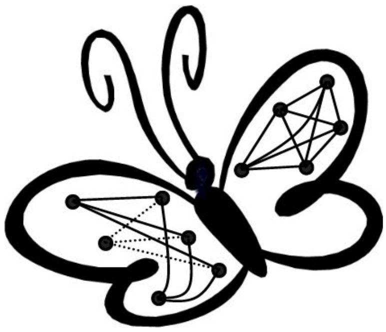
papillon des îles Herschel

Butinage graphique



papillon de Kuratowski centrale

IREM DE LYON

Jean-Manuel Mény
Le groupe "Graphes" de l'IREM de Lyon
Gilles Aldon et Lionel Xavier

Table des matières

Contenu

Le point de départ de cette brochure a été la préparation de stages de formation sur la théorie des graphes, proposés par l' IREM de Lyon en 2003. Les intitulés de ces deux stages étaient :

- Initiation à la théorie des graphes (première approche de la théorie pour des professeurs n'ayant pas encore suivi de stage sur les graphes, dans le cadre des programmes actuels : problèmes de coloration, de chemin eulérien ...)
- Autres notions abordables dans le secondaire (outre les éléments présents dans les programmes actuels de ES : arbres, graphes planaires, quelques applications ...)

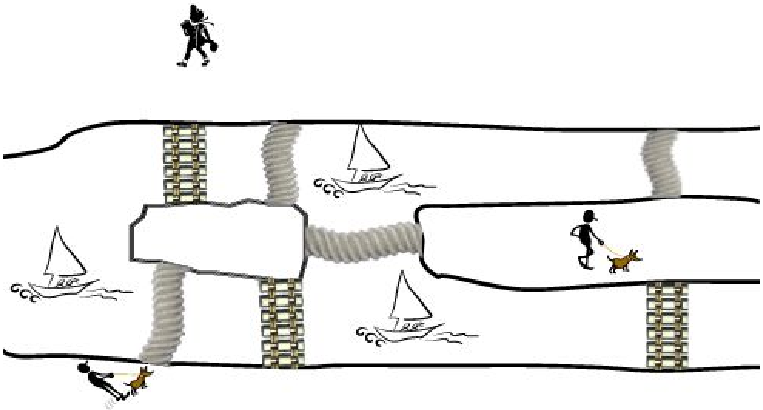
Un document écrit permet bien sûr d'aller plus loin que 4 journées de stage, mais l'objectif reste le même : offrir aux collègues de collège et lycée un moyen de formation continue en mettant l'accent sur des "problèmes plaisants et délectables" issus de la théorie des graphes plutôt que sur des résultats techniques, tout en donnant les démonstrations ou des idées de démonstrations des résultats essentiels.

Toute remarque ou suggestion sera la bienvenue à l'adresse suivante :
jean-manue.meny@ac-lyon.fr

Introduction

Née des recherches d'Euler au XVIIIe siècle, la théorie des graphes est devenue une branche des mathématiques au début du XXe siècle, grâce aux travaux de König, de Kuratowski, de Cayley et, plus récemment, de Berge, d'Erdös et de Harary. Les recherches récentes en informatique et surtout en algorithmique lui donnent un nouveau souffle. La théorie des graphes permet de résoudre efficacement une grande variété de problèmes pratiques ou récréatifs en les ramenant à des configurations qui se dessinent simplement à l'aide de points et de liaisons entre ces points.

On fait généralement remonter la théorie des graphes au problème dit «des ponts de Königsberg» (Kaliningrad). Résolu par Leonhard Euler en 1736, ce problème, à l'allure de casse-tête, s'énonce ainsi : est-il possible, en partant d'une zone de la ville, de retourner dans la même zone en traversant chacun de ses sept ponts une fois et une seule ?



La théorie des graphes sert avant tout à représenter et à organiser les tâches de façon optimale : après avoir traduit un problème sous forme de graphe, on cherche des méthodes systématiques qui permettent de trouver la succession la plus rapide ou la moins coûteuse pour effectuer toutes les tâches.

De fait, ses applications pratiques sont très diverses :

- optimisation des réseaux de transport
- transports routiers ou transports d'information
- conception de réseaux électriques, de réseaux de communication,
- mécanique statistique, formules chimiques, informatique théorique, sciences sociales, géographie, architecture...

C'est en 1822 que le mot «graphe» est introduit par l'Anglais J.J. Sylvester, et en 1936 que paraît le premier livre sur la théorie des graphes, écrit par D. König. Un graphe est un dessin géométrique défini par la donnée d'un ensemble de points (appelés sommets ou nœuds), reliés entre eux par un ensemble de lignes ou de flèches (appelées arêtes ou arcs). Chaque arête a pour extrémités deux points, éventuellement confondus. Le graphe est dit orienté si, pour chaque arête, on distingue une extrémité initiale et une extrémité terminale.

Chapitre 1

Des graphes sans le vocabulaire des graphes

Deux exemples d'introduction.

1.1 Un exemple orienté

Considèrons un groupe $\mathcal{G}$ de politiciens d'un parti donné. Pour deux politiciens quelconques de $\mathcal{G}$, on suppose qu'il y en a toujours un qui est préféré par la majorité (pas d'ex-aequo). La relation de préférence n'est pas transitive, i.e. on peut avoir A preféré à B, B preféré à C et C preféré à A, ce qu'on peut schématiser ainsi :

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr] & \\ C \arrow[ur] & & B \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

(cf paradoxe de Condorcet : un tiers des votants évaluent ainsi les politiciens A, B et C : $A > B > C$, un autre tiers : $B > C > A$, le dernier tiers : $C > A > B$; pour un choix entre A et B, la majorité va à A, entre B et C elle va à B et entre C et A, elle va à C. On a ainsi un phénomène de "comparaison" sans transitivité).

– Un politicien A sera dit candidat acceptable si pour tout autre politicien B, A est préféré à B ou A est préféré à un candidat C lui-même préféré à B.
– Un politicien sera appelé un bon candidat s'il est préféré à tous les autres.

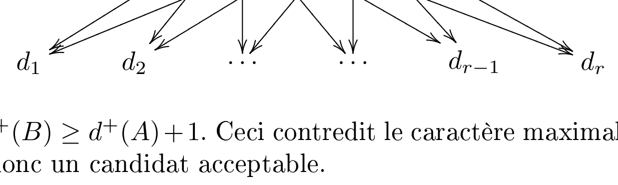
1. Montrer qu'un groupe de politiciens contient nécessairement un candidat acceptable *(dans le vocabulaire de la théorie des graphes : "un tournoi a toujours au moins un roi", notion et résultat dus au mathématicien H.G. Landau).*
2. Trouver un groupe de cinq politiciens où chacun est un candidat acceptable.
3. Trouver un groupe de six politiciens où chacun est un candidat acceptable.
4. Soit A un politicien à qui l'on préfère un politicien B. Montrer qu'il existe un candidat acceptable que l'on préfère à A.
5. Montrer qu'un politicien est un bon candidat ssi c'est l'unique candidat acceptable. En d'autres termes, un bon candidat est LE candidat.

6. Peut-on trouver un groupe de 4 politiciens dans lequel chacun est un candidat acceptable ?
7. Peut-on trouver un groupe de n ($n \geq 5$) politiciens dans lequel chacun est un candidat acceptable ?
8. Peut-on trouver un groupe $\mathcal{G}$ de politiciens dans lequel il y ait exactement deux candidats acceptables ?
9. Démontrer que nos politiciens (groupe $\mathcal{G}$ de n politiciens) peuvent toujours nommer un numéro 1 du parti, un numéro 2 du parti, ...jusqu'au numéro n de façon à ce que 1 soit préféré à 2, 2 soit préféré à 3, ..., $n-1$ soit préféré à n.
10. On appelle tournoi un "graphe des préférences", c'est à dire la donnée d'un groupe de n politiciens et des couples de préférence (la présence du couple (a, b) où a et b sont deux politiciens du groupe signifiant $a \to b$, c'est à dire a est préféré à b). On appelle chemin hamiltonien (orienté) une numérotation respectant les préférences c'est à dire une numérotation des n politiciens comme décrit dans la question précédente.
    Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe au moins un tournoi de n politiciens ayant au moins $\frac{n!}{2^{n-1}}$ chemins hamiltoniens.
11. Appelons "perdant" un politicien A tel que pour tout autre politicien B, B est préféré à A ou B est préféré à un politicien C lui-même préféré à A. En renversant les flèches dans le graphe des préférences, on voit que cette notion de perdant aura les mêmes propriétés que celle de candidat acceptable.
    Est-il possible qu'un politique soit à la fois un candidat acceptable et un perdant ?

(On trouvera des compléments à ce problème dans [7] (étude de moeurs dans un poulailler))

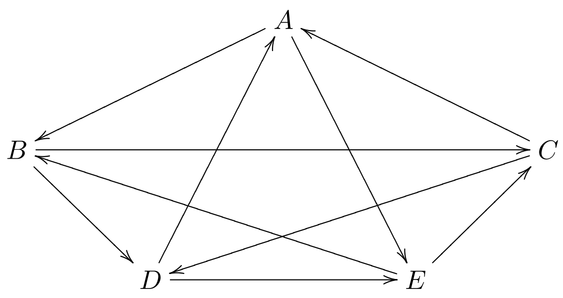
Résolution.
Pour chaque politicien p, on note $d^+(p)$ le nombre de politiciens auxquels il est préféré.

1. Soit A un politicien pour lequel $d^+(A) = \max_p(d^+(p))$. Supposons que A n'est pas un candidat acceptable. Il existe alors un politicien B tel que l'on n' ait ni $A \to B$, ni l'existence d'un politicien C tel que $A \to C \to B$, c'est à dire A n'est pas préféré à B et pour tout politicien C distinct de B et A, si A est préféré à C alors C n'est pas préféré à B. Donc B est préféré à A et si A est préféré à C alors B est préféré à C

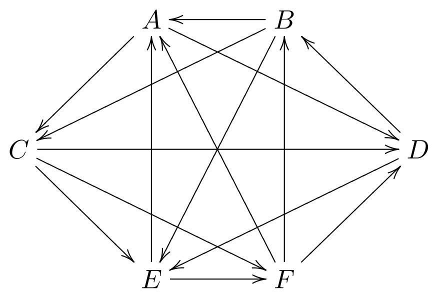


   ...donc $d^+(B) \geq d^+(A)+1$. Ceci contredit le caractère maximal de $d^+(A)$ et A est donc un candidat acceptable.

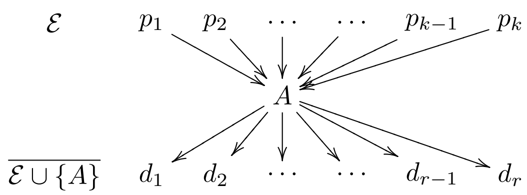
2.



3.



4. Dans un groupe $\mathcal{G}$ de politiciens, soit A un politicien à qui l'on préfère au moins un autre politicien . Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des politiciens préférés à A.



Dans le groupe $\mathcal{E}$ de politiciens, il y a un candidat acceptable (d'après la première question), notons le p_1. Comme le montre le schéma ci-dessus, p_1 est un candidat acceptable dans $\mathcal{G}$: il est préféré directement ou par un intermédiaire à tout élément de $\mathcal{E}$ (puisque candidat acceptable dans $\mathcal{E}$), il est préféré à A par définition de $\mathcal{E}$ et est préféré par l'intermédiaire A à tous les politiciens restants (éléments de $\mathcal{G} - (\mathcal{E} \cup \{A\})$).

5. – Soit p un bon candidat. S'il y avait un autre candidat acceptable q, alors q serait préféré à p directement ou par un intermédiaire. Dans les deux cas, il y aurait au moins un politicien préféré à p ce qui est contradictoire avec le fait que p est un bon candidat. p est donc le seul candidat acceptable.
   – Soit p seul politicien du groupe $\mathcal{G}$ à être un candidat acceptable.
   Soit q un autre politicien. Soit il est préféré à tout autre et c'est donc un candidat acceptable, d'où $q = p$. Soit il existe un candidat que l'on préfère à q, mais alors, d'après la question précédente, il existe un candidat acceptable qu'on lui préfère ...qui ne peut être que p. Et p est donc un bon candidat.

6. Supposons que l'on ait $\mathcal{G}$ un groupe de quatre politiciens A, B, C, D tel que les quatre soient des candidats acceptables.

On a $A \to B$ ou $B \to A$ et quitte à échanger les noms de A et B, on peut supposer que $A \to B$. De même, on a $C \to D$ ou $D \to C$ et quitte à échanger les noms de C et D, on peut supposer que $C \to D$.

On a donc :
$$\boxed{\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}}$$

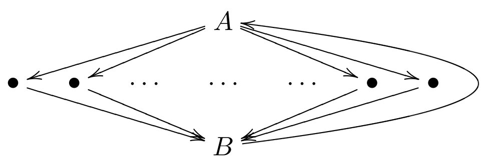
On a $A \to C$ ou $C \to A$ et quitte à échanger les noms (A,B) avec (C,D), on peut supposer que $A \to C$:
$$\boxed{\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}}$$

(a) Supposons que l'on ait $B \to D$:
$$\boxed{\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}}$$
. Dans cette configuration, pour que B soit un candidat acceptable, il faut alors nécessairement que $B \to C$ (car il est clair que l'on ne peut avoir ici $B \to ? \to C$). Mais on ne peut pas non plus ici avoir $C \to ? \to B$, donc pour que C soit un candidat acceptable, il faudrait que l'on ait $C \to B \ldots$

(b) Il faut donc que l'on ait $D \to B$:
$$\boxed{\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \\ C \arrow[r] & D \arrow[u] \end{tikzcd}}$$
. Comme on n'a pas $B \to A$, on doit avoir $B \to ? \to A$ pour que B soit un candidat acceptable. Et le ? est, dans cette configuration, nécessairement C. On a donc $B \to C$:
$$\boxed{\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[dl] \\ C \arrow[r] & D \arrow[u] \end{tikzcd}}$$
. Mais même ainsi, on ne peut avoir $B \to ? \to A$.

Il ne peut donc pas y avoir de groupe de quatre politiciens dans lequel tous sont des candidats acceptables.

7. On raisonne par récurrence. Soit $n \geq 5$ un groupe de politiciens dans lequel tous sont des candidats acceptables. Alors on peut trouver un groupe de $n+2$ politiciens dans lequel tous sont des candidats acceptables (on ajoute sur le schéma A et B à un groupe de n politiciens satisfaisant l'hypothèse de récurrence) :



Comme il existe des groupes de 5 politiciens et des groupes de 6 politiciens où tous sont candidats acceptables, cette hérédité de grand-père à petit-fils assure l'existence de groupes de n politiciens où tous sont candidats acceptables pour $n \geq 5$.

8. Soit $\mathcal{G}$ un groupe de politiciens avec exactement deux candidats acceptables A et B. L'un est préféré à l'autre, on peut supposer par exemple que $A \twoheadrightarrow B$. Par ailleurs, A n'est pas un bon candidat (sinon ce serait le seul candidat acceptable), donc il existe au moins un politicien qu'on lui préfère...mais alors, d'après une question précédente, il existe un candidat acceptable qu'on lui préfère et ce candidat ne peut être que B...contradiction. Il ne peut donc pas y avoir exactement deux candidats acceptables.
9. (a) Une première preuve.
   Numérotons $p_1, p_2, \ldots, p_n$ nos politiciens, il y a $n!$ numérotations possibles... choisissons en une de telle sorte que le nombre de "préférences à rebours" (c'est à dire de la forme $p_j \to p_i$ avec $j > i$) soit minimal. Cette numérotation convient, c'est à dire : $p_1 \to p_2 \to \cdots \to p_n$. Sinon, il existe au moins une préférence à rebours de la forme $p_{i+1} \to p_i$. Echangeons alors les numéros de ces deux politiciens : on diminue ainsi le nombre total de préférences à rebours, ce qui contredit notre choix de numérotation.

   (b) Une preuve constructive, par récurrence sur le cardinal n du groupe $\mathcal{G}$.
   Le résultat est clair pour des groupes de 1, 2 ou 3 politiciens.
   Supposons le vrai pour tout groupe de n politiciens ($n \geq 3$).
   Soit $\mathcal{G}$ un groupe de $n+1$ politiciens $p_1, p_2, \ldots, p_n, p_{n+1}$. Excluons provisoirement p_{n+1} du parti, il nous reste un groupe de n politiciens que l'on peut ordonner d'après l'hypothèse de récurrence : $p_1 \twoheadrightarrow p_2 \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow p_n$ (où l'on a éventuellement renuméroté les sommets).
   Si p_{n+1} est préféré à p_1, le groupe $\mathcal{G}$ peut s'ordonner ainsi :

$$p_{n+1} \twoheadrightarrow p_1 \twoheadrightarrow p_2 \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow p_n$$

   Si p_n est préféré à p_{n+1}, le groupe $\mathcal{G}$ peut s'ordonner ainsi :

$$p_1 \twoheadrightarrow p_2 \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow p_n \twoheadrightarrow p_{n+1}$$

   On remarquera que ces deux cas ne sont pas incompatibles : dans une même situation , p_{n+1} peut être le numéro 1 du parti ou le dernier des sous-fifres ...
   Si l'on n'a ni $p_{n+1} \twoheadrightarrow p_1$, ni $p_n \twoheadrightarrow p_{n+1}$, c'est à dire si l'on a :

$$\begin{tikzcd}
 & & p_{n+1} \arrow[dr] & \\
p_1 \arrow[urr] \arrow[r] & p_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & p_n
\end{tikzcd}$$

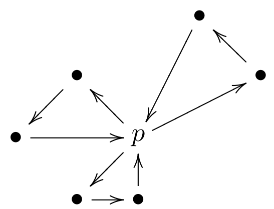
   notons i le plus petit indice tel que $p_{n+1} \twoheadrightarrow p_i$, on a le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & p_{n+1} \arrow[dr] & & & \\
p_1 \arrow[r] & p_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & p_{i-1} \arrow[u] \arrow[r] & p_i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & p_n
\end{tikzcd}$$

   et la numérotation suivant le schéma ci-dessous termine la preuve :

$$\begin{tikzcd}
 & & & p_{n+1} \arrow[dr] & & & \\
p_1 \arrow[r] & p_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & p_{i-1} \arrow[u] & p_i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & p_n
\end{tikzcd}$$

10. Fixons l'ensemble $\mathcal{G} = \{1, 2, \ldots, n\}$ des politiciens.
Il y a $2^{\frac{1}{2}n(n-1)}$ tournois possibles sur $\mathcal{G}$ (pour chacun des $\frac{1}{2}n\,(n-1)$ couples (i, j) avec $i < j$, on choisit la flèche $i \to j$ ou la flèche $j \to i$). Notons $\mathcal{T}_n$ l'ensemble de ces tournois.
Pour une permutation σ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, combien a-t-on de tournois tels que l'on ait $\sigma(1) \to \sigma(2) \to \cdots \to \sigma(n)$? Il y en a
$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)-(n-1)}$$
(on fixe le sens de $n - 1$ flèches et il y a deux possibilités pour toutes les autres).
Cela nous fait donc un total de
$$n! \times 2^{\frac{1}{2}n(n-1)-(n-1)}$$
chemins hamiltoniens dans $\mathcal{T}_n$. Il y a donc une moyenne de
$$m = \frac{n! 2^{\frac{1}{2}n(n-1)-(n-1)}}{2^{\frac{1}{2}n(n-1)}} = \frac{n!}{2^{n-1}}$$
chemins hamiltoniens par tournoi, donc au moins l'un de ces tournois en compte au moins m.
11. La réponse est oui comme le montre le politique p du graphe ci-dessous :

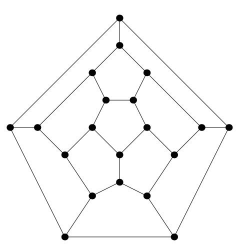


■

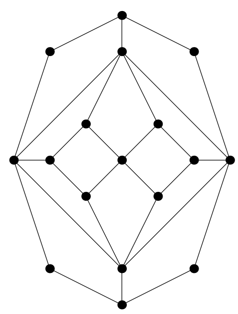
1.2 Un exemple non orienté

Un voyageur de commerce doit visiter les villes des deux régions ci-dessous (les points sont les villes, les segments sont les routes reliant ces villes). Pour chacune de ces deux régions, il cherche à définir un circuit (fermé, c'est à dire se terminant par la ville de départ) lui permettant de visiter chaque ville exactement une fois. Aidez le.

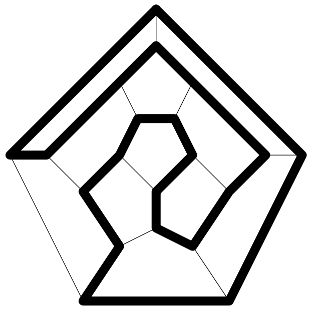
Plan 1



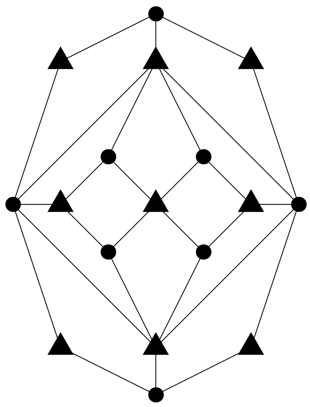
Plan 2



Résolution.
Plan 1. Un cycle hamiltonien sur le graphe du dodécaèdre :



Plan 2. On dessine un “sommet sur deux” en triangle :



Chaque arête a maintenant une extrémité circulaire et l'autre triangulaire : dans un parcours du voyageur de commerce, les disques et triangles s'alternent donc nécessairement. Avec cette alternance des symboles, on constate facilement que pour fermer un circuit on devra parcourir un nombre pair de routes (un nombre impair de routes correspond à un nombre impair de changement de forme et on ne finit pas par la forme par laquelle on a commencé dans ce cas) et, sur un circuit sans répétition de villes (sauf la première que l'on retrouve en fermant le circuit), on aura donc visité un nombre pair de villes (le même nombre que de routes empruntées).
Or le nombre total de villes du plan est impair, donc le circuit est impossible avec les contraintes imposées.
(Dans les termes de la théorie des graphes, ce raisonnement montre qu'un graphe biparti d'ordre impair n'est pas hamiltonien)

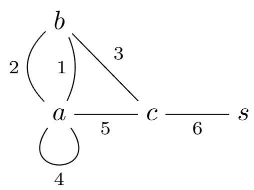
■

Chapitre 2

Quelques définitions

2.1 Graphe (non orienté)

2.1.1 Notion de graphe (non orienté).

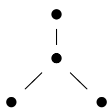
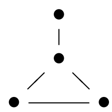
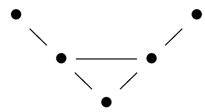
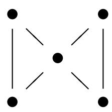
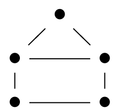
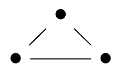
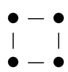


a, b, c, s sont les sommets du graphe, $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sont les arêtes du graphe. L'arête 5 est dite incidente aux sommets a et c. a et c sont appelés les extrémités de l'arête 5. Les sommets a et c, étant incidents à une même arête, sont dits adjacents ou voisins.
L'arête 4, dont les deux extrémités sont confondues, est appelée une boucle en a.
Plus formellement, on peut définir un graphe par la donnée d'un triplet (S, A, f) où S et A sont des ensembles finis (S ensemble des sommets, A ensemble des arêtes) et f est la "fonction d'incidence" : $f : A \rightarrow \mathcal{P}_2(S) \cup \mathcal{P}_1(S)$ où $\mathcal{P}_2(S)$ est l'ensemble des parties de S à deux éléments et $\mathcal{P}_1(S)$ est l'ensemble des parties de S à un élément.
Sur l'exemple ci-dessus : $f(4) = \{a\}$, $f(2) = f(1) = \{a, b\}$ ...
L'ensemble des sommets d'un graphe G est souvent noté $V(G)$ (V initiale de vertex).
Lorsqu' il peut y avoir plusieurs arêtes entre deux mêmes sommets (comme ci-dessus entre a et b), on parle d'arêtes multiples.
Un graphe ne présentant ni arêtes multiples, ni boucles sera appelé un graphe simple. Pour un graphe simple, l'ensemble des arêtes peut donc être considéré comme une partie de $\mathcal{P}_2(S)$. Un graphe non nécessairement simple peut être qualifié de graphe multiple (ou multigraphe).

2.1.2 Degré d'un sommet. Ordre d'un graphe.

Le degré d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet (la présence d'une boucle ajoute 2 au degré).
Sur l'exemple ci-dessus : $d(a) = 5$, $d(b) = 3$, $d(c) = 3$, $d(s) = 1$.
Le nombre de sommets d'un graphe est appelé l'ordre de ce graphe.
Sur l'exemple ci-dessus, le graphe est d'ordre 4.

2.1.3 Petite ménagerie graphique.

La griffe :

La patte (palmée) :

Le taureau :

Le papillon :

La maison :

Le triangle K_3 :

Le carré :


Graphe complet d'ordre n (noté en général K_n) : graphe (simple) à n sommets dans lequel tout sommet est adjacent à tout autre sommet.
L'étoile : un sommet c (centre de l'étoile) est adjacent à tous les autres (et les autres ne sont adjacents qu'à ce sommmet c).

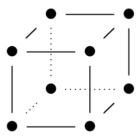
2.1.4 Sous structure.

1. Un sous-graphe d'un graphe G est un graphe obtenu en ne gardant qu'une partie X des sommets du graphe G et une partie des arêtes incidentes à deux sommets de X.
2. Soit G un graphe. Soit X un ensemble de sommets de ce graphe. Le sous-graphe engendré (ou induit) par X est le sous-graphe dont l'ensemble des sommets est X et dont l'ensemble des arêtes est constitué de toutes les arêtes de G incidentes à deux sommets de X.
3. Graphe engendré (ou induit) par un ensemble B d'arêtes du graphe G : sous-graphe de G dont l'ensemble des arêtes est l'ensemble B et dont l'ensemble des sommets est constitué des sommets de G incidents aux arêtes de B.

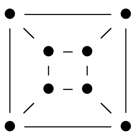
Pour les notions les plus courantes, voir aussi l'annexe A.

2.1.5 Morphing, le graphe souple.

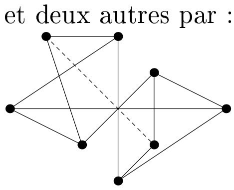
Lors d'un contrôle, un élève représente la situation proposée par l'énoncé par le graphe suivant :

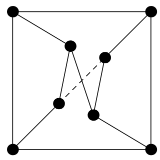


un autre par :



et deux autres par :

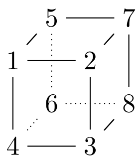


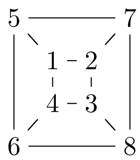


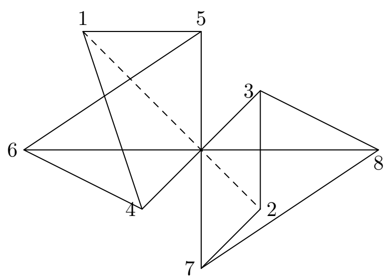
Ont-ils donné la même réponse ?

Résolution.

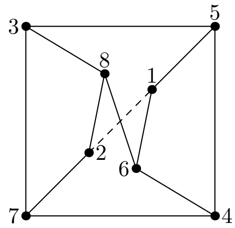
1. Une première idée pourrait être d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique (cabri, geoplan...) ou un logiciel dédié aux graphes (GRIN...) pour "déformer" une représentation et l'amener à coïncider avec une autre.
2. D'un point de vue plus formel, on cherche à définir un isomorphisme entre deux graphes (un isomorphisme f entre les graphes simples G et H est une bijection entre les ensembles de sommets telle que pour tous sommets s, t de G , $\{s, t\}$ est une arête de G ssi $\{f(s), f(t)\}$ est une arête de H).
   Les trois premiers graphes proposés sont isomorphes : avec les numérotations ci-dessous des sommets, vérifier que chaque sommet a les mêmes voisins dans les trois graphes.





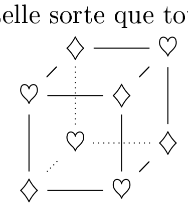


Le quatrième graphe n'est pas par contre isomorphe au graphe du cube :



(8,3,5,1,2,8) est un cycle élémentaire de longueur 5 (parcours fermé sans répétition d'arêtes ou de sommets, voir l'annexe A et le paragraphe 4.1).

Mais le cube ne peut présenter un tel cycle, on peut en effet attribuer deux symboles $\diamondsuit$ et $\heartsuit$ aux sommets du graphe du cube de telle sorte que toute arête a une extrémité en $\diamondsuit$ et l'autre extrémité en $\heartsuit$:



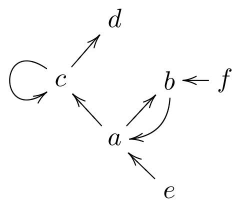
Le long d'un parcours, les deux symboles s'alternent nécessairement, et un parcours fermé sera donc obligatoirement de longueur paire (même raisonnement qu'en 1.2). Et le lecteur se convaincra facilement qu'un cycle de longueur 5 a pour image un cycle de longueur 5 par un isomorphisme.

■

De façon générale, deux graphes isomorphes pourront être considérés comme le même graphe (vis-à-vis des propriétés conservées par un isomorphisme !).

2.2 Graphe orienté

Un graphe orienté G est en bref un ensemble fini de points (appelés sommets) avec des flèches entre certains de ces points.
Dans tous les chapitres, le mot "graphe" utilisé sans qualificatif désignera un graphe non orienté.



Plus formellement un graphe orienté (simple) est un couple (S, F) où S est un ensemble fini (ensemble des sommets) et F une partie de $S \times S$ (F ensemble des flèches).
L'exemple ci-dessus est un graphe orienté (simple), a, b, c, d, e, f sont les sommets, (e, a), (a, c), (a, b), (b, a), (c, c)...sont des flèches du graphe.
Pour tout sommet s de G, on note $\Gamma^+(s)$ l'ensemble des sommets t tels que $(s; t)$ est une flèche du graphe, c'est à dire tels que t est un "successeur" de s dans G :

$$\Gamma^+(s) = \text{ensemble des successeurs de } s.$$

Pour tout sommet s de G, on note $\Gamma^-(s)$ l'ensemble des sommets t tels que $(t; s)$ est une flèche du graphe, c'est à dire tels que t est un "prédécesseur" de s dans G :

$$\Gamma^-(s) = \text{ensemble des prédécesseurs de } s.$$

On note enfin $\Gamma(s)$ l'ensemble des voisins de s dans G, c'est à dire :

$$\Gamma(s) = \Gamma^+(s) \cup \Gamma^-(s).$$

Dans l'exemple : $\Gamma^+(a) = \{b; c\}$, $\Gamma^-(a) = \{b; e\}$, $\Gamma(a) = \{c; b; e\}$, $\Gamma^+(d) = \emptyset$, $\Gamma^+(c) = \{d; c\}$, $\Gamma^-(c) = \{a; c\}$ ...

Pour définir la notion de degré, on devra tenir compte du sens des flèches. On définit donc le degré extérieur qui compte le nombre de flèches partant d'un sommet et le degré intérieur qui compte le nombre de flèches arrivant au sommet.
Dans l'exemple, $d^+(b) = 1$, $d^-(b) = 2$, $d^+(e) = 1$, $d^-(e) = 0$, $d^+(c) = 2$, $d^-(c) = 2 \ldots$
Si on veut autoriser des flèches multiples entre deux sommets pour définir un multigraphe orienté, on pourra définir F non plus comme une partie de $S \times S$ mais comme une famille d'éléments de $S \times S$.

Chapitre 3

Degrés et nombre d'arêtes

3.1 Lemme des poignées de mains

3.1.1 Poignées de mains politiques.

Mars 2003. Gros titre dans les journaux : "Au rendez-vous des 15, J. Chirac et T.Blair ne se serrent pas la main".
Un journaliste ajoute : "Les tensions sont telles qu'en fait chacun des 15 chefs d'Etat présents n'a serré la main qu'à sept des autres chefs d'Etat". Montrez que l'auteur de l'article est un mauvais journaliste.

Résolution.
Passons sur la pauvreté de l'information apportée ...

- Quel est, selon ce journaliste, le nombre de mains serrées ?
  Chacun des 15 serre 7 mains : le nombre de mains serrées est donc de $15 \times 7 = 105$.
- Quel est, selon le journaliste, le nombre de poignées de mains ?
  Si Jacques serre la main de Gerhard, cela fait intervenir deux mains, mais une seule poignée de mains est effectuée...Le nombre de mains serrées est donc le double du nombre de poignées de mains et le nombre de poignées de mains est donc $\frac{105}{2}$ ...ce qui est absurde (nombre non entier).

■

3.1.2 Parité du nombre de mains serrées.

1. Montrer que le nombre de mains serrées lors d'échanges de poignées de mains entre les membres d'un groupe est toujours pair.
2. Enoncer cette propriété dans le cadre de la théorie des graphes.

Résolution.

1. Dans un groupe si p désigne le nombre de poignées de mains alors le nombre de mains serrées est $2p$.
2. Dans le cadre de la théorie des graphes, cela peut s'énoncer ainsi : "Dans un graphe simple, la somme des degrés est toujours un nombre pair".
   Preuve : un graphe simple G peut toujours être considéré comme le graphe des poignées de mains échangées dans un groupe (les sommets sont les personnes, une arête relie deux personnes ssi elles ont échangé une poignée de mains). Le degré d'un sommet est alors le nombre de mains serrées par la personne, et la somme des degrés est le nombre de mains serrées dans le groupe, qui est pair.
   Si le graphe est non simple (c'est à dire si le graphe présente d'éventuelles arêtes multiples et boucles), le résultat vaut encore : une boucle revient à se serrer la main à soi-même (deux mains interviennent, ceci est en accord avec la convention qui consiste à ajouter deux au degré d'un sommet pour chaque boucle en ce sommet) et n arêtes entre A et B s'interprètent par n échanges de poignées de mains entre A et B (que l'on compte comme $2n$ mains serrées).

■

3.1.3 Lemme des poignées de mains.

Dans un graphe, la somme des degrés est égale à deux fois le nombre d'arêtes (cette somme est donc paire).

Résolution.
Interprétons le graphe G comme le graphe des poignées de mains échangées dans un groupe. La somme des degrés est le nombre de mains serrées et le nombre d'arêtes est le nombre de poignées de mains. D'où le résultat.
Remarque : la convention qui consiste à ajouter deux au degré d'un sommet pour chaque boucle en ce sommet assure que l'énoncé est encore valide en présence de boucles.

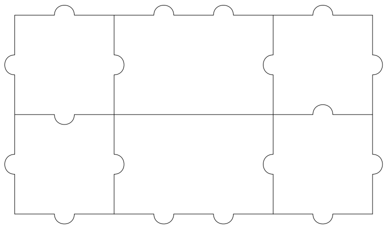
■

3.1.4 Ma maison.

Ma maison (construite sur un seul niveau) a 18 ouvertures (portes et fenêtres) et chaque pièce a deux ouvertures sur l'extérieur et deux ouvertures vers l'intérieur. Combien ma maison a-t-elle de pièces ?
(d'après un problème du championnat international des jeux mathématiques 1993, cf [9])

Résolution.
On représente chaque pièce par le sommet d'un graphe, ainsi que l'extérieur. On relie deux sommets ssi il existe une ouverture entre les deux. Les i sommets

"intérieurs"(c'est à dire les i pièces de ma maison) ont pour degré 4, le sommet "extérieur" a pour degré $2i$. La somme des degrés est donc $4i+2i$ et cette somme est le double du nombre d'arêtes : $6i = 2 \times 18$. Il y a donc 6 pièces.



■

3.2 Dans un graphe complet

3.2.1 Quand tous serrent la main à tous

Dans un groupe de personnes, chacun a serré la main à tous les autres. En dénombrant de deux façons le nombre de poignées de mains, établir la relation :

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{1}{2}n\,(n+1)$$

Résolution.
Avec $n+1$ personnes, la question revient à dénombrer le nombre d'arêtes du graphe complet K_{n+1} à $n+1$ sommets.

1. On numérote les sommets de 1 à $n+1$. Le sommet 1 est adjacent à n sommets : n arêtes. Le sommet 2 est adjacent à n sommets : n arêtes, mais l'arête $1-2$ est déjà comptée ce qui ne fait en fait que $n-1$ nouvelles arêtes. Le sommet 3 est adjacent à n sommets : n arêtes, mais l'arête $1-3$ et l'arête $2-3$ sont déjà comptées ce qui ne fait en fait que $n-2$ nouvelles arêtes . . .le sommet $n+1$ est adjacent à n sommets : n arêtes mais elles sont déjà toutes comptabilisées. D'où le nombre d'arêtes : $A = 1 + 2 + \cdots + n$.
2. Il y a $n+1$ sommets, à chaque sommet sont attachées n arêtes. Chaque arête est attachée à deux sommets. D'où $\frac{1}{2}n\,(n+1)$ arêtes . . .

■

3.2.2 Le groupe "formation-graphes"

Un groupe de m enseignants donnant un peu de leur temps à l'IREM se répartissent le travail à effectuer sur une brochure concernant la théorie des graphes.
Chacun des n chapitres devra être traité par le même nombre k de personnes du groupe, chaque enseignant devra s'occuper de deux chapitres exactement. Par

ailleurs, afin de faciliter le bilan des liens entre les thèmes abordés, l'écriture de deux chapitres quelconques devra se faire avec exactement une personne commune aux deux chapitres.
Quels liens entre les valeurs de n, m et k ?

Résolution.
Associons un graphe G à cette situation : chacun des n chapitres est un sommet, deux sommets sont reliés par une arête ssi une personne commune s'occupe de ces deux chapitres.
Comme deux chapitres quelconques sont traités par une personne commune exactement , le graphe est simple et complet : $G = K_n$.
Une arête entre deux chapitres représente la personne travaillant sur ces deux chapitres et comme une personne donnée s'occupe de deux chapitres exactement, il n'y a pas plusieurs arêtes représentant la même personne et chaque personne est représentée par une arête : il y a bijection entre les arêtes et les personnes, le nombre d'arêtes est donc le nombre m d'enseignants.
Le nombre d'arêtes dans K_n étant de $\frac{1}{2}n(n-1)$, on a $2m = n(n-1)$.
Enfin chaque chapitre est traité par k personnes, ce qui donne lieu à k arêtes incidentes à ce sommet-chapitre. On a donc affaire à un graphe complet où tous les sommets sont de degré k. Le degré d'un sommet dans K_n étant de $n-1$, on en déduit enfin qu'il y a $n = k+1$ chapitres et $m = \frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2}k(k+1)$ enseignants dans le groupe.
Ce qui nous donne aussi : $n = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+8m}\right)$ et $k = \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{1+8m}\right)$.

■

3.2.3 Sécuritaire

Dans un pays, on interdit les réunions après 22 h dans les halls d'immeuble.
Ce soir, dans une ville de banlieue, la police dénombre 49 "jeunes" qui traînent, ici ou là, dans l'un des 50 halls d'immeubles à surveiller.

1. Le chef de la police locale décide de n'intervenir que pour les regroupements comptant au moins 10 personnes. Dans ce cas, un groupe de policiers se charge d'intervenir, de vider le hall et de disperser le groupe en s'assurant que les membres de ce groupe s'orientent vers d'autres halls, tous différents (bien entendu, aucun des "jeunes" ne décide de rentrer sagement chez lui et rejoint un autre hall).
   A ce petit jeu là, arrivera-t-il un moment où tous les halls compteront au plus 9 personnes ?
2. Et si le chef avait décidé d'intervenir à partir de 9 personnes dans un hall ?

Résolution.

1. Associons à la situation un graphe dans lequel chaque hall est représenté par un sommet, ainsi que chaque squatteur de hall. On relie tous les jeunes d'un même hall par une arête et on les relie par une arête au sommet-hall correspondant. On obtient un graphe constitué de 50 composantes connexes *(notion de composante connexe en 4.1.6)* , ces composantes connexes sont toutes des graphes complets. Lorsqu'on disperse un groupe

de k personnes, on efface les arêtes d'un graphe complet de $k+1$ sommets, on efface donc $\frac{1}{2}k\,(k+1)$ arêtes. Chacune des k personnes du groupe rejoint un hall, notons p_1, p_2, …, p_k le nombre de personnes présentes dans ces halls. On crée donc $(p_1+1)+(p_2+1)+\cdots+(p_k+1)=k+\sum_{j=1}^{k}p_j$ nouvelles arêtes.
Comme le nombre de personnes au départ est de 49, on a $k+\sum_{j=1}^{k}p_j \leq 49$ et $\frac{1}{2}k\,(k+1) \geq \frac{1}{2}10\times 11 = 55 > 49 \geq k+\sum_{j=1}^{k}p_j$. Il y a donc, après intervention de la police, strictement moins d'arêtes qu'avant intervention. Comme ce nombre d'arêtes ne peut décroître indéfiniment, il arrive un moment où la police n'interviendra plus.

2. Imaginons qu'au départ 13 halls soient occupés par des groupes de respectivement 9,8,7,6,5,4,3,2,1,1,1,1,1 personnes. La police disperse le groupe de 9 : chacun s'en va augmenter d'une unité les halls contenant respectivement 8,7,6,5,4,3,2,1 personnes et le dernier va occuper un hall vide. On se retrouve donc dans la situation initiale 9,8,7,6,5,4,3,2,1,1,1,1,1…les interventions peuvent donc s'éterniser.

■

3.3 Les sommets impairs.

3.3.1 Parité du nombre de sommets impairs.

Etablir que le nombre de personnes serrant un nombre impair de mains lors des échanges de poignées de mains dans un groupe est toujours pair.

Résolution.

1. Installons nous au chaud dans un coin de la salle où le groupe de personnes se trouve et comptons les poignées de mains au fur et à mesure qu'elles ont lieu …En début de rencontre aucune poignée de main ne s'est encore échangée puis, petit à petit, des poignées de mains s'échangent. Il s'agit de ne pas perdre le compte de la parité du nombre λ de personnes ayant serré un nombre impair de mains.
On montre en fait que la parité de ce nombre λ est un invariant : comme on part d'une situation où ce nombre est pair (0), il sera pair à la fin.
Preuve de l'invariance.
Deux personnes se serrent la main :
   – si les deux personnes avaient toutes deux serré un nombre pair de mains jusque là, elles en ont serré alors toutes deux un nombre impair. La valeur de λ est augmentée de 2 et garde donc la même parité.
   – si les deux personnes avaient toutes deux serré un nombre impair de mains jusque là, elles en ont serré alors toutes deux un nombre pair. La valeur de λ est diminuée de 2 et garde donc la même parité.
   – si l'une des deux personnes avait à ce moment serré un nombre impair de mains et l'autre un nombre pair, elles en ont alors respectivement serré un nombre pair et un nombre impair et λ est inchangé.

2. Dans le vocabulaire de la théorie des graphes : Dans un graphe, le nombre de sommets de degré impair est toujours pair.
   Une preuve plus brève : si le nombre de sommets de degré impair était impair, la somme des degrés serait une somme de nombres pairs (somme des degrés des sommets de degré pair) et d'un nombre impair de nombres impairs (somme des degrés des sommets de degré impair) ...donc cette somme serait impaire, ce qui ne se peut en vertu du lemme des poignées de mains.

■

3.3.2 Amitié réciproque

Dans un groupe de 7 personnes, chacune déclare que trois des autres sont ses amis. Est-ce possible ?

Résolution.
Oui, mais à condition que l'amitié ne soit pas un sentiment toujours réciproque c'est à dire que la situation se représente par un graphe orienté et non par un graphe non orienté. Si la relation "est ami de" est symétrique, le graphe (non orienté) dont les sommets sont les personnes et les arêtes les relations d'amitié aurait un nombre impair de sommets impairs, ce qui est impossible.

■

3.3.3 Football.

Un regroupement de sept villages tente de planifier les rencontres de leurs équipes de foot pour la prochaine saison. Les organisateurs décident que chaque équipe devra rencontrer trois équipes différentes exactement. Aidez les à organiser les rencontres.

Résolution.
On représente chaque équipe par un sommet et deux sommets sont reliés par une arête ssi ils doivent jouer l'un contre l'autre. Il s'agit donc de construire un graphe dans lequel le nombre de sommets de degré impair serait impair ...Les contraintes imposées par nos sportifs sont donc impossibles à respecter.

■

3.3.4 Intersection de segments.

1. Tracer cinq segments tels que chacun d'eux en coupe exactement trois des autres.
2. 25 segments sont dessinés dans l'espace. Chacun d'eux en coupe au moins cinq autres. Montrer que l'un d'eux en coupe au moins six autres.

Résolution.

1. Le graphe dont les sommets seraient les segments, deux sommets étant reliés ssi les segments se coupent, aurait un nombre impair de sommets de degré impair ...la consigne est irréalisable.
2. Sinon on se retrouve avec 25 segments tels que chacun d'eux en coupe exactement cinq autres et ceci est impossible (même argumentation que la question précédente).

■

3.3.5 Poignées de mains au sommet.

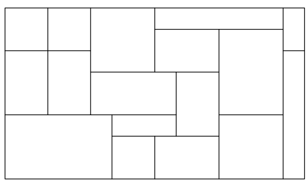
Notre journaliste spécialiste des comptes de poignées de mains de 3.1.1 affirme maintenant qu'aucun des quinze Chefs d'Etat n'a serré le même nombre de mains qu'un autre (on tient compte uniquement des poignées de mains échangées dans le groupe des Chefs d'Etat, pas de poignées de mains multiples entre deux personnes). Prouvez une fois de plus son incompétence.

Résolution.
Chaque Chef d'Etat serre la main à 0 ou à 1 ou à 2 ou ...ou à 14 autres. Les entiers 0, 1, 2, ..., 14 sont au nombre de 15 ...pour que les quinze personnes serrent un nombre différent de mains, il faut que chacune de ces 15 possibilités soit réalisée. Le nombre de sommets impairs serait donc de 7, ce qui est impossible.
On peut aussi remarquer que si une personne serre la main aux 14 autres (c'est à dire à tous), il ne saurait y avoir de personne ne serrant aucune main.

■

3.3.6 Rectangle à côté entier

Un rectangle est partitionné en petits rectangles (dont les côtés sont parallèles aux côtés du grand rectangle). Montrer que si chacun des petits rectangles a au moins l'un de ses côtés entiers, alors le grand rectangle a nécessairement au moins l'un de ses côtés entiers.



Résolution.
On munit le plan d'un repère orthonormé, les vecteurs de la base dirigeant les côtés des rectangles. On place un sommet du grand rectangle en $(0,0)$.
On définit un graphe dont les sommets sont les centres des petits rectangles

(appelons-les sommets-centres) et les sommets des petits rectangles dont les coordonnées sont entières (appelons-les sommets-coins). Chaque sommet-centre est relié aux sommets-coins de son rectangle.
Les sommets-centres sont tous de degré 0 ou 2 ou 4 (il se peut qu'un petit rectangle n'ait aucun de ses sommets à coordonnées entières mais dès qu'un sommet est à coordonnées entières, le sommet qui est à l'autre extrémité d'un côté entier est aussi à coordonnées entières).
Les sommets-coins sont de degré :

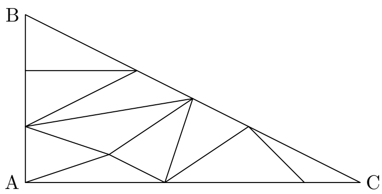
- 1 pour les sommets en “coin” •– (seuls les sommets du grand rectangle peuvent être de ce type)
- 2 pour les sommets en “T” –•–
- 4 pour les sommets en “croix” –•–

Il y a dans ce graphe au moins un sommet de degré impair : le sommet $(0,0)$. Il doit donc y en avoir au moins un second puisque leur nombre doit être pair. Et d'après le catalogue des degrés écrit ci-dessus, un sommet impair est nécessairement un sommet du grand rectangle. Donc le grand rectangle a au moins un deuxième sommet à coordonnées entières et donc au moins un côté entier.

■

3.3.7 Triangle tricolore

On divise un grand triangle ABC en petits triangles (aucun petit triangle n'a un sommet sur le côté d'un autre petit triangle).

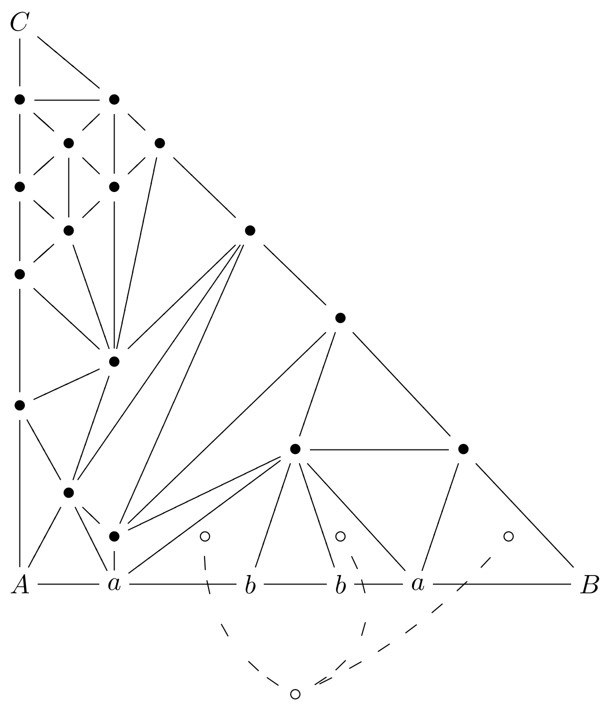


On colorie tous les sommets avec trois couleurs (ambre, bleu et carmin) en respectant les contraintes suivantes : A est couleur ambre, B bleu et C carmin ; les sommets des petits triangles se trouvant sur le segment $[AB]$ ne peuvent prendre que les couleurs ambre et bleu, de même les sommets sur $[BC]$ sont bleu ou carmin et les sommets sur $[CA]$ sont carmin ou ambre ; les sommets intérieurs au grand triangle peuvent se voir attribuer n'importe laquelle des trois couleurs.
Montrer que l'un au moins des petits triangles sera tricolore (c'est à dire avec un sommet bleu, un ambre et un carmin).
(Ce résultat est le “lemme de Sperner” (cas de la dimension 2). Ce lemme permet, entre autre, d'établir le théorème du point fixe de Brouwer (en dimension 2 : toute fonction continue du disque D de $\mathbb{R}^2$ dans D a au moins un point fixe, cf [10]))

Résolution.
On dessine un graphe G avec un sommet à l'intérieur de chaque petit triangle

et un sommet à l'extérieur du grand triangle. On relie deux sommets-petits triangles lorsque ces petits triangles ont un côté commun dont les extrémités sont des couleurs ambre et bleu. On relie de même un sommet-petit triangle au sommet-extérieur du grand triangle lorsqu' un côté de ce petit triangle, dont les extrémités sont ambre et bleu, est adjacent à l'extérieur du grand triangle.
Les degrés des sommets dans ce graphe :

- Le sommet-extérieur du grand triangle est impair. Il n'est relié en effet qu'aux sommets-petits triangles dont un côté est un segment de $[AB]$ et le côté $[AB]$ se présente ainsi :
  série de sommets ambres, série de sommets bleus, série de sommets ambres, ..., série de sommets bleus
  où seuls les segments correspondant à un changement de couleur donneront lieu à une arête du graphe G. Or ces changements de couleur sont en nombre impair puisqu'on commence en A avec la couleur ambre et termine en B avec la couleur bleu (un nombre pair de changements de couleur nous ferait terminer par la couleur de départ). Par exemple :



- Les petits triangles dont les sommets ne présentent que les couleurs bleu et carmin sont de degré 0, ainsi que les petits triangles dont les sommets ne présentent que les couleurs ambre et carmin.
- Les petits triangles dont les sommets ne présentent que les couleurs ambre et bleu sont de degré 2 car ils ont nécessairement deux côtés à extrémités ambre et bleu.
- Enfin les petits triangles tricolores sont de degré 1.

On peut maintenant conclure : le graphe G présente au moins un sommet de degré impair (le sommet correspondant à l'extérieur du grand triangle), donc doit en posséder au moins un autre, c'est à dire qu'il doit exister au moins un petit triangle tricolore.

■

Une application à un jeu

Le jeu se joue à deux joueurs. Les deux joueurs dessinent un grand triangle ABC et le découpent en petits triangles (comme dans l'exercice précédent : deux petits triangles ont en commun tout un côté ou seulement un sommet). Les joueurs choisissent chacun une couleur (rouge et bleu par exemple). Chaque joueur, à tour de rôle, colorie un sommet de son choix avec sa couleur.
On considère le graphe G dont les sommets sont les sommets des triangles et les arêtes les côtés des petits triangles. Notons R le graphe engendré par les sommets rouges et B le graphe engendré par les sommets bleus. Le gagnant du jeu est le premier dont le graphe possède un "connecteur", c'est à dire une composante connexe *(notion de composante connexe en 4.1.6)* ayant au moins un sommet sur chacun des trois côtés du grand triangle. Montrer que ce jeu aura toujours un gagnant.
Résolution.
On montre, plus généralement, que pour toute coloration des sommets en bleu ou rouge, R ou B a un connecteur.
Notons $a = [BC]$, $b = [AC]$ et $c = [AB]$ les côtés du triangle.
On raisonne par l'absurde en supposant que ni R, ni B n'a de connecteur. Pour un sommet s quelconque, il y a alors toujours au moins un côté que l'on ne peut pas atteindre en partant de s et en se déplaçant le long d'une chaîne dont tous les sommets ont la couleur de s. On attribue alors à s une étiquette égale au plus petit côté non accessible (avec l'ordre lexicographique : $a < b < c$). L'étiquetage ainsi obtenu a clairement les propriétés demandées dans le lemme de Sperner (3.3.7) : le sommet A, qui est sur les côtés b et c, sera étiqueté a, le sommet B aura b pour étiquette, et C aura l'étiquette c, de plus un sommet se trouvant sur le côté $a = [BC]$ ne peut pas avoir l'étiquette a ...D'après le lemme de Sperner, il existe donc un petit triangle dont les sommets sont étiquetés a, b, c. Deux de ces trois sommets présentent nécessairement la même couleur (puisqu'on n'a utilisé que deux couleurs : rouge et bleu). Supposons par exemple que deux des trois sommets soient rouges (appelons les s et s'). Si s est par exemple étiqueté a, cela signifie que l'on ne peut pas atteindre le côté a du grand triangle en suivant une chaîne rouge partant de s. s' aura par exemple l'étiquette b, ce qui implique qu'il existe une chaîne rouge de s' au côté a (sinon, comme $a < b$, l'étiquette de s' serait a), mais s et s' étant voisins, il y aurait alors une chaîne rouge de s au côté a...On constate aisément qu'il y a une telle contradiction dans chacun des cas possibles.
Le jeu aura donc toujours un gagnant.

■

3.4 Suite graphique

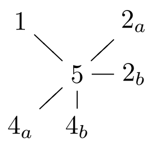
Suite graphique : liste d'entiers constituant la liste des degrés des sommets d'un graphe simple.

3.4.1 Intersection de segments, bis.

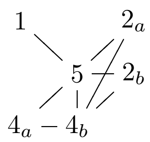
1. Tracer 6 segments tels que l'un en coupe un seul autre, deux en coupent deux autres, deux en coupent quatre autres et le dernier coupe les cinq autres.
2. Même question avec neuf segments en coupant respectivement $1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 6, 8$.

Résolution.

1. On représente chaque segment par le sommet d'un graphe. Chaque sommet est nommé par son degré (c'est à dire par le nombre de segments qu'il doit couper). Un segment doit couper tous les autres :

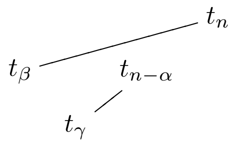
   Le sommet "1" est "saturé". Le sommet 4_b doit donc couper 2_a, 2_b et 4_a :

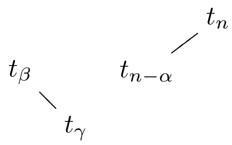
   Mais maintenant 2_a et 2_b sont "saturés" et la demande est impossible (puisqu'il ne reste aucune possibilité pour "saturer" 4_a).

2. Pour cette seconde liste, on algorithmise.

   (a) Si $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \cdots \leq d_n$ sont les degrés des sommets d'un graphe simple, alors on peut trouver un graphe de sommets $s_1, s_2, \ldots, s_n$ tel que $d(s_i) = d_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et tel que les voisins de s_n sont $s_{n-1}, s_{n-2}, \ldots, s_{n-d_n}$.
   Preuve.
   – Soit G un graphe de sommets $t_1, t_2, \ldots, t_n$ avec pour tout $i : d(t_i) = d_i$. Si t_n est adjacent à $t_{n-1}, t_{n-2}, \ldots, t_{n-d_n}$, c'est fini.
   – Sinon il existe un entier α , $1 \leq \alpha \leq d_n$ tel que $t_{n-\alpha}$ n'est pas adjacent à t_n et il existe un entier β, $\beta < n - d_n$ tel que t_β soit adjacent à t_n.
   – Il existe un indice γ tel que t_γ soit voisin de $t_{n-\alpha}$ mais pas de t_β. En effet :
     – Si t_β et $t_{n-\alpha}$ ne sont pas voisins, comme $d_{n-\alpha} \geq d_\beta$, $t_{n-\alpha}$ a au moins autant de voisins que t_β. Or t_β a déjà un voisin (à savoir t_n) que $t_{n-\alpha}$ n'a pas, d'où l'existence de γ tel que t_γ soit voisin de $t_{n-\alpha}$ mais pas de t_β.
     – Si t_β et $t_{n-\alpha}$ sont voisins, alors on a cette fois déjà deux voisins de t_β non voisins de $t_{n-\alpha}$ (à savoir $t_{n-\alpha}$ et t_n). Il existe donc au moins deux voisins de $t_{n-\alpha}$ non voisins de t_β, donc au moins un qui n'est pas t_β.



– On définit alors un graphe G' en supprimant les arêtes $t_\beta t_n$ et $t_{n-\alpha}t_\gamma$ et en les remplaçant par les arêtes $t_\beta t_\gamma$ et $t_{n-\alpha}t_n$



– On a ainsi un graphe G' dont la liste des degrés est la même que pour G mais tel que t_n a un voisin de plus dans $\{t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_{n-d_n}\}$. Et on peut réitérer le procédé tant que t_n n'a pas tous ses voisins dans $\{t_{n-1}, t_{n-2}, \dots, t_{n-d_n}\} \dots$

(b) Si $d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq \cdots \leq d_n$ sont les degrés des sommets d'un graphe simple, soit G un graphe de sommets $s_1, s_2, \dots, s_n$ tel que $d(s_i) = d_i$ pour $1 \leq i \leq n$ et tel que les voisins de s_n sont $s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_{n-d_n}$. Alors la liste d'entiers $d'_1 \leq d'_2 \leq \cdots \leq d'_{n-1}$ obtenue en supprimant d_n de la liste précèdente et en diminuant de 1 les entiers $d_{n-1}, d_{n-2}, \dots, d_{n-d_n}$ (et en réordonnant éventuellement) est la liste des degrés d'un graphe simple (le graphe $G - s_n$).

Application : Si la liste $1, 1, 2, 2, 2, 3, 5, 6, 8$ est la liste des degrés d'un graphe simple à 9 sommets alors la liste : $0, 0, 1, 1, 1, 2, 4, 5$ serait la liste des degrés d'un graphe simple à 8 sommets (dont deux isolés). La liste $1, 1, 1, 2, 4, 5$ serait la liste des degrés d'un graphe simple à 6 sommets, donc la liste $0, 0, 0, 1, 3$ serait la liste des degrés d'un graphe simple à 5 sommets, ce qui est clairement impossible (la présence d'un sommet de degré 3 impose, dans un graphe simple, qu'il y ait au moins trois autres sommets de degré au moins un).
Le deuxième dessin n'est donc pas non plus possible.

■

3.4.2 Le seizième.

Seize individus se réunissent. Certains se serrent la main et d'autres non. L'un a serré une seule main, un deuxième a serré deux mains, un troisième trois mains, ..., un quatorzième quatorze mains et un quinzième quinze mains. Et le seizième ?

Résolution.
On représente la situation par un graphe G_{16} de poignées de mains (sommet= personne, arête=poignée de mains).
Nommons les personnes par le nombre de mains serrées par chacun. On note n

le degré du “seizième”.
La liste des degrés est donc

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, n$$

Numéro 15 a serré 15 mains, c'est à dire a serré la main à tout le monde. Supprimons le sommet 15 (ainsi que les arêtes qui lui sont incidentes), on obtient un graphe dont la liste des degrés est

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \heartsuit, n-1$$

Supprimons le sommet devenu isolé :

$$\dagger, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \heartsuit, n-1$$

On se retrouve dans la situation initiale avec deux personnes de moins (graphe G_{14})...On recommence :

$$\dagger, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, \heartsuit, n-1$$

donne

$$\dagger, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \heartsuit, \heartsuit, n-2$$

en supprimant le numéro 13 de G_{14} (qui était numéro 14 de G_{16}). Donc devient G_{12} :

$$\dagger, \dagger, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, \heartsuit, \heartsuit, n-2$$

en supprimant le sommet nouvellement isolé. En continuant de même, on obtient successivement :

$$\dagger, \dagger, \dagger, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, n-3$$

$$\dagger, \dagger, \dagger, \dagger, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, n-4$$

$$\dagger, \dagger, \dagger, \dagger, \dagger, 1, 2, 3, 4, 5, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, n-5$$

$$\dagger, \dagger, \dagger, \dagger, \dagger, \dagger, 1, 2, 3, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, n-6$$

$$\dagger, \dagger, \dagger, \dagger, \dagger, \dagger, \dagger, 1, \heartsuit\heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, n-7$$

$$\dagger, \dagger, \dagger, \dagger, \dagger, \dagger, \dagger, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, \heartsuit, n-8$$

Ainsi monsieur seize a serré 8 mains (et ce sont celles des numéros 8 à 15).
Le procédé de récurrence utilisé ici montre qu'avec n personnes au départ dont l'une serre une main, une seconde deux mains, ..., la $n-1^{ième}$ $n-1$ *mains, la dernière personne sert PartieEntière* $\left(\frac{n}{2}\right)$ *mains, celles des PartieEntière* $\left(\frac{n}{2}\right)$ *personnes de plus fort degré.*

■

3.5 Lemme des coups de pied au c...

Etablir que dans un graphe orienté, la somme des degrés extérieurs est égale à la somme des degrés intérieurs et égale au nombre de flèches du graphe.

Résolution.
Lorsqu'on ajoute les nombres de flèches partant de chacun des sommets, on compte une et une seule fois chaque flèche. Idem lorsqu'on ajoute les nombres de flèches arrivant à chacun des sommets.

■

3.6 Graphe biparti

3.6.1 Lemme des poignées de mains dans un graphe biparti

On appelle graphe biparti (ou bipartite) un graphe dont l'ensemble des sommets admet une partition en deux parties A et B telles que tout sommet de A n'a aucun voisin dans A et tout sommet de B n'a aucun voisin dans B (autrement dit les arêtes de G sont toutes incidentes à un sommet de A et à un sommet de B).
Soit G un graphe biparti. Etablir que

$$\sum_{s\in A} d(s) = \sum_{s\in B} d(s) = \text{Nombre d'arêtes}$$

Résolution.
On transforme les arêtes en flèches en les orientant toutes de A vers B, on peut alors voir le résultat comme un cas particulier du lemme des coups de pied au c...

■

3.6.2 Poignées de mains sportives.

Match de foot entre les équipes de Graftown et de Graphcity. Chacun des 11 garçons de Graftown a serré la main à au moins trois des garçons de Graphcity et chacun des 11 garçons de Graphcity a serré la main à au plus trois des garçons de Graftown. Combien de poignées de mains au total ?

Résolution.
On note $c_1, c_2, \ldots, c_{11}$ les garçons de Graphcity et $t_1, t_2, \ldots, t_{11}$ ceux de Graftown. On définit un graphe biparti : le sommet c_i est relié au sommet t_j ssi c_i et t_j se sont serré la main.
L'énoncé se traduit par

$$\sum_{i=1}^{11} d(c_i) \leq 3 \times 11 \leq \sum_{i=1}^{11} d(t_i)$$

mais

$$\sum_{i=1}^{11} d(c_i) = \sum_{i=1}^{11} d(t_i) = \text{Nombre d'arêtes du graphe}$$

d'où

$$\sum_{i=1}^{11} d(c_i) = \sum_{i=1}^{11} d(t_i) = 33$$

Il y a donc eu 33 poignées de mains.

■

3.6.3 Les amis de mes amis ...

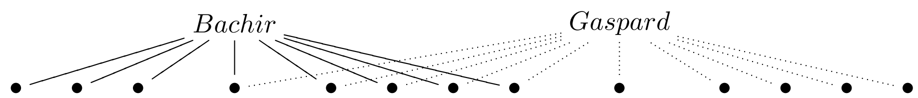
1. Bachir a huit amis et Gaspard en a dix. Cinq des amis de Bachir sont aussi des amis de Gaspard. Ils invitent tous leurs amis. Combien d'invités cela fait-il ?
2. A l'aide d'un graphe établir que pour deux ensembles A et B :

$$|A| + |B| = |A \cup B| + |A \cap B|$$

   (où $|.| = cardinal(.)$)
3. On considère un groupe de n personnes et les liens d'amitié (supposés réciproques) entre ces personnes. Chacune des personnes du groupe a au moins $\frac{1}{2}(n-1)$ amis (dans le groupe). On choisit une personne au hasard dans le groupe, appelons la Duschmoll. Montrer que toute autre personne du groupe est un ami de Duschmoll ou alors a au moins un ami commun avec Duschmoll.

