

INSTITUT DE RECHERCHE SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
I.R.E.M. de LYON

Varions notre enseignement avec les problèmes ouverts

Chercher essayer
conjecturer découvrir
 prouver



Gilbert ARSAC
Gilles GERMAIN
Michel MANTE
Dominique PICHOD

Janvier 1985

Prix: 30 Francs

Le dessinateur:Claude TISSERON



Avantissement,

Le tracté illustré que vous allez regarder est une brochure d'information sur ce que nous appelons "LA PRATIQUE DU PROBLÈME OUVERT". L'objectif de cette pratique pédagogique est de permettre aux élèves de mettre en route une démarche scientifique : "ESSAYER, CONJECTURER, TESTER, PROUVER".

Le but de cette bande dessinée est de vous inciter à mettre en place de temps à autre cette pratique dans vos classes et de vous aider à vous jeter à l'eau..

Ce tracté est né de la rencontre d'un mathématicien dessinateur, CLAUDE TISSERON, avec le groupe de formation sur le problème de l'IREM de LYON. Le groupe cherchait à faire connaître ses travaux sous une forme plus agréable qu'un simple texte. Comme Claude a beaucoup aimé le travail du groupe il a immédiatement accepté de mettre en image la pratique du problème ouvert. C'est ce qui fait l'objet de la seconde partie de cette brochure. La première partie étant constituée de certains éclairages sur l'école qui sont à regarder avec détachement.

Pour compléter votre information sur cette pratique vous pouvez consulter la brochure : "La pratique du problème ouvert". Dans cette brochure, que nous avons publiée il y a un an, vous trouverez en plus d'une analyse de cette pratique, des comptes rendus d'expérimentation et une quarantaine de problèmes ouverts expérimentables en classe.

Je terminais pas sans dire combien a été fructueuse
la réflexion nécessaire à la mise en image de nos
idées

Le groupe de formation sur le problème ouvert

Gilbert Arsac

Gilles Germain

Michel Mbante

Dominique Pichod

Le Dessinateur

Claude Cisséron

janvier 1985

INSTITUT DE RECHERCHE
SUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES

Université Claude Bernard - LYON 1
43, boulevard du 11 novembre 1918
69622 VILLEURBANNE CEDEX

Tél. (7) 889 84 55 et (7) 889 81 24 (poste 37 24)

SOMMAIRE

1^{re} PARTIE

<u>Un certain regard sur nos élèves et leurs professeurs</u>	1
- Que vous soyez...	2
- Car les airs sont partagés	3
- Au début certain nouveau sont surpris	4
- Et que pensent les élèves ?	5
- Encore les élèves... et l'expérimentation	6
- Du plaisir ?.... à l'école ?	7
Interlude	9
- Allégorie	10
- Mais ce maître comment fait-il ?	11
- Un jour le grain de sable...	12
- Diversifications	13
Interlude	15

2^{eme} PARTIE

- Présentation d'une activité "PROBLEME OUVERT"	17
- Pourquoi des "problèmes ouverts" ?	19
- Présentation aux élèves	20
- Le jour J	21
- Premières réactions	22
- Premières conjectures	23
- Blocages et ...	24
- Déblocages	25
- Au bout de la piste	26
- Fin de la phase recherche	27
- La séance de BILAN	29
- 1 ^{er}) Chauffement	30
- 2 nd) Ecriture des conjectures au tableau	31
- 3 rd) Lecture des conjectures	32
- 4 th) Discussion	33
- La discussion continue	34
- Il faut conclure	35
- Petit lexique	38

I^{ere} partie

Un certain regard SUR NOS ÉLÈVES... et leurs profs...

En 10 tableaux et 2 interludes



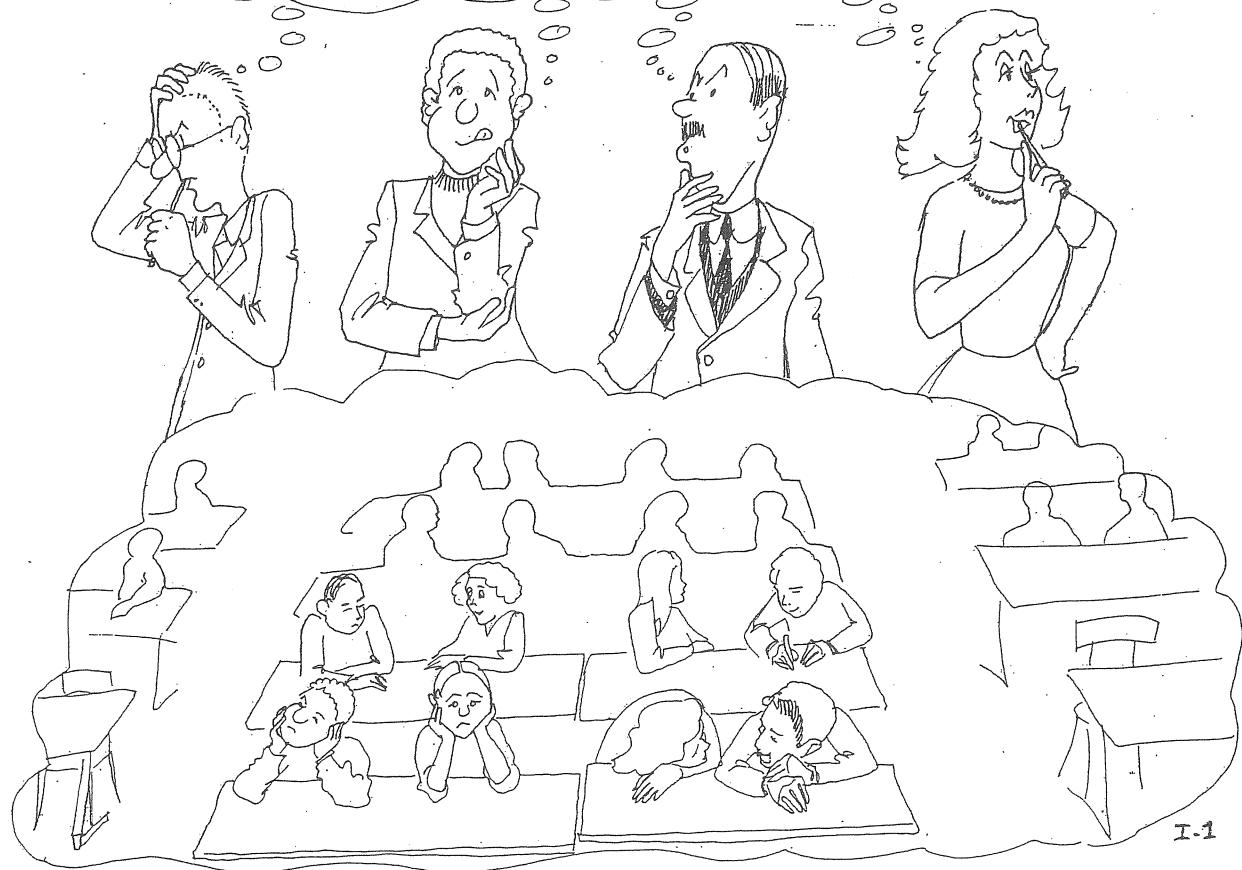
Premier tableau :

Que vous soyez...



Vous vous êtes demandé :

Comment intéresser mes élèves?



2nd tableau etc...!

Car les avis sont partagés :



c'est que le public est difficile,
on fait tout ce qu'on peut !



Et chaque année ça recommence!



OUAISS, et à chaque fois le cartable est de plus en plus lourd!

t'inquiète pas après ça s'allège!

I.2

Au début, certains nouveaux sont surpris...



Plus tard...



