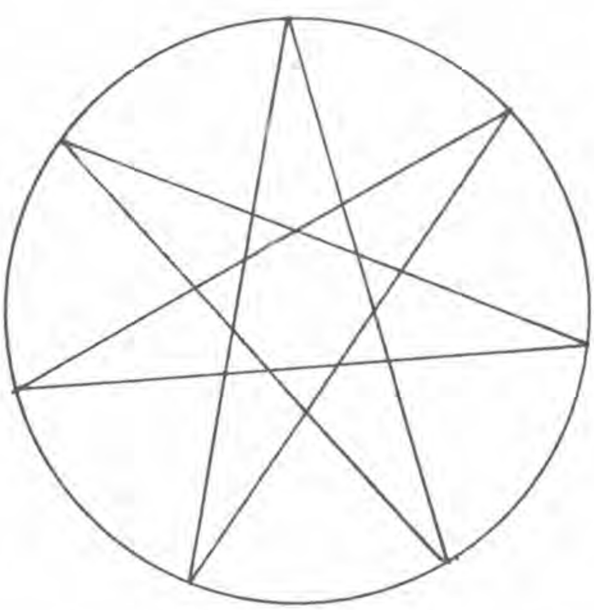
Voilà pourquoi on ne voit jamais d'étoile à quatre branches.



Une étoile à cinq branches obtenue en joignant de 2 en 2 (ou de 3 en 3) les sommets d'un pentagone.







Une étoile (?) à 6 branches et deux étoiles à 7 branches obtenues en joignant les sommets d'un heptagone de 2 en 2 ou de 3 en 3.

L'étoile à 6 branches n'est pas un polygone : ce n'est pas une ligne brisée fermée, mais deux lignes brisées fermées qui se chevauchent : la ligne A C E A et la ligne B D F B. Quand nous parlons de polygone étoilé, nous refusons ce type d'étoile.

<u>*Remarque*</u> : Dans la première méthode de construction du pentagone, AD est égal au côté de l'étoile à cinq branches, OD celle de l'étoile à 10 branches obtenue en joignant de 3 en 3 les sommets d'un décagone. Dans la 2ème méthode, c'est AD qui est le côté de l'étoile à 10 branches.

▶ <u>*Ex. 6.42*</u> : On veut dessiner un polygone étoilé à n branches obtenues en joignant de p en p les sommets d'un polygone régulier de n côtés. Vérifier que cela est possible pour

$n = 8$, $p = 3$; $n = 9$, $p = 2$ ou $p = 4$;

$n = 10$; $p = 3$; $n = 11$, $p = 2$, 3 , 4 ou 5 ; ....

Remarquer que $n = 8$, $p = 5$ est le même que $n = 8$, $p = 3$.

Comment se généralise cette remarque ?

▶ Ex. 6.43 : Quel lien doit exister entre n et p pour qu'il existe une étoile à n branches obtenue en joignant de p en p les sommets d'un polygone à n côtés ? Quand se produit-il un phénomène analogue à celui de l'étoile à 6 branches ?

Réponse à la première question : n et p doivent être sans diviseurs communs.

VII - REMARQUE EN GUISE DE CONCLUSION

Le lecteur, s'il n'est pas trop âgé, s'il a un peu appris dans l'enseignement secondaire et pas tout oublié, a constaté que ce document ne fait pas la part trop belle aux isométries, transformations orthogonales et autres déplacements.

Nous avons introduit une seule transformation géométrique à savoir la symétrie axiale et avons au passage évoqué la symétrie centrale (5.2), la translation (Ex. 5.12 et 5.13) et rencontré le mot rotation (6.4.1).

Nous avons par ailleurs travaillé avec du papier calque. Or cela permet de rendre compte des transformations de la géométrie élémentaire. Soit, par exemple, à transporter un triangle ABC sur un triangle A'B'C'. On commence par calquer et on est conduit à faire 0, 1, 2 ou 3 des manipulations suivantes :

- Faire glisser le calque sans le tourner ni le retourner pour transporter A sur A'.
- Faire tourner le calque autour de A' pour transporter B sur B'.
- Retourner le calque autour de la droite A'B' pour transporter C en C'.

Notons que la première manipulation disparaît si A est en A', la seconde si AB et A'B' sont parallèles, la troisième si ABC et A'B'C' sont "directement" égaux.

▶ Ex. 7.1 :
- Peut-on choisir un point autre que A, B ou C pour définir ces manipulations ?
- Peut-on modifier l'ordre de ces manipulations ?

Ces trois manipulations correspondent aux trois transformations de base de la géométrie dite euclidienne : la première est une translation, la seconde une rotation, la troisième une symétrie axiale. Rappelons qu'une rotation de centre O et d'angle α est la transformation qui applique le point M sur le point M' tel que OM = OM' et tel que l'angle orienté $\widehat{MOM'}$ est égal à α (tourner de 45° vers la gauche n'est pas pareil que tourner de 45° vers la droite). On peut retrouver cette rotation de centre O et d'angle α en faisant successivement deux symétries axiales définies par une droite passant par O et faisant entre elles l'angle $\frac{\alpha}{2}$.

▶ Ex. 7.2 : Vérifier cette assertion. Que se passe-t-il si on modifie l'ordre de ces deux symétries.

On constate ainsi que les symétries axiales "engendrent" les transformations de base de la géométrie élémentaire (voir aussi Ex. 5.13). C'est pourquoi nous avons écrit plus haut que la géométrie de l'égalité est aussi la géométrie de la symétrie axiale.

▶ Ex. 7.3 : Montrer que si deux triangles ABC et A'B'C' sont égaux, il existe au plus trois droites telles qu'on passe de ABC à A'B'C' en faisant successivement les symétries par rapport à ces droites.

Géométrie de la Proportion

Rappels sur le vocabulaire de la proportionnnalité

- Deux listes de nombres $(a_1, a_2, \dots a_n)$ et $(b_1, b_2 \dots b_n)$ sont dites proportionnelles quand il existe un réel k tel que :

  $b_1 = k\,a_1$, $b_2 = ka_2$, ... $b_n = k\,a_n$, ou, ce qui revient au même, si l'on a les égalités de rapports suivantes :

  $$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \dots\dots \frac{b_n}{a_n}$$

- Ceci étant, on dit que 4 nombres a, b, c, d (pris dans cet ordre) forment une proportion pour exprimer que les listes (a,c) et (b,d) sont proportionnelles. On a alors : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

  b et c sont appelés termes moyens de la proportion.

  a et d " " extrêmes "

▶ *Ex. 01* : a, b, c, d formant une proportion, quelles sont les autres proportions que l'on peut écrire à partir de ces nombres.

- On appelle quatrième proportionnelle à 3 nombres a, b, c, le nombre x tel que a, b, c, x forment une proportion.

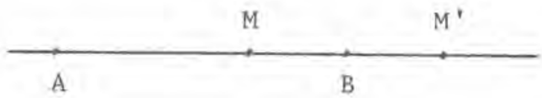
  Ce nombre est déterminé par : $\frac{b}{a} = \frac{x}{c}$

- Rappelons que la moyenne arithmétique de deux nombres a et b est leur demi-somme $\frac{a+b}{2}$, c'est à dire le nombre x dont l'écart avec a est le même que celui de b à x.

  Dans le contexte multiplicatif qui nous intéresse, on appelle moyenne proportionnelle de 2 nombres a et b ou moyenne géométrique de a et de b le nombre x tel que a, x, x, b forment une proportion. x est tel que $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$, soit, si l'on reste dans les nombres positifs : $x = \sqrt{ab}$.

▶ Ex. 02 : Montrer que la notion de moyenne géométrique de deux nombres ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les énumère.

• En géométrie, quand on parlera de proportionnalité au sujet de segments, il s'agira bien sûr de proportionnalité des nombres qui mesurent ces segments. Mais il s'introduit ici un vocabulaire spécifique : soient A et B deux points d'une droite :



on dit qu'un point M situé entre A et B divise intérieurement le segment AB dans le rapport $\frac{MA}{MB}$ et qu'un point M' de la droite, non entre A et B, divise extérieurement le segment AB dans le rapport $\frac{M'A}{M'B}$.

▶ Ex. 03 : k étant un réel positif donné, discuter la possibilité de trouver un point M divisant intérieurement (resp. extérieurement) le segment AB dans le rapport k. Faire des dessins pour $k = 5$ et $k = \frac{1}{3}$.

(On se ramènera à une équation en prenant MA pour inconnue).

▶ Ex. 04 : On dit qu'un point M d'un segment AB divise ce segment en moyenne et extrême raison (chercher la signification du mot raison dans un dictionnaire) lorsque le plus grand segment qu'il détermine est moyen proportionnel entre le plus petit et le segment AB. Caractériser algébriquement un tel point.

Pouvez-vous expliquer la terminologie : diviser en moyenne et extrême raison ?

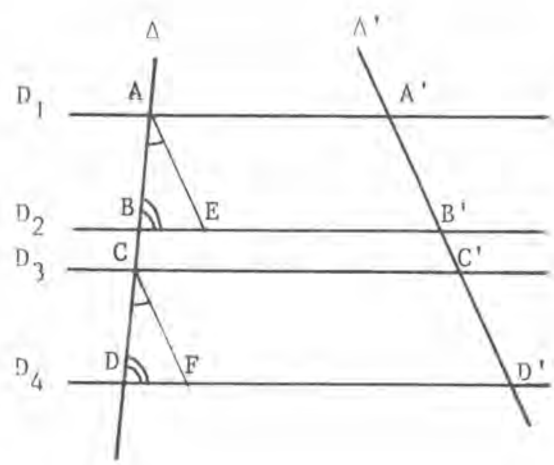
Consulter un ou plusieurs dictionnaires sur le mot "or" (Nombre d'). Lien ?

I - THEOREME DE THALES

1.1 - *Parallèles équidistantes*

1.1.1 - D_1, D_2, D_3, D_4 sont des droites parallèles qui déterminent sur la droite Δ des segments AB et CD égaux. Soient A'B' et C'D' les segments correspondants déterminés sur Δ' .

Considérons les parallèles à Δ' passant par A et par C. Soient E et F leurs intersections respectives avec D_2 et D_4.



- Si E est confondu avec B alors Δ est parallèle à Δ'. Dans ces conditions ABB'A' et CDD'C' sont des parallélogrammes.

  AB = CD (hypothèse)

  AB = A'B' donc A'B' = C'D'

  CD = C'D'

- Si E est différent de B, F est différent de D. Les triangles ABE et CDF sont tels que :

  AB = CD

  $\hat{A} = \hat{C}$ (angles correspondants)

  $\hat{B} = \hat{D}$ (" ")

  Ces triangles sont donc égaux.

  AE = CF (1)

Or AEB'A' et CFD'C' sont des parallélogrammes. Donc

$$\left.\begin{aligned} AE &= A'B' \\ CF &= C'D' \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

De (1) et (2) on déduit A'B' = C'D'

Théorème -

Si des parallèles déterminent des segments égaux sur une sécante, elles déterminent des segments correspondants égaux sur toute autre sécante.

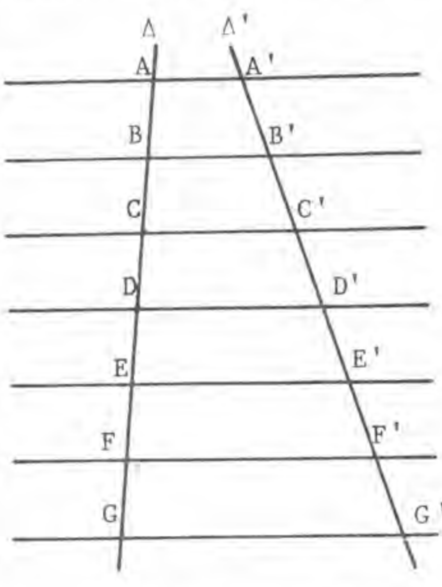
1.1.2 Si les segments déterminés sur la première sécante sont égaux

AB = BC = CD = ...

alors les segments déterminés sur la seconde sécante le sont aussi

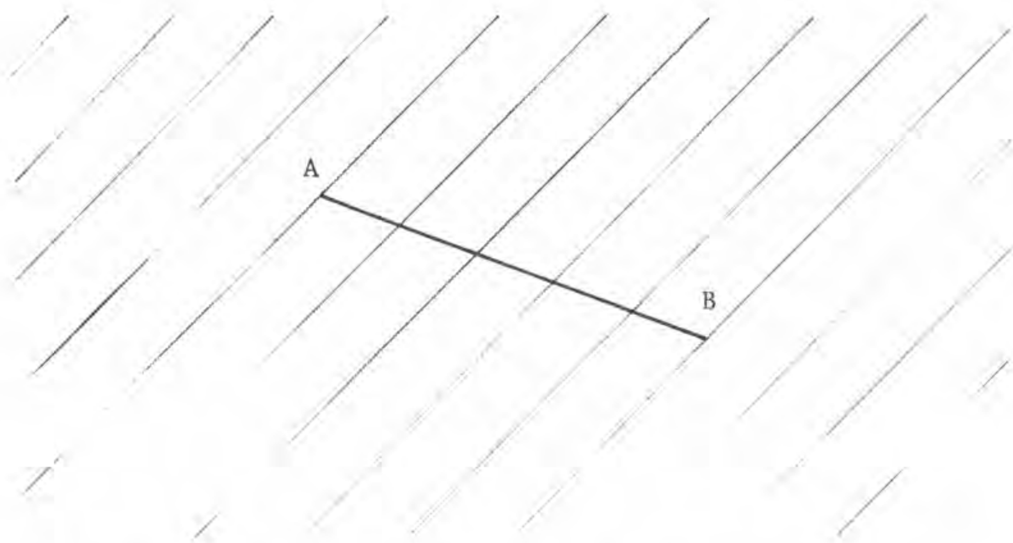
A'B' = B'C' = C'D' = ...

Les droites parallèles sont appelées des parallèles équidistantes.



Remarque : Il en est ainsi des lignes d'une feuille de papier ligné (ou réglé). Celles-ci peuvent donc servir pour découper des segments égaux sur une droite.

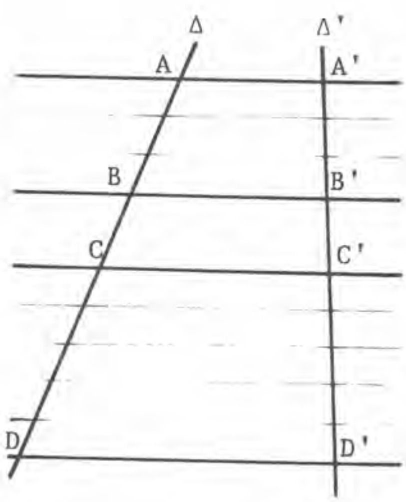
Le segment AB étant, par exemple, tracé sur papier calque il suffit de le disposer correctement sur fond de papier ligné pour obtenir son partage en segments égaux.



Ex. 1.1 : Soit AB un segment donné. Partager AB en cinq segments égaux à l'aide d'un compas et d'une règle non graduée. (Consulter le tome I des Mathématiques à l'Ecole Normale , page 92)

1.2 *Théorème de Thalès* :

Considérons des parallèles qui déterminent sur la sécante Δ les segments AB et CD et les segments correspondants A'B' et C'D' sur Δ'.



- Supposons que le rapport $\frac{AB}{CD}$ soit rationnel. Il existe donc deux naturels n et p tels que :

$$\frac{AB}{CD} = \frac{n}{p}$$

On peut donc trouver un segment S contenu n fois dans AB et p fois dans CD (dans le cas de la figure $n = 3$ et $p = 5$).

Par les points réalisant la subdivision de AB et de CD en segments égaux à S menons les parallèles à la droite AA'. D'après ce qui précède ces droites divisent respectivement A'B' et C'D' en n et p segments égaux entre eux. Ainsi :

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{n}{p}$$

Donc : $$\frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'} \qquad (1)$$

- Nous admettrons que dans le cas où le rapport $\frac{AB}{CD}$ n'est pas rationnel on a encore l'égalité (1). (On pourra consulter le tome I des "Mathématiques à l'Ecole Normale", chapitre "Nombres" paragraphe IV "Les nombres réels").

Remarque : Il résulte de la démonstration ci-dessus que si B et C sont confondus :

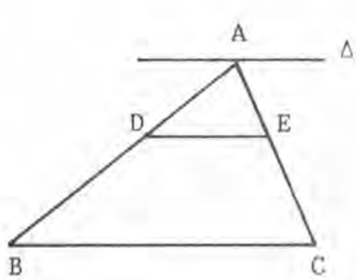
$$\frac{AB}{BD} = \frac{A'B'}{B'D'}, \quad \text{et} \quad \frac{AB}{AD} = \frac{A'B'}{A'D'}$$

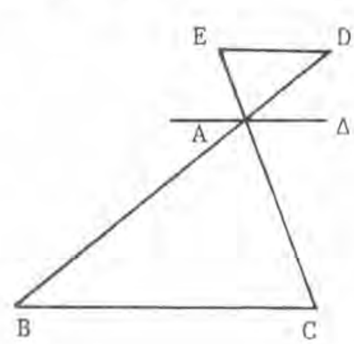
Théorème

Des droites parallèles déterminent sur deux sécantes des segments correspondants proportionnels.

1.3 *Application au triangle* :

1.3.1 Soient ABC un triangle et DE une droite parallèle à BC et rencontrant les côtés AB et AC en D et E respectivement.





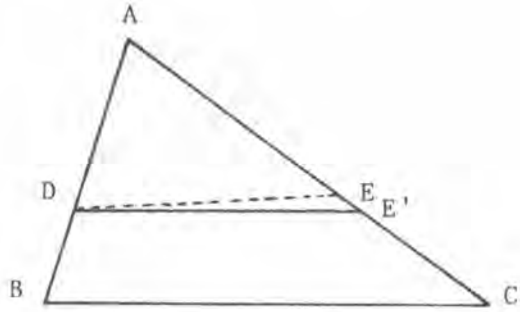
Il suffit de tracer par A la parallèle Δ à BC pour se trouver dans les conditions du théorème précédent. Ainsi :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

1.3.2 - Réciproque

Soient ABC un triangle, D un point du côté AB, E un point du côté AC tels que :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \qquad (1)$$



Considérons la parallèle à BC passant par D. Elle coupe le segment AC en E'. D'après la propriété 3-1.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE'}{AC} \qquad (2)$$

De (1) et (2) on déduit :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{AE'}{AC}$$

Donc AE = AE' .

Les points E et E' du segment AC sont à la même distance de A et sont donc confondus.

Théorème

Si D et E sont deux points appartenant respectivement aux côtés AB et AC d'un triangle et tels que

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad \text{alors DE est parallèle à BC}$$

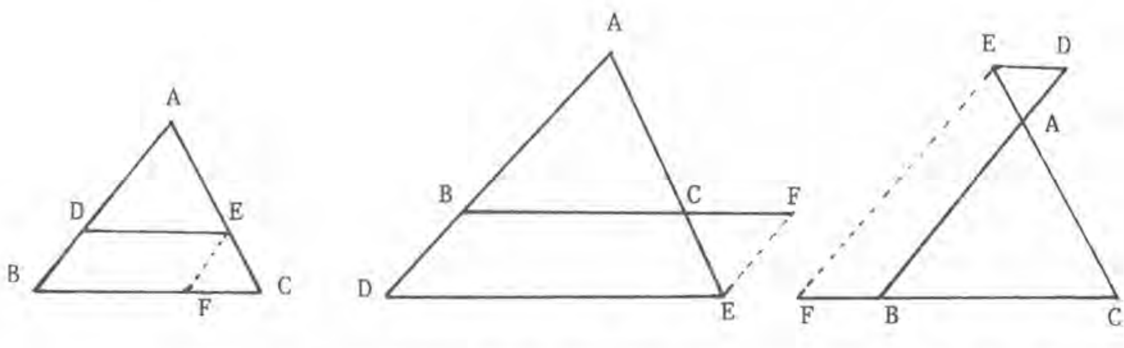
Remarque : Si les points D et E appartenant respectivement aux droites AB et AC sont l'un et l'autre extérieurs aux segments AB, AC et tels que

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$

on démontre encore, de la même manière, que DE est parallèle à BC.

▶ *Ex. 1.2* : Soit un quadrilatère convexe A B C D et I un point du segment AB. On trace depuis I la parallèle à la diagonale AC, on obtient ainsi J sur BC. Puis, depuis J, la parallèle à la diagonale BD donne K sur DC. Puis L sur AD avec KL parallèle à AC. Démontrer que si on continue depuis L on revient en I.

1.3.3 *Les hypothèses sont celles de 1.3.1.*



Soit F l'intersection de BC avec la parallèle à AB issue de E.

Ainsi : $$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \qquad (1)$$

En outre EF est parallèle à AB. Donc

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC} \qquad (2)$$

Le quadrilatère D E F B est un parallélogramme, DE = BF

De (2) on déduit :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \qquad (3)$$

Les triangles ABC et ADE sont donc tels que :

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

▶ Ex. 1.3 : Dans un triangle ABC la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le côté BC en D.

1) Démontrer que $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (on pourra utiliser le point E intersection de la droite AB avec la parallèle à AD passant par C).

2) Soit F l'intersection de la droite BC avec la bissectrice de l'angle extérieur à $\widehat{BAC}$. Démontrer que :

$$\frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC}$$

3) ABC étant un triangle on considère les points D et F de la droite BC (D intérieur au segment et F extérieur) tels que :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} \qquad \frac{FB}{FC} = \frac{AB}{AC}$$

Démontrer que AD est la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Puis que AF est la bissectrice de l'angle extérieur à $\widehat{BAC}$.

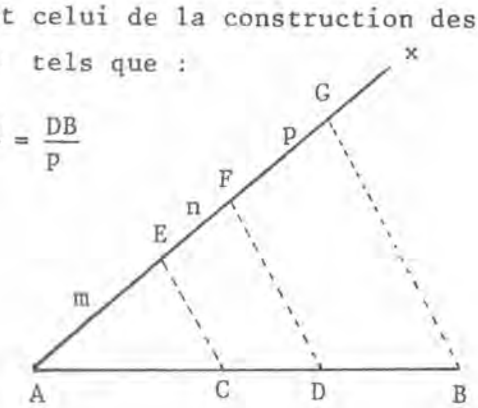
1.4 - *Construction de segments :*

1.4.1 - *Partager un segment donné en parties proportionnelles à des réels positifs donnés.*

Soient AB un segment et m, n, p trois réels positifs.

Le problème posé est celui de la construction des points C et D du segment AB tels que :

$$\frac{AC}{m} = \frac{CD}{n} = \frac{DB}{p}$$



On trace une demi-droite Ax non portée par la droite AB. Sur cette demi-droite on porte AE = m EF = n FG = p. On trace GB, puis FD et EC parallèles à GB. D'après le théorème de Thalès

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AE}{EF} \qquad \text{donc} \qquad \frac{AC}{AE} = \frac{CD}{EF}$$

De même

$$\frac{CD}{EF} = \frac{DB}{FG}$$

En définitive

$$\frac{AC}{AE} = \frac{CD}{EF} = \frac{DB}{FG} \qquad\qquad \frac{AC}{m} = \frac{CD}{n} = \frac{DB}{p}$$

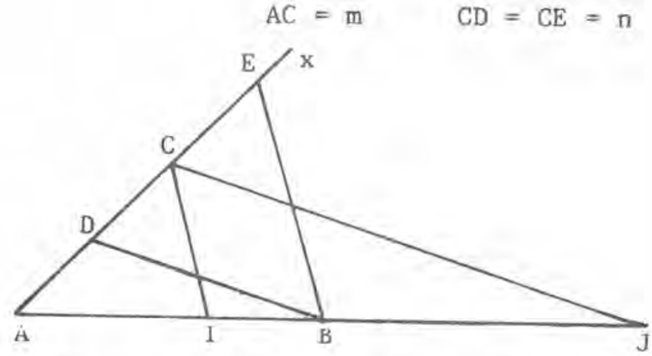
4 2 *Construire les points qui divisent un segment dans un rapport donné.*

Soit AB un segment et k un réel positif.

Construisons les points I et J qui divisent intérieurement et extérieurement AB dans le rapport k lorsque $k = \frac{m}{n}$.

On trace pour cela une demi-droite Ax sur laquelle on porte les points C, D et E tels que :

AC = m CD = CE = n



On construit I et J tels que CI et CJ soient respectivement parallèles à BE et BD.

$$\frac{IA}{IB} = \frac{CA}{CE} = \frac{m}{n} = k \qquad \frac{JA}{JB} = \frac{CA}{CD} = \frac{m}{n} = k$$

Remarque : Dans quels cas cette construction est-elle en défaut ?

▶ *Ex. 1.4* : Reprendre la construction ci-dessus lorsque la valeur de k n'est plus donnée sous la forme $\frac{m}{n}$.

▶ *Ex. 1.5* : a, b et c désignent les longueurs de trois segments donnés. Construire un segment de longueur x telle que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

▶ *Ex. 1.6* : Soit G le centre de gravité d'un triangle ABC. On mène par G les parallèles à AB et AC qui coupent BC en D et E. Démontrer que $BD = DE = EC$.

▶ *Ex. 1.7* : Soient C et D les points de la droite AB tels que

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k \quad (k \neq 1)$$

Soit M un point du plan tel que $\frac{MA}{MB} = k$. Démontrer que M appartient au cercle de diamètre CD (se reporter à l'exercice 1.2).

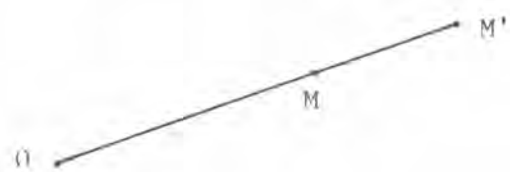
Soit M' un point du cercle de diamètre CD (M' différent de C et de D). La parallèle à $M'D$ issue de C rencontre les droites $M'A$ et $M'B$ en E et F. Démontrer que $EC = CF$. En déduire que $\frac{M'A}{M'B} = k$.

Déduire de ce qui précède que l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = k$ est le cercle de diamètre CD.

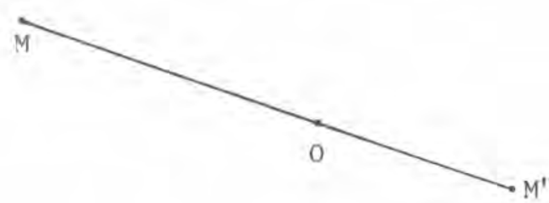
II HOMOTHETIE

2.1 *Définition* :

Soient O un point et k un nombre réel strictement positif. A tout point M on associe le point M' de la demi-droite [OM) tel que OM' = k.OM. Par définition le point M' est l'homothétique de M dans l'homothétie directe de centre O et de rapport k.



Le point M'' extérieur à la demi-droite [OM) et tel que : OM'' = k.OM est, par définition, l'homothétique de M dans l'homothétie inverse de centre O et de rapport k.



L'homothétique d'une figure F est l'ensemble des points M' (ou bien M'') homothétiques des points M qui constituent F.

Remarques

- Si $k \neq 1$ le centre d'homothétie est le seul point qui coïncide avec son homothétique.
- Si $k = 1$ tout point coïncide avec son homothétique.
- L'homothétie inverse de rapport 1 est évidemment la symétrie de centre O.
- Dans la suite du chapitre on désignera une homothétie de centre O et de rapport k pour la notation $\mathcal{H}$ (O,k) et, si cela est nécessaire, le texte indiquera qu'il s'agit d'une homothétie directe ou bien inverse.

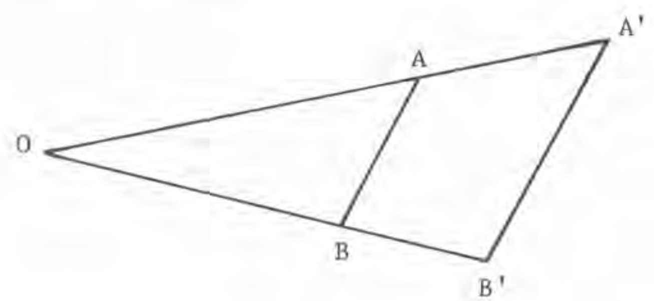
On pourrait ne considérer que les homothéties directes puisque l'homothétie inverse de centre O et de rapport k peut être envisagée comme la succession de l'homothétie directe et de la symétrie de centre O.

- si $k \neq 0$, $OM' = k.OM$ équivaut à $OM = \frac{1}{k}.OM'$

Si M' est l'homothétique de M dans une homothétie (directe ou inverse) de rapport k alors M est l'homothétique de M' dans l'homothétie (directe ou inverse) de même centre et de rapport $\frac{1}{k}$.

2.2 - *Propriété*

Soient deux points A et B, A' et B' leurs homothétiques dans l'homothétie $\mathcal{H}$ (O,k).



L'égalité $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$ et la disposition des points A' et B' sur les droites OA et OB impliquent que les droites AB et A'B' sont parallèles et que $\frac{A'B'}{AB} = k$

Théorème

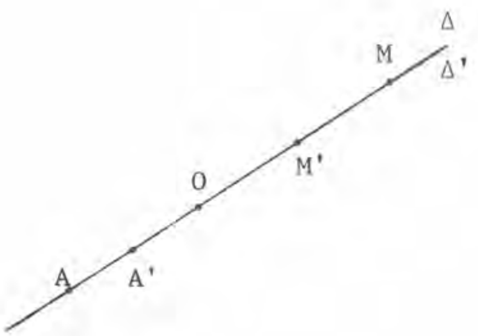
Si A' et B' sont les homothétiques des points A et B dans une homothétie de rapport k alors $A'B' = k.AB$

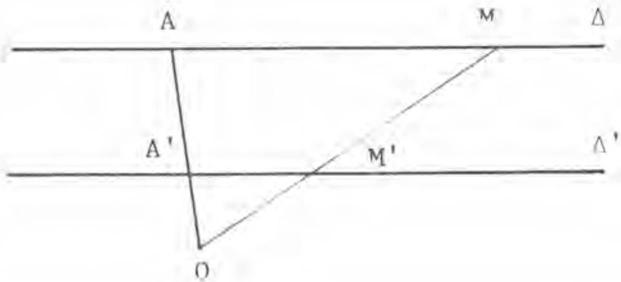
2.3 - *Figure homothétique d'une droite*

Soit $\mathcal{H}$ (O,k) une homothétie et Δ une droite.

Quelle est la figure homothétique de Δ ?

Soient, sur Δ, un point fixe A et un point variable M. A' et M' leurs homothétiques respectifs.





$$OA' = k.OA \qquad OM' = k.OM$$

Si Δ passe par O il est évident que M' appartient à Δ, l'homothétique Δ' de Δ est donc incluse dans Δ.

Si Δ ne passe pas par O l'égalité :

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OM'}{OM}$$

prouve (se rapporter au paragraphe 1.3.2) que M' appartient à la droite Δ' parallèle à Δ et passent par A'.

Réciproquement soit M' un point quelconque de Δ'. Désignons par M l'homothétique de M' dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{k}$:

$$OM = \frac{1}{k} \,.\, OM'$$

$$OA = \frac{1}{k} \,.\, OA'$$

Le même raisonnement que le raisonnement direct montre, dans les deux cas de figure, que M appartient à Δ.

On peut conclure en disant que l'homothétique de Δ est Δ'.

Théorème

Une homothétie transforme une droite en une droite parallèle.

► Ex. 2.1 : Deux droites parallèles Δ et Δ' sont données. Peut-on considérer l'une comme homothétique de l'autre ? (autrement dit peut-on trouver au moins une homothétie transformant l'une en l'autre ?).

▶ <u>*Ex. 2.2*</u> : On donne deux droites D et D' et un point I. Construire une droite passant par I, coupant D en A et D' en A' tels que IA' = k.IA (k réel positif donné).

▶ <u>*Ex. 2.3*</u> : Soit un angle $\widehat{xAy}$ et une homothétie $\mathcal{H}(O,k)$. Choisir un point O, une valeur de k et construire l'homothétique de $\widehat{xAy}$ dans l'homothétie directe $\mathcal{H}(O,k)$ puis dans l'homothétie inverse. Constater que les côtés de $\widehat{x'A'y'}$ sont respectivement parallèles à ceux de $\widehat{xAy}$, de même sens dans le cas de l'homothétie directe, de sens contraire dans l'autre cas.

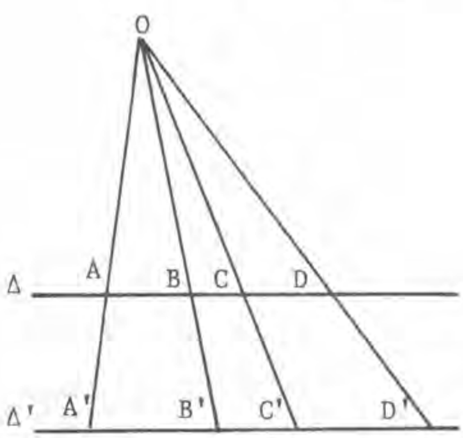
Démontrer, dans les deux cas que $\widehat{xYa}$ et $\widehat{x'A'y'}$ sont égaux.

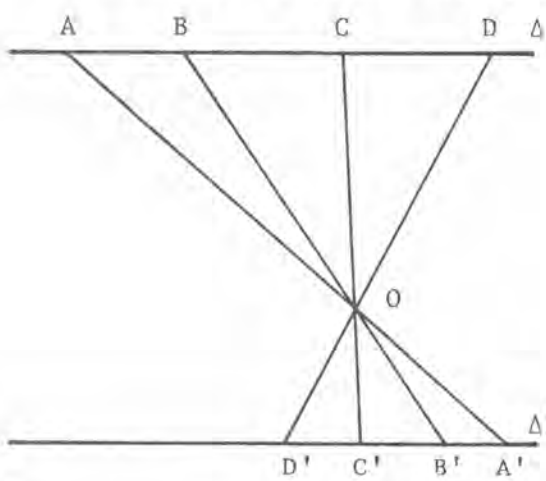
On traduit cette propriété en disant que l'homothétie conserve les angles.