Résolution.

1. On représente Gaspard, Bachir et chacun des amis par un sommet. Une arête relie Gaspard à chacun de ses amis, idem pour Bachir. On obtient ainsi un graphe biparti. La somme des degrés est $S = \text{degré(Gaspard)} + \text{degré(Bachir)} = 8 + 10 = 18$. Cette somme est aussi la somme des degrés des amis : les amis non communs sont de degré 1, les communs de degré 2. Soit $S = 5 \times 2 + (n-5)$ où n est le nombre total d'amis. $5 \times 2 + (n-5) = 18$ d'où $n = 13$.



2. On représente A, B et chacun des éléments par un sommet. Un élément est relié à A ssi c'est un élément de A, idem avec B. La somme des degrés est $|A| + |B|$ et aussi $2 \times |A \cap B| + 1 \times (|A \cup B| - |A \cap B|)$.

3. (a) *En utilisant le vocabulaire de la théorie des graphes, l'énoncé s'écrit : Un graphe simple G à n sommets est tel que $\delta(G) \geq \frac{1}{2}(n-1)$ (où $\delta(G)$ est le minimum des degrés des sommets de G). Et la conclusion : tout sommet est à une distance au plus deux de tout autre sommet (la distance entre deux sommets étant le nombre minimum d'arêtes à parcourir pour aller de l'un à l'autre).*

   (b) Soient s et t deux personnes. Si ces deux personnes ne sont pas amies, notons V_s (resp. V_t) l'ensemble des amis de s (resp. t).
   On a $cardinal(V_s) \geq \delta(G) \geq \frac{1}{2}(n-1)$,
   et de même $cardinal(V_t) \geq \frac{1}{2}(n-1)$.
   De plus $cardinal\,(V_s \cup V_t) \leq n-2$ puisque $V_s \cup V_t$ ne contient ni s ni t.

$$card\,(V_s \cap V_t) = card\,(V_s) + card\,(V_t) - card\,(V_s \cup V_t)$$

   d'où

$$card\,(V_s \cap V_t) \geq \frac{1}{2}(n-1) + \frac{1}{2}(n-1) - (n-2) = 1$$

■

Chapitre 4

Chaînes, connexité...

4.1 Vocabulaire

4.1.1 Chaîne

Chaîne d'un graphe : liste ordonnée de sommets telle que deux sommets consécutifs sont adjacents, une chaîne est donc de la forme $(s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n)$ où les s_i sont des sommets du graphe et où (s_i, s_{i+1}) est une arête du graphe pour tout i $(1 \leq i \leq n-1)$. Le nombre d'arêtes d'une chaîne est appelé la longueur de la chaîne.
Dans une chaîne, on peut a priori trouver plusieurs fois la même arête, plusieurs fois le même sommet, un aller-retour (de la forme (sommet s, arête e, sommet u, arête e, sommet s)) est permis...
Dans un graphe simple, on peut omettre les arêtes dans la description d'une chaîne (comme nous venons de le faire) mais en cas d'arêtes multiples entre deux sommets, l'arête utilisée doit être précisée. Par exemple, dans le graphe suivant : $s_1 \overset{a_1}{\text{———}} s_2 \underset{a_3}{\overset{a_2}{\frown\!\!\!\smile}} s_3$, les chaînes $s_1 \overset{a_1}{-} s_2 \overset{a_2}{-} s_3$ et $s_1 \overset{a_1}{-} s_2 \overset{a_3}{-} s_3$ ne sont pas les mêmes.

4.1.2 Simple, élémentaire.

- Chaîne simple : chaîne sans répétition d'arêtes (mais des sommets peuvent être répétés).
- Chaîne élémentaire : chaîne à sommets tous distincts (une chaîne élémentaire est nécessairement simple).

4.1.3 Cycle.

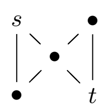
Cycle : chaîne fermée simple.
Cycle élémentaire : chaîne fermée élémentaire (on ne répète aucun sommet, mis à part le premier et le dernier qui sont égaux). Dans le graphe engendré par les arêtes d'un cycle élémentaire, tous les sommets sont de degré 2.

Le vocabulaire peut changer d'un livre à l'autre. Par exemple, ce qu'on appelle ici cycle élémentaire est dans beaucoup d'ouvrages la définition du mot cycle. Le choix fait ici est celui du document d'accompagnement des programmes de terminale ES.

4.1.4 Extraction d'élémentaires.

1. Dans un graphe G, de toute chaîne de s à t on peut extraire une chaîne élémentaire de s à t.
2. De tout cycle, on peut extraire un cycle élémentaire.
3. D'un cycle passant par une arête e, on peut extraire un cycle élémentaire contenant cette arête e.

Preuve.

1. Soit $(s_0 = s, a_1, s_1, a_2, s_2, \dots, a_n, s_n = t)$ (où s_i désigne un sommet et a_j une arête) une chaîne reliant s à t. Si l'on rencontre deux sommets s_i et s_j égaux (avec $i < j$), on remplace la "séquence" $s_i, \dots, s_j$ par s_i, ce qui donne une nouvelle chaîne de s à t. On renouvelle cette opération autant de fois que nécessaire pour qu'aucun sommet ne soit répété (la chaîne étant finie, le processus s'arrête...). La chaîne obtenue est alors élémentaire.
   Remarque : lorsque $s = t$, la chaîne élémentaire extraite est réduite à une chaîne de longueur nulle $\{s\}$.
2. Soit $(s_0, a_1, s_1, a_2, s_2, \dots, a_n, s_n, a_{n+1}, s_0)$ un cycle.
   Si ce cycle n'est pas élémentaire, notons j le plus petit indice pour lequel il existe un indice $i < j$ tel que $s_i = s_j$. Alors $(s_i, a_{i+1}, s_{i+1}, a_{i+2}, s_{i+2}, \dots, a_j, s_j)$ est un cycle et ce cycle est élémentaire sinon il existe deux indices l et k tels que $i \leq l < k < j$ et $s_k = s_l$, ce qui contredirait la définition de j.
   On remarquera que l'argument n'est pas valable avec une chaîne fermée quelconque du fait de la répétition possible de certaines arêtes (par exemple, on ne peut pas extraire un cycle élémentaire d'une chaîne fermée de la forme (sommet u, arête e, sommet v, arête e, sommet u)).
   On remarquera également que si l'on a un cycle passant par les sommets s et t, on n'a pas nécessairement de cycle élémentaire passant par s et t, exemple du papillon :
   

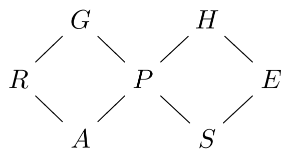
3. Soit $C = (s_0, e_1, s_1, e_2, \dots, s_j, e, s_{j+1}, \dots, s_k, e_{k+1}, s_0)$ un cycle passant par l'arête e. Si C est de longueur 2, alors C est élémentaire. Sinon
   $$C' = (s_{j+1}, e_{j+2}, \dots, e_{k+1}, s_0, e_1, \dots, e_j, s_j)$$
   est une chaîne de G dont on peut extraire une chaîne élémentaire P. Comme C est sans répétition d'arêtes, e ne fait pas partie des arêtes de C' ou de P et $P + e$ est un cycle élémentaire passant par e.

■

4.1.5 Comparaison des nombres d'arêtes et de sommets dans un cycle.

Dans un cycle, le nombre d'arêtes est supérieur ou égal au nombre de sommets. Dans un cycle élémentaire, le nombre d'arêtes est égal au nombre de sommets.

Justification.
Un cycle se présente sous la forme $(s_1, e_1, s_2, e_2, \ldots, s_{n-1}, e_{n-1}, s_n = s_1)$ où les s_i sont des sommets du graphe et les e_j des arêtes toutes distinctes. Le nombre d'arêtes est ici exactement de $n-1$ et le nombre de sommets est d'au plus $n-1$ puisque $s_n = s_1$. Le nombre de sommets peut être strictement plus petit que le nombre d'arêtes : un sommet, autre que $s_1 = s_n$ peut être répété dans le cycle, comme dans le cycle ci-dessous GRAPHESPG (8 arêtes et 7 sommets) :

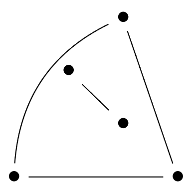


Par contre, dans un cycle élémentaire (par exemple dans le cycle élémentaire PHESP extrait du cycle ci-dessus) aucun sommet n'est répété et le nombre de sommets est égal au nombre d'arêtes.

■

4.1.6 Connexité.

Dans un graphe, la relation "il existe une chaîne d'extrémités s et t" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des sommets. Les sous-graphes de G engendrés par les classes d'équivalence sont appelés les composantes connexes du graphe.
Un graphe G est dit connexe lorsque pour tout couple de sommets (s, t), il existe dans le graphe une chaîne de s à t, c'est à dire lorsque le graphe est constitué d'une seule composante connexe.
Les composantes connexes sont aussi les sous-graphes de G connexes maximaux (pour l'inclusion).
Exemple. Graphe ayant deux composantes connexes (l'une isomorphe à K_2 et l'autre à K_3) :



4.1.7 Réseaux routiers

Dans un pays, deux villes sont toujours reliées soit par voie ferrée, soit par voie bitumée.

Démontrer que l'un des deux types de voies permet d'aller de toute ville à toute ville (directement ou indirectement).

Résolution.

1. *Autre formulation :*
   On colorie chaque arête d'un graphe complet K_n en rouge ou en bleu. Appelons graphe bleu le graphe induit par les arêtes bleues et graphe rouge le graphe induit par les arêtes rouges. Montrer que l'un de ces deux graphes contient tous les sommets de K_n et est connexe. (Dans cette version, on a supprimé la possibilité pour deux villes d'être reliées par les deux types de voies, mais qui peut le plus, peut le moins ...)
2. On procède par récurrence.
   (a) Pour K_2, c'est OK.
   (b) Supposons donc que pour un n donné, toute coloration en bleu et rouge des arêtes donne un graphe rouge ou un graphe bleu à n sommets et connexe.
   Effectuons alors un coloriage quelconque en bleu et rouge des arêtes de K_{n+1}. Isolons maintenant un sommet a de K_{n+1}. $K_{n+1} - a$ est un graphe complet d'ordre n auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence. Supposons, pour fixer les idées, que ce soit le graphe bleu associé à $K_{n+1} - a$ qui est connexe et d'ordre n. Alors
   – soit a est relié à un autre sommet par au moins une arête bleue dans K_{n+1}, et il est alors clair que le graphe bleu associé à K_{n+1} est d'ordre $n + 1$ et connexe,
   – soit a n'est relié à aucun autre sommet par une arête bleue, mais alors il est relié à tout autre sommet par une arête rouge et on peut dans K_{n+1} aller de tout sommet à tout autre par des arêtes rouges en passant par a. Le graphe rouge associé à K_{n+1} est donc d'ordre $n + 1$ et connexe.

■

4.2 Chaînes, connexité et sommets impairs

4.2.1 Isthme dans un graphe pair

On a construit des ponts entre les îles d'un archipel de telle façon qu'on puisse rejoindre toute île (directement ou indirectement) en partant de n'importe quelle autre île. Pour chaque île, le nombre de ponts partant de l'île est pair. On bloque un pont pour des travaux d'entretien. Montrer que l'on peut encore aller de toute île à toute autre île.

Résolution.

1. *L'énoncé en termes de graphes est le suivant :*
   Soit G un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair. Alors aucune arête de G n'est un isthme (isthme : arête dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe).
2. Considérons donc un graphe connexe G dont tous les sommets sont de degré pair. Supposons que l'arête e, d'extrémités s et t, soit un isthme.
   - s et t ne sont pas dans la même composante connexe de $G - e$.
     Sinon il existe une chaîne P de $G - e$ reliant s et t. Prenons alors deux sommets quelconques x et y de G : il existe une chaîne dans G reliant x et y (connexité de G) et si cette chaîne passe par l'arête e, on remplace e par la chaîne P et on obtient ainsi une chaîne de x à y dans $G - e$. $G - e$ serait donc connexe, contradiction.
   - Notons K la composante connexe de s dans $G-e$. s est de degré impair dans $G - e$, donc dans K. Mais t n'étant pas dans K, s serait le seul sommet impair du graphe K, ce qui est impossible d'après 3.3.1.

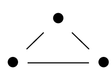
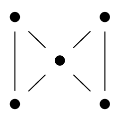
■

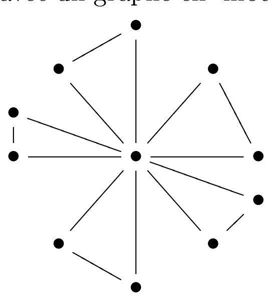
4.2.2 Voisins communs

1. Une petite fête a réuni un groupe de 101 personnes. Les amis se serrent la main. Un observateur affirme que deux personnes quelconques du groupe ont exactement un ami commun. Est-ce possible ?
2. Est ce encore possible si le groupe comporte 100 personnes ?

(prolongement en 6.3.4)

Résolution.

1. Plus généralement, avec un nombre impair de personnes, c'est toujours possible. On le voit avec le triangle  pour un groupe de trois personnes, avec le papillon  pour un groupe de cinq personnes, avec un graphe en "moulin à vent" pour un nombre n impair de personnes

2. Avec un nombre pair de personnes, ce n'est jamais possible.
   On montre plus généralement que si G est un graphe simple ayant un

nombre n pair de sommets, alors on peut toujours trouver deux sommets ayant un nombre pair de voisins communs.
Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant que pour toutes les paires de sommets du graphe G, on ait un nombre impair de voisins communs.

(a) Fixons un sommet s du graphe. Soit H le sous-graphe induit par les voisins de s dans G. Notons t un sommet de H. Les voisins de t dans H sont exactement les voisins communs à t et s dans G. Donc t est de degré impair dans H. Tous les sommets de H sont donc de degré impair : H a donc un nombre pair de sommets, ce qui signifie que s est de degré pair dans G. Ainsi G n'a que des sommets de degré pair.

(b) Comptons maintenant les chaînes élémentaires de longueur 2 issues d'un sommet s dans G, c'est à dire les chaînes de la forme

$$s \overset{e}{-} v \overset{e'}{-} t$$

où e et e' sont deux arêtes distinctes. Choisissons une arête e incidente au sommet s, elle a pour seconde extrémité un sommet v et on peut prolonger la chaîne par l'une quelconque des degré$(v) - 1$ arêtes incidentes à v différentes de e. Le nombre des chaînes est donc la somme $\sum_{v \text{ voisin de } s} (\text{degré}(v) - 1)$, c'est à dire une somme d'entiers impairs en nombre pair puisque chaque sommet est de degré pair, le nombre de chaînes cherchées est donc pair.

(c) Mais tout sommet t qui peut ainsi être atteint à partir de s en parcourant deux arêtes distinctes (c'est à dire tout sommet t de G autre que s puisque, par hypothèse, tout sommet t a un nombre impair de voisins communs avec s, donc au moins un) peut être atteint par un nombre impair de telles chaînes de longueur 2, puisque ces chaînes sont de la forme $s \overset{e}{-} v \overset{e'}{-} t$ où v est un voisin commun à s et t et que ce nombre de voisins communs est impair. Ceci permet d'écrire le nombre de chaînes élémentaires de longueur 2 issues de s comme une nouvelle somme de nombres impairs :

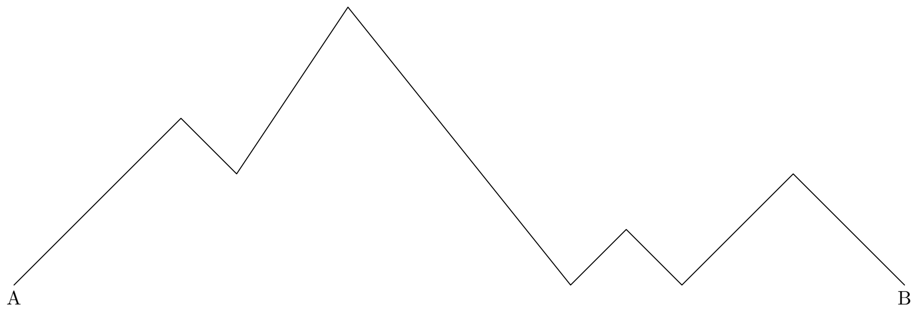
$$\sum_{t \text{ sommet de G distinct de } s} \text{nombre de chaînes de longueur 2 de } s \text{ à } t$$

Les sommets t distincts de s doivent donc être en nombre pair pour que cette somme soit paire. On doit donc avoir un nombre impair de sommets pour le graphe G.

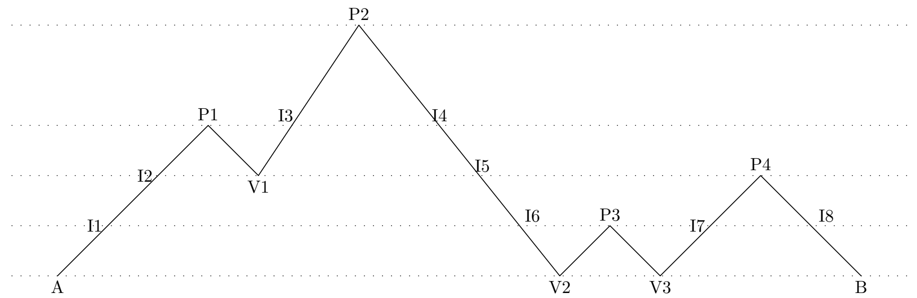
■

4.2.3 A hauteur égale

On considère une chaîne de montagnes entre les points $A(a, 0)$ et $B(b, 0)$. Un alpiniste A part du point A et un alpiniste B du point B. Montrer que A et B peuvent se rejoindre tout en s'imposant d'être à chaque moment à la même altitude que l'autre (chacun des deux alpinistes peut se déplacer dans les deux sens). On suppose par ailleurs que tous les points de la chaîne de montagnes sont d'ordonnée positive ou nulle. Pour simplifier, on peut identifier notre chaîne de montagnes à un tracé (continu) de segments (ni verticaux, ni horizontaux) reliant successivement sommets et vallées. Par exemple :

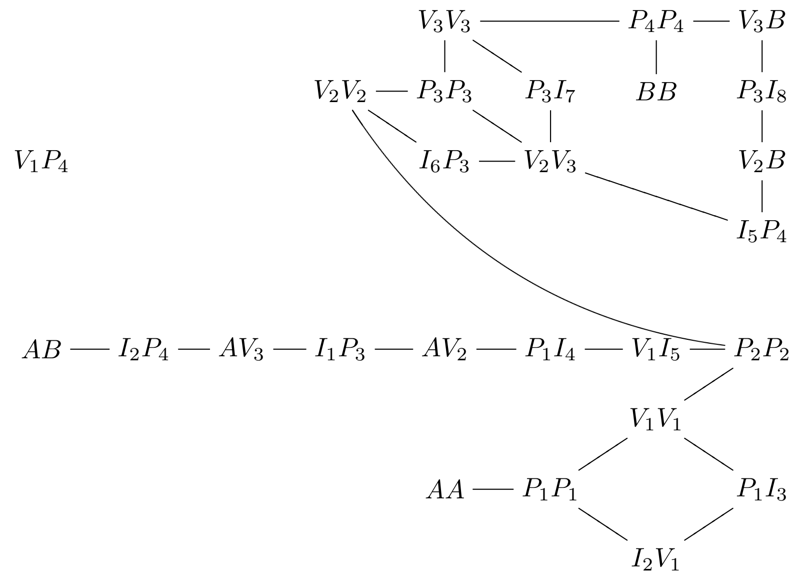


Résolution.
Traçons les lignes de niveau correspondant aux sommets et aux vallées (ainsi qu'aux points de départ A et B) et marquons les points d'intersection entre les montagnes et les lignes de niveau :



Essayons quelques mouvements :
A et B partent de A, B. Ils peuvent tous les deux monter. Les pentes AP_1 et BP_4 n'ont pas d'importance : en réglant les vitesses, il est clair qu'ils peuvent ainsi continuer à monter, en gardant des altitudes égales, jusqu'à ce que l'un ne puisse plus monter, c'est à dire jusqu'à ce que l'un des deux se trouve à un sommet (sur notre exemple, ils grimpent jusqu'à I_2, P_4).
A ce stade, celui qui est parvenu à un sommet doit nécessairement descendre (d'un côté ou de l'autre) donc l'autre aussi doit descendre. Et ils descendront jusqu'à ce que l'un des deux ne puisse plus descendre c'est à dire jusqu'à ce que l'un des deux se retrouve en A ou B ou en une vallée (sur notre exemple, ils se retrouveront en AB ou AV_3)...
Un mouvement tel que les deux décrits ci-dessus sera appelé "déplacement élémentaire" (montée des deux alpinistes jusqu'à ce que l'un des deux ne puisse plus monter, c'est à dire jusqu'à ce que l'un des deux se trouve en un sommet ou descente des deux alpinistes jusqu'à ce que l'un des deux ne puisse plus descendre, c'est à dire jusqu'à ce que l'un des deux se trouve en A, B ou une vallée).
Avec une succession de tels déplacements élémentaires, on voit que l'on aura toujours l'un au moins des deux alpinistes sur un sommet ou une vallée ou A ou B.
On définit alors un graphe traduisant ces déplacements élémentaires : les sommets sont les couples de points d'une même ligne de niveau, l'un au moins des

deux points étant A ou B ou un sommet ou une vallée, le premier élément du couple étant à gauche du second élément "géographiquement". Sur la figure cidessous, les sommets sont donc : $(A, B), (I_2, P_4), (A, V_3), (P_3, P_3) \ldots$ mais pas (I_3, I_4) par exemple, aucun des deux n'étant un pic ou une vallée. Et les arêtes du graphe traduisent les déplacements élémentaires possibles : une arête joindra le sommet (M, N) au sommet (M', N') si MM' et NN' sont des segments de la montagne, autrement dit le passage de (M, N) à (M', N') correspond à un déplacement élémentaire. Par exemple, on reliera (I_2, V_1) à (P_1, P_1) et à (P_1, I_3) mais on ne le reliera pas à (P_1, I_4).



Quels sont les degrés des sommets dans ce graphe ?
(dans ce qui suit, A et B ne sont pas considérés comme étant des vallées)

1. Les sommets (A, B), (A, A), (B, B) sont clairement de degré 1.
2. Un sommet du type (pic, pic') ou du type (vallée, vallée') avec pic$\neq$pic', vallée$\neq$vallée'(comme ici le sommet (V_2, V_3)) est de degré 4. En effet, depuis un sommet (vallée, vallée') par exemple, un segment monte sur la gauche et un sur la droite et on a les possibilités suivantes pour nos alpinistes : (gauche,gauche), (gauche,droite), (droite,droite), (droite,gauche) (avec à chaque fois arrêt dès que l'un des deux atteint un pic).
3. Un sommet (vallée, pic) ou (pic, vallée) (comme le sommet (V_1, P_4)) est de degré 0. En effet aucun mouvement n'est possible depuis un tel sommet puisqu'un alpiniste doit descendre et l'autre monter.
4. Les sommets (point "intermédiaire", pic) ou (pic,point "intermédiaire") ou (point "intermédiaire", vallée) ou (vallée,point "intermédiaire") ou (A,vallée) ou (vallée,B) sont de degré 2. Par exemple pour (vallée, intermédiaire), celui qui est dans la vallée peut monter à gauche ou à droite, et l'autre ne peut que monter, d'où les deux mouvements : (monter gauche, monter), (monter droite, monter).
5. Les sommets (pic, pic), (vallée, vallée) (dans notre exemple : (P_1, P_1), $(V_2, V_2) \ldots$) sont de degré 3, les mouvements possibles sont en effet (pour

(pic, pic) par exemple) : (descendre droite, descendre droite), (descendre gauche, descendre gauche), (descendre gauche, descendre droite) (ici (droite, gauche) est interdit puisque le premier élément du couple doit être à gauche géographiquement, ou si l'on préfère : ce mouvement (droite, gauche) donnerait la même chose que le mouvement (gauche, droite) puisque que les deux alpinistes partent du même sommet).

Considérons maintenant le graphe G égal à la composante connexe du sommet de départ (A, B) (dans notre exemple, il y a deux composantes connexes : le sommet isolé (V_1, P_4) et le "reste"). Dans ce graphe connexe G, il y a au moins un sommet de degré impair : le sommet (A, B). Donc il y en a au moins un autre puisque le nombre de sommets impairs est toujours pair dans un graphe. Or, d'après le catalogue ci-dessus, les seuls autres sommets impairs sont les sommets du type (N, N). Enfin, comme G est connexe, il existe une chaîne de (A, B) à (N, N) et une telle chaîne correspond, par construction, à une suite de déplacements élémentaires réalisable par nos alpinistes. C'est gagné !

■

4.2.4 Rectangle à côté entier

On reprend le problème "Rectangle à côté entier" 3.3.6. Définissons le graphe G dont les sommets sont les sommets des petits rectangles et dans lequel on relie deux sommets par une arête s'ils sont les deux extrémités d'un côté à longueur entière d'un petit rectangle. Toutefois, si un rectangle a ses deux côtés entiers, on reliera ses sommets seulement sur les côtés verticaux de ce rectangle ou seulement sur les côtés horizontaux. Le graphe obtenu peut présenter des arêtes multiples : si un côté entier est commun à deux rectangles, les deux extrémités seront reliées par une première arête pour le premier rectangle et par une seconde arête pour le second rectangle.

On constate facilement que le bilan des degrés est à peu près le même qu'en 3.3.6 : seuls les sommets du grand rectangle sont impairs, les autres sont tous pairs.

Plaçons-nous alors dans le graphe K égal à la composante connexe d'un sommet A du grand rectangle. Comme A est de degré impair, il y a un autre sommet impair B dans K et B ne peut être qu'un autre sommet du grand rectangle. Comme K est connexe, il existe une chaîne reliant A et B. Si par exemple A et B ne sont pas sur une même arête verticale du grand rectangle, en parcourant la chaîne reliant A à B, les arêtes "horizontales" parcourues sont toutes de longueur entière (on se permet ici de confondre arêtes du graphe et arêtes géométriques), donc l'arête horizontale du grand rectangle est de longueur entière.

Chapitre 5

Graphes eulériens

5.1 Eulérien.

1. On appelle chaîne eulérienne d'un graphe G une chaîne passant une et une seule fois par chacune des arêtes du graphe, autrement dit une chaîne simple passant par toutes les arêtes du graphe (si une telle chaîne ne passe pas par tous les sommets, les sommets oubliés sont nécessairement de degré 0).
2. On appelle cycle eulérien du graphe G un cycle de G passant par toutes les arêtes du graphe (une unique fois par définition d'un cycle). Un cycle eulérien est donc une chaîne eulérienne fermée simple.
3. On appelle graphe eulérien un graphe pour lequel il existe un cycle eulérien.

5.2 Pair.

1. Un sommet d'un graphe G est dit pair (resp. impair) si son degré est pair (resp. impair).
2. Un graphe pair est un graphe dont tous les sommets sont pairs.

5.3 Parité dans une chaîne

5.3.1 Parité politique

Une "tradition" républicaine : le ministre quittant son ministère échange une poignée de mains avec le ministre prenant ses fonctions.
Montrer que, come back ou pas :

1. soit tous les ministres du ministère de la Langue de Bois ont serré un nombre pair de mains lors de ces passages de pouvoir,
2. soit tous, sauf deux, ont serré un nombre pair de mains.

Résolution.
Tous les ministres serrent une main en arrivant au ministère et une main en en repartant, donc un nombre pair de mains (y compris ceux qui ont occupé

plusieurs fois la fonction). Ce raisonnement s'applique à tous, sauf à deux d'entre eux : le premier des ministres de ce ministère qui n'a pas serré de main en arrivant au pouvoir et l'actuel sinistre qui n'a pas encore serré la main du suivant.
Si ce dernier ministre était aussi le premier, il aurait serré un nombre pair de mains, sinon ces deux là ont serré un nombre impair de mains.

■

5.3.2 Parité dans une chaîne.

1. Etablir que dans une chaîne ouverte simple d'un graphe G tous les sommets ont un degré pair dans la chaîne (c'est à dire un degré pair dans le sous-graphe engendré par les arêtes de la chaîne) sauf les deux sommets extrémités qui sont de degré impair dans la chaîne.
2. Etablir que dans un cycle d'un graphe G tous les sommets ont un degré pair dans le cycle (c'est à dire un degré pair dans le sous-graphe engendré par les arêtes du cycle).

Résolution.

1. Soit $(s_1, e_1, s_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, s_k)$ une chaîne où les s_i sont des sommets d'un graphe, certains éventuellement répétés et les e_j, $1 \leq j \leq k-1$ sont des arêtes du graphe, aucune n'étant répétée. On suppose de plus ici qu'il n'y a pas de boucle.
   (a) Si la chaîne n'est pas un cycle et si le sommet s_1 est répété α fois dans la chaîne, il est de degré $2(\alpha - 1) + 1 = 2\alpha - 1$ dans cette chaîne. En effet il est incident à e_1 et si on le retrouve en place j dans la chaîne (c'est à dire si $s_j = s_1$) , il est incident à e_{j-1} et à e_j (chacune de ses répétitions autre que celle de départ fait intervenir deux arêtes, arêtes non encore comptabilisées puisque les arêtes de la chaîne sont toutes distinctes).
   (b) Le même raisonnement montre que si la chaîne n'est pas un cycle, s_k est aussi de degré impair.
   (c) Par contre, ce même raisonnement montre que tous les autres sommets sont de degré pair dans la chaîne : chacune de leur occurrence dans la chaîne fait intervenir deux nouvelles arêtes.
   (d) Enfin si la chaîne est un cycle, c'est à dire si $s_k = s_1$, alors s_1 est aussi pair : il est incident à e_1, à e_k et chacune de ses autres éventuelles occurrences dans la chaîne fait intervenir exactement deux nouvelles arêtes.
2. Que se passe-t-il si la chaîne présente des boucles ? Le raisonnement ci-dessus pose a priori problème puisqu'on peut avoir la situation $\ldots e, s, e', s, e'' \ldots$ (où e' est une arête qui boucle sur le sommet s), dans ce cas on a une nouvelle occurrence du sommet s qui ne fait pas intervenir deux nouvelles arêtes (puisque e' est déjà présente à l'occurrence précédente) ...
   La chaîne obtenue en supprimant les boucles (dans la chaîne avec boucle on réduit les $\ldots e, s, e', s, e'' \ldots$ à e, s, e'') a tous ses sommets pairs, sauf

éventuellement les deux extrémités d'après ce qui précède. Et la chaîne avec boucles aussi car, par convention, la présence d'une boucle ajoute 2 au degré du sommet (convention que l'on peut justifier soit par le présent résultat, soit parce qu'une boucle donne bien deux points de départ possibles ...).

3. Le raisonnement ci-dessus (sans les boucles) est souvent présenté de manière plus intuitive en termes de "déplacement" le long de la chaîne : à chaque fois qu'on arrive à un sommet, on doit aussi en repartir (et par des arêtes différentes de celles déjà éventuellement utilisées), chaque passage utilise donc deux arêtes incidentes au sommet sauf le départ et l'arrivée.
   - Si le sommet n'est ni le départ ni l'arrivée de la promenade, il est donc nécessairement pair.
   - Pour le premier et le dernier sommet : en cas de chaîne ouverte, on part une fois de plus qu'on arrive en s_1 et on arrive une fois de plus qu'on part en s_k d'où le caractère impair de ces sommets, mais si la chaîne est un cycle, ce départ et cette arrivée concernent le même sommet, qui est donc pair dans ce cas.

■

5.4 CN pour un graphe eulérien

5.4.1 Euler et parité.

1. Etablir qu'un graphe eulérien est nécessairement pair.
2. Etablir qu'un graphe possédant une chaîne eulérienne ouverte a tous ses sommets pairs sauf deux qui constituent les deux extrémités de toute chaîne eulérienne du graphe.

Résolution.
Soit G un graphe et soit P une chaîne eulérienne.

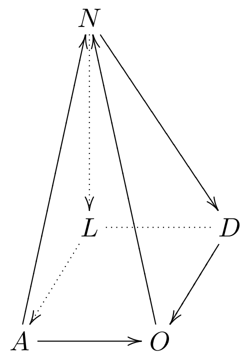
- Comme on passe par toutes les arêtes, on passe également par tous les sommets du graphe, sauf par d'éventuels sommets qui ne seraient incidents à aucune arête. Les sommets non présents dans la chaîne sont de degré 0 donc de degré pair.
- Les sommets présents dans la chaîne sont tous de degré pair dans la chaîne si cette chaîne est un cycle, et tous pairs sauf les deux extrémités si cette chaîne simple est ouverte d'après 5.3.2. De plus la chaîne utilise toutes les arêtes du graphe, la parité des degrés dans la chaîne est donc aussi la parité des degrés des sommets dans le graphe.

■

5.4.2 Fourmi égyptienne.

Une fourmi se déplace sur les arêtes d'une pyramide à base carrée en s'interdisant de passer deux fois sur la même arête. Quel est le nombre maximum d'arêtes que peut parcourir la fourmi ?

Résolution.
Le sommet de la pyramide est de degré pair (4), les sommets de la base sont impairs (degré 3). Le graphe ne possède donc pas de cycle ou chaîne eulérienne et la fourmi ne pourra pas passer par toutes les arêtes. Sur les huit arêtes, la fourmi en parcourra donc au plus 7.
Si l'on note N le sommet de la pyramide et A, O, D et L les sommets de la base carrée, le parcours ANLAONDO utilise 7 arêtes sans répéter d'arêtes (seule l'arête $[DL]$ n'est pas utilisée).



La fourmi peut donc utiliser 7 arêtes. 7 est le maximum.

■

5.4.3 Rectangle à côté entier

On reprend le problème "Rectangle à côté entier" 3.3.6. On reprend le graphe G défini en 4.2.4. Soit A un sommet du grand rectangle (A est de degré impair dans G). Considèrons la plus longue chaîne élémentaire issue de A dans G , cette chaîne ne peut se terminer qu'en un sommet impair car à chaque fois qu'on arrive à un sommet pair, on peut en repartir par une arête non encore empruntée puisque le nombre d'arêtes incidentes à ce sommet est pair. Par ailleurs le sommet A de départ peut être considéré comme étant pair puisqu'on le rend pair en supprimant une arête au départ (la première arête empruntée), le sommet impair terminant la chaîne est donc un autre sommet que le sommet A. On a ainsi une chaîne entre A et un autre sommet du grand rectangle et on conclut comme en 4.2.4.

5.5 CS pour un graphe eulérien

5.5.1 Attila

1. Soit G un graphe connexe dont les sommets sont tous de degré pair.
   On identifie les sommets à des îles et les arêtes à des ponts.
   Attila passe d'île en île en brûlant les ponts derrière lui. Montrer que lorsqu'Attila sera bloqué, ce sera nécessairement sur l'île dont il est parti.
2. Avant de partir, Attila dresse un plan de bataille : son parcours sera le plus long possible, c'est à dire empruntant le maximum de ponts possibles. Montrer qu'Attila terminera son périple sur son île et en ayant détruit tous les ponts.
3. Conclusion : Un graphe connexe pair est eulérien.

Résolution.

1. Soit $P = (s_1, e_1, s_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, s_k)$ la chaîne correspondant au parcours d'Attila. Si P n'était pas un cycle, c'est à dire si $s_k \neq s_1$, alors dans la chaîne ouverte $P = (s_1, e_1, s_2, e_2, \ldots, e_{k-1}, s_k)$, le nombre d'arêtes incidentes à s_k serait impair (cf 5.3.2). Comme s_k est de degré pair dans le graphe, il y aurait des arêtes incidentes à s_k non utilisées ...et Attila ne serait pas bloqué. P est donc un cycle.
2. Soit G un graphe connexe pair.
   Soit P de cardinal maximal parmi les chaînes simples (existe puisque le nombre d'arêtes est fini).
   (a) P est un cycle d'après la première question donc Attila terminera son périple sur son île.
   (b) P passe par toutes les arêtes.
   Sinon :
      i. Il existe au moins une arête hors de P dont l'une des extrémités est un sommet de P. En effet :
         – soit P passe par tous les sommets du graphe et alors toute arête du graphe est incidente à au moins un sommet de P.
         – soit P ne passe pas par tous les sommets de G. Soit alors s un sommet de P et t un sommet hors de P, comme G est connexe il existe une chaîne $Q = (s = t_1, , t_2, \ldots, t_h = t)$ d'extrémités s et t. Dans cette chaîne, on prend le plus petit entier i tel que $t_i \notin P$, alors l'arête $t_{i-1} - t_i$ est une arête hors de P (puisque t_i n'est pas un sommet de P) ayant une extrémité dans P (à savoir t_{i-1}).
      ii. Soit donc e une arête hors de P ayant une extrémité s_i dans P. Comme P est un cycle, P peut s'écrire (on omet ici les arêtes) : $P = (s_i, s_{i+1}, \ldots, s_k = s_0, s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i)$ ...Le parcours P d'Attila est alors clairement prolongeable en utilisant l'arête e. Contradiction avec le caractère maximal de P.

■

5.5.2 Tous pairs sauf deux.

Etablir qu'un graphe connexe, dont tous les sommets sont pairs sauf deux, possède une chaîne eulérienne ouverte (les extrémités de toute chaîne eulérienne seront bien sûr les deux sommets impairs).

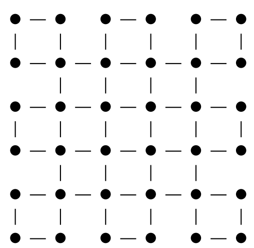
Résolution.
Soit G un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair sauf les sommets a et b qui sont de degré impair.
Ajoutons un sommet ω à ce graphe ainsi que les arêtes $a-\omega$ et $b-\omega$. On obtient ainsi un graphe G'.
G' est alors un graphe connexe dont tous les sommets sont pairs, G' est donc eulérien. Le cycle eulérien de G' peut s'écrire en "commençant" par ω : $(\omega, a, s_1, \dots, s_k, b, \omega)$ …d'où une chaîne eulérienne ouverte dans G : $(a, s_1, \dots, s_k, b)$.

■

5.6 Construire un cycle eulérien.

5.6.1 En fusionnant des petits cycles

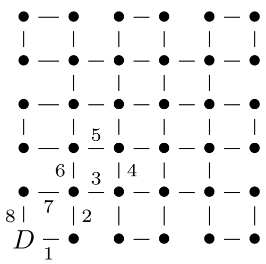
La caractérisation d'un graphe eulérien est simple : graphe pair et connexe (mis à part d'éventuels sommets isolés).
Mais est-il aussi simple d'obtenir explicitement un cycle eulérien ?
Trouver par exemple un cycle eulérien du graphe G suivant :



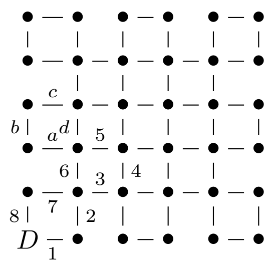
Résolution.

1. On part d'un sommet quelconque, et on se balade sur le graphe au hasard avec la seule contrainte de ne pas réutiliser une arête déjà empruntée.
   Lorsqu'on sera bloqué, ce sera nécessairement au point de départ : on a déjà justifié cela dans la première partie de 5.5.1. Rappelons l'argument : dans une chaîne ouverte $P = (s_1, e_1, s_2, e_2, \dots, e_{k-1}, s_k)$, le nombre d'arêtes de la chaîne incidentes à l'extrémité s_k est impair et comme s_k est de degré pair dans le graphe, il y a des arêtes incidentes à s_k non utilisées …et on n'est donc pas bloqué lorsqu'on est en s_k.

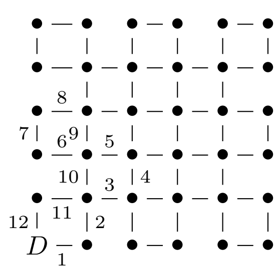
Par exemple en partant de D :



2. Si le cycle C_1 obtenu est eulérien, c'est terminé. Sinon, il existe une arête e hors du cycle et incidente à un sommet s de ce cycle (on a déjà justifié cela dans la deuxième partie de la preuve de 5.5.1 : cela est dû à la connexité du graphe) . Partons de s, parcourons e et continuons à nous balader au hasard sur le graphe G', obtenu en supprimant les arêtes de C_1 du graphe de départ, avec toujours la contrainte de ne pas réutiliser des arêtes déjà empruntées. G' est encore pair : en effet chaque sommet de G a perdu, lors de la suppression des arêtes de C_1, un nombre pair d'arêtes et est donc encore de degré pair dans G'. L'argument de la première partie de 5.5.1 fonctionne encore (la connexité n'intervenait pas), donc lorsqu'on sera bloqué dans G' on aura décrit un cycle C' de G'. Par exemple on définit ici C' avec les arêtes a, b, c, d :



3. Puis on fusionne les deux cycles pour obtenir un cycle C_2 du graphe initial (plus long que C_1) :



4. Et on recommence : soit C_2 est eulérien et c'est fini, soit il n'est pas eulérien et on le prolonge comme ci-avant en lui greffant un petit cycle de plus. . .Ce processus s'arrêtera (quand on aura épuisé toutes les arêtes) et le cycle obtenu sera eulérien.

■

Remarque. Soit G un graphe pair et connexe. Un cycle eulérien passe $\frac{d(s)}{2}$ fois par le sommet s (pour le sommet de départ, on ne compte que le départ ou que l'arrivée) . Par exemple, pour un graphe connexe G dont tous les sommets sont de degré 2, le cycle eulérien passe une unique fois par chaque sommet, il s'agit donc d'un cycle élémentaire.

5.6.2 Algorithme de Fleury

Soit G un graphe connexe eulérien. Pour tracer un cycle eulérien : partir d'un sommet quelconque, effacer derrière soi les arêtes empruntées, ne jamais emprunter une arête qui soit un isthme s'il existe une autre possibilité (après l'étape j, le graphe considéré est $G_j = G - \{e_1, e_2, \ldots, e_j\}$ où e_1, e_2,. . .,e_j sont les arêtes empruntées, l'arête suivante ne doit pas être un isthme dans G_j sauf si l'on ne peut pas faire autrement).

Justification.

1. Remarquons déjà que dans un graphe quelconque G, si une arête e d'extrémités u et v est un isthme alors les sommets u et v ne sont pas dans la même composante connexe de $G - e$. Montrons cela par l'absurde. S'ils étaient dans la même composante connexe de $G-e$, il existerait une chaîne $\mathcal{C}$ de $G - e$ reliant u et v. Prenons alors deux sommets s et t quelconques dans G, s'il existe une chaîne dans G de s à t ne contenant pas l'arête e alors s et t sont encore reliés dans $G - e$ et s'il existe une chaîne de s à t dans G contenant e, alors en remplaçant dans cette chaîne $u \overset{e}{\text{——}} v$ par $\mathcal{C}$, on constate que s et t sont encore reliés dans $G - e$. Donc $G - e$ aurait le même nombre de composantes connexes que G et e ne serait pas un isthme.
2. Commençons à tracer une chaîne simple sur un graphe connexe eulérien G en respectant l'algorithme décrit ci-dessus. A une étape k, on obtient la chaîne $\mathcal{C}_k = (s_0, e_1, s_1, e_2, \ldots, e_k, s_k)$ (où les s_i désignent les sommets empruntés et les e_j les arêtes empruntées (et donc effacées)).
   (a) Dans le graphe $G_k = G-\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$, il y a au plus deux sommets impairs : le sommet s_0 et le sommet s_k (en effet, pour tous les autres, chaque passage a ôté deux arêtes et ne change donc pas leur parité).
   (b) Supposons qu'il y ait encore plusieurs arêtes incidentes à s_k. Alors l'une au moins de ces arêtes n'est pas un isthme (dans G_k). Montrons cela par l'absurde : supposons que toutes les arêtes incidentes à s_k sont des isthmes.
   Soient e (d'extrémités s_k et u) et e' (d'extrémités s_k et u') deux de ces arêtes. Notons K la composante connexe de u dans G_k-e et K' la composante connexe de u' dans $G_k - e'$. Si $\overline{K}$ désigne la composante connexe de s_k dans $G_k - e$, alors $K' \subset \overline{K}$ puisque dans $G_k - e$, s_k et u' sont connectés. K et K' sont donc disjointes. Dans $G_k - e$, u est de degré impair (on vient d'arriver en u . . .), donc il existe au moins un autre sommet, v, impair dans K, distinct de s_k puisque dans K, et encore impair dans G_k. Le même raisonnement avec e' et u' nous donne un sommet v' de G_k impair et différent de v et s_k puisque dans K'. On a ainsi au moins trois sommets impairs dans G_k ce qui

contredit la remarque faite sur le nombre de sommets impairs à une étape donnée.
S'il n'y a plus qu'une arête incidente à s_k, celle-ci est bien sûr un isthme (on “déconnecte” s_k).
On a ainsi établi que si l'on est contraint en un sommet de choisir un isthme, c'est que cette arête est la dernière incidente à ce sommet.

3. Lorsqu'on ne peut plus prolonger la chaîne simple, on est à nouveau en s_0 (on n'est jamais bloqué en un autre sommet par parité du nombre d'arêtes incidentes à chaque sommet). A l'arrêt du processus, on a donc défini un cycle $\mathcal{C}_k = (s_0, e_1, s_1, e_2, \ldots, e_k, s_k)$ (où $s_0 = s_k$). Supposons que ce cycle ne passe pas par toutes les arêtes et notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des sommets encore incidents à des arêtes dans $G_k = G - \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$.
   (a) Il existe au moins un sommet s_j de $\mathcal{C}_k$ de degré non nul dans G_k.
   En effet, soit $s \in \mathcal{S}$:
   – soit $s \in \mathcal{C}_k$ et on a ainsi un sommet $s_j \in \mathcal{S}$,
   – soit $s \notin \mathcal{C}_k$, mais alors, par connexité de G, il existe une chaîne $\mathcal{R}$ dans G allant de s_0 à s. Le long de cette chaîne, notons t le premier sommet qui n'est pas un sommet de $\mathcal{C}_k$. Alors le sommet u précédant t dans $\mathcal{R}$ est un sommet de $\mathcal{C}_k$ de degré non nul dans G_k (l'arête reliant t et u est présente dans G_k puisque $t \notin \mathcal{C}_k$).
   (b) Soit j le plus grand indice (entre 1 et k) tel que s_j soit de degré non nul dans G_k (s_j est le “dernier” élément de la chaîne $\mathcal{C}_k$ qui appartienne à $\mathcal{S}$).
   Dans $G_j = G - \{e_1, e_2, \ldots, e_j\}$, l'arête $s_j \xrightarrow{e_{j+1}} s_{j+1}$ (on a $j < k$ car $s_k = s_0$ n'est pas dans $\mathcal{S}$ puisqu'on est bloqué en s_0) est un isthme, en effet :
   – e_{j+1} relie $s_j \in \mathcal{S}$ et $s_{j+1} \notin \mathcal{S}$,
   – et e_{j+1} est en fait la seule arête de G_j reliant un sommet de $\mathcal{S}$ à un sommet de $V(G) - \mathcal{S}$ (où $V(G)$ désigne l'ensemble des sommets de G) : en effet les arêtes e_{j+2}, …, e_k, sont des arêtes reliant deux éléments de $V(G) - \mathcal{S}$ (puisque s_j est par définition le denier sommet de $\mathcal{C}_k$ appartenant à $\mathcal{S}$) et les autres arêtes de G_j sont des arêtes de G_k, qui ont, par définition de $\mathcal{S}$, leurs deux sommets dans $\mathcal{S}$.
   (c) Mais e_{j+1} n'est pas la dernière arête incidente à s_j dans G_j (puisque s_j est dans $\mathcal{S}$). On a donc choisi un isthme alors qu'il restait plusieurs arêtes possibles, ce qui contredit la première partie de la preuve.

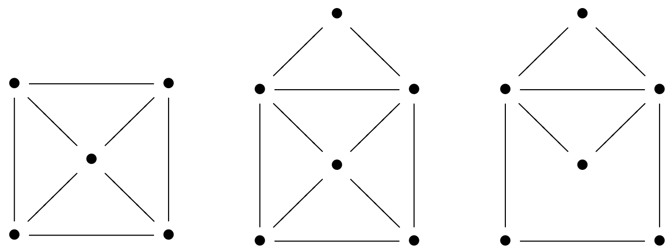
■

5.7 Promenade à la façon Königsberg

5.7.1 Enveloppe ouverte ou fermée

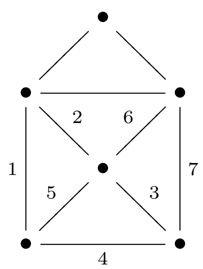
1. Peut-on tracer d'un trait continu (i.e. sans lever le crayon) et sans passage multiple sur un même segment l' enveloppe fermée et l'enveloppe ouverte ?

2. Et si oui en partant de quels sommets ?
3. Dans les cas où on y arrive et en partant d'un “bon” sommet, si on trace une ligne continue sans répétition de segments mais que l'on se retrouve bloqué à un point avant d'avoir couvert tous les segments, comment “corriger” pour compléter le tracé ?

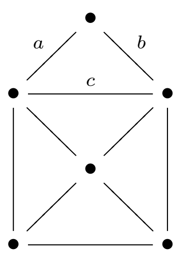


Résolution.

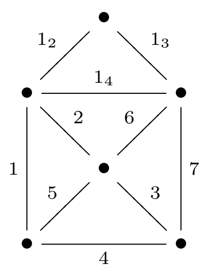
1. Pour l'enveloppe 1 : impossible (4 sommets impairs).
   Pour l'enveloppe 3 : toujours possible, en partant de n'importe quel sommet.
2. Pour l'enveloppe 2, on part du sommet en bas à gauche et on arrive au sommet en bas à droite (ou le contraire).
3. Comment corriger si l'on se retrouve bloqué avant d'avoir tout parcouru ? Si l'on a par exemple commencé par :



on s'occupe des arêtes manquantes :



et on incorpore ce nouveau cycle C_2 dans le précédent (C_1) dès qu'on le rencontre en parcourant C_1 :



■

5.7.2 Le zoo

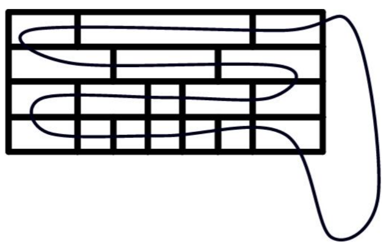
Le zoo se trouve sur un terrain rectangulaire découpé en petites zones délimitées par des barrières (une barrière=un segment) :

Pour organiser la visite du zoo, on désire tracer un sentier passant dans toutes les zones et traversant chaque barrière.

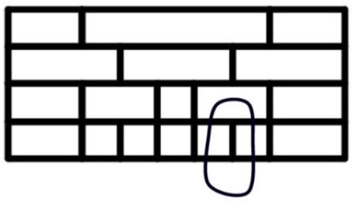
- Peut-on tracer un sentier traversant chaque barrière une unique fois en considérant les barrières externes infranchissables ?
- Même question si les barrières externes doivent être toutes franchies une unique fois également.

Résolution.
On associe à la situation le graphe dont les sommets sont les zones (+l'extérieur du terrain dans le cas 2), chaque arête correspondant à une barrière (c'est à dire deux sommets sont reliés par une arête ssi les zones correspondantes sont séparées par une barrière).

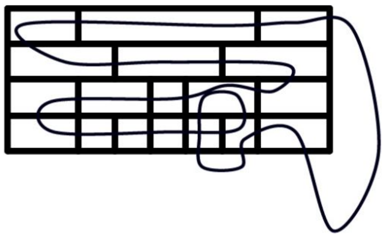
1. Sans sortie de terrain : impossible (parité des degrés).
2. En sortant du terrain : c'est possible puisque tous les degrés sont pairs. Comment tracer un tel sentier ?
   On commence par tracer un cycle C_1 :



Il nous manque des barrières, on trace un cycle C_2 sur le graphe obtenu en supprimant les arêtes (=barrières) déjà parcourues :



et on “l'incorpore” au cycle C_1 :

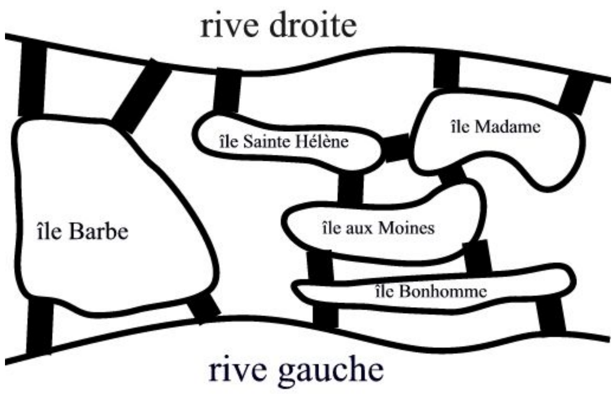


et on continue ainsi jusquà épuisement des barrières.

■

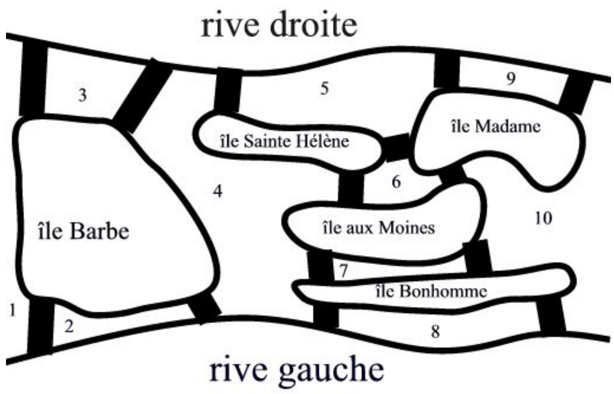
5.7.3 Biathlon.

Schmolldu s'entraîne à la course et à la nage. Il effectue tout d'abord en courant un parcours passant une et une seule fois sur chaque pont, plonge alors dans l'eau et effectue à la nage un parcours passant une fois et une seule sous chaque pont.
Quels sont les points de départ et d'arrivée de ses deux courses sachant qu'à la fin de sa nage, il sort de l'eau au point de départ de sa course à pied ?



Résolution.

1. Graphe 1 : les sommets sont les rives et les îles, les arêtes sont les ponts. Seules la rive droite et l'île Sainte Hélène sont de degré impair, la course à pied commence donc en l'un de ces deux points et se termine à l'autre.
2. Graphe 2 : les sommets sont les 10 zones délimitées par les ponts et les arêtes sont les ponts.



Seules les zones 5 et 6 sont de degré impair et sont donc les extrémités de sa course à la nage.

3. Il peut donc
   – partir en courant de la rive droite, finir sur Sainte Hélène, plonger en zone 6 et finir en zone 5 pour remettre le pied sur la rive droite.
   – ou partir en courant de l'île Sainte Hélène, finir sa course à pied sur la rive droite, plonger en zone 5, finir son entraînement à la natation en zone 6 et remettre le pied sur l'île Sainte Hélène.

■

5.7.4 Tom joue aux dominos.

Tom a perdu le domino $6-5$ de son jeu.
Pièces d'un jeu de dominos : toutes les paires $\{i,j\}$, $0 \leq i \leq 6$, $0 \leq j \leq 6$.

1. Il décide de les aligner les uns derrière les autres en respectant la règle usuelle. Y parviendra-t-il ?
2. Il décide maintenant de les poser en “rond” en respectant la règle. Même question.
3. Et s'il supprime tous les dominos portant un 6 ?

Résolution.

– Soit G le graphe dont les sommets sont les entiers 0,1,2,3,4,5,6. On relie deux entiers ssi il existe un domino portant ces deux entiers (les dominos sont donc les arêtes du graphe, les dominos doubles sont des boucles dans le graphe). Le problème posé est alors : “le graphe ainsi défini a-t-il une

chaîne eulérienne (ouverte, resp. fermée) ? "
Avec tous les dominos, on aurait un graphe complet à 7 sommets (avec en plus une boucle en chaque sommet), c'est à dire un graphe où tous les sommets sont de degré $6 + 2$. Ce graphe est eulérien. Avec le domino $6 - 5$ perdu, les sommets 6 et 5 sont maintenant de degré $5 + 2$ et tous les autres sont encore de degré $6 + 2$. Le graphe obtenu possède donc encore une chaîne eulérienne (ouverte). Mais il n'est plus eulérien. La réponse est donc oui à la question 1 et non à la question 2.

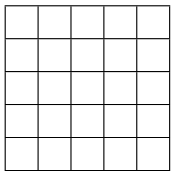
– Le graphe obtenu en supprimant tous les dominos portant un 6 est un graphe complet à 6 sommets (avec en plus une boucle en chaque sommet). Dans un tel graphe, les sommets sont tous de degré $5 + 2$ et le graphe n'a pas de chaîne eulérienne (ouverte ou fermée).

■

5.8 Ajout ou suppression d'arêtes

5.8.1 Police.

Le plan des rues d'une ville nouvelle est le suivant (les segments noirs sont les rues, les carrés blancs les pâtés de maisons) :



1. Les politiques sécuritaires étant à la mode , on promet deux postes de police (placés à des carrefours). Les policiers devront faire une "ronde" commençant à un poste et se terminant à l'autre et passant par le plus de rues possibles mais ne repassant jamais par une même rue. Où placer ces postes de police ?
2. Un élu de la région qui mise tout sur l'impression de sécurité de ses électeurs fait le calcul suivant : le nombre de voix espéré aux prochaines élections sera dans chaque quartier (=carré blanc du plan ci-dessus) proportionnel aux nombres de rues encadrant le quartier parcourues lors de la ronde :
   – une rue parcourue : facteur de proportionnalité 1.
   – deux rues parcourues : facteur 2.
   – trois rues parcourues : facteur 3.
   – Quatre rues parcourues : facteur 4.

   Par contre, pour des raisons administratives impénétrables, une rue ne pourra être parcourue plusieurs fois lors de la ronde.
   Cet élu cherche donc à définir un parcours rapportant un maximum de points (1,2,3 ou 4 par carré) et respectant la contrainte ci-dessus. Déterminer un tel parcours et le maximum de points correspondant et placer les deux postes de police dans ce cas (le parcours de police commence à un poste et se termine à l'autre).

3. Finalement, économie oblige, il n'y aura qu'un seul poste de police (placé à un carrefour). La ronde devra commencer et se terminer au même poste et devra couvrir le plus de rues possibles, aucune rue ne devant être couverte plusieurs fois. Quelle est la longueur d'une telle ronde ?
4. On décide maintenant qu'une ronde doit couvrir toutes les rues, la ronde peut donc maintenant couvrir deux fois (au plus) une même rue. Quel est le nombre minimal de rues à parcourir deux fois pour réaliser une telle ronde ?
   (a) Avec deux postes de police.
   (b) Avec un poste de police.

Résolution.

1. Trois catégories de sommets :
   – Sommets type A de degré 2 : il y en a 4.
   – Sommets type B de degré 4 : il y en a 16.
   – Sommets type C de degré 3 : il y en a 16.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
2 & - & 3 & - & 3 & - & 3 & - & 3 & - & 2 \\
| & & | & & | & & | & & | & & | \\
3 & - & 4 & - & 4 & - & 4 & - & 4 & - & 3 \\
| & & | & & | & & | & & | & & | \\
3 & - & 4 & - & 4 & - & 4 & - & 4 & - & 3 \\
| & & | & & | & & | & & | & & | \\
3 & - & 4 & - & 4 & - & 4 & - & 4 & - & 3 \\
| & & | & & | & & | & & | & & | \\
3 & - & 4 & - & 4 & - & 4 & - & 4 & - & 3 \\
| & & | & & | & & | & & | & & | \\
2 & - & 3 & - & 3 & - & 3 & - & 3 & - & 2
\end{array}$$

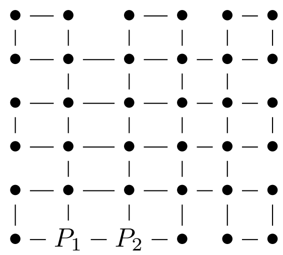
Dans le parcours de police, au plus deux sommets seront impairs (c'est à dire de degré impair dans le graphe engendré par les arêtes du parcours). Le parcours policier pourra utiliser les trois arêtes d'au plus deux sommets de type C. Pour les autres sommets C, le parcours policier utilisera zéro ou deux arêtes.
On a donc un majorant de la longueur du parcours de police :

$$L = \frac{1}{2}\left(4 \times 2 + 14 \times 2 + 2 \times 3 + 16 \times 4\right) = 53$$

Or en supprimant 7 arêtes comme ci-dessous :

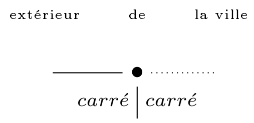
$$\begin{array}{ccccccccccc}
\bullet & - & \bullet & & \bullet & - & \bullet & & \bullet & - & \bullet \\
| & & | & & | & & | & & | & & | \\
\bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet \\
 & & | & & | & & | & & | & & \\
\bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet \\
| & & | & & | & & | & & | & & | \\
\bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet \\
 & & | & & | & & | & & | & & \\
\bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet \\
| & & | & & | & & | & & | & & | \\
\bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & & \bullet & - & \bullet
\end{array}$$

on obtient un graphe de 53 arêtes dont tous les sommets sont pairs, sauf deux. Ce nouveau graphe possède donc une chaîne eulérienne.
Le parcours policier de longueur maximale a donc pour longueur 53. Les deux postes de police se placent aux deux sommets impairs "conservés".

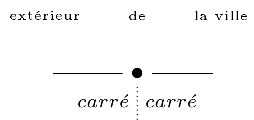


2. *Cette question 2. est une question du championnat international de mathématiques 1992, cf [9].*
Deux catégories d'arêtes :
   - les arêtes de "bordure" du quadrillage : elles ne sont frontière que d'un carré et ne rapporteront donc qu'un seul point chacune.
   - les arêtes "internes" au quadrillage : elles sont frontière de deux carrés et le tracé de l'une d'elles rapportera 2 points.

   Et les mêmes catégories de sommets que précédemment. Une chaîne simple a zéro ou deux sommets impairs. On pourra donc utiliser les trois arêtes d'un sommet de type C pour zéro ou deux d'entre eux, pour les autres sommets C on utilisera au mieux deux arêtes.
   Pour un sommet de type C pour lequel on utilise deux arêtes, on obtient un meilleur score en utilisant pour l'une des deux une arête interne qu'en utilisant deux arêtes de bordure :



   rapporte un total de trois points alors que :

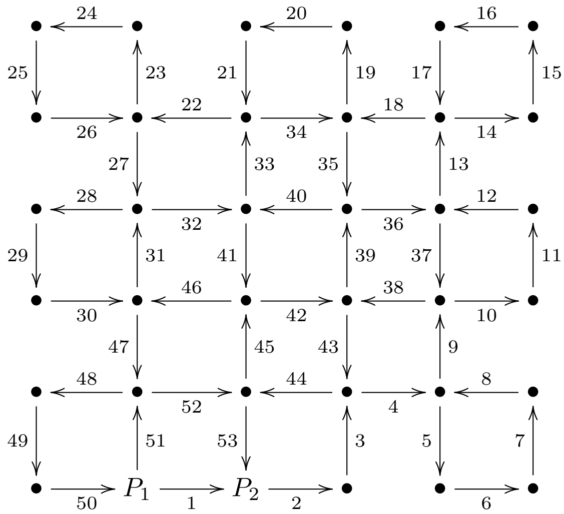


   rapporte uniquement deux points.
   Ainsi, au mieux, on a 4 sommets de type A rapportant chacun 2 points (c'est à dire incidents à deux arêtes du parcours policier en bordure de ville), 14 sommets de type C (de degré 2 dans le parcours de police) rapportant chacun 3 points (car incidents à une arête du parcours de police sur la bordure de la ville et une arête du parcours interne à la ville), 2 sommets de type C et de degré 3 dans le parcours de police rapportant chacun 4 points (car incidents à deux arêtes parcourues en bordure de ville et une arête parcourue interne à la ville) et 16 sommets de type B rapportant chacun 8 points (car incident à 4 arêtes parcourues internes à la ville).

On obtient donc un majorant des scores :

$$M = \frac{1}{2}\,(4 \times 2 + 14 \times 3 + 2 \times 4 + 16 \times 8) = 93$$

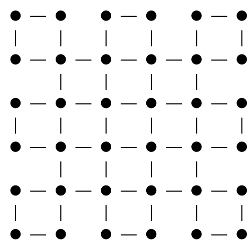
Et on constate avec le schéma ci-dessous que ce majorant est atteint et est donc le score maximum possible :



3. Dans la ronde policière, tous les sommets seront pairs (dans la ronde). La ronde policière utilisera 0 ou 2 des trois arêtes des sommets de type C.
On a donc un majorant de la longueur de ronde policière :

$$L = \frac{1}{2}\,(4 \times 2 + 16 \times 2 + 16 \times 4) = 52$$

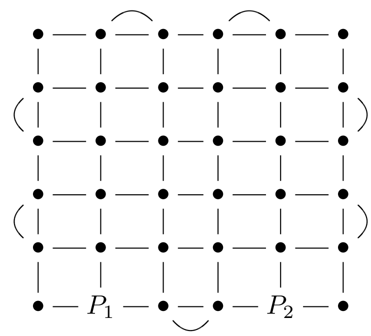
Or en supprimant 8 arêtes comme ci-dessous :



on obtient un graphe de 52 arêtes dont tous les sommets sont pairs. Ce nouveau graphe possède donc un cycle eulérien.
La ronde policière de longueur maximale a donc pour longueur 52, le poste de police se place n'importe où.

