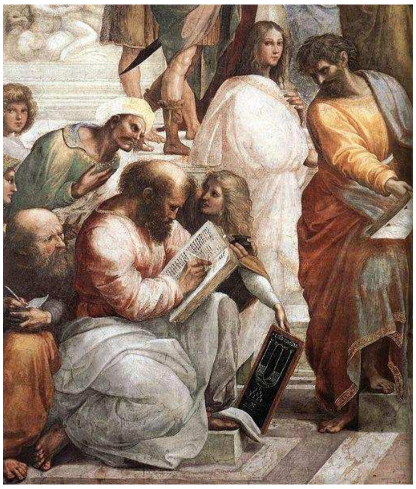
ENSEIGNER LA DEMONSTRATION AU COLLEGE



N^{O} 37 Septembre 2011

ISSN 0297 - 4347

Courriel : dir@irem.univ-mrs.fr
Site : http ://www.irem.univ-mrs.fr

Table des matières

Introduction

1. Enseigner la démonstration au collège : notre approche

1.1 La démonstration, une affaire plutôt intime :

Chacun sait par son expérience personnelle combien il est difficile de s'entendre entre collègues sur des exigences communes en matière de démonstration. Les uns voudront que soit exigée une rédaction ternaire de type ≪ on a ... ; or on sait que ... ; par conséquent ... ≫ ; les autres s'y opposeront en prônant au contraire la liberté pour l'élève de choisir sa propre façon de raisonner. Certains exigeront que l'énoncé du théorème utilisé soit cité in extenso, d'autres accepteront une rédaction y faisant seulement allusion ; uniquement pour les théorèmes qui n'ont pas de nom pour certains, même pour les théorèmes tels que celui de Pythagore pour d'autres.

Il est évident que la démonstration tient une place tout à fait particulière dans la pratique de l'enseignement des mathématiques, une place très investie. On peut dire sans risque de se tromper, que, pour la plupart des enseignants du secondaire, la démonstration est quelque chose comme le cœur de l'activité mathématique, quelque chose dont ils seraient personnellement gardiens ou garants, bref une affaire plutôt intime [1].

Soulignons le paradoxe : les mathématiques sont réputées être la science de la certitude, le lieu où les points de vues doivent s'accorder au nom de l'objectivité parfaite que cette science serait la seule à pouvoir garantir, et voici qu'une partie essentielle de l'activité est l'objet d'une implication fort irrationnelle du praticien !

C'est un fait qui doit nous faire réfléchir. Car il n'y a aucune raison pour que cette intervention de la subjectivité soit réservée aux enseignants de la discipline : les élèves aussi entretiennent un rapport particulier avec la démonstration, pour eux aussi il peut s'agir d'une affaire intime !

1.2 Quelles dimensions cette “intimité” met-elle en œuvre ?

Pour qu'enseigner la démonstration respecte le sujet qui apprend – respect si important du fait du rapport intime qu'il peut entretenir avec cette activité particulière des mathématiques – plusieurs dimensions doivent être prises en compte :

La construction de la motivation :

Motiver la démonstration, c'est construire des situations où la curiosité naturelle de l'élève soit sollicitée : ≪ pourquoi ? ≫, ≪ comment cela se fait-il ? ≫, ≪ comment comprendre ce qui se passe ? ≫, ≪ comment puis-je me l'expliquer ? ≫ voilà des questions qu'on se pose d'abord pour

1. Voir notre questionnaire II.3 et l'analyse des réponses des professeurs

soi-même et sans lesquelles l'exercice de la démonstration risque de susciter l'ennui (au mieux) ou d'être ressenti comme du dressage (au pire).

Mais en matière de "pourquoi", les enfants n'attendent pas la Cinquième et la Quatrième ! Ils sont même beaucoup plus forts dans ce domaine dans leurs jeunes années ... En fait, le besoin de savoir "pourquoi" n'a pas d'âge, il est l'une des expressions de la condition humaine, intimement intriqué avec la capacité de conscience. L'activité mathématique authentique n'attend donc pas la Cinquième pour commencer à poser cette question. Dès la maternelle, on peut la mettre en scène auprès des élèves et on constate qu'ils y répondent. L'exemple de l'activité des boites d'allumettes [2] en moyenne section l'illustre bien. Pour notre part, nous avons tenu à présenter des activités d'apprentissage de la démonstration échelonnées de la classe de Sixième à celle de Troisième, pour illustrer la pertinence d'un apprentissage en continuité avec le Primaire.

La prise en compte des aspects formels :

Démontrer, c'est aussi faire la preuve qu'on peut rattacher une connaissance nouvelle au corpus des connaissances déjà établies, d'une façon excessivement formelle. Ceci concerne évidemment les démonstrations de cours (dont la place s'est considérablement amenuisée au collège), mais pas seulement : expliquer une configuration ou justifier un calcul, cela demande de savoir exactement sur quelles connaissances géométriques ou sur quelles règles de calcul déjà établies on peut s'appuyer. Ainsi, la démonstration ne se réduit pas à s'assurer d'une vérité, ni même à s'expliquer ce qui se passe : elle fait intervenir un jeu formel qui consiste à trouver une chaîne d'étapes bien maîtrisées capables de relier le nouveau à l'ancien. Cette dimension vient presque contredire la précédente : où passe le sujet dans cette histoire, et son désir de comprendre ?

Dans la gestion de cette dimension, l'enseignant a une grande responsabilité. Il doit être capable de dire exactement de quoi il s'agit et surtout ne pas essayer de faire passer cet aspect de la démonstration pour autre chose que ce qu'il est. Reconnaître que le résultat est connu, que personne n'a de doute à son sujet, qu'on peut même l'utiliser tout de suite, l'appliquer, qu'on pourrait s'arrêter là. Mais qu'on va faire quelque chose de plus qui consiste à regarder en détail comment ce résultat se raccorde à ce qu'on savait déjà, comment on peut l'en déduire, bref aborder la question de la cohérence du savoir mathématique concerné et celle de sa construction. Il n'est pas dit que cet aspect des mathématiques rebute nécessairement les élèves ; encore faut-il le présenter pour ce qu'il est. Outre la satisfaction qu'ils peuvent trouver à explorer cette question éminemment humaine du " pourquoi " que nous avons présentée dans la dimension précédente, le côté formel d'une démonstration peut aussi revêtir pour eux l'aspect d'un jeu, auquel ils prennent alors plaisir, notamment dans ses aspects combinatoires (partir des données, partir de la conclusion, ou les deux à la fois, recenser les moyens dont on dispose, agencer des chemins, etc.).

La prise en compte des aspects langagiers :

Qui est le sujet de la démonstration ? Qui parle ? Ici aussi, il s'agit du respect de l'élève. S'il a investi la démonstration, si celle-ci est devenue "son affaire", il est naturel que ce soit lui qui parle. Et ce qu'il va dire risque d'être, au début, fort éloigné de l'objet "démonstration". Le travail d'enseignement consiste alors à faire évoluer ces formulations inévitablement personnelles et incorrectes, vers une forme progressivement plus standard. Si l'on peut dire que l'incorrection

2. Cdrom Hatier Maternelle de J. Briand et all.

de la forme est au début une garantie de l'authenticité de la pensée, ceci n'exclut pas une éducation, une convergence vers le vocabulaire de la discipline et vers des formes d'expression plus classiques des raisonnements.

Nous proposons des idées pour gérer le foisonnement d'expressions auquel on se trouve vite confronté avec cette façon d'enseigner la démonstration. Notamment en devoir à la maison. Nous proposons aussi de séparer la tâche de rédiger de celle de trouver le cheminement du raisonnement. Sinon, la difficulté où les élèves se trouvent pour rédiger risque d'amener l'enseignant à réduire tellement le nombre de pas des démonstrations que celles-ci perdent tout intérêt. Ainsi, dans certaines activités, le but sera uniquement de trouver un plan de preuve par étapes, de discuter de sa validité, de le critiquer, de le corriger, de constater qu'il peut y avoir plusieurs chemins. Dans d'autres activités, le but sera de rédiger une démonstration courte, de comparer les formulations de la déduction, de les critiquer et de les perfectionner. Pour les premières, le nombre de pas pourra être important car la rédaction ne viendra pas ralentir ou décourager le travail de recherche. Un plan, des flèches, des numéros pour citer les théorèmes ou les règles utilisés permettent à chacun de suivre le cheminement du raisonnement. Pour les dernières, on se limitera à un ou deux pas, pour mettre l'accent sur les formulations et les travailler.

Cette gestion de la démonstration comme une activité éminemment humaine amène à discuter en classe de la question de l'implicite et de l'explicite. Les élèves seront intéressés d'apprendre qu'il n'y a pas une réponse unique ; que ça dépend de la longueur de la démonstration (du nombre de pas), de la personne à qui on s'adresse, des connaissances qu'on partage avec le lecteur et de la confiance qui s'est établie avec lui. Pour une fois, les mathématiques laissent une place à l'interprétation.

2. Présentation de la brochure

Sur l'importance de l'apprentissage de la démonstration au cœur des mathématiques du collège et ses enjeux pour la formation des jeunes, le programme officiel (BO spécial N°6 du 28 Août 2008 : "Programmes de l'enseignement des mathématiques.") [3] est particulièrement explicite.

3. ≪ La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un " phénomène " mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration. Si, pour cet objectif, le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s'y cantonner. Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer.

A cet égard, deux étapes doivent être clairement distinguées : la première, et la plus importante, est la recherche et la production d'une preuve ; la seconde, consistant à mettre en forme la preuve, ne doit pas donner lieu à un formalisme prématuré En effet des préoccupations et des exigences trop importantes de rédaction, risquent d'occulter le rôle essentiel du raisonnement dans la recherche et la production d'une preuve. C'est pourquoi il est important de ménager une grande progressivité dans l'apprentissage de la démonstration et de faire une large part au raisonnement, enjeu principal de la formation mathématique au collège. La rédaction et la mise en forme d'une preuve gagnent à être travaillées collectivement, avec l'aide du professeur, et à être présentées comme une façon convaincante de communiquer un raisonnement aussi bien à l'oral que par écrit.

Dans le cadre du socle commun, qui doit être maîtrisé par tous les élèves, c'est la première étape, " recherche et production d'une preuve " qui doit être privilégiée, notamment par une valorisation de l'argumentation orale. La mise en forme écrite ne fait pas partie des exigibles.

La prise de conscience de ce que sont la recherche et la mise en œuvre d'une démonstration est également facilitée par le fait que, en certaines occasions, l'enseignant se livre à ce travail devant la classe, avec la participation des élèves.

Pour notre part, nous retrouvons dans ces directives l'écho de nos motivations pour cet aspect de l'enseignement des mathématiques. Dans la présente brochure nous proposons le produit d'une réflexion commune entre enseignants du Supérieur (chercheurs en Logique) et du Secondaire, au sein de l'IREM. Lors de nos échanges, nous nous sommes retrouvés sur l'importance des différentes dimensions à l'œuvre dans l'apprentissage de la démonstration que nous avons présentées dans la section précédente et qui donnent l'articulation de notre travail.

Nous consacrons cependant une première partie à l'"objet démonstration" : comment les démonstrations faites au collège se raccrochent-elles à celles qui sont l'objet des travaux des logiciens ? quels enseignements peut-on en tirer ? Bien entendu, dans ce chapitre nous nous adressons aux professeurs ; le formalisme rigoureux qui y est utilisé n'a pas vocation à être enseigné, mais permet le recul nécessaire pour éclairer ces questions d'enseignement.

Notre deuxième partie regroupe des activités à faire en classe. En effet, les activités permettent la compréhension et l'appropriation des connaissances mathématiques par tous les élèves. L'intérêt pour les élèves d'aborder les notions nouvelles par le biais d'activités a été bien développé dans la brochure "Activités en classe de cinquième" (publication 2006 de l'IREM de Marseille, n^0 35). Le travail sous forme d'activités est également pertinent pour l'apprentissage de la démonstration. Il permet de donner une place à l'expérimentation (faire des essais, tant dans le domaine géométrique que numérique), à la conjecture (généraliser ce que l'on voit sur des tests, ...) et au retour en arrière (après la découverte d'un contre-exemple, ...). Il permet d'alterner des plages de recherche individuelle et des temps d'échange par groupes ou par classe entière, ce qui permet de ne pas laisser d'élèves en difficulté. Ces temps d'échange permettent de plus aux élèves de s'exercer aux compétences orales liées à l'apprentissage de la démonstration : justifier leurs idées par des connaissances, argumenter pour convaincre de la validité de leurs propositions (on retrouve ici l'esprit des dernières instructions officielles : ≪ La rédaction et la mise en forme d'une preuve gagnent à être travaillées collectivement, avec l'aide du professeur, et à être présentées comme une façon convaincante de communiquer un raisonnement aussi bien à l'oral que par écrit. Dans le cadre du socle commun [...] c'est la première étape, " recherche et production d'une preuve " qui doit être privilégiée, notamment par une valorisation de l'argumentation orale ≫).

La mise en situation de ces activités dans l'une de leurs classes par les professeurs de collège du groupe a, la plupart du temps, été menée en présence d'une des logiciennes. Les mises en commun et les discussions qui ont suivi ont permis de faire évoluer les activités qui ont souvent été testées à nouveau. Toutes les activités que nous présentons sont donc accompagnées d'un compte-rendu d'observation et d'un bilan.

Il est à noter que nous proposons des activités non seulement en géométrie mais aussi dans le domaine du numérique et même sur des chaînes déductives d'énoncés non mathématiques.

Les activités proposées se présentent de la manière suivante :

- Une "fiche élève" pour guider l'élève dans son activité ;

Cette initiation à la démonstration doit en particulier permettre aux élèves de distinguer une propriété conjecturée et vérifiée sur des exemples d'une propriété démontrée. En particulier, l'enseignant doit préciser explicitement qu'un résultat mathématique qui n'est pas démontré est admis. ≫

- Un “dossier professeur” contenant les rubriques suivantes : intentions des auteurs ; déroulement possible ; compte-rendu de l'activité ; bilan, discussion de certaines modalités, alternatives, suites.

Les activités proposées sont subdivisées selon les *thèmes* suivants :

- Motiver la démonstration ;
- Aspects logiques et formels ;
- Aspects langagiers.

Chapitre I

La démonstration des logiciens / la démonstration dans la classe

I.1 La formalisation des démonstrations

La démonstration en classe de mathématiques tout comme dans la pratique des mathématiciens n'est ni un objet formel, ni réduite à sa dimension logique. Néanmoins, son squelette logique la constitue (même s'il est implicite) et structure l'activité du praticien. Avoir en tête une définition formelle de la démonstration, comme objet de référence, peut alors être utile pour cerner l'objet qui nous intéresse *la démonstration en classe de mathématiques.*

Il existe différentes définitions des démonstrations formelles. De telles définitions sont appelées des *systèmes formels*. Ces différents systèmes sont tous également pertinents lorsqu'on s'intéresse à caractériser la démonstration dans la pratique mathématique. Nous en donnons ici deux exemples :

• **La démonstration formelle dans un système axiomatique** (à la Hilbert) :

La démonstration est un discours dont l'enchaînement des propositions doit préserver la validité des énoncés successifs. C'est essentiellement sur ce modèle que sont manipulées, lues, écrites, pensées les démonstrations mathématiques.

Plus précisément, dans un système axiomatique, une *démonstration est une suite de formules* qui trouvent correctement leur place dans cette suite (en tant que leur validité est assurée), soit parce qu'elles sont des axiomes ou des théorèmes déjà prouvés, soit parce qu'elles peuvent être *déduites des précédentes par l'application d'une règle de déduction* essentiellement le modus ponens et les règles gérant les connecteurs et les quantificateurs. Par exemple :

- *Modus ponens* : Si A et $A \Rightarrow B$ sont deux propositions qui appartiennent à une démonstation formelle $\mathcal{D}$ alors la suite de propositions constituée de $\mathcal{D}$ suivie de B est une démonstration formelle de B.

  En fait dans la pratique, on utilise une règle plus générale que nous appellererons dans ce qui suit "Modus ponens généralisé". Il s'agit d'appliquer en une seule étape, la règle d'élimination du quantificateur $\forall$ et le modus ponens. Nous l'écrirons :

  $$\text{De } A(a_1, \cdots, a_n) \text{ et de } \forall d_1, \cdots, d_n\ [A(d_1, \cdots, d_n) \Rightarrow B(d_1, \cdots, d_n)],$$
  $$\text{on déduit } B(a_1, \cdots, a_n)$$

  EXEMPLE : *Démontrer que "le trinôme $x^2 - 5x + 7$ n'a pas de racine"* se fera par l'appli-

cation de la règle ci-dessus avec :
- pour tout a, b, c, si $b^2 - 4ac < 0$ alors le trinôme $ax^2 + bx + c$ n'a pas de racine
- $A(1\ ;\ -5\ ;\ 7)$: $(-5)^2 - 4 \times 1 \times 7 < 0$
- $B(1\ ;\ -5\ ;\ 7)$: le trinôme $x^2 - 5x + 7$ n'a pas de racine.

◦ *Généralisation* : Si on a une démonstration formelle $\mathcal{D}$ d'une formule $\phi(x)$ (ayant une variable libre x) alors la suite constituée de la démonstration $\mathcal{D}$ suivie de $\forall x \phi(x)$ est une démonstration formelle de $\forall x \phi(x)$. Que l'on généralise à plusieurs paramètres $x_1, \cdots, x_n$ en :

$$\text{De } \phi(x_1, \cdots, x_n), \text{ on déduit } \forall x_1, \cdots, \phi(x_1, \cdots, x_n)$$

EXEMPLE : *Dans tout triangle, les médiatrices sont concourantes.*
Par cette phrase, une proposition universelle est énoncée. Codée, elle s'écrirait : “Quelque soit le triangle, ...”. Pour la démontrer, le professeur prendra un triangle “quelconque” (i.e. sans propriété particulière présupposée) et fera la démonstration de l'existence d'un point de concours des médiatrices dans ce triangle. Il conclura alors que la propriété est démontrée pour tout triangle.

• **La démonstration formelle en « déduction naturelle »** :

La présentation des démonstrations en « déduction naturelle »permet de mettre l'accent sur les règles logiques relatives à l'utilisation des connecteurs logiques (l'implication, la conjonction, la disjonction). Cette définition des démonstrations formelles est due à Gerhard Gentzen. Son idée de départ était simple : remplacer les axiomes régissant les connecteurs par des règles de déduction afin de reproduire toutes les formes élémentaires et naturelles de raisonnement. Pour réaliser cette idée, Gentzen a développé un formalisme où les déductions ne sont pas des suites de phrases mais des arbres, dont la racine est la conclusion de la démonstration et les feuilles en sont les hypothèses tandis que les nœuds sont les règles de déduction (voir les exemples ci-dessous). Comme règles de déduction on dispose d'une part pour chaque connecteur $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ et pour chaque quantificateur ($\forall$, $\exists$) d'une règle d'*introduction* qui permet de déduire une formule selon son connecteur principal et d'une règle d'*élimination* qui permet d'utiliser une formule selon son connecteur principal ; d'autre part de la règle de l'absurde[1] (voir 3$^{\text{ième}}$ schéma ci-dessous). Par exemple :

- *Elimination de* $\Rightarrow$ (ou *modus ponens*) :

$$\frac{\begin{array}{c} H_1, \ldots, H_n \\ \vdots \\ A \Rightarrow B \end{array} \qquad \begin{array}{c} H_1, \ldots, H_n \\ \vdots \\ A \end{array}}{B}$$

Si sous les hypothèses $H_1, \ldots, H_n$ on peut d'une part déduire $A \Rightarrow B$ et d'autre part déduire A alors sous les hypothèses $H_1, \ldots, H_n$ on peut déduire B.

1. ou de la règle du tiers exclu ou encore de la règle de la double négation qui lui sont équivalentes.

- *Introduction de* $\wedge$:

$$\dfrac{\begin{matrix} H_1,\dots,H_n \\ \vdots \\ A \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} H_1,\dots,H_n \\ \vdots \\ B \end{matrix}}{A \wedge B}$$

Si sous les hypothèses $H_1,\dots,H_n$ on peut d'une part déduire A et d'autre part déduire B alors sous les hypothèses $H_1,\dots,H_n$ on peut déduire $A \wedge B$.

- *Elimination de* $\vee$:

$$\dfrac{\begin{matrix} H_1,\dots,H_n \\ \vdots \\ A \vee B \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} H_1,\dots,H_n, A \\ \vdots \\ C \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} H_1,\dots,H_n, B \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}$$

Si sous les hypothèses $H_1,\dots,H_n$ on peut déduire $A \vee B$ et si lorsque aux mêmes hypothèses on ajoute A on peut déduire C et qu'en outre, lorsque aux mêmes hypothèses on ajoute B on peut déduire C, alors sous les hypothèses $H_1,\dots,H_n$ on peut déduire C.
L'application de cette règle correspond à ce qu'on appelle “raisonnement par disjonction de cas”.

- *Règle de l'absurde* :

$$\dfrac{\begin{matrix} H_1,\dots,H_n,\neg A \\ \vdots \\ \perp \end{matrix}}{A}$$

Si sous les hypothèses $H_1,\dots,H_n$ et $\neg A$ on peut déduire $\perp$ c'est à dire une antilogie (une formule toujours fausse) alors sous les hypothèses $H_1,\dots,H_n$ on peut déduire A.
L'application de cette règle correspond à ce qu'on appelle “raisonnement par l'absurde”.

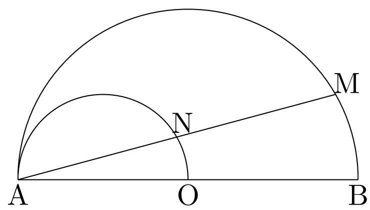
- *Introduction de* $\exists$ *:*

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix} H_1,\dots,H_n \\ \vdots \end{matrix}}{\phi(t)}}{\exists x\ \phi(x)}$$

Si sous les hypothèses $H_1,\dots,H_n$, on peut déduire $\phi(t)$ (la formule ϕ est démontrée pour le terme t) alors sous les hypothèses $H_1,\dots,H_n$ on peut déduire $\exists x\ \phi(x)$.
L'application de cette règle correspond dans la pratique au fait de construire un témoin pour démontrer une propriété d'existence.

Exemple : une démonstration en déduction naturelle présentée sous forme d'un arbre :

Soit $\mathcal{C}([AB])$ un cercle de diamètre $[AB]$, de centre O. Soit $\mathcal{C}([AO])$ le cercle de diamètre $[AO]$. Soit M un point sur $\mathcal{C}([AB])$ distinct de A et de B. (AM) coupe $\mathcal{C}([AO])$ en N. Montrer que N est le milieu de $[AM]$.



On construit l'arbre de démonstration suivant :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \text{Thm Thalès}\end{array} \qquad \begin{array}{c}\nabla\\ (ON)//(BM)\end{array} \qquad \text{Hyp : } O \text{ milieu de } [AB]}{N \text{ est le milieu de } [AM]}$$

où ∇ est le sous-arbre suivant :

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \text{Thm}\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \text{Thm}\end{array} \qquad N\in\mathcal{C}(AO)}{(ON)\perp(AN)} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \text{Thm}\end{array}\qquad M\in\mathcal{C}(AB)}{(BM)\perp(AM)} \qquad \dfrac{ANM \text{ alignés}}{(AN)=(AM)}}{(BM)\perp(AN)}}{(ON)//(BM)}$$

I.2 Chercher / rédiger-exposer une démonstration

Chercher et rédiger une démonstration sont deux démarches complètement différentes. Elles ne nécessitent pas les mêmes compétences. Par exemple, de nombreux théorèmes ont mis des années, voire des siècles à être établis, mais ensuite ils ne posent pas de gros problème pour être compris et exposés ; de même beaucoup d'élèves comprennent facilement les démonstrations faites par leurs professeurs, mais ils auront les plus grandes difficultés à résoudre les exercices où ils doivent effectuer eux-mêmes des démonstrations.

Que l'on représente une démonstration comme une suite ou comme un arbre d'énoncés, on peut dire que "rédiger/exposer une démonstration" revient à décrire cette suite (ou cet arbre) en partant des axiomes, des données du problème ou de résultats connus pour aller vers la conclusion ; tandis que "chercher une démonstration" consiste soit à deviner ces éléments soit à faire une recherche de la suite (de l'arbre) en commençant par la fin (la racine) et faire ce que certains appellent un "chaînage arrière".

Les élèves auront tendance à vouloir utiliser la première méthode puisque c'est celle qu'ils voient exposée par leurs professeurs dans leurs cours. Cela réussit souvent car, bien sûr dans beaucoup d'exercices posés au collège, la part réservée à la prise d'initiative est très réduite. Les exercices sont proposés dans un contexte bien spécifié et les données sont clairement posées. Mais cela ne réussit pas à tous les coups ! Apprendre à démontrer, c'est aussi affronter des démarches à plusieurs pas, imaginer les démarches intermédiaires, analyser l'énoncé à démontrer (retour sur les définitions des termes), rechercher les théorèmes à disposition ...
Par exemple :

- Si la proposition à démontrer est la conjonction de deux propositions, comme pour démontrer que Δ est une médiatrice, on fera deux démonstrations ;
- Si la proposition est une proposition universelle, comme pour démontrer que "tout triangle rectangle ...", on se donne un élément générique (ici un triangle rectangle quelconque) et on essaie de démontrer qu'il possède la propriété demandée ;
- Pour démontrer que deux droites sont parallèles, on pourra faire la liste des théorèmes qui permettent de conclure que deux droites sont parallèles. En confrontant les hypothéses de ces propriétés et les données du problème, on pourra déterminer quelle est celle qu'on choisira. On aura ainsi remonté d'un cran dans sa démonstration. Il restera alors à observer si les hypothèses

de la propriété sont des données ou si on peut les obtenir par une démonstration annexe.

Pour conclure ce paragraphe, disons qu'il n'y a pas de dichotomie entre les deux méthodes ; souvent c'est un mélange qui est utilisé pour la recherche de la démonstration : on commence par un chaînage arrière, pour terminer par des démonstrations directes des propriétés intermédiaires qui sont apparues ou l'inverse. Par contre, pour la rédaction de la démonstration, on va généralement des hypothèses vers la conclusion.

Remarquons qu'au lycée, il existe en plus des raisonnements spécifiques à tel ou tel domaine des mathématiques : par exemple lorsqu'on raisonne en arithmétique, une propriété universelle se démontre rarement en utilisant un élément générique, mais plutôt en faisant un raisonnement par récurrence.

I.3 La démonstration dans la pratique mathématique

Dans ce paragraphe, nous allons nous rapprocher un peu plus de la pratique de la démonstration en classe de mathématiques. D'une part en faisant une typologie des différentes démonstrations pratiquées (directe, par l'absurde, par contraposée, raisonnement par cas ...) et d'autre part en discutant le degré de rigueur qu'on peut demander à des collégiens si l'on ne veut pas trop les couper de leur façon naturelle de raisonner.

I.3.1 Le squelette logique des démonstrations

La démonstration, dans la pratique mathématique, est un discours, c'est à dire une suite d'énoncés mathématiques. Les énoncés, quoique ponctués de "formules mathématiques", sont formulés en langue naturelle. Néanmoins, leur enchaînement est contrôlé par une application *implicite* des règles de déduction, ce que l'on peut appeler le squelette logique de la démonstration [2]. En effet, dans une démonstration, on utilise soit des théorèmes, soit des énoncés obtenus par application du modus ponens (voir page 12) ou de la règle de généralisation, soit, pour des démonstrations un peu plus élaborées, des règles de la déduction naturelle. Il s'agit en quelque sorte de l'écriture linéaire d'une démonstration laquelle est essentiellement structurée en arbre.

Un des enjeux de l'apprentissage de la démonstration sera alors d'expliciter ce squelette logique, d'apprendre à repérer les formulations en langue naturelle qui jouent le rôle des règles de déduction en donnant le statut de démonstration au discours étudié ou construit.

On mesure ainsi l'importance du travail sur le langage qui permet de manipuler des énoncés mathématiques et également de les enchaîner dans les démonstrations.

I.3.2 Les types de démonstration

En plus de la démonstration directe (modus ponens), on utilise souvent une variété de démonstrations mathématiques : raisonnement par l'absurde, par contraposée, par disjonction de cas, utilisation de contre-exemples . . .Ces raisonnements reposent directement sur les règles

2. Qui est en fait un mixte de démonstration définie dans un système à la Hilbert et de démonstration définie en déduction naturelle.

de déduction ; les expliciter, en maîtriser les ressorts permet de mieux les dominer lorsqu'il s'agit de les comprendre, les produire ou les enseigner.

• **Le modus ponens ou démonstration directe** :

On utilise uniquement la régle d'élimination de $\Rightarrow$ dite aussi "modus ponens". On utilise une preuve ou un théorème de l'implication $A \Rightarrow B$ et une preuve ou une donnée de A pour conclure B.

• **Le raisonnement par l'absurde** :

On utilise une version un peu déformée de la règle de l'absurde. Mais essentiellement, ce que l'on appelle ainsi, c'est le fait de rajouter aux hypothèses $H_1, \ldots, H_n$ une hypothèse supplémentaire : la négation $(\neg A)$ de l'énoncé A que l'on veut démontrer. Le nouveau contexte d'hypothèses sera alors $H_1, \ldots, H_n, \neg A$. Si l'on en déduit une contradiction, alors, on peut conclure que dans le contexte $H_1, \ldots, H_n$, l'énoncé A est démontré.

Exemples :

1. *Dans un triangle ABC, les médiatrices d_1 et d_2 des côtés [AB] et [BC] sont sécantes.*
   Supposons que d_1 et d_2 ne soient pas sécantes, elles seraient donc parallèles. Puisque (AB) est perpendiculaire à d_1 alors, en utilisant un théorème du cours de sixième, on déduit que (AB) serait perpendiculaire à d_2.
   Or, (BC) est perpendiculaire à d_2 par construction. D'après un autre théorème du cours de 6ème, on peut en déduire que les droites (AB) et (BC) seraient parallèles.
   Comme B appartient aux deux droites, on peut conclure qu'elles seraient confondues.
   On a alors une contradiction avec l'hypothèse disant que ABC est un triangle.
   Ce raisonnement par l'absurde nous permet de conclure que d_1 et d_2 sont sécantes en un point que l'on peut nommer O.
2. *$\sqrt{2}$ n'est pas décimal.*
   La démonstration se fait en supposant que $\sqrt{2}$ est décimal. Posons : $\sqrt{2} = 1,141213562...a$ où a est la dernière décimale non nulle.
   On fait alors un raisonnement par cas suivant la valeur possible de a.
   Si $a = 1$, le produit $1,141213562...1 \times 1,141213562...1$ est un nombre décimal qui se termine par 1. Ce qui n'est pas possible.
   Si $a = 2$, le produit $1,141213562...2 \times 1,141213562...2$ est un nombre décimal qui se termine par 4. Ce qui n'est pas possible.
   Ainsi de suite. Aucune décimale n'est possible, ce qui contredit l'hypothèse : on conclut alors que $\sqrt{2}$ n'est pas décimal.

• **Le raisonnement par contraposée** :

Forme directe : Il consiste à utiliser ou démontrer un théorème de la forme $A \Longrightarrow B$, pour en conclure que $\neg B \Longrightarrow \neg A$.

Forme indirecte : Il consiste à utiliser ou démontrer un théorème de la forme $\neg B \Longrightarrow \neg A$ pour en conclure que $A \Longrightarrow B$.

Exemples :

1. *Soit un triangle ABC dont les côtés sont de longueurs respectives $BC = 11cm$, $AB = 5cm$, $AC = 7cm$. Démontrer que ce triangle n'est pas rectangle en A.*

On utilise la contraposée du théorème de Pythagore. De $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ on conclut que le triangle n'est pas rectangle en A.

2. *Démontrer que si p n'est pas divisible par 3, alors p n'est pas divisible par 12.*

   On utilise le fait que si p est multiple de 12 alors p est un multiple de 3.

3. *Soit la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ telle que f(1) = f(5) = f(-2) = 0. Que peut-on conclure ?*

   Sachant qu'un trinôme dont les coefficients ne sont pas tous nuls a au plus deux racines distinctes, on en déduit que $a = b = c = 0$

• **Le raisonnement par disjonction de cas** :

Il s'agit de partager le domaine auquel les éléments appartiennent, en plusieurs parties disjointes ; on montre alors que la propriété à vérifier est satisfaite sur chacune de ces parties.

Exemples :

1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2)$ est divisible par trois, (i.e. congru à 0 modulo 3).*

   Le raisonnement par disjonction de cas consistera à partager $\mathbb{N}$ en trois sous-ensembles (les classes de congruence modulo 3) et ensuite à montrer que lorsque l'on prend n dans n'importe laquelle de ces classe le résultat est obtenu.

2. *On considère 3 points A, B et M sur un cercle $\mathcal{C}$, avec M situé sur le grand arc AB. On veut démontrer que : $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{AMB}$ où O est le centre du cercle. (classe de troisième)*

   Pour cela on commence par construire C le point de $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à M. La démonstration se fait en distinguant trois cas : selon que le point C est A (ou B), que le point C est sur le grand arc AB ou qu'il est sur le petit arc AB

3. *Résoudre* $|x - 2| = |x + 6|$ se fera en distinguant trois possibilités, selon que $x \leq -6$, $-6 \leq x \leq 2$ ou $x \geq 2$

• **L'utilisation du tiers exclu** :

Il existe deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnel. Cet énoncé n'est pas du niveau du collège, mais il est très éclairant sur le rôle du "tiers exclu", lorsque l'on raisonne sur des propriétés existentielles. On y voit comment on accepte leur vérité sans pouvoir exhiber les éléments dont on veut affirmer l'existence.