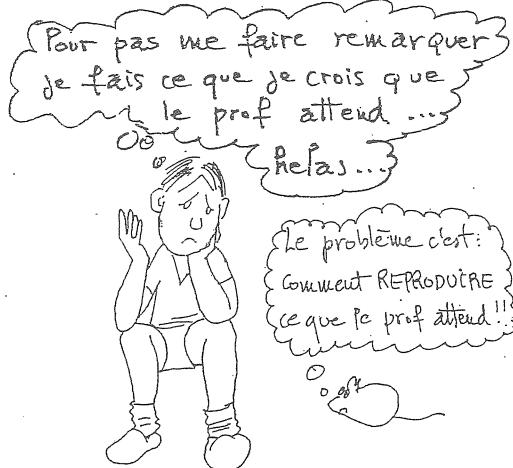
Encore plus tard...



Bien plus tard...



ET QUE PENSENT LES ELEVES ?



Encore les élèves...

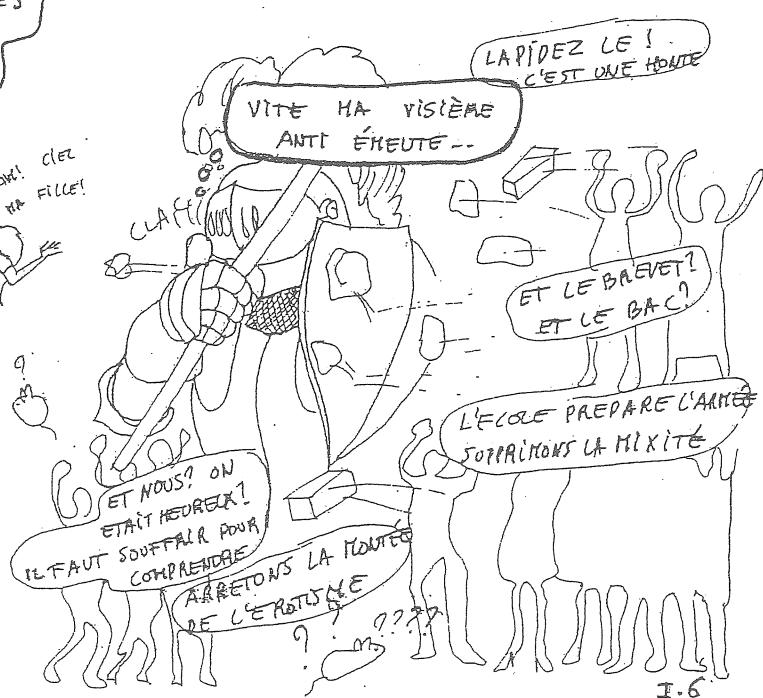
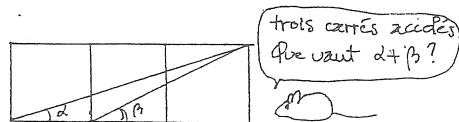
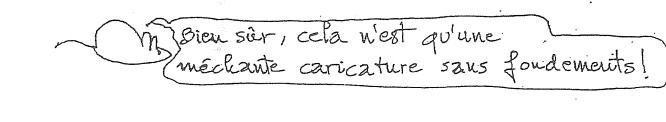


Et l'expérimentation...



(*) A ce sujet voir Modèles Maths, cedic

Du Plaisir?!... à l'école?!



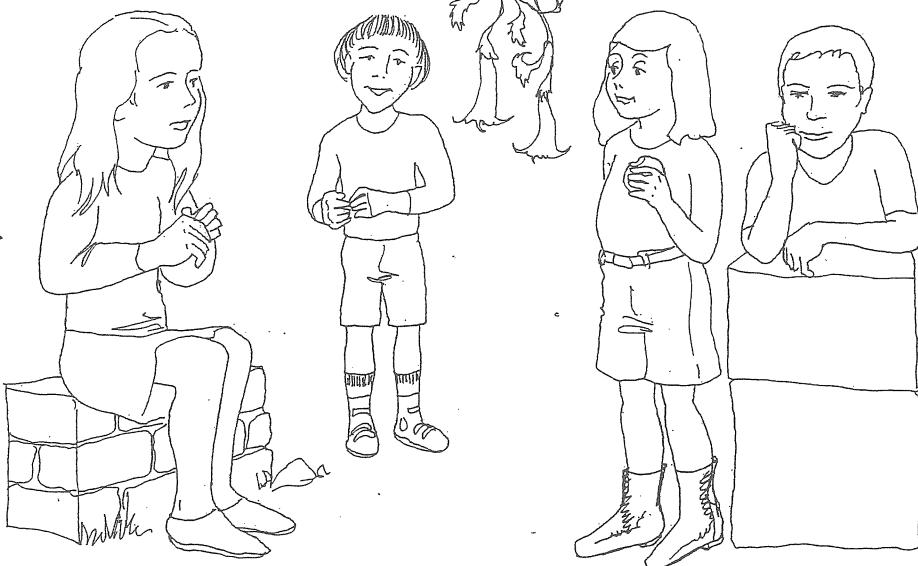
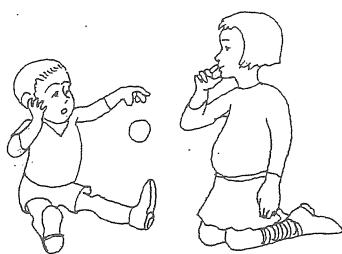


- Interlude -

A quatre ou six ans ça commence... des fois même plus tôt !!

Nourrice... garderie... maternelle... école primaire... collège... lycée...

ET COETERA



- Un prof pour
chaque âge ...

- A chaque âge
son prof ...

Pour apprendre...

Je te tiens, tu me tiens,
par la barbichette...

Bien des choses

...

ET des Maths

...

que se passe-t-il?

ça dérape complètement

Et maintenant aux problèmes...

Combien y-a-t-il
de diagonales dans un
enneagone ?

Bof ! c'est facile !

et dans une milleagone ?

Hum ! faut réfléchir !

FIN DE L'INTERLUDE ...

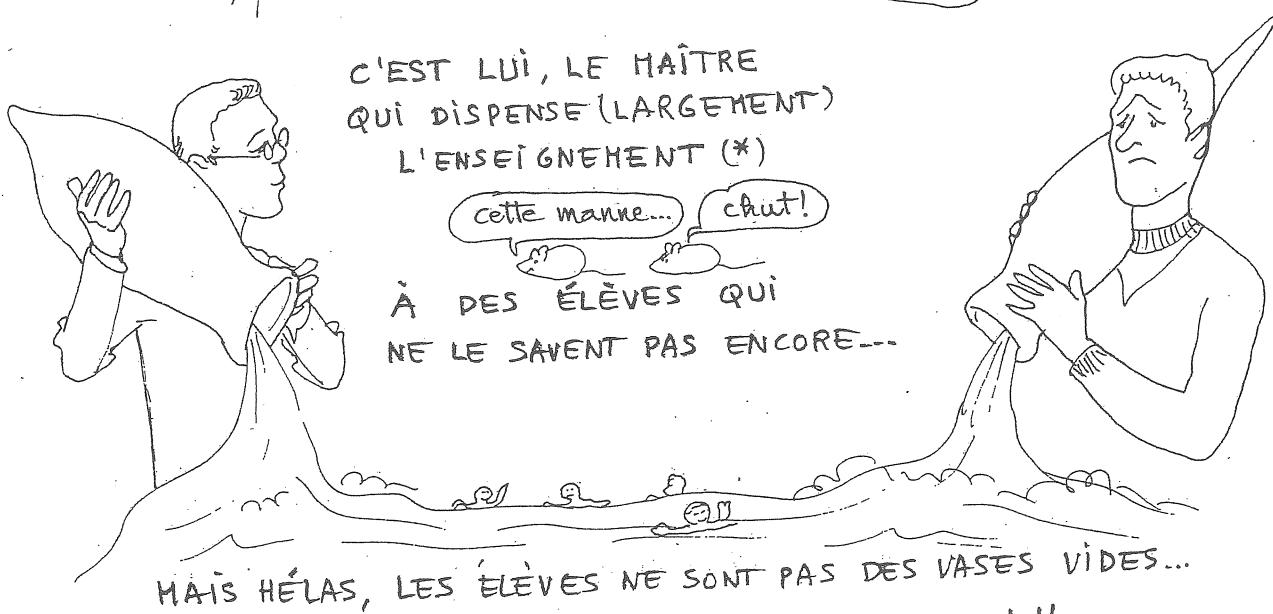
I.7

Allégorie...