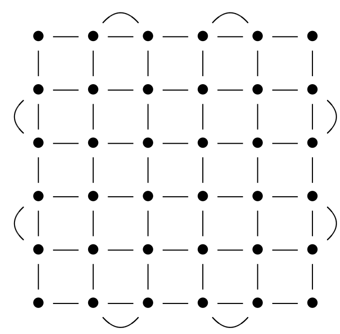
4. (a) Deux postes de police. On peut considèrer qu'une rue parcourue deux fois est doublée par une rue parallèle joignant les deux mêmes carrefours. Le problème revient donc à se demander quel est le nombre minimal d'arêtes à doubler pour que le graphe formé avec les arêtes de

doublement et les arêtes initiales possède une chaîne eulérienne (ouverte), c'est à dire le nombre minimal d'arêtes de doublement pour rendre tous les sommets pairs, sauf éventuellement deux.
7 arêtes suffisent :



Par ailleurs 7 arêtes sont nécessaires :
Supposons en effet que l'on ait doublé k arêtes et que le graphe obtenu ait une chaîne eulérienne ouverte. Le nouveau graphe a deux sommets impairs, et la suppression des k arêtes crée au plus $2k$ sommets impairs. Le graphe initial a donc au plus $2k + 2$ sommets impairs, d'où $16 \leq 2k + 2$, c'est à dire $k \geq 7$.
7 rues parcourues deux fois est donc le minimum cherché.

(b) Avec un seul poste de police, que l'on place où l'on veut :



■

5.8.2 Nombre minimum de levers de crayon.

Soit G un graphe connexe ne possédant pas de chaîne eulérienne ouverte ou fermée. Alors G a 2α sommets impairs (avec $\alpha \geq 2$) et le nombre minimum de levers de crayon pour passer sur toutes les arêtes sans en répéter est $\alpha - 1$.

Preuve.

1. Le nombre de sommets impairs d'un graphe est toujours pair : cf 3.3.1.
2. $\alpha \geq 2$ car pour $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$, le graphe possède une chaîne eulérienne (fermée lorsque $\alpha = 0$, ouverte lorsque $\alpha = 1$). Le nombre de levers de crayon est 0 dans ces deux cas.

3. $\alpha - 1$ levers de crayons suffisent toujours.
Il suffit en effet d'ajouter $\alpha - 1$ arêtes appariant $2(\alpha - 1)$ sommets impairs deux par deux, on se retrouve alors avec un graphe dont tous les sommets, sauf deux, sont pairs c'est à dire avec un graphe possédant une chaîne eulérienne. Dans le tracé de cette chaîne eulérienne, chacune des arêtes nouvelles correspond à un lever de crayon.
4. $\alpha - 1$ levers de crayons sont nécessaires.
Supposons qu'on arrive à parcourir toutes les arêtes, chacune étant tracée une unique fois, avec β levers de crayon. Pour chacun des levers de crayon, ajoutons une arête verte au graphe initial (l'arête verte relie le sommet correspondant au soulèvement du crayon et le sommet correspondant à la repose du crayon). Le nouveau graphe obtenu a alors au plus deux sommets impairs (point de départ et d'arrivée de la chaîne eulérienne). La suppression des arêtes vertes crée au plus 2β sommets impairs. Donc le graphe initial G possède au plus $2\beta + 2$ sommets impairs. Comme on a supposé au départ qu'il en possède 2α, on a : $2\alpha \leq 2\beta + 2$, soit $\alpha - 1 \leq \beta$.

■

5.8.3 La cigale et la fourmi.

1. La fourmi parcourt les arêtes de chaque solide platonicien en s'interdisant de passer deux fois sur une même arête : elle récupère en effet sur chaque arête quelques provisions pour l'hiver et repasser deux fois sur une même arête serait, elle le sait, une perte de temps. Dans chaque cas, quel est le nombre maximum d'arêtes qu'elle peut ainsi parcourir ?
2. La cigale trouvant les pérégrinations de la fourmi amusantes décide de jouer à parcourir elle aussi les arêtes des solides, sans passer plus d'une fois sur une même arête. Mais quand elle est coincée, elle s'autorise à voler sur un sommet incident à une arête non parcourue. Nombre minimal d'envol dans chaque cas ?

Résolution.
Les cinq solides de Platon :

1. tétraèdre : 4 sommets de degré 3, 6 arêtes.
2. cube : 8 sommets de degré 3, 12 arêtes.
3. octaèdre : 6 sommets de degré 4, 12 arêtes.
4. dodécaèdre : 20 sommets de degré 3, 30 arêtes.
5. icosaèdre : 12 sommets de degré 5, 30 arêtes.

La fourmi ne pourra parcourir toutes les arêtes que pour l'octaèdre.
Enlevons une arête du tétraèdre : les deux sommets incidents à cette arête deviennent pairs tandis que les deux autres sommets restent impairs. Le graphe obtenu possède donc une chaîne eulérienne ouverte et la fourmi peut parcourir 5 arêtes du tétraèdre.
Pour le cube : la fourmi ne peut parcourir les 12 arêtes, 11 non plus car avec une arête en moins il nous reste nécessairement 6 sommets impairs...10 non plus...mais en enlevant par exemple trois arêtes parallèles, on a un graphe avec deux sommets impairs et 9 arêtes.
On procèdera de même pour les autres solides.
Pour la cigale, appliquer le résultat 5.8.2.

■

5.9 Décomposition en cycles élémentaires

5.9.1 Possèder un cycle élémentaire.

Un graphe G dont tous les sommets sont de degré au moins 2 possède un cycle élémentaire (de longueur non nulle).

Preuve.
Soit P une chaîne élémentaire de G de longueur maximale : $(s_0, s_1, s_2, \dots, s_n)$.
s_0 est de degré 1 dans la chaîne. Comme s_0 est de degré au moins 2 dans G, s_0 a au moins un autre voisin s que s_1 dans G. Et s est nécessairement l'un des s_i (sinon on aurait une chaîne élémentaire $(s, s_0, s_1, s_2, \dots, s_n)$ contredisant le caractère maximal de P).
Soit k tel que $s = s_k$, alors $(s_0, s_1, \dots, s = s_k, s_0)$ est un cycle élémentaire (de longueur au moins 3 puisque $s_k \neq s_1$).

■

5.9.2 Réunion de cycles élémentaires.

Soit G un graphe. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. G est pair.
2. G est réunion de cycles élémentaires sans arêtes communes.

Preuve.

1. Si un graphe est une réunion de cycles élémentaires sans arêtes communes, un sommet appartenant à k cycles est de degré $2k$.
2. Soit G un graphe pair.
   Si G n'a pas d'arêtes, c'est réglé (G est réunion de cycles élémentaires de longueur nulle).
   Sinon G a au moins un cycle élémentaire C_1 (de longueur non nulle) [d'après 5.9.1, en considérant le sous-graphe engendré par les arêtes].

Soit G_2 le graphe obtenu à partir de G en supprimant les arêtes du cycle C_1. G_2 est pair, on peut donc en "tirer" comme ci-dessus un cycle élémentaire C_2 sans arêtes communes avec C_1. On définit alors G_3 à partir de G_2 en supprimant les arêtes de C_2 ...et ainsi de suite. Le nombre d'arêtes étant fini, le processus s'arrête et on aura alors écrit G comme une réunion (finie) de cycles élémentaires sans arêtes communes.

■

5.9.3 Euler, encore.

Utiliser 5.9.2 pour redémontrer que tout graphe connexe pair est eulérien.

Résolution.

Le graphe connexe pair G est une réunion de cycles élémentaires sans arêtes communes : $G = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_k$.

1. Si C_1 est eulérien (c'est à dire si $k = 1$), G est eulérien.
2. Sinon, il existe au moins une arête e hors de $C_1 = (s_1, s_2, \ldots, s_n, s_1)$. Il existe alors une arête e' hors de C_1 ayant une extrémité dans C_1 :
   (a) Soit e a une extrémité dans C_1 et on prend $e' = e$.
   (b) Sinon e n'a aucune de ses extrémités dans C_1, elle est alors incidente à deux sommets u et v hors de C_1. Comme le graphe est connexe, il existe une chaîne $P = (s_1 = u_1, u_2, u_3, \ldots, u_q = u)$ de s_1 à u. Dans cette chaîne, considérons le premier sommet u_i hors de C_1. Alors $e' = u_{i-1} - u_i$ convient.
3. e' appartient à l'un des C_j, $j \geq 2$. Quitte à renuméroter, on suppose que $e' \in C_2 = (t_1, t_2, \ldots, t_p, t_1)$.
   Soit s_i un sommet de $C_1 = (s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n, s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i)$ auquel e' est incidente.
   Alors s_i est aussi un sommet t_j de $C_2 = (t_j, t_{j+1}, \ldots, t_p, t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}, t_j)$ (puisque e' est une arête du cycle C_2). On peut alors définir le cycle
   $$C_2' = (s_i, s_{i+1}, \ldots, s_n, s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, s_i = t_j, t_{j+1}, \ldots, t_p, t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}, t_j)$$
   (on fusionne C_1 et C_2).
4. Si C_2' est un cycle eulérien de G (c'est à dire si $k = 2$), c'est terminé.
5. Sinon il existe au moins une arête e hors de C_2' et alors il existe au moins une arête e' hors de C_2' ayant une extrémité dans C_2' ...on recommence ...le processus s'arrête (k étapes). A la fin, on aura concaténé tous les cycles élémentaires pour construire un cycle eulérien.

■

5.10 Le musée

5.10.1 Les contraintes.

On demande à un architecte de concevoir les plans d'un futur musée. Le musée exposera essentiellement des peintures qui seront suspendues aux murs de couloirs.
Une contrainte : les visiteurs doivent pouvoir circuler dans tous les couloirs où sont exposés les oeuvres sans repasser deux fois par un même couloir.
En d'autres termes le graphe, dont les arêtes sont les couloirs et les sommets les carrefours, doit être eulérien.
Problème : si l'on déambule au hasard sur un graphe eulérien avec pour seule stratégie de ne pas emprunter un couloir déjà pris, on se retrouvera au bout d'un moment bloqué au point de départ (donc à l'entrée/sortie du musée) mais en général en n'ayant pas parcouru tous les couloirs.
Or le directeur du musée, pour des raisons artistiques indiscutables, refuse que des pancartes imposent le parcours ...L'architecte doit donc proposer un plan de musée tel que toute personne partant de l'entrée du musée et déambulant au hasard, en s'interdisant seulement d'emprunter un couloir déjà visité, puisse admirer toutes les oeuvres et finir à son point de départ (pour pouvoir ressortir).

5.10.2 CN.

Soit G un graphe possédant la propriété voulue, c'est à dire tel que toute chaîne simple de départ ω (l'entrée du musée) continuée jusqu'à un point de blocage (c'est à dire un sommet-carrefour tel que tous les couloirs-arêtes incidents à ce carrefour sont déjà empruntés par la chaîne) est en fait un cycle eulérien *(un tel graphe est dit aléatoirement eulérien en ω)*. Effaçons ω ainsi que tous les couloirs partant de cette entrée. Alors le graphe F obtenu est une forêt (c'est à dire un graphe sans cycle).

Preuve.
Par l'absurde. Supposons qu'un visiteur puisse parcourir un cycle ne passant pas par ω, il peut alors parcourir un cycle élémentaire ne passant pas par ω (cf 4.1.4)

$$C = (s_0, s_1, \ldots, s_n, s_0)$$

Dans G, il existe une chaîne de ω à s_0 (puisqu'on peut visiter tout le musée en partant de l'entrée ω) dont on peut extraire une chaîne élémentaire de ω à s_0 (cf 4.1.4) : $(\omega, t_1, t_2, \ldots, t_p, s_0)$. Soit t_j le premier sommet de cette chaîne appartenant au cycle C, il existe un indice i tel que $t_j = s_i$. Considérons alors la chaîne simple

$$P' = (\omega, t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}, t_j = s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots, s_n, s_0, s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i)$$

et continuons la jusqu'à ce que notre visiteur se retrouve bloqué (c'est à dire se retrouve à un carrefour incident à des couloirs tous déjà empruntés). On obtient une chaîne simple C' qui est un cycle eulérien (puisque le plan du musée est censé avoir cette propriété) :

$$C' = (\omega, t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}, t_j = s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, \ldots, s_n, s_0, s_1, \ldots, s_{i-1}, s_i, v_1, v_2, \ldots, v_q, \omega)$$

Si notre visiteur parcourt la chaîne simple :

$$C'' = (\omega, t_1, t_2, \ldots, t_{j-1}, t_j = s_i, v_1, v_2, \ldots, v_q, \omega)$$

il se retrouvra également bloqué en ω (on a en effet uniquement supprimé les sommets et arêtes du cycle C, qui ne contient pas ω : les arêtes incidentes à ω sont donc toutes utilisées dans C'' comme dans C'). On a ainsi un parcours de visiteur partant de ω et aboutissant en ω avec blocage en ω sans avoir parcouru tous les couloirs du musée. Contradiction.

■

5.10.3 CS.

On dessine des arbres (c'est à dire des graphes connexes sans cycle), on dessine ensuite un nouveau sommet ω et on relie ω à tous les sommets impairs des arbres. On se propose de montrer qu'un tel graphe peut servir de plan à notre musée, ω désignant l'entrée. Un visiteur parcourt le musée-graphe ainsi défini en empruntant les couloirs au hasard et en s'interdisant de passer par un couloir déjà visité.

1. Le graphe obtenu est eulérien (il existe donc au moins une façon de parcourir tous les couloirs du musée sans repasser par un même couloir).
2. Notre visiteur ne peut pas passer deux fois par un sommet $a \neq \omega$ sans être repassé par ω.
3. Si notre visiteur est bloqué à un moment donné dans sa visite, ce ne peut être qu'à l'entrée ω.
4. Lorsque notre visiteur sera bloqué en ω, ce sera en fait parce qu'il aura tout visité.

Résolution.
Soit F la forêt définie par nos arbres (graphe dont les composantes connexes sont les arbres de l'énoncé). Notons G le graphe obtenu en ajoutant un sommet ω et les arêtes reliant ω aux sommets impairs de F.

1. Montrons que le graphe est eulérien.
   (a) Le graphe G est connexe puisque chaque arbre (c'est à dire chaque composante connexe) de la forêt a au moins un sommet impair (un arbre a en effet toujours au moins un sommet impair sinon il serait pair et connexe donc eulérien et aurait donc un cycle) et toutes les composantes connexes de F seront donc reliées à ω.
   (b) Le nombre de sommets impairs de la forêt F est pair (comme dans tout graphe). Le sommet ω sera donc pair, ainsi que tous les sommets impairs de F puisqu'on leur ajoute une arête.
   (c) Ainsi G est connexe et pair : c'est un graphe eulérien.
2. Si le visiteur passe deux fois par le sommet a sans repasser par ω, il a donc parcouru un cycle ne passant pas par ω. Un tel cycle serait donc un cycle de F …ce qui est absurde puisque F est une forêt.
3. Supposons que le visiteur se trouve en un sommet a. Si ce sommet a n'est pas son point de départ ω, à chaque passage en a le visiteur "épuise" deux couloirs aboutissant en a : le couloir par lequel il est arrivé et le couloir par lequel il repart. S'il vient d'arriver en a, il a donc épuisé un nombre impair

de couloirs incidents à a : les couloirs des éventuels passages précédents en a et le couloir par lequel il vient d'arriver. Comme le nombre de couloirs incidents à a est pair (par construction du graphe), notre visiteur peut repartir...Ainsi en un autre sommet que ω, le visiteur n'est jamais bloqué et ce ne peut donc être qu'en ω qu'un visiteur se trouve sans “nouveau” couloir possible.

Remarque. Pour ω, ce qui fait que l'argument précédent ne tient pas, c'est qu'au départ on part de ω sans y être arrivé. En supposant qu'on efface les couloirs au fur et à mesure qu'on les emprunte, on rend ainsi ω impair en le quittant, alors que les autres sommets deviennent impairs en y arrivant et redeviennent pairs lorsqu'on les quitte.

4. Supposons que notre amateur d'art se retrouve bloqué (donc en ω) sans avoir parcouru tous les couloirs.
   (a) Pour chaque carrefour(=sommet du graphe),le nombre de couloirs incidents à ce carrefour et déjà utilisés par notre visiteur est pair. En effet, le raisonnement fait ci-dessus le montre pour un sommet $a \neq \omega$. Pour ω : on est bloqué en ω, on vient donc d'arriver en ω, ce qui rend pair à nouveau ω (le couloir que l'on vient d'“effacer” en arrivant “compense” le couloir effacé au départ qui rendait impair ω).
   (b) Chaque sommet était incident à un nombre pair de couloirs au départ, le parcours du visiteur a effacé en chaque sommet un nombre pair de couloirs. Chaque sommet est donc encore incident à un nombre pair de couloirs après avoir effacé les couloirs du parcours effectué. Les composantes connexes du graphe restant (constitué de tous les sommets de G et des arêtes non encore effacées) sont donc des cycles de G (car sous-graphes connexes et pairs donc eulériens). Mais ce serait donc des cycles de F (on est en effet bloqué en ω, il ne reste donc plus de couloirs incidents à ω) ...or F, par construction, n'a pas de cycle de longueur non nulle. Il ne reste donc que des sommets isolés et notre visiteur, lorsqu'il est bloqué en ω, peut ressortir satisfait : il a en fait tout vu.

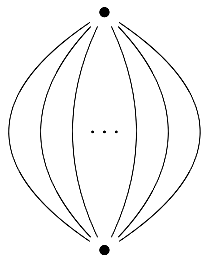
■

5.10.4 Une seconde entrée.

Le directeur de musée rappelle à l'architecte que son grand musée étant bordé par deux grandes avenues parisiennes, il aura naturellement deux entrées ...et bien sûr, le directeur aimerait que l'on puisse faire des parcours eulériens au hasard à partir des deux entrées. Quels sont les plans encore possibles ?

Résolution.
D'après 5.10.2, si un graphe G est un plan convenable d'entrées ω et δ alors tout cycle de G passe par ces deux entrées. Pour un tel graphe, tous les cycles élémentaires sont donc de la forme $(\omega, v_1, v_2, \ldots, v_k, \delta, v_{k+1}, \ldots, v_m, \omega)$, ce que l'on peut considérer comme deux couloirs “parallèles” de ω à δ : $(\omega, v_1, v_2, \ldots, v_k, \delta)$ et $(\delta, v_{k+1}, \ldots, v_m, \omega)$. Comme le graphe est pair (puisqu'eulérien), il est réunion de cycles élémentaires sans arêtes communes (cf 5.9) , ce que l'on peut considérer comme une réunion d'un nombre pair de chaînes élémentaires de ω à δ sans

arêtes communes. Les plans possibles se limitent donc à un ensemble de couloirs "parallèles" en nombre pair reliant les deux entrées.



■

5.11 Graphes orientés eulériens

5.11.1 Définition

Un graphe orienté G sera dit eulérien s'il possède un circuit eulérien, c'est à dire un circuit passant une et une seule fois par chaque flèche du graphe (en respectant l'orientation des flèches).

5.11.2 Connexité

On peut définir plusieurs notions de connexité :

1. Une connexité forte : le graphe G est dit fortement connexe lorsque pour tous sommets u et v, il existe un chemin de u à v (la condition étant posée pour tout couple (u, v), cela signifie que pour tous sommets u et v il existe un chemin de u à v ET un chemin de v à u).
2. Une connexité faible : le graphe G sera dit faiblement connexe lorsque le graphe non orienté obtenu en effaçant les pointes des flèches est connexe.

Remarque.
Un circuit eulérien passe par tous les sommets du graphe, mis à part d'éventuels sommets isolés. En négligeant ces sommets isolés, l'existence d'un circuit eulérien impose clairement une forte connexité du graphe.

5.11.3 Caractérisation d'un graphe orienté eulérien

Soit G un graphe orienté fortement connexe. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- G est eulérien.
- Pour tout sommet s de G, $d^+(s) = d^-(s)$.

Preuve.
L'argumentation est la même que pour les graphes non orientés.

1. Si G est eulérien. On parcourt un circuit eulérien en effaçant les flèches derrière soi, on repart d'un sommet à chaque fois qu'on y est arrivé ...ce qui implique clairement qu'il y a autant de flèches partant du sommet que de flèches y arrivant (pour le sommet de départ, on apparie la flèche de départ avec la flèche finale).
2. Suppons maintenant que G est fortement connexe et vérifie "pour tout sommet s de G, $d^+(s) = d^-(s)$".
   - On part d'un sommet d et on se balade sur le graphe (en respectant l'orientation des flèches) en effaçant les flèches derrière soi. En tout sommet auquel on arrive, il y a une flèche qui permet de repartir ...sauf en d, sommet pour lequel on a cassé la "symétrie" au départ. Lorsqu'on sera bloqué, ce sera donc en d et l'on aura ainsi décrit un circuit (sans répétition de flèche).
   - Soit P un chemin simple de longueur maximale. P est un circuit d'après ce qui précède :

   $$P = u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_k \to u_1$$

   - Supposons que P ne soit pas eulérien. Il existe au moins une flèche f non parcourue qu'on peut supposer partir d'un sommet u_j de P (même argumentation qu'en 5.5.1). Le chemin simple

   $$u_j \to u_{j+1} \to \cdots \to u_k \to u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_{j-1} \to u_j \xrightarrow{f} s$$

   contredit alors la maximalité de P.

■

5.11.4 Marabout-bout de ficelle ...

1. Soit $\mathcal{A}$ un alphabet de n lettres ($n \geq 2$) et $p \geq 2$ un entier.
   On définit un graphe orienté G de la façon suivante *(graphe de DE BRUIJN)* :
   - les sommets sont les mots de longueur $p-1$ sur l'alphabet $\mathcal{A}$,
   - on dessine une flèche du mot S vers le mot T lorsque les $p-2$ dernières lettres de S sont les $p-2$ premières lettres de T :

   $$S = xs_2s_3\ldots s_{p-2}s_{p-1} \to T = s_2s_3\ldots s_{p-1}y$$

   Montrer que ce graphe est eulérien.
2. Pour écrire les mots survol-volcan-cancre-crever-verbal-balcon, il faut a priori écrire $6 \times 6 = 36$ lettres, on les écrit avec seulement 21 lettres de la façon suivante : survolcancreverbalcon.
   Considérons maintenant un alphabet $\mathcal{A}$ de n lettres. On veut écrire tous les mots de longueur p avec cet alphabet (c'est à dire tous les éléments du produit cartésien $\mathcal{A}^p$). Ce nombre de mots est de n^p. Pour écrire tous les mots, on pourrait donc écrire $p \times n^p$ lettres.
   Avec l'idée ci-dessus et en utilisant le graphe G de la question précédente, montrer qu'il est possible d'écrire tous les mots de longueur p sur cet alphabet à l'aide d'un mot de longueur $p + n^p - 1$.

3. Construction d'un circuit eulérien sur le graphe G.
Appelons $1, 2, \ldots, n$ les lettres de l'alphabet $\mathcal{A}$. On construit un chemin dont le début est :
$$nn \ldots n \rightarrow nn \ldots n1 \rightarrow nn \ldots 11 \rightarrow \ldots$$
et de façon générale, le mot $S = s_1 s_2 \ldots s_{p-1}$ sera suivi du mot $s_2 \ldots s_{p-1}1$ sauf si la flèche $S = s_1 s_2 \ldots s_{p-1} \rightarrow s_2 \ldots s_{p-1}1$ a déjà été utilisée, auquel cas on utilise la flèche $S = s_1 s_2 \ldots s_{p-1} \rightarrow s_2 \ldots s_{p-1}2$, sauf si elle a déjà été utilisée, auquel cas on utilise la flèche $S = s_1 s_2 \ldots s_{p-1} \rightarrow s_2 \ldots s_{p-1}3$, sauf si elle a déjà été utilisée...En bref, on part du mot de longueur $p-1$ dont toutes les lettres sont la lettre n et arrivé à un sommet $S = s_1 s_2 \ldots s_{p-1}$, on utilise la première des flèches $S = s_1 s_2 \ldots s_{p-1} \rightarrow s_2 \ldots s_{p-1}j$ non encore utilisée dans le chemin (dans l'ordre croissant des valeurs de j).
Etablir que ce chemin est un circuit eulérien du graphe G.

Résolution.

1. (a) Degrés des sommets.
Chaque sommet S du graphe G vérifie : $d^+(S) = d^-(S) = n$. En effet, le mot $S = s_1 s_2 s_3 \ldots s_{p-2} s_{p-1}$ flèche sur les mots $T = s_2 s_3 \ldots s_{p-2} s_{p-1} x$ où x prend les n valeurs possibles dans l'alphabet $\mathcal{A}$ et les mots fléchant sur S sont les mots $x s_1 s_2 s_3 \ldots s_{p-2}$ où x prend les n valeurs possibles dans l'alphabet $\mathcal{A}$.
(b) G est fortement connexe.
Soit en effet $S = s_1 s_2 s_3 \ldots s_{p-2} s_{p-1}$ et $T = t_1 t_2 t_3 \ldots t_{p-2} t_{p-1}$ deux sommets du graphe G. Il existe un chemin de S à T :
$S = s_1 s_2 s_3 \ldots s_{p-2} s_{p-1} \rightarrow s_2 s_3 \ldots s_{p-2} s_{p-1} t_1 \rightarrow s_3 \ldots s_{p-2} s_{p-1} t_1 t_2 \rightarrow \cdots \rightarrow s_{p-1} t_1 t_2 \ldots t_{p-2} \rightarrow T = t_1 t_2 t_3 \ldots t_{p-2} t_{p-1}$.
(c) Le graphe G est donc eulérien.
(d) Le nombre de mots de longueur $p-1$ sur l'alphabet $\mathcal{A}$ est de n^{p-1}. Comme chacun de ces mots S vérifie $d^+(S) = n$, le nombre total de flèches dans le graphe est de $n \times n^{p-1} = n^p$. Un circuit eulérien du graphe est donc de longueur n^p.
2. Utilisation du graphe.
(a) Le chemin $S = x s_2 s_3 \ldots s_{p-2} s_{p-1} \rightarrow T = s_2 s_3 \ldots s_{p-1} y$ donnera le mot de longueur p : $x s_2 s_3 \ldots s_{p-2} s_{p-1} y$.
Le chemin
$$S = x s_2 s_3 \ldots s_{p-2} s_{p-1} \rightarrow T = s_2 s_3 \ldots s_{p-1} y \rightarrow U = s_3 \ldots s_{p-1} y z$$
sera interprété par le mot $x s_2 s_3 \ldots s_{p-2} s_{p-1} y z$ de longueur $p+1$, il contient les deux mots $x s_2 s_3 \ldots s_{p-2} s_{p-1} y$ et $s_2 s_3 \ldots s_{p-2} s_{p-1} y z$ de longueur p...Un chemin simple de longueur k pourra de même être associé à un mot de longueur $p+k-1$ sur lequel on pourra lire k mots distincts de longueur p.
En particulier, un circuit eulérien (de longueur n^p) est associé à un mot de longueur $p+n^p-1$ sur lequel on peut lire les n^p mots distincts de longueur p.

(b) Exemple.
Cherchons à écrire les mots de longueur 3 sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{0; 1\}$.

$$\begin{tikzcd}
00 \arrow[loop left] \arrow[r] & 01 \arrow[d] \arrow[dl, bend left] \\
10 \arrow[u] \arrow[ur, bend left] & 11 \arrow[l] \arrow[loop right]
\end{tikzcd}$$

Le chemin $00 \to 01 \to 10$ nous donne le mot 0010 dans lequel on trouve les mots de longueur 3 : 001 et 010.
Le circuit eulérien

$$00 \to 00 \to 01 \to 11 \to 11 \to 10 \to 01 \to 10 \to 00$$

nous donne le mot 0001110100 de longueur $p+n^p-1 = 3+2^3-1 = 10$ avec lequel on trouve les $n^p = 2^3 = 8$ mots de longueur 3 : 000, 001, 011, 111, 110, 101, 010, 100.

3. On construit le chemin en le prolongeant autant que possible.
   (a) On ne peut être bloqué en un sommet $S = s_1 s_2 s_3 \dots s_{p-2} s_{p-1}$ autre que $nn \dots n$. On arrive en effet n fois en S et on peut en repartir à chaque fois puisque $d^+(S) = d^-(S) = n$.
   (b) Si toutes les flèches partant d'un sommet sont utilisées, toutes les flèches y arrivant aussi. En effet, pour un sommet S autre que $nn \dots n$, si l'on utilise l'une des n flèches partant de S, c'est qu'on vient d'arriver par l'une des n flèches non encore utilisées auparavant arrivant à S. Pour le sommet $nn \dots n$, même raisonnement, la flèche partante utilisée au départ étant appariée avec la dernière flèche utilisée.
   (c) Quand on est bloqué, on est en $nn \dots n$. On a donc utilisé toutes les flèches partant de ce sommet, donc aussi toutes les flèches arrivant en $nn \dots n$. Ces flèches sont de la forme $xnn \dots n \to nn \dots n$ et sont les dernières utilisées en partant des sommets $xnn \dots n$, donc toutes les flèches partant de $xnn \dots n$ ont été utilisées, donc aussi toutes les flèches y arrivant. Ces flèches sont de la forme $yxnn \dots n \to xnn \dots n$ et sont les dernières utilisées en partant de $yxnn \dots n$, donc toutes les flèches partantes et arrivantes à ce sommet sont utilisées ...Or soit $S = s_1 s_2 s_3 \dots s_{p-2} s_{p-1}$ un sommet, il existe un chemin de S au mot $nn \dots n$ dont tous les mots (sauf S lui-même éventuellement) se terminent par n : $S = s_1 s_2 s_3 \dots s_{p-2} s_{p-1} \to s_2 s_3 \dots s_{p-2} s_{p-1} n \to s_3 \dots s_{p-2} s_{p-1} nn \to \dots nn \dots n$. En remontant ce chemin comme on vient de l'indiquer, on voit que les flèches de S ont toutes été utilisées.
   (d) Le chemin est donc un circuit eulérien.
   (e) Exemple de construction d'un tel circuit.
   Cherchons à écrire les mots de longueur 3 sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b, c, d\}$. Le graphe comporte $n^{p-1} = 4^2 = 16$ sommets. Un circuit eulérien a pour longueur $n^p = 64$. En le construisant sur le schéma ci-dessus : dd-da-aa-aa-ab-ba-aa-ac-ca-aa-ad-da-ab-bb-ba-ab-bc-ca-ab-bd-da-ac-cb-ba-ac-cc-ca-ac-cd-da-ad-db-ba-ad-dc-ca-ad-dd-db-bb-bb-bc-cb-bb-bd-db-bc-cc-cb-bc-cd-db-bd-dc-cb-bd-dd-dc-cc-cc-cd-dc-cd-dd-dd ce qui donne un mot de longueur $p+n^p-1 = 66$ sur lequel on peut lire les $n^p = 64$ mots de longueur 3 : ddaaabaacaadabbabcabdacbaccacdadbadcaddbbbcbbdbccbcdbdcbddcccdcddd.

■

Chapitre 6

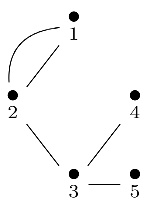
Matrices d'adjacence

6.1 Définition d'une matrice d'adjacence

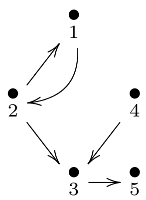
6.1.1 Matrice d'adjacence.

1. Matrice d'adjacence d'un graphe non orienté : on numérote les sommets de 1 à n, la matrice d'adjacence du graphe non orienté G ainsi "étiqueté" est alors la matrice définie par $a_{i,j}$ =nombre d'arêtes reliant les sommets i et j. Une telle matrice est nécessairement symétrique : $a_{i,j} = a_{j,i}$.
2. Matrice d'adjacence d'un graphe orienté : on numérote les sommets de 1 à n, la matrice d'adjacence du graphe orienté G ainsi "étiqueté" est alors la matrice définie par $a_{i,j}$ =nombre de flèches allant du sommet i vers le sommet j.

Exemple.



$$\text{Matrice d'adjacence : } A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



$$\text{Matrice d'adjacence : } A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

6.1.2 Lecture de matrice.

Que représente pour le graphe G, à n sommets et de matrice d'adjacence A, les nombres suivants : $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$, $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$, $\sum_{i,j} a_{i,j}$:

1. Pour un graphe non orienté ?
2. Pour un graphe orienté ?

Résolution.

1. $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}$ = degré(sommet i), $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$ = degré(sommet j), $\sum_{i,j} a_{i,j} = 2 \times$ nombre d'arêtes.
2. $\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = d^{+}$(sommet i) (c'est à dire nombre de flèches partant du sommet i), $\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} = d^{-}$(sommet j) (c'est à dire nombre de flèches arrivant au sommet j), $\sum_{i,j} a_{i,j}$ = nombre de flèches.

■

6.2 Quelques exercices

On propose dans ce paragraphe quelques exercices classiques en privilégiant une représentation matricielle des situations proposées. Les idées sont à peu près les mêmes que celles utilisées dans le chapitre 3, mais cette représentation matricielle (tableau à double entrée) est plus naturellement utilisée par un élève n'ayant pas encore entendu parler de graphes, ce peut donc être une entrée possible dans la découverte de la notion de graphe.

6.2.1 Dix filles et dix garçons.

10 filles et 10 garçons. Chaque fille connaît au moins trois garçons et chaque garçon connaît au plus trois filles (on suppose la relation de connaissance symétrique). Peut-on préciser ?

Résolution.

On associe au problème un graphe biparti : 20 sommets (10 sommets fille et 10 sommets garçon). Un sommet-fille est relié à un sommet-garçon ssi ils se connaissent. Numérotons les sommets-garçons de 1 à 10 et les sommets-filles de 11 à 20. La matrice d'adjacence est une matrice 20×20 de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & A_1 \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}$$

Les "0" sont des matrices 10×10 nulles (on ne se préoccupe pas ici des connaissances garçon-garçon ou fille-fille).

Chacune des dix lignes de A_1 contient un nombre de "1" égal au nombre de connaissances du sommet-garçon correspondant (donc au plus trois). Donc A_1 contient au plus $3 \times 10 = 30$ "1". Et chacune des dix lignes de A_2 contient un nombre de "1" égal au nombre de connaissances du sommet-fille correspondant (donc au moins trois). Donc A_2 contient au moins $3 \times 10 = 30$ "1". Mais la matrice A étant symétrique (matrice d'adjacence d'un graphe non orienté), A_1 et A_2 contiennent le même nombre de "1", soit 30 chacune et chaque fille connaît exactement 3 garçons.

■

6.2.2 aequo pogne.

Chaque matin les dix garçons de la Tes 2 échangent des poignées de mains. Montrer que chaque matin deux garçons serrent exactement le même nombre de mains (personne ne se serre la main ni ne serre plusieurs fois la même main, on ne tient compte que des poignées de mains échangées à l'intérieur de ce groupe de dix garçons).

Résolution.

Deux cas : au moins un élève ne serre aucune main ou aucun élève n'est à ce point isolé.

1. Au moins un élève ne serre aucune main.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0								
3	0		0							
4	0			0						
5	0				0					
6	0					0				
7	0						0			
8	0							0		
9	0								0	
10	0									0

   Si un deuxième élève est isolé alors les deux isolés ont serré le même nombre de mains (à savoir 0). Sinon, les 9 lignes non remplies doivent toutes contenir entre un et huit "1" (car chaque ligne n'a plus que huit cases vides) ...comme il n'y a que 8 possibilités pour 9 lignes, l'une des possibilités se répète.

2. Aucun garçon n'est isolé.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0									
2		0								
3			0							
4				0						
5					0					
6						0				
7							0			
8								0		
9									0	
10										0

   Il y a 9 cases vides par ligne, chaque ligne contient au moins un "1" donc en contient entre un et neuf. 9 possibilités pour dix lignes : l'une des possibilités se répète.

$\blacksquare$

6.2.3 Footballistique.

Un regroupement de sept villages tente de planifier les rencontres de leurs équipes de foot pour la prochaine saison. Les organisateurs décident que chaque équipe devra rencontrer trois équipes différentes exactement. Aidez les à organiser les rencontres.

Résolution.
On dresse un tableau à double entrée (matrice du graphe des rencontres). Si l'équipe C rencontre l'équipe B, on place une croix à l'intersection de la ligne C et de la colonne B et une croix à l'intersection de la ligne B et de la colonne C.

	A	B	C	D	E	F	G
A							
B			$\times$				
C		$\times$					
D							
E							
F							
G							

Dans tous les cas, on place donc un nombre pair de croix. Or pour que chaque équipe en rencontre trois autres, il nous faudrait placer un nombre impair de croix (7×3). Les contraintes imposées sont donc irréalisables.

$\blacksquare$

6.2.4 Epoux mano-aequo.

Monsieur et Madame Schmolldu assistent à une réunion. Il y a trois autres couples dans l'assistance. Monsieur Schmolldu constate que les sept autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts (les époux ne se serrent pas la main, personne ne serre plus d'une fois la main à une même personne, personne ne serre sa propre main). Quel est le nombre de mains serrées par Monsieur et Madame Schmolldu ?

Résolution.
On note $A^+, A^-, B^+, B^-, C^+, C^-, D^+, D^-$ les personnes présentes. On dresse la matrice d'adjacence en renseignant les cases au fur et à mesure :

	A^+	A^-	B^+	B^-	C^+	C^-	D^+	D^-
A^+	0	0						
A^-	0	0						
B^+			0	0				
B^-			0	0				
C^+					0	0		
C^-					0	0		
D^+							0	0
D^-							0	0

On constate que chaque ligne ne contient que six cases vides après la traduction de “les époux ne se serrent pas la main et personne ne serre sa propre main”. Comme “personne ne serre plus d’une fois la main à une même personne", ces cases vides seront remplies par des 0 ou des 1.
7 lignes doivent être remplies avec des nombres de 1 tous différents (traduction de “monsieur Schmolldu constate que les sept autres personnes ont échangé des poignées de mains en nombres tous distincts"). Comme il y a au plus 6 cases par ligne ces 7 nombres tous différents ne peuvent être que 0,1,2,3,4,5,6.
Une personne a donc serré 6 mains. Quitte à changer les noms, on peut supposer que c’est la personne A^+ :

	A^+	A^-	B^+	B^-	C^+	C^-	D^+	D^-
A^+	0	0	1	1	1	1	1	1
A^-	0	0						
B^+	1		0	0				
B^-	1		0	0				
C^+	1				0	0		
C^-	1				0	0		
D^+	1						0	0
D^-	1						0	0

On constate alors que $B^+, B^-, C^+, C^-, D^+, D^-$ ont tous au moins un 1 dans leur ligne. Or une personne a serré 0 main, ce ne peut être que le conjoint de A^+ :

	A^+	A^-	B^+	B^-	C^+	C^-	D^+	D^-
A^+	0	0	1	1	1	1	1	1
A^-	0	0	0	0	0	0	0	0
B^+	1	0	0	0				
B^-	1	0	0	0				
C^+	1	0			0	0		
C^-	1	0			0	0		
D^+	1	0					0	0
D^-	1	0					0	0

Une personne a serré 5 mains. Quitte à changer les noms, on peut supposer que c’est la personne B^+ :

	A^+	A^-	B^+	B^-	C^+	C^-	D^+	D^-
A^+	0	0	1	1	1	1	1	1
A^-	0	0	0	0	0	0	0	0
B^+	1	0	0	0	1	1	1	1
B^-	1	0	0	0				
C^+	1	0	1		0	0		
C^-	1	0	1		0	0		
D^+	1	0	1				0	0
D^-	1	0	1				0	0

On constate alors que C^+, C^-, D^+, D^- ont tous au moins deux 1 dans leur ligne. Or une personne a serré 1 main, ce ne peut être que le conjoint de B^+ :

	A^+	A^-	B^+	B^-	C^+	C^-	D^+	D^-
A^+	0	0	1	1	1	1	1	1
A^-	0	0	0	0	0	0	0	0
B^+	1	0	0	0	1	1	1	1
B^-	1	0	0	0	0	0	0	0
C^+	1	0	1	0	0	0		
C^-	1	0	1	0	0	0		
D^+	1	0	1	0			0	0
D^-	1	0	1	0			0	0

Une personne a serré 4 mains. Quitte à changer les noms, on peut supposer que c'est la personne C^+ :

	A^+	A^-	B^+	B^-	C^+	C^-	D^+	D^-
A^+	0	0	1	1	1	1	1	1
A^-	0	0	0	0	0	0	0	0
B^+	1	0	0	0	1	1	1	1
B^-	1	0	0	0	0	0	0	0
C^+	1	0	1	0	0	0	1	1
C^-	1	0	1	0	0	0		
D^+	1	0	1	0	1		0	0
D^-	1	0	1	0	1		0	0

On constate alors que D^+, D^- ont tous deux au moins trois 1 dans leur ligne. Or une personne a serré 2 mains, ce ne peut être que le conjoint de C^+, d'où la matrice d'adjacence du graphe des poignées de mains :

$$\begin{array}{c} \\ A^+ \\ A^- \\ B^+ \\ B^- \\ C^+ \\ C^- \\ D^+ \\ D^- \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} A^+ & A^- & B^+ & B^- & C^+ & C^- & D^+ & D^- \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Comme les 7 personnes autres que Schmolldu ont serré des nombres différents de mains, les époux Schmolldu sont D^+ et D^- et ont serré tous deux trois mains.

■

6.3 Carré de la matrice d'adjacence

6.3.1 Interprétation des coefficients

Que représente pour le graphe G, à n sommets et de matrice d'adjacence A, le nombre $\sum_k a_{i,k}a_{k,j}$ (c'est à dire le coefficent (i,j) de la matrice A^2).

1. Pour un graphe non orienté ?
2. Pour un graphe orienté ?

Résolution.

1. a_{ik} est le nombre d'arêtes liant les sommets i et k, a_{kj} est le nombre d'arêtes liant les sommets k et j, donc $a_{ik} \times a_{kj}$ est le nombre de façons d'aller du sommet i au sommet j en passant par k et $\sum_k a_{i,k}a_{k,j}$ est donc le nombre de chaînes de longueur 2 entre les sommets i et j.
2. a_{ik} est le nombre de flèches de i vers k, a_{kj} est le nombre de flèches de k vers j, donc $a_{ik} \times a_{kj}$ est le nombre de façons d'aller du sommet i au sommet j en passant par k (en respectant l'orientation des flèches) et $\sum_k a_{i,k}a_{k,j}$ est donc le nombre de chaînes (orientées) de longueur 2 du sommet i au sommet j.
Vocabulaire : dans un graphe orienté, on parle de chemin pour désigner une chaîne parcourue en respectant l'orientation des flèches : suite de sommets
$$(u_0, u_1, u_2, \cdots, u_q)$$
telle que (u_i, u_{i+1}) $(0 \le i \le q-1)$ est une flèche du graphe. On parle de circuit pour un cycle parcouru en respectant l'orientation des flèches : chemin $(u_0, u_1, u_2, \cdots, u_q)$ tel que $u_0 = u_q$.

■

6.3.2 Trace.

Soit G un graphe simple et A sa matrice d'adjacence.
Que représente trace(A^2) pour le graphe ?

Résolution.
Notons $b_{i,j}$ les coefficients de la matrice A^2 et $a_{i,j}$ ceux de la matrice A.

1. $b_{i,i}$ est le degré du sommet i. En effet $b_{i,i}$ est le nombre de chaînes de longueur 2 de i à i c'est à dire le nombre de chaînes du type $i - j - i$ où $j \neq i$.
trace(A^2) est donc la somme des degrés $\sum_{k=1}^{n} d(i)$, c'est à dire aussi le double du nombre d'arêtes.

2. Autre rédaction.

$$tr(A^2) = \sum_i b_{i,i} = \sum_i \left(\sum_j a_{i,j} a_{j,i} \right)$$

Mais $a_{i,j} = a_{j,i}$ donc

$$tr(A^2) = \sum_i \left(\sum_j a_{i,j}^2 \right)$$

Or $a_{i,j} = a_{i,j}^2$ puisque $a_{i,j} = 0$ ou 1. Donc

$$tr(A^2) = \sum_{i,j} a_{i,j}^2 = \sum_{i,j} a_{i,j} = 2 \times \text{Nb(arêtes)}.$$

■

6.3.3 Poignées de mains carrées.

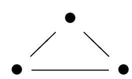
Dans une assemblée, certaines personnes se sont serré la main...et d'autres non (personne ne serre sa propre main, personne n'échange plusieurs poignées de mains avec une même personne). On suppose que la matrice d'adjacence A du graphe des poignées de mains a un carré de la forme :

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & \dots & 1 \\ 1 & k & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & k \end{pmatrix}$$

1. Que peut-on en déduire ? *(prolongement en 6.3.4)*
2. Donner un exemple de cette situation.

Résolution.

1. Entre deux sommets quelconques (distincts) il y a toujours exactement une chaîne de longueur 2, ce qui se traduit par "deux personnes quelconques (distinctes) ont serré exactement une main commune".
2. Comment traduire les k de la diagonale ? Cela signifierait qu'il y a exactement k chaînes de longueur 2 d'un sommet s à lui-même. Or une telle chaîne est nécessairement de la forme s-un voisin de s-s. Les k de la diagonale signifient donc que tous les sommets sont de degré k, c'est à dire que toute personne a serré exactement k mains.
3. Un exemple :



■

6.3.4 Le politicien aux mains sales mais aux valeurs propres

Dans une assemblée, certaines personnes se sont serré la main…et d'autres non. On suppose que deux personnes quelconques dans l'assemblée ont serré exactement une main commune. Montrer qu'il y a un politicien dans l'assemblée (c'est à dire une personne ayant serré la main à toute l'assemblée).

Résolution.

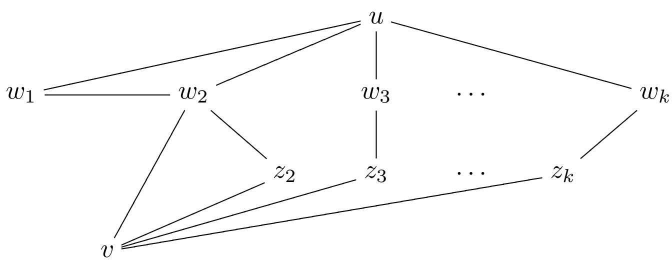
Formulation de l'énoncé équivalente : Soit G un graphe simple dans lequel entre deux sommets quelconques (distincts) il y a toujours exactement une chaîne de longueur 2. Alors un sommet de G est adjacent à tous les autres.

On raisonne par l'absurde. Supposons que G, à n sommets, soit un graphe pour lequel deux sommets quelconques (distincts) ont exactement un voisin commun et qu'il n'existe pas dans ce graphe de sommet adjacent à tous les autres.

On peut par ailleurs supposer $n \geq 4$ car avec $n = 2$ la condition "un ami commun" est impossible, et avec $n = 3$, le seul graphe possible est un triangle et il y a donc présence d'un politicien.

On peut aussi remarquer, avec 4.2.2, que n est nécessairement impair.

1. On démontre que deux sommets non adjacents ont même degré.
   (a) Soient u et v deux sommets non adjacents de G. Notons k le nombre de voisins de u et $w_1, w_2, \ldots, w_k$ ses voisins.
   (b) Comme u et v ont exactement un voisin commun, l'un des w_i et un seul est voisin de v. Quitte à renuméroter, on peut supposer que ce voisin est w_2. Par ailleurs, w_2 a exactement un voisin commun avec u donc est adjacent à un et un seul des $w_i, i \neq 2$. On peut supposer que c'est w_1.



   (c) v a un voisin commun avec chacun des w_i. Son voisin commun avec w_1 est w_2 et son voisin commun avec w_i $(i \geq 2)$ n'est pas un w_j (sinon cela ferait un voisin commun supplémentaire entre u et v). Son voisin commun avec w_i $(i \geq 2)$ n'est pas non plus u puisque u et v sont supposés non-adjacents. Notons z_i $(i \geq 2)$ le voisin commun de v et w_i. Les z_i $(i \geq 2)$ sont distincts, en effet si on avait $z_i = z_j$ alors on aurait un carré $\begin{array}{ccc} u & — & w_i \\ | & & | \\ w_j & - & z_i = z_j \end{array}$ ce qui n'est pas possible : dans un carré, deux sommets "opposés" ont deux voisins communs et non un.
   (d) v a donc au moins k voisins : $w_2, z_2, \ldots, z_k$. On a donc degré$(v) \geq$ degré(u).
   (e) Par symétrie des rôles : degré$(u) \geq$ degré(v), d'où degré$(v) =$ degré(u).

2. On démontre maintenant que G est un graphe régulier, c'est à dire que tous les sommets du graphe ont même degré.

   (a) Tout sommet distinct de w_2 n'est pas voisin soit de u, soit de v (en effet si u et v étaient ses voisins alors cela ferait un voisin commun de plus pour u et v). Le raisonnement du paragraphe précédent montre que ce sommet a même degré que u et v.

   (b) Il reste le cas de w_2 : il y a au moins un sommet t qui n'est pas adjacent à w_2 (puisque nous avons supposé que G est tel qu'il n'existe pas de sommet adjacent à tous les autres). Le paragraphe précédent montre encore que degré(w_2) = degré(t).

3. Lien entre le nombre n de sommets de G et k le degré commun des sommets.

   (a) La somme des degrés des k voisins $w_1, w_2, \dots, w_k$ de u est

$$\underbrace{k + k + \cdots + k}_{k \text{ termes}} = k^2$$

   (b) Chaque sommet distinct de u a exactement un sommet w_i commun avec u. Dans la somme précédente, les arêtes comptées aboutissent donc à chacun des sommets du graphe et chaque arête, sauf les k arêtes aboutissant à u, aboutit à un sommet différent (si une arête issue de w_i et une arête issue de w_j aboutissent au même sommet t alors $t = u$ puisque u est le seul voisin commun de w_i et w_j). En d'autres termes, la somme précédente compte exactement une fois chaque sommet, sauf u qui est compté k fois. On a donc : $n = k^2 - k + 1$.

   (c) On remarquera que $n = k^2 - k + 1$ et $n \geq 4$ impliquent $k \geq 3$.

4. Un peu d'algèbre linéaire.

   (a)

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} k & 1 & \dots & 1 \\ 1 & k & & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & k \end{pmatrix}$$

   Ce résultat est une conséquence de 6.3.1 : il y a exactement une chaîne de longueur 2 entre deux sommets distincts (c'est l'hypothèse de départ faite sur G) et le graphe étant régulier de degré k, il y a exactement k chaînes de longueur 2 d'un sommet s à lui-même (chaîne de la forme s-un voisin de s-s).

   (b) Valeurs propres de $\mathbf{A}^2$.

$$\mathbf{A}^2\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} kx_1 + x_2 + \cdots + x_n = \lambda x_1 \\ x_1 + kx_2 + \cdots + x_n = \lambda x_2 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + kx_n = \lambda x_n \end{array} \right.$$

D'où

$$\mathbf{A}^2\mathbf{X} = \lambda\mathbf{X} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (\lambda - k + 1)x_1 \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + x_n = (\lambda - k + 1)x_n \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x_1 = x_2 = \cdots = x_n, \lambda - k + 1 = n) \\ ou \\ (x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \lambda - k + 1 = 0) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x_1 = x_2 = \cdots = x_n, \lambda = n + k - 1) \\ ou \\ (x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \lambda = k - 1) \end{array} \right.$$

Les valeurs propres de $\mathbf{A}^2$ sont donc $n+k-1$ et $k-1$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre $k-1$ est l'hyperplan d'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. $\mathbf{A}^2$ est donc diagonalisable avec les valeurs propres $n+k-1$ (de multiplicité 1) et $k-1$ (de multiplicité $n-1$). On remarquera de plus que $n+k-1 = k^2$ avec le lien entre n et k $(n = k^2 - k + 1)$.

(c) Valeurs propres de $\mathbf{A}$.
$\mathbf{A}$ est diagonalisable car symétrique (comme toute matrice d'adjacence d'un graphe non orienté). $\mathbf{A}$ s'écrit donc $\mathbf{PDP}^{-1}$ où

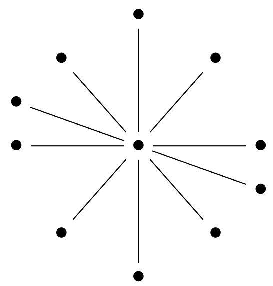
$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

On a donc $\mathbf{A}^2 = \mathbf{PDP}^{-1}\mathbf{PDP}^{-1} = \mathbf{PD}^2\mathbf{P}^{-1}$. Les valeurs propres de $\mathbf{A}^2$ sont donc $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \ldots, \lambda_n^2$. $\mathbf{A}$ a donc pour valeurs propres $\pm k$ (multiplicité 1) et $\pm\sqrt{k-1}$ (multiplicité $n-1$).

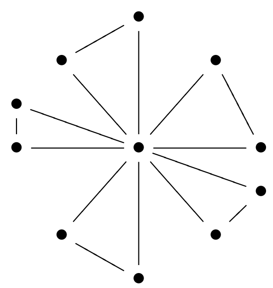
5. Un peu d'arithmétique.
   (a) Notons p le nombre de valeurs propres de $\mathbf{A}$ égales à $\sqrt{k-1}$ et m le nombre de valeurs propres de $\mathbf{A}$ égales à $-\sqrt{k-1}$ $(p + m = n - 1)$.
   (b) La diagonale de $\mathbf{A}$ étant constituée de 0 (une personne ne se serrant pas la main à elle-même), la trace de $\mathbf{A}$ est 0. Donc $\pm k + p\sqrt{k-1} - m\sqrt{k-1} = 0$. En particulier, k étant non nul, on a $p \neq m$. On en déduit que $\sqrt{k-1} = \pm\frac{k}{m-p}$.
   (c) Or la racine d'un entier est entière ou irrationnelle. Donc $\sqrt{k-1}$ est un entier t.
   (d) $t = \sqrt{k-1}$, ou encore $t^2 = k-1$, soit $k = t^2 + 1$. Et $t = \pm\frac{k}{m-p}$, donc $t \times |m-p| = k = t^2 + 1$.
   (e) $t \times |m-p| = t^2 + 1$, donc t divise $t^2 + 1$. Comme t divise t^2 et $t^2 + 1$, t divise $(t^2 + 1) - (t^2) = 1$, on en déduit que $t = 1$ et donc $k = 2$.
6. Mais $k = 2$ est exclu (on a $k \geq 3$). On a enfin une contradiction et la nécessité de la présence d'un politicien.

■

Construction d'un graphe G satisfaisant la condition du théorème.
On commence par traduire l'existence d'un politicien :



On cherche ensuite à imposer la condition "exactement une main serrée commune pour deux personnes données". On obtient un graphe en "moulin à vent" :



6.4 Puissances de la matrice d'adjacence

6.4.1 Nombre de chaînes de longueur donnée.

1. Soit A la matrice d'adjacence du graphe (non orienté) G. Etablir que le coefficient à l'intersection de la ligne i et de la ligne j de la matrice A^k ($k \in \mathbb{N}^*$) est le nombre de chaînes de longueur k reliant le sommet i au sommet j.
2. Soit A la matrice d'adjacence du graphe orienté G. Etablir que le coefficient à l'intersection de la ligne i et de la ligne j de la matrice A^k ($k \in \mathbb{N}^*$) est le nombre de chaînes orientées de longueur k allant du sommet i au sommet j.

Résolution.
Par récurrence sur k.

1. Pour $k = 1$, la propriété est évidemment vérifiée (cf définition de la matrice d'adjacence).
2. Soit $k \geq 1$ un entier pour lequel on suppose que le coefficient d'indice (i, j) (que l'on notera $a_{i,j}^{(k)}$) de A^k est le nombre de chaînes (resp chaînes orientées) de longueur k allant du sommet i au sommet j.

Une chaîne de i à j de longueur $k+1$ est une chaîne de i à un sommet v de longueur k suivie d'une arête (resp flèche) de v à j. Le nombre de chaînes de i au sommet v de longueur k est, par hypothèse de récurrence, $a_{i,v}^{(k)}$ et le nombre d'arêtes (resp flèches) de v à j est $a_{v,j}^{(1)} = a_{v,j}$. Il y a donc $a_{i,v}^{(k)} \times a_{v,j}$ chaînes de i à j de longueur $k+1$ se terminant par $v \longrule j$ (resp $v \longrightarrow j$).
Le nombre total de chaînes de i à j de longueur $k+1$ est donc

$$\sum_{v=1}^{n} a_{i,v}^{(k)} \times a_{v,j}$$

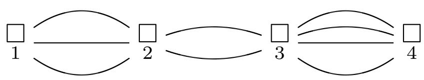
(où n est le nombre de sommets du graphe) or

$$\sum_{v=1}^{n} a_{i,v}^{(k)} \times a_{v,j} = a_{i,j}^{(k+1)}.$$

■

6.4.2 Un piéton sur un pont.

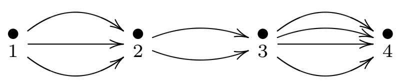
1. Un piéton se promène de la rive gauche (1) vers la rive droite (4) en passant par les deux petites îles (2 et 3) et en empruntant les ponts au hasard. Quel est le nombre total de trajets possibles ?



2. Il se promène maintenant en empruntant les ponts au hasard, en faisant éventuellement demi-tour ...De combien de façons peut-il aller de la rive droite à la rive gauche en empruntant exactement 10 ponts (avec éventuelles répétitions de ponts) ? et avec exactement 11 ponts ?

Résolution.

1. *Il suffit bien sûr de calculer* $3 \times 2 \times 4$, *la simplicité de la situation peut peut-être éclairer en partie un élève sur le pourquoi du résultat matriciel.*
Le piéton se déplaçant dans le sens rive gauche→rive droite, la question se reformule en : "nombre de chaînes orientées de 1 à 4 sur le graphe orienté ci-dessous ?"



Soit A la matrice d'adjacence du graphe : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

et $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
et A^4 est la matrice nulle, d'où le résultat : 24 possibilités.

2. La matrice d'adjacence est maintenant :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 0 & 7295511 & 0 & 8752920 \\ 7295511 & 0 & 16534234 & 0 \\ 0 & 16534234 & 0 & 19939088 \\ 8752920 & 0 & 19939088 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a donc 8752920 façons d'aller de la rive gauche à la rive droite en empruntant 11 ponts. Pour 10 ponts, le calcul de A^{10} est inutile, le problème est impossible pour des raisons de parité : pour aller de la rive gauche à la droite, il faut en effet traverser 3 ponts et faire en plus des allers-retours (nombre pair de ponts) entre deux points de terre or pair+impair donne impair.

$$A^{10} = \begin{pmatrix} 973017 & 0 & 2188230 & 0 \\ 0 & 2431837 & 0 & 2917640 \\ 2188230 & 0 & 4984772 & 0 \\ 0 & 2917640 & 0 & 3525952 \end{pmatrix}$$

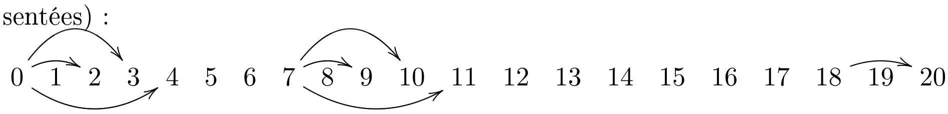
■

6.4.3 Montée d'escalier.

Lorsque Maxime monte dans sa chambre, il "avale" entre 2 et 4 marches à la fois. Sachant que l'escalier a 20 marches, de combien de façons peut-il l'escalader ?

Résolution.

On associe au problème le graphe suivant (où seules quelques flèches sont représentées) :



0 est le palier, les sommets 1 à 20 les marches.

1. Le nombre de "pas" de Maxime est d'au plus 10 puisqu'il n'y a que 20 marches et que Maxime monte au moins 2 marches à la fois. Par ailleurs, il lui faut au moins 5 pas puisqu'il monte au plus 4 marches à la fois.
   Le nombre d'escalades possibles est donc $\sum_{k=5}^{10} \left(A^k\right)_{1,21}$.
   Avec MAPLE :
```
with(linalg) ;
escalier :=proc(n)
local A,Nb,i,j,L,N ;
N :=matrix(n+1,n+1,0) ;
A :=matrix(n+1,n+1,0) ;
for i from 0 to n-1 do for j from 2 to 4 do
if i+j<=n then A[i+1,i+1+j] :=1 ;fi ;od ;od ;
L :=[eval(A)] ;
```

```
for i from 2 while not(equal(eval(L[i-1]),eval(N))) do
L :=[op(L),multiply(eval(A),eval(L[i-1]))] ;od ;
Nb :=0 ;
for i from 1 to nops(L) do Nb :=Nb+L[i][1,n+1] ;od ;
print(Nb) ;
end ;
```

`escalier(20)` donne 760 façons de monter l'escalier.

2. Calcul pas à pas.

0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{1}	5_{0}	6_{0}	7_{0}	8_{0}	9_{0}	10_{0}	11_{0}	12_{0}	13_{0}	14_{0}	15_{0}	16_{0}	17_{0}	18_{0}	19_{0}	20_{0}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{1}	6_{1}	7_{0}	8_{0}	9_{0}	10_{0}	11_{0}	12_{0}	13_{0}	14_{0}	15_{0}	16_{0}	17_{0}	18_{0}	19_{0}	20_{0}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{2}	7_{1}	8_{0}	9_{0}	10_{0}	11_{0}	12_{0}	13_{0}	14_{0}	15_{0}	16_{0}	17_{0}	18_{0}	19_{0}	20_{0}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{4}	7_{3}	8_{2}	9_{0}	10_{0}	11_{0}	12_{0}	13_{0}	14_{0}	15_{0}	16_{0}	17_{0}	18_{0}	19_{0}	20_{0}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{4}	7_{5}	8_{4}	9_{2}	10_{0}	11_{0}	12_{0}	13_{0}	14_{0}	15_{0}	16_{0}	17_{0}	18_{0}	19_{0}	20_{0}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{4}	7_{5}	8_{8}	9_{6}	10_{4}	11_{0}	12_{0}	13_{0}	14_{0}	15_{0}	16_{0}	17_{0}	18_{0}	19_{0}	20_{0}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{4}	7_{5}	8_{8}	9_{11}	10_{9}	11_{5}	12_{0}	13_{0}	14_{0}	15_{0}	16_{0}	17_{0}	18_{0}	19_{0}	20_{0}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{4}	7_{5}	8_{8}	9_{11}	10_{17}	11_{13}	12_{8}	13_{0}	14_{0}	15_{0}	16_{0}	17_{0}	18_{0}	19_{0}	20_{0}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{4}	7_{5}	8_{8}	9_{11}	10_{17}	11_{24}	12_{19}	13_{11}	14_{0}	15_{0}	16_{0}	17_{0}	18_{0}	19_{0}	20_{0}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{4}	7_{5}	8_{8}	9_{11}	10_{17}	11_{24}	12_{36}	13_{28}	14_{17}	15_{0}	16_{0}	17_{0}	18_{0}	19_{0}	20_{0}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{4}	7_{5}	8_{8}	9_{11}	10_{17}	11_{24}	12_{36}	13_{52}	14_{41}	15_{24}	16_{0}	17_{0}	18_{0}	19_{0}	20_{0}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{4}	7_{5}	8_{8}	9_{11}	10_{17}	11_{24}	12_{36}	13_{52}	14_{77}	15_{60}	16_{36}	17_{0}	18_{0}	19_{0}	20_{0}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{4}	7_{5}	8_{8}	9_{11}	10_{17}	11_{24}	12_{36}	13_{52}	14_{77}	15_{112}	16_{88}	17_{52}	18_{0}	19_{0}	20_{0}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{4}	7_{5}	8_{8}	9_{11}	10_{17}	11_{24}	12_{36}	13_{52}	14_{77}	15_{112}	16_{165}	17_{129}	18_{77}	19_{0}	20_{0}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{4}	7_{5}	8_{8}	9_{11}	10_{17}	11_{24}	12_{36}	13_{52}	14_{77}	15_{112}	16_{165}	17_{241}	18_{189}	19_{112}	20_{0}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{4}	7_{5}	8_{8}	9_{11}	10_{17}	11_{24}	12_{36}	13_{52}	14_{77}	15_{112}	16_{165}	17_{241}	18_{354}	19_{277}	20_{165}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{4}	7_{5}	8_{8}	9_{11}	10_{17}	11_{24}	12_{36}	13_{52}	14_{77}	15_{112}	16_{165}	17_{241}	18_{354}	19_{518}	20_{406}
0	1_{0}	2_{1}	3_{1}	4_{2}	5_{2}	6_{4}	7_{5}	8_{8}	9_{11}	10_{17}	11_{24}	12_{36}	13_{52}	14_{77}	15_{112}	16_{165}	17_{241}	18_{354}	19_{518}	20_{760}

3. Relation de récurrence :

$$u_n = u_{n-2} + u_{n-3} + u_{n-4}$$

Le programme de spécialité en terminale ES demande pour les suites définies par une relation de récurrence "avant tout de comprendre la genèse de telles suites, d'en calculer les premiers termes à la main, à la calculatrice, au tableur". Un problème tel que celui de l'escalier pourrait donc être utilisé en liaison des deux chapitres.