2.4 - <u>*Divisions homothétiques*</u>

Soit $\mathcal{H}(O,k)$ une homothétie et A, B, C, D des points d'une droite Δ.

Soient A', B', C', D' les homothétiques des points A, B, C, D.





D'après le paragraphe 2.2 :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{AC}{A'C'} = \dots$$

On dit que les divisions A, B, C, D et A', B', C', D' sont homothétiques.

Remarques :

- Les résultats ci-dessus sont une conséquence de la propriété démontrée au paragraphe 2.2. Celle-ci peut se traduire en disant que toute homothétie de rapport k multiplie les longueurs par k.

  Il en résulte en effet que :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} . \quad \text{Donc} \quad \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC}$$

- L'homothétie conserve donc les rapports. Et si, plus particulièrement, B est le milieu de AC alors B' est aussi celui de A'C'. L'homothétie conserve le milieu.

- L'utilisation de parallèles équidistantes (paragraphe 1.1.2) permet de partager un segment donné en segments égaux. Les résultats ci-dessus offrent la même possibilité (exercices 2.4 et 2.5 ci-dessous).

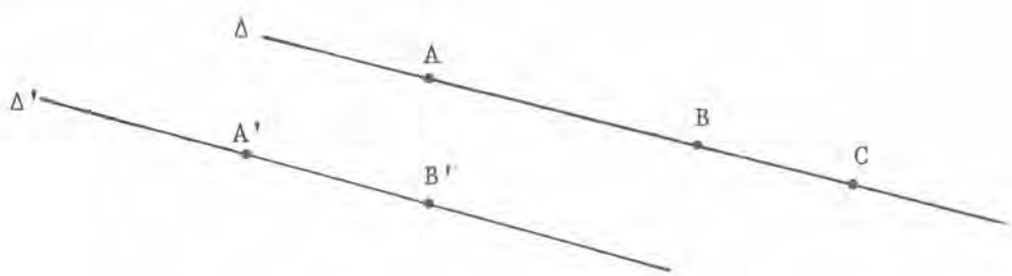
▶ Ex. 2.4 : Soient Δ et Δ' deux droites parallèles : Δ porte les points A, B, C, D dans cet ordre, Δ' les points A', B', C' et D' dans cet ordre et :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

Démontrer que les droites AA', BB', CC', DD' sont ou bien concourantes ou bien parallèles.

▶ Ex. 2.5 : Soit AB un segment donné. Utiliser les résultats de l'exercice 2.4 pour partager AB en cinq segments égaux.

▶ Ex. 2.6 : Δ et Δ' sont deux droites parallèles :



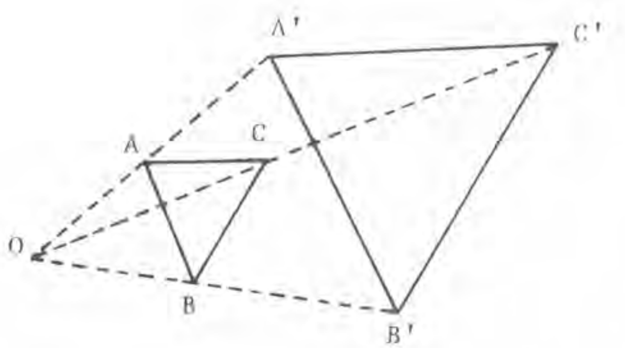
On suppose que les droites AA' et BB' se coupent en un point O situé hors des limites de la feuille.

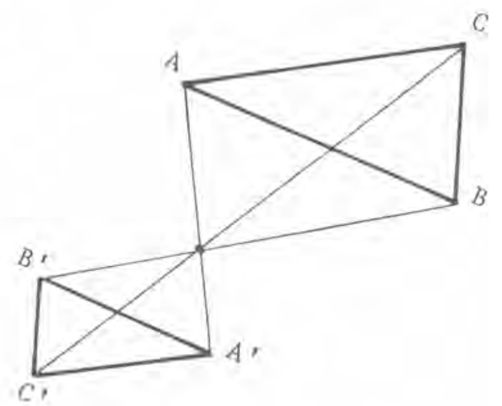
Construire le point C' de Δ' tel que CC' passe par O.

2.5 - *Figure homothétique d'un triangle*

Soient $\mathcal{H}(O,k)$ une homothétie et ABC un triangle.

A', B', C' étant les homothétiques de A, B et C, le triangle A'B'C' est l'homothétique de ABC.





AB, BC, CA et A'B', B'C', C'A' sont respectivement parallèles.

$$\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'} \qquad \widehat{CBA} = \widehat{C'B'A'} \qquad \widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

▶ Ex. 2.7 : Soient $\mathcal{H}(O,k)$ une homothétie, ABC un triangle, A'B'C' l'homothétique de ABC. On désigne par H,G,I l'orthocentre, le centre de gravité, et le centre du cercle inscrit de ABC. Trouver les homothétiques de H, G et I.

▶ Ex. 2.8 : Deux triangles dont les côtés dont respectivement parallèles sont-ils homothétiques ? De combien de façons ?

▶ Ex. 2.9 : Deux carrés dont les côtés sont respectivement parallèles sont-ils homothétiques ? De combien de façons ?

2.6 - *Courbes homothétiques*

Nous fondant sur une propriété concernant les segments homothétiques, nous avons dit, au paragraphe 2.4, que toute homothétie de rapport k multipliait les longueurs par k. Ce résultat s'étend-il au cas des courbes homothétiques ?

D'une manière générale pour déterminer la longueur d'une courbe Γ on y inscrit une ligne brisée dont la longueur constitue une valeur approchée de la longueur de Γ. On améliore l'approximation en augmentant le nombre des sommets de la ligne brisée de manière que celle-ci approche d'autant mieux Γ.

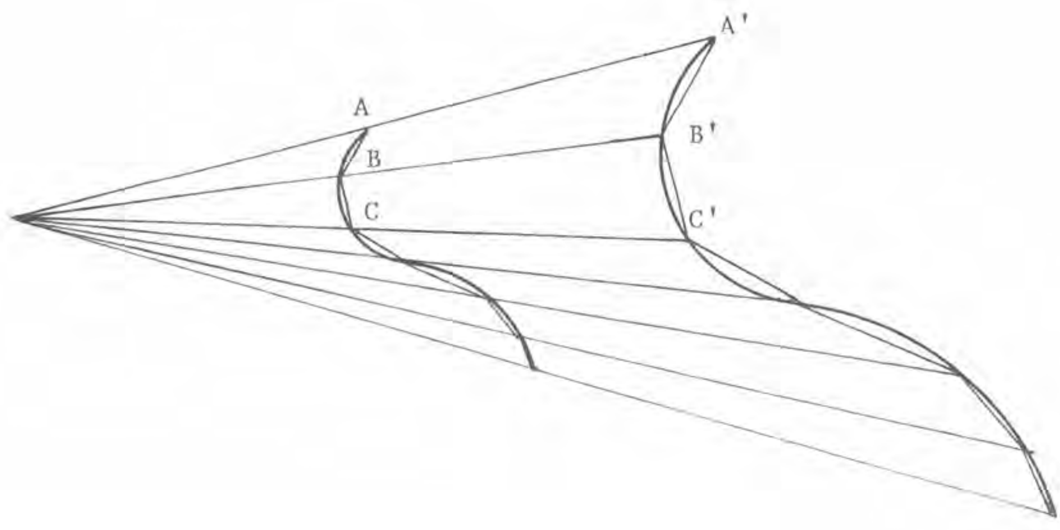
Soient donc Γ et Γ' deux courbes homothétiques dans une homothétie de rapport k ; A, B, C, ... les sommets d'une ligne brisée inscrite dans Γ, A', B', C', leurs homothétiques. D'après 2.2 :

$$A'B' = k.AB, \quad B'C' = k.BC, \ldots$$

$$\text{donc} \qquad (A'B' + B'C' + \ldots) = k.(AB + BC + \ldots)$$

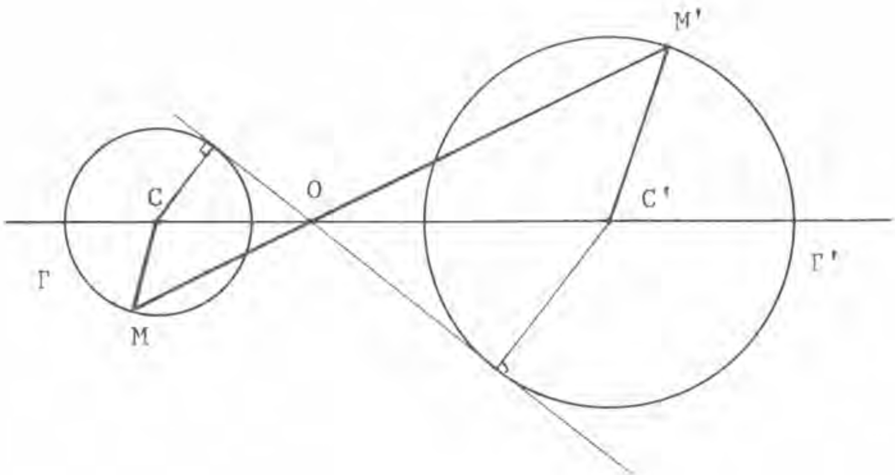
La longueur de la ligne brisée inscrite dans Γ' est le produit par k de la longueur de la ligne brisée inscrite dans Γ.

Ce résultat ayant lieu quelle que soit la ligne brisée inscrite dans Γ il est légitime de dire que la longueur de Γ' est le produit de la longueur de Γ par k.



2.7 - *Figure homothétique d'un cercle*

Soit $\mathcal{H}$ (O,k) une homothétie et Γ un cercle de centre C et de rayon R, M un point quelconque de Γ.



Si C' et M' sont les homothétiques de C et de M on a (paragraphe 2) :

$$C'M' = kCM \quad \text{or} \quad CM = R$$

$$\text{donc} \quad C'M' = kR$$

Le point M' appartient au cercle M' de centre C' est de rayon R' = kR.

Réciproquement soit M' un point quelconque de Γ'. Le raisonnement direct appliqué à l'homothétie $\mathcal{H}$ $(O,\frac{1}{k})$ montre que l'homothétique M de M' est tel que :

$$CM = \frac{1}{k} \cdot R'$$

$$\text{or} \quad \frac{1}{k} R' = \frac{1}{k} (kR) = R$$

M appartient à Γ et M' est donc homothétique de M dans $\mathcal{H}$ (O,K). Tout point de Γ' est homothétique d'un point de Γ. L'homothétique de Γ est donc Γ'.

Théorème -

Dans $\mathcal{H}$ (O,k) l'homothétique d'un cercle, de centre C et de rayon R, est le cercle ayant pour centre l'homothétique de C et pour rayon kR.

Remarque : Si O est extérieur à Γ les tangentes à Γ issues de O sont aussi tangentes à Γ'.

2.8 - *Centres d'homothéties de deux cercles*

Soient Γ (C,R) et Γ' (C',R') deux cercles. Existe-t-il une homothétie transformant Γ en Γ' ? (On écarte le cas où C et C' sont confondus, cas que le lecteur envisagera seul).

Supposons qu'il existe une homothétie $\mathcal{H}(O,k)$ répondant à la question. D'après les résultats du 2.7 :

$$k = \frac{R'}{R} \qquad \text{et} \qquad \frac{OC'}{OC} = k$$

O est donc nécessairement un point divisant le segment C'C dans le rapport $\frac{R'}{R}$.

- R = R'. Il existe un seul point O_1 divisant C'C dans le rapport 1, à savoir le milieu de C'C. L'homothétie inverse $\mathcal{H}(O_1,1)$, réduite à la symétrie de centre O_1, est la seule à répondre à la question.

- $R \neq R'$. Il existe deux points, l'un O_1 intérieur au segment C'C, l'autre O_2 extérieur et tels que :

$$\frac{O_1C'}{O_1C} = \frac{O_2C'}{O_2C} = \frac{R'}{R}$$

L'homothétie inverse $\mathcal{H}(O_1, \frac{R'}{R})$ transforme Γ en le cercle de centre C' et de rayon kR. Or :

$$kR = \frac{R'}{R}\, R = R'$$

Cette homothétie transforme donc Γ en Γ' et répond à la question. Le même raisonnement prouve que l'homothétie directe $\mathcal{H}(O_2, \frac{R'}{R})$ convient aussi.

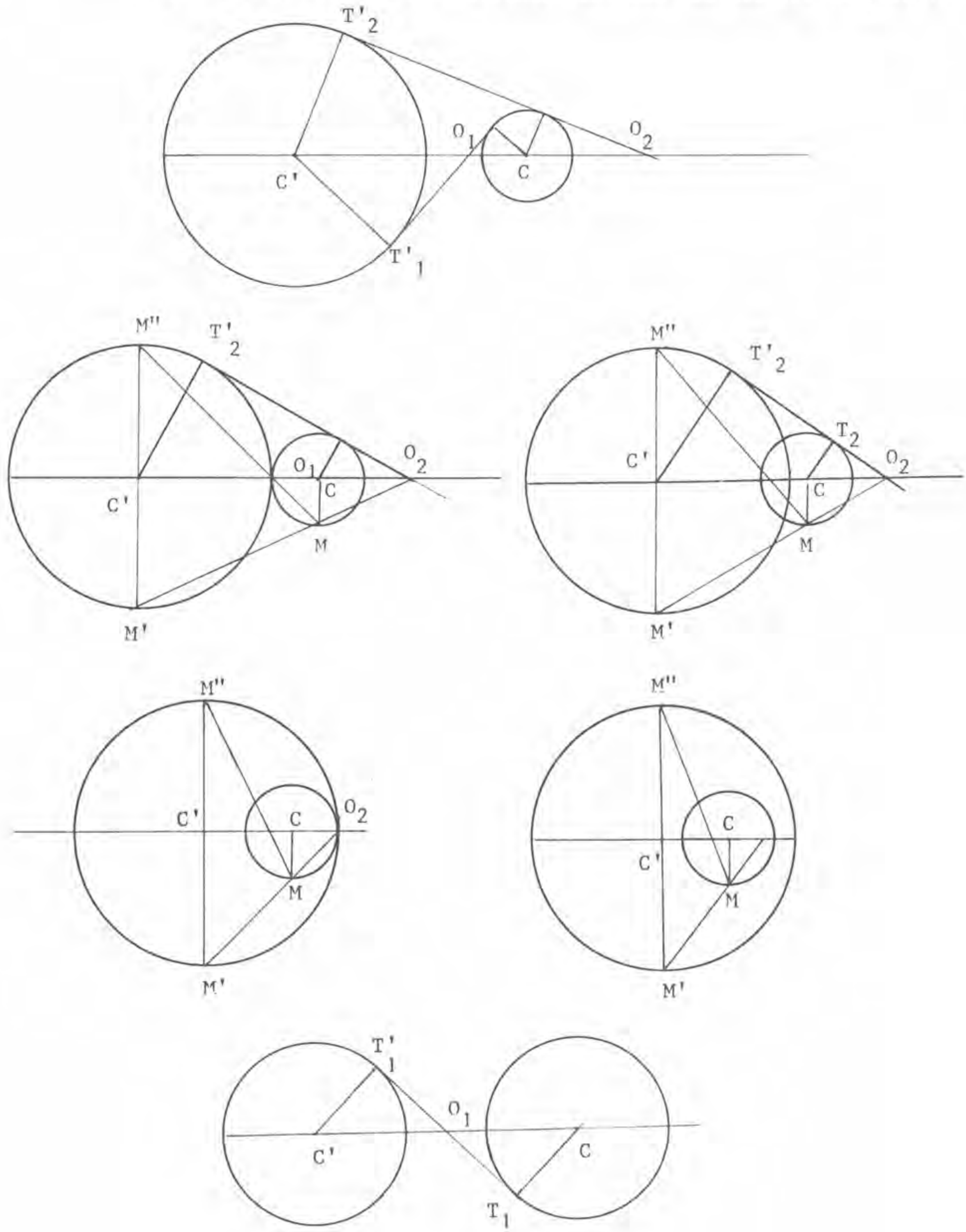
Théorème -

Deux cercles inégaux sont homologues dans deux homothéties, l'une directe, l'autre inverse. S'ils sont égaux ils sont homologues dans une homothétie inverse réduite à une symétrie centrale.

2.9 - *Construction des centres d'homothétie de deux cercles*

Pour construire O_1 et O_2 on peut utiliser des rayons CM et C'M' portés par des droites parallèles ou construire les tangentes communes à Γ et Γ' lorsqu'elles existent.

Figures regroupant les différents cas pour des cercles inégaux :



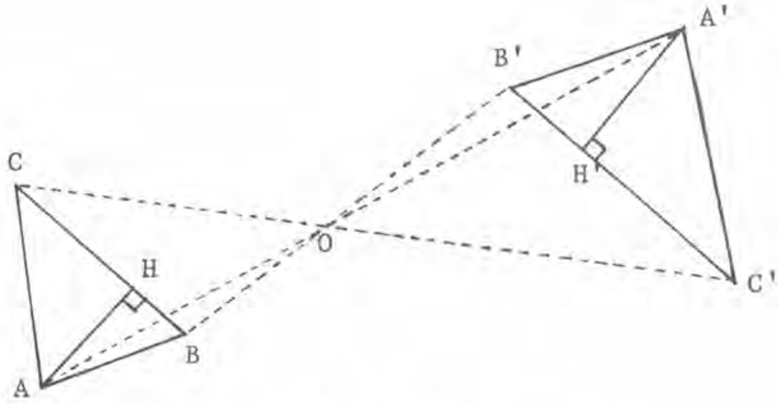
2.10 - *Rapport des aires de deux polygones homothétiques*

On utilise ici des résultats figurant dans le chapitre "Mesure".

- Cas de deux triangles

Soit A'B'C' le triangle homothétique du triangle ABC dans $\mathcal{H}(O,k)$.

La hauteur AH de ABC a pour homologue, dans $\mathcal{H}(O,k)$, la hauteur A'H' de A'B'C' (voir Ex. 6)



$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{A'H'}{AH} = k$$

aire de $A'B'C' = \frac{1}{2} B'C'.\ A'H'$

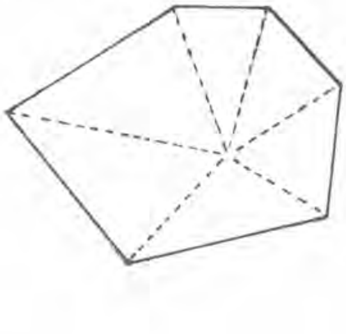
$$\frac{1}{2} B'C'.A'H' = \frac{1}{2} (kBC)\ (kAH)$$

aire $A'B'C' = k^2$. aire ABC

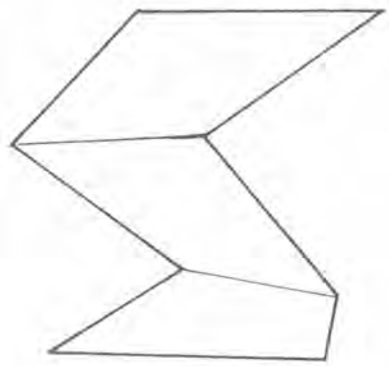
- Cas de deux polygones

Indiquons d'abord que tout polygone peut être décomposé en triangles dont il est la réunion.

Si le polygone est convexe, il suffit de joindre un point intérieur (ou un sommet) à tous les sommets pour obtenir une telle décomposition.



Si le polygone n'est pas convexe il est néanmoins possible de le décomposer d'abord en polygones convexes, eux-mêmes décomposés ensuite en triangles.



Soient donc un polygone P et P' son homothétique dans $\mathcal{H}(O,k)$. P est décomposé en triangles $T_1, T_2, \ldots, T_n$; P' se trouve alors décomposé par les triangles $T'_1, T'_2, \ldots, T'_n$ homothétiques des précédents. Et :

$$\text{aire } P' = k^2 . \text{ aire } P$$

▶ Ex. 2.10 : En utilisant les triangles $T_1, T_2, \ldots, T_n$ et $T'_1, T'_2, \ldots, T'_n$ démontrer que aire $P' = k^2$. aire P.

▶ Ex. 2.11 : On donne un cercle C et un point I non situé sur C. Construire une droite passant par I et rencontrant C en A et B de manière que $\frac{IB}{IA} = k$ (k réel donné)

▶ Ex. 2.12 : Deux cercles sont tangents en A. Soit AB une corde de l'un et AB' la corde de l'autre perpendiculaire à AB. Démontrer que lorsque B varie la droite BB' passe par un point fixe.

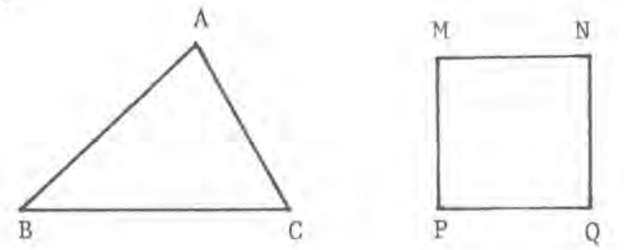
▶ Ex. 2.13 : Soit D une droite et A un point de D. On considère l'ensemble des cercles tangents à D en A. Quel est l'ensemble des points de contact des tangentes à ces cercles parallèles à une direction donnée ?

▶ Ex. 2.14 : Un point M décrit un cercle de centre O. Soit A un point fixe quelconque et I le pied de la bissectrice issue de O dans le triangle OAM. Quel est l'ensemble des points I ?

▶ Ex. 2.15 : Construire un cercle tangent à deux droites sécantes données et passant par un point donné.

▶ Ex. 2.16 : Construire un cercle tangent à un cercle donné et à une droite donnée en un point donné de cette droite.

▶ Ex. 2.17 : a)



Le triangle ABC et le carré M N P Q étant donnés avec BC parallèle à QP, circonscrire à M N P Q un triangle A'B'C' de manière que ABC et A'B'C' soient homothétiques. (M,N,P et Q se trouvent sur les côtés de A'B'C').

b) Soit ABC un triangle donné. Inscrire un carré dans ABC, les sommets du carré se trouvant sur les côtés de ABC.

▶ Ex. 2.18 : Soit un demi-cercle limité par le diamètre AB. Inscrire un carré dans le demi-cercle de manière que deux sommets soient sur le demi-cercle et les deux autres sur AB. (On consultera l'exercice précédent).

▶ Ex. 2.19 : Soit A B C D un quadrilatère convexe et I un point de AB. On inscrit dans A B C D un parallélogramme I J K L comme on l'a fait dans l'exercice 1.2. Soient M le milieu de IL et O le point d'intersection des diagonales de I J K L.

Quel est, lorsque I décrit AB, l'ensemble des points M ? Quel est, dans les mêmes conditions, l'ensemble des points O ?

▶ *Ex. 2.20* : Inscrire dans un quadrilatère convexe donné un losange dont les côtés sont parallèles aux diagonales du quadrilatère.

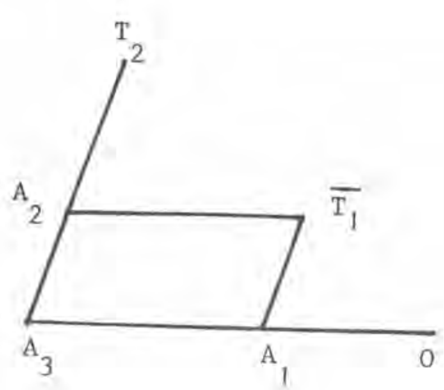
▶ *Ex. 2.21* : Deux droites données D et D' se coupent en dehors des limites du dessin.

Soit A un point donné. Pour construire une droite passant par A et par l'intersection de D et de D' on procède ainsi : on marque sur D et D', respectivement, les points B et B' non alignés avec A. Une parallèle à BB' coupe D en C et D' en C'. La parallèle à AB issue de C et la parallèle à AB' issue de C' se coupent en A'. Démontrer que AA' est la droite cherchée.

2.11 - Le pantographe

Il est facile de réaliser, avec du matériel de meccano par exemple, un appareil qui transforme les figures par homothétie : il s'agit du pantographe.

En voici le schéma :



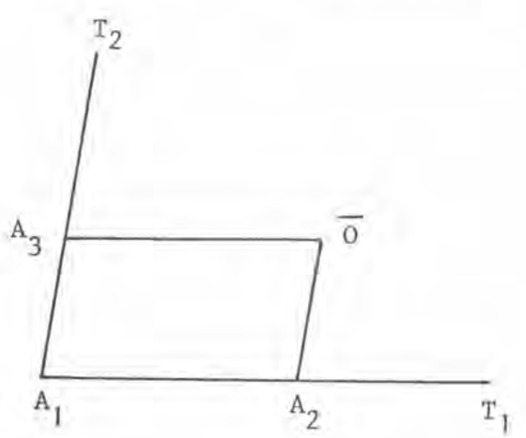
O est le point d'articulation avec la planche à dessin, A_1, A_2, A_3 sont des points d'articulation. Les traçantes sont fixées en $\overline{T}_1$ et T_2 (la lettre $\overline{T}_1$ est surlignée pour indiquer que la traçante sert aussi d'articulation).

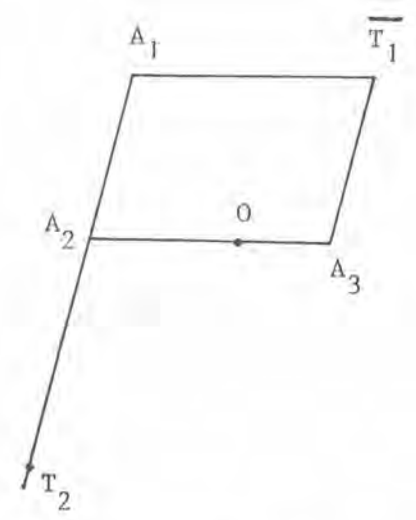
O, $\overline{T}_1$, T_2 sont alignés, $A_1\,\overline{T}_1\,A_2\,A_3$ est un parallélogramme.

▶ Ex. 2.22 : Démontrer que si les points O, $\overline{T}_1$, T_2 sont alignés pour une position de l'appareil ils le restent pour toute autre position après déformation.

Démontrer que T_2 est homothétique de T_1 dans une homothétie de centre O dont on calculera le rapport.

▶ Ex. 2.23 : Démontrer que les appareils ci-dessous sont aussi des pantographes :





Dans les deux cas O, T_1, T_2 sont alignés et le quadrilatère contenu dans l'appareil est un parallélogramme.

♦♦♦

III - SIMILITUDE ET TRIGONOMETRIE

La notion de figures homothétiques s'étend de manière naturelle de la façon suivante : on dira que deux figures sont semblables quand l'une est égale à une homothétique de l'autre.

▶ Ex. 3.1 : En se servant au besoin d'un pantographe et de papier calque dessiner deux figures semblables, non égales et non homothétiques.

Suivant que l'on a ou non retourné le papier calque on définit ainsi la notion de similitude inverse ou de similitude directe. Cette terminologie a-t-elle un lien avec la notion d'homothétie directe et d'homothétie inverse ?

Dessiner deux triangles inversement semblables.

▶ Ex. 3.2 : A quelles conditions deux arcs de cercle du plan sont-ils semblables ?

3.1 - *Triangles semblables*

Les propriétés (évidentes) de la superposabilité et celles de l'homothétie permettent d'affirmer que si deux triangles sont semblables, leurs angles sont respectivement égaux (ils sont appelés angles homologues, les sommets correspondants sont dits sommets homologues et les côtés opposés aux sommets homologues, côtés homologues) et que les côtés de l'un sont proportionnels aux côtés homologues de l'autre.

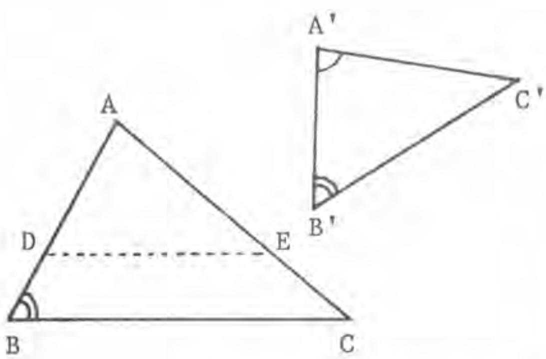
En convenant désormais d'énoncer deux triangles semblables de façon que les sommets homologues se succèdent dans le même ordre, poser que $A'B'C'$ est semblable à ABC entraîne donc $\widehat{A'} = \widehat{A}$, $\widehat{B'} = \widehat{B}$, $\widehat{C'} = \widehat{C}$ et la proportionnalité des listes (AB, BC, CA) et $(A'B', B'C', C'A')$, c'est à dire l'existence d'un nombre réel k tel que $A'B' = kAB$, $B'C' = kBC$, $C'A' = kCA$ (k est appelé rapport de similitude de $A'B'C'$ à ABC), ou encore les égalités de rapports $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$.

Cherchons maintenant à établir des conditions suffisantes pour que deux triangles ABC et $A'B'C'$ soient semblables.

Une analyse du problème montre, d'après ce qui précède, que A'B'C' doit satisfaire à 6 contraintes qui sont (en supposant les sommets notés judicieusement) $\widehat{A'} = \widehat{A}$, $\widehat{B'} = \widehat{B}$, $\widehat{C'} = \widehat{C}$, A'B' = kAB, B'C' = kBC, C'A' = kCA. C'est plus qu'il n'en faut pour déterminer (à une égalité près) le triangle A'B'C' : il est même à prévoir que les conditions cherchées porteront sur 3 des 6 contraintes ci-dessus, choisies évidemment au vu des résultats sur les cas d'égalité des triangles. De fait, on a les cas de similitude suivants :

Premier cas de similitude : Si deux triangles sont tels que deux angles de l'un soient respectivement égaux à deux angles de l'autre, ils sont semblables.

Preuve : Supposons que l'on ait, liant les triangles ABC et A'B'C', les relations : $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\widehat{B} = \widehat{B'}$.



Soit D le point de AB tel que AD = A'B' et soit E le point d'intersection avec AC de la parallèle à BC passant par D. On a $\widehat{D} = \widehat{B}$ (angles correspondants) et donc $\widehat{D} = \widehat{B'}$. Le premier cas d'égalité des triangles nous assure alors que ADE et A'B'C' sont égaux. De plus DE étant parallèle à BC, ADE est homothétique de ABC dans une homothétie de centre A. D'où le résultat annoncé.

Deuxième cas de similitude : Si deux triangles sont tels

1) qu'un angle de l'un est égal à un angle de l'autre

2) que les côtés qui limitent l'un de ces angles sont proportionnels aux côtés qui limitent l'autre angle

ces triangles sont semblables.

▶ *Ex. 3.3* : Etablir ce résultat.

Troisième cas de similitude : Deux triangles tels que les trois côtés de l'un soient proportionnels aux trois côtés de l'autre sont semblables.

▶ Ex. 3.4 : Etablir ce résultat.

▶ Ex. 3.5 : En utilisant l'un ou l'autre de ces cas, donner des conditions suffisantes pour la similitude de deux triangles isocèles, équilatéraux, rectangles.

▶ Ex. 3.6 : Placer 3 points A,B,C sur un cercle donné de façon que ABC soit semblable à un triangle donné (on dispose d'un rapporteur en plus de la règle et du compas).

▶ Ex. 3.7 : Deux quadrilatères ayant leurs angles respectifs égaux sont-ils semblables ?

Même question si l'on suppose les 4 côtés de l'un proportionnels aux 4 côtés de l'autre.

Signalons enfin que le cas particulier d'égalité des triangles rectangles (un côté de l'angle droit et hypoténuse respectivement égaux) induit le cas suivant de similitude des triangles rectangles : deux triangles rectangles tels que l'hypoténuse et un côté de l'angle droit de l'un soient proportionnels à l'hypoténuse et à un côté de l'angle droit de l'autre sont semblables.

▶ Ex. 3.8 : Démontrer ce résultat.

▶ Ex. 3.9 : Un appareil à transformer des figures par similitude : le pantographe de Sylvester.

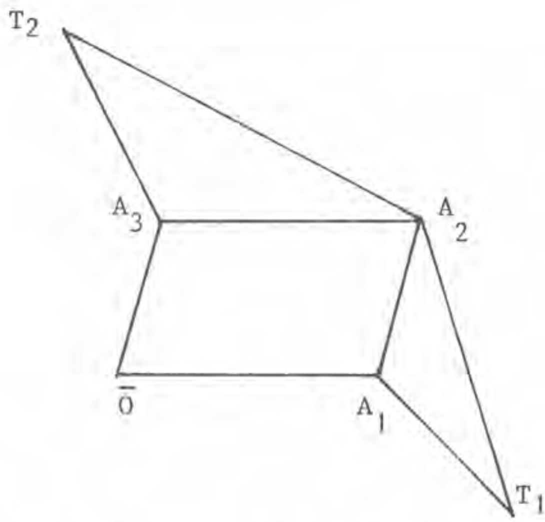
Les conventions de notations sont les mêmes que pour la description du pantographe (Cf. 2.11).

$\bar{O}\, A_1\, A_2\, A_3$ est un parallélogramme. $A_2\, A_1\, T_1$ est un triangle quelconque.

Le triangle $T_2\, A_3\, A_2$ est construit de manière à être semblable au précédent (les sommets homologues à A_2, A_1, T_1 étant respectivement T_2, A_3, A_2).

Montrer que, dans ces conditions, les triangles $T_2 A_3 \bar{O}$ et $\bar{O} A_1 T_1$ sont également semblables. En déduire que si l'on dessine une figure F_1 à l'aide de la traçante T_1, la traçante T_2 marque une figure F_2 directement semblable à F_1. Quel est le rapport de similitude ?