On raisonne en étudiant les deux cas possibles pour $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Soit $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est rationnel, alors $a = b = \sqrt{2}$ donc on a trouvé deux irrationnels a et b tels que a^b soit rationnnel. Sinon on pose $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ et $b = \sqrt{2}$, alors $a^b = (\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$. On a finalement trouvé deux irrationnels (sans les exhiber) a et b tels que a^b soit rationnnel. On peut donc conclure que la propriété est vérifiée.

• **L'utilisation d'un contre exemple** :

Lorsque l'on veut démontrer la négation d'une propriété universelle, qui de fait devient une propriété existentielle, la démonstration se fait en exhibant un "témoin" (un "contre-exemple").

Exemples :

1. Pour infirmer que deux figures qui ont le même périmètre aient forcément la même aire, on pourra exhiber les deux rectangles " avec et sans le coin "(Figure 1).

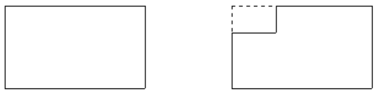


Figure 1

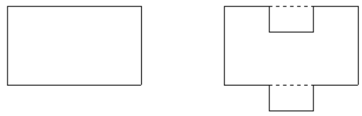


Figure 2

De même pour infirmer que deux figures de même aire aient le même périmètre, on peut exhiber les deux rectangles "avec un morceau déplacé " (Figure 2).

2. *Pour montrer que la "règle-élève"* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ *est fausse, le professeur pourra donner un contre-exemple. Par exemple :* $a = 1$ *;* $b = 2$ *;* $c = 1$ *et* $d = 2$

• **L'utilisation d'un cas générique** :

Lorsque l'on veut montrer une propriété universelle, on utilise un élément que dans certains ouvrages, on appelle "exemple générique". Remarquons que ce mot "exemple" peut porter à confusion et peut amener l'élève à croire qu'il peut faire une démonstation en visitant un certain nombre de cas où "ça marche".

I.3.3 La démonstration en numérique

• **Le point de vue logique :**

Lorsqu'on travaille en numérique, on admet implicitement (rarement explicitement) les propriétés de l'égalité et des opérations usuelles qui engendrent, via le Modus Ponens, les règles de calcul usuelles :

Propriétés de l'égalité :
- l'égalité est *réflexive* : "Pour tout x, $(x = x)$"
- l'égalité est *symétrique* "Pour tout x, y, $(x = y \Rightarrow y = x)$"(cela ne paraît pas nécessairement évident aux élèves pour lesquels le sens du calcul est privilégié.)
- l'égalité est *transitive* : "Pour tout x, y, z, $(x = y$ et $y = z \Rightarrow x = z)$"
- *règle de substitution* : " Si la proposition $\Phi(a)$ est vraie et si $a = b$ alors $\Phi(b)$ est vraie"

Propriétés des opérations :
- l'addition et la multiplication sont *associatives* (conséquence : on n'a pas besoin de parenthèses dans une suite d'opérations de même nature) :
"Pour tout x, y, z, $(x+y)+z = x+(y+z)$" ; de même "Pour tout x, y, z, $(x\times y)\times z = x\times(y\times z)$"
- la multiplication est *distributive* sur l'addition :
"Pour tout $a, b, c, a \times (b + c) = a \times b + a \times c$"
- les égalités sont stables à gauche et à droite par rapport à l'addition et la multiplication : "Pour tout a, b, c, $(a = b \Rightarrow a + c = b + c)$ et "pour tout a, b, c, $(a = b \Rightarrow a \times c = b \times c)$"
- à ces propriétés élémentaires il faut rajouter des propriétés acquises au cours des années comme la régularité des éléments non nuls (par lesquels on peut "simplifier"), ...

En conséquence, lorsque l'on manipule les équations pour les "résoudre", on fait des démonstrations au sens indiqué dans les premiers paragraphes de ce chapitre : en effet, on utilise les règles de l'égalité énoncées ci-dessus et d'autres démontrées, de la même façon qu'on utilise les règles pour les connecteurs logiques (rappelées au début de ce chapitre).

Exemple : Résoudre l' équation suivante : $x + 40 = 3x$

La rédaction attendue des éléves est présentée ci-dessous à gauche, sous forme d'une liste déquations qui n'est en fait qu'un raccourci de la démonstration complète dont l'arbre est donné à droite.

$x + 40 = 3x$
$x + 40 - x = 3x - x$
$40 = 2x$
$2x = 40$
$\frac{1}{2} \times x = \frac{1}{2} \times 40$
$x = 20$

$$\cfrac{\cfrac{\text{Régul.}\times\quad\cfrac{\text{Sym.=}\quad\cfrac{\vdots\quad\cfrac{\text{Régul.}+\quad x+40=3x}{x+40-x=3x-x}}{40=2x}}{2x=40}}{\frac{1}{2}\times x=\frac{1}{2}\times 40}}{x=20}$$

On remarque qu'il s'agit d'enchaîner une suite de propositions, à partir de l'équation à résoudre jusqu'à la dernière qui permet d'obtenir la solution. Ces propositions sont équivalentes (les équations ont les mêmes solutions). Toutefois, il n'est pas à l'ordre du jour de parler de condition nécessaire et suffisante aux élèves. On se contente alors de leur faire remarquer que toutes les étapes sont réversibles ou bien de leur faire vérifier que la valeur trouvée est bien une solution. Cette habitude est une sage précaution pour les cas où ils n'utiliseront que des conditions nécessaires, par exemple lorsqu'ils auront à résoudre des équations comme $\sqrt{2x^2 - 7} = x + 1$.

- **Démonstrations ou algorithmes ?**

La question souvent posée est celle de savoir si les activités faites dans le domaine du numérique relèvent de la démonstration.

Récapitulons les activités numériques qu'on pratique au collège : vérifier des égalités, développer et réduire ou factoriser des expressions, simplifier une expression ou une fraction, ... résoudre un problème pratique (choix d'une inconnue, mise en équation, résolution), résoudre des systèmes, calculer sur les écritures fractionnaires, calculer des pourcentages, faire des calculs trigonométriques, ... On pourrait dire que la plupart de ces activités relèvent plutôt de *l'utilisation d'algorithmes*, et de l'application de méthodes que de démonstrations. Mais en fait un algorithme est une démonstration simplifiée : on néglige les justifications permettant de passer d'une étape à la suivante. Par exemple, lors d'une résolution d'équation, il n'est pas exigé (et même déconseillé) de justifier chaque transformation d'équation par les règles de l'égalité et des opérations.

- **Résolution de problème**

Le raisonnement nécessaire à la résolution d'un problème obéit aux mêmes règles que celles utilisées dans les démonstrations. Lorsque l'élève fait des choix sur les méthodes à utiliser (pour des comparaisons de nombres, de fractions par exemple), lorsqu'il fait des choix d'inconnues, il fait une *activité de recherche de démonstration.*

Exemple : Exercice sur les équations du premier degré à une inconnue, d'après le brevet 2005 : *La somme de cinq nombres entiers pairs consécutifs est égale à 120. Quels sont ces cinq nombres ?*

Commentaire : Avant d'appliquer la technique apprise en cours (résolution d'une équation du premier degré à une inconnue), l'élève doit raisonner : il doit extraire de l'énoncé du problème deux propositions utilisables : « on cherche cinq nombres dont la somme est égale à 120 »et « ces nombres sont des entiers pairs consécutifs » ; il utilise ensuite implicitement la règle de

substitution pour passer de cinq inconnues à une seule ; il obtient alors une équation à une inconnue qu'il sait résoudre. Puis il doit conclure, puisque la solution de l'équation n'est pas la réponse à la question posée.
Remarquons que, de même que pour une démonstration en géométrie il peut y avoir plusieurs chemins pour arriver à la conclusion, il y a ici plusieurs façons de choisir l'inconnue principale (le terme le plus petit ou le terme central par exemple).

I.4 Démonstrations fausses, démonstrations partielles

Dans cette section nous allons donner quelques pistes de réflexion sur l'élaboration d'une recherche, d'une construction, de la formulation d'une démonstration par un collégien, un professeur, un chercheur, ...

Rappelons que ce qui est recherché, puis construit et enfin formulé n'est pas une démonstration (une preuve) au sens strict défini par les logiciens (section 1 de ce chapitre). Ce n'en est qu'un synopsis. Le respect scrupuleux de ce squelette logique est toutefois le moyen le plus sûr de développer une argumentation susceptible de convaincre le professeur, le correcteur, le lecteur, le "referee", que l'on serait capable d'écrire la preuve complète si le temps et l'espace ne nous étaient pas comptés.

Nous avons vu qu'une démonstration pouvait se structurer en modules (c'est la raison pour laquelle nous privilégierons la présentation en arbre). La structure à l'intérieur des blocs ou l'articulation des blocs entre eux se faisant par l'utilisation de règles ; pour nos exemples nous utiliserons le modus ponens que l'on notera MP, ou la règle d'introduction du $\exists$ ...

...que l'on représentera par :	*...que l'on lira ou rédigera par :*
$\dfrac{\begin{array}{cc}\nabla & \nabla\\ A & A \Rightarrow B\end{array}}{B}{\scriptstyle MP}$	Puisque l'on a A et $A \Rightarrow B$, on peut déduire B (par la règle du Modus Ponens)
$\dfrac{\begin{array}{c}\nabla\\ \Phi(a)\end{array}}{\exists x \Phi(x)}{\scriptstyle \exists}$	Puisque a vérifie la propriété ϕ, on peut déduire $\exists x\ \Phi(x)$

A l'instar d'une preuve formelle, une démonstration suppose que :

1. les points de départ (les feuilles de l'arbre) soient soit des axiomes, soit des données du problème, soit des théorèmes du cours (Pythagore, Thales, identités remarquables, ...), soit des lemmes (par exemple des résultats obtenus dans les questions précédentes) ;
2. l'articulation des blocs entre eux soit justifiée par une règle.

Exemple : reprenons la démonstration de la question suivante :
Soit $\mathcal{C}([AB])$ un cercle de diamètre $[AB]$, de centre O. Soit $\mathcal{C}([AO])$ le cercle de diamètre $[AO]$. Soit M un point sur $\mathcal{C}([AB])$ distinct de A et de B. (AM) coupe $\mathcal{C}([AO])$ en N. Montrer que

N est le milieu de $[AM]$.
dont l'arbre de démonstration est :

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \text{Thm Thalès}\end{matrix} \qquad \begin{matrix}\nabla \\ (ON)//(BM)\end{matrix} \qquad \text{Hyp : } O \text{ milieu de } [AB]}{N \text{ est le milieu de } [AM]}$$

où ∇ est le sous-arbre suivant :

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \text{Thm}\end{matrix} \qquad \dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \text{Thm}\end{matrix} \qquad N\in\mathcal{C}(AO)}{(ON)\perp(AN)} \qquad \dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \text{Thm}\end{matrix}\qquad M\in\mathcal{C}(AB)}{(BM)\perp(AM)} \qquad \dfrac{ANM \text{ alignés}}{(AN)=(AM)}}{(BM)\perp(AN)}}{(ON)//(BM)}$$

On peut imaginer, alors une rédaction du style :
≪ Nous allons montrer d'une part que $(ON) \perp (AN)$ et d'autre part que $(BM) \perp (AN)$ [...]. Nous pouvons en déduire, en utilisant le théorème ..., $(ON)//(BM)$.
Sachant que O est le milieu de $[AB]$, en appliquant le théorème de Thalès, nous avons le résultat. ≫

Très souvent, l'élève est dans le cas simple où, par le biais de questions, on lui a donné une structure de preuve ; il ne lui reste plus qu'à relier les questions entre elles pour en faire une démonstration et ensuite la rédiger. On ne lui demande pas de citer les règles appliquées et pas toujours les théorèmes utilisés (surtout lorsqu'ils n'ont pas de nom spécifique). Mais le travail de démonstration est aussi celui où l'on ne suggère pas la structure de la démonstration par des questions préalables. Les difficultés commencent lorsqu'il est nécessaire de trouver des résultats intermédiaires à ajouter aux données (hypothèses du contexte) et aux théorèmes du cours pour obtenir la propriété visée.

Démonstration complète :

$$\dfrac{\begin{matrix}\text{Données}\\ \nabla \\ \text{Propr. interm.}\end{matrix} \qquad \text{Thm}}{\text{Propriété}}\,\mathcal{R}$$

Démonstration partielle :

$$\begin{matrix}\text{Données}\\ \vdots\,? \\ \text{Prop. interm.} \qquad \emptyset \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{Propriété}\end{matrix}$$

Ce qu'on obtient, dans le meilleur des cas, ce n'est pas l'objet de gauche, mais plutôt celui de droite, où le passage des données à des résultats n'est pas justifié, où les théorèmes utilisés ne sont pas énoncés, ... ; ceci est remplacé par l'utilisation de "donc" souvent très abusifs.

Que doit-on penser des objets représentés par l'arbre de droite, qui ne ressemblent que très vaguement à une démonstration ?

Nous préférons les qualifier de démonstrations partielles pour bien marquer la différence avec les "démonstrations fausses".

- par "démonstrations fausses" nous entendons les productions d'élèves n'ayant pas encore assimilé ce qu'est une démonstration, i.e. principalement lorsque les règles de déduction n'ont pas encore été assimilées et qu'ils effectuent des raisonnements circulaires, appliquent la règle de généralisation alors qu'ils n'ont à leur disposition que des exemples de "cas qui marchent", utilisent des "théorèmes-élèves", ...

- par "démonstrations partielles" nous entendons les démonstrations dont l'arbre est correct, mais dans lequel, comme ci-dessus à droite, certains blocs ne sont pas explicités (volontairement ou involontairement), et les règles appliquées pour relier les modules ne sont pas données. Si l'on analyse une démonstration dans n'importe quel livre de mathématiques, à quelque niveau que l'on se place, c'est exactement ce que l'on trouve. En particulier, les règles utilisées sont très rarement rappelées et, principalement, certaines étapes intermédiaires sont omises, étant considérées comme triviales. Il n'y a rien à redire, car sinon les démonstrations seraient illisibles par un humain ordinaire. Cependant, se pose alors la question :

Quel niveau d' implicite peut-on admettre dans une preuve, de la part d'un collégien, d'un lycéen, d'un étudiant ?

Pour répondre à cette question, reprenons ce que nous avons dit en commençant cette section : une démonstration complète a pour but d'établir la véracité de la proposition à laquelle on s'intéresse ; une démonstration partielle a pour but de convaincre son interlocuteur que l'on serait capable d'écrire une démonstration, i.e. de remplir toutes les cases vides. Tout se passe comme si le rédacteur d'une preuve était prêt, comme un élève en train de passer à l'oral une épreuve de mathématiques, à compléter à la demande les parties manquantes. L'interrogateur se contenterait de demander à l'élève seulement quelques points pour se convaincre, le professeur accepte des parties non justifiées pour juger la preuve correcte et accorder une bonne note, le spécialiste est convaincu que la démonstration de la conjecture de Fermat est maintenant établie après avoir vérifié les points qui lui semblaient sujet à caution, ...

Cette prise en compte des démonstrations partielles permet alors aux professeurs, du collège à l'université, de moduler les notes données aux démonstrations de leurs élèves.
De plus, nous pensons que l'objet "démonstration partielle" n'est pas seulement utile dans le cadre de l'évaluation mais qu'il peut intervenir à différents stades de l'apprentissage :
- Il permet de différencier la recherche d'une démonstration qui peut se voir comme une construction de bas en haut de l'arbre de démonstration, de la rédaction d'une démonstration qui peut se voir comme une lecture du haut en bas d'une démonstration.
- Il permet de faciliter le côté expérimental d'une recherche de preuve : ≪ je veux démontrer B, j'essaie parmi les théorèmes que je connais et qui se présentent sous la forme $A \Rightarrow B$, ceux pour lesquels mes données me permettent directement d'avoir A, ou bien je cherche si je ne pourrais pas obtenir A à partir des données et théorèmes que je possède ≫.
- Il permet d'inciter l'élève à faire lui-même ses expérimentations. L'élève a intêret à prendre conscience que la démonstration faite en cours par un professeur est une activité (principalement de lecture de l'arbre de haut en bas), très différente de l'activité "recherche d'une démonstration" (construction de l'arbre de bas en haut). Se contenter d'essayer de refaire ce qu'à fait le professeur est certes utile, mais pas suffisant.
- Il permet la valorisation par le professeur d'une telle recherche même si elle n'a pas complètement abouti, même si elle ne pouvait pas aboutir !

Chapitre II

Activités

II.1 Motiver la démonstration

En géométrie, il est important de conduire le plus tôt possible une réflexion sur le statut des différentes propriétés qui apparaissent sur les figures : certaines sont le résultat d'une action délibérée et de l'utilisation de l'instrument de géométrie ad hoc (ce sont celles qui font partie des "données") ; d'autres sont des conséquences des premières, conséquences qui dépassent largement le résultat direct des actions effectuées.

Motiver la démonstration consiste dans ce domaine à attirer l'attention des élèves sur cette question : « Comment se fait-il qu'apparaisse telle propriété remarquable sur la figure sans qu'on l'ait fait exprès ? », ce que nous appellerons "la question du pourquoi".

Pour cela, il faut d'abord que les élèves distinguent cette propriété des propriétés spécifiques à la figure qu'ils ont faite et qu'ils découvrent son caractère de généralité. Ceci a peu de chance de se produire s'ils ne disposent pas de plusieurs figures différentes réalisées à partir du même énoncé. Dans ce but, on peut utiliser les productions de l'ensemble de la classe à condition de pouvoir les rendre visibles à chacun, on peut aussi travailler sur un logiciel de géométrie dynamique qui permet justement d'obtenir instantanément de multiples exemplaires de la figure.

D'autre part, une fois cette propriété perçue, il faut qu'elle reste distinguée de celles qui font partie de la construction à partir des données. Ce n'est pas si évident dans la pratique, dans la mesure où, sur la figure terminée, toutes les propriétés se retrouvent au même niveau *lorsque l'on en reste à la perception.* C'est ici que le codage des données intervient pour rendre visible l'historique de la figure (cf nos activités : Une figure, plusieurs histoires (1) et (2) (II.1 et II.1).

Une fois que la question du "pourquoi" est ainsi bien mise en scène, le besoin d'y répondre est ressenti très fortement dans la classe : les élèves éprouvent un vrai besoin d'explication. On peut satisfaire ce besoin d'explication ou au contraire le frustrer (cf notre activité : Le Carré malgré lui II.1). Mais sa rencontre répétée, dès les petites classes (cycle III du Primaire, Sixième), nous paraît constituer une étape indispensable pour motiver l'exercice de la démonstration.

La même analyse peut être faite concernant la démonstration en numérique. Nous nous sommes placés du point de vue géométrique de façon à avoir des exemples plus parlants. On trouvera une activité dans le domaine numérique sur la création de conjectures (Conjecturer en numérique II.3).

Il est peut-être plus difficile de motiver les élèves au "pourquoi ça marche" à une époque où parents et enfants, nous utilisons tous les jours des appareils de plus en plus sophistiqués que l'on sait faire marcher sans qu'on en comprenne le fonctionnement (un enfant excelle dans la manipulation de la souris d'un ordinateur).

La motivation de la démonstration est donc un exercice difficile ; par exemple, les élèves n'auront aucune difficulté à appliquer l'algorithme d'Euclide pour calculer le *pgcd* de deux nombres sans comprendre "pourquoi ça marche". Si cette explication (démonstration) leur est donnée plus tard, ils diront qu'ils n'en ont rien à faire car cela fait longtemps qu'ils l'utilisent ! On rencontre ce type de réaction depuis l'entrée en sixième concernant une grande quantité de connaissances fréquentées à l'école primaire sans démonstration, jusqu'à l'arrivée à l'université où les étudiants renaclent à démontrer des résultats sur les limites de suites qu'ils ont déjà utilisés maintes fois au lycée par exemple.

Dans les activités proposées, nous nous sommes attachés à faire émerger des situations surprenantes où il demeure un doute soit sur la véracité de ce que l'on observe, soit sur les raisons qui l'ont provoqué ; ces situations font apparaître des invariants en situation de variabilité et demandent de les comprendre (II.1, II.1).

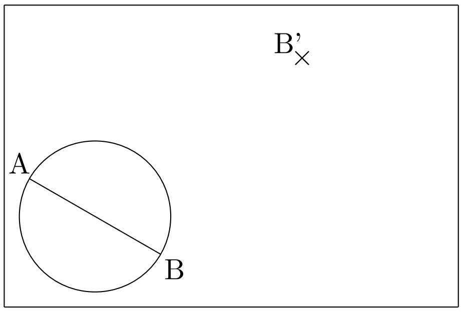
Une autre direction pour motiver la démonstation est de proposer une pratique de "type expérimental". On peut déjà remplacer certaines questions du type : "Démontrer que ... ", par des questions du type : "Est-ce que ... ?" avec des réponses alternativement positives et négatives (cf. notre analyse du sujet du brevet 2007 en annexe II.3 et II.3). Pour aller plus loin, on peut aussi étudier un phénomème graphique ou numérique comme le ferait une autre science expérimentale, identifier la causalité à l'œuvre, produire une conjecture, faire d'autres expériences pour la conforter ou l'invalider. Par rapport aux autres sciences qui n'ont que l'expérience pour valider leurs conjectures, en mathématiques la démonstration viendra de surcroît. Mais sans la phase expérimentale, les élèves risquent de produire des pseudo-démonstrations correspondant d'avantage à un exercice scolaire ou à une demande du professeur qu'à une compréhension personnelle des mécanismes en jeu. (cf nos activités : *le carré malgré lui II.1* ; *Le Cerf-volant caché II.1*, *Les aventuriers de la règle perdue(1) et (2) (II.3 et II.3*)

Une figure, plusieurs histoires

Fiche-Elève n°1

Voici un problème :

Dans la figure ci-dessous, le cercle donné a pour diamètre le segment [AB] ; la symétrie de centre I transforme A en A' et B en B'. On a perdu le centre des cercles, le centre I de la symétrie, le point A' et la figure symétrique du cercle donné. Construis-les et code les actions que tu as faites.



Voici deux figures qui montrent deux solutions différentes :

Figure n°1 :

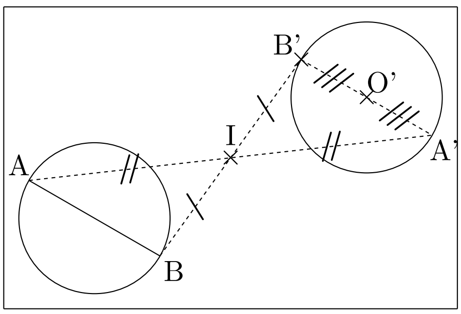
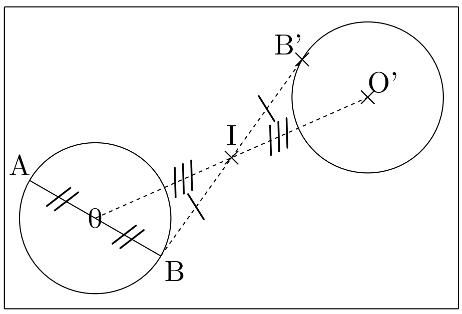


Figure n°2 :



Ces figures sont codées. Le codage montre comment on a retrouvé les éléments perdus du problème et comment on est arrivé à construire le cercle symétrique du cercle donné.

Voici ce que tu dois faire :

1. Programmes de construction :

Pour chaque figure, raconte la construction du cercle symétrique du cercle donné en combinant des phrases choisies parmi les phrases données page suivante. Présente ta réponse comme un programme de construction en allant à la ligne pour chaque nouvelle action.

Une figure, plusieurs histoires

Fiche-Elève n°2

Voici la liste de phrases :

- Je place le point O (centre du cercle donné) au milieu du segment [AB].
- Je place le point O' (centre du cercle image) au milieu du segment [A'B'].
- Je place le point I (centre de la symétrie) au milieu du segment [BB'].
- Je construis le point O' symétrique de O par rapport à I.
- Je construis le point A' symétrique de A par rapport à I.
- Je trace le cercle de centre O' passant par B'.

Programme de la figure n°1 :

....
....
....
....

Programme de la figure n°2 :

....
....
....
....

2. <u>Justification des deux constructions</u> :

Pour chacune des constructions précédentes, choisis parmi les propriétés de la symétrie centrale rappelées ci-dessous celle qui permet de la justifier. Recopie-la ci-dessous.

- Théorème : Dans une symétrie centrale, le centre du cercle d'arrivée est le symétrique du centre du cercle de départ.
- Théorème : La symétrie centrale conserve les milieux.

La construction de la figure n°1 est justifiée par la propriété :

....
....

La construction de la figure n°2 est justifiée par la propriété :

....
....

Une figure, plusieurs histoires

Intention des auteurs

Une figure papier une fois terminée, son histoire disparaît : toutes ses propriétés se trouvent ramenées au même niveau, celui de propriétés qu'on perçoit. La figure est là, devant nous, comme si elle existait de toute éternité ; le temps est aboli et, avec lui, toute idée de cause et de conséquence. Dans ces conditions, il est difficile pour un élève de comprendre ce que l'énoncé veut dire lorsqu'il lui demande de démontrer certaines d'entre elles.

En réalité, la figure à analyser est inséparable de son histoire. Un logiciel de géométrie dynamique, grâce à la fonction dénommée "Historique" justement, permet à tout moment de revoir en accéléré, de clic en clic, toutes les étapes de la création d'une figure présente à l'écran. Pour les figures papier, c'est le codage qui constitue le moyen le plus efficace de restituer cet historique aux élèves et d'ouvrir tous les questionnements qui motivent la démonstration.

L'activité proposée met en scène le rôle du codage pour retrouver l'histoire d'une construction en proposant deux codages différents pour une même réalisation finale (il s'agit de la construction de l'image d'un cercle par symétrie centrale). Les élèves sont amenés ensuite à identifier la propriété principale de la symétrie qui est à l'oeuvre dans chaque construction et à constater que ce n'est pas la même. Cette étape constitue une initiation à la démonstration dans la mesure où elle met en évidence que certaines connaissances sont utiles pour justifier les propriétés d'une figure que l'on construit ou qui nous est donnée.

D'autre part, dans cette activité, les propriétés de la symétrie centrale ne sont pas seulement des constats, des descriptions ; elles servent à résoudre un problème de géométrie. Ceci constitue un exemple de problématisation des connaissances géométriques que le lecteur pourra multiplier. Les lignes suivantes du Document d'application du Cycle III du Primaire évoquent cet enjeu : ≪ Les activités du domaine géométrique ne visent pas des connaissances formelles (définitions, propriétés), mais des connaissances fonctionnelles, utiles pour résoudre des problèmes ≫. Ces objectifs restent pertinents au collège.

Déroulement possible

Après avoir distribué les fiches aux élèves, l'enseignant attire leur attention sur le fait qu'ils n'ont pas à résoudre eux-mêmes le problème présenté en haut de la première fiche (il y a fort à parier que malgré cette mise en garde, certains s'y engageront tout de même ...). En effet, le problème est déjà résolu sur la fiche, et même deux fois : on est arrivé à la solution par deux démarches différentes. Leur première tache est un travail d'enquête à propos de ces solutions : reconstituer dans quel ordre les actions ont été faites, en utilisant comme indices le codage des figures.

Les élèves écrivent le programme de construction de chaque figure. Ce travail peut être donné individuellement ou par équipe de deux. Dans ce dernier cas, les élèves se mettront d'accord sur une chronologie avant d'écrire, chacun, le programme. Aux élèves en difficulté ou qu'on voit commettre des erreurs de chronologie, on peut suggérer d'exécuter eux-mêmes leur programme au fur et à mesure, au brouillon ou sur leur cahier. On peut aussi attirer leur attention sur l'indice supplémentaire que constitue le nombre de petites barres du codage d'égalité de longueurs.

Une mise en commun permet de s'assurer que tous sont arrivés à un programme comportant les phrases pertinentes dans un ordre pertinent. Pour la seconde figure, il est indifférent de commencer par le placement de O ou par celui de I.

Dans la seconde partie de l'activité, pour la justification de chaque construction, nous avons proposé uniquement les théorèmes qui distinguent les deux solutions.
Pour conclure, l'enseignant pourra demander : ≪ Quelles sont les propriétés utilisées qui justifient aussi bien l'une que l'autre des deux constructions ? ≫ ; ≪ Quelle est la propriété qui n'est utilisée que pour la première construction ; celle qui n'est utilisée que pour la seconde ? ≫.

Enfin, il insistera sur le fait que le codage a permis de distinguer deux histoires différentes pour une même figure, deux histoires auxquelles correspondent des idées différentes et des agencements différents de ces idées. Il faudra s'en souvenir pour d'autres exercices où ce n'est plus " construire " qui sera demandé, mais " démontrer ".

Compte-rendu de l'activité

L'activité présentée ici a été conduite à partir de fiches élèves un peu différentes : dans la phase de justification, figuraient davantage de propriétés, notamment la définition ponctuelle de la symétrie centrale.

La séance a lieu en septembre lors d'un cours d'une heure. La classe comporte 22 élèves et le collège est classé en ZEP. Dans les dialogues qui vont suivre, le professeur sera désigné par P et les élèves par E.

Le professeur distribue la fiche élève et la projette en simultané. Il précise que ce travail ne sera pas noté et ne sera pas non plus au prochain contrôle. Les élèves sortent leurs affaires et s'installent.
Le professeur présente le travail comme un exercice sur la symétrie centrale. Un élève lit l'énoncé du problème.
P : ≪ Il y a deux solutions d'élèves, on va les lire. ≫
Un élève lit donc les solutions et le professeur explique qu'il va falloir utiliser les phrases de la première page et les remettre en ordre pour reconstituer le programme de construction de la première figure, puis celui de la deuxième figure. ≪ C'est comme un puzzle. ≫
Quelques élèves ne comprennent pas la consigne, le professeur explique une seconde fois le travail attendu.
Silence dans la classe, les élèves commencent leur recherche. Un élève arrive en retard et bénéficie d'une ré-explication personnelle.

Au bout de 5 minutes le professeur reprend la parole afin d'aider les élèves ayant du mal à

démarrer.
P : « On va choisir la première phrase ensemble, qui peut me dire la première chose à faire ? »
E : « On construit les pointillés pour mettre le point I. »
P : « Ca correspond donc à la phrase n°3. Maintenant vous cherchez les suivantes. »
Un second élève arrive en retard et bénéficie également d'une ré-explication personnelle.
Un élève demande la parole : « Monsieur j'ai pas compris. Qu'est-ce qu'on fait après ? »
P : « Qu'est-ce que tu placerais sur le dessin après le point I ? »
E : « Le point A' ... »Le professeur aide alors l'élève qui trouve la deuxième réponse.
P : « Maintenant tu passes à la suite. »
Le professeur passe dans les rangs pour répondre à des questions de manière personnalisée.

Au bout d'une dizaine de minutes, certains élèves commencent à bavarder, immédiatement repris par le professeur.
Un autre élève, complètement désintéressé du travail à faire, est invité par le professeur à réfléchir sur un autre travail.

Le professeur laisse encore cinq minutes de travail en autonomie puis corrige.
P : « Tout le monde regarde par là, on corrige ensemble. Qui me donne la phrase suivante ? »
E : « On peut construire A'. »
Le professeur valide la réponse, l'écrit au tableau et attend la suite.
E : « On place O' au milieu de $[A'B']$. »
Le professeur écrit cette réponse et la fin de la première construction au tableau.
Ensuite, les élèves doivent chercher le programme de construction de la deuxième figure.

Le professeur laisse cinq minutes, passe dans les rangs pour aider les élèves en difficulté et encourage ceux qui ont abandonné à reprendre leur recherche. Les élèves sont dans l'ensemble calmes et studieux. Le professeur corrige alors la seconde figure.
P : « Deuxième figure, je la corrige, il faut que j'avance. Alors qu'est-ce que je fais ? »
Un élève donne les réponses et le professeur écrit les quatre étapes au tableau.

9h32 : Un élève lit la consigne de la deuxième partie.
P : « Dans l'énoncé des deux théorèmes, c'est-à-dire des deux propriétés, il n'y a pas un truc qui cloche ? »
P : « La conservation des milieux n'est pas écrite dans le cours. On va donc l'admettre pour cette activité. »
P : « Essayez de voir pour chaque figure s'il y a une propriété utilisée pour chaque étape. »
Le professeur donne alors un exemple : pour la figure 1, pour la première étape, on utilise la propriété 1.
E : « Je n'ai pas compris. »
Le professeur fait une ré-explication plus détaillée en ajoutant que certaines étapes n'auront pas de propriété associée.

Le professeur laisse quelques minutes de réflexion aux élèves, mais devant l'inactivité générale, il reprend la parole : « On va faire la première figure ensemble parce que j'ai l'impression que certains n'ont pas compris ce que je demande. »

La correction est donc écrite au tableau : pour l'étape 2, pas de propriété ; pour l'étape 3, on utilise la propriété 3 ; pour l'étape 4, pas de propriété.
P : « Tout le monde a suivi ? »
Des élèves répondent : « Non. »
Le professeur reformule la correction et répond aux questions des élèves. Mais un certain nombre d'élèves ne semblent toujours pas convaincus. Le professeur ré-explique donc une nouvelle fois.

Le cours devant se terminer bientôt, le professeur corrige la justification pour la deuxième figure.
E : « Pour l'étape 1, propriété 1 comme pour la figure 1. »
P : « Si vous deviez inventer une propriété qui n'est pas dans la liste pour l'étape 2 ? »
E : « Le milieu du diamètre sera le centre du cercle. »
Le professeur corrige, avec l'aide des élèves, les deux dernières étapes.
Le professeur fait un point sur le travail à faire pour la séance suivante.
La cloche sonne, fin du cours.