■

6.4.4 Déplacements à pas Nord-Est

Nombre de chaînes orientées de A à B ?

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & B \\
\bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \\
\bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \\
A \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Résolution.
Numérotation des sommets pour définir la matrice d'adjacence :

$$\begin{tikzcd}
9 \arrow[r] & 11 \arrow[r] & B = 12 \\
6 \arrow[u] \arrow[r] & 8 \arrow[u] \arrow[r] & 10 \arrow[u] \\
3 \arrow[u] \arrow[r] & 5 \arrow[u] \arrow[r] & 7 \arrow[u] \\
A = 1 \arrow[u] \arrow[r] & 2 \arrow[u] \arrow[r] & 4 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Matrice d'adjacence :

$$A = \begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Les chaînes orientées de A à B ont pour longueur 5 (dans un repère $\left(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$: $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$) et

$$A^5 = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&10 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

On obtient le résultat également en additionnant les nombres de chemins arrivant à un sommet. Un seul chemin pour les sommets suivants :
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & B \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \\ \underset{0}{A} \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Deux chemins :
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & B \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & 2 \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \\ \underset{0}{A} \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Trois chemins :
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & B \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & 3 \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & 2 \arrow[u] \arrow[r] & 3 \arrow[u] \\ \underset{0}{A} \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Puis :
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & B \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & 3 \arrow[u] \arrow[r] & 6 \arrow[u] \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & 2 \arrow[u] \arrow[r] & 3 \arrow[u] \\ \underset{0}{A} \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

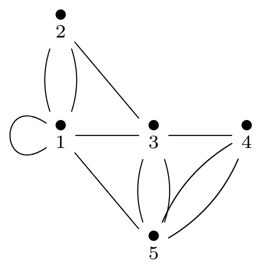
et enfin :
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 4 \arrow[r] & \underset{10}{B} \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & 3 \arrow[u] \arrow[r] & 6 \arrow[u] \\ 1 \arrow[u] \arrow[r] & 2 \arrow[u] \arrow[r] & 3 \arrow[u] \\ \underset{0}{A} \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u] \arrow[r] & 1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Une méthode classique : on compte les mots de 5 lettres contenant 2 fois la lettre E (est) et 3 fois la lettre N (nord), c'est le nombre de façons de choisir les 2 places de la lettre E parmi les cinq places possibles : $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$

■

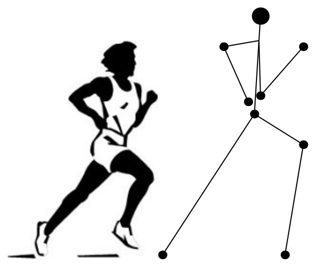
6.4.5 Parcours santé.

Le plan du parcours santé de Graftown est le suivant :



Chaque arc du plan représente un chemin de 250 mètres.

1. Combien de parcours de 1 km du point 1 au point 1 peut-on faire (les allers-retours sont permis) ?
2. Duschmoll part du point 1 et arrête sa course au même point. Il court chaque jour 5 km. Il veut faire un parcours différent tous les jours. Pendant combien de jours peut-il respecter cette contrainte ?



Résolution.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Remarque : $A_{1,1} = 2$, notre coureur peut en effet aller de 1 à 1 par la boucle dans un sens ou dans l'autre ...

Ceci donne par exemple 10 parcours de 500 m de 1 à 1 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 6 & 3 & 4 \\ 5 & 5 & 2 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 7 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 40 & 26 & 26 & 14 & 28 \\ 26 & 12 & 19 & 10 & 11 \\ 26 & 19 & 18 & 13 & 28 \\ 14 & 10 & 13 & 8 & 21 \\ 28 & 11 & 28 & 21 & 14 \end{pmatrix} \text{ et } \left(A^4\right)_{1,1} = 186.$$

On peut donc parcourir 1 km du point 1 au point 1 de 186 manières distinctes.

Un parcours du point 1 au point 1 de 5 km est un parcours fermé de 1 à 1 empruntant 20 arêtes (les arêtes pouvant être répétées).
Et $\left(A^{20}\right)_{1,1} = 9440120737696\ldots$bref, notre homme sera mort avant l'épuisement des cas.

■

6.5 Version matricielle de quelques propriétés

6.5.1 Distance entre deux sommets

Soit G un graphe simple dont on a numéroté les sommets $1, 2, \ldots, n$, s et t deux sommets distincts. La distance de s à t est (définition) la longueur de la plus courte chaîne de s à t. Si A est la matrice d'adjacence du graphe G :

$$\text{distance}(s,t) = \min\left\{k; a_{s,t}^{(k)} \neq 0\right\}$$

où $a_{s,t}^{(k)}$ est le coefficient d'indice (s,t) de A^k.

Preuve.
C'est une conséquence immédiate de 6.4.1.

■

6.5.2 Connexité

Comment vérifier la connexité d'un graphe simple à l'aide de sa matrice d'adjacence ?

Résolution.
n étant le nombre de sommets du graphe, vérifier que la matrice $C = I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ n'a aucun coefficient nul.
En effet $\left(A^k\right)_{i,j}$ donnant le nombre de chaînes de longueur k du sommet i au sommet j,

$$\left(I + A + A^2 + \cdots + A^k\right)_{i,j}$$

donne le nombre de chaînes de longueur au plus k du sommet i au sommet j.
Comme dans un graphe simple, les longueurs de chaîne élémentaire ne sauraient dépasser $n-1$, l'absence de 0 dans $I + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$ indique qu'il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques.

■

6.5.3 Sans circuit et nilpotence.

1. Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe orienté G. Etablir que G est sans circuit ssi la matrice A est nilpotente (c'est à dire : il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0$).
2. Soit A la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté ayant au moins une arête. Etablir que A n'est pas nilpotente.

Résolution.

1. Si le graphe est sans circuit, les chaînes orientées dans un graphe de n sommets ont une longueur d'au plus $n-1$. Donc $A^n = 0$.
   Si le graphe a des circuits, il existe des chaînes aussi longues qu'on veut et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $A^k \neq 0$.
2. La matrice d'adjacence A d'un graphe non orienté peut être considérée comme la matrice d'adjacence d'un graphe orienté. On passe du graphe non orienté au graphe orienté en transformant : $\bullet\!\longrightarrow\!\bullet$ en $\bullet \rightleftarrows \bullet$. A est alors associée à un graphe orienté ayant des circuits.

∎

6.5.4 Triangle

1. *Dans un graphe simple G, on appelle triangle un sous-graphe isomorphe au graphe complet K_3*

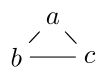
   

   Déterminer le nombre de triangles dans un graphe simple G à l'aide de sa matrice d'adjacence.
2. Soit n un entier ($n \geq 3$), établir sans calcul que :

$$\frac{1}{6}\text{trace}\left(\mathcal{K}_{2n}^3\right) - \frac{1}{3}\text{trace}\left(\mathcal{K}_n^3\right) = \binom{2n}{3} - 2\binom{n}{3}$$

   où $\mathcal{K}_p$ est la matrice $p \times p$ dont les coefficients diagonaux sont nuls et dont tous les autres coefficients valent 1.

Résolution.

1. Un triangle 

   se traduit par 2 chaînes de longueur 3 de a à a : a, b, c, a et a, c, b, a. Ce même triangle donne lieu également à deux chaînes de longueur 3 de b à b et deux chaînes de longueur 3 de c à c.
   Le calcul de trace(A^3) donne donc 6 fois le nombre de triangles.
   Nombre de triangles$=\frac{1}{6}$trace(A^3)

2. Dans le plan, on considère les $2n$ points :

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \text{ligne 1 de n points}$$

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \cdots \quad \text{ligne 2 de n points}$$

Quel est le nombre de triangles (géométriques, non aplatis) que l'on peut tracer en utilisant ces $2n$ points ?
- On peut former $\binom{2n}{3}$ triangles en admettant les triangles aplatis et $\binom{2n}{3} - 2\binom{n}{3}$ triangles en refusant les aplatis.
- La matrice d'adjacence du graphe complet K_{2n} est la matrice $\mathcal{K}_{2n}$ et la matrice d'adjacence du graphe complet K_n est la matrice $\mathcal{K}_n$, de sorte que le nombre de triangles (sous-graphes isomorphes à K_3) est $\frac{1}{6}\text{trace}\left(\mathcal{K}_{2n}^3\right)$, et en refusant les "aplatis" $\frac{1}{6}\text{trace}\left(\mathcal{K}_{2n}^3\right) - \frac{1}{3}\text{trace}\left(\mathcal{K}_n^3\right)$.
- Et en représentant les arêtes par des segments, on peut "confondre" les deux types de triangles.
- Remarque : les deux membres sont faciles à calculer et valent $n^3 - n^2$.

■

6.5.5 Carré

Soit G un graphe simple de sommets $1, 2, \ldots, n$, ayant a arêtes et de matrice d'adjacence A.
Etablir que le nombre de carrés (c'est à dire de cycles élémentaires de longueur 4) est donné par la formule :

$$\frac{1}{8}\left(trace\left(A^4\right) - 2a - 4\sum_{i=1}^{n}\binom{\text{degré}(i)}{2}\right)$$

(où le coefficient binomial $\binom{m}{k}$ vaut 0 lorsque $m < k$).
Résolution.
Le coefficient $a_{j,j}^{(4)}$ de la diagonale de A^4 est le nombre de chaînes de longueur 4 du sommet j au sommet j.
Parmi ces chaînes on compte, dans $trace\left(A^4\right)$, les chaînes n'utilisant qu'une seule arête, c'est à dire de la forme $j \overset{e}{-} k \overset{e}{-} j \overset{e}{-} k \overset{e}{-} j$. A chaque arête e du graphe, on peut associer deux telles chaînes de longueur 4 : $j \overset{e}{-} k \overset{e}{-} j \overset{e}{-} k \overset{e}{-} j$ et $k \overset{e}{-} j \overset{e}{-} k \overset{e}{-} j \overset{e}{-} k$. D'où le terme $-2a$.
On compte aussi les chaînes n'utilisant que deux arêtes, incidentes en un sommet j (d'où le coefficient $\binom{\text{degré}(j)}{2}$). Pour deux arêtes e et e' incidentes au sommet j (et ayant les sommets k et k' respectivement pour autre extrémité), on peut associer quatre chaînes de longueur 4 : $j \overset{e}{-} k \overset{e}{-} j \overset{e'}{-} k' \overset{e'}{-} j$ et $j \overset{e'}{-} k' \overset{e'}{-} j \overset{e}{-} k \overset{e}{-} j$, mais aussi $k \overset{e}{-} j \overset{e'}{-} k' \overset{e'}{-} j \overset{e}{-} k$ et $k' \overset{e'}{-} j \overset{e}{-} k \overset{e}{-} j \overset{e'}{-} k'$. D'où le terme $-4\sum_{i=1}^{n}\binom{\text{degré}(i)}{2}$.
Les seules autres chaînes de longueur 4 sont les cycles élémentaires cherchés, comptés chacun huit fois dans $trace\left(A^4\right)$ (une fois dans chaque "sens" de parcours du cycle pour chacun des quatre sommets).

■

Chapitre 7

Introduction aux chaînes de Markov

7.1 Graphe probabiliste

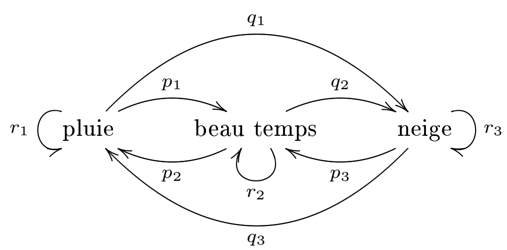
7.1.1 Définition d'un graphe probabiliste

Un graphe probabiliste est un graphe orienté dont on pondère les flèches tel que :

1. il y a au plus une flèche d'un sommet vers un autre*(en général, dans un graphe probabiliste, on omet les flèches de poids nul).*
2. tous les poids sont positifs,
3. la somme des poids des flèches partant d'un sommet donné vaut 1.

7.1.2 Le temps d'Oz

Dans le pays d'Oz, le temps est soit pluvieux, soit beau, soit neigeux. Si le temps est dans un certain état, il sera le lendemain dans un des trois états avec une probabilité représentée sur le dessin :



Le problème est bien sûr l'évolution du temps qui correspond à une promenade aléatoire sur le graphe. On peut associer à ce graphe pondéré une matrice stochastique *(matrice stochastique : tous les éléments de la matrice sont des nombres* *compris entre 0 et 1 et sur chaque ligne la somme des éléments vaut 1)* :

$$T = \begin{array}{c} \\ pluie \\ soleil \\ neige \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} pluie & soleil & neige \end{array} \\ \begin{pmatrix} r_1 & p_1 & q_1 \\ p_2 & r_2 & q_2 \\ q_3 & p_3 & r_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

7.2 Chaîne de Markov

7.2.1 Définition d'une chaîne de Markov

1. Une chaîne de Markov est une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur un même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathcal{E}$ espace des états (qu'on supposera fini) telle que pour tout $(i_0, i_1, \ldots, i_{n-1}, i, j) \in \mathcal{E}^{n+2}$:

$$P\left(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0\right) = P\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right)$$

   En d'autres termes, le futur (temps $n+1$) ne dépend que du présent (temps n) et non du passé. On dit aussi que le processus est sans mémoire.

2. La chaîne de Markov est dite homogène si $P\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right)$ ne dépend pas de n. Le réel $p_{i,j} = P\left(X_{n+1} = j | X_n = i\right) = P\left(X_1 = j | X_0 = i\right)$ est alors appelé probabilité de transition de l'état i à l'état j (en une étape).

7.2.2 Matrice de transition

1. Pour une chaîne de Markov homogène à r états (on identifie l'espace des états à $\mathcal{E} = \{1, 2, \ldots, r\}$), la matrice $T = (p_{i,j})_{1\leq i,j\leq r}$ est appelée matrice de transition de la chaîne.
2. La matrice de transition est une matrice stochastique. On peut donc lui associer un graphe probabiliste dont les sommets sont les états et la flèche de l'état i à l'état j est pondérée par la probabilité de transition $p_{i,j}$.

Justification.
Pour un numéro de ligne i fixé :

$$\sum_{j\in\mathcal{E}} p_{i,j} = \sum_{j\in\mathcal{E}} P_{(X_0=i)}\left(X_1 = j\right) = P_{(X_0=i)}\left(X_1 \in \mathcal{E}\right) = 1$$

■

7.2.3 Valeur propre

Le réel 1 est une valeur propre de la matrice de transition d'une chaîne de Markov homogène.

Preuve.
Il suffit de remarquer que le vecteur $(1, 1, \ldots, 1)$ est un vecteur propre associé à

la valeur propre 1. En effet si $T = (p_{i,j})_{i,j}$, on a :

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_j p_{1,j} \\ . \\ . \\ . \\ \sum_j p_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}$$

(On peut démontrer que toutes les valeurs propres ont un module inférieur ou égal à 1)

■

7.3 Puissances de la matrice de transition

7.3.1 La relation de Chapman-Kolmogorov

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène et $T = (p_{i,j})_{1\leq i,j\leq r}$ sa matrice de transition.
On pose $p_{i,j}^{(n)} = P_{(X_0=i)}(X_n = j)$ la probabilité d'être dans l'état j à l'instant n sachant que l'on est dans l'état i à l'instant 0 (probabilité de transition de l'état i à l'état j en n étapes).
On note $T^{(n)}$ la matrice $T^{(n)} = \left(p_{i,j}^{(n)}\right)_{1\leq i,j\leq r}$.
On a (relation de Chapman-Kolmogorov) : $T^{(n)} = T^n$.
Preuve.
Le résultat est évidemment vérifié pour $n = 1$: $T^{(1)} = T$.
Pour $n = 2$. Notons $T_{i,j}^{[2]}$ les coefficients de la matrice T^2.

$$T_{i,j}^{[2]} = \sum_{k\in\mathcal{E}} p_{i,k}p_{k,j} = \sum_{k\in\mathcal{E}} P_{(X_0=i)}(X_1 = k)P_{(X_0=k)}(X_1 = j)$$

d'où

$$T_{i,j}^{[2]} = \sum_{k\in\mathcal{E}} P_{(X_0=i)}(X_1 = k)P_{(X_1=k)}(X_2 = j)$$

puisque la chaîne est homogène. Soit

$$T_{i,j}^{[2]} = \sum_{k\in\mathcal{E}} P_{(X_0=i)}(X_1 = k)P_{(X_1=k) \text{ et } (X_0=i)}(X_2 = j)$$

puisque la chaîne est sans mémoire. On a donc :

$$T_{i,j}^{[2]} = \sum_{k\in\mathcal{E}} \frac{P(X_1 = k \text{ et } X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \times \frac{P(X_2 = j \text{ et } X_1 = k \text{ et } X_0 = i)}{P(X_1 = k \text{ et } X_0 = i)}$$

$$T_{i,j}^{[2]} = \sum_{k\in\mathcal{E}} \frac{P(X_2 = j \text{ et } X_1 = k \text{ et } X_0 = i)}{P(X_0 = i)}$$

d'où

$$T_{i,j}^{[2]} = \frac{P(X_2 = j \text{ et } X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = P(X_2 = j|X_0 = i)$$

puisque les événements $(X_1 = k)_{k\in\mathcal{E}}$ partitionnent l'univers, et cette dernière égalité s'écrit aussi : $T_{i,j}^{[2]} = T_{i,j}^{(2)}$.

Supposons la relation vérifiée pour $n-1$, $n \geq 3$. On a : $T^n = T^{n-1} \times T = T^{(n-1)} \times T$, soit :

$$T_{i,j}^{[n]} = \sum_{k \in \mathcal{E}} p_{i,k}^{(n-1)} p_{k,j} = \sum_{k \in \mathcal{E}} P\left(X_{n-1} = k | X_0 = i\right) P\left(X_1 = j | X_0 = k\right)$$

$$T_{i,j}^{[n]} = \sum_{k \in \mathcal{E}} P\left(X_{n-1} = k | X_0 = i\right) P\left(X_n = j | X_{n-1} = k\right)$$

puisque la chaîne est homogène.

$$T_{i,j}^{[n]} = \sum_{k \in \mathcal{E}} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}} P\left(X_{n-1} = k \text{ et } X_{n-2} = i_{n-2} \text{ et } \ldots \text{ et } X_1 = i_1 | X_0 = i\right) P\left(X_n = j | X_{n-1} = k\right)$$

puisque les événements $\left(X_{n-2} = i_{n-2} \text{ et } \ldots \text{ et } X_1 = i_1\right)_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}}$ partitionnent l'univers. Et

$$\begin{aligned} T_{i,j}^{[n]} = & \sum_{k \in \mathcal{E}} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}} P\left(X_{n-1} = k \text{ et } X_{n-2} = i_{n-2} \text{ et } \ldots \text{ et } X_1 = i_1 | X_0 = i\right) \\ \times & \quad P\left(X_n = j | X_{n-1} = k \text{ et } X_{n-2} = i_{n-2} \text{ et } \ldots \text{ et } X_1 = i_1 \text{ et } X_0 = i\right) \end{aligned}$$

puisque la chaîne est sans mémoire. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} T_{i,j}^{[n]} = & \sum_{k \in \mathcal{E}} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}} \frac{P\left(X_{n-1} = k \text{ et } X_{n-2} = i_{n-2} \text{ et } \ldots \text{ et } X_1 = i_1 \text{ et } X_0 = i\right)}{P\left(X_0 = i\right)} \\ \times & \quad \frac{P\left(X_n = j \text{ et } X_{n-1} = k \text{ et } X_{n-2} = i_{n-2} \text{ et } \ldots \text{ et } X_1 = i_1 \text{ et } X_0 = i\right)}{P\left(X_{n-1} = k \text{ et } X_{n-2} = i_{n-2} \text{ et } \ldots \text{ et } X_1 = i_1 \text{ et } X_0 = i\right)} \end{aligned}$$

d'où $T_{i,j}^{[n]} =$

$$\sum_{k \in \mathcal{E}} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_{n-2}} \frac{P\left(X_n = j \text{ et } X_{n-1} = k \text{ et } X_{n-2} = i_{n-2} \text{ et } \ldots \text{ et } X_1 = i_1 \text{ et } X_0 = i\right)}{P\left(X_0 = i\right)}$$

soit (partition de l'univers)

$$T_{i,j}^{[n]} = \sum_{k \in \mathcal{E}} \frac{P\left(X_n = j \text{ et } X_{n-1} = k \text{ et } X_0 = i\right)}{P\left(X_0 = i\right)}$$

et (encore un système complet d'événements) :

$$T_{i,j}^{[n]} = \frac{P\left(X_n = j \text{ et } X_0 = i\right)}{P\left(X_0 = i\right)}$$

c'est à dire enfin

$$T_{i,j}^{[n]} = P\left(X_n = j | X_0 = i\right) = T_{i,j}^{(n)}$$

■

7.3.2 Distribution de probabilité

Identifions l'espace $\mathcal{E}$ des états à $\mathcal{E} = \{1, 2, \ldots, r\}$.
Notons $\mu_0 = (P(X_0 = 1), P(X_0 = 2), \ldots, P(X_0 = r-1), P(X_0 = r))$ la distribution de probabilité initiale,
et $\mu_n = (P(X_n = 1), P(X_n = 2), \ldots, P(X_n = r-1), P(X_n = r))$ la distribution de probabilité à l'étape n. Alors

1. $\mu_n = \mu_{n-1} T$.
2. $\mu_n = \mu_0 T^n$.

Justification.

1. $\mu_{n-1} T =$

$$\left(\sum_{1 \leq i \leq r} P(X_{n-1} = i) P(X_n = 1 | X_{n-1} = i), \ldots, \sum_{1 \leq i \leq r} P(X_{n-1} = i) P(X_n = r | X_{n-1} = i) \right)$$

ce qui s'écrit aussi (formule des probabilités totales)

$$\mu_{n-1} T = (P(X_n = 1), \ldots, P(X_n = r)) = \mu_n$$

2. Avec 7.3.1 : $\mu_0 T^n =$

$$\left(\sum_{1 \leq i \leq r} P(X_0 = i) P(X_n = 1 | X_0 = i), \ldots, \sum_{1 \leq i \leq r} P(X_0 = i) P(X_n = r | X_0 = i) \right)$$

ce qui s'écrit aussi (formule des probabilités totales)

$$\mu_0 T^n = (P(X_n = 1), \ldots, P(X_n = r)) = \mu_n$$

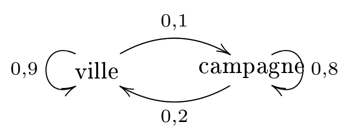
On peut aussi directement utiliser la relation précédente :
$\forall m \in \mathbb{N}^* \ \mu_m = \mu_{m-1} T$ donc (récurrence) $\mu_n = \mu_{n-1} T = \mu_{n-2} T T = \mu_{n-3} T T^2 = \cdots = \mu_0 T^n$

■

7.4 Cas particulier d'une matrice de transition 2×2

7.4.1 Flux migratoires

Un pays est partagé en deux zones : l'une urbaine, l'autre rurale. Chaque année 10% des urbains partent vivre à la campagne et 20% des ruraux partent vivre en ville. Au début de l'observation $\frac{3}{4}$ de la population est rurale.



– La matrice de transition :

$$T = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \textit{ville} & \textit{campagne} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{ville} \\ \textit{campagne} \end{array} & \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \end{array}$$

– La distribution initiale :

$$\mu_0 = (0,25; 0,75)$$

– Après une année :

$$\mu_1 = (0,25; 0,75) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (0,375; 0,625)$$

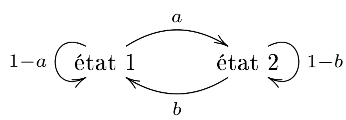
37,5% de la population est urbaine et 62,5% est rurale.

7.4.2 Convergence

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2, dont la matrice de transition ne comporte pas de 0, la distribution de probabilité μ_n à l'étape n, converge vers une distribution μ indépendante de la distribution initiale μ_0.
De plus $\mu_n = \mu_{n-1}T$, donc on aura $\mu = \mu T$.

Preuve.
La matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre 2 est du type :

$$T = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \text{ avec } a, b \in]0,1[$$



1. Rédaction 1.
La matrice T peut s'écrire sous la forme $T = N + (1-a-b)R$ en posant :

$$N = \tfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad R = \tfrac{1}{a+b}\begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}$$

On démontre facilement que $NR = RN = 0$ et par récurrence que $N^m = N$ et $R^m = R$ puis (récurrence) :

$$T^m = N + (1-a-b)^m R$$

d'où

$$\lim_{m\to+\infty} T^m = N$$

Or

$$\mu_0 N = \mu_0 \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$$

puisque $\alpha + \beta = P(X_0 = \text{état1}) + P(X_0 = \text{état2}) = 1$.
Donc :

$$\lim_{m\to+\infty} \mu_m = \lim_{m\to+\infty} \mu_0 T^m = \mu_0 N = \left(\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b}\right)$$

Exemple.
Dans l'exemple des migrations de populations, $a = 0,1$ et $b = 0,2$.
Posons $\mu = (x, y)$. $\mu = \mu T$ s'écrit : $(x, y) \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} = (x, y)$
D'où : $\left\{ \begin{array}{rcl} 0,9x + 0,2y & = & x \\ 0,1x + 0,8y & = & y \\ x + y & = & 1 \end{array} \right.$ soit $x = \frac{2}{3}$ et $y = \frac{1}{3}$.

2. Une deuxième rédaction de la preuve.
1 est une valeur propre de T, la deuxième valeur propre est $1 - a - b$ (a et b dans $]0, 1[$ donc $|1 - a - b| < 1$ et $1 - a - b \neq 1$, un vecteur propre associé : $\begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$). Il existe un repère dans lequel T prendra une forme diagonale :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - a - b \end{pmatrix}$$

Plus précisément :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix} D \frac{1}{a + b} \begin{pmatrix} b & a \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

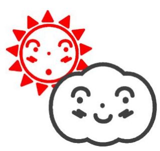
$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - a - b)^n \end{pmatrix}$ qui tend vers $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ lorsque $n \to +\infty$.
D'où :

$$\lim_{n \to +\infty} T^n = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{-1}{a+b} & \frac{1}{a+b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \\ \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix} = N$$

Et on termine comme dans la rédaction précédente.

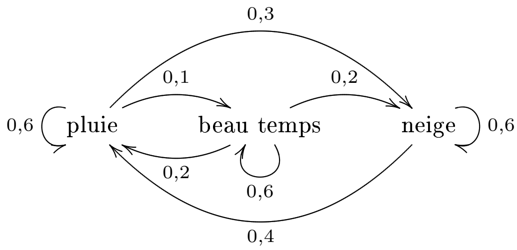
■

7.5 Retour en Oz



Dans le pays d'Oz, la probabilité que le temps soit stable est de 0,6. S'il pleut, il fait soleil le lendemain avec la probabilité 0,1 et il neige avec la probabilité 0,3. S'il fait beau, il pleut le lendemain avec la probabilité 0,2 et il neige avec la probabilité 0,2 ; enfin, s'il neige, il pleuvra le lendemain avec la probabilité 0,4.
Représentations :

$$\begin{array}{c} \\ pluie \\ soleil \\ neige \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} pluie & soleil & neige \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,3 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,4 & 0 & 0,6 \end{pmatrix} \end{array}$$



Les calculs menés dans Maple donnent :

```
> transition:=matrix(3,3,[6/10,1/10,3/10,2/10,6/10,2/10,4/10,0,6/10]);
```

$$transition := \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$$

```
> evalf(evalm(transition&^30));
```

$$\begin{bmatrix} 0.4705882350 & 0.1176470593 & 0.4117647057 \\ 0.4705882300 & 0.1176470679 & 0.4117647021 \\ 0.4705882371 & 0.1176470557 & 0.4117647072 \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(transition);
```

$$1,\ \frac{2}{5} + \frac{\sqrt{2}}{10},\ \frac{2}{5} - \frac{\sqrt{2}}{10}$$

```
> eigenvectors(transition);
```

$$[1,\ 1,\ \{[1,\ 1,\ 1]\}],\ [\frac{2}{5} + \frac{\sqrt{2}}{10},\ 1,\ \{\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4},\ -\frac{3}{2} - \sqrt{2},\ 1\right]\}],$$

$$[\frac{2}{5} - \frac{\sqrt{2}}{10},\ 1,\ \{\left[-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4},\ -\frac{3}{2} + \sqrt{2},\ 1\right]\}]$$

```
> passage:=transpose(matrix(3,3,[1,1,1,-1/2+1/4*2^(1/2), -3/2-2^(1/2),
> 1,-1/2-1/4*2^(1/2), -3/2+2^(1/2), 1]));
```

$$passage := \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ 1 & -\frac{3}{2} - \sqrt{2} & -\frac{3}{2} + \sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> inversepassage:=inverse(passage);
```

$$inversepassage := \begin{bmatrix} \dfrac{8}{17} & \dfrac{2}{17} & \dfrac{7}{17} \\ -\dfrac{(-5+2\sqrt{2})\sqrt{2}}{17} & -\dfrac{(6+\sqrt{2})\sqrt{2}}{34} & \dfrac{(-4+5\sqrt{2})\sqrt{2}}{34} \\ -\dfrac{(5+2\sqrt{2})\sqrt{2}}{17} & -\dfrac{(-6+\sqrt{2})\sqrt{2}}{34} & \dfrac{(4+5\sqrt{2})\sqrt{2}}{34} \end{bmatrix}$$

```
> diagonale:=simplify(multiply(inversepassage,transition,passage));
```

$$diagonale := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{10} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{5}-\dfrac{\sqrt{2}}{10} \end{bmatrix}$$

```
> limite:=matrix(3,3,[1,0,0,0,0,0,0,0,0]);
```

$$limite := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> reponse:=evalm(multiply(passage,limite,inversepassage));
```

$$reponse := \begin{bmatrix} \dfrac{8}{17} & \dfrac{2}{17} & \dfrac{7}{17} \\ \dfrac{8}{17} & \dfrac{2}{17} & \dfrac{7}{17} \\ \dfrac{8}{17} & \dfrac{2}{17} & \dfrac{7}{17} \end{bmatrix}$$

```
> evalf(%);
```

$$\begin{bmatrix} 0.4705882353 & 0.1176470588 & 0.4117647059 \\ 0.4705882353 & 0.1176470588 & 0.4117647059 \\ 0.4705882353 & 0.1176470588 & 0.4117647059 \end{bmatrix}$$

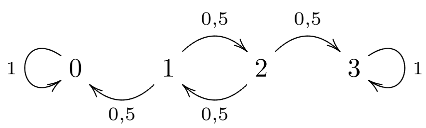
Ce qui s'interprète en disant que dans ce pays le temps est beau avec une probabilité de $\frac{2}{17}$...

7.6 Cheminement aléatoire sur une droite

Sur l'axe (Ox) on marque 4 points d'abscisses $0, 1, 2, 3$. Un point se trouve au point d'abscisse x_0 et à chaque instant se déplace à droite ou à gauche avec les probabilités p et q. Si le point atteint l'une des extrémités, le mouvement s'arrête.

Prenons par exemple : $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{1}{2}$. La matrice de transition est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$




```
> p:=matrix(4,4,[1,0,0,0,1/2,0,1/2,0,0,1/2,0,1/2,0,0,0,1]);
```

$$p := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalf(evalm(p&^100));
```

$$\begin{bmatrix} 1.\,,\ 0.\,,\ 0.\,,\ 0. \\ 0.6666666667\,,\ 0.7888609052\,10^{-30}\,,\ 0.\,,\ 0.3333333333 \\ 0.3333333333\,,\ 0.\,,\ 0.7888609052\,10^{-30}\,,\ 0.6666666667 \\ 0.\,,\ 0.\,,\ 0.\,,\ 1. \end{bmatrix}$$

```
> eigenvalues(p);
```

$$\frac{1}{2},\ \frac{-1}{2},\ 1,\ 1$$

```
> eigenvectors(p);
```

$$[\frac{1}{2},\ 1,\ \{[0,\ 1,\ 1,\ 0]\}],\ [1,\ 2,\ \{[3,\ 2,\ 1,\ 0],\ [-2,\ -1,\ 0,\ 1]\}],$$
$$[\frac{-1}{2},\ 1,\ \{[0,\ -1,\ 1,\ 0]\}]$$

```
> pas:=transpose(matrix(4,4,[0, -1, 1, 0,3, 2, 1, 0,-2, -1, 0,
1,0, 1,1, 0]));
```

$$pas := \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> pasmoins1:=inverse(pas);
```

$$pasmoins1 := \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{6} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

```
> multiply(pasmoins1,p,pas);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
> lim:=matrix([[0, 0, 0, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1, 0], [0, 0,
0,0]]);
```

$$lim := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> multiply(pas,lim,pasmoins1);
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

```
> evalf(%);
```

$$\begin{bmatrix} 1. & 0. & 0. & 0. \\ 0.6666666667 & 0. & 0. & 0.3333333333 \\ 0.3333333333 & 0. & 0. & 0.6666666667 \\ 0. & 0. & 0. & 1. \end{bmatrix}$$

7.7 Pile ou face

On jette une pièce 100 fois de suite. Faut-il s'attendre à trouver (au moins) une série d'au moins 5 piles de suite ?

Résolution.
Commençons par une procédure MAPLE :

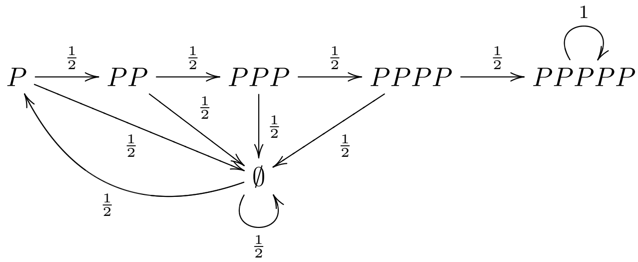
cinqpiles := proc (nombreechantillons)
(nombreechantillons est le nombre de répétitions de l'expérience aléatoire)
local compteur, i, echantillon100, repetition ;
compteur := 0 ;
(compteur contiendra le nombre d'échantillons contenant au moins une suite de cinq piles de suite)
for repetition from 1 to nombreechantillons do
echantillon100 := [] ;
for i from 1 to 100 do echantillon100 := [op(echantillon100), rand(1 .. 2)()] ;od ;
(echantilon100 est une liste des résultats de 100 lancers de pièces (1 : pile, 2 : face))
for i from 1 to 96 do
if echantillon100[i .. i+4] = [1, 1, 1, 1, 1] then compteur := compteur+1 ;
break ;fi ;
od ;
od ;
print(evalf(compteur/nombreechantillons)) ;
end ;

Quelques essais :

```
cinqpiles(1000) ;
                    0.8370000000
cinqpiles(1000) ;
                    0.8020000000
cinqpiles(1000) ;
                    0.8220000000
cinqpiles(1000) ;
```

```
0.8060000000
```

Avec un graphe probabiliste :



Matrice des transitions :

$$T = \begin{array}{c} \\ \emptyset \\ P \\ PP \\ PPP \\ PPPP \\ PPPPP \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \emptyset & P & PP & PPP & PPPP & PPPPP \end{array} \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le vecteur des distributions initiales : $\mu_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0)$.
Evaluons $\mu_{100} = \mu_0 T^{100}$ avec MAPLE par exemple, on trouve :
$\mu_{100} \approx (0.097, 0.049, 0.025, 0.013, 0.006, 0.810)$. Avec 100 lancers, la probabilité d'avoir au moins une série d'au moins 5 piles de suite est donc de plus de 0,8.

■

7.8 Programmes de lycée

Les membres du groupe de décision pour les futurs programmes de lycée hésitent entre une généralisation de l'enseignement de la théorie des graphes dans plusieurs sections ou un statu quo (enseignement des graphes uniquement en terminale es). N'arrivant pas à se décider, ils décident de faire tirer au hasard les lettres T et G par un ordinateur. La première des deux séquences TGG (Théorie des Graphes Généralisée à toutes les classes), GGT (Généralisation de l'enseignement des Graphes Temporisée) qui apparaîtra donnera la décision finale (on aura remarqué que le jeu peut durer longtemps, cela reflètant bien l'indécision du groupe).
Quelle probabilité pour chacune des deux décisions possibles ?

Résolution.
Commençons par une répétition de l'expérience à l'aide de MAPLE :

```
enseig :=proc(nombreechantillons)
local a,b,c,fin,i, compteurTGG,compteurGGT ;
compteurTGG :=0 ;compteurGGT :=0 ;
for i from 1 to nombreechantillons do
fin :=0 ;a :=rand(1..2)() ;b :=rand(1..2)() ;
```

```
while fin=0 do
c :=rand(1..2)() ;
if 100*a+10*b+c=211 then compteurTGG :=compteurTGG+1 ;fin :=1 ;fi ;
if 100*a+10*b+c=112 then compteurGGT :=compteurGGT+1 ;fin :=1 ;fi ;
a :=b ;b :=c ;
od ;od ;
print(evalf(compteurTGG/nombreechantillons)) ;
print(evalf(compteurGGT/nombreechantillons)) ;
end ;
```

Quelques essais :

`enseig(10000) ;`

$$0.7477000000$$

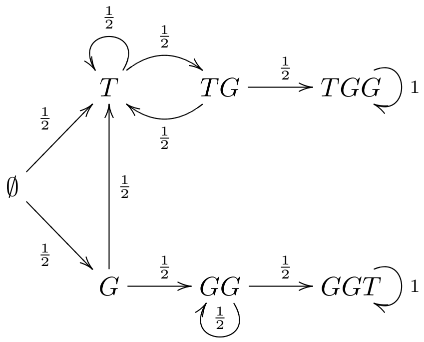
$$0.2523000000$$

`enseig(100000) ;`

$$0.7510100000$$

$$0.2489900000$$

Il semblerait donc que TGG se réalisera avec une probabilité d'environ 0,75 et GGT avec une probabilité d'environ 0,25.
Avec un graphe probabiliste :



Matrice des transitions :

$$T = \begin{array}{c} \\ \emptyset \\ T \\ TG \\ TGG \\ G \\ GG \\ GGT \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \emptyset & T & TG & TGG & G & GG & GGT \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Le vecteur des distributions initiales : $\mu_0 = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$.
$\mu_1 = \mu_0 T = \left(0, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $\mu_2 = \mu_1 T = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0\right)$,
$\mu_3 = \mu_2 T = \left(0, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right) \ldots$
Evaluons $\mu_{1000} = \mu_0 T^{1000}$ avec MAPLE par exemple, on trouve (arrondi) :

$\mu_{1000} \approx (0;0;0;0,75;0;0;0,25)$. On aura donc TGG avec une probabilité de $\frac{3}{4}$.
Cherchons à valider ce résultat.
L'instruction MAPLE : `jordan(T,'P')` nous donne : $P^{-1}TP = R$ où

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} & 1 & \frac{5+3\sqrt{5}}{10} & \frac{5-3\sqrt{5}}{10} & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{5+3\sqrt{5}}{10} & \frac{5-3\sqrt{5}}{10} & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{5+\sqrt{5}}{10} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & 1 & \frac{5+\sqrt{5}}{10} & \frac{5-\sqrt{5}}{10} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 & -2 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{5\sqrt{5}-\sqrt{5}}{10} & \frac{15-5\sqrt{5}}{10} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-5\sqrt{5}-\sqrt{5}}{10} & \frac{15+5\sqrt{5}}{10} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a pour $n \geq 2$:

$$R^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La limite de R^n quand n tend vers $+\infty$ est donc

$$R^\infty = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La limite de T^n quand n tend vers $+\infty$ est donc

$$T^{\infty} = PR^{\infty}P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\mu_{\infty} = \mu_0 T^{\infty} = \left(0; 0; 0; \frac{3}{4}; 0; 0; \frac{1}{4}\right)$

■

Chapitre 8

Coloration

8.1 Définitions, encadrements

8.1.1 Parties stables.

1. On appelle partie stable d'un graphe (ou partie indépendante de sommets) tout ensemble X de sommets du graphe tel qu'il n'y ait aucune arête du graphe entre deux sommets de X.
2. On appelle nombre de stabilité $\alpha(G)$ d'un graphe G le cardinal maximal d'une partie stable de G.
3. On appelle coloration des sommets d'un graphe toute attribution d'une couleur à chaque sommet du graphe telle que deux sommets adjacents n'ont jamais la même couleur.
   Une coloration est donc une partition de l'ensemble des sommets du graphe en parties stables (une couleur correspondant à une partie dans la partition).
4. On appelle nombre chromatique d'un graphe le plus petit nombre de couleurs nécessaire à une coloration (c'est à dire le plus petit nombre de parties stables nécessaires pour partitionner les sommets du graphe). On notera χ ce nombre.

8.1.2 Encadrements.

1. (a) Pour tout graphe G :

   $$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

   où $\omega(G)$ est l'ordre maximal d'un sous graphe complet de G et $\Delta(G)$ le degré maximal d'un sommet de G.

   (b) Est-ce un "bon" encadrement (c'est à dire "efficace" pour la recherche de χ) ?
2. Pour tout graphe G d'ordre n et de nombre de stabilité α :

   $$\frac{n}{\alpha} \leq \chi \leq n - \alpha + 1.$$

Résolution.

1. (a) i. Un graphe complet à n sommets a un nombre chromatique égal à n, c'est à dire n'a pas d'autre coloration que la coloration triviale (celle qui consiste à colorier chaque sommet par une couleur différente). En effet, deux sommets quelconques ne peuvent avoir la même couleur puisqu'ils sont nécessairement adjacents dans un graphe complet.

   ii. Si H est un sous-graphe du graphe G alors $\chi(G) \geq \chi(H)$.
   En effet, toute coloration de G induit une coloration de H. En particulier, une coloration de G en $\chi(G)$ couleurs induit une coloration de H.

   iii. Des deux points précédents, on déduit : $\omega(G) \leq \chi(G)$.

   (b) Soit $k > \Delta(G)+1$. Une coloration en k couleurs n'est jamais optimale. Pour établir cela, on établit que l'on peut se passer de la couleur k dans une k-coloration de G. Soit s un sommet de couleur k : il a au plus $\Delta(G)$ voisins, ces voisins utilisent donc au plus $\Delta(G)$ couleurs distinctes (et toutes différentes de la couleur k) et il reste donc une couleur disponible pour s parmi les couleurs $1, 2, \ldots, k-1$ (puisque $k-1 > \Delta(G)$). On peut ainsi changer la couleur de tous les sommets de couleur k. On obtient une coloration avec strictement moins de k couleurs. D'où $\chi \leq \Delta + 1$.

   (c) Cet encadrement $\omega \leq \chi \leq \Delta + 1$ ne peut être amélioré dans le cas général car pour un graphe complet on a : $\omega = \chi = \Delta + 1$. Mais cet encadrement est "grossier" pour nombre de graphes. On peut par exemple démontrer que pour tout entier $k > 0$ il existe un graphe sans triangle (donc sans sous-graphe complet d'ordre $p \geq 3$) de nombre chromatique k (voir 8.1.6), ce qui montre que la minoration par ω peut n'apporter qu'un renseignement pauvre pour la recherche de χ.

2. (a) Il existe une partition $\{V_1, V_2, \ldots, V_\chi\}$ de l'ensemble des sommets utilisant χ parties stables. Pour $1 \leq i \leq \chi$, on a $|V_i| \leq \alpha$, donc $\sum_{i=1}^{\chi} |V_i| \leq \chi\alpha$, c'est à dire $n \leq \chi\alpha$.

   (b) Soit X une partie stable du graphe de cardinal α. Notons $G - X$ le sous-graphe de G obtenu en supprimant les sommets de X (et les arêtes incidentes aux sommets de X). Si l'on "complète" une coloration de $G - X$ en $\chi(G - X)$ couleurs en coloriant les sommets de X en une $(\chi(G - X) + 1)^{\text{ième}}$ couleur, on obtient une coloration de G. Donc $\chi(G) \leq \chi(G - X) + 1 \leq \text{Ordre}(G - X) + 1 = n - \alpha + 1$ (le nombre chromatique d'un graphe est toujours majoré par son ordre puisque l'on a toujours une coloration en affectant une couleur distincte à chaque sommet).

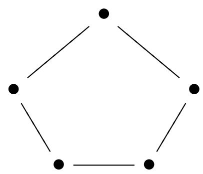
∎

8.1.3 $\chi = n$ sans K_n

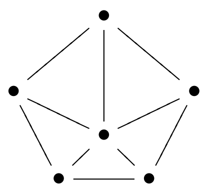
1. Construire un graphe sans triangle tel que $\chi = 3$.
2. En déduire un graphe sans K_4 tel que $\chi = 4$.
3. En déduire un graphe sans K_5 tel que $\chi = 5$ ...et un graphe sans K_n de nombre chromatique n.

Résolution.

1.



2.

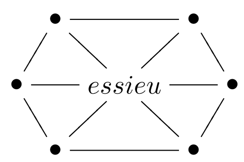


3. On ajoute de même un sommet au graphe précédent que l'on relie à tous les sommets...Il s'agit d'établir que si l'on dispose d'un graphe G de nombre chromatique n sans K_n alors le fait d'ajouter un sommet ω que l'on relie à tous les sommets de G donne un graphe G' de nombre chromatique $n+1$ et ne contenant pas de K_{n+1}.
   (a) Si G' contenait un K_{n+1}, l'un des sommets de ce K_{n+1} serait nécessairement ω (puisque G ne contenait pas de K_n donc a fortiori pas de K_{n+1}). Mais en supprimant le sommet ω et les arêtes qui lui sont incidentes dans ce K_{n+1}, on obtiendrait un K_n sous-graphe de G. Contradiction.
   (b) A partir d'une coloration des sommets de G utilisant n couleurs, on obtient une coloration de G' en $n+1$ couleurs en coloriant ω à l'aide d'une couleur $n+1$. Donc $\chi(G') \leq n+1$.
   Supposons que l'on puisse colorier G' avec n couleurs. Quitte à modifier les noms, on peut supposer que ω porte la couleur n. Comme ω est adjacent à tous les sommets du sous-graphe G, aucun des sommets de G ne porte la couleur n et on aurait ainsi colorié les sommets de G en strictement moins de n couleurs, ce qui contredit la valeur de son nombre chromatique. Donc $\chi(G') > n$.

■

8.1.4 Petits graphes de référence.

1. Quels sont les graphes de nombre chromatique 2 ?
2. Quel est le nombre chromatique d'un cycle élémentaire ?
3. Quel est le nombre chromatique d'une roue ? (une roue est constituée d'un cycle élémentaire de "pourtour" et d'un essieu central relié par un rayon à chacun des sommets du cycle de pourtour)



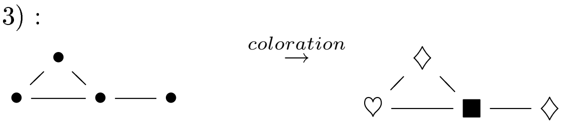
Résolution.

1. Ce sont les graphes bipartis (ayant au moins une arête).
2. (a) Pour les cycles élémentaires de longueur paire : $\chi = 2$
   (b) Pour les cycles élémentaires de longueur impaire : $\chi = 3$.
3. Dans une coloration, l'essieu porte une certaine couleur (appelons la 1). Les autres sommets de la roue ne peuvent porter cette couleur car ils sont tous adjacents à l'essieu. Une coloration de ces autres sommets (c'est à dire "le tour" de la roue) nécessite deux ou trois couleurs suivant les cas (puisqu'il s'agit d'un cycle élémentaire).
   (a) Roue d'ordre pair : $\chi = 4$.
   (b) Roue d'ordre impair (comme la roue dessinée ci-dessus) : $\chi = 3$.

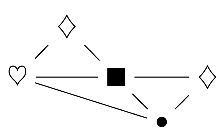
■

8.1.5 Coloration d'un sous-graphe

On colorie de manière optimale le graphe G suivant (de nombre chromatique 3) :

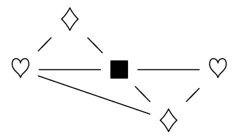


Quel est le nombre chromatique du graphe G' ci-dessous ?



Résolution.
Bien que le sous-graphe G proposé soit coloré de façon optimale, il faut refaire

sa coloration pour aboutir à une coloration optimale de G' , qui est aussi de nombre chromatique 3.



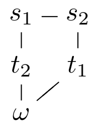
■

8.1.6 Grand nombre chromatique sans sous-graphe complet

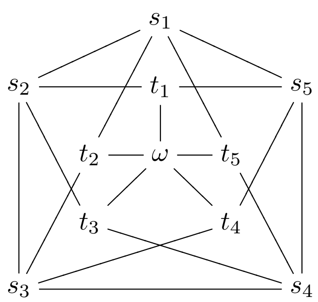
1. La construction de Mycielski.
   On construit un graphe G' en partant d'un graphe simple G d'ensemble de sommets $\mathcal{S} = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ de la façon suivante : on ajoute un ensemble de sommets $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ et un sommet ω tels que pour tout i, $1 \leq i \leq n$ les voisins de t_i dans G' sont les voisins de s_i dans G et les voisins de ω sont tous les sommets t_j.
2. Etablir qu'à partir d'un graphe G sans triangle de nombre chromatique k, la construction de Mycielski donne un graphe G' sans triangle de nombre chromatique $k+1$.

Résolution.

1. Exemple 1. On part de $G = K_2$ ($2-$chromatique et sans triangle), on obtient $G' = C_5$ ($3-$chromatique et sans triangle) :
   $s_1 - s_2$ donne

2. Exemple 2. A partir de $G = C_5$ ($3-$chromatique et sans triangle), on obtient le graphe G' suivant ($4-$chromatique et sans triangle) :

3. G' est sans triangle. En effet :
   – un triplet de sommets avec ω dans ce triplet ne définit pas un triangle, puisque ω n'étant adjacent qu'aux t_j, les deux autres sommets seraient dans $\mathcal{T}$, or $\mathcal{T}$ est une partie stable de G'.

- On ne définit pas de triangle avec trois sommets de G puisque G n'a pas de triangle, ni avec trois sommets de $\mathcal{T}$ puisque $\mathcal{T}$ est stable, ni encore avec au moins deux sommets de $\mathcal{T}$ pour la même raison.
- Reste à envisager le cas : un sommet dans $\mathcal{T}$ et les deux autres dans $\mathcal{S}$. Mais si t_j, s_i, s_p définissaient un triangle, s_i et s_p seraient voisins de t_j, donc de s_j par construction et s_j, s_i, s_p définiraient un triangle, contradiction.

4. A partir d'une $k-$coloration de G, on obtient une $k+1-$coloration de G' en coloriant (pour tout i) t_i de la même couleur que s_i et en donnant une couleur $k+1$ à ω.
   En effet de cette façon ω ne porte évidemment pas la même couleur que ses voisins, et pour tout j, t_j ne porte pas la même couleur que ses voisins puisque ses voisins sont ceux de s_j et que l'on part d'une coloration de G.
   On a donc obtenu : $\chi(G') \leq k+1$.
5. Supposons que l'on ait une $k-$coloration de G'. Quitte à changer les noms des couleurs, on peut supposer que ω porte la couleur k. Les sommets $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ne peuvent donc porter que les couleurs $1, 2, \ldots, k-1$. Notons $\mathcal{K}$ l'ensemble des sommets de G portant la couleur k. On change la couleur de chacun des s_i de $\mathcal{K}$ en la couleur du sommet t_i de même indice. On obtient ainsi une coloration de G en $k-1$ couleurs.
   En effet, deux sommets de $\mathcal{K}$ portent la couleur k dans la coloration initiale et $\mathcal{K}$ est donc une partie stable ; les voisins d'un élément s_i de $\mathcal{K}$ sont donc en-dehors de $\mathcal{K}$ et n'ont pas changé de couleur. Mais un voisin de $s_i \in \mathcal{K}$ est aussi un voisin de t_i et n'avait donc pas la même couleur que t_i dans la coloration initiale et n'a donc pas la même couleur que s_i dans la nouvelle coloration, qui est donc valide.
   Mais ceci est contradictoire avec le nombre chromatique de G.
   Ainsi $\chi(G') > k$.

■

8.2 Incompatibilités

8.2.1 Les couleurs de l'incompatibilité.

On doit former des groupes avec des "individus" $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Mais ces individus présentent certaines incompatibilités. Les groupes formés ne doivent contenir que des individus non incompatibles. On se fixe pour objectif de former un nombre minimum de groupes en respectant les incompatibilités entre individus. On représente la situation par un graphe, les sommets sont les individus, deux individus sont reliés par une arête ssi ils sont incompatibles. Un groupe formé d'individus compatibles est un ensemble de sommets stable (aucune arête du graphe ne relie deux sommets d'un tel ensemble). La question que l'on se pose s'énonce donc ainsi en termes de théorie des graphes : "quel est le nombre minimal de parties dans une partition des sommets constituée uniquement de parties stables" ?
Ce nombre est aussi le nombre chromatique du graphe. Une partition des sommets en parties stables fournit en effet une coloration du graphe (une couleur

par partie de la partition) et réciproquement une coloration du graphe fournit une partition en parties stables (chaque partie de la partition est définie par une couleur).
On ramène donc ces situations d'incompatibilité au problème de la détermination d'un nombre chromatique.

8.2.2 Stockage agricole

Un paysan stocke dans ses hangars divers produits (engrais, carburant, paille ...que l'on nommera ici a,b,c,d,e,f,g). L'Europe, aux exigences draconiennes, lui impose de stocker dans des endroits différents certains produits, selon le tableau suivant :

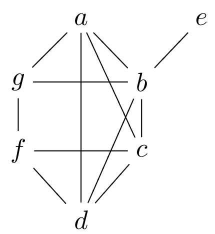
	a	b	c	d	e	f	g
a		×	×	×			×
b	×		×	×	×		×
c	×	×		×		×	
d	×	×	×			×	
e		×					
f			×	×			×
g	×	×				×	

Lecture de la ligne 1 : a ne peut être stocké ni avec b, ni avec c, ni avec d, ni avec g.
Avec combien de hangars notre paysan devra-t-il encore s'endetter ?

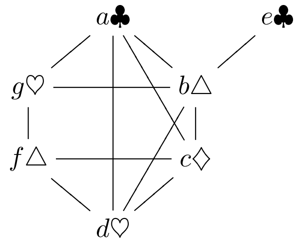
1. Résoudre la question avec le graphe des incompatibilités.
2. Résoudre la question avec le graphe des compatibilités.

Résolution.

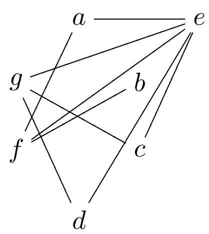
1. On représente chaque produit à stocker par un sommet d'un graphe G, deux sommets étant reliés par une arête ssi les deux produits ne peuvent être stockés ensemble. Deux sommets sont donc reliés ssi ils doivent être stockés dans des hangars différents. Les produits qui peuvent stockés ensemble définissent donc une partie stable du graphe et le nombre minimum de hangars est le nombre chromatique du graphe.

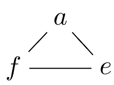


Le graphe K_4 (sommets a,b,c,d) est un sous-graphe de G donc $\chi \geq 4$ et 4 couleurs suffisent :



2. On fait le même raisonnement mais en passant aux notions “complémentaires”.
Le graphe complémentaire $\overline{G}$ de celui que l'on vient d'utiliser est le suivant :



Des produits $p_1, p_2, \ldots, p_h$ peuvent être placés dans le même hangar ssi le graphe $\overline{G}$ contient le graphe complet de sommets $p_1, p_2, \ldots, p_h$. On cherche donc, pour résoudre le problème, à écrire le graphe $\overline{G}$ comme une réunion de cliques sans sommets communs, le nombre de cliques étant le plus petit possible.
La partie stable $\{a, b, c, d\}$ du graphe $\overline{G}$ montre qu'il faudra au moins quatre hangars puisque deux produits d'une même partie stable ne peuvent pas être dans le même hangar.
Or $\overline{G}$ est la réunion des quatre cliques 

, $g - c$, b, d. Donc le minimum cherché est 4.

■

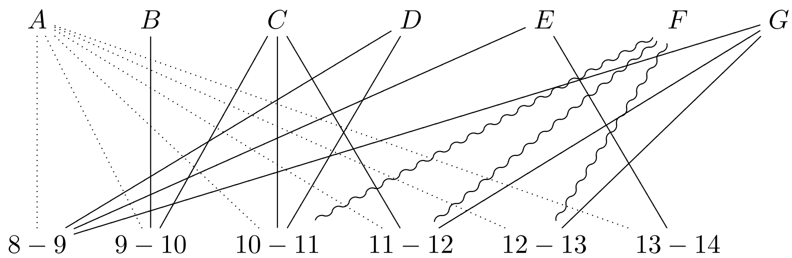
8.2.3 Salle informatique.

Pour permettre aux élèves de rédiger leur TPE sur traitement de texte, le responsable de la salle informatique a affiché un planning. Les inscriptions pour vendredi sont les suivantes :
- Albert s'est inscrit pour les plages horaires 8-9,9-10,10-11,11-12,12-13,13-14.
- Bertrand s'est inscrit pour la plage horaire 9-10.
- Cassien s'est inscrit pour les plages horaires 9-10,10-11,11-12.
- Didier s'est inscrit pour les plages horaires 8-9,10-11.
- Emilie s'est inscrite pour les plages horaires 8-9,13-14.
- Fabienne s'est inscrite pour les plages horaires 10-11,11-12,12-13.
- Gertrude s'est inscrite pour les plages horaires 8-9,11-12,12-13.

1. Quel est le nombre minimum d'ordinateurs à allumer ce vendredi ?
2. Les élèves, oubliant fréquemment leur disquette pour sauvegarder leur document, doivent rester tout au long de la journée sur la même machine afin de retrouver sur le disque dur leur travail précédent (ils ont aussi perdu leur mot de passe réseau). Nombre minimum d'ordinateurs à allumer ce vendredi ?

Résolution.

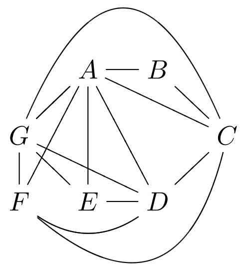
1. On représente chaque élève par un sommet ainsi que chaque plage horaire.



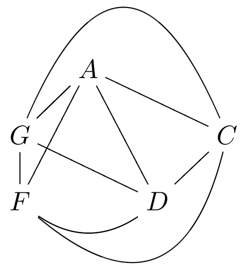
Les sommets-plage horaire ont des degrés d'au plus 4. Quatre ordinateurs devraient suffire.

Le planning se présente sûrement sous forme d'une grille avec une ligne par plage horaire, le responsable de la salle info n' a alors évidemment pas besoin d'un graphe : le nombre d'ordinateurs nécessaires est le nombre maximum d'inscrits par ligne.

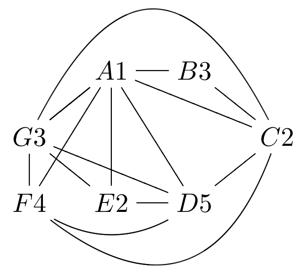
2. Deux élèves pourront utiliser le même ordinateur ssi ils ne sont jamais ensemble dans la salle informatique. On représente chaque élève par un sommet, deux élèves sont reliés par une arête ssi ils se sont inscrits sur une plage horaire commune. Il s'agit donc d'un graphe d'incompatibilité : une arête entre deux sommets signifie que les deux sommets-élèves ne peuvent utiliser la même machine.



Ce graphe contient un sous-graphe complet d'ordre 5 (K_5) :



Son nombre chromatique est donc d'au moins 5. Et cinq ordinateurs (c'est à dire cinq couleurs) suffisent :



■

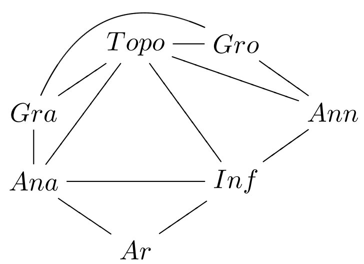
8.2.4 Emploi du temps

Sept modules sont proposés à des étudiants. Les étudiants peuvent s'inscrire dans les modules de leur choix. Le tableau ci-dessous indique les modules ayant des étudiants en commun.

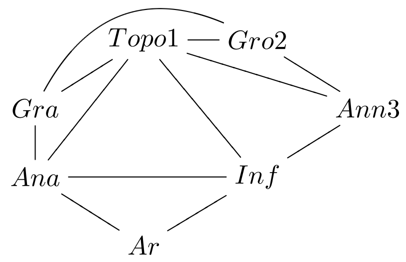
	topologie	groupes	anneaux	informatique	arithmétique	analyse	graphes
topologie		×	×	×		×	×
groupes	×		×				×
anneaux	×	×		×			
informatique	×		×		×	×	
arithmétique				×		×	
analyse	×			×	×		×
graphes	×	×				×	

Chaque cours occupe une plage de deux heures dans la semaine. Combien de telles plages faut-il prévoir pour que les étudiants puissent suivre tous les cours auxquels ils se sont inscrits (remarque : les profs sont différents sur chaque module) ?

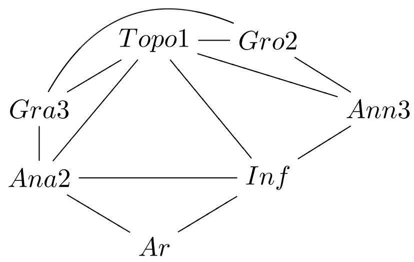
Résolution.
On représente chaque module par un sommet. Deux sommets sont reliés ssi ils ont un étudiant commun, donc deux sommets sont reliés ssi ils doivent occuper des plages horaires distinctes. Le nombre de plage horaire minimum est donc le nombre chromatique du graphe.



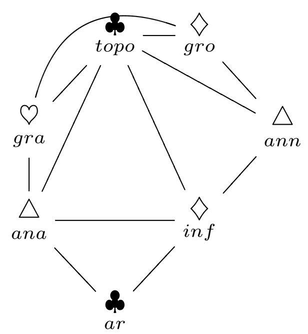
Le graphe présente des triangles donc son nombre chromatique est d'au moins trois.
Supposons que trois couleurs suffisent. On a déjà nécessairement trois couleurs sur les sommets du triangle Topo,Gro,Ann :



Gra étant liés à Topo et à Gro doit alors porter la couleur 3. Et Ana étant lié à Topo et à Gra devra porter la couleur 2 :



Et Inf qui est lié à Topo, Ana et Ann n'a plus de couleur disponible. Il faut donc au moins quatre couleurs.
Quatre couleurs suffisent :

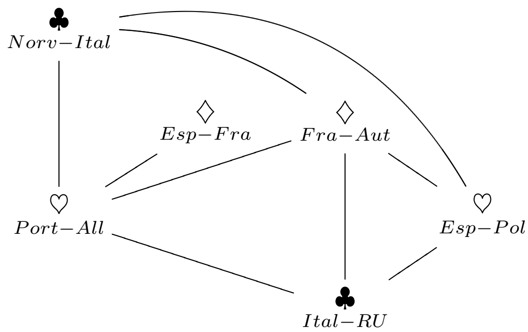


■

8.2.5 Les plafonds

On a représenté ci-dessous quelques vols entre capitales européennes. Pour des raisons de sécurité, deux vols qui se croisent doivent voler à des altitudes différentes (qu'on suppose constantes tout le long du vol, atterrissage et décollage mis à part évidemment). Combien d'altitudes de vol différentes faut-il prévoir ?

Résolution.
On définit un graphe dont les sommets sont les vols et une arête entre deux sommets signifie que les deux vols se croisent. On a ainsi une fois de plus un graphe d'incompatibilité et le nombre chromatique du graphe obtenu sera le nombre minimum de plafonds à prévoir.
Trois plafonds sont nécessaires (triangle dans le graphe) et suffisent :

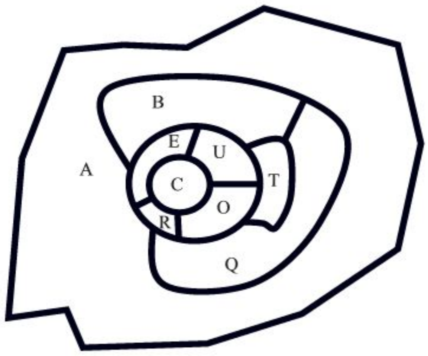


■

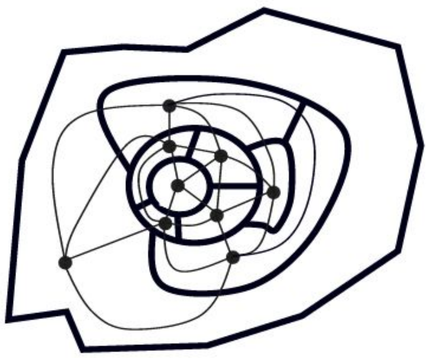
8.3 Coloration d'une carte

8.3.1 Une première carte

Colorier la carte ci-dessous avec le moins de couleurs possibles, deux régions ayant une frontière commune (non réduite à un point) devant être de couleur différente.



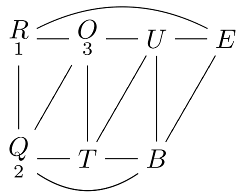
Résolution.
On recherche le nombre chromatique du graphe ci-dessous obtenu en faisant correspondre un sommet à chaque région, les arêtes traduisant une frontière commune :



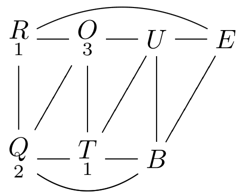
Il faudra au moins trois couleurs (présence de triangles dans le graphe).
Quatre couleurs suffisent comme le montre la coloration : B1,R1,O2,U3,E2,Q3,T4,A4,C4.
Peut-on réaliser la coloration en trois couleurs ?
Considérons le sous-graphe suivant :

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] \arrow[rrr, dash, bend left] & O \arrow[r, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] & U \arrow[r, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] & E \arrow[dl, dash] \\
Q \arrow[r, dash] \arrow[rr, dash, bend right] & T \arrow[r, dash] & B &
\end{tikzcd}$$

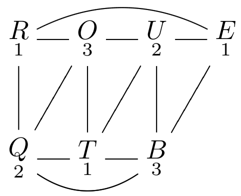
Si on pouvait n'utiliser que trois couleurs, elles seraient nécessairement déjà toutes utilisées dans le triangle ROQ. Par exemple :



Mais alors avec le triangle TOQ, on voit que T devra porter la couleur 1



et avec le triangle TOU, U devra porter la couleur 2 puis B la couleur 3 avec TUB et enfin E la couleur 1 avec BEU



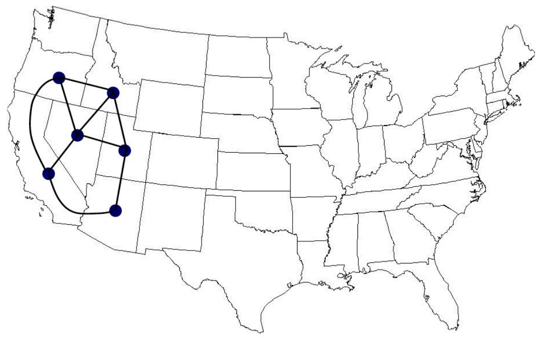
Mais E ne peut porter la couleur 1 puisque E est adjacent à R.
On a ainsi une contradiction : 3 couleurs ne peuvent suffire.

■

8.3.2 Etats-Unis.

Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaire pour colorier cette carte de façon à ce que deux Etats ayant une frontière commune soient de couleurs différentes ?

Résolution.
On associe à cette carte un graphe dont les sommets sont les Etats et une arête entre deux Etats marque une frontière commune. On se ramène ainsi à un problème de coloration d'un graphe.
Le sous-graphe représenté ci-dessous (roue d'ordre pair)



montre que trois couleurs ne suffisent pas . Il nous faut donc au moins quatre couleurs pour la carte complète.
Quatre couleurs suffisent : c'est ce que nous garantit le théorème des quatre couleurs (cf 10.6), le graphe associé à la carte est en effet planaire et on est ainsi ramené à la coloration d'un graphe planaire. . .à vous la recherche d'une coloration explicite en quatre couleurs.

■

8.4 Algorithme de coloration

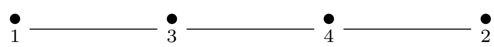
8.4.1 Un algorithme de coloration gloutonne.

Donnée : un graphe G et des couleurs 1,2,3,4. . .
On numérote les sommets de 1 à n $(s_1,s_2,\ldots,s_n)$.
Processus : pour i allant de 1 à n affecter au sommet s_i la plus petite couleur non déjà affectée à ses voisins déjà coloriés (c'est à dire la plus petite couleur non déjà affectée à ceux des sommets $s_1,s_2,\ldots,s_{i-1}$ qui lui sont adjacents).

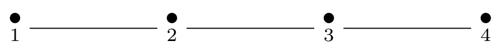
8.4.2 Application de l'algorithme.

1. Appliquer cet algorithme au graphe ci-dessous avec les deux numérotations des sommets proposées :

   (a)

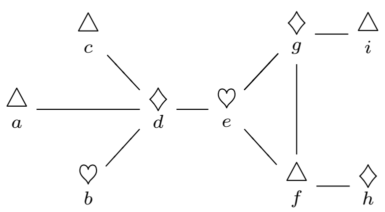
   

   (b)

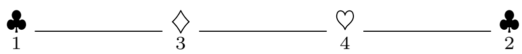
2. Cet algorithme donne-t-il le nombre chromatique ?

3. Montrer que cet algorithme donnera toujours une coloration utilisant au plus $\Delta(G)+1$ couleurs (où Δ désigne le degré maximal des sommets).
4. Montrer que la coloration du graphe ci-dessous est optimale mais qu'elle ne peut pas être obtenue par l'algorithme.

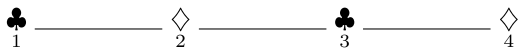


Résolution.

1. (a)



   (b)



2. L'algorithme ne donne donc pas toujours le nombre chromatique, mais on peut démontrer qu'il existe toujours une numérotation des sommets telle que la coloration donnée par l'algorithme soit optimale et donne donc le nombre chromatique.
   Le nombre de numérotations possibles des sommets étant vite très grand, cette propriété n'a que peu d'intérêt pratique.
3. Lorsqu'on colorie les sommets suivant cet algorithme, le numéro de la couleur attribuée au sommet s_i est d'au plus

$$1 + |\{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}\} \cap \text{Voisinage}(s_i)|$$

   et

$$1 + |\{s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}\} \cap \text{Voisinage}(s_i)| \leq 1 + \Delta$$

4. La présence d'un triangle assure que $\chi \geq 3$ et la coloration proposée utilisant 3 couleurs, elle est optimale. Mais cette coloration ne peut être obtenue par l'algorithme décrit ci-dessus, car dans toute application de cet algorithme les sommets b et c ont la même couleur. En effet si l'un des deux est coloré avant d alors il prend la couleur numéro 1 et l'autre qu'il soit coloré avant ou après d la prendra aussi (d prenant nécessairement une autre couleur puisqu'adjacent à un sommet déjà coloré en couleur 1). Si d est coloré avant les sommets b et c, soit d a la couleur numéro 1 et alors b et c prennent la couleur numéro 2, soit d n'a pas la couleur numéro 1 et alors b et c la prendront.

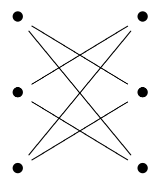
$\blacksquare$

8.4.3 Algorithme de coloration de Welsh et Powell.

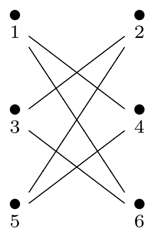
Donnée : un graphe G et des couleurs 1,2,3,4. . . .
On numérote les sommets de 1 à n (s_1,s_2,. . .,s_n) de façon à ce que $d(s_1) \geq d(s_2) \geq \cdots \geq d(s_n)$.
Processus : pour i allant de 1 à n, affecter au sommet s_i la plus petite couleur non déjà affectée à ses voisins déjà coloriés (c'est à dire la plus petite couleur non déjà affectée à ceux des sommets s_1,s_2,. . .,s_{i-1} qui lui sont adjacents).

8.4.4 Coloration optimale ?

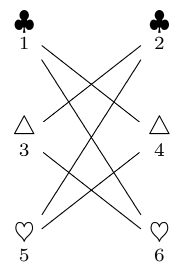
Montrer avec le graphe ci-dessous que l'algorithme de Welsh et Powell ne donne pas nécessairement une coloration optimale.



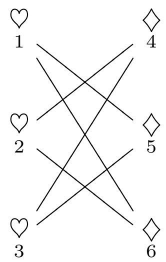
Résolution.



donne la coloration suivante :



alors que deux couleurs suffisent et peuvent s'obtenir avec le même algorithme en numérotant ainsi :



■

Chapitre 9

Les arbres

9.1 Définitions

9.1.1 Arbre et forêt.

- Un graphe sans cycle est appelé forêt (un tel graphe est nécessairement simple puisque des arêtes multiples entre deux sommets définissent un cycle).
- Une forêt connexe est appelée arbre.

9.1.2 simple et élémentaire

Dans un arbre, les notions de chaîne simple et chaîne élémentaire sont confondues.

Justification.
Une chaîne élémentaire est toujours simple, puisque dès qu'on répète une arête, on répète les sommets extrémités de cette arête.
Et une chaîne simple $(s_1, a_1, s_2, a_2, s_3, \ldots, s_n)$ (où s_i désigne un sommet et a_j une arête), si elle n'est pas élémentaire répète un sommet $s_k = s_p,\ k < p$ mais alors la chaîne simple $(s_k, a_k, \ldots, s_p)$ est un cycle, ce qui est impossible dans un arbre.

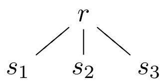
■

9.1.3 Le labyrinthe.

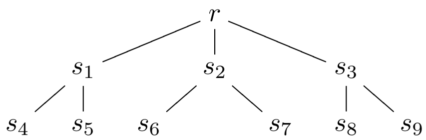
Un labyrinthe comporte 2003 salles connectées entre elles par un réseau de 5000 couloirs. Est-il possible de tourner “en rond” sur un parcours de moins de vingt salles ?
(d'après un problème du tournoi international des villes, 1988, cf [11])

Résolution.
Soit G le graphe à 2003 sommets (les salles) et 5000 arêtes (les couloirs). On supprime les sommets de degré ≤ 2 (et les arêtes incidentes à ces sommets). Cela peut créer de nouveaux sommets de degré ≤ 2 : on les supprime également

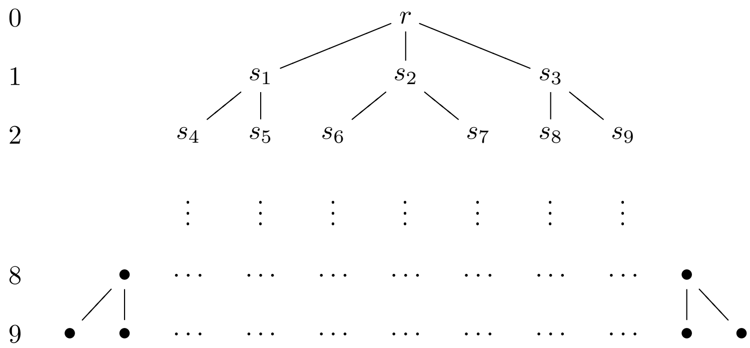
…et ainsi jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de sommets de degré ≤ 2. Puisqu'il y a 2003 sommets au départ, ces opérations auront supprimé au plus 2×2003 arêtes, il nous reste donc 994 arêtes et il reste donc aussi des sommets. Ce qui nous reste est un sous-graphe H (d'au moins 994 arêtes) dont tous les sommets sont de degré au moins trois.
Montrons que ce sous-graphe H possède un cycle d'au plus 20 arêtes (et donc d'au plus vingt salles). On raisonne pour cela par l'absurde en supposant qu'il n'y a aucun cycle de longueur ≤ 20.
Choisissons un sommet r.
r est de degré au moins 3 dans H :



Ces trois sommets s_1, s_2, s_3 sont évidemment distincts de r (pas de boucle puisqu'on suppose qu'il n'y a pas de cycle de longueur ≤ 20).
Chacun des trois sommets s_1, s_2, s_3 est de degré au moins 3 dans H :



Les sommets $s_4,\ s_5,\ s_6,\ s_7,\ s_8,\ s_9$ sont distincts des sommets $r,\ s_1,\ s_2,\ s_3$ (sinon on a un cycle de longueur ≤ 20 : par exemple si s_4 se confond avec s_3, on a le cycle (r, s_1, s_3, r)) et ces sommets $s_4,\ s_5,\ s_6,\ s_7,\ s_8,\ s_9$ sont distincts entre eux (sinon cycle : par exemple $s_4 = s_6$ donnerait le cycle (r, s_1, s_4, s_2, r)) …
On continue ainsi jusqu'à un "niveau" 9, d'où l'arbre :



A chaque "niveau", on a deux nouveaux sommets (sinon cycle de longueur ≤ 20).
Mais on a ainsi un nombre de sommets égal à $1+3+3\times 2+3\times 2^2+\ldots+3\times 2^9 =$ 3070 sommets …Contradiction.

∎

9.1.4 Caractérisation d'un arbre.

Soit G un graphe. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. G est un arbre.
2. Deux sommets quelconques sont reliés par une unique chaîne élémentaire.
3. Deux sommets quelconques sont reliés par une unique chaîne simple.

Preuve.

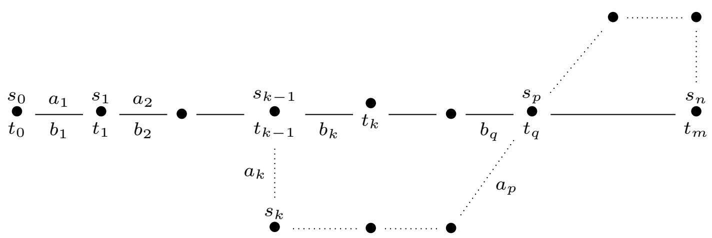
– (1) ⇒ (2)

1. Il est déjà clair que G ne peut être un arbre qu'à condition d'être un graphe simple puisque des arêtes multiples entre sommets définissent clairement des cycles.

2. Règlons d'abord le problème pour l'existence et l'unicité d'une chaîne élémentaire du sommet s au sommet s lui-même. Existence : chaîne de longueur nulle. Unicité : s'il y en avait une autre, ce serait nécessairement un cycle d'origine et extrémité s, et G étant un arbre, il n' a pas de cycle.

3. Existence d'une chaîne élémentaire du sommet s au sommet t ($s \neq t$). Il existe une chaîne $(s, s_1, s_2, \ldots, t)$ reliant s à t puisque G est connexe. On peut en extraire une chaîne élémentaire de s à t, cf 4.1.4.

4. Unicité de la chaîne élémentaire de s à t ($s \neq t$).
Supposons qu'il existe deux chaînes élémentaires distinctes menant de s à t : $(s_0 = s, a_1, s_1, a_2, s_2, \ldots, a_n, s_n = t)$ et $(t_0 = s, b_1, t_1, b_2, t_2, \ldots, b_m, t_m = t)$ (où les s_i et les t_i sont des sommets, tandis que les a_j et b_j sont des arêtes) avec par exemple $m \leq n$.
   - Supposons que $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \ldots, a_m = b_m$. On aurait alors $s_0 = t_0, s_1 = t_1, \ldots, s_m = t_m = t$, on aurait donc $m = n$ (sinon la chaîne $(s_0 = s, a_1, s_1, a_2, s_2, \ldots, a_n, s_n = t)$ passerait deux fois par t ce qui contredit son caractère élémentaire). Les deux chaînes seraient donc les mêmes.
   - Comme nos deux chaînes sont supposées distinctes, il existe donc nécessairement au moins un indice j, $0 < j \leq m$ tel que $a_j \neq b_j$. Notons k le plus petit de ces entiers. Nous avons donc : $s_0 = t_0, s_1 = t_1, \ldots, s_{k-1} = t_{k-1}, s_k \neq t_k$. Notons maintenant p le plus petit indice supérieur ou égal à k tel que s_p soit l'un des sommets $t_k, t_{k+1}, \ldots, t_m$ (existe car $s_n = t_m = t$) et notons q l'indice tel que $s_p = t_q$.
   - La chaîne $(s_{k-1}, a_k, s_k, \ldots, a_p, s_p, b_q, t_{q-1}, \ldots, b_k, t_{k-1})$ est un cycle (d'où une contradiction et l'unicité recherchée).



En effet $s_{k-1} = t_{k-1}$, les sommets s_i sont distincts entre eux ainsi que les sommets t_j puisqu'on est parti de chaînes élémentaires et les s_i sont distincts des t_j pour $k \leq i < p$ et $k \leq j < q$ par définition de p, donc les arêtes sont distinctes (il ne s'agit pas non plus d'un simple aller-retour le long d'une arête, c'est à dire la chaîne $(s_{k-1}, a_k, s_k, \ldots, a_p, s_p, b_q, t_{q-1}, \ldots, b_k, t_{k-1})$ ne se limite pas à (s_{k-1}, a_k, t_{k-1}) puisque $a_k \neq b_k$).

- (2) $\Rightarrow$ (1) (par contraposition). Supposons que le graphe G possède un cycle.
  - Si le cycle est une boucle en s, alors deux chaînes élémentaires joignent s à s : la boucle et la chaîne de longueur nulle.
  - Sinon le cycle s'écrit $(s_0, a_1, s_1, a_2, \ldots, a_n, s_0)$ avec $s_o \neq s_1$ (puisqu'il ne s'agit pas d'une boucle) . Les deux chaînes (s_0, a_1, s_1) et $(s_0, a_n, s_{n-1}, \ldots, a_2, s_1)$ sont simples (car définies à partir d'un cycle qui est une chaîne simple). La chaîne (s_0, a_1, s_1) est élémentaire et la chaîne $(s_0, a_n, s_{n-1}, \ldots, a_2, s_1)$, si elle n'est pas élémentaire, permet de définir une chaîne élémentaire (cf 4.1.4) de s_0 à s_1 distincte de la chaîne (s_0, a_1, s_1) puisque les arêtes $a_2, a_3, \ldots, a_n$ sont toutes distinctes de a_1 (car un cycle est une chaîne simple). On a ainsi obtenu deux chaînes élémentaires distinctes de s_0 à s_1.
- (2) $\Rightarrow$ (3) Si on a (2) alors on a (1) mais alors on a (3) avec la remarque 9.1.2.
- (3) $\Rightarrow$ (2) Si G est un graphe vérifiant (3) alors il vérifie (2). En effet de toute chaîne simple entre deux sommets, on peut tirer une chaîne élémentaire entre ces deux sommets et il ne peut y avoir plus d'une telle chaîne car deux chaînes élémentaires entre deux sommets sont aussi deux chaînes simples entre ces deux sommets.

■

9.2 Feuille

9.2.1 Feuille.

On appelle sommet pendant ou feuille d'un graphe tout sommet de degré 1.

9.2.2 Waterland.

Le pays de Waterland est constitué d'îles reliées par des ponts. Les ponts ont été construits de façon à ce que l'on puisse aller de toute île à toute autre (en passant par d'éventuelles îles intermédiaires), mais (économie...) il n'y a qu'une façon d'aller d'une quelconque île à une autre (en particulier, il y a au plus un pont entre deux îles données). Montrer qu'il y a au moins une île de laquelle ne part qu'un seul pont.

Résolution.

1. Une seule façon d'aller d'une île à une autre : il faut comprendre que des allers-retours sur un pont ou des passages multiples sur un même pont n'ajoute pas une "façon" d'aller d'une île à une autre. Cela semble naturel mais dans le cadre de la théorie des graphes, on préciserait que l'on a affaire à des chaînes simples. En d'autres termes, l'énoncé signifie que le graphe dont les sommets sont les îles et les ponts les arêtes vérifie la propriété : "une et une seule chaîne simple entre deux sommets". Ce graphe est donc un arbre.

2. Attila part d'une île I_1 en empruntant un pont qu'il détruit derrière lui, il arrive à une île I_2 et repart par un autre pont qu'il détruit…et ainsi de suite.
   (a) De cette façon, Attila ne pourra pas passer deux fois sur une même île.
   En effet, s'il passait deux fois sur une même île, elle porte un premier numéro (obtenu au premier passage) I_p et un second (obtenu au second passage) I_n. Alors I_n et I_{n-1} seraient reliées de deux façons : $I_n = I_p - I_{p+1} - I_{p+2} - \ldots - I_{n-1}$ et $I_{n-1} - I_n$ (il s'agit bien là de deux façons différentes de relier I_n et I_{n-1} : le pont entre I_{n-1} et I_n n'est pas un pont déjà emprunté puisque les ponts déjà empruntés ont été détruits), contradiction.
   (b) Le nombre d'îles est fini et Attila passe au plus une fois sur chaque île : son parcours devra donc s'arrêter.
   (c) Soit f l'île sur laquelle Attila se retrouve bloqué. Un seul pont arrivait à f : le pont par lequel Attila est arrivé sur f. En effet, il n'a pas détruit de pont relié à f avant celui là sinon Attila serait déjà passé par f, et il ne reste pas de pont non détruit partant de f sinon Attila ne serait pas bloqué sur f.

■

9.2.3 Lemmes saisonniers

Deux lemmes utiles pour les preuves par récurrence sur les arbres.

Lemme de résistance à l'hiver

Tout arbre (ayant au moins deux sommets) possède au moins deux feuilles.

Preuve.
Considérons une chaîne élémentaire de longueur maximale $(s_0, s_1, \ldots, s_r)$. Comme le graphe est connexe et a au moins deux sommets, on a $r \geq 1$ et comme il n'y a pas de cycle $s_0 \neq s_r$.
Si s_r était de degré supérieur strictement à 1, on pourrait prendre un sommet s lié à s_r et distinct de s_{r-1}. Alors $(s_0, s_1, \ldots, s_r, s)$ serait une chaîne élémentaire de longueur $r+1$ (s n'est pas s_{r-1} et n'est pas non plus l'un des $s_i, 1 \leq i \leq r-1$, sinon présence d'un cycle). On contredit donc le caractère maximal de la longueur de chaîne élémentaire.
On établirait de même que s_0 est de degré 1.

■

Lemme printemps-automne

Soit G un graphe possédant une feuille f. Les propositions suivantes sont équivalentes :
- G est un arbre.

- $G - f$ est un arbre.

Preuve.

1. Automne. Le graphe G est un arbre.
   - Soient s et t deux sommets de $G - f$. Comme G est connexe, s et t sont reliés par une chaîne de G. Dans une telle chaîne, tous les sommets autres que s et t sont de degré 2 dans la chaîne, donc de degré au moins 2 dans G. La chaîne ne peut donc pas contenir de sommet de degré 1 autre que s et t et en particulier ne peut contenir f. Donc la chaîne reliant s et t est une chaîne de $G - f$ et $G - f$ est connexe.
   - Comme G est sans cycle, $G - f$ est évidemment également sans cycle. $G - f$ est donc un arbre.
2. Printemps. Soit G un graphe et f une feuille de ce graphe telle que $G - f$ soit un arbre.
   - G est une forêt :
     Dans un cycle, tous les sommets sont de degré au moins 2, si G avait un cycle, ce cycle ne contiendrait donc pas f (qui est de degré 1) et le cycle serait donc un cycle de $G - f$ ...qui n'en a pas.
   - G est connexe :
     Deux sommets de $G - f$ sont reliés par une chaîne dans $G - f$, donc a fortiori dans G. Soit maintenant un sommet s distinct de f. f est incident à une unique arête e, dont on note l'autre extrémité f'. s et f' sont reliés par une chaîne P de $G - f$ (donc de G) d'où une chaîne de s à f : $s \overset{P}{\ldots} f' \overset{e}{-} f$.

■

9.3 Nombre d'arêtes

9.3.1 Nombre de ponts.

Le pays Waterland (cf 9.2.2) comporte 50 îles. Combien a-t-il de ponts ?

Résolution.
Soit p le nombre de ponts. Attila part d'une des îles ayant un seul pont et brûle le pont derrière lui ainsi que l'île. Le pays restant satisfait encore la “définition” (i.e. ponts permettant le passage de toute île à toute autre, en passant par des éventuelles îles intermédiaires, mais chemin unique d'une île à une autre). Ce pays diminué ne compte plus que 49 îles et $p - 1$ ponts. Le pays diminué a lui aussi au moins une île n'ayant qu'un seul pont. Attila fait subir le même méchant sort à cette île et son pont : il brûle tout. Il nous reste un pays de 48 îles et $p - 2$ ponts répondant encore à la “définition”. En continuant ainsi, on arrive à un pays à deux îles et $p - 48$ ponts. Une île a un seul pont, on détruit. Il nous reste une seule île (et donc plus de pont...) : $p - 49 = 0$. Il y avait 49 ponts.

■

9.3.2 Nombre d'arêtes d'un arbre.

Un arbre ayant n sommets possède $n-1$ arêtes.

Preuve.
Pour $n=1$ et $n=2$, c'est évident.
Hypothèse de récurrence : soit $n \geq 2$ pour lequel tout arbre de n sommets aurait $n-1$ arêtes. Soit A un arbre de $n+1$ sommets. Soit s un sommet pendant de cet arbre. Le sous-graphe $A-s$ est encore un arbre, à n sommets. Par l'hypothèse de récurrence, $A-s$ possède $n-1$ arêtes, donc A en possède n (puisque s est pendant).

■

9.4 Connexe minimal

9.4.1 CS pour être un arbre.

Un graphe connexe ayant n sommets et $n-1$ arêtes est un arbre.

Preuve.
Soit G un graphe connexe ayant n sommets et $n-1$ arêtes. Si ce n'est pas un arbre, il contient des cycles. On supprime les cycles (en coupant une arête du cycle) tant qu'il y en a. Cette opération ne déconnecte pas le graphe et le processus s'arrêtera puisqu'il n'y a qu'un nombre fini d'arêtes. On obtient finalement un arbre avec strictement moins de $n-1$ arêtes, ce qui est impossible puisqu'un arbre avec n sommets a $n-1$ arêtes.

■

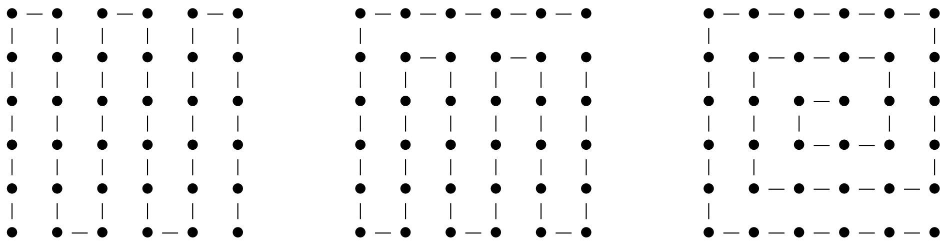
9.4.2 Filet de pêche.

Un filet de pêche est un rectangle de $r \times p$ mailles. Quel nombre maximal de ficelles peut-on couper sans que le filet ne se divise en plusieurs morceaux ?

Résolution.
Un filet :