EN TOUT CAS, QUE LE MAÎTRE SOIT :



OU AUTRE CHOSE ...



Ils ne se remplissent pas! ils nagent!!



Entendre dire le vrai ne suffit pas, les croyances des élèves doivent être mises en contradiction pour qu'il y ait progression; ce qui ne peut se faire que par expérimentation, recherche, progression individuelle.... Dans ce contexte l'**erreur** n'est plus une faute mais un **symptôme**!



Pour plus de détails, voyez le bulletin de l'APHEP : Sept. 83.



I.8

(*) Il a parfois été formé pour ça! sinon il a bien du mérite.

Mais ce maître, comment fait il ?



IL SE DÉBROUILLE POUR DOUSER JUDICIEUSEMENT
TOUS LES INGRÉDIENTS D'UN "BON COURS",
ET SOUVENT ÇA MARCHE!



Un jour : LE GRAIN DE SABLE...



- ET POUR ESSAYER DE DIVERSIFIER, LE CHOIX NE MANQUE PAS...
- ON PEUT AGRANDIR LA "PALETTE"

DIVERSIFICATIONS...

IL Y EN A QUI DIVERSIFIENT DE FAÇON SAUVAGE!

- certains utilisent des heures de maths (oui) pour faire jouer les élèves aux échecs!



- d'autres font de même, mais avec le "GO" ça développe l'esprit de raisonnement abstrait et l'attention, ça crée aussi d'autres relations dans les classes ! entre autres choses...
- d'autres utilisent des calculatrices (*) toujours en cours de maths, programmables ou non programmables les deux ont leur intérêt.

- Il y a aussi le rétro projecteur (†)

la géométrie pratique (constructions, découpages)

le cours magistral (pour ceux qui n'en font pas ! ça diversifie)

Tout ça c'est des trucs, on peut aussi diversifier

l'esprit du travail ET COETERA ...

Modifier le "rapport au savoir"

ET... les maths par le problème !

Maman c'est quoi
le "rapport au savoir" TAIS TOI
ET HANGE

Plus précisément : l'utilisation de "problèmes ouverts" en cours de maths.

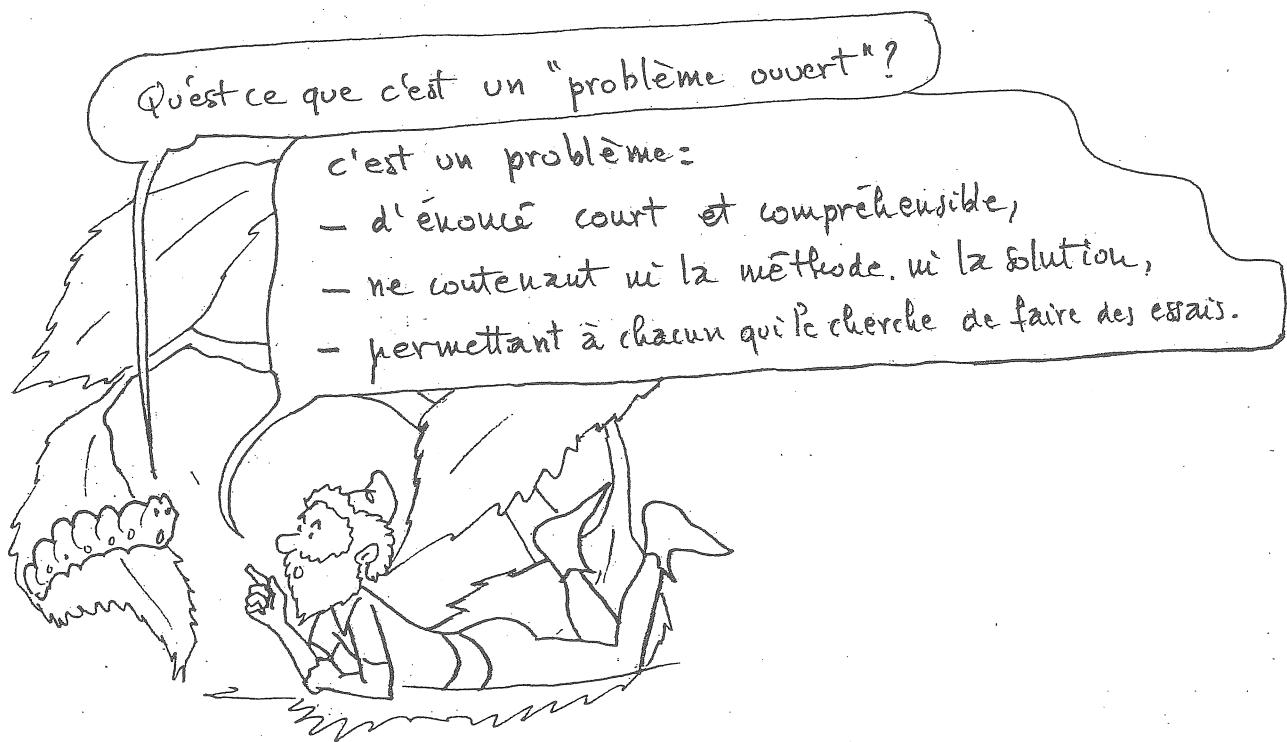
ON VA VOUS EN PARLER, c'est la 2nde partie...

(*) valises disponibles à l'Irem

(†) banque de transparents disponible à l'Irem



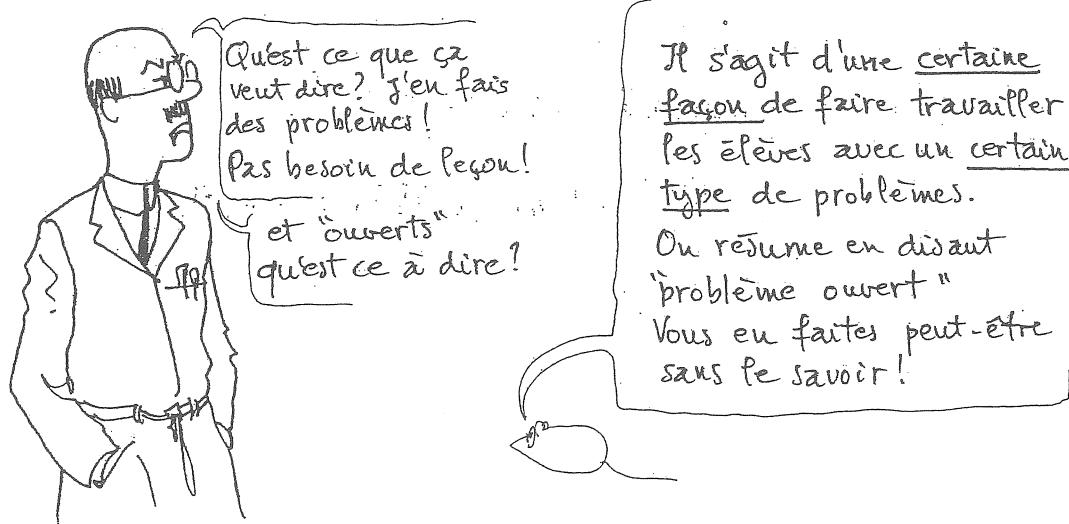




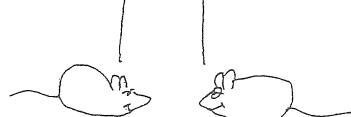
2^{nde} partie

Présentation d'une activité
"Problème ouvert"
dans une classe.