Bilan, discussion de certaines modalités, alternatives, suites

Avec la première version de la fiche élèves beaucoup d'élèves ont cherché à justifier le programme de construction par une propriété pour chaque étape, ce qui n'était pas possible. Donc nous avions à choisir entre proposer une propriété pour chaque étape ou ne conserver que celle qui donne l'idée générale de la construction. Pour ne pas ajouter une sophistification inutile qui empêche les élèves d'avoir une vision globale des deux démarches nous avons choisi la deuxième alternative.

Le carré malgré lui

Voici le programme d'une construction à partir du triangle ABC de la figure n°1 ci-dessous :

1. Tracer la perpendiculaire à (BC) passant par A ;
2. Placer D le point d'intersection de cette droite avec (BC) ;
3. Tracer la perpendiculaire à (AB) passant par A ;
4. Placer E le point d'intersection de cette droite avec (BC) ;
5. Tracer la perpendiculaire à (AE) passant par E ;
6. Placer F le point d'intersection de cette droite avec (AD) ;
7. Tracer le segment $[BF]$.

Réaliser le film de cette construction avec une image par étape, en commençant à l'image n°2 ; coder toutes les actions réalisées :

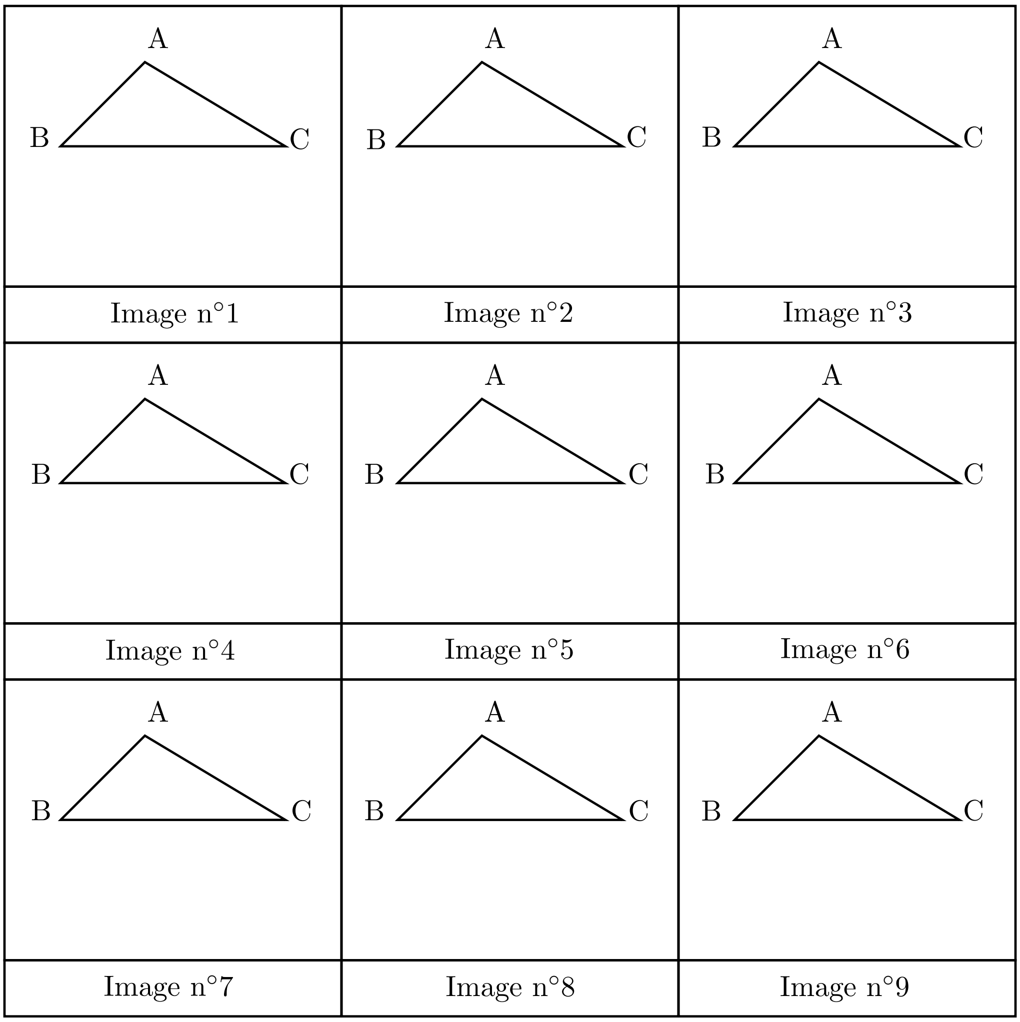


Image n°1 Image n°2 Image n°3

Image n°4 Image n°5 Image n°6

Image n°7 Image n°8 Image n°9

Le carré malgré lui (suite)

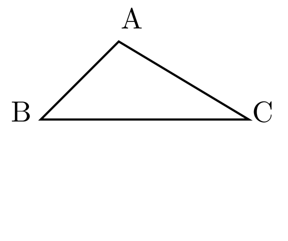


Image n°1

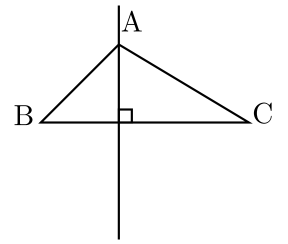


Image n°2

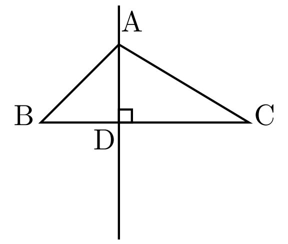


Image n°3

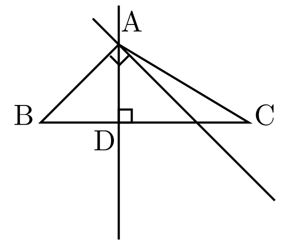


Image n°4

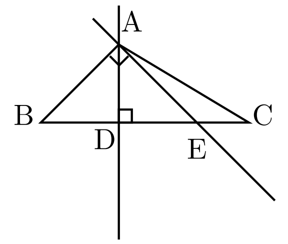


Image n°5

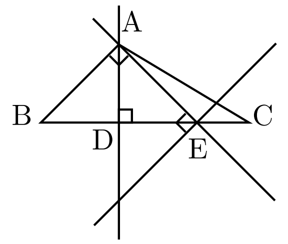


Image n°6

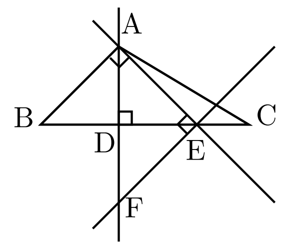


Image n°7

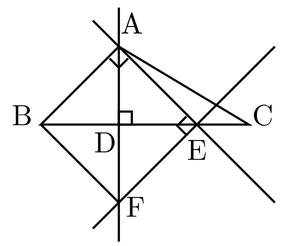


Image n°8

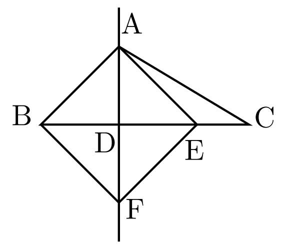


Image n°9

Etude du quadrilatère $AEFB$:

Est-ce que tous les côtés ont la même longueur ? ....
....
Est-ce qu'on l'a fait exprès ? ....
....
Est-ce que tous les angles sont droits ? ....
....
Est-ce qu'on l'a fait exprès ? ....
....
Quelle est la nature du quadrilatère $AEFB$? ....
....

Aura-t-on toujours cette sorte de quadrilatère en partant d'un triangle ABC quelconque ?

Le carré malgré lui

Intention des auteurs

Dans l'activité "Une figure, plusieurs histoires", les élèves ont été sensibilisés au codage comme moyen de lire l'historique de la construction sur une figure. Dans la présente activité, c'est un autre volet de l'intérêt du codage qui est présenté : il permet de visualiser les données à partir desquelles une démonstration pourra être recherchée. C'est en ce sens que le carré de cette activité est "un carré malgré lui" : les longueurs des côtés n'ont pas été mesurées à la règle graduée ni reportées au compas et seuls deux des quatre angles ont été codés droits. Comment se fait-il qu'on obtienne un carré "alors qu'on ne l'a pas fait exprès" ? Ce débat pose la question de la causalité à l'œuvre dans la configuration obtenue. Et cette question trouve un écho chez les élèves car le dispositif lui donne une grande visibilité.
En fait, les élèves devront découvrir que sans la présence d'un angle de 45° dans le triangle initial, le quadrilatère obtenu n'est pas un carré mais un trapèze rectangle. Ils ne pourront expliquer pourquoi. Ceci constitue une forme de frustration. Néanmoins, ils auront pu explorer la part de variabilité de la figure et découvrir la cause du phénomène observé. Ces étapes constituent une motivation naturelle à l'exercice de la démonstration.

Déroulement possible

Les deux fiches élèves proposées ci-dessus correspondent à une conduite de l'activité où les élèves agissent *en géométrie classique avec les instruments*. Comme on le verra dans le compte-rendu, cette option peut amener des difficultés techniques avec certains élèves ou dans certaines classes ; l'aspect "introduction à la démonstration" devient alors difficile à mettre en avant par manque de temps ou perte de motivation. Une autre possibilité consiste à travailler en géométrie dynamique.

La première fiche élève propose la réalisation d'un programme de construction, sous la forme d'un "film". Dans ce procédé, la figure apparaît image par image : à chaque nouvelle instruction du programme, un nouvel élément s'ajoute à la figure. L'historique de la figure reste donc visible contrairement à ce qui se passe dans une construction classique. De plus, les élèves doivent coder toutes les actions qu'ils ont effectuées (il s'agit uniquement d'angles droits et d'intersection de droites) pour en avoir une conscience plus nette : il faut insister et vérifier qu'ils le font effectivement.

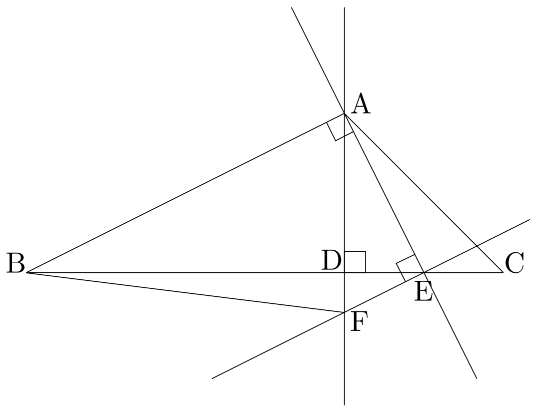
A partir de là, un questionnement est possible sur le résultat obtenu à la dernière image. Ce résultat est en effet surprenant dans la mesure où un carré apparaît sans qu'il ait été construit volontairement. Pour les élèves qui ne reconnaissent pas le carré "posé sur la pointe", on rappelle la définition du carré et les moyens de vérification aux instruments.

C'est le moment de distribuer la deuxième fiche élève (il est préconisé de garder au moins vingt minutes pour la suite). Le corrigé permet tout d'abord de récupérer les élèves en difficulté. On demande à tous de répondre aux quatre premières questions, ce qui relance l'ensemble de la classe sur la recherche de la causalité à l'œuvre dans la configuration obtenue : « Comment se fait-il qu'on obtienne un carré alors qu'on ne l'a pas fait exprès ? ≫

Malgré leur désir d'explication, les élèves sont démunis pour répondre. La dernière question de la fiche oriente la recherche en posant la question d'une façon qui permette l'action : "Est-ce qu'on aura toujours cette sorte de quadrilatère en partant d'un triangle ABC quelconque ?". On invite les élèves à expérimenter : ils peuvent réaliser plusieurs figures.

Cette étape de l'activité requiert beaucoup de temps dans la version "papier". Par contre, la géométrie dynamique permet de modifier le triangle initial sans avoir à refaire complètement la figure (voir un tel déroulement dans le deuxième compte-rendu ci-dessous). Le premier résultat est que lorsqu'on change la forme du triangle ABC, le quadrilatère $AEFB$ est en fait rarement un carré ! Il faudra une longue discussion pour que la cause manquante soit trouvée : le quadrilatère $AEFB$ est un carré seulement si l'angle $\widehat{ABE}$ mesure 45° (ou "la moitié d'un angle droit" niveau fin de cycle III) ; sinon, c'est un simple trapèze rectangle.

Avec cette découverte, on est au terme de l'activité pour une classe de sixième. On dit aux



élèves qu'il resterait à expliquer en détail comment la présence d'un angle de 45° dans le triangle de départ transforme le trapèze en carré : ce travail s'appelle "faire une démonstration" et il faudra attendre la classe de cinquième pour pouvoir le faire.

Compte-rendu d'observation en classe

• *Premier compte-rendu (géométrie classique).*

L'observation a eu lieu dans une classe de 6ème du collège ZEP Vincent Scotto. L'activité n'a pas pu arriver à son terme et notamment au point crucial : la nature du quadrilatère.

Les élèves ont eu beaucoup de mal avec le programme de construction, tracer une perpendiculaire passant par un point n'était pas une technique acquise dans la classe. Ce point de technique a retenu toute leur attention jusqu'à la fin de l'heure ; seulement une partie des élèves sont arrivés au bout du programme de construction, d'autant plus qu'il faut tout retracer depuis le début à chaque nouvelle image. Le professeur a abordé sur le gong de la sonnerie, la question de la nature du quadrilatère. Mais les élèves absorbés par la construction n'ont pu s'en détacher et envisager d'autres réalisations avec une configuration de départ différente.

• ***Deuxième compte-rendu (géométrie dynamique).***

La classe comporte une vingtaine d'élèves du collège ZEP Pont de Vivaux.
L'activité est basée sur un logiciel de géométrie dynamique (GéoGébra) ; aussi le professeur avait au préalable fait une séance pratique sur ordinateurs pour apprendre aux élèves à manipuler le logiciel.

Préparatifs à la séance :
Le professeur (que l'on nommera P.) dispose dans sa classe d'un "chariot mobile" contenant douze ordinateurs ; il avait pris soin la veille de vérifier le bon état de marche des appareils (en particulier s'ils étaient bien chargés ...).
Avant le cours, il a envoyé le fichier Géogébra de la figure de départ (celle avec l'angle de 45°) sur le compte de chaque élève via le réseau intranet du collège ; il a photocopié la fiche-élève (contenant en particulier les questions posées aux élèves) afin de la distribuer et il a installé le vidéo-projecteur raccordé à son portable, afin d'une part de donner quelques explications supplémentaires sur le fonctionnement de Géogébra à ceux qui n'auraient pas tout assimilé, et d'autre part de projeter la figure en fin de séance ; cela permettra alors à toute la classe de participer à l'activité en conjecturant.

La séance :
- Distribution des ordinateurs (un par binôme) - Démarrage de leur session par chaque binôme - Distribution de la fiche aux élèves - Lecture à haute voix par un élève volontaire de la fiche - prise en main de la figure proposée par le professeur.
P. doit parer aux incontournables mots de passe perdus, ... au bout de 20 min, tout le monde est opérationnel !
Le démarrage est difficile pour la construction de la figure : P. est dans l'obligation de montrer à certains, à l'aide du vidéo projecteur, quels "boutons" Géogébra utiliser pour construire une perpendiculaire, pour afficher les angles droits, ... ; il doit aussi répondre à des questions surprenantes comme : « comment on fait pour faire danser la figure ? »
Au bout de 35 min, le professeur demande aux élèves qui n'ont pas fini, d'arrêter leur construction et de suivre la suite sur l'écran.
P. pose alors aux élèves les questions de la fiche. Pour « Est-ce qu'on l'a fait exprès ? », la classe est partagée approximativement en deux. P. rétablit la situation par un jeu de questions-réponses : « Est-ce que tu as utilisé l'icône "perpendiculaire" en F ? »etc.
Pour la question « Quelle est la nature du quadrilatère $AEFB$? », là encore la moitié de la classe se prononce pour un carré, l'autre pour un losange. P. fait rappeler les deux propriétés de la définition pour confirmer qu'il s'agit bien d'un carré.
Le professeur propose de changer le triangle de départ. Mais que changer ? Les élèves proposent de changer les longueurs des côtés du triangle. P. utilise la figure vidéo projetée pour la déformer en laissant à chaque fois un côté inchangé. Ceci est suffisant pour convaincre les élèves que la cause de la nature carrée du quadrilatère se situe ailleurs. Les élèves pensent alors à changer les angles. P. change l'angle $\hat{B}$. Alors la classe s'anime en voyant le carré devenir un quadrilatère quelconque (pas tout à fait, c'est un trapèze rectangle). Ils essaient eux-même sur leur propre figure.
P. leur demande quel est à leur avis le bon angle $\hat{B}$ pour que l'on obtienne un carré. Après quelques tatonnements et l'aide de la fonction "angle" de géogébra, la réponse 45° se dégage.

La cloche sonne ; P. leur donne rendez-vous en 5$^{\text{ème}}$ pour démontrer en détail comment la présence d'un angle de 45° en B transforme le trapèze en carré.

Bilan, discussion de certaines modalités, alternatives, suites

La conduite de l'activité version papier est apparue très délicate. Si pour une raison ou pour une autre les ordinateurs ne sont pas disponibles, il nous semble plus judicieux de donner le film de la construction à faire à la maison et de mener ensuite en classe la discussion sur la nature du quadrilatère.

Lorsqu'on conduit l'activité en géométrie dynamique, il faut préparer une figure initiale enregistrée (un triangle ABC ayant un angle de 45° en B) et une figure finale. Cette dernière pouvant servir soit à mener la discussion avec le vidéo-projecteur (comme dans le compte-rendu), soit à être envoyée à chaque élève en milieu de séance pour que tous puissent expérimenter la déformation du carré en trapèze et rechercher comment retrouver le carré initial [1]

Pour pouvoir retrouver leur figure s'ils l'ont déformée de façon irrécupérable, il suffit que les élèves l'aient enregistrée. Ainsi ils ont juste à réouvrir le fichier d'origine sans enregistrer la figure déformée. Ceci est très utile car des déformations intempestives vont nécessairement se produire.

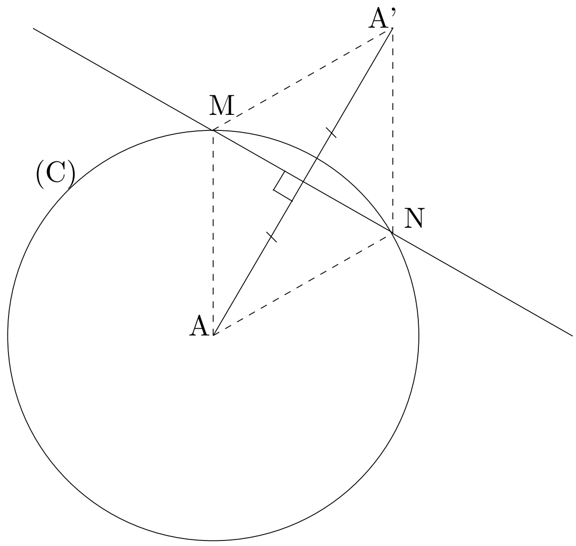
Deux possibilités dans la gestion de la discussion ont été évoquées, l'une plus directive que l'autre. Le choix dépend beaucoup du professeur qui mène l'activité et du temps disponible.

1. Les figures de départ et d'arrivées sous Géogébra sont téléchargeables, à partir de la version en ligne de la brochure, sur le site de l'Irem (Groupe Collège).

Le Cerf-volant caché

Le problème à résoudre :

(C) est un cercle de centre A. $[MN]$ est une corde de ce cercle. A' est le symétrique de A par rapport à (MN). Démontrer que le quadrilatère $AMA'N$ est un losange.



Rappel de définitions et théorèmes vus précédemment :

- Définition : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment en son milieu.
- Théorème : Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors ce point est équidistant des extrémités de ce segment.
- Théorème : Si un point est équidistant des extrémités d'un segment, alors ce point appartient à la médiatrice de ce segment.
- Définition : Un losange est un quadrilatère qui a ses quatre côtés égaux.
- Théorème : Si un quadrilatère est un losange, alors il a ses diagonales perpendiculaires et se coupant en leur milieu.
- Théorème : Si un quadrilatère a ses diagonales perpendiculaires et se coupant en leur milieu, alors ce quadrilatère est un losange.
- Définition : Le symétrique de M par rapport à la droite $\mathcal{D}$ est le point M' tel que $\mathcal{D}$ soit la médiatrice du segment $[MM']$
- Théorème : La symétrie axiale conserve les longueurs.

Le Cerf-volant caché

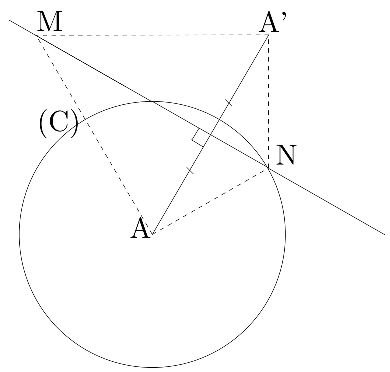
Intention des auteurs

Les "fausses démonstrations" les plus difficiles à gérer ne sont pas celles dans lesquelles les élèves concluent des choses fausses de prémisses justes, mais celles dans lesquelles ils concluent des choses justes de prémisses insuffisantes. Dans le premier cas, pour convaincre l'élève de son erreur, il suffit de produire un contre-exemple. Dans le second cas, c'est plus difficile parce que la figure ne contredit pas sa conclusion. On peut alors produire une autre sorte de contre-exemple qui consiste à retirer de la figure les propriétés que l'élève n'a pas utilisées dans son raisonnement. La confrontation avec cette nouvelle figure produit un choc sur l'élève : il est convaincu, certes, d'avoir fait un faux raisonnement, mais surtout il a maintenant conscience que les choses n'étaient pas aussi simples qu'il l'avait cru. Le fait d'avoir isolé l'effet de la donnée qu'il n'avait pas prise en compte, lui donne aussitôt des idées sur la véritable causalité à l'œuvre dans la configuration étudiée : il éprouve alors le besoin d'exprimer ce qu'il ressent comme une découverte. L'activité proposée ici est un exemple d'une telle mise en scène, à partir d'un exercice classique sur le losange.

La géométrie dynamique permet de faire varier les propriétés de la configuration à l'étude avec une grande facilité. On est là au plus près d'une démarche expérimentale, où la causalité à l'œuvre dans la configuration étudiée est découverte en isolant le rôle des différentes données, "toutes choses étant égales d'ailleurs".

Déroulement possible

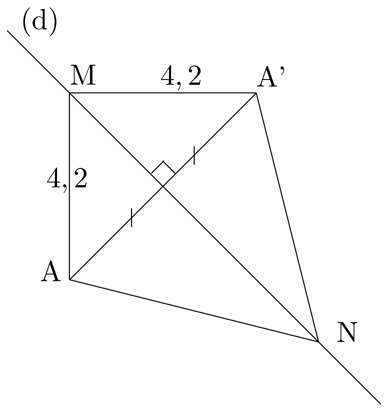
Dans ce problème classique, beaucoup d'élèves écrivent une fausse démonstration reposant sur l'idée de parallélogramme ayant ses diagonales perpendiculaires. Ils considèrent comme acquis le fait que le point d'intersection des diagonales est le milieu de la corde $[MN]$, alors qu'il s'agit d'une conséquence du fait que le quadrilatère est un losange, plutôt que d'une cause. Pour les détromper, on peut leur proposer de travailler sur une figure construite avec un logiciel de géométrie dynamique où ils pourront tirer le point M en dehors du cercle comme ci-dessous [2].



2. Dans la version en ligne de la brochure, sur le site de l'IREM (Groupe Collège) cette figure sous Géogébra est téléchargeable

Ils découvrent d'une part que le point d'intersection des diagonales n'est plus le milieu de $[MN]$, et d'autre part que la forme primitive du quadrilatère $AMA'N$ n'est pas un parallélogramme mais un cerf-volant ! Beaucoup abandonnent alors l'étude des diagonales pour celle des côtés du quadrilatère en commençant par l'égalité des paires symétriques par rapport à (MN) bien visible sur la figure déformée. Pour l'égalité de AM et AN, c'est le retour du point M sur le cercle qui permet d'en prendre conscience.

Pour les élèves qui ne parviennent pas à utiliser la symétrie pour démontrer les deux premières égalités de côtés, le travail sur une figure simplifiée, comme ci-dessous, peut constituer une aide [3]. On peut leur faire déplacer les points M et N sur la droite (d) pour attirer



leur attention sur la symétrie et les orienter vers l'idée de conservation des longueurs. On peut leur faire afficher la longueur des segments pour induire l'idée d'équidistance par rapport aux extrémités du segment $[AA']$ et les orienter vers l'idée de médiatrice.

Compte-rendu d'observation en classe

L'activité s'est déroulée sur deux séances à une semaine d'intervalle, les élèves ayant eu à rédiger un travail durant ces quelques jours.

<u>Première séance :</u>

Première étape : reprendre en main le logiciel fourni sur les ordinateurs du collège et dessiner la figure demandée (cela a été plus laborieux que le professeur ne le pensait), conjecturer la nature de la figure (ceci n'a pas posé de problème).

Deuxième étape : rédiger sur le cahier la démonstration de la conjecture. Pour cela, le professeur fait rappeler par des élèves deux des thèorèmes qui permettent de faire une démonstration de $MA = MA'$

Troisième étape : dans la dernière partie de la séance, le professeur ayant vu sur les cahiers les erreurs des élèves, essaie de leur faire apparaître la source de leur erreur en faisant "bouger" la figure. Là encore, le manque d'habileté des élèves avec le logiciel a fortement perturbé l'effet

3. Dans la version en ligne de la brochure, sur le site de l'IREM (Groupe Collège) cette figure sous Géogébra est téléchargeable

attendu puisque les élèves se sont davantage focalisés sur les difficultés de manipulation du logiciel que sur le but mathématique recherché.

Quatrième étape : le professeur donne en devoir à la maison la rédaction de ce résultat.

Deuxième séance : (la semaine suivante)

Le professeur rend les copies corrigées, classées en cinq paquets : ceux qui n'ont fait que la figure (1 élève), ceux qui n'ont pas compris l'idée (2 élèves), ceux qui ont montré que la figure est un losange puisqu'elle a deux paires de côtés consécutifs égaux (10 élèves), ceux qui ont "raté le losange", avec une rédaction confuse (3 élèves), et ceux qui ont fait juste, mais aidés ? (4 élèves). Devant le grand nombre d'élèves ayant fait la même erreur, le professeur va se servir du logiciel de géométrie dynamique pour mettre en évidence cette erreur. Pour cela, il utilise cette fois-ci lui-même le logiciel en projetant ses essais sur l'écran.
Le professeur donne alors la consigne de rédiger à nouveau la démonstration. Il ramasse les nouvelles copies.

Les copies montrent qu'une partie des élèves n'ont pas surmonté la difficulté de la démonstration de la première partie "$MA = MA'$ et $NA = NA'$". Parmi les élèves ayant rédigé à peu près correctement cette première partie, beaucoup ont encore eu du mal à terminer la démonstration, ils n'ont pas sû quoi faire du fait que les points M et N sont sur un cercle. Ils se sont rappelés que le professeur le leur avait suggéré, sans comprendre comment s'articulaient les propriétés. Parmi ceux qui ont terminé la démonstration et qui semblent l'avoir comprise, la plupart ont quand même eu beaucoup de difficulté à rédiger.

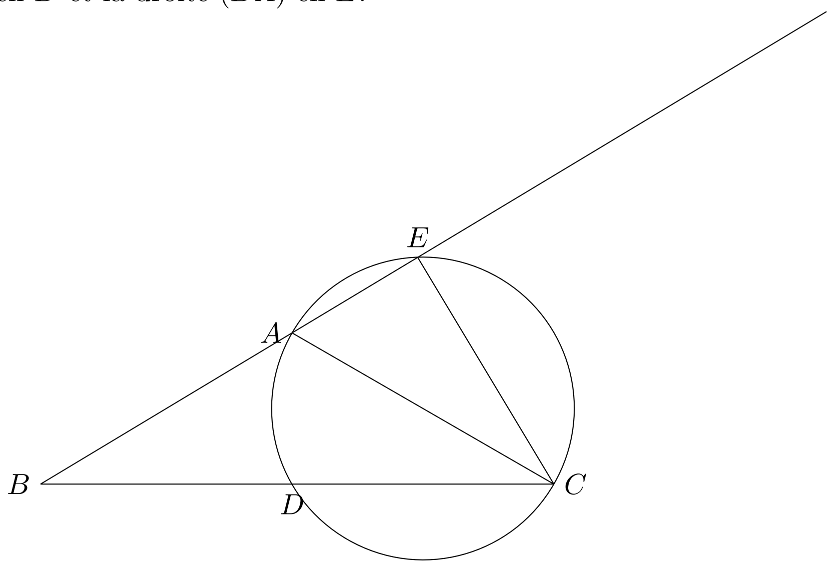
Bilan, discussion de certaines modalités, alternatives, suites

Il semble important de souligner deux points :
- L'utilisation de l'informatique ne semble judicieuse que si elle est bien préparée dans des ateliers préliminaires. Dans cette activité, l'informatique doit être un outil pour permettre aux élèves de mieux prendre en compte les différentes idées de la démonstration, en les isolant les unes des autres ; si elle devient un obstacle, l'activité est détournée de ses objectifs.
- Dans l'exercice qui sert de fond à l'activité, il y a deux difficultés : il s'agit de faire la démonstration d'une propriété nécessitant la vérification de deux propriétés préalables, dont l'une a le mauvais goût d'être visuellement triviale ! c'est peut-être beaucoup pour un élève de cinquième. L'activité permet de faire apparaître et de traiter les difficultés qui passent inaperçues si l'on s'en tient à un traitement classique de l'exercice.

Conjecturer en géométrie

• Indications :
Une conjecture est une supposition, celle-ci peut-être vraie ou fausse.
Exemples de conjectures : deux droites sont parallèles ou sont perpendiculaires ; un angle est droit ; un triangle est rectangle ou est isocèle ; deux angles sont égaux ; un angle est deux fois plus grand qu'un autre...

• Le travail à faire :
ABC est un triangle isocèle de sommet principal A. Le cercle de diamètre $[AC]$ recoupe le segment $[BC]$ en D et la droite (BA) en E.



1. Faire une liste contenant le plus possible de conjectures concernant cette figure.
2. Donner la démonstration, si vous y arrivez, des conjectures que vous avez données en 1).

• Barème :
Le devoir est noté sur 20 points.
Question 1 : cette question est notée sur 7 points ; toute conjecture rapporte 0,5 point, même si vous n'arrivez pas à la démontrer ; toute conjecture farfelue enlève 1,5 point.
Question 2 : cette question est notée sur 13 points ; toute démonstration exacte rapporte un nombre de points égal au nombre minimum de pas qu'elle contient (c'est à dire le nombre minimal de propriétés ou théorèmes nécessaires à la démonstration). Chaque conjecture que vous êtes seul dans la classe à avoir démontrée, vous rapporte un point de bonus.

Remarque 1 : Deux conjectures différentes peuvent vouloir dire la même chose : Le triangle OMN est isocèle en O ; les longueurs OM et ON sont égales. Il faut marquer les deux pour avoir le plus de points possible.

Remarque 2 : Vous pouvez faire des tracés sur la figure mais pas rajouter de points pour formuler vos conjectures.

Correction

La liste des conjectures n'est pas exhaustive.

Conjectures qui n'en sont pas.
Ce sont des données de l'énoncé ou des définitions. (Ne rapporte ni n'enlève aucun point).

1. Le triangle ABC est isocèle en A.
2. Les points E,B,A sont alignés.
3. Le cercle de diamètre $[AC]$ est circonscrit au triangle ACE.

Conjectures qui ne se retrouvent pas sur d'autres figures (et qui correspondent à des propriétés accidentelles).

1. Le triangle ECD est isocèle.
   Le triangle ECD est équilatéral.
   Les longueurs CD et CE sont égales.
2. La demi-droite $[CA)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ECD}$.
   Les angles $\widehat{ACD}$ et $\widehat{ECA}$ sont égaux.
3. Les angles $\widehat{EDC}$ et $\widehat{ECD}$ sont égaux.

Conjectures qui peuvent être démontrées. (il en existe d'autres)

Elles sont regroupées par idées.

1. Les longueurs AC et AB sont égales.
   Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux.
2. Le triangle AEC est rectangle en E.
   L'angle $\widehat{AEC}$ est un angle droit.
   Les angles $\widehat{EAC}$ et $\widehat{ECA}$ sont complémentaires.
   $AC^2 = AE^2 + EC^2$.
3. Le triangle BEC est rectangle en E .
   L'angle $\widehat{BEC}$ est un angle droit.
   Les angles $\widehat{EBC}$ et $\widehat{ECB}$ sont complémentaires.
   $BC^2 = BE^2 + EC^2$.
4. L'angle $\widehat{ADC}$ est droit.
   Les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires.
   $AC^2 = AD^2 + DC^2$.
   $AB^2 = AD^2 + DB^2$.
   Le point D est le milieu de $[BC]$.
   La droite (AD) est une médiane du triangle ABC.
   La droite (AD) est la médiatrice du segment $[BC]$ ou une médiatrice du triangle ABC.
   Les triangles ADB et ADC sont symétriques par rapport à la droite (AD).
   La demi-droite $[AD)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ ou une bissectrice du triangle ABC.

5. Le point D est le centre du cercle circonscrit au triangle BCE.
   Les longueurs DC, DB et DE sont égales.
   Le triangle BDE est isocèle en D.
   Les segments $[DB]$ et $[DE]$ sont de même longueur.
   Les angles $\widehat{DBE}$ et $\widehat{DEB}$ sont égaux.
   Le triangle CDE est isocèle en D.
   Les segments $[DE]$ et $[DC]$ sont de même longueur.
   Les angles $\widehat{DEC}$ et $\widehat{DCE}$ sont égaux.