Les paragraphes qui suivent montrent quelques applications de la théorie de figures semblables.

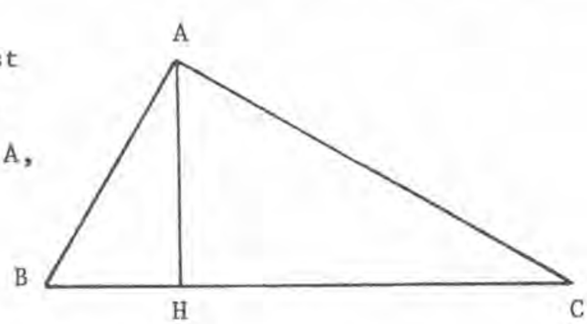


3.2 - *Relations métriques dans le triangle rectangle*

Des relations entre longueurs du type $a \times b = c \times d$ que l'on peut mettre sous la forme $\frac{a}{c} = \frac{d}{b}$ pourront résulter, soit de l'application du théorème de Thalès, s'il y a des parallèles sur la figure, soit de la découverte de deux triangles semblables dans lesquels les côtés de longueur a et d auraient respectivement pour homologues ceux qui ont pour longueur c et b.

De même pour les relations du type $a^2 = bc$, que l'on peut mettre sous la forme $\frac{a}{b} = \frac{c}{a}$.

C'est ainsi que si ABC est un triangle rectangle en A, H le pied de la hauteur issue de A, on a les relations :



$HB \cdot HC = HA^2$

$BC \cdot AH = AB \cdot AC$

$AB^2 = BH \cdot BC$ et, en permutant B et C : $AC^2 = CH \cdot CB$

d'où le célèbre théorème de Pythagore : $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

▶ *Ex. 3.10* : Etablir toutes ces relations. Pour une autre démonstration de $BC . AH = AB.AC$ et $AB^2 + AC^2 = BC^2$ voir le chapitre "Mesures".

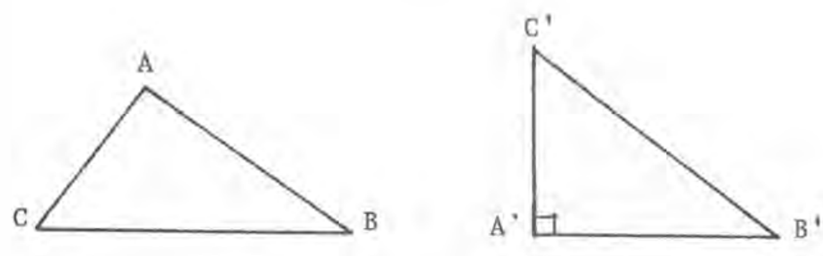
▶ *Ex. 3.11* : Etablir une formule donnant la diagonale d'un carré en fonction de son côté.

Etablir une formule donnant la hauteur d'un triangle équilatéral en fonction de son côté.

Le théorème de Pythagore admet une réciproque que les maçons égyptiens utilisaient déjà pour construire des murs à angle droit (imaginez comment !) : si, dans un triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, ce triangle est rectangle.

Preuve : Soit donc un triangle ABC dont les côtés sont liés par la relation : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

On construit un triangle A'B'C' rectangle en A' tel que $A'C' = AC$ et $A'B' = AB$



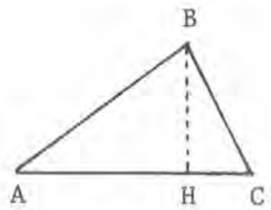
Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle A'B'C' donne

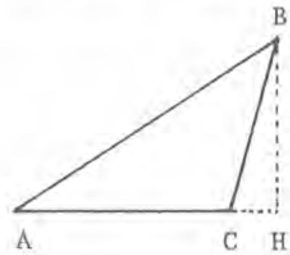
$$\begin{aligned} B'C'^2 &= A'B'^2 + A'C'^2 \\ &= AB^2 + AC^2 \quad \text{(par construction)} \\ &= BC^2 \quad \text{(par hypothèse)} \end{aligned}$$

D'où $B'C' = BC$. Les triangles ABC et A'B'C' sont donc égaux (3^e cas) : du coup le premier est rectangle comme le second.

Le théorème de Pythagore peut en fait se généraliser de la manière suivante : un angle d'un triangle est aigu, droit, ou obtus, suivant que le carré du côté opposé à cet angle est inférieur, égal ou supérieur à la somme des carrés des deux autres côtés.

Preuve : Soit ABC un triangle. Supposons l'angle $\widehat{A}$ aigu : on est alors sûr que A n'est pas entre H et C (H étant le pied de la hauteur issue de B). Deux cas de figure se présentent suivant que $\widehat{C}$ est aigu ou obtus :



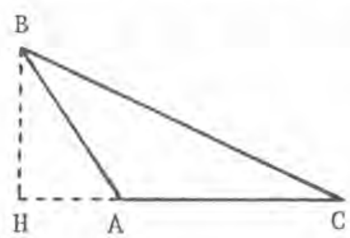


ici $HC = AC - AH$ et là $HC = AH - AC$

Mais dans les deux cas $HC^2 = AC^2 + AH^2 - 2AC \cdot AH$

$$\begin{aligned} \text{D'où } BC^2 &= BH^2 + HC^2 \\ &= (AB^2 - AH^2) + AC^2 + AH^2 - 2AC \cdot AH \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH \end{aligned}$$

Supposons maintenant l'angle $\widehat{A}$ obtus : A se trouve nécessairement entre H et C. On est dans la configuration suivante :



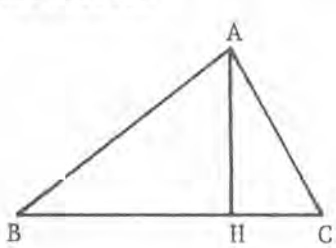
d'où $HC^2 = AC^2 + AH^2 + 2AC \cdot AH$

et alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH$$

Le lecteur achèvera le raisonnement permettant de conclure le résultat annoncé.

Application à la détermination d'une hauteur d'un triangle en fonction des 3 côtés :



Des deux angles $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$, l'un au moins est aigu. Supposons que ce soit $\widehat{B}$. On a alors en posant $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ et en appliquant ce qui précède :

$b^2 = a^2 + c^2 - 2a\, BH$ d'où

$$BH = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

Or $AH^2 = c^2 - BH^2 = (c-BH)\ (c+BH)$

$$= \frac{(2ac - a^2 - c^2 + b^2)\ (2ac + a^2 + c^2 - b^2)}{4a^2}$$

$$= \frac{[b^2 - (a-c)^2]\ [(a+c)^2 - b^2]}{4a^2}$$

$$= \frac{(b-a+c)\ (b+a-c)\ (a+c-b)\ (a+b+c)}{4a^2}$$

Si l'on désigne par p le demi-périmètre du triangle, il vient

$$AH = \frac{2}{a}\ \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$$

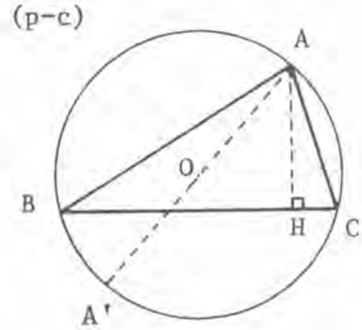
On en déduit aussitôt la formule attribuée à Héron et qu'utilisaient les agrimenseurs romains : aire (ABC) = $\sqrt{p(p-a)\ (p-b)\ (p-c)}$

▶ *Ex. 3.12* : Soit R le rayon du cercle circonscrit à ABC. Etablir que

$$R = \frac{a\ b\ c}{4\ \sqrt{p\ (p-a)\ (p-b)\ (p-c)}}$$

Indication : montrer que

$AB\ .\ AC = AH\ .\ AA'$



▶ *Ex. 3. 13* : Où l'on retrouve par une autre voie les résultats précédents.

On considère un triangle ABC de côtés a,b,c. On construit les cercles de centre I et J, de rayon r et r_a, inscrit et exinscrit dans l'angle $\widehat{A}$ et touchant BC en D et D' et AC en E et E'. Soit Soit F le point diamétralement opposé au point D. On mène la hauteur $AH = h_a$ et soit p le demi périmètre.

1°) Montrer que A, D' et F sont alignés.

Comparer les rapports $\frac{E'F}{E'A}$ et $\frac{DF}{HA}$ et démontrer les relations

$$pr = (p-a)r_a \quad \text{et} \quad a\,h_a = 2pr$$

2°) Comparer les triangles DIB et D'BJ.
En déduire que :

$$r\,r_a = (p-b)\,(p-c)$$

3°) Déduire des 3 relations précécentes la valeur de r, r_a et h_a en fonction de p, $(p-a)$, $(p-b)$, $(p-c)$ et que $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_a}$

▶ *Ex. 3.14* : Etablir une formule permettant de calculer la longueur d'une médiane d'un triangle quand on connaît la longueur de ses trois côtés.

Exercices complémentaires :

▶ *Ex. 3.15* : Le produit des segments interceptés par une tangente mobile à un cercle sur deux tangentes parallèles est constant (il vaut en fait le carré du rayon).

▶ *Ex. 3.16* : L'inverse du carré de la hauteur d'un triangle rectangle est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

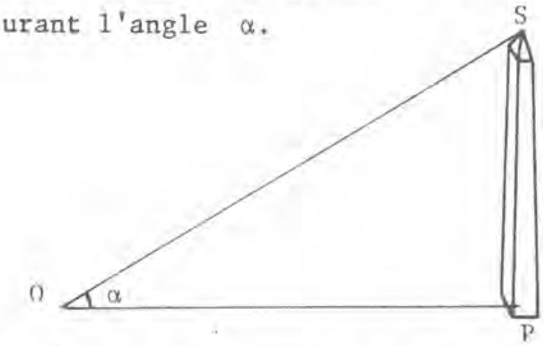
▶ *Ex. 3.17* : Dans un triangle rectangle de côtés 3,4,5 trouver la longueur de la bissectrice de l'angle droit (se souvenir de la propriété du pied de la bissectrice).

3.3 - *Eléments de trigonométrie*

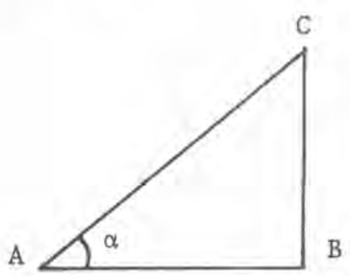
Pratiquement, la trigonométrie a pour objet de permettre le calcul de distances à partir d'autres distances connues et de données angulaires. Remarquons qu'il est beaucoup plus aisé sur le terrain de repérer des écarts angulaires que des longueurs (qui sont parfois tout à fait inaccessibles : hauteur d'une montagne, distances célestes...)

▶ *Ex. 3.18* : Concevoir et réaliser un appareil permettant de mesurer des écarts angulaires.

Pour mesurer la hauteur h de l'Obélisque de la place de la Concorde vous avez maintenant le choix entre deux solutions : l'escalader avec un double décimètre ou utiliser votre théodolite (voir ce mot dans un dictionnaire) en vous plaçant à exactement 100 m du pied (ou 50, ou 30!) et en mesurant l'angle α.



Il suffit de tracer sur le sol un triangle rectangle ABC semblable à OPS (ce qui sera réalisé si $\widehat{A} = \alpha$) et de mesurer avec le double décimètre (que vous avez gardé en poche) les longueurs BC et AB.



On a $\dfrac{h}{100} = \dfrac{BC}{AB}$ d'où $h = 100\ \dfrac{BC}{AB}$

Ex. Il y a une petite erreur dans l'appréciation de h. D'où provient-elle ?

Ce fait anodin que tous les triangles rectangles qui ont un angle (autre que l'angle droit) de même valeur sont semblables entre eux est à la base de l'établissement de tables qui donnent <u>une fois pour toutes</u> la valeur des différents rapports entre deux côtés quelconques d'un triangle rectangle d'angle α donné.

Pratiquement on se centre sur quatre rapports (ce qui suffit d'ailleurs pour déterminer les 2 autres) qui ont pris des appellations particulières :

$\dfrac{BC}{AB}$ est appelé tangente de α et $\dfrac{AB}{BC}$, co-tangente de α

$\dfrac{BC}{AC}$ est appelé sinus de α

$\dfrac{AB}{AC}$ est appelé cosinus de α

On retiendra donc que :

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} , \quad \sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} , \quad \cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

En fait $\text{tg } \alpha = \dfrac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ et $\text{cotg } \alpha = \dfrac{1}{\text{tg } \alpha}$

▶ Ex. 3.19 : Montrer que $\cos \alpha = \sin(90° - \alpha)$ et que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

Calculer sin 30°, sin 45°, sin 60° ainsi que tg 30°, tg 45°, tg 60°.

Voici un exemple de table trigonométrique où les rapports ont été calculés pour toutes les valeurs entières en degrés de α de 1° à 89°.

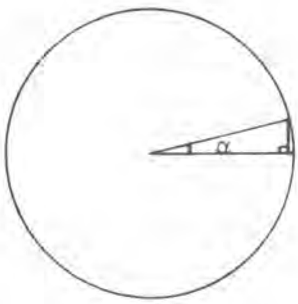
TABLE TRIGONOMÉTRIQUE DE DEGRÉ EN DEGRÉ

Degrés	Sinus	Cosinus	Tangente	Cotangente	
1	0,0175	0,9998	0,0175	57,2900	89
2	0,0349	0,9994	0,0349	28,6363	88
3	0,0523	0,9986	0,0524	19,0811	87
4	0,0698	0,9976	0,0699	14,3007	86
5	0,0872	0,9962	0,0875	11,4301	85
6	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	84
7	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	83
8	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	82
9	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	81
10	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	80
11	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	79
12	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	78
13	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	77
14	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	76
15	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	75
16	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	74
17	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	73
18	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	72
19	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	71
20	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	70
21	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	69
22	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	68
23	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	67
24	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	66
25	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	65
26	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	64
27	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	63
28	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	62
29	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	61
30	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	60
31	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	59
32	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	58
33	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	57
34	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	56
35	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	55
36	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	54
37	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	53
38	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	52
39	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	51
40	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	50
41	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	49
42	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	48
43	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	47
44	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	46
45	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	45
	Cosinus	Sinus	Cotangente	Tangente	Degrés

Il existe des tables bien plus précises donnant les rapports pour des valeurs de α de 10'' en 10''.

D'un point de vue historique l'apparition des premières tables trigonométriques est liée aux travaux de plus en plus précis des astronomes de l'école d'Alexandrie.

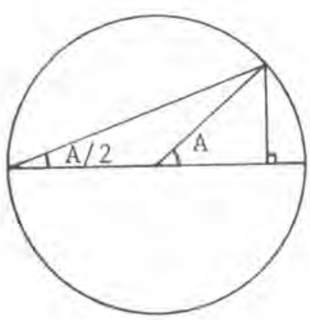
▶ Ex. 3.20 :



α étant exprimé en degrés, montrer en quoi le dessin ci-contre permet de prendre pour valeur approchée de $\sin \alpha$, quand α est petit : $\alpha \frac{\pi}{180}$

Inversement retrouver une valeur approchée de π à l'aide de la table de trigonométrie ci-dessus.

▶ Ex. 3.21 : La figure suivante permet d'établir que $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$



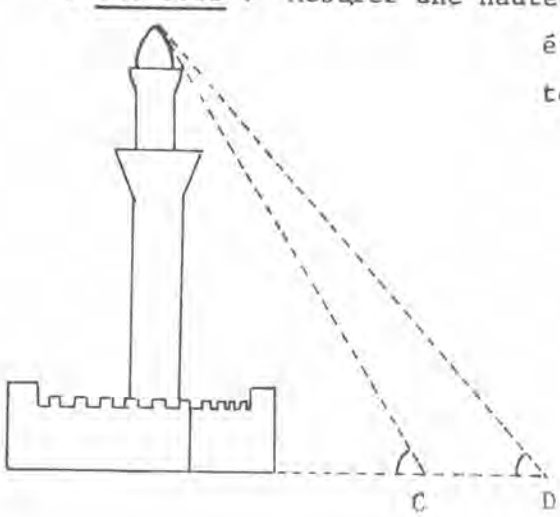
et que $\sin \frac{A}{2} = \dfrac{\sin A}{2\cos \frac{A}{2}}$

Montrer comment.

Utilisez ces formules et votre calculette pour fabriquer une table des rapports trigonométriques par intervalles de 7°30'.

Comparer les résultats obtenus avec ceux de la table ci-dessus.

▶ Ex. 3.22 : Mesurer une hauteur dont le pied est inaccessible : établir une formule donnant cette hauteur quand on a mesuré $\widehat{C}$, $\widehat{D}$ et CD



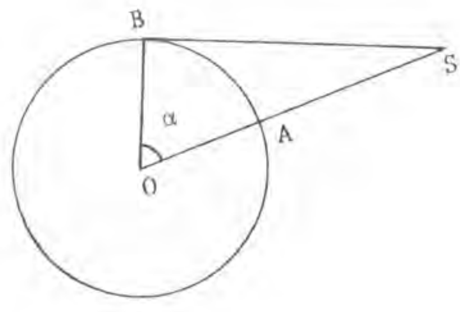
▶ Ex. 3.23 : Une tour a une circonférence extérieure de 50 m. Un observateur voit son diamètre sous un angle de 17°. A quelle distance de la tour se trouve t-il ?

Idem avec une tour de section carrée.

▶ Ex. 3.24 : Calculer approximativement la longueur du rayon terrestre sachant que le gardien d'un phare haut de 75 m voit l'horizon avec une dépression de 15'30" par rapport à l'horizontale de son lieu.

▶ Ex. 3.25 : Deux observateurs distants de 1800 m mesurent au même moment la hauteur d'un point remarquable d'un nuage. Ce point se trouve dans le plan vertical de la base d'observation et les angles d'élévation ont 75° et 82° : on demande la hauteur du nuage, les deux observateurs étant sur le même plan horizontal.

▶ Ex. 3.26 : Distance de la terre au soleil et à la lune. Supposons le centre S du soleil dans le plan d'un méridien de la terre et deux points A et B de ce méridien d'où l'on voit S respectivement à l'horizon et au zénith.



Montrer que si on connaît la différence de latitude entre A et B, on peut en déduire la distance de la terre au soleil en fonction du rayon de la terre (on trouve 23400 R comme valeur moyenne). On opère de même pour la lune (on trouve 60 R comme valeur moyenne).

▶ Ex. 3.27 : Pour un observateur terrestre le diamètre apparent du soleil (i.e l'angle sous lequel on le voit) varie entre

32' et 32'31", celui de la lune varie entre 29'24" et 33'28". En prenant dans les deux cas 32' comme valeur approchée, donner le rayon du soleil et celui de la lune en fonction du rayon de la terre. Expliquer les variations de diamètres apparents de la lune et du soleil.

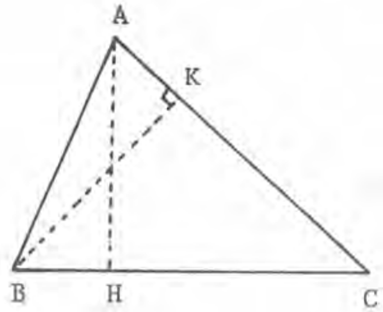
- A quelle distance faut-il placer une sphère de 1 m de rayon pour que son diamètre apparent soit égal à celui de la lune ?
- Peut-on cacher la lune derrière un crayon tenu à bras tendu ?

Dans la majorité des cas néanmoins, on n'est pas directement en présence de triangles rectangles. Il reste donc à examiner les relations existantes entre les angles et les côtés d'un triangle quelconque. Deux résultats sont à retenir (où l'on note a, b,c les longueurs des côtés respectivement opposés aux sommets A,B,C du triangle).

1) Dans tout triangle les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.

Autrement dit : $\dfrac{a}{\sin \widehat{A}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{c}{\sin \widehat{C}}$ (ce résultat est encore appelé loi des sinus)

Remarquons que nous n'avons défini la notion de sinus que pour un angle <u>aigu</u>. Nous montrerons donc cette relation en supposant dans un premier temps que tous les angles du triangle ABC sont aigus (ce qui revient à dire que les pieds des hauteurs se trouvent <u>sur</u> les côtés des triangles)

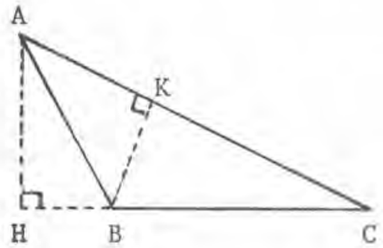


On a $AH = c \sin \widehat{B} = b \sin \widehat{C}$ (en regardant les triangles rectangles AHB et AHC).

De même $BK = c \sin \widehat{A} = a \sin \widehat{C}$

D'où $\dfrac{c}{\sin \widehat{C}} = \dfrac{b}{\sin \widehat{B}} = \dfrac{a}{\sin \widehat{A}}$

Supposons maintenant que l'un des angles du triangle ABC soit obtus (par exemple l'angle $\widehat{B}$). Les deux autres sont alors aigus (pourquoi ?). On obtient donc la configuration suivante :



On a toujours $BK = c \sin \widehat{A} = a \sin \widehat{C}$

Mais $AH = c \sin(180° - \widehat{B}) = b \sin \widehat{C}$

D'où

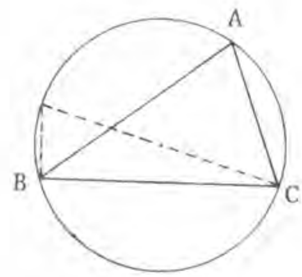
$$\frac{c}{\sin \widehat{C}} = \frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin(180° - \widehat{B})}$$

En convenant de définir le sinus d'un angle obtus comme étant le sinus de son supplémentaire (qui est alors aigu), la formule annoncée $\left(\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}}\right)$ rend compte de tous les cas de figures possibles.

▶ *Ex. 3.28* : En quoi la figure ci-dessous permet-elle d'établir qu'en fait

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R$$

où R est le rayon du cercle circonscrit à ABC ?

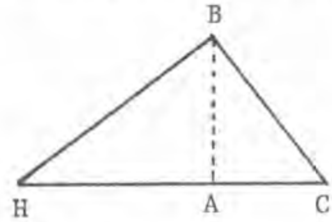


2) Dans tout triangle le carré de l'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins deux fois le produit de ces deux derniers par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\ bc \cos \widehat{A}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\ ac \cos \widehat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\ ab \cos \widehat{C}$$

Remarquons là encore que nous n'avons pas défini la notion de cosinus d'un angle obtus.

On supposera donc dans un premier temps que tous les angles du triangle sont aigus.



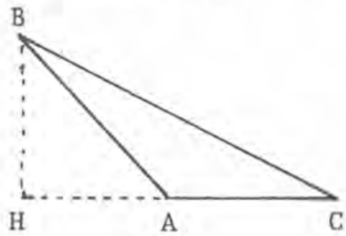
Reprenons la formule établie lors de la généralisation du théorème de Pythagore. $\widehat{A}$ étant aigu :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AH$$

Mais $\quad AH = AB \cos \widehat{A}$

D'où $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$. En regardant les autres hauteurs on établit bien sûr les 2 autres relations.

Supposons maintenant que l'un des angles, $\widehat{A}$ par exemple, soit obtus

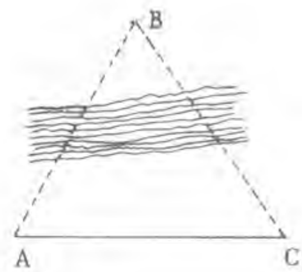


Dans ce cas $\quad BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \cdot AH$

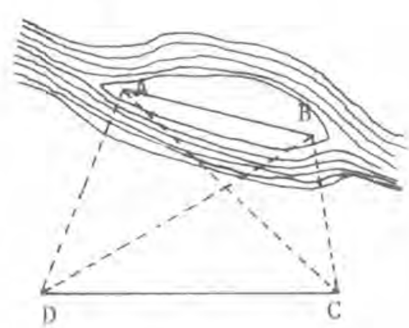
Mais $\quad AH = AB \cos(180-\widehat{A})$

D'où $\quad a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos(180-\widehat{A})$

En convenant de définir le cosinus d'un angle obtus comme étant égal à l'opposé du cosinus de son complémentaire (qui est alors aigu), la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \widehat{A}$ rend compte de deux cas de figures possibles.



▶ Ex. 3.29 : Déterminer la distance d'un point donné A à un autre point B inaccessible.



▶ Ex. 3.30 : Déterminer la distance de deux points inaccessibles.

▶ Ex. 3.31 : Triangulation pour un élément de canevas géographique (extrait de "Les mathématiques pour tous" de Lancelot Hogben , Payot)

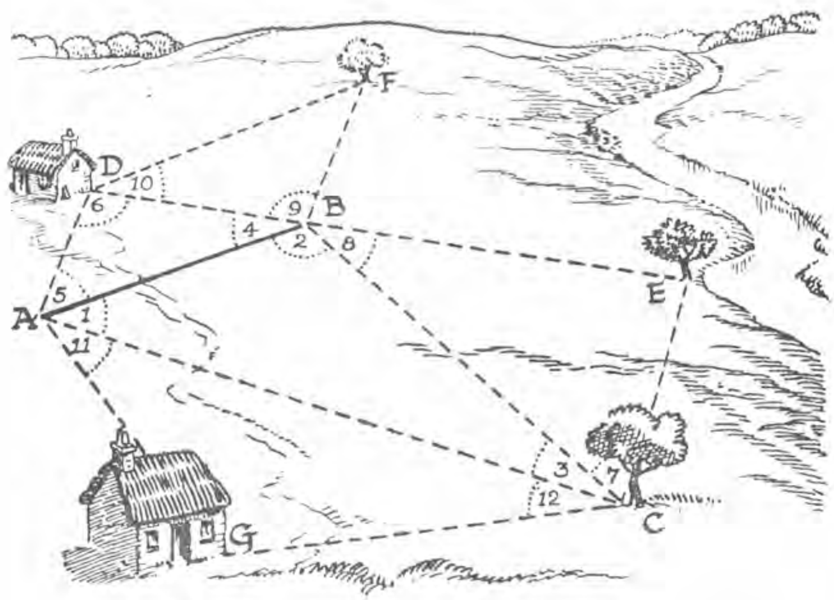


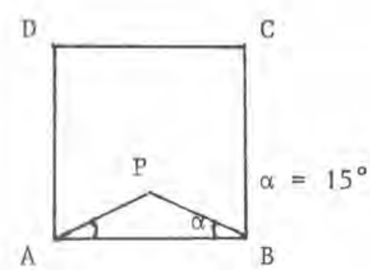
FIG. 87A. — TRIANGULATION POUR UN ÉLÉMENT DE CANEVAS GÉOGRAPHIQUE.

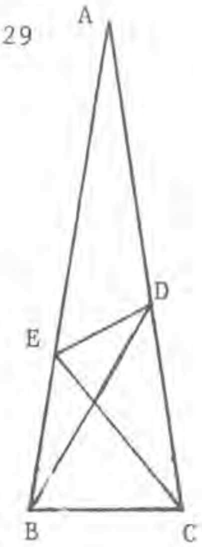
Pour lever le plan d'une région, le géomètre mesure d'abord exactement une distance déterminée AB avec sa chaîne d'arpenteur ou décamètre. C'est la seule mesure de longueur qui soit nécessaire. De l'extrémité A de la ligne AB, il repère avec son théodolite l'angle (1) entre B et C, C étant un objet bien visible tel qu'un arbre. Puis marchant jusqu'à l'autre extrémité de AB, il repère l'angle (2) entre A et C. Il connaît maintenant un côté (AB) et deux angles du triangle ABC. De sorte qu'il peut calculer les longueurs de BC et de AC au moyen de la formule du sinus et des tables de sinus. Ces deux procédés peuvent être employés tour à tour pour obtenir les côtés des triangles BEC et AGC. A cet effet, il repère d'abord l'arbre E qui fait l'angle (8) entre E et C, puis l'angle (7) entre B et E. Il connaît alors deux angles du triangle BEC et la longueur de BC obtenue par le calcul. De même, il repère G de A et de C. En continuant ainsi, il repère dans d'autres directions la ferme D et l'arbre F de A et de B, achevant ainsi le canevas de la région considérée.

▶ Ex. 3.32 : Un bateau parcourt 8 km dans la direction du sud. Il change ensuite de direction et parcourt une distance de 11 km dans une direction qui est à 54° à l'est de la direction nord. A quelle distance sera-t-il alors de son point de départ ?

▶ Ex. 3.33 : Des deux extrémités d'une base rectiligne de 500 m de long, un signal est vu respectivement sous les angles 112° et 63° . Trouver la distance du signal à chacune des extrémités.

▶ Ex. 3.34 : Soit un carré A B C D et à l'intérieur de ce carré un point P tel que PAB soit isocèle et ait deux angles égaux à 15°. Démontrer que P,C,D sont les sommets d'un triangle équilatéral.





▶ Ex. 3.35 : Soit ABC un triangle isocèle dont les deux angles égaux en B et C sont de 80° chacun. Les deux segments BD et CE divisent les angles en B et C respectivement, le premier en deux angles de 20° et 60°, le second en deux angles de 30° et 60°. Trouver la valeur de l'angle $\widehat{EDB}$.

▶ Ex. 3.36 : Montrer que dans tout triangle ABC, même si l'un des angles $\widehat{B}$ ou $\widehat{C}$ est obtus, on a : $a = b \cos\widehat{C} + c \cos\widehat{B}$. En déduire, en utilisant la loi des sinus, la formule dite "d'addition" :

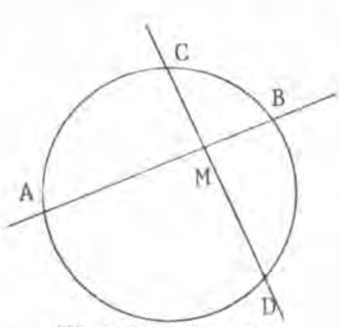
$$\sin(\widehat{B}+\widehat{C}) = \sin\widehat{B}\cos\widehat{C} + \sin\widehat{C}\cos\widehat{B}$$

▶ Ex. 3.37 : Calculer le rayon du cercle inscrit à un triangle en fonction de ses côtés.

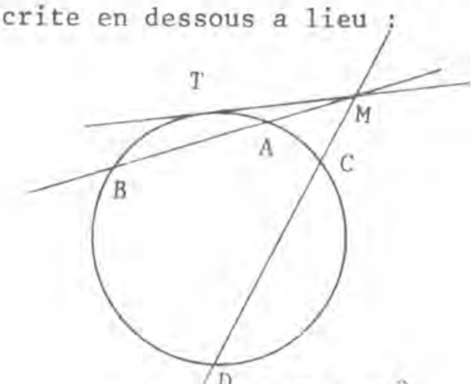
3.4 - *Relations métriques dans le cercle*

Le résultat fondamental est le suivant : si, d'un point M pris dans le plan d'un cercle, on mène des sécantes à ce cercle, le produit des distances du point aux deux points d'intersection (éventuellement confondus) de la sécante avec le cercle est constant.

Il est bien évident que si M est sur le cercle, ce produit vaut constamment zéro. Il reste donc à montrer que, pour chacun des deux cas de figure suivants, la relation écrite en dessous a lieu :



$MA.MB = MC.MD$



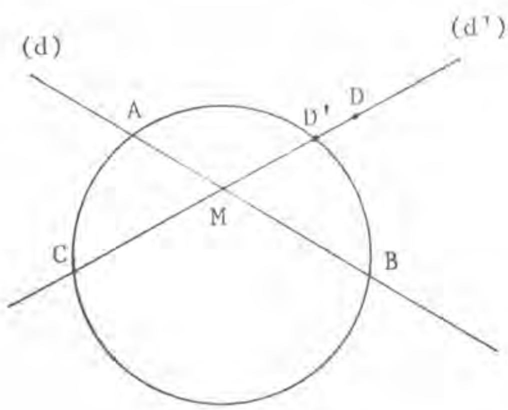
$MA.MB = MC.MD = MT^2$

Le premier cas se résout en écrivant que les triangles M C B et M A D sont semblables (pourquoi ?)

▶ <u>*Ex. 3.38*</u> : Etudier le deuxième cas de figure.

▶ <u>*Ex. 3.39*</u> : En appelant d la distance de M au centre du cercle et r son rayon, montrer que la constante vaut $r^2 - d^2$ dans le premier cas et $d^2 - r^2$ dans le second.

Réciproquement, on obtient une condition suffisante pour que 4 points soient cocycliques. De manière précise : si, sur deux droites d et d' sécantes en M on prend quatre points A,B,C,D (le point M étant ou extérieur aux deux segments AB et CD, ou intérieur à ces deux segments) tels que MA . MB = MC . MD, ces quatre points sont sur un même cercle.



En effet les 3 points non alignés A,B,C déterminent un cercle unique $\mathscr{C}$ qui les circonscrit.

Posons D' le point d'intersection, autre que C, de (d') avec $\mathscr{C}$. D'après le théorème direct on a MA MB = MC MD'. Mais par hypothèse MA MB = MC MD. Donc MD = MD'. Comme D et D' sont tous deux sur la demi-droite déterminée par M sur (d') qui ne contient pas C, on a D = D'.

▶ <u>*Ex. 3.40*</u> : Montrer l'autre réciproque que l'on pouvait prévoir : si trois points alignés M,A,B (M à l'extérieur de AB) et un point C, non aligné avec eux, sont tels que $MA.MB = MC^2$, le cercle circonscrit au triangle ABC est tangent en C à la droite MC.