En 16 tableaux



- Ce n'est pas une panacée !
 - certes non
- Tout au plus une activité qui permet de varier son enseignement de temps en temps
 - Mais qui apporte plus qu'on ne l'imagine au départ !
- En somme, c'est un outil de plus pour le prof s'il le connaît, il peut l'utiliser.

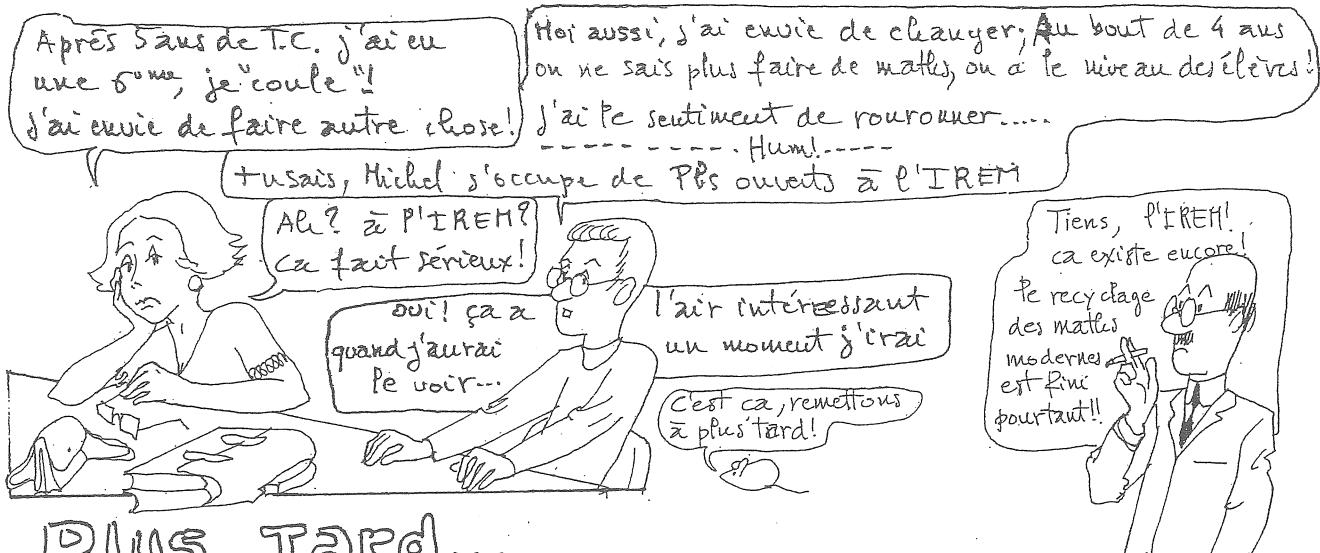


Comment enseigner?

c'est un problème ouvert!



Pourquoi des "problèmes ouverts" ^{PP}



PLUS TARD...



comment peut-on avoir du plaisir à chercher sans trouver?!

Les problèmes posés permettent de tatonner, de faire des essais, et on n'a pas le sentiment de perdre son temps!



En fait de pagaille, les élèves travaillent en groupes, et se déplacent; c'est seulement un fonctionnement différent de la classe!

Présentation... aux élèves...



DURÉE de l'activité:
Recherche : 30mn à 1 heure;
Suivant la difficulté du pb posé Bilan évaluation: 30mn à 1 heure.

D'abord: prévenir les élèves avant!



Le Jour "J"

Voici LES CONSIGNES:

- travailler par groupes : 2 à 4...
- chaque groupe rédige les idées qu'il a et ses résultats.
- A la fin, ou dans une prochaine séance, chaque groupe entrera ses résultats au tableau.
- On discutera ensemble les proportions que vous aurez faites!



Puis c'est la DISTRIBUTION DE L'ÉNONCÉ aux élèves

(Moi M'sieur)

Voici quelques Exemples d'énoncés possibles

- On se donne trois nombres pour des 5, 59, 4 ou plus -

- Un rectangle cot partage est-il toujours possible de trouver un triangle de trouver un triangle dont ils soient les longueurs des côtés?

- Mais! ils ne pourront jamais trouver ça!

- Mais! il y en a qui trouvent 0,7 pourtant je... Mais tous... cherchent

- un rectangle cot partage en p.m. carrés. Combien de carrés sont rencontrés par la diagonale?

- Est-il possible de trouver deux nombres entiers a et b , distincts, tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$

- et avec $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$

- et avec plus de trois?

- Trouver les entiers avec une somme égale à 1984 et un produit le plus petit possible.

- TRACEZ la droite qui joint A au point de rencontre des droites (D) et (D') qui se coupent hors de la feuille!

- Ne pas prolonger (D) et (D')!!

C'est court pour

M'sieur M'sieur quelle question que faut faire?

H.5

Premières réactions...



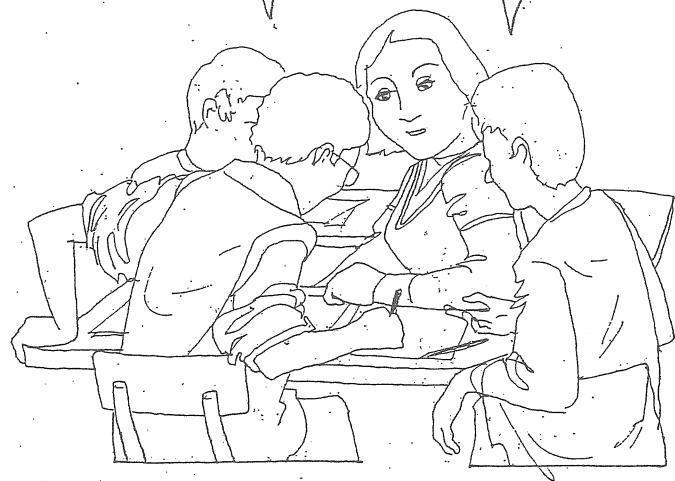
Premières conjectures...

A partir de leurs essais, les élèves élaborent des "conjectures", puis ils les testent, ... une fois, ..., ou deux...

Une "conjecture", qu'est-ce que c'est?
Ecoute OXFORD!

Ouais, ça marche dans les deux cas!
Appelons le prof, y nous dira si c'est juste!

OXFORD
c'est moi!
Une conjecture, hum! hum!
Eh bien, ... Euh, ... c'est...
c'est... c'est pas compliqué!
il suffit de regarder
n'importe quel dictionnaire!



pourquoi, il leur dit pas si c'est juste ou faux ?
ça irait plus vite !
pour aller où ?

On en apprend des choses en écoutant les élèves!

Hum! et votre idée, est ce qu'elle marche dans le cas où ... Bla bla
regardez donc un peu...

arriver vite à la solution, n'est pas le but de cette activité!

Ici,
le premier rôle du prof consiste à:

critiquer les conjectures
en amenant les élèves
à douter.

Pourquoi?

Pour les convaincre de la nécessité d'autres vérifications, voire d'une preuve...



Blocages ...

Et ...

PLUS TARD ...