Démonstration des conjectures ci-dessus :

1. D'après l'énoncé le triangle ABC est isocèle en A donc $AB = AC$ et $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$.
2. Le triangle ACE est inscrit dans un cercle dont un diamètre est le côté $[AC]$. C'est donc un triangle rectangle en E.
   Dans un triangle rectangle les angles aigus sont complémentaires.
   Dans le triangle ACE rectangle en E on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir l'égalité :$AC^2 = AE^2 + CE^2$.
3. Le point B appartient à la droite (AE). L'angle $\widehat{BEC}$ est donc un angle droit.
   L'angle $\widehat{BEC}$ est droit donc le triangle BEC est rectangle en E.
   Dans un triangle rectangle les angles aigus sont complémentaires.
   Dans le triangle BCE rectangle en E on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir l'égalité :$BC^2 = BE^2 + CE^2$.
4. Le triangle ADC est inscrit dans un cercle dont un diamètre est le côté $[AC]$. C'est donc un triangle rectangle en D.
   L'angle $\widehat{ADC}$ est un angle droit. Le point B appartient à la droite (DC) donc l'angle $\widehat{ADB}$ est un angle droit et les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires.
   Dans le triangle ADB rectangle en D on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $AB^2 = AD^2 + BD^2$.
   Dans le triangle ADC rectangle en D on utilise le théorème de Pythagore pour obtenir $AC^2 = AD^2 + CD^2$.
   La droite (AD) est la hauteur issue de A du triangle ABC qui est isocèle en A. Donc (AD) est la médiatrice et la médiane issue de A du triangle ABC et $[AD)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
   Pour montrer que le point D est le milieu de $[BC]$ il y a au moins deux méthodes. La première est que D appartient à $[BC]$ et que (AD) est la médiatrice de $[BC]$ donc D est le milieu de $[BC]$. La seconde est d'utiliser les égalités démontrées grâce au théorème de Pythagore et le fait que $AC = BA$. On a donc $CD^2 = BD^2 = AC^2 - AD^2$. On en déduit $BD = DC$. Les points B, D, C étant alignés le point D est le milieu de $[BC]$.
5. Le point D est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$ du triangle rectangle BCE donc D est le centre du cercle circonscrit au triangle BCE.
   Comme D est le centre du cercle circonscrit au triangle BCE on a $DC = DB = DE$.
   On a $DB = DE$ donc le triangle DBE est isocèle en D.
   Le triangle DBE est isocèle en D donc les angles $\widehat{DBE}$ et $\widehat{DEB}$ sont égaux.

On a $DC = DE$ donc le triangle DCE est isocèle en D.
Le triangle DCE est isocèle en D donc les angles $\widehat{DCE}$ et $\widehat{DEC}$ sont égaux.

Conjecturer en géométrie

Éléments du programme directement en rapport avec l'activité

Introduction générale relative au programme de mathématiques pour le Collège.
Géométrie : La résolution de problèmes a pour objectifs :
- de développer les capacités heuristiques, les capacités de raisonnement et les capacités relatives à la formalisation d'une démonstration

Intentions des auteurs

En géométrie, une figure peut aider à résoudre un problème comme elle peut induire en erreur. Il est donc important de faire faire des conjectures aux élèves, pour qu'ils en comprennent la notion, et surtout qu'ils réalisent qu'une conjecture doit être suivie d'une démonstration pour être validée ou pas. C'est dans ce but que la figure donnée est conçue spécialement pour induire l'élève à faire des conjectures qui seront invalidées. Il ne faut pas craindre que les élèves fassent ces conjectures car elles les font réfléchir sur la différence entre cas particuliers et cas général.

La première partie de l'activité amène l'élève à formuler de différentes manières une même propriété de la figure : le triangle est rectangle en D, l'angle $\widehat{D}$ est droit, deux angles sont complémentaires, la droite passant par D est perpendiculaire à ... Cette capacité de reformulation sera ultérieurement utile pour de nombreuses démonstrations. De plus la rédaction de ces conjectures doit conduire l'élève à réviser les notions géométriques des quatre années de collège et à voir les liens qui existent entre les notions.

La deuxième partie de l'activité permet d'approfondir la structuration d'une démonstration et surtout, comme on l'a dit plus haut, de faire la différence entre ce que l'on voit et ce que l'on démontre, c'est à dire entre cas particuliers et cas général. Cette dernière étape peut convaincre les élèves de l'importance d'une démonstration et de son universalité : « ce sera vrai sur toutes les figures faites avec cet énoncé ! »

Enfin l'activité permet aux élèves de se sentir davantage responsables des démonstrations dans la mesure où il s'agit de conjectures qu'ils ont eux-mêmes créées.

Déroulement possible

L'activité peut être donnée en devoir à la maison ou en travail en classe.

Pour un devoir à la maison :

Il est important de faire le point plusieurs fois avec les élèves pour les inciter à ne pas s'y prendre au dernier moment. On peut aussi scinder la partie conjecture et la partie démonstration pour permettre à tous d'avoir des conjectures valables à démontrer.

Pour un travail en classe :

Il est possible de faire des groupes pour trouver les conjectures et de faire une mise en commun en rejetant seulement les conjectures farfelues mais en gardant celles qui ne pourront pas être démontrées. Dans ce cas la recherche des démonstrations peut être effectuée soit en classe soit à la maison. C'est lors de la correction que la question sera posée : lorsqu'une conjecture paraît ne pas pouvoir être démontrée, comment prouver qu'elle est fausse ?

Dans les deux cas, la correction est là pour encourager les élèves et il faut valoriser toutes les conjectures trouvées et toutes les démonstrations bien rédigées. On ne sanctionnera pas les conjectures évidentes pour ne pas freiner l'initiative des élèves.

Pour aider à leur faire comprendre l'universalité d'une démonstration, l'utilisation de la géométrie dynamique est possible et même conseillée (figure dynamique fournie sur le site).

Compte-rendu de l'activité

Cette activité a été donnée en devoir-maison dans quatre classes différentes de troisième. Dans deux cas, les conjectures ont été notées sur 10 (un point par conjecture) et dans deux autres sur 7 (un demi-point par conjecture)

La figure n'a pas varié sur les quatre devoirs-maison et a donc entraîné, comme prévu, l'énoncé de conjectures non démontrables découlant de l'égalité supposée des longueurs ED et EC.

En règle générale, la partie sur les conjectures a été bien faite car il avait été répété de nombreuses fois que l'on devait conjecturer sur ce que l'on voyait **sans démontrer**. La plupart des conjectures attendues (cf " Correction ") ont été trouvées dans chaque classe, même si celles faisant apparaître des égalités de longueurs ou d'angles et la nature des triangles sont les plus souvent citées. On remarquera cependant que certains élèves se contentent du nombre minimum de conjectures pour obtenir tous les points de cette partie (donc 10 ou 14 selon les classes), ceci les pénalise car souvent certaines de leurs conjectures sont farfelues et pénalisantes.

La partie démonstration a été moins bien réussie. En effet certains élèves se contentaient de redire ce qu'ils voyaient sur la figure et d'autres admettaient certaines hypothèses pour démontrer ces mêmes hypothèses. Les conjectures non démontrables permettent d'utiliser la notion de contre-exemple.

Enfin dans deux autres classes très faibles, l'activité a été scindée en trois parties : Conjecturer, Tracer une autre figure avec le même énoncé, Refaire des conjectures qui soient valables sur les deux figures et les démontrer.

La première partie sur les conjectures a été assez réussie ainsi que le tracé de la nouvelle figure. Cependant, malgré la correction des conjectures de la première partie, beaucoup d'élèves ont réitéré certaines erreurs et d'autres n'ont pas compris le caractère général qui était demandé pour la seconde liste de conjectures. Cela confirme la difficulté de certains élèves pour appréhender la notion de conjecture et l'importance de son enseignement.

Bilan, discussion de certaines modalités, alternatives, suites

Nous proposons une activité pour conjecturer dans le domaine numérique qui a été testée, mais nous ne disposons pas de compte-rendu ; c'est pourquoi nous la faisons figurer en annexe II.3.

II.2 Aspects logiques et formels

Au collège, avec le début des mathématiques déductives, les élèves vont rencontrer pour la première fois la démonstration en tant que telle. Cette première rencontre puis la phase d'apprentissage les confrontent à ses aspects logiques et formels. Au delà de savoir " expliquer" et " raisonner", ils vont devoir acquérir de nouvelles compétences : comprendre les rapports logiques entre les différentes propositions ; déméler leur statut de conjectures, règles, théorèmes, données, hypothèses, conclusions ; et construire des enchaînements avec.

En ce sens, démontrer ce n'est pas seulement s'expliquer à soi-même ≪ comment il se fait que ... ≫ ; c'est aussi faire la preuve qu'on peut rattacher une connaissance nouvelle au corpus des connaissances déjà établies d'une façon que les élèves peuvent ressentir comme excessivement formelle. Les démonstrations de cours (dont la place s'est fortement réduite dans la pratique des enseignants de collège) ne sont pas les seules concernées par cet aspect : en résolution de problèmes, expliquer une configuration ou justifier un calcul, nécessite de savoir exactement sur quelles connaissances géométriques ou sur quelles règles de calcul *déjà établies* on peut s'appuyer. D'une certaine façon , cette dimension s'oppose à celle que nous avons développée dans le chapitre "Motiver la démonstration" : où passe en effet le sujet dans cet aspect de la démonstration, où passe son désir s'il n'est plus celui de comprendre ?

Pour répondre à cette réelle difficulté didactique, l'enseignant doit s'efforcer de dire exactement de quoi il s'agit et surtout ne pas essayer de faire passer cet aspect de la démonstration pour autre chose que ce qu'il est. Voici en substance le discours qu'il peut tenir : ≪ Au stade où nous en sommes, le résultat à démontrer est éprouvé, personne n'a de doute à son sujet, on sait l'utiliser, l'appliquer. On pourrait s'arrêter là, mais on va faire quelque chose de plus qui consiste à regarder en détail comment ce résultat se raccorde à ce qu'on savait déjà, comment on peut l'en déduire ≫. Bref c'est à l'enseignant d'assumer la question de la cohérence du savoir mathématique concerné et celle de sa construction.

Cet aspect des mathématiques ne rebute pas nécessairement les élèves si on le présente pour ce qu'il est. En effet, le côté formel de la démonstration peut aussi revêtir pour eux l'aspect d'un jeu, auquel ils prennent alors plaisir, notamment dans ses aspects combinatoires. Partir des données, partir de la conclusion, ou les deux à la fois, recenser les moyens dont on dispose, agencer des chemins, etc., autant de démarches qu'ils vont découvrir et qui développeront leur capacité d'argumentation.

La démonstration, dans ses aspects logiques et formels, demande en effet à l'élève de se décentrer, de sortir de son intime conviction pour accepter de défendre ses conclusions dans des formes qui soient recevables par autrui, c'est-à-dire conformes aux règles de la logique et aux connaissances partagées par la communauté scolaire de sa classe. Dans un premier temps, ceci s'oppose à son mode d'être au moment de l'adolescence. L'affirmation de soi, les prises de position entières et souvent le refus de négocier sont en effet des caractéristiques de cette période de la vie d'un jeune. Très occupé à se trouver, à se définir comme individu et à s'opposer, il a du mal à quitter le centre de lui-même pour regarder le monde, même dans le cadre d'un exercice intellectuel. ≪ Mon discours, c'est moi ; je suis comme ça et pas autrement ; il n'y a rien à négocier ; si je mets en doute un seul aspect de ce que je crois, tout peut s'écrouler ≫, voilà ce qu'il dit en substance.
Mais à bien y regarder, l'adolescence recèle en même temps un ressort capable au contraire

de venir étayer les objectifs scolaires dont nous parlons : c'est le besoin d'opposition. Critique des parents, remise en question de la société, conflit avec l'autorité, affirmation d'une morale non conventionnelle, c'est une formidable énergie qui pousse les adolescents à la contestation. Capter une part de cette énergie pour la mettre au service d'objectifs intellectuels ou rationnels s'avère possible si ces objectifs peuvent être investis comme étant en rapport avec l'idée de contestation. C'est un exemple de ce que Philippe Meirieu décrit comme l'une des trois options classiques de la pédagogie pour réconcilier le savoir et l'élève : "s'appuyer sur un intérêt pour en détourner le cours et le fixer, à l'insu même de l'élève, sur un autre objet". En réponse au désir de contestation, la pratique de la démonstration peut être vécue comme un entraînement ludique à la plaidoirie, un renforcement de l'art d'argumenter et de convaincre.

Pour donner une visibilité à la spécificité de la démonstration qui consiste à reposer sur un squelette logique, nous proposons une première séquence d'activités, intitulée « Les dents vertes », qui met en scène son aspect formel. Le but est de s'entraîner en faisant un pas de côté avant de revenir à des exercices de démonstration plus classiques en géométrie. Plus exactement, de travailler, sans le dire, sur des jeux de combinaison d'énoncés non mathématiques obéissant exactement aux mêmes structures logiques que les démonstrations géométriques visées.

L'acquisition du ressort primitif de la démonstration : utiliser un théorème lorsque ses conditions d'applications sont réalisées, est bien-sûr première et doit être longuement travaillée (la pertinence des exercices sur le théorème de Pythagore sous toutes ses coutures n'est pas à remettre en cause). Il semble important toutefois de montrer aux éléves que le squelette logique de la démonstration peut être un peu plus élaboré et il n'est pas si facile de trouver des exercices niveau collège qui nécessitent de mettre en œuvre une démonstration en plusieurs pas. C'est l'objet de l'activité proposée sous le titre "Calcul d'angles de proche en proche".

L'activité suivante "De l'aire" propose une situation incitant les élèves à adopter une attitude de recherche et à élaborer une stratégie. La consigne, qui demande un schéma de démonstration plutôt qu'une démonstration rédigée, exige des élèves une vue d'ensemble, la mise en œuvre d'une planification de sous-buts. L'acceptation de plusieurs démarches est donc posée a priori et permet que les élèves s'approprient la démarche (chacun la sienne) et s'engagent dans la résolution du problème. Une retombée indirecte de ce type d'activité, qui met en évidence la pluralité des démonstrations, est qu'elle parle également de la place de la démonstration dans le corpus des savoirs mathématiques : à coté des objets, des propriétés et des théorèmes qui sont et qui doivent être partagés, les démonstrations peuvent être variables, personnelles, seule leur architecture est normée.

Enfin, l'activité "I prove or I object" décline, dans le numérique, certaines compétences mathématiques qui sont les mêmes que celles à l'œuvre dans la démonstration en géométrie : justifier, infirmer une propriété universelle. Cette activité est donc l'occasion d'illustrer que les savoir-faire logiques, indispensables dans l'apprentissage des démonstrations, peuvent être travaillés autant dans le domaine du numérique qu'en géométrie.

Les dents vertes

Voici une liste d'énoncés. Pour cette activité, chacun d'eux sera considéré comme vrai, même si en vérité il vous paraît absurde ! Il va falloir résoudre trois exercices en combinant ces énoncés.

E1 : *S'il fait beau, alors les jeunes vont se promener.*
E2 : *Si des poules chantent, alors elles ont les dents vertes.*
E3 : *S'il fait nuit, alors les chats sont gris.*
E4 : *Si un jeune a de l'argent et passe devant une pâtisserie, alors il s'achète des petits gâteaux.*
E5 : *Si un jeune a des caries, alors il va chez le dentiste.*
E6 : *Si un jeune chante à tue-tête, alors ses voisins sont contents.*
E7 : *Si un jeune fait des mathématiques, alors c'est le bonheur absolu !*
E8 : *Si un jeune fait du sport, alors il transpire.*
E9 : *Si un jeune mange des sucreries, alors il a des caries.*
E10 : *Si un jeune se couche tard, alors il est fatigué.*
E11 : *Si un jeune se douche, alors il met de l'eau partout dans la salle de bain.*
E12 : *Si un jeune se douche, alors il est propre.*
E13 : *Si un jeune met de l'eau partout dans une pièce, alors il doit nettoyer les sols.*
E14 : *Si un jeune sort de chez lui, alors il passe devant la pâtisserie.*
E15 : *Si un jeune transpire, alors il se douche.*
E16 : *Si un jeune est fatigué, alors il s'endort sur son bureau.*
E17 : *Si un jeune travaille bien, alors il reçoit de l'argent de poche.*
E18 : *Si les voisins sont heureux et que les chats sont gris, alors les poules chantent la Marseillaise.*

Les exercices à résoudre :

Exercice 1 :
Dimanche, Benjamin a fait du sport (il a joué au football) tout l'après-midi. Son équipe a gagné sur le score de 3 - 0.
Démontrer qu'il va nettoyer les sols de la salle de bain.

Exercice 2 :
La nuit est tombée et Carole va se coucher. Comme elle ne trouve pas le sommeil, elle ouvre la fenêtre, branche son baladeur et écoute de la musique en observant les étoiles. Avec son casque sur les oreilles, elle ne se rend pas compte qu'elle chante très fort.
Démontrer que les poules ont les dents vertes.

Exercice 3 :
Nous sommes lundi, il est 10 heures et le soleil brille. Léo est heureux, car il a bien travaillé et a reçu un 18/20 en français.
Démontrer qu'il va aller chez le dentiste.

Le travail à faire :

Pour chacun des trois exercices précédents :

1. Souligner en vert les données et en rouge ce qu'il faut démontrer.
2. Trouver les raisonnements sous la forme de schémas. Pour les exercices 1 et 2, compléter les schémas de démonstration ci-dessous, en utilisant uniquement certains des énoncés de la liste. Pour l'exercice 3 c'est à vous de faire le schéma de démonstration.
3. Rédiger les démonstrations des trois exercices.

Schéma pour l'exercice 1 :

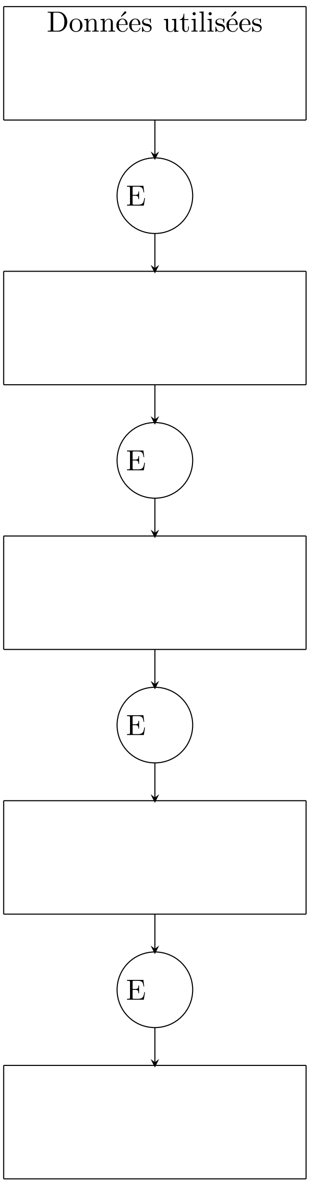
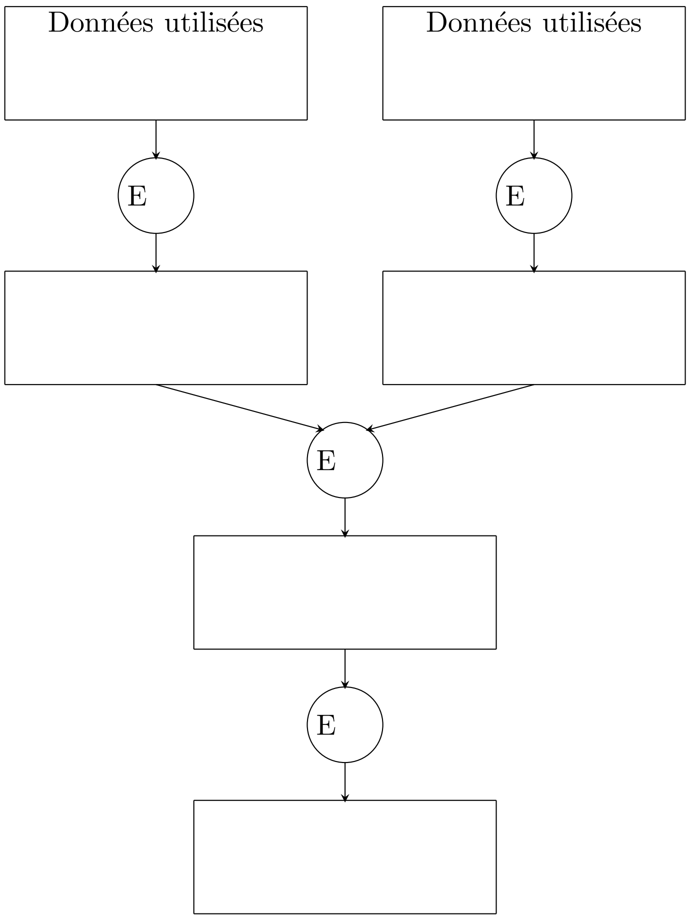


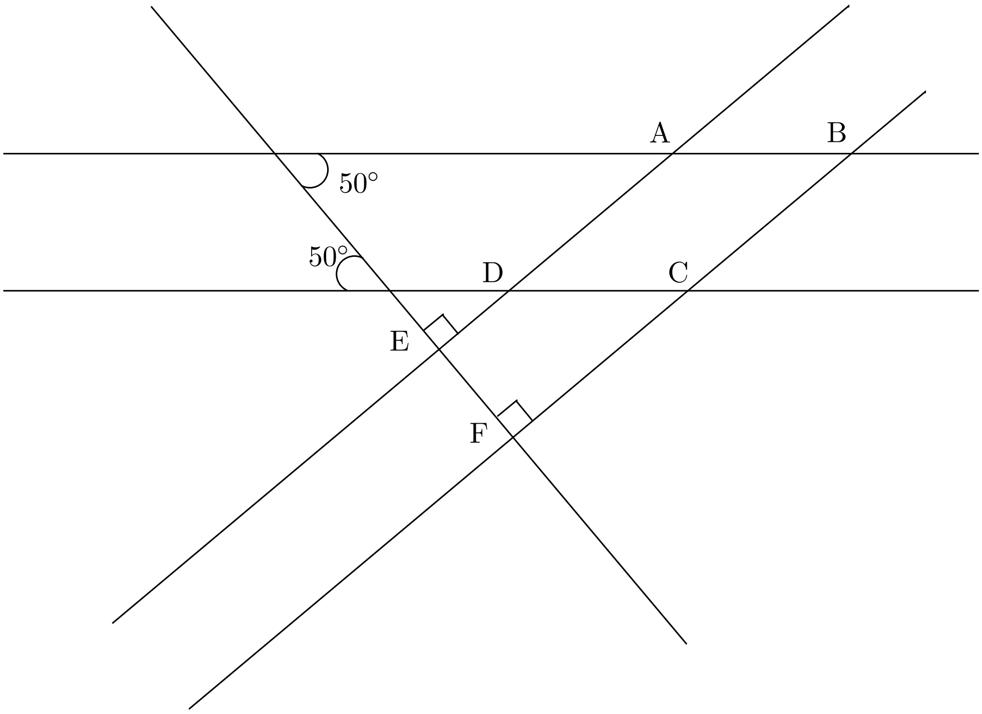
Schéma pour l'exercice 2 :



Les dents vertes (suite)

Pour les deux exercices ci-dessous, tu peux aussi faire des schémas de démonstration :

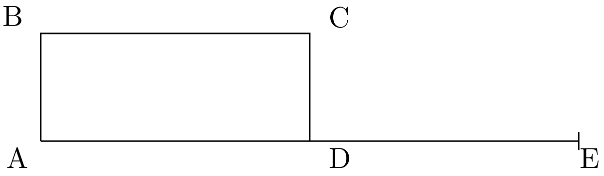
Exercice 4 :
À partir des propriétés codées sur la figure et de certains théorèmes de la liste ci-dessous, démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallèlogramme.



<u>Liste des théorèmes :</u>

(Th1) *Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles.*
(Th2) *Si deux droites sont parallèles et si une troisième droite est perpendiculaire à l'une, alors la troisième droite est aussi perpendiculaire à l'autre.*
(Th3) *Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle.*
(Th4) *Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.*
(Th5) *Si un triangle est équilatéral, alors chacun de ses angles a pour mesure 60^o.*
(Th6) *Si deux droites sont parallèles, alors toute sécante commune forme des angles alternes-internes de même mesure.*
(Th7) *Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles correspondants de même mesure, alors ces droites sont parallèles.*
(Th8) *Si deux droites sont parallèles, alors toute sécante commune forme des angles correspondants de même mesure.*
(Th9) *Si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes de même mesure, alors ces droites sont parallèles.*
(Th10) *Si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux, alors ce quadrilatère est un parallèlogramme.*

Exercice 5 :
Dans la figure ci-dessous les points A et E sont symétriques par rapport au point D et le quadrilatère $ABCD$ est un rectangle.
À partir de certains théorèmes de la miste ci-dessous démontrer l'égalité $CA = CE$.



Liste des théorèmes :

(Th1) *La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.*
(Th2) *Si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux parallèles, alors ce quadrilatère est un parallèlogramme.*
(Th3) *Si deux points A et B sont symétriques par rapport au point O, alors le point O est le milieu du segment $[AB]$.*
(Th4) *Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu, alors c'est un parallélogramme.*
(Th5) *Si un quadrilatère est un parallèlogramme, alors ses côtés opposés ont la même longueur.*
(Th6) *Si un point appartient à la médiatrice d'un segment, alors ce point est équidistant des extrémités de ce segment.*
(Th7) *Si une droite coupe un segment perpendiculairement en son milieu, alors cette droite est la médiatrice de ce segment.*
(Th8) *Si un quadrilatère est un rectangle, alors il a quatre angles droits.*

Les dents vertes [4]

Intentions des auteurs

En géométrie, la perception des propriétés de la figure peut faire obstacle à l'apprentissage de la démonstration. Il est difficile de résister à l'évidence, de faire la part des données et de leurs conséquences. De la même façon, si l'on transpose le raisonnement en remplaçant les énoncés géométriques par des assertions concernant la vie courante, la constitution d'une chaîne déductive peut être faussée par le recours au "bon sens" ("si mes parents sont mécontents, ils me punissent ; si je suis puni, alors je boude") au détriment de la seule utilisation des énoncés considérés comme établis. Ici, paradoxalement, c'est le recours au sens qui fait obstacle à la démonstration ! Il est alors utile de proposer aux élèves de jouer à combiner un stock d'assertions invraisemblables où la conclusion n'ait vraiment rien à voir avec les prémisses et où ils ne puissent plus se laisser guider par le sens commun pour réussir un agencement pertinent.

Pour travailler l'enchaînement logique des propositions qui constituent une démonstration, on propose donc dans cette activité de s'entraîner sur des énoncés qui, non seulement sont écrits en langage naturel et ne portent pas sur des objets mathématiques, mais en plus n'ont pas de sens. Ce qui permet dans un premier temps d'isoler le seul aspect "mécanique" des règles (règle de l'implication et règle du " et "). On revient ensuite à des exercices de démonstration classiques en géométrie, démonstrations dont le squelette obéit exactement aux mêmes structures logiques que les démonstrations ludiques obtenues dans la première étape.
Le but est aussi de montrer qu'il peut exister plusieurs "chemins" pour atteindre une même conclusion : voir l'exercice 3.

Déroulement possible

L'activité est prévue pour se dérouler sur deux séances avec possibilité de faire rédiger au propre un paragraphe à la maison. Le travail peut être conduit de manière individuelle ou collective. Seule la partie de l'activité concernant les phrases en langue naturelle est présentée ci-dessous. Il est possible de distribuer ou pas la feuille contenant les schémas de démonstration. Dans le cas où celle-ci n'est pas distribuée il faudra mener une discussion sur la mise en forme d'un schéma de démonstration.

<u>Première partie (schéma)</u>

- Expliquer le but de l'exercice. Faire lire l'énoncé du premier exercice à un élève.
- Demander s'il y a des questions sur les termes de l'énoncé (notamment le mot "donnée").
- Répondre aux éventuelles questions.
- Les élèves font alors une recherche individuelle ou en groupe pour trouver la solution de l'exercice 1. (5-10 min)
- Mise en commun des différentes recherches.
- Correction du schéma de démonstration.
- Répondre aux éventuelles questions.

4. d'après un texte original d'Yvan MONKA - Collège Albert Camus de Soufflenheim - http ://ymonka.free.fr/maths-et-tiques/telech/DEM_FOLLES.pdf

- Recherche du second exercice (et troisième pour les plus rapides).
- Correction du second exercice. Mettre l'accent sur la propriété avec le "et".
- Recherche du troisième exercice (recherche d'une autre méthode pour les plus rapides)
- Correction du troisième exercice avec les différents schémas possibles. (Prévoir assez de place pour réaliser les schémas sur le tableau.)

Deuxième partie (rédaction)

- Reprendre le schéma du premier exercice pour faire la rédaction de la démonstration. Dans les classes faibles, il est possible de corriger directement l'exercice 1 et de demander aux élèves de faire eux-mêmes l'exercice 2 sur ce modèle. On peut également imposer la manière de rédiger avec certains liens logiques.
- Recherche, individuelle ou en groupe, de la rédaction du second exercice.
- Rédaction du second exercice. Mettre l'accent sur la propriété avec le "et".
- Recherche de la rédaction du troisième exercice.
- Correction du troisième exercice. Selon le temps restant il est possible de donner la rédaction du dernier exercice en devoir à faire à la maison.

Compte-rendu d'observation

Premier compte-rendu : classes de cinquième
Cette activité a été proposée dans deux classes de cinquième :

Dans la première classe, les élèves n'ont pas du tout été réceptifs à l'intérêt d'un tel travail. Ils l'ont pris comme un jeu propice à l'agitation et non comme une possibilité d'aborder la démonstration sous un angle différent. Ceci a entraîné un échec de la réalisation de l'activité qui a incité le professeur à ne pas la terminer (elle était prévue sur deux heures).

Dans la seconde classe, les élèves ont été beaucoup plus réceptifs au travail demandé, ce qui a permis de mener l'activité à bien. Il est à noter, cependant, que cette fois aussi certains élèves ont interprété l'activité comme un jeu sans que cela n'entraîne les mêmes conséquences que dans la première classe.
Une bonne partie de la classe s'est retrouvée relativement à l'aise dans l'exercice proposé. Les démonstrations furent relativement vite comprises et la rédaction ne présenta pas beaucoup plus de difficultés. La première démonstration a été rédigée par le professeur en partenariat avec la classe. Puis les élèves avaient à rédiger par eux-mêmes les deux démonstrations suivantes en s'inspirant de l'exemple au tableau, libre à eux de gérer les différents embranchements comme bon leur semblait. On se propose ici de présenter une analyse rapide des traces écrites réalisées durant ce travail. On peut répartir les écrits en quatre catégories :

1. Une large partie a choisi de rédiger linéairement les démonstrations, écrivant les deux branches du schéma l'une à la suite de l'autre. On peut supposer qu'ils avaient une bonne compréhension des raisonnements mais le passage à l'écrit a été perturbé par leur manque de maîtrise notamment en ce qui concerne l'utilisation des conjonctions de coordination.

2. Une autre partie des élèves a souhaité, lors de la rédaction, garder l'aspect schématique des démonstrations. C'est-à-dire écrire en parallèle sur leur feuille les propriétés qui étaient notées au même niveau dans le schéma. Ceci a entraîné quelques erreurs logiques. En effet, dans le troisième exercice les deux branches du schéma n'ont pas le même nombre d'étapes. Du coup, l'énoncé E4 n'a pu être utilisé avec les deux hypothèses nécessaires.
3. Pour expliquer les productions classées dans ce groupe, il faut savoir que le troisième schéma avait été corrigé par un élève au tableau qui, par manque de place, s'est cru obligé d'écrire la conclusion en remontant entre les deux premières branches ! Ce schéma relativement spécial a perturbé quelques élèves lors de la rédaction de la troisième démonstration. En effet, ceux-ci ne savaient plus "par quel bout" commencer, et ont donc rédigé la démonstration par branche de gauche à droite, donnant ainsi une rédaction dans le désordre et non cohérente.
4. Enfin, quelques élèves ont été particulièrement gênés par la forme de l'activité et son caractère "non mathématique". Ceci a entraîné une incompréhension de la consigne et une démotivation vis à vis du travail à faire. Ils ont alors très mal noté la correction. Leurs traces écrites étaient donc inexploitables.

Deuxième compte-rendu : classe de quatrième d'un collège classé en ZEP

La séance est rapidement présentée comme une “activité de démonstration”. Le matériel est distribué : les énoncés à utiliser, les exercices à résoudre, les schémas vierges.
Les élèves se mettent immédiatement dans l'activité. Des questions fusent ≪ C'est quoi les données ? ≫, brouhaha de participation, ≪ Ah, c'est ce qu'on sait déjà ! ≫, un élève prononce le mot ≪ information ≫. Dans leur recherche, les élèves sont gênés par le schéma ≪ est-ce qu'il faut exactement ce nombre d'énoncés ? ≫. Ils avancent néanmoins. Le professeur explicite oralement ce que de nombreux élèves ont commencé à faire : enchaîner les énoncés après avoir repéré dans le texte ce qui permet de démarrer.

Quelques élèves passent au tableau pour écrire l'enchaînement des énoncés qui amènent au résultat pour les deux exercices. Ils écrivent la “donnée” qui permet de démarrer, puis les numéros des énoncés à utiliser. Pour l'exercice 2, ils écrivent la première donnée puis l'enchaînement, la deuxième donnée puis l'enchaînement et la suite de l'enchaînement.