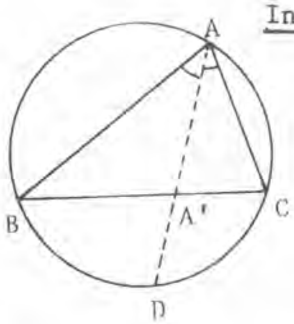
▶ <u>*Ex. 3.41*</u> : On donne un cercle et deux points A et B. Par A on mène une sécante mobile qui coupe le cercle en M et N.

Démontrer que le cercle circonscrit à MNB passe par un autre point fixe.

▶ Ex. 3.42 : Construire un cercle passant par A et B et tangent à une droite donnée. Cas particulier : la droite passe par l'un des points.

▶ Ex. 3.43 : Le produit de deux côtés d'un triangle est égal au produit des deux segments que sa bissectrice détermine sur le troisième côté, augmenté du carré de cette bissectrice.

Indication : travailler sur la figure ci-dessous faisant intervenir le cercle circonscrit à ABC.



Montrer d'abord que AB . AC = AA' . AD

▶ Ex. 3.44 : Retrouver toutes les relations métriques dans le triangle rectangle en usant correctement du résultat établi au début de ce paragraphe.

3.5 - *Quelques constructions*

Les résultats établis dans ce chapitre permettent de résoudre un certain nombre de problèmes de constructions géométriques dont nous présentons ici quelques échantillons. Les outils autorisés sont la règle et le compas.

◆ *Problème 1* - Trouver la moyenne proportionnelle à 2 longueurs données

- de deux façons différentes en faisant apparaître un triangle rectangle.
- en faisant apparaître un cercle.

Applications :

- Construire un carré de même aire qu'un rectangle donné.

- Construire un carré de même aire qu'un triangle donné.

◆ *Problème 2* - Construire un segment dont le carré soit égal à la somme des carrés de deux segments donnés.

Applications :
- Construire un segment de longueur $\sqrt{17}$.
- Plus généralement donner les constructions nécessaires à la construction d'un segment de longueur $\sqrt{n}$.

◆ *Problème 3* - Construire un segment dont le carré soit égal à la différence des carrés de deux segments donnés.

Application : Montrer que si n est impair, on peut construire $\sqrt{n}$ avec un seul triangle rectangle.

◆ *Problème 4* - Construire un triangle connaissant ses trois hauteurs h_a, h_b, h_c.

Indications : on aura nécessairement $a\,h_a = b\,h_b = c\,h_c$ (pourquoi ?)

Tracer alors un cercle convenable de manière à pouvoir placer un point M à l'extérieur de trois points X,Y,Z sur ce cercle tels que $MX = h_a$, $MY = h_b$, $MZ = h_c$.

Soient X',Y',Z' les deuxièmes points d'intersection des sécantes MX, MY, MZ avec le cercle.

On aura (Cf. § 3.4) $MX'h_a = MY'\,h_b = MZ'h_c$.

En divisant membre à membre ces relations avec les premières :

$$\frac{MX'}{a} = \frac{MY'}{b} = \frac{MZ'}{c}$$

Terminer.

◆ *Problème 5* : Construire un cercle passant par deux points donnés A et B et tangent à une droite donnée (d).

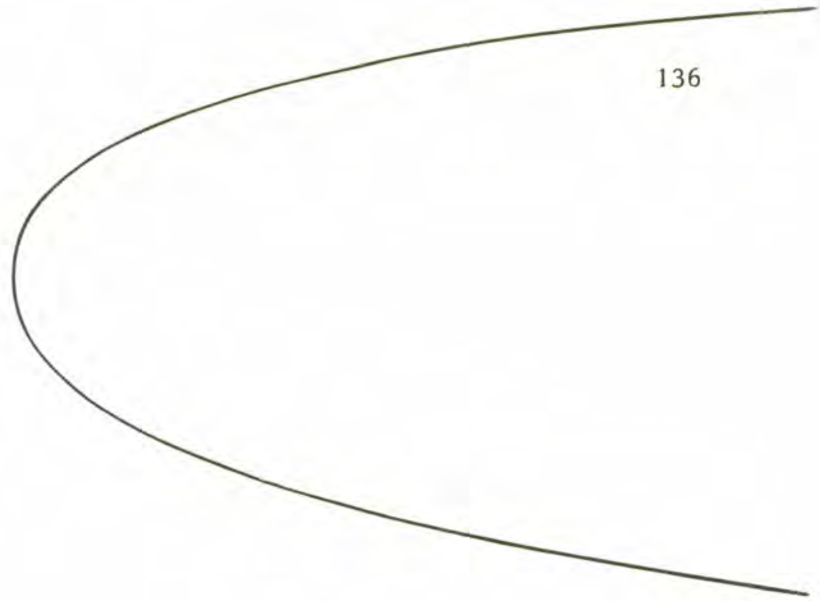
Indication : on cherche à caractériser le cercle par un troisième point, ici son point de tangence T avec (d). Soit I le point d'intersection de AB avec (d) ; T satisfera nécessairement à $IT^2 = IA \cdot IB$ d'où le résultat demandé avec la discussion qui s'impose.

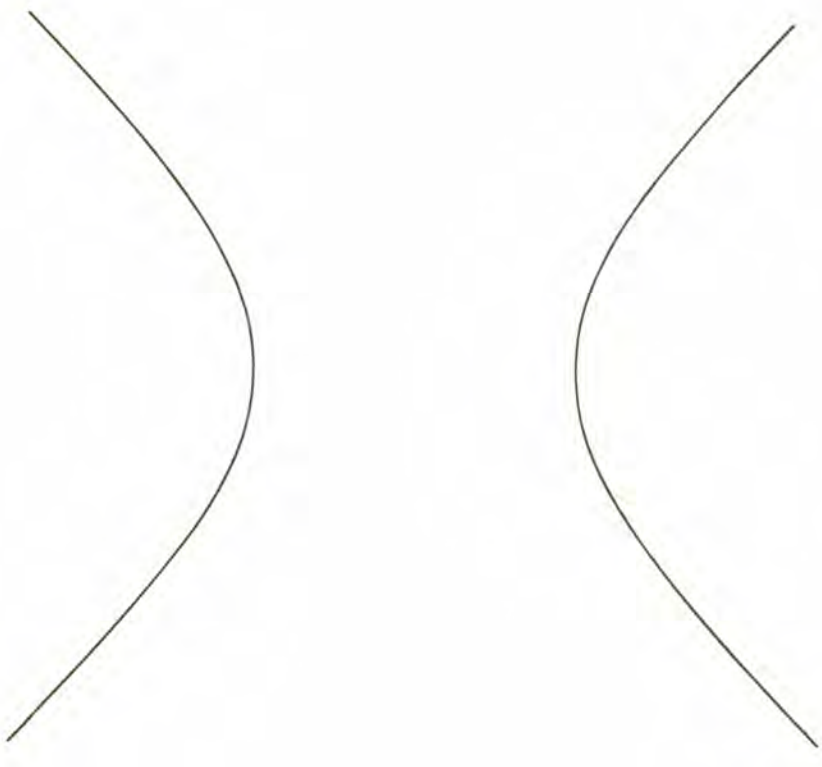
◆ *Problème 6* : Construire un cercle passant par deux points donnés A et B et tangent à un cercle donné (C)

Indication : on cherche encore le point de contact T du cercle demandé avec (C) mais il s'introduit ici une difficulté supplémentaire ... qu'on lève en traçant un cercle quelconque passant par A et B et sécant à (C)

Le Plan et l'Espace

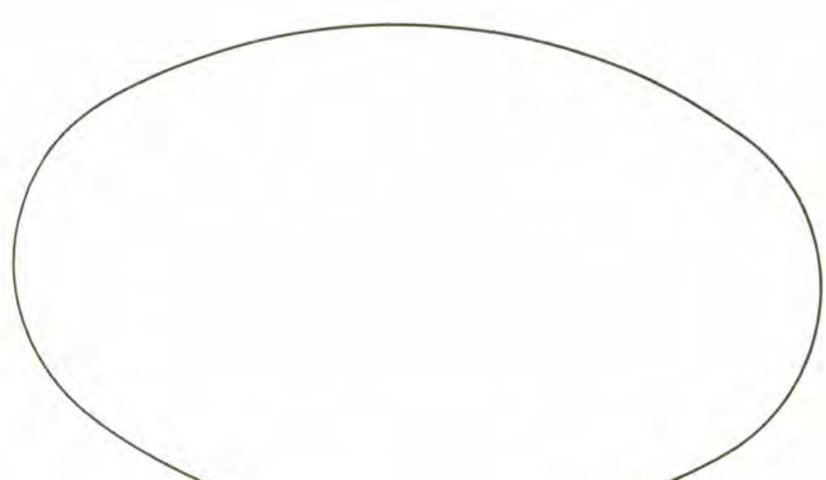
parabole





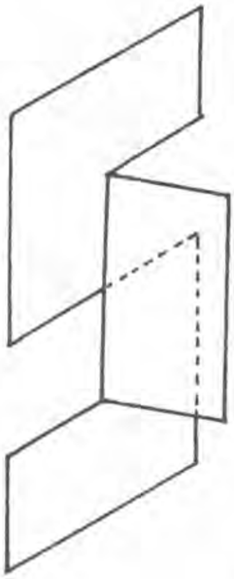
hyperbole

ellipse



I - VOIR L'ESPACE.

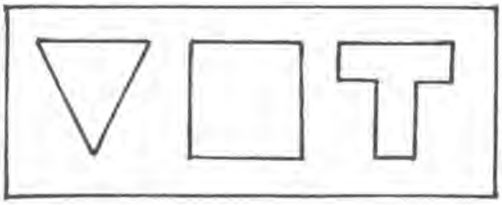
On se propose dans ce chapitre de familiariser le lecteur avec l'espace ; plus précisément avec les objets à trois dimensions et leurs représentations planes. Ce n'est pas le lieu de faire de la théorie : on se contentera pour l'essentiel de proposer des dessins à examiner ou, pour que chacun ait sa part de labeur, de faire dessiner le lecteur.

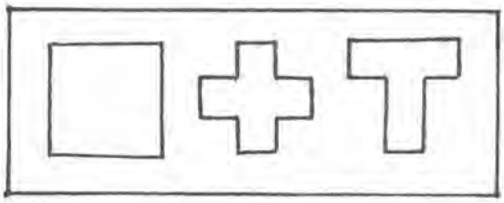


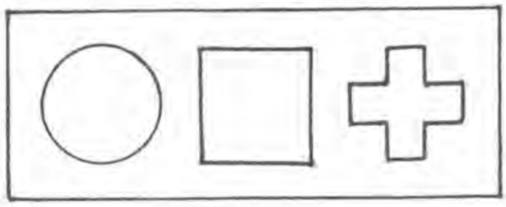
▶ Ex. 1.1 : Peut-on construire, en partant d'une feuille de papier rectangulaire et uniquement par découpage, la figure dessinée ci-contre ?

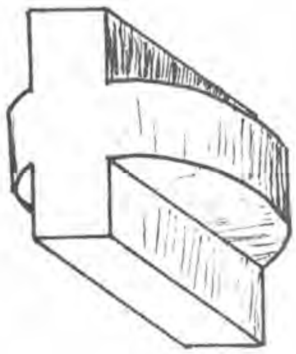
▶ Ex. 1.2 : La figure a) ci-contre représente une feuille de carton percée de trois trous. Concevoir et si possible dessiner un objet qui, convenablement orienté, peut passer exactement dans chacun des trois trous.

Même question pour la figure b), pour la figure c).

a


b


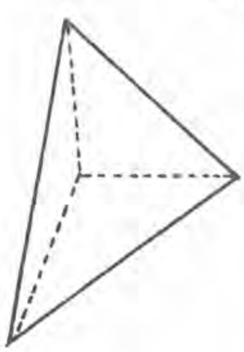
c




Solution : On a dessiné ci-contre l'objet correspondant à la figure c)

▶ *Ex. 1.3* : Un cube de bois est coupé en deux morceaux à l'aide d'une scie. Le contour de la section peut-il être un triangle équilatéral ? un carré ? un pentagone ? un hexagone régulier ?

▶ *Ex. 1.4* : Une pyramide à base carrée (style égyptien) peut-elle être coupée en deux morceaux pour que le contour de la section soit un triangle équilatéral ?

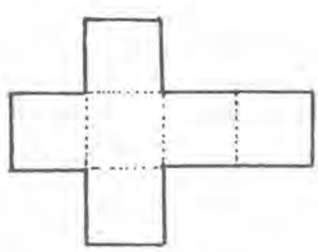


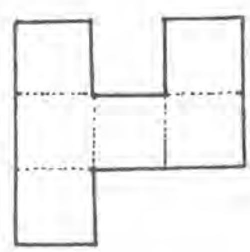
▶ *Ex. 1.5* : Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire. Si les quatre faces d'un tétraèdre sont des triangles équilatéraux (tétraèdre régulier), peut-on le couper pour que le contour de la section soit un carré ? Dans le cas général peut-on obtenir une section en forme de parallélogramme ? de rectangle ? de carré ? (voir le théorème 2.2)

Des solides et leurs patrons

On sait à l'école fabriquer des cubes ou des pavés par pliage et collage d'une feuille de carton convenablement découpée. Une telle feuille est un patron du cube ou du pavé.

Ainsi la figure a) est un patron du cube, la figure b) n'en est pas un.

a) 

b) 

▶ Ex. 1.6 : Dessiner tous les assemblages plans possibles de six carrés égaux (chacun d'eux devant en toucher au moins un autre par un côté). Lesquels d'entre eux sont des patrons du cube ?

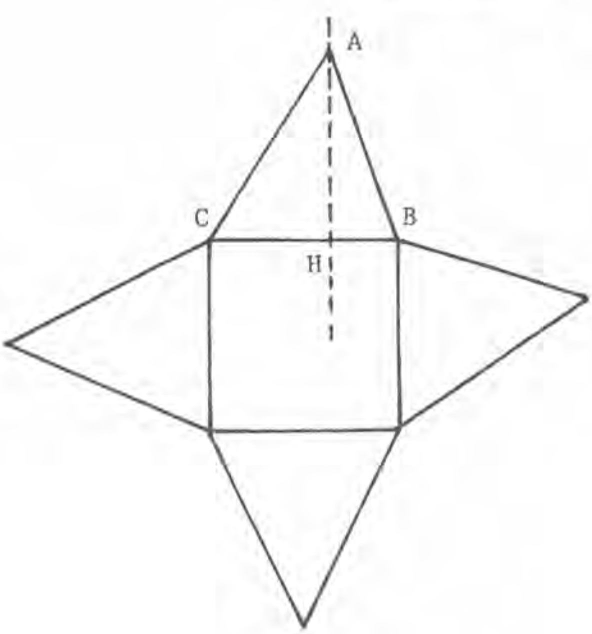
▶ Ex. 1.7 : Reconnaître sur un cube quelles doivent être les arêtes à découper pour obtenir un patron donné.

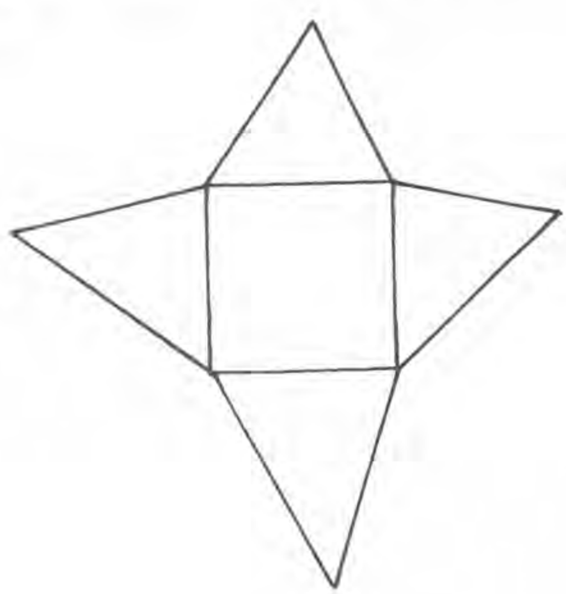
▶ Ex. 1.8 : Faire un patron d'un tétraèdre régulier.

▶ Ex. 1.9 : Faire le patron d'un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles égaux. Peut-on partir d'un triangle quelconque ?

▶ Ex. 1.10: Utiliser le patron du cube pour trouver la longueur du chemin minimal que l'on doit parcourir pour aller d'un point A à un point B du cube en restant sur celui-ci (Trouver la solution est bien. Il faut ensuite la critiquer).

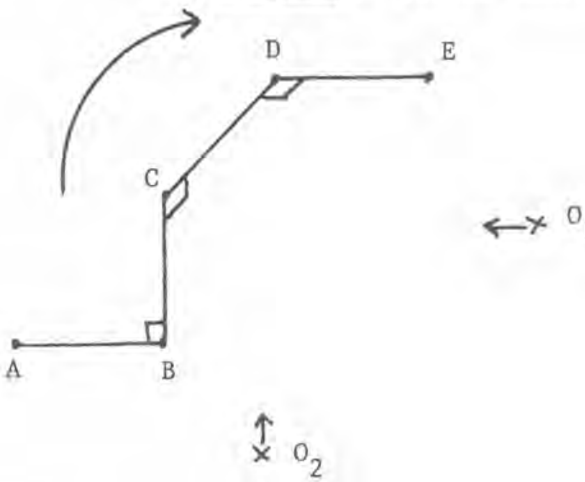
▶ Ex. 1.11: Les dessins ci-dessous sont-ils les patrons de pyramides à bases carrées ? (Remarquer que si l'on monte la pyramide, le sommet A du triangle ABC, qui va se retrouver au sommet de la pyramide, sera à l'aplomb de la droite AH, hauteur de ABC)



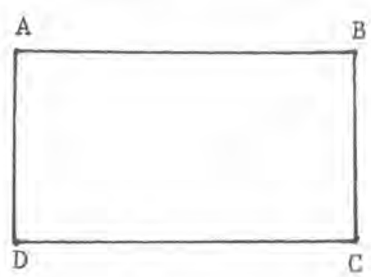


Question subsidiaire : Décrire un processus permettant de construire les patrons de toutes les pyramides à bases carrées.

▶ Ex. 1.12 : Quatre barres sont placées comme l'indique le schéma ci-contre : elles sont deux à deux perpendiculaires, AB va de gauche à droite, BC de bas en haut, CD d'avant en arrière et DE de gauche à droite. On fait tourner ce système d'un quart de tour autour de CD, dans le sens indiqué par la flèche. Dessiner ce que vous voyez alors, ce que voit l'observateur situé en O_1 (sur la droite), l'observateur situé en O_2 (en-dessous).



▶ Ex. 1.13 : Soit un rectangle A B C D. Dessiner la figure obtenue en collant l'arête AD sur l'arête BC de telle sorte que A vienne en B et D en C.

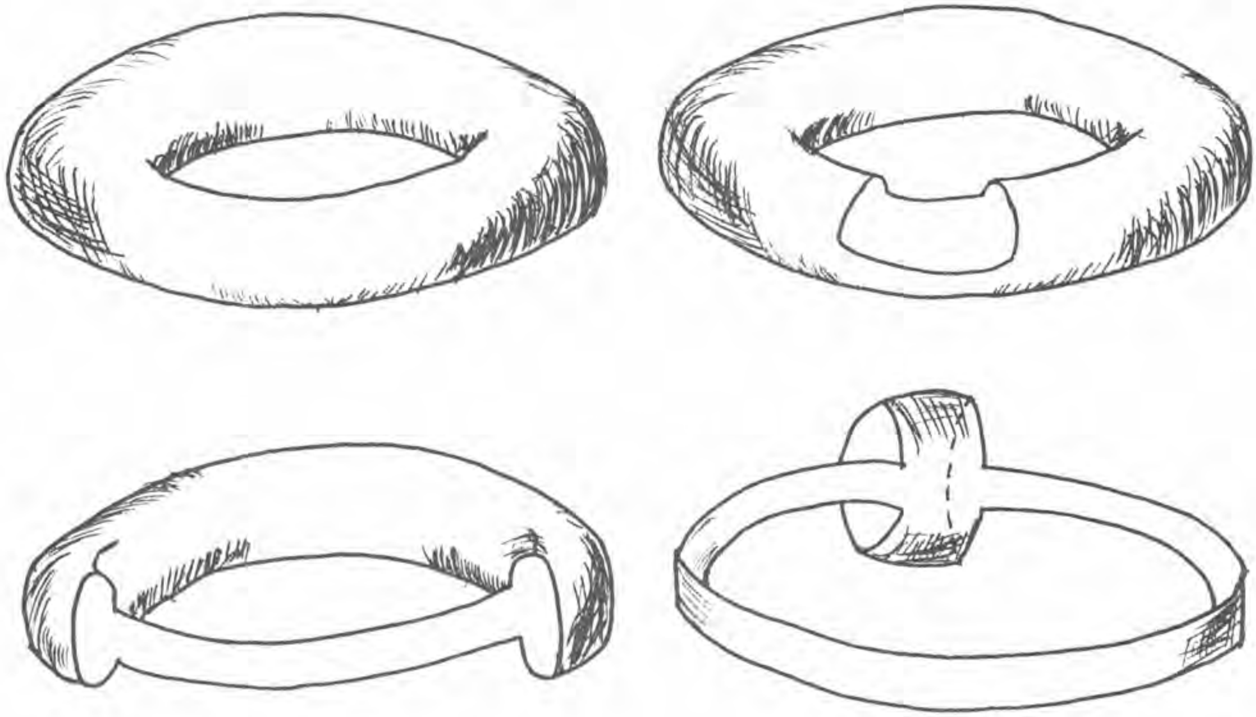


- Même question sauf que A vient en C et D en B.
- Avez-vous dessiné tous les cas de figures possibles ?

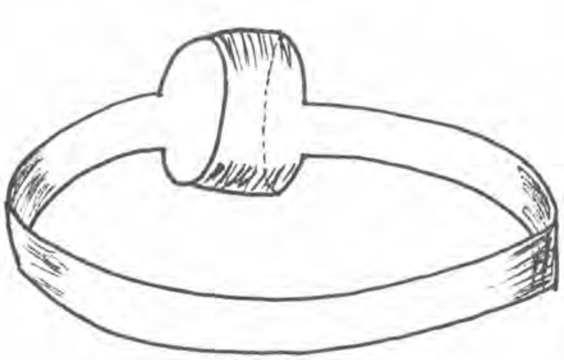
▶ Ex. 1.14 : On considère un <u>tore</u> (c'est à dire une chambre à air gonflée, ou un manchon cylindrique dont on a collé les deux extrémités circulaires).

Dans ce tore on fait un trou "rectangulaire" que l'on agrandit en faisant attention de ne pas couper le tore en deux.

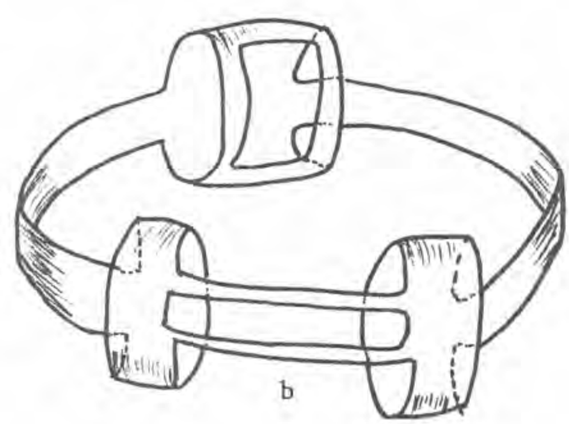
(voir figures page suivante)



La figure a) ci-dessous est-elle le dessin d'un tore avec un grand trou ? Combien y-a-t-il de trous sur la figure b) ?



a



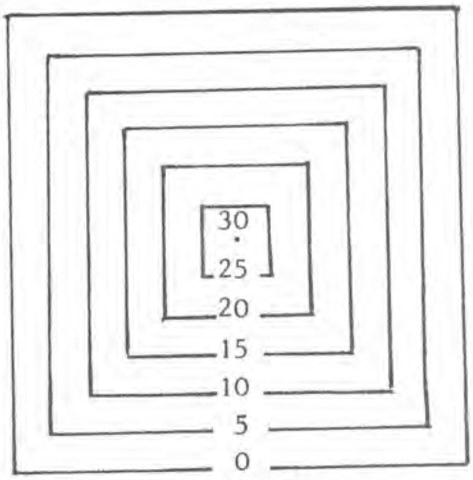
b

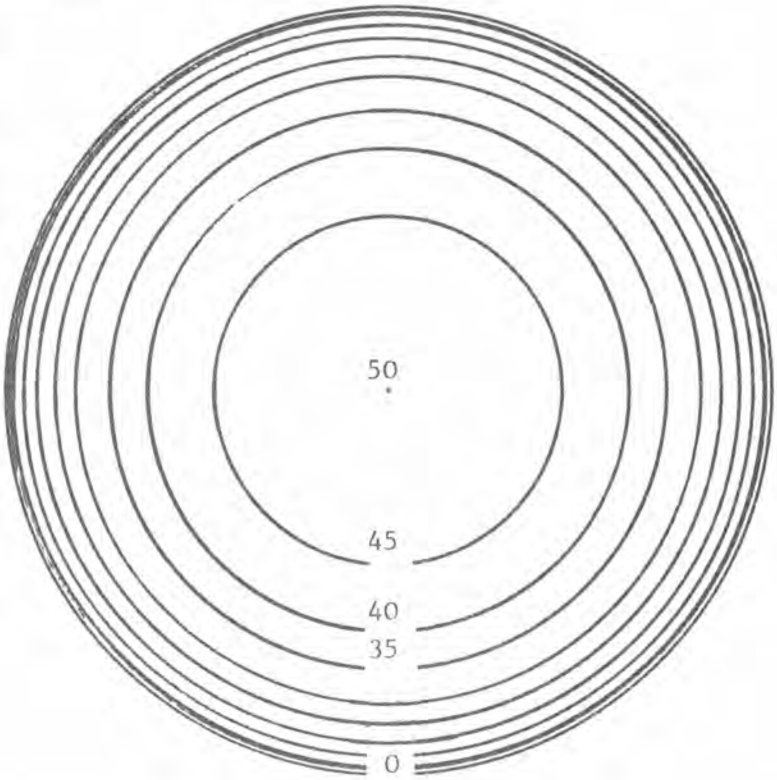
Lignes de niveaux

Pour recréer le relief sur une figure plane, on dessine des lignes de niveaux, chacune d'elles joignant des points de même altitude : c'est d'un usage fréquent en cartographie.

Ces lignes de niveaux sont en principe cotées, c'est à dire que figure sur chacune d'elles, l'altitude où elle se trouve.

Ci-dessous une pyramide et une sphère, vues d' avion, pourvues de leurs lignes de niveaux.



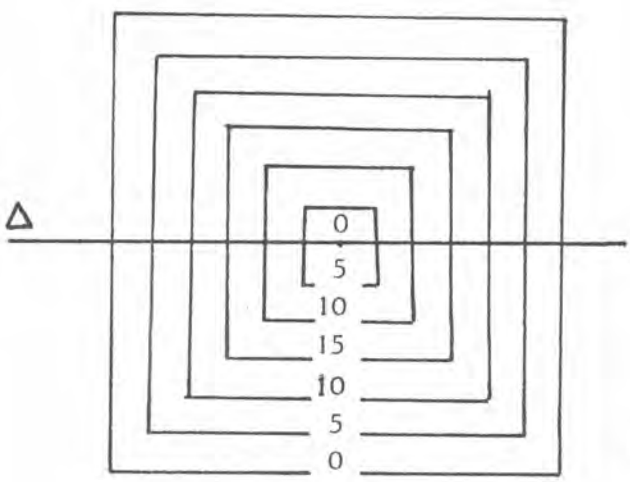


Ex. 1.15 :

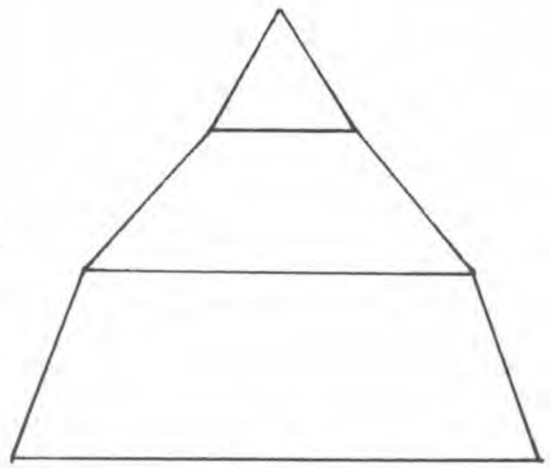
- Les altitudes étant exprimées en millimètres, quelle est la pente des arêtes de la pyramide avec le plan horizontal.
- Comment a-t-on obtenu le dessin de la sphère ?
- Dessiner un cône selon le même procédé.

Ex. 1.16 :

- Dessiner le profil selon la droite Δ de la "pyramide" dessinée ci-après (Fig. a).
- Dessiner les lignes de niveaux - cotées - de la pyramide à base carrée dont un profil, perpendiculaire à un côté de la base, est dessiné ci-après (Fig. b). Ne pas oublier de déterminer la longueur de la base.



a



b

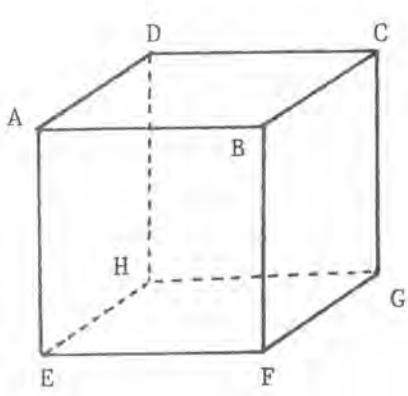
II - LA PERSPECTIVE CAVALIERE

Dans ce chapitre et le suivant on s'intéresse aux techniques élémentaires permettant la représentation graphique des objets de l'espace : comment le dessin interprète des propriétés géométriques et comment la géométrie permet de construire des dessins corrects, tel est notre but.

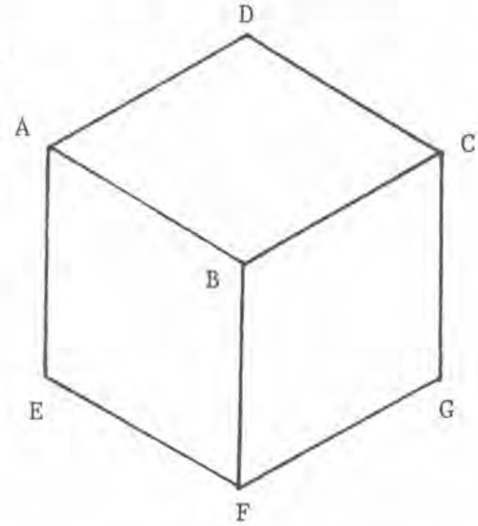
- Chacun a vu se rencontrer loin devant lui les deux rails d'une voie ferrée, et les traverses se rapprocher l'une de l'autre (notons d'ailleurs que l'objectif de l'appareil photo "voit" la même chose). Le dessin en perspective fuyante illustre ce point de vue. Toutefois il n'est pas entièrement satisfaisant : il ne conserve ni les longueurs (les arbres au bord d'une route sont de plus en plus petits), ni le parallélisme : cela pose de sérieux problèmes aux cartographes qui établissent la carte d'une région en recollant des photos aériennes (d'autant plus que la rotondité de la terre apporte une perturbation supplémentaire).

- Dans un premier temps on va éliminer ces défauts en étudiant la perspective cavalière dans laquelle le parallélisme est conservé ainsi que, sous certaines conditions, les mesures de longueurs.

Soit par exemple le dessin classique du cube reproduit ci-contre. Les segments AB, CD, EF .... sont des arêtes parallèles du cube : ils sont représentés par des droites parallèles. Il en est de même pour AD, BC, FG, ... ou AE, BF, CG... . Les segments AB, CD, GH ... sont égaux et de même direction : on les représente par des segments égaux. De même pour AE, BF ... ou AD, BC, ... Mais AB et BC qui sont en réalité égaux ne sont en général pas représentés par des segments égaux, leurs directions étant distinctes.



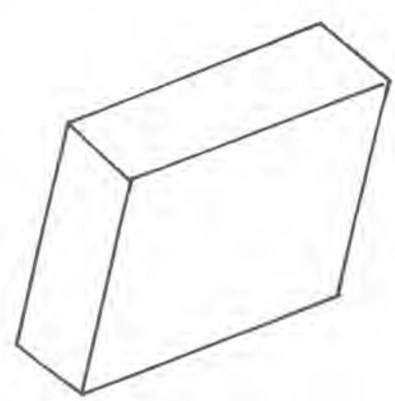
Cette règle négative admet des exceptions. Ainsi les segments AB, BC, BF de la figure ci-contre sont égaux (sur le dessin). Mais AF et BE, égaux en réalité, sont inégaux sur le dessin. Et dans un cas comme dans l'autre, certains angles droits du cube sont représentés par des angles non droits. Essayez de représenter un cube dont les trois faces visibles sont des carrés !



Il n'existe pas de représentation plane du cube qui conserve toutes les longueurs et tous les angles.

Comme nous le signalions plus haut, cette perspective ne correspond pas à notre vision. Toutefois si on observe une boîte d'allumettes placée assez loin de nous, on n'a pas l'impression de voir ses arêtes se rencontrer. La perspective cavalière correspond à peu près à la vision d'un objet pas très grand et assez éloigné (par exemple une maison de la vallée vue depuis la cime qui la domine).