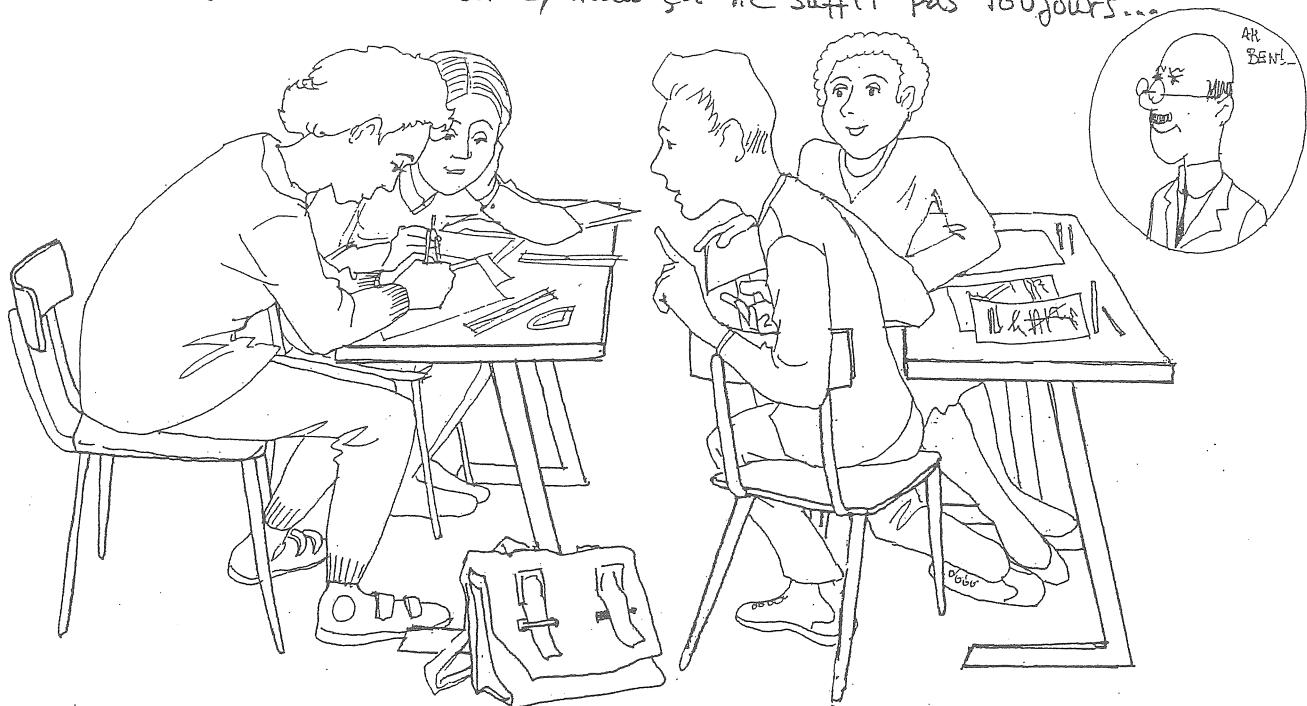
DANS CE CAS LE PROF PEUT:

- FAIRE LE BILAN DE CE QUI A ETE OBTENU DANS LE GROUPE;
- VALORISER LE TRAVAIL DEJA FAIT,
- FAIRE REDIGER LES RESULTATS PARTIELS OBTENUS.



•déblocages...

Le groupe redémarre, mais ça ne suffit pas toujours...



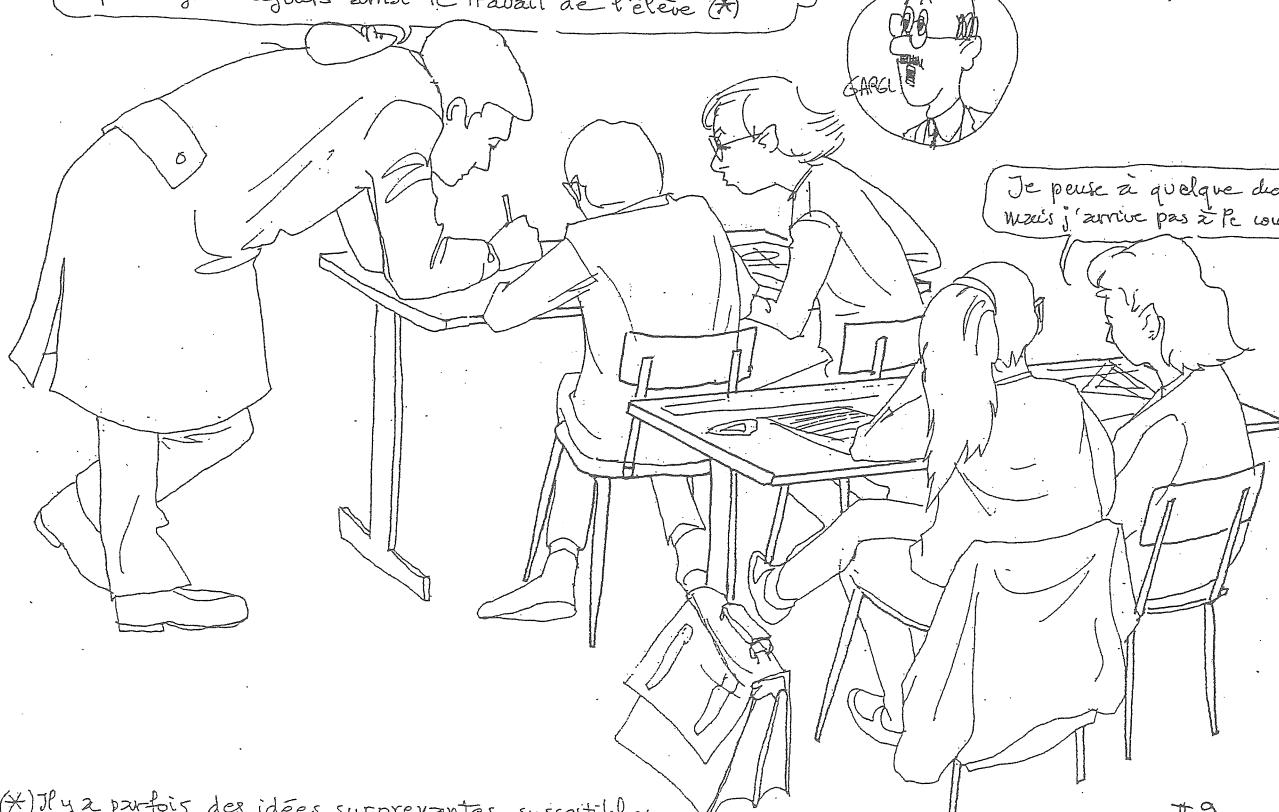
Dans certains cas le prof va encourager les élèves en leur donnant des idées pour continuer dans la direction où ils ont commencé à chercher ...



Parfois, (pas toujours!) même si cette direction ne semble pas bonne, je privilégie toujours ainsi le travail de l'élève (X)