Il leur est demandé ensuite de passer aux schémas ; il semble qu'ils aient quelques difficultés à distinguer énoncés et conclusions intermédiaires ; certains sont bloqués par les deux branches du schéma de l'exercice 2. Le professeur les incite à s'exprimer à ce propos : ≪ qu'est ce qu'il y a de particulier dans cet exercice ou ces énoncés ? ≫. Ils réagissent spontanément : ≪ le “et” ≫, ils semblent comprendre qu'il faut les deux parties. Une élève l'explique en disant que cela serait différent s'il y a avait un “ou”, que là on n'aurait besoin que d'une des deux, mais qu'avec le “et” il faut les deux. Il y a quelques questions sur la vraissemblance des énoncés, le professeur les rassure : ≪ bien-sûr ce n'est pas vrai qu'elle a les dents vertes... ≫

Le professeur passe à l'exercice de géométrie. Il rappelle que le codage (ce sont les élèves qui répondent codage à la question sur les données) de la figure remplace le texte des exercices précédent. Il y a des questions sur la possibilité qu'il y ait plusieurs solutions, les élèves répondent ≪ oui ≫.

La séance se termine.

Bilan, discussion de certaines modalités, alternatives, suites

Donner le schéma des démonstrations en même temps que l'énoncé semble bloquer les élèves. Ils cherchent à remplir tout de suite le schèma sans avoir suffisamment réfléchi auparavant. Il vaut mieux que le recours au schéma arrive plus tard et apparaisse comme une bonne solution pour structurer un raisonnement, notamment :

– en distinguant les énoncés et les conclusions intermédiaires ;
– en permettant de visualiser les différentes structures de la démonstration d'un exercice à l'autre. En particulier, l'exercice 2 permet de mettre l'accent sur la façon de traiter une propriété construite avec un “et”. Peut-être serait-il intéressant d'exploiter davantage cette mise en évidence ?

Un autre point important est la question du temps. Dans une des classes observées, il n'a pas été possible de poursuivre avec les exercices de géométrie. Les donner en exercices à préparer à la maison semble une bonne solution mais cela ne permet pas de souligner suffisamment le parallélisme avec l'activité et l'utilité des schémas.

Calcul d'angles de proche en proche

Théorèmes à disposition pour le premier exercice :

Th1 : *Si* $\widehat{xAy}$ *et* $\widehat{yAz}$ *sont adjacents, alors* $\widehat{xAz} = \widehat{xAy} + \widehat{yAz}$.

Th2 : *Si* $\widehat{xAy}$ *et* $\widehat{yAz}$ *sont adjacents, alors* $\widehat{xAy} = \widehat{xAz} - \widehat{yAz}$.

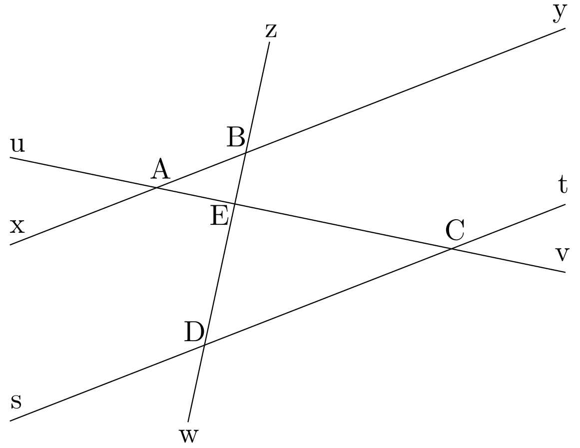
Th3 : *Si deux angles sont en position "opposés par le sommet", alors ils sont égaux.*

Th4 : *Si deux droites parallèles coupées par une sécante forment des angles "alternes-internes", alors ces angles sont égaux.*

Th5 : *Dans un triangle, la somme des angles est* $180°$.

Premier exercice :

Dans la figure ci-dessous, on donne : $\widehat{EDC} = 58°$ et $\widehat{BEC} = 88°$. Calcule l'angle $\widehat{xAE}$.



Première démarche :

- Premier angle calculé :

à partir de .... par ....

- Second angle calculé :

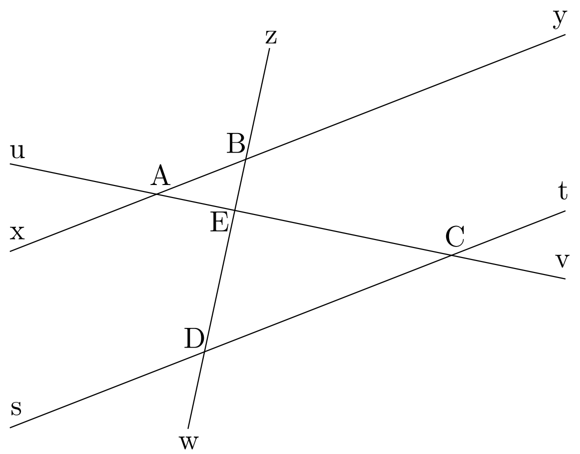
à partir de .... par ....

- Troisième angle calculé :

à partir de .... par ....

- Quatrième angle calculé :

à partir de .... par ....



Seconde démarche :

- Premier angle calculé :

à partir de .... par ....

- Second angle calculé :

à partir de .... par ....

- Troisième angle calculé :

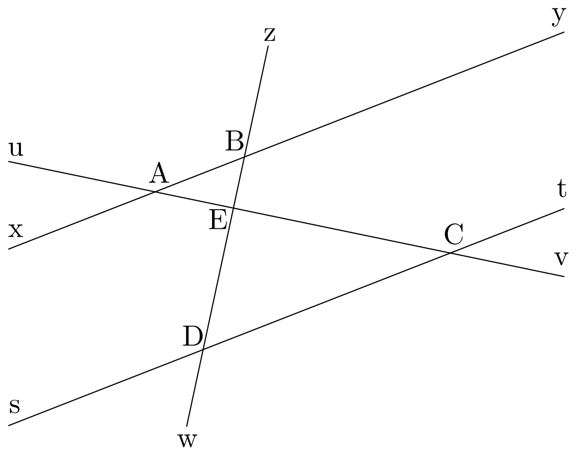
à partir de .... par ....

- Quatrième angle calculé :

à partir de .... par ....

Calcul d'angles de proche en proche (suite 1)

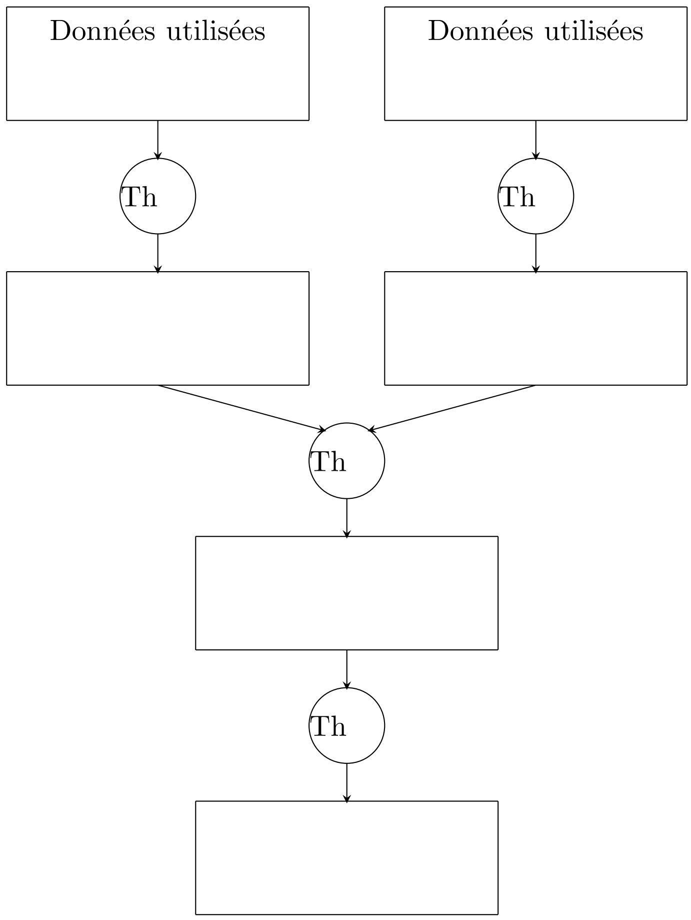
Voici la démarche de Jonathan :



Démarche :

- Premier angle calculé : $\widehat{AEB}$ à partir de $\widehat{BEC}$ par le Th2 ;
- Second angle calculé : $\widehat{EBA}$ à partir de $\widehat{EDC}$ par le Th4 ;
- Troisième angle calculé : $\widehat{EAB}$ à partir de $\widehat{AEB}$ et $\widehat{EBA}$ par le Th5 ;
- Quatrième angle calculé : $\widehat{xAE}$ à partir de $\widehat{EAB}$ par le Th2 ;

1. Rédige cette démarche d'une nouvelle façon en complétant le schéma ci-dessous :



2. Au dos de cette page, rédige avec ton voisin de table une autre démarche pour trouver l'angle de proche en proche, avec un schéma du même type.

Calcul d'angles de proche en proche (suite 2)

Théorèmes à disposition pour le second exercice :

Th1 : *Si $\widehat{xAy}$ et $\widehat{yAz}$ sont adjacents, alors $\widehat{xAz} = \widehat{xAy} + \widehat{yAz}$.*

Th2 : *Si $\widehat{xAy}$ et $\widehat{yAz}$ sont adjacents, alors $\widehat{xAy} = \widehat{xAz} - \widehat{yAz}$.*

Th3 : *Si deux angles sont en position "opposés par le sommet", alors ils sont égaux.*

Th4 : *Si deux droites parallèles coupées par une sécante forment des angles "alternes-internes", alors ces angles sont égaux.*

Th5 : *Dans un triangle, la somme des angles est* $180°$.

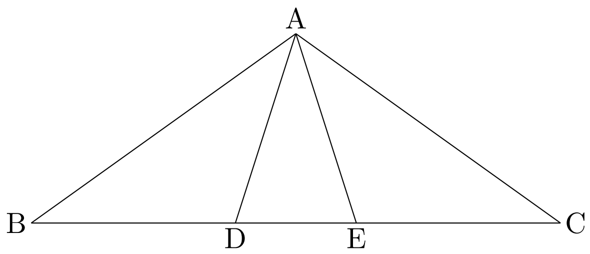
Th6 : *Si un triangle est isocèle, alors les angles à la base sont égaux.*

Th7 : *Si deux angles d'un triangle sont égaux, alors le triangle est isocéle.*

Second exercice :

Dans la figure ci-dessous, le triangle ABC est isocèle de sommet principal A.
On donne $\widehat{BAD} = \widehat{DAE} = \widehat{EAC} = 36°$

1. Calcule l'angle $\widehat{DEA}$.



Démarche :

- Premier angle calculé :

à partir de .... par ....

- Second angle calculé :

à partir de .... par ....

- Troisième angle calculé :

à partir de .... par ....

- Quatrième angle calculé :

à partir de .... par ....

2. Combien y-a-t-il de triangles isocèles dans cette figure ? ....

Justification : rédige ta démarche en plusieurs pas séparés, en indiquant pour chaque pas le théorème utilisé :

....
....
....
....
....
....
....

Calcul d'angles de proche en proche

Intentions des auteurs

Le calcul d'angles est l'occasion de faire de la démonstration en géométrie dès la classe de cinquième. Ce type d'activité permet le passage de la géométrie instrumentée à la géométrie "exacte" qui repose sur la démonstration. Elle est un prolongement de l'activité précédente "Les dents vertes", dans la mesure où les schémas de démonstration sont réinvestis. Cette activité permet aussi de mettre en scène la pluralité des démonstrations et donc de valoriser la prise d'initiative chez les élèves.

Compte-rendu d'observation en classe

13h50, début de l'activité. Le professeur (P) distribue la première page. La figure a été reproduite au tableau préalablement. P demande de placer les angles de 58° et 88° au bon endroit sur la figure. Certains élèves ont du mal à repérer les angles. P demande à un élève de venir le faire au tableau : l'élève le fait correctement et place aussi un point d'interrogation pour l'angle recherché. P explique aux élèves qu'ils vont devoir trouver un "chemin de calcul" qui leur permette d'obtenir l'angle recherché. Pour mettre en évidence ce chemin, il vont numéroter sur la figure les angles intermédiaires, dans l'ordre où ils seront calculés. Puis P explique la rédaction demandée dans la feuille sous l'intitulé "Première démarche". La plupart des élèves ne voient pas clairement ce qu'ils doivent mettre à la place des pointillés dans les rubriques "angle calculé : ...", "par ..." et "à partir de ...". P insiste pour qu'ils lisent la feuille. Au bout de quelques instants, un élève indique qu'il y a des théorèmes énoncés en début de feuille. P demande à un élève de les lire ; à chaque étape, un de ces théorèmes devra être cité dans la rubrique "par ...". Ensuite, il explicite le mot "adjacent" présent dans le Th1 à l'aide d'un dessin au tableau. Y a-t-il un autre théorème possible à partir de la même configuration ? Les élèves lèvent tous le doigt : le Th2 pour le calcul de l'autre angle par soustraction. P demande s'ils utilisent souvent ce théorème : un élève répond "oui pour le calcul d'un angle par rapport à un angle plat". D'autres questions ? Un élève demande si on est obligé de faire une démarche en 4 pas ; P répond qu'il ne sait pas si on peut faire mieux. Un élève demande si les angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{EDC}$ sont adjacents ; P rappelle que deux angles adjacents doivent avoir le même sommet et donne un nouvel exemple sur la figure. C'est maintenant le moment de se lancer dans la recherche. Les élèves travailleront par deux.

P donne un gros quart d'heure de réflexion à la classe. Les élèves ont beaucoup de mal à démarrer, mais en leur laissant du temps, ils osent franchir le premier pas et se débloquent peu à peu. Par exemple, l'un d'eux trouve une démarche en 6 pas puis se rend vite compte que sa démarche est redondante : il descendra à 5 puis à 4 pas.

Au bout d'une vingtaine de minutes, P interrompt la recherche et envoie un élève au tableau expliciter puis rédiger sa démarche. Il y a une difficulté de rédaction pour le théorème 5 pour lequel "on part de deux angles" : une élève demande si on doit noter les deux angles ou uniquement le triangle dans lequel on se place. Un autre a du mal à voir le dernier pas : P rappelle la définition des angles alternes-internes grâce à un dessin au tableau.

P demande alors si une autre démarche a été trouvée dans la classe. Un élève en propose une, en fait très similaire à la première : il y a seulement une inversion des deux dernières étapes. Un élève veut présenter encore une autre démarche mais P lui propose d'indiquer seulement les angles qu'il a utilisés, et dans quel ordre, en les numérotant sur la figure du tableau. Il demande alors à tous les élèves de rédiger cette démarche sur la feuille, sous la rubrique "Seconde démarche". De nombreux élèves bataillent, ils ont dû mal à s'imprégner d'une démarche qui n'est pas la leur. Après une petite dizaine de minutes, la démarche est corrigée, plutôt difficilement, au tableau.

Pour terminer, P dessine un schéma de démonstration et demande d'y retranscrire la première démarche qui a été explicitée pendant la séance, pour le lendemain. Il mentionne que dans les ronds, on notera le numéro des théorèmes et il marque l'angle recherché dans le rectangle du bas. La sonnerie retentit pendant que les élèves copient le schéma dans leur classeur.

Reprise de l'activité le lendemain, P distribue la seconde feuille en début de seconde séance. P trace à nouveau la figure au tableau. Il vérifie le travail à la maison : un tiers de la classe ne l'a pas fait du tout. P veut connaitre la raison, pas de réponse. Un élève passe au tableau pour corriger et P lui demande d'ajouter sur la figure, au fur et à mesure, la valeur trouvée pour chaque angle et d'écrire sur le côté les calculs qui ont permis de la déterminer.

P demande s'il faut ré-expliquer. Une élève de bon niveau bloque toujours sur le passage de la démarche au schéma. P montre à nouveau la concordance entre un pas de rédaction et un pas du schéma. Il montre qu'il y a une inversion dans l'ordre de l'écriture entre le schéma et la démarche rédigée. A ce moment, une élève dit qu'elle part de la fin pour rédiger le schéma. P en profite pour demander si des élèves sont aussi partis de la fin pour trouver l'ensemble de leur démarche pendant la recherche de la séance précédente : deux seulement l'ont fait. P explique que, parfois, il est judicieux de partir de la fin pour trouver le raisonnement, mais que pour la rédaction, on écrit en partant des angles connus.

P écrit une nouvelle consigne au tableau pour un travail en binômes : « Au dos de la feuille, rédiger dans un schéma de démonstration, la deuxième démarche corrigée au tableau ». Malgré le travail en binôme, un tiers de la classe n'est pas allé au bout du schéma. Ces élèves ne sont-ils pas bloqués par la notation des angles ?

Pour "essayer de gagner du temps pour finir le travail ramassé", P échange la page n°2 contre la page n°3 uniquement lorsqu'ils ont fini. P savait qu'il n'aurait pas le temps de terminer l'exercice sur les triangles isocèles dans la séance et c'était une façon de différencier : les moins forts essayant de terminer le schéma de démonstration qui était l'objectif principal de l'activité ; les plus forts s'attaquant (pour le fun) à un exercice non indispensable qui présentait un aspect "énigme".

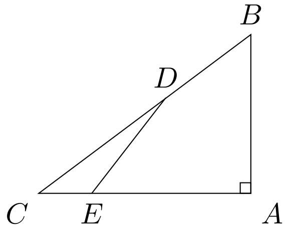
P distribue maintenant la troisième page, le but étant ici de trouver combien de triangles isocèles contient une figure, avec comme aide, un angle à calculer. Sur la question intermédiaire, le calcul de l'angle $\widehat{DEA}$, de nombreuses questions : tout d'abord une réflexion sur le nombre de pas, puis certains élèves pensent qu'il manque un théorème. Un angle est découpé en trois donc, au premier abord, on a l'impression qu'on n'a pas le théorème adéquat : en fait, c'est le Th1 appliqué deux fois. La fin du cours est arrivée, P demande de finir l'activité pour le lundi.

Bilan, discussion de certaines modalités, alternatives, suites

- Pour le schéma de démonstration, sur les copies on peut remarquer plusieurs fois la même

erreur : à l'intersection des deux branches, certains élèves additionnent la valeur des angles. Alors que c'est une soustraction à 180° : peut-être l'habitude ?
- L'idée de schéma de démonstration n'est pas très intuitive pour beaucoup d'élèves ; réaliser cette activité après celle des dents vertes atténue cette difficulté.

De l'aire



Voici un problème :
Dans la figure ci-contre, on connaît les longueurs AB, AC, BC, CD et CE. Peut-on calculer l'aire du triangle CDE ?

Le but de l'activité n'est pas de calculer l'aire du triangle CDE tout de suite, mais de savoir comment faire pour la trouver. C'est à dire quels théorèmes ou quelles formules on peut utiliser, pourquoi on est sûr de pouvoir les utiliser et ce que cela nous apporte comme informations.

Voici ce que tu dois faire :

1) Rédige un paragraphe ou fais un schéma de démonstration qui permette de trouver l'aire du triangle CDE.
Tu feras attention à bien vérifier les hypothèses d'un théorème avant de le faire intervenir (c'est à dire expliquer pourquoi on peut l'utiliser). Pour utiliser les formules d'aires tu préciseras à quel triangle ou à quelle figure elles s'appliquent.

2) Tu peux maintenant résoudre l'exercice suivant :

Enoncé : *Un agriculteur possédant un champ se voit signifier l'expropriation d'un morceau de sa parcelle en vue de la construction d'une autoroute. La figure ci-dessus, qui n'est pas à l'échelle, représente le champ de l'agriculteur : c'est le triangle rectangle ABC. Le triangle CDE représente le morceau pris pour la construction de l'autoroute. Sachant que AB = 318 m, BC = 530 m, AC = 424 m, CE = 106 m et CD = 212 m, calcule l'aire du morceau perdu par l'agriculteur.*

De l'aire

Éléments du programme directement en rapport avec l'activité

Géométrie : La résolution de problèmes a pour objectifs :
- *de connaître les objets usuels du plan et de l'espace, de calculer les grandeurs attachées à ces objets ;*
- *de développer les capacités heuristiques, les capacités de raisonnement et les capacités relatives à la formalisation d'une démonstration.*

Intentions des auteurs

L'activité proposée se décompose en deux parties :
- La première partie fait travailler les aspects heuristiques de la résolution d'un problème. C'est à dire prendre du recul pour trouver le schéma de la démonstration. Il ne s'agit pas d'obtenir une rédaction formalisée. On cherche à développer la prise d'initiative chez l'élève suivant deux axes :
  - Intervenir sur le dessin en rajoutant un ou des segments ;
  - Choisir une méthode qui permette la résolution de l'exercice.
- La deuxième partie est une application concrète de l'étude précédente. Elle permet d'aboutir à une rédaction détaillée.

Remarque : C'est l'occasion de retravailler le calcul d'aire soit par une formule, soit par découpage.

Déroulement possible

L'activité est prévue pour se dérouler sur une séance avec possibilité de faire rédiger au propre un paragraphe à la maison. Le travail peut être fait de manière individuelle ou collective.

Première partie :

- Projection de la figure au tableau et distribution de cette même figure à tous les élèves pour qu'ils puissent agir dessus.
- Explication du but de l'exercice. Lecture de l'énoncé par un élève.
- Questions éventuelles sur les termes de l'énoncé.
- Réponse aux éventuelles questions.
- Recherche individuelle des élèves pour répondre aux questions :
  Que cherche-t-on ? Comment y arriver ?
  Pour débloquer les recherches, il est possible de rappeler la formule de l'aire d'un triangle. Si vraiment rien n'est trouvé, on peut demander de tracer une hauteur du triangle CDE. Peut-on alors obtenir le résultat ? On rappelle qu'il y a trois hauteurs dans un triangle. On en trace donc une deuxième et on voit si l'on peut obtenir un résultat.
- Mise en commun des différentes recherches.
- Rédaction d'un schéma de démonstration. Un élève passe au tableau pour expliquer sa démarche. Il doit pouvoir répondre à la question : « Pourquoi est-on sûr que nous pourrons

obtenir le résultat voulu ? »
- Recherche d'autres idées ou variantes que l'on peut exposer.

Deuxième partie :

On demande de résoudre et de rédiger l'exercice de la question 2) pour la séance suivante.
Remarque sur la figure : la figure donnée dans la fiche élève permet d'éviter de croire que la hauteur issue de A passe par D. Dans une classe où l'activité a été testée, une autre figure laissait un doute et a induit des élèves en erreur. Les difficultés sont suffisantes pour ne pas rajouter cette ambigüité.

Remarque sur la partie 2 : La seconde partie peut être donnée indépendamment en devoir à la maison sans qu'on ait traité la première partie. À cet effet les données de l'exercice 2 sont faites pour que les élèves ne puissent pas faire une figure à l'échelle et mesurer la hauteur. Ainsi, il leur faut absolument faire une démonstration.
Dans le cas d'un devoir à la maison, on valorisera l'aspect recherche personnelle.

Compte-rendu de l'activité en classe

Première partie :

La figure a été projetée au tableau et la fiche élève distribuée à tous les élèves. Un élève a lu l'énoncé du problème. Il a été rappelé que le but n'était pas de rédiger complètement mais de trouver une méthode.
Avant de commencer la recherche, le professeur a demandé s'il y avait des questions. Deux questions successives sont apparues immédiatement dans les deux classes observées :
- Quelle est la formule de l'aire d'un triangle ?
- Quelle est la définition d'une hauteur ?

Les réponses à ces questions ont été notées au tableau avec un exemple pour la hauteur.
Dans une des deux classes, le nom du théorème de Thalès est assez rapidement apparu. Cependant, le fait qu'il n'y ait pas de valeur pour les longueurs connues a gêné la plupart de élèves. Pour y remédier il a été demandé d'entourer les valeurs connues dans chaque formule utilisée. Certains élèves ont tout de même préféré utiliser les données du deuxième exercice pour trouver l'aire. Le schéma de la démonstration a été mis au tableau et les élèves ont commencé à rédiger la solution de la deuxième partie, qui a dû être terminée à la maison.

Dans l'autre classe, le schéma de la démonstration a été plus laborieux à trouver. Il a fallu faire tracer les trois hauteurs du triangle pour que le nom du théorème de Thalès apparaisse. En outre, certains élèves ont été persuadés que sur la figure, la hauteur issue de A passait par D (La figure donnée maintenant dans la fiche élève évite cet écueil).

En ce qui concerne l'application du théorème de Thalès, certains élèves, dans les deux classes, n'avaient pas vérifié que les droites étaient parallèles. Il a donc fallu leur demander pourquoi elles l'étaient, la réponse a vite été trouvée, la propriété à utiliser étant bien connue.

Deuxième partie :

Lorsque la première partie a été faite en classe, la rédaction de la solution n'a pas posé de problème et la plupart des élèves ont rédigé correctement la solution de l'exercice.

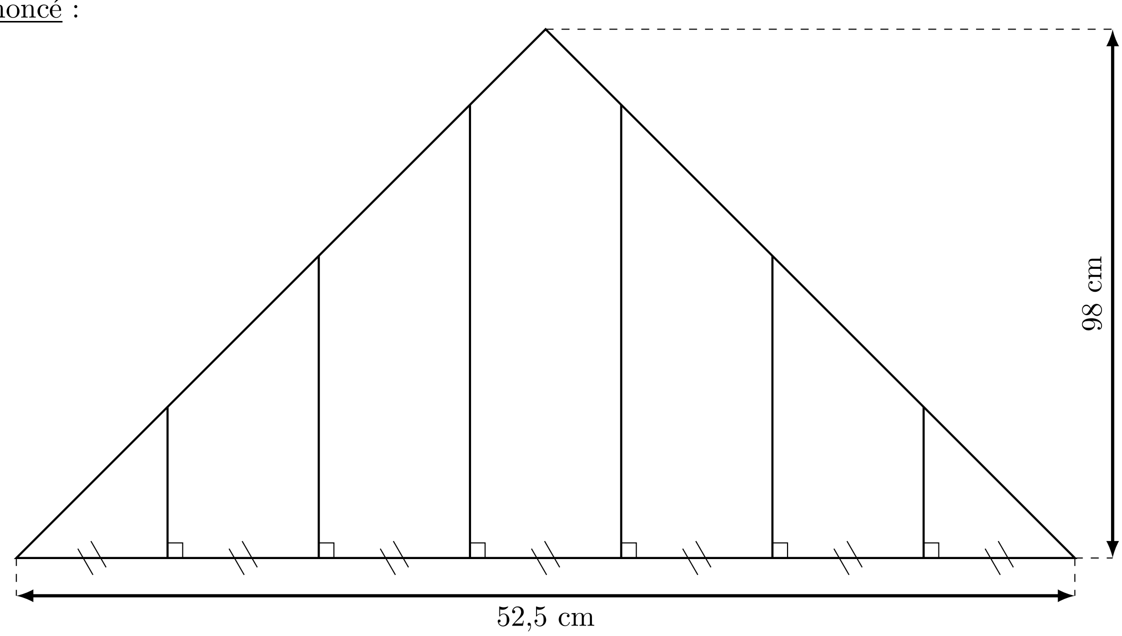
Dans le cadre de sa version devoir à la maison, trois méthodes sont ressorties :

- Construction du triangle en vraie grandeur (impossible avec les nouvelles données proposées). Certains élèves ont construit le triangle avec les vraies mesures puis ils ont tracé la hauteur issue de E et ont mesuré celle-ci. La formule de l'aire a alors été appliquée. Cette méthode a été acceptée avec la remarque qu'évidemment elle ne fournissait pas un résultat exact puisque la longueur de la hauteur n'est pas exacte, étant issue d'une mesure et non d'un calcul.
- Utilisation du théorème de Thalès.
  Les élèves ont tracé la hauteur [DH] issue de D, puis calculé DH grâce au théorème de Thalès. Des erreurs ont pu être commises mais dans l'ensemble les hypothèses du théorème ont été vérifiées. Le calcul de l'aire du triangle a alors été fait par soustraction de l'aire de EDH à celle de CDH, qui sont tous les deux des triangles rectangles.
- Utilisation des théorèmes de Pythagore et de Thalès.
  Un élève a tracé une droite parallèle à (AC) passant par D. Cette droite coupe [AB] en H. Grâce au théorème de Thalès, il a calculé BH puis grâce au théorème de Pythagore il a calculé DH. Il a ensuite calculé l'aire des trapèzes DHAE et DHAC. L'aire de EDC a été obtenue par soustraction de l'aire du trapèze DHAE à celle de DHAC.

Bilan, discussion de certaines modalités, alternatives, suites

Pour prolonger l'activité, il est possible de donner l'exercice ci-dessous en devoir à la maison. Il reprend les mêmes intentions : intervention graphique et prise d'initiative.

<u>Enoncé</u> :



On veut protéger une lucarne en forme de triangle isocèle par des barreaux régulièrement espacés comme le montre le dessin ci-dessus. Calculer la hauteur de chaque barreau.

I prove or I object

*Une **conjecture** est une supposition, celle-ci peut être vraie mais elle peut également être fausse.*

Voici une liste de conjectures :

1. Pour tout nombre entier n, le produit $n(n+1)$ est pair.
2. Pour tous nombres a et b, on a $(a+b)^2 = a^2 + b^2$.
3. Un nombre qui se termine par 7 est un nombre premier (c'est-à-dire un nombre qui est divisible par 1 et par lui-même seulement).
4. Le carré de n'importe quel nombre est toujours positif.
5. La somme de deux fractions inférieures à 1 reste inférieure à 1.
6. Si a est un nombre entier, alors $\sqrt{a}$ ne peut jamais être un nombre entier.
7. Pour tout nombre entier n, le produit $(n-1)n$ est pair.
8. Pour tout nombre x, $x^2 + 2x$ est toujours positif.
9. Pour tous nombres a et b, on a $(a-b)^2 = a^2 - b^2$.
10. Pour tout nombre x, on a : $x(2+3x) + (x-x^2) - 3x = 0$.
11. Pour tout nombre x, on a : $2x(1+x) - (2x+x^2) = 0$.
12. Pour tout nombre entier n, on a $\frac{2^n}{1000} < 1000 \times n^2$.
13. Le nombre $(n-1)n(n+1) + n$ peut s'exprimer sous la forme d'un cube.

Voici ce que tu dois faire

Que penses-tu de chacune des conjectures ci-dessus : Vraie ou Fausse ?

- si ta réponse est "Vraie", justifie en quelques mots ;
- si ta réponse est "Fausse", justifie par un exemple.

Pour t'aider, nous allons traiter les deux premiers cas :

La conjecture 1. est vraie. En effet :
- ou bien n est pair et donc le produit $n(n+1)$ est pair ;
- ou bien n est impair, d'où $n+1$ est pair et donc le produit $n(n+1)$ est pair.

La conjecture 2. est fausse. En effet, si on choisit a égal à 1 et b égal à 2,
- alors $(a+b)^2 = (1+2)^2 = 3^2 = 9$;
- tandis que $a^2 + b^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$.

Donc, l'égalité n'est pas vérifiée.

Remarque :
Pour prouver que la conjecture 2. est fausse, il a suffi de construire un exemple qui ne fonctionne pas, cela s'appelle un **contre-exemple**.

I prove or I object

Intentions des auteurs

L'objectif de cette activité est double. D'une part, il s'agit de clarifier le rôle des exemples et des contre-exemples en matière de démonstration. Les élèves ont souvent tendance à justifier un résultat par un exemple faisant office de preuve. Ils ont du mal à comprendre la nécessité d'utiliser une démonstration pour justifier une conjecture alors qu'un contre-exemple suffit à l'infirmer. D'autre part, ils ont très peu l'occasion de rencontrer des démonstrations dans le domaine numérique, ce qui les pousse à associer trop systématiquement la démonstration à la géométrie. En pratique le collège consacre une grande part au domaine numérique, il est donc naturel de traiter également la démonstration à travers ce thème.

Déroulement possible

L'activité est prévue pour se dérouler sur une séance d'une heure, elle peut se décomposer de la façon suivante :

- Lecture de l'énoncé par un élève.
- Questions éventuelles sur le vocabulaire introduit par l'énoncé.
- Explication du travail à faire en s'appuyant sur la correction des deux premières conjectures données dans la fiche.
- Recherche individuelle des élèves.
- Mise en commun des différentes recherches.

<u>Remarque :</u>

- Pour éviter que les élèves en difficultés ne soient trop perdus et pour homogénéiser les vitesses de résolution, il est préconisé d'alterner recherche individuelle et mise en commun.
- Même si cette séance était prévue à l'origine pour se dérouler en une heure, à chaque fois qu'elle a été testée en classe, elle n'a pu être finie.

Premier compte-rendu d'observation en classe

La séance a lieu le vendredi 2 avril (veille des vacances) de 14h40 à 15h35. La classe comporte 28 élèves dont 26 présents et le collège est considéré comme privilégié. Dans le compte-rendu qui va suivre, le professeur sera désigné par P et les élèves par E.

Le professeur commence par préciser que la séance du jour sera un peu particulière et qu'elle donnera peut-être lieu à un devoir à faire à la maison ; le travail commencera par une recherche individuelle puis débouchera rapidement sur une mise en commun.

En préalable à la résolution de l'activité proprement dite, il écrit au tableau le rappel d'un énoncé et de sa réciproque que les élèves avaient étudiés précédemment à l'occasion du travail sur énoncé direct, énoncé réciproque et énoncé contraposé à propos des théorèmes de Pythagore et Thalès :

Enoncé direct	Pour tout nombre entier n, si n est divisible par 6, alors n est divisible par 3.
Enoncé réciproque	Pour tout nombre entier n, si n est divisible par 3, alors n est divisible par 6. (La réciproque est énoncée par un élève).

La vérification des deux énoncés est redemandée aux élèves. Le professeur interroge des élèves afin de vérifier l'énoncé dans le sens direct :
E : Pas d'argument.
E : 6 c'est un multiple de 3, donc si c'est divisible par 6 alors par 3 aussi.
Le professeur écrit la justification ($6 = 3 \times 2$) au tableau à côté de l'énoncé direct et valide.
En ce qui concerne l'énoncé réciproque, peu d'élèves ont des idées. Le professeur propose alors une stratégie :
P : On peut regarder sur des exemples.
E : 9 est divisible par 3 mais pas par 6, ceci est un contre-exemple. (La phrase est écrite par le professeur au tableau à côté de l'énoncé réciproque).