D'ailleurs lorsque ce type de perspective est utilisé dans le dessin industriel ou l'architecture, ce n'est pas en terme de vraisemblance qu'on le juge, mais de commodité : pouvoir comparer des longueurs avec un double décimètre est commode. Signalons de plus que les dessinateurs utilisent des règles précises pour ce type de dessin, règles qui permettent de comparer des longueurs même lorsqu'elles ne sont pas portées par des droites parallèles. Nous n'en tiendrons pas compte ici : nous essaierons seulement de faire des dessins assez vraisemblables : ainsi nous ne prétendrons pas que la figure ci-contre est un cube.



<u>*Remarque*</u> : Dans le dessin industriel, les projections sont faites selon des directions établies par convention. Toutefois les règles que nous

donnons sont vraies pour tous les types de projection (et même pour des transformations affines).

Avant de dessiner énonçons les règles de la perspective cavalière.

RPC 1 : Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.

RPC 2 :
- Deux droites sécantes sont représentées par deux droites sécantes.
- Deux droites coplanaires (c'est à dire dans un même plan) représentées par deux droites sécantes sont sécantes.

RPC 3 : Deux segments égaux et parallèles sont représentés par des segments égaux. Il résulte de ceci la règle suivante :

RPC 4 : Le rapport de deux segments parallèles est le même dans l'espace et sur le dessin.

On aura à utiliser les résultats suivants :

Théorème 2.1 -

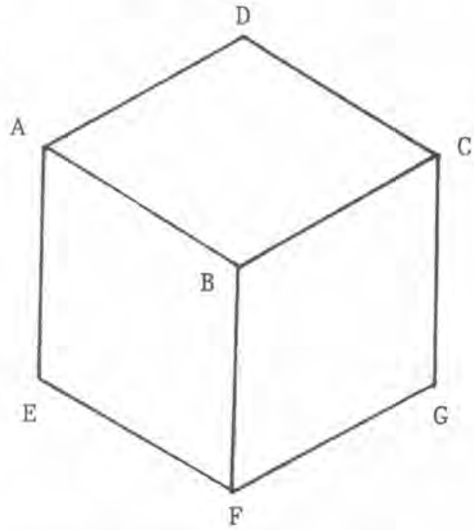
Un plan Π coupe deux plans parallèles selon deux droites parallèles.

Théorème 2.2 -

Soient P_1 et P_2 deux plans se coupant selon une droite D et soit Π un plan parallèle à D. Π coupe P_1 et P_2 selon deux droites parallèles (si Π n'est parallèle ni à P_1 ni à P_2).

Remarque : Le lecteur est bien entendu invité à faire les dessins proposés. En outre, il peut imaginer sans difficultés en s'inspirant des exercices donnés, d'autres situations à représenter.

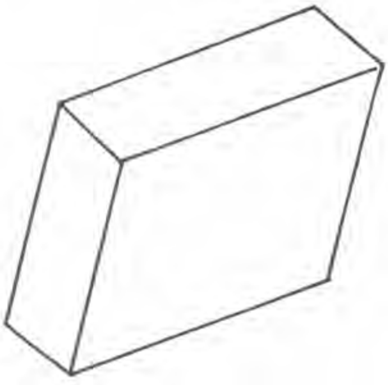
Cette règle négative admet des exceptions. Ainsi les segments AB, BC, BF de la figure ci-contre sont égaux (sur le dessin). Mais AF et BE, égaux en réalité, sont inégaux sur le dessin. Et dans un cas comme dans l'autre, certains angles droits du cube sont représentés par des angles non droits. Essayez de représenter un cube dont les trois faces visibles sont des carrés !



Il n'existe pas de représentation plane du cube qui conserve toutes les longueurs et tous les angles.

Comme nous le signalions plus haut, cette perspective ne correspond pas à notre vision. Toutefois si on observe une boîte d'allumettes placée assez loin de nous, on n'a pas l'impression de voir ses arêtes se rencontrer. La perspective cavalière correspond à peu près à la vision d'un objet pas très grand et assez éloigné (par exemple une maison de la vallée vue depuis la cime qui la domine).

D'ailleurs lorsque ce type de perspective est utilisé dans le dessin industriel ou l'architecture, ce n'est pas en terme de vraisemblance qu'on le juge, mais de commodité : pouvoir comparer des longueurs avec un double décimètre est commode. Signalons de plus que les dessinateurs utilisent des règles précises pour ce type de dessin, règles qui permettent de comparer des longueurs même lorsqu'elles ne sont pas portées par des droites parallèles. Nous n'en tiendrons pas compte ici : nous essaierons seulement de faire des dessins assez vraisemblables : ainsi nous ne prétendrons pas que la figure ci-contre est un cube.



Remarque : Dans le dessin industriel, les projections sont faites selon des directions établies par convention. Toutefois les règles que nous donnons sont vraies pour tous les types de projection (et même pour des transformations affines).

Avant de dessiner énonçons les règles de la perspective cavalière.

R P C 1 : Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.

R P C 2 :
- Deux droites sécantes sont représentées par deux droites sécantes.
- Deux droites coplanaires (c'est à dire dans un même plan) représentées par deux droites sécantes sont sécantes.

R P C 3 : Deux segments égaux et parallèles sont représentés par des segments égaux. Il résulte de ceci la règle suivante :

R P C 4 : Le rapport de deux segments parallèles est le même dans l'espace et sur le dessin.

On aura à utiliser les résultats suivants :

Théorème 2.1 -

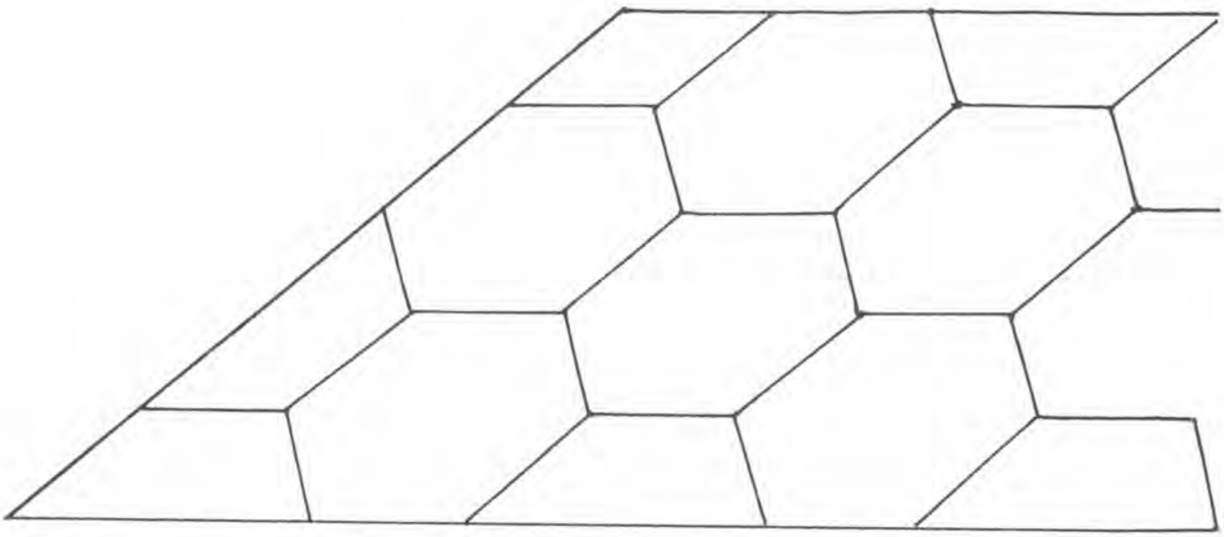
Un plan Π coupe deux plans parallèles selon deux droites parallèles.

Théorème 2.2 -

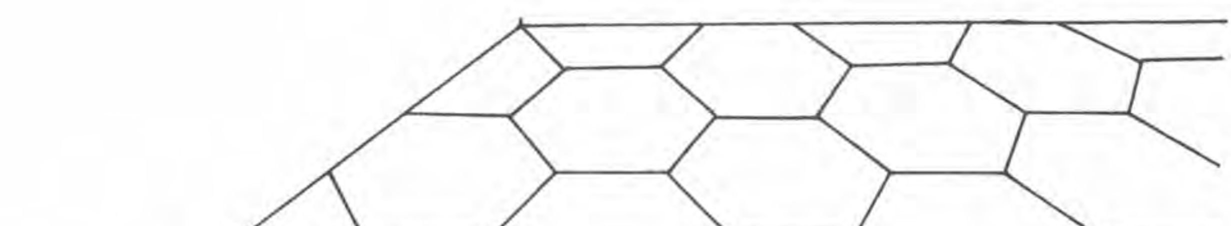
Soient P_1 et P_2 deux plans se coupant selon une droite D et soit Π un plan parallèle à D. Π coupe P_1 et P_2 selon deux droites parallèles (si Π n'est parallèle ni à P_1 ni à P_2).

Remarque : Le lecteur est bien entendu invité à faire les dessins proposés. En outre, il peut imaginer sans difficultés en s'inspirant des exercices donnés, d'autres situations à représenter.

perspective cavalière



perspective fuyante



Thème 1 - Dessin d'une table rectangulaire

Soit à représenter une table de 2 m sur 1 m, haute de 0,8 m. On suppose que les pattes se trouvent à 0,1 m des bords.(Cf. figure a la table vue de dessus).

La table est représentée sur la figure b). Le plateau est un parallélogramme, l'emplacement des pattes résulte de R P C 4 (0,1 m est le $\frac{1}{10}$ de la largeur et le $\frac{1}{20}$ de la longueur).

Compte-tenu de ce qui précède on n'a pas à se préoccuper des rapports entre longueur, largeur, hauteur.

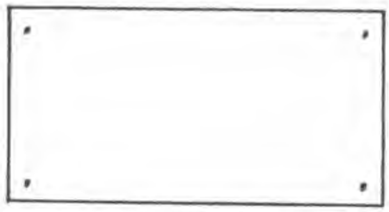
▶ *Ex. 1.1* : Dessiner la table dont les vues de face et de profil sont données sur la figure c).

▶ *Ex. 2.2* : On voit souvent dans les salles de réunion des tables dont le dessus a la forme d'un trapèze isocèle. Comment les dessiner ?

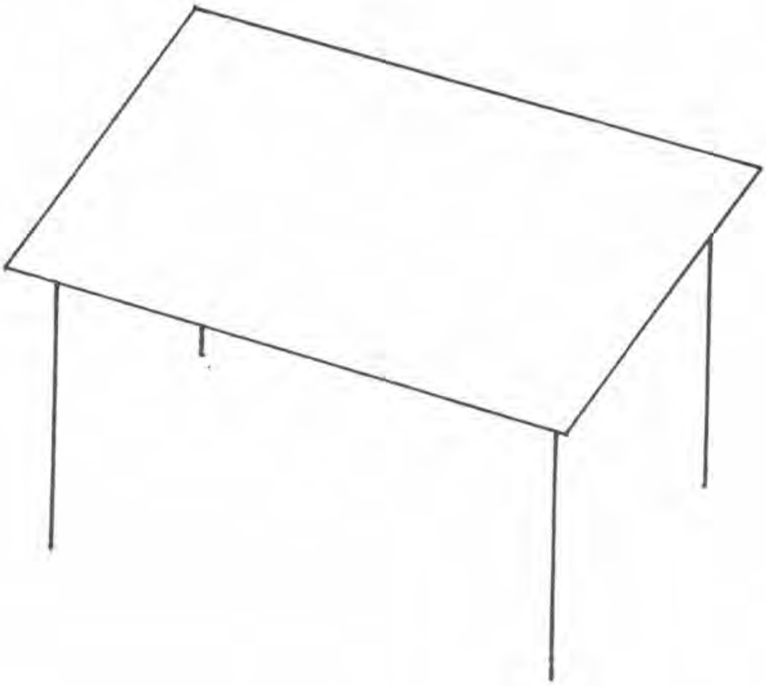
▶ *Ex. 2.3* : Dessiner une table avec quatre chaises autour.

▶ *Ex. 2.4* : Sur la figure d) on a commencé le dessin d'une table de longueur 2 m, de largeur 1 m. Comme dans la figure c) les pattes sont obliques : vu de dessus un coin de la table a l'aspect de la figure e). Achever le dessin de la table.

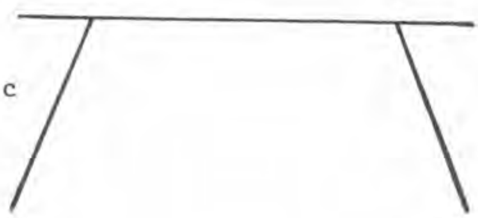
a

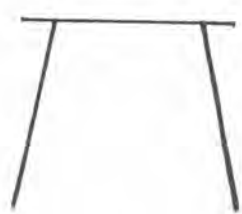


b

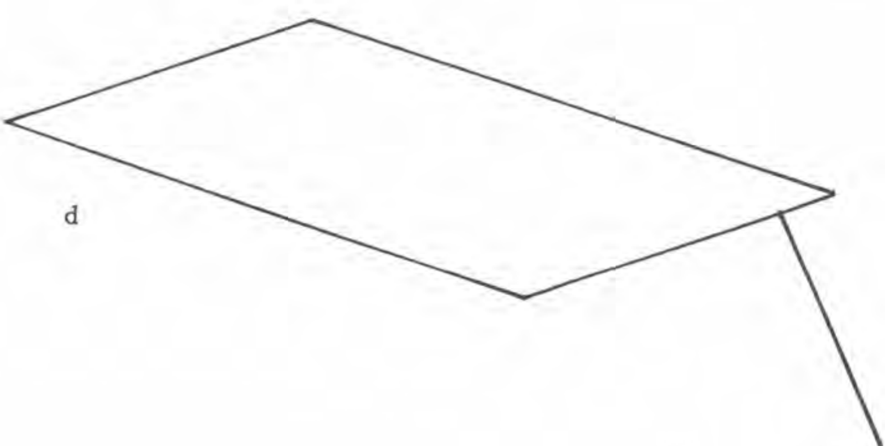


c

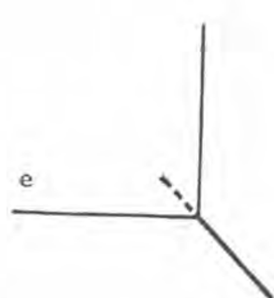




d



e



Thème 2 - L'hexagone et l'octogone

Soit ABCDEF un hexagone régulier. On sait que AD, BE et CF se coupent en leurs milieux, que BC et FE sont parallèles à AD, que AB et ED sont parallèles à FC .... On souhaite dessiner la vue en perspective de cet hexagone. Sont donnés les segments AD et AB (Fig. a). Comment terminer la figure ?

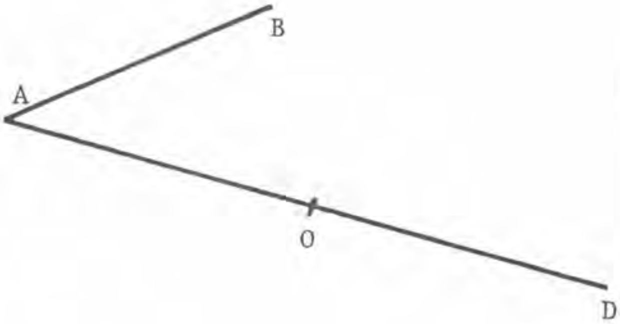
Solution : (Fig b). Soit O le milieu de AD. On mène par B la parallèle à AD et par O la parallèle à AB. Ces droites se coupent en C. Puis on reporte OE = OB sur la droite OB, OF = OC sur la droite DC.

▶ Ex. 2.5 : Dessiner un guéridon dont le dessus est un hexagone, dont le pied unique repose sur une embrase constituée par un hexagone de côté deux fois plus petit et décalé de 30° par rapport à celui du dessus.

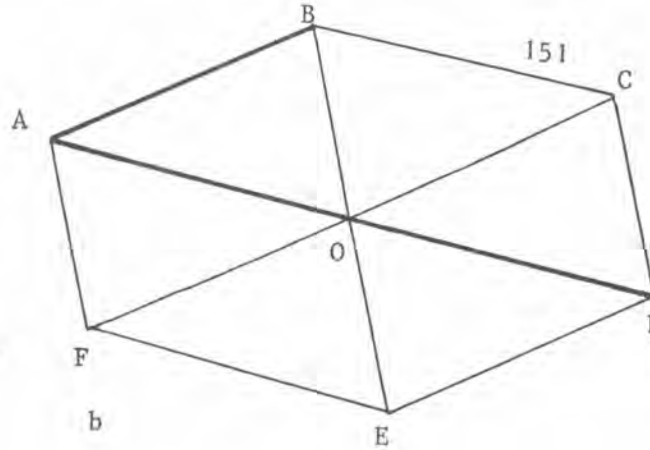
▶ Ex. 2.6 : Sur la figure c on a dessiné un octogone qui est vu en perspective sur la figure d. Cette dernière a été faite en partant des segments AE et AB donnés. Retrouver la construction.

▶ Ex. 2.7 : Peut-on construire un hexagone dont on s'est donné deux côtés consécutifs ? Même question pour un octogone. Plus généralement comment construire en perspective des polygones réguliers dont le dessin est commencé ?

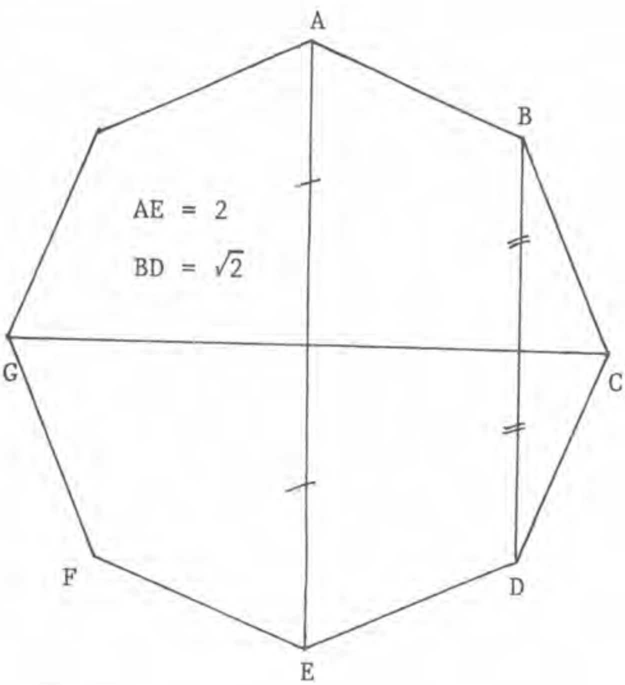
▶ Ex. 2.8 :
- Sur la figure e on voit un cube privé de ses coins. Chaque face apparaît comme un octogone. Ces octogones sont-ils égaux ? Sont-ils réguliers ?
- Sur la figure f on voit la section d'un cube scié en deux. Cette section est-elle un hexagone régulier ?



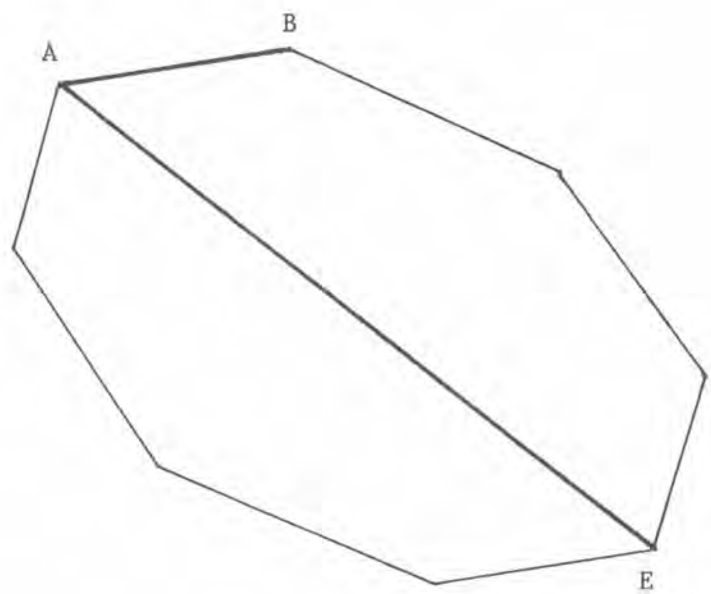
a



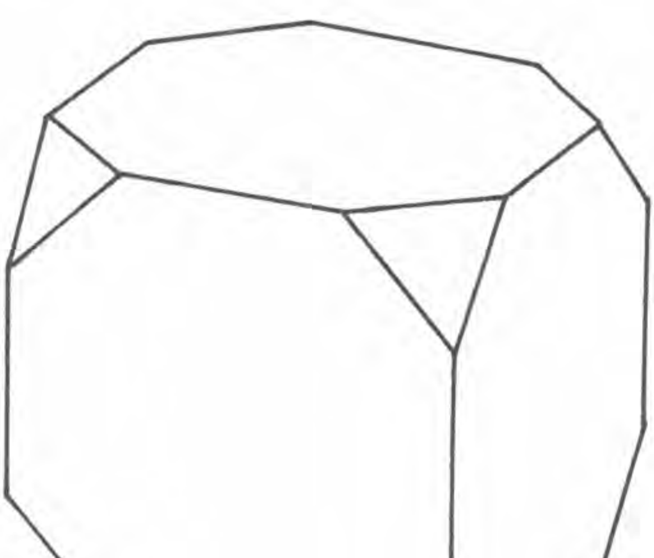
b



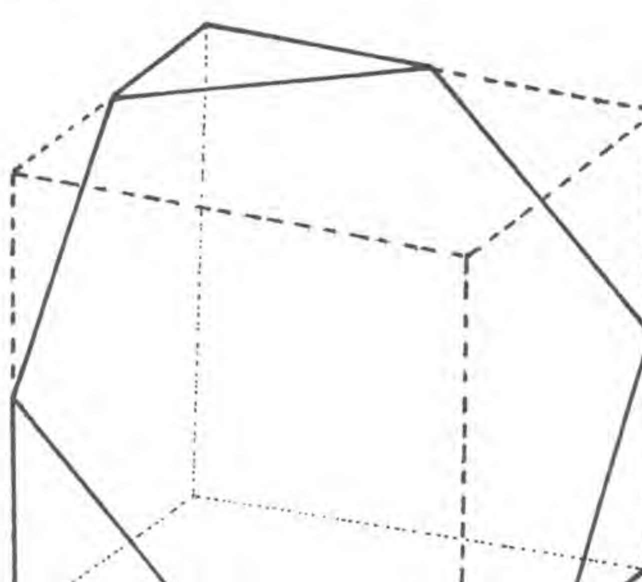
c



d



e



f

Thème 3 - *Section d'une pyramide par un plan*

On se donne une pyramide de base carrée ABCD, de sommet O. Trois points M, N, P sont dessinés sur les arêtes (Figure a). On coupe la pyramide par le plan passant par M, N, P et on demande de dessiner la section.

Solution : Il suffit de trouver le point Q où le plan π passant par M, N, P rencontre l'arête OP. Les droites MN et AB se coupent en U, PN et BC se coupent en V. La droute UV est dans le plan de base de la pyramide et coupe AD en W. U est dans π (car U est sur MN), ainsi que V. Donc la droite UV est dans π. La droite MW est donc dans π et aussi dans le plan de la face AOD. Donc WM coupe OP en Q.

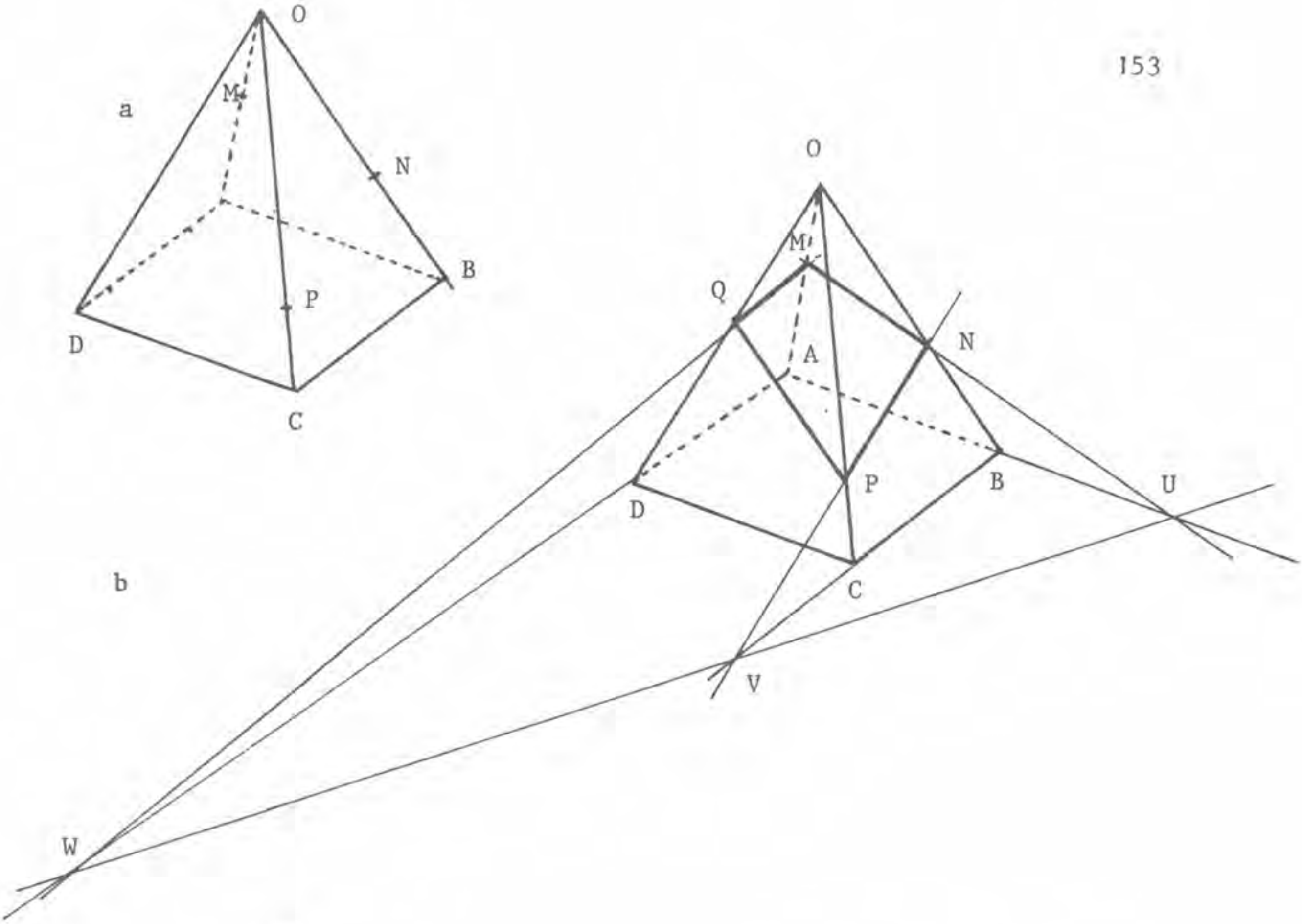
▶ Ex. 2.9 : Les quatre points MNPQ sur les arêtes de la pyramide représentée sur la figure c sont-ils dans un même plan ?

▶ Ex. 2.10 : La section MNPQ du tétraèdre régulier de la figure d est-elle un carré ?

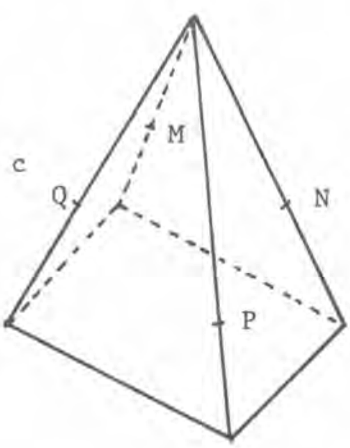
▶ Ex. 2.11 : Dessiner l'intersection de la pyramide de la figure e par le plan passant par la droite Δ et le point M. La droite Δ est dans le plan de la base de la pyramide.

a

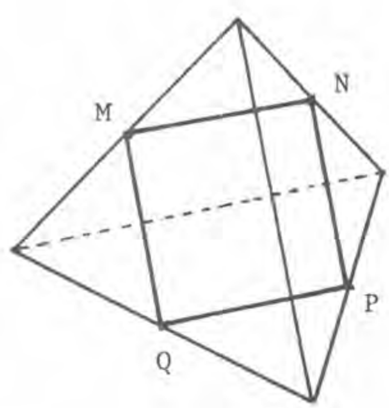
b



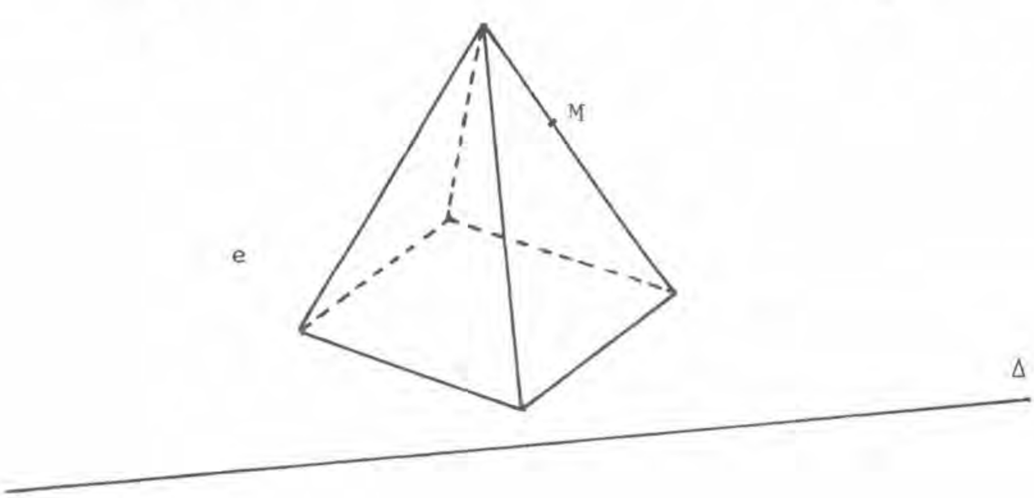
c



d



e



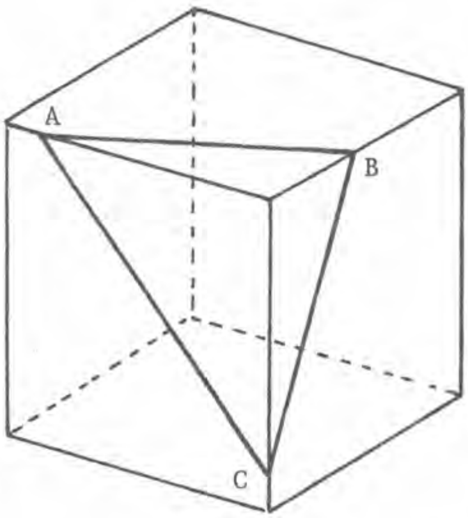
Thème 4 - Sections d'un cube par un plan

On se donne un cube et trois points non alignés situés sur ses arêtes. Ces points définissent un plan. Quelle est la section du cube par ce plan ? C'est ce que l'on va étudier - ou laisser étudier au lecteur - dans ce qui suit. Dans chacune des figures qui suivent les trois points donnés sont désignés par A, B et C et π est le plan qu'ils définissent.

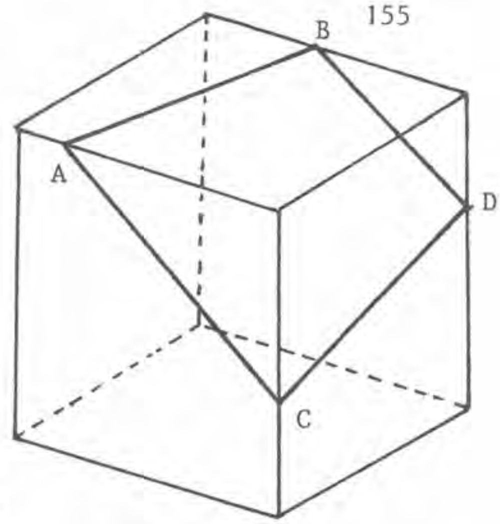
- Si A, B et C sont comme dans la figure a, la solution est immédiate : la section est le triangle ABC.
- Si A, B et C sont comme dans b : les faces arrière et avant du cube sont parallèles donc le plan, coupe la face arrière selon une droite parallèle à AC (Th. 2.1). Ainsi, la section est le quadrilatère A B C D.

▶ Ex. 2.12 (*Figure* c) : Construire la section du cube par π. On pourra soit utiliser le théorème 2.1 pour trouver la section de π et des faces avant et inférieure, soit construire d'abord la section de π par les arêtes PQ et PR.

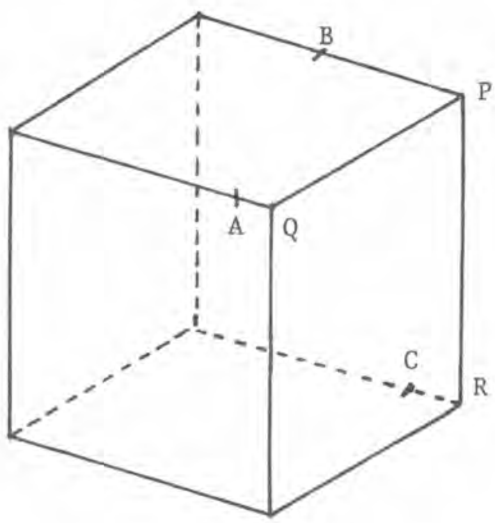
▶ Ex. 2.13 (*Figure* d) : On a construit la section du cube et du plan π. Décrire et justifier la construction (on a d'abord construit U tel que BU soit parallèle à PQ, puis le point I).