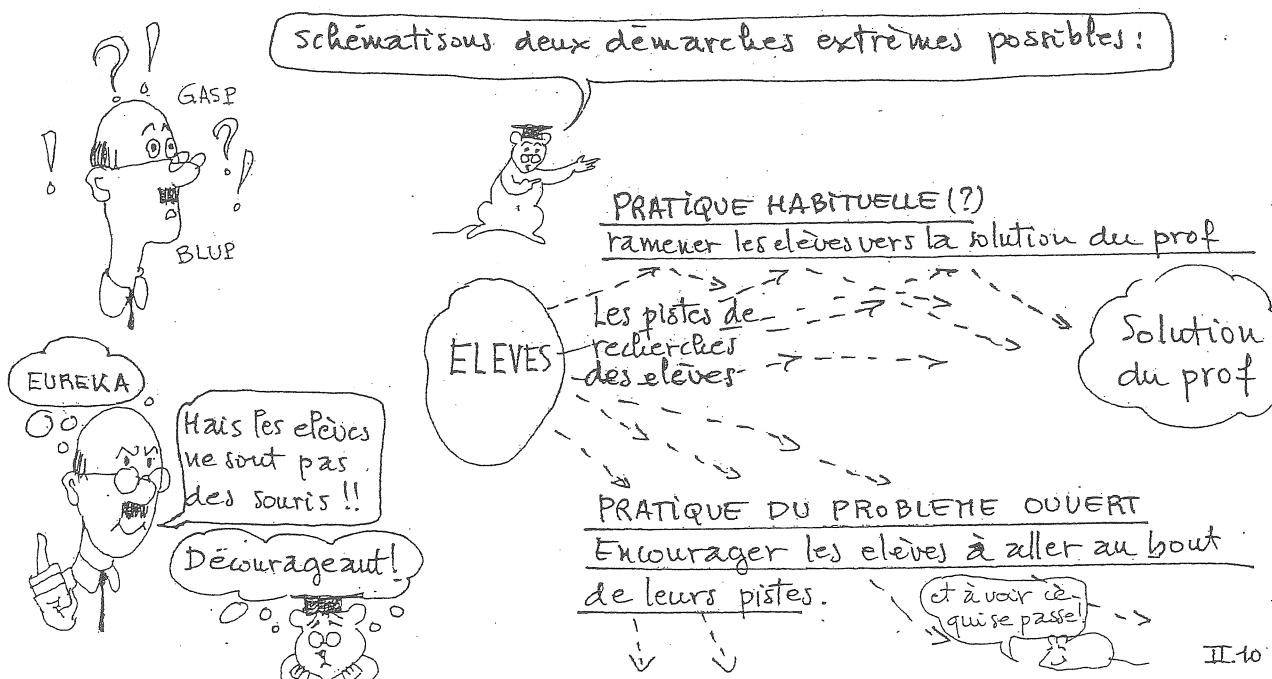
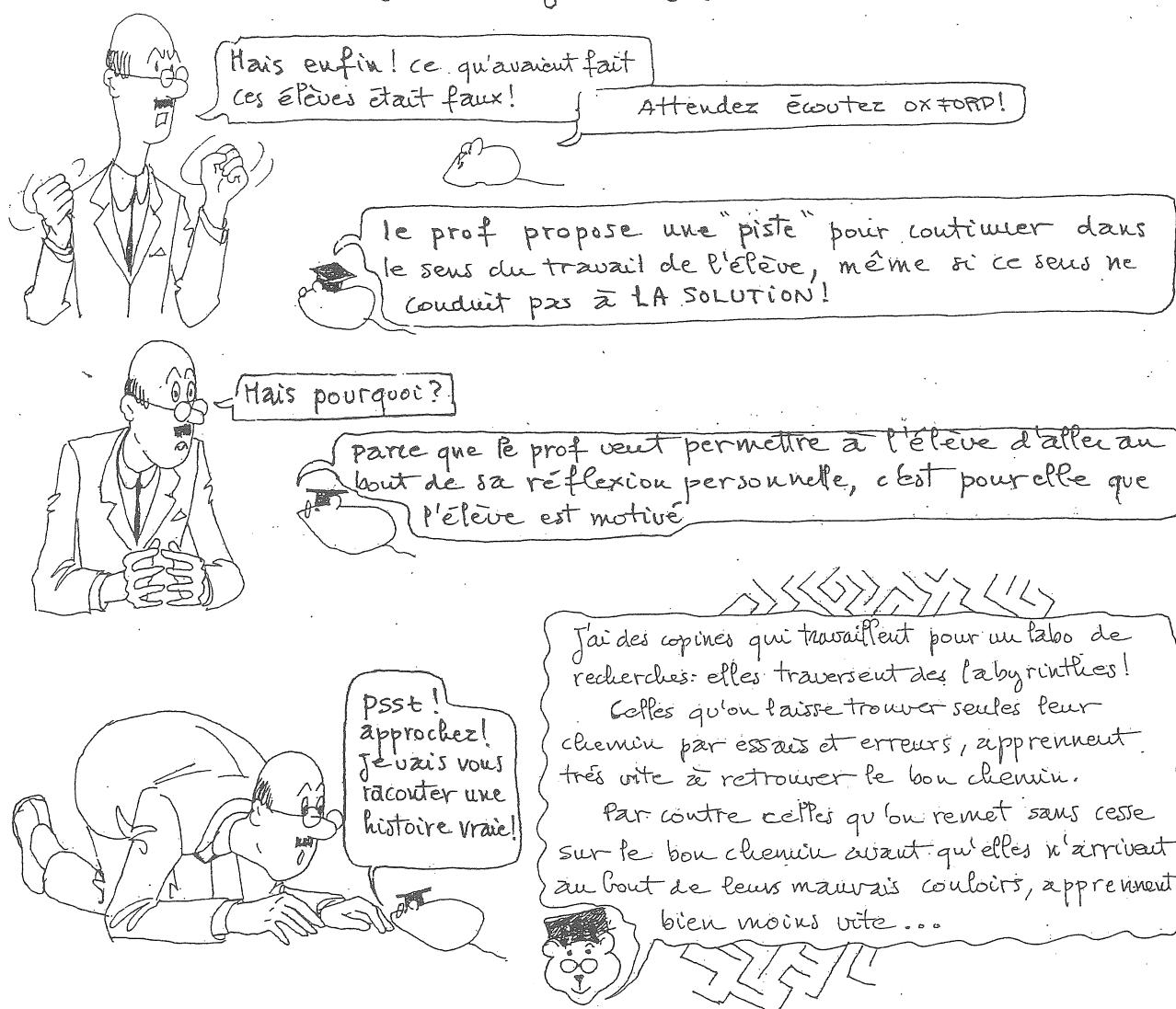


Je pense à quelque chose mais j'arrive pas à le construire!



(X) Il y a parfois des idées surprenantes susceptibles d'une mise en forme donneant des solutions inattendues!

Au bout de la piste ...



Fin de la phase "recherche"





Le bilan

ou

de l'animation en perspective!...

- Il se place le plus souvent une séance suivante, sauf pour certains problèmes courts où on le fait immédiatement (ou si on a 2 heures).
- Il dure en principe le même temps que la recherche.
- Son objectif est que la classe prenne une DÉCISION sur ce qui lui apparaît comme une solution.



Schématiquement on peut distinguer quatre temps d'importance inégale :

- 1) Échauffement, pour se replonger dans le problème, relire ce qui a été rédigé etc... (si le bilan ne suit pas la recherche!)
- 2) Les élèves écrivent leurs conjectures au tableau;
- 3) La classe prend connaissance de ces conjectures;
- 4) La classe, animée par le prof, discute ces conjectures, afin d'arriver à SA solution.



Ouh! Quel baratin, mais c'est clairement structure!

Ouais! en pratique tout se mélangue un peu, c'est pourquoi il faut y voir clair!

celle de la classe
pas du prof !!



Evidemment, il y a des élèves qui ne s'intéressent pas à ce genre de travail! Parfois des bons élèves, moins à l'aise dans une activité qui ne leur permet pas d'utiliser leurs connaissances comme d'habitude. Au contraire certains "élèves médiocres" pourront étonner leur prof par leur imagination et leur entrain à la recherche...

1^{er} temps: Echauffement.

- Pour se remettre le problème en mémoire.

Dans le cas où le bilan suit immédiatement la recherche (problème court ou séance de 2h) cet échauffement est inutile!

voici ce qui risque d'arriver si le bilan ne suit pas la recherche!