Le professeur revient alors au sujet de l'activité pour expliciter le travail qui sera demandé aux élèves. Il leur distribue les feuilles polycopiées, puis, il indique quoi faire :
P : Lire la page en entier et surtout la 2ème moitié. Vous avez 5 minute. La plupart des élèves lisent, un ou deux en profitent pour discuter.

Au bout de 5 minutes le professeur reprend la parole pour continuer les explications concernant l'activité :
P : Qu'est-ce qui se passe dans les exemples ?
E : On a la réponse aux deux premières questions.
P : Pour (1.), on fait deux cas. Pour (2.), on fait quoi ?
E : Un contre-exemple.
P : Ca sert à montrer que ça ne marche pas.
P : Donc vous faites pareil à partir du (3.).

Le professeur invite alors les élèves à travailler en autonomie sur les différents énoncés afin de les confirmer ou de les infirmer. A ce moment, le professeur s'installe volontairement à son bureau faisant autre chose afin de laisser s'installer un temps de recherche. Il oblige ainsi les élèves à réfléchir par eux-même et à élaborer leur propre startégie. Puis le professeur passe dans les rangs, se renseigne sur les méthodes, sur les stratégies et donne des aides.

Au bout d'un dizaine de minutes, une nouvelle mise en commun est proposée :
P : On commence avec le (3.).
E : C'est faux car $27 \div 3 = 9$, donc 27 n'est pas premier. (le professeur écrit cette proposition au tableau).
P : Pour le (4.) ?
E : Oui, car on sait que le carré d'un nombre est son produit par lui-même. Le nombre est positif ou négatif, mais le produit, lui, est positif : $x \times x = x^2$; $(-x) \times (-x) = x^2$.
P : En fait, le début de ta réponse était suffisant.
P : On va détailler :

Si le nombre est positif : le produit du nombre par lui-même est positif.
Si le nombre est négatif : le produit du nombre par lui-même est positif.
(Les deux dernières lignes sont écrites au tableau).
P : On appelle cette démonstration : une démonstration par disjonction de cas, on fait plusieurs cas. Faire des cas pour regarder les points essentiels.
P : Pour le (v) ?
P : Qui a une réponse ? (certains sont pour Vrai, d'autres pour Faux).
P : La parole est à ceux qui pensent que c'est Faux.
E : Par exemple : $\frac{12}{13} + \frac{8}{13} = \frac{20}{13}$ (les deux termes de la somme sont inférieurs à 1, tandis que le résultat est supérieur à 1). (Le professeur écrit cette proposition au tableau).
P : C'est un contre-exemple, qui en a un autre ?
E : $\frac{4}{6} + \frac{5}{9}$.
P : Calcul plus dur.
E : Je l'ai fait à la calculette.
Plusieurs élèves ont trouvés différents contre-exemples. On peut également citer : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.
Le professeur laisse alors les élèves continuer leur réflexion et étudier les propositions suivantes.

Il passe dans les rangs et insiste pour que les élèves bloqués essayent au moins quelques exemples par écrit.
Au bout de quelques minutes, et voyant l'heure avancer, il propose aux élèves de regarder directement le (xii) espérant que de part sa rédaction, celui-ci entrane un dialogue au sein de la classe entre les élèves partisans du Vrai et les élèves partisans du Faux. La difficulté à l'air de décourager certains dans un premier temps. Mais au bout de quelques minutes, une bonne partie de la classe cherche à résoudre le problème. Le professeur aide quelques élèves en rappelant l'utilisation de la touche puissance à la calculatrice.
La sonnerie retentit.

Le professeur donne alors le travail à faire et énonce une phrase afin de conclure la séance :
P : Je dicte la phrase de conclusion : « Pour démontrer qu'un énoncé général est faux, un contre-exemple suffit. Par contre, pour démontrer qu'un énoncé général est vrai, des exemples ne suffisent pas, il faut une démonstration générale. »

Deuxième compte-rendu d'observation en classe

Cette activité a été proposée à une classe de troisième d'un collège classé ZEP. La classe comporte une vingtaine d'élèves avec 3 à 5 élèves présentant un bon niveau par rapport au reste de la classe. Cette activité a été réalisée en début d'année avant le chapitre sur le calcul littéral.

La première chose à noter est que, dès le début de la séance, les élèves sont restés perplexes face au travail demandé. En effet, la forme de l'énoncé était nouvelle pour eux. Ils disposaient de beaucoup plus de liberté que d'habitude. Cette absence de cadre rigide dans lequel les élèves ont l'habitude de travailler a énormément gêné le bon déroulement de la séance obligeant le professeur à déployer plus d'énergie pour motiver la classe.

Concernant le déroulement de l'activité en lui-même, le travail a difficilement été compris. Plusieurs exemples et explications ont été nécessaires pour que la majorité des élèves comprenne le travail demandé. De plus, la notion de contre-exemple n'étant pas acquise, il a fallu beaucoup de temps pour que les élèves arrivent à voir les cas où un contre-exemple suffit et les cas où il faut faire une démonstration avec des arguments. Malgré cela, de nombreuses confusions ont persisté. En effet, ceux-ci ont trouvé l'activité extrêmement difficile et n'ont donc pas pu se l'approprier. La suite logique fut un manque de dynamisme et une absence de débat face aux différentes conjectures.

En ce qui concerne l'objectif de l'activité, la majeure partie de la classe s'est très vite retrouvée démotivée laissant le soin à seulement deux ou trois élèves de chercher les réponses souhaitées. Ceux-ci cherchaient de leur côté, et quand une réponse émergeait, le reste de la classe acquiesçait sans réfléchir. De plus, les deux ou trois élèves qui cherchaient ont montré peu d'initiative face aux différentes conjectures, pratiquement aucun test préalable n'a été effectué pour décider de la véracité d'une conjecture, les réponses étaient plutôt données à l'emporte pièce et lorsqu'il fallait justifier, les arguments étaient fallacieux.

Bilan, discussion de certaines modalités, alternatives, suites

L'activité semble relativement difficile à réaliser dès le début de l'année. Il faut un travail préalable sur différentes notions (contre-exemple, test...) afin que les freins au bon déroulement de l'activité soient levés avant son début. De plus, une tête de classe dynamique et travailleuse semble indispensable pour entraîner le reste de la classe. Enfin, l'activité est un peu longue pour une heure, il peut être souhaitable de diviser en deux la liste des questions pour traiter la deuxième partie ultérieurement dans l'année ; on atténue ainsi les difficultés suscitées par la première rencontre.

Divisibilité par 2 ou par 5

Cette activité est proposée à une classe de sixième, aucun support écrit n'est distribué aux élèves. Les questions ci-dessous peuvent servir de cavenas pour le déroulement du travail. Elles sont notées au fur et à mesure au tableau et réécrites par les élèves sur leur cahier.

Retrouver le critère de divisibilité par 2

1) Que veut dire qu'un nombre est divisible par 2 ?
2) Comment peut-on savoir facilement qu'un nombre est divisible par 2 ?

Démonstration du critère de divisibilité par 2

Question principale : Démontrons ce critère, c'est-à-dire : « Pourquoi est-il toujours vrai ? »

1) Comment décomposer le nombre en isolant les unités ?
2) Pourquoi ne regarde-t-on que les unités dans le critère ?
3) Conclure.

Démonstration du critère de divisibilité par 5

Faire la démonstration du critère de divisibilité par 5 en faisant le même raisonnement que pour le critère de divisibilité par 2.

Divisibilité par 2 ou par 5

Intentions des auteurs

Le but de cette activité est de donner aux élèves une initiation à la démonstration dans le domaine numérique et dès la Sixième. Pour cela, on va démontrer le critère de divisibilité par 2. Puis en s'appuyant sur le même principe de démonstration, on démontrera celui par 5.

A travers cette activité, on a souhaité organiser une première rencontre entre des élèves de sixième et la démonstration. Plus précisément, cette première rencontre concernait la démonstration dans le domaine numérique. En effet, ces démonstrations sont souvent négligées bien que ce domaine joue un rôle central dans l'apprentissage des élèves tout au long du collège. L'idée était, dans un premier temps, de faire apparaître la possibilité d'une démonstration pour valider un énoncé déjà connu, puis, à partir des connaissances des élèves, d'élaborer un raisonnement aboutissant à cette démonstration. Ensuite, les élèves seraient invités à reproduire ces mêmes raisonnements pour valider d'autres énoncés.

Déroulement possible

Cette activité devra se faire en collaboration avec la classe pour la démonstration du critère par 2. Le critère par 5 sera laissé aux élèves à faire en autonomie. Nous allons maintenant donner quelques pistes possibles pour mener l'activité en classe.

Retrouver le critère de divisibilité par 2

1) Que veut dire qu'un nombre est divisible par 2 ?
Les élèves vont certainement citer le critère qu'ils connaissent déjà : « un nombre est divisible par 2 s'il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8 ». Il faut mettre de côté cette réponse et plutôt revenir à la définition même de la divisibilité : un nombre n est divisible par 2 s'il existe un nombre p tel que $n = 2 \times p$.
En effet, cette première question doit déboucher sur l'écriture d'une égalité utilisant cette définition. On obtient ainsi une égalité avec comme deuxième membre le produit de 2 par un autre nombre.
L'utilisation d'exemples peut permettre aux élèves de mieux comprendre cette égalité.

2) Comment peut-on savoir facilement qu'un nombre est divisible par 2 ?
Cette question doit ensuite permettre aux élèves de reformuler le critère de divisibilité par 2 vu en cours et sûrement cité par eux plus haut. L'objectif étant bien entendu de savoir comment passer de la première égalité au critère et donc de démontrer le critère.
La difficulté étant ici de bien faire comprendre que ce critère bien que intuitif n'est pas prouvé.

Démonstration de ce critère

Question principale : Démontrons ce critère, c'est-à-dire pourquoi est-il toujours vrai ?

1) Comment décomposer le nombre en isolant les unités ?

Le but de cette question est de trouver une écriture du nombre dans laquelle les unités soient "séparées" du reste. On pourra ensuite traiter séparemment la divisibilité par 2 des deux termes. Cette question doit permettre aux élèves d'arriver à écrire une phrase du type : ≪ N'importe quel nombre se décompose comme la somme d'un nombre multiple de 10 (correspondant au nombre de dizaines) et d'un nombre compris entre 0 et 9 (correspondant aux unités) ≫. Bien sûr, il faudra garder la phrase d'élève correspondant le mieux.
On peut, pour aider les élèves, montrer plusieurs exemples au tableau.

2) Pourquoi ne regarde-t-on que les unités dans le critère ?
L'objectif de cette question est de conclure que le premier terme (correspondant au nombre de dizaines multiplié par 10) est toujours divisible par 2. Cette question doit permettre aux élèves d'écrire une phrase du type : ≪ Or, le premier terme de cette somme est divisible par 10, donc il est divisible par 2 car $10 = 5 \times 2$ *≫. On ne regarde donc que le nombre correspondant aux unités.*
On peut ici pour aider les élèves poser des questions du type dans quelle table de multiplication a-t-on le nombre 10 ?

3) Conclure.
Cette dernière question permet de déduire le critère de divisibilité par 2. Ici, le but est de faire écrire aux élèves une phrase du type : ≪ Donc pour savoir si un nombre est divisible par 2, il suffit de regarder le chiffre des unités, s'il est divisible par 2, c'est-à-dire s'il est égal à 0, 2, 4, 6 ou 8, alors le nombre de départ est divisible par 2 ≫.
Normalement les élèves devraient avoir toutes les données pour conclure, cette étape ne devrait pas poser trop de problèmes.

Démonstration du critère par 5

Faire la démonstration du critère de divisibilité par 5 en faisant le même raisonnement que le critère de divisibilité par 2.

Dans cette partie, les élèves vont à partir d'une démonstration similaire à la précédente proposer la démonstration du critère de divisibilité par 5. Contrairement au critère par 2, ici les élèves seront laissés en autonomie pour réaliser cette démonstration.

Premier compte-rendu d'observation

Le professeur demande aux élèves de prendre leur cahier d'exercices, rappelle qu'il va être question des critères de divisibilité par 2 et 5, ainsi que cela avait été annoncé la semaine précédente.
Les questions sont écrites au tableau par l'enseignant, il est demandé aux élèves de les recopier sur leur cahier. La première question est : ≪ Que veut dire qu'un nombre est divisible par 2 ? ≫
Rapidement, les doigts se lèvent et un dialogue s'instaure :

E : Que le nombre finit par 0,2,4,6,8.
P : Ca c'est le reconnatre. Alors ?
E : Quand on fait la division, ça tombe juste.
P : Qu'est ce qu'on peut écrire alors comme égalité ?

E : Le résultat est 2.
Rappel de la définition par le professeur (au tableau) : ≪ On peut l'écrire $2\times$ un autre nombre, exemple $12 = 2 \times 6$ ≫.
Deuxième question : ≪ Comment savoir facilement qu'un nombre est divisible par 2 ? ≫
Réponse immédiate des élèves : ≪ On regarde le dernier nombre ... ≫
L'enseignant consent : ≪ Bon d'accord mais pourquoi ça marche ? C'est ça qu'on va regarder, pourquoi ça marche. ≫
Question supplémentaire : ≪ Qu'est-ce qu'une démonstration ? ≫
E : On démontre quelque chose.
P : Qu'est-ce que cela veut dire ?
E : Donner un exemple.
P : Non.
E : C'est montrer.
P : Et alors ?
E : On cherche pourquoi cela tombe toujours juste.
Réexplication par le professeur : démontrer c'est expliquer pourquoi cela marche tout le temps.
L'enseignant relance le problème sur le critère de divisibilité par 2 : ≪ On a dit qu'on ne regardait que le dernier chiffre, pourquoi ? comment on peut écrire un nombre en faisant ressortir le dernier chiffre ? Regardons un exemple : $1234 = 1230 + 4$, qu'est-ce que 123 ? ≫
E : (après quelques hésitations) Le nombre de dizaines.
Le professeur écrit sous $1230+4$: nbre de dizaines$\times 10$, + unités et commente : ≪ On peut faire ça sur n'importe quel nombre ≫. Quelques exemples.
E : Et si un nombre se termine par 0 ?
P : Oui, on peut, on écrit +0. Par exemple : $2630 = 263 \times 10 + 0$.
Le professeur demande alors aux élèves d'écrire sur leur cahier : ≪ N'importe quel nombre peut s'écrire nombre de dizaines $\times 10$ + unités ≫.
P : On peut alors revenir à la question : ≪ Pourquoi ne regarde t-on que les unités ? Pourquoi ne s'occupe-t-on pas du nombre de dizaines ? Pourquoi est-ce que celui-ci est toujours divisible par 2 ? ≫
E : .....
E : Le nombre de dizaines $\times 10$ est toujours divisible par deux car il se termine par 0.
P : Bon d'accord, mais on ne peut pas utiliser le critère.
E : ...
E : On peut écrire $\times 2 \times 5$.
P : Donc on peut écrire (il écrit au tableau) nbre de dizaines $\times\ 5 \times 2$ + unités.
P : On peut alors écrire sur le cahier : ≪ Si les unités sont divisibles par 2, c'est à dire égales à $0, 2, 4, 6$ ou 8, alors le nombre de départ est divisible par 2 ≫.

On passe alors à la démonstration du critère de divisibilité par 5. Le professeur écrit au tableau : ≪ Avec le même raisonnement, démontrer le critère par 5 ≫.
Les élèves commencent à chercher, à réécrire les questions transposées ... et la cloche sonne. Le travail est à faire pour le lendemain.

Commentaires

Comme la transcription ci-dessus ne l'indique pas, les réponses-élèves proviennent essentiellement de trois filles qui sont, pendant toute la séance, suspendues aux lèvres du professeur et tout à fait prises au jeu de donner des réponses, manifestant leur plaisir de comprendre. Les autres élèves, dans l'ensemble semblent suivre, en tout cas paraissent attentifs : ils notent, écoutent, ne bavardent pas. Le dialogue avec les élèves qui participent est très dynamique et très vivant. J'ai l'impression d'avoir assisté à une séance de maeutique, et c'est peut-être une bonne introduction à la démonstration.

Second compte-rendu d'observation

L'activité a aussi été proposée à une classe de sixième (17 élèves) d'un collège classé en ZEP. Elle a été donnée pendant le chapitre traitant de la division, après que les critères de divisibilité aient été rappelés. L'activité était initialement prévue sur une heure, mais les difficultés rencontrées ont obligé le professeur à la réaliser sur 1h30. le compte-rendu ci-dessous a é té rédigé par le professeur qui a fait passer l'activité.

Première heure

La partie traitant du critère de divisibilité par 2 a pris beaucoup plus de temps que prévu. Les élèves n'ont pas été capables de traiter seuls les questions. Le professeur a dû changer pendant la séance sa façon d'aborder l'activité. Il a traité tout le critère de divisibilité par 2 au tableau en cours dialogué avec les élèves pour répondre aux questions au fur et à mesure.

L'investissement nécessaire pour permettre aux élèves de bien comprendre chaque étape s'est révélé plus important que prévu. De plus, il est à craindre que les élèves n'ont pas acquis une vision globale de la démonstration du critère de divisibilité par 2. En outre, les élèves ont participé volontier ce qui a permis au cours de bien se dérouler. Cette implication des élèves n'est pas forcément acquise, il faut donc faire attention de proposer cette activité à une classe réceptive et volontaire.

Une fois le critère de divisibilité par 2 démontré, les élèves ont dû rédiger une démonstration du critère de divisibilité par 5 basée sur le même modèle. La sonnerie indiquant la fin du cours a sonné à ce moment. Les élèves avaient donc comme travail de finir le critère de divisibilité par 5 pour le prochain cours.

Deuxième heure

La rédaction de la démonstration du critère de divisibilité par 5 a bien été réussie par les élèves. Très peu d'erreur ont été notées. Par contre, on peut se demander si les élèves ont juste remplacé 2 par 5 dans la démonstration, ou s'ils ont réellement compris comment s'articulait cette démonstration. Les élèves interrogés pendant la correction ont montré une bonne compréhension de la démonstration. Malheureusement, les élèves ayant des difficultés ont tendance à rester silencieux pendant ce genre de correction. Ne pouvant interroger tout le monde, il est à craindre qu'une partie de la classe, s'étant contentée de remplacer 2 par 5 dans la démonstration, n'aura pas compris les démonstrations des critères par 2 et par 5.

Conclusion

Pour finir, même si elle est relativement difficile, une telle activité reste intéressante à proposer en classe (il faut pour cela avoir une classe motivée et dynamique). Elle permet une approche différente de la démonstration ne faisant pas intervenir la géométrie permettant ainsi aux élèves d'entrevoir tout un aspect de la démonstration souvent délaissé au collège.

Bilan, discussion de certaines modalités, alternatives, suites

La principale difficulté de cette activité est de justifier l'utilité de la démonstration du critère divisibilité par 2. En effet, les élèves connaissant ce critère depuis longtemps, ils ne comprennent pas l'utilité d'une telle dépense d'énergie. Cela gène le bon déroulement de la séance puisqu'il faut constamment justifier l'utilité d'une telle démarche et le fait que l'on ne puisse pas utiliser le critère pour valider le critère ! Pour éviter cette difficulté, il nous paraît important de rattacher la définition de la divisibilité en général à la division euclidienne (le cas où le reste est nul) et surtout de l'avoir mise en pratique de nombreuses fois. Dans ces conditions, les critères de divisibilité distinguent certains diviseurs et la question de savoir pourquoi eux et pas les autres peut motiver leur démonstration.

Dans ce cadre, une suite intéressante à cette activité serait de continuer avec la démonstration du critère de divisibilité par 4 qui permettrait de découvrir le critère en même temps.

On peut regretter que l'activité telle qu'elle a été testée passe complètement sur la distributivité. Il est sans doute contre-indiqué de trop alourdir la construction dynamique et interactive de la démonstration et d'ailleurs cette propriété n'apparaît que dans le programme de cinquième. Toutefois, on peut y faire allusion en énonçant par exemple : « la somme de deux nombres divisibles par 2 est, elle aussi, divisible par 2 ».

Enfin, il semble important avant une telle activité de réfléchir à comment manipuler la notion de "critère" avec les élèves. Dans la séance en question, les élèves en voient un bout (et de façon implicite), comme condition suffisante : si le critère est vérifié, on est sûr du résultat, mais on ne s'attarde jamais sur le fait que c'est une condition nécessaire. On peut dire aux élèves que c'est une façon alternative de reconnaître les mêmes objets sans revenir à leur définition, c'est-à-dire ici, savoir si un nombre est divisible par k sans effectuer la division par k. Une fois la démonstration du critère effectuée, on peut énoncer : « Les nombres divisibles par 2 sont ceux qui se terminent par 0, 2, 4, 6 ou 8 ».

Ce genre d'activité permet une bonne première rencontre de la démonstration en numérique. Il faut toutefois faire attention de la proposer à une classe motivée. Le risque étant sinon de réaliser un exercice de style pour le professeur plutôt que de faire réfléchir les élèves.

II.3 Aspects langagiers

Inefficacité du formatage en matière d'enseignement de la démonstration

On entend souvent dire que ce sont les élèves faibles qui ont le plus besoin de l'étayage du formatage : "S'ils commencent par apprendre par cœur un modèle de rédaction, la compréhension leur vient ensuite grâce à la possibilité d'agir offerte par ces automatismes". En fait les choses sont plus compliquées : dans le cas de l'application de la réciproque de Pythagore par exemple, pour beaucoup d'élèves, il y a conflit entre le modèle de rédaction enseigné et leur propre idée, leur propre conception de ce qu'est une réciproque. Ils préfèrent se lancer dans une démonstration personnelle dont le moins qu'on puisse dire est qu'elle n'est pas comprise par les correcteurs et très mal évaluée. On peut y voir l'indice du fait qu'en matière de raisonnement, les élèves n'aiment pas les démarches toutes faites. On leur demande de raisonner ; ils jouent le jeu, ils raisonnent certes, mais selon leur façon de voir à eux. L'objet "démonstration", l'idée même de "raisonnement" réactualisent en eux l'indéracinable désir de comprendre par soi-même, de donner du sens à ce que l'on fait.

Si c'est bien de cela qu'il s'agit, on peut faire l'hypothèse qu'enseigner la démonstration est difficile si l'on ne prend pas en compte chez le sujet qui apprend, non seulement sa façon de voir et de comprendre les choses en jeu, mais aussi sa façon de les exprimer. Une démonstration, un raisonnement serait quelque chose qui demande un engagement, qui, en se disant, se vit ou se revit de l'intérieur, tout le contraire d'un pattern qu'on pourrait appliquer tel quel.

La puissance du langage mathématique, obstacle paradoxal pour les élèves

A cet égard, il faudra veiller à ce que les mathématiques constituées, avec leur très forte cohérence et la très grande efficacité des théories présentées, ne fassent pas obstacle à l'apprentissage de la pensée scientifique ; à ce que le langage tout préparé de la discipline ne remplace pas le discours du sujet qui la pratique, ne paralyse pas son initiative ni ne l'empêche de faire ses expériences. Pour cela, nous proposons de ménager des étapes en langue naturelle avant d'aboutir à la forme "démonstration". Des consignes telles que "Comment cela se fait-il ?" ou "Expliquer pourquoi il en est ainsi", permettent aux élèves d'exprimer leur propre conception des choses. Et là commencent les surprises ! Beaucoup ne voient pas ce que nous pensons évident, beaucoup font des erreurs de raisonnement, expriment leurs idées à l'envers, etc. L'application d'un formatage cache souvent ces erreurs et par conséquent empêche leur traitement.

Nos choix concernant le vocabulaire des énoncés

Un certain nombre de mots du vocabulaire de la démonstration sont utilisés avec des acceptions différentes dans notre profession. Le sens varie d'un enseignant à l'autre, d'un ouvrage à l'autre, du Collège au Lycée, d'une époque à l'autre voire d'une mode à l'autre ...

Par exemple le mot "propriété" désigne un théorème ou un axiome dans l'expression "propriété de Thalès" (selon la façon dont la théorie est construite globalement), mais aussi bien les particularités d'une figure dans l'expression "les propriétés du rectangle". Dans ce dernier cas s'ouvre en outre la question de savoir s'il s'agit de propriétés caractéristiques ou pas : "avoir les côtés opposés de la même longueur" pourrait être une propriété du rectangle (propriété non suffisante) tandis qu' "avoir les diagonales de même milieu et de même longueur" pourrait être une propriété de quadrilatère pour être un rectangle (propriété suffisante) ; et "avoir quatre angles droits" serait à la fois une propriété du rectangle, une propriété pour être un rectangle et une définition du rectangle.

Autre exemple avec le mot "proposition". Au Lycée, il s'agit souvent d'un théorème de moyenne importance, tandis qu'en français au collège, c'est un énoncé élémentaire contenant un seul verbe conjugué ("proposition principale", "proposition subordonnée"). Dans ce cas, un théorème, même de moyenne importance, serait composé au minimum de deux propositions, sa prémisse et sa conclusion . Par ailleurs, en logique mathématique, une proposition est un énoncé, élémentaire ou composé, ayant la propriété d'être vrai ou faux.

Autre exemple encore avec le mot "hypothèses". Très utilisé autrefois pour désigner le "si" d'un théorème, il a ensuite été remplacé par "données" , tandis que le "alors" restait "conclusion" sans poser de problème. L'acception mathématique du mot "hypothèses" entrait en effet en conflit avec celle des sciences expérimentales où il s'agit plutôt de ce que les mathématiciens appellent, eux, une conjecture ! Mais "données" ne convient pas non plus car ce terme désigne des faits avérés tandis que les prémisses d'un théorème ont une valeur de vérité indéterminée.

Pour nous, les mathématiques du Collège ne peuvent pas construire leur vocabulaire en vase clos, au risque qu'il contredise celui que les élèves apprennent dans les autres disciplines. Il nous semble indispensable que le vocabulaire spécifique utilisé dans le cours de mathématiques soit explicité (nous donnons quelques exemples ci-dessous) et que l'on évoque les synonymes, les alternatives possibles pour désigner le même concept. Mais nous préconisons également que l'usage de ces concepts dans les autres disciplines soit rappelé et que les différences de significations soient commentées.

Propriété : lorsque ce mot est utilisé sans adjectif qualificatif c'est souvent parce qu'on omet l'adjectif "nécessaire" ; ainsi lorsque ce mot est utilisé dans des expressions comme "les propriétés du rectangle", il désigne les conclusions de tous les théorèmes commençant par "Si un quadrilatère est un rectangle, alors . . . ". Pour les autres acceptions, il convient d'utiliser "propriétés caractéristiques ou suffisantes". Il nous semble important, dans un souci de clarté pédagogique d'utiliser le mot "théorème" : "théorème de Thalès" "théorème de Pythagore", "théorèmes pour avoir un rectangle", pour désigner les objets de savoir qui vont justement être utilisés en tant que théorèmes.
Proposition : lorsque ce mot apparaît en classe de mathématiques, il est important d'en rappeler l'usage : un synonyme de "théorème". Selon le niveau de la classe, il peut être intéressant d'en rappeler les différentes définitions, en grammaire, en logique. . ..
Hypothèses : il nous semble préférable d'éviter ce mot, qui est source de confusions, et de le remplacer par "prémisses" pour le "si" d'un théorème ; de le remplacer par "conjecture" dans le contexte d'une démarche expérimentale, aussi bien en mathématiques qu'en sciences. Les "données" viennent réaliser les "prémisses" d'un théorème et celui-ci produit alors une

"conclusion". Un "énoncé" peut être vrai ou faux ; lorsqu'il n'est pas démontré mais qu'il est probable, l'énoncé est une "conjecture", et lorsqu'il est démontré, il devient un "théorème".

Nos choix concernant la rédaction des démonstrations

Commençons par la rédaction d'une démonstration à un pas, c'est à dire utilisant un seul théorème. Pour les théorèmes qui portent un nom universellement employé comme le théorème de Pythagore, le Théorème de Thalès et leur réciproque, la rédaction qu'on demande aux élèves est pratiquement la même dans toutes les classes. Dans le cas des théorèmes qui ne portent pas de nom, par contre, les pratiques sont différentes. Prenons l'exemple du théorème suivant : "Si d et d' sont perpendiculaires à d", alors d et d' sont parallèles". En accord avec les conclusions de Noirfalise dans son article du n^o 46 (1997-1998) de la revue Petit x (IREM Grenoble), nous proposons de ne pas exiger que le théorème soit cité in extenso dans la rédaction de la démonstration. Plusieurs formulations sont alors possibles, qui suivent d'ailleurs au plus près l'expression du raisonnement de l'élève :

"*Comme A, on a B*"	"*comme*" remplace "si" et "*on a*" remplace "alors"
"*Comme A, B*"	la virgule exprime la conséquence à elle toute seule
"*A au participe présent, B*"	formulation à connotation juridique, comme " attendu que ... "
"*A à l'indicatif, donc B*"	
"*B parce que A*"	l'ordre des propositions est inversé
"*A, par conséquent B*"	
"*A à l'indicatif , alors B*"	

On peut en outre, écrire (ou ne pas écrire) "par théorème" pour introduire la conclusion. Dans ce type de rédaction, la référence au théorème à l'œuvre dans la démonstration reste implicite, l'énoncé n'est pas cité in extenso ; le fait qu'on y fait référence est suggéré par le parallélisme qui existe entre le texte écrit à propos des données du problème et celui de l'énoncé formulé "en général", c'est à dire en tant que proposition universelle. Mais pour autant qu'elle soit implicite, la référence à l'énoncé du théorème ne fait pas de doute : celui qui lit la démonstration partage en effet les mêmes connaissances à ce sujet avec celui qui l'a écrite.

Dans cette section consacrée aux aspects langagiers de l'enseignement des démonstrations, nous présentons le compte rendu de la passation d'un questionnaire et une activité.

Afin d'obtenir un aperçu des pratiques des enseignants de mathématiques (dont nous sommes) lors de l'évaluation de devoirs portant sur la rédaction des démonstrations, nous avons construit un questionnaire et nous l'avons soumis à treize enseignants de Collège. Nous présentons un compte rendu de cette petite enquête. La construction, la passation et l'analyse de ce questionnaire sont sans doute naïfs, nous n'avons aucune prétention scientifique sur ce point qui outrepasse nos compétences scientifiques. Néanmoins, il nous a semblé intéressant de partager avec le lecteur les questions ouvertes par cette première ébauche.

L'activité présentée dans cette section a pour objet la rédaction d'une démonstration. La résolution de la question posée à des élèves de Troisième nécessite un raisonnement en plusieurs pas. Elle a été discutée en classe, en séance collective ; les élèves devaient alors rédiger le plan détaillé de la démonstration en devoir à la maison. Nous avons analysé leurs travaux.

Questionnaire

Nous vous demandons de bien vouloir consacrer un peu de votre temps pour répondre à ce questionnaire afin de nous aider dans l'élaboration de la brochure du groupe "liaison Collège-Université" de l'IREM, consacrée à l'enseignement de la démonstration. Plus spécialement, ce questionnaire porte sur vos exigences en tant que professeur concernant la rédaction d'une démonstration. Pour chaque question, vous pourrez détailler votre réponse selon le contexte (en devoir maison, en contrôle, au tableau, ...).

1. Lorsque vous évaluez la rédaction d'une démonstration, est-ce que les points sont affectés de manière globale ou est-ce que le barème est détaillé par items ?
   Pouvez-vous expliciter vos critères ?

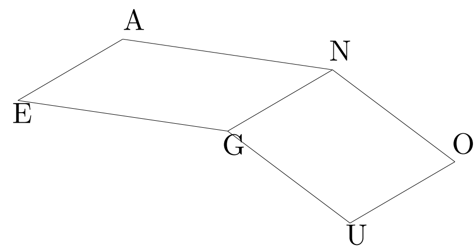
2. Dans la production d'une démonstration utilisant un théorème du type "**si** A **alors** B", acceptez-vous les formulations suivantes :

	oui	non
" Comme A, on a B"		
"Comme A, B", "A au participe présent, B"		
"A au présent, donc (alors) B"		
"B parce que (puisque, car) A"		
"A, par conséquent B"		

3. Donnez-vous un modèle de rédaction ? Si oui lequel ? Ce modèle est-il obligatoire ou est-il donné à titre d'exemple ? à titre d'étayage, ... ?

4. Nous vous proposons des rédactions issues de copies d'élèves de collège, à qui on a donné la tâche suivante :

   Soient ANGE et GNOU deux parallélogrammes.
   Montrer que (AE) est parallèle à (OU).



   Exemples de rédaction des élèves :(voir les documents joints)

   Pour chacun des extraits de copies proposés ci-dessous, nous vous demandons de noter les deux pas de démonstrations sur deux points chacun (à 0,5 près) et de commenter votre évaluation du second pas. En effet, c'est sur les exigences des professeurs à propos de la rédaction de ce second pas que portera notre analyse.