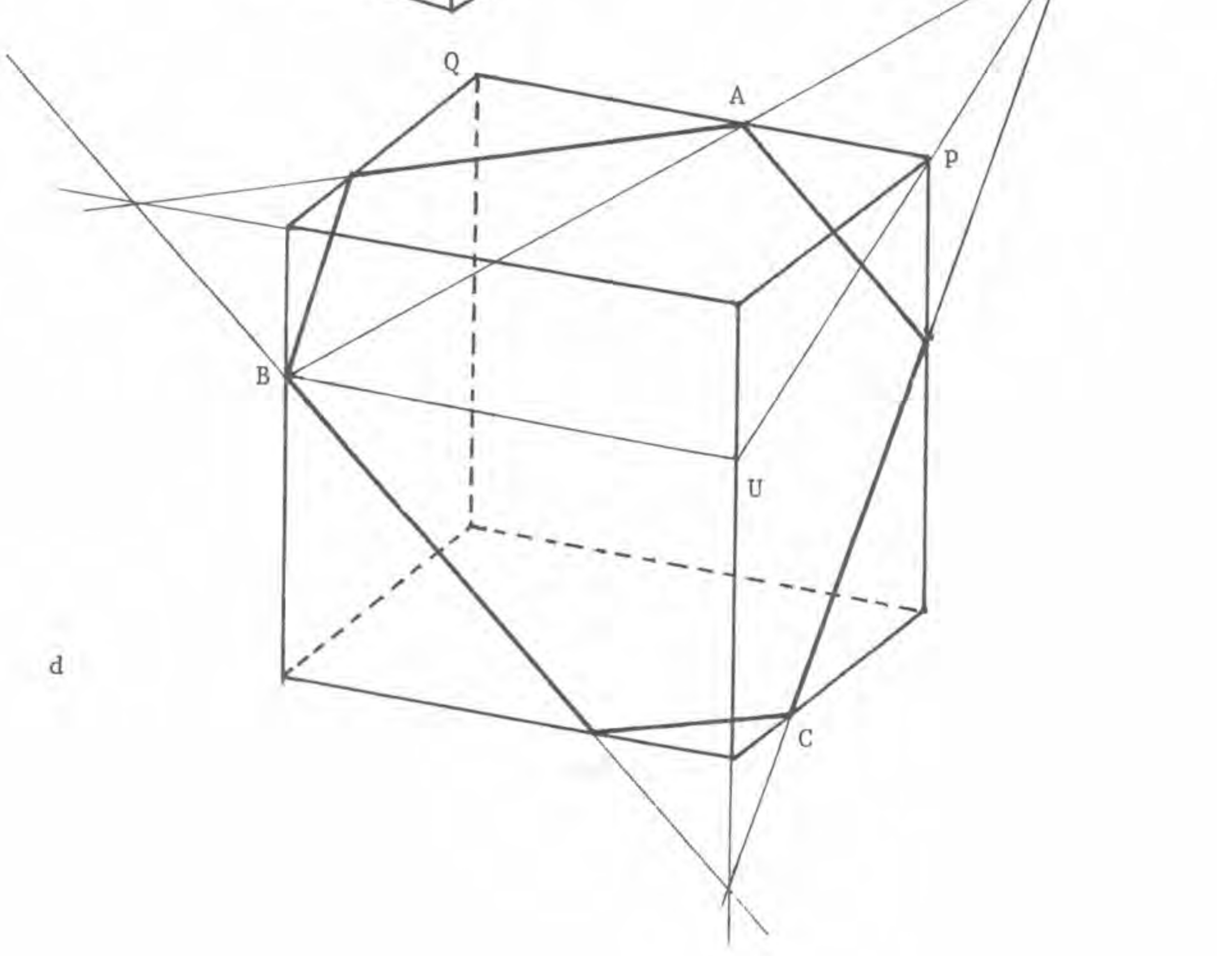
a



b



c



d

Thème 4 (suite)

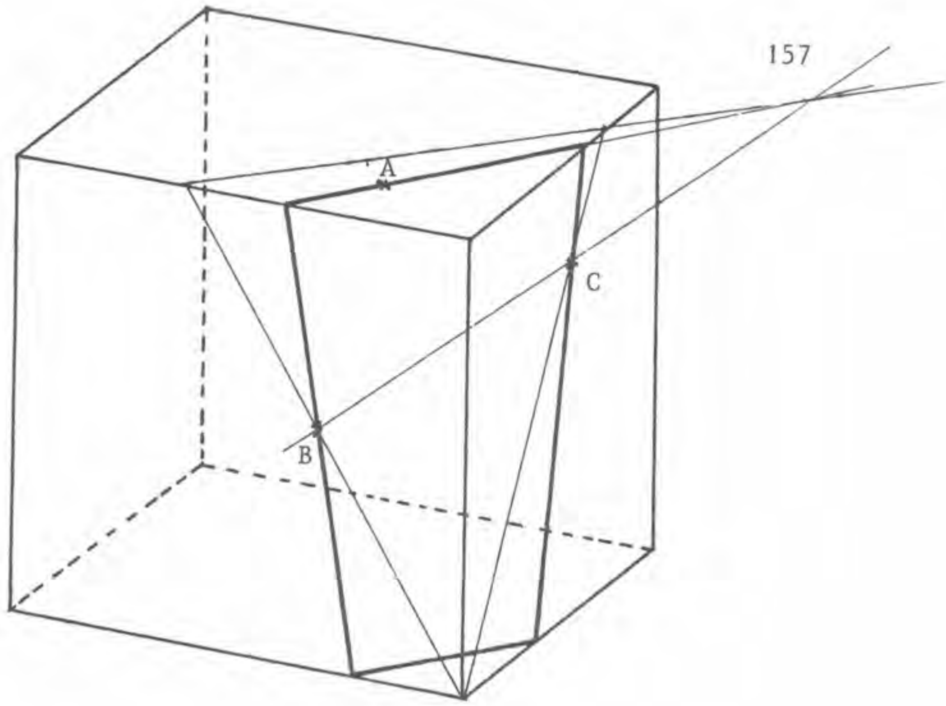
Dans la figure a ci-contre on a construit la section du cube par le plan π défini par A, B et C tels que A est sur la face avant, B sur la face latérale droite et C sur la face supérieure.

▶ Ex. 2.14 : Décrire (et justifier) la construction donnée sur la figure a.

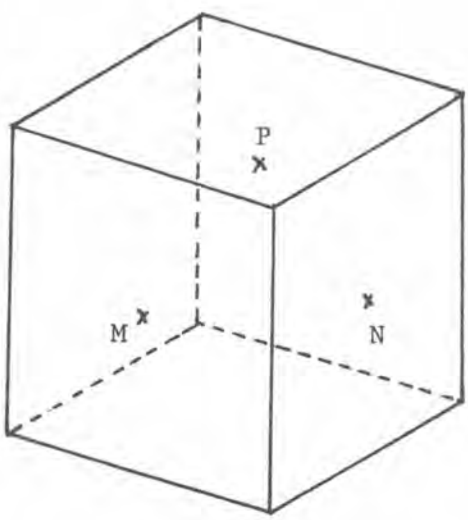
▶ Ex. 2.15 : (Figure b) Construire la section du cube par le plan passant par M, N, P. M est le centre de la face avant, N le centre de la face latérale droite, P un point de la face supérieure.

▶ Ex. 2.16 : Le cube de la figure c a été obtenu en chanfreinant chaque arête au quart de sa longueur. Reconstituer le cube. Retrouver le procédé de construction.

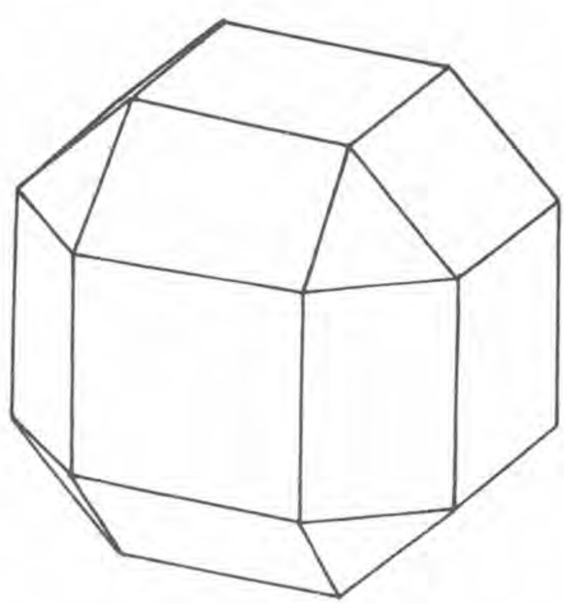
▶ Ex. 2.17 : Dessiner un cube dont chaque arête a été chanfreinée au tiers de sa longueur, à la moitié de sa longueur.



a



b



c

Thème 5 - Les ombres

Un objet posé sur une table est éclairé par une ampoule (ou par le soleil). Comment dessiner l'ombre portée sur la table ?

Exemple (Figure a). L' désigne la projection de l'ampoule L sur la table.
L'ombre A' du point A est déterminée par l'intersection des droites LA et L'E (pourquoi ?). On construit ainsi les ombres des points ABCD qui définissent l'ombre du cube.

▶ *Ex. 2.18* : Faire des dessins variés en modifiant l'emplacement de l'ampoule, en remplaçant le cube par un autre solide.

Remarque : On a jusqu'alors beaucoup parlé de cubes. Toutefois il faut signaler que dans la plupart des cas le mot cube peut être remplacé par le mot parallélépipède (éventuellement oblique). Si on ne tient pas compte des contraintes signalées dans la remarque de la page 145 les dessins usuels du cube que nous donnons ici sont aussi des dessins de parallélépipèdes.

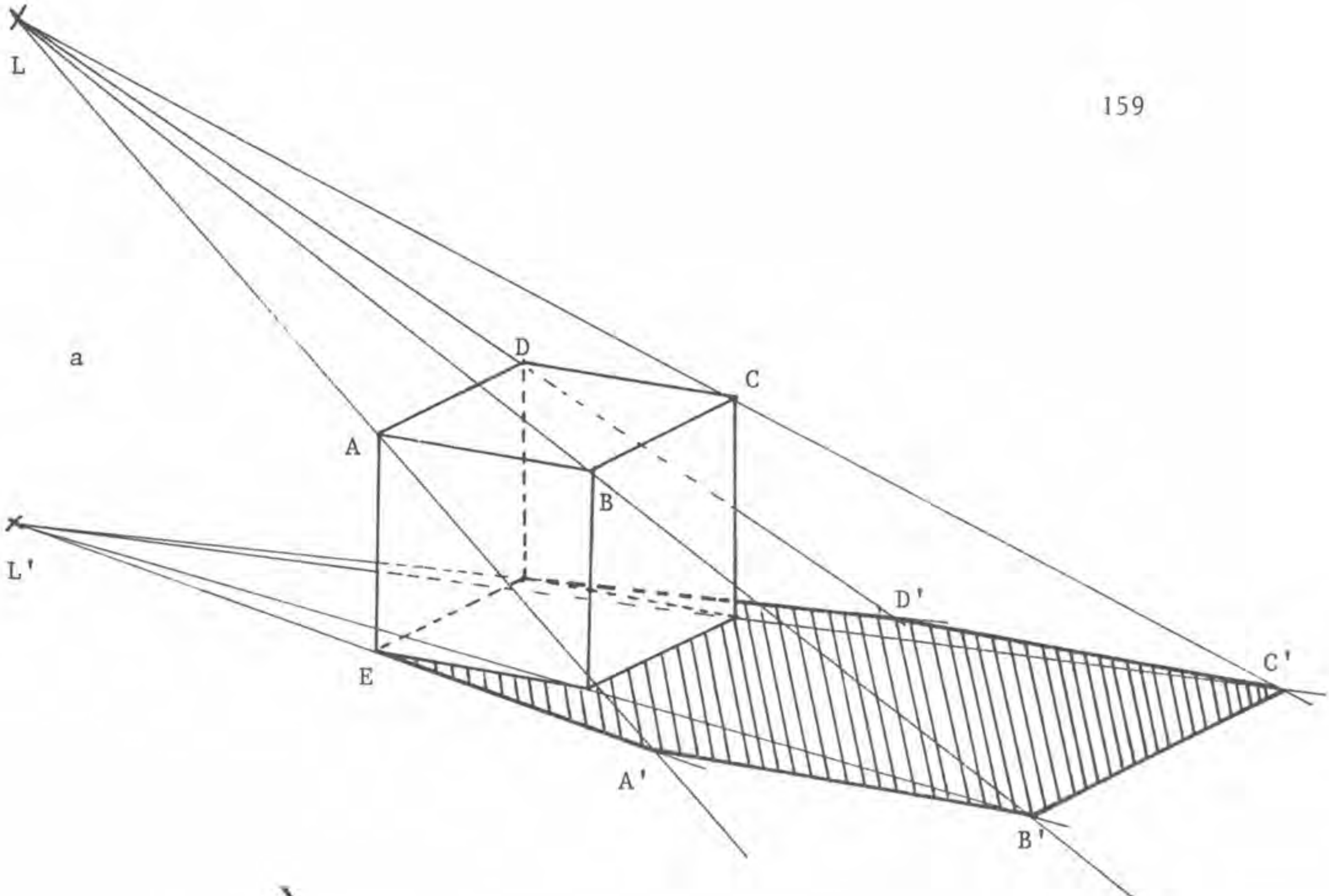
▶ *Ex. 2.19* : La donnée de L' est nécessaire, car L' situe L par rapport au cube. On peut remplacer cette donnée par une autre, par exemple l'ombre A' du point A. Faire un dessin dans cette situation.

▶ *Ex. 2.20* (Figure b): Dessiner l'ombre du parallélépipède éclairé par le soleil. La direction des rayons est donnée par la flèche.

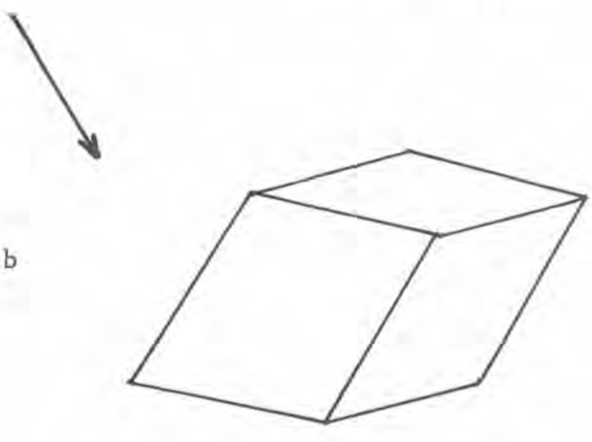
▶ *Ex. 2.21* : Le rectangle ABCD éclairé par l'ampoule L (Figure c) a une ombre A' B' C' D'. Achever le dessin de l'ombre.

Même question pour la figure d.

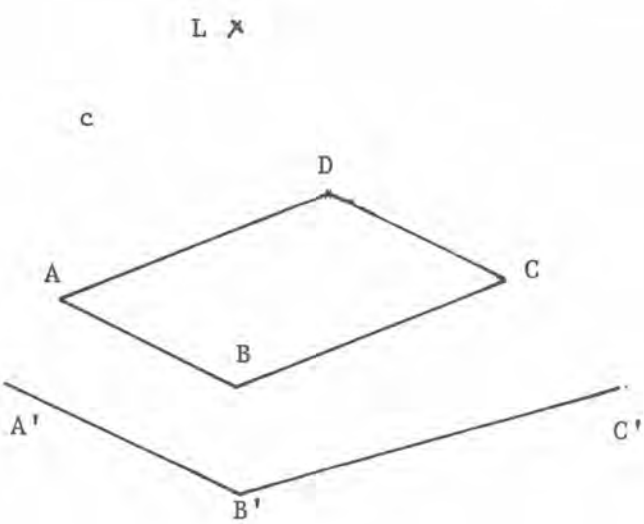
a



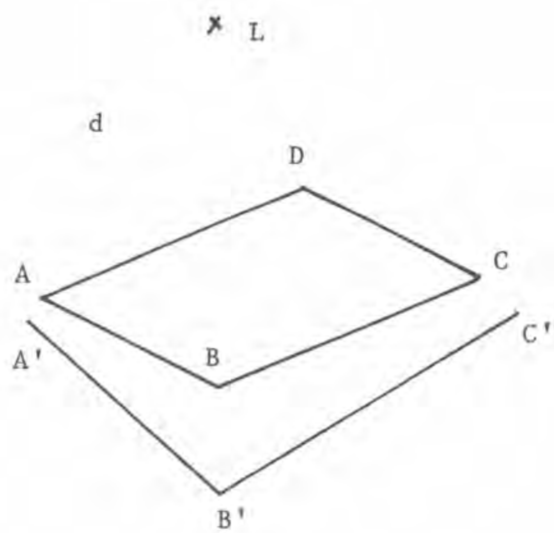
b



c



d



Thème 5 - *(Suite)*

▶ *Ex. 2.22* : Sur la figure a on a dessiné l'ombre d'un parallélépipède éclairé par une ampoule L. Comment ce dessin a-t-il été obtenu ? (Trouver d'abord l'emplacement de L).

▶ *Ex. 2.23* : Sur la figure b on a dessiné un octoèdre (ses sommets sont les milieux des faces d'un cube) éclairé par une ampoule L se projetant en L' sur la table. Retrouver la construction qui a été faite.

▶ *Ex. 2.24* : Sur la figure c une maison est éclairée par le soleil. La flèche indique la direction des rayons. Le point A' est l'ombre du point A. Dessiner l'ombre de la maison.

▶ *Ex. 2.25* : Un rectangle est éclairé par une ampoule. Son ombre peut elle être un carré ? un rectangle ? un parallélogramme ?

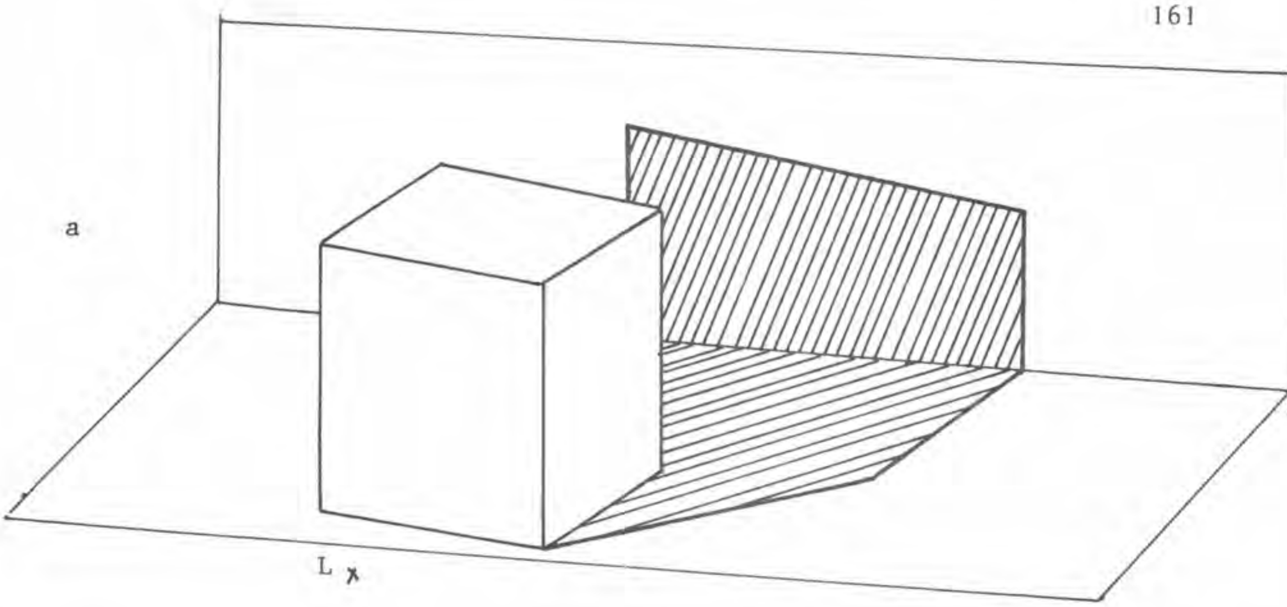
▶ *Ex. 2.26* : Même question si le rectangle est éclairé par le soleil. On trouvera que l'ombre est en général un parallélogramme.

▶ *Ex. 2.27* :

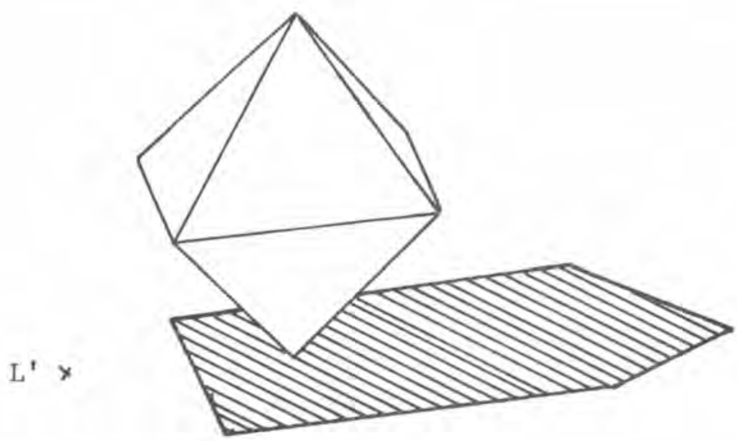
- Un rectangle de 2×1 est éclairé par le soleil. Que peut-on dire des dimensions de son ombre ?

- Un parallélogramme dont les côtés mesurent 5 et 4 cm et la hauteur 3cm est-il l'ombre au soleil d'un rectangle de 5×4 cm ?

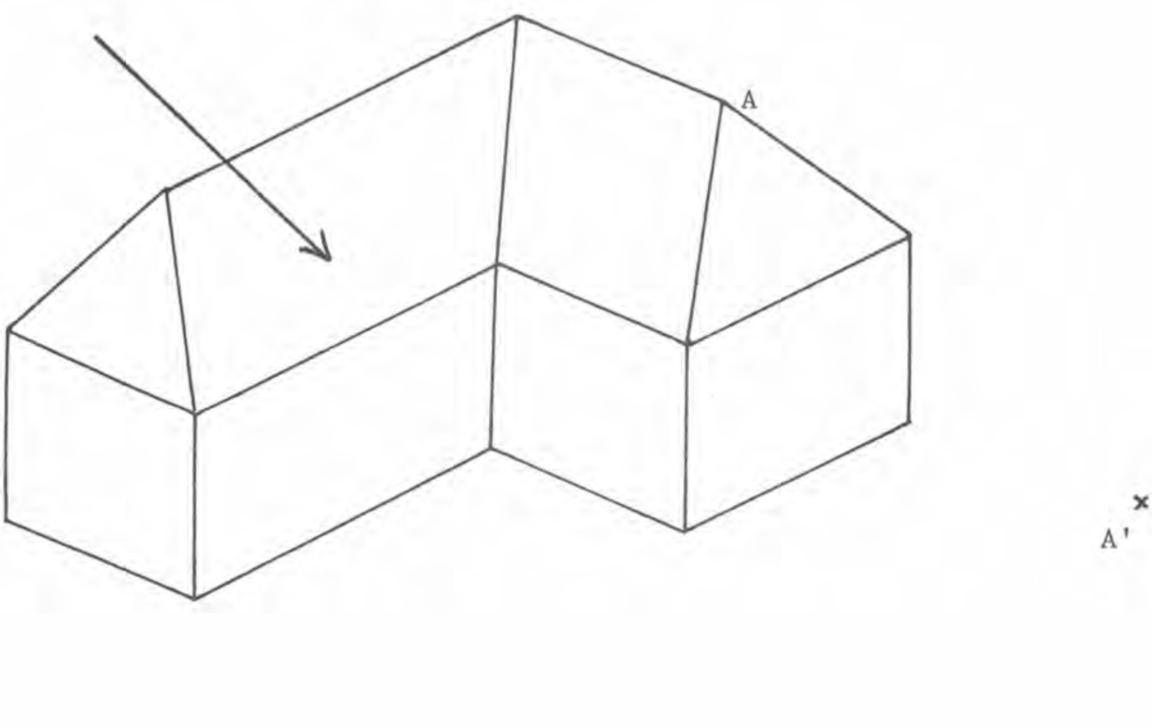
a



b



c



Thème 6 - *Les corps ronds*

Comment est vu un cercle en perspective ?

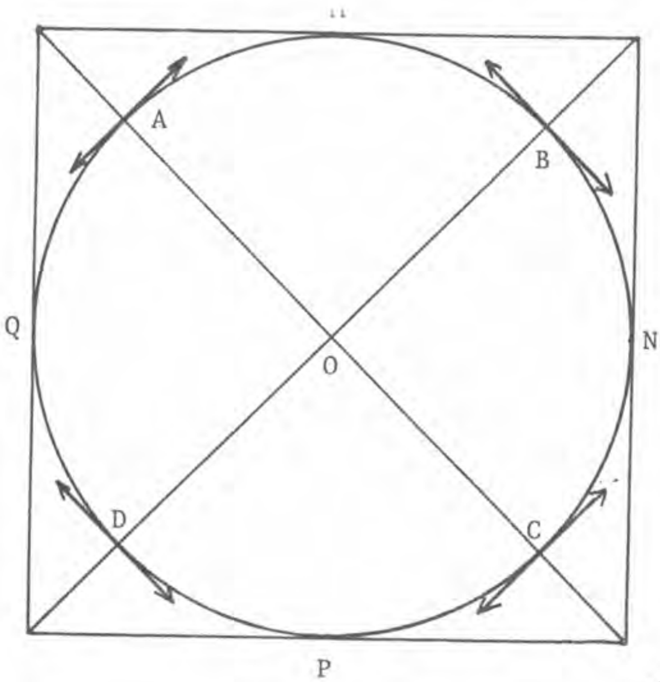
Considérons un cercle de centre O. On peut l'inscrire dans un carré. Soient MNPQ les points de contact du cercle et du carré, ABCD les points de rencontre du cercle et des diagonales du carré (Figure a). Les tangentes en A, B, C, D au cercle sont parallèles aux diagonales du carré. De plus, si R est le rayon du cercle, la demi-diagonale du carré vaut $R\sqrt{2}$ ce qui permet de situer le point A sur le dessin en perspective (Figure b) : le carré est vu comme un parallélogramme, les points M, N, P, Q sont les milieux des côtés, O est le point de rencontre des diagonales. On sait placer A, B, C et D et les tangentes au cercle en A, B, C, D, M, N, P, Q ce qui permet de construire l'image du cercle. Cette image est une ellipse, courbe que nous avons déjà rencontrée (Géométrie de l'égalité, Ex. 2.7 et 4.2).

▶ *Ex. 2.28* : Dessiner un cône, un tronc de cône, une sphère.

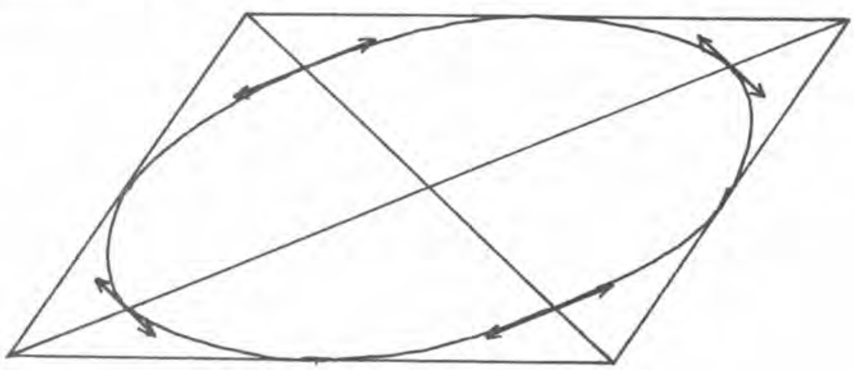
▶ *Ex. 2.29* : Une sphère inscrite dans un cube est en contact avec six points du cube qui appartiennent à trois grands cercles de la sphère. Dessiner le tout.

▶ *Ex. 2.30* : Dessiner l'intersection de deux cylindres d'axes perpendiculaires, de même rayon (Figure c)

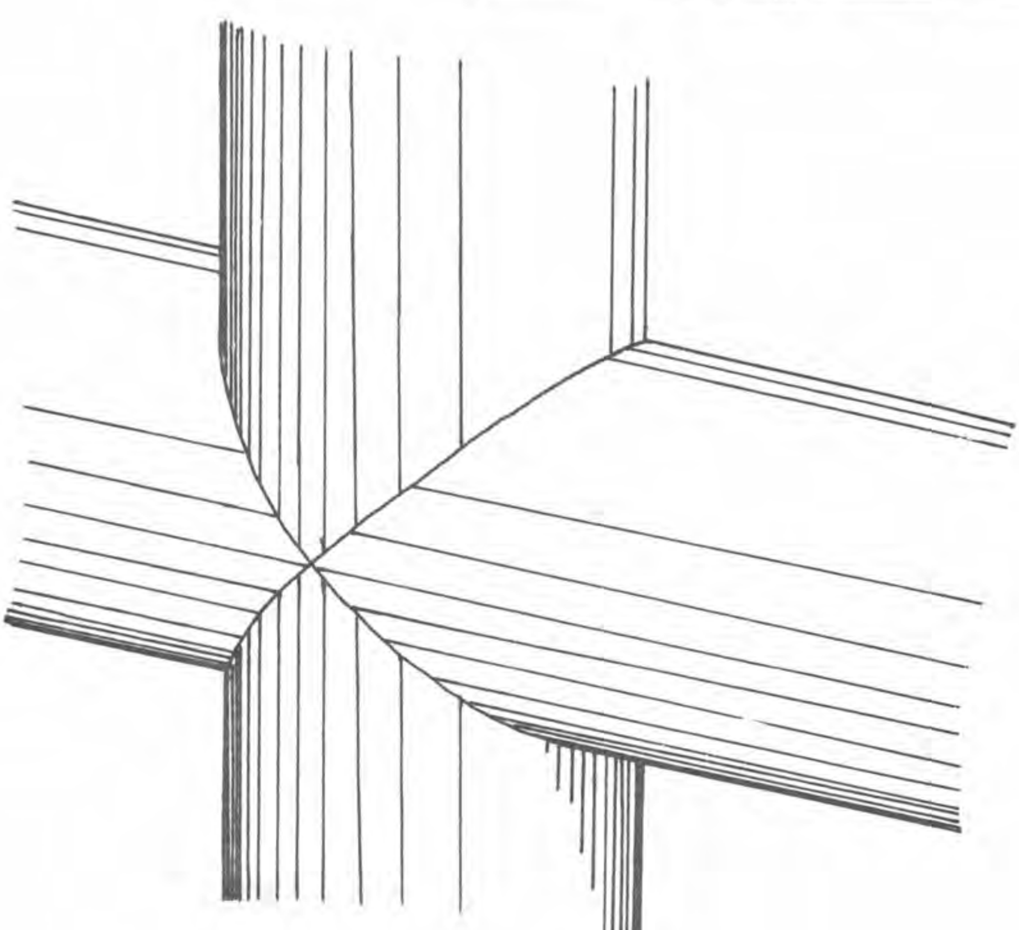
▶ *Ex. 2.31* : Dessiner un disque éclairé par une ampoule et son ombre.



a



b



c

III - LA PERSPECTIVE FUYANTE

Comme annoncé au début du chapitre II, nous étudions maintenant la perspective fuyante. Le principe est le suivant : l'observateur regarde un paysage. Devant son oeil est placé un écran vertical. Tout se passe comme si le paysage s'inscrivait sur l'écran. Plus précisément, si O est l'oeil et A un point du paysage, la droite OA coupe l'écran en A'. Le paysage dessiné est l'ensemble des points A'. Cette interprétation de la perspective fuyante a été décrite et utilisée par certains artistes de la Renaissance (Figure c).

- Examinons d'abord le dessin d'une figure située dans un plan horizontal.

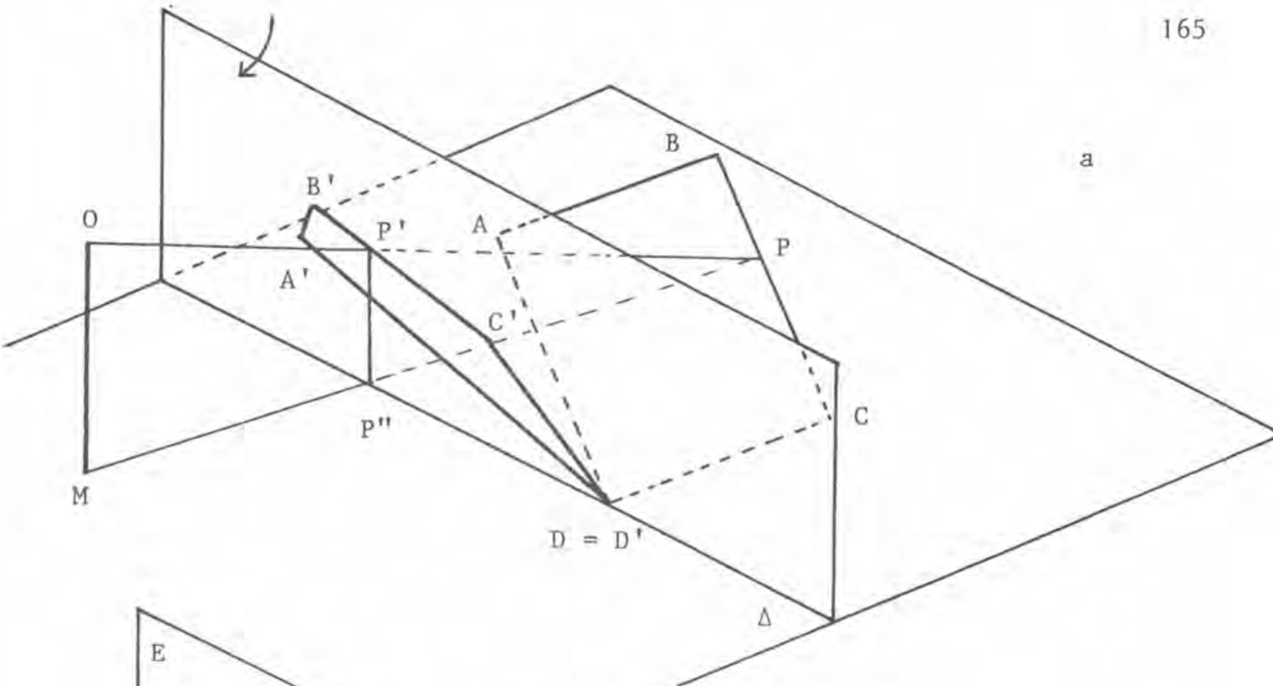
► L'observateur est placé en M sur le plan horizontal. Soit O la position de son oeil. La figure observée se dessine sur l'écran vertical (E). Soit Δ la droite de section de (E) et du plan horizontal.