```
● — ● — ● — ● — ● — ●
|   |   |   |   |   |
● — ● — ● — ● — ● — ●
|   |   |   |   |   |
● — ● — ● — ● — ● — ●
|   |   |   |   |   |
● — ● — ● — ● — ● — ●
|   |   |   |   |   |
● — ● — ● — ● — ● — ●
|   |   |   |   |   |
● — ● — ● — ● — ● — ●
```

et des découpages possibles :



Sur l'exemple de filet ci-dessus à $r \times p$ mailles (donc $n = (r+1) \times (p+1)$ noeuds et $r \times (p+1) + p \times (r+1)$ arêtes), on a supprimé $r \times p$ arêtes... ce qui en laisse $r + p + rp = n - 1$.
Peut-on faire mieux ?
Supposons que par un procédé quelconque, on ait supprimé des arêtes jusqu'à obtenir un graphe connexe ayant strictement moins de $n - 1$ arêtes. A un moment donné, on avait exactement $n-1$ arêtes : on avait donc un graphe connexe à $n - 1$ arêtes, donc un arbre. On a continué à couper sans déconnecter : donc le graphe-filet reste un arbre (on ne peut pas créer de cycles en coupant des arêtes). On a donc obtenu un arbre avec strictement moins de $n - 1$ arêtes. C'est impossible.
On ne peut donc pas faire mieux que les propositions ci-dessus.

■

9.4.3 Caractérisation d'un arbre.

Soit G un graphe. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :
- G est un arbre
- G est connexe et la suppression de n'importe laquelle de ses arêtes le déconnecte (en d'autres termes : G est connexe et toutes ses arêtes sont des isthmes).

Preuve.
Soit G un arbre. Supposons que l'on puisse couper l'arête reliant deux sommets x et y sans déconnecter le graphe. On se retrouve avec un arbre ayant strictement moins de $n - 1$ arêtes, ce qui est impossible. Donc la suppression de n'importe quelle arête de l'arbre le déconnecte.
Soit G un graphe connexe tel que la suppression de n'importe laquelle de ses arêtes le déconnecte. Supposons que G ne soit pas un arbre, c'est à dire que G ait au moins un cycle. La suppression d'une arête dans ce cycle ne déconnecte pas le graphe. Contradiction. Donc G est un arbre.

■

9.4.4 Agora et Claustra

Deux populations habitent Waterland (cf 9.2.2). Une population de claustrophobes qui sont les constructeurs des ponts (la carte des îles et ponts est un arbre). Et une population d'agoraphobes qui ne supportent pas l'idée de traverser un pont et qui a donc construit un réseau de tunnels sous-marins, le réseau

des tunnels constituant également un arbre (sommets=îles, arêtes=tunnels).
Pour des raisons historiques lointaines, les deux populations connaissent certaines tensions. Un groupe de terroristes agora fait sauter un pont. Le gouvernement agora pour montrer sa bonne volonté propose d'ouvrir autant de ses tunnels que nécessaires à la population claustra afin que les claustras puissent continuer à joindre deux îles quelconques.
Montrer qu'il suffit en fait d'ouvrir un seul tunnel.

Résolution.
La suppression d'un pont déconnecte le graphe (sommets=îles, arêtes=ponts) en deux composantes connexes G_1 et G_2 (puisque le graphe était un arbre donc connexe et déconnecté par la suppression d'une arête).
Il existe au moins un tunnel T ayant une extrémité dans G_1 et l'autre dans G_2, sinon le graphe (sommets=îles, arêtes=tunnels) ne serait pas connexe (on ne pourrait aller d'une île de G_1 à une île de G_2 par les tunnels). Il est alors clair qu'il suffit d'ouvrir T.

■

9.4.5 Ordre et Taille dans un graphe connexe.

1. Un graphe connexe à s sommets a au moins $s-1$ arêtes.
2. Un graphe connexe à s sommets qui n'est pas un arbre a au moins s arêtes.

Justification.

1. Soit G un graphe connexe ayant s sommets. Supposons que G a strictement moins de $s-1$ arêtes.
   Soit G est un arbre et on a alors un arbre à s sommets et strictement moins de $s-1$ arêtes, c'est impossible.
   Soit G n'est pas un arbre, on supprime une arête de chaque cycle rencontré jusqu'à obtenir un arbre et on a encore la même contradiction.
2. Soit G un graphe connexe ayant s sommets et n'étant pas un arbre. Supposons que G a strictement moins de s arêtes (donc au plus $s-1$ arêtes). On supprime une arête de chaque cycle rencontré jusqu'à obtenir un arbre, on a alors un graphe connexe à s sommets ayant strictement moins de $s-1$ arêtes et on a encore la même contradiction.

■

9.4.6 Nombre minimum de ponts.

Un pays est constitué d'îles. Le gouvernement veut construire des ponts de façon à ce qu'on puisse aller de toute île à toute île par les ponts. Quel est le nombre minimum de ponts à construire ?

Résolution.
Si n est le nombre d'îles, le problème est : “quel est le nombre minimal d'arêtes d'un graphe connexe à n sommets ?” et la réponse est $n-1$ d'après 9.4.5.

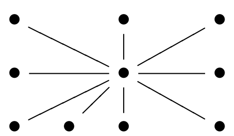
■

9.4.7 Débats politiques télévisés.

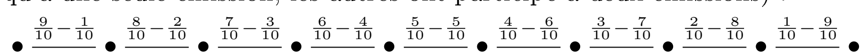
A la dernière campagne présidentielle, il y avait au moins dix candidats.
Une chaîne de télé avait programmé neuf émissions d'une heure chacune. Le principe de ces émissions était celui d'un tête à tête : deux candidats débattent pendant une heure.
Durant une émission, le temps de parole des deux candidats n'est pas nécessairement le même. Mais la loi impose que le temps de parole de chacun des candidats à l'élection présidentielle soit le même sur l'ensemble des neuf émissions.
Quel était le nombre de candidats ?
(d'après un problème du tournoi des villes 1991, cf [11])

Résolution.
On considère un graphe G à n sommets-candidats, deux candidats étant reliés ssi un tête-à-tête a eu lieu entre ces deux candidats.

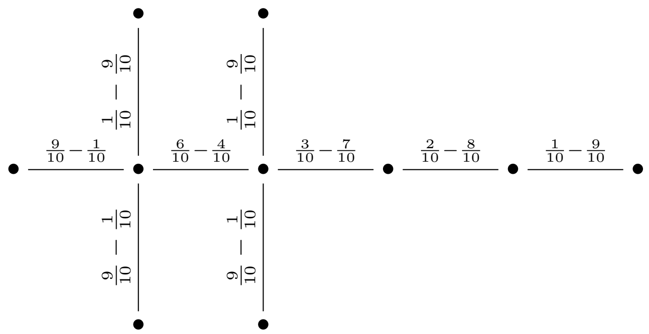
1. Le temps de parole $h = \frac{9}{n}$ (en heure) de chacun des n candidats sur l'ensemble des neuf heures est strictement inférieur à 1 (car $n \geq 10$).
2. Chaque arête correspond à une émission (une heure), le graphe a donc exactement neuf arêtes.
3. Le graphe ne contient aucun cycle.
   En effet dans un cycle : nombre de sommets$\leq$nombre d'arêtes. Les k candidats du cycle auraient donc au moins k heures de parole, ce qui est impossible puisque $h < 1$. Le graphe est donc une forêt.
4. Chaque arbre de la forêt contient le même nombre de candidats (et donc d'arêtes). En effet pour un arbre à k sommets, il y a $k-1$ arêtes. Les candidats de cet arbre n'ont participé qu'à ces $k-1$ émissions et l'égalité des temps de parole impose donc que chaque candidat de cet arbre a disposé de $\frac{k-1}{k}$ heure de parole et s'il y a p candidats sur un autre arbre, on doit avoir $\frac{p-1}{p} = \frac{k-1}{k}$, ce qui implique $p = k$.
5. Soit a le nombre d'arbres dans cette forêt et s le nombre de candidats d'un arbre. On a $sa = n$ et $(s-1)a = 9$ donc a doit être égal à 1, 3 ou 9 et s à 10, 4 ou 2 (respectivement), donc n à 10, 12 ou 18 (resp.).
6. Ces valeurs fournissent effectivement des solutions.
   – Pour $n = 10$, il peut y avoir eu un candidat participant à toutes les émissions (et ne parlant que 6 minutes par émission) et tous les autres candidats auraient participé à une seule émission chacun, durant laquelle ils auraient parlé 54 minutes.

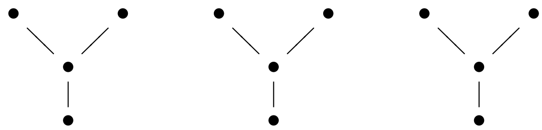
     La répartition peut aussi se faire ainsi (deux candidats n'ont participé qu'à une seule émission, les autres ont participé à deux émissions) :

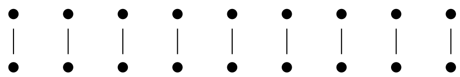
     Ou encore ainsi :



– Pour $n = 12$, la répartition suivante a pu avoir lieu (neufs candidats ont participé à une seule émission et ont parlé $\frac{3}{4}$ d'heure durant cette émission, les trois autres candidats ont participé à trois émissions chacun, ne parlant qu'un quart d'heure à chaque émission) :



– Pour $n = 18$, on a eu 9 tête-à-tête, chacun parlant une demi-heure dans l'unique émission à laquelle il a participé.



Le nombre de candidats était donc soit de 10, soit de 12, soit de 18.

■

9.4.8 Les singes.

(Généralisation du problème 9.4.7).
s singes se partagent équitablement b bananes ($b < s$), chaque banane est coupée en au plus deux parties. Pour quelles valeurs de s et b est-ce possible ?

Résolution.

1. Soit s et b ($b < s$) deux entiers pour lesquels le partage serait possible. Soit G un graphe à s sommets-singes, deux singes étant reliés ssi ils partagent une banane. Le partage étant équitable, chaque singe devra recevoir une fraction de banane $p = \frac{b}{s}$ avec $p < 1$.
   (a) Le graphe a exactement b arêtes.
   En effet aucune banane ne reste entière puisque $p < 1$, toute banane est donc coupée en deux et on a une bijection entre les bananes et les partages, c'est à dire entre les bananes et les arêtes du graphe.
   (b) Le graphe est une forêt.
   Notons en effet $A_1, A_2, \ldots, A_n$ les composantes connexes du graphe, $s_1, s_2, \ldots, s_n$ les nombres respectifs de singes de ces composantes

connexes, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ les nombres respectifs de bananes. On a bien sûr $s = \sum_{j=1}^n s_j$ et $b = \sum_{j=1}^n b_j$.
Les n_j singes de la composante C_j se partagent b_j bananes, ce partage doit être équitable et chacun reçoit donc une part de $\frac{b_j}{s_j}$. On a donc

$$\frac{b_1}{s_1} = \frac{b_2}{s_2} = \cdots = \frac{b_n}{s_n} = \frac{b}{s} = p.$$

On a $\frac{b_j}{s_j} = p < 1$, donc $b_j < s_j$. La composante connexe A_j est donc un arbre (cf 9.4.5 et 9.4.1) et on a $b_j = s_j - 1$.

(c) Chaque arbre de la forêt porte le même nombre de singes s_a et le même nombre de bananes $b_a = s_a - 1$.
En effet, avec ce qui précède on a :

$$\frac{s_1 - 1}{s_1} = \frac{s_2 - 1}{s_2} = \cdots = \frac{s_n - 1}{s_n} = p.$$

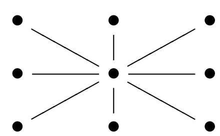
Mais $\frac{t-1}{t} = \frac{u-1}{u}$ implique $t = u$, donc $s_1 = s_2 = s_3 = \ldots = s_n$ et $b_1 = b_2 = \ldots = b_n$.

(d) Le nombre d'arbres de la forêt est $n = pgcd(s; b)$.
On a $s = \sum_{j=1}^n s_j = n \times s_a$ donc n divise s. De même $b = \sum_{j=1}^n b_j = n \times b_a$ donc n divise b. Donc n divise $pgcd(s; b)$.
De plus $b = \sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n (s_j - 1) = \left(\sum_{j=1}^n s_j\right) - n = s - n$.
$pgcd(s; b)$ divise s et b, donc divise aussi $n = s - b$.

Si le partage est possible avec s singes et b bananes ($b < s$), on a donc nécessairement $pgcd(s; b) = s - b$.

2. Soit s et b deux entiers tels que $b < s$ et $pgcd(s; b) = s - b$ ...le partage est-il possible ?

(a) Supposons d'abord que $pgcd(b; s) = 1$. On a donc $s - 1 = b$ et la part de chaque singe devrait être de $p = \frac{b}{s} = \frac{s-1}{s} = 1 - \frac{1}{s}$. On peut réaliser le partage ainsi :

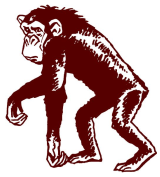


Le singe central reçoit une fraction de banane de $\frac{1}{s}$ de la part de chacun des $s - 1$ singes qui l'entourent, ce qui laisse une fraction de $1 - \frac{1}{s}$ à chacun des autres et chaque banane est coupée au plus une fois.

(b) Envisageons maintenant le cas $d = pgcd(s; b) \neq 1$. Il existe deux entiers s' et b' premiers entre eux tels que $b = db'$ et $s = ds'$.
On a $ds' - db' = d$ donc $s' - b' = 1$. On regroupe les singes sur d arbres étoiles comme dans le cas précédent et c'est gagné.

■

Remarque.
En assimilant les bananes à des tubes cylindriques tous isométriques, lorsque le nombre de bananes b est supérieur ou égal au nombre s de singes, le partage équitable (en coupant au plus une fois toute banane) est toujours possible. Alignons en effet les tubes, on coupe tous les $\frac{b}{s}$ (l'unité de longueur étant une longueur de banane), on a ainsi constitué s parts équitables, et chaque banane est coupée au plus une fois (puisque $\frac{b}{s} \geq 1$).
Bien sûr, si l'on veut tenir compte du fait qu'une banane est en général plus épaisse au centre que sur les bouts, il faudra affiner...



9.5 Arbre couvrant

9.5.1 Mise en quarantaine.

Dans un pays constitué d'îles reliées par des ponts, les ponts sont tels que qu'on peut aller de toute île à toute autre (en passant éventuellement par des îles intermédiaires). Montrez qu'il existe une île dont la mise en quarantaine n'empêche pas la circulation de toute île restante à toute île restante.

Résolution.
Le graphe G des ponts (arêtes) entre les îles (sommets) est connexe. Si ce graphe est un arbre, un sommet pendant peut être mis en quarantaine tout en laissant le reste du graphe connexe. Si ce graphe n'est pas un arbre, tant qu'on rencontre des cycles on coupe un pont du cycle jusqu'à obtenir un arbre dans lequel on met un sommet pendant en quarantaine.

∎

9.5.2 Arbre couvrant.

- On obtient un graphe partiel de G en supprimant certaines arêtes et en gardant tous les sommets.
- On appelle arbre partiel ou arbre couvrant d'un graphe G un graphe partiel de G qui est un arbre.

9.5.3 Existence d'un arbre couvrant.

Tout graphe connexe possède (au moins) un arbre couvrant.

Preuve.
Soit G un graphe connexe. Soit E l'ensemble des graphes partiels connexes de G (E est non vide puisque G est dedans). Soit T dans E de nombre d'arêtes minimal. Alors T est un arbre couvrant de G. Sinon, T aurait au moins un cycle et en coupant une arête de ce cycle, on obtiendrait un graphe partiel connexe de G avec strictement moins d'arêtes que T, contradiction.

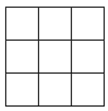
■

Remarque.
Il n'y a en général pas un seul arbre couvrant. Par exemple, un arbre couvrant pour le filet 9.4.2 (d'autres ont été donnés en 9.4.2) :

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet & - & \bullet \\
| & & & & & & & & & & \\
\bullet & & \bullet & - & \bullet & & \bullet & - & \bullet & & \bullet \\
| & & | & & | & & | & & | & & | \\
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\
| & & | & & | & & | & & | & & | \\
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet \\
| & & | & & | & & | & & | & & | \\
\bullet & - & \bullet & & \bullet & - & \bullet & & \bullet & - & \bullet \\
| & & | & & | & & | & & | & & | \\
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet
\end{array}$$

9.5.4 Treillis.

On dispose d'un treillis comme celui-ci :



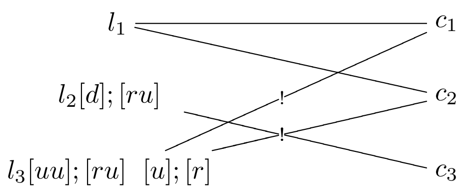
Les pressions subies par le treillis peuvent transformer les carrés en losanges non carrés (les déformations sont dans le plan). On décide donc de consolider certains carrés afin qu'ils ne puissent plus devenir non carrés. Dans les deux exemples ci-dessous, les carrés consolidés sont les carrés hachurés. On constate dans les deux cas que certains carrés peuvent encore être déformés.
Exemple 1 :

Exemple 2 :

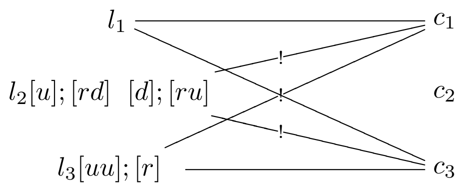
Le problème est de disposer d'une méthode assurant qu'un choix donné de carrés consolidés consolide tout le treillis (i.e. plus aucun carré ne peut devenir non carré). On en comprend l'intérêt si l'on imagine que le treillis correspond aux barres de montage d'un échafaudage.
On note c_1, c_2, c_3 les colonnes du treillis (une colonne étant constituée des segments "horizontaux") et l_1, l_2, l_3 les lignes du treillis (segments "verticaux").

	c_1	c_2	c_3
l_1			
l_2			
l_3			

On associe au treillis un graphe : l_i est relié à c_j ssi le carré C_{ij} est consolidé.
Pour l'exemple 1 :



Pour l'exemple 2 :

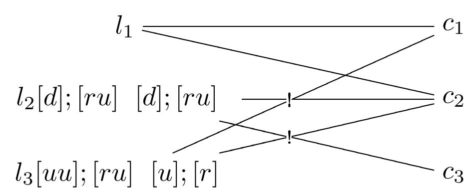


1. Montrer que si ce graphe est connexe, alors le treillis est consolidé.
2. En admettant la réciproque (i.e. "si le treillis est consolidé alors le graphe est connexe"), régler le problème du nombre minimum de carrés à renforcer pour consolider tout le treillis.

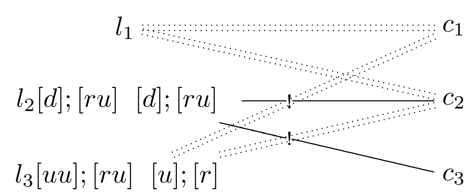
(d'après la page web : http ://www.eleves.ens.fr/ home/ollivier/treillis /texte/treillis.html.fr où l'on trouvera des compléments, notamment des arguments pour la réciproque admise ici)

Résolution.
Remarque : les raisonnements faits sont valables sur des treillis $n \times m$ (et pas seulement 3×3).

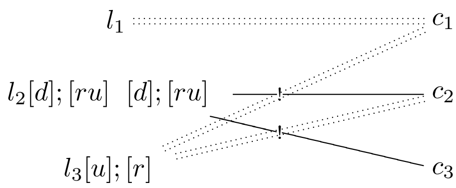
1. Les segments “horizontaux” d’une même colonne restent toujours parallèles entre eux : par exemple, dans la colonne c_3, le segment 1 (du dessus) est parallèle au segment 2 puisque C_{13} est un parallélogramme. Le segment 2 reste parallèle au 3 puisque C_{23} est un parallélogramme et le segment 3 reste parallèle au 4 pour la même raison.
2. De même, les segments “verticaux” d’une même ligne restent parallèles entre eux.
3. Conséquence : si le carré C_{ij} est consolidé (c’est à dire si les sommets l_i et c_j du graphe sont voisins), les segments “verticaux” de la ligne i sont tous orthogonaux aux segments “horizontaux” de la colonne j.
4. Supposons qu’il existe une chaîne reliant l_i et c_j dans le graphe associé au treillis. Cette chaîne est de la forme $l_i, c_{j_1}, l_{i_1}, c_{j_2}, l_{i_2}, \ldots, c_j$ (le graphe est biparti). Le lien l_i——c_{j_1} assure que les segments “verticaux” de la ligne l_i sont orthogonaux aux segments “horizontaux” de la colonne c_{j_1}, le lien c_{j_1}——l_{i_1} assure que les segments “horizontaux” de la colonne c_{j_1} sont orthogonaux aux segments “verticaux” de la ligne l_{i_1}. Les segments “ verticaux” des lignes l_i et l_{i_1} sont donc parallèles... En continuant ainsi, on constate que les segments “verticaux” de toutes les lignes de la chaîne sont parallèles entre eux, idem pour les segments “horizontaux” de toutes les colonnes et les segments des lignes sont orthogonaux aux segments des colonnes.
5. Si le graphe est connexe, ce qui précède montre que le treillis est tout entier consolidé : tous les segments “verticaux” de toutes les lignes sont parallèles entre eux, idem pour les segments “horizontaux” des colonnes et les premiers sont orthogonaux aux seconds.
6. En admettant la réciproque (i.e. “si le treillis est consolidé alors le graphe est connexe”), le nombre minimum de carrés à consolider sera obtenu par un arbre couvrant d’un graphe connexe associé au treillis. Considérons par exemple le graphe connexe suivant :



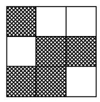
On repère un cycle dans ce graphe connexe :



On coupe une arête de ce cycle (on obtient ici un arbre puisque le nombre d'arêtes est de 5, soit nombre de sommets−1) :



On obtient ainsi un treillis consolidé de façon la plus économique possible :



■

9.6 Centre

9.6.1 Excentricité.

s étant un sommet d'un arbre T, on appelle excentricité de s la longueur maximale des chaînes élémentaires d'origine s, c'est à dire le nombre d'arêtes à parcourir pour aller de s au sommet le plus éloigné de s.

9.6.2 Centre des secours.

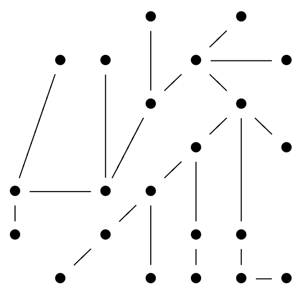
On veut installer un centre de secours sur une île du pays Waterland (cf 9.2.2). Pour des raisons de rapidité d'intervention, on décide d'installer le centre de secours sur une île d'excentricité minimale. Combien d'îles peuvent se porter candidate à l'emplacement du poste de secours ?
(Ce résultat sur le centre d'un arbre date de 1869, il est dû à Camille Jordan)

Résolution.
Si le pays T n'est constitué que d'une île, la réponse est claire. Pour un pays de deux îles, les deux îles sont de bonnes candidates.
Supposons maintenant que le pays a n îles, $n \geq 3$. Le pays a au moins deux îles desquelles ne part qu'un seul pont (île unipont). Les îles uniponts ne sont pas

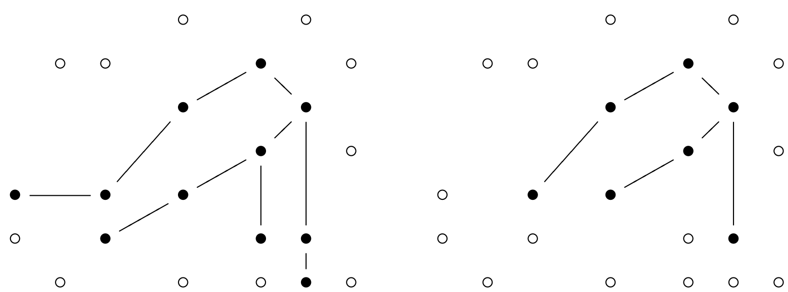
de bonnes candidates. En effet si a est une telle île, elle est reliée à une unique île b et (en notant $e(x)$ l'excentricité du sommet x) $e\,(b) = e\,(a) - 1$ puisque toute chaîne partant de a est de la forme $(a, b, \ldots)$.
Remarquons par ailleurs que les chaînes élémentaires de longueur maximale donnant l'excentricité d'un sommet se terminent nécessairement par une île unipont (sinon la chaîne pourrait être continuée).
Effaçons les îles uniponts. On obtient un pays diminué T' pour lequel le centre de secours doit être placé sur les mêmes îles que sur le pays T initial : avec la remarque précédente, on remarque en effet que pour tout $s \in T'$: $e_{T'}\,(s) = e_T\,(s) - 1$.
On recommence sur T' ce que l'on a fait sur T (i.e. on supprime les îles uniponts avec leur pont). On obtient T" qui a aussi les mêmes centres possibles. . .Et ainsi de suite jusqu'à obtenir un pays avec une seule île ou deux îles. Il y a donc suivant les cas une ou deux îles possibles pour l'emplacement du poste de secours.

■

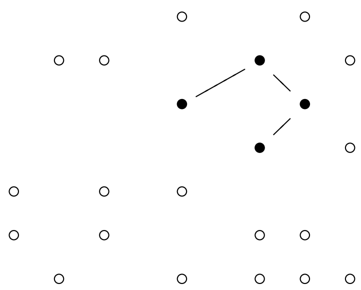
Remarque.
D'après la preuve précédente, on peut obtenir les positions possibles du centre de secours en ôtant les sommets pendants, puis en recommençant sur la nouvelle carte obtenue...Illustration :
Graphe initial :



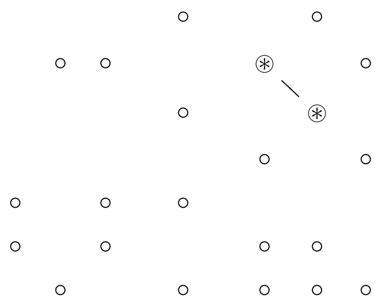
Suppression des feuilles :



étape 1 étape 2



étape 3



étape 4

9.7 Hooligans

A Waterland (cf 9.2.2), les passions provoquées par le sport national entraînent de nombreux incidents entre voisins (c'est à dire entre îles reliées par un pont, chaque île ayant son équipe).
On cherche pour cette raison à organiser deux tournois indépendants en définissant des regroupements d'îles stables (c'est à dire sans pont entre deux îles d'un même groupe) : deux équipes ne pourront disputer un match que si elles appartiennent à un même groupe stable.

1. Montrer qu'on peut séparer les îles en deux groupes stables (bipartition).
2. De combien de façons peut-on séparer ainsi les îles en deux groupes stables ?
3. Deux îles ont des équipes particulièrement performantes. A quelle condition les deux équipes participeront-elles au même tournoi ?

Résolution.
Définir une bipartition revient à définir une bicoloration des sommets.

1. On cherche à colorer les îles avec deux couleurs, rouge et bleu par exemple (deux îles reliées par un pont devant être de couleur différente) .
   Si le pays a une seule île, il a évidemment 2 colorations possibles (rouge ou bleu).
   Le pays I_1 —— I_2 à 2 îles a aussi deux colorations possibles en rouge et bleu : I_1 *rouge* —— I_2 *bleu* ou I_1 *bleu* —— I_2 *rouge* .
   Soit $n \geq 2$ un entier pour lequel tout arbre à n sommets a deux colorations possibles en rouge et bleu. Soit T un arbre à $n+1$ sommets.
   Soit f une feuille de T. L'arbre $T-f$ a deux colorations possibles. Ajoutons la feuille f, f n'est reliée qu'à une île J et peut donc être colorée en une couleur (celle que n'a pas J). Donc T a deux colorations en rouge et bleu possibles.
2. Chaque couleur correspond à un groupe d'îles stable (et les deux colorations correspondent au même "découpage" : on intervertit simplement les couleurs pour passer d'une coloration à l'autre). Il y a donc unicité de la bipartition.

3. Dans une coloration en deux couleurs, deux îles sont de la même couleur si et seulement si l'unique chaîne élémentaire les joignant l'une à l'autre est de longueur paire puisque lorsqu'on se déplace le long de cette chaîne les deux couleurs doivent s'alterner. Les deux équipes exceptionnelles participeront donc au même tournoi ssi le nombre de ponts à franchir pour passer de l'une à l'autre est pair.

■

9.8 Permutations

Retournons dans notre archipel de Waterland.
Chaque équipe (c'est à dire chaque île) du sport national a sa propre couleur. Pour tenter de calmer les passions provoquées par le sport national, les dirigeants décident que des échanges de couleur entre îles voisines (c'est à dire reliées par des ponts) auront lieu chaque année.
Etablir que toutes les permutations de couleurs sont possibles.

Résolution.
On numérote les îles de 1 à n. On note $t_{i,j}$ la transposition $i \leftrightarrow j$ (échange des couleurs entre les îles i et j).

1. Commençons par un "archipel chaîne élémentaire" :
   $1 - 2 - 3 - \cdots - (n-1) - n$
   Montrons que les transpositions $t_{1,2}$, $t_{2,3}$, $t_{3,4}$, $\ldots$, $t_{n-1,n}$ engendrent le groupe des permutations.
   Commençons par un exemple avec un archipel de 5 îles : on peut par exemple ramener la répartition suivante des couleurs
   $\underset{c_4}{1} - \underset{c_5}{2} - \underset{c_1}{3} - \underset{c_2}{4} - \underset{c_3}{5}$ à la répartition initiale $\underset{c_1}{1} - \underset{c_2}{2} - \underset{c_3}{3} - \underset{c_4}{4} - \underset{c_5}{5}$
   à l'aide des étapes suivantes :

$$\underset{c_4}{1} - \underset{c_5}{2} - \underset{c_1}{3} - \underset{c_2}{4} - \underset{c_3}{5} \overset{t_{2,3}}{\longrightarrow} \underset{c_4}{1} - \underset{c_1}{2} - \underset{c_5}{3} - \underset{c_2}{4} - \underset{c_3}{5}$$

$$\overset{t_{1,2}}{\longrightarrow} \underset{c_1}{1} - \underset{c_4}{2} - \underset{c_5}{3} - \underset{c_2}{4} - \underset{c_3}{5} \overset{t_{3,4}}{\longrightarrow} \underset{c_1}{1} - \underset{c_4}{2} - \underset{c_2}{3} - \underset{c_5}{4} - \underset{c_3}{5}$$

$$\overset{t_{2,3}}{\longrightarrow} \underset{c_1}{1} - \underset{c_2}{2} - \underset{c_4}{3} - \underset{c_5}{4} - \underset{c_3}{5} \overset{t_{4,5}}{\longrightarrow} \underset{c_1}{1} - \underset{c_2}{2} - \underset{c_4}{3} - \underset{c_3}{4} - \underset{c_5}{5}$$

$$\overset{t_{3,4}}{\longrightarrow} \underset{c_1}{1} - \underset{c_2}{2} - \underset{c_3}{3} - \underset{c_4}{4} - \underset{c_5}{5}$$

   On peut ainsi passer de $\underset{c_1}{1} - \underset{c_2}{2} - \underset{c_3}{3} - \underset{c_4}{4} - \underset{c_5}{5}$ à $\underset{c_4}{1} - \underset{c_5}{2} - \underset{c_1}{3} - \underset{c_2}{4} - \underset{c_3}{5}$ en appliquant successivement $t_{3,4}, t_{4,5}, t_{2,3}, t_{3,4}, t_{1,2}, t_{2,3}$.
   De façon plus générale, on peut ramener une coloration $(c_{k_1}, c_{k_2}, \ldots, c_{k_n})$ d'un archipel en chaîne élémentaire à la coloration $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ en ramenant la couleur c_1 sur l'île 1 par une succession de transpositions $t_{i,i+1}$ puis la couleur c_2 sur l'île 2 (on ne pertubera pas l'emplacement de la

couleur c_1 car on ne fera intervenir à ce stade que des transpositions $t_{i,i+1}$ avec $i \geq 2$) puis la couleur c_3 sur l'île 3 ...
On a ainsi établi que les transpositions (et même plus précisément les transpositions $t_{1,2}$, $t_{2,3}$, $t_{3,4}$, ..., $t_{n-1,n}$) engendraient le groupe des permutations.

2. Passons à un archipel quelconque, le graphe "sommets=îles,arêtes=ponts" étant un arbre.
Soient a et b deux îles ($1 \leq a \leq n,\ 1 \leq b \leq n$). Montrons que la transposition $t_{a,b}$ est réalisable : par connexité de l'arbre, il existe une chaîne $a - i_1 - i_2 - \cdots - i_k - b$ et on vérifie facilement que

$$t_{a,b} = t_{b,i_k} \circ t_{i_k,i_{k-1}} \circ t_{i_{k-1},i_{k-2}} \circ \ldots t_{i_2,i_1} \circ t_{i_1,a} \circ t_{i_1,i_2} \circ t_{i_2,i_3} \circ \ldots t_{i_{k-1},i_k} \circ t_{i_k,b}$$

Ainsi toute transposition de couleurs est réalisable (et en particulier les transpositions $t_{i,i+1}$) et donc toute permutation de couleurs est réalisable avec la première partie.

Remarque. Soit $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, T un ensemble de $n-1$ transpositions des éléments de $\mathbb{N}_n$ et soit G_n le graphe dont les sommets sont les éléments de $\mathbb{N}_n$, deux sommets étant reliés ssi il existe dans T une transposition entre ces deux sommets. On a établi plus haut que si G_n est un arbre, alors T engendre le groupe des permutations sur $\mathbb{N}_n$.
Réciproquement, si G_n n'est pas un arbre, alors T n'engendre pas le groupe des permutations sur $\mathbb{N}_n$. En effet, avec $n-1$ arêtes, G_n n'est pas un arbre signifie que G_n n'est pas connexe. Il existe donc au moins deux sommets a et b non reliés par une chaîne et un produit de transpositions de T ne donnera jamais la transposition $t_{a,b}$.

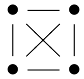
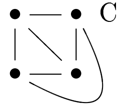
■

Chapitre 10

Graphes planaires.

10.1 Définition

f étant une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^2$, on appelle courbe planaire (d'extrémités $f(0)$ et $f(1)$) l'image $f([0,1])$.
On dit que la courbe planaire est simple lorsque f est injective sur $[0,1[$ (en d'autres termes, la courbe ne se coupe pas).
La courbe planaire est dite fermée (ou boucle en x) lorsque $f(0) = f(1) = x$.
Appelons figure planaire un couple (S, R) où $S \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble fini de points (ensemble des sommets) et où $R \subset \mathbb{R}^2$ est la réunion d'un nombre fini de courbes planaires simples dont les extrémités sont des éléments de S, deux quelconques de ces courbes n'ayant pas de point commun en dehors des extrémités.
Un graphe sera dit planaire s'il admet au moins une représentation géométrique dans le plan qui soit une figure planaire (en termes simples : le graphe est planaire si on peut le dessiner dans le plan sans que les arêtes se coupent).
Dans ce chapitre, le lecteur voudra bien juguler son besoin de rigueur et laisser parler son intuition, notamment en ce qui concerne les arguments topologiques. Pour aller plus loin, le livre de R.Diestel [2], par exemple, donne un exposé plus rigoureux de ces questions.
La figure planaire représentant un cycle élémentaire permet de définir une courbe planaire fermée simple.

Exemple.
Le graphe K_4  est planaire, une représentation planaire :  Cette représentation présente quatre faces : trois bornées et une non bornée.
Problème : ce nombre de faces dépend-il de la représentation choisie ?

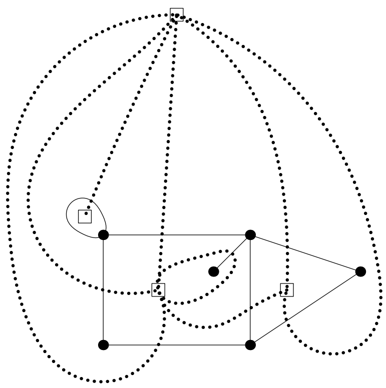
10.2 Le théorème de Jordan

Les raisonnements concernant les graphes planaires s'appuient sur le théorème de Jordan (intuitif mais dont la démonstration est loin d'être évidente) : le complémentaire dans $\mathbb{R}^2$ d'une courbe planaire fermée simple Γ est la réunion disjointe de deux régions (ouverts connexes), l'une bornée et l'autre non (on les appelle intérieur et extérieur de Γ). Γ est la frontière des deux régions.
Les deux régions sont connexes par arcs (deux points d'une même région peuvent toujours être reliés par une courbe planaire simple entièrement contenue dans la région), toute courbe planaire ayant au moins un point dans chacune des deux régions coupe la frontière Γ (passage des douanes)...
On peut alors établir, avec des arguments de topologie, des liens entre graphe planaire et représentation planaire (ce qui ne sera pas fait ici). Par exemple :
Soit G une représentation planaire d'un graphe, et e une courbe-arête de cette représentation.

- L'ajout (ou la suppression) d'une feuille à la représentation planaire n'ajoute pas de face.
- Un graphe connexe planaire est un arbre ssi ses représentations planaires ont une unique face.
- Si e appartient à un cycle élémentaire C alors e est sur la frontière de deux faces de G exactement (faces contenues dans des faces distinctes de C) et la suppression de e soude ces deux faces en une seule face.
- Si e n'appartient pas à un cycle alors e est sur la frontière d'une unique face de G.
- Pour un graphe planaire connexe sans sommet dont la suppression déconnecterait le graphe, toutes les faces ont pour frontière un cycle élémentaire.
- ...

10.3 Dual d'un graphe planaire

On a représenté ci-dessous un graphe planaire G (sommets : disques, arêtes : traits continus) et son dual G^* (sommets : carrés, arêtes : traits pointillés).



On construit G^* à partir de G en mettant un sommet-carré f^* dans chaque face f de la représentation planaire de G et en reliant deux sommets-carrés par une arête-pointillée e^* lorsque les deux faces correspondantes de G ont une arête e (trait continu) en frontière commune, l'arête e^* est tracée de façon à couper une

fois e (et seulement cette arête de G), les tracés se faisant de façon à ce que G^* soit planaire (nous admettons ici que cela est réalisable).
Les isthmes de G donne des boucles dans G^* et vice-versa.
On peut établir que G^* est connexe lorsque G est connexe et que $(G^*)^* \cong G$ lorsque G est connexe.
On définit le degré d'une face de G par $d(f) = d(f^*)$, en d'autres termes le degré de la face f est le nombre d'arêtes bordant la face f, une arête contenue dans f (un isthme) étant comptée deux fois. Sur la figure, les trois faces bornées de G ont pour degrés 1, 3 et 6, la face non bornée a pour degré 6. Le lemme des poignées de mains appliqué au dual donne : somme des degrés des faces= double du nombre d'arêtes. Ce que l'on retrouve directement en considérant qu'une arête borde deux faces et que celles qui n'en bordent qu'une sont justement comptées deux fois.

10.4 La formule d'Euler pour les graphes planaires

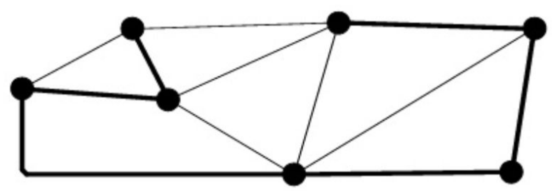
10.4.1 La formule

Pour une représentation planaire d'un graphe connexe G à s sommets, a arêtes et f faces, on a :

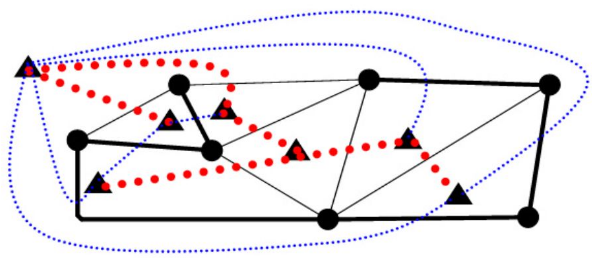
$$f + s = a + 2$$

Schéma de preuve.

1. Soit G une représentation planaire d'un graphe planaire et T un arbre couvrant de G (sur la figure ci-dessous, arêtes d'un arbre couvrant en gras).

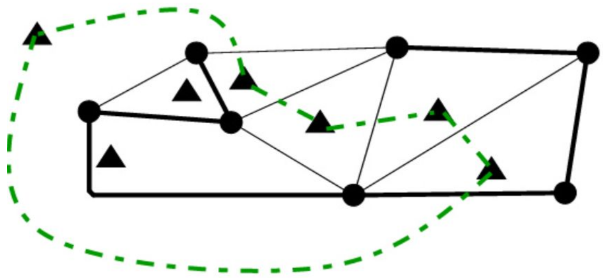


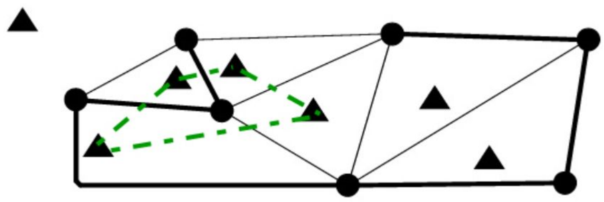
2. On définit le graphe dual G^* du graphe plan G (arêtes pointillées).



3. On considère le sous-graphe T^* de G^* dont les arêtes sont les arêtes de G^* coupant les arêtes de G qui ne sont pas arêtes de T (sur le dessin, les arêtes de T^* sont les arêtes en pointillés épais).

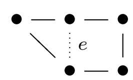
4. Les arêtes de T^* relient tous les sommets-triangles. En effet si un sommet-triangle n'était relié à aucun autre sommet-triangle par une arête-pointillés épais, c'est que la face de G correspondant à ce triangle aurait toutes ses arêtes bordantes en gras continu, ce qui n'est pas possible car T n'a pas de cycle. Des considérations analogues montrent que T^* est connexe.
5. On admettra ici que T^* n'a pas de cycle.
   L'idée : un cycle élémentaire de G^* (exemples sur les deux dessins ci-dessous en arêtes tiretées) coupe un ensemble d'arêtes de G dont la suppression déconnecterait G. Or une chaîne de G^* ne faisant intervenir que des arêtes de T^* ne coupe que des arêtes de G qui ne sont pas arêtes de T, la suppression de telles arêtes ne déconnectera pas G (car T est un arbre couvrant de G et tout sommet de G peut donc être lié à tout sommet de G par une chaîne de T).





6. T^* est donc un arbre couvrant de G^*.
7. Notons $a(T)$ le nombre d'arêtes de T et $a(T^*)$ le nombre d'arêtes de T^*. Le nombre de sommets de G^* étant f, on a : $a(T) = s - 1$ et $a(T^*) = f - 1$, d'où $a(T) + a(T^*) = (s - 1) + (f - 1)$. Or par construction de T^* : $a(T) + a(T^*) = a$. On a donc : $a = (s - 1) + (f - 1)$.

Autre schéma de preuve.
Par récurrence sur le nombre f de faces de la représentation planaire.
Si $f = 1$, le graphe G est un arbre, donc $a = s - 1$ et $s + f = a + 2$.
Supposons le résultat vrai pour tout graphe plan de $f - 1$ faces, $f \geq 2$.
Soit G un graphe plan à f faces. Comme $f \geq 2$, G n'est pas un arbre et contient au moins un cycle élémentaire C. Soit e une arête de C.



e appartient à deux faces f_1 et f_2 et la suppression de l'arête e forme une seule face constituée des deux faces f_1 et f_2. Par ailleurs e étant une arête d'un cycle élémentaire, la suppression de e ne disconnecte pas le graphe. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence au graphe $G' = G - e$ qui a $f - 1$ faces. D'où : $s + (f - 1) = (a - 1) + 2$ soit $s + f = a + 2$.

Autre schéma de preuve.

Soit E l'ensemble des arêtes d'un graphe connexe G et $\mathcal{E} = \mathcal{F}(E, \mathbb{F}_2)$ l'ensemble des applications de E dans le corps $\mathbb{F}_2 = \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ à deux éléments. $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{F}_2$. En identifiant les éléments de $\mathcal{E}$ à des fonctions indicatrices, l'addition de deux éléments de $\mathcal{E}$ peut s'interpréter comme la différence symétrique de deux parties de E.

On définit par ailleurs l'espace des cycles $\mathcal{C}$, sous-espace de $\mathcal{E}$ engendré par les cycles élémentaires (c'est à dire engendré par les parties de E engendrant un cycle élémentaire de G). A désignant un arbre couvrant de G (donc avec $s - 1$ arêtes), on sait que chacune des $a - (s - 1)$ arêtes manquantes ajoutée à l'arbre définira un unique cycle. On établit alors que les $a - s + 1$ cycles ainsi définis forment une base de l'espace des cycles, qui est donc de dimension $\nu = a - s + 1$. Enfin, si le graphe est planaire, on peut établir que les "contours" des faces bornées définissent une base de l'espace des cycles, d'où $f - 1 = \nu$, c'est la formule d'Euler.

(le nombre $\nu = a - s + 1$ est appelé nombre cyclomatique du graphe, pour un graphe ayant c composantes connexes, on a $\nu = a - s + c$)

Remarque.

- Comme $f = a - s + 2$, f ne dépend pas de la représentation planaire choisie et on pourra parler du nombre de faces du graphe planaire.
- Pour un graphe planaire non connexe, la formule devient : $f + s = a + 1 + c$ où c est le nombre de composantes connexes du graphe.
  On peut justifier cela à partir du résultat précédent en reliant, sur une représentation plane du graphe, les c composantes connexes par $c - 1$ nouvelles arêtes, on ne crée ainsi pas de cycle donc on ne crée pas de nouvelle face. On applique à ce nouveau graphe la formule pour les graphes connexes : $f + s = (a + c - 1) + 2$.

10.4.2 Polyèdres réguliers

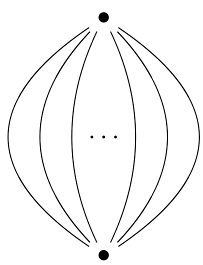
1. La formule $s - a + f = 2$ valable pour les polyèdres convexes bornés est un cas particulier de la formule pour les graphes planaires.
2. Déterminer les graphes planaires connexes réguliers (c'est à dire dont tous les sommets ont même degré d) et dont le dual est régulier également (toutes les faces ont même degré d^*).

Résolution.

1. **Schéma de preuve.** Soit G un point intérieur au polyèdre convexe et S une sphère centrée en G et de rayon suffisamment grand pour contenir tout le polyèdre. A chaque sommet et chaque point M d'une arête du polyèdre, on associe l'unique point de S intersection de S et de la demi-droite $[GM)$.

On obtient ainsi un plongement du graphe du polyèdre sur la sphère (c'est à dire une représentation sur la sphère sans croisement des arêtes). Fixons alors un "pôle nord"P sur la sphère (en dehors de la représentation du graphe du polyèdre) et effectuons une projection stéréographique sur un plan à partir de ce pôle nord , on obtient ainsi une représentation planaire du graphe du polyèdre convexe *(Ω désignant le centre de la sphère et Π le plan orthogonal au rayon $[\Omega P]$ passant par Ω, la projection stéréographique associe à tout point M ($\neq P$) de la sphère le point d'intersection entre le plan Π et la droite (ΩM), l'application ainsi définie est un homéomorphisme de la sphère privée du pôle nord sur le plan).*

2. a étant le nombre d'arêtes, s le nombre de sommets et f le nombre de faces, on a $2a = sd$ (lemme des poignées de mains) et $2a = fd^*$ (c'est aussi le lemme des poignées de mains, appliqué au graphe dual). La formule d'Euler $s + f - a = 2$ donne alors $\dfrac{2a}{d} + \dfrac{2a}{d^*} - a = 2$ soit $\dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{d^*} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{2}$.
   On ne peut avoir $d \geq 4$ et $d^* \geq 4$ (sinon $\frac{1}{d} + \frac{1}{d^*} \leq \frac{1}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{2}$).
   Donc $d \leq 3$ ou $d^* \leq 3$.
   - Si $d = 1$, tous les sommets sont de degré 1 et un graphe connexe dont les sommets sont de degré 1 ne peut être que K_2 : $\bullet - \bullet$.
     Si $d^* = 1$, le graphe est une boucle en l'unique sommet.
   - Si $d = 2$, on a obtient $s = d^* = a$ quelconque (≥ 3) et $f = 2$. Il s'agit d'un cycle élémentaire.
     Si $d^* = 2$, on obtient $d = a = f$, $s = 2$. Il s'agit du graphe dual du précédent :



   - Résumons par un tableau les autres cas possibles, on retrouve le fait qu'il ne peut y avoir plus de cinq polyèdres réguliers :

d	d^*	s	a	f	appellation
3	3	4	6	4	tétraèdre
3	4	8	12	6	cube
3	5	20	30	12	dodécaèdre
4	3	6	12	8	octaèdre
5	3	12	30	20	icosaèdre

     De tels graphes planaires existent...les dessiner.

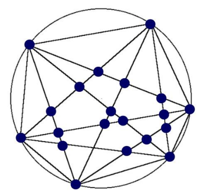
∎

10.4.3 Régionnement de l'intérieur d'un cercle

On dira que n points sont en position générale lorsque trois droites quelconques (prises parmi les $\binom{n}{2}$ droites définies par les n points) ne sont jamais concourantes.
On place n points sur un cercle en position générale et on trace les $\binom{n}{2}$ cordes possibles. En combien de régions l'intérieur du cercle est-il ainsi découpé ?

Résolution.

1. Tout choix de quatre points sur le cercle définit un unique quadrilatère convexe dont les diagonales se coupent à l'intérieur du cercle, on définit ainsi $\binom{n}{4}$ points comme intersection de diagonales (ces points ne coïncident jamais puisque les n points sur le cercle sont en position générale).
2. On associe à cette situation un graphe planaire comme le suggère la figure ci-dessous.



Il y n sommets sur le cercle, de degré $n+1$ (les arêtes adjacentes à un tel sommet : $n-1$ cordes+ deux arcs de cercle) et il y a $\binom{n}{4}$ sommets intérieurs, tous de degré 4.
3. Le lemme des poignées de mains donne :

$$4 \times \binom{n}{4} + n \times (n+1) = 2 \times a$$

où a est le nombre d'arêtes du graphe.
4. La formule d'Euler donne :

$$n + \binom{n}{4} + f = 2 + a$$

5. Donc le nombre de régions internes au cercle est

$$f - 1 = 1 - n - \binom{n}{4} + 2 \times \binom{n}{4} + \frac{1}{2} n\,(n+1) = 1 + \frac{1}{2} n(n-1) + \binom{n}{4}$$

6. Cela donne pour les premières valeurs de $n \geq 2$: 2, 4, 8, 16, 31 ...

■

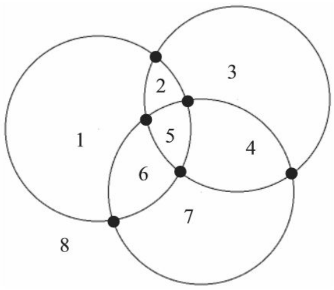
10.4.4 Régionnement du plan par des cercles

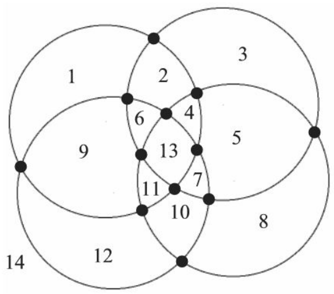
On trace $c \geq 3$ cercles se coupant deux à deux en deux points et tels que trois quelconques d'entre eux ne passent jamais par un même point.

1. Nombre de régions ainsi formées dans le plan ?
2. Quel est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier ces régions de façon à ce que deux régions ayant une frontière commune aient des couleurs différentes ?

Résolution.

1. On définit un graphe planaire comme le suggère les dessins ci-dessous.

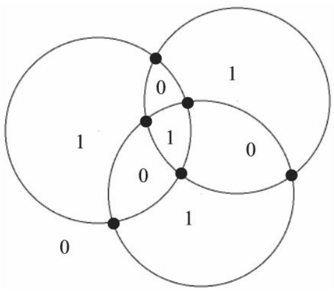


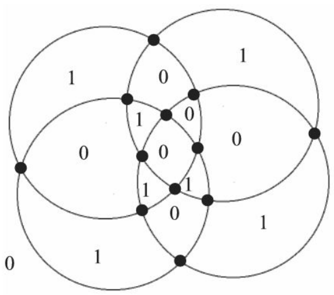


Deux cercles quelconques définissent deux sommets du graphe. Le graphe a donc $s = 2 \times \binom{c}{2} = c(c-1)$ sommets, tous de degré 4.
Le lemme des poignées de mains donne $4s = 2a$ (où a est le nombre d'arêtes du graphe).
La formule d'Euler donne le nombre de régions du plan :

$$f = a - s + 2 = s + 2 = c^2 - c + 2$$

2. *(extrait de "Problèmes pour mathématiciens petits et grands" de Paul Halmos (éditions Cassini))*
Deux couleurs suffisent.
Convenons de colorier en noir (0) les zones se trouvant à l'intérieur d'un nombre pair de cercles et en blanc (1) les zones dans l'intérieur d'un nombre impair de cercles.
Si on traverse une frontière (en dehors d'un sommet du graphe), le nombre de cercles à l'intérieur duquel on se trouve augmente ou diminue d'une unité et la couleur est donc modifiée.





■

10.4.5 Des inégalités conséquences de la formule d'Euler

Soit G un graphe planaire simple et connexe ayant a arêtes, $s \geq 3$ sommets et f faces.

1. $3f \leq 2a$
2. $a \leq 3s - 6$
3. Si G est sans triangle alors $a \leq 2s - 4$.
4. $\delta(G)$ (degré minimum des sommets) est d'au plus cinq.

Preuve.

1. Notons d_1^*, d_2^*, …, d_f^* les degrés des faces. On a $2a = \sum_{1 \leq i \leq f} d_i^*$ (lemme des poignées de mains dans le dual) et chaque face est délimitée par au moins trois arêtes (car G connexe et G a au moins trois sommets (et on compte double les arêtes ne bordant qu'une face)) donc $\sum_i d_i^* \geq 3f$ d'où $2a \geq 3f$.
2. Avec $f \leq \frac{2a}{3}$ et la formule d'Euler $a = s + f - 2$ on obtient : $a \leq s + \frac{2a}{3} - 2$ soit $a \leq 3s - 6$.
3. Si G est sans triangle, chaque face est délimitée par au moins quatre arêtes et l'inégalité $\sum_i d_i^* \geq 3f$ peut s'améliorer en $\sum_i d_i^* \geq 4f$, d'où $4f \leq 2a$. Avec $f \leq \frac{a}{2}$ et la formule d'Euler $a = s + f - 2$ on obtient : $a \leq s + \frac{a}{2} - 2$ soit $a \leq 2s - 4$.
4. Si le graphe G a au plus 6 sommets, il est alors clair que $\delta(G) \leq 5$. Si G a au moins 7 sommets, on a $a \leq 3s - 6$ et

$$\delta \times s \leq \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2a \leq 2\,(3s - 6) = 6s - 12$$

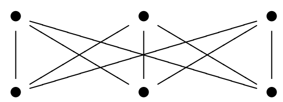
   donc $s\,(\delta - 6) \leq -12$ et $\delta < 6$.

■

10.4.6 Les trois fermes et les 9 chemins

Trois familles, aux haines ancestrales, veulent chacune un chemin de leur ferme à la fontaine, un chemin de leur ferme au moulin et un chemin de leur ferme au four. Peuvent-ils les tracer de façon à ce qu'aucun des 9 chemins ne se croise ?

Résolution.



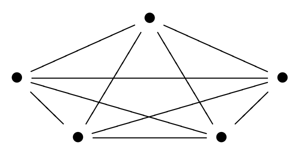
$K_{3,3}$

La question serait posée il y a quelques siècles, époque à laquelle, comme chacun sait, la Terre était plate, il s'agirait de savoir si $K_{3,3}$ est planaire ou non.
Si la question est posée aujourd'hui, alors que la Terre est à peu près sphérique, la question ne semble pas a priori la même (bien qu'en imposant une longueur "raisonnable" des chemins, on peut considérer qu'il s'agit d'un problème plan)...
En fait, on peut montrer (en utilisant une projection stéréographique) qu'un graphe est planaire ssi on peut le représenter sur la sphère sans croisement d'arêtes .
Cela dit, réglons le problème : l'inégalité $a \leq 2s - 4$ montre que $K_{3,3}$ (sans triangle car biparti) n'est pas planaire puisque pour ce graphe $a = 9$ et $2s - 4 = 8$.

■

10.4.7 Caractérisation des graphes planaires

$K_{3,3}$ n'est pas planaire et l'inégalité $a \leq 3s - 6$ montre que K_5



K_5

n'est pas planaire puisque pour ce graphe $a = 10$ et $3s - 6 = 9$.
Un théorème de Kuratowski de 1930 montre qu' un graphe est planaire ssi il ne contient pas de subdivision de K_5 ou $K_{3,3}$ (une subdivision du graphe simple G étant un graphe simple obtenu à partir de G en "ajoutant" des sommets sur les arêtes de G).

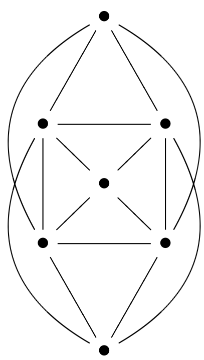
10.5 Nombre minimum de croisements

10.5.1 Quelques exemples

1. D'après 10.4.7, le graphe complet K_6 n'est pas planaire...Quel est le nombre minimal de croisements d'arêtes dans une représentation de K_6 dans le plan ?

2. La représentation du graphe suivante est-elle minimale en ce qui concerne

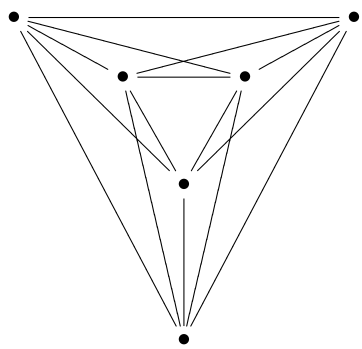
le nombre de croisements d'arêtes ?



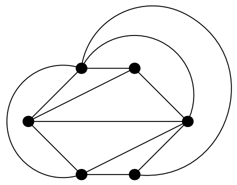
3. Montrer, en utilisant 10.4.5 (2), qu'un tracé de K_{15} dans le plan fera apparaître au moins 93 croisements d'arêtes.
4. Pour un graphe simple G, on note $cr(G)$ le nombre minimum d'intersections (ou nombre minimum de croisements) d'arêtes possible lorsqu'on représente G dans le plan. Par exemple un graphe planaire est un graphe tel que $cr(G) = 0$.
   Montrer que $cr(G) \geq a - 3s + 6$ (où a est le nombre d'arêtes et s le nombre de sommets de G).

Résolution.

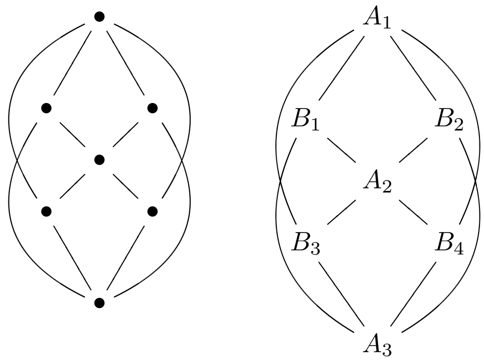
1. Supposons que l'on ait une représentation dans le plan sans croisement d'arêtes d'un sous-graphe $\mathcal{K}$ d'ordre 6 de K_6, avec le maximum k d'arêtes possible pour un tel graphe. Alors $k \leq 12$, en effet un graphe planaire simple à 6 sommets a au plus $3s - 6 = 12$ arêtes d'après 10.4.5. Les $15 - k \geq 3$ arêtes manquantes pour obtenir les 15 arêtes de K_6 couperont nécessairement les arêtes de $\mathcal{K}$ (sinon on obtient un graphe planaire simple à 6 sommets avec strictement plus de k arêtes, c'est impossible). Dans toute représentation dans le plan de K_6, il y aura donc au moins 3 croisements d'arêtes. Et 3 est le minimum cherché comme le montre alors la représentation suivante :

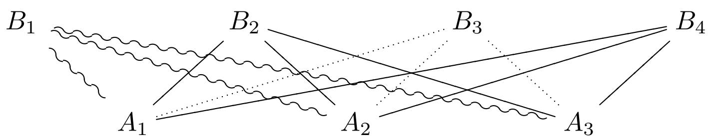


Remarque. Le nombre k est égal à 12 comme le montre la représentation suivante :



2. Le graphe G proposé a 7 sommets et 16 arêtes. Un graphe planaire simple ayant 7 sommets a au plus $a = 3s - 6 = 15$ arêtes. Le même raisonnement que ci-dessus nous amène à affirmer qu'il y aura toujours au moins un croisement d'arêtes dans une représentation de G dans le plan...on ne peut pas avec cela conclure.
   Mais supprimons quelques arêtes de notre graphe G :





   On a ainsi obtenu un sous-graphe $\mathcal{K}$ sans triangle : on le vérifie en considérant chacune des $\binom{7}{3} = 35$ possibilités de triangles ou en constatant que $\mathcal{K}$ est biparti (donc sans triangle) comme le montre la dernière représentation.