Je sais que ANGE est un parallélogramme.
propriété : Si un quadrilatère est un parallélogramme alors, les côtés opposés sont parallèles

Donc (AE) // (NG)

De même pour GNOU qui est aussi un parallélogramme

Donc (NG) // (OU)

Je sais que les droit (AE) et (OU) sont parallèles à la même droite (GN)

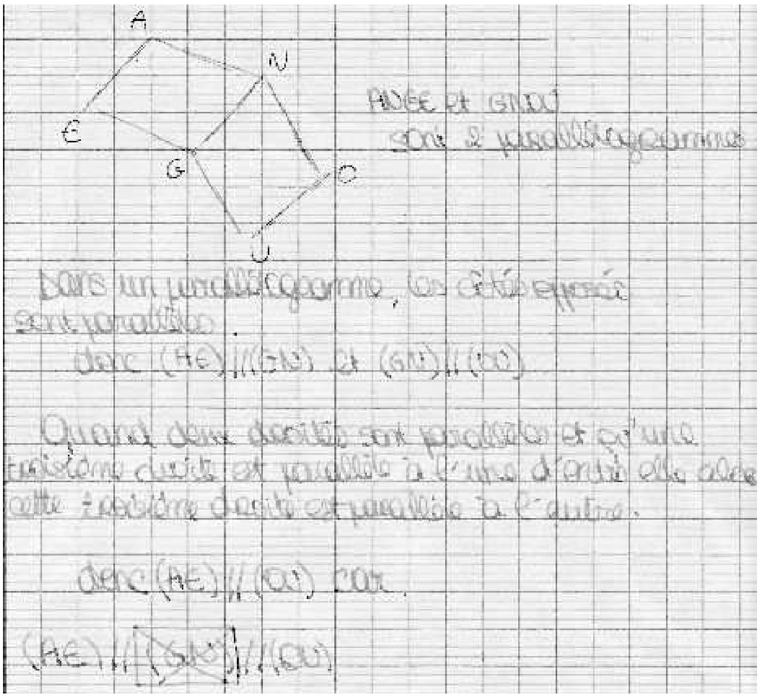
propriété : Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite alors, ces deux droites sont parallèles entre elles.

Conclusion : (AE) // (OU)

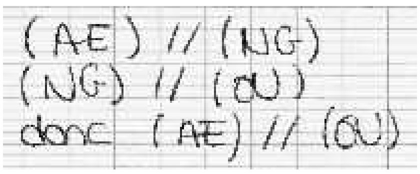
Note du premier pas : Note du second pas :
Vos raisons :

On sait que ANGE et GNOU sont deux parallélogrammes ayant pour droite commune (GN) alor si (AE) et (OU) sont parallèles tous deux à la droite (NG, alors il sont parallèles entre eux. Donc les droites (AE) et (OU) sont parallèles.

Note du premier pas : Note du second pas :
Vos raisons :



Note du premier pas : Note du second pas :
Vos raisons :



Note du premier pas : Note du second pas :
Vos raisons :

ANGE est un parallélogramme. Par hypothèse, (AE) est parallèle à (NG) puisque d'après la propriété, un quadrilatère qui a ses deux côtés opposés parallèles deux à deux est un parallélogramme.
Par conséquent le quadrilatère AEGN est un parallélogramme.
Par hypothèse, le quadrilatère GNOU est un parallélogramme puisque (NG) est parallèle à (OU). D'après la propriété si un quadrilatère à ses deux côtés opposés parallèle deux à deux alors c'est un parallélogramme.
Ainsi le quadrilatère GNOU est un parallélogramme.
De plus, nous savons d'après ces propriétés que la droite (AE) est parallèle à (la droite (NG) et la droite (NG) est parallèle à la droite (OU)
Alors deux droites parallèles à une même troisième sont parallèles entre-elles.
Donc les droites (AE) et (OU) sont parallèles.

Note du premier pas : Note du second pas :
Vos raisons :

Propriété : Si deux droite sont paralèle a une même droite alors elle sont paralèlle entre elle.

Note du premier pas : Note du second pas :
Vos raisons :

On sait que, dans un parallélogramme les côtés opposés sont parallèles.

Donc, dans ANGE :

(AE) est parallèle à (NG), de même que (EG) est parallèle à (AN).

Dans GNOU :

(OU) est parallèle à (NG) et (GO) est parallèle à (NO).

Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.

Donc comme : (AE) est parallèle à (NG), et
(OU) est parallèle à (NG), les droites
(AE) et (OU) sont parallèles entre elles.

Note du premier pas : Note du second pas :
Vos raisons :

On sait que dans un parallélogramme les côtés opposés sont parallèles deux à deux donc dans ANGE (AE) ~~A~~ est parallèle à (NG) et dans GNOU (GN) est parallèle à (OU).
Les deux parallélogrammes ont un côté commun [GN] qui est parallèle à (AE) et (OU) donc (AE) parallèle à (OU).

Note du premier pas : Note du second pas :
Vos raisons :

Dépouillement du questionnaire

Treize enseignants de mathématiques ont répondu à ce questionnaire. Nous donnons ci-dessous un résumé commenté des réponses.

- **Question 1**
  Lorsque vous évaluez la rédaction d'une démonstration, est-ce que les points sont affectés de manière globale ou est-ce que la barême est détaillé par item ?
  La quasi totalité des réponses privilégient une affectation des points par item. On observe toutefois deux interprétations de la consigne "par item" :
  - Une première acception est que les items sont des qualités globales de la démonstration (rédaction, articulation logique, pertinence du raisonnement, idée de la résolution).
  - Un deuxième type de réponse est plus directement ciblé selon le modèle hypothèse/propriété/conclusion de la démonstration, l'évaluation est finalement plutôt globale : le respect de ce modèle. Dans ce cas les items sont plutôt les pas de la démonstration.
  A noter : certains spécifient qu'ils sont prêts à donner la totalité des points pour une démonstration non attendue (lorsque la question le permet).

- **Question 2**
  Dans la production d'une démonstration utilisant un théorème de la forme $A \Rightarrow B$, acceptez-vous les formulations suivantes :

	oui	*non*
"Comme A, on a B"		
"Comme A, B", "A au participe présent, B"		
"A au présent, donc (alors) B"		
"B parce que (puisque, car) A"		
"A par conséquent B"		

  Dix professeurs acceptent toutes les formulations proposées, trois autres les acceptent toutes sauf "Comme A, B" et "B parce que A". .

- **Question 3**
  Donnez-vous un modèle de rédaction ? Si oui lequel ? Ce modèle est-il obligatoire ou est-il donné à titre d'exemple ? à titre d'étayage, . . . ?
  Tous donnent des modèles ; ils servent d'exemple, d'étayage, de référence. Sauf pour une des personnes interrogées le modèle n'est pas obligatoire ; il peut l'être toutefois pendant la phase d'apprentissage. En fait les différences entre les réponses proviennent plutôt du type de démonstrations envisagées. Pour certains, et c'est explicité dans les réponses, il y a un unique modèle : mise en évidence des données pertinentes ; énoncé de la propriété ; énoncé de la conclusion. Pour d'autres professeurs, les démonstrations ont une forme moins précise a priori, ils donnent des modèles de rédaction en exemple ou en correction des travaux d'élèves.

- **Question 4**
  Les différentes réponses sont détaillées pour chaque question concernant l'évaluation des

exemples de copies :

Copie 1 : Tout le monde est content, sauf deux professeurs qui retiennent des points de présentation (de façon globale sur la copie) pour la présence de symboles mélangés aux phrases.

Copie 2 : Pour le second pas, huit ont noté 1,5 sur 2, deux ont noté 2 sur 2 et les trois derniers 1 sur 2. De plus, suivant les collègues, les analyses sont différentes. La plupart sanctionne la présence du "si" à la deuxième ligne. Par exemple, on trouve comme raisons évoquées :
- "l'élève a bien compris le lien logique mais il y a une confusion entre la réalité (les hypothèses) et le conditionnel (supposition *si*)."
- "*si* à la place de *comme*".

Mais d'autres avancent d'autres raisons :
- "justification par les propriétés non faite".
- "manque de clarté dans la vérification des hypothèses".

Copie 3 : Neuf correcteurs donnent la totalité des points pour les deux pas. Deux donnent 2 pour le premier et 1,5 pour le second et deux autres donnent 1,5 points aux deux pas. Des correcteurs (même sans le sanctionner) relèvent que la propriété citée n'est pas exactement celle attendue. Au sein de l'équipe IREM, nous pensons que la multiplicité des formulations est bienvenue et permet de toucher davantage d'élèves, tous n'ayant pas forcément entre eux les mêmes représentations, mais aussi d'enrichir leur compréhension de la notion de parallélisme en tant que typique de la relation d'équivalence.

Copie 4 : La note du second pas est assez sévère (selon nous) : six donnent 1 point et trois en donnent seulement 0,5 ; les quatre autres donnent la totalité : 2 points. Est-ce que l'absence du premier pas augmente la sanction ? Les raisons avancées sont : l'absence de rédaction (qualifiée dans une réponse de désinvolture) ou de justification ou de propriété de référence. Alors que certains de ceux qui mettent la totalité des points le justifient en disant que la référence au théorème utilisé est suffisamment transparente. Mais il y a aussi des collègues qui mettent des points pour le premier pas (0,5, 1 voire 2).

Copie 5 : Pour le premier pas, tout le monde relève qu'il y a confusion entre hypothèse et conclusion (circularité du raisonnement) et notent entre 0 (quatre telles notes) et 1 (trois telles notes).

Pour le second pas, le " ainsi" de la 3ème ligne avant la fin, pose problème à certains qui sanctionnent en enlevant 0,5 pts (cinq donnent 1,5 et huit donnent 2).

Copie 6 : Pour le second pas, les raisons données sont unanimes : on ne peut se contenter de l'énoncé de la propriété, même si c'est la bonne. Du coup, les notes vont de 0,5 à 1.

Copie 7 : Tout le monde est satisfait.

Copie 8 : Beaucoup sanctionnent la non explicitation de la propriété utilisée (les notes vont de 0,5 à 2). Pourtant la copie est clairement rédigée et l'élève a compris.

Commentaires et questions soulevées par les réponses.

Les extraits de copies ont été prélevées sur des travaux d'élèves de troisième. Nous avons choisi de donner aux élèves des démonstrations dont la difficulté mathématique est normalement maîtrisée dans cette classe. De cette façon nous avons pu obtenir des copies plus variées quant à la rédaction des démonstrations.

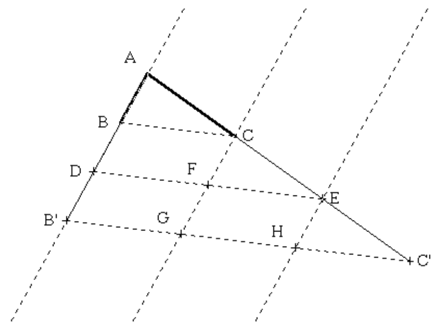
Dans toute évaluation on peut s'attendre à une variabilité des notes entre correcteurs, en mathématiques comme dans les autres domaines. Cependant, les résultats de ce questionnaire donnent une variabilité très marquée. Par exemple, on aurait pu penser que dans le cas d'une copie montrant manifestement que le ressort de la démonstration est compris, la moitié des points au moins soit attribuée. Ce n'est pas le cas notamment dans les copies 4 et 8 (où les notes vont de 0,5 à 2). On a vu aussi, pour la copie 4, la possibilité que l'absence du premier pas ait entrainé une plus grande sévérité pour le second. On peut faire l'hypothèse que, pour un professeur du secondaire, la démonstration est un objet particulièrement investi qui peut susciter des réactions amplifiées par rapport à celles qu'il aurait dans d'autres domaines des mathématiques. Une question qui mériterait un vrai travail de recherche.

Bien que les enseignants déclarent à la question 3 ne pas exiger un modèle de rédaction, leur évaluation des copies à la question 4 montre que le modèle ≪ hypothèses, propriété, conclusion ≫ continue d'être privilégié, ce qui soulève plusieurs questions. Exiger que la propriété soit mentionnée présente certes l'avantage d'attirer l'attention de l'élève sur la spécificité de l'objet "démonstration mathématique". Mais le risque est d'ajouter à la difficulté de la recherche de la démonstration celle de l'écriture des propriétés. D'autre part l'impression de répétition peut susciter des réactions négatives. Sans oublier que lorsque le nombre de pas augmente (et l'intérêt de la démonstration du même coup), le respect d'une telle consigne devient vraiment lourd. La frontière entre l'implicite qui est acceptable et celui qui ne l'est pas dépend bien-sûr du moment dans l'apprentissage de la démonstration. Cette question touche également aux aspects de communication et de confiance entre professeurs et élèves.

Démarche à nombreux pas
Devoir sur l'agrandissement d'un triangle

Sujet du devoir :

La figure ci-contre propose une façon d'agrandir le triangle ABC avec le coefficient 3 :



On agrandit trois fois les côtés [AB] et [AC], ce qui donne [AB'] et [AC'].
D et E sont les points qui, avec B et C, divisent les côtés [AB'] et [AC'] en trois parties égales chacun.
Ensuite, on trace les segments [DE] et [B'C'].
Puis on trace les parallèles à (AB') passant par C et E. Les points d'intersection de ces droites avec les segments précités sont F, G et H.

Décrivez toutes les étapes d'une démonstration du fait que le triangle AB'C' contient neuf triangles superposables au triangle ABC, c'est à dire neuf triangles ayant les mêmes longueurs des côtés que ABC. Vous ne devez pas rédiger le détail de la démonstration, mais uniquement son plan.

Rappel des théorèmes pour démontrer qu'un quadrilatre est un parallélogramme, un rectangle, un losange ou un carré :

Th01 : **Si** un quadrilatère a ses côtés parallèles deux à deux, **alors** c'est un parallélogramme.
Th02 : **Si** un quadrilatère a ses angles opposés égaux, **alors** c'est un parallélogramme.
Th03 : **Si** un quadrilatère a ses angles consécutifs supplémentaires, **alors** c'est un parallélogramme.
Th04 : **Si** un quadrilatère a ses diagonales de même milieu, **alors** c'est un parallélogramme.
Th05 : **Si** un quadrilatère n.c. a ses côtés opposés de même longueur, **alors** c'est un parallélogramme.
Th06 : **Si** un quadrilatère n.c. a deux côtés à la fois parallèles et égaux, **alors** c'est un parallélogramme.

Th07 : **Si** un quadrilatère a quatre angles droits, **alors** c'est un rectangle.
Th08 : **Si** un parallélogramme a un angle droit, **alors** c'est un rectangle.

Th09 : **Si** un parallélogramme a ses diagonales de la même longueur, **alors** c'est un rectangle.

Th10 : **Si** un quadrilatère a ses quatre côtés de la même longueur, **alors** c'est un losange.
Th11 : **Si** un parallélogramme a deux côtés consécutifs égaux, **alors** c'est un losange.
Th12 : **Si** un parallélogramme a ses diagonales perpendiculaires, **alors** c'est un losange.

Th13 : **Si** un quadrilatère a ses quatre côtés de la même longueur et ses quatre angles droits, **alors** c'est un carré.
Th14 : **Si** un rectangle a deux côtés consécutifs de la même longueur, **alors** c'est un carré.
Th15 : **Si** un rectangle a ses diagonales perpendiculaires, **alors** c'est un carré.
Th16 : **Si** un losange a un angle droit, **alors** c'est un carré.
Th17 : **Si** un losange a ses diagonales de la même longueur, **alors** c'est un carré.

Note : « n.c. » signifie « non croisé ».

Démarche à nombreux pas

Intentions des auteurs

Les devoirs à la maison sont une occasion précieuse de faire rédiger des raisonnements. Or une objection est souvent soulevée : les élèves se font aider, ils copient. C'est vrai, et nombre d'enseignants partent de ce fait pour ne pas donner un nombre de devoirs suffisant pour assurer une vraie formation à la rédaction.

Or les élèves se font aider ou copient surtout lorsque le type de sujet qu'on leur propose s'y prête. On peut trouver bien des parades à cet état de fait, en choisissant des thèmes, des sujets originaux que les parents ne puissent pas maîtriser sans y consacrer un temps prohibitif ou en demandant l'écriture de raisonnements, de plans, de démarches, nécessairement personnels. Il devient alors plus économique de rechercher de l'aide dans le travail mené en commun en classe que dans une intervention familiale ou un cours particulier et l'élève s'implique davantage dans un travail intellectuel authentique.

Le devoir proposé ici donne un exemple d'un tel sujet. Le grand nombre de pas à mettre en œuvre pour mener la démonstration demandée permet une grande variété de réponses. Par ailleurs, il donne de l'intérêt au travail de démonstration. L'écueil, si on exigeait une rédaction complète et détaillée serait la longueur de l'entreprise, source de découragement ou d'échec. On abandonne donc l'exigence d'une rédaction complète. On demande uniquement de donner les étapes d'une démarche organisée de preuve.

Déroulement possible

Le sujet est proposé en devoir à la maison avec un délai d'une semaine mais fait néanmoins l'objet d'une séance de mises au point en classe à mi-pacours. Voici les consignes qui ont été données à la classe qui a été observée :
- vendredi 26/02/10 : Chercher le devoir sur l'agrandissement du triangle ; apporter votre brouillon et vos questions.
- mardi 03/03/10 : Rédiger le devoir en tenant compte des réponses données vendredi et l'apporter.

Compte-rendu de la séance de réponses aux questions

On trouvera ci-dessous le compte-rendu des deux étapes préconisées dans la section "déroulement possible" : le compte-rendu de la séance de réponses aux questions écrit par le professeur qui a donné le devoir à ses élèves ; le compte-rendu de la lecture et l'analyse des copies, écrit par un enseignant extérieur.

1- Compte-rendu de la séance de réponses aux questions par le professeur

Je rappelle aux élèves que dans cette séance, ils peuvent poser deux sortes de questions : des questions sur le fond et des questions sur la forme. J'écris au tableau :

Réponses aux questions sur le devoir :
Comment trouver ? Comment rédiger ?
Je trace la figure à main levée, avec ses codages.

Question de Chloé : ≪ Lorsque vous dites de ne pas rédiger le détail de la démonstration mais uniquement son plan, est-ce qu'il faut citer le nom des théorèmes qu'on utilise ? ≫. Je réponds : ≪ Oui, c'est exactement ça ≫, puis je demande à l'élève de nous dire par exemple par quoi commence son plan de démonstration ; pendant qu'elle répond, j'écris au tableau :
(B'C') est parallèle à (BC) par la réciproque du théorème de Thalès.
Je lui demande ensuite de rappeler les hypothèses de la réciproque du théorème de Thalès, puis ≪ à quelle valeur sont égaux les deux quotients en question ? ≫. Je complète alors :
(B'C') est parallèle à (BC) par la réciproque du théorème de Thalès avec le rapport 1/3.
≪ Voici une façon courte mais très complète de résumer la première étape du raisonnement.Quelle est ta deuxième étape ? ≫.
A partir de là, un dialogue avec la classe conduit à deux propositions :
(DE) est parallèle à (BC) par la réciproque du théorème de Thalès avec le rapport 1/2.
ou : *(DE) est parallèle à (BC) par l'un des théorèmes des milieux dans le triangle ADE.*
- Question de Léa : ≪ Moi, j'ai mis ensemble que (B'C') est parallèle à (BC) et que (DE) est parallèle à (BC) en écrivant une seule fois "par la réciproque de Thalès" : ça fait une ou deux étapes ? ≫.
Je réponds : ≪ Si on rédige comme je viens de le faire au tableau, qu'est-ce qui empêche de faire les deux parallélismes d'un coup ? ≫. Léa convient que lorsqu'on donne la valeur des rapports égaux, cela oblige à séparer les deux pas du raisonnement.

- Question de Soha : ≪ Lorsque le théorème qu'on veut utiliser ne porte pas de nom, comment fait-on, faut-il le citer entièrement ? ≫
Réponse : ≪ On trouve un moyen pour faire comprendre de quel théorème il s'agit sans le citer complètement. Par exemple, vous avez un document sur lequel figurent dix-sept théorèmes pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, un rectangle, un losange ou un carré, tous numérotés : si c'est l'un d'entre eux, il suffit de dire "d'après le th. 6 de la feuille polycopiée sur les parallélogrammes". Mais que peut-on déduire très simplement des deux premières étapes qui sont écrites au tableau ? ≫. Un ou deux élèves aident Soha à répondre qu'on peut en déduire que (DE) et (B'C') sont parallèles elles aussi. J'enchaîne : ≪ C'est utile car ça va permettre ensuite d'avoir des parallélogrammes et donc de transporter des égalités de longueurs. Pour faire comprendre quel théorème tu utilises pour le prouver, tu peux simplement dire "d'après un théorème de la classe de Sixième sur les parallèles ". Donner le niveau de classe où l'on a étudié le théorème est un autre très bon moyen de permettre au lecteur de savoir auquel on pense ≫.

- A partir de là, un dialogue avec la classe conduit à mettre en place plusieurs nouvelles étapes : les quadrilatères BCFD, DFGB' et FEHG sont des parallélogrammes par le th. 1 de la feuille sur les parallélogrammes ; la longueur AB se retrouve en BD, CF, DB', FG et EH tandis que BC se retrouve en DF et en B'G, d'après l'égalité des côtés opposés dans un parallélogramme. Je ne rédige plus de phrase pour ces étapes, je les montre seulement sur la figure où je code les égalités de longueurs obtenues avec une nouvelle couleur.

- Question de Ryan : ≪ Je ne comprends pas pourquoi vous n'avez pas codé les longueurs FE et GH, on a bien un parallélogramme là aussi ! ≫.
J'explique : ≪ on est sûr que FE et GH sont égales, mais on ne sait pas qu'elles sont égales à BC, du moins au point où on en est ≫. Une discussion assez vive s'ensuit, où interviennent plusieurs élèves, pour savoir si FE et GH sont égales à BC ou pas. Ryan ne fait pas bien la part entre ce dont il est sûr et ce qu'il a démontré. Je précise ≪ je crois que tout le monde est d'accord pour dire que FE est sûrement égale à DF, nous en avons tous l'intuition et même la certitude ; mais si on en reste aux intuitions, autant dire tout de suite que les neuf triangles ont les mêmes longueurs des côtés et en rester là : ça aussi personne n'en doute ; non, ce que nous cherchons à faire, c'est le démontrer, ce qui est tout autre chose et nous ne l'avons pas encore fait ≫. Samy propose alors son idée : utiliser la droite des milieux dans le triangle ADE pour dire que BC est la moitié de DE. Le raisonnement est plus ou moins donné oralement et on remarque que la même question se pose pour HC : ≪ il faudra mettre tout ça au point ≫.

- On évoque ensuite les étapes qui restent : elles concernent le “transport” de la longueur AC.
Léa propose d'utiliser ≪ les parallèles (DG), (BH) et (AC') ≫. Mais ces droites sont-elles parallèles ? Il faudrait d'abord le démontrer. D'autre part, le point F est-il sur [BH] ? Nouvelle discussion où l'évidence fait obstacle à la démonstration. Je fais remarquer : ≪ dans ce travail, il est capital d'avoir en tête la façon dont la figure a été construite ; si on ne tient pas compte de la façon dont on a tracé les différents éléments, il est impossible de faire des démonstrations car on ne sait plus faire la part entre ce qui paraît évident et ce qui est prouvé ; c'est le cas pour les segments [BF] et [FH] ≫.
Vincent prend la parole : il croyait avoir réussi à prouver que BF et FH sont égales, mais il ne sait plus s'il n'a pas utilisé l'alignement de B, F et H sans s'en rendre compte. Je précise : ≪ en effet, on peut très bien prouver que BF et FH sont égales sans se servir de l'alignement ; mais il faut rechercher d'autres idées que celles qui ont été proposées jusqu'à maintenant ; c'est peut-être ce que tu as fait, à toi de voir ça en détail ≫. Vincent conclut : ≪ pour prouver que BF, FH et DG sont égales à AC, il faut trouver un autre chemin, c'est ça ? ≫.
Je déclare qu'on va s'arrêter là : ≪ Toutes les étapes n'ont pas été données, il vous reste à trouver les dernières et à tout mettre en ordre ; dans votre rédaction, séparez nettement une étape de la suivante pour qu'on voie bien les différents pas de votre raisonnement et l'articulation entre eux ≫.

- Bianca pose une dernière question : ≪ Comment on fait pour prouver que les triangles ont tous la même aire ? ≫.
Je réponds : ≪ on s'arrête avant de le prouver ; on démontre simplement que les triangles ont les mêmes longueurs des côtés ≫puis je rappelle qu'en Cinquième, ils ont vu qu'avec trois longueurs données, on construit un seul triangle. Je résume la construction au compas par un dessin à main levée au tableau et fais remarquer que le triangle obtenu est le même quel que soit le côté par lequel on commence et la position dans laquelle on le place. Pas besoin de calcul alors pour être sûr que l'aire est aussi la même.

La partie de la séance consacrée au devoir à la maison a duré 35 min ou un peu plus.

2- Analyse des copies

A la lecture du compte-rendu de la séance en classe "réponses aux questions", l'exercice m'a semblé très intéressant et fort bien installé.
Le présent compte-rendu de la lecture des copies dans lesquelles les élèves devaient exposer, sans détails, le raisonnement permettant la résolution de l'exercice est organisé comme suit : un commentaire général et un bref survol de chacune des copies.

Commentaire général :
Dans l'ensemble j'ai été très agréablement surprise par la qualité d'écriture des élèves. En outre, les élèves semblent se prendre au jeu et être bien engagés dans la résolution de l'exercice (qui pourtant est assez aride). En témoigne le nombre d'élèves qui s'émancipent de la démarche indiquée en séance et proposent une démarche personnelle (10 sur 23). Un assez grand nombre d'élèves semblent dominer une démarche globale de raisonnement. Ce commentaire est toutefois à nuancer puisque une démarche avait été dégagée en classe et que 11 élèves sur 23 l'ont suivie dans leurs copies, il est difficile de percevoir à quel point ils se la sont appropriée. Les élèves qui s'en émancipent semblent dominer un raisonnement global.
Copie par copie :
J'ai repéré 11 élèves qui ont repris plus ou moins scrupuleusement la démarche dégagée pendant la séance "réponses aux questions", que j'appelerai "démarche indiquée" et 10 qui s'en sont émancipés, de diverses manières et deux qui n'ont pas vraiment fait l'exercice. J'indique par la suite, ces différents groupes d'élèves par "groupe 1", "groupe 2" et "groupe 3".

- Groupe 1 :

1. Soha
   suit scrupuleusement la démarche indiquée sans toujours noter précisément les conclusions intermédiaires. Je relève une confusion dans l'utilisation des théorèmes : dans sa 6^{eme} étape elle semble confondre théorème 6 (de la fiche) et théorème des milieux. La dernière étape n'est pas du tout claire.
2. Chloé
   suit scrupuleusement la démarche indiquée avec, me semble-t-il, de la maîtrise. Sa 8^{eme} étape, qui n'avait pas été très commentée en classe est un peu confuse, car superpose deux applications de la réciproque du théorème de Thalès.
   Erreur de vocabulaire :*contraposée* de Thalès à la place de *réciproque* de Thalès.
3. Claire
   reprend la démarche indiquée mais il y a confusion entre étapes de constructions (de la figure) et étapes de raisonnement, entre énoncés déduits du raisonnement et énoncés donnés par la construction. Et sa démarche tourne vite court.
4. Léa.
   semble confondre les théorèmes : i) de Thalès, ii) parallèles à une même troisième. Dès la troisième étape on relève une assez grande confusion entre ce qui vient d'un raisonnement et ce qui fait partie des données. Et puis, certains passages (la conclusion de l'étape 5, le début de l'étape 6) ne sont pas du tout justifiées.
5. Anaïs
   semble avoir seulement recopié les notes prises pendant la séance.

6. Thomas
   commence par suivre la démarche indiquée en rédigeant un peu plus que ce qui était demandé. La rédaction est toutefois un peu trop elliptique. Il décrit les étapes de sa pensée sans rendre vraiment compte de l'articulation logique. Par contre il est plus efficace dans les étapes 3 et 4, dans lesquelles il est pourtant plus autonome (par rapport à la démarche indiquée), mais il ne conclut pas.
7. Arnaud
   rédige plus qu'exigé mais plutôt bien, tant que le raisonnement convient. Je relève des problèmes de notation : (FE) n'est pas une longueur. Une étape semble non justifiée $FE = HC'$. Et ensuite une tentative de passer par les losanges qui est déplacée. La fin ne va pas du tout, du point de vue du raisonnement.
   En fait, il semble que dès que l'on quitte la démarche dégagée en classe, cela ne va plus du tout.
8. Ruth.
   Confusion entre données et résultats d'étapes de raisonnement, mais aussi confusion dans le langage. Il n'est pas clair que ses écrits fassent sens pour cette élève.
9. Ryan.
   Il répète les deux premières étapes et cela semble convenir, la 3eme étape dérape complètement, on ne sait pas ce qu'il veut faire quand il annonce qu'il veut montrer l'égalité de deux droites, à moins que cela ne soit une égalité entre longueurs, mais le théorème semblerait conclure sur un parallélisme ... Il se reprend ensuite mais les méthodes à utiliser pour résoudre les différentes étapes pointées ne sont pas explicitées.
10. Oriane.
    Il n'est pas clair qu'elle maîtrise bien les étapes qu'elle pointe, surtout pas la première. Elle semble plus à l'aise à la fin mais peut-être parce qu'elle reste très elliptique et qu'on ne peut voir les manques. La démarche toutefois est bien restituée, la vision d'ensemble semble correcte.
11. Mélanie.
    Cela semble aller tant qu'elle suit les étapes qui ont été explicitées en classe mais elle ne donne pas la fin de la démonstration.

- Groupe 2 :

1. Ivana.
   Confusion entre données et “évidences ”. Elle perd, en court de rédaction, l'objectif de la démonstration.
2. Emile.
   Démarche assez louable de reformuler les données et d'expliciter leur conséquences. Une bonne utilisation des théorèmes mais il ne conclut pas.
3. Walid.
   Dès la première étape, il manque des hypothèses et le raisonnement conduit n'est pas explicité.
4. Maxime.
   Démarche originale par rapport à celle donnée en séance. Il n'utilise que le théorème des milieux, d'ailleurs correctement.

5. Sacha
utilise des résultats intermédiaires non établis (ou bien il y a trop d'implicite). Certaines étapes pointées ne sont pas vraiment intégrées à une démarche globale. La fin est une tentative intéressante, malheureusement non justifiée.
6. Samy
utilise un résultat non justifié : "F est le mileu de DE", et semble en être plus ou moins conscient, ce qui justifierait qu'il tourne un peu en rond entre les étapes 4 et 5. A la fin des justifications intermédiaires manquent également.
7. Paul.
Il manque une justification "(BH) est parallèle à (AC')" et plus loin que les droites (AC), (BF), (DG) sont parallèles 2 à 2, c'est dommage car la démarche originale se tient.
8. Sophiane
rappelle en préalable l'objectif de l'exercice : la comparaison du coefficient d'agrandissement des aires avec celui des longueurs mais sans être bien au clair sur ce qu'il faut montrer.
Pour la suite il fait preuve d'autonomie en suivant une démarche originale et qui se tient. Dommage que les détails ne soient pas bien maîtrisés ; il néglige de justifier de nombreux résultats intermédiaires.
9. Elias
extrapole sans justification les conclusions de l'application de la réciproque de Thalès, et répète cette erreur de raisonnement tout au long.
10. Sébastien
fait preuve d'autonomie en suivant une démarche originale et qui se tient. Dommage que les détails ne soient pas bien maîtrisés ; il néglige de justifier de nombreux résultats intermédiaires : $BD = CF$; les deux triangles obtenus en partageant un parallélogramme selon la diagonale sont superposables ...

- Groupe 3 : Mélissa et Nicolas rappellent dans leur copie l'objectif de l'exercice : vérifier que le coefficient d'agrandissement de l'aire est le carré de celui de l'agrandissement des longueurs. Ce sont presque les seuls à le faire. Malheureusement, ils ne font que cela.

Bilan, discussion

Richesse de l'exercice pour appréhender les difficultés des élèves

Cet exercice permet de mettre en évidence une difficulté particulière pour les élèves : le fait qu'ils considèrent comme des données des résultats intermédiaires qu'il faudrait établir (souvent car ils leur paraissent évidents). Le type d'exercice paraît adéquat pour pointer ces confusions et en faire prendre conscience aux élèves ; justement parce qu'il est long, parce que la séparation entre données et résultats à établir n'est pas déjà résolue par l'habitude d'un raisonnement éprouvé sur d'autres exercices semblables. La nécessité de prendre des initiatives comporte aussi la nécessité de choisir les résultats intermédiaires et exige alors de les manipuler avec le statut qui convient : données ou résultats à établir.

Un des avantages notables de cet exercice est bien-sûr que sa résolution exige d'établir un "plan" de raisonnement, un démarche globale permettant de répondre à la question posée. Toutefois, deux raisons font que l'expérience n'est pas complètement satisfaisante sur ce point : seuls les élèves qui ont proposé une autre démarche que celle indiquée en séance ont été confrontés à cette difficulté ; il y a deux niveaux auxquels on peut repérer des étapes et selon les élèves c'est l'un ou l'autre qui a été privilégié :
- le calcul de l'aire et sa décomposition ;
- l'isométrie des triangles qui se décompose elle-même en plusieurs parties avec des sous-démarches différentes.

Les questions qui se posent, les suites possibles

Voici quelques questions relatives à cette proposition que me suggère la lecture des copies :
- Il me semble que la consigne de ne pas complètement rédiger les détails mais uniquement le plan met les élèves en difficulté. Ceci n'est pas, en soi, un soucis mais est-ce bien la difficulté qu'on avait anticipée ? C'est vrai que, les élèves se posent des "bonnes questions" : est-ce qu'il faut citer les théorèmes ? qu'est-ce qu'une étape de démonstration ? ... Il n'était pas alors évident pour les élèves que pour chacun des triangles aussi il fallait expliciter toutes les étapes et les théorèmes utilisés. C'est peut-être la raison pour laquelle certains ont carrément rédigé ces étapes ?
- L'exercice est assez long, cela explique peut-être la difficulté pour les élèves (qu'ils doivent néanmoins dépasser c'est entendu) de garder toujours en tête ce qui fait partie des données, ce qui a été justifié, ce qui saute aux yeux mais qui ne l'a pas été ...
- Il est difficile de voir si finalement le détail de l'application des théorèmes est maîtrisé. La deuxième étape : la rédaction aboutie semble bien nécessaire en complément.
- En complément également, cela pourrait peut-être être intéressant d'échanger les copies entre les élèves et leur demander de commenter les différentes propositions. Cela me semblerait intéressant pour voir s'ils parviennent de l'extérieur à repérer les confusions données/résultats à établir.
- Dernière remarque, cela serait bien dans ce type d'exercice, d'avoir un premier rendu sans indication en séance d'une démarche à suivre.