Un point P du plan horizontal est vu en P' sur l'écran. Les points O,P et P' sont alignés. De plus si MP coupe Δ en P", le point P' est sur la verticale issue de P". Cette situation est représentée sur la figure a ci-après (notre dessin est en perspective cavalière). On a dessiné aussi l'image A'B'C'D' d'un rectangle ABCD. On voit que A'B'C'D' n'est pas un parallélogramme.

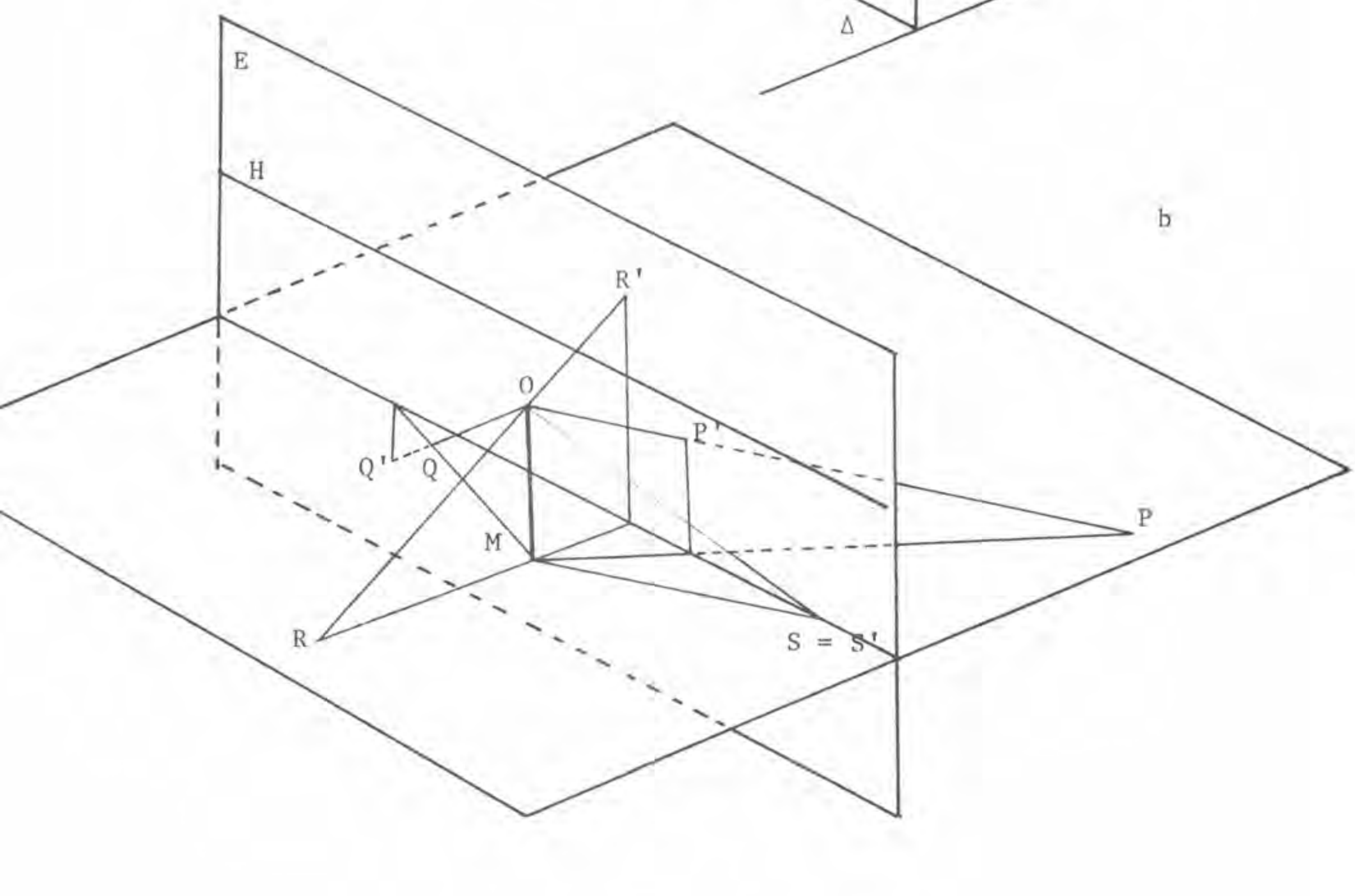
► Où se trouve l'image P' d'un point P ?

Soit H la droite horizontale tracée dans (E) et à même altitude que O. En utilisant la construction que l'on vient de décrire on constate que (Figure b) :

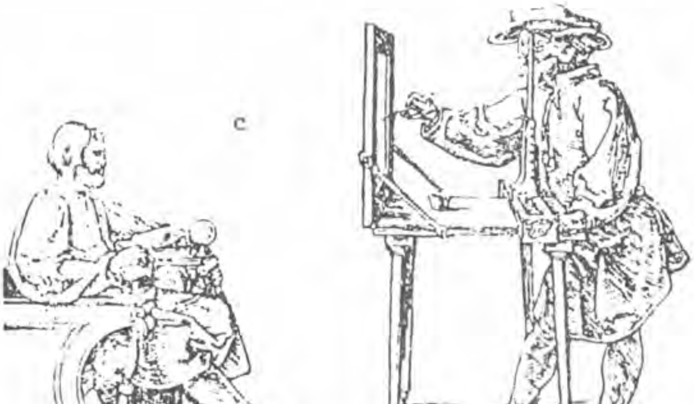
- L'image P' d'un point P situé au-delà de Δ se trouve entre Δ et H.
- L'image Q' d'un point Q situé entre Δ et l'observateur se trouve en dessous de Δ.
- Les points R' au-dessus de H sont les images de points R situés derrière l'observateur. Il ne peut donc les voir : sur le dessin il n'y aura pas de points au-dessus de H.



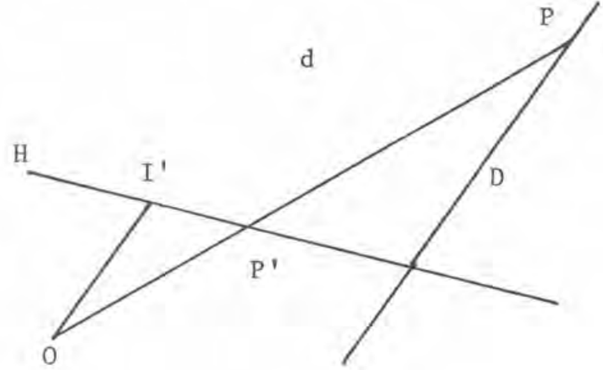
a



b



c



d

- L'image d'un point S de Δ est ce point lui-même. Ces cas s'excluant mutuellement, la réciproque de chaque assertion est vraie (si P' est entre Δ et H, il est l'image de P situé au-delà de Δ ....)
- Les points situés sur la transversale passant par M sont vus (?) à l'infini, sur la partie inférieure de l'écran.

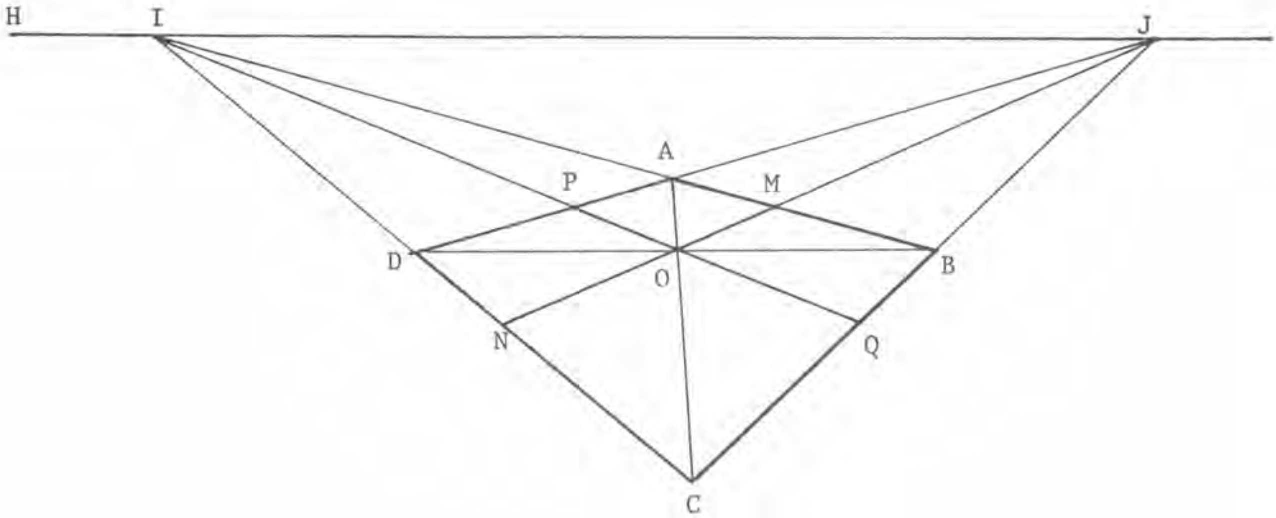
► Que représente la droite H ? Remarquons d'abord que plus un point P est éloigné de l'observateur, plus son image se rapproche de H (ceci, comme les constations précédentes vient du théorème de Thalès). Considérons la situation vue d'avion (Figure d) : soit I' un point de H. Soit D une droite du plan horizontal parallèle à OI'. L'image P' d'un point P de D se rapproche de I' quand P s'éloigne. On dit que I' est l'image du "point à l'infini" de D. Remarquons que :

- Toutes les droites parallèles à D (donc à OI') ont même point à l'infini, c'est à dire que sur le dessin elles se coupent en I' : I' est le point à l'infini dans la <u>direction</u> OI'.
- Deux points I' et J' de H représentent les points à l'infini de deux directions distinctes.

Il existe une exception à ce rôle joué par H : les droites parallèles à Δ (donc à H) sont vues parallèlement à H. Notons que cela résulte du problème tel qu'il est posé, l'observateur ayant un champ de vision limité ne peut voir aucune "extrémité" des droites transverses à son regard. Mais cela résulte aussi de la structure de l'espace.

La droite H est la <u>ligne d'horizon</u>, ou <u>ligne de fuite</u>, ou <u>droite à l'infini</u>.

Ci-après on a dessiné un carré et ses deux médianes : AB, PQ et DC sont parallèles donc se coupent en un point I de la droite H. De même AD, MN et BC se coupent en un point J. Le point de rencontre des médianes est le point de rencontre de AC et BD que l'on sait construire. Les points I et J ont été choisis au hasard ainsi que A. Les points B et D sont quelconques sur les droites IA et JA respectivement.



Si on s'est donné ce dessin peut-on reconnaître un carré ? En fait si H est donnée comme ligne à l'infini, on sait que AD et BC se coupent à l'infini, donc sont parallèles. De même AB et DC sont parallèles. Ainsi ABCD représente un parallélogramme. En l'absence d'autres données on ne peut rien dire de plus. Et si l'on ignore que H est la droite à l'infini, on sait seulement que ABCD représente un quadrilatère convexe.

• Examinons maintenant le cas d'une figure dans l'espace.

➤ Notons d'abord que ce qui a été dit au sujet du plan horizontal peut, pour l'essentiel, être dit d'un plan quelconque : a tout plan P est associée une droite à l'infini H_P dont les points représentent les directions de P. (Il suffit en quelque sorte d'incliner la tête pour que tout plan puisse être considéré comme horizontal).

➤ Remarquons aussi que si H_P est la droite à l'infini du plan P et Δ, Δ' deux droites parallèles et parallèles à P, elles se coupent (sur le dessin !) en un point de H_P.

▶ <u>*Ex. 3.1*</u> : Démontrer ce résultat (en s'inspirant de l'étude faite plus haut pour la droite H).

Pour compléter la classification des points du dessin par rapport à H et Δ (Cf. page 164), on remarque que la partie au-dessus de H n'est pas vide : elle contient, entre autres, les images des points de plans horizontaux situés assez haut et donc vus par en-dessous.

- Pratiquement, un dessin se fait ainsi :

  - A tout plan P on associe une droite à l'infini H_P.
  - Si P et P' sont parallèles, H_P et $H_{P'}$ sont égales.
  - Si P et P' sont non parallèles H_P et H_P' sont sécantes.

Et on a les règles suivantes :

<u>*R P F*</u> *1* : Deux droites sécantes dans l'espace sont sécantes sur le dessin et s'y coupent en dehors de la droite à l'infini de leur direction de plan.

<u>*R P F*</u> *2* : Deux droites D et D' parallèles entre elles et parallèles à un plan P se coupent sur la droite H_P.

<u>*R P F*</u> *2* , <u>1ère exception</u>. Deux droites D et D' de P parallèles à H_P sont parallèles sur le dessin.

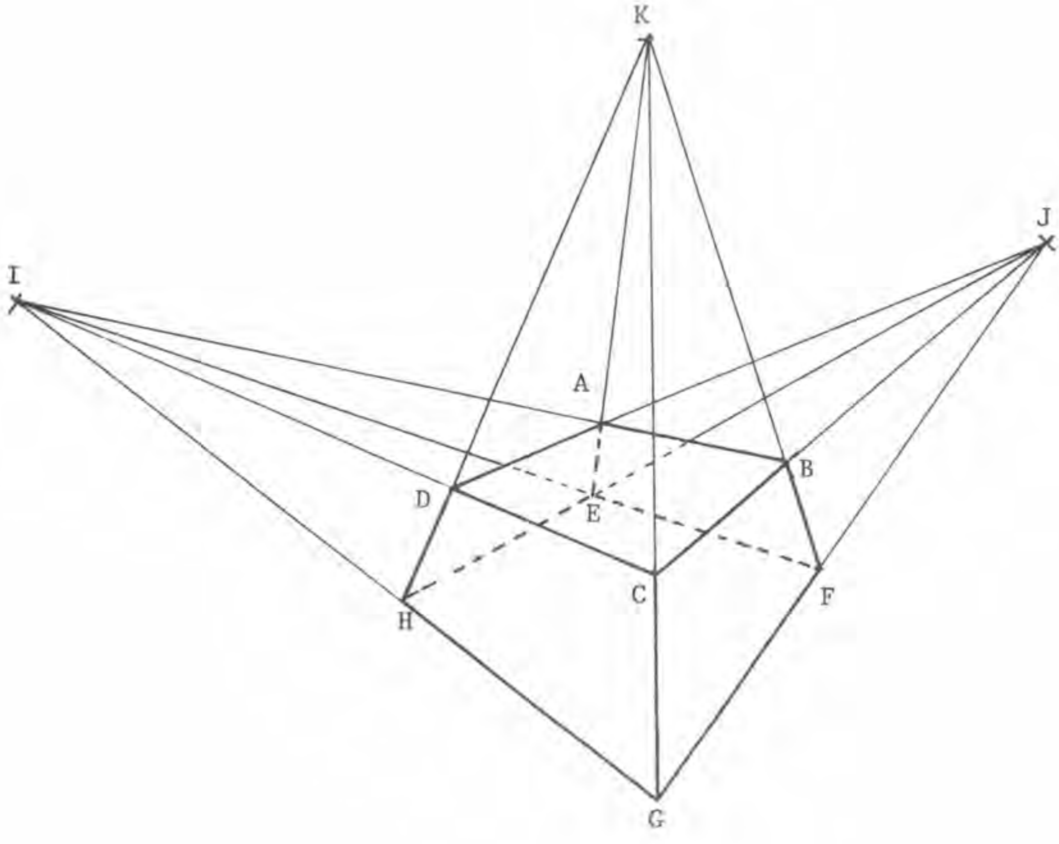
<u>*R P F*</u> *2* , <u>2ème exception</u>. Le parallélisme est conservé pour toutes les droites du plan frontal.

Nous avons dessiné ci-après, à titre d'exemple, un parallélépipède en perspective fuyante. On s'est donné : I point à l'infini dans la direction de AB, J point à l'infini dans la direction BC et enfin K dans la direction AE. Le point A a été choisi au hasard, B est sur IA, D est sur JA.

Le point C est déterminé (il est sur JB et ID). On prend E sur KA. Alors F est sur IE et KB, G est sur JF et KC et H est sur JE, KD et IG. (On remarquera qu'il y a une condition "de trop" pour H, mais que, les règles étant cohérentes, JE, KD et IG sont trois droites concourantes).

On peut faire les remarques suivantes : I et J sont deux points à l'infini dans le plan ABCD, donc IJ est la droite à l'infini de ce plan. Ainsi AC et EG doivent se couper sur IJ, ce que l'on peut vérifier.

▶ Ex. 3.2 : Rechercher d'autres couples de parallèles définis par le parallélépipède et vérifier qu'ils se coupent sur l'une des droites à l'infini IJ, JK, et IK.



Les règles que nous venons d'énoncer sont celles de la "perspective géométrique". Elles furent mises au point en Italie pendant les années 1400. (Brunelleschi, Piero della Francesca). On avait auparavant une idée de la perspective (voir les fresques romaines ou Giotto), mais la perspective à ligne de fuite donne un aspect plausible au dessin, ce qui n'a rien à voir bien sûr avec la qualité artistique.

On notera d'ailleurs que l'aspect plausible n'est préservé que par un bon choix des points à l'infini : si l'on veut dessiner un cube assez gros sur une feuille 21 × 29,7 contenant des points de fuite, ledit cube sera très déformé (voir le thème 8) : il suffit de se coller le nez sur un immeuble pour voir les parallèles définies par les bords de fenêtres par exemple, se resserrer très vite.

Notons que ces effets de perspective très accentuée ont été exploités par certains artistes (les baroques par exemple).

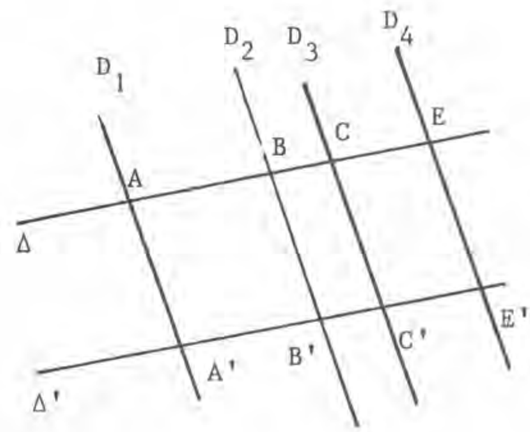
Ces règles sont aussi celles de la "géométrie projective" sur laquelle nous n'avons pas à nous arrêter ici. Signalons que cette géométrie a été mise au point par des spécialistes du dessin (ingénieurs, architectes) comme Desargues (qui écrivit un traité à l'usage des tailleurs de pierre) ou Poncelet (ingénieur du Génie). On peut dire aussi que cette géométrie est celle de la règle (non graduée). On verra dans la suite que de nombreux dessins peuvent être faits à l'aide de ce seul instrument.

En ce qui concerne les distances et les angles, la situation n'est pas très brillante sans être désespérée. Signalons seulement :

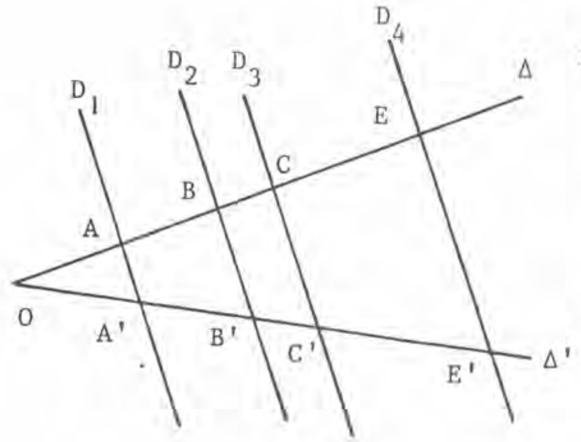
<u>R P F</u> 3 : Sur des droites frontales, les rapports de distances sont conservés. (Voir aussi page suivante)

<u>*Exercice général*</u> : Refaire (après avoir lu ce qui suit) les dessins des thèmes 1 à 6 en perspective fuyante.

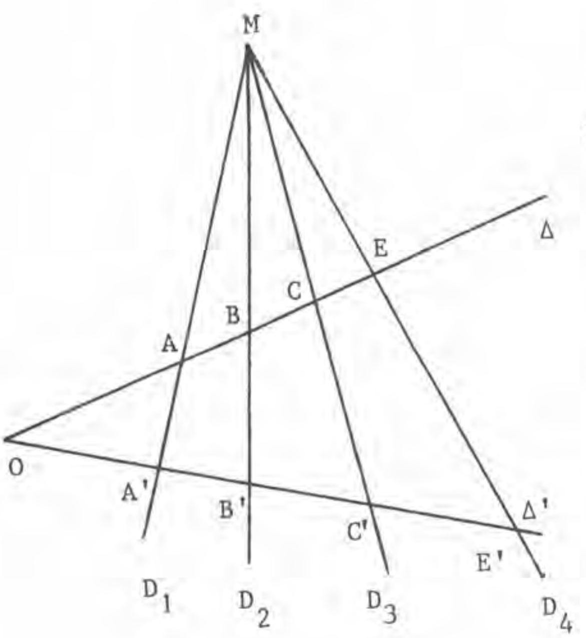
Interlude



1) Si l'on coupe deux droites parallèles Δ et Δ' par des droites parallèles D_1, D_2, D_3, ... on associe à tout point A, B, C, ... de Δ un point A',B',C' ... de Δ'. Il est clair que AB = A'B', BC = B'C', ... la transformation que l'on a effectuée conserve les longueurs : on a fait de la <u>géométrie euclidienne</u>.



2) On coupe maintenant Δ et Δ' sécantes en O par des droites D_1, D_2, D_3, ... parallèles. La transformation effectuée modifie les longueurs. Mais : $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$, $\frac{AC}{CE} = \frac{A'C'}{C'E'}$.
Les rapports de longueur sont conservés : on a fait de la <u>géométrie affine</u>.



3) Δ et Δ' étant sécantes en O, on suppose maintenant que D_1, D_2, D_3, ... sont sécantes en M. La transformation effectuée ne conserve pas les rapports de longueur. Mais on peut vérifier que :

$$\frac{\frac{AB}{BC}}{\frac{EB}{EC}} = \frac{\frac{AB'}{BC'}}{\frac{E'B'}{E'C'}}$$

Les "birapports" des longueurs sont conservés : on a fait de la <u>géométrie projective</u>.

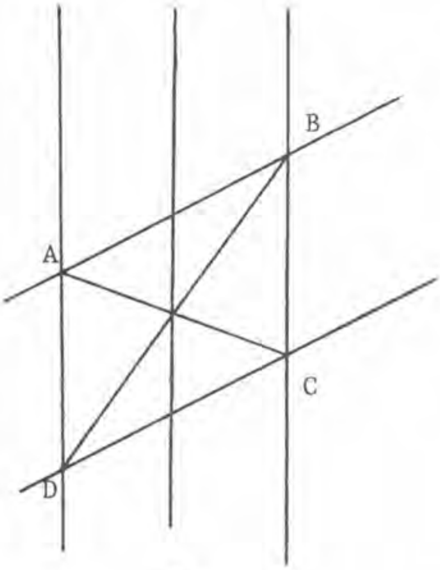
Thème 7 - *Routes*

La ligne d'horizon H est donnée ainsi que les bords d'une route horizontale. Comment dessiner la ligne médiane de cette route ?

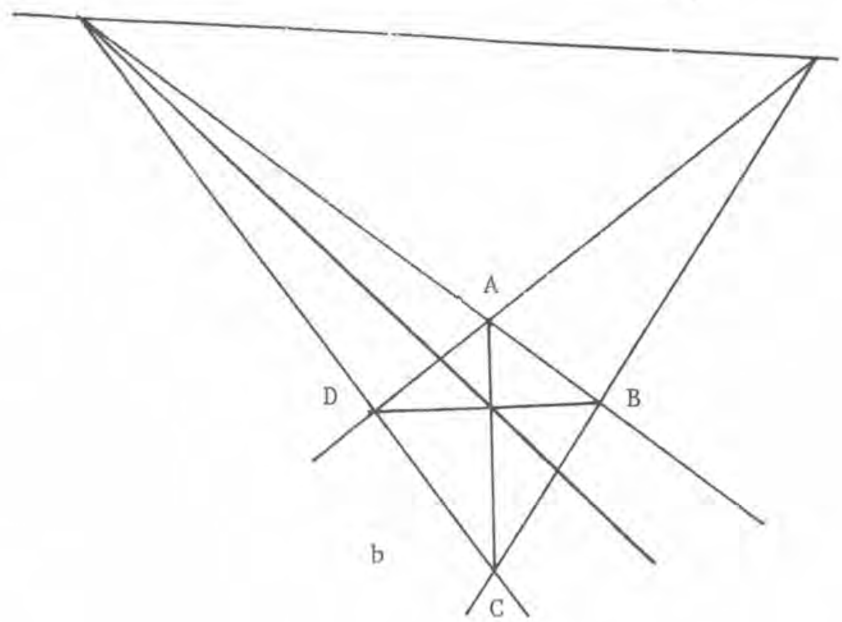
Méthode 1 : On imagine (Figure a, vue d'avion) qu'une seconde route croise la première. L'intersection des deux routes est un parallélogramme dont les diagonales se coupent en leurs milieux sur les lignes médianes. Donc, en perspective fuyante (Figure b), On trace une seconde route (c'est à dire deux droites se coupant sur H). L'intersection des deux routes est le quadrilatère A B C D dont les diagonales se coupent sur les lignes médianes : cela permet de répondre à la question (la ligne médiane passant bien sûr par le point à l'infini de la route).

Méthode 2 - (Figure c). Sur une parallèle à H, Les rapports de distances sont conservés (R P F 3). On trace une droite D parallèle à H qui coupe la route en A et B. Le milieu M de AB appartient à la ligne médiane. On notera que la 1ère méthode n'utilise que la règle (non graduée).

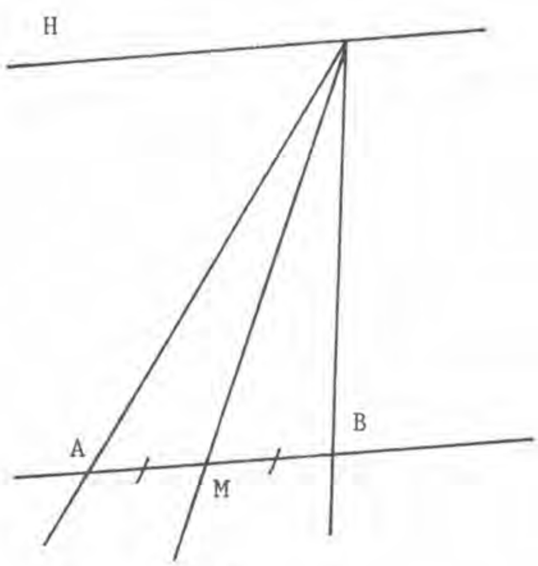
▶ *Ex. 3.3* : Une route est dessinée avec les arbres A, B, C. A et B sont consécutifs, A et C sont en vis à vis. Sur la Figure e, on a dessiné les autres arbres. Expliquer la construction en observant la Figure d vue en plan. Trouver une autre construction en observant le plan f (bien remarquer que AC n'est pas parallèle à la ligne d'horizon).



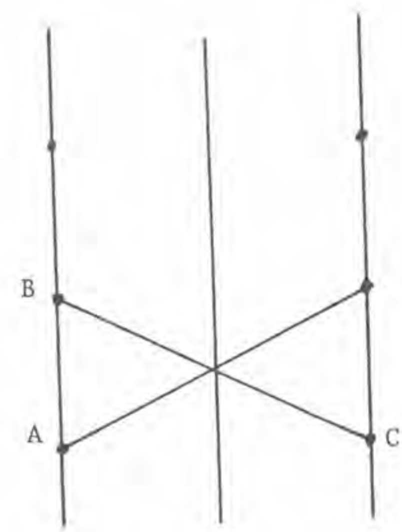
a



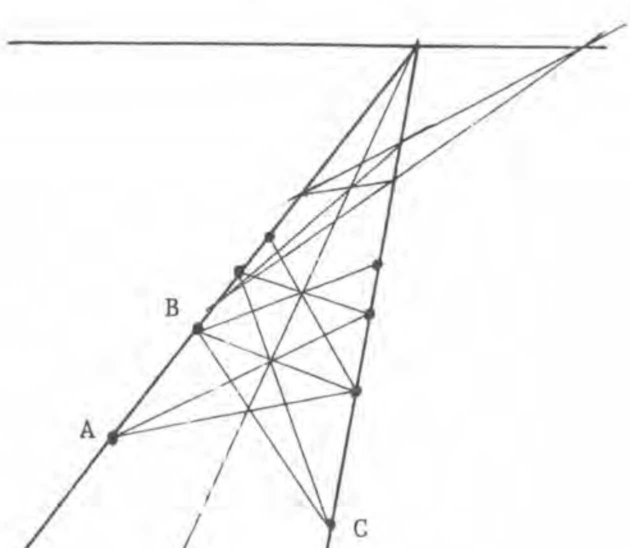
b



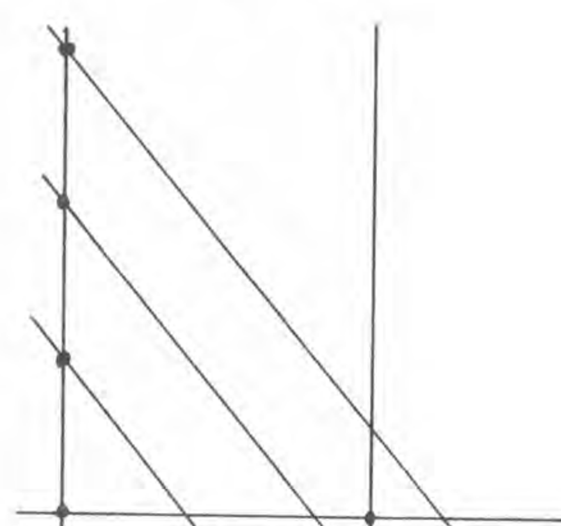
c



d



e



f

Thème 7 (suite)

▶ Ex. 3.4 : Compléter le dessin (Figure a) ci-contre en dessinant la ligne d'horizon pour qu'il représente :

- D'abord une route horizontale qui tourne à gauche.
- Puis une route rectiligne qui change de pente.
- Puis une route qui tourne à gauche et change de pente.

▶ Ex. 3.5 : Sur chacune de ces routes dessiner des arbres.

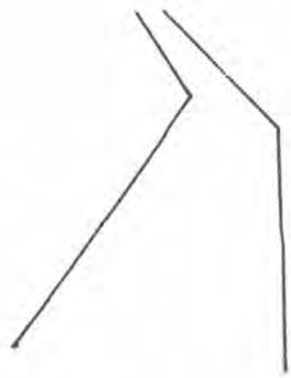
Thème 8 (Maisons)

▶ Ex. 3.6 : Le dessin de la maison du thème 5 a été fait ci-contre en perspective fuyante. Dessiner l'ombre de la maison sachant que A' est l'ombre de A.

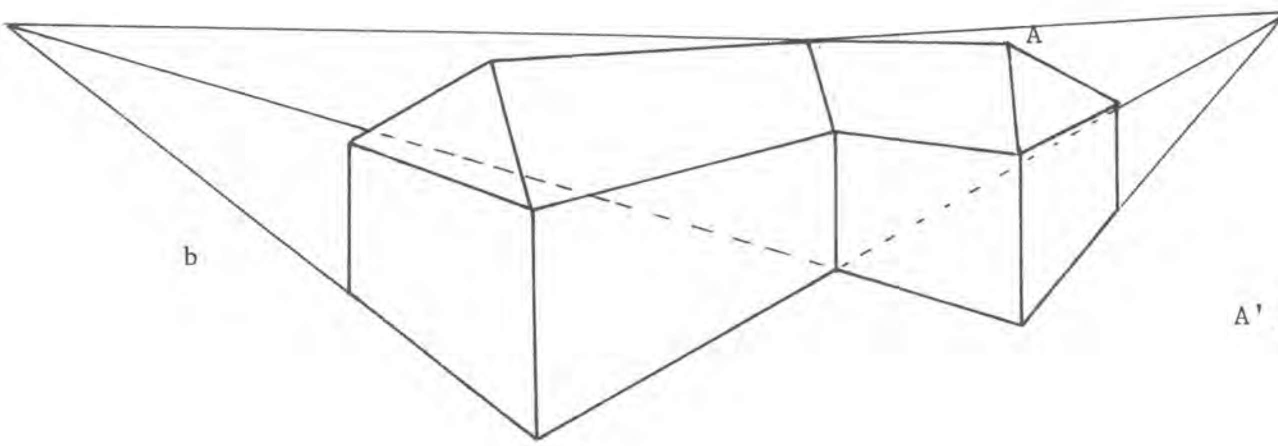
▶ Ex. 3.7 : Refaire l'exercice précédent en supposant que l'observateur, de taille normale, est debout sur le sol.