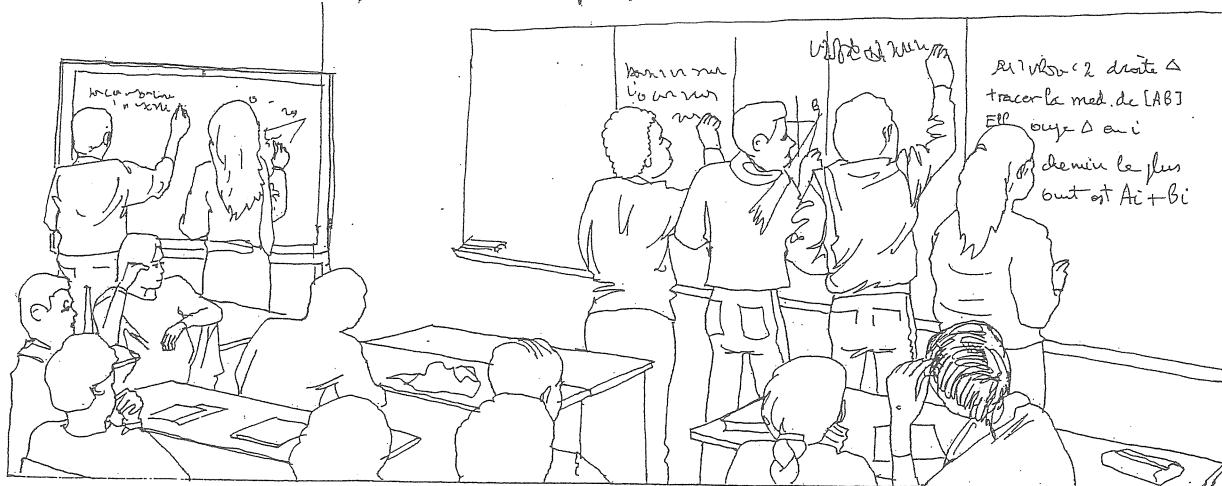


Laisser du temps entre "recherche" et "bilan" montre l'intérêt qu'il y a à rédiger ce qui est trouvé, même si c'est peu! Sinon les élèves voient moins l'utilité d'une telle rédaction.



2nd temps: Ecriture des conjectures.

- chaque groupe envoie quelqu'un écrire au tableau ce qu'il a rédigé.
- s'il n'y a pas assez de place on utilise des tableaux de papier (*)
- On fait en sorte que toutes les propositions soient écrites.



(*) les textes écrits sur papier peuvent être réutilisés en français!

3^{eme} temps : lecture des conjectures.

Evidemment la lecture a déjà commencé au temps 2^e !

Il s'agit de faire comprendre chaque conjecture par la classe!

D'abord lecture.

puis, commentaires et
demandes d'explications

LE PROF ORGANISE
LA LECTURE DES
TEXTES ÉCRITS
AU TABLEAU...



explications...



Eh! M'sieur, ça va pas!
je sais ce qu'il faut!

TRÈS VITE LES ÉCHANGES S'ANIMENT
TROP VITE MÊME PARFOIS...



LA, IL S'AGIT DE NE
PAS LAISSER S'ENGAGER
LA DISCUSSION AVANT
QUE TOUTES LES
PROPOSITIONS AIENT
ETE LUÉS.



4^{eme} temps: discussion

La classe va discuter les conjectures dans un ordre choisi par le prof, en commençant plutôt par "les plus faibles" afin d'enrichir progressivement les résultats obtenus... Hum!

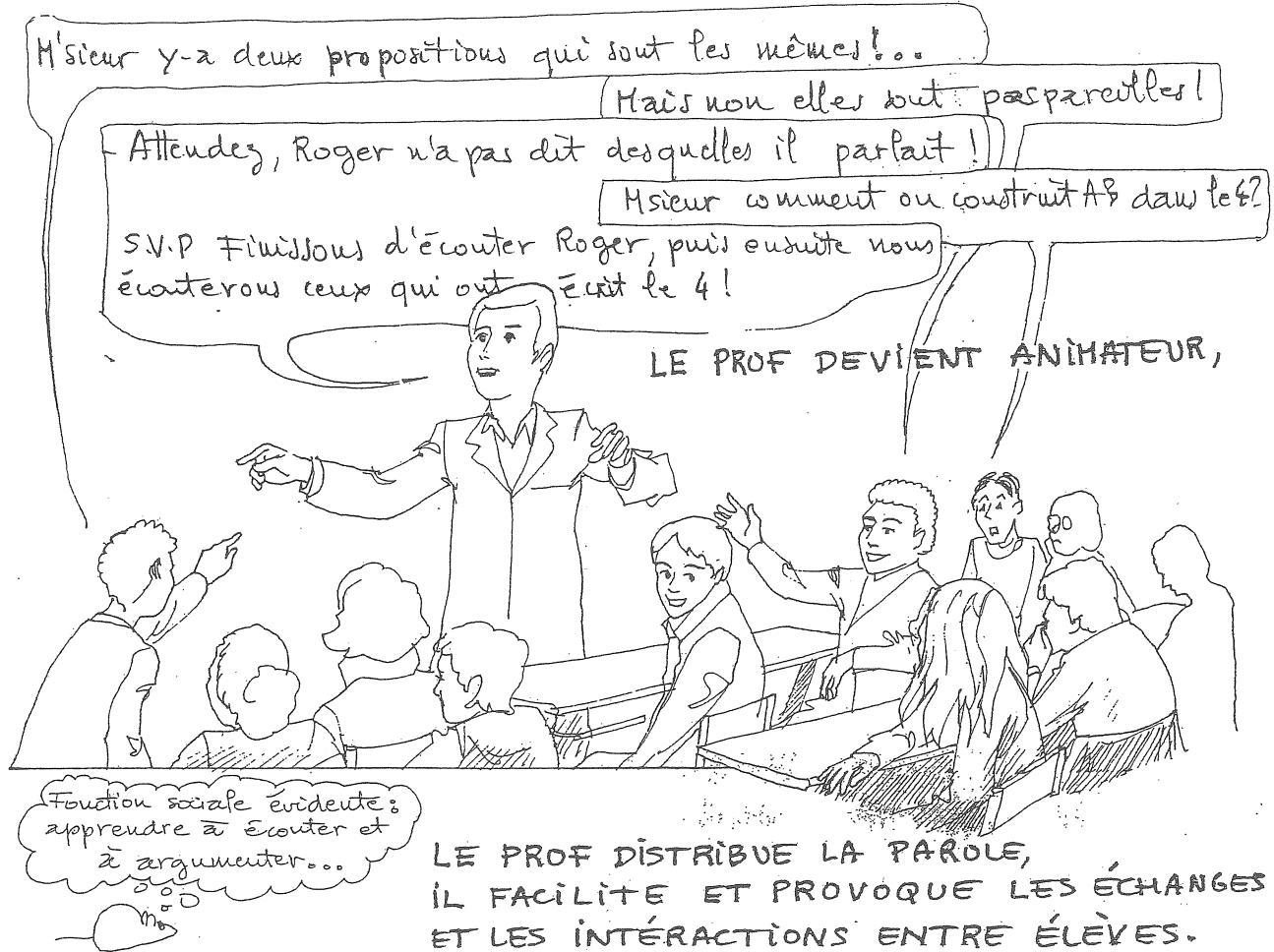
Là il s'agit d'animer une discussion.

Faut pas y croire, même si on contrôle pas tout!