   Supposons que l'on ait un sous-graphe $\mathcal{H}$ de $\mathcal{K}$ planaire et avec le maximum k d'arêtes possibles. $\mathcal{H}$ est planaire, simple, sans triangle et d'ordre 7 donc $k \leq 2s - 4 = 10$. Les $12 - k \geq 2$ arêtes manquantes pour obtenir $\mathcal{K}$ devront croiser les arêtes de $\mathcal{H}$. Donc une représentation de $\mathcal{K}$ dans le plan présentera au moins deux croisements d'arêtes, et G contenant ce graphe $\mathcal{K}$ aura ses représentations dans le plan présentant au moins deux croisements d'arêtes...le dessin proposé présentait donc le nombre minimum de croisements.

3. Supposons que l'on ait une représentation dans le plan sans croisement d'arêtes d'un sous-graphe $\mathcal{K}$ d'ordre 15 de K_{15}, avec le maximum k d'arêtes possible pour un tel graphe. Alors $k \leq 3s - 6 = 3 \times 15 - 6 = 39$. Les $105 - k \geq 66$ arêtes manquantes pour obtenir les 105 arêtes de K_{15} couperont nécessairement les arêtes de $\mathcal{K}$. Dans toute représentation dans le plan de K_{15}, il y aura donc au moins 66 croisements d'arêtes...cela ne nous donne pas le minorant 93 annoncé.
   Notons $\mathcal{H}$ le sous-graphe de K_{15} obtenu en supprimant les arêtes de $\mathcal{K}$. $\mathcal{H}$ est un graphe d'ordre 15 ayant $105 - k$ arêtes. Le raisonnement fait sur

K_{15} peut-être appliqué à $\mathcal{H}$: soit $\mathcal{K}'$ un sous-graphe planaire de $\mathcal{H}$ avec le maximum $k' \leq 39$ d'arêtes possible. Une représentation de $\mathcal{H}$ dans le plan présentera au moins $(105 - k) - k' \geq 27$ croisements d'arêtes. Les $(105-k)-k' \geq 27$ croisements que l'on vient d'obtenir se font entre arêtes de $\mathcal{H}$, donc ne sont pas comptabilisées dans les $105 - k \geq 66$ croisements comptés plus haut (qui se faisaient sur des arêtes de $\mathcal{K}$, arêtes qui ont été supprimées pour définir $\mathcal{H}$). Il y aura donc au moins $66 + 27 = 93$ croisements d'arêtes dans une représentation de K_{15} sur un plan.

4. Considérons une représentation planaire de G réalisant $cr(G)$. Pour chaque paire d'arêtes se coupant, on ôte une des deux arêtes, on obtient ainsi un graphe planaire ayant au moins $a' = a - cr(G)$ arêtes. L'inégalité 2 de 10.4.5 donne alors $a' \leq 3s - 6$, soit $cr(G) \geq a - 3s + 6$.

■

10.5.2 crossing number theorem

Soit G un graphe simple à s sommets et a arêtes tel que $a \geq 4s$. Alors

$$cr(G) \geq \frac{1}{64}\frac{a^3}{s^2}$$

Preuve.

(illustration de la méthode probabiliste, méthode due à Paul Erdös)

Considérons un plongement de G dans le plan avec $cr(G)$ croisements. Soit H un sous graphe induit aléatoire de G obtenu en choisissant chaque sommet de G de façon indépendante avec une probabilité $p := 4s/a$. Définissons les variables aléatoires C, A, S par : C est le nombre de croisements, A le nombre d'arêtes, et S le nombre de sommets de H.

Calculons les espérances de ces variables *(on suppose que deux arêtes ayant un sommet commun ne se croisent pas et que deux arêtes données se croisent au plus une fois)* :

- C est la somme des variables aléatoires C_c définies pour chaque croisement c de G comme valant 1 si c existe encore dans H et 0 sinon. Alors $E(C_c) = P(C_c = 1) = p^4$, puisque chacun des quatre sommets définissant le croisement c a une probabilité p d'être conservé dans H. Finalement $E(C) = p^4 \times cr(G)$.
- $A = \sum_{e \text{ arête de G}} A_e$ où A_e vaut 1 si l'arête e existe encore dans H, et 0 sinon. Autrement dit A_e vaut 1 si les deux extrémités de l'arête sont dans H. Ainsi $E(A) = \sum_{e \text{ arête de G}} E(A_e) = p^2 \times a$.
- Enfin, $S = \sum_{x \text{ sommet de G}} S_x$ où S_x vaut 1 si le sommet x a été conservé dans H, et 0 sinon. Et donc $E(S) = \sum_{x \text{ sommet de G}} E(S_x) = p \times s$.

Pour tout graphe K, on a $cr(K) - a + 3s \geq 0$ d'après l'inégalité obtenue à la dernière question de l'exercice précédent. Appliqué à H, cela donne $C-A+3S \geq 0$, donc (positivité) $E(C - A + 3S) \geq 0$ et (linéarité) :

$$p^4 cr(G) - p^2 a + 3ps \geq 0$$

Finalement :

$$cr(G) \geq \frac{pa - 3s}{p^3} = \frac{s}{\left(\frac{4s}{a}\right)^3} = \frac{1}{64}\frac{a^3}{s^2}$$

■

10.6 Théorème des quatre couleurs.

10.6.1 le résultat

Tout graphe planaire admet une coloration en quatre couleurs (c'est à dire : a un nombre chromatique inférieur ou égal à 4).
Ce théorème a été établi en 1976 par Appel, Haken et Koch, leur preuve nécessite l'usage d'un ordinateur. En 1996 Robertson, Sanders, Seymour et Thomas ont réduit le nombre de cas à envisager mais leur preuve nécessite encore l'utilisation de l'ordinateur.
Si le résultat pour quatre couleurs est difficilement abordable, cela l'est beaucoup moins avec 6 ou 5 couleurs.

10.6.2 Théorème des six couleurs

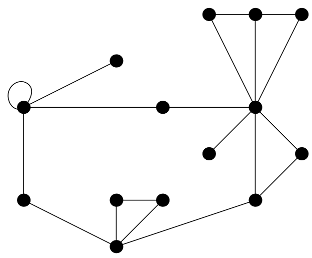
Tout graphe planaire a un nombre chromatique d'au plus 6.

Preuve.
Un graphe ayant au plus 6 sommets a clairement un nombre chromatique d'au plus 6.
Supposons que tout graphe planaire d'au plus n sommets ($n \geq 6$) a un nombre chromatique d'au plus 6.
Soit G un graphe planaire ayant $n+1$ sommets. Comme $\delta(G) \leq 5$, G a un sommet s de degré au plus 5. Le graphe $G-s$ admet une coloration en 6 couleurs, et s n'ayant qu'au plus 5 voisins, il reste une couleur libre pour compléter la coloration de $G-s$ en une coloration de G.

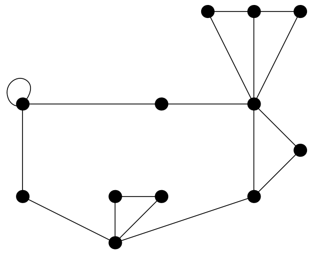
■

10.6.3 Théorème des cinq couleurs

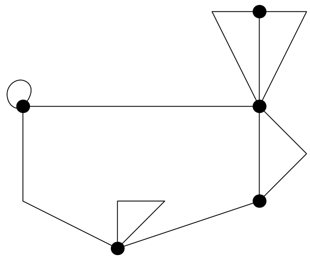
1. Pour changer, on donne la démonstration en termes de coloration de carte où on appellera carte la figure planaire représentant un graphe planaire connexe sans isthme. Par exemple dans le graphe planaire



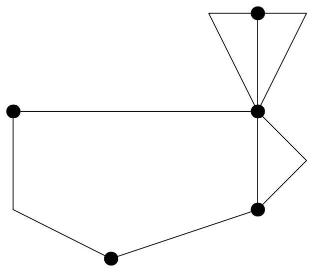
on supprime les isthmes pour obtenir une carte :



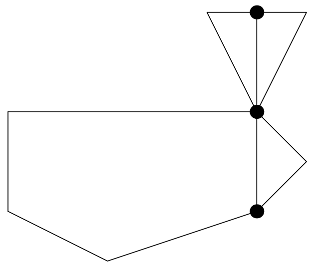
On cherche à colorier les pays d'une telle carte (c'est à dire les faces) de façon à ce que deux pays ayant une frontière commune soient de couleurs distinctes et en utilisant au plus cinq couleurs.
Bien entendu, un sommet de degré 2 ne change rien à l'affaire et on peut les supprimer :



Par ailleurs, une boucle est complètement contenue dans une face f , on peut donc choisir n'importe laquelle des quatre couleurs non utilisées pour f pour colorier l'intérieur de la boucle. Si on sait colorier avec cinq couleurs la carte sans les boucles, on sait donc la colorier avec les boucles. On peut donc supprimer les boucles :

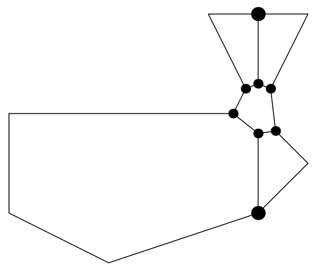


(et supprimer les éventuels sommets de degré 2 ainsi recréés)



On a ainsi obtenu un graphe dont tous les sommets sont de degré au moins 3.
Modifions alors le graphe de telle sorte que tous les sommets soient de

degré 3, comme ci-dessous (chaque sommet α de degré >3 est remplacé par un petit cycle avec un sommet par arête incindente à α) :



On ajoute ainsi des faces mais les anciennes faces ainsi que leurs adjacences sont conservées, donc si on sait colorier cette nouvelle carte, on sait colorier la précédente (il suffira de recontracter les petites faces créées en le sommet de départ).

2. Pour un graphe planaire connexe sans boucle pour lequel tous les sommets sont de degré 3, il existe au moins une face limitée par au plus 5 arêtes (c'est à dire $\delta(G^*) \leq 5$).

   Preuve : On note s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces, Φ_k le nombre de faces limitées par k arêtes : $f = \sum_{k\geq 2} \Phi_k$
   Une arête est une frontière entre deux faces, donc $2a = \sum_{k\geq 2} k\Phi_k$.
   Enfin, comme chaque sommet du graphe est de degré 3, chaque sommet est au centre de 3 faces ; donc $3s = \sum_{k\geq 2} k\Phi_k$ ($3s = 2a$ est aussi le lemme des poignées de mains).
   Des égalités qui précèdent, on tire avec la formule d'Euler $6(s - a + f) = 6 \times 2$:

$$2\sum_{k\geq 2} k\Phi_k - 3\sum_{k\geq 2} k\Phi_k + 6\sum_{k\geq 2} \Phi_k = 12$$

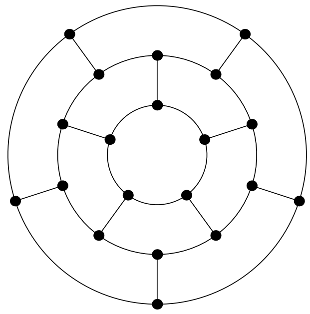
$$\sum_{k\geq 2} (6-k)\Phi_k = 12$$

$$4\Phi_2 + 3\Phi_3 + 2\Phi_4 + \Phi_5 - \Phi_7 - 2\Phi_8 - \cdots = 12$$

   ce qui s'écrit

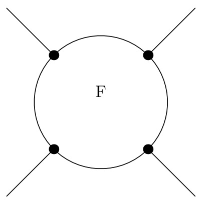
$$\Phi^+ = 12 + \Phi^-$$

   en notant $\Phi^+ = 4\Phi_2 + 3\Phi_3 + 2\Phi_4 + \Phi_5$ et $\Phi^- = \sum_{k\geq 7}(k-6)\Phi_k$.
   Comme tous les Φ_i sont positifs ou nuls, Φ^+ et Φ^- sont positifs ou nuls et $\Phi^+ = 12 + \Phi^-$ permet d'écrire qu'il existe au moins un des Φ_i avec $i \in \{2, 3, 4, 5\}$ qui est strictement positif, c'est à dire il existe au moins un pays ayant au plus 5 voisins.
   Un graphe tel que ci-dessous (toutes les faces sont de degré 5) montre qu'on ne peut pas améliorer le résultat $\delta(G^*) \leq 5$ dans le cas général :

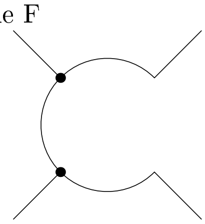


3. On peut alors démontrer le théorème des cinq couleurs en raisonnant par récurrence sur le nombre de faces d'un graphe (planaire, connexe, régulier de degré 3, sans boucle).
   Initialisation de la récurrence : un graphe avec au plus 5 faces ne pose pas de problème.
   Supposons donc qu'avec 5 couleurs, on peut colorier tout graphe (planaire, connexe, régulier de degré 3, sans boucle) ayant moins de n faces.
   Soit alors G un graphe de degré 3 à n faces. Il existe une face F de ce graphe limitée par au plus 5 arêtes.

   (a) Supposons que la face F soit de degré au plus 4.

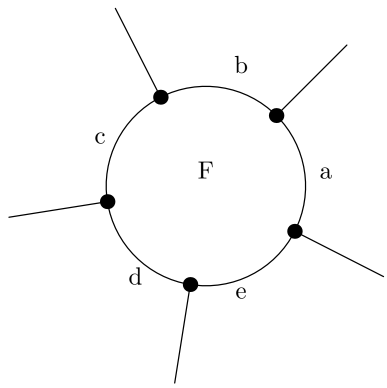
   

   – Supprimons une arête de F

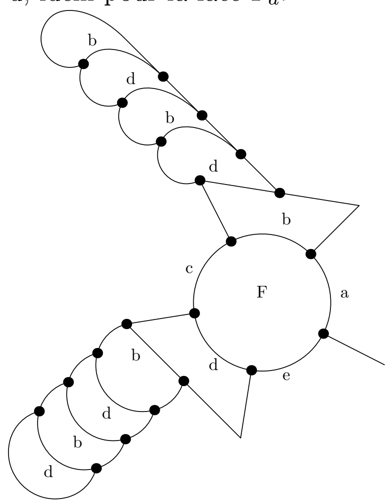
   

   – Le graphe contient alors moins de n faces ; il est donc 5-coloriable : colorions-le !
   – Reconstituons G en replaçant l'arête.
   – Comme F a au plus 4 pays voisins, il reste une couleur libre pour F.

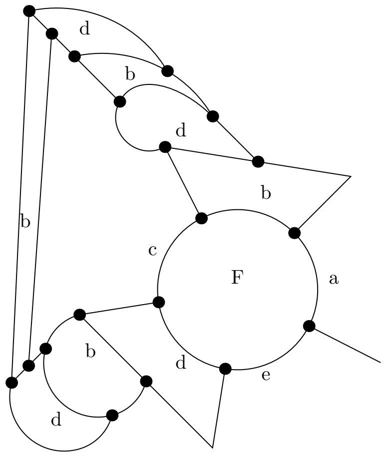
   (b) Il reste à étudier le cas où l'on n'a pas de faces de degré au plus 4. On a alors une face F de degré 5. On élimine de même que ci-dessus une arête de F, on colorie les faces de la carte obtenue et on remet l'arête de F.
   – Si parmi les faces adjacentes à F, deux ont la même couleur, tout va bien, puisqu'il reste une couleur disponible.
   – Il nous reste donc à examiner le cas où F possède exactement 5 arêtes, les faces adjacentes à F étant toutes de couleurs différentes.



Choisissons deux faces non adjacentes, par exemple les faces colorées b et d qu'on appellera F_b et F_d. Il peut y avoir une "série" de faces "'connectées" à la face F_b , ces faces étant "alternativement" colorées en b ou d, idem pour la face F_d.

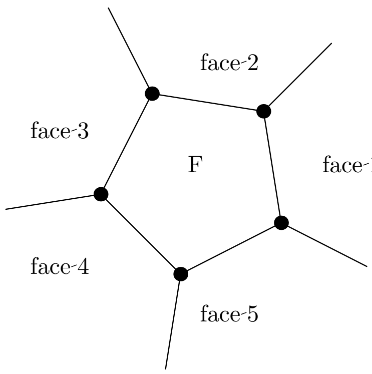


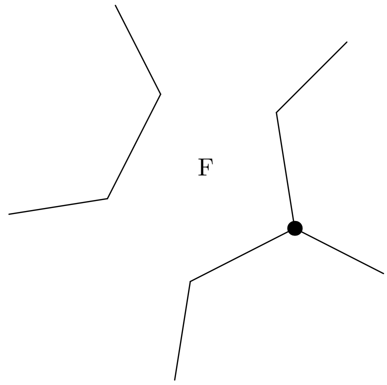
Si aucune des faces ainsi "connectées" à F_b n'est adjacente à une face "connectée" à F_d, alors on peut sur toutes les faces de couleur b ou d connectées à F_b intervertir les couleurs. La coloration ainsi obtenue est encore valide et les faces entourant F n'utilisent plus que quatre couleurs, il reste donc une couleur pour F.
Si par contre, des faces connectées à F_b et F_d colorées alternativement en b et d sont adjacentes :



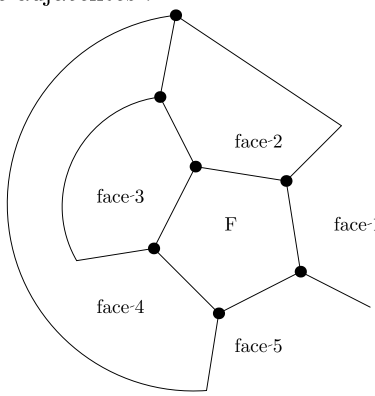
intervertir les couleurs b et d ne permet pas cette fois de réduire le nombre de couleurs adjacentes à la face F. Mais dans ce cas, les faces colorées c et a ne peuvent présenter cette propriété : les “chaînes de faces adjacentes colorées alternativement en a ou c” à F_a et F_c (définies de façon similaire à ce qui précède) sont “séparées” par la chaîne de faces liant F_b à F_d et colorées alternativement en b et d. Et donc on peut colorer c et a de la même couleur en intervertissant par exemple les couleurs a et c sur les faces de couleur a et c “connectées” à F_c.

– Autre rédaction pour résoudre le cas “face F de degré 5 entourée de cinq couleurs différentes”.
  La technique consistant à supprimer une arête pour appliquer l'hypothèse de récurrence n'étant pas suffisante, on peut penser à supprimer deux arêtes :





On colore cette nouvelle carte en cinq couleurs (hypothèse de récurrence), et on remet les deux arêtes : les faces 2 et 4 étant de la même couleur, on a terminé (il nous reste une couleur pour F)... Mais ce raisonnement n'est pas toujours valable car les faces 2 et 4 pourraient être adjacentes :



Mais dans ce cas, les faces 1 et 3 par exemple ne peuvent pas être adjacentes et on supprime les deux arêtes relatives à ces faces 1 et 3.

10.7 Graphes planaires hamiltoniens

10.7.1 Graphes hamiltoniens

On appelle cycle hamiltonien d'un graphe tout cycle élémentaire passant par tous les sommets du graphe.
On dit qu'un graphe est hamiltonien s'il possède un cycle hamiltonien.

10.7.2 La condition de Grinberg

Soit G un graphe planaire sans boucle et hamiltonien d'ordre s. Notons $\mathcal{C}$ un cycle hamiltonien, a' le nombre d'arêtes du graphe à l'intérieur de $\mathcal{C}$, f_i' le nombre de faces de G de degré i internes à $\mathcal{C}$ et f_i'' le nombre de faces de G de degré i à l'extérieur de $\mathcal{C}$.

1. Exprimer $\sum_{i=2}^{s} f_i'$ en fonction de a'.
2. Exprimer $\sum_{i=2}^{s} i f_i'$ en fonction de a' et s.

3. En déduire que $\sum_{i=2}^{s}(i-2)(f'_i - f''_i) = 0$.

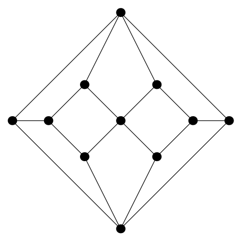
Résolution.

1. Le graphe est sans boucle donc $f'_1 = f''_1 = 0$. Par ailleurs toute face est de degré au plus s (cas du cycle élémentaire, obtenu ici lorsque les seules arêtes sont celles de $\mathcal{C}$).
   S'il n'y a aucune arête dans l'intérieur du cycle ($a' = 0$), il y a une seule face dans l'intérieur du cycle donc $\sum_{i=2}^{s} f'_i = a' + 1$. Supposons la formule $\sum_{i=2}^{s} f'_i = a' + 1$ vraie avec k arêtes à l'intérieur du cycle, et traçons une nouvelle arête interne au cycle : elle crée une nouvelle région interne au cycle (en partageant en deux la région qu'elle traverse). On a donc toujours $\sum_{i=2}^{s} f'_i = a' + 1$.
2. $\sum_{i=2}^{s} i f'_i = 2a' + s$. En effet dans la somme $\sum_{i=2}^{s} i f'_i$, les arêtes qui sont à l'intérieur du cycle sont comptées deux fois (une fois pour chacune des deux faces internes qu'elles bordent), tandis que les s arêtes du cycle sont chacune comptées une fois (puisque chacune d'elles ne borde qu'une face interne).
3. D'après les questions précédentes, on a : $\sum_{i=2}^{s} i f'_i = 2\left(\sum_{i=2}^{s} f'_i - 1\right) + s$ d'où $\sum_{i=2}^{s}(i-2) f'_i = s - 2$.
   Le même raisonnement fournit $\sum_{i=2}^{s}(i-2) f''_i = s - 2$ d'où la condition nécessaire pour qu'un graphe planaire sans boucle soit hamiltonien : $\sum_{i=2}^{s}(i-2)(f'_i - f''_i) = 0$.

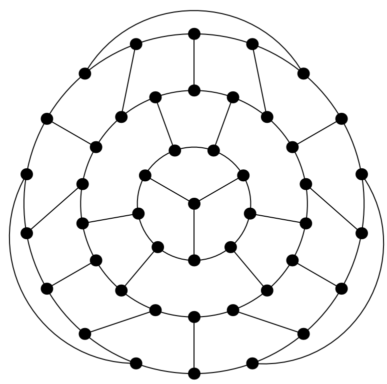
■

10.7.3 Quelques graphes non hamiltoniens

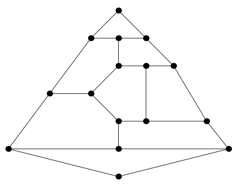
Etablir que les graphes ci-dessous sont non hamiltoniens.



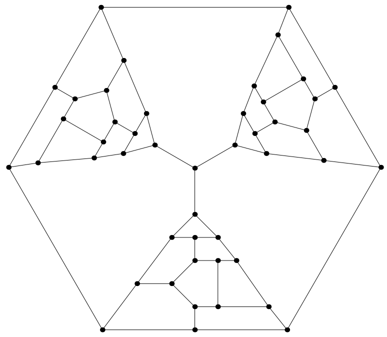
Graphe de Herschel



Graphe de Grinberg



et le graphe de Tutte

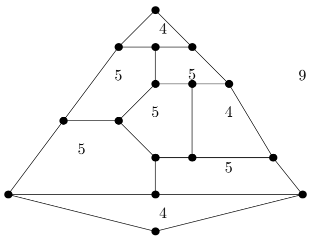


Résolution.

1. La représentation donnée du graphe de Herschel a 9 faces, toutes de degré 4. La condition de Grinberg s'écrit : $2(f_4' - f_4'') = 0$ c'est à dire $f_4' = f_4''$ ce qui est impossible puisque l'égalité $f_4' + f_4'' = 9$ montre que f_4' et f_4'' devraient être de parités distinctes. *(on peut aussi utiliser la méthode vue en 1.2 : le graphe est biparti d'ordre impair donc non hamiltonien)*
2. La représentation du graphe de Grinberg possède 3 faces de degré 8 (dans la deuxième couronne), la face non bornée est de degré 9, toutes les autres faces sont de degré 5. La condition nécessaire de Grinberg pour que le graphe ait un cycle hamiltonien s'écrit :

$$3(f_5' - f_5'') + 6(f_8' - f_8'') + 7(f_9' - f_9'') = 0$$

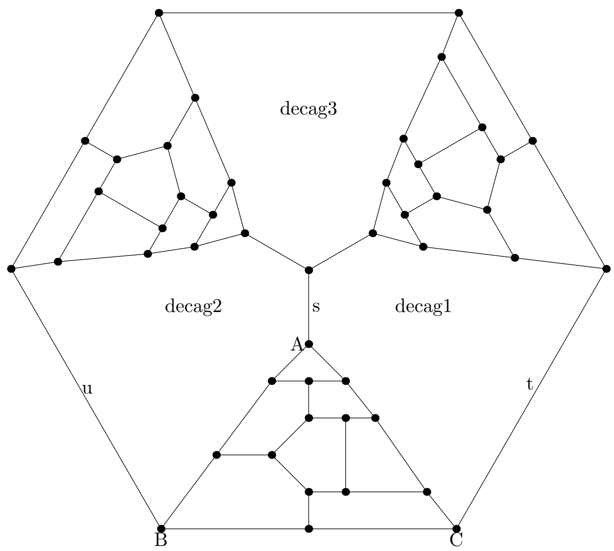
   Comme l'unique face de degré 9 est la face non bornée, elle est nécessairement extérieure au cycle et $f_9' = 0$, $f_9'' = 1$. L'égalité de Grinberg se réduit donc ici modulo 3 en $-7 \equiv 0 \mod 3$. Le graphe n'est donc pas hamiltonien.
3. On a marqué dans les faces les degrés de chacune d'elles.

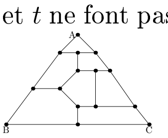


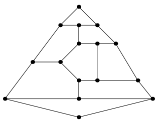
   La condition de Grinberg s'écrit $2(f_4' - f_4'') + 3(f_5' - f_5'') + 7(f_9' - f_9'') = 0$. La face de degré 9 étant ici la face à l'infini, on a $f_9' = 0$ et $f_9'' = 1$. On a donc $2(f_4' - f_4'') \equiv 7$ modulo 3 soit $2(f_4' - f_4'') \equiv 1$ modulo 3. Comme il y a trois faces de degré 4, on peut avoir pour (f_4', f_4'') les possibilités $(0,3)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(3,0)$ qui donnent pour $2(f_4' - f_4'')$ respectivement $-6, -2, 2, 6$ soit $0, 1, 2, 0$ modulo 3. On doit donc avoir $f_4' = 1$ et $f_4'' = 2$.
   Par ailleurs, chaque arête du cycle hamiltonien a d'un côté l'intérieur et de l'autre côté l'extérieur du cycle.
   Deux des faces de degré 4 ont un sommet de degré 2, le cycle hamiltonien devant passer par ce sommet devra passer par les deux arêtes qui lui sont incidentes. Et les arêtes incidentes à ce sommet de degré 2 ont d'un côté

la face de degré 9 qui est à l'extérieur, l'autre côté (la face de degré 4) est donc à l'intérieur. On a donc au moins deux faces de degré 4 à l'intérieur ce qui est en contradiction avec la valeur $f_4' = 1$ obtenue plus haut.
Le graphe n'est donc pas hamiltonien.

4. Supposons que le graphe de Tutte ait un cycle hamiltonien $\mathcal{C}$.



Supposons qu'au moins deux des "décagones" de la représentation (par exemple les numéros 1 et 2) soient à l'extérieur du cycle. Alors l'arête notée s est contenue dans l'extérieur du cycle (puisque bordant deux "parties extérieures") et ne fait donc pas partie des arêtes de $\mathcal{C}$. De même, les arêtes u et t ont d'un côté la face non bornée (nécessairement à l'extérieur du cycle) et de l'autre un décagone supposé extérieur, donc ces deux arêtes u et t ne font pas partie du cycle $\mathcal{C}$. On se retrouve alors avec le sous-graphe  (qu'on notera G_{ABC}) sans arête de $\mathcal{C}$ le reliant au reste du graphe. C'est évidemment impossible, $\mathcal{C}$ étant hamiltonien.
Il y a donc au plus un décagone à l'extérieur du cycle, c'est à dire qu'il y en a exactement deux à l'intérieur. On peut supposer qu'il s'agit des décagones 1 et 2. Alors l'arête s, bordée par ces décagones intérieurs, est contenue dans l'intérieur du cycle et n'est pas une arête de $\mathcal{C}$. On en déduit que le cycle $\mathcal{C}$ relie G_{ABC} au reste du graphe par les arêtes u et t. Le cycle $\mathcal{C}$ doit donc "entrer" dans G_{ABC} par B, parcourir tous les sommets de G_{ABC} par une chaîne élémentaire et ressortir par C pour rejoindre le reste du graphe de Tutte. On peut donc extraire de $\mathcal{C}$ une chaîne hamiltonienne de G_{ABC} (chaîne élémentaire passant par tous les sommets de G_{ABC}) d'extrémités B et C.
Ceci est impossible. En effet si c'était possible, en ajoutant un sommet ω que l'on relie à B et C et en fermant la chaîne hamiltonienne de G_{ABC} à l'aide de ces deux nouvelles arêtes, on obtient un cycle hamiltonien du

graphe  dont on a vu qu'il n'est pas hamiltonien.

■

Chapitre 11

Initiation aux jeux de Nim

11.1 Jeu sur un graphe orienté

11.1.1 Exemple 1.

Deux joueurs (A et B). Le point de départ est le sommet 0 sur lequel l'unique pion du jeu est posé. Les "coups" possibles correspondent aux flèches. Le joueur A commence : il déplace le pion le long d'une flèche, puis B joue, puis A ...Un joueur qui ne peut plus jouer a perdu.

$$\begin{tikzcd}
 & 3 \arrow[dl] & & 5 \arrow[dr] & & \\
4 & & 2 \arrow[ul] \arrow[ur] & & 6 \arrow[r] & 7 \\
 & 0 \arrow[r] & 1 \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

Il y a ici deux parties possibles.
Partie 1 :

$$0 \xrightarrow{A} 1 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 3 \xrightarrow{B} 4$$

Dans cette partie, B gagne puisque le pion étant sur le sommet 4, c'est au tour de A de jouer et A est bloqué.
Partie 2 :

$$0 \xrightarrow{A} 1 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 5 \xrightarrow{B} 6 \xrightarrow{A} 7$$

Dans cette partie, A gagne puisqu'à la fin c'est au tour de B de jouer et qu'il est bloqué.

11.1.2 Exemple 2.

$$\begin{tikzcd}
4 \arrow[d] & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 3 \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Il y a ici une infinité de parties possibles.
Une partie infinie sans gagnant ni perdant :

$$0 \xrightarrow{A} 1 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 4 \xrightarrow{B} 0 \xrightarrow{A} \cdots$$

Une partie gagnée par A :

$$0 \xrightarrow{A} 1 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 3$$

Et les parties, gagnées par A, commençant par quelques circuits $(0;1;2;4)$ et se terminant par la partie $0 \xrightarrow{A} 1 \xrightarrow{B} 2 \xrightarrow{A} 3$.

11.1.3 Remarques.

- Une partie est donc un chemin du graphe.
- Interdire les circuits revient à interdire les parties "infinies". Sans circuit, il y aura donc toujours un perdant et un gagnant.
- Pour un graphe sans circuit, une partie (terminée) est un chemin qu'on ne peut pas prolonger. Si ce chemin est de longueur paire, le joueur qui joue en second gagne la partie (cf partie 1 de l'exemple 1 ci-dessus). Si le chemin est de longueur impaire, c'est le joueur qui a commencé qui gagne.
- Interdire les boucles revient à interdire de "passer son tour" : si le pion est sur un sommet s et que c'est au tour de Dartempion de jouer, sans boucle en ce sommet Dartempion doit nécessairement placer le pion sur un autre sommet.

Tous les graphes de ce chapitre seront des graphes orientés simples sans boucle et sans circuit.

11.2 Noyau.

11.2.1 Définition d'une partie stable

Soit G un graphe orienté et S un ensemble de sommets de ce graphe.
S est dit intérieurement stable (on dit aussi stable, on parle aussi d'indépendance des sommets) lorsque $S \cap \Gamma^+(S) = \emptyset$, c'est à dire lorsqu'aucun sommet de S n'a de successeur dans S.

Remarque.
Si S est un ensemble de sommets de G intérieurement stable, aucun sommet de S n'a de prédécesseur dans S.

Justification.
Si $a \in S$ a un prédécesseur $b \in S$ alors b élément de S a un successeur a dans S et S ne peut être intérieurement stable.

■

11.2.2 Définition d'une partie absorbante.

Soit G un graphe orienté et S un ensemble de sommets de ce graphe.
S est dit extérieurement stable (ou absorbant) lorsque pour tout $s \notin S$ on a $\Gamma^+(s) \cap S \neq \emptyset$.
En d'autres termes : pour tout sommet s hors de S, il existe une flèche de s dans S.

11.2.3 Définition d'un noyau.

Un noyau d'un graphe orienté G est un ensemble N de sommets qui est à la fois intérieurement et extérieurement stable.
Du point de vue d'un joueur, cela signifie que si le pion est sur un sommet de N, le joueur est obligé de jouer sur un sommet hors de N et si le pion est sur un sommet hors de N, alors le joueur peut jouer de façon à placer le pion dans N.

Exemple.
Le graphe ci-dessous n'a pas de noyau.

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dr] & \\ c \arrow[ur] & & b \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

En effet les parties $\{a\}, \{b\}, \{c\}$ sont stables mais non absorbantes, les parties $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, a\}, \{a, b, c\}$ sont absorbantes mais non stables.

Exemple.
Le graphe ci-dessous a deux noyaux.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & b \arrow[d] \\ d \arrow[u] & c \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Les parties $\{a, c\}, \{d, b\}$ sont en effet stables et absorbantes.
Les parties $\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}$ ne sont ni stables ni absorbantes.
Les parties $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}$ sont stables mais non absorbantes.
Les parties $\{a, b, c\}, \{b, c, d\}, \{c, d, a\}, \{d, a, b\}, \{a, b, c, d\}$ sont absorbantes et non stables.

11.2.4 Noyau et positions bloquées.

Soit G un graphe orienté et N un noyau de G.
Alors N contient tous les sommets de G qui sont sans successeurs, c'est à dire toutes les positions bloquées du jeu.

Preuve.
Soit s un sommet de G. Si s n'est pas dans N alors s a au moins un successeur (dans N) puisque N est absorbant.
Donc (contraposition) :

$$\text{pour tout sommet } s \text{ de G, si } \Gamma^+(s) = \emptyset \text{ alors } s \in N.$$

■

11.2.5 Ordre partiel

Graphe sans circuit et transitif

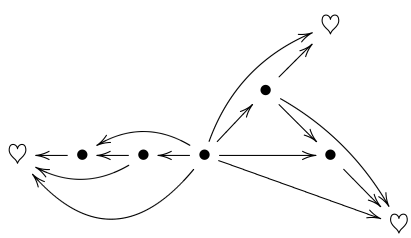
Soit G un graphe orienté sans circuit et transitif (c'est à dire tel que pour tous sommets s, t, u si $s \to t$ et $t \to u$ alors $s \to u$). Montrer que l'ensemble des sommets sans successeurs (c'est à dire des sommets s tels que $\Gamma^+(s) = \emptyset$, qu'on pourrait appeler ici éléments maximaux dans la mesure où un graphe sans circuit et transitif peut être naturellement associé à un ordre partiel sur l'ensemble des sommets) est un noyau du graphe.

Résolution.

1. Remarquons déjà qu'il y a effectivement des sommets sans successeurs. Sinon tout sommet s vérifierait $d^+(s) > 0$. Prenons alors un sommet s_1, comme $d^+(s_1) > 0$, il existe s_2 tel que $s_1 \to s_2$, comme $d^+(s_2) > 0$, il existe s_3 tel que $s_2 \to s_3$ ...et ainsi de suite, on définit ainsi un chemin de longueur infinie. Comme le nombre de sommets est fini, on repasse nécessairement par un même sommet ce qui permet de définir un circuit, contradiction (c'est ce raisonnement qui était sous-jacent dans l'affirmation : "un jeu sur un graphe sans circuit se termine toujours, avec un perdant et un gagnant").
2. L'ensemble des éléments maximaux est stable :
   Soit s et t maximaux, alors on n'a certainement ni $s \to t$, ni $t \to s$ puisque $\Gamma^+(t) = \emptyset$ et $\Gamma^+(s) = \emptyset$.
3. L'ensemble des éléments maximaux est absorbant :
   Soit s non maximal, c'est à dire tels que $\Gamma^+(s) \neq \emptyset$, montrons qu'il existe t maximal tel que $s \to t$. Il existe s_2 tel que $s \to s_2$. Si s_2 est maximal, on prend $s = t$. Sinon il existe s_3 tel que $s_2 \to s_3$ ...le processus se termine sur un élément maximal t (cf raisonnement ci-dessus) : $s \to s_2 \to s_3 \to \cdots \to t$. Mais le graphe étant transitif, on en déduit que $s \to t$.

■

Un exemple :



L'ensemble des trois ♡ est un noyau du graphe.

Partition en graphes sans circuit et transitif

Soit G un graphe orienté. On suppose qu'on peut colorier en bleu certaines flèches et en rouge les autres flèches de telle manière que le graphe G_r dont les sommets sont les sommets de G et les flèches sont les flèches rouges soit un graphe sans circuit et transitif, de même que le graphe G_b dont les sommets sont les sommets de G et les flèches les flèches bleues. Montrer, par récurrence, que G admet un noyau.

Résolution.
Si G a un seul sommet, il constitue un noyau.

Soit $n \geq 2$. Supposons que tous les graphes satisfaisant l'énoncé et d'ordre $\leq n-1$ ont un noyau.

1. Soit M_r l'ensemble des sommets maximaux de G_r. M_r est absorbant dans G_r (cf exercice précédent) et est donc a fortiori absorbant dans G. Si entre deux sommets de M_r, il n'y a aucune flèche bleue alors M_r est stable dans G et est donc un noyau de G.
2. S'il y a une flèche bleue entre deux sommets s et t de M_r.
   Enlevons le sommet s du graphe G. On obtient un graphe G' pour lequel on a encore clairement G'_r et G'_b sans circuit et transitif. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à G'. Soit N un noyau de G'.
   - N, stable dans G', l'est encore dans G (puisqu'on passe de G' à G en ajoutant s qui n'est pas dans N).
   - Si t est dans N, alors N est absorbant dans G puisque pour tout sommet $w \neq s$ hors de N, il existe une flèche issue de w pointant vers un élément de N (dans G' donc a fortiori dans G) et pour s, on a $s \to t$.
   - Si t n'est pas dans N.
     Comme N est absorbant dans G', il existe v dans N tel que $t \to v$ (dans G' donc aussi dans G). Mais t est dans M_r, c'est à dire est maximal dans G_r donc la flèche $t \to v$ est bleue. On a donc $s \to t \to v$ où les deux flèches sont bleues. Par transitivité bleue, on a donc $s \to v$ et N est bien absorbant.

■

11.2.6 Unicité du noyau.

Un graphe orienté (simple) sans circuit ne peut avoir plus d'un noyau.

Preuve.
Soit G un graphe orienté simple sans circuit. Supposons que N et M sont deux noyaux de G, distincts. Il existe alors par exemple $s_0 \in M - N$. Comme N est absorbant, il existe $s_1 \in N$ tel que (s_0, s_1) est une flèche du graphe. Comme M est stable, $s_1 \notin M$. Par le même raisonnement, il existe $s_2 \in M - N$ tel que (s_1, s_2) est une flèche du graphe ...on construit en continuant ainsi un chemin infini du graphe. Comme ce graphe est sans circuit, un tel chemin ferait intervenir une infinité de sommets, qui sont en nombre fini, contradiction.

■

11.2.7 Caractérisation du noyau par son indicatrice.

Soit G un graphe orienté et S un ensemble de sommets de ce graphe.
On a l'équivalence suivante *(où $V(G)$ désigne l'ensemble des sommets du graphe G) :*

$$\text{(S est un noyau de G)} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in V(G) \text{ tel que } \Gamma^+(x) = \emptyset, \ \delta_S(x) = 1 \\ \forall x \in V(G) \text{ tel que } \Gamma^+(x) \neq \emptyset, \ \delta_S(x) = 1 - \max\limits_{y \in \Gamma^+(x)} \delta_S(y) \end{cases}$$

où δ_S est la fonction indicatrice de S.

Preuve.

1. Soit S un noyau du graphe.
   (a) Pour $x \in V(G)$ tel que $\Gamma^+(x) = \emptyset$, on a bien $\delta_S(x) = 1$ (un noyau contient les positions bloquées du jeu).
   (b) Pour $x \in V(G)$ tel que $\Gamma^+(x) \neq \emptyset$:
   - Soit $x \in S$ (c'est à dire $\delta_S(x) = 1$), alors pour $y \in \Gamma^+(x)$, on a $y \notin S$ c'est à dire $\delta_S(y) = 0$ puisque S est stable. Donc

   $$1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \delta_S(y) = 1 - 0 = 1 = \delta_S(x)$$

   - Soit $x \notin S$ (c'est à dire $\delta_S(x) = 0$) alors il existe $y \in \Gamma^+(x)$ pour lequel $y \in S$ c'est à dire $\delta_S(y) = 1$ puisque S est absorbant. Donc

   $$1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \delta_S(y) = 1 - 1 = 0 = \delta_S(x).$$

2. Réciproquement, soit $S \subset V(G)$ telle que

$$\begin{cases} \forall x \in V(G) \text{ tel que } \Gamma^+(x) = \emptyset, \ \delta_S(x) = 1 \\ \forall x \in V(G) \text{ tel que } \Gamma^+(x) \neq \emptyset, \ \delta_S(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \delta_S(y) \end{cases}$$

- Pour $x \in S$ tel que $\Gamma^+(x) \neq \emptyset$ on a $\delta_S(x) = 1$ donc $1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \delta_S(y) = 1$ et $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \delta_S(y) = 0$. Donc $\forall y \in \Gamma^+(x)$, $y \notin S$. Et les éléments de $x \in S$ tel que $\Gamma^+(x) = \emptyset$ n'ayant pas non plus de successeur dans S, S est stable.
- Pour $x \notin S$, on a $\delta_S(x) = 0$ donc $1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \delta_S(y) = 0$ et $\max_{y \in \Gamma^+(x)} \delta_S(y) = 1$. Donc il existe au moins un $y \in \Gamma^+(x)$ tel que $y \in S$ et S est absorbant.

■

11.2.8 Couches d'un graphe orienté

Définition

Dans un graphe orienté simple sans circuit, on définit des "couches" V_i par :

$$V_0 = \{x \in V(G); \Gamma^+(x) = \emptyset\}$$

$$V_1 = \{x \in V(G); x \notin V_0, \ \Gamma^+(x) \subset V_0\}$$

$$V_2 = \{x \in V(G); x \notin V_0 \cup V_1, \ \Gamma^+(x) \subset V_0 \cup V_1\}$$

...(récurrence)

$$V_i = \left\{ x \in V(G); x \notin \bigcup_{0 \leq j \leq i-1} V_j, \ \Gamma^+(x) \subset \bigcup_{0 \leq j \leq i-1} V_j \right\}$$

Les ensembles V_i sont par construction disjoints.

Couches et chemins de longueur maximale

- Pour tout sommet x du graphe, on a :

$$x \in V_i \Leftrightarrow \text{le plus long chemin issu de } x \text{ est de longueur } i.$$

- Comme le graphe n'a pas de circuit, tous les chemins sont de longueur au plus $n-1$ (où n est le nombre de sommets du graphe) et les V_i, $1 \leq i \leq n-1$ constituent une partition de V(G).

$$V(G) = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}$$

(où le + désigne une réunion disjointe)

Justification.
En effet :

1. On a clairement

$$x \in V_0 \Leftrightarrow \text{le plus long chemin issu de } x \text{ est de longueur } 0.$$

2. Soit $k \geq 1$ tel que

$$\forall x \in V(G)$$
$$\forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, k-1\}$$
$$x \in V_i \Leftrightarrow \text{le plus long chemin issu de } x \text{ est de longueur } i.$$

   (a) Soit $s \in V_k$, donc tel que $s \notin V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1}$ et $\Gamma^+(s) \subset V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1}$. s a au moins un successeur t dans V_{k-1}, sinon $\Gamma^+(s) \subset V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_{k-2}$, or $s \notin V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_{k-2}$ et on aurait donc $s \in V_{k-1}$, ce qui n'est pas. On a (hypothèse de récurrence) CheminMax$(t) = k-1$, et t est un successeur de s donc CheminMax$(s) \geq k$. Suposons que CheminMax$(s) > k$, un tel chemin est de la forme $s - v - \ldots$ où $v \in \Gamma^+(s)$ et (hypothèse de récurrence) CheminMax$(v) \leq k-1$ ...contradiction et CheminMax$(s) = k$.

   (b) Réciproquement, soit s un sommet tel que CheminMax$(s) = k$. Alors $s \notin V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1}$ (hypothèse de récurrence). Comme CheminMax$(s) = k$, on a CheminMax$(t) < k$ pour tout $t \in \Gamma^+(s)$ et donc (hypothèse de récurrence) : $\Gamma^+(s) \subset V_0 \cup V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1}$. Finalement $s \in V_k$.

■

11.2.9 Existence du noyau.

Un graphe simple sans circuit admet un unique noyau.

Preuve.
On définit une fonction δ sur l'ensemble V(G) des sommets de G en posant $\delta(x) = 1$ pour $x \in V_0$ puis $\delta(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \delta(y)$ successivement par couche : pour les sommets x de V_1 puis pour les sommets de V_2 ...Cela définit bien une fonction puisqu'au moment de définir $\delta(x)$ pour $x \in V_i$, $\delta(y)$ pour $y \in \bigcup_{j=0}^{i-1} V_j$ est clairement défini ...On définit alors une partie S de V(G) par sa fonction caractéristique en posant $\delta_S = \delta$, la partie S ainsi définie est l'unique noyau du graphe (avec 11.2.7, 11.2.6 et 11.2.4).

■

11.3 Noyaux et mariages stables

On a une assemblée de n hommes et n femmes. Considérons le graphe biparti G dont les sommets sont les hommes et les femmes et dans lequel il y a une arête entre chaque homme et chaque femme. Les arêtes marquent ici tous les couples possibles.
On appelle couplage d'un graphe un ensemble d'arêtes tel que tout sommet du graphe est incident à au plus une arête de cet ensemble, c'est à dire tel que tous les sommets soient de degré au plus 1 dans le graphe induit par cet ensemble d'arêtes (il y a donc des couples mariés mais aussi d'éventuels célibataires, polygamie et polyandrie interdites).
Un couplage parfait d'un graphe est un couplage pour lequel tout sommet est de degré 1 dans le graphe induit par les arêtes du couplage (tout le monde est marié, et à une seule personne).
Pour le graphe G, un couplage parfait n'est pas difficile à réaliser, on n'a que l'embarras du choix (il y a pour G $n!$ couplages parfaits). Mais on cherche à définir un couplage parfait de la "meilleure façon" possible, en un sens précisé ci-dessous.
Pour cela, on demande à chaque homme de dresser la liste de ses préférences et on demande la même chose aux femmes (par exemple, h_1 dressera une liste dans l'ordre décroissant de ses préférences : f_3, f_{10}, f_1, ...Il ne s'agit pas comme dans le problème des politiques 1.1 de comparaison deux par deux : chacun met un ordre total et strict sur la liste du sexe opposé).
Dans un couplage parfait, on dira qu'un couple non marié (h, f) est instable si on a à la fois :

- h préfère f à la compagne qui lui est attribuée dans le couplage,
- et f préfère h au compagnon qui lui est attribué dans le couplage.

La question est alors la suivante : peut-on réaliser un mariage stable, c'est à dire un couplage parfait dans lequel aucun couple (homme, femme) non marié ne soit instable ?

1. On définit un graphe orienté G_c dont les sommets sont tous les couples (homme,femme) et dans lequel il n'y a une flèche entre deux couples que ssi l'homme ou la femme est commun aux deux couples : une flèche d'un couple (h, f) vers le couple (h, f') signifie que h préfère f' à f, une flèche du couple (h, f) vers le couple (h', f) signifie que f préfère h' à h. Etablir qu'un noyau de G_c définit un mariage stable de G.
2. Etablir alors qu'il existe au moins un mariage stable.

Résolution.

1. Soit N un noyau de G_c (s'il en existe).
   - Deux couples de N ne sont jamais adjacents (stabilité interne d'un noyau), ce qui signifie qu'il n'y a pas deux couples de N qui ont une personne en commun, et on définit bien ainsi un couplage (du graphe G).
   - Avec un couplage défini par N, tout le monde est marié (le couplage est parfait).
     Supposons en effet par exemple qu'un homme h ne soit pas marié, c'est à dire que h ne soit présent dans aucun couple de N. Alors tous les couples (h, f_1), (h, f_2), ..., (h, f_n) sont en-dehors du noyau. Mais pour

un couple (h, f_i) $(1 \leq i \leq n)$ il existe une flèche de (h, f_i) vers un couple du noyau (caractère absorbant d'un noyau). Comme cette flèche ne peut pointer vers un couple $(h, \ .)$ (puisque h est supposé non présent dans le noyau), c'est donc que la flèche issue de (h, f_i) pointe vers un couple $(\ . \ , f_i)$. Mais alors toutes les femmes seraient présentes dans le noyau, donc l'une d'entre elles serait mariée à plusieurs hommes dans le noyau puisqu'il manque au moins h dans ce noyau. Ceci contredit le fait que les couples d'un noyau de G_c définissent un couplage de G.

- Il nous reste à vérifier que ce couplage parfait est stable au sens défini plus haut.
  Soit h et f un homme et une femme non mariés, c'est à dire tel que le couple (h, f) est en-dehors de N. Notons f' et h' les deux éléments tels que $(h, f') \in N$ et $(h', f) \in N$. Il s'agit d'établir qu'on n'a pas : " h préfère f à f' ET f préfère h à h'". Or N étant absorbant et (h, f) étant hors de N, il existe au moins une flèche de (h, f) vers un couple de N. Le couple en question est nécessairement de la forme $(h, .)$ ou $(., f)$ donc ne peut-être que (h, f') ou (h', f) (puisqu'il n'y a dans N qu'un seul couple avec h et qu'un seul couple avec f). Or $(h, f) \rightarrow (h', f)$ signifie que f préfère h' à h, et si cette flèche est dans l'autre sens alors on a $(h, f) \rightarrow (h, f')$ et h préfère f' à f.

On a donc bien affaire à un mariage stable.

2. Dans le graphe G_c, appelons "flèches mâles" les flèches traduisant les préférences des hommes et "flèches femelles" les flèches traduisant les préférences des femmes. Notons alors G_h et G_f les graphes dont les sommets sont les sommets de G_c et les flèches sont les flèches mâles pour G_h, les flèches femelles pour G_f. On se convainc sans peine que l'on a ainsi défini deux graphes sans circuit et transitif. Le graphe G_c a donc un noyau d'après 11.2.5.

■

11.4 Noyau et stratégie de jeu

11.4.1 Stratégie.

A et B jouent sur le graphe orienté G, qui possède un unique noyau N.
L'objectif d'un joueur lambda est d'essayer d'offrir à son adversaire une "position bloquée", c'est à dire un sommet sans successeur (ce sera en effet alors à l'adversaire de jouer, et il sera bloqué donc lambda sera le gagnant).
Plus généralement, une bonne stratégie pour un joueur lambda est d'essayer d'offrir à son adversaire une position du noyau : en effet, l'adversaire sera alors soit perdant (les positions bloquées étant dans le noyau), soit contraint de jouer hors du noyau (puisqu' un noyau est stable) et le joueur lambda récupérant la main pourra à nouveau offrir une position du noyau à son adversaire (puisqu'un noyau est absorbant) et ainsi de suite ...
S'il n'y a pas de partie infinie, la stratégie "jouer dans le noyau" mène donc à la victoire (en effet toutes les parties se terminant et lambda étant le seul à pouvoir proposer des positions du noyau à l'adversaire, après un nombre fini de

coups l'adversaire de lambda devra jouer alors que le pion est sur une position bloquée).
Plutôt qu'absorbant, le qualificatif "abordable" semblerait mieux convenir : lorsque le pion est hors noyau, le joueur peut aborder le noyau mais en général il a aussi le choix de rester hors noyau. Quand au terme de "stable", il semble a priori du point de vue des jeux sur graphes orientés encore moins adapté, le noyau serait plutôt hautement instable puisque dès que le pion est dans le noyau, le joueur suivant est forcé d'en sortir, voire de sortir de la partie en la perdant.
On change de point de vue en regardant ce qu'il se passe, non plus coup après coup, mais pour chaque joueur :
il y a stabilité pour le premier joueur à jouer dans le noyau puisqu'il a la garantie de pouvoir continuer à jouer dans ce noyau jusqu'à la fin, quelque soit le jeu de son adversaire. Cet adversaire est alors irrémédiablement absorbé par le noyau jusqu'à sa perte.

11.4.2 Avantage.

Soit G un graphe orienté sans circuit.
Si le sommet s_0 sur lequel le pion est placé au départ est dans le noyau alors le joueur 2 est avantagé (c'est à dire gagne à coup sûr s'il connaît le noyau).
Si le sommet s_0 sur lequel le pion est placé au départ n'est pas dans le noyau alors le joueur 1 est avantagé (c'est à dire gagne à coup sûr s'il connaît le noyau).

Justification.
Si les deux joueurs connaissent le noyau, le premier qui peut offrir une position du noyau à l'autre est certain de pouvoir suivre la stratégie gagnante décrite en 11.4.1.

■

11.5 La course à vingt

11.5.1 La règle du jeu de la course à 20.

Deux joueurs. Celui qui commence annonce 1, 2 ou 3. Puis chacun à tour de rôle annonce un entier (≤ 20) obtenu en ajoutant 1, 2 ou 3 à l'entier annoncé par son adversaire. Celui qui annonce 20 a gagné.

11.5.2 Stratégie pour la course à 20.

Pour gagner, annoncez les multiples de 4.

Justification.
Pour gagner, il me faut annoncer 20 au dernier coup. Je pourrai annoncer 20 si au coup précédent mon adversaire a annoncé 17, 18 ou 19. Et si j'ai annoncé 16 au coup précédent, alors mon adversaire sera forcé d'annoncer 17, 18 ou 19.
Pour gagner il me suffit donc de pouvoir annoncer 16 ...et par le même raisonnement, en annonçant 12 au coup précédent, je me garantis de pouvoir annoncer 16 ...

■

Remarque.
Le graphe orienté associé à ce jeu est le suivant (la position 0 est le début du jeu : le joueur 1 peut atteindre les positions 1, 2 et 3. On n'a représenté les flèches correspondant aux coups possibles qu'à partir de deux sommets pour ne pas alourdir la représentation) :

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

L'ensemble de sommets $N = \{0; 4; 8; 12; 16; 20\}$ est un noyau du graphe : on vérifie en effet aisément qu'il est stable et absorbant. La stratégie décrite en 11.5.2 est donc en fait la stratégie décrite en 11.4.1.
Comme le sommet 0 est dans le noyau, le joueur 2 est avantagé.

On peut aussi définir le noyau à l'aide de la fonction indicatrice comme décrit dans 11.2.9, en remarquant que les sommets sont dans leur représentation "naturelle" déjà classés par couches :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Couches	V_{20}	V_{19}	V_{18}	V_{17}	V_{16}	V_{15}	V_{14}	V_{13}	V_{12}	V_{11}	V_{10}	V_9	V_8	V_7	V_6	V_5	V_4	V_3	V_2	V_1	V_0

On pose $\delta_N(20) = 1$ puis $\delta_N(19) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(19)} \delta_N(y) = 0 \ldots$Le sommet 16 qui flèche sur trois sommets marqués 0 sera donc marqué 1, tandis que par exemple le sommet 17 qui flèche sur au moins un sommet marqué 1 (le sommet 20) sera marqué 0 ...la démarche de construction est en fait celle adoptée ci-dessus :

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1

11.5.3 La course à 21.

Deux joueurs. Celui qui commence annonce 1, 2 ou 3. Puis chacun à tour de rôle annonce un entier (≤ 21) obtenu en ajoutant 1, 2 ou 3 à l'entier annoncé par son adversaire. Celui qui annonce 21 a gagné.

11.5.4 Stratégie pour la course à 21.

Le même raisonnement par "remontée" qu'en 11.5.2 conduit au noyau :

$$N = \{21; 17; 13; 9; 5; 1\}$$

Cette fois, le point de départ est hors noyau, c'est donc le joueur 1 qui est avantagé.

11.5.5 La course à n par pas d'au plus p ($p < n$).

Deux joueurs. Celui qui commence annonce un entier j, $1 \leq j \leq p$. Puis chacun à tour de rôle annonce un entier ($\leq n$) obtenu en ajoutant un entier j, $1 \leq j \leq p$, à l'entier annoncé par l'adversaire. Celui qui annonce n a gagné.

11.5.6 Noyau de la course à n par pas d'au plus p.

Avec le même raisonnement qu'en 11.5.2, on obtient facilement le noyau :

$$N = \{x;\ 0 \leq x \leq n\ ,\ x \equiv n \mod (p+1)\}\,.$$

11.5.7 Nombre de parties différentes dans la course à n.

– Combien de parties différentes peut-on jouer avec les règles ci-dessus (11.5.5) ?
– Combien de ces parties sont gagnées par A, par B ?

Résolution.

1. Une partie est un chemin du sommet départ au sommet arrivée, c'est à dire du sommet 0 au sommet n. Soit A la matrice d'adjacence du graphe. Par exemple, avec $n = 7$ et $p = 3$, cette matrice est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par exemple $A_{1,3} = 1$ s'interprète ainsi : il y a une flèche entre le sommet marqué 0 et le sommet marqué 2, c'est à dire : le joueur qui commence peut déplacer le pion de la case de départ à la case 2.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 \arrow[rr, bend left] & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{tikzcd}$$

De même les trois 1 de la seconde ligne correspondent aux trois flèches suivantes :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 0 & 1 \arrow[r, bend right] \arrow[rr, bend left] \arrow[rrr, bend left] & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{tikzcd}$$

On sait que le coefficient $\left(A^k\right)_{1,n+1}$ de A^k (où $k \in \mathbb{N}$) est le nombre de chemins de longueur k du sommet 0 au sommet n.
Le coefficient $\left(A^k\right)_{1,n+1}$ de A^k (où $k \in \mathbb{N}^*$) est donc le nombre de parties possibles en k coups. Comme le graphe associé au jeu a $n+1$ sommets et ne comporte pas de circuits, on a $A^{n+1} = 0$. Le nombre total de parties possibles est donc $\sum_{k=1}^{n} \left(A^k\right)_{1,n+1}$.

Maple.

`course :=proc(n,p)`	course à n, par pas d'au plus p
`local A,N,i,j,L,NbParties,GainA,GainB ;`	variables utilisées dans la procédure
`N :=matrix(n+1,n+1,0) ;`	N est la matrice nulle de taille $(n+1) \times (n+1)$
`A :=matrix(n+1,n+1,0) ; for i from 0 to n-1 do for j from 1 to p do if i+j<=n then A[i+1,i+1+j] :=1 ;fi ;od ;od ;`	définition de la matrice A d'adjacence du graphe du jeu
`L :=[eval(A)] ; for i from 2 while not(equal(eval(L[i-1]),eval(N))) do L :=[op(L),multiply(eval(A),eval(L[i-1]))] ; od ;`	L est la liste des puissances de A jusqu'au plus petit entier k tel que $A^k = 0$
`GainA :=0 ; for i from 1 to nops(L) by 2 do GainA :=GainA+L[i][1,n+1] ;od ;`	GainA : nombre de parties gagnées par le joueur qui commence.
`GainB :=0 ; for i from 2 to nops(L) by 2 do GainB :=GainB+L[i][1,n+1] ;od ;`	GainB : nombre de parties gagnées par le joueur qui joue en second.
`NbParties :=GainA+GainB ;`	NbParties : nombre de parties que l'on peut jouer avec les règles de la course à n par pas d'au plus p
`print('Nombre de parties : ') ; print(NbParties) ;`	affichage du nombre de parties
`print('Nombre de parties gagnées par A : ') ; print(GainA) ;`	affichage du nombre de parties gagnées par A
`print('Nombre de parties gagnées par B : ') ; print(GainB) ;`	affichage du nombre de parties gagnées par B.
end ;	fin de procédure

- Essai 1. course(20,3) donne :
  - Nombre de parties : 121415,
  - Nombre de parties gagnées par A : 60707,
  - Nombre de parties gagnées par B : 60708.
- Essai 2. course(21,3) donne
  - Nombre de parties : 223317,
  - Nombre de parties gagnées par A : 111659,
  - Nombre de parties gagnées par B : 111658.

♢

2. Autre méthode.
Notons $Trois(n)$ le nombre de parties possibles dans une course à n par pas d'au plus 3. On a : $Trois(n) = Trois(n-1) + Trois(n-2) + Trois(n-3)$.

Maple.