▶ Ex. 3.8 : Dessiner en perspective fuyante, la maison dont le plan, les vues de face et de profil sont donnés (Figure c).

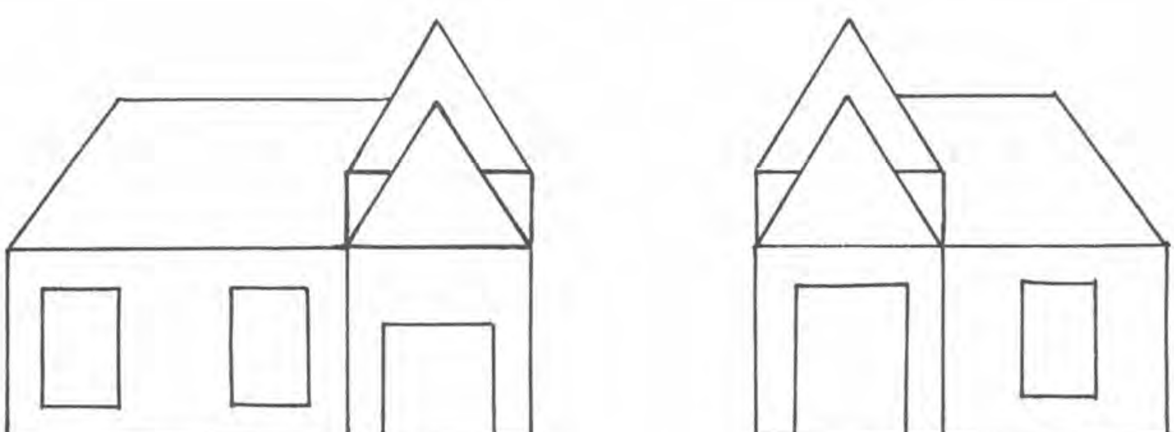
a



b



A' X



c

Thème 9 - Section d'un cube par un plan

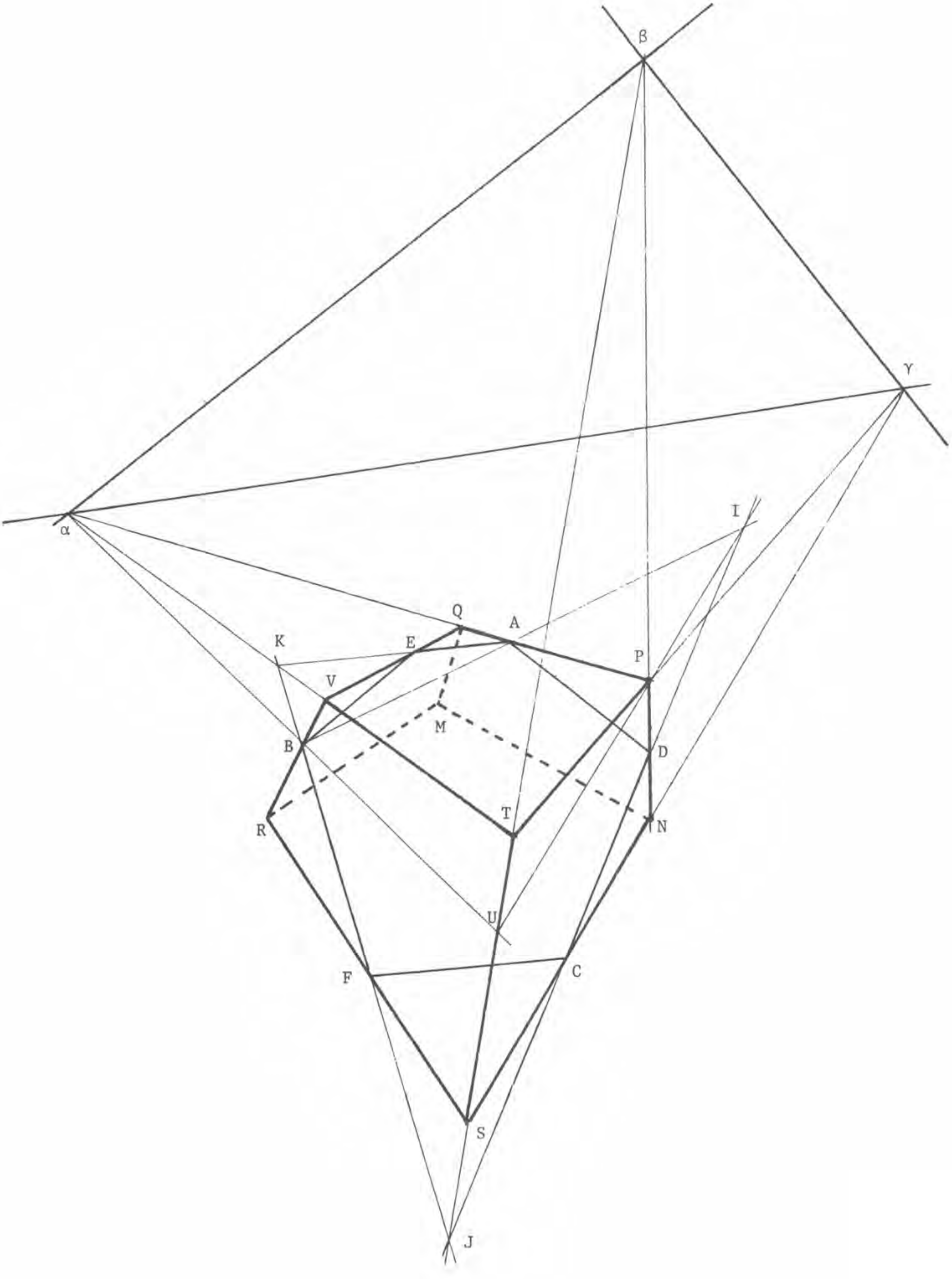
On reprend, en perspective fuyante la construction de l'exercice 2.13.

On a dessiné un cube M N P Q V T S R (comme indiqué page 169). Les points à l'infini sont α, β, γ. On se donne A sur PQ, B sur VR et C sur SN, et on cherche la section du cube par le plan passant par ABC. On a construit α B qui coupe ST en U (donc BU est parallèle à VT). Les droites BA et UP se coupent en I (elles sont coplanaires puisque AP est parallèle à BU). Le point I est dans le plan P N S T (car il est sur PU), donc IC coupe PN en D (qui est l'un des sommets de la section) et coupe TS en J. On construit alors F et K intersections de JB avec RS et VT et E, intersection de AK avec QV. Le polygone A D C F B E est la section cherchée.

Les droites BF et AD sont coplanaires et parallèles. Elles se coupent donc sur la droite à l'infini du plan M N P Q , c'est à dire sur α β, ce que l'on peut vérifier sur la figure. Le lecteur peut chercher d'autres familles de droites parallèles, se rencontrant sur α β, β γ ou γ α.

▶ Ex. 3.9 : Construire la droite à l'infini du plan défini par ABC.

▶ Ex. 3.10: Refaire les exercices des thèmes 3 et 4 en perspective fuyante.


β
γ
α
I
Q
A
K
E
P
V
M
B
D
T
R
N
U
F
C
S
J

Thème 10 - De la cavalière à la fuyante

Disposer des points à l'infini c'est passer de la perspective cavalière à la perspective fuyante. On a déjà utilisé ce procédé. Il permet aussi de démontrer des théorèmes.

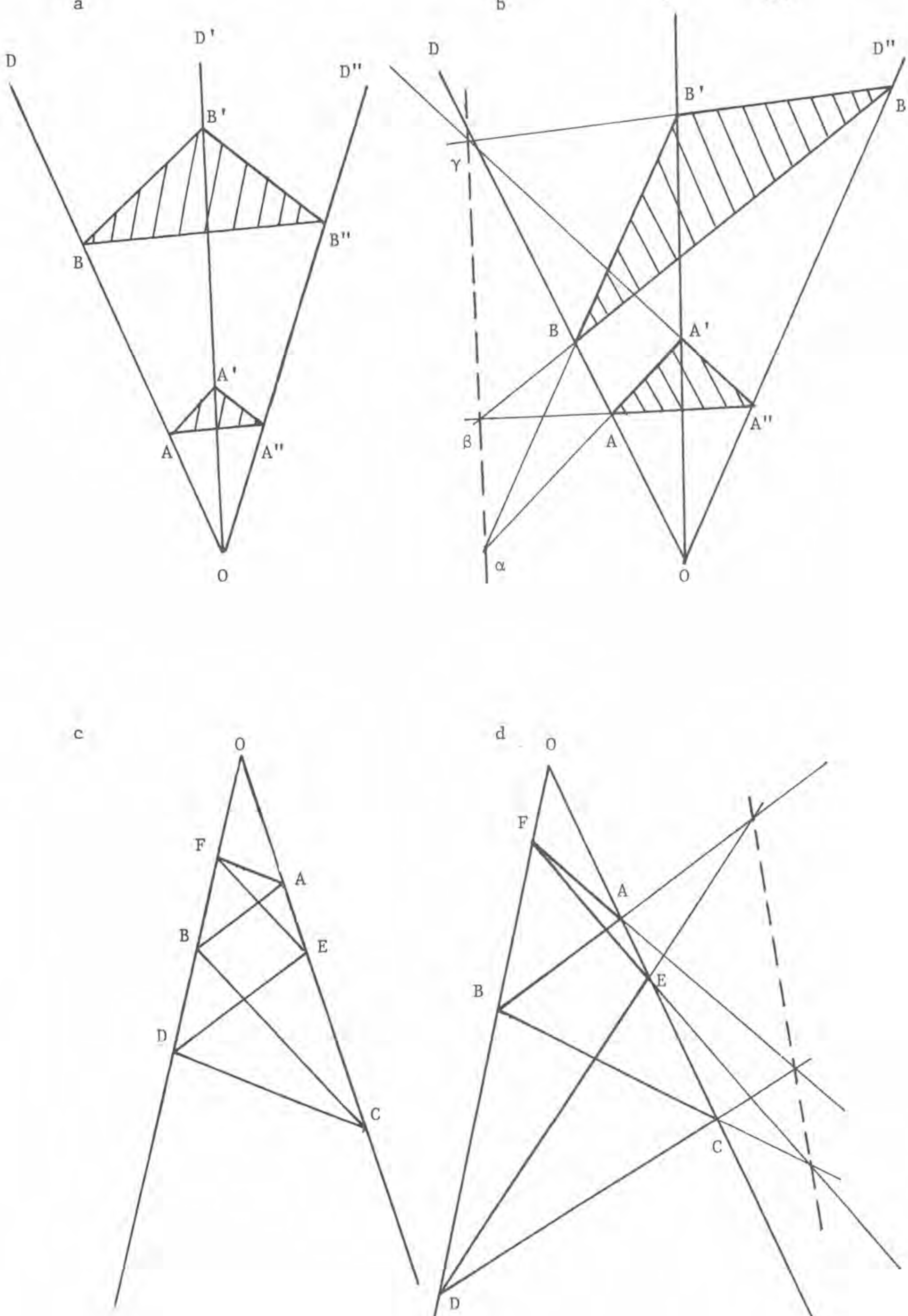
▶ *Ex. 3.11* : Soient trois droites D, D', D" et des points A et B sur D, A' et B' sur D', A" et B" sur D".

Montrer que si D, D' et D" sont concourantes (ou parallèles), si les droites AA' et BB' sont parallèles ainsi que AA" et BB", les droites A' A" et B'B" sont parallèles (Figure a). Montrer aussi que la réciproque est vraie (si AA' // BB', AA" // BB" et A'A" // B'B", les droites D,D', D" sont concourantes ou parallèles). On utilisera le théorème de Thalès - ou les propriétés de l'homothétie.

▶ *Ex. 3.12* : (Figure b). On suppose que AA' et BB' se coupent en α, AA" et BB" en β, A'A" et B'B" en γ. Montrer que D,D' et D" sont concourantes si et seulement si α, β et γ sont alignés. On remarquera que la figure b n'est autre que la figure a vue en perspective fuyante. Ces résultats sont les théorèmes de Desargues, affine (pour 3.11) et projectif (pour 3.12).

▶ *Ex. 3.13* : (Figures c et d). La figure c se lit comme suit : AB est parallèle à DE, CD parallèle à AF. Montrer que EF est parallèle à BC (utiliser Thalès). Enoncer et démontrer ensuite le théorème correspondant à la figure d. On a ici les théorèmes de Pappus affine (c) et projectif (d).

▶ *Ex. 3.14* : Utiliser le théorème de Desargues , pour faire avec seulement une règle l'exercice 5.16 de la partie "Géométrie de l'égalité).


a
D
D'
D''
B'
B
B''
A'
A
A''
O
b
D
D'
D''
B'
B''
γ
B
A'
β
A
A''
α
O
c
O
F
A
B
E
D
C
d
O
F
A
E
B
C
D

Thème 11 - *Quelques problèmes métriques*

▶ *Ex. 3.15* : Sur la figure a est dessinée une table carrée en perspective cavalière. La feuille de papier posée sur la table est-elle un rectangle ? (Utiliser les tracés en pointillés).

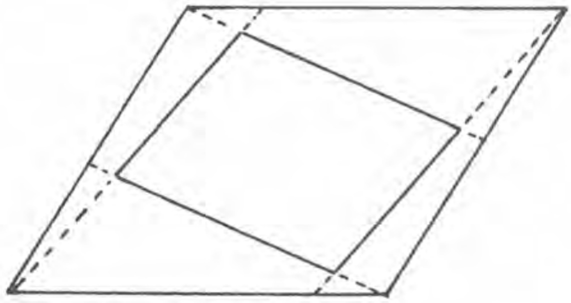
▶ *Ex. 3.16* : La table de la figure b est un carré vu en perspective fuyante. Deux feuilles de papier y sont posées. Quelle est la plus grande ?

▶ *Ex. 3.17* : La figure c représente le mur de fond d'une pièce. Contre ce mur est accolée une table. Les pattes de la table vont-elles jusqu'au sol ? Peut-on déterminer les dimensions de la table, sachant que le mur mesure 5 m sur 3 m ? Quelle est la taille de l'observateur ?

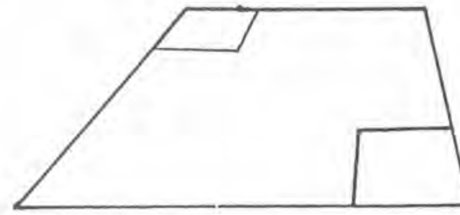
▶ *Ex. 3.18* : Justifier le tracé de l'octogone régulier donné sur la figure d.

▶ *Ex. 3.19* : Dessiner un cube dont on a enlevé les coins de telle sorte que ses faces soient des octogones réguliers (Cf. page 151 figure e)

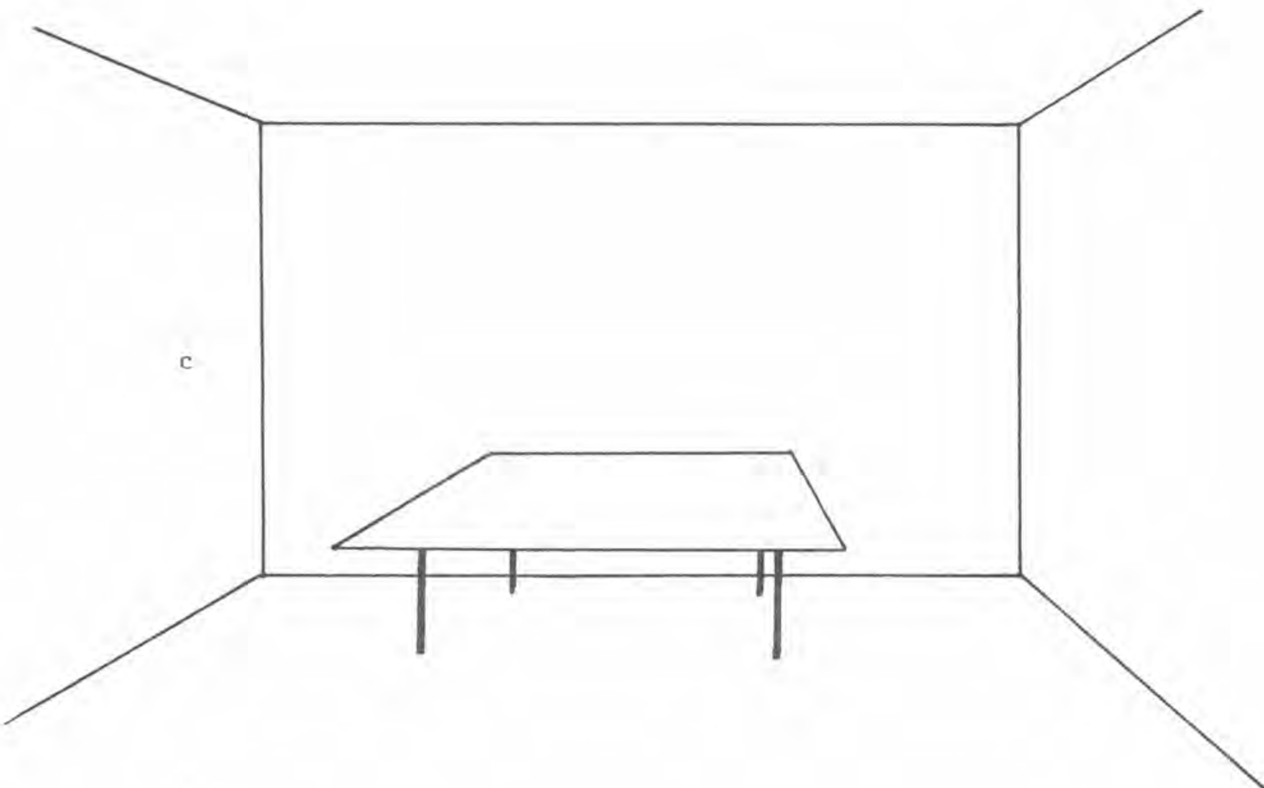
▶ *Ex. 3.20* : Dessiner des polygones réguliers.



a

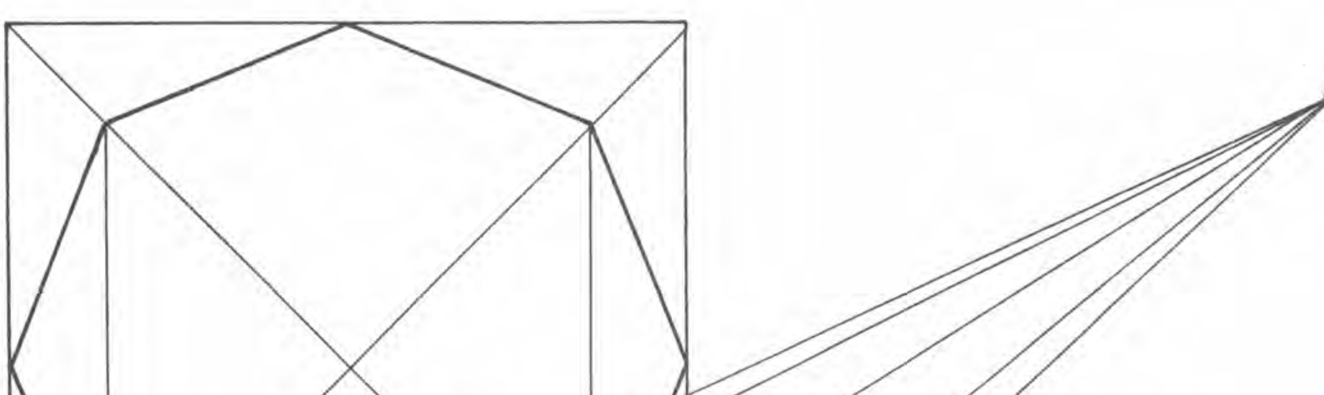


b



c

d



Thème 12 - Le cercle

Revenons à l'étude générale faite page 164 et à la figure a de la page 165. Supposons qu'un cercle soit dessiné sur le plan horizontal. Son image est une courbe de l'écran. Quand P décrit le cercle, les droites OP décrivent un cône oblique, et les points P' images des points P constituent la section de ce cône par le plan E.

Les sections d'un cône à base circulaire sont des courbes appelées <u>coniques</u>, que l'on classe en trois familles : ellipses, paraboles, hyperboles (le cercle est un cas particulier de l'ellipse).

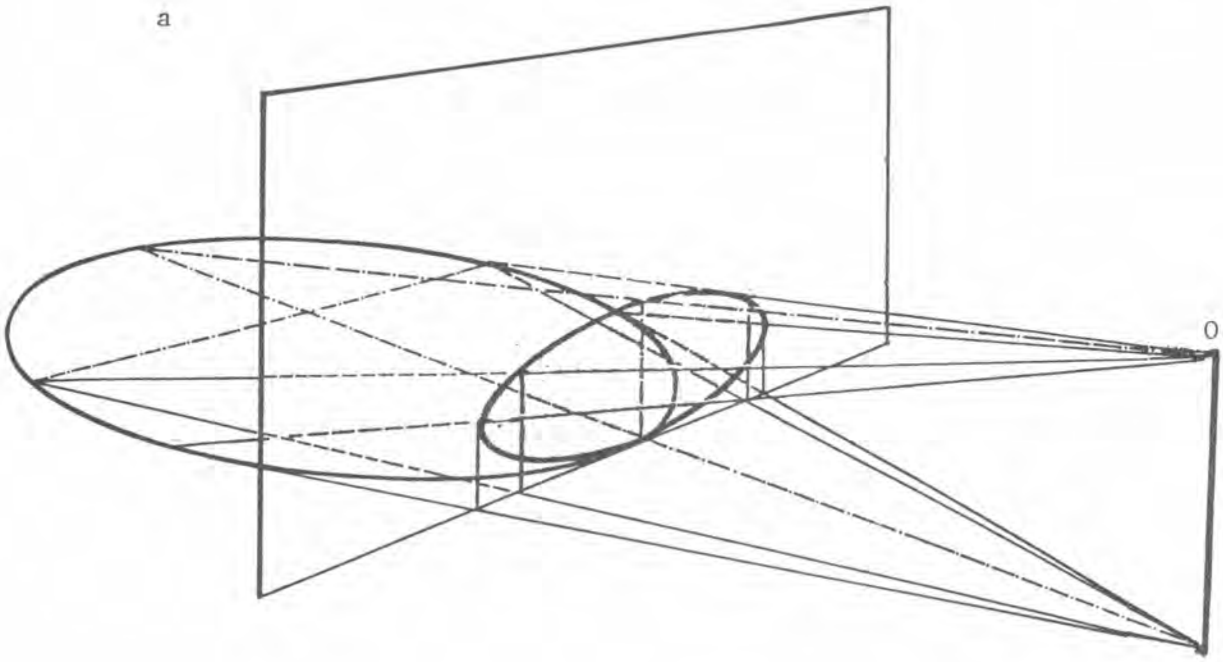
Donc l'image d'un cercle en perspective fuyante sera une conique. Plus précisément :

- Si le cercle est en avant de l'observateur, son image est une ellipse (Figure a)
- Si le cercle est tangent à la transversale passant par l'observateur, son image est une parabole (Figure b)
- Si le cercle coupe la transversale passant par l'observateur, son image est une branche d'hyperbole (Figure faite par le lecteur)

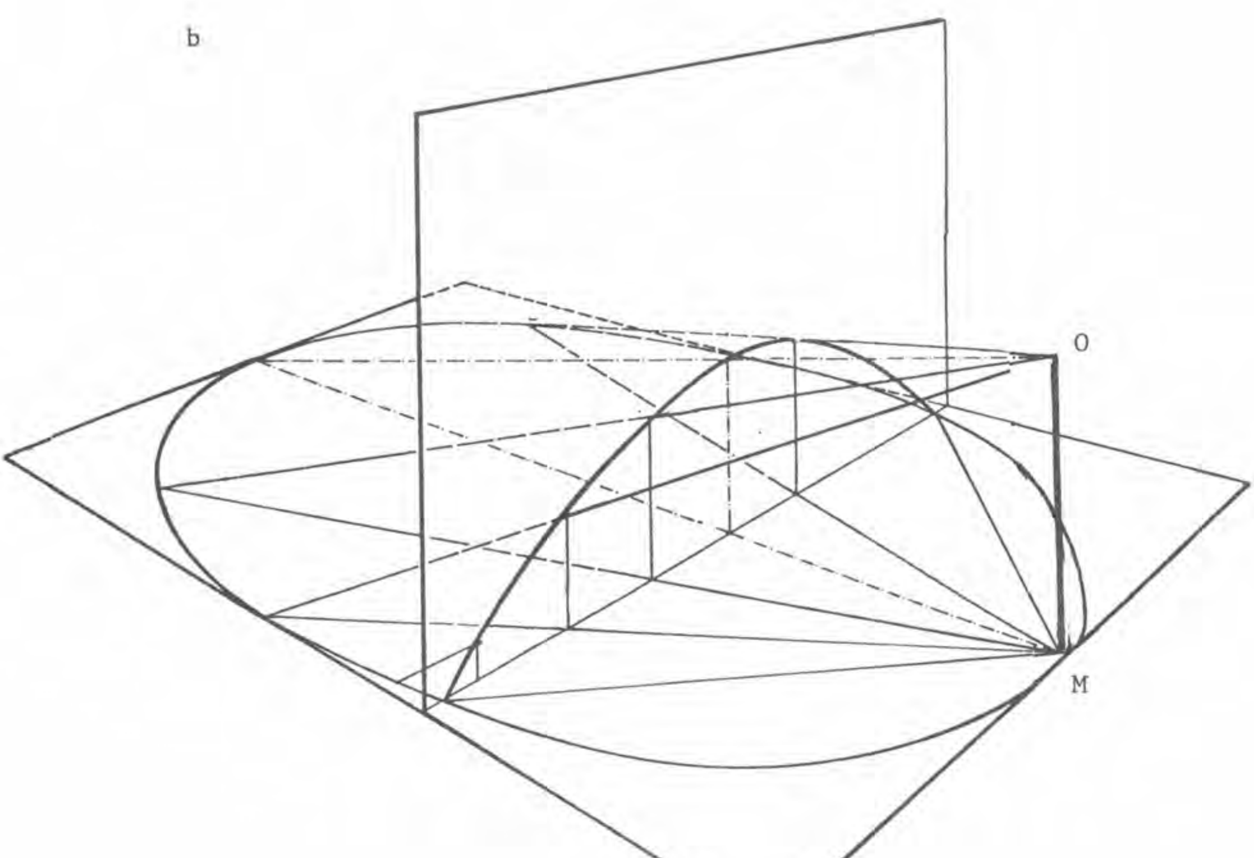
Remarques

1) Nos dessins sont faits en perspective cavalière. Donc le cercle du plan horizontal est vu comme une ellipse. Son image est, sur nos dessins, une ellipse (Figure a) ou une parabole (Figure b) car la vue en perspective cavalière d'une ellipse, d'une parabole, d'une hyperbole est une courbe de même nature.

a



b

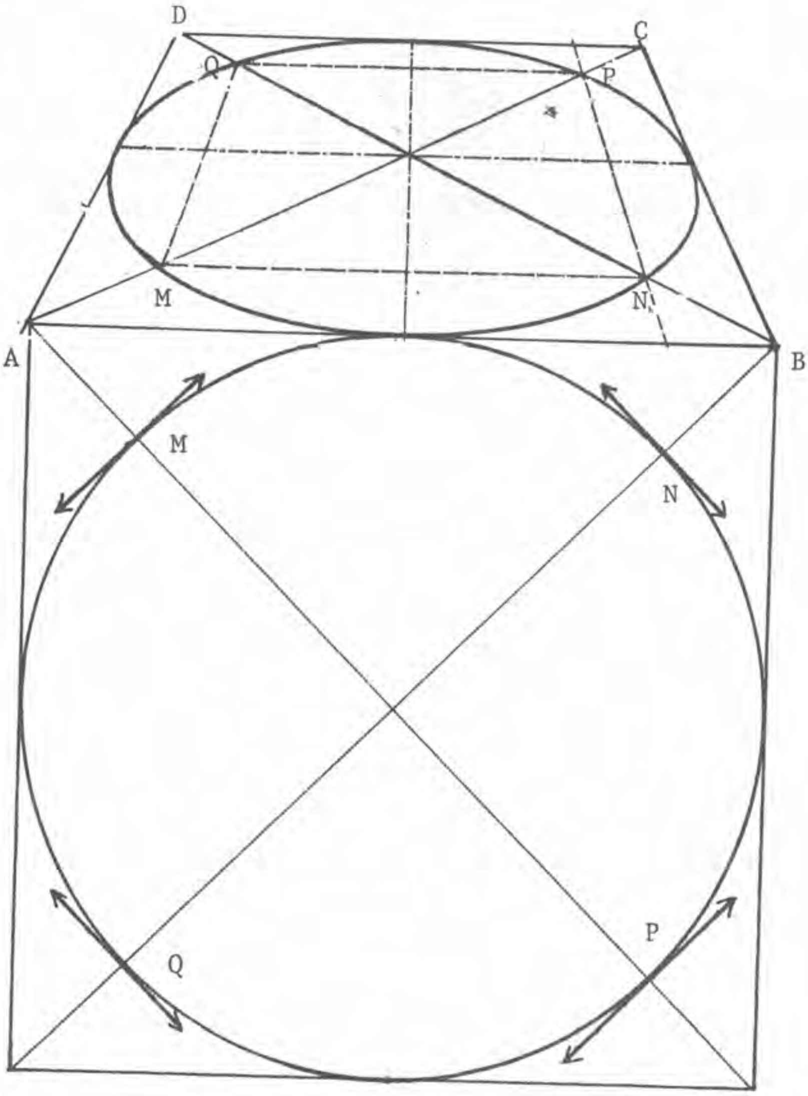


2) On peut distinguer les trois coniques en disant que l'ellipse n'a pas de points à l'infini, la parabole en a un, l'hyperbole en a deux. Cela se retrouve dans l'image d'un cercle : s'il est tangent à la transversale de l'observateur il a un point à l'infini (puisque la transversale est vue à l'infini) et s'il est sécant il a deux points à l'infini.

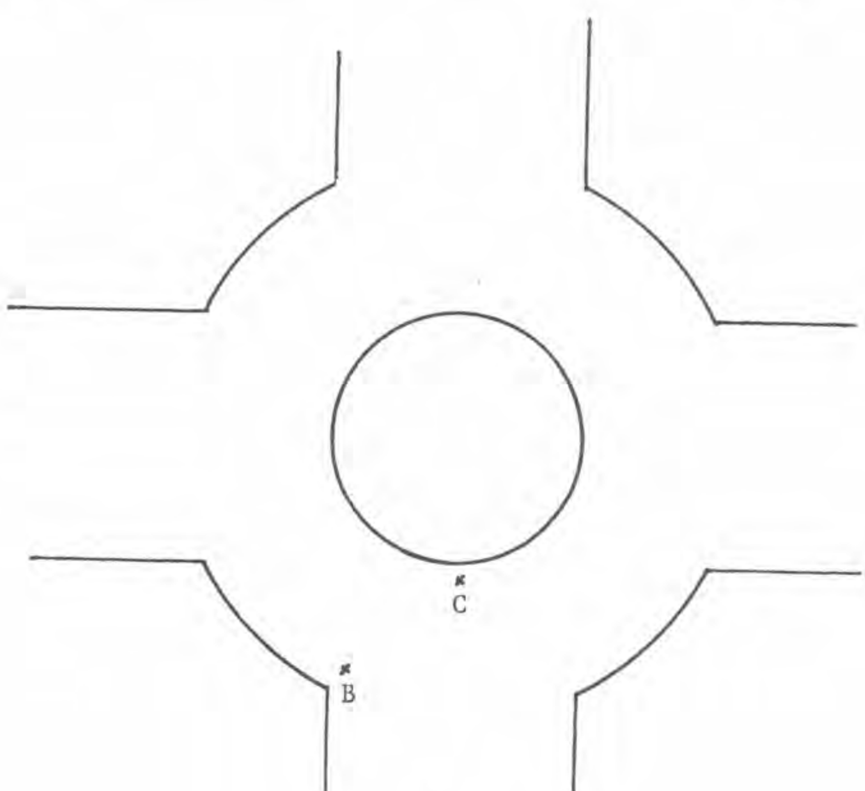
3) Il est facile de voir quelle est la section d'un cône par un plan : il suffit d'éclairer un mur par une ampoule placée dans un abat-jour (à bord circulaire), et de faire varier l'inclinaison de l'instrument. On voit apparaître les différents types de coniques.

Pour dessiner l'image d'un cercle, on peut utiliser une méthode analogue à celle du thème 6. C'est ce que nous avons fait ci-dessous. On a utilisé en particulier le fait que les tangentes en M, N, P et Q sont parallèles à AC ou BD (Figure a).

▶ Ex. 3.21 : Dessiner en perspective fuyante le rond-point dont le plan est donné ci-contre. L'observateur est placé en A, puis en B, puis en C et regarde vers le centre du rond-point (Figure b).



a



b

I R E M de LORRAINE
Académie de NANCY—METZ

FICHE DE PRÉSENTATION D'UN DOCUMENT

Titre : *Mathématiques à l'Ecole Normale ; tome 2 : - géométrie de l'égalité*
- géométrie de la proportion
- le plan et l'espace

Date de parution : *octobre 1982*

Forme du document - Format : *21x29,7* Nombre de pages : *188*

Auteur(s) : groupe :

animateur(s) : *J.M. Didry, F. Golfier, J. Lambert, G. Mathieu, M. Sibille*

Public visé : *cf. tome 1*

Pré-requis du lecteur visé : *cf. tome 1*

Motivation des auteurs : *cf. tome 1*

Apport spécifique de ce document par rapport aux autres travaux de même nature : *cf. tome 1*

Contenu du document : *- géométrie élémentaire*
- dessin