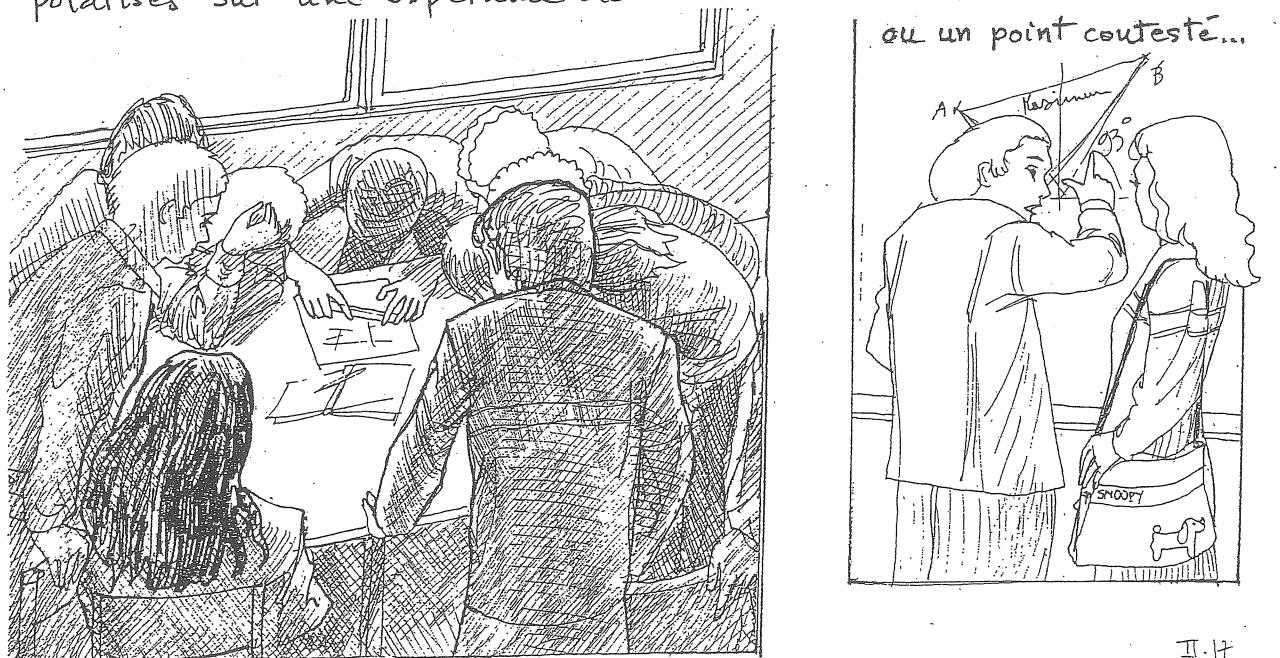
On commence par la proposition n° 3 ... Bon! UN PEU DE CALME! SVP QUI VEUT LA PAROLE?



La discussion continue...



Dans certains cas, des sous groupes se forment spontanément, polarisés sur une expérience déterminante...

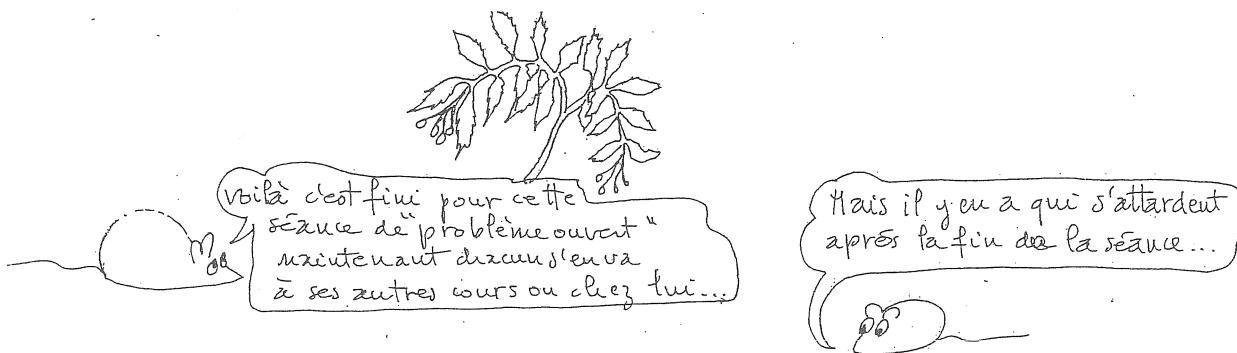


Il faut conclure.

Les élèves, aidés par leur prof, vont finir par se mettre d'accord sur une solution. Eventuellement le prof finira par donner le résultat si personne ne l'a trouvé. Une preuve complète n'est pas toujours nécessaire, ni d'ailleurs possible, lorsqu'elle dépasse le niveau de la classe où le problème a été posé.

Evidemment le prof finit toujours par revendre sa marchandise...

Parfois les échanges entre élèves peuvent faire apparaître d'autres problèmes générateurs de nombreux débats.... c'est à dire de doser suivant son caractère la gestion du bilan est affaire personnelle !



dans ce type de travail comme dans d'autres il y a toujours ceux qui veulent en savoir plus... ou qui ne sont pas courtauds!

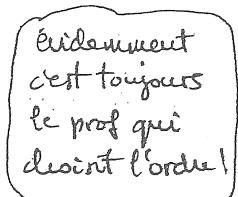


ET vous, si vous essayez, relisez ce qui précède après, et comparez...

Variantes...

Elles sont à votre choix suivant votre imagination...
En voici deux:

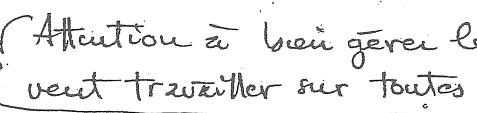
- Pour limiter l'agitation pendant le bilan:


évidemment c'est toujours le prof qui désire l'ordre!

faire écrire une conjecture au tableau
la discuter complètement.

Recommencer avec les autres.

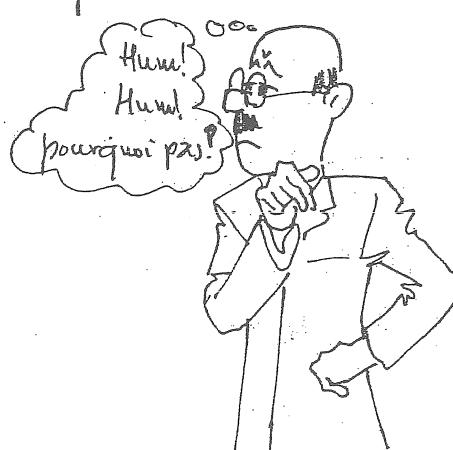


Attention à bien gérer le temps si on veut travailler sur toutes les conjectures....

- Pour utiliser ce temps de redondance pour continuer à "faire le programme":



Poser en "problème ouvert" une partie du cours à venir qui s'y prête



- - - - -

Toutes les situations représentant des élèves à partir de la page 10 ont été prises "sur le vif" au cours d'observations de séances de problèmes ouverts.

PETIT LEXIQUE

CONTRAT D'IDÉTIQUE : C'est l'ensemble des règles (en général implicites) qui fixent le fonctionnement de la classe, en particulier les rôles respectifs du professeur et des élèves. Exemple de règles implicites : les exercices posés portent sur les chapitres étudiés récemment. Le professeur dit si les propositions de solution des élèves sont exactes ou non. Ces deux règles ne sont pas respectées dans la situation "problème ouvert".

CONJECTURE : énoncé explicite dont on pense qu'il est vrai et que l'on se propose de vérifier (mais il arrive aussi que l'on trouve un contre-exemple montrant qu'il est faux). Exemple : la conjecture de Fermat : pour $n > 2$ l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution entière sauf $x = y = z = 0$. Une fois démontrée, une conjecture devient un théorème... la conjecture : il existe des nombres premiers plus grands que tout entier donné n a été démontré sans doute par Euclide, il y a environ 2300 ans.

TRANSFERT DE CONNAISSANCE : C'est le fait d'utiliser une connaissance dans une contexte autre que celui dans lequel elle a été présentée. Exemple : utiliser en physique, en éducation manuelle et technique ou en éducation physique la proportionnalité introduite dans le cours de mathématique.



Bizerte, le 9 octobre 84