```
Trois :=proc(n)
option remember ;
if n<0 then return(0) ;elif n=0 then return(1) ;
else return(Trois(n-1)+Trois(n-2)+Trois(n-3)) ;
fi ;
end ;
```

Exemple.

```
Trois(20)=121415
```

♢

Pour déterminer le nombre de parties gagnées par chacun des deux joueurs, on définit deux suites : $TI(n)$ qui compte les parties de longueur impaire (gagnées par le joueur 1) et $TP(n)$ qui compte les parties de longueur paire (gagnées par le joueur 2) définies par :

$$\begin{cases} TI(n) = TP(n) = 0 \text{ si } n < 0 \\ TI(0) = 0 \text{ et } TP(0) = 1 \\ TI(n) = TP(n-1) + TP(n-2) + TP(n-3) \\ TP(n) = TI(n-1) + TI(n-2) + TI(n-3) \end{cases}$$

Maple.
```
w :=proc(n)
option remember ;
if n<0 then return([0,0]) ;
elif n=0 then return([1,0]) ;
else
return
([op(2,w(n-1))+ op(2,w(n-2))+ op(2,w(n-3)) , op(1,w(n-1))+ op(1,w(n-2))+
op(1,w(n-3) )]) ;
fi ;end ;
```

Exemple.
`w(20)=[60708,60707]`=[TP(20),TI(20)]

♢

■

11.6 Jeu des rectangles entiers

11.6.1 Règle du jeu des rectangles entiers.

On part d'un rectangle $ABCD$ de largeur et longueur entières. Chacun des deux joueurs à tour de rôle doit tracer une droite parallèle à l'un des deux côtés pour obtenir un nouveau rectangle, plus petit, $AB'C'D'$ de dimensions entières. Le perdant sera donc celui qui doit jouer alors que le rectangle restant est le carré $AIKJ$ de côté 1.

11.6.2 Stratégie pour le jeu des rectangles entiers.

On commence le jeu avec un rectangle de dimensions $m \times n$.
Le graphe associé est un graphe dont les sommets sont les rectangles $AB'C'D'$ à dimensions entières $m' \times n'$ avec $m' \leq m$ et $n' \leq n$, et une flèche va d'un rectangle P de dimensions entières $p \times q$ à un rectangle Q de dimensions $p' \times q'$ lorsqu'on a ($p = p'$ et $q' < q$) ou ($p < p'$ et $q' = q$).
L'ensemble N constitué des carrés à côtés entiers est clairement stable et absorbant ...d'où une stratégie gagnante : offrir à l'autre des carrés.
Si le rectangle de départ est un carré, le joueur 2 est avantagé. Si le rectangle de départ est non carré, le joueur 1 est avantagé.

11.7 Jeu des premiers

11.7.1 Règle du jeu des premiers.

Deux joueurs. Celui qui commence annonce un entier premier compris entre 1 et 10. Puis chacun à tour de rôle annonce un entier premier de la forme $d+j$ où d est l'entier que vient d'annoncer son adversaire et j un entier tel que $1 \leq j \leq 10$. Celui qui ne peut plus annoncer d'entier premier selon les règles a perdu.
(d'après Merveilleux nombres premiers de Jean-Paul Delahaye (éditions Belin–Pour la science))

11.7.2 Stratégie pour le jeu des premiers.

Tableau des premiers entiers où l'on a entouré ou encadré les "cases" du jeu :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120
121	122	123	124	125	126	127	128	129	130

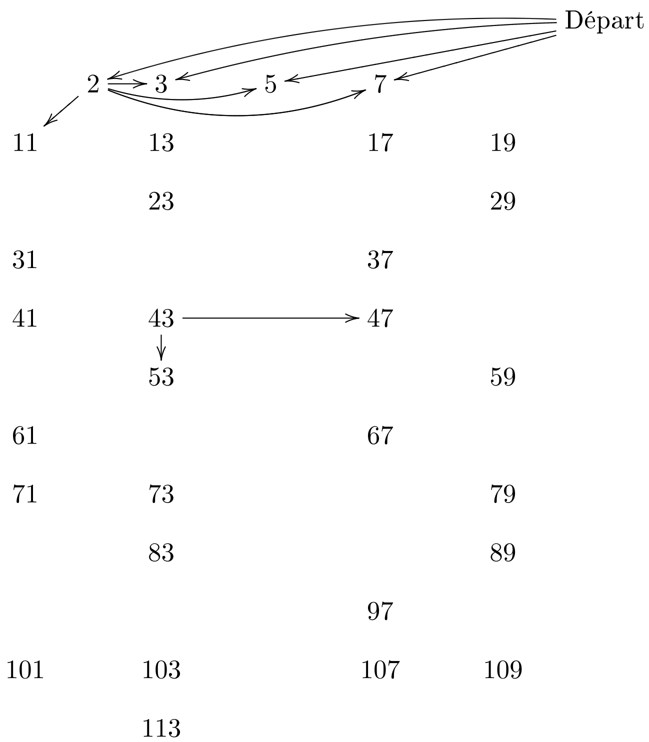
Le premier écart strictement supérieur à 10 entre deux nombres consécutifs a lieu entre 113 et 127. Si le joueur A annonce 113, il a donc gagné.
Pour pouvoir annoncer 113, le joueur A doit forcer le joueur B à annoncer 103, 107 ou 109 au coup précédent ...en ayant d'abord annoncé 101 ...
En poursuivant ainsi le raisonnement, on obtient le noyau du graphe représentant le jeu :

$$N = \{7; 19; 31; 47; 61; 73; 89; 101; 113\}.$$

Remarquons une fois de plus que ce raisonnement est formalisé par les résultats 11.2.9 et 11.2.7.
Sur ce graphe, les flèches (x ;y) sont de deux sortes :

- x et y sont sur la même ligne du tableau ci-dessus et y est à droite de x,
- y est une ligne en-dessous de x et à sa gauche ou juste en dessous.

Les sommets du graphe et les flèches pour trois sommets :



Comme le point de départ n'est pas dans le noyau, le joueur 1 est avantagé.

11.7.3 Jeu des premiers par pas d'au plus p.

Les deux joueurs commencent par fixer un entier p =sautmax, qui désignera le pas maximal. Celui qui commence annonce un entier premier compris entre 1 et sautmax. Puis chacun à tour de rôle annonce un entier premier de la forme $d + j$ où d est l'entier que vient d'annoncer son adversaire et j un entier tel que $1 \leq j \leq$ sautmax. Celui qui ne peut plus annoncer d'entier premier a perdu.

11.7.4 Détermination du noyau par MAPLE.

`JeuPremier :=proc(sautmax)`	procédure déterminant le plateau de jeu et le noyau
`local i,damier,noyau ;`	
`damier :=[2,3] ; for i from 5 by 2 while i-op(nops(damier),damier)<= sautmax do if isprime(i) then damier :=[op(damier),i] ; fi ; od ;`	damier est le "plateau de jeu" : il contient les nombres premiers qu'il est possible d'atteindre.
`print(damier) ;`	affichage du damier
`noyau :=damier[nops(damier)] ; for i from 1 to nops(damier)-1 do if op(nops(noyau),noyau) -op(nops(damier)-i,damier) > sautmax then noyau :=[op(noyau), op(nops(damier)-i,damier)] ; fi ; od ;`	on détermine le noyau par "remontée".
`noyau :=sort(noyau) ;print(noyau) ;`	tri des éléments du noyau dans l'ordre croissant et affichage.
`end ;`	fin de procédure

- Essai 1 :
  JeuPremier(15) ;
  "Damier" : [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293, 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397, 401, 409, 419, 421, 431, 433, 439, 443, 449, 457, 461, 463, 467, 479, 487, 491, 499, 503, 509, 521, 523]
  Noyau : [7, 23, 43, 61, 79, 97, 113, 139, 163, 181, 199, 223, 241, 257, 277, 293, 317, 337, 353, 373, 389, 409, 433, 449, 467, 487, 503, 523]
- Essai 2 :
  JeuPremier(4) ;
  "Damier" : [2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23]
  Noyau : [5, 11, 17, 23]

Dans ce deuxième essai, on aura remarqué que le point de départ est à ajouter au noyau, si bien que le joueur 2 est avantagé. Avec sautmax= 15, c'est par contre le joueur 1 qui est avantagé puisque le point de départ est hors noyau.

11.8 Coincez la reine

11.8.1 Règle du jeu "coincez la reine".

On place une reine sur un échiquier (en f8 par exemple). Chacun des deux joueurs peut à tour de rôle déplacer la reine d'autant de cases qu'il le souhaite soit vers le bas, soit vers la gauche, soit en bas à gauche en diagonale (cf illustration : la reine peut atteindre en un seul coup n'importe laquelle des cases étoilées à partir de la position f8).

8	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	$\star$	R		
7					$\star$	$\star$		
6				$\star$		$\star$		
5			$\star$			$\star$		
4		$\star$				$\star$		
3	$\star$					$\star$		
2						$\star$		
1						$\star$		
	a	b	c	d	e	f	g	h

Celui qui ne peut plus jouer a perdu.

11.8.2 Construction du noyau.

Chaque case peut être considérée comme un sommet de l'échiquier. Par exemple, la case f8 flèche sur les cases marquées d'une étoile.
On construit le noyau en utilisant une fois de plus la caractérisation par indicatrice, en commençant par poser $\delta_N(a1) = 1$ puisque $a1$ est position bloquée (l'unique position bloquée) puis $\delta_N(case) = 0$ où *case* est sur la ligne, la colonne ou la diagonale de $a1$:

8	0							0
7	0						0	
6	0					0		
5	0				0			
4	0			0				
3	0		0					
2	0	0						
1	1	0	0	0	0	0	0	0
	a	b	c	d	e	f	g	h

puis :

8	0							0
7	0						0	
6	0					0		
5	0				0			
4	0			0				
3	0	1	0					
2	0	0	1					
1	1	0	0	0	0	0	0	0
	a	b	c	d	e	f	g	h

puis

8	0	0	0				0	0
7	0	0	0			0	0	0
6	0	0	0		0	0	0	
5	0	0	0	0	0	0		
4	0	0	0	0	0			
3	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
	a	b	c	d	e	f	g	h

...on obtient :

8	0	0	0	0	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	1	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	1	0	0
3	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
	a	b	c	d	e	f	g	h

Le noyau est donc

$$N = \{a1, b3, c2, d6, e8, f4, h5\}$$

Si l'on commence la partie avec la reine en f8, le joueur qui commence est avantagé puisque cette case est hors noyau.

11.9 Fonction de Grundy

11.9.1 Définition d'une fonction de Grundy.

Soit G un graphe orienté, V l'ensemble de ses sommets.
Une fonction $g : V \longrightarrow \mathbb{N}$ est dite fonction de Grundy lorsque

$$\forall s \in V \ g(s) = min\left(\mathbb{N} - g\left(\Gamma^{+}\left(s\right)\right)\right).$$

11.9.2 Propriétés des fonctions de Grundy.

Soit G un graphe orienté sur lequel on peut définir une fonction de Grundy g. Alors :

1. G est sans boucle.
2. Si s est un sommet sans successeur, alors $g(s) = 0$.
3. $g(s) = 0$ ssi (s n'a pas de successeur ou tout successeur t de s vérifie $g(t) \geq 1$).
4. Si $g(s) = k$ alors pour tout successeur t de s : $g(t) \neq k$.
5. Si $g(s) \neq 0$ alors s a au moins un successeur t pour lequel $g(t) = 0$.
6. Si $g(s) \neq 0$ alors $\forall 0 \leq j < g(s), \exists t \in \Gamma^{+}(s)$ tel que $g(t) = j$.
7. $g^{-1}(0)$ est un noyau du graphe.

Preuve.

1. S'il y avait une boucle au sommet s, $g(s)$ devrait être égal au minimum d'un ensemble d'entiers naturels ne contenant pas $g(s)$ ...
2. Si s n' a pas de successeur, alors $\mathbb{N} - g\left(\Gamma^{+}(s)\right) = \mathbb{N} - \emptyset = \mathbb{N}$.
3. $g(s) = 0$ ssi $0 \in \mathbb{N} - g\left(\Gamma^{+}(s)\right)$ ssi $0 \notin g\left(\Gamma^{+}(s)\right)$ ssi $\forall t \in g\left(\Gamma^{+}(s)\right), \ g(t) \geq 1$.
4. Si $k \in g\left(\Gamma^{+}(s)\right)$ alors $k \notin \mathbb{N} - g\left(\Gamma^{+}(s)\right)$ et $k \neq min\left(\mathbb{N} - g\left(\Gamma^{+}(s)\right)\right)$, c'est à dire $k \neq g(s)$.
5. $g(s) \neq 0$ ssi $0 \notin \mathbb{N} - g\left(\Gamma^{+}(s)\right)$ ssi $0 \in g\left(\Gamma^{+}(s)\right)$.

6. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $g(s) = k$. Soit j tel que $0 \leq j < k$. Alors $\exists t \in \Gamma^+(s)$ tel que $g(t) = j$ sinon $j \notin g(\Gamma^+(s))$ donc $j \in \mathbb{N} - g(\Gamma^+(s))$ et $min(\mathbb{N} - g(\Gamma^+(s))) \leq j$, contradiction.
7. Si $s \notin g^{-1}(0)$ alors $\exists t \in \Gamma^+(s)$ tel que $g(t) = 0$ donc $g^{-1}(0)$ est absorbant. Si $s \in g^{-1}(0)$ alors s n'a pas de successeur ou tout successeur t de s vérifie $g(t) \geq 1$ donc $g^{-1}(0)$ est stable.

■

11.9.3 Fonction de Grundy et longueur maximale de chemin.

Soit G un graphe sans circuit. On note, comme en 11.2.8, V_i l'ensemble des sommets s de G tels que le chemin le plus long issu de s soit de longueur i.
Si g est une fonction de Grundy sur G, alors $\forall s \in V(G), s \in V_i \Rightarrow g(s) \leq i$.
En d'autres termes, notons $CheminMax$ la fonction définie sur V(G) par $CheminMax(s) =$ longueur du plus long chemin issu de s (de sorte que $V_i = CheminMax^{-1}(i)$).
Alors on a : $g \leq CheminMax$.

Preuve.
Pour $s \in V_0$, c'est à dire pour les sommets sans successeurs on a $g(s) = 0$ donc $g(s) \leq CheminMax(s)$.
Hypothèse de récurrence : soit $n \in \mathbb{N}$ pour lequel on aurait $\forall m \leq n, \forall s \in V_m,\ g(s) \leq m$.
Soit $t \in V_{n+1}$. Supposons que $g(t) = k > n + 1$, alors $\forall j, n < j < k$ il existe un sommet w tel que $g(w) = j$ (cf 11.9.2). Mais $t \in V_{n+1}$ implique que ses successeurs w vérifient $CheminMax(w) \leq n$ et donc (hypothèse de récurrence) $g(w) \leq n$ ...contradiction.

■

11.9.4 Existence et unicité de la fonction de Grundy.

Un graphe sans circuit admet une unique fonction de Grundy.

Preuve.
On partitionne V(G) avec les V_i (cf 11.2.8) et on définit l'unique fonction de Grundy couche par couche.
Pour $s \in V_0$, on a nécessairement $g(s) = 0$ et pour $s \in V_1$, on a alors nécessairement $g(s) = min(\mathbb{N}^*) = 1$. On définit alors nécessairement et sans ambiguïté $g(s)$ pour $s \in V_2$ par $g(s) = min(\mathbb{N} - g(\Gamma^+(s)))$ ...et ainsi de suite jusqu'à la dernière couche.

■

11.9.5 Une caractérisation d'une fonction de Grundy.

Soit G un graphe et g une fonction définie sur V(G). Sont équivalentes :

1. g est une fonction de Grundy sur G.
2. – $\forall k \in \mathbb{N}^*$, si $g(s) = k$ alors pour tout entier positif $j < k$ il existe $t \in \Gamma^+(s)$ tel que $g(t) = j$.
   – $\forall k \in \mathbb{N}$, si $g(s) = k$ alors pour $t \in \Gamma^+(s)$, on a $g(t) \neq k$.

Preuve.

1. Si g est une fonction de Grundy, les deux propriétés du 2. sont vérifiées (cf 11.9.2).
2. Réciproquement, on suppose que les deux propriétés du 2. sont satisfaites.
   Soit s un sommet.
   Si $g(s) = 0$ alors $\forall t \in \Gamma^+(s)$, on a $g(t) \neq 0$ avec la deuxième propriété et $min\,(\mathbb{N} - g\,(\Gamma^+(s))) = 0 = g(s)$.
   Si $g(s) = k$ avec $k \neq 0$ alors $k \notin \Gamma^+(s)$ avec la propriété 2 et $\{0, 1, \ldots, k-1\} \subset \Gamma^+(s)$ avec la propriété 1. Donc $min\,(\mathbb{N} - g\,(\Gamma^+(s))) = k = g(s)$.

■

11.10 Course à vingt avec pas interdit

11.10.1 Règle du jeu.

Vingt allumettes sont disposées en tas devant les deux joueurs. Chacun à tour de rôle peut en prendre 1, 3 ou 4 (le pas de 2 est interdit) . Celui qui prend la dernière allumette (c'est à dire qui met l'autre joueur en position de ne plus pouvoir jouer) a gagné.

11.10.2 Fonction de Grundy et noyau.

On cherche à définir une fonction de Grundy sur le graphe associé. Le sommet 20 est le sommet de départ, le sommet 0 la position bloquée ...en d'autres termes, un sommet est nommé par le nombre d'allumettes correspondant. Pour définir une fonction de Grundy sur ce graphe, on commence par poser $g(0) = 0$ puisque le sommet 0 est bloqué. On a alors $g(1) = min\,(\mathbb{N} - \{g(0)\}) = min\,(\mathbb{N}^*) = 1$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc} 20 & 19 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ &&&&&&&&&&&&&&&&&&& {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} \end{array}$$

Puis $g(2) = min\,(\mathbb{N} - \{g(1)\}) = min\,(\mathbb{N} - \{1\}) = 0$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc} 20 & 19 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ &&&&&&&&&&&&&&&&&& {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} \end{array}$$

Puis $g(3) = min\,(\mathbb{N} - \{g(2), g(0)\}) = min\,(\mathbb{N}^*) = 1$.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc} 20 & 19 & 18 & 17 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 11 & 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ &&&&&&&&&&&&&&&&& {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 0} \end{array}$$

Puis $g(4) = min\,(\mathbb{N} - \{g(3), g(1), g(0)\}) = min\,(\mathbb{N} - \{0; 1\}) = 2$.

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
																2	1	0	1	0

Et ainsi de suite...On obtient :

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
2	3	2	1	0	1	0	2	3	2	1	0	1	0	2	3	2	1	0	1	0

On obtient ainsi le noyau

$$N = \{16; 14; 9; 7; 2; 0\}$$

On cherchera donc à laisser à l'adversaire 16, 14, 9, 7, 2 ou 0 allumettes pour gagner. La position de départ étant hors noyau, le joueur qui commence est avantagé.
On peut aussi construire le noyau, couche par couche, comme dans 11.2.9 par sa fonction indicatrice définie par : pour tout sommet x, $\delta_N(x) = 1 - \max_{y \in \Gamma^+(x)} \delta_N(y)$, en commençant par poser $\delta_N(0) = 1$ puisque 0, position bloquée, est nécessairement dans le noyau.

20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1

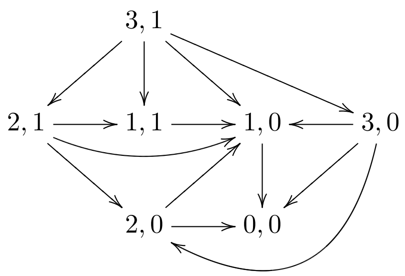
11.11 Fan Tan à deux tas

11.11.1 Règle du jeu.

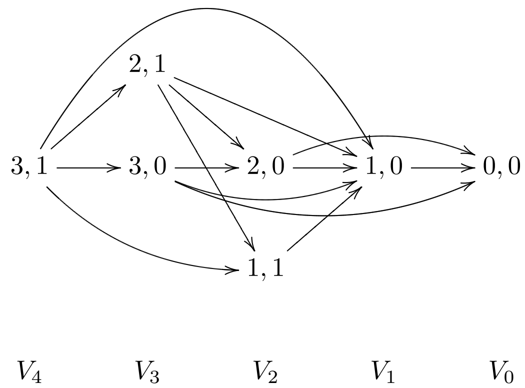
Deux tas d'allumettes : un tas en contient 3 et l'autre 1. Chacun des deux joueurs peut à son tour prendre autant d'allumettes qu'il veut (au moins une), mais dans un seul tas à la fois. Celui qui ne peut plus jouer a perdu.

11.11.2 Graphe, fonction de Grundy et noyau.

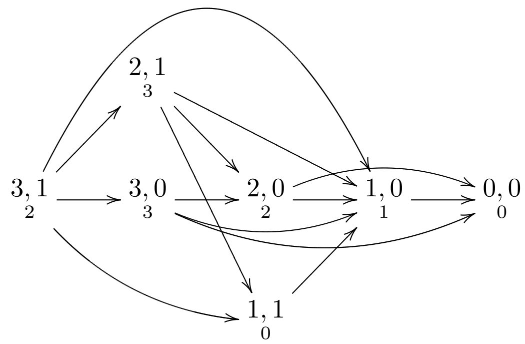
On note i, j un sommet correspondant à un tas de i allumettes et un tas de j allumettes (pas d'ordre : par exemple (1,0) et (0,1) seront représentés par le même sommet).



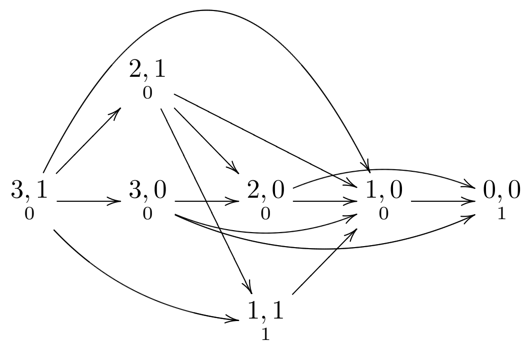
On peut redessiner ce graphe par couches pour déterminer sa fonction de Grundy comme décrit dans la preuve de 11.9.4 :



On pose $g(0,0) = 0$ puis $g(1,0) = 1$ …on définit ainsi g couche par couche :



On peut aussi construire le noyau, couche par couche, comme dans 11.2.9 par sa fonction indicatrice définie par : pour tout sommet x, $\delta_N(x) = 1 - \underset{y \in \Gamma^+(x)}{max} \delta_N(y)$.



Le noyau est donc

$$N = \{(0,0)\,,(1,1)\}$$

11.11.3 Règle du jeu pour le Fan Tan à deux tas, cas général.

Deux tas d'allumettes : un tas en contient p et l'autre m. Chacun des deux joueurs peut à son tour prendre autant d'allumettes qu'il veut (au moins une), mais dans un seul tas à la fois. Celui qui ne peut plus jouer a perdu.

11.11.4 Noyau du Fan Tan à deux tas.

On constate aisément que l'ensemble des sommets constitués de deux tas de même nombre d'allumettes est stable et absorbant.
Ce jeu (et son noyau) est en fait le même que celui décrit en 11.6.1 sous un habillage différent.

11.12 Somme digitale

11.12.1 Définition de la somme digitale de deux entiers.

Soit a et b deux entiers naturels. La somme digitale $a \oplus b$ s'obtient en écrivant en base 2 les entiers a et b et en additionnant les chiffres qui se correspondent modulo 2 (c'est à dire suivant la règle $0+0=0$, $1+1=0$, $1+0=0+1=1$). Clarifions cela avec un exemple :

Exemple.
$21 = 2^4 + 2^2 + 1 = 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$.
21 s'écrit donc en base 2 : $21 = (1, 0, 1, 0, 1)$.
$12 = 2^3 + 2^2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$.
12 s'écrit donc en base 2 : $12 = (1, 1, 0, 0)$.

On a $21 \oplus 12 = 25$ car :

	décimal	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	21	1	0	1	0	1
$\oplus$	12	0	1	1	0	0
$=$	25	1	1	0	0	1

$2^4 + 2^3 + 2^0 = 25$.

11.12.2 Structure de $(\mathbb{N}, \oplus)$.

$(\mathbb{N}, \oplus)$ est un groupe abélien, c'est à dire $(p \oplus q) \oplus r = p \oplus (q \oplus r)$ (associativité), $p \oplus q = q \oplus p$ (commutativité), un neutre : 0 (pour tout p, $p \oplus 0 = 0 \oplus p = 0$), et tout entier p a un symétrique : p (pour tout entier naturel p : $p \oplus p = 0$).

Remarque.
Soient p et q deux entiers naturels. Il existe un unique entier naturel r tel que $p \oplus r = q$.

Justification.
Cet entier r est en effet nécessairement $r =$ (symétrique de p) $\oplus\, q$, c'est à dire $r = p \oplus q$.
$p \oplus (p \oplus q) = (p \oplus p) \oplus q = 0 \oplus q = q$.

Exemple.
Prenons $p = 35$ et $q = 27$. Quel est l'entier r tel que $p \oplus r = q$?

	décimal	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	35	1	0	0	0	1	1
$\oplus$	27	0	1	1	0	1	1
$=$	56	1	1	1	0	0	0

Posons $r = p \oplus q$, c'est à dire $r = 56$:

	décimal	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	35	1	0	0	0	1	1
$\oplus$	56	1	1	1	0	0	0
$=$	27	0	1	1	0	1	1

c'est à dire : $p \oplus r = q$ ou encore $35 \oplus 56 = 27$.

■

11.12.3 Annulation d'une somme digitale par diminution d'un terme.

Soit $S = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3 \oplus \cdots \oplus p_n$ une somme digitale non nulle. Alors on peut remplacer l'un des p_i par un entier r plus petit telle que la somme soit nulle : $S' = \bigoplus_{j \neq i} p_j \oplus r = 0$.

Preuve.

Dans l'écriture binaire du nombre S, le 1 de gauche est obtenu par une somme de 1 , en nombre impair, dans la même colonne des écritures binaires des p_k. On choisit l'un des p_k (arbitrairement) ayant un 1 dans cette colonne (appelons le p_i), on remplace ce 1 par un zéro (on obtient donc un nombre strictement plus petit que p_i). Dans les autres cases (à droite de la case déjà modifiée), on remplace le 1 par un 0 ou le 0 par un 1 à chaque fois qu'il apparaît 1 dans la colonne correspondante de l'écriture binaire de S ...ainsi le nombre de 1 sera pair dans toute colonne où ce nombre était impair et la nouvelle somme est nulle avec un terme à la place de p_i qui est strictement plus petit que p_i.

Exemple.

	décimal	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
	107	1	1	0	1	0	1	1
$\oplus$	122	1	1	1	1	0	1	0
$\oplus$	57	0	1	1	1	0	0	1
$=$	40	0	1	0	1	0	0	0

Nous pouvons dans ce cas choisir de modifier n'importe lequel des trois nombres intervenant puisqu'ils ont tous un 1 dans la colonne la plus à gauche de l'écriture binaire de $S = 40 = (1, 0, 1, 0, 0, 0)$. Choisissons par exemple de remplacer 107. On le remplace par $(1, 0, 0, 0, 0, 1, 1) = 67$ et on obtient :

$$\begin{array}{cccccccccc} & 67 & = & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ \oplus & 122 & = & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \oplus & 57 & = & & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ = & S' & = & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

■

11.12.4 Diminuer une somme digitale par diminution d'un terme.

Soit $S = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3 \oplus \cdots \oplus p_n$ une somme digitale non nulle et soit c un entier tel que $0 \leq c < S$. Alors on peut remplacer l'un des p_i par un entier r plus petit telle que la somme soit égale à c : $S' = \bigoplus_{j \neq i} p_j \oplus r = c$.

Preuve.

1. On commence par le prouver pour une somme digitale à deux termes.
   Soit $S = a \oplus b$ une somme digitale à deux termes telle que $S \neq 0$. Soit c un entier tel que $0 \leq c < S$. On montre que
   – soit $c \oplus b$ est strictement plus petit que a et dans ce cas on remplace a par $c \oplus b$ et on obtient une nouvelle somme $S' = (c \oplus b) \oplus b = c$
   – soit $c \oplus a$ est strictement plus petit que b et dans ce cas on remplace b par $c \oplus a$ et on obtient une nouvelle somme $S' = a \oplus (c \oplus a) = c$.
   Pour cela, décomposons en binaire les nombres en présence $a = \sum_i a_i 2^i$, $b = \sum_i b_i 2^i$, $c = \sum_i c_i 2^i$, $S = a \oplus b = \sum_i s_i 2^i$, $c \oplus b = \sum_i \beta_i 2^i$ et $c \oplus a = \sum_i \alpha_i 2^i$.
   Comme $c < S$, k le plus grand des entiers i tels que $c_i \neq s_i$ vérifie : $c_k = 0$ et $s_k = 1$ (et pour $j > k$: $c_j = s_j$). Puisque $s_k = 1$, on a :
   – soit $a_k = 1$ et $b_k = 0$
   – soit $a_k = 0$ et $b_k = 1$

   (a) Plaçons nous dans le cas $a_k = 1$ et $b_k = 0$.
   Pour $j > k$, on a $c_j = s_j$ donc les coefficients dans la décomposition binaire de $S \oplus b$ et de $c \oplus b$ sont les mêmes pour $j > k$. Or $S \oplus b = (a \oplus b) \oplus b = a = \sum_i a_i 2^i$ et $c \oplus b = \sum_i \beta_i 2^i$, on a donc pour $j > k$: $a_j = \beta_j$ (interchanger dans une somme $a \oplus b$ et c ne change rien pour $j > k$).
   Par ailleurs $c_k = 0$ et $b_k = 0$ donc $\beta_k = 0$.
   On a donc $a_j = \beta_j$ pour $j > k$ et $\beta_k = 0$, $a_k = 1$ d'où $c \oplus b < a$.

   (b) Le cas $a_k = 0$ et $b_k = 1$ donnerait de la même façon $c \oplus a < b$.

2. Supposons la propriété vérifiée (hypothèse de récurrence) pour toute somme de n termes ($n \geq 2$). Soit

   $$S = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3 \oplus \cdots \oplus p_n \oplus p_{n+1} = (p_1 \oplus p_2 \oplus p_3 \oplus \cdots \oplus p_n) \oplus p_{n+1}$$

   une somme digitale non nulle à $n + 1$ termes et soit c un entier tel que $0 \leq c < S$.
   D'après la propriété établie avec deux termes, soit on peut remplacer p_{n+1} par un entier strictement plus petit k tel que $(p_1 \oplus p_2 \oplus p_3 \oplus \cdots \oplus p_n) \oplus k = c$ et c'est gagné, soit on peut remplacer $S' = p_1 \oplus p_2 \oplus p_3 \oplus \cdots \oplus p_n$ par un

entier strictement plus petit k tel que $k \oplus p_{n+1} = c$ et d'après l'hypothèse de récurrence, on peut remplacer l'un des p_i $(1 \leq i \leq n)$ par un entier q tel que $\bigoplus_{j \neq i, 1 \leq j \leq n} p_j \oplus q = k$ d'où $\bigoplus_{j \neq i, 1 \leq j \leq n+1} p_j \oplus q = c$ et le caractère héréditaire de la propriété est établi.

■

Exemple.

$$\begin{array}{rrcrrrrrrrr} & 207 & = & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \oplus & 98 & = & & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ = & 173 & = & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Cherchons à réaliser la somme 50 en remplaçant soit 207, soit 98 par un entier positif plus petit. Pour cela, suivant la démonstration ci-dessus, on calcule :

$$\begin{array}{rrcrrrrrrr} & 50 & = & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \oplus & 98 & = & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ = & 80 & = & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

On a donc $80 \oplus 98 = 50$.

Maple.

`sommedigitale :=proc(n,m)`	la procédure calcule la somme digitale des entiers n et m.
`local a,b,i,j,somme ;`	

`if n>m`
`then a :=convert(n,base,2) ;`
`b :=convert(m,base,2) ;`
`else b :=convert(n,base,2) ;`
`a :=convert(m,base,2) ;`
`fi ;`
	on convertit n et m en base 2.
	
	a est la liste des chiffres (0 et 1) du plus grand de n et m, b celle du plus petit.

`for i from 1 to nops(b) do`
`if op(i,a)=op(i,b) then a[i] :=0 ;`
`else a[i] :=1 ; fi ;`
`od ;`
	somme des chiffres en base 2 (modulo 2)

`somme :=sum(a[j]*2 ^ (j-1),j=1..nops(a)) ;`	on convertit le résultat en décimal
`return(somme) ;`	
`end ;`	

`SommeDigit :=proc(L)`	calcule la somme digitale des éléments de la liste L
`local i,somme ;`	
`somme :=0 ;`	

`for i from 1 to nops(L) do`
`somme :=sommedigitale(somme,op(i,L)) ;`
`od ;`
	appel de la procédure précédente

`return(somme) ;`	
`end ;`	

Exemple.
- sommedigitale(104,526)=614.
- SommeDigit([15,187,1007])=859.

◊

11.13 Multijeux

11.13.1 Produit normal.

On dispose de plusieurs graphes orientés $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$.
Un pion est placé sur chacun des graphes. Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant : chacun à son tour, un joueur choisit un certain nombre de graphes (au moins un) et déplace les pions sur les graphes choisis suivant une flèche.
Ce jeu revient à jouer avec un seul pion sur le graphe G appelé produit normal des graphes, les sommets du graphe G sont les éléments du produit cartésien $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ et les successeurs du sommet $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ sont les sommets $(s'_1, s'_2, \ldots, s'_n)$ où pour certains j (éventuellement tous) s'_j est un successeur de s_j dans G_j et pour certains j (mais jamais tous) $s'_j = s_j$.

$$\Gamma^+(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \bigcup_{I \subset \{1,2,\ldots,n\}, I \neq \emptyset} \left(\prod_{i \in I} \Gamma^+_{G_i}(s_i) \times \prod_{i \in \{1,2,\ldots,n\}-I} \{s_i\} \right)$$

11.13.2 Produit cartésien.

On dispose de plusieurs graphes orientés $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$.
Un pion est placé sur chacun des graphes. Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant : chacun à son tour, un joueur déplace les pions sur tous les graphes suivant une flèche.
Ce jeu revient à jouer avec un seul pion sur le graphe G appelé graphe produit cartésien des graphes, les sommets du graphe G sont les éléments du produit cartésien $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ et les successeurs du sommet $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ sont les sommets $(s'_1, s'_2, \ldots, s'_n)$ où pour tout indice j s'_j est un successeur de s_j dans G_j.

$$\Gamma^+(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \Gamma^+_{G_1}(s_1) \times \Gamma^+_{G_2}(s_2) \times \ldots \times \Gamma^+_{G_n}(s_n)$$

11.13.3 Somme.

On dispose de plusieurs graphes orientés $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n$.
Un pion est placé sur chacun des graphes. Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant : chacun à son tour, un joueur choisit un graphe et déplace le pion de ce graphe suivant une flèche.
Ce jeu revient à jouer avec un seul pion sur le graphe $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$ appelé graphe somme (ou somme cartésienne) des graphes, les sommets de ce graphe G sont les éléments du produit cartésien $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ et les successeurs du sommet $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ sont les sommets $(s'_1, s'_2, \ldots, s'_n)$ où pour un indice j s'_j est un successeur de s_j dans G_j et pour les autres indices i on a $s'_i = s_i$.

$$\Gamma^+(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \bigcup_{i \in \{1,2,\ldots,n\}} \left(\{s_1\} \times \cdots \times \{s_{i-1}\} \times \Gamma^+_{G_i}(s_i) \times \{s_{i+1}\} \times \cdots \times \{s_n\} \right)$$

11.14 Fonction de Grundy sur un graphe somme

Si g_1, g_2, …, g_n sont des fonctions de Grundy sur les graphes G_1, G_2, …, G_n alors la fonction g définie sur $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ par

$$g\left(s_1, s_2, \ldots, s_n\right) = g_1(s_1) \oplus g_2(s_2) \oplus \cdots \oplus g_n(s_n)$$

est une fonction de Grundy sur le graphe somme $G = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$.

Preuve.
Avec 11.9.5, les deux points ci-dessous établissent le résultat.
Soit $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ un sommet du graphe somme tel que $g(s) = c$, c'est à dire $g_1(s_1) \oplus g_2(s_2) \oplus \cdots \oplus g_n(s_n) = c$.

1. Soit $0 \leq j < c$. Montrons que $j \in g\left(\Gamma^+(s)\right)$.
   On sait qu'il existe (d'après 11.12.4) un indice i et un entier $k < g_i(s_i)$ tel que si l'on remplace $g_i(s_i)$ par k on aura une somme égale à c : $\bigoplus_{j \neq i} g_j(s_j) \oplus k = c$. Or il existe un sommet $x \in G_i$ tel que $x \in \Gamma^+_{G_i}(s_i)$ et $g(x) = k$ (d'après 11.9.5) et $(s_1, s_2, \ldots, s_{i-1}, x, s_{i+1}, \ldots, s_n) \in \Gamma^+(s)$ (par définition du graphe somme).
2. Montrons que $\forall t \in \Gamma^+(s)$, $g(t) \neq c$.
   Par exemple, si l'on avait $g_1(x) \oplus g_2(s_2) \oplus g_3(s_3) \oplus \cdots \oplus g_n(s_n) = c$ avec $x \in \Gamma^+_{G_1}(s_1)$, c'est à dire : $g_1(x) \oplus g_2(s_2) \oplus g_3(s_3) \oplus \cdots \oplus g_n(s_n) = g_1(s_1) \oplus g_2(s_2) \oplus g_3(s_3) \oplus \cdots \oplus g_n(s_n)$ alors en ajoutant $g_2(s_2) \oplus g_3(s_3) \oplus \cdots \oplus g_n(s_n)$ à droite de chaque membre de cette égalité, on obtiendrait $g_1(x) = g_1(s_1)$ avec $x \in \Gamma^+_{G_1}(s_1)$, ce qui est impossible puisque g_1 est une fonction de Grundy sur G_1.

■

11.15 Fan Tan

11.15.1 Règle du jeu.

k tas d'allumettes de respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_k$ allumettes. Chacun des deux joueurs prend, tour à tour, autant d'allumettes qu'il veut (au moins une) mais dans un seul tas. Le gagnant est celui qui prend la dernière allumette.

11.15.2 Avec un seul tas.

Fan Tan à un tas : chacun des deux joueurs prend, tour à tour, autant d'allumettes qu'il veut (au moins une). Le gagnant est celui qui prend la dernière allumette.
Il y a une stratégie évidente pour le joueur qui commence qui consiste à prendre toutes les allumettes.
Le sommet correspondant à un tas de j allumettes flèche sur les sommets 0, 1, 2, …, $j-1$ d'où la fonction de Grundy sur le graphe du Fan tan à un tas de n allumettes :

$$\underset{n}{n} \quad \underset{n-1}{n-1} \quad \ldots \quad \underset{4}{4} \quad \underset{3}{3} \quad \underset{2}{2} \quad \underset{1}{1} \quad \underset{0}{0}$$

11.15.3 Avec plusieurs tas.

Le graphe du jeu de Fan Tan à k tas d'allumettes de respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_k$ allumettes est le graphe somme des graphes de Fan Tan à un tas de respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_k$ allumettes. La fonction de Grundy g sur ce graphe somme est la somme digitale des fonctions de Grundy $g_1, g_2, \ldots, g_k$ des graphes "termes" de cette somme (d'après 11.14).
Le noyau de ce graphe est $g^{-1}(0)$, il est constitué des "situations" (tas 1 à m_1 allumettes, tas 2 à m_2 allumettes, ..., tas k à m_k allumettes) telles que $m_1 \oplus m_2 \oplus \cdots \oplus m_k = 0$.

Exemple.
Pour un Fan Tan à deux tas, les positions du noyau correspondent à deux tas de respectivement m_1 et m_2 allumettes tels que $m_1 \oplus m_2 = 0$. On retrouve le fait que le noyau est dans ce cas constitué des couples de tas à même nombre d'allumettes.

Maple.
Pour un Fan Tan avec quatre tas d'allumettes, on obtiendra le noyau en recherchant les quadruplets (a, b, c, d) d'entiers tels que $a \oplus b \oplus c \oplus d = 0$ (a, b, c, d inférieurs ou égaux aux nombres d'allumettes dans les tas de départ).
Par exemple avec MAPLE :

`FanTan :=proc(L)`	L est une liste contenant les cardinaux des quatre tas d'allumettes, la procédure renvoie le noyau correspondant.
`local i,j,k,p,element,noyau;`	

`noyau :={};`
`for i from 0 to op(1,L) do`
`for j from 0 to op(2,L) do`
`for k from 0 to op(3,L) do`
`for p from 0 to op(4,L) do`
`if SommeDigit([i,j,k,p])=0 then`
`element :=sort([i,j,k,p]);`
`noyau :=noyau union {element};`
`fi;`
`od;od;od;od;`
	le noyau est un ensemble de listes comprenant 4 valeurs correspondant aux cardinaux des tas.

`print(noyau);`	affichage du noyau
`end;`	

`FanTan([7,5,3,1])` donne les positions suivantes pour le noyau :
[0, 1, 4, 5], [1, 1, 4, 4], [1, 1, 2, 2], [0, 0, 4, 4], [1, 1, 3, 3], [1, 3, 5, 7], [0, 0, 5, 5], [1, 1, 5, 5], [0, 1, 2, 3], [0, 2, 5, 7], [1, 1, 1, 1], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 1, 1], [0, 2, 4, 6], [1, 3, 4, 6], [0, 3, 5, 6], [1, 2, 5, 6], [0, 0, 2, 2], [0, 0, 3, 3], [1, 2, 4, 7], [0, 3, 4, 7].

◊

11.16 Jeu des étrangers

11.16.1 Règle du jeu.

Un tas de n allumettes ($n > 1$). Chacun des deux joueurs enlève à son tour un nombre d'allumettes de son choix à condition que ce nombre soit premier avec le nombre d'allumettes du tas laissé par son adversaire. *(d'après [6])*

11.16.2 Fonction de Grundy sur un tas de 50 allumettes.

Celui qui perd (c'est à dire celui qui ne peut plus jouer) est celui qui doit jouer alors qu'il ne reste plus aucune allumette.
Cherchons à définir la fonction de Grundy sur le graphe associé au jeu avec $n = 50$ en commençant par poser $g(0) = 0$ puis $g(1) = 1$:

50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
0	4	0	15	0	2	0	14	0	13
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
0	2	0	12	0	3	0	2	0	11
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
0	10	0	2	0	3	0	9	0	2
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
0	8	0	7	0	2	0	6	0	5
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
0	2	0	4	0	3	0	2	0	1
0									
0									

11.16.3 Fonction de Grundy (cas général).

Sur le graphe associé au jeu décrit ci-dessus (où un sommet-tas est nommé par le nombre d'allumettes du tas), la fonction de Grundy g est donnée par :

- $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$
- $g(i) = 0$ pour un entier i pair
- $g(i) = k$ si le plus petit facteur premier de i est le $k^{\text{ème}}$ nombre premier pour $i \geq 2$ impair.

Preuve.

1. Remarquons déjà que la règle "le nombre h d'allumettes enlevées par un joueur doit être premier avec le nombre d'allumettes n du tas laissé par son adversaire" peut s'énoncer ainsi : "le nombre d'allumettes k offert à l'adversaire par un joueur doit être premier avec le nombre d'allumettes n du tas laissé par cet adversaire". En effet, avec ces notations : $k = n - h$ et les diviseurs communs de n et h sont aussi les diviseurs communs de n et $n - h$.
2. La propriété est vérifiée (cf ci-dessus) pour $i = 0, 1, 2, 3, \ldots, 50$.
   Hypothèse de récurrence : on suppose la propriété vraie pour tous les entiers i de 0 à $n - 1$ ($n > 50$).

(a) Pour n pair.
Le sommet n flèche
- sur le sommet 1 (car 1 et n sont étrangers), et le sommet 1 a pour nombre de Grundy 1.
- et uniquement sur des sommets impairs ($\neq 1$) qui ont, d'après l'hypothèse de récurrence, un nombre de Grundy ≥ 2.

Donc $min\,(\mathbb{N} - g\,(\Gamma^+(n))) = 0$.

(b) Pour n impair.
Pour tout entier j, notons p_j le $j^{\text{ième}}$ nombre premier.
Soit p_k le plus petit facteur premier de n.
Le joueur ne peut laisser un nombre d'allumettes multiple de p_k, donc $k \notin g\,(\Gamma^+(n))$.
Par ailleurs, p_k étant le plus petit facteur premier de n, les nombres premiers p_j $(1 \leq j < k)$ ne divisent pas n et sont donc premiers avec n. Le sommet n flèche donc en particulier sur les sommets p_j $(1 \leq j < k)$. Donc $1, 2, \ldots, k-1$ sont des éléments de $g\,(\Gamma^+(n))$.
Enfin 0 est élément de $g\,(\Gamma^+(n))$ puisque tout sommet impair ($\neq 1$) flèche sur les sommets pairs ($\neq 0$).
Finalement : $min\,(\mathbb{N} - g\,(\Gamma^+(n))) = k$.

■

Maple.
Une procédure MAPLE pour déterminer le nombre de Grundy du sommet n à l'aide du résultat 11.16.3 :

```
grundy :=proc(n)
local i ;
i :=1 ;
if n=0 then return 0 ;
elif (irem(n,2)=0) then return 0 ;
elif n=1 then return 1 ;
else
while not(irem(n,ithprime(i))=0) do i :=i+1 ;od ;
return(i) ;
fi ;
end ;
```

♢

11.16.4 Avec plusieurs tas d'allumettes.

k tas de respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_k$ allumettes. Chacun des deux joueurs enlève à son tour un nombre d'allumettes de son choix (au moins une) dans un seul tas à condition que ce nombre soit premier avec le nombre d'allumettes du tas trouvé au moment de jouer.

11.16.5 Fonction de Grundy sur le graphe somme.

En 11.16.4, il s'agit de jouer sur le graphe somme des graphes pour un tas de respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_k$ allumettes définis avec le jeu 11.16.1.
La fonction de Grundy sur ce graphe s'obtient par somme digitale des fonctions de Grundy.

Maple.
On joue avec 3 tas.
Procédure MAPLE calculant le noyau avec 3 tas :