Annexes

Annexe A : Conjecturer en numérique

Nous présentons ci-dessous deux activités sur la démonstration dans le domaine numérique qui ont été testées mais pour lesquelles nous ne disposons pas d'un compte-rendu. C'est la raison pour laquelle elles se trouvent en annexe.

Les aventuriers de la règle perdue(1)

Indications :

Une conjecture est une supposition, celle-ci peut être vraie ou fausse.
Exemples de conjectures pour des tableaux de nombres comme celui qui est proposé ci-dessous : le nombre dans une case représente le nombre de termes de la case voisine ; le nombre dans une case représente le résultat de l'opération de la case voisine ; d'une ligne à la suivante on rajoute toujours deux nouveaux nombres ...

Le travail à faire :

Dans le tableau ci-dessous, la règle de formation des lignes est toujours la même :

0	100	100
1	$99 + 100 + 101$	300
2	$98 + 99 + 100 + 101 + 102$	500
3	$97 + 98 + 99 + 100 + 101 + 102 + 103$	700
...	...	...
42	?	?

1. Faire une liste contenant le plus possible de conjectures concernant ce tableau.
2. Justifier les conjectures que vous avez données concernant la ligne 42.
3. Donner une conjecture qui généralise les conjectures que vous avez données au 1).
4. Donner des idées pour démontrer cette conjecture générale.

Barème :

Le travail est noté sur 20 points :
Question 1) : cette question est notée sur 10 points ; toute conjecture (même très simple) rapporte 1 point ; toute conjecture farfelue enlève 2 points.
Question 2) : cette question est notée sur 6 points ; toute justification pertinente rapporte 2 points. Toute conjecture que vous êtes seul dans la classe à avoir justifiée vous rapporte 1 point de bonus.
Question 3) : 4 points
Question 4) : 2 points de bonus par idée pertinente.

Réponses possibles pour l'activité « Les Aventuriers de la règle perdue (1) »

Conjectures liées au tableau limité à 42 lignes :

- Sur chaque ligne, le nombre de la première case est le nombre de termes à droite (ou à gauche) de 100 dans la somme de la case suivante.
- Sur chaque ligne, la case centrale contient la somme d'un nombre impair de nombres entiers consécutifs.
- D'une ligne à la suivante, le nombre de termes dans la case centrale augmente de 2.
- Sur chaque ligne, dans la case centrale, le dernier nombre de la somme est 100 plus le nombre de la première case ; le premier nombre est 100 moins le nombre de la première case.
- Sur chaque ligne, le nombre de termes de la somme est égal à 2 fois le nombre de la première case plus 1.
- Sur chaque ligne, le nombre de la dernière case est le résultat de la somme écrite dans la seconde.
- Sur chaque ligne, le nombre de la dernière case est le produit du nombre de termes de la somme écrite dans la seconde case par 100.
- Sur chaque ligne, dans la case centrale, la somme de deux termes symétriques par rapport à 100 est égale à 200.
- Dans la case centrale, on passe d'une ligne à l'autre en ajoutant le dernier nombre plus 1 à droite et le dernier nombre moins 1 à gauche.
- Dans la dernière case, on passe d'une ligne à l'autre en ajoutant 200.
- Dans la première case, on passe d'une ligne à l'autre en ajoutant 1.
- Le dernier nombre de la somme de la ligne 42 est 142 (obtenu par $100 + 42$).
- Le premier nombre de la somme de la ligne 42 est 58 (obtenu par $100 - 42$).
- Le nombre de termes de la somme de la ligne 42 est 85 (obtenu par $2 \times 42 + 1$).
- A la ligne 42, le nombre de la dernière case est 8500 (obtenu par 85×100).
- La somme $58 + 59 + ... + 141 + 142$ contient 85 termes.
- La somme $58 + 59 + ... + 141 + 142$ est égale à 8500 .

Conjectures liées au tableau généralisé :

- Sur la ligne n, le dernier nombre de la somme est $100 + n$.
- Sur la ligne n, le premier nombre de la somme est $100 - n$.
- Sur la ligne n, le nombre de termes de la somme est $2n + 1$.
- Sur la ligne n, le nombre de la dernière case est $(2n + 1) \times 100$.

Conjecture plus générale :

- La somme d'un nombre impair N de nombres entiers consécutifs est égale à N fois le terme central (un nombre impair N peut s'écrire 2n + 1).

Les aventuriers de la règle perdue (2)

Indications :

Une conjecture est une supposition, celle-ci peut être vraie ou fausse.
Exemples de conjectures pour des tableaux de nombres comme celui qui est proposé ci-dessous : le nombre dans une case représente le nombre de termes de la case voisine ; le nombre dans une case représente le résultat de l'opération de la case voisine ; d'une ligne à la suivante on rajoute toujours deux nouveaux nombres ...

Le travail à faire :

Dans le tableau ci-dessous, la règle de formation des lignes est toujours la même :

<table>
<tr><td>0</td><td>1</td><td colspan="2">$1 = 1$</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1 ; 2</td><td colspan="2">$1 = 1$
$2 = 2$
$3 = 2 + 1$</td><td>3</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1 ; 2 ; 4</td><td colspan="2">$1 = 1$
$2 = 2$
$3 = 2 + 1$
$4 = 4$
$5 = 4 + 1$
$6 = 4 + 2$
$7 = 4 + 2 + 1$</td><td>7</td></tr>
<tr><td>3</td><td>1 ; 2 ; 4 ; 8</td><td>$1 = 1$
$2 = 2$
$3 = 2 + 1$
$4 = 4$
$5 = 4 + 1$
$6 = 4 + 2$
$7 = 4 + 2 + 1$</td><td>$8 = 8$
$9 = 8 + 1$
$10 = 8 + 2$
$11 = 8 + 2 + 1$
$12 = 8 + 4$
$13 = 8 + 4 + 1$
$14 = 8 + 4 + 2$
$15 = 8 + 4 + 2 + 1$</td><td>15</td></tr>
<tr><td>...</td><td>...</td><td colspan="2">...</td><td>...</td></tr>
<tr><td>12</td><td>?</td><td colspan="2">?</td><td>?</td></tr>
</table>

1. Faire le plus possible de conjectures concernant ce tableau.
2. Justifier les conjectures que vous avez données concernant la ligne 12.
3. Généraliser les conjectures que vous avez données ci-dessus.

Réponses possibles pour l'activité « Les Aventuriers de la règle perdue (2) »

Conjectures liées au tableau limité à 12 lignes :

- Sur chaque ligne, la seconde case contient des puissances de 2 successives à partir de 2^0.
- Sur chaque ligne, le nombre de la première case est l'exposant de la dernière puissance de 2 écrite dans la seconde case.
- Sur chaque ligne, la troisième case contient tous les nombres qu'on obtient en additionnant au plus une fois les nombres qui figurent dans la seconde case.
- Sur chaque ligne, la troisième case contient tous les nombres de 1 jusqu'à 2 fois le dernier nombre de la case précédente moins 1.
- Sur chaque ligne, le nombre de la dernière case est le dernier nombre écrit dans la case précédente.
- Sur chaque ligne, le nombre de la dernière case est le nombre de nombres écrits dans la case précédente.
- Sur chaque ligne, le nombre de la dernière case est la somme des nombres écrits dans la seconde case.
- D'une ligne à la suivante, le nombre de nombres écrits dans la troisième case est obtenu en multipliant par 2 et en ajoutant 1.
- Sur la ligne 12, dans la seconde case, il y a 13 nombres.
- Sur la ligne 12, dans la seconde case, on a les puissances de 2 jusqu'à 4 096 (2^{12}).
- Sur la ligne 12, dans la dernière case, il y a le nombre 8191 ($2 \times 4096 - 1$).
- Sur la ligne 12, le nombre de la dernière case est $2^{13} - 1$.
- Sur la ligne 12, dans la troisième case, il y a les nombres entiers de 1 jusqu'à 8 191 ; on arrive à tous les écrire en additionnant au plus une fois les nombres de la seconde case.
- Sur la ligne 12, le nombre 8 191 de la quatrième case est la somme des 13 nombres écrits dans la seconde case.
- De la ligne 0 à la ligne 12 du tableau, en tout, il y a 8192 égalités différentes.
- On a l'égalité : $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{11} + 2^{12} = 8191$
- On a l'égalité : $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{11} + 2^{12} = 2^{13} - 1$
- Avec seulement 13 puissances de 2, on peut composer additivement les 8 191 premiers nombres entiers.

Conjectures liées au tableau généralisé :

- Sur la ligne n, dans la seconde case, on a la suite des puissances de 2 de 2^0 jusqu'à 2^n .
- Sur la ligne n, le nombre de la dernière case est $2^{n+1} - 1$.
- Sur la ligne n, dans la troisième case, on a composé les entiers de 1 à $2^{n+1} - 1$ en utilisant uniquement l'addition et les nombres de la case précédente, une fois chacun au plus.

Conjectures plus générales :

- On a l'égalité : $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{n-1} + 2^n = 2^{n+1} - 1$.
- On obtient tous les nombres entiers de 1 à $2^{n+1} - 1$ en additionnant au plus une fois les nombres de la suite 2^0 ; 2^1 ; 2^2 ; 2^3 ; ... ; 2^{n-1} ; 2^n.
- Avec seulement n + 1 puissances de 2, on peut composer additivement les $2^{n+1} - 1$ premiers nombres entiers.

Conjecturer en numérique

Intention des auteurs

La présence de cette activité est principalement motivée par la volonté de donner au domaine numérique une place équitable dans une brochure consacrée à la démonstration ! Les activités numériques tiennent en effet une place importante dans les mathématiques du collège et il s'agit de montrer qu'entre les démonstrations de règles de calcul - de plus en plus évitées dans les classes - et les activités de simple application de ces règles, il y a de la place pour une pratique de la démonstration à propos de configurations numériques variées.
Les phénomènes numériques choisis ici sont présentés sous la forme de tableaux. Des régularités peuvent être découvertes dans le passage d'une colonne à une autre ou d'une ligne à la suivante. Les élèves font des conjectures. L'idée de généralisation est introduite dans un premier temps par la nécessité de sauter à une ligne lointaine (mais dont le numéro est explicitement donné) où les cases ne sont plus remplies, puis dans un second temps, par le passage aux expressions littérales qui permet d'une part une formulation plus aisée des conjectures généralisées et d'autre part leur démonstration.
Les élèves aiment spontanément la recherche de lois numériques - quitte à en inventer de fausses dans leur pratique du calcul... Ce "penchant" leur permet d'entrer très facilement dans l'activité et de prendre à cœur leur recherche ; ils trouvent rapidement beaucoup de choses. Le passage aux "explications" et aux "justifications" leur permet ensuite de relativiser la difficulté de la démonstration en numérique et d'apprécier l'efficacité du calcul littéral.

Déroulement possible

La première fiche peut être utilisée en classe ou en devoir à la maison :

- Le barème indiqué en bas de la fiche correspond à l'utilisation "en devoir à la maison". Dans ce cas, il est néanmoins conseillé de commencer le travail en classe, en recherchant ensemble les premières conjectures : prévoir 10 à 15 min. Ceci permet d'assurer la dévolution de la recherche. Les élèves voient ce qu'il s'agit de trouver ; ils peuvent poser des questions ; ils se rendent compte que l'objectif de trouver au moins 10 conjectures (la question 1 est notée sur 10 points avec 1 point par conjecture trouvée) n'est pas si inaccessible qu'ils pouvaient le croire au début . L'enseignant en profite aussi pour expliciter l'idée de démonstration présente dans les termes ≪ justifier ≫ et ≪ donner des idées pour démontrer ≫ des questions 2) et 4).

- Si la fiche est utilisée pour une activité en classe, le barème n'a plus de raison d'être. Dans ce cas, la gestion des questions de justification des conjectures est mieux matrisée : une fois la liste des conjectures concernant la ligne 42 arrêtée et écrite au tableau, l'enseignant circule dans la classe à la recherche des premières idées de démonstration pertinentes ; il fait une mise en commun qui doit aboutir à la rédaction complète d'une première justification ; il relance ensuite le travail pour les autres conjectures. De même, plus loin, le passage aux expressions littérales peut être partagé par de nouvelles mises en commun. Si le travail n'est pas terminé en fin de séance, les élèves pourront avoir à le finir à la maison.

La seconde fiche, plus complexe, peut donner l'occasion d'un travail de recherche, en dehors du cours (c'est pour cela qu'il n'y a pas de barème). Il n'est pas conseillé de la donner sans que l'activité correspondant à la première fiche n'ait été faite et menée à son terme. L'enseignant choisira s'il ne s'adresse qu'à quelques volontaires ou s'il organise un compte rendu de la recherche en classe entière.

Compte-rendu de l'activité

L'activité correspondant à la première fiche a été testé dans une classe de troisième du collège Monticelli. Les élèves ont joué le jeu et apprécié la recherche. Cependant, nous n'avions pas mis en place d'observation et nous ne disposons pas d'un compte-rendu. C'est pourquoi elle n'est donnée qu'en annexe de la brochure.

Annexe B : Analyse du sujet du Brevet 2007

Le sujet est disponible après l'analyse II.3

A la question du nombre de pas de raisonnement qu'on peut envisager avec des élèves de collège au sein d'une démonstration, il n'y a pas à l'heure actuelle de réponse institutionnelle. Chaque professeur fait un peu comme il l'entend, en fonction bien entendu du niveau de sa classe, des capacités qu'il prête à ses élèves, mais aussi de ses propres convictions touchant à l'enseignement de la démonstration. Du côté des professeurs chevronnés, les discussions de "salle des profs" montrent une certaine tendance au repli : moins d'heures, plus d'élèves, moins d'attention de la part de ces derniers, donnent souvent des démonstrations plus courtes ou plus rares, des mathématiques ayant tendance à se réduire à l'application de procédures systématisées. Du côté des professeurs débutants, entre la formation à l'IUFM qui donne une place ambitieuse à la démonstration [5] et la rencontre avec les premières classes réelles avec un savoir faire nécessairement encore hésitant, le risque du repli est tout aussi présent. Dans ces conditions, le contenu du premier sujet national pour l'épreuve de mathématiques du Brevet des Collèges pouvait constituer un signe, donner une perspective. Et c'est précisément ce qui s'est produit comme l'analyse ci-dessous le montre en détail : ce sujet est véritablement en rupture avec les sujets académiques de ces quinze dernières années au moins. Il donne des signes forts à qui voudra bien les voir sur ce qui est attendu des élèves à la sortie du Collège, notamment en matière de raisonnements et de démonstration.

Analysons le sujet national de la session 2007 du Brevet des Collèges :

Dans la partie Activités Numériques :
- l'Exercice 1 est un QCM (dans le même esprit que ceux des sujets des sections S du Bac) ;
- l'expression numérique étudiée dans l'Exercice 2 n'est pas donnée, il faut la construire à partir d'un programme de calcul ; la factorisation de cette expression en un carré est laissée à l'initiative de l'élève (pour répondre à une conjecture issue d'expériences numériques) ; enfin l'équation présente à la fin de l'exercice n'est pas donnée elle non plus, soit il faut la trouver comme traduction d'une contrainte, soit il faut procéder par vérifications.

5. Ces lignes ont été écrites avant la masterisation de la formation des enseignants.

Dans la partie Activités Géométriques :
- la question 3) de l'Exercice 1 demande trois pas de raisonnement si l'on calcule l'aire du triangle AEF directement : calcul de EF par le théorème de Thalès, démonstration du fait que l'angle AEF est droit et calcul de l'aire par $AE \times EF$; trois pas aussi si l'on utilise l'idée de réduction : calcul de l'aire du triangle ABC, calcul du coefficient de réduction des longueurs, calcul de l'aire du triangle AEF par application du coefficient de réduction des aires.
- la question 3) de l'Exercice 2 demande trois pas de raisonnement : démontrer que le quadrilatère $OCED$ est un parallélogramme grâce à la translation, démontrer que c'est un losange grâce au cercle et en déduire que ses diagonales sont perpendiculaires.

Dans la partie Problème :
- la question 1) de la Partie I demande la justification d'un résultat évident : il s'agit d'un raisonnement court mais qui nécessite de résister à l'évidence perceptive pour réaliser une démonstration formelle.
- la question 2) de la Partie II demande un raisonnement à trois pas pour trouver HI : égalité entre HI et IE du fait que le triangle HIE est isocèle, égalité entre IE et BA à cause du rectangle $ABIE$ et égalité entre HI et BA par transitivité de l'égalité ; puis un raisonnement à deux pas pour trouver AE : calcul de IB par soustraction et égalité entre IB et AE à cause du rectangle $ABIE$.
- dans les deux questions de la Partie III, les longueurs connues ne sont jamais utilisables directement pour calculer les longueurs cherchées ; il faut donc aussi deux pas chaque fois.
- dans la Partie IV, il s'agit d'interpréter la représentation graphique d'une longueur en fonction d'un angle. La situation n'est pas classique de plusieurs façons : il ne s'agit pas d'une fonction affine, la construction de la représentation n'est pas demandée, la question posée concerne "une solution possible" et non pas toutes les solutions du problème.

Quelles tendances, quelles intentions se dégagent ?

Ce qui frappe en premier, c'est la présence d'un nombre inédit de questions peu classiques pour lesquelles le bachotage ne garantit aucune réussite. En second, c'est l'abondance des questions à plusieurs pas de raisonnement, impossibles à réussir sans initiative personnelle. L'ensemble du sujet sollicite un grand nombre de connaissances et comporte un grand nombre de questions, ce qui laisse finalement assez peu de temps à consacrer à chacune. En contrepartie, on trouve plusieurs questions où il est seulement demandé de prendre des décisions sans justifications : le QCM, la construction du triangle au compas et la lecture graphique par exemple. Pour ce qui concerne les nombreuses questions qui nécessitent des raisonnements à plusieurs pas, on peut se demander quel type de rédaction est attendu. Le nombre cumulé de tous les pas de raisonnement nécessaires exclut certainement la rédaction systématique du type de démonstrations lourdes et formelles pour lequel les élèves étaient habituellement formatés. C'est une nouveauté importante : un sujet d'examen où les meilleures copies ne seront pas rédigées de manière uniforme ! Dans certains cas, la simple production de la réponse peut attester la présence du raisonnement (le franchissement des différents pas) et on remarquera que les questions ne comportent alors pas nécessairement la demande d'une justification. C'est clair pour le raisonnement à trois pas induit par la question "Calculer l'aire du triangle AEF", c'est plus ambigu pour les raisonnements induits par les questions "On souhaite obtenir 1 comme résultat ; quels nombres peut-on choisir au départ ?", "En déduire HI puis AE" et "En déduire la valeur arrondie au centimètre de AE".

Inversement, plusieurs démonstrations formelles sont explicitement demandées en géométrie pour des raisonnements très courts ou facilement identifiables : "Démontrer que le triangle ABC est rectangle en B (application du théorème réciproque de Pythagore)", "Démontrer que la droite (EF) est parallèle à la droite (BC) (application du théorème réciproque de Thalès)", "Justifier que $HI = 3$ (égalité des côtés opposés dans le rectangle + égalité consécutive à l'alignement de trois points)" ; dans chacun de ces cas il n'y a pas de doute sur le résultat, la question n'en vise que la démonstration.

Enfin, deux questions demandent à la fois que l'élève trouve une démarche et rédige une démonstration : "En est-il toujours ainsi lorsqu'on choisit un nombre entier au départ de ce programme de calcul" (passage au calcul littéral et transformation d'une expression) et "Démontrer que les droites (DC) et (OE) sont perpendiculaires" (démonstration d'un losange). On remarquera que dans la première de ces deux questions, le mot "démontrer" n'est pas utilisé alors qu'il s'agit d'une situation exemplaire de démonstration en algèbre (le passage d'une constatation obtenue sur des exemples numériques à sa preuve par le même calcul avec une lettre à la place des valeurs particulières). C'est donc la compréhension de l'idée de démonstration algébrique qui est évaluée et non pas son exécution en tant que rédaction standardisée.

Pour conclure, le message implicitement transmis par ce sujet est clair : à l'issue du collège, ce qu'un élève doit savoir faire avant tout en mathématiques, c'est produire des résultats et de la pensée : une pensée étayée par ses connaissances certes, mais aussi constituée de choix, de décisions, d'initiatives et de raisonnements, ce qui lui demande de maîtriser la signification et les raisons d'être de ce qu'il fait.

Comment les élèves ont réagi :

Les élèves ayant habituellement de très bonnes notes en mathématiques ont réagi de façon curieuse. A la mi-épreuve, ils finissaient la rédaction soignée de toutes les parties classiques du sujet (se ménageant ainsi une bonne possibilité de recherche pour les questions nécessitant de la réflexion). Mais dès le temps réglementaire écoulé, ils commencèrent à sortir bien avant la fin de l'épreuve. Un surveillant de salle rapporte : ≪ Voyant que d'excellents élèves que je connaissais sortaient 40 min avant la fin sans avoir trouvé les questions les plus intéressantes, je fis une petite déclaration : le sujet sur lequel ils composaient n'était pas tout à fait semblable à ceux des années précédentes ni à ceux sur lesquels ils s'étaient entraînés ; il comportait des questions qu'on ne pouvait pas trouver en deux minutes avec les automatismes habituels, des questions qui demandaient de réfléchir plus longuement ; au lieu de quitter la salle, ils pouvaient accepter ce challenge et profiter du temps qui leur restait pour chercher quelque chose de pas facile pour une fois, se faire plaisir ... Six ou sept minutes plus tard, pas davantage, ils étaient tous partis ! ≫

Le Brevet des Collèges est certes une épreuve sans enjeu, surtout pour les meilleurs élèves. Mais cette attitude évoque d'autres choses : l'idée que faire des maths c'est aller droit de la question à la réponse ; le mal à l'aise ressenti face à une question qui résiste, qu'on ne comprend pas d'emblée ou qui demande à être interprétée (en mathématiques !) ; une pratique davantage centrée sur l'application de connaissances, de procédures, d'automatismes que sur la recherche et l'initiative ; l'habitude de questions fermées, de parcours où le point d'arrivée est visible dès le départ.

Pour les autres élèves, les résultats ont-ils été différents par rapport aux moyennes de l'année ? Certains ont-ils été plus performants face à des questions plus ouvertes ? Ceux qui avaient appris par cœur un certain nombre de solutions toutes faites ont-il massivement échoué ? Ce qui est certain, c'est que les responsables académiques se sont efforcés de tamponner les effets de rupture contenus dans le sujet en jouant sur le barème.

Sujet du Brevet 2007

Brevet France, La Réunion et Mayotte 25 juin 2007

Activités numériques **12 points**

Exercice 1

Cet exercice est un questionnaire choix multiples (QCM).
Aucune justification n'est demandée.
Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées, une seule est exacte.

Pour chacune des cinq questions, indiquer sur la copie le numéro de la question et recopier la réponse exacte.

1.	Quelle est l'expression développée de $(3x + 5)^2$	$3x^2 + 25$	$9x^2 + 25$	$9x^2 + 30x + 25$
2.	Quelle est l'expression qui est égale 10 si on choisit la valeur $x = 4$	$x(x+1)$	$(x+1)(x-2)$	$(x+1)^2$
3.	Quelle est la valeur exacte de $\dfrac{\sqrt{48}}{2}$	$\sqrt{24}$	$3,464$	$2\sqrt{3}$
4.	Quel est le nombre qui est solution de l'équation $2x - (8 + 3x) = 2$	10	-10	2
5.	En 3^{e} A, sur 30 élèves, il y a 40 % de filles. En 3^{e} B, sur 20 élèves, il y a 60 % de filles. Lorsque les deux classes sont réunies, quel est le pourcentage de filles dans le groupe ?	36 % de filles.	48 % de filles.	50 % de filles.

Exercice 2

On donne un programme de calcul :

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 4.
- Multiplier la somme obtenue par le nombre choisi.
- Ajouter 4 ce produit.
- écrire le résultat.

1. écrire les calculs permettant de vérifier que si l'on fait fonctionner ce programme avec le nombre -2, on obtient 0.
2. Donner le résultat fourni par le programme lorsque le nombre choisi est 5.
3. (a) Faire deux autres essais en choisissant chaque fois un nombre entier et écrire le résultat obtenu sous la forme du carré d'un autre nombre entier (les essais doivent figurer sur la copie).

   (b) En est-il toujours ainsi lorsqu'on choisit un nombre entier au départ de ce programme de calcul ? Justifier la réponse.
4. On souhaite obtenir 1 comme résultat. Quels nombres peut-on choisir au départ ?

Activités géométriques **12 points**

Exercice 1

L'unité de longueur est le centimètre. . ABC est un triangle tel que AB = 9 ; AC = 15 ; BC = 12.

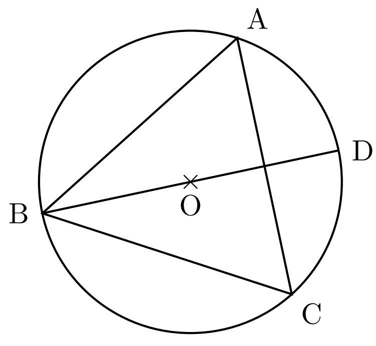
1. (a) Démontrer que ABC est rectangle en B.

   (b) Tracer en vraie grandeur le triangle ABC sur la copie.
2. E est le point du segment [AB] tel que AE = 3.
   F est le point du segment [AC] tel que AF = 5 .

   (a) Placer les points E et F sur la figure.

   (b) Démontrer que la droite (EF) est parallèle la droite (BC).
3. Calculer l'aire du triangle AEF.

Exercice 2



Sur la figure ci-contre,

- le point O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC,
- ABC est un triangle équilatéral,
- le point D est le point diamétralement opposé au point B sur ce cercle.

1. Quelle est la nature du triangle ABD ? Justifier.

2. Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ABD}$? Justifier.
3. On désigne par E l' image du point D par la translation de vecteur $\vec{OC}$.
   Démontrer que les droites (DC) et (OE) sont perpendiculaires.

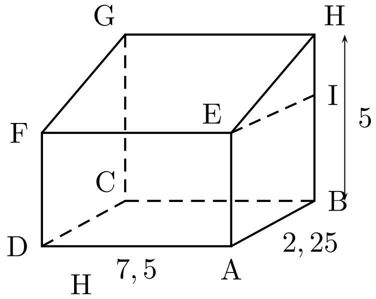
Problème **12 points**

Dans le jardin de sa nouvelle maison, M.Durand a construit une terrasse rectangulaire qu'il désire recouvrir d'un toit.

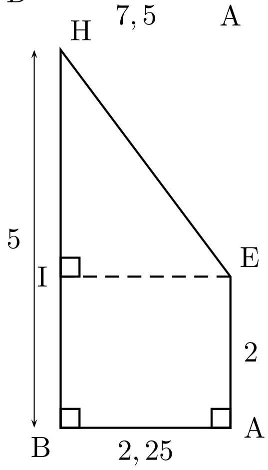
Pour cela, il réalise le croquis suivant où l'unité de longueur est le mètre.

– Le sol ABCD et le toit EFGH sont des rectangles.
– Le triangle HIE est rectangle en I.
– Le quadrilatère IEAB est un rectangle.
– La hauteur du sol au sommet du toit est HB.

On donne : AB = 2,25 ; AD = 7,5 ; HB = 5



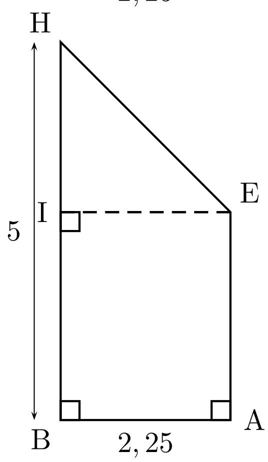
Partie 1



On suppose dans cette partie que AE = 2

1. Justifier que HI = 3 .
2. Démontrer que HE = 3,75.
3. Calculer au degré près la mesure de l'angle du toit avec la maison.

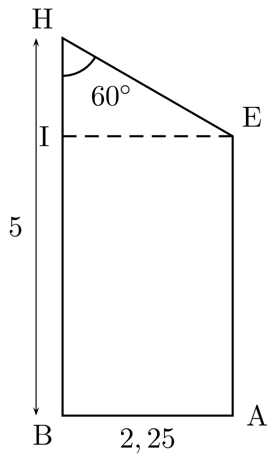
Partie 2



Dans cette partie, on suppose que $\widehat{IHE} = 45°$ et on désire déterminer AE.

1. Quelle est la nature du triangle HIE dans ce cas ? Justifier.
2. En déduire HI puis AE.

Partie 3

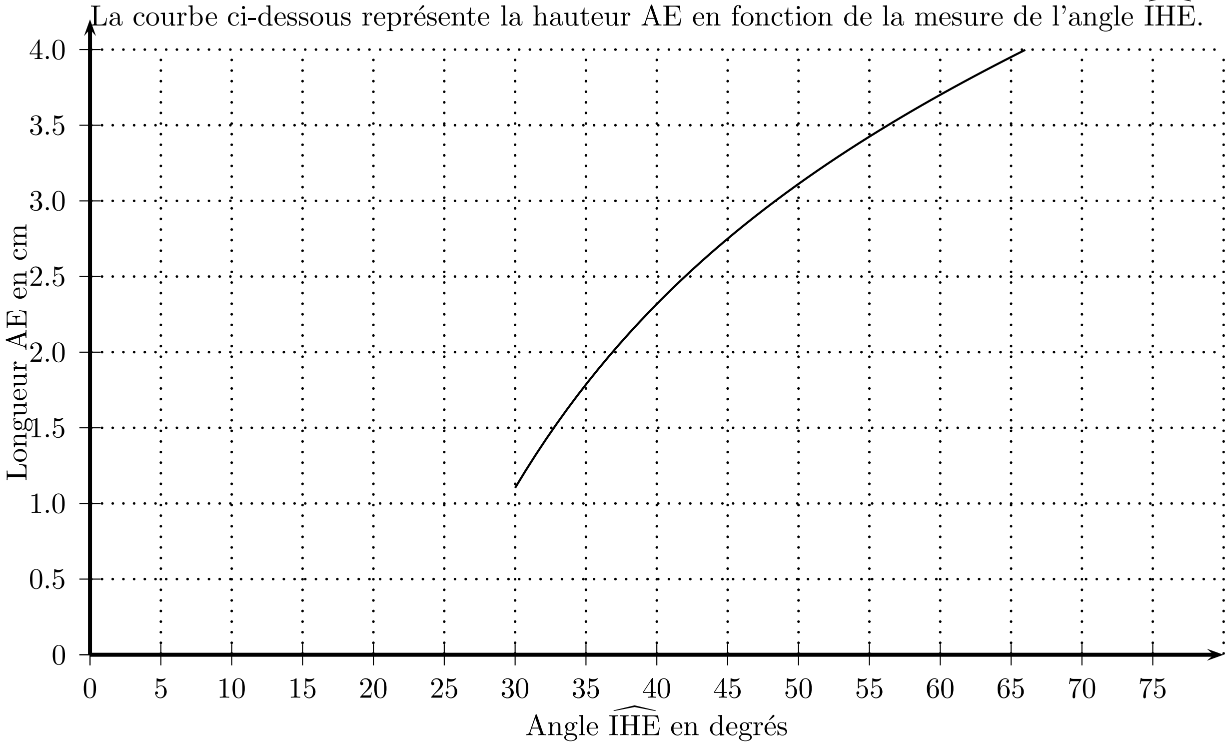


Dans cette partie, on suppose que $\widehat{\text{IHE}} = 60°$ et on désire déterminer AE.

1. Déterminer la valeur arrondie au cm de HI.
2. En déduire la valeur arrondie au cm de AE.

Partie 4

La courbe ci-dessous représente la hauteur AE en fonction de la mesure de l'angle $\widehat{\text{IHE}}$.



M. Durand souhaite que la hauteur AE soit comprise entre 3 m et 3,5 m.
En utilisant le graphique, donner une mesure possible de l'angle $\widehat{\text{IHE}}$.

AUTEURS

Groupe collège de l'IREM d'Aix-Marseille :

Alain Barichard (*Collège Pont de Vivaux, Marseille*) ; **Anne Crumière** (*IUFM Marseille*) ; **Marie-Renée Fleury** (*Institut de Mathématiques de Luminy*) ; **Nicolas Gouillon** (*Collège Gabriel Péri, Gardanne*) ; **Myriam Quatrini** (*Institut de Mathématiques de Luminy*) ; **Michel Tanner** (*Collège Monticelli, Marseille*)

PUBLIC VISE

Professeurs des collèges

RESUME

Cette brochure comporte deux parties. Dans la première partie, nous précisons l'objet qui nous occupe : la démonstration en classe de mathématiques. Pour ce faire, nous partons de la définition théorique de l'objet "démonstration" telle qu'elle nous est fournie par la logique mathématique. Dans la seconde partie, nous proposons des activités à mener en classe de mathématiques de différents niveaux du collège. Nous avons regroupé ces activités en fonction de trois entrées : "motiver la démonstration", "aspects logiques et formels" et "aspects langagiers", selon que telle ou telle activité nous semblait plus particulièrement adaptée pour faire travailler sur tel ou tel aspect de la démonstration.

MOTS CLEFS

Démonstration mathématique, Raisonnement, Logique mathématique, Squelette logique des démonstrations, Preuves, Rédaction des démonstrations..

Format	Nombre de pages	Prix	IREM
A4	115 pages	10 euros	N$^{\text{O}}$ 37

http ://www.irem.univ-mrs.fr