```
Etranger :=proc(L)
local i,j,k,element,noyau ;
noyau :={} ;
for i from 0 to op(1,L) do
for j from 0 to op(2,L) do
for k from 0 to op(3,L) do
if SommeDigit([grundy(i),grundy(j),grundy(k)])=0 then
element :=sort([i,j,k]) ;
noyau :=noyau union {element} ;
fi ;od ;od ;od ;
print(noyau) ;
end ;
```

Essai avec des tas initiaux de 3, 4 et 5 allumettes. `Etranger([5,6,7])` donne les positions suivantes pour le noyau : [0, 2, 6], [3, 3, 6], [0, 5, 5], [2, 3, 3], [0, 3, 3], [0, 6, 6], [2, 2, 6], [1, 1, 2], [0, 0, 4], [2, 4, 4], [2, 2, 2], [0, 0, 0], [2, 5, 5], [1, 1, 4], [0, 4, 4], [0, 0, 2], [1, 1, 6], [2, 4, 6], [0, 0, 6], [2, 2, 4], [4, 6, 6], [0, 1, 1], [5, 5, 6], [1, 3, 5], [0, 4, 6], [3, 3, 4], [2, 6, 6], [0, 2, 2], [0, 2, 4], [4, 4, 4], [4, 5, 5], [4, 4, 6].

Le noyau étant déjà assez conséquent, il est peut-être préférable pour un joueur d'avoir un calcul au coup par coup.
La première des deux procédures ci-dessous vérifie si un coup joué respecte les règles du jeu, la seconde calcule les positions du noyau que l'on peut atteindre à partir d'une position hors noyau :

<table>
<tr><td><code>CoupLegal :=proc(depart,arrivee)</code></td><td>la procédure renvoie true si le jeu permet de passer de la position depart à la position arrivee. depart et arrivee sont les listes des cardinaux des trois tas.</td></tr>
<tr><td><code>local i ;
for i from 0 to 2 do
if op(irem(i,3)+1,depart)=
op(irem(i,3)+1,arrivee) and
op(irem(i+1,3)+1,depart)=
op(irem(i+1,3)+1,arrivee) and
igcd(op(irem(i+2,3)+1,depart),
op(irem(i+2,3)+1,arrivee))=1
and
not(op(irem(i+2,3)+1,depart)=
op(irem(i+2,3)+1,arrivee))
then return true ;
fi ;
od ;
return false ;</code></td><td>deux tas doivent être inchangés,

le troisième doit satisfaire

la règle du jeu des “Etrangers”.</td></tr>
<tr><td><code>end ;</code></td><td></td></tr>
</table>

`CoupSuivant :=proc(position)`	la procédure renvoie les positions du noyau que l'on peut atteindre depuis la position "position" (liste des trois cardinaux)
`local i,j,k ;`	

`if`
`SommeDigit([grundy(op(1,position)),`
`grundy(op(2,position)),`
`grundy(op(3,position))])=0`
`then return('vous êtes dans le noyau') ;`
	noyau non atteignable
	
	si le joueur joue depuis le noyau.

`else`
`for i from 0 to op(1,position) do`
`for j from 0 to op(2,position) do`
`for k from 0 to op(3,position) do`
`if SommeDigit([grundy(i),grundy(j),grundy(k)])`
`=0 and CoupLegal(position,[i,j,k])`
`then print([i,j,k]) ;`
`fi ;`
`od ;od ;od ;`
`fi ;`	

`end ;`	

`CoupSuivant([5,6,7])` donne : [5, 6, 5]. Avec des tas initiaux de 5, 6 et 7 allumettes, le premier joueur pourra donc commencer la partie en enlevant 2 allumettes au tas de 7.
Bien entendu `CoupSuivant([5,6,5])` donne : "vous êtes dans le noyau" et le second joueur a déjà perdu si le joueur 1 continue à bien jouer.

◇

11.17 Jeu de Prim

11.17.1 Règle du jeu.

Un tas de n allumettes ($n > 1$). Chacun des deux joueurs enlève à son tour un nombre d'allumettes de son choix à condition qu'avant de jouer, le tas compte encore au moins deux allumettes et que le nombre d'allumettes enlevées soit premier avec le nombre d'allumettes du tas trouvé avant de jouer. Celui qui perd (c'est à dire celui qui ne peut plus jouer) est donc celui qui doit jouer alors qu'il ne reste plus qu'une allumette.

11.17.2 Fonction de Grundy sur un tas de 50 allumettes.

Comme n et $n-1$ sont premiers entre eux, le premier joueur retire $n-1$ allumettes si le tas initial est de n allumettes et gagne !
Cherchons à définir la fonction de Grundy sur le graphe associé au jeu avec

$n = 50$ en commençant par poser $g(1) = 0$:

50	49	48	47	46	45	44	43	42	41
1	4	1	15	1	2	1	14	1	13
40	39	38	37	36	35	34	33	32	31
1	2	1	12	1	3	1	2	1	11
30	29	28	27	26	25	24	23	22	21
1	10	1	2	1	3	1	9	1	2
20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
1	8	1	7	1	2	1	6	1	5
10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	1	4	1	3	1	2	1	0

Comme le raisonnement ci-dessus le montrait, le noyau ne contient que la position bloquée.

11.17.3 Fonction de Grundy (cas général).

Sur le graphe associé au jeu décrit ci-dessus (où un sommet-tas est nommé par le nombre d'allumettes du tas), la fonction de Grundy g est donnée par $g(1) = 0$ et pour $i \geq 2$, $g(i) = k$ si le plus petit facteur premier de i est le $k^{\text{ème}}$ nombre premier.

Preuve.

1. La règle “le nombre h d'allumettes enlevées par un joueur doit être premier avec le nombre d'allumettes n du tas laissé par son adversaire” peut s'énoncer ainsi : “le nombre d'allumettes k offert à l'adversaire par un joueur doit être premier avec le nombre d'allumettes n du tas laissé par cet adversaire”. En effet, avec ces notations : $k = n - h$ et les diviseurs communs de n et h sont aussi les diviseurs communs de n et $n - h$.
2. La propriété est vérifiée (cf ci-dessus) pour $i = 1, 2, \ldots, 50$.
   Hypothèse de récurrence : on suppose la propriété vraie pour tous les entiers i de 1 à $n - 1$ ($n > 50$).
   - Si n est pair.
     Le sommet n flèche sur le sommet 1 de nombre de Grundy 0 et uniquement sur des sommets impairs ($\neq 1$) qui ont, d'après l'hypothèse de récurrence, un nombre de Grundy ≥ 2. Donc $min\,(\mathbb{N} - g\,(\Gamma^+(n))) = 1$.
   - Si n est impair, notons p_k le plus petit facteur premier de k (où p_k désigne le $k^{\text{ième}}$ nombre premier).
     Le joueur ne peut laisser un nombre d'allumettes multiple de p_k, donc $k \notin g\,(\Gamma^+(n))$.
     Par ailleurs, p_k étant le plus petit facteur premier de n, les nombres premiers p_j $(1 \leq j < k)$ ne divisent pas n et sont donc premiers avec n.
     Le sommet n flèche donc en particulier sur les sommets p_j $(1 \leq j < k)$.
     Donc $1, 2, \ldots, k - 1$ sont des éléments de $g\,(\Gamma^+(n))$.
     Enfin 0 est élément de $g\,(\Gamma^+(n))$ puisque tout sommet flèche sur le tas 1.
     Finalement : $min\,(\mathbb{N} - g\,(\Gamma^+(n))) = k$.

■

Maple.
Une procédure MAPLE pour déterminer le nombre de Grundy du sommet n à l'aide du résultat 11.17.3 :

```
grundy :=proc(n)
local i ;
i :=1 ;
if n=1 then return 0 ;
else
while not(irem(n,ithprime(i))=0) do i :=i+1 ;od ;
return(i) ;
fi ;
end ;
```

♢

11.17.4 Avec plusieurs tas d'allumettes.

k tas de respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_k$ allumettes. Chacun des deux joueurs enlève à son tour un nombre d'allumettes de son choix (au moins une) dans un seul tas, en respectant la règle du jeu de Prim sur ce tas.

11.17.5 Fonction de Grundy sur le graphe somme.

En 11.17.4, il s'agit de jouer sur le graphe-somme des graphes pour un tas de respectivement $n_1, n_2, \ldots, n_k$ allumettes définis avec le jeu 11.17.1.
La fonction de Grundy sur ce graphe s'obtient par somme digitale des fonctions de Grundy.

Maple.
On joue avec 3 tas.
Procédure MAPLE calculant le noyau avec 3 tas :

```
Prim :=proc(L)
local i,j,k,element,noyau ;
noyau :={} ;
for i from 1 to op(1,L) do
for j from 1 to op(2,L) do
for k from 1 to op(3,L) do
if SommeDigit([grundy(i),grundy(j),grundy(k)])=0 then
element :=sort([i,j,k]) ;
noyau :=noyau union {element} ;
fi ;od ;od ;od ;
print(noyau) ;
end ;
```

Essai avec des tas initiaux de 5, 6 et 7 allumettes. `Prim([5,6,7])` donne les positions suivantes pour le noyau : [1, 4, 4], [1, 4, 6], [1, 5, 5], [3, 4, 5], [1, 6, 6], [3, 5, 6], [1, 1, 1], [1, 2, 6], [1, 2, 2], [1, 3, 3], [2, 3, 5], [1, 2, 4].

La première des deux procédures ci-dessous vérifie si un coup joué respecte les règles du jeu, la seconde calcule les positions du noyau que l'on peut atteindre à partir d'une position hors noyau :

`CoupLegal :=proc(depart,arrivee)`	la procédure renvoie true si le jeu permet de passer de la position depart à la position arrivee. depart et arrivee sont les listes des cardinaux des trois tas.

`if op(1,depart)=op(1,arrivee) and`
`op(2,depart)=op(2,arrivee) and`
`igcd(op(3,depart),op(3,arrivee))=1`
`and`
`not(op(3,depart)=1)`
`then return true ;`
`elif op(3,depart)=op(3,arrivee) and`
`op(2,depart)=op(2,arrivee) and`
`igcd(op(1,depart),op(1,arrivee))=1`
`and`
`not(op(1,depart)=1)`
`then return true ;`
`elif op(1,depart)=op(1,arrivee) and`
`op(3,depart)=op(3,arrivee) and`
`igcd(op(2,depart),op(2,arrivee))=1`
`and`
`not(op(2,depart)=1)`
`then return true ;`
`else return false ;`
`fi ;`
	deux tas doivent être inchangés,
	le troisième doit satisfaire
	la règle du jeu de "Prim".

`end ;`	

`CoupSuivant :=proc(position)`	la procédure renvoie les positions du noyau que l'on peut atteindre depuis la position "position" (liste des trois cardinaux)
`local i,j,k ;`	

`if`
`SommeDigit([grundy(op(1,position)),`
`grundy(op(2,position)),`
`grundy(op(3,position))])=0`
`then return('vous êtes dans le noyau')`
	noyau non atteignable
	
	si le joueur joue depuis le noyau.

`else`
`for i from 1 to op(1,position) do`
`for j from 1 to op(2,position) do`
`for k from 1 to op(3,position) do`
`if SommeDigit([grundy(i),grundy(j),grundy(k)])`
`=0 and CoupLegal(position,[i,j,k])`
`then print([i,j,k]) ;`
`fi ;`
`od ;od ;od ;`
`fi ;`	

`end ;`	

`CoupSuivant([5,6,7])` donne : [5, 6, 3]. Avec des tas initiaux de 5, 6 et 7 allumettes, le premier joueur pourra donc commencer la partie en enlevant 4 allumettes au tas de 7.

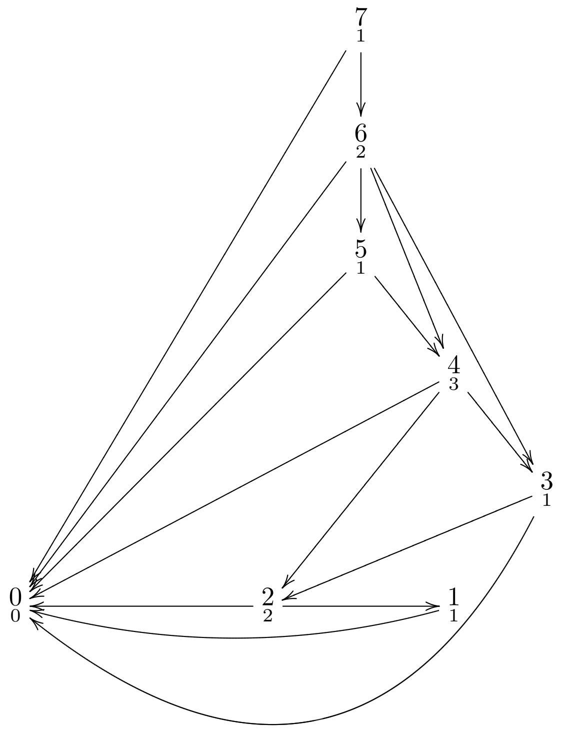
◊

11.18 Jeux des diviseurs

11.18.1 Le jeu des diviseurs enlevés.

(d'après [6]) Un tas de n allumettes. Chacun des deux joueurs, à tour de rôle, enlève un nombre d'allumettes qui est un diviseur du nombre d'allumettes restant.

Exemple.
Avec un tas initial de 7 allumettes, le graphe du jeu (avec sa fonction de Grundy) est le suivant :



11.18.2 Stratégie et fonction de Grundy pour le jeu des diviseurs enlevés à un tas.

Stratégie évidente : on enlève tout.
La fonction de Grundy sur le graphe associé à ce jeu est donnée par $g(0) = 0$ et $g(j) = r + 1$ pour un nombre d'allumettes j s'écrivant sous la forme $j = 2^r (2k + 1)$ (r et k dans $\mathbb{N}$).

Justification.
La propriété est vérifiée sur les premiers entiers (cf exemple).
Hypothèse de récurrence : on suppose la propriété vraie pour les entiers $< n$ $(n > 7)$.
n s'écrit $2^r (2k + 1)$. Sur un paquet de n allumettes :

- $0 \in g(\Gamma^+(n))$ puisqu'on peut enlever les n allumettes obtenant ainsi le sommet 0 de nombre de Grundy 0.
- Soit d un diviseur de n $(1 < d < n)$ de la forme $2^s (2p + 1)$ avec $s < r$. Enlevons d allumettes, il reste $2^r (2k + 1) - 2^s (2p + 1) = 2^s (2^{r-s} (2k + 1) - (2p + 1)) =$

$2^s(2k'+1)$ allumettes, sommet de nombre de Grundy $s+1$ par l'hypothèse de récurrence. Ainsi $1, 2, \ldots, r$ appartiennent à $g(\Gamma^+(n))$ (obtenus avec les valeurs $0, 1, \ldots, r-1$ de s).

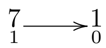
- Soit d un diviseur de n $(1 < d < n)$ de la forme $2^r(2p+1)$ (avec $p < k$). Enlevons d allumettes, il reste $2^r(2k+1) - 2^r(2p+1) = 2^r((2k+1)-(2p+1)) = 2^{r+1}(k-p)$ allumettes, nombre qui s'écrit $2^t(2k'+1)$ où $t \geq r+1$. Comme $2^{r+1}(k-p) < 2^r(2k+1)$, ce sommet est de nombre de Grundy au moins $r+2$ par l'hypothèse de récurrence.
- Ainsi le plus petit entier n'appartenant pas à $g(\Gamma^+(n))$ est $r+1$ et on a bien $g(n) = r+1$.

■

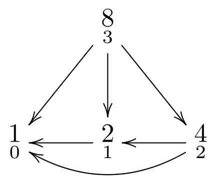
11.18.3 Le jeu des résidus diviseurs.

Un tas de n allumettes. Chacun des deux joueurs, à tour de rôle, enlève des allumettes (au moins une), le nombre d'allumettes laissées dans le tas devant être un diviseur du nombre d'allumettes laissées par l'adversaire.

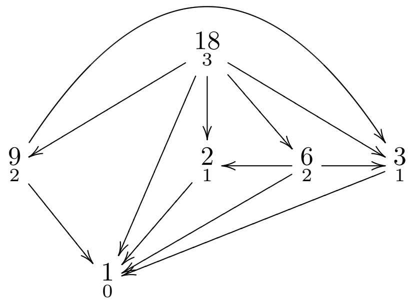
Exemple.
Avec un tas initial de 7 allumettes, le graphe du jeu (avec sa fonction de Grundy) :



Avec 8 allumettes, on obtient :



Avec 18 allumettes :



11.18.4 Fonction de Grundy pour le jeu des résidus diviseurs.

La fonction de Grundy sur le graphe associé à ce jeu est donnée par $g(1) = 0$ et $g(j) = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r$ pour un nombre d'allumettes j dont la décomposition en facteurs premiers est $j = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$.

Justification.
La relation est vérifiée sur les premiers entiers. Hypothèse de récurrence : on suppose la relation vérifiée pour tout entier $< n$ $(n > 3)$.
L'entier n s'écrit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$. Le sommet n flèche uniquement sur les diviseurs ($\neq n$) de l'entier n, la décomposition en facteurs premiers de ces diviseurs est de la forme $p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$ où $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$, $1 \leq i \leq r$, l'un au moins des β_i étant strictement plus petit que α_i. En faisant varier les β_i entre 0 et α_i, on obtient tous les entiers entre 0 et $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_r - 1$ (et uniquement ceux-là), d'où le résultat.

■

Maple.
Plutôt que d'utiliser les résultats ci-dessus pour une procédure MAPLE, on calcule ici les nombres de Grundy à l'aide de la définition du jeu (règle du jeu) et de la définition générale d'une fonction de Grundy par une procédure récursive (la procédure sera donc quasiment la même dans les deux cas).
Tout d'abord deux procédures donnant la liste des successeurs d'un sommet n dans chacun des deux jeux.
Pour le jeu des diviseurs enlevés :

`ListeSuccesseursEnleve :=proc(n)`	renvoie la liste des tas atteignables à partir d'un tas de n allumettes.
`local i,j,Succ ;`	

`Succ :=[] ;`
`for j from 1 to n do`
`if irem(n,j)=0 then Succ :=[op(Succ),n-j] ;`
`fi ;`
`od ;`
`return(Succ) ;`
`end ;`
	on peut atteindre le sommet
	n−j lorsque
	j divise n.

Pour le jeu des résidus diviseurs :

```
ListeSuccesseursResidu :=proc(n)
local i,j,Succ ;
Succ :=[] ;
for j from 1 to n-1 do
if irem(n,j)=0 then Succ :=[op(Succ),j] ;fi ;
od ;
return(Succ) ;
end ;
```

Pour le jeu des diviseurs enlevés :

`grundyenleve :=proc(n)`	calcule le nombre de Grundy du sommet n
`local i, EnsembleGrundySuccesseur, ListeGrundySuccesseur ;`	
`option remember ;`	
`if n=0 then return(0) ;`	nombre de Grundy de l'unique position bloquée
`else`	
`EnsembleGrundySuccesseur :={} ; for i from 1 to nops( ListeSuccesseursEnleve(n)) do EnsembleGrundySuccesseur := EnsembleGrundySuccesseur union { grundyenleve(op(i,ListeSuccesseursEnleve(n))) } ; od ;`	construction de EnsembleGrundySuccesseur= $g(\Gamma^+(n))$
`ListeGrundySuccesseur :=[] ; for i from 1 to nops( EnsembleGrundySuccesseur) do ListeGrundySuccesseur := [op(ListeGrundySuccesseur), op(i,EnsembleGrundySuccesseur)] ; od ; ListeGrundySuccesseur := sort(ListeGrundySuccesseur) ;`	les nombres de $g(\Gamma^+(n))$ sont classés dans l'ordre croissant.
`for i from 1 to nops(ListeGrundySuccesseur) do if not(op(i,ListeGrundySuccesseur)=i-1) then break ;fi ; od ; return(i-1) ;`	le premier entier non présent dans $g(\Gamma^+(n))$ est par définition $g(n)$.
`fi ;`	
`end ;`	

Pour le jeu des résidus diviseurs :

```
grundyresidu :=proc(n)
local i,EnsembleGrundySuccesseur,ListeGrundySuccesseur ;
option remember ;
if n=1 then return(0) ;
else
EnsembleGrundySuccesseur :={} ;
for i from 1 to nops(ListeSuccesseursResidu(n)) do
EnsembleGrundySuccesseur :=EnsembleGrundySuccesseur union
{grundyresidu(op(i,ListeSuccesseursResidu(n)))} ;
od ;
ListeGrundySuccesseur :=[] ;
for i from 1 to nops(EnsembleGrundySuccesseur) do
ListeGrundySuccesseur :=[op(ListeGrundySuccesseur),op(i,EnsembleGrundySuccesseur)] ;
od ;
ListeGrundySuccesseur :=sort(ListeGrundySuccesseur) ;
for i from 1 to nops(ListeGrundySuccesseur) do
if not(op(i,ListeGrundySuccesseur)=i-1) then break ;fi ;
od ;
return(i-1) ;
fi ;
end ;
```

◊

11.18.5 Jeu des diviseurs avec plusieurs tas.

Quatre tas d'allumettes A, B, C et D. Les tas A et B contiennent respectivement 15 et 17 allumettes, les tas C et D contiennent respectivement 11 et 9 allumettes. Chacun à tour de rôle choisit un tas et enlève un nombre d'allumettes qui est un diviseur du tas trouvé au moment de jouer s'il choisit les tas A ou B et doit laisser un nombre d'allumettes qui est un diviseur du tas trouvé au moment de jouer s'il choisit les tas C ou D.

Maple.
On joue sur un graphe somme.
Une procédure donnant les positions du noyau accessibles à partir d'une position hors noyau :

`EstDansNoyau :=proc(L)`	renvoie true si la liste L correspond à une position du noyau.
`local i,ListeNbGrundy ;`	

`ListeNbGrundy := [grundyenleve(op(1,L)),`
`grundyenleve(op(2,L)),`
`grundyresidu(op(3,L)),`
`grundyresidu(op(4,L))] ;`	

`if SommeDigit(ListeNbGrundy)=0`
`then return(true) ;`
`else return(false) ;`
`fi ;`	

`end ;`	

`CoupSuivant :=proc(L)`	renvoie les positions du noyau atteignables depuis la position L.
`local i,j ;`	
`if EstDansNoyau(L)` `then print('Vous êtes dans le noyau.')`	dommage ...

`else`
`for i from 1 to 2 do`
`for j in ListeSuccesseursEnleve(op(i,L)) do`
`if EstDansNoyau(subsop(i=j,L))`
`then print(subsop(i=j,L)) ; fi ;`
`od ;od ;`
`for i from 3 to 4 do`
`for j in ListeSuccesseursResidu(op(i,L)) do`
`if EstDansNoyau(subsop(i=j,L)) then`
`print(subsop(i=j,L)) ; fi ;`
`od ;od ;`
	On teste toutes
	les positions
	que l'on peut atteindre
	depuis la position L.
	On affiche celles du
	noyau.

`fi ;`	
`end ;`	

Exemple.
`CoupSuivant([15,17,11,9])` donne les positions :
[14, 17, 11, 9], [10, 17, 11, 9], [15, 17, 11, 3].

◊

11.19 Théorème de Grundy (1939)

Soit G un graphe simple sans circuit, l'ensemble V(G) de ses sommets est supposé muni d'une loi de composition (qu'on notera $\odot$) telle que pour tous sommets s et t de G, on ait :

$$\Gamma^+(s \odot t) = \big(\Gamma^+(s) \odot t\big) \cup \big(s \odot \Gamma^+(t)\big)\,.$$

Alors la fonction de Grundy g de ce graphe vérifie :

$$\text{pour tous sommets } x \text{ et } y : g\,(x \odot y) = g(x) \oplus g(y).$$

Si on suppose de plus la loi $\odot$ associative, on définit $s_1 \odot s_2 \odot \cdots \odot s_n$ et on a $g\,(s_1 \odot s_2 \odot \cdots \odot s_n) = g(s_1) \oplus g(s_2) \oplus \cdots \oplus g(s_n)$.

Preuve.
On considère les ensembles

$$V(0) = \big\{x \in V(G)/\Gamma^+(x) = \emptyset\big\}$$

$$V(1) = \big\{x \in V(G)/\Gamma^+(x) \subset V(0)\big\}$$

$$V(2) = \big\{x \in V(G)/\Gamma^+(x) \subset V(1)\big\}$$

$$\cdots$$

$$V(j) = \big\{x \in V(G)/\Gamma^+(x) \subset V(j-1)\big\}$$

Les ensembles $V(j)$ recouvrent V(G).
Si $s \odot t \in V(0)$ alors $(\Gamma^+(s) \odot t) \cup (s \odot \Gamma^+(t)) = \emptyset$ donc $s \in V(0)$ et $t \in V(0)$.
Donc pour $s \odot t \in V(0)$, on a $g(s \odot t) = g(s) \oplus g(t) \quad (= 0)$.
Hypothèse de récurrence : soit $k > 0$ pour lequel $s \odot t \in V(k-1)$ implique $g(s \odot t) = g(s) \oplus g(t)$.
Soit $u = s \odot t \in V(k)$.

- Si $g(u) > g(s) \oplus g(t)$, il existe un sommet $v \in \Gamma^+(u)$ tel que $g(v) = g(s) \oplus g(t)$ (d'après 11.9.5).
  Comme $v \in \Gamma^+(u) = (\Gamma^+(s) \odot t) \cup (s \odot \Gamma^+(t))$, v peut s'écrire $s_1 \odot t$ avec $s_1 \in \Gamma^+(s)$ ou $s \odot t_1$ avec $t_1 \in \Gamma^+(t)$.
  Plaçons nous par exemple dans le cas $v = s_1 \odot t$. Comme $v \in \Gamma^+(u) \subset V(k-1)$, on a : $g(v) = g(s_1 \odot t) = g(s_1) \oplus g(t)$ (hypothèse de récurrence), or $g(v) = g(s) \oplus g(t)$, d'où $g(s_1) \oplus g(t) = g(s) \oplus g(t)$ et $g(s_1) = g(s)$, ce qui est absurde puisque $s_1 \in \Gamma^+(s)$.
- Si $g(u) < g(s) \oplus g(t)$, alors on peut trouver un entier r tel que $r < g(s)$ et $g(u) = r \oplus g(t)$ ou tel que $r < g(t)$ et $g(u) = g(s) \oplus r$ (cf 11.12.4).
  Plaçons dans le cas $r < g(s)$ et $g(u) = r \oplus g(t)$. Il existe $s_1 \in \Gamma^+(s)$ tel que $g(s_1) = r$ (cf 11.9.5), donc $g(u) = g(s_1) \oplus g(t)$. Or $s_1 \odot t \in \Gamma^+(u) \subset V(k-1)$, donc $g(s_1 \odot t) = g(s_1) \oplus g(t)$ (hypothèse de récurrence) c'est à dire $g(s_1 \odot t) = g(u)$ ce qui est en contradiction avec $s_1 \odot t \in \Gamma^+(u)$
- Conclusion : on a nécessairement $g(u) = g(s) \oplus g(t)$ pour $u \in V(k)$.

■

11.20 La multiplication des pains

11.20.1 Règle du jeu.

Un pain coupé en tranches. Le joueur qui commence sépare en deux pains inégaux le pain de départ (c'est à dire sépare les tranches en deux paquets, les deux paquets n'ayant pas le même nombre de tranches). Puis chacun des deux joueurs, à son tour, choisit un paquet et le sépare en deux paquets inégaux (d'au moins une tranche).

11.20.2 Fonction de Grundy.

Celui qui perd (c'est à dire qui ne peut plus jouer en respectant la règle) est celui qui se retrouve devant des paquets qui sont tous de une ou deux tranches. Par exemple, en partant d'un pain de 6 tranches, le graphe associé est le suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & 6 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
4,2 \arrow[d] & & 5,1 \arrow[d] \arrow[dll] \\
3,1,2 \arrow[d] & & 4,1,1 \arrow[d] \\
2,1,1,2 & & 3,1,1,1 \arrow[d] \\
 & & 2,1,1,1,1
\end{tikzcd}$$

Il y a donc dans ce cas trois parties possibles :
Une première partie gagnée par A :

$$6 \xrightarrow{A} 4,2 \xrightarrow{B} 3,1,2 \xrightarrow{A} 2,1,1,2$$

Une seconde partie gagnée par B :

$$6 \xrightarrow{A} 5,1 \xrightarrow{B} 4,1,1 \xrightarrow{A} 3,1,1,1 \xrightarrow{B} 2,1,1,1,1$$

et la dernière gagnée par A :

$$6 \xrightarrow{A} 5,1 \xrightarrow{B} 3,2,1 \xrightarrow{A} 2,1,2,1.$$

Sur cet exemple, la fonction de Grundy se définit facilement par "remontée" :

$$\begin{tikzcd}
 & \underset{1}{6} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\underset{0}{4,2} \arrow[d] & & \underset{2}{5,1} \arrow[d] \arrow[dll] \\
\underset{1}{3,1,2} \arrow[d] & & \underset{0}{4,1,1} \arrow[d] \\
\underset{0}{2,1,1,2} & & \underset{1}{3,1,1,1} \arrow[d] \\
 & & \underset{0}{2,1,1,1,1}
\end{tikzcd}$$

Cherchons de même à définir le nombre de Grundy d'un pain à n tranches, $1 \leq n \leq 5$.
Pour un pain de une tranche, le nombre de Grundy est nul, pour un pain de deux tranches aussi.
Pour un pain de trois tranches :

$$\underset{1}{3} \rightarrow \underset{0}{2,1}$$

Pour un pain de quatre tranches :

$$\underset{0}{4} \rightarrow \underset{1}{3,1} \rightarrow \underset{0}{2,1,1}$$

Pour un pain de cinq tranches :

$$\begin{tikzcd}
 & \underset{2}{5} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\underset{1}{3,2} \arrow[d] & & \underset{0}{4,1} \arrow[d] \\
\underset{0}{2,1,2} & & \underset{1}{3,2,1} \arrow[d] \\
 & & \underset{0}{2,1,2,1}
\end{tikzcd}$$

Sur un graphe regroupant toutes les situations possibles avec au plus θ tranches de pain (θ entier fixé), notamment les situations à un pain, notons $n \odot m = n, m$. Par exemple $1 \odot 2$ est la position à deux pains, l'un de une tranche et l'autre de deux, $3 \odot 4 \odot 7$ correspond à une position à trois pains de respectivement 3, 4 et 7 tranches. L'hypothèse du théorème de Grundy est satisfaite :

$$\Gamma^+(s \odot t) = \big(\Gamma^+(s) \odot t\big) \cup \big(s \odot \Gamma^+(t)\big)$$

et l'associativité aussi dans la mesure où l'"origine" du partage n'a pas d'importance (par exemple dans l'exemple à 6 tranches, les partages de $5, 1$ en $3, 2, 1$ et de $4, 2$ en $3, 1, 2$ mènent au même résultat : trois pains de respectivement 3, 2 et 1 tranche(s)).
Une fois connus les résultats du tableau suivant :

Nombre de tranches de l'unique tas	1	2	3	4
Nombre de Grundy	0	0	1	0

on peut déterminer les nombres de Grundy pour 5, 6, 7 ...sans écrire tout le graphe associé (ce qui deviendrait assez vite trop long).
On a par exemple $g(3 \odot 2) = g(3, 2) = g(3) \oplus g(2) = 1 \oplus 0 = 1$ et $g(4 \odot 1) = g(4, 1) = g(4) \oplus g(1) = 0 \oplus 0 = 0$, d'où l'on déduit le nombre de Grundy d'un pain à 5 tranches :

$$\begin{tikzcd}
 & \underset{2}{5} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\underset{1}{3,2} & & \underset{0}{4,1}
\end{tikzcd}$$

De même, $g(4,2) = g(4) \oplus g(2) = 0 \oplus 0 = 0$ et $g(5,1) = g(5) \oplus g(1) = 2 \oplus 0 = 2$, d'où l'on déduit le nombre de Grundy d'un pain à 6 tranches :

$$\begin{tikzcd}
 & \underset{1}{6} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\underset{0}{4,2} & & \underset{2}{5,1}
\end{tikzcd}$$

De même, $g(6,1) = g(6) \oplus g(1) = 1 \oplus 0 = 1$, $g(5,2) = g(5) \oplus g(2) = 2 \oplus 0 = 2$ et $g(4,3) = g(4) \oplus g(3) = 0 \oplus 1 = 1$, d'où l'on déduit le nombre de Grundy d'un pain à 7 tranches :

$$\begin{tikzcd}
 & \underset{0}{7} \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\underset{1}{6,1} & \underset{2}{5,2} & \underset{1}{4,3}
\end{tikzcd}$$

Maple.

Une procédure MAPLE pour continuer les calculs :

`grundy :=proc(n)`	calcule le nombre de Grundy pour un pain à n tranches.
`local i,successeur,succ ;`	
`option remember ;`	
`if n=1 or n=2 or n=4 then return(0) ;` `elif n=3 then return(1) ;`	
`else`	

`successeur :={} ;`
`for i from floor(n/2)+1 to n-1 do`
 	
`successeur :=successeur union`
`{sommedigitale(grundy(i),grundy(n-i))} ;`
`od ;`
	successeur= $g(\Gamma^+(n))$
	un tas de n tranches peut se séparer en deux tas de n et n$-$i tranches avec partie entière $\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \leq i \leq n-1$
	appel récursif de la procédure

`succ :=[] ;`
`for i from 1 to nops(successeur) do`
`succ :=[op(succ),op(i,successeur)] ;od ;`
`succ :=sort(succ) ;`
	succ est une liste contenant les nombres de Grundy des successeurs de n (sans répétition)
	la liste succ est ordonnée (ordre croissant)

`for i from 1 to nops(succ) do`
`if not(op(i,succ)=i-1) then break ; fi ;`
`od ;`
`return(i-1) ;`
	le premier entier non présent dans la liste succ est par définition le nombre de grundy de n.

`fi ;`	
`end ;`	

Cette procédure donne par exemple :

Nombre de tranches	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de Grundy	0	0	1	0	2	1	0	2	1	0

Nombre de tranches	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Nombre de Grundy	2	1	3	2	1	3	2	4	3	0

Et pour jouer, deux procédures pour l'aide au coup par coup. La première vérifie si une position donnée est dans le noyau, l'autre donne les positions du noyau accessibles depuis une position hors noyau :

`EstDansNoyau :=proc(L)`	la procédure retourne true si la liste L correspond à une position du noyau
`local i,ListeNbGrundy ;`	
`ListeNbGrundy :=[] ;` `for i from 1 to nops(L) do` `ListeNbGrundy := [op(ListeNbGrundy),` `grundy(op(i,L))] ;` `od ;`	construction de la liste des nombres de Grundy correspondant à la liste position L
`if SommeDigit(ListeNbGrundy)=0 then` `return(true) ;` `else return(false) ;fi ;`	
`end ;`	

`CoupSuivant :=proc(L)`	L est la liste des cardinaux des tas correspondant à une position du jeu
`local i,j,k,coup ;`	
`if EstDansNoyau(L) then print('Vous êtes dans le noyau') ;`	pas de bol ...
`else`	
`for i from 1 to nops (L) do`	
`for j from floor(op(i,L)/2)+1 to op(i,L)-1 do`	
`coup :=L ; coup[i] :=j ;` `coup :=[op(coup),op(i,L)-j] ;`	coup va contenir les cardinaux des tas d'une position successeur de L
`if EstDansNoyau(coup) then print(coup) ;fi ;`	affichage de coup si c'est une position du noyau
`od ;`	
`od ;`	
`fi ;`	
`end ;`	fin procédure

Par exemple `CoupSuivant([10,9,5,2])` donne :
[10, 5, 5, 2, 4], [10, 8, 5, 2, 1], [10, 9, 3, 2, 2].
Le joueur qui se trouve devant quatre tas de respectivement 10, 9, 5 et 2 tranches pourra donc au choix partager le tas de 9 en deux tas de 5 et 4 ou en deux tas de 8 et 1 ou partager le tas de 5 en deux tas de 3 et 2 pour offrir une position du noyau à l'adversaire.

$\diamondsuit$

Chapitre 12

Permutations et dérangements

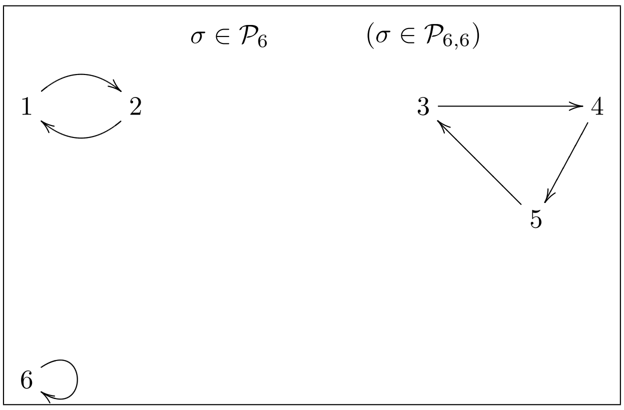
L'idée est ici de montrer que quelques dessins de graphes pourraient apporter à l'élève une intuition graphique (au même titre que le dessin en géométrie) sur des notions plutôt formelles comme celle de permutation. Voir aussi 9.8

12.1 Définitions

12.1.1 Permutation

On appellera permutation d'ordre n un graphe orienté étiqueté, de sommets 1, 2, ..., n tel que pour tout sommet x : $d^+(x) = d^-(x) = 1$.
On notera $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des permutations de sommets 1, 2, ..., n.
On notera aussi dans la suite $\mathcal{P}_{n,j}$ l'ensemble des permutations ayant une boucle au sommet j (et éventuellement d'autres boucles).

Exemple.



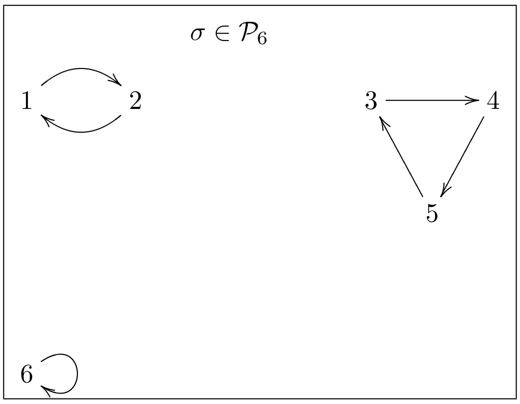
12.1.2 Dérangement

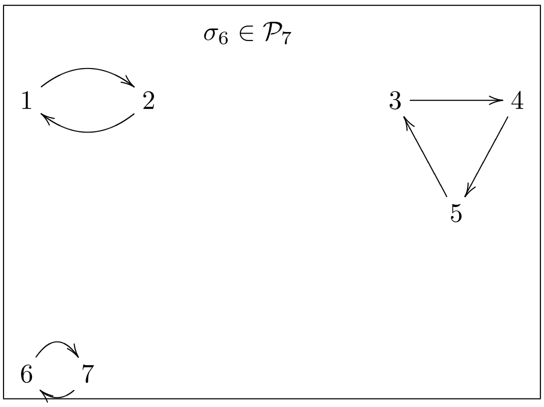
On appellera dérangement une permutation ne possédant pas de boucle.
On notera $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des dérangements de sommets 1, 2, ..., n.
On va chercher à dénombrer ces graphes et obtenir le résultat suivant : $|\mathcal{D}_n|$ est l'entier le plus proche de $\left(\frac{n!}{e}\right)$.

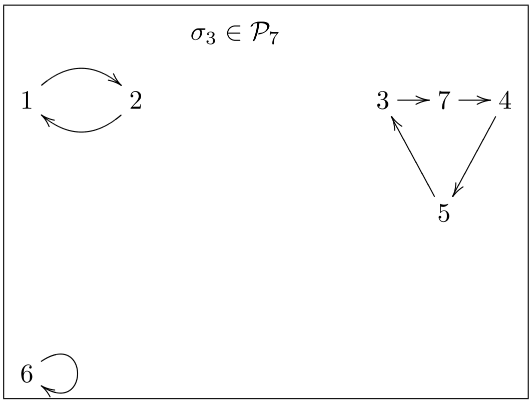
12.2 Passage de $\mathcal{P}_n$ à $\mathcal{P}_{n+1}$

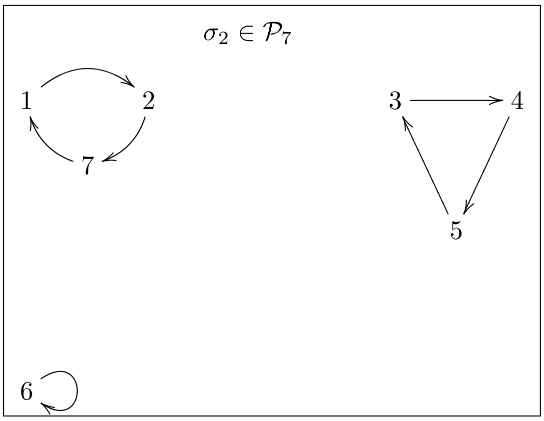
12.2.1 Passage de $\mathcal{P}_n$ à $\mathcal{P}_{n+1} - \mathcal{P}_{n+1,n+1}$

A tout couple $(\sigma, j) \in \mathcal{P}_n \times \{1, 2, \ldots, n\}$, on associe la permutation σ_j de $\mathcal{P}_{n+1} - \mathcal{P}_{n+1,n+1}$ définie à partir de σ en "intercalant" le sommet $n+1$ "dans" la flèche issue de j, c'est à dire en ajoutant le sommet $n+1$ avec j pour prédécesseur et le successeur de j dans σ comme successeur, toutes les autres flèches étant inchangées.
Clarifions cela avec des exemples :







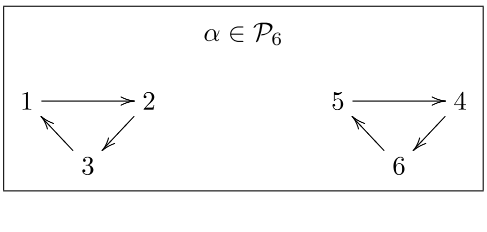


12.2.2 Bijection entre $\mathcal{P}_n \times \{1, 2, \ldots, n\}$ et $\mathcal{P}_{n+1} - \mathcal{P}_{n+1,n+1}$

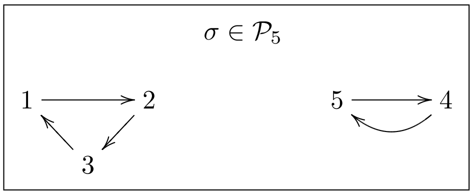
L'application Φ qui à un couple $(\sigma, j) \in \mathcal{P}_n \times \{1, 2, \ldots, n\}$ associe la permutation σ_j de $\mathcal{P}_{n+1} - \mathcal{P}_{n+1,n+1}$ comme définie ci-dessus est une bijection entre $\mathcal{P}_n \times \{1, 2, \ldots, n\}$ et $\mathcal{P}_{n+1} - \mathcal{P}_{n+1,n+1}$.

Preuve.

1. Φ est surjective.
   Soit $\alpha \in \mathcal{P}_{n+1} - \mathcal{P}_{n+1,n+1}$, α a pour antécédent le couple (σ, j) où j est le prédécesseur de $n+1$ dans α et σ est simplement obtenu en "effaçant" le sommet $n+1$ et en remplaçant par une seule flèche les deux flèches incidentes à $n+1$.
   Exemple :



$\alpha = \Phi(\sigma, 4)$ où



2. Φ est injective.
   Soit (σ, j), (σ', j') deux couples distincts de $\mathcal{P}_n \times \{1, 2, \ldots, n\}$.
   (a) Si $j \neq j'$, alors $n+1$ n'a pas le même prédécesseur dans σ_j et $\sigma'_{j'}$ donc $\sigma_j \neq \sigma'_{j'}$.
   (b) Si $j = j'$, alors $\sigma \neq \sigma'$. Il existe donc $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ n'ayant pas le même successeur dans σ et dans σ'.
   – Si $i \neq j$, alors i a le même successeur dans σ_j que dans σ et le même successeur dans $\sigma'_{j'}$ que dans σ' donc $\sigma_j \neq \sigma'_{j'}$.
   – Si $i = j$, comme j n'a pas le même successeur dans σ et σ', $n+1$ n'a pas le même successeur dans σ_j et dans $\sigma'_{j'}$.

■

12.2.3 Bijection entre $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1,n+1}$

L'application Ψ de $\mathcal{P}_n$ dans $\mathcal{P}_{n+1,n+1}$ qui à $\sigma \in \mathcal{P}_n$ associe $\Psi(\sigma)$ obtenu en ajoutant le sommet $n+1$ avec une boucle en $n+1$ est clairement une bijection.

12.2.4 Cardinal de $\mathcal{P}_n$

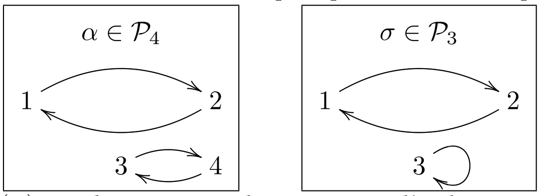
Notons p_n le cardinal de $\mathcal{P}_n$.
On a avec les paragraphes précédents : $p_{n+1} = np_n + p_n$, soit $p_{n+1} = (n+1)\,p_n$.
Comme il est clair que $p_1 = 1$, on obtient par récurrence : $p_n = n!$.
Ce résultat s'obtient évidemment plus directement à l'aide du principe multiplicatif : pour construire $\sigma \in \mathcal{P}_n$, on choisit d'abord le successeur du sommet 1 (n choix), puis le successeur du sommet 2 ($n-1$ choix), ...

12.3 $\Phi^{-1}(\mathcal{D}_{n+1})$

1. Soit $\alpha \in \mathcal{D}_{n+1}$ et $(\sigma, j) = \Phi^{-1}(\alpha)$.
   On sait que j est le prédécesseur de $n+1$ dans α.
   Deux cas se présentent :
   – Si le successeur de $n+1$ dans α est $k \neq j$, alors σ ne présente aucune boucle et on a donc $\sigma \in \mathcal{D}_n$.

– Si j est aussi le successeur de $n+1$ dans α, alors σ présente une boucle en j (et c'est la seule boucle de σ puisque α n'en avait pas).

Exemple :



$(\sigma, j) = \Phi^{-1}(\alpha)$ est donc soit un dérangement d'ordre n, soit une permutation d'ordre n ayant une unique boucle.

2. Réciproquement, si σ est un dérangement d'ordre n alors σ_1, σ_2, ..., σ_n sont des dérangements d'ordre $n+1$.
   Et si σ est une permutation d'ordre n présentant une unique boucle en un sommet j, alors σ_j est un dérangement d'ordre $n+1$, tandis que les σ_i pour $i \neq j$ n'en sont pas (puisqu'ils présentent une boucle en i).
3. Notons $F_{n,i}$ les permutations d'ordre n ayant une unique boucle, en i.

$$\Phi^{-1}(\mathcal{D}_{n+1}) = (\mathcal{D}_n \times \{1, 2, \ldots, n\}) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} F_{n,i} \times \{i\} \right)$$

12.4 Récurrence sur le nombre de dérangements

1. A tout dérangement σ d'ordre $n-1$, associons la permutation $\alpha \in F_{n,n}$ obtenue en ajoutant le sommet n et une boucle en n. On définit ainsi clairement une bijection entre $\mathcal{D}_{n-1}$ et $F_{n,n}$.
   On a donc $|F_{n,n}| = |\mathcal{D}_{n-1}|$. On a aussi bien sûr : $|F_{n,i}| = |\mathcal{D}_{n-1}|$ pour $1 \leq i \leq n$ et $|\bigcup_{i=1}^{n} F_{n,i}| = n\,|\mathcal{D}_{n-1}|$.
2. Notons d_n le nombre de dérangements d'ordre n. Tout ce qui précède montre que :

$$\boxed{d_{n+1} = nd_n + nd_{n-1}}$$

12.5 Quelques calculs sur d_n

1. L'égalité $d_{n+1} = nd_n + nd_{n-1}$ s'écrit aussi $d_{n+1} - (n+1)\,d_n = -d_n + nd_{n-1}$, soit $u_{n+1} = -u_n$ en posant $u_n = d_n - nd_{n-1}$.
   Cette suite $(u_n)_{n \geq 2}$ est donc géométrique de raison -1.
   comme on a $u_2 = d_2 - 2d_1 = 1$, on en déduit que pour tout entier $n \geq 2$, $\boxed{d_n - nd_{n-1} = (-1)^n}$.
2. L'égalité $d_n - nd_{n-1} = (-1)^n$ s'écrit aussi : $\frac{d_n}{n!} - \frac{d_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n}{n!}$ soit $S_n - S_{n-1} = \frac{(-1)^n}{n!}$ en posant $S_n = \frac{d_n}{n!}$. Par récurrence, on obtient alors facilement :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

   et donc :

$$\boxed{d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}$$

3. Comme $\frac{1}{e} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$, on obtient :

$$\left|\frac{n!}{e} - d_n\right| = n! \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!}\right|$$

donc

$$\left|\frac{n!}{e} - d_n\right| \leq n! \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n!}{k!}$$

et

$$\left|\frac{n!}{e} - d_n\right| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n}$$

En particulier, pour $n \geq 3$: $\left|\frac{n!}{e} - d_n\right| \leq \frac{1}{3}$ et on en conclut que

$$\boxed{d_n = \text{arrondi entier}\left(\frac{n!}{e}\right)}$$

(pour $n \geq 3$ et aussi pour $n = 1$ et $n = 2$ comme on le vérifie directement).

12.6 Une application classique

Une entreprise de vente par correspondance envoie régulièrement à ses clients des courriers publicitaires. Une machine s'occupe d'imprimer les enveloppes et d'imprimer les courriers qui sont "personnalisés" (le courrier est le même pour tous mais le nom du client est imprimé en début de lettre : "Chère madame . . ."). Enfin dans un troisième temps, la machine met les lettres dans les enveloppes. Suite à une défaillance technique, la machine se met à ranger les lettres dans les enveloppes de façon tout à fait aléatoire . . . Quelle est la probabilité qu'aucune des lettres ne se retrouve dans son enveloppe ?
En d'autres termes : on choisit au hasard un graphe dans $\mathcal{P}_n$, quelle est la probabilité qu'il soit sans boucle ?

Résolution.
n étant le nombre d'enveloppes, la probabilité demandée est de $\frac{d_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
Comme $\left|\frac{d_n}{n!} - \frac{1}{e}\right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+1)^k} \leq \frac{1}{n!n}$, on peut simplifier en disant que la probabilité cherchée est approximativement de $\frac{1}{e}$, même pour des valeurs de n assez petites.

■

12.7 k boucles

- Quel est le nombre de permutations d'ordre n ayant exactement k boucles ?
- n personnes ont déposé en rentrant leur parapluie à l'entrée. Comme ces personnes avaient toutes le même modèle de parapluie, elles repartent en prenant un parapluie au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'exactement k de ces personnes repartent avec leur parapluie ?

Résolution.
Notons $F_{n,\{i_1,i_2,\ldots,i_k\}}$ l'ensemble des permutations d'ordre n ayant pour points fixes $i_1, i_2, \ldots, i_k$ (et seulement ces k points fixes).
A toute permutation d'ordre n de $F_{n,\{n-k+1,n-k+2,\ldots,n-1,n\}}$, associons le dérangement $\sigma \in \mathcal{D}_{n-k}$ obtenu en effaçant les sommets $n-k+1, n-k+2, \ldots, n-1, n$. On définit ainsi une bijection entre $F_{n,\{n-k+1,n-k+2,\ldots,n-1,n\}}$ et $\mathcal{D}_{n-k}$. On a donc $\left|F_{n,\{n-k+1,n-k+2,\ldots,n-1,n\}}\right| = d_{n-k}$ et

$$\left|\bigcup_{J\subset\{1,2,\ldots,n\},|J|=k} F_{n,J}\right| = \binom{n}{k} d_{n-k}$$

Le nombre de permutations d'ordre n ayant exactement k boucles est donc de

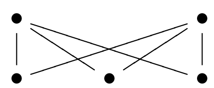
$$\binom{n}{k}(n-k)!\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{j!} = \frac{n!}{k!}\sum_{j=0}^{n-k}\frac{(-1)^j}{j!}$$

■

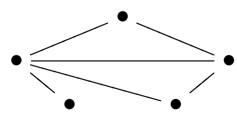
Annexe A

Petit lexique

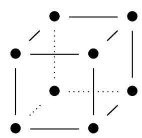
Graphes non orientés

1. **arbre** (*tree*).
   Graphe simple connexe sans cycle.
2. graphe **biparti** (*bipartite graph*).
   Graphe simple dont l'ensemble des sommets $V(G)$ s'écrit comme une réunion disjointe de deux ensembles de sommets stables.
3. graphe **biparti complet**.
   Graphe biparti c'est à dire dont l'ensemble des sommets $V(G)$ s'écrit comme une réunion disjointe de deux ensembles X et Y de sommets stables et tel que tout sommet de X est adjacent à tout sommet de Y. Exemple :
   $K_{2,3}$ 
4. **centre** d'un graphe.
   Sommet d'excentricité minimale.
5. **chaîne** (*walk*).
   Parcours sur le graphe d'un sommet à un sommet qui utilise à chaque pas une arête du graphe. Plus formellement, suite s_0, a_1, s_1, a_2, …, s_{k-1}, a_k, s_k de sommets s_i et d'arêtes a_j tels que pour tout j, a_j a pour extrémités s_{j-1} et s_j.
   (a) **chaîne élémentaire** (*path*).
   Chaîne ne passant pas plus d'une fois par un même sommet.
   (b) **chaîne simple** (*trail*).
   Chaîne ne passant pas plus d'une fois par une même arête.
   (c) **chaîne eulérienne** d'un graphe G (*Euler trail*).
   Chaîne simple passant par toutes les arêtes du graphe G.
6. nombre **chromatique** (*chromatic number*).
   Le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de façon à ce que deux sommets adjacents aient toujours des couleurs différentes.
7. **clique** (*clique*).
   Sous-graphe complet.

8. graphe **complet** (*complete graph*).
   Un graphe simple est dit complet si chacun de ses sommets est adjacent à tous les autres.
9. **composante connexe** (*component*).
   Sous-graphe connexe maximal (pour l'inclusion).
10. **coloration**
    (a) des sommets : attribution de couleurs aux sommets telle que deux sommets adjacents soient de couleurs différentes. Un ensemble de sommets monochrome constitue un ensemble stable de sommets.
    (b) des arêtes : attribution de couleurs aux arêtes telle que deux arêtes incidentes (c'est à dire ayant une extrémité commune) soient de couleurs différentes. Un ensemble d'arêtes monochrome constitue un couplage du graphe.
11. graphe **connexe** (*connected graph*).
    Un graphe est connexe si pour tous sommets u et v du graphe, il existe une chaîne d'extrémités u et v.
12. **couplage** d'un graphe G (*matching*).
    Ensemble d'arêtes de G tel que deux arêtes quelconques de cet ensemble n'ont pas d'extrémités en commun (tout sommet du graphe est donc incident à au plus une arête d'un couplage donné).
13. **cycle** (*closed trail*). Chaîne simple dont les deux extrémités coïncident (chaîne simple fermée).
    (a) **cycle élémentaire** (*cycle=closed path*).
    Chaîne élémentaire dont les deux extrémités coïncident (chaîne élémentaire fermée).
    (b) **cycle eulérien** d'un graphe G (*Euler tour=closed Euler trail*).
    Cycle passant par toutes les arêtes du graphe G.
    (c) **cycle hamiltonien** (*Hamiltonian cycle or spanning cycle*).
    Cycle hamiltonien d'un graphe G : cycle élémentaire passant par tous les sommets du graphe G.
14. nombre **cyclomatique** (*cyclomatic number*).
    Le nombre cyclomatique du graphe simple G ayant a arêtes, s sommets et c composantes connexes est $\nu = a - s + c$.
15. **degré d'un sommet** (*degree of a vertex*).
    Nombre d'arêtes incidentes à ce sommet. Dans un graphe simple, c'est donc aussi le nombre de voisins du sommet.
16. **degré d'une face d'un graphe planaire**.
    Nombre d'arêtes bordant la face (une arête interne à la face, incidente à une feuille, est en principe comptée deux fois).
17. **diamètre** d'un graphe.
    Le maximum des $d(s,t)$ où s et t parcourent l'ensemble $V(G)$ des sommets du graphe.
18. **distance** du sommet s au sommet t.
    $d(s,t) =$ longueur minimale des chaînes reliant s et t c'est à dire nombre minimum d'arêtes à parcourir pour aller de s à t ($d(s,t) = \infty$ lorsqu'aucune chaîne ne relie s à t).

19. Sous-graphe du graphe G **engendré** (ou sous-graphe induit)
    (a) par un ensemble $\mathcal{A}$ d'arêtes de G : sous-graphe de G dont les arêtes sont les arêtes de l'ensemble $\mathcal{A}$ et dont les sommets sont les sommets de G incidents à une arête de cet ensemble $\mathcal{A}$.
    (b) par un ensemble $\mathcal{S}$ de sommets de G : sous-graphe de G dont les sommets sont les sommets de l'ensemble $\mathcal{S}$ et dont les arêtes sont les arêtes de G incidentes (aux deux extrémités) à des sommets de cet ensemble $\mathcal{S}$.
20. **Euler** Leonhard 1707-1783
    (a) **chaîne eulérienne** d'un graphe G (*Euler trail*).
    Chaîne simple passant par toutes les arêtes du graphe G.
    (b) **cycle eulérien** d'un graphe G (*Euler tour=closed Euler trail*).
    Cycle passant par toutes les arêtes du graphe G.
    (c) **graphe eulérien** (*Eulerian graph*).
    Graphe possédant un cycle eulérien.
21. **excentricité** du sommet s.
    L'excentricité de s est le maximum des $d(s,t)$, t parcourant l'ensemble des sommets du graphe.
22. **face** d'un graphe planaire .
    Dans une représentation planaire du graphe : partie du plan limitée par les arêtes. Une des faces est non bornée. Dans un graphe simple, il faut au moins trois arêtes pour délimiter une face.
    Exemple avec trois faces (deux bornées et la face "infinie") :
    
23. **feuille** (*leaf*).
    Sommet de degré 1 (on parle aussi de sommet pendant).
24. **forêt** (*forest*).
    Graphe simple sans cycle. Les composantes connexes d'une forêt sont des arbres. Les forêts sont les graphes simples de nombre cyclomatique nul.
25. **géodésique** du sommet s au sommet t.
    Chaîne de s à t de longueur $d(s,t)$.
26. algorithme **glouton** (*greedy algorithm*).
    Schématiquement : algorithme procèdant par optimisation locale (sans chercher à prévoir si cela aura un effet d'optimisation globale).
27. **Hamilton** William 1805-1865
    (a) **chaîne hamiltonienne** d'un graphe G (*Hamiltonian path or spanning path*).
    Chaîne élémentaire passant par tous les sommets du graphe.
    (b) **cycle hamiltonien** d'un graphe G (*Hamiltonian cycle or spanning cycle*).
    Cycle élémentaire passant par tous les sommets du graphe G.
    (c) **graphe hamiltonien** (*Hamiltonian graph*).
    Graphe possédant un cycle hamiltonien.

28. sommet **isolé** (*isolated vertex*).
Un sommet est dit isolé s'il est de degré 0.
29. **isthme** (*cut-edge or bridge*).
Une arête e d'un graphe G est un isthme (ou pont) si sa suppression augmente le nombre de composantes connexes du graphe (autrement dit si $G - \{e\}$ a strictement plus de composantes connexes que G). Dans un graphe simple, une arête n'est pas un isthme ssi cette arête appartient à un cycle.
30. **ordre** d'un graphe (*order of a graph*).
Nombre de sommets du graphe.
31. graphe **planaire** (*planar graph*).
Un graphe est planaire s'il est $\mathbb{R}^2$ représentable, c'est à dire si l'on peut le dessiner dans le plan de façon à ce que deux arêtes quelconques ne se coupent pas.
32. **représentable**.
Un graphe est représentable dans un espace E s'il est isomorphe à un graphe dont les sommets sont dans E et les arêtes ne se coupent pas (sauf, bien sûr en leurs extrémités [qui sont les sommets]).
Tout graphe est $\mathbb{R}^3$ représentable (preuve : pour un graphe à m arêtes, on aligne les sommets sur une droite d, on trace m plans distincts mais contenant tous d et on trace une arête par plan).
On peut établir, via la projection stéréographique par exemple, qu'un graphe peut être représenté sur la sphère sans croisement d'arêtes ssi il est planaire.
33. graphe **régulier** (*regular graph*).
Un graphe est dit régulier si tous ses sommets ont le même degré. Le graphe du cube par exemple est régulier de degré 3



34. graphe **simple** (*simple graph*).
Graphe sans arête multiple et sans boucle.
35. **sous-graphe** d'un graphe G (*subgraph*).
Graphe dont les sommets et arêtes sont des sommets et arêtes de G.
36. **stable** (*stable set or independent set*).
Un ensemble de sommets du graphe G est stable (ou indépendant) si le sous-graphe de G qu'il engendre ne contient aucune arête de G.
37. **subdivision** (*subdivision*).
Un graphe G' est une subdivision de G si l'on obtient G' à partir de G en ajoutant des sommets sur les arêtes de G. Une arête de G $\bullet$ ———— $\bullet$ devient par exemple dans G' $\bullet$ — $\circ$ — $\circ$ — $\bullet$

Graphes orientés

1. **chemin** (*directed walk*).
Suite s_0, a_1, s_1, a_2, ..., s_{k-1}, a_k , s_k de sommets s_i et de flèches a_j tels que pour tout j, la flèche a_j est dirigée de s_{j-1} vers s_j.

2. **chemin élémentaire** (*directed path*).
chemin sans répétition de sommets.
3. **chemin simple** (*directed trail*).
chemin sans répétition de flèches.
4. **circuit**.
Chemin fermé (ou chemin fermé simple ou chemin fermé élémentaire...les définitions varient selon les livres...)
5. **noyau d'un graphe orienté** (*independent dominating set*).
Ensemble S de sommets d'un graphe orienté G tel que le sous-graphe engendré par S ne contient aucune flèche de G et tel que tout sommet hors de S est origine d'au moins une flèche de G pointant sur un sommet de S.
6. **tournoi** (*tournament*).
Graphe orienté tel que, entre deux sommets, il y a toujours exactement une flèche. Par exemple, les n sommets peuvent représenter n équipes d'un sport, chaque équipe joue un match contre chaque autre équipe et une flèche du sommet a vers le sommet b signifiera que c'est l'équipe a qui a gagné le match entre a et b (voir le problème 1.1).

Annexe B

Quelques notations

- $\alpha(\mathbf{G})$ Nombre de stabilité : maximum des cardinaux des parties stables de G.
- $\mathbf{G-e}$ e désignant une arête de G, $G-e$ est le graphe obtenu en enlevant l'arête e. Si l'on désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des arêtes de G, $G-e$ désigne donc le sous-graphe de G engendré par $\mathcal{E}-\{e\}$.
- $\mathbf{G-v}$ v désignant un sommet de G, $G-v$ est le graphe obtenu en enlevant le sommet v ainsi que toute arête incidente à v. $V(G)$ désignant l'ensemble des sommets de G, $G-v$ désigne donc le sous-graphe de G engendré par $V(G)-\{v\}$.
- $\mathbf{cr}(\mathbf{G})$ Nombre minimum de croisements des représentations de G dans le plan.
- $\mathbf{d}(\mathbf{s},\mathbf{t})$ Distance du sommet s au sommet t.
- $\delta(\mathbf{G})$ Minimum des degrés des sommets du graphe G.
- $\mathbf{\Delta}(\mathbf{G})$ Maximum des degrés des sommets du graphe G.
- $\mathbf{K_n}$ Graphe complet d'ordre n.
- $\chi(\mathbf{G})$ Nombre chromatique du graphe G.
- $\mathbf{V}(\mathbf{G})$ Ensemble des sommets du graphe G (la lettre V est l'initiale du mot anglais *vertex*).
- $\omega(\mathbf{G})$ Ordre de la plus grande clique de G.

Bibliographie

[1] *Introduction to graph theory.*
DOUGLAS B. WEST.
Editions Prentice Hall, 2001.
Un cours d'environ 500 pages, bien écrit.

[2] *Graph Theory.*
REINHARD DIESTEL.
Editions Springer, 2000.
Un cours en 300 pages, exposé rigoureux.

[3] *Au delà des ponts de Königsberg.*
CLAUDINE ROBERT ET OLIVIER COGIS.
Editions Vuibert.
Très bien adapté à une première lecture sur les graphes, écriture claire et rigoureuse. Exposé limité aux notions de base.

[4] *Théorie des Graphes.*
JACQUES LABELLE.
Editions Modulo.
Un livre qui correspond à un cours à bac+1 sur les graphes.

[5] *Introduction à l'algorithmique.*
CORMEN, LEISERSON, RIVEST, STEIN.
Editions Dunod.
Ce livre de 1100 pages en consacre 150 aux algorithmes concernant les graphes, sans compter les nombreux autres algorithmes utilisant les graphes comme outil. La validité des algorithmes et les évaluations des temps de calcul sont très clairement exposées.

[6] *Les jeux de Nim.*
JACQUES BOUTELOUP.
Edité par l'A.D.C.S.
On trouvera dans ce livre une quantité impressionnante de jeux de Nim étudiés, avec une introduction des notions nécessaires au fur et à mesure des besoins.

[7] *Mégamaths–142 exercices de haut vol.*
PIERRE BORNSZTEIN.
Editions Vuibert
Une quantité de beaux problèmes dont quelques-uns portent sur les graphes.

[8] *Les mathématiques du Club Olympique Kangourou.*
MARC BACHMAKOV.
Editions ACL–Les éditions du Kangourou

Une foultitude de petits problèmes du type rallyes mathématiques. Les exercices sont classés par chapitre avec quelques pages de "cours", un chapitre est consacré aux graphes.

[9] *Annales du championnat international des jeux mathématiques.*
Tome 12 : Le trésor du vieux pirate.
Tome 10 : Le serpent numérique.
Editions POLE
Avec le nombre de tomes déjà existants (plus d'une vingtaine), on trouvera certainement dans les annales du CIJM bien d'autres exercices sur les graphes.

[10] *Proofs from THE BOOK.*
Martin Aigner, Günter Ziegler.
Editions Springer
Présentation de "belles" démonstrations. Bon nombre concerne les graphes.

[11] *Les olympiades de mathématiques–Réflexes et stratégies.*
Tarik Belhaj Soulami.
Editions ellipses
Un court chapitre donne quelques rappels de notions et exercices sur les graphes.